



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Clessius Silva

Análise assintótica e qualitativa de equações de evolução e
aplicações a modelos físicos

RECIFE

2015

Clessius Silva

Análise assintótica e qualitativa de equações de evolução e aplicações a
modelos físicos

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em
Matemática da Universidade Federal de Pernambuco
como requisito parcial para obtenção do título de Dou-
tor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Cuevas
Coorientador: Prof. Dr. Bruno de Andrade

RECIFE

2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586a Silva, Clessius
Análise assintótica e qualitativa de equações de evolução e aplicações a modelos físicos / Clessius Silva. – 2015.
161 f.: il., fig.

Orientador: Claudio Cuevas.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2015.
Inclui referências.

1. Análise funcional. 2. Equações de evolução. I. Cuevas, Claudio (orientador). II. Título.

515.7 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-40

CLESSIUS SILVA

ANÁLISE ASSINTÓTICA E QUALITATIVA DE EQUAÇÕES DE
EVOLUÇÃO E APLICAÇÕES A MODELOS FÍSICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 11/11/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos (Co-orientador)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Filipe Dantas dos Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

À minha família

Agradecimentos

Ao único Senhor da minha vida, Jesus, que me fez mais que vencedor. À Ele toda a honra.

À toda minha família, em especial à minha mãe Solange, aos meus irmãos Cledson e Emanuele, à minha vó Linda, à minha segunda mãe Jovanete, a Tereza, a Nélia e a Márcio (in memoriam), aos quais sempre serei grato.

À minha esposa e companheira Tarci, a quem muito amo e que me faz sorrir em momentos difíceis, além de sempre se mostrar disposta a me ajudar em tudo que preciso. E também à toda sua/nossa família.

Ao Grupo de Equações de Evolução e Aplicações do Departamento de Matemáticas e Estatística da Universidade de La Frontera, Temuco, Chile, pelo convite para participar do II Workshop de Ecuaciones de Evolución y Aplicaciones, em especial aos professores Mario Choquehuanca e ao professor Herme Soto por toda a hospitalidade. Também agradeço ao professor Herme Soto por sua disposição em colaborar com este trabalho.

Aos professores Claudio Cuevas e Bruno de Andrade, os quais são os idealizadores desse trabalho. À estes sou muito grato pelos diversos ensinamentos e pelo incentivo aos estudos. Esse trabalho é apenas o início de uma parceria que mantereí por toda a vida.

Aos professores do Grupo de Equações de Evolução da Universidade Federal de Sergipe por todas as discussões sobre Matemática, em especial a Filipe e Arlúcio pelos comentários e sugestões.

Aos professores Fábio Santos e Kalasas Vasconcelos da UFS, os quais deram o incentivo inicial aos meus estudos na Matemática. Também a todos os professores e mestres que foram canais de conhecimento para mim.

À ex-secretária da pós-graduação da UFPE, Tânia, por sua imensa gentileza.

Aos amigos e colegas, alunos da pós-graduação do Dmat-UFPE e professores do DM-UFRPE, como também a todos amigos que fizeram parte dessa caminhada, em especial a Badaró, Cris, Filipe Andrade e Thamires. Essas amizades fizeram essa caminhada ser mais agradável e um pouco menos árdua.

Muito obrigado.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES e do CNPQ.

Resumo

Utilizando ferramentas de Análise Funcional e Topologia, estudamos propriedades de periodicidade assintótica de soluções brandas para certas equações de evolução. Mais especificamente, desenvolvemos uma teoria de existência e unicidade de soluções brandas pseudo S-assintoticamente periódicas para certas equações de evolução hiperbólicas, como também, para uma versão abstrata da equação de onda amortecida, a qual modela as vibrações de estruturas flexíveis que possuem material de amortecimento interno e força externa. O problema de periodicidade assintótica é hoje um dos assuntos mais ativos na teoria de comportamento de solução para equações diferenciais. Observamos que os sistemas concretos normalmente possuem variações internas ou são submetidos a perturbações externas que não são periódicas. Em muitas situações reais, podemos supor que estas perturbações são aproximadamente periódicas em um sentido amplo. Surgiu recentemente a noção de periodicidade S-assintótica, que é uma generalização da clássica periodicidade assintótica. Esta nova noção tem interessantes aplicações em vários ramos das equações diferenciais, e isso tem motivado considerável interesse no tópico. Em adição, um novo espaço de funções S-assintoticamente periódicas foi introduzido, ele é chamado o espaço das funções pseudo S-assintoticamente periódicas. A metodologia desenvolvida neste trabalho será extremamente útil para modelos físicos concretos. Para exibir a aplicabilidade de nossos métodos, mostramos aplicações concretas de nossos métodos a estruturas flexíveis, problemas do calor, equações fracionárias e viscoelasticidade. Além disso, devido a sua importância real, damos uma atenção especial à teoria de viscoelasticidade. Neste caso, estudamos a existência, unicidade, regularidade, possível continuação para um intervalo de existência maximal e critério de explosão de soluções brandas locais de uma família de equações de Volterra provenientes da teoria viscoelástica.

Palavras-chave: Periodicidade assintótica. Soluções brandas. Equações de evolução. Estruturas flexíveis. Viscoelasticidade.

Abstract

Using tools of Functional Analysis and Topology we study properties of asymptotic periodicity of mild solutions for some evolution. More specifically, we developed a theory of existence and uniqueness of pseudo S-asymptotically periodic mild solutions for some hyperbolic evolution equations, as also, for an abstract version of the damped wave equation which model the vibrations of flexible structures possessing internal material damping and external force. The asymptotic periodicity problem is one of the most active subjects in behavior theory of solutions of differential equations at present. We observe that real systems usually exhibit internal variations or are submitted to external perturbations which are not periodic. In many real situations we can assume that these variations are approximately periodic in a broad sense. It has recently emerged the notion of S-asymptotic periodicity which is a generalization of the classical asymptotic periodicity. This new notion has interesting applications in several branches of differential equations. This has motivated considerable interest in the topic. In addition, a new space of S-asymptotically periodic functions was introduced. It is called the space of pseudo S-asymptotically periodic functions. The methodology developed in this work is extremely useful for concrete physical models. To show the applicability of our methods, we show concrete applications of our methods to flexible structures, heat problems, fractional equations and viscoelasticity. In addition, due to its real importance, we give special attention to viscoelasticity theory. In this case, we studied the existence, uniqueness, regularity, possible continuation to a maximal interval of existence and blow-up criterion of local mild solutions of a family of nonlinear Volterra equations coming from the theory of viscoelasticity.

Keywords: Asymptotic periodicity. Mild solutions. Evolution equations. Flexible structures. Viscoelasticity.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Gráfico da função $f(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2}t)$.	20
Figura 2	– Caminho de Hankel $Ha = Ha(r, \theta)$	27
Figura 3	– Setor $S_{a,\phi}$	28
Figura 4	– Setor $\Sigma_{a,\phi}$	28
Figura 5	– Setor Σ_{η_0} .	127
Figura 6	– Mapa $\lambda^{\alpha+1}$.	128
Figura 7	– Região D_n	129

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	18
2.1	FUNÇÕES PERIÓDICAS E SUAS GENERALIZAÇÕES	18
2.1.1	Funções S-assintoticamente ω-periódicas	20
2.1.2	Funções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas	21
2.1.3	O espaço de funções PSAPω(R;X)	23
2.2	OPERADORES SETORIAIS E ANALITICIDADE	26
2.3	POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS	30
2.4	SEMIGRUPOS HIPERBÓLICOS E ESPAÇOS INTERMEDIÁRIOS	32
2.5	RESOLVENTES	33
2.6	VISCOELASTICIDADE LINEAR	38
2.7	MÉTODOS TOPOLÓGICOS	40
3	PERIODICIDADE ASSINTÓTICA PARA EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO HIPERBÓLICAS	44
3.1	INTRODUÇÃO	44
3.2	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PSEUDO S-ASSINTOTICAMENTE ω -PERIÓDICAS	44
3.2.1	O caso linear	45
3.2.2	O caso semilinear	48
3.3	SOLUÇÕES BRANDAS PSAP ω EM ESPAÇOS INTERMEDIÁRIOS	58
3.4	APLICAÇÕES E MÉTODOS	61

4	PERIODICIDADE ASSINTÓTICA PARA SISTEMAS DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS	66
4.1	INTRODUÇÃO	66
4.2	FAMÍLIAS REGULARIZADAS	66
4.2.1	Regularidade da convolução	68
4.3	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PSEUDO S-ASSINTOTICAMENTE ω -PERIÓDICAS	69
4.3.1	O caso linear	70
4.3.2	O caso semilinear	71
4.4	APLICAÇÕES E MÉTODOS	93
4.4.1	Estruturas flexíveis	94
4.4.2	Um problema do calor unidimensional	99
4.4.3	Equações fracionárias	106
4.4.4	Resultados adicionais sobre condução de calor	114
4.4.5	Equações integrais da teoria viscoelástica	118
5	SOBRE UMA FAMÍLIA DE EQUAÇÕES DE VOLTERRA DA TEORIA VISCOELÁSTICA	125
5.1	INTRODUÇÃO	125
5.2	SOBRE A FAMÍLIA DE MITTAG-LEFFLER ASSOCIADA AO OPERADOR DE STOKES	126
5.3	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES BRANDAS	137
6	CONCLUSÃO	150
	REFERÊNCIAS	152

1 Introdução

No início do século 20, o matemático dinamarquês Harald Bohr introduziu o conceito de função quase periódica, tal conceito generaliza de maneira natural as funções periódicas. A teoria de Bohr rapidamente atraiu a atenção de muitos matemáticos famosos da época, entre eles A. S. Besicovitch, S. Bochner, J. von Neumann, V. V. Stepanov, H. Weyl, N. Wiener e M. Fréchet. A noção de quase periodicidade desempenha um papel crucial em vários campos, incluindo a análise harmônica, física, sistemas dinâmicos, etc. Atualmente, existem na literatura vários conceitos que representam a ideia de função aproximadamente periódica, por exemplo: as funções assintoticamente quase periódicas, definidas em 1941 por M. Fréchet em (1, 2); as funções assintoticamente periódicas, definidas em 1949 por N.G. De Bruijn em (3); e as funções quase automórficas, definidas em 1962 por Bochner em (4).

O problema de periodicidade assintótica é hoje um dos assuntos mais ativos na teoria de comportamento de solução para equações diferenciais. Observamos que os sistemas concretos normalmente são submetidos a perturbações externas que não são periódicas. Em muitas situações reais, podemos supor que estas perturbações são aproximadamente periódicas em um sentido amplo. Surgiu recentemente a noção de S-assintoticamente ω -periodicidade em (5), que é uma generalização da clássica ω -periodicidade assintótica. Esta nova noção tem interessantes aplicações em vários ramos das equações diferenciais, e isso tem motivado considerável interesse no tópico (5, 6, 7, 8, 9, 10, 11). Em adição, em (12) um novo espaço de funções S-assintoticamente ω -periódicas foi introduzido, ele é chamado o espaço das funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas ($PSAP_\omega$ abreviado). Naquele trabalho propriedades qualitativas deste tipo de funções, e também foi discutida a existência de soluções brandas pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para equações funcionais neutras abstratas. Algumas aplicações envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais com retardo foram apresentadas lá, entre outras coisas. Em (13) os autores estudaram a existência e a unicidade de soluções (brandas) $PSAP_\omega$ para uma classe de equações diferenciais fracionárias abstratas, eles também provaram propriedades interessantes sobre esse tipo de funções, muitas dessas são fundamentais em nossos métodos.

Nesta tese, estamos interessados em estudar propriedades de periodicidade assintótica de certas equações de evolução definidas sobre espaços vetoriais abstratos de dimensão infinita, bem como suas aplicações a modelos concretos como estruturas flexíveis, problemas do calor, equações fracionárias e viscoelasticidade; além disso, devido à sua importância real, daremos uma atenção especial à teoria viscoelástica, estudando a existência, unicidade, regularidade e continuação de soluções para uma classe de equações

de Volterra provenientes desta teoria. A metodologia desenvolvida neste trabalho será extremamente útil para modelos físicos concretos.

Esta tese está dividida em quatro capítulos. O Capítulo 1, intitulado “Preliminares”, possui o objetivo de tornar o texto o mais autossuficiente possível. Nele algumas definições e propriedades dos elementos envolvidos neste trabalho serão lembrados. Por exemplo, faremos uma revisão das generalizações de funções periódicas. Revisaremos também alguns ingredientes clássicos da Análise Funcional, tais como operadores setoriais, potências fracionárias de operadores, espaços intermediários e semigrupos hiperbólicos. Recordaremos objetos importantes da teoria de viscoelasticidade. Por fim, na última seção deste capítulo enunciaremos diversos teoremas que serão usados de maneira chave ao longo do texto.

No Capítulo 2, nomeado “Periodicidade assintótica para equações de evolução hiperbólicas”, estudaremos condições suficientes para a existência e a unicidade de uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica para a seguinte equação de evolução semilinear:

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

em que o operador $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é o gerador de um semigrupo hiperbólico sobre X e f é uma função contínua adequada. O desenvolvimento desta teoria está diretamente conectado com a teoria de semigrupos. Um aspecto fundamental deste estudo está em desenvolver um resultado de composição eficiente para este tipo de funções e, portanto, com a ajuda da teoria de semigrupos hiperbólicos e de teoremas de ponto fixo adequados, obter soluções $PSAP_\omega$. Recentemente, em (14, 15) foi estudada a existência de soluções (brandas) quase automórficas para a equação (1.1).

Equações de evolução do tipo hiperbólico é um campo ativo de pesquisa atual. Equações hiperbólicas atraem o interesse de matemáticos e físicos em vista de suas aplicações a modelos reais (16, 17). Observamos que muitos autores têm considerado equações de evolução lineares hiperbólicas no âmbito espaços de Hilbert (18, 19, 20, 21, 22, 23, 24).

Observamos que a existência de um semigrupo hiperbólico sobre um espaço de Banach X garante uma interessante decomposição algébrica do espaço vetorial. De fato, nossos resultados de existência de solução, como também muitas de nossas estimativas, dependem profundamente de tal decomposição (ver Teorema 3.2).

Os resultados desse capítulo estão contidos no artigo (25).

No Capítulo 3, chamado “Periodicidade assintótica para sistemas de estruturas flexíveis”, desenvolveremos uma teoria de existência de soluções brandas pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para uma versão abstrata da equação de onda amortecida

$$u'' + \alpha u''' = \beta \Delta u + \gamma \Delta u' + f,$$

a qual modela as vibrações de estruturas flexíveis que possuem material de amortecimento interno e força externa f . Mostraremos aplicações concretas de nossos métodos para estruturas flexíveis, condução de calor, equações fracionárias e viscoelasticidade.

O interesse em compreender como as estruturas flexíveis se comportam em satélites ou em veículos espaciais é uma das motivações de estudar tal problema. Em (26), que é um relatório técnico da NASA, são disseminadas informações práticas para os engenheiros que trabalhavam na teoria de controle para tais tipos de veículos.

Durante as últimas décadas, o uso de sistemas estruturais flexíveis tem aumentado em importância (27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34). O estudo de uma estrutura aeroespacial flexível é um problema da teoria de sistemas dinâmicos regido por equações diferenciais parciais. Nós consideramos aqui um modelo matemático de uma estrutura espacial flexível como um painel retangular uniforme fino, por exemplo, um conjunto de células solares ou um veículo espacial com acessórios flexíveis. Este problema é motivado tanto por considerações da engenharia quanto da matemática.

Por (35), a dinâmica de vibrações lineares de estruturas elásticas é regida pela equação de onda $u''(x, t) = c^2 \Delta u(x, t)$, em algum domínio adequado, em que Δ denota o Laplaciano tomado na variável espacial x e $c > 0$ é a constante velocidade de onda. Esta equação está formulada com base na lei de Hook, em que o estresse σ é simplesmente proporcional à tensão e , que significa $\sigma = Ee$, E sendo o módulo de Young da estrutura elástica. Mas a dinâmica das vibrações elásticas de estruturas flexíveis é, na prática, não-linear. Ainda por (35), um modelo linear mais realista das vibrações não-lineares de estrutura elástica, em que o estresse σ não é proporcional à tensão e é descrito pela relação constitutiva $\sigma + \lambda \sigma' = E(e + \mu e')$, em que λ e μ são constantes pequenas satisfazendo $0 < \lambda < \mu$. Por (29), a dinâmica de vibrações das estruturas elásticas são regidas mais precisamente pela equação diferencial de terceira ordem

$$\lambda u'''(t, x) + u''(t, x) = c^2(\Delta u(t, x) + \mu \Delta u'(t, x)),$$

do que pela equação de onda simples. Em relação às propriedades qualitativas, Bose e Gorain (29) e Gorain (35) estudaram estabilização e obtiveram a taxa de decaimento exponencial da energia explícita para a solução do problema matemático acima sujeito a condições de fronteira mistas.

Observamos que sistemas reais usualmente apresentam variações internas ou são submetidos a perturbações externas. Em muitas situações nós podemos assumir que estas variações são aproximadamente periódicas em um sentido amplo. Nosso propósito é analisar a periodicidade assintótica da equação

$$\lambda u'''(t, x) + u''(t, x) - c^2(\Delta u(t, x) + \mu \Delta u'(t, x)) = g(t, u(t, x)), \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

A motivação para incorporar g como uma perturbação de entrada na equação diferencial regente origina-se do fato de serem muito pequenos os valores que estas assumem, e estão

sempre presentes em materiais reais, desde que o sistema vibre (36). Recentemente, de Andrade e Lizama (37) estudaram a existência de soluções (brandas) assintoticamente quase periódicas para a equação (1.2). Agarwal et al. (38) trataram do problema de existência de soluções (brandas) assintoticamente periódicas da equação (1.2). Andrade et al. (39) estudaram a estrutura topológica do conjunto das soluções brandas da equação (1.2), mais especificamente, os autores mostraram que o conjunto das soluções brandas deste problema, sobre $[0, 1]$, é compacto e conexo no espaço das funções contínuas, esta propriedade é conhecida na literatura como a propriedade de Kneser. Observamos que em (40) os autores que o operador Δ é o gerador de uma família $(\lambda, c^2, c^2\mu)$ -regularizada em L^2 (ver Definição 4.1).

Consideremos a seguinte equação abstrata

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

em que A é um operador linear fechado agindo sobre um espaço de Banach X , $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ e f é uma função com valores em X . Observamos que em geral não podemos esperar que (1.3) esteja bem-posta (41). Também é conhecido que, a fim de analisar a boa-colocação, uma abordagem direta leva a melhores resultados do que os obtidos por uma redução a uma equação de primeira ordem (42). Gostaríamos de salientar que, em geral, a desvantagem prática da última abordagem é que encontrar um espaço ideal é geralmente difícil, e a estrutura do espaço de fase pode ser complicado e inconveniente para aplicações computacionais.

A regularidade maximal em espaços de Hölder para a equação (1.3) foi recentemente caracterizada por Cuevas e Lizama (43). Os métodos para se obter este estudo estão contidos em (44). Poblete e Pozo (45) caracterizaram a regularidade maximal de (1.3) em espaços de Besov. Por outro lado, Fernandez, Lizama e Poblete (40) caracterizaram a L^p -regularidade maximal de (1.3). Para obter esta caracterização, os autores introduziram a noção de famílias (α, β, γ) -regularizadas e eles usaram a técnica de multiplicador de Fourier com valores em operadores em espaços UMD (este assunto é estudado em (46, Capítulo 2)). Em (47), os autores estudaram regularidade de soluções brandas e fortes para (1.3) em um espaço de Hilbert com condições iniciais apropriadas, um estudo deste tipo também é feito em (48).

Nos concentraremos no estudo de condições suficientes para a existência e unicidade de uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica para equações semilineares abstratas da forma

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq 0.$$

Isto é conseguido por um método misto, combinando ferramentas de certas famílias fortemente contínuas da teoria de operadores com a teoria de ponto fixo. Os resultados deste capítulo estão contidos no artigo (49).

No Capítulo 4, estaremos interessados na teoria de existência, unicidade, regularidade e continuação de soluções para uma família de equações de Volterra provenientes da teoria viscoelástica.

Viscoelasticidade é a propriedade dos materiais que apresentem características viscosas e elásticas. A viscoelasticidade pode ser estabelecida a partir de modelos mecânicos. Estes modelos geram relações constitutivas que são equações integrais. Efeitos dependentes do tempo indicam que o comportamento tensão-deformação de um material mudará com o tempo. Um material viscoelástico irá retornar à sua forma original depois que toda força de deformação for removida (isto é, ele irá mostrar uma resposta elástica), mesmo que isso leve um tempo para acontecer (ou seja, terá uma componente viscosa para a resposta). Os materiais elásticos armazenam toda a energia proveniente da deformação. No entanto, materiais viscoelásticos não armazenam toda a energia da deformação, de fato eles dissipam uma parte dessa energia. A habilidade de dissipar energia é uma das principais razões para o uso de materiais viscoelásticos para o isolamento de vibração, amortecimento de ruído e absorção de choque (36, 50, 51, 52).

O estudo do comportamento viscoelástico de um material é de interesse de muitas áreas. Os materiais utilizados para aplicações estruturais de interesse prático podem apresentar um comportamento viscoelástico que influencie profundamente o desempenho desse material. Os materiais utilizados em aplicações de engenharia podem apresentar um comportamento viscoelástico como um efeito colateral não intencional. Como também, pode-se deliberadamente fazer uso da viscoelasticidade de certos materiais no processo de construção para alcançar um objetivo específico. Viscoelasticidade também é de interesse em alguns ramos da ciência dos materiais, metalurgia e física do estado sólido. Além disso, a matemática proveniente da teoria de viscoelasticidade gera bastante interesse dentro da comunidade matemática.

O comportamento viscoelástico foi estudado por figuras eminentes, tais como Boltzmann, Coroilis, Gauss e Maxwell. A teoria de equações integrais e de análise funcional desenvolvida por Volterra (53) fornece grande parte da base matemática do comportamento viscoelástico.

O campo velocidade $v(t, x)$ de um fluido viscoelástico incompressível isotrópico e homogêneo que ocupa uma região Ω , sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado suave, é governado pelas equações

$$\begin{cases} v_t(t, x) = \int_0^t da(\tau) \Delta v(t - \tau, x) - \nabla p(t, x) + h(t, x), & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot v(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ v(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

utilizando as condições de contorno antiderrapantes; aqui $p(t, x)$ denota a pressão hidros-

tática no fluido, o núcleo $da(t)$ é o módulo de cisalhamento e $h(t, x)$ é um campo força externo ao corpo, por exemplo, a gravidade (54, 55). Lembramos que materiais lineares isotrópicos e homogêneos são descritos por meio de duas funções materiais, o módulo de cisalhamento da e o módulo de compressão db . Se o material é além disso síncrono ou incompressível, apenas o módulo de cisalhamento é necessário. O caso $a(t) \equiv a_0$ para $t > 0$ corresponde a um fluido Newtoniano com viscosidade $a_0 > 0$, e (1.4) torna-se então o bem conhecido sistema linear de Navier-Stokes. Já o caso $a(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ para $t > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$ corresponde a um material tipo-potência (54, 55).

Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado suave, vamos considerar a seguinte família de equações de Volterra não-lineares

$$\begin{cases} u_t = \int_0^t dg_\alpha(s) \Delta u(t-s, x) - \nabla p + h - (u \cdot \nabla)u, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

em que p e h são funções dadas, $0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$ e $g_\alpha(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, $t > 0$. Note que o caso $\alpha = 0$ corresponde ao fluido Newtoniano com viscosidade 1, e o problema (1.5) torna-se as equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla p + h - (u \cdot \nabla)u, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

Por outro lado, quando $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, dg_α denota o módulo de cisalhamento de um material Tipo-Potência.

Reologia, definida como a *ciência da deformação e do fluxo*, é um importante campo de estudo científico (56). Um conhecimento do assunto é essencial para cientistas empregados em muitas indústrias, incluindo as que envolvem plásticos, tintas, detergentes, óleos, etc. Para a indústria do petróleo, conhecer o comportamento reológico dos diversos tipos de fluidos utilizados nas etapas de perfuração é fundamental. De fato, propriedades como viscosidade, plasticidade, elasticidade e o escoamento da matéria são obtidas por uma análise reológica do fluido, isto é, os parâmetros reológicos de um fluido definem o comportamento de seu fluxo. Tais parâmetros são determinados considerando um modelo matemático específico para cada fluido, o qual influencia diretamente no cálculo das perdas de carga na tubulação e velocidade de transporte dos cascalhos resultantes de perfurações do solo feitas para a extração do petróleo. Um dos modelos matemáticos mais aceitos pela indústria do petróleo para fluidos de perfuração é o modelo de potência (57).

Por todo o texto, apresentaremos várias observações e exemplos, levando a uma melhor compreensão do trabalho. Realmente, um realce deste trabalho está em fornecer uma grande quantidade e variedade de exemplos com especial importância de natureza aplicada na literatura que vão favoravelmente ajudar a construir uma intuição e lançar uma melhor compreensão a respeito do poder das nossas ferramentas e resultados abstratos. Especificamente, como já salientamos, nós lidamos com estruturas flexíveis, condução de calor, equações fracionárias e equações integrais provenientes da viscoelasticidade.

2 Preliminares

Apresentaremos neste capítulo notações, definições e fatos relevantes que serão utilizados ao longo deste trabalho. Pretendemos com isso tornar o texto o mais auto-suficiente possível. Entretanto, por motivo de brevidade não faremos detalhes das demonstrações de alguns resultados aqui apresentados.

Durante o texto, $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ denotam espaços de Banach. Com o intuito de tornar o texto mais límpido, em alguns momentos usaremos apenas $\|\cdot\|$ para denotar a norma $\|\cdot\|_X$ ou a norma $\|\cdot\|_Y$. Pedimos que o leitor fique atento para que não haja confusão. Para $r > 0$, a notação $B_r(X)$ representa a bola fechada $\{x \in X : \|x\|_X \leq r\}$.

A notação $\mathcal{B}(X, Y)$ representa o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y munido com a $\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} := \sup\{\|Tx\|_Y; x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$, e abreviamos para $\mathcal{B}(X)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X)}$ quando $X = Y$. Se T pertence a $\mathcal{B}(X)$, T^n denota a n -ésima iteração de T para cada inteiro não-negativo n .

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo (possivelmente ilimitado), $C_b(I; X)$ denota o espaço de Banach formado pelas funções contínuas e limitadas de I em X equipado com a norma do supremo. Definimos $C_0([0, \infty); X)$ como o subespaço de todas as funções f em $C_b([0, \infty); X)$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t)\|_X = 0$. Além disso, se $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, escrevemos $C_b(I)$ e $C_0(\mathbb{R}^+)$ ao invés de $C_b(I, X)$ e $C_0(\mathbb{R}^+; X)$, respectivamente. $C^k(\mathbb{R}^+; X)$ denota o espaço das funções k -vezes continuamente diferenciáveis de $\mathbb{R}^+$ em X . Denotamos o espaço das funções localmente integráveis por L_{loc}^1 . $C^\beta(I; X)$, $\beta \in (0, 1)$, denota o espaço de todas as funções contínuas e limitadas $u : I \rightarrow X$ tais que $\|u\|_\beta = \sup \left\{ \frac{\|u(s) - u(t)\|}{|s - t|^\beta} : s, t \in I, s \neq t \right\} < +\infty$. Definimos $\|u\|_{C^\beta} := \|u\|_\infty + \|u\|_\beta$, e observamos que $C^\beta(I; X)$ é um espaço de Banach se munido com a norma $\|\cdot\|_{C^\beta}$, esse conjunto é chamado o espaço das funções Hölder contínuas.

Seja A um operador linear fechado definido sobre X . Denotamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente de A , e por $\sigma(A)$ o espectro de A (isto é, o complemento de $\rho(A)$ no plano complexo). $D(A)$ denota o domínio de A , e consideramos $D(A)$ como um espaço de Banach munido com a norma do gráfico, $\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_X$.

2.1 Funções periódicas e suas generalizações

O propósito desta seção é relembrar as definições e enunciar algumas das propriedades básicas da teoria de periodicidade que serão essenciais no decorrer deste trabalho. Começaremos definindo o espaço das funções periódicas.

Definição 2.1. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada *periódica* se existe uma

constante $\omega > 0$ tal que

$$f(t + \omega) = f(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, dizemos que ω é o período de f e dizemos que f é uma função ω periódica.

Denotamos por $P_\omega(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ que são ω -periódicas. Não é difícil verificar que $P_\omega(X)$ é um subespaço de $C_b(\mathbb{R}; X)$ e que $P_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme, $\|\cdot\|_\infty$, é um espaço de Banach.

A seguir, daremos o conceito de funções quase periódicas. Esse conceito é devido à H. Bohr.

Definição 2.2. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada *quase periódica*, se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $l(\varepsilon) > 0$ tal que, todo intervalo de comprimento $l(\varepsilon)$ contem um número τ com a propriedade

$$\|f(t + \tau) - f(t)\| \leq \varepsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O número τ é chamado de ε -período de f . O conjunto de todas as funções quase periódicas $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ será denotado por $AP(X)$.

A teoria das funções quase periódicas foi desenvolvida no período 1924-1926 pelo matemático dinamarquês Harald Bohr. Ele escreveu três artigos bastante longos (58, 59, 60), ambos com o mesmo título, “Zur theorie der Fast Periodische Funktionen”. Harald Bohr também publicou o livro (61) que sintetizou o conhecimento básico sobre o assunto, pelo menos para o período inicial de seu desenvolvimento. A teoria de Bohr rapidamente atraiu a atenção de muitos matemáticos famosos da época, entre eles A. S. Besicovitch, S. Bochner, J. von Neumann, V. V. Stepanov, H. Weyl, N. Wiener e M. Fréchet. A noção de quase periodicidade, que generaliza o conceito de periodicidade, desempenha um papel crucial em vários campos, incluindo a análise harmônica, física, sistemas dinâmicos, etc.

Observamos que $AP(X)$ é um subespaço de $C_b([0, \infty); X)$. Além disso, $AP(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é um espaço de Banach (62, Seção 3.5). É fácil observar que toda função periódica é quase periódica, porém a recíproca não é verdadeira. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela regra

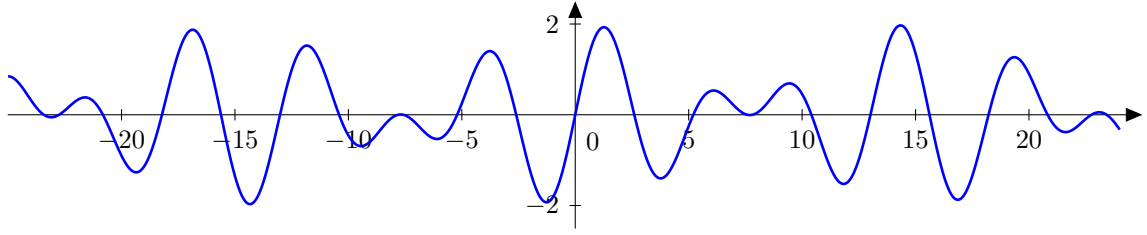
$$f(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2}t),$$

é uma função quase periódica que não é periódica, ver Figura 1.

Em geral, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida por

$$f(t) = ae^{it} + be^{i\sqrt{2}t}, \quad a, b \in X, a \neq 0, b \neq 0,$$

é uma função quase periódica que não é periódica.

Figura 1 – Gráfico da função $f(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2}t)$.

Fonte: Produzido pelo autor.

Introduziremos agora a noção de quase periodicidade assintótica. Este conceito que generaliza o conjunto das funções quase periódicas é devido M. Fréchet (1, 2). Denotaremos por $C_0([0, \infty); X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $h : [0, \infty) \rightarrow X$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$. É um fato bem conhecido que $C_0([0, \infty); X)$ equipado com a norma do supremo é espaço de Banach.

Definição 2.3. Uma função contínua $f : [0, \infty) \rightarrow X$ é chamada *assintoticamente quase periódica* se admite uma decomposição $f = g + h$, em que $g \in AP(X)$ e $h \in C_0([0, \infty); X)$. Representaremos por $AAP(X)$ o conjunto das funções assintoticamente quase periódicas.

Em (63, Proposição 5.1.1) é mostrado que

$$AAP(X) = AP(X) \oplus C_0([0, \infty), X).$$

Além disso, por (63, Teorema 5.1.1), $AAP(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é um espaço de Banach. Um fato conhecido é que as funções assintoticamente quase periódicas são limitadas e uniformemente contínuas (63, Proposição 5.1.2).

De maneira análoga, para $\omega > 0$, o espaço das funções *assintoticamente ω -periódicas* é definido por

$$AP_\omega(X) := P_\omega(X) \oplus C_0([0, \infty), X).$$

O espaço $AP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme, $\|\cdot\|_\infty$, é um espaço de Banach. Além disso, $AP_\omega(X)$ é um subespaço próprio de $AAP(X)$. Funções assintoticamente periódicas apareceram pela primeira vez no artigo de N. G. de Bruijn (3).

Denotemos por $S_\omega(X)$ o subespaço de $C_b([0, \infty); X)$ formado por todas as funções $u(\cdot)$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t + n\omega) - u(t)) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$, munido com a norma da convergência uniforme. É fácil ver que $S_\omega(X)$ é um subespaço fechado de $C_b([0, \infty); X)$. Se $u \in S_\omega(\mathbb{R})$ segue de (5) que u é assintoticamente ω -periódica.

2.1.1 Funções S-assintoticamente ω -periódicas

O conceito de função S-assintoticamente ω -periódica com valores num espaço de Banach X é muito recente. Nos últimos anos, alguns autores têm estudado as propriedades

e as aplicações dessas funções (5, 6, 7, 9, 64). O seguinte conceito foi introduzido por Henríquez, Pierri e Táboas (5).

Definição 2.4. Uma função $f \in C_b(\mathbb{R}^+; X)$ é chamada S-assintoticamente ω -periódica se $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0$. Nesse caso, dizemos que ω é um período assintótico de f .

Usamos a notação $SAP_\omega(X)$ para representar o subespaço de $C_b(\mathbb{R}^+; X)$ formado por todas as funções S-assintoticamente ω -periódica. Observamos que o espaço $SAP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach. É claro que toda função assintoticamente ω -periódica é uma função S-assintoticamente ω -periódica. No entanto, a recíproca não é verificada (64, 65). Uma diferença importante entre esses dois tipos de funções é que a imagem de uma função assintoticamente ω -periódica é um conjunto relativamente compacto, enquanto a imagem de uma função S-assintoticamente ω -periódica é apenas um conjunto limitado.

Definição 2.5. Dizemos que uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow Y$ é uniformemente S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , se para todo subconjunto limitado K de X , o conjunto $\{f(t, x) : t \geq 0, x \in K\}$ for limitado, e para cada $\varepsilon > 0$ existir $T(K, \varepsilon) \geq 0$ tal que, $\|f(t, x) - f(t + \omega, x)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq T(K, \varepsilon)$ e todo $x \in K$.

Definição 2.6. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow Y$ é chamada assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X se para todo $\varepsilon > 0$ e todo conjunto limitado $K \subseteq X$, existirem constantes $T = T_{\varepsilon, K}$ e $\delta = \delta_{\varepsilon, K} > 0$ tais que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq T$ e $x, y \in K$ com $\|x - y\| < \delta$.

Lema 2.7. (5) *Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow Y$ uma função uniformemente S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X . Se $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ for uma função S-assintoticamente ω -periódica, então a função de Nemytskii $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow Y$ definida por $F(t) = f(t, u(t))$ será S-assintoticamente ω -periódica.*

2.1.2 Funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas

Começamos com alguns conceitos e notações.

Definição 2.8. (12) Uma função $f \in C_b([0, \infty); X)$ é chamada pseudo S-assintoticamente periódica, se existir $\omega > 0$ tal que,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h \|f(s + \omega) - f(s)\|_X ds = 0. \quad (2.1)$$

Nesse caso, dizemos que f é pseudo S-assintoticamente ω -periódica.

Usamos a notação $PSAP_\omega(X)$ para representar o subespaço de $C_b([0, \infty); X)$ formado por todas as funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas. Observamos que $PSAP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach. Além disso, em (12, Proposição 2.1) foi mostrado que

$$AP_\omega(X) \hookrightarrow SAP_\omega(X) \hookrightarrow PSAP_\omega(X), \text{ com } PSAP_\omega(X) \neq SAP_\omega(X).$$

Observação 2.9. (13) Observamos que $u \in PSAP_\omega(X)$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon = \{t \in [0, \infty) : \|u(t + \omega) - u(t)\|_X \geq \varepsilon\}$ for um conjunto ergódico. Lembramos que um conjunto mensurável $C \subseteq [0, \infty)$ é um conjunto ergódico se $\frac{\lambda(C \cap [0, t])}{t} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, em que λ denota a medida de Lebesgue.

Definição 2.10. (13) Dizemos que uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , se, para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in K} \|f(s + \omega, x) - f(s, x)\|_Y ds = 0. \quad (2.2)$$

Observação 2.11. (13) Para $\varepsilon > 0$ e $x \in K$, definimos $C_{\varepsilon, x} = \{t \in [0, \infty) : \|f(t + \omega, x) - f(t, x)\|_Y \geq \varepsilon\}$. Então (2.2) é equivalente à

$$\frac{\lambda\left(\bigcup_{x \in K} C_{\varepsilon, x} \cap [0, t]\right)}{t} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Definição 2.12. (13) Uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ é chamada assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , se, para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$, existir $T_K > 0$ de forma que o conjunto $\{f(t, x) : t \geq T_K, x \in K\}$ seja limitado.

É bem conhecido que o estudo da composição de duas funções com propriedades especiais é básico e importante para investigações de comportamento assintótico e periódico. Começamos com o seguinte resultado na teoria de funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas.

Lema 2.13. (13)) *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X . Se $u : [0, \infty) \rightarrow X$ for uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ será pseudo S-assintoticamente ω -periódica.*

Corolário 2.14. (13)) *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X que satisfaz a seguinte condição:*

($\mathcal{C}_{loc}$) Para cada $\sigma \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e quaisquer $x, y \in B_\sigma(X)$ temos

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_Y \leq L_f(\sigma)\|x - y\|_X,$$

em que $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

Se $u : [0, \infty) \rightarrow X$ for uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ será pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Lema 2.15. (13) Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uma função uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz a condição:

(C1) Para quaisquer $u, v \in C_b([0, \infty); X)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds = 0$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_Y ds = 0$.

Se $u : [0, \infty) \rightarrow X$ for uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ será pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

2.1.3 O espaço de funções $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$

Nesta seção introduziremos o conceito de função pseudo S -assintoticamente ω -periódica cujo domínio é $\mathbb{R}$. Para conveniência do leitor, enunciaremos e demonstraremos algumas propriedades muito similares à apresentadas na Seção 2.1.2.

Definição 2.16. Uma função $f \in C_b(\mathbb{R}; X)$ é chamada pseudo S -assintoticamente periódica, se existir $\omega > 0$ tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|f(s + \omega) - f(s)\| ds = 0.$$

Neste caso, dizemos que f é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Usamos a notação $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ para representar o subespaço de $C_b(\mathbb{R}; X)$ formado por todas as funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas. Observamos que $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ munido com a norma da convergência uniforme, $\|\cdot\|_\infty$, é um espaço de Banach.

Definição 2.17. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ é limitada sobre conjuntos limitados de X , se para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$, o conjunto $\{f(t, x) : t \in \mathbb{R}, x \in K\}$ é limitado.

Definição 2.18. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ é chamada uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , se para todo $\varepsilon > 0$ e todo conjunto limitado $K \subseteq X$, existir um $\delta = \delta_{\varepsilon, K} > 0$ tal que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e quaisquer $x, y \in K$ com $\|x - y\| < \delta$.

Lema 2.19. *Assuma que $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ é limitada sobre conjuntos limitados de X e uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X . Então f satisfaz a seguinte condição.*

(C1)* *Para quaisquer $u, v \in C_b(\mathbb{R}; X)$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|u(s) - v(s)\| ds = 0 \quad \text{implica que} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds = 0.$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é, sem modificações essenciais, similar a demonstração do Lema 2.15 que é feita em (13, Lema 2.1). $\square$

Definição 2.20. Dizemos que uma função contínua $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , se para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sup_{x \in K} \|f(s + \omega, x) - f(s, x)\| ds = 0.$$

Lema 2.21. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X . Se $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então a função de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Pelo Lema 2.19, sabemos que f satisfaz **(C1)***. Portanto, é suficiente demonstrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s + \omega))\| ds = 0. \quad (2.3)$$

Observe que

$$\int_{-t}^t \|f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s + \omega))\| ds \leq \int_{-t}^t \sup_{x \in Im(u)} \|f(s + \omega, x) - f(s, x)\| ds,$$

consequentemente (2.3) é verificada. $\square$

Lema 2.22. *O espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ é invariante por translação.*

Demonstração. Seja u pertencente à $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$. Para $s \in \mathbb{R}^+$ e $t > s$, observamos que

$$\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|u(\tau + \omega + s) - u(\tau + s)\| d\tau \leq \left(1 + \frac{s}{t}\right) \left(\frac{1}{2(t+s)} \int_{-(t+s)}^{t+s} \|u(\tau + \omega) - u(\tau)\| d\tau\right),$$

e

$$\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|u(\tau + \omega - s) - u(\tau - s)\| d\tau \leq \left(1 + \frac{s}{t}\right) \left(\frac{1}{2(t+s)} \int_{-(t+s)}^{t+s} \|u(\tau + \omega) - u(\tau)\| d\tau\right).$$

Portanto a função $\tau \rightarrow u(\tau + s)$ pertence à $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$, para cada $s \in \mathbb{R}$. $\square$

Definição 2.23. (55) Uma família de operadores fortemente mensurável $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ é chamada uniformemente integrável (ou fortemente integrável), se

$$\int_0^\infty \|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} dt < \infty.$$

Lema 2.24. Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ for uma família de operadores uniformemente integrável e $u \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$, então a função $v_u : \mathbb{R} \rightarrow X$, definida por

$$v_u(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)u(s)ds,$$

pertence à $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$.

Demonstração. A função v_u é contínua, pois, dado $h \in \mathbb{R}$,

$$\|v_u(t+h) - v_u(t)\| \leq \int_0^\infty \|S(s)(u(t-s+h) - u(t-s))\| ds,$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $\lim_{h \rightarrow 0} \|v_u(t+h) - v_u(t)\| = 0$. Pela estimativa

$$\|v_u(t)\| \leq \|S\|_{L^1} \|u\|_{C_b(\mathbb{R}; X)} \quad \forall t \geq 0,$$

concluimos que $v_u \in C_b(\mathbb{R}; X)$.

É claro que $v_u \in C_b(\mathbb{R}; X)$. De fato, basta notar que

$$\|v_u\|_{C_b(\mathbb{R}; X)} \leq \|S\|_{L^1} \|u\|_{C_b(\mathbb{R}; X)}.$$

Para $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|v_u(\tau + \omega) - v_u(\tau)\| d\tau &\leq \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \int_0^\infty \|S(s)\|_{\mathcal{B}(X)} \|u(\tau - s + \omega) - u(\tau - s)\| ds d\tau \\ &= \int_0^\infty \|S(s)\| \Phi_t(s) ds, \end{aligned}$$

em que

$$\Phi_t(s) = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|u(\tau - s + \omega) - u(\tau - s)\| d\tau.$$

Usando que o espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ é invariante por translação (Lema 2.22), segue que $\tau \rightarrow u(\tau - s)$ pertence à $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ para cada $s \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $\Phi_t(s) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Agora, visto que Φ_t é limitada e que $s \rightarrow \|S(s)\|_{\mathcal{B}(X)}$ é integrável em $[0, \infty)$, então, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|S(s)\|_{\mathcal{B}(X)} \Phi_t(s) ds = 0.$$

A demonstração agora está completa. □

2.2 Operadores setoriais e analiticidade

Iniciaremos esta seção definindo semigrupos fortemente contínuos e seus geradores.

Definição 2.25. Dizemos que uma família de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo, se

- (i) $T(0) = I$ (operador identidade); e,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.

Se, além disso

- (iii) $\|T(t)x - x\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+, \forall x \in X$, dizemos que o semigrupo é *fortemente contínuo* (ou que é um C_0 -semigrupo).

Definição 2.26. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Chamaremos de gerador infinitesimal o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Enunciaremos agora o Teorema de Hille-Yosida, o qual caracteriza um gerador de um C_0 -semigrupo. A sua demonstração pode ser encontrada em (66, Teorema II.3.8).

Teorema 2.27 (Teorema de Hille-Yosida). *Seja $(A, D(A))$ um operador linear sobre um espaço de Banach X e sejam $\omega \in \mathbb{R}, M \geq 1$ constantes. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $(A, D(A))$ é o gerador de um C_0 -semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0}$ que satisfaz

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

- (ii) A é fechado, densamente definido, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M(\lambda - \omega)^{-n}, \quad \forall \lambda > \omega \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (iii) A é fechado, densamente definido, e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda > \omega, \lambda \in \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para mais detalhes e propriedades da teoria de semigrupos de operadores limitados (66, 67).

Vamos agora descrever uma curva no plano complexo que nos será muito útil no desenvolvimento do Capítulo 5.

Definição 2.28. Dizemos que Ha é um *caminho de Hankel*, se existem $r > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ tais que, $Ha = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$, em que os caminhos Ha_i são dados por

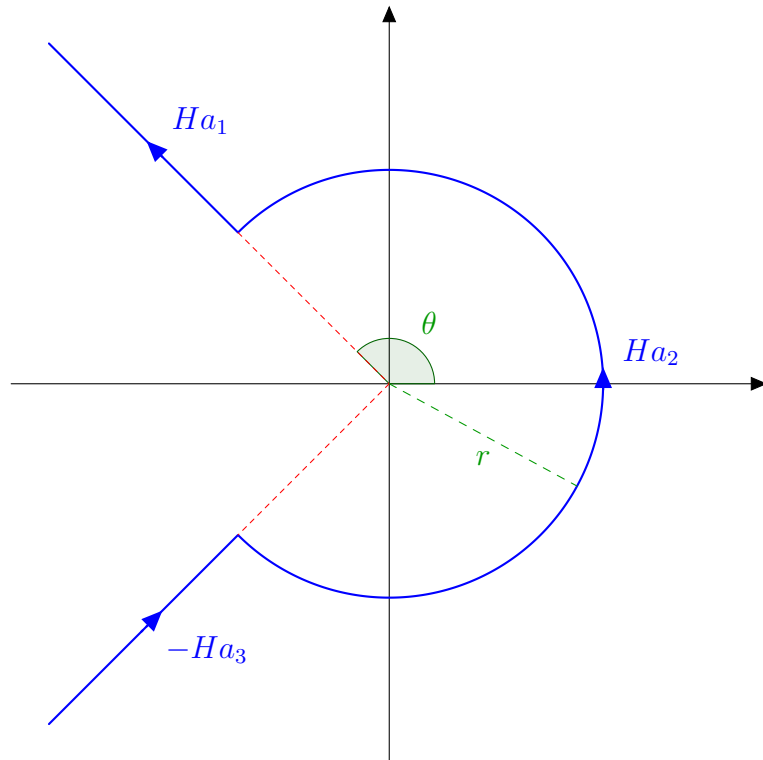
$$Ha_1 := \{te^{i\theta}; t \in [r, \infty)\};$$

$$Ha_2 := \{re^{it}; t \in [-\theta, \theta]\};$$

$$Ha_3 := \{te^{-i\theta}; t \in [r, \infty)\}.$$

Também escrevemos $Ha = Ha(r, \theta)$ para mostrar a dependência do ângulo e do raio (ver Figura 2).

Figura 2 – Caminho de Hankel $Ha = Ha(r, \theta)$



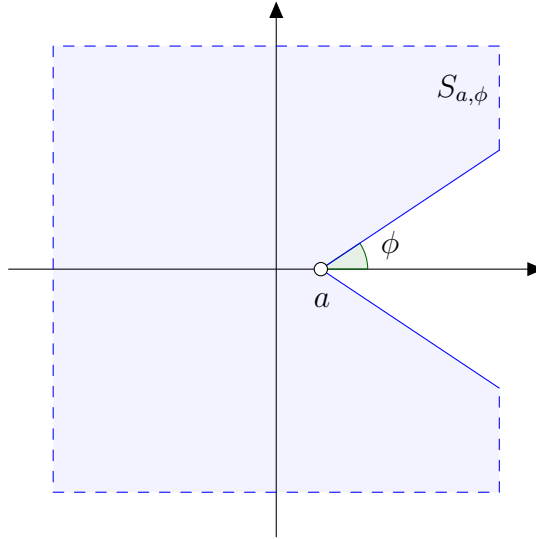
Fonte: Produzido pelo autor.

Considere $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (0, \pi)$. Definimos então os seguintes subconjuntos do plano complexo,

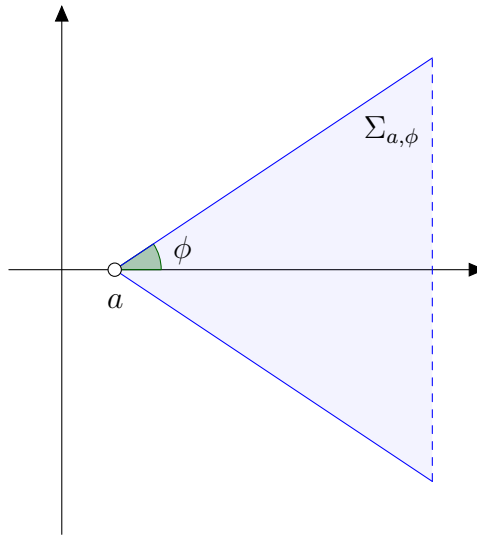
$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}; \quad (2.4)$$

$$\Sigma_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \phi, \lambda \neq a\}. \quad (2.5)$$

As Figuras 3 e 4 ilustram, respectivamente, os “setores” $S_{a,\phi}$ e $\Sigma_{a,\phi}$, com $a > 0$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Observe que $-S_{a,\phi} = \Sigma_{-a,\pi-\phi}$.

Figura 3 – Setor $S_{a,\phi}$ 

Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 4 – Setor $\Sigma_{a,\phi}$ 

Fonte: Produzido pelo autor.

Nós agora iremos considerar a possibilidade de estender o domínio do parâmetro de um semigrupo para certos setores no plano complexo que incluem o eixo real não negativo. É claro que, a fim de preservar a estrutura de semigrupo, o domínio no qual o parâmetro complexo variar deve ser um semigrupo aditivo de números complexos.

Definição 2.29. Seja $\Sigma_{0,\phi}^\circ$ o interior do conjunto $\Sigma_{0,\phi}$. Dizemos que uma família de operadores lineares limitados $\{T(t); t \in \Sigma_{0,\phi}^\circ \cup \{0\}\}$ é um *semigrupo analítico*, se:

- (i) A função $\Sigma_{0,\phi}^o \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(X)$ é analítica;
- (ii) $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para quaisquer $t, s \in \Sigma_{0,\phi} \cup \{0\}$; e
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$, para todo $x \in X$ (observe que $t \rightarrow 0$ por pontos de $\Sigma_{0,\phi}^o$).

Usaremos a notação de Nagel (66, Definição II.4.1) para definir operadores setoriais.

Definição 2.30. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que A é um *operador setorial*, se existem $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que, $\Sigma_{\mu, \pi/2+\theta} \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - \mu|}, \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{\mu, \pi/2+\theta}.$$

Neste caso, dizemos que A é μ -setorial de ângulo θ .

Observação 2.31. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado e densamente definido. É fácil ver que $-A$ é setorial se, e somente se, existem $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que, $S_{a,\phi} \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \text{para todo } \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Observação 2.32. Observamos que algumas referências definem operador setorial de maneira diferente à Definição 2.30. Em (68, Definição 1.3.1), Henry define operador setorial como sendo um operador que satisfaz as condições da Observação 2.31. Já em (69, Definição 2.0.1), Lunardi define operador setorial como um operador que satisfaz as condições da Definição 2.30, exceto a condição do operador ser densamente definido. Alertamos apenas que o leitor esteja atento para que não haja confusão.

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em (68, Teorema 1.3.4).

Teorema 2.33. *Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador setorial; isto é, que existem constantes $C \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tais que, $\Sigma_{a,\phi} \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|}, \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\phi}.$$

Então, A gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{B}(X)$ com

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+Ha} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0,$$

em que $a+Ha = a+Ha(r, \phi)$ é o deslocamento do caminho de Hankel (ver Definição 2.28), com r pequeno. Além disso, $t \mapsto T(t)$ se estende a uma função analítica de $\Sigma_{0,\phi-\frac{\pi}{2}}^o$ em $\mathcal{B}(X)$ (ou a complexificação de X , se X é um espaço de Banach real) e para algum $K > 0$,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Ke^{at}, \quad e \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Kt^{-1}e^{at}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Por fim,

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$ e $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(X)$ é contínua.

2.3 Potências fracionárias

Potências fracionárias de operadores lineares fechados foram primeiro construídas por Bochner (70) e depois por Feller (71), para o operador Laplaciano. Essas construções dependem essencialmente do fato que o Laplaciano gera um semigrupo. Phillips (72) mostrou que essas construções (para índices positivos menores que um) eram parte de uma construção mais geral baseada no teorema de representação de Kolmogoroff-Levy para distribuições infinitamente divisíveis. Balakrishnan (73) construiu um cálculo operacional para geradores infinitesimais proporcionando, em particular, um estudo sistemático da representação e propriedades destes operadores. Depois, Balakrishnan (74) deu uma nova definição e estendeu sua teoria para uma classe de operadores mais ampla. Ao mesmo tempo, duas definições foram introduzidas por Krasnosel'skii-Sobolevskii (75) e Kato (76); outros resultados foram obtidos por eles, e também por Yosida (77) e Watanabe (78). Essas teorias foram reconstruídas por Komatsu com um ponto de vista unificado numa série de artigos, todos com o nome “Fractional powers of operators” (79, 80, 81, 82, 83, 84).

As potências fracionárias de operadores setoriais desempenham papel fundamental na teoria de existência de soluções para equações diferenciais parciais não lineares do tipo parabólico e a análise do comportamento assintótico de soluções para estes problemas. Mais detalhes dessa teoria podem ser encontrados em (68, 85). As demonstrações dos teoremas enunciados nesta seção podem ser encontradas em (68).

Para a Definição seguinte, lembramos que dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > 0$, então a função Gama é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Definição 2.34. Suponha que $-A$ é um operador setorial com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$ definimos

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt,$$

em que $(T(t))_{t \geq 0}$ é o C_0 -semigrupo gerado por $-A$ (ver Teorema 2.33) e Γ denota a função Gama.

Teorema 2.35. Se $-A$ é um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado e injetivo sobre X . Além disso, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$,

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Definição 2.36. Suponha que $-A$ é um operador setorial com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$ definimos

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}, \quad \text{com } D(A^\alpha) := \operatorname{Im}(A^{-\alpha}).$$

Além disso, definimos $A^0 := I$ (operador identidade sobre X).

Teorema 2.37. *Seja $-A$ é um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se $\alpha > 0$, então A^α é fechado e densamente definido.*
- (ii) *Se $\alpha \geq \beta$, então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.*
- (iii) *$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ sobre $D(A^\gamma)$, em que $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.*
- (iv) *$A^\alpha T(t) = T(t)A^\alpha$ sobre $D(A^\alpha)$, para $t > 0$, em que $(T(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo gerado por $-A$.*

Teorema 2.38 (Desigualdade do Momento). *Seja $-A$ é um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Se $0 \leq \alpha \leq 1$, então existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de A tal que,*

$$\|A^\alpha x\|_X \leq C \|Ax\|_X^\alpha \|x\|_X^{1-\alpha}, \quad \forall x \in D(A).$$

Definição 2.39. *Seja $-A$ é um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Para cada $\alpha \geq 0$, definimos o espaço*

$$X^\alpha := D(A^\alpha), \quad \text{munido com a norma } \|x\|_\alpha := \|A^\alpha x\|_X.$$

Teorema 2.40. *Seja $-A$ é um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Para cada $\alpha \geq 0$, X^α munido com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ é um espaço de Banach.*
- (ii) *$X^0 = X$ e $X^1 = D(A)$.*
- (iii) *Se $\alpha \geq \beta \geq 0$, então X^α é um subespaço denso de X^β e a inclusão $i : X^\alpha \rightarrow X^\beta$ é contínua.*
- (iv) *Se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta sempre que $\alpha \geq \beta \geq 0$.*

Proposição 2.41. *Seja A um operador setorial sobre X com $\operatorname{Re}\sigma(-A) > 0$, $\Sigma_{0,\phi} \subset \rho(A)$ para algum $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M|\lambda|^{-1}, \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{0,\phi}.$$

Então, existe uma constante k tal que,

$$\|(-A)^\beta (\lambda - A)^{-1} x\|_X \leq k|\lambda|^{\beta-1} \|x\|_X,$$

para $0 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$ e $x \in X$.

Demonstração. Pela desigualdade do momento (Teorema 2.38), existe uma constante C , que depende apenas de A , tal que

$$\begin{aligned}
 \|(-A)^\beta(\lambda - A)^{-1}x\|_X &\leq C\|A(\lambda - A)^{-1}x\|_X^\beta\|(\lambda - A)^{-1}x\|_X^{1-\beta} \\
 &\leq C\|(\lambda - \lambda + A)(\lambda - A)^{-1}x\|_X^\beta M^{1-\beta}|\lambda|^{\beta-1}\|x\|_X^{1-\beta} \\
 &= C\|(\lambda(\lambda - A)^{-1} - I)x\|_X^\beta M^{1-\beta}|\lambda|^{\beta-1}\|x\|_X^{1-\beta} \\
 &\leq C((M+1)\|x\|_X)^\beta M^{1-\beta}|\lambda|^{\beta-1}\|x\|_X^{1-\beta} \\
 &\leq C(M+1)|\lambda|^{\beta-1}\|x\|_X.
 \end{aligned}$$

Tomando $k = C(M+1)$, concluímos a demonstração. $\square$

2.4 Semigrupos hiperbólicos e espaços intermediários

Nesta seção, estudaremos uma classe de semigrupos que nos fornecem uma interessante informação algébrica sobre o espaço de Banach que estão definidos.

Definição 2.42. Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado hiperbólico se existe uma projeção P e constantes $M, \delta > 0$ tais que $T(t)$ comuta com P , $\ker P$ é invariante com respeito à $T(t)$, $T(t) : \text{Range}(Q) \rightarrow \text{Range}(Q)$ é inversível e

$$\|T(t)Px\| \leq Me^{-\mu t}\|x\|, \text{ for } t \geq 0,$$

$$\|T(t)Qx\| \leq Me^{\mu t}\|x\|, \text{ for } t \leq 0,$$

em que $Q = I - P$ e para $t \leq 0$, $T(t) = T(-t)^{-1}$.

Observação 2.43. (a) Exemplos especiais de semigrupos hiperbólicos são aqueles gerados por operadores setoriais. É bem conhecido que um operador setorial gera um semigrupo analítico. O livro de Lunardi (69) dá um tratamento sistemático da teoria básica de semigrupos analíticos em espaços de Banach gerais e fornece referências para o tema.

(b) Suponha que A gera um semigrupo analítico $(T(t))_{t \geq 0}$, então $(T(t))_{t \geq 0}$ é hiperbólico se, e somente se, $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ (66).

Agora, relembremos a noção de espaços intermediários. Os espaços intermediários são de importância crucial na teoria de regularidade para equações de evolução abstratas. Seguiremos a terminologia usada no livro de Lunardi (69).

Sejam X e D dois espaços de Banach, com normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_D$, respectivamente, e assumamos que D está mergulhado continuamente em X .

Definição 2.44. Seja $0 \leq \alpha \leq 1$. Dizemos que um espaço de Banach Y , que satisfaz $D \subseteq Y \subseteq X$, pertence à classe J_α entre X e D se existe uma constante $c > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq c\|x\|^{1-\alpha}\|x\|_D^\alpha$, para todo $x \in D$. Neste caso, escrevemos $Y \in J_\alpha(X, D)$.

Definição 2.45. Sejam $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador setorial e α pertencente à $(0, 1)$. Um espaço de Banach $(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ é chamado espaço intermediário entre X e $D(A)$ se $X_\alpha \in J_\alpha(X, D(A))$.

Observação 2.46. Exemplos concretos de espaços intermediários entre X e $D(A)$ ($0 < \alpha < 1$) incluem $D(-A^\alpha)$, os domínios das potências fracionárias de A , e os espaços de interpolação reais $D_A(\alpha, \infty)$, para mais detalhes (69).

Fechamos esta seção com um resultado sobre semigrupo analítico hiperbólico e espaços intermediários, o qual iremos precisar mais a frente.

Lema 2.47. (14) *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo analítico hiperbólico sobre X com gerador A . Para $\alpha \in (0, 1)$, seja $(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ um espaço intermediário entre X e $D(A)$. Então existem constantes positivas $C(\alpha)$, $M(\alpha)$, δ e γ tais que*

$$\|T(t)Px\|_\alpha \leq M(\alpha)t^{-\alpha}e^{-\gamma t}\|x\|, \quad t > 0,$$

e

$$\|T(t)Qx\|_\alpha \leq C(\alpha)e^{\delta t}\|x\|, \quad t \leq 0.$$

2.5 Resolventes

O conceito de resolvente, que é fundamental para a teoria de equações de Volterra lineares será introduzido e discutido nesta seção. Tal conceito é aplicado a equações não-homogêneas para se obter várias fórmulas de variação de parâmetros. Para mais detalhes sobre o tema, indicamos o leitor a (55, Seção I.1).

Sejam X um espaço de Banach complexo, A um operador linear ilimitado e fechado em X com domínio denso $D(A)$, e $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ um núcleo escalar não identicamente nulo. Consideramos a equação de Volterra

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds, \quad t \in J, \quad (2.6)$$

em que $f \in C(J; X)$, $J = [0, T]$. Vamos denotar por X_A o domínio de A equipado com a norma do gráfico $\|\cdot\|_A$ de A , isto é, $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$; X_A é um espaço de Banach, pois A é fechado, e é continuamente e densamente mergulhado em X . Usaremos a abreviação

$$(a * f)(t) = \int_0^t a(t-s)f(s)ds, \quad t \in J,$$

para a convolução.

As seguintes noções de soluções de (2.6) são naturais.

Definição 2.48. Uma função $u \in C(J; X)$ é chamada

- (a) *solução forte* de (2.6) sobre J se $u \in C(J; X_A)$ e (2.6) é satisfeita sobre J ;
- (b) *solução branda* de (2.6) sobre J se $a * u \in C(J; X_A)$ e $u(t) = f(t) + A(a * u)(t)$ sobre J ;
- (c) *solução fraca* de (2.6) sobre J se

$$\langle u(t), x^* \rangle = \langle f(t), x^* \rangle + \langle (a * u)(t), A^* x^* \rangle$$

sobre J , para cada $x^* \in D(A^*)$.

Pode-se verificar que toda solução forte de (2.6) é um solução branda, e que cada solução branda é uma solução fraca. Se em adição, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é não-vazio, então toda solução fraca é também uma solução branda (55, Proposição I.1.4). Em geral, nem toda solução branda é uma solução forte.

Note que quando $a(t) \equiv 1$ e $f \in C^1(J; X)$, (2.6) é equivalente ao problema de Cauchy

$$\dot{u}(t) = \dot{f}(t) + Au(t), \quad u(0) = f(0). \quad (2.7)$$

Com um momento de reflexão percebe-se que os conceitos de solução dados na Definição 2.48 coincidem com aqueles que são usualmente empregados em (2.7). Similarmente, se $a(t) \equiv t$ e $f \in C^2(J; X)$, (2.6) é equivalente a

$$\ddot{u}(t) = \ddot{f}(t) + Au(t), \quad u(0) = f(0), \quad \dot{u}(0) = \dot{f}(0), \quad (2.8)$$

e os conceitos de solução para (2.6) se tornam aqueles para os problemas de segunda ordem (2.8).

A seguinte definição de boa colocação é uma extensão direta de problemas de Cauchy (2.8) bem-postos.

Definição 2.49. A equação (2.6) é chamada *bem-posta* se para cada $x \in D(A)$ existe uma única solução forte $u(t; x)$ sobre $\mathbb{R}^+$ de

$$u(t) = x + (a * Au)(t), \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

e $(x_n) \subset D(A)$, $x_n \rightarrow 0$ implica que $u(t; x_n) \rightarrow 0$ em X , uniformemente sobre intervalos compactos.

Agora definiremos uma resolvente para (2.6).

Definição 2.50. Uma família $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ de operadores lineares limitados em X é chamada um *resolvente* para (2.6), ou *operador solução* para (2.6), se as seguintes condições são satisfeitas:

- (S1) $S(t)$ é fortemente contínua sobre $\mathbb{R}^+$ e $S(0) = I$;
- (S2) $S(t)$ comuta com A , o que significa que $S(t)D(A) \subset D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$;
- (S3) a equação resolvente é satisfeita

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)xds \quad \text{para todo } x \in D(A), \quad t \geq 0. \quad (2.10)$$

Observamos que um problema (2.6) bem-posto admite um resolvente, a saber,

$$S(t)x = u(t; x), \quad x \in D(A), \quad t \geq 0.$$

A próxima proposição afirma que a recíproca também é verdadeira (55, Proposição I.1.1).

Proposição 2.51. (2.6) está bem-posta se, e somente se, (2.6) admite um resolvente $S(t)$. Neste caso, temos em adição $\text{Range}(a * S(t)) \subset D(A)$ para todo $t \geq 0$ e

$$S(t)x = x + A \int_0^t a(t-s)S(s)xds \quad \text{para todo } x \in X, \quad t \geq 0. \quad (2.11)$$

Em particular, $Aa * S$ é fortemente contínua em X .

Corolário 2.52. (2.6) admite no máximo um resolvente $S(t)$.

Para o caso $a(t) = 1$ mencionado acima, o resolvente $S(t)$ torna-se o C_0 -semigrupo e^{At} gerado por A . Enquanto que no caso $a(t) = t$, o resolvente $S(t)$ torna-se a família cosseno $Co(t)$ gerada por A .

A seguinte proposição mostra uma fórmula de variação de parâmetros para equações de Volterra (2.6). Lembramos que $W^{m,1}(J; X)$ denota o espaço de todas as funções $f : J \rightarrow X$ tendo derivadas distribucionais $D^\alpha f \in L^1(J; X)$ de ordem $\alpha \leq m$.

Proposição 2.53. Suponha que (2.6) admite um resolvente $S(t)$ e seja $f \in C(J; X)$. Então

- (i) se $u \in C(J; X)$ é uma solução branda de (2.6), então $S * f$ é continuamente diferenciável sobre J e

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in J; \quad (2.12)$$

em particular, soluções brandas de (2.6) são únicas;

- (ii) se $f \in W^{1,1}(J; X)$ então

$$u(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)\dot{f}(s)ds, \quad t \in J, \quad (2.13)$$

é uma solução branda de (2.6).

Definição 2.54. Uma resolvente $S(t)$ para (2.6) é chamada *diferenciável*, se $S(\cdot)x \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^+; X)$ para cada $x \in D(A)$ e existir $\varphi \in L_{loc}^1$ tal que

$$|\dot{S}(t)x| \leq \varphi(t)|x|_A \quad \text{quase sempre sobre } \mathbb{R}^+, \text{ para cada } x \in D(A).$$

Sendo J um intervalo compacto, denotamos por $BV(J; X)$ o espaço de todas as funções $k : J \rightarrow X$ de variação limitada forte, isto é

$$\text{Var}(k|_J) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |k(t_j) - k(t_{j-1})| : t_0 < t_1 < \cdots < t_N, t_j \in J \right\}$$

é finito. Observamos que $S(t)$ é diferenciável sempre que $a(t)$ pertencer a $BV_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Se $S(t)$ for diferenciável e $f \in C(J; X_A)$, então (2.12) pode ser reescrita como

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \dot{S}(t-s)f(s)ds, \quad t \in J. \quad (2.14)$$

Dizemos que uma função $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+; X)$ é de *crescimento exponencial* (ou *Laplace transformável*), se $\int_0^\infty e^{-\omega t}|v(t)|dt < \infty$ para algum $\omega \in \mathbb{R}$; neste caso, definimos a *transformada de Laplace* de v por

$$\hat{v}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}v(t)dt, \quad \text{Re } \lambda \geq \omega.$$

Vamos definir abaixo uma classe de resolventes *Laplace transformáveis*.

Definição 2.55. Suponha que $S(t)$ é uma resolvente para (2.6). $S(t)$ é chamado *exponencialmente limitado* se existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$|S(t)| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0; \quad (2.15)$$

(M, ω) é chamado um *tipo* de $S(t)$. O *crescimento limite*, $\omega_0(S)$, de $S(t)$ é

$$\omega_0(S) = \inf \{ \omega : \exists M > 0 \text{ tal que (2.15) é satisfeita} \}.$$

Suponhamos que $S(t)$ é um resolvente exponencialmente limitado para (2.6), então a transformada de Laplace

$$H(\lambda) = \hat{S}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)dt, \quad \text{Re } \lambda > \omega,$$

está bem-definida e é holomorfa para $\text{Re } \lambda > \omega$. O próximo resultado é um teorema de geração de resolventes exponencialmente limitados.

Teorema 2.56. *Seja A um operador linear fechado e ilimitado sobre X com domínio $D(A)$ denso e seja $a \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo $\int_0^\infty e^{-\omega t}|a(t)|dt < \infty$. Então (2.6) admite um resolvente $S(t)$ de tipo (M, ω) se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(H1) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ e $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ para todo $\lambda > \omega$;

(H2) $H(\lambda) = (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}/\lambda$ satisfaz as estimativas

$$|H^{(n)}(\lambda)| \leq Mn!(\lambda - \omega)^{-(n+1)}, \quad \lambda > \omega, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Agora, consideremos a seguinte equação integral

$$R(t)x = a(t)x + A \int_0^t a(t - \tau)R(\tau)x d\tau, \quad t \geq 0, \quad (2.16)$$

ao invés de (2.11). Uma solução de (2.16) é chamada *resolvente integral* para (2.6), a definição precisa é como segue.

Definição 2.57. Uma família $\{R(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ é chamada *resolvente integral* para (2.6) se as seguintes condições são satisfeitas.

(R1) $R(\cdot)x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ para cada $x \in X$, e $\|R(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \varphi(t)$ quase sempre sobre $\mathbb{R}^+$, para algum $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathbb{C})$;

(R2) $R(t)$ comuta com A para cada $t \geq 0$;

(R3) a equação *resolvente integral* é satisfeita

$$R(t)x = a(t)x + \int_0^t a(t - \tau)AR(\tau)x d\tau, \quad \forall x \in D(A) \text{ e quase todo } t \geq 0. \quad (2.17)$$

Suponha que $R(t)$ é uma resolvente integral de (2.6), seja $f \in C(J; X)$ e $u \in C(J; X)$ uma solução branda para (2.6). Então $R * u$ é bem-definida e contínua. De (2.17) e (2.6)

$$a * u = (R - Aa * R) * u = R * u - R * Aa * u = R * f,$$

ou seja, $R * f \in C(J; X_A)$ e de (2.6) obtemos

$$u(t) = f(t) + A \int_0^t R(t - s)f(s)ds, \quad t \in J. \quad (2.18)$$

A unicidade do resolvente integral para (2.6) vem da equação (2.18).

Se ambos, $S(t)$ e $R(t)$ existem para (2.6), as relações entre S e R são dadas por

$$R(t)Ax = \dot{S}(t)x \quad \text{para } x \in D(A), \quad t \geq 0, \quad (2.19)$$

e

$$R(t)x = (a * S)(t)x \quad \text{para } x \in X, \quad t \geq 0. \quad (2.20)$$

O caso do problema de Cauchy (2.7), isto é, $a(t) \equiv 1$, temos $R(t) \equiv S(t)$; enquanto para a equação de segunda ordem (2.8), $S(t) = Co(t)$, a família cosseno gerada por A , e $R(t) = Si(t)$, a família seno gerada por A . É possível que $R(t)$ exista mas $S(t)$ não exista, e vice-versa.

Finalizamos essa seção com o seguinte teorema.

Teorema 2.58. *Seja A um operador linear fechado e ilimitado sobre X com domínio denso $D(A)$ e seja $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ que satisfaz $\int_0^\infty e^{-\omega t}|a(t)|dt < \infty$. Então (2.6) admite uma resolvente integral $R(t)$ tal que*

$$|R(t)| \leq e^{\omega t}\varphi(t), \quad \text{para quase todo } t > 0,$$

para alguma $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(K1) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ e $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ para todo $\lambda > \omega$;

(K2) $K(\lambda) = \hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ satisfaz as estimativas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \omega)^n |K^{(n)}(\lambda)|/n! \leq M \quad \text{para todo } \lambda > \omega.$$

2.6 Viscoelasticidade Linear

Uma rica fonte para equações de Volterra é a teoria de materiais viscoelásticos. Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos dessa teoria. Para mais detalhes nós indicamos a referência (55, Seção I.5).

Considere um *corpo* tridimensional representado pelo conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 . Pontos em Ω (isto é, pontos materiais) serão denotados por $x, y, \dots$. Associada a esse corpo, existe uma função estritamente positiva $\rho_0 \in C(\bar{\Omega})$ chamada *densidade de massa*. Forças atuantes deformarão o corpo, e o ponto material x será deslocado para uma nova direção $x + u(t, x)$ no tempo t ; o campo vetorial $u(t, x)$ é chamado *deslocamento*. A *velocidade* do ponto material $x \in \Omega$ no tempo t é dada por $v(t, x) = \dot{u}(t, x)$, em que $\dot{u}$ representa a derivada parcial de u em relação a t . A *tensão* linearizada no corpo devido a uma deformação é definida por:

$$\varepsilon(t, x) = \frac{1}{2}(\nabla u(t, x) + (\nabla u(t, x))^T), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega,$$

isto é, $\varepsilon(t, x)$ é a parte simétrica de ∇u .

Uma dada história-tensão do corpo causa *estresse* em um caminho a ser especificado, expressando as propriedades do material que o corpo é produzido. O tensor estresse será denotado por $S(t, x)$; ambos, $\varepsilon(t, x)$ e $S(t, x)$, são simétricos. Seja $h(t, x)$ uma força externa ao corpo, por exemplo a *gravidade*. Então o *equilíbrio de força* no corpo torna-se

$$\rho_0(x)\ddot{u}(t, x) = \operatorname{div} S(t, x) + \rho_0(x)h(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Um material é chamado *incompressível* se não existe mudança de volume no corpo Ω durante uma deformação, isto é, se

$$\det(I + \nabla u(t, x)) = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (2.21)$$

é satisfeita; em outro caso, o material é chamado *compressível*. Para a teoria linear, (2.21) pode ser simplificada para

$$\operatorname{div} u(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Para tornar o sistema completo, temos que adicionar uma equação que relacione o estresse $S(t, x)$ com u e suas derivadas, tais relações são chamadas *leis constitutivas* ou *relações de estresse-tensão*. Se o material é *isotrópico*, as leis constitutivas são

$$\begin{aligned} S(t, x) &= 2 \int_0^\infty da(\tau, x) \dot{\varepsilon}(t - \tau, x) + \frac{1}{3} \mathcal{I} \int_0^\infty (3db(\tau, x) - 2da(\tau, x)) \operatorname{tr} \dot{\varepsilon}(t - \tau, x), \\ \varepsilon(t, x) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dk(\tau, x) S(t - \tau, x) + \frac{1}{3} \mathcal{I} \int_0^\infty \left(\frac{1}{3} dl(\tau, x) - \frac{1}{2} dk(\tau, x) \right) \operatorname{tr} S(t - \tau, x), \end{aligned}$$

em que $\mathcal{I}$ é o tensor identidade. Os núcleos b e l descrevem o comportamento do material sobre compressão, enquanto a e k determinam sua resposta ao cisalhamento. Portanto, db é chamado *módulo de compressão* e da é chamado *módulo de cisalhamento*. Em geral, a e b são funções independentes, entretanto, se $b(t, x) = \beta a(t, x)$ para alguma constante $\beta > 0$, então o material é chamado *síncrono*. Um material é chamado *homogêneo* se ρ_0 , $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ não dependem de $x \in \Omega$, em que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$ são expressões que aparecem nas leis constitutivas (55, Seção I.5).

Se o material for incompressível, isotrópico e homogêneo (com $\rho_0(x) = \rho_0 = 1$, para simplificar), então

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t, x) &= \int_0^\infty da(\tau) \Delta \dot{u}(t - \tau, x) - \nabla p(t, x) + h(t, x), \\ \nabla \cdot u(t, x) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.22}$$

em que p é a *pressão hidrostática*. Estas equações devem ser suplementadas pelas condições de fronteira.

Materiais lineares isotrópicos e homogêneos são descritos por meio de duas funções materiais, o módulo de cisalhamento da e o módulo de compressão db . Se o material é além disso síncrono ou incompressível, apenas o módulo de cisalhamento é necessário. Vamos mencionar brevemente alguns modelos padrão bem conhecidos:

(i) Sólido de Hookean

$$a(t) = \mu t, \quad k(t) = \frac{1}{\mu}, \quad t > 0.$$

(ii) Fluido Newtoniano

$$a(t) = \nu, \quad k(t) = \frac{t}{\nu}, \quad t > 0.$$

(iii) Sólido de Kelvin-Voigt

$$a(t) = \nu + \mu t, \quad k(t) = \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad t > 0.$$

(iv) Fluido de Maxwell

$$a(t) = \nu(1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad k(t) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}, \quad t > 0.$$

(v) Sólido Poynting-Thompson

$$a(t) = \mu_0 t + \nu(1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad k(t) = \mu_0^{-1} \left[1 - \mu(\mu_0 + \mu)^{-1} e^{-\frac{\mu\mu_0 t}{\nu(\mu+\mu_0)}} \right] \quad t > 0.$$

(vi) Material Tipo-Potência

$$a(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad k(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, \quad t > 0, \quad \text{em que } \alpha \in (0, 1).$$

Por fim, se considerarmos um fluido viscoelástico incompressível isotrópico e homogêneo que ocupa uma região Ω , o campo velocidade $v(t, x)$ do fluido é governado por (2.22), daí o problema de condição inicial correspondente torna-se

$$\begin{cases} v_t(t, x) = \int_0^t da(\tau) \Delta v(t - \tau, x) - \nabla p(t, x) + h(t, x), & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot v(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ v(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.23)$$

utilizando as condições de contorno antiderrapantes; aqui $p(t, x)$ denota a pressão hidrostática no fluido e o núcleo $da(t)$ é o módulo de cisalhamento. O caso $a(t) \equiv a_0$ para $t > 0$ corresponde a um fluido Newtoniano com viscosidade $a_0 > 0$, e (2.23) torna-se então o bem conhecido sistema linear de Navier-Stokes.

2.7 Métodos Topológicos

Para conveniência do leitor, nesta seção, enunciaremos diversos resultados utilizados durante o texto.

Iniciaremos enunciando o Princípio de contração de Banach, a demonstração desse resultado pode ser encontrada em (86, Teorema 1.1.1).

Teorema 2.59 (Princípio de Contração de Banach). *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \rightarrow M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Corolário 2.60 (Princípio dos Iterados). *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \rightarrow M$ um mapa tal que, para algum n natural, F^n é uma contração. Então possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Suponhamos $n > 1$, e seja z o único ponto fixo de F^n . Então

$$F^n(Fz) = F(F^n z) = Fz,$$

ou seja, Fz também é um ponto fixo de F^n . Pela unicidade, $Fz = z$. $\square$

Antes de enunciarmos o próximo resultado de ponto fixo, precisamos definir a medida de não-compacidade de Kuratowski. Sejam $V \subset X$ um subconjunto limitado no espaço de Banach X e $\varepsilon > 0$. Uma ε -cobertura de V é uma família de subconjuntos $\{V_i; V_i \subset X\}_i$ com diâmetros menores ou iguais a ε . Definimos agora a medida de não-compacidade

$$\xi(V) := \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura finita de } V\}.$$

Como o nome sugere, a medida de não-compacidade dá uma ideia da “falta de compacidade” de um conjunto ou operador dado. Tal situação aparece em muitos campos: equações integrais com núcleos fortemente singulares, operadores de superposição não-lineares entre vários espaços de funções e muito mais (87).

Proposição 2.61. (88) *Sejam V, W subconjuntos limitados de um espaço de Banach X . Então,*

- (i) $\xi(V) = 0$ se, e somente se, V for relativamente compacto;
- (ii) $\xi(V) = \xi(\overline{V}) = \xi(\overline{\text{co}(V)})$, em que $\overline{\text{co}(V)}$ denota o fecho convexo de V ;
- (iii) $\xi(\lambda V) = |\lambda|\xi(V)$, para todo escalar λ ;
- (iv) $\xi(V) \leq \xi(W)$, se $V \subseteq W$;
- (v) $\xi(V + W) \leq \xi(V) + \xi(W)$;
- (vi) Se $\dim X = \infty$, então $\xi(B_R(X)) \leq 2R$.

O próximo resultado de ponto fixo é uma generalização do conhecido teorema de ponto fixo de Darbo. Abaixo, ξ denota a medida de não-compacidade de Kuratowski.

Lema 2.62. (89) *Sejam B um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X e $F : B \rightarrow B$ um operador contínuo tal que $F(B)$ é limitado. Para qualquer subconjunto limitado $C \subseteq B$, defina $F^1(C) = F(C)$ e $F^n(C) = F(\overline{\text{co}(F^{n-1}(C))})$, $n = 2, 3, \dots$. Se existe uma constante $0 \leq k < 1$ e um inteiro positivo n_0 tal que para qualquer subconjunto limitado $C \subseteq B$,*

$$\xi(F^{n_0}(C)) \leq k\xi(C),$$

então F possui um ponto fixo em B .

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em (86, Teorema 6.3.2).

Teorema 2.63 (Teorema do ponto fixo de Schauder). *Seja C um subconjunto convexo (não necessariamente fechado) de um espaço linear normado E . Então um mapa compacto $F : C \rightarrow C$ possui ao menos um ponto fixo.*

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em (86, Teorema 6.5.4).

Teorema 2.64 (Alternativa de Leray-Schauder). *Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach X , e assumamos que $0 \in C$. Considere $F : C \rightarrow C$ uma função completamente contínua, e seja*

$$\varepsilon(F) = \{x \in C; x = \lambda F(x) \text{ para algum } 0 < \lambda < 1\}.$$

Então $\varepsilon(F)$ é ilimitado ou F possui um ponto fixo.

Para utilizar o ?? vamos estabelecer um critério de compacidade em um espaço de Banach especial. Seja $h^* : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $h^*(t) \geq 1$ para todo $t \in [0, \infty)$, e $h^*(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Para o próximo resultado, vamos considerar o espaço

$$C_{h^*}(X) = \left\{ u \in C([0, \infty), X); \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{h^*(t)} = 0 \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_{h^*} = \sup_{t \geq 0} \frac{\|u(t)\|}{h^*(t)}.$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em (90, Lema 2.8).

Lema 2.65. *Um conjunto $K \subseteq C_{h^*}(X)$ é um conjunto relativamente compacto em $C_h(X)$ se ele verifica as seguintes condições:*

(c-1*) *Para todo $b \geq 0$, o conjunto $K_b = \{u|_{[0,b]}; u \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0,b]; X)$.*

(c-2*) *$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|u(t)\|}{h^*(t)} = 0$ uniformemente para todo $u \in K$; isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $T > 0$ tal que $\frac{\|u(t)\|}{h^*(t)} < \varepsilon$, para cada $t \geq T$, para todo $u \in K$.*

Agora, vamos estabelecer um critério de compacidade para outro espaço de Banach especial. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $h(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h(t) \rightarrow \infty$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Consideramos o espaço

$$C_h(X) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}; X); \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{h(t)} = 0 \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_h = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|u(t)\|}{h(t)}.$$

O seguinte lema pode ser encontrado em (91, Lema 2.6).

Lema 2.66. *Um conjunto $K \subseteq C_h(X)$ é um conjunto relativamente compacto em $C_h(X)$ se ele verifica as seguintes condições:*

(c-1) *O conjunto $K(t) = \{u(t); u \in K\}$ é relativamente compacto em X para cada $t \in \mathbb{R}$.*

(c-2) *O conjunto K é equicontínuo.*

(c-3) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $L > 0$ tal que $\|u(t)\| \leq \varepsilon h(t)$ para todo $u \in K$ e todo $|t| > L$.*

Para finalizar esta seção, enunciaremos o Teorema de Rellich-Kondrachov, a demonstração deste teorema pode ser encontrada em (92, Teorema 9.16).

Teorema 2.67 (Rellich-Kondrachov). *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto, limitado de classe C^1 com fronteira Γ limitada. Então nós temos as seguintes injeções compactas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*), \quad \text{em que } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad \text{se } p < N, \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty), \quad \text{se } p = N, \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}), \quad \text{se } p > N. \end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e todo N).

3 Periodicidade assintótica para equações de evolução hiperbólicas

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos condições suficientes para a existência e unicidade de uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica para a seguinte equação de evolução semilinear:

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

com $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ o gerador de um semigrupo hiperbólico sobre X e f é uma função contínua adequada.

Observamos que a existência de um semigrupo hiperbólico sobre um espaço de Banach X nos dá uma interessante informação algébrica sobre este espaço vetorial. De fato, seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo hiperbólico sobre X . Então existem subespaços fechados e $(T(t))_{t \geq 0}$ -invariantes, X_s e X_u , tais que $X = X_s \oplus X_u$. Além disso, os semigrupos restritos $(T_s(t))_{t \geq 0}$ sobre X_s e $(T_u(t))_{t \geq 0}$ sobre X_u possuem as seguintes propriedades:

- (i) O semigrupo $(T_s(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente estável sobre X_s .
- (ii) Os operadores $T_u(t)$ são inversíveis sobre X_u , e $(T_u(t)^{-1})_{t \geq 0}$ é uniformemente estável sobre X_u .

Esta decomposição algébrica será muito importante em nossa abordagem.

3.2 Existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas

Nesta seção lidaremos com resultados gerais sobre a existência de soluções (brandas) pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para o problema semilinear (3.1). Estudaremos este problema com hipóteses tipo Lipschitz sobre a não linearidade f . Nós provaremos cinco novos resultados (Teoremas 3.2, 3.5, 3.10, 3.12, 3.13). Também nós consideraremos o problema (3.1) com hipóteses complementares sobre o termo não-linear que permitem abordar novos resultados a equações mais gerais.

3.2.1 O caso linear

Para lidar com o problema semilinear (3.1), consideraremos primeiro o caso não-homogêneo

$$u'(t) = Au(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

em que $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é o gerador de um semigrupo hiperbólico $(T(t))_{t \geq 0}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função contínua.

Relembremos o seguinte conceito de solução branda de (3.2).

Definição 3.1 ((14)). Uma solução branda de (3.2) em X é uma função contínua limitada $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ que satisfaz

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-r)g(r)dr, \quad (3.3)$$

para todos $t, s \in \mathbb{R}$ com $t \geq s$.

Temos o seguinte resultado de existência de soluções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas para a equação (3.2).

Teorema 3.2. *Se g for uma função contínua limitada, então existirá uma única solução branda de (3.2) dada por*

$$u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)Pg(s)ds - \int_t^{\infty} T(t-s)Qg(s)ds, \quad (3.4)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, se g for pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então $u(\cdot)$ será também uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Observação 3.3. Um resultado similar ao teorema anterior foi obtido por Boulite et al. (14) para a existência de uma solução branda quase automórfica de (3.2). Nos últimos anos foi dada uma atenção notável às dinâmicas quase automórficas.

Demonstração do Teorema 3.2. Seja $u(t)$ definida por (3.4), então

$$\|u(t)\| \leq M \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \|g(s)\| ds + M \int_t^{\infty} e^{\mu(t-s)} \|g(s)\| ds \leq \frac{2M}{\mu} \|g\|_{C_b(\mathbb{R}; X)}.$$

Logo u é uma função limitada. Além disso,

$$\begin{aligned}
T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-r)g(r)dr &= \int_{-\infty}^s T(t-r)Pg(r)dr - \int_s^{\infty} T(t-r)Qg(r)dr \\
&\quad + \int_s^t T(t-r)g(r)dr \\
&= \int_{-\infty}^t T(t-r)Pg(r)dr + \int_s^t T(t-r)Qg(r)dr \\
&\quad - \int_s^{\infty} T(t-r)Qg(r)dr \\
&= \int_{-\infty}^t T(t-r)Pg(r)dr - \int_t^{\infty} T(t-r)Qg(r)dr \\
&= u(t),
\end{aligned}$$

para todo $t \geq s$ e todo $s \in \mathbb{R}$. Isso mostra que u é uma solução branda de (3.2).

Agora trataremos da unicidade, seja v uma função contínua limitada que satisfaz (3.3), então

$$Pv(t) = T(t-s)Pv(s) + \int_s^t T(t-\sigma)Pg(\sigma)d\sigma, \quad t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Como v é limitada, logo

$$\|T(t-s)Pv(s)\| \leq Me^{-\mu(t-s)}\|v\|_{C_b(\mathbb{R};X)}, \quad t \geq s.$$

Portanto $T(t-s)Pv(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$ e nós obtemos

$$Pv(t) = \int_{-\infty}^t T(t-\sigma)Pg(\sigma)d\sigma, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Note que,

$$Qv(t) = T(t-s)Qv(s) + \int_s^t T(t-\sigma)Qg(\sigma)d\sigma, \quad \text{para } t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

logo

$$T(t-s)Qv(s) = Qv(t) - \int_s^t T(t-\sigma)Qg(\sigma)d\sigma, \quad \text{para } t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Observamos que aplicando $T(s-t)$ em ambos os lados na igualdade acima, obtemos

$$Qv(s) = T(s-t)Qv(t) - \int_s^t T(s-\sigma)Qg(\sigma)d\sigma, \quad t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Aproveitando o fato que

$$\|T(s-t)Qv(t)\| \leq Me^{\mu(s-t)}\|v\|_{C_b(\mathbb{R};X)} \rightarrow 0, \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

nós imediatamente observamos que

$$Qv(s) = - \int_s^{\infty} T(s-\sigma)Qg(\sigma)d\sigma, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Segue das expressões (3.5),(3.6) que

$$v(t) = Pv(t) + Qv(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)Pg(s)ds - \int_t^{\infty} T(t-s)Qg(s)ds \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

isto é, $u = v$, o que demonstra a unicidade da solução.

Agora, suponhamos que g é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Note que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|u(s+\omega) - u(s)\|ds &\leq \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \left\| \int_{-\infty}^s T(s-\tau)P(g(\tau+\omega) - g(\tau))d\tau \right\| ds \\ &\quad + \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \left\| \int_s^{\infty} T(s-\tau)Q(g(\tau+\omega) - g(\tau))d\tau \right\| ds \\ &\leq \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \left\| \int_{-\infty}^{-t} T(s-\tau)P(g(\tau+\omega) - g(\tau))d\tau \right\| ds \\ &\quad + \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \left\| \int_{-t}^s T(s-\tau)P(g(\tau+\omega) - g(\tau))d\tau \right\| ds \\ &\quad + \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \left\| \int_s^t T(s-\tau)Q(g(\tau+\omega) - g(\tau))d\tau \right\| ds \\ &\quad + \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \left\| \int_t^{\infty} T(s-\tau)Q(g(\tau+\omega) - g(\tau))d\tau \right\| ds \\ &:= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t). \end{aligned}$$

Agora, estimaremos os termos $I_i(t)$ separadamente.

- Para o primeiro termo do lado direito,

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq \frac{M\|g\|_{\infty}}{t} \int_{-t}^t \int_{s+t}^{\infty} e^{-\mu\tau} d\tau ds \\ &= \frac{M\|g\|_{\infty}}{\mu t} \int_{-t}^t e^{-\mu(s+t)} ds \\ &\leq \frac{M\|g\|_{\infty}}{\mu^2} \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

de onde deduzimos que $I_1(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

- O termo $I_2(t)$ pode ser estimado por

$$\begin{aligned} I_2(t) &\leq \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_{-t}^s e^{-\mu(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau ds \\ &= \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \left(\int_{\tau}^t e^{-\mu(s-\tau)} ds \right) \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau \\ &\leq \frac{M}{\mu} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau \right), \end{aligned}$$

o que implica que $I_2(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

- O terceiro termo é limitado superiormente por

$$\begin{aligned} I_3(t) &\leq \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_s^t e^{\mu(s-\tau)} \|g(\tau + \omega) - g(\tau)\| d\tau ds \\ &= \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \left(\int_{-t}^{\tau} e^{\mu(s-\tau)} ds \right) \|g(\tau + \omega) - g(\tau)\| d\tau \\ &\leq \frac{M}{\mu} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|g(\tau + \omega) - g(\tau)\| d\tau \right), \end{aligned}$$

portanto $I_3(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

- Finalmente,

$$\begin{aligned} I_4(t) &\leq \frac{M\|g\|_{\infty}}{t} \int_{-t}^t \int_{t-s}^{\infty} e^{-\mu\tau} d\tau ds \\ &= \frac{M\|g\|_{\infty}}{\mu} \left(\frac{1}{t} \int_0^{2t} e^{-\mu s} ds \right) \\ &\leq \frac{M\|g\|_{\infty}}{\mu^2} \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

o que demonstra que $\lim_{t \rightarrow \infty} I_4(t) = 0$. Isto completa a demonstração que $u \in PSAP_{\omega}(X)$. $\square$

3.2.2 O caso semilinear

Nesta subseção estamos interessados em estudar a existência de soluções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas para a equação (3.1). Ao fazê-lo, usaremos a seguinte terminologia.

Definição 3.4. Uma função contínua limitada $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ que satisfaz a equação integral

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-\sigma)f(\sigma, u(\sigma))d\sigma, \quad t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

é chamada solução branda para a equação (3.1).

Iniciamos com o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X que verifica a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \quad (3.8)$$

em que $L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ é uma função tal que existe uma constante $K > 0$ com $\Theta(t) \leq K < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, em que

$$\Theta(t) = M \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} L(s) ds + M \int_t^{\infty} e^{\mu(t-s)} L(s) ds. \quad (3.9)$$

Então a equação (3.1) possui uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Seja $\Lambda : PSAP_\omega(\mathbb{R}; X) \rightarrow PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ o mapa definido por

$$\Lambda u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)Pf(s, u(s))ds - \int_t^\infty T(t-s)Qf(s, u(s))ds, \quad (3.10)$$

com $u \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$. Pelo Lema 2.21 a função $s \rightarrow f(s, u(s))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Além disso, pela demonstração do Teorema 3.2 nós inferimos que o operador Λ mapeia $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ em si mesmo. Para $u, v \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ nós obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|T(t-s)P(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|ds \\ &\quad + \int_t^\infty \|T(t-s)Q(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|ds \\ &\leq M \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} L(s) \|u(s) - v(s)\|ds \\ &\quad + M \int_t^\infty e^{\mu(t-s)} L(s) \|u(s) - v(s)\|ds \\ &\leq \Theta(t) \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\|\Lambda u - \Lambda v\|_\infty \leq K \|u - v\|_\infty$, e isto prova que Λ é uma contração sobre o espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$, portanto Λ possui um único ponto fixo $u \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$. A demonstração está completa. $\square$

Consideremos a seguinte condição.

(PS1) $\|L\| < (1 - e^{-\mu})/2M$, em que μ e M são dadas pela Definição 2.42 e $\|L\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} L(s)ds$.

Corolário 3.6. *Seja f uma função como no Teorema 3.5, com L satisfazendo (3.8). Se a condição (PS1) for satisfeita, então a conclusão do Teorema 3.5 será verificada.*

Demonstração. Seja $\Theta(t)$ como no Teorema 3.5. Precisamos estimar $\Theta(t)$, nós temos a seguinte limitação

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} L(s)ds &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{t-(m+1)}^{t-m} e^{-\mu(t-s)} L(s)ds \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\mu m} \int_{t-(m+1)}^{t-m} L(s)ds \\ &\leq \frac{1}{1 - e^{-\mu}} \|L\|, \end{aligned} \quad (3.11)$$

e analogamente, podemos checar que

$$\int_t^\infty e^{\mu(t-s)} L(s)ds \leq \frac{1}{1 - e^{-\mu}} \|L\|. \quad (3.12)$$

Por (3.11) e (3.12), deduzimos que

$$\Theta(t) \leq \frac{2M}{1 - e^{-\mu}} \|L\| < 1.$$

Por conseguinte, concluímos o resultado desejado. $\square$

Observação 3.7. O corolário anterior aplica-se no caso em que a função $L(\cdot)$ é uma função integrável com a L_1 -norma suficientemente pequena.

Outra aplicação interessando é a seguinte:

Corolário 3.8. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X , e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X que verifica a condição (3.8) com $L(\cdot)$ satisfazendo $\|L\|_\infty < \mu/2M$, em que $\|L\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} L(t)$. Então a equação (3.1) possui uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Observamos que f é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X . Além disso, $\Theta(t) \leq \frac{2M}{\mu} \|L\|_\infty < 1$. $\square$

Observação 3.9. Observe que o Corolário 3.8 inclui o caso em que L é uma constante suficientemente pequena.

Teorema 3.10. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X que verifica a condição de Lipschitz (3.8), com $L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ uma função localmente integrável tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t L(s) ds = 0$. Se, em adição, a condição **(PS1)** é satisfeita, então a equação (3.1) possui uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.*

Observação 3.11. Antes de desenvolver mais detalhes técnicos, devemos notar que no Corolário 3.6 usamos o fato que f é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X . Contudo, no Teorema 3.10 a perturbação f da equação (3.1) não é necessariamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , logo, nós não podemos usar o lema de composição para funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas (Lema 2.21). Para superar esta dificuldade nós precisamos usar uma decomposição adequada de $\int_{-t}^t \| \Lambda u(s + \omega) - \Lambda u(s) \| ds$, em que Λ é o operador definido por (3.10). Observamos que o Teorema 3.10 inclui o caso em que $L(\cdot)$ é uma função integrável não necessariamente limitada com a L_1 -norma suficientemente pequena.

Demonstração do Teorema 3.10. Definimos o mapa Λ sobre o espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ pela expressão (3.10). Devemos então provar que Λ está bem definido. Para mostrar esse

fato, primeiro notamos que a função $u(\cdot)$ é limitada, e segue da Definição 2.17 que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, u(t))\| < \infty$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t)\| &\leq M \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, u(t))\| \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} ds + M \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, u(t))\| \int_t^{\infty} e^{\mu(t-s)} ds \\ &= 2M \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, u(t))\| \int_0^{\infty} e^{-\mu s} ds \\ &= \frac{2M}{\mu} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, u(t))\|, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, nós temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|\Lambda u(s + \omega) - \Lambda u(s)\| ds &\leq \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \left\| \int_{-\infty}^{s+\omega} T(s + \omega - \tau) P f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^s T(s - \tau) P f(\tau, u(\tau)) d\tau \right\| ds \\ &\quad + \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \left\| \int_{s+\omega}^{\infty} T(s + \omega - \tau) Q f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_s^{\infty} T(s - \tau) Q f(\tau, u(\tau)) d\tau \right\| ds \\ &\leq \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \int_{-\infty}^s \|T(s - \tau) P(f(\tau + \omega, u(\tau + \omega)) - f(\tau, u(\tau)))\| d\tau ds \\ &\quad + \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \int_s^{\infty} \|T(s - \tau) Q(f(\tau + \omega, u(\tau + \omega)) - f(\tau, u(\tau)))\| d\tau ds \\ &:= I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Abaixo, vamos estimar os termos I_i , $i = 1, 2$, da expressão acima. Definimos $B = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

- Para o termo $I_1(t)$ nós obtemos

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_{-\infty}^{-t} e^{-\mu(s-\tau)} \|f(\tau + \omega, u(\tau + \omega)) - f(\tau, u(\tau))\| d\tau ds \\ &\quad + \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_{-t}^s e^{-\mu(s-\tau)} \|f(\tau + \omega, u(\tau + \omega)) - f(\tau, u(\tau + \omega))\| d\tau ds \\ &\quad + \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_{-t}^s e^{-\mu(s-\tau)} \|f(\tau, u(\tau + \omega)) - f(\tau, u(\tau))\| d\tau ds \\ &:= I_1^1(t) + I_1^2(t) + I_1^3(t). \end{aligned}$$

Em seguida, estimamos os termos $I_1^i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

- Para o termo $I_1^1(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} I_1^1(t) &\leq \frac{M}{t} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}, x \in B} \|f(t, x)\| \right) \int_{-t}^t \int_{s+t}^{\infty} e^{-\mu\tau} d\tau ds \\ &\leq \frac{M}{t\mu^2} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}, x \in B} \|f(t, x)\| \right) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.13}$$

•• Para o termo $I_1^2(t)$ nós temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
I_1^2(t) &\leq \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_{-t}^s e^{-\mu(s-\tau)} \sup_{x \in B} \|f(\tau + \omega, x) - f(\tau, x)\| d\tau ds \\
&= \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \left(\int_{\tau}^t e^{-\mu(s-\tau)} ds \right) \sup_{x \in B} \|f(\tau + \omega, x) - f(\tau, x)\| d\tau \\
&\leq \frac{M}{\mu} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sup_{x \in B} \|f(\tau + \omega, x) - f(\tau, x)\| d\tau \right) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

•• Para o termo $I_1^3(t)$, a estimativa

$$\begin{aligned}
I_1^3(t) &\leq \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_{-t}^s e^{-\mu(s-\tau)} L(\tau) \|u(\tau + \omega) - u(\tau)\| d\tau ds \\
&\leq \frac{M\|u\|_{\infty}}{t} \int_{-t}^t \left(\int_{\tau}^t e^{-\mu(s-\tau)} ds \right) L(\tau) d\tau \\
&\leq \frac{2M\|u\|_{\infty}}{\mu} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t L(\tau) d\tau \right)
\end{aligned}$$

implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_1^3(t) = 0. \quad (3.15)$$

De (3.13), (3.14) e (3.15) podemos deduzir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = 0. \quad (3.16)$$

• Resta examinar o termo $I_2(t)$, notamos que

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_s^t e^{\mu(s-\tau)} \|f(\tau + \omega, u(\tau + \omega)) - f(\tau, u(\tau + \omega))\| d\tau ds \\
&\quad + \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_s^t e^{\mu(s-\tau)} \|f(\tau, u(\tau + \omega)) - f(\tau, u(\tau))\| d\tau ds \\
&\quad + \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \int_t^{\infty} e^{\mu(s-\tau)} \|f(\tau + \omega, u(\tau + \omega)) - f(\tau, u(\tau))\| d\tau ds \\
&:= I_2^1(t) + I_2^2(t) + I_2^3(t).
\end{aligned}$$

Estimaremos os termos $I_2^i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

•• Estimamos o termo $I_2^1(t)$ por

$$\begin{aligned}
I_2^1(t) &\leq \frac{M}{2t} \int_{-t}^t \left(\int_0^{t+\tau} e^{-\mu s} ds \right) \sup_{x \in B} \|f(\tau + \omega, x) - f(\tau, x)\| d\tau \\
&\leq \frac{M}{\mu} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sup_{x \in B} \|f(\tau + \omega, x) - f(\tau, x)\| d\tau \right) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

•• Para o termo $I_2^2(t)$ temos a estimativa

$$\begin{aligned} I_2^2(t) &\leq \frac{M\|u\|_\infty}{t} \int_{-t}^t \int_s^t e^{\mu(s-\tau)} L(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{M\|u\|_\infty}{t} \int_{-t}^t \left(\int_{-t}^\tau e^{\mu(s-\tau)} ds \right) L(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{2M\|u\|_\infty}{\mu} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t L(\tau) d\tau \right) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.18)$$

•• Para o termo $I_2^3(t)$ nós obtemos

$$\begin{aligned} I_2^3(t) &\leq \frac{M}{t} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}, x \in B} \|f(t, x)\| \right) \int_{-t}^t \int_{t-s}^\infty e^{-\mu\tau} d\tau ds \\ &\leq \frac{M}{\mu^2 t} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}, x \in B} \|f(t, x)\| \right) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De (3.17), (3.18) e (3.19), inferimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0. \quad (3.20)$$

De (3.16) e (3.20), deduzimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|\Lambda u(s + \omega) - \Lambda u(s)\| ds = 0.$$

Por outro lado, podemos inferir que Λ é uma contração sobre $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$. Essa passagem pode ser obtida de maneira análoga ao argumento da demonstração do Corolário 3.6. Isto conclui a demonstração do teorema. $\square$

No próximo resultado nós devemos considerar perturbações locais de (3.1). No processo de obtenção de nosso resultado, vamos requerer a seguinte hipótese.

(C2) Assuma que $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ é localmente Lipschitziana com respeito a segunda variável, isto é, para cada número positivo σ , para todo $t \in \mathbb{R}$ e todos $x, y \in B_\sigma(X)$ nós temos $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_f(\sigma)\|x - y\|$, em que $L_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função não-decrescente.

Teorema 3.12. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X que satisfaz a condição (C2). Se existir $r > 0$ tal que*

$$\frac{2M}{\mu} \left(L_f(r) + \frac{1}{r} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, 0)\| \right) < 1, \quad (3.21)$$

então existirá uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica $u(\cdot)$ de (3.1).

Demonstração. Não é difícil verificar que a condição **(C2)** implica que f é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , logo, pela demonstração do Teorema 3.5, o mapa $\Lambda : PSAP_\omega(\mathbb{R}; X) \rightarrow PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ definido em (3.10) está bem definido. Além disso, como f é limitada sobre conjuntos limitados de X , logo $f(\cdot, 0)$ é uma função limitada em $\mathbb{R}$. Para $u \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ com $\|u\|_\infty \leq r$, nós obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t)\| &\leq M \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, 0)\| ds + M \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, 0)\| ds \\
&\quad + M \int_t^\infty e^{\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, 0)\| ds + M \int_t^\infty e^{\mu(t-s)} \|f(s, 0)\| ds \\
&\leq M \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} L_f(r) \|u(s)\| ds + M \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, 0)\| ds \\
&\quad + M \int_t^\infty e^{\mu(t-s)} L_f(r) \|u(s)\| ds + M \int_t^\infty e^{\mu(t-s)} \|f(s, 0)\| ds \\
&\leq \frac{2M}{\mu} L_f(r) \|u\|_\infty + \frac{2M}{\mu} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, 0)\| \\
&\leq \frac{2M}{\mu} \left(L_f(r)r + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, 0)\| \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Lambda u\|_\infty \leq r. \quad (3.22)$$

Por outro lado, para $u, v \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ com $\|u\|_\infty \leq r$ e $\|v\|_\infty \leq r$, nós obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\| &\leq ML(r) \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\quad + ML(r) \int_t^\infty e^{\mu(t-s)} \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq \frac{2ML(r)}{\mu} \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Isto menciona que

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_\infty \leq \frac{2ML(r)}{\mu} \|u - v\|_\infty. \quad (3.23)$$

De (3.21), (3.22) e (3.23) segue que Λ é uma contração sobre $B_r(PSAP_\omega(\mathbb{R}; X))$. Portanto existe um único ponto fixo $u \in B_r(PSAP_\omega(\mathbb{R}; X))$ de Λ . Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

Em seguida, vamos considerar perturbações mais gerais para a equação (3.1) do que as que temos considerado até agora. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $h(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h(t) \rightarrow \infty$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Consideremos o espaço

$$C_h(X) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}; X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{h(t)} = 0 \right\}$$

munido com a norma $\|u\|_h = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|u(t)\|}{h(t)}$. Denotamos por $\gamma(r, h)(t)$ e $\beta(r)$ as seguintes expressões

$$\gamma(r, h)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} W(rh(s)) ds + \int_t^{\infty} e^{\mu(t-s)} W(rh(s)) ds,$$

$$\beta(r) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{M}{h(t)} \gamma(r, h)(t).$$

Teorema 3.13. *Seja $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X . Além disso, as seguintes condições são cumpridas.*

(PS2) *Existe uma função contínua não-decrescente $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|f(t, x)\| \leq W(\|x\|)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in X$.*

(PS3) *Para cada $r > 0$, $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \gamma(r, h)(t) = 0$.*

(PS4) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todos $u, v \in C_h(X)$, $\|u - v\|_h < \delta$ implica que*

$$\int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds + \int_t^{\infty} e^{\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \leq \varepsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(PS5) *Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $r > 0$ o conjunto $\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b, x \in X, \|x\| \leq r\}$ é relativamente compacto em X .*

(PS6) $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\beta(r)} > 1$.

Então a equação (3.1) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Definimos o operador Λ sobre $C_h(X)$ por (3.10). Nosso objetivo é mostrar que Λ tem um ponto fixo em $PSAP_{\omega}(\mathbb{R}; X)$. Devemos mostrar que temos todas as condições necessárias para aplicar o teorema da alternativa de Leray-Schauder.

Procederemos em seis passos:

Passo 1. O primeiro passo em nossa análise será provar que Λ está bem definido. Seja u pertencente ao espaço $C_h(X)$, então

$$\begin{aligned} \frac{\|\Lambda u(t)\|}{h(t)} &\leq \frac{M}{h(t)} \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} W\left(\frac{\|u(s)\|}{h(s)} h(s)\right) ds \\ &\quad + \frac{M}{h(t)} \int_t^{\infty} e^{\mu(t-s)} W\left(\frac{\|u(s)\|}{h(s)} h(s)\right) ds \\ &\leq \frac{M}{h(t)} \gamma(\|u\|_h, h)(t). \end{aligned}$$

Logo, segue da condição **(PS3)** que Λu pertence ao espaço $C_h(X)$.

Passo 2. O mapa Λ é contínuo de $C_h(X)$ nele mesmo. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ a constante envolvida na condição **(PS4)**. Se $u, v \in C_h(X)$ com $\|u - v\|_h \leq \delta$, então

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\| &\leq M \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \\ &\quad + M \int_t^{\infty} e^{\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \leq M\varepsilon. \end{aligned}$$

Tendo em mente que $h(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos que $\|\Lambda u - \Lambda v\|_h \leq M\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isto mostra a afirmação.

Passo 3. Agora mostraremos que Λ é completamente contínuo. Tomemos $V = \Lambda(B_r(C_h(X)))$ e $v = \Lambda u$ para $u \in B_r(C_h(X))$.

• Inicialmente, provaremos que $V(t) = \{v(t) : v \in V\}$ é um subconjunto relativamente compacto de X para cada $t \in \mathbb{R}$. Utilizando a condição **(PS3)**, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $a > 0$ tal que

$$M \int_{-\infty}^{t-a} e^{-\mu(t-s)} W(rh(s)) ds + M \int_{t+a}^{\infty} e^{\mu(t-s)} W(rh(s)) ds \leq \varepsilon.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^a T(s)Pf(t-s, u(t-s))ds - \int_{-a}^0 T(s)Qf(t-s, u(t-s))ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t-a} T(t-s)Pf(s, u(s))ds - \int_{t+a}^{\infty} T(t-s)Qf(s, u(s))ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nós devemos checar que os últimos dois termos do lado direito da igualdade acima são dominados por ε .

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{-\infty}^{t-a} T(t-s)Pf(s, u(s))ds - \int_{t+a}^{\infty} T(t-s)Qf(s, u(s))ds \right\| \\ &\leq M \int_{-\infty}^{t-a} e^{-\mu(t-s)} W(h(s)r)ds + M \int_{t+a}^{\infty} e^{\mu(t-s)} W(h(s)r)ds < \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usando (3.24) e (3.25) nós agora obtemos

$$V(t) \subseteq \overline{aco(K_1)} + \overline{aco(K_2)} + B_\varepsilon(X),$$

em que $co(K_i)$ denota a envoltória convexa de K_i e chamamos

$$K_1 := \{T(s)Pf(\xi, h(\xi)x) : 0 \leq s \leq a, t-a \leq \xi \leq t, \|x\| \leq r\},$$

$$K_2 := \{-T(s)Qf(\xi, h(\xi)x) : -a \leq s \leq 0, t \leq \xi \leq t+a, \|x\| \leq r\}.$$

Usando a propriedade **(PS5)**, inferimos que K_i , $i = 1, 2$ é relativamente compacto, o que estabelece nossa afirmação.

• Agora mostraremos que V é equicontínuo. Seja $s > 0$, faremos a seguinte decomposição.

$$\begin{aligned}
\Lambda u(t+s) - \Lambda u(t) &= \int_t^{t+s} T(t+s-\tau)Pf(\tau, u(\tau))d\tau + \int_t^{t+s} T(t-\tau)Qf(\tau, u(\tau))d\tau \\
&\quad + \int_0^a (T(\tau+s)P - T(\tau)P)f(t-\tau, u(t-\tau))d\tau \\
&\quad + \int_{-a}^{-s} (T(\tau)Q - T(\tau+s)Q)f(t-\tau, u(t-\tau))d\tau \\
&\quad + \int_{-\infty}^{t-a} (T(t+s-\tau)P - T(t-\tau)P)f(\tau, u(\tau))d\tau \\
&\quad + \int_{t+a}^{\infty} (T(t-\tau)Q - T(t+s-\tau)Q)f(\tau, u(\tau))d\tau \\
&:= J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t) + J_5(t) + J_6(t).
\end{aligned}$$

Precisamos estimar os termos $J_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 6$. Resumidamente isto é feito como se segue: para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher s suficientemente pequeno e $a > 0$ tais que

$$Me^\mu \left(\int_{-\infty}^{t-a} e^{-\mu(t-\tau)} W(h(\tau)r) d\tau + \int_{t+a}^{\infty} e^{\mu(t-\tau)} W(h(\tau)r) d\tau \right) < \frac{\varepsilon}{6},$$

$$\|(T(\tau+s)P - T(\tau)P)f(t-\tau, u(t-\tau))\| < \frac{\varepsilon}{6a},$$

$$\|(T(\tau+s)Q - T(\tau)Q)f(t-\tau, u(t-\tau))\| < \frac{\varepsilon}{6a},$$

independente de $u \in B_r(C_h(X))$.

As seguintes estimativas são úteis:

$$\begin{aligned}
\|J_1(t) + J_2(t)\| &\leq M \int_t^{t+s} e^{-\mu(t+s-\tau)} W(h(\tau)r) d\tau + M \int_t^{t+s} e^{\mu(t-\tau)} W(h(\tau)r) d\tau \\
&\leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}, \\
\|J_3(t) + J_4(t)\| &\leq \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/3, \\
\|J_5(t)\| &\leq 2M \int_{-\infty}^{t-a} e^{-\mu(t-\tau)} W(h(\tau)r) d\tau, \\
\|J_6(t)\| &\leq 2Me^\mu \int_{t+a}^{\infty} e^{\mu(t-\tau)} W(h(\tau)r) d\tau, \\
\|J_5(t) + J_6(t)\| &\leq \varepsilon/6.
\end{aligned}$$

Essas estimativas provam que $\|\Lambda u(t+s) - \Lambda u(t)\| < \varepsilon$, para s suficientemente pequeno e independente de $u \in B_r(C_h(X))$, sendo assim, concluímos que V é equicontínuo.

• Vamos mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe $L > 0$ tal que $\|\Lambda u(t)\| \leq \varepsilon h(t)$ para todo $u \in B_r(C_h(X))$ e todo $|t| > L$. Observamos que $\frac{\|\Lambda u(t)\|}{h(t)} \leq \frac{M}{h(t)} \gamma(r, h)(t)$, para cada $u \in B_r(C_h(X))$. Isto, junto com a condição **(PS3)**, rende-nos que $\frac{\|\Lambda u(t)\|}{h(t)} \rightarrow 0$, quando $|t| \rightarrow \infty$, e esta convergência é independente de $u \in B_r(C_h(X))$.

• Portanto, o conjunto V satisfaz todas as condições do Lema 2.66, isto completa a demonstração que V é um conjunto relativamente compacto em $C_h(X)$.

Passo 4. Analisaremos agora a limitação do conjunto $\{u \in C_h(X) : u = \lambda \Lambda u, \lambda \in (0, 1)\}$. Seja u pertencente a $C_h(X)$ uma solução da equação $u = \lambda \Lambda u$, $\lambda \in (0, 1)$. Note que

$$\|u(t)\| \leq M\gamma(\|u\|_h, h)(t) \leq \beta(\|u\|_h)h(t).$$

Portanto,

$$\frac{\|u(t)\|}{h(t)} \leq \beta(\|u\|_h), \text{ for each } t \in \mathbb{R}.$$

Assim, nós provamos a estimativa

$$\frac{\|u\|_h}{\beta(\|u\|_h)} \leq 1. \quad (3.26)$$

Combinando a estimativa (3.26) com a condição **(PS6)**, concluímos que o conjunto mencionado acima é limitado.

Passo 5. Do Lema 2.21 e do Teorema 3.2, segue que Λ mapeia $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ nele mesmo. Pelo Passo 2, $\Lambda : C_h(X) \rightarrow C_h(X)$ é uma função contínua, logo $\Lambda^{-1} \left(\overline{PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)}^{C_h(X)} \right)$ é um conjunto fechado de $C_h(X)$. Disto e do fato que $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X) \subset \Lambda^{-1} \left(\overline{PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)}^{C_h(X)} \right)$, nós podemos considerar

$$\Lambda : \overline{PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)}^{C_h(X)} \rightarrow \overline{PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)}^{C_h(X)},$$

em que $\overline{B}^{C_h(X)}$ denota o fecho de um conjunto B no espaço $C_h(X)$. O argumento usado na primeira parte desta demonstração implica imediatamente que este mapa é completamente contínuo. Aplicando o teorema da alternativa de Leray-Schauder, Teorema 2.64, deduzimos que o mapa Λ possui um ponto fixo $u \in \overline{PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)}^{C_h(X)}$.

Passo 6. Para finalizar a demonstração do teorema, resta provar que u é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Seja $(u_n)_n$ uma sequência em $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$ tal que $u_n \rightarrow u$, quando $n \rightarrow \infty$ na norma $C_h(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ a constante vista na condição **(PS4)**, podemos selecionar $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ grande o suficiente de maneira que $\|u_n - u\|_h \leq \delta$ para todo $n \geq n_0$. Observamos que para $n \geq n_0$, $\|\Lambda u_n - \Lambda u\|_\infty \leq \varepsilon$. Isto significa que $(\Lambda u_n)_n$ converge para $\Lambda u = u$ uniformemente em $\mathbb{R}$. Isto implica que $u \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$, pois $(PSAP_\omega(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço completo. E isto conclui a demonstração. $\square$

3.3 Soluções brandas $PSAP_\omega$ em espaços intermediários

No que segue, estaremos interessados em soluções brandas $PSAP_\omega$ sobre X_α para a equação de evolução semilinear (3.1), em que A é um operador setorial ilimitado com domínio não necessariamente denso em um espaço de Banach X , e X_α , $\alpha \in (0, 1)$ é um espaço de Banach intermediário entre X e $D(A)$ (ver Definição 2.45). Assumimos que A é o gerador de um semigrupo analítico hiperbólico $(T(t))_{t \geq 0}$ (ver Lema 2.47) e $f : \mathbb{R} \times X_\alpha \rightarrow X$ é uma função apropriada.

Definição 3.14. Uma solução branda de (3.2) em X_α é uma função contínua limitada $u : \mathbb{R} \rightarrow X_\alpha$ satisfazendo (3.3).

Definição 3.15. Uma solução branda de (3.1) em X_α é uma função contínua limitada $u : \mathbb{R} \rightarrow X_\alpha$ satisfazendo (3.7).

Começamos com o seguinte resultado

Teorema 3.16. Se $g \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X)$, então existe uma única solução branda $u(\cdot) \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X_\alpha)$ de (3.2) dada por (3.4).

Demonstração. Seja $u(\cdot)$ a função definida por (3.4), então

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\alpha &\leq M(\alpha) \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-\gamma s} \|g(t-s)\| ds + C(\alpha) \int_0^\infty e^{-\delta s} \|g(s+t)\| ds \\ &\leq \left(M(\alpha) \gamma^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) + \frac{C(\alpha)}{\delta} \right) \|g\|_\infty, \end{aligned}$$

em que $\Gamma(\cdot)$ denota a função gama. Portanto a função $u : \mathbb{R} \rightarrow X_\alpha$ é limitada.

Por outro lado, a estimativa

$$\begin{aligned} \|u(s+\omega) - u(s)\|_\alpha &\leq \int_{-\infty}^s \|T(s-\tau)P(g(\tau+\omega) - g(\tau))\|_\alpha d\tau \\ &\quad + \int_s^\infty \|T(s-\tau)Q(g(\tau+\omega) - g(\tau))\|_\alpha d\tau \\ &\leq M(\alpha) \int_{-\infty}^s (s-\tau)^{-\alpha} e^{-\gamma(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau \\ &\quad + C(\alpha) \int_s^\infty e^{\delta(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau, \end{aligned}$$

nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|u(s+\omega) - u(s)\|_\alpha ds &\leq \frac{M(\alpha)}{2t} \int_{-t}^t \int_{-\infty}^s (s-\tau)^{-\alpha} e^{-\gamma(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau ds \\ &\quad + \frac{C(\alpha)}{2t} \int_{-t}^t \int_s^\infty e^{\delta(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau ds \\ &= \frac{M(\alpha)}{2t} \int_{-t}^t \int_{-\infty}^{-t} (s-\tau)^{-\alpha} e^{-\gamma(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau ds \\ &\quad + \frac{M(\alpha)}{2t} \int_{-t}^t \int_{-t}^s (s-\tau)^{-\alpha} e^{-\gamma(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau ds \\ &\quad + \frac{C(\alpha)}{2t} \int_{-t}^t \int_s^t e^{\delta(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau ds \\ &\quad + \frac{C(\alpha)}{2t} \int_{-t}^t \int_t^\infty e^{\delta(s-\tau)} \|g(\tau+\omega) - g(\tau)\| d\tau ds \\ &:= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t). \end{aligned}$$

Precisamos estimar os termos $I_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

- Para o termo $I_1(t)$ obtemos a seguinte cota superior

$$\begin{aligned}
 I_1(t) &\leq \frac{M(\alpha)\|g\|_\infty}{t} \int_{-t}^t \int_{s+t}^\infty \tau^{-\alpha} e^{-\gamma\tau} d\tau ds \\
 &\leq \frac{M(\alpha)\|g\|_\infty}{t} \left(\int_{-t}^t e^{-\gamma(s+t)} \int_{s+t}^{2t} \tau^{-\alpha} d\tau ds + (2t)^{1-\alpha} \int_{2t}^\infty e^{-\gamma\tau} d\tau \right) \\
 &= \frac{M(\alpha)\|g\|_\infty}{t} \left(\frac{(2t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_0^{2t} e^{-\gamma s} ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{2t} e^{-\gamma s} s^{1-\alpha} ds + \frac{1}{\gamma} (2t)^{1-\alpha} e^{-2\gamma t} \right) \\
 &\leq M(\alpha)\|g\|_\infty \left(\frac{2^{1-\alpha}}{\gamma(1-\alpha)} \frac{1}{t^\alpha} - \frac{\gamma^{\alpha-2}}{(1-\alpha)} \frac{1}{t} \int_0^{2t\gamma} e^{-s} s^{1-\alpha} ds + \frac{2^{1-\alpha}}{\gamma} t^{-\alpha} e^{-2\gamma t} \right),
 \end{aligned}$$

além disto, $\frac{1}{t} \int_0^{2\gamma t} s^{1-\alpha} e^{-s} ds \leq \int_0^\infty s^{(2-\alpha)-1} e^{-s} ds = \frac{1}{t} \Gamma(2-\alpha) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo, nós deduzimos que

$$I_1(t) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

- Vamos agora examinar o termo $I_2(t)$, argumentando como acima obtemos

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= \frac{M(\alpha)}{2t} \int_{-t}^t \left(\int_0^{t-\tau} s^{-\alpha} e^{-\gamma s} ds \right) \|g(\tau + \omega) - g(\tau)\| d\tau \\
 &\leq M(\alpha) \gamma^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|g(\tau + \omega) - g(\tau)\| d\tau \right),
 \end{aligned}$$

por isso,

$$I_2(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

- Fazendo uso de um argumento similar já feito na demonstração do Teorema 3.2, obtemos as seguintes estimativas para os termos $I_3(t)$ e $I_4(t)$.

$$\begin{aligned}
 I_3(t) &\leq \frac{C(\alpha)}{\delta} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \|g(\tau + \omega) - g(\tau)\| d\tau \right), \\
 I_4(t) &\leq \frac{C(\alpha)\|g\|_\infty}{\delta^2} \frac{1}{t},
 \end{aligned}$$

Consequentemente $I_i(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, $i = 3, 4$. Portando $u \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; X_\alpha)$, isto completa a demonstração. $\square$

Teorema 3.17. *Seja $f : \mathbb{R} \times X_\alpha \rightarrow X$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X_α , uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X_α , e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X_α que verifica a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|_\alpha, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X_\alpha, \quad (3.27)$$

em que $L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Se existir uma constante $v > 0$ tal que $\zeta(t) \leq v < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, em que

$$\zeta(t) = M(\alpha) \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(t-s)} L(s) ds + C(\alpha) \int_t^\infty e^{\delta(t-s)} L(s) ds,$$

então a equação (3.1) possuirá uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica em X_α .

Demonstração. Definimos o mapa Λ^{int} sobre o espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X_\alpha)$ pela expressão (3.10). Do Lema 2.21 e do Teorema 3.16 nós inferimos que Λ^{int} mapeia $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X_\alpha)$ nele mesmo. Finalmente, podemos deduzir que Λ^{int} é uma v -contração sobre o espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X_\alpha)$. O resultado segue disto. $\square$

Corolário 3.18. *Seja $f : \mathbb{R} \times X_\alpha \rightarrow X$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X_α , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X_α , e que verifica a condição de Lipschitz (3.27), com $L(\cdot)$ tal que $\|L\|_\infty$ seja suficientemente pequena. Então existe uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica de (3.1) em X_α .*

No processo para obter o próximo resultado, vamos requerer a seguinte hipótese

(C $_\alpha$) Assuma que $f : \mathbb{R} \times X_\alpha \rightarrow X$ é localmente Lipschitz contínua com respeito a segunda variável, isto é, para cada número positivo σ , para todo $t \in \mathbb{R}$ e quaisquer $x, y \in B_\sigma(X)$ nós temos $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_f(\sigma)\|x - y\|_\alpha$, onde $L_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função não decrescente.

Teorema 3.19. *Seja $f : \mathbb{R} \times X_\alpha \rightarrow X$ uma função limitada sobre conjuntos limitados de X_α , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X_α , e que satisfaz a condição (C $_\alpha$). Se existe $r > 0$ tal que*

$$(M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + C(\alpha)\delta^{-1}) \left(L_f(r) + \frac{1}{r} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, 0)\| \right) < 1,$$

então existe uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica (3.1) em X_α .

Demonstração. Definimos o mapa Λ^{int} sobre o espaço $PSAP_\omega(\mathbb{R}; X_\alpha)$ pela expressão (3.10). Seja u em $B_r(PSAP_\omega(\mathbb{R}; X_\alpha))$, então

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\Lambda^{int} u(t)\|_\alpha \leq \left(M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + \frac{C(\alpha)}{\delta} \right) \left(L(r) + \frac{1}{r} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, 0)\| \right) r \leq r.$$

Portanto $B_r(PSAP_\omega(\mathbb{R}; X_\alpha))$ é invariante pelo operador Λ^{int} . Por outro lado, Λ^{int} é uma v -contração, onde $v = \left(M(\alpha)\delta^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + \frac{C(\alpha)}{\delta} \right) L(r)$. Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

3.4 Aplicações e Métodos

Nesta seção, nós mostramos aplicações concretas de nossos resultados como também aplicamos nossos métodos para equações fracionárias.

Exemplo 3.20. Dado $k > 0$, consideramos o sistema escalar

$$\begin{cases} x'(t) &= -kx(t) + f_1(t), \\ y'(t) &= ky(t) + f_2(t), \end{cases} \quad (3.28)$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 \in PSAP_\omega(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Observamos que (3.28) pode ser reescrita na forma

$$z'(t) = Az(t) + g(t), \quad (3.29)$$

com

$$A = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \text{ e } g(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Claramente $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ e portanto

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-kt} & 0 \\ 0 & e^{kt} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

é um semigrupo hiperbólico com projeção $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e constantes $M = 1$ e $\mu = k$ (ver Definição 2.42). Então, pelo Teorema 3.2 equação (3.29) possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ com $x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-k(t-s)} f_1(s) ds$ e $y(t) = - \int_t^\infty e^{k(t-s)} f_2(s) ds$.

Vamos considerar outro tipo de problemas. Começamos com:

Exemplo 3.21. Consideremos $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica; sejam $\tilde{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua integrável e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana com $g(0) \neq 0$. Consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + a(t) \sin(\tilde{L}(t)) g(u(t, x)) \Phi_0(x), & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.30)$$

com $\Phi_0 \in C_0(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+, e^\tau d\tau)$. Para estudar este problema na forma abstrata (3.1), nós trabalhamos no espaço de Banach $X = C_0(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+, e^\tau d\tau)$ munido com a norma $\|x\|_X = \|x\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|x\|_{L^1(\mathbb{R}^+, e^\tau d\tau)}$. Seja A o operador dado por $A\varphi = \varphi'$ com domínio

$$D(A) = \{\varphi \in X : \varphi \in C^1(\mathbb{R}^+), \varphi' \in X\}.$$

Observe que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ (ver (93)). Nós podemos agora formular nosso resultado como segue.

Proposição 3.22. *Assuma que a norma L^1 da função $\tilde{L}(\cdot)$ em (3.30) é suficientemente pequena e que existe $K_g > 0$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq K_g |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Então existe uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica de (3.30).*

Demonstração. Para a conveniência do leitor, nós discutiremos brevemente alguns argumentos da demonstração da proposição. O problema (3.30) pode ser modelado como uma equação diferencial abstrata da forma (3.1) definindo $u(t)(x) = u(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$; para $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in X$ e $x \in \mathbb{R}^+$, definimos $f(t, \varphi(x))$ como a perturbação associada ao problema (3.30) e seja K um subconjunto limitado de X . Temos as seguintes estimativas:

$$\sup_{\varphi \in K} \|f(t, \varphi)\|_X \leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \left(K_g \sup_{\varphi \in K} \|\varphi\|_X + |g(0)| \right) \|\Phi_0\|_X, \quad (3.31)$$

$$\|f(t, \varphi) - f(s, \varphi)\| \leq \left(|a(t) - a(s)| + |a(s)| |\tilde{L}(t) - \tilde{L}(s)| \right) (K_g \|\varphi\|_X + |g(0)|) \|\Phi_0\|_X, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sup_{\varphi \in K} \|f(s + \omega, \varphi) - f(s, \varphi)\|_X ds &\leq \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t |a(s + \omega) - a(s)| ds + \frac{1}{t} \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \|\tilde{L}\|_1 \right) \\ &\times \left(K_g \sup_{\varphi \in K} \|\varphi\|_X + |g(0)| \right) \|\Phi_0\|_X, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\|_X \leq K_g \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} |\tilde{L}(t)| \|\Phi_0\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} \|\varphi - \psi\|_X, \quad (3.34)$$

onde $t, s \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi \in X$. Além disso, não é difícil observar que as estimativas (3.32) e (3.33) implicam que $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X . Note que (3.31) implica que f é limitada sobre conjuntos limitados de X . Da estimativa (3.34) segue a condição de Lipschitz (3.8) com $L(t) = K_g \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \|\Phi_0\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} |\tilde{L}(t)|$. Suponha que $\|\tilde{L}\|_1$ é suficientemente pequeno, pelo Teorema 3.10, o problema (3.30) possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica. $\square$

Exemplo 3.23. Dado $b > 0$, consideramos a seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + bu(t, x) + f\left(t, \frac{\partial}{\partial x} u(t, x)\right), & t \in \mathbb{R}, x \in [0, 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.35)$$

onde $u(t, x) \in \mathbb{R}$ e f é uma função contínua definida sobre $\mathbb{R}^2$. Definimos o operador A por $A\varphi = \varphi'' + b\varphi$, sobre o espaço $X = C([0, 1])$, com domínio

$$D(A) = \{\varphi \in C^2([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

É conhecido que A é um operador setorial e, portanto, A é o gerador de um semigrupo analítico que não é fortemente contínuo no zero (14). Além disso, o espectro de A é dado por $\sigma(A) = \{b - n^2\pi^2 : n \in \mathbb{N}\}$. Tomando b tal que $\frac{\sqrt{b}}{\pi} \in (1, \infty) \setminus \mathbb{Q}$, então $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Portanto, o semigrupo analítico gerado por A é hiperbólico. Tomamos $X_\alpha = D_A(\alpha, \infty)$, ver Observação 2.46, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, então

$$X_\alpha = C_0^{2\alpha}([0, 1]) = \{\varphi \in C^{2\alpha}([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Em (3.35) nós supomos, por exemplo, um termo não linear $F : \mathbb{R} \times C_0^{2\alpha}([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ dado por

$$F(t, \varphi)(x) = f(t, \varphi'(x)) = \frac{ka(t)}{1 + |\varphi'(x)|},$$

onde $a(\cdot)$ é uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Note que F é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $C_0^{2\alpha}([0, 1])$ e é globalmente $k\|a\|_{C_b(\mathbb{R})}$ -Lipschitziana. Se k é suficientemente pequena, então, pelo Corolário 3.18, deduzimos que (3.35) possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica.

Exemplo 3.24. Sejam $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica e $h(t)$ uma função contínua tal que $h(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h(t) \rightarrow \infty$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Seja $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \Phi(|x - y|)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, onde $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua não-decrescente que satisfaz as hipóteses **(F1)** e **(F2)** de (13, Seção 4), que são

$$\textbf{(F1)} \quad \Phi_\infty = \sup_{t \geq 0} \Phi(t) < \infty, \quad \Phi(0) = 0,$$

$$\textbf{(F2)} \quad \text{Para todo } \sigma > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\sigma}{h(s)}\right) ds < +\infty.$$

Consideramos a seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + \sigma u(t, x) + a(t) \tilde{f}\left(\int_0^\pi h^{-1}(t) u(t, \zeta) d\zeta\right) \Phi_0(x), & t \in \mathbb{R}, x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.36)$$

onde $\sigma > 0$, e $\Phi_0 \in L^2[0, \pi]$.

Definimos o operador A por $A\psi = \psi'' + \sigma\psi$, para todo $\psi \in D(A)$, onde

$$D(A) := \{\psi \in L^2[0, \pi] : \psi'' \in L^2[0, \pi] \text{ e } \psi(0) = \psi(\pi) = 0\}.$$

Observamos que A é setorial, e portanto A é o gerador de um semigrupo analítico $T(t)$. O espectro de A é dado por $\sigma(A) = \{-n^2 + \sigma : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, sempre que $\sigma \neq n^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então o semigrupo $T(t)$ é hiperbólico.

Seja $f(t, \varphi)$ dada por

$$f(t, \varphi)(x) = a(t) \tilde{f}\left(\int_0^\pi h^{-1}(t) \varphi(\zeta) d\zeta\right) \Phi_0(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L^2[0, \pi].$$

Consideremos K um subconjunto limitado de $L^2[0, \pi]$, sejam u e v em $C_h(L^2[0, \pi])$ e $\varphi, \psi \in L^2[0, \pi]$. Temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi)\|_{L^2[0, \pi]} &\leq |a(t)| \left(\Phi(h^{-1}(t) \sqrt{\pi} \|\varphi\|_{L^2[0, \pi]}) + |\tilde{f}(0)| \right) \|\Phi_0\|_{L^2[0, \pi]} \\ &\leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \left(\Phi(\sqrt{\pi} \|\varphi\|_{L^2[0, \pi]}) + |\tilde{f}(0)| \right) \|\Phi_0\|_{L^2[0, \pi]}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\|_{L^2[0, \pi]} \leq \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \|\Phi_0\|_{L^2[0, \pi]} \Phi(\sqrt{\pi} \|\varphi - \psi\|_{L^2[0, \pi]}), \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \sup_{\|\varphi\|_{L^2[0, \pi]} \leq r} \|f(s + \omega, \varphi) - f(s, \varphi)\|_{L^2[0, \pi]} ds \\ & \leq \left(\Phi(\sqrt{\pi} r) + |\tilde{f}(0)| \right) \|\Phi_0\|_{L^2[0, \pi]} \left(\frac{1}{2t} \int_{-t}^t |a(s + \omega) - a(s)| ds \right) \\ & \quad + \|\Phi_0\|_{L^2[0, \pi]} \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \left(\frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{2\sqrt{\pi} r}{h(s)}\right) ds \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\frac{\gamma(r, h)(t)}{h(t)} \leq \frac{2\|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \left(\Phi_{\infty} + |\tilde{f}(0)| \right) \|\Phi_0\|_{L^2[0, \pi]}}{\mu h(t)}, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_{L^2[0, \pi]} ds + \int_t^{\infty} e^{\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_{L^2[0, \pi]} ds \\ & \leq \frac{2}{\mu} \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} \|\Phi_0\|_{L^2[0, \pi]} \Phi(\sqrt{\pi} \|u - v\|_h). \end{aligned} \quad (3.41)$$

De (3.37) deduzimos que $f : \mathbb{R} \times L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$ é limitada sobre conjuntos limitados de $L^2[0, \pi]$. A estimativa (3.38) implica que f é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de $L^2[0, \pi]$. A estimativa (3.39) implica que f é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $L^2[0, \pi]$. De (3.37) podemos definir W em **(PS2)** como $W(\xi) = \|a\|_{C_b(\mathbb{R})} (\Phi(\sqrt{\pi}\xi) + |\tilde{f}(0)|) \|\Phi_0\|_{L^2[0, \pi]}$. Segue de (3.40) que a condição **(PS3)** é satisfeita. Como $\Phi(\cdot)$ é contínua, a estimativa (3.41) mostra que **(PS4)** é assegurada. Observamos que (94, Teorema 1) implica que a condição **(PS5)** está assegurada. Pelo Teorema 3.13 o problema (3.36) possui uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica.

4 Periodicidade assintótica para sistemas de estruturas flexíveis

4.1 Introdução

A dinâmica de vibrações lineares de estruturas elásticas é matematicamente regida por uma equação de onda (35). Porém, a dinâmica das vibrações elásticas de estruturas flexíveis é, na prática, não-linear. Em (29), Borse e Gorain mostraram que a dinâmica de vibrações de estruturas flexíveis que possuem material de amortecimento interno é modelada por uma equação da forma

$$\lambda u''' + u'' = c^2(\Delta u + \mu \Delta u'), \quad 0 < \lambda < \mu,$$

sobre um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave Γ , em que Δ denota o operador Laplaciano e $c > 0$ é a constante velocidade de onda.

Nosso propósito é analisar a periodicidade assintótica da equação

$$\lambda u'''(t, x) + u''(t, x) - c^2(\Delta u(t, x) + \mu \Delta u'(t, x)) = g(t, u(t, x)), \quad t \geq 0.$$

Observamos que por (40) o operador Δ é o gerador de uma família $(\lambda, c^2, c^2\mu)$ -regularizada em L^2 (ver Definição 4.1).

Consideremos a seguinte equação abstrata

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

em que A é um operador linear fechado agindo sobre um espaço de Banach X , $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ e f é uma função com valores em X . Estamos interessados com o estudo de condições suficientes para a existência e unicidade de uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica para equações semilineares abstratas da forma

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

Isto é conseguido por um método misto, combinando ferramentas de certas famílias fortemente contínuas da teoria de operadores com a teoria de ponto fixos.

4.2 Famílias regularizadas

Sejam $\alpha, \beta, \gamma > 0$ dados. Seguindo (37), denotamos

$$a(t) = -(\alpha\beta - \gamma) + \beta t + (\alpha\beta - \gamma)e^{-t/\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.3)$$

e

$$k(t) = -\alpha + t + \alpha e^{-t/\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.4)$$

A fim de dar uma definição consistente de solução branda para a equação (4.2) com base em uma abordagem teórica de operadores, definimos famílias (α, β, γ) -regularizadas como segue.

Definição 4.1. (37) Seja A um operador linear fechado com domínio $D(A)$ definido sobre um espaço de Banach X . Dizemos que A é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$, se as seguintes condições são satisfeitas:

($\mathcal{R}_1$) $\mathcal{R}(t)$ é fortemente contínua sobre $\mathbb{R}^+$ e $\mathcal{R}(0) = 0$;

($\mathcal{R}_2$) $\mathcal{R}(t)D(A) \subseteq D(A)$ e $A\mathcal{R}(t)x = \mathcal{R}(t)Ax$, para todo $x \in D(A)$, $t \geq 0$;

($\mathcal{R}_3$) A seguinte equação é assegurada:

$$\mathcal{R}(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)\mathcal{R}(s)Axd s, \quad \text{para todo } x \in D(A), \quad t \geq 0.$$

Neste caso, $\mathcal{R}(t)$ é chamada família (α, β, γ) -regularizada gerada por A .

Por (95), resultados sobre perturbação, aproximação, comportamento assintótico, representação, bem como tipos de teoremas ergódicos para famílias (α, β, γ) -regularizadas podem ser deduzidos do contexto mais geral de famílias (a, k) -regularizadas. Notamos que uma família (α, β, γ) -regularizada corresponde exatamente a uma família (a, k) -regularizada com a e k definidas em (4.3) e (4.4), respectivamente.

Observação 4.2. (37) A é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada se, e somente se, existe $\tilde{\mu} \geq 0$ e uma função fortemente contínua $\mathcal{R} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ tal que

$$\left\{ \frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > \tilde{\mu} \right\} \subseteq \rho(A)$$

e

$$\frac{1}{\beta + \gamma\lambda} \left(\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} - A \right)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{R}(t)x dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > \tilde{\mu}, \quad x \in X.$$

Observação 4.3. Seja $-B$ um operador auto-adjunto positivo sobre um espaço de Hilbert H tal que $\alpha\beta \leq \gamma$. Então B é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada limitada sobre H , $\{\mathcal{R}(t)\}_{t \geq 0}$, que é dada por

$$\hat{\mathcal{R}}(\lambda) = \frac{1}{\beta + \gamma\lambda} \left(\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^3}{\beta + \gamma\lambda} - B \right)^{-1},$$

$\operatorname{Re}\lambda > 0$, em que $\hat{\mathcal{R}}$ denota a Transformada de Laplace de $\mathcal{R}$, mais detalhes são feitos em (40).

Como na situação da teoria de semigrupo, temos diversas relações de uma família (α, β, γ) -regularizada e seu gerador.

Proposição 4.4. (37) *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A . Então:*

(a) $\mathcal{R}(\cdot)x \in C^2(\mathbb{R}^+; X)$, para todo $x \in D(A)$;

(b) *Seja $x \in X$ e $t \geq 0$, então $\int_0^t a(t-s)\mathcal{R}(s)xds$ pertence à $D(A)$ e*

$$\mathcal{R}(t)x = k(t)x + A \int_0^t a(t-s)\mathcal{R}(s)xds.$$

O seguinte resultado é uma extensão da fórmula de variação de parâmetros padrão para o problema de Cauchy de segunda ordem, o qual dá uma descrição completa das soluções para a equação linear abstrata (4.1) com condições iniciais $u(0) = x$, $u'(0) = y$, $u''(0) = z$, considerando A o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$. Por uma solução forte de (4.1) nós entendemos que é uma função $u \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^3(\mathbb{R}^+; X)$ tal que $u' \in C(\mathbb{R}^+; D(A))$ e que verifica (4.1).

Proposição 4.5. (37) *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A . Se $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+, D(A^2))$, $x \in D(A^3)$, $y \in D(A^2)$ e $z \in D(A^2)$, então $u(t)$ dada por*

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}''(t)x + \mathcal{R}'(t)x - \gamma A \mathcal{R}(t)x + \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

é uma solução de (4.1).

4.2.1 Regularidade da convolução

Assuma que A é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada e diferenciável $\mathcal{R}(t)$. A seguinte hipótese foi introduzida em (37):

(ED) Existem constantes $M > 0$ e $\mu > 0$ tais que $\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} + \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Me^{-\mu t}$, para todo $t \geq 0$.

Para resumir, dizemos que $\mathcal{R}(t)$ e $\mathcal{R}'(t)$ são exponencialmente estáveis. O seguinte resultado sobre regularidade da convolução sob funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas é um ingrediente essencial para obtermos nossos resultados.

Lema 4.6. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada exponencialmente estável sobre X com gerador A . Se u pertence à $PSAP_\omega(X)$, então a função $v : [0, \infty) \rightarrow X$ definida por*

$$v(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)u(s)ds$$

pertence à $PSAP_\omega(X)$.

Demonstração. Temos a seguinte estimativa

$$\|v(t)\|_X \leq M\|u\|_\infty \left(\int_0^t e^{-\mu s} ds \right) \leq \frac{M}{\mu} \|u\|_\infty,$$

em que M é a constante envolvida na condição **(ED)**. Consequentemente $v \in C_b([0, \infty); X)$. Ademais, para $t \geq \sigma \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \|v(\tau + \omega) - v(\tau)\|_X d\tau &\leq \frac{M}{t} \int_0^t \int_0^\omega e^{-\mu(\tau + \omega - \xi)} \|u(\xi)\|_X d\xi d\tau \\ &\quad + \frac{M}{t} \int_0^t \int_0^\tau e^{-\mu(\tau - \xi)} \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi d\tau \\ &\leq \frac{M}{t} \int_0^t \int_\tau^{\tau + \omega} e^{-\mu\xi} \|u(\tau + \omega - \xi)\|_X d\xi d\tau \\ &\quad + \frac{M}{t} \int_0^t \int_\xi^t e^{-\mu(\tau - \xi)} \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\tau d\xi \\ &:= I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Agora, estimaremos os termos $I_i(t)$ separadamente.

Para o primeiro termo do lado direito nós temos

$$I_1(t) \leq \frac{M\|u\|_\infty}{t} \int_0^t \int_\tau^{\tau + \omega} e^{-\mu\xi} d\xi d\tau \leq \frac{M\|u\|_\infty \omega}{t} \int_0^t e^{-\mu\tau} d\tau \leq \frac{M\|u\|_\infty \omega}{\mu t},$$

de onde nós inferimos que

$$I_1(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Estimamos o segundo termo por

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{M}{t} \int_0^t \left(\int_0^{t-\xi} e^{-\mu\tau} d\tau \right) \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi \\ &\leq \frac{M}{t} \left(\int_0^\infty e^{-\mu\tau} d\tau \right) \left(\int_0^t \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi \right) \\ &= \frac{M}{\mu} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\|_X d\xi \right), \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0.$$

Isto completa a prova que $v \in PSAP_\omega(X)$. □

4.3 Existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas

Nesta seção, discutimos a existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para as equações (4.1) e (4.2).

4.3.1 O caso linear

Nesta subseção, examinamos a existência e unicidade de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para a equação linear abstrata (4.1).

Teorema 4.7. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição **(ED)**. Se $f \in PSAP_\omega(X)$ é tal que $f(t) \in D(A^2)$ para todo $t \geq 0$, então a equação (4.1) com condições iniciais $u(0) = 0$, $u'(0) = y \in D(A^2)$ e $u''(0) = z \in D(A^2)$ possui uma única solução forte $u \in PSAP_\omega(X)$.*

Demonstração. Considere f em $PSAP_\omega(X)$ tal que $f(t) \in D(A^2)$ e $y, z \in D(A^2)$. Da Proposição 4.5, a solução para a equação (4.1) é dada por

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s)ds.$$

O Lema 4.6 implica que a função $t \rightarrow \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s)ds$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Além disso, não é difícil verificar que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\alpha}{t} \int_0^t (\mathcal{R}'(\tau + \omega)y - \mathcal{R}'(\tau)y)d\tau \right\|_X &\leq \frac{\alpha}{t} \int_0^t \|\mathcal{R}'(\tau + \omega)y - \mathcal{R}'(\tau)y\|_X d\tau \\ &\leq \frac{2M\alpha}{t} \left(\int_0^t e^{-\mu\tau} d\tau \right) \|y\|_X \leq \frac{2M\alpha}{\mu t}, \end{aligned}$$

por isso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{t} \int_0^t (\mathcal{R}'(\tau + \omega) - \mathcal{R}'(\tau)y)d\tau = 0. \quad (4.6)$$

Podemos deduzir por um caminho análogo que $\mathcal{R}(\cdot)y$ é uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Portanto, $u \in PSAP_\omega(X)$. $\square$

Observação 4.8.

- (a) Um resultado similar ao teorema anterior foi obtido em (37) onde foi assumido que a perturbação f fosse uma função assintoticamente ω -periódica.
- (b) Em (43), Cuevas e Lizama estudaram a boa colocação em espaços de Hölder para a equação (4.1) definida em $\mathbb{R}$. Para obter seus resultados, eles usaram um teorema de multiplicador devido a Arendt et al. (44, Teorema 5.3).

Corolário 4.9. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família $(0, \beta, \beta)$ -regularizada sobre X com gerador A e assumamos que $\mathcal{R}(t)$ tende a zero exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Se $f \in PSAP_\omega(X)$ é tal que $f(t) \in D(A^2)$ para todo $t \geq 0$, então a equação*

$$\begin{cases} u''(t) = \beta(Au(t) + Au'(t)) + f(t), & t \geq 0, \\ u(0) = 0, & u'(0) = y \in D(A^2), \end{cases}$$

possui uma solução $u \in PSAP_\omega(X)$.

4.3.2 O caso semilinear

Agora, nós vamos considerar a equação (4.2) com condições iniciais

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = y, \quad u''(0) = z. \quad (4.7)$$

Para começar, vamos relembrar a definição de solução branda para (4.2)-(4.7).

Definição 4.10. (37) Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A . Uma função contínua $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ satisfazendo a integral

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds,$$

onde $y, z \in X$, é chamada solução branda para o problema (4.2)-(4.7).

Inicialmente nós estudaremos condições para existência e unicidade de soluções brandas do problema (4.2)-(4.7) quando a função f for Lipschitz contínua.

Teorema 4.11. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição **(ED)**. Assuma que $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , e que verifica a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f \|x - y\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x, y \in X. \quad (4.8)$$

Se $\frac{M}{\mu} L_f < 1$, então existe uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica $u(\cdot)$ de (4.2)-(4.7).

Demonstração. Definimos o operador Λ sobre o espaço $PSAP_\omega(X)$ pela expressão

$$\Lambda u(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)y + \mathcal{R}(t)y + \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds. \quad (4.9)$$

Mostraremos inicialmente que Λu está em $PSAP_\omega(X)$ sempre que $u \in PSAP_\omega(X)$. Segue de nossas hipóteses que $f(\cdot, u(\cdot))$ é uma função limitada. Além disso, usando a condição **(ED)**, obtemos a seguinte estimativa:

$$\|\Lambda u\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq (\alpha + 1)M\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \frac{M}{\mu} \|f(\cdot, u(\cdot))\|_{C_b([0, \infty); X)}. \quad (4.10)$$

Da demonstração do Teorema 4.7, os primeiros três termos do lado direito de (4.9) são funções pseudo S -assintoticamente ω -periódicas. Por outro lado, pelo Lema 2.13, a função $s \rightarrow f(s, u(s))$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica, logo, pelo Lema 4.6,

$\int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s))ds \in PSAP_\omega(X)$. Além disso, para $u, v \in PSAP_\omega(X)$, temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\| &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq M L_f \left(\int_0^t e^{-\mu s} ds \right) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq \frac{M L_f}{\mu} \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}, \end{aligned}$$

o que prova que Λ é uma contração sobre o espaço $PSAP_\omega(X)$, disto, nós concluímos que Λ possui um único ponto fixo $u \in PSAP_\omega(X)$. A demonstração está completa. $\square$

Observação 4.12. Sob as condições do Teorema 4.11, nós temos a seguinte estimativa para a solução $u(\cdot)$ de (4.2)-(4.7):

$$\sup_{t \geq 0} \frac{\|u(t)\|_X}{e^{ML_f t}} \leq M((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M}{\mu} \|f(\cdot, 0)\|_{C_b([0, \infty); X)}.$$

De fato,

$$\|u(t)\|_X \leq M e^{-\mu t} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s))\|_X ds.$$

Logo

$$e^{\mu t} \|u(t)\|_X \leq M((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M \int_0^t e^{\mu s} \|f(s, 0)\|_X ds + M L_f \int_0^t e^{\mu s} \|u(s)\|_X ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwall-Bellman, segue que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_X &\leq \left(\frac{M}{e^{\mu t}} ((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, 0)\|_X ds \right) e^{ML_f t} \\ &\leq \left(M((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M}{\mu} \|f(\cdot, 0)\|_{C_b([0, \infty); X)} \right) e^{ML_f t}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\|u(t)\|_X}{e^{ML_f t}} \leq M((\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha\|z\|_X) + \frac{M}{\mu} \|f(\cdot, 0)\|_{C_b([0, \infty); X)}.$$

Isto conclui a discussão da Observação 4.12.

A observação seguinte pode ser pensada como um resultado de perturbação.

Observação 4.13. Sob as condições do Teorema 4.11 com a constante de Lipschitz L_f não necessariamente pequena, existe um $\lambda_0 > 0$ tal que, para qualquer $\lambda \in [0, \lambda_0]$, o Teorema 4.11 pode ser aplicado para a função $\lambda f(t, x)$.

Observação 4.14. Um resultado similar ao teorema anterior foi obtido em (37) quando f , satisfazendo (4.8), é assintoticamente quase periódica, ver Definição 2.3.

Antes de discutir o próximo teorema, temos a seguinte observação.

Observação 4.15. Consideremos o seguinte problema semilinear

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.11)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = z, \quad (4.12)$$

em que A é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ que satisfaz a condição **(ED)**, e $f : [0, \infty) \times X \times X \rightarrow X$ é uma função contínua assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de $X \times X$ e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $X \times X$ tal que

$$\|f(t, x, x') - f(t, y, y')\|_X \leq L_1 \|x - y\|_X + L_2 \|x' - y'\|_X, \quad \forall x, y, x', y' \in X, t \geq 0.$$

Por (96), uma função contínua $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ satisfazendo a equação integral

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds, \quad \forall t \geq 0,$$

onde $z \in D(A)$, é chamada solução branda para o problema (4.11)-(4.12).

Dizemos que f é uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica diferenciável se $f, f' \in PSAP_\omega(X)$. Note que se $f \in PSAP_\omega(X)$ é diferenciável e f' é uniformemente contínua, então $f' \in PSAP_\omega(X)$. Denotamos por $PSAP_\omega^1(X)$ o conjunto de todas as funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas diferenciáveis. O conjunto $PSAP_\omega^1(X)$ é um espaço de Banach munido com a norma $\|f\|_{PSAP_\omega^1(X)} = \|f\|_{C_b([0, \infty); X)} + \|f'\|_{C_b([0, \infty); X)}$.

Repetindo maior parte das demonstrações anteriores, não é difícil observar que se $2 \max\{L_1, L_2\}M\mu^{-1} < 1$, então o problema (4.11)-(4.12) possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica diferenciável.

Demonstração. Definimos o operador $\tilde{\Lambda}$ sobre o espaço $PSAP_\omega^1(X)$ por

$$\tilde{\Lambda}u(t) = \alpha \mathcal{R}(t)z + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds.$$

Como $\mathcal{R}(0) = 0$ e $z \in D(A)$, então

$$(\tilde{\Lambda}u)'(t) = \alpha \mathcal{R}'(t)z + \int_0^t \mathcal{R}'(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds.$$

Pelos Lemas 2.13 e 4.6, as funções $\tilde{\Lambda}u$ e $(\tilde{\Lambda}u)'$ pertencem a $PSAP_\omega(X)$. Portanto, $\tilde{\Lambda} : PSAP_\omega^1(X) \rightarrow PSAP_\omega^1(X)$ está bem definido. Com alguns cálculos mostra-se que o operador $\tilde{\Lambda}$ é uma $2M \max\{L_1, L_2\}\mu^{-1}$ -contração. $\square$

Antes do próximo Teorema, vamos definir o espaço ergódico

$$PAP_0(X) = \left\{ \phi \in C_b([0, \infty); X) : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\phi(t)\|_X dt = 0 \right\}. \quad (4.13)$$

É conhecido que uma função u pertence a $PAP_0(X)$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, o conjunto $C_\epsilon = \{t \in [0, \infty) : \|u(t)\|_X \geq \epsilon\}$ é um conjunto ergódico (97).

Teorema 4.16. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição **(ED)**. Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq L_f(t) \|x - y\|_X, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x, y \in X, \quad (4.14)$$

em que $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função integrável e limitada sobre $[N, \infty)$, para alguma constante $N > 0$. Então o problema (4.2)-(4.7) possui uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Usaremos as mesmas notações da demonstração do Teorema 4.11. Dividimos a demonstração em dois passos.

Passo 1. O primeiro passo em nossa análise será provar que Λ está bem definido. Inicialmente observamos que f satisfaz a condição **(C1)** do Lema 2.15. De fato, sejam u e v pertencentes a $C_b([0, \infty); X)$ tais que $v - u$ está no espaço ergódico $PAP_0(X)$, definido em (4.13). Tomamos $K = \text{Im}(u) \cup \text{Im}(v)$. Pela Definição 2.12 existe $T_K > 0$ tal que o conjunto $\{f(t, x) : t \geq T_K, x \in K\}$ é limitado. Por outro lado, existe $N > 0$ tal que $\{L_f(t) : t \geq N\}$ é limitado. Escolhemos $T = \max\{N, T_K\}$. Como f , u e v são funções contínuas, logo $f(\cdot, u(\cdot))$ e $f(\cdot, v(\cdot))$ são limitadas em $[0, T]$. Tomamos

$$L_f^\infty := \sup_{t \geq N} L_f(t),$$

$$\mathcal{K}_{u,v} := \sup_{t \in [0, T]} \|f(s, u(s))\|_X + \sup_{t \in [0, T]} \|f(s, v(s))\|_X,$$

$$\mathcal{K}_{T,K} := \sup_{(t,x) \in [T, \infty) \times K} \|f(t, x)\|_X,$$

e para $\epsilon > 0$, tomamos $C_\epsilon = \{t \in [0, \infty) : \|v(t) - u(t)\| \geq \epsilon\}$. Para $t \geq T$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds &\leq \frac{1}{t} \int_0^T \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_{C_\epsilon \cap [T, t]} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds + \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_{[T, t] \setminus C_\epsilon} L_f(s) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq \frac{1}{t} \mathcal{K}_{u,v} T + \frac{2}{t} \mathcal{K}_{T,K} \lambda(C_\epsilon \cap [T, t]) + \frac{L_f^\infty}{t} \epsilon(t - T). \end{aligned}$$

Como C_δ é um conjunto zero ergódico, logo $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds = 0$. Por conseguinte, se u pertence a $PSAP_\omega(X)$, então segue do Lema 2.15 que a função $s \rightarrow f(s, u(s))$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica, e, pelo Lema 4.6, $\Lambda u \in PSAP_\omega(X)$. Portanto Λ está bem definido.

Passo 2. O mapa Λ possui um único ponto fixo em $PSAP_\omega(X)$. Se $u, v \in PSAP_\omega(X)$, então

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq M \left(\int_0^t L_f(s) ds \right) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq M \|L_f\|_1 \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|(\Lambda^2 u)(t) - (\Lambda^2 v)(t)\|_X &\leq M^2 \left(\int_0^t L_f(s) \left(\int_0^s L_f(\tau) d\tau \right) ds \right) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq \frac{M^2}{2} \left(\int_0^t L_f(\tau) d\tau \right)^2 \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq \frac{(M \|L\|_1)^2}{2} \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}. \end{aligned}$$

Em geral, temos a seguinte estimativa

$$\|(\Lambda^n u)(t) - (\Lambda^n v)(t)\|_X \leq \frac{(M \|L\|_1)^n}{n!} \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}. \quad (4.15)$$

Como $\frac{(M \|L\|_1)^n}{n!} < 1$ para n suficientemente grande, pelo Princípio dos Iterados (ver Corolário 2.60), Λ possui um único ponto fixo $u \in PSAP_\omega(X)$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Observação 4.17. Observamos que para obter (4.15) é suficiente supor que a função $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ seja limitada, isto é, $\sup_{t \in [0, \infty)} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} < +\infty$. Mas a condição de $\mathcal{R}(t)$ ser integrável foi necessária para usar o Lema 4.6.

Um resultado similar pode ser estabelecido quando f satisfaz uma condição Lipschitz local. Denotamos

$$\theta := (\alpha + 1)M \|y\|_X + \alpha M \|z\|_X, \quad C_1 := L_f(\theta)\theta + \sup_{s \geq 0} \|f(s, 0)\|_X,$$

em que M é a constante da condição **(ED)**. Consideremos a condição enunciada no Corolário 2.14.

($\mathcal{C}_{loc}$) Para cada $\sigma \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e quaisquer $x, y \in B_\sigma(X)$ temos

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_Y \leq L_f(\sigma) \|x - y\|_X,$$

em que $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

Temos o seguinte resultado.

Teorema 4.18. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição **(ED)**. Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , e que satisfaz a condição (C_{loc}) . Se existe $r > 0$ tal que $\frac{M}{\mu} (L_f(\theta + r) + \frac{C_1}{r}) < 1$, então existe uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica $u(\cdot)$ de (4.2)-(4.7)*

Demonstração. Observamos que como f é assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , logo $f(\cdot, 0)$ é uma função limitada sobre $\mathbb{R}^+$, portanto $C_1 < +\infty$. Tomamos

$$PSAP_{\omega}^0(X) = \{u \in PSAP_{\omega}(X) : u(0) = 0\}.$$

É claro que $PSAP_{\omega}^0(X)$ é um subespaço fechado de $PSAP_{\omega}(X)$. Seja $\Lambda^{\odot} : PSAP_{\omega}^0(X) \rightarrow PSAP_{\omega}^0(X)$ o mapa definido por

$$\Lambda^{\odot}u(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, \alpha\mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha\mathcal{R}(s)z + u(s))ds, \quad (4.16)$$

em que $u \in PSAP_{\omega}^0(X)$. Visto que $s \rightarrow \alpha\mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha\mathcal{R}(s)z$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica, logo $s \rightarrow \alpha\mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha\mathcal{R}(s)z + u(s) \in PSAP_{\omega}(X)$. Do Corolário 2.14, a função

$$s \rightarrow f(s, \alpha\mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha\mathcal{R}(s)z + u(s))$$

é pseudo S -assintoticamente ω -periódica, e usando o Lema 4.6, concluímos que $\Lambda^{\odot}$ está bem definido.

Para $u, v \in PSAP_{\omega}^0(X)$ com $\|u\|_{C_b([0, \infty); X)}, \|v\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq r$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{\odot}u(t) - \Lambda^{\odot}v(t)\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(\theta + r) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq M \left(\int_0^t e^{-\mu s} ds \right) L_f(\theta + r) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)} \\ &\leq \frac{M}{\mu} L_f(\theta + r) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Lambda^{\odot}u - \Lambda^{\odot}v\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq \frac{M}{\mu} L_f(\theta + r) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}.$$

Por outro lado, para $u \in PSAP_{\omega}^0(X)$ com $\|u\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq r$, temos

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{\odot}u\|_{C_b([0, \infty); X)} &\leq \frac{M}{\mu} L_f(\theta + r) \|u\|_{C_b([0, \infty); X)} + \frac{M}{\mu} C_1 \\ &\leq \frac{M}{\mu} \left(L_f(\theta + r) + \frac{C_1}{r} \right) r \leq r. \end{aligned}$$

Das estimativas acima, segue que $\Lambda^\odot$ é uma contração sobre $B_r(PSAP_\omega^0(X))$. Então existe um único ponto fixo $u \in B_r(PSAP_\omega^0(X))$ para o operador $\Lambda^\odot$. Para finalizar a demonstração, nós observamos que

$$v(t) = u(t) + \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z$$

é uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica de (4.2)-(4.7). $\square$

Teorema 4.19. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição **(ED)**. Assuma que $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz a condição de Lipschitz (4.14), em que $L_f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é localmente integrável. Tomamos*

$$W_f(t) = M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) ds,$$

em que M e μ são as constantes envolvidas na condição **(ED)**. Suponha que as seguintes condições são cumpridas:

$$(W1) \sup_{t \geq 0} W_f(t) < 1,$$

$$(W2) \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^l W_f(t) dt = 0.$$

Então o problema (4.2)-(4.7) possui uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Definimos o mapa Λ sobre o espaço $PSAP_\omega(X)$ pela expressão (4.9). Para $u \in PSAP_\omega(X)$ abreviamos a notação escrevendo

$$\mathcal{V}(t) = \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s, u(s)) ds. \quad (4.17)$$

Primeiro provaremos que Λ é bem definido. Tomamos $\epsilon > 0$ e o conjunto $B = Im(u)$, dado que f é uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , existe $T = T(B)$ suficientemente grande tal que $\{ f(t, u(t)) : t \geq T \}$ é limitado e

$$\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in B} \|f(s + \omega, x) - f(s, x)\|_X ds \leq \frac{\mu \epsilon}{2M}, \text{ para } t > T. \quad (4.18)$$

Escolhemos

$$\mathcal{K}_u = \sup_{t \geq T} \|f(t, u(t))\|_X,$$

$$\mathcal{K}_T = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t, u(t))\|_X.$$

Uma vez que $f(\cdot, u(\cdot))$ é uma função contínua, logo $\mathcal{K}_T < +\infty$. Observamos que

$$\sup_{t \geq 0, x \in B} \|f(t, x)\|_X \leq \mathcal{K}_u + \mathcal{K}_T.$$

Portanto,

$$\|\Lambda u\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq (\alpha + 1)M\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \frac{M}{\mu}(\mathcal{K}_u + \mathcal{K}_T),$$

o que mostra que Λu é uma função limitada em $[0, \infty)$. Como, por (4.6), $\alpha \mathcal{R}'(\cdot)y$, $\mathcal{R}(\cdot)y$ e $\alpha \mathcal{R}(\cdot)z$ pertencem à $PSAP_\omega(X)$, resta mostrar que a função $\mathcal{V}(\cdot)$ dada por (4.17) pertence a $PSAP_\omega(X)$. Visto que f não é necessariamente assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , não podemos usar o lema de composição. Para superar esta dificuldade nós precisamos usar uma decomposição adequada da função $\int_0^l (\mathcal{V}(t + \omega) - \mathcal{V}(t))dt$. Para $l > T$, temos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_0^l (\mathcal{V}(t + \omega) - \mathcal{V}(t))dt &= \frac{1}{l} \int_0^T \int_0^t \mathcal{R}(t-s)(f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s)))dsdt \\ &+ \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^t \mathcal{R}(t-s)(f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s)))dsdt \\ &+ \frac{1}{l} \int_0^l \int_t^{t+\omega} \mathcal{R}(s)f(t + \omega - s, u(t + \omega - s))dsdt \\ &= \frac{1}{l} \int_0^T \int_0^t \mathcal{R}(t-s)(f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s)))dsdt \\ &+ \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^t \mathcal{R}(t-s)(f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s + \omega)))dsdt \\ &+ \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^t \mathcal{R}(t-s)(f(s, u(s + \omega)) - f(s, u(s)))dsdt \\ &+ \frac{1}{l} \int_0^l \int_t^{t+\omega} \mathcal{R}(s)f(t + \omega - s, u(t + \omega - s))dsdt \\ &:= I_1(l) + I_2(l) + I_3(l) + I_4(l). \end{aligned}$$

Abaixo, estimaremos cada um dos termos $I_i(l)$, $1 \leq i \leq 4$, da expressão acima separadamente.

- Para o termo $I_1(l)$ podemos verificar a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|I_1(l)\|_X &\leq \frac{2M}{l} \left(\int_0^T \int_0^t e^{-\mu s} dsdt \right) \sup_{t \geq 0, x \in B} \|f(t, x)\| \\ &\leq \frac{2M}{\mu l} \left(T + \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu T}) \right) (\mathcal{K}_u + \mathcal{K}_T) \\ &\leq \frac{2M}{\mu} \left(T + \frac{1}{\mu} \right) (\mathcal{K}_u + \mathcal{K}_T) \frac{1}{l}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_1(l) = 0. \quad (4.19)$$

- Para estimar $I_2(l)$, primeiro vamos decompor $I_2(l)$ como abaixo

$$\begin{aligned} I_2(l) &= \frac{1}{l} \int_T^l \int_0^T \mathcal{R}(t-s) (f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))) ds dt \\ &\quad + \frac{1}{l} \int_T^l \int_T^t \mathcal{R}(t-s) (f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))) ds dt \\ &:= I_2^1(l) + I_2^2(l). \end{aligned}$$

Agora nós estimaremos os termos $I_2^i(l)$, $i = 1, 2$.

- Para o termo $I_2^1(l)$, nós obtemos

$$\begin{aligned} \|I_2^1(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_0^T e^{-\mu(t-s)} \|f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))\|_X ds dt \\ &\leq \frac{M}{l} \int_T^l e^{-\mu(t-T)} \left(\int_0^T \sup_{x \in B} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_X ds \right) dt \\ &\leq \frac{M}{l} \int_T^l t e^{-\mu(t-T)} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in B} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_X ds \right) dt \\ &\leq \frac{M}{l} l \left(\int_0^{l-T} e^{-\mu t} dt \right) \frac{\mu}{M} \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

- Para o termo $I_2^2(l)$ nós temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|I_2^2(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_T^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))\|_X ds dt \\ &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \left(\int_s^t e^{-\mu(t-s)} dt \right) \sup_{x \in B} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_X ds \\ &\leq \frac{M}{\mu} \frac{1}{l} \int_0^l \sup_{x \in B} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_X ds \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

De (4.20) e (4.21) segue que $\|I_2(l)\|_X \leq \epsilon$, para todo $l \geq T$, portanto

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_2(l) = 0. \quad (4.22)$$

- Estimamos o termo $I_3(l)$ por

$$\begin{aligned} \|I_3(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s+\omega)) - f(s, u(s))\|_X ds dt \\ &\leq \frac{M}{l} \int_T^l \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) \|u(s+\omega) - u(s)\|_X ds dt \\ &\leq 2\|u\|_{C_b([0, \infty); X)} \frac{1}{l} \int_T^l W_f(t) dt, \end{aligned}$$

de onde,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_3(l) = 0. \quad (4.23)$$

- Finalmente, para o termo $I_4(l)$ nós temos

$$\begin{aligned}
\|I_4(l)\|_X &\leq \frac{M}{l} \int_0^l \int_t^{t+\omega} e^{-\mu s} \|f(t+\omega-s, u(t+\omega-s))\|_X ds dt \\
&\leq \frac{M}{l} \left(\sup_{t \geq 0, x \in B} \|f(t, x)\|_X \right) \int_0^l \int_t^{t+\omega} e^{-\mu s} ds dt \\
&\leq \frac{M\omega}{l} \left(\sup_{t \geq 0, x \in B} \|f(t, x)\|_X \right) \int_0^l e^{-\mu t} dt \\
&\leq \frac{M\omega}{\mu l} \left(\sup_{t \geq 0, x \in B} \|f(t, x)\|_X \right),
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_4(l) = 0. \quad (4.24)$$

De (4.19), (4.22), (4.23) e (4.24), segue que

$$\frac{1}{l} \int_0^l (\mathcal{V}(t+\omega) - \mathcal{V}(t)) dt \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Por fim, provaremos que Λ é uma contração de $PSAP_\omega(X)$ nele mesmo. Se $u, v \in PSAP_\omega(X)$ e $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \\
&\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} L_f(s) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\
&\leq \left(\sup_{t \geq 0} W_f(t) \right) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)}.
\end{aligned}$$

Da condição **(W1)** concluímos nossa afirmação. Isto completa a demonstração do Teorema 4.19. $\square$

Observação 4.20. Resultados similares aos Teoremas 4.18 e 4.19 foram obtidos em (13) para equações de evolução fracionárias.

Observação 4.21. Por (13), a função $W_f(\cdot)$ possui as seguintes propriedades:

- (i) Se $W_f \in L^1([0, \infty))$, então **(W2)** é satisfeita.
- (ii) Se $L_f \in L^1([0, \infty))$ com $M\|L_f\|_{L^1([0, \infty))} < 1$, em que M é dado em **(ED)**, então **(W1)** e **(W2)** são asseguradas.
- (iii) Se $L_f \in L^1_{loc}([0, \infty))$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L_f(s) ds = 0$, então **(W2)** é cumprida.

Abaixo iremos considerar perturbações mais gerais para o problema (4.2)-(4.7) do que as que temos considerado até agora.

Usaremos o teorema de ponto fixo de Schauder. Gostaríamos de salientar aqui que este teorema apresenta uma desvantagem quando tratamos com um dos mais importantes casos: quando o espaço de trabalho M consiste de funções contínuas $\phi : [0, \infty) \rightarrow X$ e $P : M \rightarrow M$ com P contínua e M fechado, convexo e não-vazio (98). O Teorema de Schauder requer que M seja compacto ou P mapeia M em um subconjunto compacto K do espaço M . Estas condições não são difíceis quando M consiste de funções contínuas $\phi : [a, b] \rightarrow X$ uma vez que podemos frequentemente arranjar as coisas de modo que PM é equicontínuo e então aplicamos o teorema de Ascoli-Arzelà. Mas quando tratamos com a compacidade, pode ser bastante complicado estabelecê-la no caso onde consideramos o intervalo inteiro $[0, \infty)$. Para superar esta dificuldade, introduzimos um espaço adequado contendo M .

Seja $h : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ uma função contínua não-decrescente tal que $h(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Denotamos por $C_h(X)$ o espaço

$$C_h(X) = \left\{ u \in C([0, \infty); X) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{h(t)} = 0 \right\}, \quad (4.25)$$

munido com a norma

$$\|u\|_h = \sup_{t \geq 0} \frac{\|u(t)\|}{h(t)}.$$

Para estabelecer nosso próximo resultado, consideramos funções f que satisfazem a seguinte condição de limitação.

(W1)* Existe uma função contínua não-decrescente $\widetilde{W} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\|f(t, x)\|_X \leq \widetilde{W}(\|x\|_X)$ para todo $t \in [0, \infty)$ e $x \in X$.

Denotamos

$$\beta(\xi) = \sup_{t \geq 0} \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{\mu(t-s)} \widetilde{W}(\xi h(s)) ds. \quad (4.26)$$

Teorema 4.22. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a condição **(ED)**. Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X , uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz **(W1)***. Assuma ainda que as seguintes propriedades são asseguradas.*

(D1) Para cada $\xi > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W}(\xi h(s)) ds = 0.$$

(D2) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $u, v \in C_h(X)$, $\|u - v\|_h \leq \delta$ implica

$$\sup_{t \geq 0} M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \leq \varepsilon.$$

(D3) Para cada $a \geq 0$ e $r > 0$ o conjunto $\{\mathcal{R}(a-t)f(t, x) : 0 \leq t \leq a, x \in X, \|x\|_X \leq r\}$ é relativamente compacto em X e para cada $0 \leq \xi \leq a$, $(\mathcal{R}(a+s-\xi) - \mathcal{R}(a-\xi))f(\xi, x) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$, uniformemente para $\|x\| \leq r$.

Se

$$\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1, \quad (4.27)$$

então o problema (4.2)-(4.7) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Seja $C_h^0(X)$ o espaço das funções $u \in C_h(X)$ tais que $u(0) = 0$. É claro que $C_h^0(X)$ é um subespaço fechado de $C_h(X)$. Definimos o operador $\Lambda^\odot$ sobre $C_h^0(X)$ por (4.16). Segue da condição (D1) que o operador $\Lambda^\odot$ está bem-definido. De fato, observamos que para $v \in C_h^0(X)$,

$$\begin{aligned} \frac{\|\Lambda^\odot v(t)\|_X}{h(t)} &\leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + v(s))\|_X ds \\ &\leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W}((M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X)e^{-\mu s} + \|v(s)\|_X) ds \\ &\leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W}(h(s)\tilde{L}) ds \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

em que $\tilde{L} = M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \|v\|_h$. Portanto, $\Lambda^\odot v \in C_h^0(X)$ sempre que $v \in C_h^0$.

Agora dividimos o resto da demonstração em alguns passos.

Passo 1. O mapa $\Lambda^\odot$ é contínuo de $C_h^0(X)$ em $C_h^0(X)$. Esta afirmação é uma consequência direta da condição (D2). De fato, sejam u_n, u em $C_h^0(X)$ tais que $u_n \rightarrow u$ em $C_h(X)$ quando $n \rightarrow \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, seja δ a constante envolvida na condição (D2). Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u\|_h < \delta$, então

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u_n - \Lambda^\odot u\|_h &= \sup_{t \geq 0} \frac{\|\Lambda^\odot u_n(t) - \Lambda^\odot u(t)\|_X}{h(t)} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u_n(s)) \\ &\quad - f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s))\|_X ds \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra a afirmação.

Passo 2. Afirmamos que $\Lambda^\odot$ é uma função completamente contínua. Tomamos $r > 0$ e definimos os conjuntos $V = \Lambda^\odot(B_r(C_h^0(X)))$ e $V(t) = \{\Lambda^\odot u(t) : u \in B_r(C_h^0(X))\}$. Primeiro mostraremos que $V(t)$ é um conjunto relativamente compacto em X para cada $t \geq 0$. Levando-se em conta o teorema do valor médio para a integral de Bochner, sendo

$$\mathcal{K} = \{\mathcal{R}(t-s)f(s, x) : 0 \leq s \leq t, \|x\|_X \leq h(t)(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r)\}, \quad (4.28)$$

então $V(t) \subseteq \overline{tco(\mathcal{K})}$, em que $\overline{co(\mathcal{K})}$ denota o fecho do conjunto $co(\mathcal{K})$, enquanto $co(\mathcal{K})$ denota a envoltória convexa do conjunto $\mathcal{K}$, que é o menor conjunto convexo que contém $\mathcal{K}$. Usando a condição **(D3)**, inferimos que $V(t)$ é relativamente compacto em X . Agora, consideramos $b > 0$ fixado e V_b o conjunto formado por todas as funções $v \in V$ restritas ao intervalo $[0, b]$. Tomemos $v = \Lambda^\odot u$ com $u \in B_r(C_h^0(X))$ e $s \geq 0$. Uma vez que para cada $\tau > 0$ e $0 \leq \zeta \leq a$, $(\mathcal{R}(a + \rho - \zeta) - \mathcal{R}(a - \zeta))f(\zeta, x) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0$, uniformemente para $\|x\|_X \leq \tau$, da seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|v(t+s) - v(t)\|_X &\leq M \int_t^{t+s} e^{-\mu(t+s-\xi)} \widetilde{W}(h(\xi)(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r)) d\xi \\ &\quad + \int_0^t \|(\mathcal{R}(t+s-\xi) - \mathcal{R}(t-\xi))f(\xi, \alpha\mathcal{R}'(\xi)y \\ &\quad + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha\mathcal{R}(\xi)z + u(\xi))\|_X d\xi, \end{aligned}$$

inferimos que V_b é equicontínuo. Com as mesmas notações, mostraremos agora que $\frac{v(t)}{h(t)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, independente de $u \in B_r(C_h^0(X))$. De fato, isto segue de **(D1)** e da estimativa

$$\frac{\|v(t)\|_X}{h(t)} \leq \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \widetilde{W}(h(s)(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r)) ds.$$

Pelo Lema 2.65 obtemos que V é um conjunto relativamente compacto em $C_h^0(X)$. Isto prova que $\Lambda^\odot$ é completamente contínuo.

Passo 3. Afirmamos que existe $\rho > 0$ tal que $\Lambda^\odot(B_\rho(C_h^0(X))) \subseteq B_\rho(C_h^0(X))$. De fato, se assumirmos que a afirmação é falsa, então para todo $\rho > 0$ podemos escolher $u^\rho \in B_\rho(C_h^0(X))$ tal que $\|\Lambda^\odot(u^\rho)\|_h > \rho$. Obtemos

$$\rho < \|\Lambda^\odot u^\rho\|_h < \beta(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \rho).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{\beta(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \rho)}{M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \rho} \\ &\quad + \frac{M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X}{\rho} \frac{\beta(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \rho)}{M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \rho}. \end{aligned}$$

Portanto $1 \leq \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi}$, o que é contrário a (4.27).

Passo 4. Considerando $u \in PSAP_\omega^0(X)$, uma vez que f satisfaz todas as condições do Lema 2.13, concluímos que a função

$$s \rightarrow f(s, \alpha\mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha\mathcal{R}(s)y + u(s))$$

é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Aplicando o Lema 4.6, obtemos que $\Lambda^\odot(PSAP_\omega^0(X)) \subseteq PSAP_\omega^0(X)$. Consequentemente, combinando com o **Passo 3**, nós inferimos que

$$\Lambda^\odot(B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)) \subseteq B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X),$$

e também

$$\begin{aligned}\Lambda^\odot \left(\overline{B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)}^h \right) &\subseteq \overline{\Lambda^\odot (B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X))}^h \\ &\subseteq \overline{B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)}^h,\end{aligned}$$

em que $\overline{B}^h$ denota o fecho de B em $C_h(X)$. Aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder, ver Teorema 2.63, deduzimos que o mapa $\Lambda^\odot$ possui um ponto fixo $u \in \overline{B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)}^h$.

Passo 5. Finalmente, vamos mostrar que $u \in PSAP_\omega^0(X)$. Seja $(u^n)_n$ uma sequência em $B_\rho(C_h^0(X)) \cap PSAP_\omega^0(X)$ que converge para u na norma de $C_h(X)$. Da condição **(D2)** e da desigualdade

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\odot u^n - u\|_{C_b([0,\infty);X)} &= \|\Lambda^\odot u^n - \Lambda^\odot u\|_{C_b([0,\infty);X)} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u_n(s)) \\ &\quad - f(s, \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s))\|_X ds,\end{aligned}$$

obtemos que $\Lambda^\odot u^n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente no intervalo $[0, \infty)$. Uma vez que $\Lambda^\odot u^n \in PSAP_\omega^0(X)$, então $u \in PSAP_\omega^0(X)$, o que conclui a demonstração do Teorema 4.22. $\square$

Faremos agora uma importante observação que permitirá futuras aplicações.

Observação 4.23. A hipótese **(D3)** do Teorema 4.22 é cumprida nas seguintes situações:

- (a) Para cada $a \geq 0$ e $r > 0$ o conjunto $\{f(t, x) : 0 \leq t \leq a, x \in X, \|x\| \leq r\}$ é relativamente compacto em X .
- (b) O operador $\mathcal{R}(t)$ é compacto para $t > 0$ e $\mathcal{R}(\cdot)$ é uniformemente contínuo sobre $(0, \infty)$.

Antes de prosseguir faremos a seguinte observação.

Observação 4.24. Vale ressaltar que em um artigo recente (98), Burton e Zhang analisaram o segundo teorema de ponto fixo de Schauder no espaço de funções contínuas limitadas em $[0, \infty)$ com vista a exigir que o mapa seja localmente equicontínuo ou invés de exigir que o mapa seja compacto (98, Teorema 2.1a). Esta importante simplificação nos permite deduzir a existência de uma solução branda contínua limitada para o problema (4.2)-(4.7). Seremos mais específicos, seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a hipótese **(ED)** e também que para cada $r > 0$, $a > 0$ e $\xi \in [0, a]$, $(\mathcal{R}(a + s - \xi) - \mathcal{R}(a - \xi))f(\xi, x) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$, uniformemente para $\|x\| \leq r$. Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos

limitados de X (ver Definição 2.18) que satisfaz $(\mathbf{W1})^*$ e $\frac{M}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{W}(\xi)}{\xi} < 1$, em que M e μ são dados em $(\mathbf{ED})$, então o problema (4.2)-(4.7) possui uma solução branda contínua limitada.

Demonstração. Seja C_b^0 o espaço das funções $u \in C_b([0, \infty); X)$ tais que $u(0) = 0$. É claro que C_b^0 é um subespaço fechado de $C_b([0, \infty); X)$. Definimos o operador $\Lambda^\odot$ sobre C_b^0 por (4.16). Para $u \in C_b^0$ podemos mostrar as seguintes estimativas:

$$\|\Lambda^\odot u\|_\infty \leq \frac{M}{\mu} \widetilde{W}(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \|u\|_{C_b([0, \infty); X)}). \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u(t + s) - \Lambda^\odot u(t)\|_X &\leq M \left(\int_0^s e^{-\mu\tau} d\tau \right) \\ &\quad \times \widetilde{W}(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \|u\|_{C_b([0, \infty); X)}) \\ &\quad + \int_0^t \|(\mathcal{R}(t + s - \tau) - \mathcal{R}(t - s)) \\ &\quad \times f(\tau, \alpha \mathcal{R}'(\tau)y + \mathcal{R}(\tau)y + \alpha \mathcal{R}(\tau)y + u(\tau))\|_X d\tau. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Segue dessas estimativas que o operador $\Lambda^\odot$ está bem definido. Afirmamos que existe $\sigma > 0$ tal que $B_\sigma(C_b^0)$ é invariante por $\Lambda^\odot$. De fato, se assumirmos que a afirmação é falsa, então para todo $\sigma > 0$ podemos escolher $u^\sigma \in B_\sigma(C_b^0)$ tal que $\|\Lambda^\odot u^\sigma\|_{C_b([0, \infty); X)} > \sigma$. Disto, não é difícil provar que

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{M}{\mu} \frac{\widetilde{W}(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma)}{M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma} \\ &\quad + \frac{M}{\mu\sigma} (M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X) \frac{\widetilde{W}(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma)}{M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma}. \end{aligned}$$

Essa desigualdade implica que $1 \leq \frac{M}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{W}(\xi)}{\xi}$, o que é impossível. Por conseguinte, nossa afirmação está provada.

Note que $\Lambda^\odot$ é um mapa contínuo de $B_\sigma(C_b^0)$ em si mesmo. Sejam u_n e u pertencentes à $B_\sigma(C_b^0)$ tais que $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente no intervalo $[0, \infty)$. Não é difícil mostrar que $(\Lambda^\odot u^n)_n$ converge para $\Lambda^\odot u$. De fato, seja ε um número positivo qualquer, tome $\rho := M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \sigma$. Visto que f é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X , existe $\delta > 0$ tal que $\|f(t, x) - f(t, y)\|_X \leq \frac{\mu}{M}\varepsilon$ para todo $t \geq 0$ e $\|x - y\|_X \leq \delta$ com $\|x\|_X \leq \rho$, e $\|y\|_X \leq \rho$. Podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u\|_{C_b([0, \infty); X)} < \delta$ sempre que $n \geq n_0$. Disto, nós obtemos imediatamente que $\|\Lambda^\odot u^n - \Lambda^\odot u\|_\infty \leq \varepsilon$.

Por outro lado, da estimativa (4.30) inferimos que $\Lambda^\odot(B_\sigma(C_b^0))$ é localmente equicontínuo, isto é, para cada $T > 0$, as funções em $\Lambda^\odot(B_\sigma(C_b^0))$ restritas ao domínio $[0, T]$ são equicontínuas. O fecho de $\Lambda^\odot(B_\sigma(C_b^0))$ na norma $\|\cdot\|_h$ está em $B_\sigma(C_b^0)$. Para ver isto,

é suficiente mostrar que $B_\sigma(C_b^0)$ é fechado em $C_h(X)$. Considere u_n em $B_\sigma(C_b^0)$ e suponha que existe $u \in C_h(X)$ com $\|u_n - u\|_h \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, com alguns cálculos obtemos que

$$\|u(0)\|_X = \|u_n(0) - u(0)\|_X \leq h(0)\|u_n - u\|_h$$

e

$$\|u(t) - u(t_0)\|_X \leq \|u_n - u\|_h(h(t) + h(t_0)) + \|u_n(t) - u_n(t_0)\|_X.$$

Assim, mostramos que $u(0) = 0$ e $u \in C([0, \infty); X)$. Visto que $\|u\|_\infty \leq \sup_{n \geq 1} \|u_n\|_\infty \leq \sigma$, nós deduzimos que $u \in B_\sigma(C_b^0)$. Isto prova que $B_\sigma(C_b^0)$ é fechado em $C_h(X)$. Finalmente, o teorema de Burton-Zhang (98, Theorem 2.1a) nos leva a deduzir que $\Lambda^\odot$ possui um ponto fixo $u \in B_\sigma(C_b^0)$. Podemos facilmente concluir que $v(t) = \alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(t)$ é uma solução branda contínua e limitada de (4.2)-(4.7). Isto finaliza a demonstração da observação. $\square$

Teorema 4.25. *Seja $\mathcal{R}(t)$ uma família (α, β, γ) -regularizada sobre X com gerador A que satisfaz a hipótese **(ED)**. Considere que $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X , e que $f(\cdot, 0)$ é limitada em $[0, \infty)$. Assuma ainda que as seguintes propriedades são verificadas.*

(E1) *Existe uma função contínua não decrescente $\mathcal{W} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $\mathcal{W}(0) = 0$ tal que*

$$\|f(t, h(t)x) - f(t, h(t)y)\|_X \leq \mathcal{W}(\|x - y\|_X),$$

para todo $t \geq 0$ e quaisquer $x, y \in X$, onde h é dada em (4.25)

(E2) *$u \in PAP_0(X)$ implica que $\mathcal{W}\left(\frac{\|u(\cdot)\|_X}{h(\cdot)}\right) \in PAP_0(\mathbb{R})$.*

(E3) *Para cada $a \geq 0$ e cada $r > 0$, o conjunto $\{f(t, x) : 0 \leq t \leq a, x \in X, \|x\|_X \leq r\}$ é relativamente compacto em X .*

(E4) $\frac{M}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(\xi)}{\xi} < 1$, onde M e μ são as constantes dadas em **(ED)**.

Então o problema (4.2)-(4.7) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Usaremos as mesmas notações que na demonstração do Teorema 4.22. Sejam u e v pertencentes à $C_h^0(X)$ e sejam $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ pertencentes à $C_b([0, \infty); X)$. Temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u(t)\|_X &\leq M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \mathcal{W}\left(\frac{\|\alpha \mathcal{R}'(s)y + \mathcal{R}(s)y + \alpha \mathcal{R}(s)z + u(s)\|_X}{h(s)}\right) ds \\ &\quad + M \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, 0)\|_X ds \\ &\leq \frac{M}{\mu} \left(\mathcal{W}(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + \|u\|_h) + \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0)\|_X \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\int_0^t \|f(s, \tilde{u}(s)) - f(s, \tilde{v}(s))\|_X ds \leq \int_0^t \mathcal{W} \left(\frac{\|\tilde{u}(s) - \tilde{v}(s)\|_X}{h(s)} \right) ds, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds &\leq \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \mathcal{W} \left(\frac{\|u(s) - v(s)\|_X}{h(s)} \right) ds \\ &\leq \frac{1}{\mu} \mathcal{W}(\|u - v\|_h). \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\odot u - \Lambda^\odot v\|_h &\leq \sup_{t \geq 0} \frac{M}{h(t)} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \mathcal{W} \left(\frac{\|u(s) - v(s)\|_X}{h(s)} \right) ds \\ &\leq \frac{M}{\mu} \mathcal{W}(\|u - v\|_h). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Observamos que (4.31) (resp., (4.32)) implica que $\Lambda^\odot$ está bem-definido (resp., **(C1)** é satisfeita). Visto que $\mathcal{W}$ é contínua, a estimativa (4.33) mostra que **(D2)** está assegurada. Usando novamente que $\mathcal{W}$ é contínua e (4.34) nós obtemos que $\Lambda^\odot$ é um mapa contínuo de $C_h^0(X)$ em $C_h^0(X)$.

Afirmamos que $\Lambda^\odot$ é um mapa completamente contínuo. Observamos que $V(t) \subseteq \overline{tco(\mathcal{K})}$, onde $\mathcal{K}$ é dado em (4.28). Da condição **(E3)** segue que $\mathcal{K}$ é relativamente compacto, o que implica que $\overline{V(t)}$ é compacto. Agora, tomando $v = \Lambda^\odot u$, com $u \in B_r(C_h^0(X))$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v(t+s) - v(t)\|_X &\leq M \int_t^{t+s} e^{-\mu(t+s-\xi)} \\ &\quad \times \left(\mathcal{W} \left(\left\| \frac{\alpha \mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha \mathcal{R}(\xi)z + u(\xi)}{h(\xi)} \right\|_X \right) + \|f(\xi, 0)\|_X \right) d\xi \\ &\quad + \int_0^t \|(\mathcal{R}(t+s-\xi) - \mathcal{R}(t-\xi)) \\ &\quad \times f(\xi, \alpha \mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha \mathcal{R}(\xi)z + u(\xi))\|_X d\xi \\ &\leq \frac{M}{\mu} (1 - e^{-\mu s}) \\ &\quad \times \left(\mathcal{W}(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r) + \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0)\|_X \right) \\ &\quad + \int_0^t \|(\mathcal{R}(t+s-\xi) - \mathcal{R}(t-\xi)) \\ &\quad \times f(\xi, \alpha \mathcal{R}'(\xi)y + \mathcal{R}(\xi)y + \alpha \mathcal{R}(\xi)z + u(\xi))\|_X d\xi \end{aligned}$$

e aplicando **(E3)** novamente, obtemos que V_b é equicontínuo.

Por outro lado,

$$\frac{\|v(t)\|_X}{h(t)} \leq \frac{M}{h(t)\mu} \left(\mathcal{W}(M(\alpha+1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r) + \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0)\|_X \right).$$

Consequentemente,

$$\frac{v(t)}{h(t)} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ independente de } u \in B_r(C_h^0(X)).$$

Pelo Lema 2.65 concluímos que $\Lambda^\odot$ é completamente contínuo.

Observamos que existe $r_0 > 0$ tal que $\Lambda^\odot(B_{r_0}(C_h^0(X))) \subseteq B_{r_0}(C_h^0(X))$. De fato, se assumirmos que a afirmação é falsa, então para cada $r > 0$ podemos escolher $u^r \in B_r(C_h^0(X))$ tal que $\|\Lambda^\odot(u^r)\|_h > r$. Portanto,

$$\begin{aligned} 1 < & \frac{M}{\mu} \left(\frac{M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X}{r} + 1 \right) \frac{\mathcal{W}(M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r)}{M(\alpha + 1)\|y\|_X + \alpha M\|z\|_X + r} \\ & + \frac{M}{\mu} \frac{1}{r} \sup_{t \geq 0} \|f(t, 0)\|_X. \end{aligned}$$

Sendo assim, deduzimos que $1 \leq \frac{M}{\mu} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(\xi)}{\xi}$, o que contradiz nossa hipótese **(E4)**. Para o resto da demonstração, faz-se uso de um argumento similar já usado na demonstração do Teorema 4.22. $\square$

É conhecido na literatura que o estudo de propriedades das soluções quando a perturbação da equação não é necessariamente Lipschitz é tecnicamente mais difícil. Porque, nestes casos, é crucial lidar com teoremas de ponto fixo mais gerais que o princípio de contração. Para concluir esta seção, estudaremos a existência de soluções brandas de (4.35)-(4.36) com condições não-locais como suplemento do teorema anterior. Tal aspecto será explorado por nós usando uma generalização do bem conhecido teorema de ponto fixo de Darbo (ver Lema 2.62). Mais precisamente, consideramos

$$\alpha u'''(t) + u''(t) - \beta Au(t) - \gamma Au'(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (4.35)$$

$$u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = g(u), \quad (4.36)$$

em que $f : [0, 1] \times X \times X \rightarrow X$ e $g : C([0, 1], X) \rightarrow X$ são funções adequadas e A gera uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ tal que as funções $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ e $t \rightarrow \mathcal{R}'(t)$ são contínuas de $[0, 1]$ em $\mathcal{B}(X)$.

Uma função contínua $u : [0, 1] \rightarrow X$ é chamada uma solução branda de (4.35)-(4.36) se satisfaz a equação integral

$$u(t) = \alpha \mathcal{R}(t)g(u) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds, \quad t \in [0, 1].$$

Observação 4.26. As condições não-locais podem ser aplicadas na física com melhor efeito que o problema de Cauchy usual. Por exemplo, considere o fenômeno de difusão de u , uma pequena quantidade de gás em um tubo, e assuma que a difusão é observada através da superfície do tubo. Se existe também uma pequena quantidade de gás no tempo inicial, então a medição em $u(0, x)$ da quantidade do gás nesse instante pode ser menos precisa que a medição $u(0, x) + \sum_{i=1}^k \beta_i u(T_i, x)$. Indicamos ao leitor os artigos (99, 100, 101, 102).

Denotamos

$$\sup\{\|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} : t \in [0, 1]\} + \sup\{\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} : t \in [0, 1]\} = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}. \quad (4.37)$$

A seguir, forneceremos os resultados preliminares que serão usados para demonstrar o nosso resultado (ver Teorema 4.31). Sem confusão, usaremos ξ para denotar a medida de não-compacidade de Kuratowski em X e $C([0, 1]; X)$.

Para um conjunto B de funções $u : [0, 1] \rightarrow X$ introduzimos a notação

$$B(t) := \{u(t) : u \in B\} \quad \text{e} \quad \int_0^1 B(t)dt := \left\{ \int_0^1 u(t)dt : u \in B \right\}.$$

Para qualquer $M \subseteq C^1([0, 1]; X)$ limitado, considere $M' = \{x' : x \in M\} \subseteq C([0, 1]; X)$. Pode-se mostrar que $\widehat{\xi}(M) = \xi(M')$ é uma medida de não-compacidade sobre $C^1([0, 1]; X)$.

Lema 4.27. (89) *Seja $B \subseteq C([0, 1]; X)$ limitado e equicontínuo, então $\overline{\text{co}(B)} \subseteq C([0, 1]; X)$ também é limitado e equicontínuo.*

Lema 4.28. (103, 89) *Seja $B \subseteq C([0, 1]; X)$ limitado e equicontínuo. Então $t \rightarrow \xi(B(t))$ é contínua sobre $[0, 1]$,*

$$\xi(B) = \sup\{\xi(B(s)) : s \in [0, 1]\}$$

e

$$\xi\left(\int_0^1 B(s)ds\right) \leq \int_0^1 \xi(B(s))ds.$$

$$\text{Denotamos } C_m^n = \binom{n}{m}, \quad 0 \leq m \leq n, \quad \text{e } S_n = \sum_{j=0}^n C_j^n \varepsilon^{n-j} \frac{h^j}{j!}.$$

Lema 4.29. (104) *Suponha que $0 < \varepsilon < 1$, $h > 0$. Então $S_n = o\left(\frac{1}{n^s}\right)$, quando $n \rightarrow \infty$, em que $s > 1$ é um número real arbitrário.*

Para estabelecer nosso próximo resultado, precisamos introduzir as seguintes hipóteses:

(F1) $g : C^1([0, 1]; X) \rightarrow X$ é contínua e compacta.

(F2) $f : [0, 1] \times X \times X \rightarrow X$ satisfaz as condições tipo Carathéodory, isto é, $f(\cdot, x, y)$ é mensurável para quaisquer $x, y \in X$ e $f(t, \cdot) : X \times X \rightarrow X$ é contínua para todo $t \in [0, 1]$.

(F3) Existe uma função $m \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^+)$ e uma função contínua não-decrescente $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|f(t, x, y)\|_X \leq m(t)\Phi(\|x\|_X + \|y\|_X)$, para quaisquer $x, y \in X$ e quase todo $t \in [0, 1]$.

(F4) Existe uma função $H \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^+)$ tal que para qualquer subconjunto de funções $S \subseteq C^1([0, 1]; X)$,

$$\xi(f(t, S(t), S'(t))) \leq H(t)\xi(S'(t)),$$

para quase todo $t \in [0, 1]$.

Observação 4.30. Assumindo que a função g satisfaz a hipótese (F1), é claro que g leva conjunto limitado em conjunto limitado. Por esta razão, para cada $R \geq 0$ denotaremos por g_R o número

$$g_R = \sup\{\|g(u)\| : \|u\|_{C^1([0,1];X)} \leq R\}.$$

Estamos em posição para estabelecer nosso resultado. Tomamos nota que condições semelhantes às feitas no Teorema 4.31 foram consideradas anteriormente na literatura (105).

Teorema 4.31. *Sob as condições (F1)–(F4). Se existe uma constante $R > 0$ tal que*

$$\alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} g_R + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \Phi(R) \int_0^1 m(s) ds \leq R,$$

então o problema (4.35)–(4.36) possui ao menos uma solução branda.

Demonstração. Definimos o operador $\tilde{\Lambda} : C^1([0, 1]; X) \rightarrow C^1([0, 1]; X)$ pela expressão

$$\tilde{\Lambda}u(t) = \alpha \mathcal{R}(t)g(u) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)f(s, u(s), u'(s))ds. \quad (4.38)$$

Primeiro mostraremos que $\tilde{\Lambda}$ é um mapa contínuo. Para fazer isso nós consideramos uma sequência $\{u_n\}_n$ em $C^1([0, 1]; X)$ tal que $u_n \rightarrow u$ na norma $\|\cdot\|_{C^1([0,1];X)}$. Podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Lambda}u_n - \tilde{\Lambda}u\|_{C([0,1];X)} &\leq \alpha \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \|g(u_n) - g(u)\|_X \\ &\quad + \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \int_0^1 \|f(s, u_n(s), u'_n(s)) - f(s, u(s), u'(s))\|_X ds. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\Lambda}u_n)' - (\tilde{\Lambda}u)'\|_{C([0,1];X)} &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \left(\alpha \|g(u_n) - g(u)\|_X \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \|f(s, u_n(s), u'_n(s)) - f(s, u(s), u'(s))\|_X ds \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Segue das desigualdades (4.39) e (4.40) que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Lambda}u_n - \tilde{\Lambda}u\|_{C^1([0,1];X)} &\leq \alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \|g(u_n) - g(u)\|_X \\ &\quad + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^1 \|f(s, u_n(s), u'_n(s)) - f(s, u(s), u'(s))\|_X ds. \end{aligned}$$

Em seguida, visto que g é um mapa contínuo e que f satisfaz as condições Carathéodory, concluímos que

$$\|\tilde{\Lambda}u_n - \tilde{\Lambda}u\|_{C^1([0,1];X)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, para $u \in B_R(C^1([0, 1]; X))$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Lambda}u\|_{C^1([0,1];X)} &\leq \alpha \left(\sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} + \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \right) \|g(u)\|_X \\ &\quad + \left(\sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} + \sup_{t \in [0,1]} \|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \right) \\ &\quad \times \int_0^1 m(s) \Phi(\|u(s)\|_X + \|u'(s)\|_X) ds \\ &\leq \alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} g_R + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \Phi(R) \int_0^1 m(s) ds \leq R. \end{aligned}$$

Isto significa que $B_R(C^1([0, 1]; X))$ é invariante por $\tilde{\Lambda}$ e $\tilde{\Lambda}(B_R(C^1([0, 1]; X)))$ é um conjunto limitado. Tomando $v = \tilde{\Lambda}u$, com $u \in B_R(C^1([0, 1]; X))$, da decomposição

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= \alpha(\mathcal{R}(t+s) - \mathcal{R}(t))g(u) + \int_t^{t+s} \mathcal{R}(t+s-\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi \\ &\quad + \int_0^t (\mathcal{R}(t+s-\xi) - \mathcal{R}(t-\xi)) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

deduzimos que $\tilde{\Lambda}(B_R(C^1([0, 1]; X)))$ é um conjunto de funções equicontínuas.

Defina $\mathcal{B} = \overline{\tilde{\Lambda}(B_R(C^1([0, 1]; X)))}$, então, pelo Lema 4.27, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são equicontínuos. Note também que $\tilde{\Lambda} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ é um operador contínuo e limitado. Tendo em mente as propriedades da medida de não-compacidade com o Lema 4.28 inferimos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{\Lambda}(\mathcal{B})'(t)) &\leq \alpha \xi(\mathcal{R}'(t)g(\mathcal{B})) + \xi \left(\int_0^t \mathcal{R}'(t-s) f(s, \mathcal{B}(s), \mathcal{B}'(s)) ds \right) \\ &\leq \alpha M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \xi(g(\mathcal{B})) + M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t \xi(f(s, \mathcal{B}(s), \mathcal{B}'(s))) ds \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t H(s) \xi(\mathcal{B}'(s)) ds \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \xi(\mathcal{B}') \int_0^t H(s) ds \\ &= M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \hat{\xi}(\mathcal{B}) \int_0^t H(s) ds. \end{aligned}$$

Uma vez que $H \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^+)$, para $\delta < \frac{1}{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}$, existe $\varphi \in C([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ tal que $\int_0^1 |H(s) - \varphi(s)|ds < \delta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \xi\left(\tilde{\Lambda}(\mathcal{B})'(t)\right) &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\widehat{\xi}(\mathcal{B})\left(\int_0^t |H(s) - \varphi(s)|ds + \int_0^t \varphi(s)ds\right) \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\widehat{\xi}(\mathcal{B})\left(\delta + \|\varphi\|_{C([0,1];\mathbb{R}^+)}t\right). \end{aligned}$$

A equicontinuidade do conjunto $\tilde{\Lambda}(\mathcal{B})'$ é uma consequência da seguinte decomposição

$$\begin{aligned} (\tilde{\Lambda}u)'(t+s) - (\tilde{\Lambda}u)'(t) &= \alpha(\mathcal{R}'(t+s) - \mathcal{R}'(t))g(u) \\ &\quad + \int_t^{t+s} \mathcal{R}'(t+s-\xi)f(\xi, u(\xi), u'(\xi))d\xi \\ &\quad + \int_0^t (\mathcal{R}'(t+s-\xi) - \mathcal{R}'(t-\xi))f(\xi, u(\xi), u'(\xi))d\xi, \quad u \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Visto que $\tilde{\Lambda}(\mathcal{B})'$ é limitado e equicontínuo, pondo $a = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\delta$ e $b = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\|\varphi\|_{C([0,1];\mathbb{R}^+)}$ e usando novamente o Lema 4.28 podemos portanto concluir que

$$\widehat{\xi}(\tilde{\Lambda}(\mathcal{B})) = \xi(\tilde{\Lambda}(\mathcal{B})') \leq (a+b)\widehat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Do mesmo modo, temos a estimativa:

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{B})'(t)) &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t H(s)\xi(\overline{co}(\tilde{\Lambda}(\mathcal{B})'(s)))ds \\ &= M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t H(s)\xi(\tilde{\Lambda}(\mathcal{B})'(s))ds \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\widehat{\xi}(\mathcal{B}) \int_0^t H(s)(a+bs)ds \\ &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}\widehat{\xi}(\mathcal{B}) \left(\int_0^t |H(s) - \varphi(s)|(a+bs)ds + \int_0^t \varphi(s)(a+bs)ds \right) \\ &\leq \left(a(a+tb) + b \left(at + \frac{t^2}{2}b \right) \right) \widehat{\xi}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Isto significa que para todo $t \in [0, 1]$ temos a estimativa

$$\xi\left(\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{B})'(t)\right) \leq \left(a^2 + 2abt + \frac{(bt)^2}{2}\right)\widehat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Além disso, uma vez que $\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{B})'$ é limitado e equicontínuo, então

$$\widehat{\xi}\left(\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{B})'\right) = \xi\left(\tilde{\Lambda}^2(\mathcal{B})'\right) \leq \left(a^2 + 2ab + \frac{b^2}{2}\right)\widehat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Segue de um processo indutivo que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\xi\left(\tilde{\Lambda}^n(\mathcal{B})'(t)\right) \leq \left(\sum_{j=0}^n C_j^n a^{n-j} \frac{(bt)^j}{j!}\right)\widehat{\xi}(\mathcal{B}). \quad (4.41)$$

De fato, suponhamos que (4.41) é satisfeita para n , então

$$\begin{aligned}
 \xi\left(\tilde{\Lambda}^{n+1}(\mathcal{B})'(t)\right) &\leq M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} \int_0^t H(s) \xi\left(\tilde{\Lambda}^n(\mathcal{B})'(s)\right) ds \\
 &\leq \left(\sum_{j=0}^n C_j^n a^{n+1-j} \frac{(bt)^j}{j!}\right) \hat{\xi}(\mathcal{B}) + \left(\sum_{j=1}^{n+1} C_{j+1}^n a^{n+1-j} \frac{(bt)^j}{j!}\right) \hat{\xi}(\mathcal{B}) \\
 &= \left(a^{n+1} + \sum_{j=1}^n (C_{j-1}^n + C_j^n) a^{n+1-j} \frac{(bt)^j}{j!} + \frac{(bt)^{n+1}}{(n+1)!}\right) \hat{\xi}(\mathcal{B}) \\
 &= \left(\sum_{j=0}^{n+1} C_j^{n+1} a^{n+1-j} \frac{(bt)^j}{j!}\right) \hat{\xi}(\mathcal{B}).
 \end{aligned}$$

Dado que, para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto de funções $\tilde{\Lambda}^n(\mathcal{B})'$ é equicontínuo, logo

$$\hat{\xi}\left(\tilde{\Lambda}^n(\mathcal{B})\right) \leq \left(\sum_{j=0}^n C_j^n a^{n-j} \frac{b^j}{j!}\right) \hat{\xi}(\mathcal{B}).$$

Ademais, como $0 < a < 1$ e $b > 0$, segue do Lema 4.29 que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=0}^{n_0} C_j^{n_0} a^{n_0-j} \frac{b^j}{j!} = r < 1$. Por conseguinte,

$$\hat{\xi}\left(\tilde{\Lambda}^{n_0}(\mathcal{B})\right) \leq r \hat{\xi}(\mathcal{B})$$

Segue do Lema 2.62 que $\tilde{\Lambda}$ possui um ponto fixo em $\mathcal{B}$. Este ponto fixo é uma solução branda do problema (4.35)-(4.36). $\square$

Observação 4.32. Sob as condições do Teorema 4.31, apenas substituindo **(F4)** pela condição:

(F4)* $\xi(f(t, S(t), S'(t))) \leq v \xi(S'(t))$ para qualquer subconjunto de funções $S \subseteq C^1([0, 1]; X)$ e para quase todo $t \in [0, 1]$, com $0 < v < \frac{1}{M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}$.

Concluimos que o conjunto de todas as soluções brandas do problema (4.35)-(4.36) é compacto. Com efeito, isto é uma consequência de (106, Teorema 3.2).

4.4 Aplicações e métodos

Para ilustrar a estratégia geral, bem como descrever alguns aspectos da nossa abordagem, vamos considerar algumas aplicações de nossos resultados a estruturas flexíveis, condução de calor, equações fracionárias, e viscoelasticidade.

Denotamos por $H^m(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções que estão em $L^2(\Omega)$, junto com todas as suas derivadas de ordem $\leq m$. $H_0^1(\Omega)$ é o subespaço de Hilbert de $H^1(\Omega)$, formado de funções que se anulam sobre $\partial\Omega$.

4.4.1 Estruturas Flexíveis

Seja Ω um conjunto conexo, aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$, e $0 < \lambda < \nu$. Consideramos a equação

$$u'' + \lambda u''' = c^2(\Delta u + \nu \Delta u'), \quad (4.42)$$

tais equações surgem nas variações de estrutura flexível que possuem material de amortecimento interno e que são modeladas pelo “modelo linear standard” de viscoelasticidade (29). Observamos que o caso $\lambda = 0$ é chamado modelo de viscoelasticidade de Voigt (32). Defina $\alpha = \lambda$, $\beta = c^2$ e $\gamma = c^2\nu$. Então $\alpha\beta < \gamma$. É conhecido que o operador Laplaciano com condições de Dirichlet Δ com domínio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é um operador auto-adjunto sobre $L^2(\Omega)$ e $\sigma(\Delta) \subseteq (-\infty, 0)$, em que $H^m(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev de funções que estão em $L^2(\Omega)$, junto com todas as suas derivadas de ordem $\leq m$. $H_0^1(\Omega)$ é o subespaço de Hilbert de $H^1(\Omega)$, formado de funções que se anulam sobre $\partial\Omega$. Segue de (40, Teorema 3.2) que Δ é o gerador de uma família (α, β, γ) -regularizada $\mathcal{R}(t)$ sobre $X = L^2(\Omega)$. De (37, Proposição 3.1) sabemos que $u(t) = \alpha\mathcal{R}(t)z$ é a única solução de (4.42) com condições iniciais $u(0) = u'(0) = 0$, e $u''(0) = z \in D(\Delta^2)$. Definindo $v = u + \lambda u'$, a equação (4.42) torna-se

$$v''(t) = c^2\Delta v(t) + c^2(\nu - \lambda)\Delta u'(t), \quad (4.43)$$

com a condição inicial $v(0) = 0$. O funcional energia desse sistema é dado por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((v')^2 + c^2|\nabla v|^2 + c^2\lambda(\nu - \lambda)|\nabla u'|^2) dx,$$

aqui ∇ designa o gradiente.

Foi provado por Bose e Gorain (29) que a energia do sistema tende para zero quando $t \rightarrow \infty$, isto é, existem constantes $N > 0$ e $\rho > 0$ tais que $E(t) \leq Ne^{-\rho t}$, para $t \geq 0$. Em particular, da definição de $E(t)$ segue que existem constantes $N^* > 0$ e $\mu > 0$ tais que $\|\nabla v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq N^*e^{-\mu t}$ e $\|\nabla u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq N^*e^{-\mu t}$, para todo $t \geq 0$. Segue da desigualdade de Poincare (92)

$$\begin{aligned} \|\alpha\mathcal{R}(t)z\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u'\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_v\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C_{u'}\lambda\|\nabla u'\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq N^*(C_v + \lambda C_{u'})e^{-\mu t} \end{aligned}$$

e

$$\|\alpha\mathcal{R}'(t)z\|_{L^2(\Omega)} = \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{u'}\|\nabla u'\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{u'}N^*e^{-\mu t}.$$

Usando as estimativas anteriores e o princípio da limitação uniforme, podemos verificar que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|\mathcal{R}'(t)\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} + \|\mathcal{R}(t)\|_{\mathcal{B}(L^2(\Omega))} \leq Me^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \quad (4.44)$$

Consequentemente, $\mathcal{R}(t)$ satisfaz a condição **(ED)**. Agora, do Teorema 4.7 concluímos que para cada $f \in PSAP_\omega(L^2(\Omega))$ tal que $f(t) \in D(\Delta^2)$ para todo $t \geq 0$, a equação linear

$$u''(t) + \lambda u'''(t) = c^2(\Delta u(t) + \nu \Delta u'(t)) + f(t), \quad (4.45)$$

com condições iniciais $u(0) = 0$, $u'(0) = y \in D(\Delta^2)$ e $u''(0) = z \in D(\Delta^2)$ possui uma única solução $u \in PSAP_\omega(L^2(\Omega))$.

Observação 4.33. Em (90) (resp. (37)) os autores mostraram que a solução de (4.45) é assintoticamente ω -periódica (AP_ω) (resp., assintoticamente quase periódica (AAP)) sempre que a perturbação pertencer à AP_ω (resp., AAP).

Proposição 4.34. *Assuma que $a(\cdot)$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica com $\|a\|_{C_b([0,\infty);\mathbb{R})}$ suficientemente pequeno e que $g \in C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})$ é uma função L_g -Lipschitz. Então existe uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica para o problema*

$$\partial_{tt}u(t, x) + \lambda \partial_{ttt}u(t, x) = c^2(\Delta u(t, x) + \nu \Delta \partial_t u(t, x)) + a(t)g(u(t, x)), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad (4.46)$$

$$u(0, \cdot) = 0, \quad \partial_t u(0, \cdot) = y, \quad \partial_{tt}u(0, \cdot) = z. \quad (4.47)$$

Demonstração. Seja $f(t, \varphi)$ a perturbação associada ao problema (4.46)-(4.47). Temos as seguintes estimativas:

$$\|f(t, \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq v(\Omega)^{1/2} \|a\|_{C_b([0,\infty);\mathbb{R})} \|g\|_{C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})}, \quad t \geq 0, \quad \varphi \in L^2(\Omega), \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi) - f(t_0, \varphi_0)\|_{L^2(\Omega)} &\leq v(\Omega)^{1/2} \|g\|_{C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})} |a(t) - a(t_0)| \\ &\quad + L_g \|a\|_{C_b([0,\infty);\mathbb{R})} \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad t, t_0 \geq 0, \quad \varphi, \varphi_0 \in L^2(\Omega), \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{\varphi \in K} \|f(s + \omega, \varphi) - f(s, \varphi)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \frac{v(\Omega)^{1/2} \|g\|_{C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})}}{t} \int_0^t |a(s + \omega) - a(s)| ds, \quad (4.50)$$

em que $K \subseteq L^2(\Omega)$ é um conjunto limitado, e

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_g \|a\|_{C_b([0,\infty);\mathbb{R})} \|\varphi - \psi\|_{L^2(\Omega)}, \quad t \geq 0, \quad \varphi, \psi \in L^2(\Omega). \quad (4.51)$$

Observamos que a estimativa (4.48) implica que f é limitada e as estimativas (4.49) e (4.50) implicam que f é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $L^2(\Omega)$. Como $\|a\|_{C_b([0,\infty);\mathbb{R})}$ é suficientemente pequeno, segue do Teorema 4.11 que (4.46)-(4.47) possui uma única solução pseudo S -assintoticamente ω -periódica. $\square$

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(t, x) + \lambda \partial_{ttt}u(t, x) &= c^2(\Delta u(t, x) + \nu \Delta \partial_t u(t, x)) \\ &\quad + \rho a(t) \left(\int_{\Omega} u(t, \xi) d\xi \right)^2 \Phi_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (4.52)$$

com condições iniciais (4.47), em que $\rho > 0$ e $\Phi_0 \in L^2(\Omega)$. Do Teorema 4.18 deduzimos o seguinte resultado.

Proposição 4.35. *Assuma que $a(\cdot)$ é uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica e que ρ é um suficientemente pequeno. Então o problema (4.52) com condições iniciais (4.47) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Para conveniência do leitor, esboçaremos brevemente o argumento da demonstração. Seja $f(t, \varphi)$ a perturbação associada a (4.52). Temos as seguintes estimativas:

$$\|f(t, \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq v(\Omega)|\rho|\|a\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}\|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad t \geq 0, \quad \varphi \in L^2(\Omega), \quad (4.53)$$

$$\sup_{t \geq 0, \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq r} \|f(t, \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq v(\Omega)|\rho|\|a\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}\|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}r^2, \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \|f(t, \varphi) - f(t_0, \psi)\|_{L^2(\Omega)} &\leq |\rho|v(\Omega)\|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)} \left(|a(t) - a(t_0)|\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|a\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}\|\varphi + \psi\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi - \psi\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq r^2} \|f(s + \omega, \varphi) - f(s, \varphi)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \frac{|\rho|r^2v(\Omega)\|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}}{t} \int_0^t |a(s + \omega) - a(s)| ds, \quad (4.56)$$

$$\|f(t, \varphi) - f(s, \psi)\|_{L^2(\Omega)} \leq |\rho|v(\Omega)\|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}\|a\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} (\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}) \|\varphi - \psi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.57)$$

Tendo em mente que ρ é suficientemente pequeno, concluimos a demonstração usando o Teorema 4.18. $\square$

Seja $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e integrável, $g \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $\rho \in \mathbb{R}$. Consideremos o seguinte problema

$$\partial_{tt}u(t, x) + \lambda \partial_{ttt}u(t, x) = c^2(\Delta u(t, x) + \nu \Delta \partial_t u(t, x)) + \rho \sin(a(t))g(u(t, x)), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.58)$$

com condições iniciais (4.47). Do Teorema 4.19, deduzimos o seguinte resultado.

Proposição 4.36. *Assuma que $|\rho|$ é suficientemente pequeno e que existe $L_g > 0$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq L_g|x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Então o problema (4.58)-(4.47) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Por razões de brevidade, faremos apenas um esboço da demonstração. Seja $f(t, \varphi)$ a perturbação associada a equação (4.58). Temos as seguintes estimativas:

$$\int_0^t \sup_{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq r} \|f(s + \omega, \varphi) - f(s, \varphi)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq 2|\rho|v(\Omega)^{1/2}\|g\|_{C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})}\|a\|_{L^1([0,\infty))}, \quad (4.59)$$

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\|_{L^2(\Omega)} \leq |\rho|\|a(t)\|L_g\|\varphi - \psi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.60)$$

Sendo $W_f(t) = M|\rho|L_g \int_0^t e^{-\mu(t-s)}|a(s)|ds$, então

$$W_f(t) \leq M|\rho|L_g\|a\|_{L^1([0,\infty))}, \quad (4.61)$$

$$\frac{1}{l} \int_0^l W_f(t)dt \leq \frac{M|\rho|L_g\|a\|_{L^1([0,\infty))}}{\mu l}. \quad (4.62)$$

Concluimos a demonstração usando o Teorema 4.19. $\square$

Sejam $L : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função pseudo S -assintoticamente ω -periódica e $h(t)$ uma função contínua não-decrescente de $[0, \infty)$ em $[1, \infty)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|g(x) - g(y)| \leq \Psi(|x - y|)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, em que $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua não-decrescente que satisfaz as seguintes condições

$$(G1) \quad \Psi_\infty = \sup_{t \geq 0} \Psi(t) < +\infty,$$

$$(G2) \quad \text{Para todo } \sigma > 0, \int_0^\infty \Psi\left(\frac{\sigma}{h(s)}\right) ds < +\infty.$$

Consideremos a equação

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(t, x) + \lambda \partial_{ttt}u(t, x) &= c^2 (\Delta u(t, x) + \nu \Delta \partial_t u(t, x)) \\ &\quad + L(t)g\left(\int_\Omega h^{-1}(t)u(t, \xi)d\xi\right) \Phi_0(x), \quad t \geq 0, x \in \Omega, \end{aligned} \quad (4.63)$$

com condições iniciais (4.47) e $\Phi_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, em que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Proposição 4.37. *Sob as condições acima, se Ψ satisfaz a seguinte condição:*

$$(G3) \quad u \in PAP_0(L^2(\Omega)) \text{ implica que } \Psi\left(\frac{\|u(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}}{h(\cdot)}\right) \in PAP_0(\mathbb{R}).$$

Então o problema (4.63), com condições iniciais (4.47), possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Seja $f(t, \varphi)$ a perturbação associada a equação (4.63). Temos as seguintes estimativas:

$$\|f(t, \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|L\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \left(\Psi(v(\Omega)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}) + |g(0)| \right) \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_0^t \sup_{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq r} \|f(s + \omega, \varphi) - f(s, \varphi)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ & \leq \left(\Psi(v(\Omega)^{1/2} r) + |g(0)| \right) \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |L(s + \omega) - L(s)| ds \right) \\ & \quad + \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |L(s)| \Psi \left(\frac{2v(\Omega)^{1/2} r}{h(s)} \right) ds \right) \\ & \leq \left(\Psi(v(\Omega)^{1/2} r) + |g(0)| \right) \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |L(s + \omega) - L(s)| ds \right) \\ & \quad + \frac{1}{t} \left(\|L\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)} \int_0^\infty \Psi \left(\frac{2v(\Omega)^{1/2} r}{h(s)} \right) ds \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

A estimativa (4.65) e a condição **(G2)** implicam que f é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $L^2(\Omega)$. De (4.64) podemos definir $\widetilde{W}$ em **(W1)*** por

$$\widetilde{W}(\xi) = \|L\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \left(\Psi(v(\Omega)^{1/2} \xi) + |g(0)| \right) \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sendo u e v pertencentes à $C_b([0, \infty); L^2(\Omega))$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_{L^2(\Omega)} ds & \leq \|L\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad \times \int_0^t \Psi \left(v(\Omega)^{1/2} \frac{\|u(s) - v(s)\|_{L^2(\Omega)}}{h(s)} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.66)$$

De **(G3)** e (4.66), a condição **(C1)** é assegurada. Podemos verificar que

$$\beta(\varepsilon) \leq \frac{1}{\mu} \|L\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)} (\Psi_\infty + |g(0)|)$$

(ver (4.26)) e também que as condições **(D1)** e (4.27) são verificadas. Se $u, v \in C_h(L^2(\Omega))$, então

$$\int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \frac{1}{\mu} \|L\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \|\Phi_0\|_{L^2(\Omega)} \Psi(v(\Omega)^{1/2} \|u - v\|_h). \quad (4.67)$$

Uma vez que $\Psi(\cdot)$ é contínua, a estimativa (4.67) mostra que a condição **(D2)** do Teorema 4.22 é satisfeita. Um argumento envolvendo Teorema de Compacidade Rellich-Kondrachov (ver Teorema 2.67) prova que o conjunto

$$\widetilde{K} = \{f(t, \varphi) : 0 \leq t \leq a, \varphi \in L^2(\Omega), \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq r\}$$

é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$, para mostrar este fato, usamos a seguinte estimativa

$$\sup_{t \geq 0, \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq r} \|f(t, \varphi)\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \|L\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} (\Psi(v(\Omega)^{1/2}r) + |g(0)|) \|\Phi_0\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Consequentemente, pela Observação 4.23 (a), a hipótese **(D3)** é verdadeira. Usando o Teorema 4.22 e o Lema 2.15, o problema (4.63) com condições iniciais (4.47) tem uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω -periódica. $\square$

4.4.2 Um problema do calor unidimensional

O seguinte problema do calor unidimensional foi estudado em (38, 107)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, \ x > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(0, t) + k[u(0, t) + c \sin(t)]^3, & t \geq 0, \end{cases}$$

em que $k > 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Usando os resultados da Seção 6 de (107, Capítulo IV), segue que este problema pode ser resolvido se se pode resolver o problema

$$y(t) = -\frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^t (t-s)^{-1/2} [y(s) + k(y(s) - c \sin s)^3] ds, \quad t \geq 0, \quad (4.68)$$

em que $y(t) = u(0, t)$. O núcleo é singular e não está em $L^1[0, \infty)$. Por isso, (4.68) não poderá ser usada para definir um mapa compacto ou uma contração. Em muitos problemas clássicos envolvendo equações diferenciais parciais e suas equações integrais associadas aparecem o termo $(t-s)^{-1/2}$ no núcleo (108, 109, 110, 111, 112, 113, 114). Podemos mostrar que (4.68) possui uma única solução assintoticamente 2π -periódica. De fato, seja $R(t)$ o resolvente de $a(t, s) = -\frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}}$. Pelo livro do Miller (107, Teorema IV.6.2) segue que $0 \leq R(t) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, quando $t \in (0, \infty)$, $R \in C((0, \infty); \mathbb{R}^+)$ e $\int_0^\infty R(t) dt = 1$. Usando a fórmula de variação das constantes para a equação integral (107, Capítulo IV) podemos escrever (4.68) como

$$y(t) = -k \int_0^t R(t-s)(y(s) - c \sin s)^3 ds. \quad (4.69)$$

Daí, vemos que todos os nossos problemas sobre a equação (4.68), acima mencionados, desapareceram. Agora, é claro que o método de ponto fixo é uma ferramenta natural para obter solução assintoticamente periódica de (4.69).

Seja $0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{27k}}$, então $\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{k}} - \varepsilon > 0$. Escolhemos $c \in \mathbb{R}$ tal que $|c| \leq \frac{1}{2} (\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{k}} - \varepsilon)$. Considerando espaço $S_\omega(\mathbb{R})$ definido na seção 2.1, defina o conjunto $S = \{\phi \in S_\omega(\mathbb{R}); \|\phi\|_\infty \leq |c| + \varepsilon\}$ e o operador

$$T\phi(t) = -k \int_0^t R(t-s)(\phi(s) - c \sin s)^3 ds,$$

para todo $t \geq 0$ e $\phi \in S$. Se $\phi \in S$, então

$$\begin{aligned} |T\phi(t)| &\leq k \int_0^t R(t-s) |\phi(s) - c \sin s|^3 ds \\ &\leq k \int_0^t R(t-s) (|\phi(s)| + |c|)^3 ds \\ &\leq k(2|c| + \varepsilon)^3 \int_0^t R(s) ds \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos verificar que

$$|T\phi(t+h) - T\phi(t)| \leq k(2|c| + \varepsilon)^3 \left(\int_0^t |R(s+h) - R(s)| ds + \int_0^{|h|} R(s) ds \right) \rightarrow 0$$

quando $|h| \rightarrow 0$. Consequentemente, T é um mapa contínuo de S em $C_b([0, \infty); \mathbb{R})$.

Sejam $g(t, x)$ definido por $g(t, x) = (x - c \sin t)^3$ e K um conjunto limitado em $\mathbb{R}$. Temos as seguintes estimativas:

$$|g(t, x)| \leq \left(\sup_{x \in K} |x| + |c| \right)^3, \quad t \geq 0 \text{ e } x \in K,$$

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq 3 \left(\sup_{x \in K} |x| + |c| \right)^2 |x - y|, \quad t \geq 0 \text{ e } x \in K.$$

Note também que $g(t+2\pi n, x) = g(t, x)$, para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Levando em consideração (38, Lema 2.1), observamos que $t \rightarrow (\phi(t) + c \sin t)^3$ é assintoticamente 2π -periódica sempre que ϕ possuir a mesma propriedade.

Em seguida nós precisaremos do lema abaixo, o qual será demonstrado depois.

Lema 4.38. *Se $f \in S_\omega(\mathbb{R})$ e $\Gamma f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por*

$$\Gamma f(t) = \int_0^t R(t-s) f(s) ds,$$

então $\Gamma f \in S_\omega(\mathbb{R})$.

Usando o Lema 4.38, nós deduzimos que $TS \subseteq S$. Ademais, para $\phi_1, \phi_2 \in S$,

$$\begin{aligned} |T\phi_1(t) - T\phi_2(t)| &\leq k \int_0^t R(t-s) |(\phi_2(s) - c \sin s)^3 - (\phi_1(s) - c \sin s)^3| ds \\ &\leq 3k(2|c| + \varepsilon)^2 \int_0^t R(t-s) |\phi_2(s) - \phi_1(s)| ds \\ &\leq 3k(2|c| + \varepsilon)^2 \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Visto que $0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{27k}}$, então $\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{k}} < \frac{1}{\sqrt{3k}}$, por isso $|c| < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3k}} - \varepsilon \right)$. Portanto $3k(2|c| + \varepsilon)^2 < 1$. Isto implica que T é uma contração. Desta maneira, nossa afirmação está demonstrada.

Demonstração do Lema 4.38. As seguintes estimativas são responsáveis pela continuidade e limitação da aplicação Γf :

$$|\Gamma f(t+h) - \Gamma f(t)| \leq \|f\|_\infty \left(\int_0^t |R(s+h) - R(s)| ds + \int_0^{|h|} R(s) ds \right) \rightarrow 0, \text{ quando } |h| \rightarrow 0,$$

e

$$\|\Gamma f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Dessas estimativas obtemos que $\Gamma f \in C_b([0, \infty); \mathbb{R})$. Para $\varepsilon > 0$, selecionamos $L > 0$ tal que $\|f(t+n\omega) - f(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq L$ e cada $n \in \mathbb{N}$, e $\int_L^\infty R(s) ds \leq \varepsilon$. Notamos que

$$\begin{aligned} \Gamma f(t+n\omega) - \Gamma f(t) &= \int_0^{n\omega} R(t+n\omega-s)f(s)ds + \int_0^L R(t-s)(f(s+n\omega) - f(s))ds \\ &\quad + \int_L^t R(t-s)(f(s+\omega) - f(s))ds. \end{aligned}$$

Consequentemente, para $t \geq 2L$ é verificado que

$$\begin{aligned} |\Gamma f(t+n\omega) - \Gamma f(t)| &\leq \|f\|_\infty \int_t^{t+n\omega} R(s)ds + 2\|f\|_\infty \int_{t-L}^t R(s)ds + \varepsilon \int_0^\infty R(s)ds \\ &\leq \varepsilon(3\|f\|_\infty + 1), \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

Na estrutura $PSAP_\omega$, que é o *Leitmotiv* deste capítulo, a discussão precedente motiva o seguinte resultado geral.

Teorema 4.39. *Considere a equação escalar real*

$$y(t) = -\frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^t (t-s)^{-1/2} (y(s) + G(s, y(s))) ds, \quad t \geq 0. \quad (4.70)$$

Suponha que a função $G : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de $\mathbb{R}$, uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $\mathbb{R}$ e contínua localmente Lipschitz com respeito a segunda variável, isto é,

$$|G(t, x) - G(t, y)| \leq L(r)|x - y|,$$

para todo $t \geq 0$ e quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ com $|x| \leq r$ e $|y| \leq r$, em que $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função não-decrescente. Se existe $\sigma > 0$ tal que $L(\sigma) + \frac{1}{\sigma} \sup_{t \geq 0} |G(t, 0)| < 1$, então a equação (4.70) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Usando a fórmula de variação das constantes, podemos escrever (4.70) como

$$y(t) = - \int_0^t R(t-s)G(s, y(s))ds.$$

Defina $S^\odot = \{\phi \in PSAP_\omega(\mathbb{R}) : \|\phi\|_\infty \leq \sigma\}$ e

$$T^\odot \phi(t) = - \int_0^t R(t-s)G(s, \phi(s))ds,$$

para todo $t \geq 0$ e $\phi \in S^\odot$. Se $\phi_1, \phi_2 \in S^\odot$, então

$$\begin{aligned} |T^\odot \phi_1(t) - T^\odot \phi_2(t)| &\leq \int_0^t R(t-s) |G(s, \phi_2(s)) - G(s, \phi_1(s))| ds \\ &\leq \int_0^t R(t-s)L(\sigma) |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds \\ &\leq L(\sigma)\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|T^\odot \phi_1 - T^\odot \phi_2\|_\infty \leq L(\sigma)\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty. \quad (4.71)$$

Por outro lado, para $\phi \in S^\odot$, nós obtemos

$$\|T^\odot \phi\|_\infty \leq L(\sigma)\|\phi\|_\infty + \sup_{t \geq 0} |G(t, 0)| \leq (L(\sigma) + \sigma^{-1} \sup_{t \geq 0} |G(t, 0)|) \sigma \leq \sigma,$$

e

$$|T^\odot \phi(t+h) - T^\odot \phi(t)| \leq \sigma \left(\int_0^t |R(s+h) - R(s)| ds + \int_0^{|h|} |R(s)| ds \right) \rightarrow 0$$

quando $|h| \rightarrow 0$. Portanto $T^\odot$ é um operador contínuo que mapeia $S^\odot$ em $C_b([0, \infty); \mathbb{R})$.

Vamos precisar do seguinte resultado.

Lema 4.40. *Se $f \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$, então $\Gamma f \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$, em que Γf é dado no Lema 4.38.*

Usando o Corolário 2.14 e o Lema 4.40 deduzimos que $S^\odot$ é invariante pelo operador $T^\odot$. Por (4.71) inferimos que $T^\odot$ é uma contração e isto finaliza a demonstração. $\square$

Demonstração do Lema 4.40. Da demonstração do Lema 4.38 observamos que $\Gamma f \in C_b([0, \infty); \mathbb{R})$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t |\Gamma f(\tau + \omega) - \Gamma f(\tau)| d\tau &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_0^\omega R(\tau + \omega - s)f(s)ds \right| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_\omega^{\tau+\omega} R(\tau + \omega - s)f(s)ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\tau R(\tau - s)f(s)ds \right| d\tau \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \int_\tau^{\tau+\omega} R(s)|f(\tau + \omega - s)| ds d\tau \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^\tau R(\tau - s)|f(s + \omega) - f(s)| ds d\tau \\ &:= I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Vamos estimar os termos $I_1(t)$ e $I_2(t)$ separadamente.

- Para o primeiro termo do lado direito, nós temos a estimativa

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq \frac{\|f\|_\infty}{t} \int_0^t \int_\tau^{\tau+\omega} R(s) ds d\tau \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} \int_0^t \int_\tau^{\tau+\omega} \frac{1}{\sqrt{s}} ds d\tau \\
&= \frac{2\|f\|_\infty}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} \int_0^t [\sqrt{\tau+\omega} - \sqrt{\tau}] d\tau \\
&= \frac{4}{3} \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} [(t+\omega)^{3/2} - t^{3/2} - \omega^{3/2}],
\end{aligned}$$

e usando o fato

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t+\omega)^{3/2} - t^{3/2}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2\omega + 3t\omega^2 + \omega^3}{t^{5/2}} \frac{1}{(1 + \frac{\omega}{t})^{3/2} + 1} = 0,$$

nós inferimos que $I_1(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

- Para o segundo termo, nós obtemos

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \int_s^t R(\tau-s) |u(s+\omega) - u(s)| d\tau ds \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^{t-s} R(\tau) d\tau \right) |u(s+\omega) - u(s)| ds \\
&\leq \frac{1}{t} \int_0^t |u(s+\omega) - u(s)| ds,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0$. Isto completa a demonstração que $\Gamma f \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$. $\square$

Antes de proceder com o próximo resultado (ver Teorema 4.43), vamos nos concentrar nas duas seguintes observações.

Observação 4.41. Observamos que a função $A(t) = (\pi t)^{-1/2}$ satisfaz as hipóteses **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** de (107, Capítulo IV), que são:

(A1) $A \in C(0, \infty) \cap L^1(0, 1)$.

(A2) $A(t)$ é positiva e não-crescente para $t > 0$.

(A3) Para cada $T > 0$, a função $A(t)/A(t+T)$ é não-crescente em t para $0 < t < \infty$.

Um cálculo simples nos permitirá concluir que $A(t)$ satisfaz também a seguinte propriedade:

(A4) A função $t \rightarrow \int_t^{t+\omega} A(s) ds$ é ergódica.

Observamos que **(A4)** é válida para todo $\omega \in \mathbb{R}^+$. Isto finaliza a discussão da observação.

Observação 4.42. Seja $A(t)$ uma função tal que **(A1)**, **(A2)**, **(A3)** e **(A4)** são verificadas. Seja $R(t)$ o resolvente de $a(t, s) = -A(t - s)$. Pelo livro do Miller (107, Teorema IV.6.2) segue que $0 \leq R(t) \leq A(t)$ quando $t \in (0, \infty)$, $R \in C((0, \infty); \mathbb{R}^+)$ e $\int_0^\infty R(t)dt \leq 1$. Se u é uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica, então $t \rightarrow \int_0^t R(t - s)u(s)ds$ também é uma função S-assintoticamente ω -periódica. A demonstração desta afirmação faz uso de uma construção similar à usada na demonstração do Lema 4.40. Por motivo de brevidade, os detalhes deixamos a cargo do leitor.

O seguinte teorema é o homólogo do Teorema 4.39 para a classe geral de funções $A(\cdot)$ que satisfazem as condições da Observação 4.42.

Teorema 4.43. *Considere a equação escalar real*

$$y(t) = - \int_0^t A(t - s)(y(s) + G(s, y(s)))ds, \quad t \geq 0. \quad (4.72)$$

*Suponha que $A(t)$ satisfaz a hipótese **(A1-4)** da Observação 4.42 e G satisfaz as condições do Teorema 4.39. Então a equação (4.72) possui uma solução pseudo S-assintoticamente ω -periódica.*

Antes de concluir esta seção, nós forneceremos uma aplicação para ilustrar a utilidade do Teorema 4.43.

Corolário 4.44. *Suponha que $A(t)$ satisfaz a hipótese **(A1-4)** da Observação 4.42. Seja f pertencente à $PSAP_\omega(\mathbb{R})$ e seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz com $g(0) = 0$, isto é, para cada número positivo r , $|g(x) - g(y)| \leq L_g(r)|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ com $|x| \leq r$ e $|y| \leq r$, em que L_g é uma função não-decrescente. Se $L_g(2\|f\|_\infty) + L_g(\|f\|_\infty) < 1$, então a equação*

$$y(t) = - \int_0^t A(t - s)(y(s) + g(y(s) - f(s)))ds, \quad t \geq 0, \quad (4.73)$$

possui uma solução pseudo S-assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Seja $G(t, x)$ dada por $G(t, x) = g(x - f(t))$ e seja r um número positivo e $x, y \in B_r(\mathbb{R})$, então

$$|G(t, x) - G(t, y)| = |g(x - f(t)) - g(y - f(t))| \leq L_g(r + \|f\|_\infty)|x - y|,$$

e

$$|G(t, 0)| = |g(-f(t)) - g(0)| \leq L_g(\|f\|_\infty)\|f\|_\infty.$$

Pondo $L(\xi) = L_g(\xi + \|f\|_\infty)$, então

$$L(\|f\|_\infty) + \frac{\|G(\cdot, 0)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq L_g(2\|f\|_\infty) + L_g(\|f\|_\infty) < 1.$$

Por outro lado, é verdade que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in B_r(\mathbb{R})} |G(s + \omega, x) - G(s, x)| ds \leq \frac{L_g(r + \|f\|_\infty)}{t} \int_0^t |f(s + \omega) - f(s)| ds.$$

Portanto G é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $\mathbb{R}$. Concluimos a demonstração usando o Teorema 4.43. $\square$

Em seguida, aplicaremos nossas técnicas para fluxo de calor não-linear em uma barra homogênea de unidade de comprimento de material com memória, com a temperatura $u = u(t, x)$ mantida em zero em $x = 0$ e $x = 1$, em que t é o tempo e x é a posição. Assumiremos que a história de u é prescrita para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq 1$ (115, 116, 117), $u(0, x) = u_0(x)$, $0 \leq x \leq 1$, é a distribuição de temperatura inicial dada. Denotamos o calor fornecido externamente por $f(t, x)$. De acordo com a teoria de fluxo de calor em materiais com memória, o fluxo de calor é tomado como

$$q(t, x) = -u_x(t, x) - \int_0^t b(t - s)u_x(s, x)ds, \quad t \geq 0, \quad 0 < x < 1,$$

em que os subscritos denotam diferenciação com respeito a x . Observamos que ao escrever a função q , é assumido por simplicidade e sem perda de generalidade que a história da temperatura u é prescrito como zero para $t < 0$; para mais detalhes e referências à teoria física subjacente, indicamos Nohel (117). A lei de equilíbrio de calor é, então,

$$u_t = -\frac{\partial q}{\partial x} + f.$$

Daí, a temperatura u satisfaz o problema de valor inicial e de fronteira

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u(t, x) + \int_0^t b(t - s)u(s, x)ds \right) + f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1], \quad (4.74)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.75)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (4.76)$$

Se consideramos o problema (4.74)–(4.76) em $X = L^2(0, 1)$, então a função relaxamento de fluxo de calor $b(\cdot)$ é tal que $b \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(X))$. Definimos $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$, então A gera um semigrupo analítico sobre X e para qualquer $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\Lambda(\alpha) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \alpha\} \subseteq \rho(A)$. Agora definimos $\widehat{b}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} b(t) dt$, $R(0) = I$ (mapa identidade) e

$$R(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (\lambda I - A(1 + \widehat{b}(\lambda)))^{-1} u d\lambda, \quad u \in X, \quad t > 0,$$

em que Γ consiste de Γ_1, Γ_2 e Γ_3 , em que $\Gamma_1 = \{re^{i\theta} : r \geq 1\}$, $\Gamma_2 = \{e^{i\beta} : -\theta \leq \beta \leq \theta\}$ e $\Gamma_3 = \{re^{-i\theta} : r \geq 1\}$ com $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, orientado de modo que para alguns $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$,

$\lambda \in \Lambda(\alpha)$ implica $1 + \widehat{b}(\lambda)$ existe, não é zero e $\lambda(1 + \widehat{b}(\lambda))^{-1} \in \Lambda(\beta)$. Sob essas condições, se $u_0 \in D(A)$, então

$$u(t) = R(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

é uma solução de (4.74)–(4.76) (115).

De (115, Seção 3), existe uma constante $M > 0$ tal que $\|R(t)\|_{B(X)} \leq Me^{-\alpha t}$, para todo $t \geq 0$. Se escolhermos $f \in PSAP_\omega(X)$, $u_0 \in D(A)$, então as funções $t \rightarrow R(t)u_0$ e $t \rightarrow \int_0^t R(t-s)f(s)ds$ estão em $PSAP_\omega(\mathbb{R})$. Portanto, a solução $u(\cdot)$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica.

4.4.3 Equações fracionárias

O Cálculo Fracionário é o campo da análise matemática que trata da investigação e aplicações de integrais e derivadas de ordem arbitrária. A força de derivadas de ordem não-inteira está em sua capacidade de descrever situações reais de forma mais adequada que as derivadas de ordem inteira, especialmente quando o problema possui memória ou propriedades hereditárias. Observamos que existe muito interesse em desenvolver a análise teórica e métodos numéricos para equações fracionárias. Em particular, algumas propriedades de periodicidade assintótica das soluções para estas equações têm sido estudadas (91, 118).

Começamos considerando a seguinte equação diferencial fracionária que foi discutida em detalhe por Burton (108):

$${}^c D^q x(t) = -kg(t, x(t)), \quad t > 0, \quad 0 < q < 1; \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (4.77)$$

com $g(t, x(t)) = x(t) + f(t) + G(t, x(t))$, k uma constante positiva, e $G : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são ambas funções contínuas. A derivada fracionária de Caputo de ordem q de uma função x é definida por

$${}^c D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^{-q} x'(s)ds, \quad (4.78)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gamma (119).

Queremos estudar a existência de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas de (4.77). É apropriado observar que nossa abordagem é baseia-se na fórmula de variação de parâmetros de Miller (107). A ideia é reescrever (4.77) como uma equação integral com núcleo singular. No entanto, o núcleo é completamente monótono. Isto nos permitirá usar a teoria de ponto fixo. Notemos que uma ideia similar já foi usada em (120) e também (121). Seguindo (119), a equação (4.77) é reescrita como:

$$x(t) = x(0) - \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} x(s)ds - \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (f(s) + G(s, x(s)))ds. \quad (4.79)$$

Escrevemos a parte linear como

$$z(t) = x_0 - \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} z(s) ds. \quad (4.80)$$

Afirmamos que $z(t)$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. É instrutivo fazer a demonstração. Defina o núcleo singular como $C(t) = \frac{k}{\Gamma(q)} t^{q-1}$. Para cada $T > 0$ temos uma propriedade importante que é $\int_0^T C(s) ds < \infty$. $C(t)$ é completamente monótona sobre $(0, \infty)$ no sentido que $(-1)^k C^{(k)}(t) \geq 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ e $t \in (0, \infty)$. Além disso, $C(t)$ satisfaz as condições **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** da Observação 4.41. Portanto, um teorema de Miller (107, Teorema 6.2) afirma que se a equação resolvente para o núcleo C é

$$R(t) = \frac{k}{\Gamma(q)} t^{q-1} - \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} R(s) ds, \quad (4.81)$$

então o resolvente, R , existe como um elemento de $L^1(\mathbb{R}^+)$ e é único nesta classe. Note que R satisfaz $0 \leq R(t) \leq C(t)$ para todo $t > 0$, logo $R(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Visto que $C \notin L^1[0, \infty)$, logo $\int_0^\infty R(s) ds = 1$. Por (107, Teorema 7.2) podemos ver que R é uma função completamente monótona sobre $(0, \infty)$. Por outro lado, pela fórmula de variação de parâmetros (107, Capítulo I) podemos escrever a solução $z(t)$ de (4.80) como

$$z(t) = x_0 \left(1 - \int_0^t R(s) ds \right). \quad (4.82)$$

Consequentemente,

$$z(s+\omega) - z(s) = -x_0 \int_s^{s+\omega} R(\tau) d\tau.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t |z(s+\omega) - z(s)| ds &\leq \frac{|x(0)|}{t} \int_0^t \int_s^{s+\omega} R(\tau) d\tau ds \\ &\leq \frac{k|x(0)|}{\Gamma(q)t} \int_0^t \int_s^{s+\omega} \tau^{q-1} d\tau ds \\ &= \frac{k|x(0)|}{\Gamma(q+1)} \frac{1}{t} ((t+\omega)^{q+1} - t^{q+1} - \omega^q) \\ &= \frac{k|x(0)|}{\Gamma(q+1)} \left(\frac{(t+\omega)^{2(q+1)} - t^{2(q+1)}}{t^{q+2}} \right) \left(\frac{1}{(1 + \frac{\omega}{t})^{q+1} + 1} \right) \\ &= \frac{k|x(0)|}{\Gamma(q+1)} \left(\frac{\omega^{2(q+1)}}{t^{q+2}} + \frac{2(q+1)\omega^{2q+1}}{t^{q+1}} + \frac{1}{t^{q+1}} \frac{o(t)}{t} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(1 + \frac{\omega}{t})^{q+1} + 1} \right). \end{aligned}$$

Como consequência da derivação anterior, nós temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |z(s+\omega) - z(s)| ds = 0. \quad (4.83)$$

Disto, podemos concluir nossa afirmação.

Por outro lado, a equação (4.79) pode ser escrita na forma

$$x(t) = F(t) - \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} x(s) ds, \quad (4.84)$$

em que

$$F(t) = x_0 - \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (f(s) + G(s, x(s))) ds. \quad (4.85)$$

Tendo em mente a equação resolvente (ver (4.81)). A solução do sistema linear (4.84) pode ser escrita em termos de F como segue

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t) - \int_0^t R(t-s) F(s) ds \\ &= x_0 \left(1 - \int_0^t R(s) ds \right) - \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (f(s) + G(s, x(s))) ds \\ &\quad + \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t \int_0^s R(t-s) (s-u)^{q-1} (f(u) + G(u, x(u))) du ds \\ &= z(t) - \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-u)^{q-1} (f(u) + G(u, x(u))) du \\ &\quad + \frac{k}{\Gamma(q)} \int_0^t \left(\int_u^t R(t-s) (s-u)^{q-1} ds \right) (f(u) + G(u, x(u))) du \\ &= z(t) + \int_0^t \left(-\frac{k}{\Gamma(q)} (t-u)^{q-1} + \int_0^{t-u} \frac{k}{\Gamma(q)} (t-u-s)^{q-1} R(s) ds \right) \\ &\quad \times (f(u) + G(u, x(u))) du \\ &= z(t) + \int_0^t R(t-u) (f(u) + G(u, x(u))) du. \end{aligned}$$

Portanto, (4.79) pode ser escrita como

$$x(t) = z(t) + \int_0^t R(t-s) (f(s) + G(s, x(s))) ds. \quad (4.86)$$

Proposição 4.45. *Suponha que $f \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$ e que G satisfaz as condições do Teorema 4.39. Se existe $\sigma > 0$ tal que $L(\sigma) + \frac{1}{\sigma} (|x_0| + \|f\|_\infty + \sup_{t \geq 0} |G(t, 0)|) < 1$, então (4.77) possui uma solução pseudo S -assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Iniciamos a demonstração definindo o operador

$$(P\phi)(t) = z(t) + \int_0^t R(t-s) (f(s) + G(s, \phi(s))) ds, \quad (4.87)$$

para todo $t \geq 0$, e $\phi \in C_b([0, \infty); \mathbb{R})$. Para ϕ, ϕ_1 e ϕ_2 pertencentes à $C_b([0, \infty); \mathbb{R})$, temos as seguintes estimativas:

$$|P\phi(t)| \leq |x_0| + \|f\|_\infty + L(\|\phi\|_\infty) \|\phi\|_\infty + \sup_{t \geq 0} |G(s, 0)| := C_\phi, \quad (4.88)$$

$$|P\phi(t+h) - P\phi(t)| \leq C_\phi \left(\left| \int_{t+h}^t R(s)ds \right| + \int_0^t |R(s+h) - R(s)|ds + \int_0^{|h|} R(s)ds \right), \quad (4.89)$$

$$|P\phi_1(t) - P\phi_2(t)| \leq L(\max\{\|\phi_1\|_\infty, \|\phi_2\|_\infty\})\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty. \quad (4.90)$$

Seja $\phi \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$, pelo Corolário 2.14, a função $s \rightarrow f(s) + G(s, \phi(s))$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Uma vez que $C(t) = \frac{k}{\Gamma(q)}t^{q-1}$ satisfaz as hipóteses **(A1–4)** da Observação 4.42, nós notamos que a função $t \rightarrow \int_0^t R(t-s)(f(s) + G(s, \phi(s)))ds$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Deste fato e tendo em mente (4.89) e que $z(\cdot) \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$, concluímos que P mapeia $PSAP_\omega(\mathbb{R})$ em si mesmo. Observamos que de (4.88), a bola $B_\sigma(PSAP_\omega(\mathbb{R}))$ é invariante por P . Ademais, segue de (4.90) que o operador $P : B_\sigma(PSAP_\omega(\mathbb{R})) \rightarrow B_\sigma(PSAP_\omega(\mathbb{R}))$ é uma $L(\sigma)$ -contração. Isto completa a demonstração. $\square$

Exemplo 4.46. Considere a equação diferencial fracionária do tipo Caputo

$${}^c D^q x(t) = -x(t) - \nu a(t)x^3(t), t > 0, \quad (4.91)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.92)$$

com $0 < q < 1$, $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica, e $|\nu|$ suficientemente pequeno.

O ponto de partida é observar que podemos escrever (4.91) como

$$x(t) = z(t) + \nu \int_0^t R(t-s)a(s)x^3(s)ds,$$

em que $z(t)$ é dada por (4.82). Defina

$$(P\varphi)(t) = z(t) + \nu \int_0^t R(t-s)a(s)\varphi(s)^3ds,$$

para todo $t \geq 0$, e $\varphi \in C_b([0, \infty); \mathbb{R})$. Temos as seguintes estimativas:

$$\|P\varphi\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \leq |x_0| + |\nu| \|a\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \|\varphi\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}^3.$$

$$\begin{aligned} \|P\varphi_1 - P\varphi_2\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} &\leq |\nu| \|a\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \left(\|\varphi_1\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}^2 + \|\varphi_1\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \|\varphi_2\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_2\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}^2 \right) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Uma observação importante deve ser feita neste momento. Note que para $\Phi \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$, a função $s \rightarrow a(s)\Phi(s)^3$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t |a(s+\omega)\varphi(s+\omega)^3 - a(s)\varphi(s)^3| ds &\leq \frac{\|\varphi\|_{C_b([0,\infty);\mathbb{R})}^3}{t} \int_0^t |a(s+\omega) - a(s)| ds \\ &\quad + \frac{3\|\varphi\|_{C_b([0,\infty);\mathbb{R})}^2 \|a\|_{C_b([0,\infty);\mathbb{R})}}{t} \\ &\quad \times \int_0^t |\varphi(s+\omega) - \varphi(s)| ds. \end{aligned}$$

Do fato que $z(\cdot)$ é uma função pseudo S-assintoticamente ω -periódica (ver (4.83)) e da Observação 4.42 nós notamos que $P\varphi(\cdot)$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Para completar a discussão, escolhamos $|\nu| < \frac{1}{24\|a\|_\infty|x_0|^2}$, então $B_{2|x_0|}(PSAP_\omega(\mathbb{R}))$ é invariante por P e o operador P de $B_{2|x_0|}(PSAP_\omega(\mathbb{R}))$ em si mesmo é uma σ -contração com $\sigma = 12\|a\|_\infty|x_0|^2$. Isto finaliza a discussão do Exemplo 4.46.

Exemplo 4.47. Consideramos a equação escalar

$${}^c D^q x(t) = f(t) - a(t)x(t), t > 0, \quad (4.93)$$

com condição inicial (4.92), em que $0 < q < 1$, $a, f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas e existem números positivos ε e M tais que $0 < \varepsilon \leq a(t) \leq M$. Defina $k = \varepsilon + \frac{1}{2}(M - \varepsilon) > 0$, então por (122, demonstração do Teorema 2.1) existe um $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$|a(t) - k| < \alpha k, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (4.94)$$

Definimos $P : PSAP_\omega(\mathbb{R}) \rightarrow PSAP_\omega(\mathbb{R})$ por

$$(P\varphi)(t) = z(t) + \frac{1}{k} \int_0^t R(t-s)f(s)ds - \int_0^t R(t-s) \left(\frac{a(s)-k}{k} \right) \varphi(s)ds, \quad (4.95)$$

em que $z(\cdot)$ é dado por (4.92). Sabemos que $z(\cdot)$ pertence à $PSAP_\omega(\mathbb{R})$. Da Observação 4.42, nós obtemos que $t \rightarrow k^{-1} \int_0^t R(t-s)f(s)ds$ é pseudo S-assintoticamente ω -periódica. Sendo $\varphi \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$, então a função $s \rightarrow (a(s) - k)\varphi(s)$ pertence à $PSAP_\omega(\mathbb{R})$. Novamente usando a Observação 4.42, observamos que $t \rightarrow \int_0^t R(t-s)(a(s) - k)k^{-1}\varphi(s)ds$ pertence à $PSAP_\omega(\mathbb{R})$. Portanto P está bem definido. Ademais, por (4.94), notamos que P é uma contração.

Exemplo 4.48. (123) Consideremos a equação de difusão de onda dois-termos fracionária não-linear com o operador tempo no sentido de Caputo e um termo de força não-linear $F \in L_{loc}^\infty([0, T) \times \mathbb{R})$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu_1 {}^c D_t^{\alpha_1} u(t, x) + \mu_2 {}^c D_t^{\beta_1} u(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = F(t, u(t, x)), \quad (4.96)$$

sujeita às condições

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad (4.97)$$

em que $0 < \alpha_1, \beta_1 \leq 2$, e $f, g \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 \leq p \leq \infty$.

Existência de soluções super-viscosas e sub-viscosas em $L^p(\mathbb{R})$ para (4.96) foi recentemente estudada em (124). O método de Stojanovic e Gorenflo usado em (124) baseia-se na aplicação sucessiva das transformadas de Laplace e de Fourier, a fim de chegar em uma equação linear Tipo de Abel Volterra. A desigualdade de Grönwall produz a solução super-viscosa assumindo uma condição de Lipschitz sobre o termo de força.

Tomando $X = L^2[0, 2\pi]$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \nu$, $\alpha_1 = \alpha + 1$, $\beta_1 = \beta$ com $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ e $F(t, x) = \tau x + {}^c D_t^\alpha(b(t) \sin(x))$, em que $\tau < 0$, obtemos a equação

$${}^c D_t^{\alpha+1} u(t, x) + \nu {}^c D_t^\beta u(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \tau u(t, x) + {}^c D_t^\alpha(b(t) \sin(u(t, x))), \quad t > 0, x \in [0, 2\pi]. \quad (4.98)$$

Em (123) os autores demonstraram que é possível dar uma abordagem abstrata de operadores para a equação (4.98), para isto define-se primeiro uma família solução de operadores fortemente contínua. No entanto, esta família não satisfaz a propriedade de semigrupo. Por meio do uso desta classe de famílias de operadores, a solução para a equação (4.98) pode ser escrita em termos de uma fórmula de variação de constantes. Ela nos dá a estrutura necessária para aplicar uma abordagem teórica de operadores na análise de soluções pseudo S-assintoticamente ω -periódicas para a equação fracionária (4.98).

Observamos que (4.98) pode ser reescrita na forma

$${}^c D_t^{\alpha+1} u(t) + \nu {}^c D_t^\beta u(t) - Au(t) = {}^c D_t^\alpha f(t, u(t)), \quad (4.99)$$

com $Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau u$. Assumindo as condições de fronteira de Dirichlet $u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0$, consideramos A com domínio $D(A) = \{u \in L^2[0, 2\pi] : u'' \in L^2[0, 2\pi], u(0) = u(2\pi) = 0\}$ e a não-linearidade $f(t, \varphi)(x) = b(t) \sin(\varphi(x))$ para todo $\varphi \in L^2[0, 2\pi]$ e $x \in [0, 2\pi]$. É conhecido que o operador A é τ -setorial de tipo negativo e ângulo $\beta\pi/2$ para todo $\beta \leq 1$, (123, Exemplo 6.1) e (9, Exemplo 3.8). Então, por (123, Teoremas 3.2 e 4.1), A gera uma família $(\alpha, \beta)_\nu$ -regularizada $S_{\alpha, \beta}(t)$ que satisfaz a estimativa

$$\|S_{\alpha, \beta}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{C}{1 + |\tau|(t^{\alpha+1} + \nu t^\beta)}, \quad t \geq 0, \quad (4.100)$$

para alguma constante $C > 0$ que depende somente de α, β .

Observação 4.49. Note que uma função $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow L^2[0, 2\pi]$ é chamada solução branda da equação (4.99) com condições iniciais e de fronteira nulas, se satisfaz

$$u(t) = \int_0^t S_{\alpha, \beta}(t-s) f(s, u(s)) ds, \quad (4.101)$$

para cada $t \in \mathbb{R}^+$.

O leque de aplicações das funções quase automórficas inclui, atualmente, equações de evolução lineares e não-lineares e sistemas dinâmicos. A dinâmica quase automórfica

ganhou uma quantidade notável de atenção nos últimos anos. Uma referência básica que contem uma exposição da teoria unificada de funções contínuas quase automórficas é o livro de N'Guérékata (125). Nesta direção, Keyantuo et al. (123) demonstraram o seguinte resultado.

Proposição 4.50. (123) *Suponha que $b \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $b(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Então a equação (4.98), com condições iniciais e de fronteira nulas, possui uma única solução branda $u(t, x)$ que se decompõe como uma soma com uma primeira parte que é quase automórfica e uma segunda parte que tende para 0 quando $t \rightarrow \infty$.*

Proposição 4.51. (126) *Suponha que $b \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap SAP_\omega(\mathbb{R})$. Então a equação (4.98), com condições iniciais e de fronteira nulas, possui uma única solução branda $u(t, x)$ tal que $u(\cdot, x)$ é S -assintoticamente ω -periódica.*

Observação 4.52. Em geral, se A é um operador μ -setorial de ângulo $\beta\pi/2$, com $\mu < 0$; uma função $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é chamada solução branda para a equação (4.99) sujeita às condições iniciais $u(0) = x$ e $u'(0) = y$, $x, y \in X$, se satisfizer

$$u(t) = S_{\alpha, \beta}(t)x + (g_1 * S_{\alpha, \beta}(t))y + \nu(g_{1+\alpha-\beta} * S_{\alpha, \beta}(t))x + \int_0^t S_{\alpha, \beta}(t-s)f(s, u(s))ds, \quad (4.102)$$

para cada $t \in \mathbb{R}^+$, em que $g_\beta(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ para $t > 0$, e no caso que $\beta = 0$ definimos $g_0(t) := \delta_0$, a medida de Dirac concentrada na origem. Note que, por (4.100),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S_{\alpha, \beta}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} = 0, \quad (4.103)$$

$$\sup_{t \geq a} \|tS_{\alpha, \beta}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} < +\infty, \text{ para cada } a > 0. \quad (4.104)$$

Visto que A é μ -setorial de ângulo $\beta\pi/2$, segue da demonstração do Teorema 4.1 em (123) que $\lambda^{\alpha+1} + \nu\lambda^\beta \in \rho(A)$ para $Re(\lambda) > 0$ e

$$\|(\lambda^{\alpha+1} + \nu\lambda^\beta - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda^{\alpha+1} + \nu\lambda^\beta - \mu|}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\lambda) > 0$. Consequentemente,

$$\|\widehat{S}_{\alpha, \beta}(\lambda)\|_{\mathcal{B}(X)} \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad (4.105)$$

em que $\widehat{S}_{\alpha, \beta}$ denota a transformada de Laplace de $S_{\alpha, \beta}$. Levando em conta (4.104) e (4.105), segue do teorema de Hardy-Littlewood (127, Teorema 4.2.9) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S_{\alpha, \beta}(s)ds = 0. \quad (4.106)$$

Suponha $\alpha < \beta$ e $0 < \epsilon < \beta - \alpha$. Da demonstração de (126, Teorema 3.2) existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|g_{1+\alpha-\beta} * S_{\alpha, \beta}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq ct^{-\epsilon}. \quad (4.107)$$

De (4.103), (4.106) e (4.107) obtemos que as funções $S_{\alpha,\beta}(\cdot)x$, $(g_1 * S_{\alpha,\beta}(\cdot))(y)$ e $(g_{1+\alpha-\beta} * S_{\alpha,\beta}(\cdot))(x)$ estão em $C_b([0, \infty); X)$. Em particular, essas funções pertencem à $PSAP_\omega(X)$. Isto completa a discussão da Observação 4.52.

Em seguida, nos concentraremos na não-linearidade f de (4.99). Verificamos que

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\|_{L^2[0, 2\pi]} \leq |b(t)| \|\varphi - \psi\|_{L^2[0, 2\pi]}, \quad (4.108)$$

para todo $t \geq 0$, e $\varphi, \psi \in L^2[0, 2\pi]$. Inferimos que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \sup_{\|\varphi\|_{L^2[0, 2\pi]}=r} \|f(s + \omega, \varphi) - f(s, \varphi)\|_{L^2[0, 2\pi]} ds \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{t} \int_0^t |b(s + \omega) - b(s)| ds. \quad (4.109)$$

Se b é uma função limitada, então $|f(t, \varphi)(x)| \leq \|b\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}$ para todo $t \geq 0$, $x \in [0, 2\pi]$.

Portanto f é uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de $L^2[0, 2\pi]$. Se b é pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então, por (4.109), f é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $L^2[0, 2\pi]$.

Temos assim o seguinte resultado.

Proposição 4.53. *Suponha que $b \in PSAP_\omega(\mathbb{R})$ com $\|b\|_{C_b([0, \infty); \mathbb{R})}$ suficientemente pequeno. Então existe uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica de (4.98) com condições iniciais e de fronteira nulas.*

Observação 4.54. Se A é um operador μ -setorial de ângulo $\beta\pi/2$ e $\mu < 0$, então A gera uma família $(\alpha, \beta)_\nu$ -regularizada $S_{\alpha,\beta}(t)$ que satisfaz uma estimativa como (4.100), por isso $S_{\alpha,\beta}(t)$ é uniformemente integrável, ou seja, $\|S_{\alpha,\beta}\|_1 := \int_0^\infty \|S_{\alpha,\beta}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} dt < +\infty$. Ademais, a função $t \rightarrow \int_t^{t+\omega} \|S_{\alpha,\beta}(t)\|_{\mathcal{B}(X)} dt$ é ergódica. Então $S_{\alpha,\beta} * f \in PSAP_\omega(X)$, quando $f \in PSAP_\omega(X)$. A demonstração dessa afirmação faz uso de uma construção similar à utilizada na demonstração de (13, Lema 2.4).

A Proposição 4.53 é uma consequência imediata do seguinte resultado geral.

Teorema 4.55. *Sejam $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ e $\nu > 0$. Assuma que A é um operador μ -setorial de ângulo $\beta\pi/2$ e $\mu < 0$. Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X e uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X que verifica a condição de Lipschitz (4.8), em que a constante de Lipschitz L_f satisfaz $\|S_{\alpha,\beta}\|_1 L_f < 1$. Então existe uma única solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica $u(\cdot)$ de*

$${}^c D_t^{\alpha+1} u(t) + \nu {}^c D_t^\beta u(t) - Au(t) = {}^c D_t^\alpha f(t, u(t)), \quad t \geq 0$$

com $u(0) = x$, $u'(0) = y$ (especificados em X).

Demonstração. Seja $S_{\alpha,\beta}(t)$ a família $(\alpha, \beta)_\nu$ -regularizada gerada por A . Definimos o operador $K_{\alpha,\beta}$ sobre o espaço $PSAP_\omega(X)$ por

$$(K_{\alpha,\beta}u)(t) = S_{\alpha,\beta}(t)x + (g_1 * S_{\alpha,\beta}(t))y + \nu(g_{1+\alpha-\beta} * S_{\alpha,\beta}(t))x + \int_0^t S_{\alpha,\beta}(t-s)f(s, u(s))ds.$$

Do Lema 2.13 e das Observações 4.52 e 4.54 deduzimos sem muita dificuldade que $K_{\alpha,\beta}$ está bem-definido. Não difícil verificar que $K_{\alpha,\beta}$ é uma $\|S_{\alpha,\beta}\|_1 L_1$ -contração. $\square$

4.4.4 Resultados adicionais sobre condução de calor

Vamos considerar a equação integro-diferencial parcial de segunda ordem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(t, x) + \beta(0)\frac{\partial}{\partial t}\theta(t, x) &= \alpha(0)\Delta\theta(t, x) - \int_{-\infty}^t \beta'(t-s)\frac{\partial}{\partial s}\theta(s, x)ds \\ &+ \int_{-\infty}^t \alpha'(t-s)\Delta\theta(s, x)ds + a(t)b(\theta(t, \cdot))(x) \end{aligned} \quad (4.110)$$

Esta equação aparece no estudo de condução de calor em material com memória cf (38, 90, 128, 129, 130, 131, 132). Observamos que $\beta(t)$ (resp., $\alpha(t)$) é chamada função de relaxamento de energia (resp., estresse), θ é o campo temperatura sobre um corpo. Observamos que se assumirmos que $\beta(t) \equiv 0$, então (4.110) é a equação que rege os movimentos longitudinais unidimensionais de uma barra viscoelástica de densidade 1 (130). Durante esta seção, nós iremos supor que Ω é um subconjunto conexo, aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira C^∞ . Também assumiremos que α e β são funções que assumem valores reais, de classe C^2 sobre $[0, \infty)$ com $\alpha(0)$ e $\beta(0)$ positivos; $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e b são funções adequadas. Se nós suprimirmos a dependência de $x \in \Omega$ e assumirmos que $\theta(t, x)$ é conhecido para $t \leq 0$, podemos colocar o problema (4.110) como

$$\theta''(t) + \beta(0)\theta'(t) = \alpha(0)\Delta\theta(t) - \int_0^t \beta'(t-s)\theta'(s)ds + \int_0^t \alpha'(t-s)\Delta\theta(s)ds + a(t)b(\theta(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.111)$$

em que θ' denota a derivada de θ com respeito à t e Δ é o Laplaciano sobre Ω com condição de fronteira $\theta|_{\partial\Omega} = 0$. Consideramos (4.111) com condições iniciais

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \eta_0. \quad (4.112)$$

O primeiro passo para modelar o problema (4.111)-(4.112) será considerar o espaço $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e o operador linear

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha(0)\Delta & -\beta(0)I \end{pmatrix}, \quad (4.113)$$

sobre o domínio $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, e definimos $B(t) = F(t)A$, em que $F(t) = [F_{ij}(t)] : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, é definido por $F_{11}(t) = F_{12}(t) = 0$, $F_{21}(t) =$

$-\beta'(t)I + \beta(0)(\alpha'(0)/\alpha(0))I$, $F_{22}(t) = (\alpha'(t)/\alpha(t))I$. Com a introdução da variável

$$u(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \in X \quad (4.114)$$

e com a definição de

$$g(t, u(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(t)b(\theta(t)) \end{pmatrix}, \quad (4.115)$$

a equação (4.111) com condição inicial

$$u(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (4.116)$$

toma a forma da seguinte equação integro-diferencial de Volterra

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + g(t, u(t)), \quad t \geq 0. \quad (4.117)$$

Segue do artigo de Chen (133) que A gera um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \widetilde{M}e^{-\gamma t}$ para todo $t \geq 0$ e algumas constantes $\widetilde{M}, \gamma > 0$.

Observamos que propriedades das soluções da equação (4.117) têm sido estudadas em vários contextos, por exemplo boa-colocação (129, 134), soluções brandas (135, 136), e periodicidade assintótica (90, 128, 137, 138).

Definição 4.56. (139) Uma família $\{R(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos sobre X é chamada de operador resolvente de (4.117) se as seguintes condições são verdadeiras.

(R1) Para cada $x \in X$, $R(0)x = x$ e $R(\cdot)x \in C([0, \infty); X)$.

(R2) O mapa $R : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(D(A))$ é fortemente contínuo.

(R3) Para cada $y \in D(A)$, a função $t \rightarrow R(t)y$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}R(t)y = AR(t)y + \int_0^t B(t-s)R(s)yds = R(t)Ay + \int_0^t R(t-s)B(s)y(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Para mais informações sobre operador resolvente, nós indicamos ao leitor os trabalhos (129, 139) e suas referências.

Assuma que $\alpha'(t)e^{\gamma t}$, $\alpha''(t)e^{\gamma t}$, $\beta'(t)e^{\gamma t}$ e $\beta''(t)e^{\gamma t}$ são funções limitadas e uniformemente contínuas sobre $[0, \infty)$, e que para todo $t \geq 0$,

$$|\beta'(t)| + \max\{\beta(0), 1\} \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(0)} \leq \frac{\gamma e^{-\gamma t}}{2\widetilde{M}},$$

e

$$|\beta''(t)| + \max\{\beta(0), 1\} \frac{|\alpha''(t)|}{\alpha(0)} \leq \frac{\gamma^2 e^{-\gamma t}}{4\widetilde{M}}.$$

Então, pelo teorema de Grimmer (129, Teorema 4.1), existe um operador resolvente $R(t)$ para a equação (4.117) satisfazendo

$$\|R(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \widetilde{M}e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad t \geq 0. \quad (4.118)$$

Definição 4.57. (139) Uma função $u \in C_b([0, \infty); X)$ é chamada solução branda de (4.117) se

$$u(t) = R(t)u(0) + \int_0^t R(t-s)g(s, u(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Introduzimos as seguintes condições para a função $b : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

(I1) b satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|b(\theta_1) - b(\theta_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_b \|\theta_1 - \theta_2\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para quaisquer $\theta_1, \theta_2 \in H_0^1(\Omega)$.

(I2) b satisfaz a condição tipo Hölder

$$\|b(\theta_1) - b(\theta_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_b \|\theta_1 - \theta_2\|_{H_0^1(\Omega)}^\tau,$$

para quaisquer $\theta_1, \theta_2 \in H_0^1(\Omega)$.

(I3) Existe uma função contínua não-decrescente $h : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ tal que $h(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e

$$(I3)_a \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)} h(s)^\tau ds = 0,$$

$$(I3)_b \quad \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)} |a(s)| h(s)^\tau ds < +\infty.$$

É particularmente adequado iniciar com os seguintes resultados sobre periodicidade assintótica de (4.111)-(4.116) a fim de mostrar o estado de arte deste problema. Observamos que o espaço $S_\omega(X)$ foi definido na seção 2.1.

Proposição 4.58. (38) *Assuma que (I1) é satisfeita e que $a \in S_\omega(X)$. Se $(2\widetilde{M}/\gamma)\|a\|_\infty L_b < 1$, então o problema (4.111)-(4.116) possui uma única solução branda assintoticamente ω -periódica (ver Seção 2.1.2).*

Proposição 4.59. (90) *Assuma que (I1) é satisfeita e que $a(\cdot)$ é S -assintoticamente ω -periódica. Se $(2\widetilde{M}/\gamma)\|a\|_\infty L_b < 1$, então o problema (4.111)-(4.116) possui uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.*

Proposição 4.60. (128) Suponha que as hipóteses **(I2)** e **(I3)** são verificadas e que $a(\cdot)$ é S -assintoticamente ω -periódica. Então o problema (4.111)-(4.116) possui uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Isto conclui nossos resultados introdutórios sobre periodicidade assintótica de (4.111)-(4.116). Em seguida, vamos nos concentrar na não-linearidade g de (4.117), temos as seguintes estimativas:

$$\|g(t, u)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \|a\|_\infty \left(L_b \|u\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^\tau + \|b(0)\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad (4.119)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_0^t \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq r} \|g(t + \omega, u) - g(t, u)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} dt \\ & \leq \frac{L_b r^\tau + \|b(0)\|_{L^2(\Omega)}}{t} \int_0^t |a(s + \omega) - a(s)| ds. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Segue de (4.119) e de (4.120) que a função

$$g : [0, \infty) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

é limitada sobre conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$;

$$\|g(t, u)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \widetilde{W}(\|u\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)})$$

com $\widetilde{W}(\xi) = \|a\|_\infty (L_b \xi^\tau + \|b(0)\|_{L^2(\Omega)})$ e g é uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Além disso, da estimativa

$$\|g(t, u) - g(t, v)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq |a(t)| L_b \|u - v\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^\tau, \quad (4.121)$$

para todo $t \geq 0$ e quaisquer $u, v \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, obtemos que g é assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Segue de **(I3)** que para $u, v \in C_h(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ podemos inferir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-(\gamma/2)(t-s)} \widetilde{W}(\xi h(s)) ds & \leq \|a\|_\infty L_b \xi^\tau \left(\frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-(\gamma/2)(t-s)} h(s)^\tau ds \right) \\ & + \frac{2\|b(0)\|_{L^2(\Omega)}}{\gamma h(t)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-(\gamma/2)(t-s)} \|g(s, u(s)) - g(s, v(s))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} ds \\ & \leq \left(\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-(\gamma/2)(t-s)} |a(s)| h(s)^\tau ds \right) \|u - v\|_h^\tau. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Com alguns cálculos, mostra-se que $\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1$, em que

$$\beta(\xi) = \sup_{t \geq 0} \frac{\widetilde{M}}{h(t)} \int_0^t e^{(-\gamma/2)(t-s)} \widetilde{W}(\xi h(s)) ds.$$

Finalmente, visto que Ω é um conjunto limitado com fronteira C^∞ , o teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov, ver Teorema 2.67, prova que o conjunto $\{a(s)b(\theta) : 0 \leq s \leq s_0, \theta \in H_0^1(\Omega), \|\theta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r\}$, $s_0 > 0$, é relativamente compacto em $L^2(\Omega)$. Por um resultado similar ao Teorema 4.22 deduzimos nosso novo resultado.

Proposição 4.61. *Suponha que as hipóteses (I2) e (I3) são asseguradas e que $a(\cdot)$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Então o problema (4.111)-(4.116) possui uma solução branda pseudo S -assintoticamente ω -periódica.*

4.4.5 Equações integrais da teoria viscoelástica

O seguinte problema de fronteira e valor inicial é um exemplo típico de um problema unidimensional em viscoelasticidade, como movimentos de cisalhamento simples, torção de uma barra, tensão simples, (55, Seção 5.4)

$$u_t(t, x) = \int_0^t da(\tau) u_{xx}(t - \tau, x) + h(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0, 1], \quad (4.124)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.125)$$

$$u(0, x) = v_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (4.126)$$

Aqui $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada sobre cada intervalo compacto $J = [0, T]$ com $a(0) = 0$, e os subscritos t ou x denotam a derivada parcial com respeito a variável correspondente.

Para obter uma formulação como uma equação integral de evolução abstrata, escolhemos um espaço de funções, digamos $X = L^2[0, 1]$, definimos um operador A por $Au(x) = u_{xx}(x)$ com domínio $D(A) = \{u \in L^2[0, 1] : u_{xx} \in L^2[0, 1], u(0) = u(1) = 0\}$. É conhecido que A gera um semigrupo analítico limitado com $0 \in \rho(A)$.

Observamos que após uma integração com respeito ao tempo t , (4.124) torna-se

$$u(t) = \int_0^t a(t) Au(t - \tau) d\tau + f(t), \quad t \geq 0, \quad (4.127)$$

com a função de força $f(t) = v_0(\cdot) + \int_0^t h(\tau, \cdot) d\tau$, $t \geq 0$, e de estado $u(t) = u(t, \cdot)$. Para conclusões adicionais, indicamos ao leitor o livro do Prüss (55).

Relembramos as seguintes definições.

Definição 4.62. (55) Uma função $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ é de *crescimento subexponencial* se $\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} |a(t)| dt < \infty$, para todo $\varepsilon > 0$.

Definição 4.63. (55, Definição 3.3) Seja $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ de crescimento subexponencial e $k \in \mathbb{N}$, a função $a(t)$ é chamada *k-regular* se existe uma constante $c > 0$ tal que $|\lambda^n \hat{a}^{(n)}(\lambda)| \leq c |\hat{a}(\lambda)|$ para todo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ e $0 \leq n \leq k$, onde $\hat{a}$ denota a transformada de Laplace de a .

A fim de termos uma melhor compreensão do estado da arte, iniciamos com os seguintes resultados.

Teorema 4.64. (140) Suponha que $a(t)$ é 1-regular, de tipo positivo, completamente monótona e que satisfaz $a(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) > 0$. Seja $g : [0, \infty) \times L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ uma função contínua limitada tal que as seguintes condições são asseguradas.

(J1) $\|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\|_{L^2[0, 1]} \leq L_g \|\varphi - \psi\|_{L^2[0, 1]}$, para quaisquer $\varphi, \psi \in L^2[0, 1]$ e todo $t \geq 0$, em que $L_g \in \mathbb{R}^+$.

(J2) Para cada conjunto limitado $K \subseteq L^2[0, 1]$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (g(t, \varphi) - g(t + n\omega, \varphi)) = 0$ uniformemente para $\varphi \in K$ e $n \in \mathbb{N}$.

Se L_g é suficientemente pequeno, então o problema

$$u'(t) = \int_0^t da(\tau) Au(t - \tau) + g(t, u(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.128)$$

$$u(0) = v_0 \in L^2[0, 1], \quad (4.129)$$

possui uma única solução (branda) assintoticamente ω -periódica.

Teorema 4.65. (38) Sob as condições do resultado anterior, substituindo (J1) por

(J1)* $\|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\|_{L^2[0, 1]} \leq L_g(t) \|\varphi - \psi\|_{L^2[0, 1]}$, para quaisquer $\varphi, \psi \in L^2[0, 1]$ e todo $t \geq 0$, em que $L_g(\cdot)$ é localmente integrável sobre $[0, \infty)$.

Se $\sup_{t \geq 0} \int_0^t \|S(t - s)\|_{\mathcal{B}(X)} L_g(s) ds < 1$, em que $S(t)$ é a família resolvente gerada por A . Então o problema (4.128)-(4.129) possui uma única solução (branda) assintoticamente ω -periódica.

Teorema 4.66. (8) Suponha que $a(t)$ é 1-regular, de tipo positivo, completamente monótona e que satisfaz $a(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) > 0$. Seja $g : [0, \infty) \times L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de $L^2[0, 1]$ que satisfaz a condição de Lipschitz (J1). Se L_g é suficientemente pequeno, então o problema (4.128)-(4.129) possui uma única solução (branda) S -assintoticamente ω -periódica.

O seguinte teorema estabelece um dos principais resultados desta subseção.

Teorema 4.67. *Suponha que $a(t)$ é 1-regular, de tipo positivo, completamente monótona e $a(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) > 0$. Seja $g : [0, \infty) \times L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ uma função uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados e assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de $L^2[0, 1]$ que satisfaz a seguinte condição de Lipschitz: para cada $\sigma > 0$, temos*

$$\|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\|_{L^2[0,1]} \leq L_g(\sigma) \|\varphi - \psi\|_{L^2[0,1]}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \varphi, \psi \in B_\sigma(L^2[0, 1]),$$

em que $L_g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua. Se existe $r > 0$ tal que

$$\|S(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(L^2[0,1]))} \left(L_g(r + \|S(\cdot)\|_\infty \|v_0\|_{L^2[0,1]}) + \frac{C(S; v_0)}{r} \right) < 1,$$

em que $S(\cdot)$ é a família resolvente associada a A e

$$C(S; v_0) := L_g(\|S(\cdot)\|_\infty \|v_0\|_{L^2[0,1]}) \|S(\cdot)\|_\infty \|v_0\|_{L^2[0,1]} + \sup_{s \geq 0} \|g(s, 0)\|_{L^2[0,1]},$$

então o problema (4.128)-(4.129) possui uma solução (branda) pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

A demonstração do Teorema 4.67 depende fortemente de uma abordagem teórica de operadores, vamos incluir a demonstração para a conveniência do leitor.

Consideramos a seguinte equação integral de Volterra de tipo escalar

$$u(t) = \int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \quad (4.130)$$

em que A é um operador linear fechado ilimitado em um espaço de Banach complexo X , e $a \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ é um núcleo de crescimento subexponencial (ver Definição 4.62), o que significa que $\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} |a(t)| dt < +\infty$, para cada $\varepsilon > 0$, nesta situação, a transformada de Laplace, $\hat{a}(\lambda)$, existe para todo $Re(\lambda) > 0$. Devido às suas aplicações em vários campos das ciências, as equações do tipo (4.130), bem como seus tratamentos numéricos, estão atraindo um interesse crescente. Propriedades das soluções de (4.130) têm sido extensivamente estudadas nos últimos anos (8, 140, 141, 142).

É conhecido que a equação (4.130) é bem colocada se, e somente se, (4.130) admite uma família resolvente (55), isto é, existe uma família fortemente contínua $S(t)$, $t \geq 0$, de operadores lineares limitados definidos em X , que comuta com A , o que significa que $S(t)D(A) \subseteq D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$ e todo $t \geq 0$, e que satisfaz a equação resolvente

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)xds, \quad \text{para todo } x \in D(A), t \geq 0.$$

$S(t)$ é chamada família resolvente da equação (4.130) gerada por A . Formalmente, a transformada de Laplace da família resolvente é representada por

$$H(\lambda) = (\lambda - \lambda \hat{a}(\lambda)A)^{-1}. \quad (4.131)$$

O problema de encontrar condições necessárias e suficientes para a estabilidade das famílias resolventes, em geral, é difícil de manusear. Arendt e Prüss em (143) estudaram a existência de $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = P$ em vários sentidos. Em particular, eles deram condições suficientes para a estabilidade forte de $S(t)$. Em (144) os autores deram condições suficientes para a estabilidade uniforme da família resolvente em espaços de Hilbert e Banach.

Relembramos a seguinte definição.

Definição 4.68. (55) A equação (4.130) é chamada parabólica, se as seguintes condições são asseguradas.

(P1) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ e $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ para todo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

(P2) Existe uma constante $M \geq 1$ tal que $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}$ para todo $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, em que $H(\lambda)$ é dado por (4.131).

Antes de prosseguir, faremos algumas observações úteis.

Observação 4.69. Se (4.130) admite um resolvente analítico $S(t)$ que é limitado em algum setor, então (4.130) é parabólica. Uma situação padrão que conduz à equação parabólica é a seguinte: seja $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ de crescimento subexponencial (ver Definição 4.62) e de tipo positivo e seja A o gerador de um C_0 -semigrupo analítico e limitado em X . Então, por (55, Corolário 3.1), (4.130) é parabólica.

Observação 4.70. Suponha que $a(t)$ é 1-regular e que (4.130) é uma equação parabólica que admite um resolvente $S(t)$ uniformemente integrável, então, por (144, Corolário 3), $S(t)$ é uniformemente estável. Observamos que da parabolicidade e da 1-regularidade de $a(t)$, temos, por (55, Teorema 3.1), a existência de uma família resolvente $S(t)$ contínua e limitada para $t \geq 0$, conseqüentemente $S(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(X))$.

Consideremos a seguinte equação semilinear de Volterra

$$v'(t) = \int_0^t da(\tau)Av(t-\tau) + g(t, v(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.132)$$

$$v(0) = v_0 \in X, \quad (4.133)$$

em que $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função adequada com $a(0) = 0$.

Relembramos a seguinte definição.

Definição 4.71. (55, Proposição 1.2) Suponha que A gera uma família resolvente $S(t)$. Uma função $u \in C_b([0, \infty); X)$ é chamada uma solução branda de (4.132)-(4.133) se $u(\cdot)$ satisfaz a equação integral

$$u(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)g(s, v(s))ds, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (4.134)$$

Introduziremos a seguinte notação: $C_1(S; v_0) := L_g(\|S(\cdot)\|_\infty \|v_0\|_X) \|S(\cdot)\|_\infty \|v_0\|_X + \sup_{t \geq 0} \|g(t, 0)\|_X$.

Teorema 4.72. *Suponha que A gera uma família resolvente integrável e uniformemente limitada $S(t)$ tal que $t \rightarrow \int_t^{t+\omega} S(s)ds$ seja uma função ergódica, para algum $\omega \in \mathbb{R}^+$. Seja $g : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função uniformemente pseudo S -assintoticamente ω -periódica sobre conjuntos limitados de X e assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X tal que para cada número positivo σ , e quaisquer $\varphi, \psi \in B_\sigma(X)$, nós temos*

$$\|g(t, x) - g(t, y)\|_X \leq L_g(\sigma) \|x - y\|_X, \quad \forall t \geq 0,$$

com $L_g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua. Se existe $r > 0$ tal que

$$\|S(\cdot)\|_1 \left(L_g(r + \|S(\cdot)\|_\infty \|v_0\|_X) + \frac{C_1(S; v_0)}{r} \right) < 1,$$

então, o problema (4.132)-(4.133) possui uma solução (branda) pseudo S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Vamos seguir uma estratégia similar a da demonstração do Teorema 4.18. Seja $F : PSAP_\omega^0(X) \rightarrow PSAP_\omega^0(X)$ uma mapa definido por $(Fv)(t) = \int_0^t S(t-s)g(s, v(s) + S(s)v_0)ds$, onde $v \in PSAP_\omega^0(X)$. Uma vez que $S \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(X))$, do Corolário 2.14, obtemos que $s \rightarrow g(s, v(s) + S(s)v_0)$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica. Levando em consideração que $S(t)$ é uniformemente integrável e que $t \rightarrow \int_t^{t+\omega} S(s)ds$ é ergódica, concluímos que F está bem-definida. Para $u, v \in PSAP_\omega^0(X)$ com $\|u\|_{C_b([0, \infty); X)}, \|v\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq r$, obtemos

$$\|Fu - Fv\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq \|S(\cdot)\|_1 L_g(r + \|S(\cdot)\|_\infty \|v_0\|_X) \|u - v\|_{C_b([0, \infty); X)},$$

$$\|Fv\|_{C_b([0, \infty); X)} \leq \|S(\cdot)\|_1 \left(L_g(r + \|S(\cdot)\|_\infty \|v_0\|_X) + \frac{C_1(S; v_0)}{r} \right) r \leq r.$$

Das estimativas acima, segue que F é uma contração em $B_r(PSAP_\omega^0(X))$, o que nos dá o resultado desejado. $\square$

Demonstração do Teorema 4.67. Pela Observação 4.69, $u(t) = a * Au + f(t)$, com $f(t) = \int_0^t g(s, u(s))ds + v_0$, é parabólica. Visto que A gera um semigrupo analítico limitado com $0 \in \rho(A)$ e que a é completamente monótona com $a(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) > 0$, uma

olhada em (55, Corolário 10.1) mostra que A gera um resolvente analítico uniformemente integrável $S(t)$. Usando o fato que $a(t)$ é 1-regular, segue de (144, Corolário 3) que $S(t)$ é uniformemente estável. Seja ε um número positivo e $t_1 \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, obtemos a seguinte estimativa

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left\| \int_\sigma^{\sigma+\omega} S(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{B}(X)} d\sigma \leq \frac{t_1}{t} \|S(\cdot)\|_1 + \int_{t_1}^\infty \|S(\tau)\|_{\mathcal{B}(X)} d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Disto, nós inferimos que $t \rightarrow \int_t^{t+\omega} S(\sigma) d\sigma$ é uma função ergódica. Agora, o Teorema 4.67 segue do Teorema 4.72. $\square$

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave e compacta $\partial\Omega$ que é ocupada por um fluido viscoelástico incompressível linear. Assumindo que o fluido está em repouso para $t \geq 0$, seu campo velocidade $u(t, x)$ é governado para $t > 0$ pelo seguinte problema

$$(\vartheta) \quad \begin{cases} u_t(t, x) = \int_0^t \Delta u(t - \tau, x) da(\tau) - \nabla p(t, x) + g(t, x), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ (\nabla \circ u)(t, x) = 0, & \text{para } x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(t, x) = 0, & \text{para } x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(0, x) = v_0(x), & \text{para } x \in \Omega. \end{cases}$$

Aqui $p(t, x)$ denota a pressão hidrostática; $g(t, x)$ um campo de força externo; $v_0(x)$ o campo de velocidade inicial; $\nabla \circ$ designa o divergente com respeito a variável x . A condição $\nabla \circ u = 0$ significa que o fluido é homogêneo e incompressível. Neste caso, dizemos que u é livre de divergência ou solenoidal. O módulo de relaxamento de tensão $da(t)$ de um material viscoelástico linear tem a forma geral $a(t) = a_0 + a_\infty t + \int_0^t a_1(s) ds$, $t \geq 0$, em que $a_0, a_\infty \geq 0$ são constantes, e $a_1(t) \geq 0$ é não-crescente e de tipo positivo, $\lim_{t \rightarrow \infty} a_1(t) = 0$. O caso $a(t) \equiv a_0$ para $t > 0$ corresponde ao fluido Newtoniano com viscosidade $a_0 > 0$ e (ϑ) torna-se a bem conhecida equação de Navier-Stokes linear (55). O sistema de Navier-Stokes foi introduzido por Navier (145). Existem muitas aplicações importantes para essas equações, por exemplo em meteorologia, em termo-hidráulica, na física dos plasmas, na indústria do petróleo.

Seja $L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ o espaço de todos os campos vetoriais em L^2 livres de divergência, isto é, $L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n) = \overline{\{u \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) : \nabla \circ u = 0\}}^{\|\cdot\|_2}$. Por (146, Lema 2.5.3), observamos que $L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) : \nabla \circ f = 0, \quad N \cdot f|_{\partial\Omega} = 0\}$, $N \cdot f|_{\partial\Omega}$ denota o traço generalizado. Visto que Ω é um aberto conexo e $\partial\Omega$ é compacta de classe C^1 , ao menos. É conhecido que $E^2(\Omega; \mathbb{R}^n) = \{\nabla p : p \in W_{loc}^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^n), \nabla p \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)\}$ é ortogonal à $L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Isto conduz à decomposição única de cada $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $f = f_0 + \nabla p$, com $f_0 \in L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\nabla p \in E^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\langle f_0, \nabla p \rangle = 0$, $\|f\|_2^2 = \|f_0\|_2^2 + \|\nabla p\|_2^2$. A decomposição anterior é chamada decomposição de Helmholtz de f . Em particular, vemos que $E^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Como consequência disto, obtemos um operador

linear limitado $P : f \rightarrow Pf$ de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ para $L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definido por $Pf = f_0$. P é chamada a projeção de Helmholtz, com a norma do operador $\|P\| \leq 1$. Observamos que P é um operador auto-adjunto (146).

Note que $P\nabla p = 0$, pela definição de P , e

$$\int_0^t \int_0^s \Delta u(s - \tau, x) da(\tau) ds = \int_0^t a(t - \tau) \Delta u(\tau, x) d\tau.$$

Sendo assim, observamos que o problema (ϑ) pode ser reescrito como uma equação de Volterra abstrata da forma (4.130) em $X = L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, com $A = P\Delta$, o operador de Stokes, com domínio

$$D(A) = W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

e $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ é definida por $f(t) = v_0 + \int_0^t g(s) ds$ e $g \in C(\mathbb{R}^+; L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$, $g(s)(x) = g(s, x)$, $v_0 \in L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

É conhecido que o operador de Stokes é auto-adjunto e semidefinido negativo, e, por conseguinte, dá origem a uma família cosseno limitada em $L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Visto que Ω é um domínio limitado, observamos que o operador de Stokes é inversível (143, 147, 148).

Teorema 4.73. *Suponha que $a_1 \in C^1(0, \infty)$ e $-\dot{a}_1(t)$ é não-crescente, convexa e $a(t) \neq a_\infty t$. Se a força externa $g(\cdot)$ é pseudo S -assintoticamente ω -periódica, então o problema (ϑ) possui uma única solução (branda) pseudo S -assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Por (143, Teorema 7.4), o problema (ϑ) admite um resolvente $S \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n))) \cap C_0(\mathbb{R}^+; \mathcal{B}(L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)))$. Consequentemente,

$$u(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)g(s)ds, \quad t \geq 0$$

é a única solução (branda) de (ϑ) em $PSAP_\omega(L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$. □

5 Sobre uma família de equações de Volterra da teoria Viscoelástica

5.1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado suave. Motivados nas discussões feitas nas Seções 2.6 e 4.4.5, vamos considerar a seguinte família de equações de Volterra não-lineares

$$\begin{cases} u_t = \int_0^t dg_\alpha(s) \Delta u(t-s, x) - \nabla p + h - (u \cdot \nabla)u, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

em que p e h são funções dadas, $0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$ e $g_\alpha(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, $t > 0$. Estamos particularmente interessados na teoria de existência, unicidade, regularidade e continuação de soluções para o problema acima.

Note que o caso $\alpha = 0$ corresponde ao fluido Newtoniano com viscosidade 1, e o problema (5.1) torna-se as equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla p + h - (u \cdot \nabla)u, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

Por outro lado, quando $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, vimos na Subseção 2.6 que dg_α denota o módulo de cisalhamento de um material Tipo-Potência.

Neste capítulo, desejamos discutir a boa colocação do problema (5.1) em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Nossa estratégia será reescrever o problema (5.1) como uma equação integral em um espaço de Hilbert adequado. Consideremos a projeção ortogonal

$$P : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{H}_\sigma,$$

em que $\mathcal{H}_\sigma$ é o fecho de $\{u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0, u \cdot n = 0\}$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Aqui, n representa o campo normal unitário apontando para fora de $\partial\Omega$. O problema pode ser visto como uma equação integral de evolução abstrata sobre $\mathcal{H}_\sigma$ dada por

$$u(t) = \int_0^t g_\alpha(t-s) Au(s) ds + \int_0^t Ph(s) ds - \int_0^t P(u(s) \cdot \nabla)u(s) ds + u_0, \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

em que $A : D(A) \subset \mathcal{H}_\sigma \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ é o operador de Stokes $A = P\Delta$ com domínio

$$D(A) := H^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0\}.$$

Suponhamos por um momento que $u : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ satisfaz (5.3). Aplicando a transformada de Laplace formalmente, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{u}(\lambda) &= \lambda^{-(\alpha+1)} A \hat{u}(\lambda) + \lambda^{-1} P \hat{h}(\lambda) + \lambda^{-1} \hat{F}(\lambda) + \lambda^{-1} u_0 \\ \Rightarrow (1 - \lambda^{-(\alpha+1)} A) \hat{u}(\lambda) &= \lambda^{-1} [P \hat{h}(\lambda) + \hat{F}(\lambda) + u_0] \\ \Rightarrow \lambda^{-(\alpha+1)} (\lambda^{\alpha+1} - A) \hat{u}(\lambda) &= \lambda^{-1} [P \hat{h}(\lambda) + \hat{F}(\lambda) + u_0],\end{aligned}$$

em que $F(u) = -P(u \cdot \nabla)u$. Tomando $\lambda^{\alpha+1} \in \rho(A)$, então

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} P \hat{h}(\lambda) + \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} \hat{F}(\lambda) + \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} u_0.$$

Usando a transformada inversa de Laplace, deduzimos que

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)F(u)(s)ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds, \quad t \geq 0,$$

em que $E_\alpha(tA)$ é a transformada inversa de $\lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1}$, se $t > 0$, e $E_{\alpha+1}(0A) := I$, em que I denota o operador identidade. Na próxima Seção, mostraremos que esta função está bem definida para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Motivados pela discussão acima e pela literatura relacionada, ver por exemplo (55), adotaremos o seguinte conceito de solução do problema (5.3):

Definição 5.1. Seja $\tau > 0$.

- (i) Uma função $u : [0, \tau] \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ é chamada *solução branda* do problema (5.3) em $[0, \tau]$ se $u \in C([0, \tau]; \mathcal{H}_\sigma)$ e para todo $t \in [0, \tau]$

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)F(u)(s)ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds.$$

- (ii) Uma função $u : [0, \tau) \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ é chamada *solução branda* do problema (5.3) em $[0, \tau)$ se para qualquer $\tau' \in [0, \tau)$, u é uma solução branda para (5.3) em $[0, \tau']$.

Nossos principais propósitos são determinar condições suficientes para existência e unicidade de solução branda do problema (5.3), analisar a possível continuação desta solução para um intervalo maximal de existência.

5.2 Sobre a família de Mittag-Leffler associada ao operador de Stokes

Nesta seção estamos interessados em demonstrar algumas propriedades da família $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$. A estratégia para demonstrar essas propriedades consiste basicamente em escolher um caminho de Hankel $Ha(r, \eta)$ adequado (ver Definição 2.28) e usar a bem

conhecida estimativa do operador resolvente associado ao operador de Stokes (149, Teorema 1.1). Primeiramente, vamos demonstrar que estas funções estão bem definidas para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H}_\sigma \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ o operador de Stokes $A = P\Delta$ com domínio

$$D(A) := H^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0\}.$$

Sendo $\alpha \in [0, 1)$, considere $\eta_0 \in \left(\frac{(1+\alpha)\pi}{2}, \pi\right)$ tal que

$$\Sigma_{\eta_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| < \eta_0\} \subset \rho(A),$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)} \leq C|\lambda|^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\eta_0},$$

para alguma constante $C > 0$. Seja $\eta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{\alpha+1}\right)$; note que se $\arg(\lambda) = \eta$, então $\arg(\lambda^{\alpha+1}) = (\alpha+1)\arg(\lambda) = (\alpha+1)\eta < \eta_0$. Ou seja, se $\arg(\lambda) = \eta$, então $\lambda^{\alpha+1} \in \Sigma_{\eta_0} \subset \rho(A)$ e $\|(\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)} \leq C|\lambda|^{-(\alpha+1)}$, ver Figuras 5 e 6.

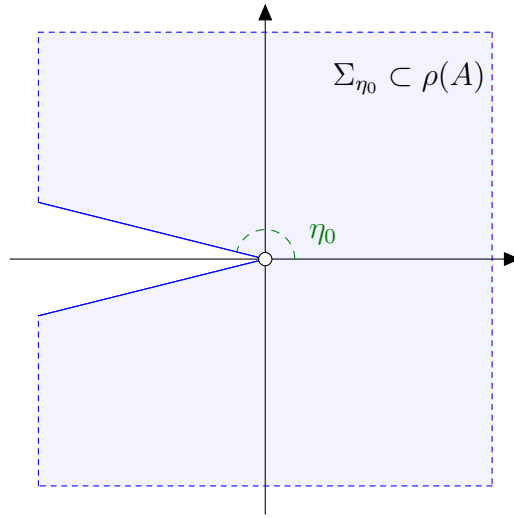


Figura 5 – Setor Σ_{η_0} .

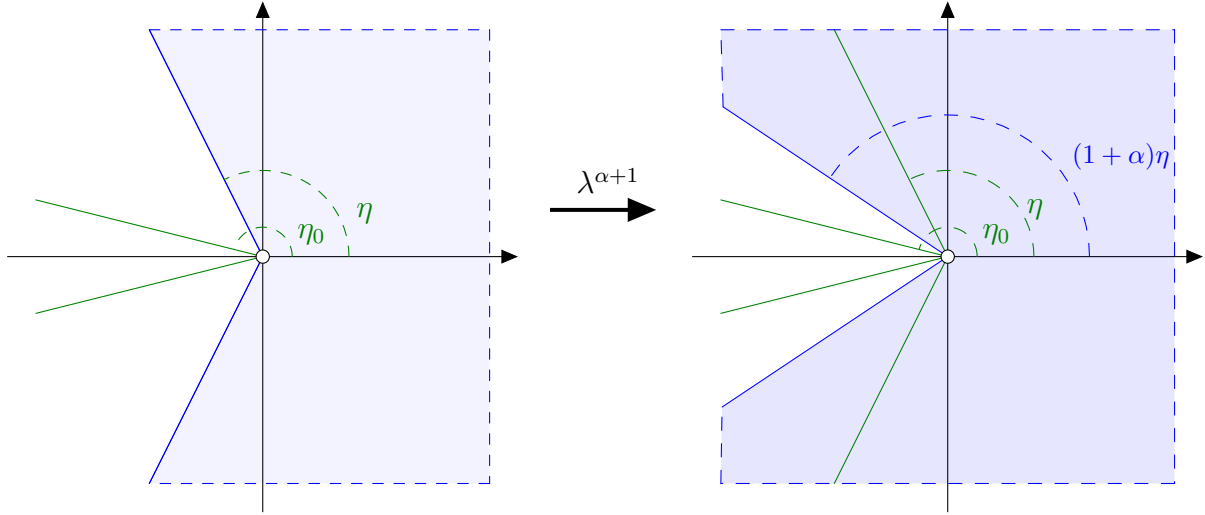
Proposição 5.2. Considere $\alpha \in [0, 1)$. A função

$$E_\alpha(tA) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} d\lambda, & \text{se } t > 0, \\ I, & \text{se } t = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

em que Ha é um caminho de Hankel adequado e I é o operador identidade, está bem definida e existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq M\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma},$$

para quaisquer $t \geq 0$ e $x \in \mathcal{H}_\sigma$.

Figura 6 – Mapa $\lambda^{\alpha+1}$.

Demonstração. Para $r > 0$ e $\eta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{\alpha+1})$ seja

$$E_\alpha(tA) := \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0,$$

em que Ha é o caminho de Hankel (ver Definição 2.28)

$$\begin{aligned} Ha = Ha(r, \eta) &:= \{se^{i\eta} : r \leq s < \infty\} \cup \{re^{is} : |s| \leq \eta\} \cup \{se^{-i\eta} : r \leq s < \infty\} \\ &= Ha_1 + Ha_2 - Ha_3. \end{aligned}$$

Para cada $t > 0$ fixado, se assumirmos que $r = 1/t$, então

- Sobre Ha_1

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_1} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{1/t}^\infty e^{se^{i\eta}t} s^\alpha e^{i\eta\alpha} ((se^{i\eta})^{\alpha+1} - A)^{-1} e^{i\eta} x ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_{1/t}^\infty |e^{s(\cos \eta + i \sin \eta)t}| |se^{i\eta}|^\alpha |se^{i\eta}|^{-\alpha-1} \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\ &= \frac{C}{2\pi} \int_{1/t}^\infty e^{st \cos \eta} s^{-1} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_{1/t}^\infty e^{st \cos \eta} t ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} = \frac{C}{2\pi} \frac{e^{\cos \eta}}{|\cos \eta|} \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \end{aligned}$$

- Sobre Ha_2

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_2} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{-\eta}^\eta e^{re^{is}t} (re^{is})^\alpha ((re^{is})^{\alpha+1} - A)^{-1} rie^{is} x ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \int_{-\eta}^\eta e^{\cos s} r^\alpha r^{-\alpha-1} r ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \frac{C}{2\pi} e^{2\eta} \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \end{aligned}$$

- Sobre Ha_3 procedemos como em Ha_1 .

Tomando $M > 0$ como o máximo de todas as cotas obtidas acima, deduzimos que $E_\alpha(tA)$ está bem definido para cada $t \geq 0$.

Vamos mostrar agora que a integral em (5.4) é independente de $r > 0$ e de $\eta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{\alpha+1})$. Considere $r, r' \in (0, \infty)$ e $\eta, \eta' \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{1+\alpha})$, sem perda de generalidade, suponha que $\eta' > \eta$ e $r > r'$. Seja D a região entre as curvas $Ha(r, \eta)$ e $Ha(r', \eta')$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $D_n := D \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$, (ver a Figura 7). Pelo Teorema da Integral

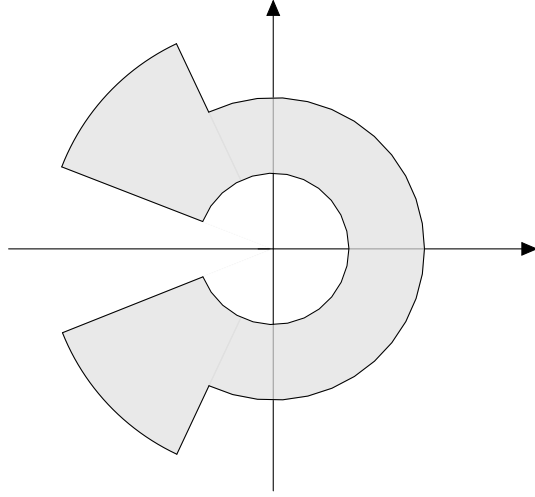


Figura 7 – Região D_n

de Cauchy,

$$\int_{\partial D_n} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} d\lambda = 0.$$

Seja R_1 e R_2 os arcos contidos em $\{z \in \mathbb{C} : |z| = n\}$, então

$$\begin{aligned} \left\| \int_{R_1} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)} &= \left\| \int_{\eta}^{\eta'} e^{tne^{si}} (ne^{si})^\alpha ((ne^{si})^{\alpha+1} - A)^{-1} nie^{si} ds \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)} \\ &\leq C \int_{\eta}^{\eta'} e^{nt \cos s} n^\alpha n^{-\alpha-1} n ds \\ &\leq C \int_{\eta}^{\eta'} e^{nLt} ds = Ce^{nLt} (\eta' - \eta), \end{aligned}$$

em que $L = \sup_{s \in [\eta, \eta']} \cos s < 0$. Portanto, a integral acima tende para zero quando $n \rightarrow \infty$.

Um procedimento similar mostra que a integral sobre o arco R_2 tem a mesma propriedade. Consequentemente,

$$\int_{Ha(\eta, r)} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} d\lambda = \int_{Ha(\eta', r')} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} d\lambda,$$

e isto conclui a demonstração. $\square$

Observação 5.3. Se considerarmos $0 < \alpha < c < 1$ para algum c , então os ângulos η_0 e η não precisam depender de α (apenas de c). De fato, basta tomar $\eta_0 \in \left(\frac{(1+c)\pi}{2}, \pi\right)$ e $\eta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{1+c}\right)$. Portanto, se existir c tal que $0 < \alpha < c < 1$, podemos escolher um caminho Ha independente de α .

Consequentemente, se $\alpha_0, \alpha_n \in [0, 1)$ para todo $n = 1, 2, \dots$ são tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha_0$, podemos escolher um caminho Ha tal que E_{α_n} esteja bem-definido para todo $n = 0, 1, 2, \dots$.

O próximo resultado nos garante a continuidade forte da família $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ sobre $\mathcal{H}_\sigma$.

Proposição 5.4. A família de Mittag-Leffler $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma$.

Demonstração. Seja $\tau > 0$ e considere $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \tau)$ tal que $t_n \rightarrow \tau$ quando $n \rightarrow \infty$. Claramente existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < t_n < \tau$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, para $x \in \mathcal{H}_\sigma$

$$\|E_\alpha(\tau A)x - E_\alpha(t_n A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} (e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}) \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Como na demonstração da Proposição 5.2, analisaremos a integral acima sobre os caminhos Ha_1 , Ha_2 e Ha_3 separadamente. Aqui vamos considerar $r > 0$ constante. • Sobre Ha_1 ,

$$\left\| \int_{Ha_1} (e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}) \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq C \int_r^\infty |e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}| s^{-1} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Como $|e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}| s^{-1} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$|e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}| s^{-1} \leq (e^{\tau s \cos \eta} + e^{t_n s \cos \eta}) s^{-1} \leq (e^{\tau s \cos \eta} + e^{cs \cos \eta}) s^{-1},$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_r^\infty |e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}| s^{-1} ds \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

• Sobre Ha_2 ,

$$\left\| \int_{Ha_2} (e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}) \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq C \int_{-\eta}^\eta |e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}| ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Como $|e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$|e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}| \leq e^{\tau r \cos s} + e^{t_n r \cos s} \leq 2e^{\tau r},$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{-\eta}^\eta |e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}| ds \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

- Sobre Ha_3 procedemos como em Ha_1 .

Portanto, $\|E_\alpha(\tau A)x - E_\alpha(t_n A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para $x \in \mathcal{H}_\sigma$. Analogamente, se considerarmos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (\tau, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow \tau$ quando $n \rightarrow \infty$, então $\|E_\alpha(t_n A)x - E_\alpha(\tau A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para $x \in \mathcal{H}_\sigma$.

Para mostrar a continuidade forte em $t = 0$, note que, pelo Teorema de Cauchy,

$$I = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{Ha} e^\lambda \lambda^{-1} d\lambda \right) I,$$

em que I é o operador identidade. Logo, fixando $t > 0$, se $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma} &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} e^{\lambda t} [\lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} - \lambda^{-1}] x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} e^{\lambda t} [\lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} - \lambda^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)] x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} A x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \end{aligned}$$

Novamente, analisaremos a integral acima sobre os caminhos Ha_1 , Ha_2 e Ha_3 separadamente, aqui vamos considerar $r = 1/t$.

- Sobre Ha_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha_1} e^{\lambda t} \lambda^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} A x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq \frac{C}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} \int_{1/t}^{\infty} e^{st \cos \eta} s^{-\alpha-2} ds \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} t^{\alpha+2} \int_{1/t}^{\infty} e^{st \cos \eta} ds \\ &= \frac{C}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} t^{\alpha+2} \frac{e^{\cos \eta}}{|\cos \eta|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow 0^+$.

- Sobre Ha_2 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha_2} e^{\lambda t} \lambda^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} A x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq \frac{C}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} \int_{-\eta}^{\eta} e^{tr \cos s} r^{-\alpha-2} r ds \\ &= \frac{C}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} t^{\alpha+1} \int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos s} ds \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} t^{\alpha+1} e^{2\eta} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quanto $t \rightarrow 0^+$.

- Sobre Ha_3 , basta proceder como sobre Ha_1 .

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma} = 0, \text{ se } x \in D(A).$$

Resta mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}_\sigma.$$

Como $D(A)$ é denso sobre $\mathcal{H}_\sigma$, dados $x \in \mathcal{H}_\sigma$ e $\varepsilon > 0$ escolhemos $y \in D(A)$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|x - y\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{e} \quad \|E_\alpha(tA)y - y\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{se } 0 < t < \delta.$$

Então, para $0 < t < \delta$

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq \|E_\alpha(tA)(x - y)\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|E_\alpha(tA)y - y\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|y - x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\leq M\|x - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta.$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

O próximo resultado garante a continuidade forte da família de Mittag-Leffler com respeito ao parâmetro $\alpha \in [0, 1)$.

Proposição 5.5. *Sejam $\alpha_n, \alpha_0 \in [0, 1)$, com $n = 1, 2, \dots$, tais que $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então para todo $x \in \mathcal{H}_\sigma$ e $t \geq 0$,*

$$E_{\alpha_n}(tA)x \rightarrow E_{\alpha_0}(tA)x, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, essa convergência é uniforme para t em intervalos limitados.

Demonstração. Primeiramente, pela Observação 5.3 podemos escolher um (único) caminho Ha para o qual os operadores E_{α_0} e E_{α_n} estejam bem definidos. Sendo $x \in \mathcal{H}_\sigma$, então

$$E_{\alpha_n}(tA)x - E_{\alpha_0}(tA)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} [\lambda^{\alpha_n} (\lambda^{\alpha_n+1} - A)^{-1} x - \lambda^{\alpha_0} (\lambda^{\alpha_0+1} - A)^{-1} x] d\lambda,$$

para todo $t \geq 0$. Como A é um operador setorial, logo

$$\begin{aligned} \|\lambda^{\alpha_n} (\lambda^{\alpha_n+1} - A)^{-1} x - \lambda^{\alpha_0} (\lambda^{\alpha_0+1} - A)^{-1} x\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq C(|\lambda|^{\alpha_n} |\lambda|^{-\alpha_n-1} + |\lambda|^{\alpha_0} |\lambda|^{-\alpha_0-1}) \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &= 2C|\lambda|^{-1} \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $\lambda \in \rho(A)$ fixado

$$|e^{\lambda t}| \|\lambda^{\alpha_n} (\lambda^{\alpha_n+1} - A)^{-1} x - \lambda^{\alpha_0} (\lambda^{\alpha_0+1} - A)^{-1} x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

uniformemente para t em intervalos limitados, pois $|e^{\lambda t}|$ é limitada se $t \in [0, \tau]$ e $\lambda \in Ha$. Portanto, do teorema da convergência dominada de Lebesgue, concluimos a demonstração. $\square$

Seja $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ o semigrupo analítico gerado pelo operador de Stokes (68, 149). Note que se $\alpha = 0$, a função $E_0(tA)$ é dada por

$$E_0(tA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t \geq 0.$$

Portanto, pela unicidade da transformada de Laplace, a família $\{E_0(tA)\}_{t \geq 0}$ coincide com o semigrupo $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$. Sendo assim, o próximo resultado é um corolário da Proposição 5.5.

Corolário 5.6. *Seja $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ o semigrupo analítico gerado por A . Para cada $x \in \mathcal{H}_\sigma$ e $t \geq 0$,*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E_\alpha(tA)x = e^{tA}x,$$

uniformemente para t em intervalos limitados.

Agora estamos interessados em estudar o comportamento da família de Mittag-Leffler nos espaços de potências fracionárias associados ao operador de Stokes $\mathcal{H}_\sigma^\beta := D((-A)^\beta)$, $\beta \geq 0$. Para $\beta \geq 0$ esta escala satisfaz

$$\mathcal{H}_\sigma^\beta \hookrightarrow H^{2\beta}(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Observamos que da continuidade da projeção $P : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ os seguintes mergulhos são verificados

$$\mathcal{H}_\sigma^\beta \hookrightarrow L_\sigma^r(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad r \leq \frac{6}{3-4\beta}, \quad 0 \leq \beta < \frac{3}{4},$$

e

$$\mathcal{H}_\sigma^\beta \hookleftarrow L_\sigma^s(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad s \geq \frac{6}{3-4\beta}, \quad -\frac{3}{4} < \beta \leq 0,$$

em que $L_\sigma^q(\Omega, \mathbb{R}^3)$ é o fecho de $\{u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div}(u) = 0, u \cdot n = 0\}$ em $L^q(\Omega, \mathbb{R}^3)$, ver por exemplo (149, 150).

Proposição 5.7. *Sejam $\alpha \in [0, 1)$ e $\beta \in [0, 1)$, então existe $\tilde{M} > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}_\sigma$ e $t > 0$,*

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \leq \tilde{M}t^{-(\alpha+1)\beta}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Demonstração. Sejam $\alpha \in [0, 1)$ e $\beta \in [0, 1)$. Procederemos de maneira análoga a demonstração da Proposição 5.2. Para $r > 0$ e $\eta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\eta_0}{\alpha+1})$

$$\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} := \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (-A)^\beta (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma},$$

em que Ha é o caminho tomado na demonstração da Proposição 5.2.

Para cada $t > 0$ fixado, se assumirmos que $r = 1/t$, então:

- Sobre Ha_1 , utilizando a Proposição 2.41,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha_1} e^{\lambda t} \lambda^\alpha (-A)^\beta (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} &\leq \frac{k}{2\pi} \int_{1/t}^\infty e^{st \cos \eta} s^\alpha s^{(\alpha+1)(\beta-1)} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{1/t}^\infty e^{st \cos \eta} s^{\beta(\alpha+1)-1} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma}, \end{aligned}$$

em que k é a constante que aparece na Proposição 2.41.

Caso 1: Se $\beta(\alpha+1) - 1 \leq 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\pi} \int_{1/t}^\infty e^{st \cos \eta} s^{\beta(\alpha+1)-1} ds &\leq \frac{k}{2\pi} t^{1-\beta(\alpha+1)} \int_{1/t}^\infty e^{st \cos \eta} ds \\ &\leq \frac{k}{2\pi} \frac{e^{\cos \eta}}{|\cos \eta|} t^{-\beta(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Caso 2: Se $\beta(\alpha + 1) - 1 > 0$, integrando por partes

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2\pi} \int_{1/t}^{\infty} e^{st \cos \eta} s^{\beta(\alpha+1)-1} ds &= \frac{k}{2\pi} \left[\frac{e^{st \cos \eta}}{t \cos \eta} s^{\beta(\alpha+1)-1} \right]_{1/t}^{\infty} \\
&\quad - \frac{k}{2\pi} \int_{1/t}^{\infty} \frac{e^{st \cos \eta}}{t \cos \eta} (\beta(\alpha+1) - 1) s^{\beta(\alpha+1)-2} ds \\
&\leq \frac{k}{2\pi} \frac{e^{\cos \eta}}{|\cos \eta|} t^{-\beta(\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{k(\beta(\alpha+1) - 1) t^{2-\beta(\alpha+1)}}{2\pi |\cos \eta| t} \int_{1/t}^{\infty} e^{st \cos \eta} ds \\
&\leq \frac{k}{2\pi} \frac{e^{\cos \eta}}{|\cos \eta|} t^{-\beta(\alpha+1)} + \frac{k(\beta(\alpha+1) - 1) e^{\cos \eta}}{2\pi |\cos \eta|^2} t^{-\beta(\alpha+1)} \\
&< \frac{k e^{\cos \eta}}{2\pi |\cos \eta|} \left(1 + \frac{1}{|\cos \eta|} \right) t^{-\beta(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

- Sobre Ha_2 , utilizando a Proposição 2.41,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha_2} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha} (-A)^{\beta} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_{\sigma}} &\leq \frac{k}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} e^{tr \cos s} r^{\alpha} r^{(\alpha+1)(\beta-1)} r ds \|x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}} \\
&= \frac{k}{2\pi} t^{-(\alpha+1)\beta} \int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos s} ds \|x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}} \\
&\leq \frac{k\eta e}{\pi} t^{-(\alpha+1)\beta} \|x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}}.
\end{aligned}$$

- Sobre Ha_3 , procedemos como em Ha_1 .

Tomando $\tilde{M} > 0$ como a maior das cotas acima, concluímos a demonstração. $\square$

Observação 5.8. Dados $0 \leq \theta \leq \beta < 1$ e $x \in \mathcal{H}_{\sigma}^{\theta}$, a Proposição 5.7 implica

$$\|E_{\alpha}(tA)x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}^{\beta}} = \|E_{\alpha}(tA)(-A)^{\theta}x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}^{\beta-\theta}} \leq \tilde{M} t^{-(\beta-\theta)(\alpha+1)} \|(-A)^{\theta}x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}} = \tilde{M} t^{-(\beta-\theta)(\alpha+1)} \|x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}^{\theta}}.$$

Particularmente, para $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ a família de operadores $\{t^{\theta(\alpha+1)} E_{\alpha}(tA) : \mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}+\theta}\}_{t>0}$ é uniformemente limitada, pois, se $x \in \mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}}$

$$\|t^{(\alpha+1)\theta} E_{\alpha}(tA)x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}+\theta}} \leq t^{(\alpha+1)\theta} \tilde{M} t^{-\theta(\alpha+1)} \|x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}}} = \tilde{M} \|x\|_{\mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}}},$$

portanto

$$\|t^{(\alpha+1)\theta} E_{\alpha}(tA)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}}, \mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}+\theta})} \leq \tilde{M},$$

com $\tilde{M}$ independente de t . Além disso, dado $u_0 \in \mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}}$ então

$$\|t^{\theta(\alpha+1)} E_{\alpha}(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_{\sigma}^{\frac{1}{2}+\theta}} \rightarrow 0, \quad (5.5)$$

quando $t \rightarrow 0^+$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ tome $x \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}$ tal que $\|x - u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2M}$, e escolha $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2M\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}} \right)^{-\theta(\alpha+1)}$, portanto, se $0 \leq t \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \|t^{\theta(\alpha+1)}E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} &\leq \|t^{\theta(\alpha+1)}E_\alpha(tA)(u_0 - x)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} + t^{\theta(\alpha+1)}\|E_\alpha(tA)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\ &\leq \tilde{M}t^{\theta(\alpha+1)}t^{-\theta(\alpha+1)}\|u_0 - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + Mt^{\theta(\alpha+1)}\|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Com isto concluímos a observação.

Proposição 5.9. *Sejam $\alpha, \beta \in [0, 1)$, então a família de operadores $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre o espaço $(\mathcal{H}_\sigma^\beta, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta})$.*

Demonstração. Seja $\tau > 0$ e considere uma sequência $\{t_n\} \subset (0, \tau)$ tal que $t_n \rightarrow \tau$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, para $x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta$,

$$\|E_\alpha(\tau A)x - E_\alpha(t_n A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} (e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}) \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} (-A)^\beta x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma}$$

Vamos analisar a integral acima sobre os caminhos Ha_1 , Ha_2 e Ha_3 separadamente. Aqui consideraremos $r > 0$ constante.

- Sobre Ha_1 ,

$$\left\| \int_{Ha_1} (e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}) \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} (-A)^\beta x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \int_r^\infty |e^{\tau s e^{i\eta}} - e^{t_n s e^{i\eta}}| s^{-1} ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta}.$$

Já vimos na demonstração da Proposição 5.4 que a integral do lado direito da desigualdade acima tende para 0 quando $n \rightarrow \infty$.

- Sobre Ha_2 ,

$$\left\| \int_{Ha_2} (e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t_n}) \lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} (-A)^\beta x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq \int_{-\eta}^\eta |e^{\tau r e^{is}} - e^{t_n r e^{is}}| ds \|x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta}.$$

Pela demonstração da Proposição 5.4, a integral do lado direito da desigualdade acima tende para 0 quando $n \rightarrow \infty$.

- Sobre Ha_3 procedemos como sobre Ha_1 .

Portanto, $\|E_\alpha(\tau A)x - E_\alpha(t_n A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para $x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta$. Analogamente, se $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (\tau, \infty)$ é uma sequência tal que $t_n \rightarrow \tau$ quando $n \rightarrow \infty$, então $\|E_\alpha(t_n A)x - E_\alpha(\tau A)x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para $x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta$. Sendo assim, a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre $(\mathcal{H}_\sigma^\beta, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta})$.

Para mostrar a continuidade forte em $t = 0$, note que, pelo Teorema de Cauchy,

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\lambda \lambda^{-1} d\lambda,$$

em que I é o operador identidade. Logo, fixando $t > 0$, se $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} e^{\lambda t} [\lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} - \lambda^{-1}] x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} e^{\lambda t} [\lambda^\alpha (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} - \lambda^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)] x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} A x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta}. \end{aligned}$$

Novamente, analisaremos a integral acima sobre os caminhos Ha_1 , Ha_2 e Ha_3 separadamente. Aqui consideraremos $r = 1/t$.

- Sobre Ha_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha_1} e^{\lambda t} \lambda^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} A x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} &\leq \frac{k}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} \int_{1/t}^{\infty} e^{st \cos \eta} s^{-1} s^{(\alpha+1)(\beta-1)} ds \\ &\leq \frac{k}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} t^{1+(\alpha+1)(1-\beta)} \int_{1/t}^{\infty} e^{st \cos \eta} ds \\ &= \frac{k}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} t^{(\alpha+1)(1-\beta)} \frac{e^{\cos \eta}}{|\cos \eta|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow 0^+$.

- Sobre Ha_2 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{Ha_2} e^{\lambda t} \lambda^{-1} (\lambda^{\alpha+1} - A)^{-1} A x d\lambda \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} &\leq \frac{k}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} \int_{-\eta}^{\eta} e^{tr \cos s} r^{-1} r^{(\alpha+1)(\beta-1)} r ds \\ &= \frac{k}{2\pi} \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} t^{(\alpha+1)(1-\beta)} \int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos s} ds \\ &\leq \frac{k}{2\pi} 2\eta e \|Ax\|_{\mathcal{H}_\sigma} t^{(\alpha+1)(1-\beta)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quanto $t \rightarrow 0^+$.

- Sobre Ha_3 , basta proceder como sobre Ha_1 .

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} = 0, \quad \text{se } x \in D(A).$$

Resta mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta.$$

Como $(D(A), \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta})$ é denso sobre $(\mathcal{H}_\sigma^\beta, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta})$, dados $x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta$ e $\varepsilon > 0$, escolhemos $y \in D(A)$ e $\delta > 0$ tais que

$$\|x - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \leq \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{e} \quad \|E_\alpha(tA)y - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{se } 0 < t < \delta.$$

Então, para $0 < t < \delta$

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} &\leq \|E_\alpha(tA)(x - y)\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} + \|E_\alpha(tA)y - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} + \|y - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} \\ &\leq M\|x - y\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E_\alpha(tA)x - x\|_{\mathcal{H}_\sigma^\beta} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}_\sigma^\beta.$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

5.3 Existência de soluções brandas

Nesta seção nós consideraremos o problema (5.1) com dado inicial $u_0 \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}} = H_{0,\sigma}^1$. Nós lembramos que $H_{0,\sigma}^1$ é o completamento do conjunto

$$C_{0,\sigma}^1 := \{u \in C_0^1 : \operatorname{div}(u) = 0\}$$

com a norma $\|u\| = (\|\nabla u\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 + \|u\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2)^{\frac{1}{2}}$. Note que para todo $u \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$,

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = \|\nabla u\|_{\mathcal{H}_\sigma}.$$

Além disso, para $u \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ a função $\tilde{F}(u) = -(-A)^{-\frac{1}{4}}P(u \cdot \nabla)u$ está bem definida em $\mathcal{H}_\sigma$ e se $u, v \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$, então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\tilde{F}(u) - \tilde{F}(v)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq c(\|u\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}})\|u - v\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \quad (5.6)$$

e

$$\|\tilde{F}(u)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq c\|u\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2. \quad (5.7)$$

Para a demonstração dessas afirmações nós recomendamos os trabalhos (151, 150).

Nesta seção, $\mathbf{B} : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ denotará a função Beta que é definida por

$$\mathbf{B}(a, b) = \int_0^1 (1-s)^{a-1} s^{b-1} ds.$$

Teorema 5.10. *Considere $\alpha \in [0, 1/3)$. Seja $u_0 \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ e suponha que $Ph : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ é uma função contínua tal que $\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq ks^\gamma$, para algum $k > 0$ e $\gamma > \frac{\alpha-1}{2}$. Então existem uma constante $\tau_0 > 0$ e uma única solução branda $u \in C([0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}})$ para o problema (5.3). Além disso, para todo $0 < \theta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1-3\alpha}{4(\alpha+1)}\right\}$*

$$u \in C((0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta})$$

e

$$t^{(\alpha+1)\theta} \|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Demonstração. Seja $\mu > 0$ tal que $\|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} < \frac{\mu}{2}$. Considere $\tau_0 > 0$ tal que para todo $0 \leq t \leq \tau_0$

$$\|E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mu}{2},$$

$$\tilde{M}k\mathbf{B}\left(\frac{1-\alpha}{2}, \gamma+1\right)t^{\frac{1-\alpha}{2}+\gamma} \leq \frac{\mu}{4},$$

e

$$\tilde{M}c\mu t^{\frac{1-3\alpha}{4}} \leq \frac{1-3\alpha}{16}. \quad (5.8)$$

Considere o conjunto

$$K := \left\{ v \in C\left([0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}\right); \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \mu \right\}.$$

Sobre K definimos o operador

$$Tu(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A) \tilde{F}(u)(s) ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A) Ph(s) ds,$$

em que $\tilde{F}(u) = -(-A)^{-\frac{1}{4}} P(u \cdot \nabla)u$. Nosso propósito é mostrar que K é T -invariante e que T é uma contração. Inicialmente, provaremos que $T : K \rightarrow K$ está bem definido e dividiremos essa parte da demonstração nas duas afirmações seguintes. Usaremos (5.7) para estimar as desigualdades abaixo.

Afirmção 1: Se $u \in K$, então $Tu \in C\left([0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}\right)$.

De fato, seja $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ e considere $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \tau_1]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau_1$. Então

$$\begin{aligned} \|Tu(t_n) - Tu(\tau_1)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &\leq \|E_\alpha(t_n A)u_0 - E_\alpha(\tau_1 A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_1-s)A)) \tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\quad + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_1-s)A)) Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{\tau_1} \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((\tau_1-s)A) \tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{\tau_1} \|E_\alpha((\tau_1-s)A) Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\ &:= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + I_5(n). \end{aligned}$$

Analisaremos separadamente cada termo $I_i(n)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

- Para $I_1(n)$: pela Proposição 5.9 a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$, logo é fácil notar que

$$I_1(n) := \|E_\alpha(t_n A)u_0 - E_\alpha(\tau_1 A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

- Para $I_2(n)$: como a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}$, pela Proposição 5.9, logo $\|(-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t_n-s)A) - E_\alpha((\tau_1-s)A)) \tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_1 - s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
& \leq \tilde{M}((t_n - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} + (\tau_1 - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)})\|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\
& \leq \tilde{M}c((t_n - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} + (\tau_1 - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)})\|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 \\
& \leq \tilde{M}c\mu^2((t_n - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} + (\tau_1 - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)}),
\end{aligned}$$

em que o último termo da desigualdade acima é integrável em s sobre $(0, t_n)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $I_2(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

• Para $I_3(n)$, note que

$$\|(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_1 - s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \tilde{M}k\left((t_n - s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)}s^\gamma + (\tau_1 - s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)}s^\gamma\right).$$

Como o lado direito da desigualdade acima é integrável em s sobre $(0, t_n)$, logo pelo mesmo argumento usado em $I_2(n)$, concluímos que $I_3(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

• Para $I_4(n)$:

$$\begin{aligned}
I_4(n) &= \int_{t_n}^{\tau_1} \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((\tau_1 - s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \tilde{M} \int_{t_n}^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}c \int_{t_n}^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 ds \\
&\leq \tilde{M}c\mu^2 \int_0^{\tau_1 - t_n} s^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds = \tilde{M}c\mu^2 \frac{4}{1 - 3\alpha} (\tau_1 - t_n)^{\frac{1-3\alpha}{4}} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ Para } I_5(n) : \quad I_5(n) &= \int_{t_n}^{\tau_1} \|E_\alpha((\tau_1 - s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \tilde{M}k \int_{t_n}^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma ds \\
&= \tilde{M}k\tau_1^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} \tau_1^\gamma \int_{t_n}^{\tau_1} \left(1 - \frac{s}{\tau_1}\right)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} \left(\frac{s}{\tau_1}\right)^\gamma ds \\
&= \tilde{M}k\tau_1^{\gamma - \frac{1}{2}(\alpha+1)} \int_{\frac{t_n}{\tau_1}}^1 (1 - s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma \tau_1 ds \\
&= \tilde{M}k\tau_1^{\gamma + \frac{1}{2}(1-\alpha)} \int_{\frac{t_n}{\tau_1}}^1 (1 - s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma ds \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu(t_n) - Tu(\tau_1)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Um argumento similar prova o caso $\tau_1 \in [0, \tau_0]$ e $t_n \rightarrow \tau_1^+$. Sendo assim, $Tu \in C([0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}})$.

Afirmção 2: $\|Tu(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \mu$, para todo $t \in [0, \tau_0]$ e $u \in K$.

De fato, se $u \in K$, então

$$\begin{aligned}
\|Tu(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &\leq \|E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \int_0^t \|E_\alpha((t-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \frac{\mu}{2} + \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\quad + \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} \|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \frac{\mu}{2} + \tilde{M}c \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 ds + \tilde{M}k \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma ds \\
&\leq \frac{\mu}{2} + \tilde{M}c\mu^2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds \\
&\quad + \tilde{M}kt^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} t^\gamma \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} \left(\frac{s}{t}\right)^\gamma ds \\
&= \frac{\mu}{2} + \tilde{M}c\mu^2 \int_0^t s^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds + \tilde{M}kt^{\gamma-\frac{1}{2}(\alpha+1)} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma t ds \\
&= \frac{\mu}{2} + \frac{4\tilde{M}c\mu^2}{1-3\alpha} t^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)} + \tilde{M}k\mathbf{B}\left(\frac{1-\alpha}{2}, \gamma+1\right) t^{\frac{1}{2}(1-\alpha)+\gamma} \\
&\leq \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{4} = \mu.
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que T é uma contração sobre K , para isso usaremos a desigualdade (5.6). Se $u, v \in K$, então

$$\begin{aligned}
\|Tu(t) - Tv(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(u)(s) - \tilde{F}(v)(s))\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|\tilde{F}(u)(s) - \tilde{F}(v)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}c \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \left(\|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}\right) \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq 2\tilde{M}c\mu \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds \sup_{0 \leq t \leq \tau_0} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{8\tilde{M}c\mu}{1-3\alpha} t^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)} \sup_{0 \leq t \leq \tau_0} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Por (5.8) segue que $\frac{8\tilde{M}c\mu}{1-3\alpha} t^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)} \leq \frac{1}{2}$ para todo $t \in [0, \tau_0]$, logo T é uma contração sobre K e portanto possui um único ponto fixo $u \in K$.

Para provar a unicidade da solução branda, considere $v \in C([0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}})$ outra

solução branda do problema (5.3). Então para todo $t \in [0, \tau_0]$

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(u)(s) - \tilde{F}(v)(s))\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|\tilde{F}(u)(s) - \tilde{F}(v)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\leq \tilde{M}c \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} (\|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \tilde{M}c \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} (\|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds.
\end{aligned}$$

Logo pela Desigualdade Singular de Gronwall (68, Lema 7.1.1, pg 188), $\|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0$ para todo $t \in [0, \tau_0]$.

Para concluir a demonstração, considere $0 < \theta < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1-3\alpha}{4(\alpha+1)} \right\}$. Então para todo $t \in (0, \tau_0]$,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} &\leq \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds \\
&\quad + \int_0^t \|E_\alpha((t-s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds + \|E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\
&\leq \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} \|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\quad + \tilde{M} \int_0^t (t-s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} \|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds + \tilde{M}t^{-\theta(\alpha+1)} \|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \tilde{M}c \int_0^t (t-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 ds \\
&\quad + \tilde{M}k \int_0^t (t-s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} s^\gamma ds + \tilde{M}t^{-\theta(\alpha+1)} \|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \tilde{M}c \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} \{ \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 \} t^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} ds \\
&\quad + \tilde{M}kt^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} t^\gamma \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} \left(\frac{s}{t}\right)^\gamma ds + \tilde{M}t^{-\theta(\alpha+1)} \|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&= \tilde{M}c \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} \{ \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 \} t^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)+1} \int_0^1 (1-s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} ds \\
&\quad + \tilde{M}kt^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)+\gamma+1} \int_0^1 (1-s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} s^\gamma ds + \tilde{M}t^{-\theta(\alpha+1)} \|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&= \tilde{M}c \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} \{ \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 \} t^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)+1} \mathbf{B} \left(1 - \left(\frac{3}{4} + \theta \right) (\alpha + 1), 1 \right) \\
&\quad + \tilde{M}kt^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)+\gamma+1} \mathbf{B} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \theta \right) (\alpha + 1), \gamma + 1 \right) + \tilde{M}t^{-\theta(\alpha+1)} \|u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Portanto, $u : (0, \tau_0] \rightarrow \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}$ está bem definido. Além disso, da estimativa acima vemos

que para $t > 0$

$$\begin{aligned} t^{\theta(\alpha+1)} \|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} &\leq \tilde{M}c \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} \left\{ \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 \right\} t^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)} \mathbf{B} \left(1 - \left(\frac{3}{4} + \theta \right) (\alpha + 1), 1 \right) \\ &\quad + \tilde{M}k t^{\frac{1}{2}(1-\alpha)+\gamma} \mathbf{B} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \theta \right) (\alpha + 1), \gamma + 1 \right) \\ &\quad + t^{\theta(\alpha+1)} \|E_\alpha(tA)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}}. \end{aligned}$$

Da Observação 5.8 segue que o lado direito da inequação acima tende para 0 quando $t \rightarrow 0^+$. Com um argumento similar ao usado na Afirmação 1, provaremos que $u \in C \left((0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta} \right)$. Seja $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ e considere $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \tau_1)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau_1$. Então,

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u(\tau_1)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} &\leq \|E_\alpha(t_n A)u_0 - E_\alpha(\tau_1 A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\ &\quad + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_1 - s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds \\ &\quad + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_1 - s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{\tau_1} \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((\tau_1 - s)A)\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{\tau_1} \|E_\alpha((\tau_1 - s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds \\ &:= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + I_5(n). \end{aligned}$$

Analisaremos separadamente cada termo $I_i(n)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

- $I_1(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, pois $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}$ pela Proposição 5.9. Observamos que podemos usar a Proposição 5.9, pois $\theta < \frac{1-3\alpha}{4(\alpha+1)}$, logo $(1+\alpha)(\frac{1}{2}+\theta) < 1$.

- Para $I_2(n)$, note que

$$\begin{aligned} &\|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_1 - s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\ &\leq \tilde{M} \left[(t_n - s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} + (\tau_1 - s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} \right] \|\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \\ &\leq \tilde{M}c \left[(t_n - s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} + (\tau_1 - s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} \right] \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2. \end{aligned}$$

Pela Proposição 5.9, a família $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}+\theta}$, e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $I_2(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

- Para $I_3(n)$, note que

$$\begin{aligned} &\| [E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_1 - s)A)] Ph(s) \|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \\ &\leq \tilde{M}c \left[(t_n - s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} + (\tau_1 - s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} \right] s^\gamma. \end{aligned}$$

Como $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é uma família fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue $I_3(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

• Para $I_4(n)$, basta notar que

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{\tau_1} \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((\tau_1 - s)A) \tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds &\leq \tilde{M}c \int_{t_n}^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 ds \\ &\leq \tilde{M}c \sup_{0 \leq s \leq \tau_0} \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 \int_0^{\tau_1 - t_n} s^{-(\frac{3}{4}+\theta)(\alpha+1)} ds, \end{aligned}$$

logo $I_4(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

• Para $I_5(n)$, note que

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{\tau_1} \|E_\alpha((\tau_1 - s)A) Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} ds &\leq \tilde{M}k \int_{t_n}^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} s^\gamma ds \\ &= \tilde{M}c\tau_1^{\gamma - (\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)+1} \int_{\frac{t_n}{\tau_1}}^1 (1 - s)^{-(\frac{1}{2}+\theta)(\alpha+1)} s^\gamma ds, \end{aligned}$$

logo $I_5(n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Um argumento similar demonstra o caso $\tau_1 \in (0, \tau_0)$ e $t_n \rightarrow \tau_1^+$. Portanto, $u \in C\left((0, \tau_0]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}\right)$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Daremos continuidade ao nosso estudo do problema (5.3) demonstrando que a solução branda proveniente do Teorema 5.10 tem uma única continuação para um intervalo maior de existência.

Definição 5.11. Seja $u : [0, \tau] \rightarrow \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ uma solução branda do problema (5.3). Se $T > 0$ e $v : [0, \tau + T] \rightarrow \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ é uma solução branda do problema (5.3), então dizemos que v é uma continuação de u em $[0, \tau + T]$.

Teorema 5.12. Sob as condições do Teorema 5.10, seja τ_0 e $u : [0, \tau_0] \rightarrow \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ a solução branda do problema (5.3). Então existe $T > 0$ e uma única continuação u^* de u em $[0, \tau_0 + T]$.

Demonstração. Para $\mu > 0$ fixado, como $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ e sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}$, utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{t \rightarrow \tau_0^+} \left\| \int_0^{\tau_0} (-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0-s)A)) \tilde{F}(u)(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

e,

$$\lim_{t \rightarrow \tau_0^+} \left\| \int_0^{\tau_0} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0-s)A)) Ph(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Sendo assim, podemos considerar $T > 0$ tal que, para todo $t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$,

$$\|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(\tau_0A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mu}{5},$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^{\tau_0} (-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0-s)A)) \tilde{F}(u)(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mu}{5}, \\
& \left\| \int_0^{\tau_0} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0-s)A)) Ph(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mu}{5}, \\
& \frac{4\tilde{M}}{1-3\alpha} \left(c\mu^2 + 2c\mu \|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|\tilde{F}(u)(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \right) (t-\tau_0)^{\frac{1}{4}(1-3\alpha)} \leq \frac{\mu}{5}, \\
& \tilde{M}kt^{\gamma+\frac{1}{2}(1-\alpha)} \int_{\frac{\tau_0}{t}}^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma ds \leq \frac{\mu}{5}.
\end{aligned}$$

Seja K o conjunto de todas as funções $w \in C([0, \tau_0 + T]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}})$ tais que $w(t) = u(t)$ para todo $t \in [0, \tau_0]$ e

$$\|w(t) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq \mu, \quad \forall t \in [\tau_0, \tau_0 + T].$$

Defina o operador Λ sobre K por

$$\Lambda w(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A) \tilde{F}(w)(s) ds - \int_0^t E_\alpha((t-s)A) Ph(s) ds,$$

em que $\tilde{F}(w) = -(-A)^{\frac{1}{4}} P(w \cdot \nabla)w$. Mostraremos que $\Lambda : K \rightarrow K$ está bem definido e que é uma contração.

Se $w \in K$, então para todo $t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$

$$\begin{aligned}
\|\Lambda w(t) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} & \leq \|E_\alpha(tA)u_0 - E_\alpha(\tau_0 A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
& + \left\| \int_0^{\tau_0} (-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0-s)A)) \tilde{F}u(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
& + \left\| \int_0^{\tau_0} (E_\alpha((t-s)A) - E_\alpha((\tau_0-s)A)) Ph(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
& + \left\| \int_{\tau_0}^t (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A) \tilde{F}(w)(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
& + \left\| \int_{\tau_0}^t E_\alpha((t-s)A) Ph(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
& \leq \frac{\mu}{5} + \frac{\mu}{5} + \frac{\mu}{5} + \tilde{M} \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|\tilde{F}(w)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
& + \tilde{M}k \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma ds \\
& \leq \tilde{M} \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} (\|\tilde{F}(w)(s) - \tilde{F}(u)(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma} + \|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma}) ds \\
& + \frac{3}{5}\mu + \tilde{M}kt^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} t^\gamma \int_{\frac{\tau_0}{t}}^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{M}c \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} (\|w(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \|w(s) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \tilde{M} \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\
&\quad + \frac{3}{5}\mu + \tilde{M}kt^{\gamma+\frac{1}{2}(1-\alpha)} \int_{\frac{\tau_0}{t}}^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} s^\gamma ds \\
&\leq \tilde{M}c \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} (\|w(s) - u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + 2\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \mu ds \\
&\quad + \tilde{M} \|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \int_0^{t-\tau_0} s^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds + \frac{4}{5}\mu \\
&\leq \tilde{M}c\mu(\mu + 2\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \int_0^{t-\tau_0} s^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds \\
&\quad + \tilde{M} \|\tilde{F}u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \int_0^{t-\tau_0} s^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds + \frac{4}{5}\mu \\
&= \frac{4\tilde{M}}{1-3\alpha} \left(c\mu^2 + 2c\mu\|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|\tilde{F}(u)(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \right) (t-\tau_0)^{\frac{1-3\alpha}{4}} + \frac{4\mu}{5} \\
&\leq \mu.
\end{aligned}$$

Além disso, $\Lambda w \in C([0, \tau_0 + T]; \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}})$. De fato, seja $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + T)$ e considere $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [\tau, \tau_0 + T]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau$, então

$$\begin{aligned}
\|\Lambda w(t_n) - \Lambda w(\tau)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &\leq \|E_\alpha(t_n A)u_0 - E_\alpha(\tau A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_0^\tau (-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A)) \tilde{F}(w)(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_0^\tau (E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A)) Ph(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_\tau^{t_n} (-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t_n - s)A) \tilde{F}(w)(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_\tau^{t_n} E_\alpha((t_n - s)A) Ph(s) ds \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&:= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + I_5(n).
\end{aligned}$$

Analisaremos cada termo $I_i(n)$ separadamente.

- $I_1(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, pois $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$.
- Para $I_2(n)$, note que

$$\begin{aligned}
&\left\| (-A)^{\frac{1}{4}} (E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A)) \tilde{F}(w)(s) \right\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \tilde{M}c \left[(t_n - s)^{\frac{-3(\alpha+1)}{4}} + (\tau - s)^{\frac{-3(\alpha+1)}{4}} \right] \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|w(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada Lebesgue, usando a desigualdade acima e a continuidade forte da família $\{E_\alpha(tA)\}_{t \geq 0}$ sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{3}{4}}$, concluímos que $I_2(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

- Para $I_3(n)$, note que

$$\begin{aligned} & \| (E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau - s)A))Ph(s) \|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\ & \leq \tilde{M}k(t_n - s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)}s^\gamma + \tilde{M}k(\tau - s)^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)}s^\gamma. \end{aligned}$$

Logo $I_3(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue.

- Para $I_4(n)$,

$$\begin{aligned} I_4(n) & \leq \tilde{M}c \int_\tau^{t_n} (t_n - s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|w(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 ds \\ & \leq \tilde{M}c \sup_{0 \leq s \leq \tau_0 + T} \|w(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 \int_0^{t_n - \tau} s^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds \\ & = \tilde{M}c \sup_{0 \leq s \leq \tau_0 + T} \|w(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 \frac{4}{1 - 3\alpha} (t_n - \tau)^{\frac{1-3\alpha}{4}}. \end{aligned}$$

Logo, $I_4(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

- Para $I_5(n)$,

$$\begin{aligned} I_5(n) & \leq \tilde{M}k \int_\tau^{t_n} (t_n - s)^{-\frac{(\alpha+1)}{2}} s^\gamma ds \\ & = \tilde{M}k t_n^{\frac{1-\alpha}{2} + \gamma} \int_{\frac{\tau}{t_n}}^1 (1 - s)^{-\frac{(\alpha+1)}{2}} s^\gamma ds. \end{aligned}$$

Logo, $I_5(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda w(t_n) - \Lambda w(\tau)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Um argumento similar prova o caso $\tau \in (\tau_0, \tau_0 + T]$ e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [\tau_0, \tau]$. Por conseguinte, $\Lambda w \in K$ se $w \in K$.

Por fim, mostraremos que Λ é uma contração sobre K . De fato, se $v, w \in K$, então

$$\|\Lambda v(t) - \Lambda w(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{se } t \in [0, \tau_0],$$

e

$$\begin{aligned} \|\Lambda v(t) - \Lambda w(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} & \leq \int_{\tau_0}^t \|(-A)^{\frac{1}{4}} E_\alpha((t-s)A)(\tilde{F}(w)(s) - \tilde{F}(v)(s))\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\ & \leq \tilde{M} \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} \|\tilde{F}(w)(s) - \tilde{F}(v)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} ds \\ & \leq \tilde{M}c \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} (\|w(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} + \|v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \|w(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\ & \leq \tilde{M}c2(\mu + \|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}(\alpha+1)} ds \sup_{0 \leq s \leq \tau_0 + T} \|w(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\ & = \frac{8\tilde{M}c}{1-3\alpha} (\mu + \|u(\tau_0)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}) (t - \tau_0)^{\frac{1-3\alpha}{4}} \sup_{0 \leq s \leq \tau_0 + T} \|w(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\ & \leq \frac{2}{5} \sup_{0 \leq s \leq \tau_0 + T} \|w(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto Λ é uma contração sobre K e isto conclui a demonstração. $\square$

Definição 5.13. Seja $u : [0, \tau_{max}) \rightarrow \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ uma solução branda do problema (5.3). Dizemos que τ_{max} é o tempo maximal de existência de u , se $\tau_{max} = +\infty$, ou se não existir uma continuação de u para um intervalo $[0, \tau_{max}]$.

O próximo teorema é o nosso resultado sobre existência global ou a explosão da solução em tempo finito. Necessariamente, temos o seguinte:

Teorema 5.14. *Sob as condições do Teorema 5.10, se u é a solução branda do problema (5.3) com um tempo maximal de existência $\tau_{max} < +\infty$, então*

$$\limsup_{t \rightarrow \tau_{max}^-} \|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = \infty.$$

Demonstração. Suponha que existe $R > 0$ tal que $\|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \leq R$ para todo $t \in [0, \tau_{max})$. Considere $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $t_j \rightarrow \tau_{max}$ quando $j \rightarrow \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, utilizando o fato de $E_\alpha(tA)$ ser uma família fortemente contínua sobre $\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $n, m \geq N$,

$$\|E_\alpha(t_m A)u_0 - E_\alpha(t_n A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} < \frac{\varepsilon}{5},$$

$$\int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_{max} - s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((\tau_{max} - s)A) - E_\alpha((t_n - s)A))\tilde{F}(u)(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\int_0^{t_n} \|(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_{max} - s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\int_0^{t_n} \|(E_\alpha((\tau_{max} - s)A) - E_\alpha((t_m - s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\tilde{M}cR^2 \int_0^{t_m - t_n} s^{\frac{-3(\alpha+1)}{4}} ds \leq \frac{\varepsilon}{5},$$

$$\tilde{M}k\tau_{max}^{\gamma + \frac{1-\alpha}{2}} \int_{\frac{t_n}{t_m}}^1 (1-s)^{\frac{-(\alpha+1)}{2}} s^\gamma ds \leq \frac{\varepsilon}{5}.$$

Nas desigualdades acima nós supomos, sem perda de generalidade, $t_n < t_m$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u(t_n) - u(t_m)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} &\leq \|E_\alpha(t_n A)u_0 - E_\alpha(t_m A)u_0\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((t_m - s)A))\tilde{F}u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((t_m - s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_m} \|(-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t_m - s)A)\tilde{F}u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_m} \|E_\alpha((t_m - s)A)Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_{\max} - s)A))\tilde{F}u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \int_0^{t_n} \|(-A)^{\frac{1}{4}}(E_\alpha((\tau_{\max} - s)A) - E_\alpha((t_m - s)A))\tilde{F}u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((t_n - s)A) - E_\alpha((\tau_{\max} - s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \int_0^{t_n} \|(E_\alpha((\tau_{\max} - s)A) - E_\alpha((t_m - s)A))Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \tilde{M}c \int_{t_n}^{t_m} (t_m - s)^{\frac{-3(\alpha+1)}{4}} \|u(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}}^2 ds \\
&\quad + \tilde{M}k \int_{t_n}^{t_m} (t_m - s)^{\frac{-(\alpha+1)}{2}} s^\gamma ds \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{u(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ é uma sequência de Cauchy e portanto existe $\tilde{u} \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = \tilde{u}$. Sendo assim, podemos estender u sobre $[0, \tau_{\max}]$ obtendo a equação

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + \int_0^t (-A)^{\frac{1}{4}}E_\alpha((t-s)A)\tilde{F}u(s)ds + \int_0^t E_\alpha((t-s)A)Ph(s)ds,$$

para todo $t \in [0, \tau_{\max}]$. Porém, pelo Teorema 5.12, podemos estender a solução para um intervalo maior, e isto é uma contradição. $\square$

Usando os Teoremas 5.10, 5.12 e 5.14 concluímos o seguinte resultado para as equações de Navier-Stokes.

Corolário 5.15. *Seja $u_0 \in \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}$ e suponha que $Ph : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ é uma função contínua tal que $\|Ph(s)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq ks^\gamma$, para algum $k > 0$ e algum $\gamma > -\frac{1}{2}$. Então existe uma constante $\tau_{\max} > 0$ e uma única solução branda $u \in C([0, \tau_{\max}); \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}})$ das equações de Navier-Stokes*

$$\begin{cases} u_t = Au + Ph - P(u \cdot \nabla)u, & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Se $\tau_{max} < \infty$, então $\limsup_{t \rightarrow \tau_{max}^-} \|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}}} = \infty$. Além disso, $u \in C((0, \tau_{max}); \mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta})$ para todo $\theta \in (0, \frac{1}{4})$. Finalmente,

$$t^\theta \|u(t)\|_{\mathcal{H}_\sigma^{\frac{1}{2}+\theta}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+,$$

para todo $\theta \in (0, \frac{1}{4})$.

6 Conclusão

Neste trabalho, estudamos a existência e unicidade de soluções brandas pseudo S -assintoticamente ω -periódicas para certas equações de evolução definidas sobre espaços de Banach, e aplicamos nossos métodos a estruturas flexíveis, problemas do calor, equações fracionárias e viscoelasticidade; além disso, com relação à teoria de viscoelasticidade mostramos ainda resultados de existência, unicidade, regularidade e continuação de soluções brandas para uma classe de equações não-lineares de Volterra provenientes desta teoria.

Num primeiro momento, demonstramos teoremas de existência e unicidade de soluções brandas pseudo S -assintoticamente ω -periódicas para equações de evolução hiperbólicas. Observamos que equações hiperbólicas aparecem em um amplo leque de disciplinas. Os principais ingredientes para alcançarmos nossos resultados foram a teoria de semigrupos hiperbólicos e espaços intermediários. Mostramos aplicações concretas de nossos métodos. Nossos resultados contribuem para o desenvolvimento da teoria de periodicidade assintótica de equações de evolução, a qual tem ganhado uma quantidade notável de atenção nos últimos anos.

Num segundo momento, estudamos periodicidade assintótica para estruturas flexíveis possuindo material interno amortecido e força externa. Para obter nossos resultados, utilizamos teoria de operador e argumentos de ponto fixo. A utilidade dos métodos de ponto fixo para aplicações tem aumentado enormemente para o desenvolvimento de eficientes técnicas para calcular pontos fixos. Dedicamos muita atenção para desenvolver uma conexão entre nosso conjunto de métodos abstratos e uma ampla classe de problemas específicos que aparecem em estruturas flexíveis, condução de calor, equações fracionárias e equações integrais provenientes da teoria de viscoelasticidade. Nosso estudo sugere que é possível desenvolver uma importante conexão com outras aplicações.

Por fim, no último momento voltamos a estudar uma classe de equações de Volterra provenientes da teoria de viscoelasticidade. Para tal classe de equações, mostramos existência, unicidade, regularidade, continuação e um critério de explosão de soluções brandas para essas equações. Para resolver tais problemas, utilizamos teoria de operadores e espaços intermediários. Observamos que as equações de Navier-Stokes é um caso particular estudado aqui.

Ao longo deste trabalho surgiram novas possibilidades de estudos que não foram desenvolvidos, citaremos algumas possibilidades nos tópicos seguintes:

- Analisar a quase periodicidade de soluções brandas para equações de evolução hiperbólicas. Como já citamos, a quase automorficidade de soluções brandas para

equações de evolução hiperbólicas foram estudadas por Boulite et al. (14) e por de Andrade et al. (15), porém a quase periodicidade para esse tipo de equação ainda é algo não estudado. Nesta análise, pode-se levar em consideração o critério de compacidade existente no espaço $AP(X)$ para se obter novos teoremas, possivelmente será necessário utilizar diferentes teoremas de ponto fixo.

- Estudar o comportamento assintótico dos problemas apresentados nessa tese utilizando os métodos introduzidos por Miller em (107), e analisar qual o ganho que teremos ao utilizar tais técnicas.
- Utilizando os métodos apresentados no Capítulo 5, estudar o comportamento de uma família (α, β, γ) -regularizada gerada por um operador B definido sobre um espaço de Hilbert H , tal que $-B$ seja um operador auto-adjunto positivo (ver Observação 4.3).
- Tendo em vista o artigo de Arrieta e Carvalho (152), estudar problemas de criticalidade para as equações apresentadas no Capítulo 5.
- Analisar as equações que aparecem no Capítulo 4 com diferentes tipos de materiais viscoelásticos. Alguns modelos de materiais são apresentados na Seção 2.6.

Referências

- 1 FRÉCHET, M. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. *Revue Sci.(Rev. Rose Illus.)*, v. 79, p. 341–354, 1941.
- 2 FRÉCHET, M. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 213, p. 520–522, 1941.
- 3 BRUIJN, N. G. de. The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations. *American Journal of Mathematics*, v. 71, n. 2, p. 313–330, 1949.
- 4 BOCHNER, S. A new approach to almost periodicity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 48, n. 12, p. 2039–2043, 1962.
- 5 HENRÍQUEZ, H. R.; PIERRI, M.; TÁBOAS, P. On s-asymptotically ω -periodic functions on banach spaces and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 343, n. 2, p. 1119–1130, 2008.
- 6 CAICEDO, A. et al. Asymptotic behavior of solutions of some semilinear functional differential and integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces. *Journal of the Franklin Institute*, v. 349, n. 1, p. 1–24, 2012.
- 7 CUEVAS, C.; SOUZA, J. C. de. S-asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations. *Applied Mathematics Letters*, v. 22, n. 6, p. 865–870, 2009.
- 8 CUEVAS, C.; LIZAMA, C. S-asymptotically ω -periodic solutions for semilinear Volterra equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 33, n. 13, p. 1628–1636, 2010.
- 9 CUEVAS, C.; SOUZA, J. C. de. Existence of S-asymptotically ω -periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 72, n. 3, p. 1683–1689, 2010.
- 10 DIMBOUR, W.; N'GUÉRÉKATA, G. M. S-asymptotically ω -periodic solutions to some classes of partial evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, v. 218, n. 14, p. 7622–7628, 2012.
- 11 SANTOS, J. P. C. dos; HENRÍQUEZ, H. R. Existence of s-asymptotically ω -periodic solutions to abstract integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 256, p. 109–118, 2015.
- 12 PIERRI, M.; ROLNIK, V. On pseudo s-asymptotically periodic functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge Univ Press, v. 87, n. 02, p. 238–254, 2013.
- 13 CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, H. R.; SOTO, H. Asymptotically periodic solutions of fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, v. 236, p. 524–545, 2014.

- 14 BOULITE, S.; MANIAR, L.; N'GUEREKATA, G. M. Almost automorphic solutions for hyperbolic semilinear evolution equations. *Semigroup Forum*, v. 71, n. 2, p. 231–240, 2005.
- 15 ANDRADE, B. D. et al. Almost automorphic solutions of hyperbolic evolution equations. *Banach J. Math. Anal.*, v. 6, p. 90–100, 2012.
- 16 PRATO, G. D.; GEYMONAT, G. *Hyperbolicity: Lectures given at a Summer School of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Cortona (Arezzo), Italy, June 24-July 2, 1976*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 72.
- 17 RUZHANSKY, M. V.; SUGIMOTO, M.; WIRTH, J. *Evolution Equations of Hyperbolic and Schrödinger Type: Asymptotics, Estimates and Nonlinearities*. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 2012. v. 301.
- 18 ASHYRALYEV, A.; YURTSEVER, A. On a nonlocal boundary value problem for semilinear hyperbolic-parabolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 47, n. 5, p. 3585–3592, 2001.
- 19 ASHYRALYEV, A.; AGGEZ, N. A note on the difference schemes of the nonlocal boundary value problems for hyperbolic equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, v. 25, n. 5-6, p. 439–462, 2004.
- 20 ASHYRALYEV, A.; KOKSAL, M. E. On the second order of accuracy difference scheme for hyperbolic equations in a hilbert space. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, v. 26, n. 7-8, p. 739–772, 2005.
- 21 ASHYRALYEV, A.; SOBOLEVSKII, P. E. Two new approaches for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic differential equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, v. 2005, n. 2, p. 183–213, 2005.
- 22 ASHYRALYEV, A.; YILDIRIM, O. On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations. *Taiwanese Journal of Mathematics*, v. 14, n. 1, p. 165–194, 2010.
- 23 ASHYRALYEV, A.; KOKSAL, M. E.; AGARWAL, R. P. A difference scheme for Cauchy problem for the hyperbolic equation with self-adjoint operator. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 52, n. 1, p. 409–424, 2010.
- 24 ASHYRALYEV, A.; AKAT, M. An approximation of stochastic hyperbolic equations. In: AIP PUBLISHING. *NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS ICNAAM 2011: International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*. [S.l.], 2011. v. 1389, n. 1, p. 625–628.
- 25 ANDRADE, F. et al. Asymptotic periodicity for hyperbolic evolution equations and applications. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 269, p. 169–195, 2015.
- 26 LIKINS, P. W. Dynamics and control of flexible space vehicles. NASA, 1969.
- 27 BALAS, M. J. Active control of flexible systems. *Journal of Optimization theory and Applications*, v. 25, n. 3, p. 415–436, 1978.
- 28 BALAS, M. J. Feedback control of flexible systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 4, p. 673–679, 1978.

- 29 BOSE, S. K.; GORAIN, G. C. Stability of the boundary stabilised internally damped wave equation $y'' + \lambda y''' = c^2(\Delta y + \mu \Delta y')$ in a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. *Indian J. Math.*, v. 40, n. 1, p. 1–15, 1998.
- 30 CHEN, G.; ZHOU, J. The wave propagation method for the analysis of boundary stabilization in vibrating structures. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 50, n. 5, p. 1254–1283, 1990.
- 31 CHOU, J.-H.; CHEN, S.-H.; CHAO, C.-H. Robust stabilization of flexible mechanical systems under noise uncertainties and time-varying parameter perturbations. *Journal of vibration and control*, v. 4, n. 2, p. 167–185, 1998.
- 32 GORAIN, G. C. Exponential energy decay estimate for the solutions of internally damped wave equation in a bounded domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 216, n. 2, p. 510–520, 1997.
- 33 GORAIN, G. C.; BOSE, S. K. Exact controllability and boundary stabilization of torsional vibrations of an internally damped flexible space structure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 99, n. 2, p. 423–442, 1998.
- 34 GORAIN, G. C.; BOSE, S. K. Exact controllability and boundary stabilization of flexural vibrations of an internally damped flexible space structure. *Applied Mathematics and Computation*, v. 126, n. 2, p. 341–360, 2002.
- 35 GORAIN, G. C. Uniform stabilization of n-dimensional vibrating equation modeling ‘standard linear model’ of viscoelasticity. *Applications and Applied Mathematics*, v. 4, n. 2, p. 314–328, 2009.
- 36 CHRISTENSEN, R. *Theory of viscoelasticity: an introduction*. New York: Academic Press, 1982.
- 37 ANDRADE, B. de; LIZAMA, C. Existence of asymptotically almost periodic solutions for damped wave equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 382, n. 2, p. 761–771, 2011.
- 38 AGARWAL, R. P. et al. Asymptotic periodicity for some classes of integro-differential equations and applications. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, v. 21, n. 1, p. 1–31, 2011.
- 39 ANDRADE, F. et al. L^p -boundedness and topological structure of solutions for flexible structural systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 38, n. 18, p. 5139–5159, 2015.
- 40 FERNÁNDEZ, C.; LIZAMA, C.; POBLETE, V. Maximal regularity for flexible structural systems in Lebesgue spaces. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2010, 2010.
- 41 XIAO, T.-J.; LIANG, J. *The Cauchy problem for higher order abstract differential equations*. Berlin: Springer, 1998.
- 42 CHILL, R.; SRIVASTAVA, S. l^p -maximal regularity for second order cauchy problems. *Mathematische Zeitschrift*, v. 251, n. 4, p. 751–781, 2005.

- 43 CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Well posedness for a class of flexible structure in Hölder spaces. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2009, 2009.
- 44 ARENDT, W.; BATTY, C.; BU, S. Fourier multipliers for Hölder continuous functions and maximal regularity. *Studia Mathematica*, v. 160, n. 1, p. 23–51, 2004.
- 45 POBLETE, V.; POZO, J. C. Periodic solutions of an abstract third-order differential equation. *Studia Mathematica*, v. 215, p. 195–219, 2013.
- 46 AGARWAL, R. P.; CUEVAS, C.; LIZAMA, C. *Regularity of Difference Equations on Banach Spaces*. Cham: Springer, 2014.
- 47 FERNÁNDEZ, C.; LIZAMA, C.; POBLETE, V. Regularity of solutions for a third order differential equation in Hilbert spaces. *Applied Mathematics and Computation*, v. 217, n. 21, p. 8522–8533, 2011.
- 48 KALTENBACHER, B.; LASIECKA, I.; POSPIESZALSKA, M. K. Well-posedness and exponential decay of the energy in the nonlinear jordan–moore–gibson–thompson equation arising in high intensity ultrasound. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 22, n. 11, p. 34 páginas, 2012.
- 49 ANDRADE, B. de et al. Asymptotic periodicity for flexible structural systems and applications. *Acta Applicandae Mathematicae*, p. 1–60, 2015.
- 50 BLAND, D. R. *The theory of linear viscoelasticity*. New York: Pergamon Press, Oxford, 1960. v. 10.
- 51 FLÜGGE, W. *Viscoelasticity*. 2ª. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- 52 MAINARDI, F. (Ed.). *Wave propagation in viscoelastic media*. London: Pitman, 1982. v. 52. (Research Notes Math., v. 52).
- 53 VOLTERRA, V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005.
- 54 GURTIN, M. E. *An introduction to continuum mechanics*. New York: Academic Press, 1981. v. 158.
- 55 PRÜSS, J. *Evolutionary integral equations and applications*. [S.l.]: Birkhäuser, 2013. v. 87.
- 56 BARNES, H. A.; HUTTON, J. F.; WALTERS, K. *An introduction to rheology*. Amsterdam: Elsevier, 1989. v. 3.
- 57 MACHADO, J. C. V. *Reologia e escoamento de fluidos: ênfase na indústria do Petróleo. editora intercência*. Rio de Janeiro: Intercência, 2002.
- 58 BOHR, H. Zur theorie der fastperiodischen funktionen, I. *Acta Mathematica*, v. 45, n. 1, p. 29–127, 1925.
- 59 BOHR, H. Zur theorie der fastperiodischen funktionen, II. *Acta Mathematica*, v. 46, n. 1-2, p. 101–214, 1925.
- 60 BOHR, H. Zur theorie der fastperiodischen funktionen, III. *Acta Mathematica*, v. 47, p. 237–281, 1926.

-
- 61 BOHR, H. *Almost Periodic Functions*. New York: Chelsea Publishing Company, 1956.
- 62 CORDUNEANU, C. *Almost periodic oscillations and waves*. New York: Springer Science & Business Media, 2009.
- 63 ZAIDMAN, S. *Almost-periodic functions in abstract spaces*. Boston: Pitman Advanced Pub. Program, 1985. v. 126.
- 64 ANDRADE, B. de; CUEVAS, C. S-asymptotically ω -periodic and asymptotically ω -periodic solutions to semi-linear Cauchy problems with non-dense domain. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 6, p. 3190–3208, 2010.
- 65 NICOLA, S. H.; PIERRI, M. A note on s-asymptotically periodic functions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 10, n. 5, p. 2937–2938, 2009.
- 66 ENGEL, K.-J.; NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York: Springer Verlag, 2000.
- 67 PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Springer, 1983.
- 68 HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1981. v. 840.
- 69 LUNARDI, A. *Analytic Semigroup and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. [S.l.]: Birkhäuser, 1995.
- 70 BOCHNER, S. Diffusion equation and stochastic processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 35, n. 7, p. 368–370, 1949.
- 71 FELLER, W. On a generalization of Marcel Riesz'potentials and the semi-groups generated by them. *Meddelanden Lunds Universitets Matematiska Seminarium (Comm. Sém. Mathém. Université de Lund)*, p. 73–81, 1952.
- 72 PHILLIPS, R. S. On the generation of semigroups of linear operators. *Pacific J. Math*, v. 2, n. 3, p. 333–369, 1952.
- 73 BALAKRISHNAN, A. V. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 91, n. 2, p. 330–353, 1959.
- 74 BALAKRISHNAN, A. V. Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pacific J. Math*, v. 10, n. 2, p. 419–437, 1960.
- 75 KRASNOSEL'SKII, M. A.; SOBOLEVSKII, P. E. Fractional powers of operators acting in banach spaces. *DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR*, v. 129, n. 3, p. 499–502, 1959.
- 76 KATO, T. Note on fractional powers of linear operators. *Proceedings of the Japan Academy*, v. 36, n. 3, p. 94–96, 1960.
- 77 YOSIDA, K. Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them. *Proceedings of the Japan Academy*, The Japan Academy, v. 36, n. 3, p. 86–89, 1960.

- 78 WATANABE, J. On some properties of fractional powers of linear operators. *Proceedings of the Japan Academy*, The Japan Academy, v. 37, n. 6, p. 273–275, 1961.
- 79 KOMATSU, H. Fractional powers of operators. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 19, p. 285–346, 1966.
- 80 KOMATSU, H. Fractional powers of operators II. Interpolation spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 21, p. 89–111, 1967.
- 81 KOMATSU, H. Fractional powers of operators III. Negative powers. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 21, p. 205–220, 1969.
- 82 KOMATSU, H. Fractional powers of operators IV. Potential operators. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 21, p. 221–228, 1969.
- 83 KOMATSU, H. Fractional powers of operators V. Dual operators. *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics*, v. 17, p. 373–396, 1970.
- 84 KOMATSU, H. Fractional powers of operators VI. Interpolation of non-negative operators and imbedding theorems. *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics*, v. 19, p. 1–63, 1972.
- 85 AMANN, H. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems: Volume I: Abstract Linear Theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 1.
- 86 GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. *Fixed Point Theory*. New York: Springer, 2003.
- 87 APPELL, J. Measures of noncompactness, condensing operators and fixed points: an application-oriented survey. *Fixed Point Theory*, v. 6, n. 2, p. 157–229, 2005.
- 88 FAN, Z.; LI, G. Existence results for semilinear differential equations with nonlocal and impulsive conditions. *Journal of Functional Analysis*, v. 258, n. 5, p. 1709–1727, 2010.
- 89 LIU, L. et al. Existence theorems of global solutions for nonlinear Volterra type integral equations in Banach spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 309, n. 2, p. 638–649, 2005.
- 90 ANDRADE, B.; CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, E. Asymptotic periodicity and almost automorphy for a class of volterra integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 35, n. 7, p. 795–811, 2012.
- 91 AGARWAL, R. P.; ANDRADE, B. de; CUEVAS, C. Weighted pseudo-almost periodic solutions of a class of semilinear fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 11, n. 5, p. 3532–3554, 2010.
- 92 BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer Science & Business Media, 2010.
- 93 CHICONE, C.; LATUSHKIN, Y. *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1999.
- 94 SIMON, J. Compact sets in the space $l^p(0, t; b)$. *Annali di Matematica pura ed applicata*, Springer, v. 146, n. 1, p. 65–96, 1986.

- 95 LIZAMA, C. Regularized solutions for abstract Volterra equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 243, n. 2, p. 278–292, 2000.
- 96 ARAYA, D.; LIZAMA, C. Existence of asymptotically almost automorphic solutions for a third order differential equation. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, v. 53, p. 1–20, 2012.
- 97 ZHANG, C. *Almost periodic type functions and ergodicity*, Science press. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- 98 BURTON, T. A.; ZHANG, B. A Schauder-type fixed point theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 417, n. 2, p. 552–558, 2014.
- 99 CHABROWSKI, J. On nonlocal problems for parabolic equations. *Nagoya Mathematical Journal*, v. 93, n. 19841, p. 109–131, 1984.
- 100 DENG, K. Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions. *Journal of Mathematical analysis and applications*, v. 179, n. 2, p. 630–637, 1993.
- 101 KEREFOV, A. Nonlocal boundary value problems for parabolic equations. *Differ. Uravn.*, v. 15, n. 1, p. 74–78, 1979.
- 102 VABISHCHEVICH, P. N. Nonlocal parabolic problems and the inverse problem of heat conduction. *Differ. Uravn.*, v. 17, n. 7, p. 1193–1199, 1981.
- 103 BANAŚ, J.; GOEBEL, K. *Measures of noncompactness in Banach spaces*. New York: Marcel Dekker Inc.: Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, 1980.
- 104 ZHANG, X.; LIU, L.; WU, Y. Global solutions of nonlinear second-order impulsive integro-differential equations of mixed type in Banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 67, n. 8, p. 2335–2349, 2007.
- 105 POZO, J. C. *Regularity and Qualitative Properties for Solutions of Some Evolution Equations*. Tese (Doutorado) — Universidad de Chile, Chile, 2012.
- 106 MARTIN, R. H. *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*. Florida: Krieger Publishing Co. Inc., 1987.
- 107 MILLER, R. K. *Nonlinear Volterra integral equations*. California: WA Benjamin Inc., 1971.
- 108 BURTON, T. A. Fractional differential equations and Lyapunov functionals. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 74, n. 16, p. 5648–5662, 2011.
- 109 CONSIGLIO, A. Risoluzione di una equazione integrale non lineare presentasi in un problema di turbolenza. *Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania*, v. 4, p. 1–13, 1940.
- 110 KIRK, C.; OLMSTEAD, W. Blow-up in a reactive-diffusive medium with a moving heat source. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, v. 53, n. 1, p. 147–159, 2002.
- 111 MANN, W. R.; WOLF, F. Heat transfer between solids and gases under nonlinear boundary conditions. *Quart. Applied Math.*, v. 9, p. 163–184, 1951.

- 112 NICHOLSON, R. S.; SHAIN, I. Theory of stationary electrode polarography. single scan and cyclic methods applied to reversible, irreversible, and kinetic systems. *Analytical Chemistry*, ACS Publications, v. 36, n. 4, p. 706–723, 1964.
- 113 PADMAVALLY, K. On a nonlinear integral equation. *J. Math. Mech.*, v. 7, p. 533–555, 1958.
- 114 ROBERTS, J.; MANN, W. A certain nonlinear integral equation of the Volterra type. *Pacific J. Math*, v. 1, p. 431–445, 1951.
- 115 GRIMMER, R.; LIU, J. H. Limiting equations of integrodifferential equations in banach space. *Journal of mathematical analysis and applications*, v. 188, n. 1, p. 78–91, 1994.
- 116 GRIPENBERG, G.; LONDEN, S.-O.; STAFFANS, O. *Volterra integral and functional equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. v. 34.
- 117 NOHEL, J. A. Nonlinear volterra equations for heat flow in materials with memory. *Integral and functional differential equations*, Dekker New York, v. 67, p. 3–82, 1981.
- 118 CUEVAS, C.; SEPULVEDA, A.; SOTO, H. Almost periodic and pseudo-almost periodic solutions to fractional differential and integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, v. 218, n. 5, p. 1735–1745, 2011.
- 119 LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S.; DEVI, J. V. *Theory of fractional dynamic systems*. Cottenham, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009.
- 120 BURTON, T. A. Fractional equations and a theorem of Brouwer-Schauder type. *Fixed Point Theory*, v. 14, n. 1, p. 91–96, 2013.
- 121 BURTON, T. A. Correction of “Fractional equations and a theorem of Brouwer-Schauder type”. *Fixed Point Theory*, por aparecer.
- 122 BURTON, T. A.; ZHANG, B. Fixed points and fractional differential equations: Examples. *Fixed Point Theory*, v. 14, n. 2, p. 313–326, 2013.
- 123 KEYANTUO, V. et al. Asymptotic behavior of fractional order semilinear evolution equations. *Differential and Integral Equations*, v. 26, n. 7/8, p. 757–780, 2013.
- 124 STOJANOVIĆ, M.; GORENFLO, R. Nonlinear two-term time fractional diffusion-wave problem. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 11, n. 5, p. 3512–3523, 2010.
- 125 N’GUÉRÉKATA, G. M. *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*. New York: Kluwer Academic & Plenum Publishers, 2001.
- 126 CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Existence of S-asymptotically ω -periodic solutions for two-times fractional order differential equations. *Southeast Asian Bull. Math*, v. 37, p. 683–690, 2013.
- 127 ARENDT, W. et al. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2011. v. 96.
- 128 CAICEDO, A.; CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, H. R. Asymptotic periodicity for a class of partial integrodifferential equations. *ISRN Mathematical Analysis*, v. 2011, 2011.

- 129 GRIMMER, R. Resolvent operators for integral equations in a banach space. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 273, n. 1, p. 333–349, 1982.
- 130 GURTIN, M. E.; PIPKIN, A. C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 31, n. 2, p. 113–126, 1968.
- 131 LIANG, J.; XIAO, T.-J. Semilinear integrodifferential equations with nonlocal initial conditions. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 47, n. 6, p. 863–875, 2004.
- 132 MILLER, R. K. An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 66, n. 2, p. 313–332, 1978.
- 133 CHEN, G. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 17, n. 1, p. 66–81, 1979.
- 134 DESCH, W.; GRIMMER, R.; SCHAPPACHER, W. Well-posedness and wave propagation for a class of integrodifferential equations in Banach space. *Journal of differential equations*, v. 74, n. 2, p. 391–411, 1988.
- 135 AIZICOVICI, S.; MCKIBBEN, M. Existence results for a class of abstract nonlocal Cauchy problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 39, n. 5, p. 649–668, 2000.
- 136 LIANG, J.; CASTEREN, J. V.; XIAO, T.-J. Nonlocal cauchy problems for semilinear evolution equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Pergamon, v. 50, n. 2, p. 173–189, 2002.
- 137 DING, H.-S.; XIAO, T.-J.; LIANG, J. Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 338, n. 1, p. 141–151, 2008.
- 138 DING, H.-S.; LIANG, J.; XIAO, T.-J. Pseudo almost periodic solutions to integro-differential equations of heat conduction in materials with memory. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 13, n. 6, p. 2659–2670, 2012.
- 139 DESCH, W.; GRIMMER, R.; SCHAPPACHER, W. Some considerations for linear integrodifferential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 104, n. 1, p. 219–234, 1984.
- 140 AGARWAL, R. P. et al. Asymptotic periodicity for some evolution equations in Banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 74, n. 5, p. 1769–1798, 2011.
- 141 ANH, V.; MCVINISH, R. Fractional differential equations driven by Lévy noise. *International Journal of Stochastic Analysis*, Hindawi Publishing Corporation, v. 16, n. 2, p. 97–119, 1900.
- 142 CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Almost automorphic solutions to integral equations on the line. *Semigroup Forum*, v. 79, n. 3, p. 461–472, 2009.

-
- 143 ARENDT, W.; PRÜSS, J. Vector-valued Tauberian theorems and asymptotic behavior of linear Volterra equations. *SIAM journal on mathematical analysis*, v. 23, n. 2, p. 412–448, 1992.
- 144 LIZAMA, C.; VERGARA, V. Uniform stability of resolvent families. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 132, n. 1, p. 175–181, 2004.
- 145 NAVIER, C. L. M. H. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, v. 6, p. 389–440, 1823.
- 146 SOHR, H. *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach*. [S.l.]: Birkhäuser Verlag, 2001.
- 147 GIGA, Y.; SOHR, H. On the stokes operator in exterior domains. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, v. 36, n. 1, p. 103–130, 1989.
- 148 TEMAM, R. *Navier-Stokes equations*. Rev. ed. Amsterdam: North-Holland, 1979.
- 149 GIGA, Y. Analyticity of the semigroup generated by the stokes operator in l^r spaces. *Mathematische Zeitschrift*, v. 178, n. 3, p. 297–329, 1981.
- 150 WAHL, W. V. *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations*. [S.l.]: Springer, 1985.
- 151 FUJITA, H.; KATO, T. On the navier-stokes initial value problem. i. *Archive for rational mechanics and analysis*, v. 16, n. 4, p. 269–315, 1964.
- 152 ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N. Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to navier-stokes and heat equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 352, n. 1, p. 285–310, 2000.