



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

José Laudelino de Menezes Neto

Estabilidade Paramétrica na Dinâmica de Pêndulos em Órbita Elíptica

Recife

2016

José Laudelino de Menezes Neto

Estabilidade Paramétrica na Dinâmica de Pêndulos em Órbita
Elíptica

*Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do
título de Doutor em Matemática.*

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral

Recife

2016

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno CRB 4-1758

M543e Menezes Neto, José Laudelino.
Estabilidade paramétrica na dinâmica de pêndulos em órbita elíptica /
José Laudelino Menezes Neto – 2016.
70 f.: fig.

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN.
Matemática, Recife, 2016.
Inclui referências.

1. Mecânica celeste. 2. Pêndulos em órbita. 3. Estabilidade
paramétrica. I. Cabral, Hildeberto Eulálio (Orientador). II. Título.

521 CDD (22. ed.) UFPE-MEI 2017-010

JOSÉ LAUDELINO DE MENEZES NETO

**ESTABILIDADE PARAMÉTRICA NA DINÂMICA DE PÊNDULOS EM ÓRBITA
ELÍPTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 10/11/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Shilippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho (Examinador Externo)
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Alain Albouy (Examinador Externo)
IMCCE – Bureau des Longitudes - Observatoire de Paris

Prof.^a Dr.^a Maité Kulesza (Examinadora Externa)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Para Dina, Raquel, Mozart e Maria Rita

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Hildeberto Eulálio Cabral pela orientação, companheirismo e todo apoio.

Agradeço a toda minha família e amigos.

Agradeço a Universidade Federal da Paraíba, em especial a todos que fazem parte do Departamento de Ciências Exatas.

José Laudelino de Menezes Neto

RESUMO

Estudamos a dinâmica de um pêndulo simples de comprimento variável em uma órbita elíptica e a dinâmica de um pêndulo duplo de comprimento variável para o caso de uma órbita elíptica e de comprimento fixo para o caso de uma órbita circular. Em todos os estudos, para cada caso específico, obtivemos os Lagrangeanos, as equações do movimento e os Hamiltonianos; calculamos os equilíbrios e verificamos a estabilidade de alguns; para os casos de órbitas elípticas, com auxílio de Teorema de Krein-Gelf'and-Lidskii e do método de Deprit-Hori, construímos curvas que separam regiões de estabilidade e instabilidade no plano dos parâmetros associados ao comprimento do pêndulo e da excentricidade da elipse.

Palavras-chave: Pêndulos em órbita. Estabilidade paramétrica. Deprit-Hori.

ABSTRACT

We study the dynamics of a simple pendulum with variable length in an elliptic orbit and the dynamics of a double pendulum with variable length in an elliptic orbit and with fixed length in a circular orbit. We obtained, for each case, the Lagrangian, the equations of motion and the Hamiltonians; we calculated the equilibrium and verified the stability of some equilibriums; for the studies using the elliptic orbit, using the Krein-Gelf'and-Lidskii Theorem and the Deprit-Hori method, we constructed curves that separate regions of stability and instability in the plane of parameters related to the pendulum length and the eccentricity of the ellipsis.

Keywords: Pendulums in orbit. Parametric stability. Deprit-Hori.

Sumário

Introdução	10
1 Pêndulo Simples	12
1.1 Equação do Movimento	13
1.2 Abordagem Hamiltoniana do problema	15
1.3 Estabilidade dos Equilíbrios	17
1.4 Normalização do Hamiltoniano para $e = 0$	18
1.5 Construção das Curvas de Fronteira	19
1.5.1 Ressonâncias	19
1.5.2 Determinação dos Coeficientes	20
1.5.3 O Método de Deprit-Hori	21
1.5.4 Coeficientes das curvas $\alpha_1^\pm$	22
1.6 Equações das Curvas	26
1.6.1 Gráfico das Curvas $\alpha_3^\mp$, $\alpha_5^\mp$ e $\alpha_7^\mp$	28
1.7 Estabilidade/Instabilidade: comparativo	30
2 Pêndulo Duplo: caso elíptico	33
2.1 Coordenadas dos vetores $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$	35
2.2 Pêndulo duplo numa órbita elíptica	36
2.3 Lagrangeano do Pêndulo Duplo	38
2.4 Equações do Movimento	40
2.5 Hamiltoniano do Pêndulo Duplo	41

2.6	Equilíbrios	43
2.7	Equilíbrio (E2): $\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi$	44
2.7.1	Normalização de $H_0^{(2)}$	46
2.7.2	Ressonâncias	48
2.7.3	Construção das Curvas: β_{01}	49
2.7.4	Construção das Curvas: β_{02}	54
2.8	Equilíbrio (E3): $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$	55
2.8.1	Normalização de $H_0^{(3)}$	57
2.8.2	Ressonâncias	59
2.8.3	Construção das Curvas: β_{01}, β_{02}	60
2.9	Gráficos das Curvas	61
3	Pêndulo Duplo: caso circular	63
3.1	Energia Potencial aproximada	63
3.2	Hamiltoniano do Sistema	64
3.2.1	Equilíbrios	65
3.2.2	Estabilidade dos Equilíbrios	66
	Considerações Finais	68
	Referências	69

Introdução

Synge [19] em 1959 estudou o comportamento de um pêndulo simples de comprimento fixo acoplado em um satélite em uma órbita circular ao redor da Terra. Utilizando um potencial aproximado, Synge obteve seis equilíbrios, quatro instáveis e dois estáveis.

Nesta tese, no Capítulo 1, seguindo a modelagem feita por Synge estudamos o comportamento, no plano da órbita, de um pêndulo simples de comprimento variável afixado em um satélite descrevendo uma órbita elíptica ao redor da Terra. Utilizamos o potencial original do problema para estudar o Lagrangeano e concomitantemente a equação do movimento, com a qual foi possível obter o Hamiltoniano. Utilizando o Hamiltoniano encontramos dois equilíbrios e verificamos a estabilidade de cada um dos equilíbrios, constatando que ambos são estáveis.

Utilizando a técnica descrita no livro de Markeev [14], a qual faz uso do Teorema de Krein-Gel'fand-Lidskii e do Método de Deprit-Hori, fizemos um estudo mais aprofundado nos equilíbrios, o que nos permitiu construir e explicitar as equações das curvas que separam regiões de estabilidade e instabilidade no plano dos parâmetros associados ao comprimento do pêndulo e a excentricidade da elipse.

Em 2012, Burov, Guerman e Kosenko já haviam feito este estudo, mas, por meio de outra técnica, construíram as curvas apenas para uma região restrita de um dos equilíbrios e no outro equilíbrio, por meio de uma análise numérica, descrevem uma região onde se obtém a estabilidade. No nosso trabalho conseguimos melhorar este resultado, pois é possível explicitar as equações das curvas e construí-las para os dois equilíbrios.

Sarychev, em 1999, fez o estudo de um pêndulo duplo numa órbita circular ao redor

da Terra. Utilizando um potencial aproximado, Sarychev calculou todos os equilíbrios possíveis, mas não verificou a estabilidade deles, apenas indicou estudos que o fizeram. Um destes estudos, de Misra, Amier e Modi, datado de 1988, verificou a estabilidade de equilíbrios do pêndulo duplo no plano da órbita.

No Capítulo 2, fizemos uma adaptação do estudo de Sarychev para analisarmos, no plano da órbita, o comportamento de um pêndulo duplo de comprimento variável numa órbita elíptica ao redor da Terra. Utilizando o potencial original do problema, calculamos o Lagrangeano e, conseqüentemente, as equações do movimento. A partir da análise das equações do movimento, definimos um Lagrangeano auxiliar para obter o Hamiltoniano do problema e utilizamos este Hamiltoniano para calcular os equilíbrios. Encontramos quatro equilíbrios e selecionamos dois deles para fazer uma análise mais aprofundada.

Verificamos que os dois equilíbrios selecionados são estáveis. Nestes equilíbrios aplicamos a técnica descrita no livro de Markeev e como resultado obtivemos algumas curvas que separam regiões de estabilidade e instabilidade no plano dos parâmetros associados ao comprimento do pêndulo duplo e a excentricidade da elipse.

No Capítulo 3, fizemos uma adaptação no potencial do pêndulo duplo obtido no Capítulo 2 com o intuito de chegar no mesmo potencial aproximado de Sarychev. Utilizando este potencial aproximado, obtivemos o Hamiltoniano para o pêndulo duplo numa órbita circular. Calculamos os equilíbrios existentes e verificamos a estabilidade de alguns, conseguindo obter os mesmos resultados de Misra, Amier e Modi [16]. Este Hamiltoniano que descreve o problema do pêndulo duplo numa órbita circular com o potencial aproximado, nos dá a possibilidade de no futuro fazer, em um dos equilíbrios, o estudo da estabilidade não-linear como aplicação do Teorema de Arnold sobre estabilidade em sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade.

Nas Considerações Finais, elencamos estudos futuros a partir do que fizemos nesta tese.

1 Pêndulo Simples

Synge [19] estudou o comportamento de um pêndulo matemático simples acoplado no centro de massa de um satélite, por meio de uma haste de peso desprezível, com comprimento fixo b , e junta universal, descrevendo uma órbita circular ao redor da terra. Usando uma aproximação da energia potencial, Synge encontrou 6 equilíbrios, 2 estáveis (no eixo e_Z) e 4 instáveis (2 no eixo e_X e os outros 2 no eixo e_Y). Tempos depois, Blitzer [3] fez um melhoramento, acoplando o pêndulo a uma distância $\mathbf{h}$ do centro de massa do satélite.

Utilizamos a mesma modelagem feita por Synge ao estudarmos o comportamento, no plano da órbita, de um pêndulo matemático simples numa órbita elíptica com a distância da Terra ao satélite que está em órbita dada por r , com

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad (1.1)$$

onde p é o parâmetro da órbita, e é a excentricidade e ν é a anomalia verdadeira. Utilizamos a energia potencial original, focamos em uma visão Hamiltoniana do problema e consideramos a haste do pêndulo de comprimento variável, $b = r\beta$, β é uma constante. Nestas configurações, encontramos 2 equilíbrios no eixo e_Z , ambos estáveis para determinados valores do parâmetro β .

Seguindo o algoritmo descrito por Markeev [14], usando o método de Deprit-Hori, construímos curvas no plano $\alpha \times e$ (α é um parâmetro que tem relação com β) que separam regiões de estabilidade e instabilidade para as posições de equilíbrio do pêndulo.

Este tipo de pêndulo com haste de comprimento variável também foi estudado por Burov, Kosenko e Guerman [4]–[5] e, como eles dizem, uma possível aplicação prática é a construção de um elevador Lua-Terra.

1.1 Equação do Movimento

Assumimos que a haste do pêndulo tem massa desprezível com relação a do satélite e que o satélite tem massa desprezível em relação a da Terra. A Terra está no ponto O_1 (Figura 1.1).

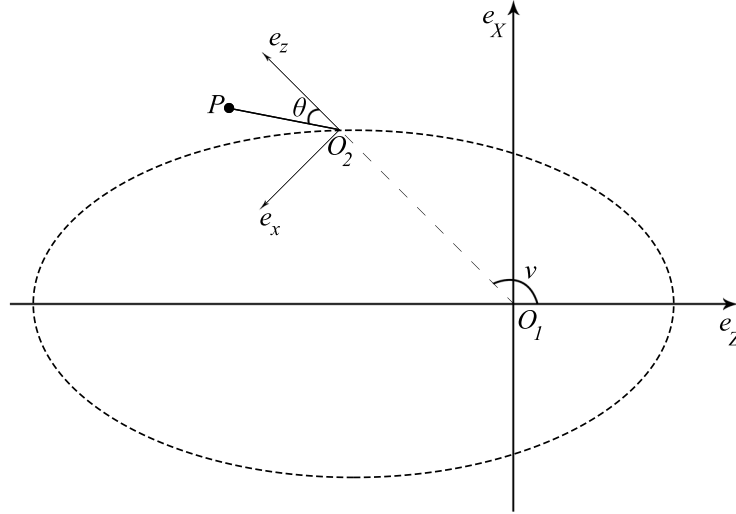


Figura 1.1: Pêndulo simples em órbita elíptica. Plano da órbita.

A posição do pêndulo é $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + A\rho$ e é representada pelo segmento O_1P , onde $\mathbf{R}_0 = r \sin \nu \mathbf{e}_X + r \cos \nu \mathbf{e}_Z$ é o segmento O_1O_2 , $\rho = (b \sin \theta) \mathbf{e}_x + (b \cos \theta) \mathbf{e}_z$ é a haste do pêndulo, segmento O_2P , e

$$A = \begin{pmatrix} \cos \nu & 0 & \sin \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \nu & 0 & \cos \nu \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

é a matriz que leva o referencial móvel $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z$ no referencial inercial $\mathbf{e}_X \mathbf{e}_Y \mathbf{e}_Z$.

A energia potencial do pêndulo é

$$\Pi = -\frac{\kappa m^*}{\|\mathbf{R}\|} = -\frac{\kappa m^*}{r \sqrt{1 + 2\beta \cos \theta + \beta^2}}. \quad (1.3)$$

onde m^* é a massa do pêndulo que se encontra no ponto P , κ é o parâmetro gravitacional associado ao centro atrator, $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e lembramos que $\beta > 0$ é uma constante associada ao comprimento do pêndulo.

Seja $\mathbf{w}$ a velocidade angular associado ao movimento orbital,

$$\mathbf{w} = \dot{\nu} \mathbf{e}_Y, \quad \dot{\nu} = \frac{n(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.4)$$

onde o ponto denota a derivada com respeito ao tempo t e n denota o movimento médio.

Para calcular a velocidade $\mathbf{v}$, seguindo [15], utilizamos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \times A\rho + A\dot{\rho}, \quad (1.5)$$

onde $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{R}}_0$.

A expressão da energia cinética é

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} m^* \|\mathbf{v}\|^2 &= \frac{1}{2} m^* \left\{ [\dot{r}\beta \sin \theta + r\beta\dot{\theta} \cos \theta + r\dot{\nu}(1 + \beta \cos \theta)]^2 \right. \\ &\quad \left. + [\dot{r}(1 + \beta \cos \theta) - r\beta(\dot{\theta} + \dot{\nu}) \sin \theta]^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

logo,

$$T = m^* \left[(\dot{r}^2 + r^2\dot{\nu}^2 + r^2\dot{\nu}\dot{\theta})\beta \cos \theta + r^2\dot{\nu}\dot{\theta}\beta^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2\beta^2 - r\dot{r}\dot{\theta}\beta \sin \theta \right]. \quad (1.7)$$

Em (1.7), omitimos os termos que não dependem de θ e $\dot{\theta}$, uma vez que eles não tem influência na equação do movimento (1.9).

O Lagrangeano é

$$L = T - \Pi \quad (1.8)$$

e a equação do movimento associada

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (1.9)$$

nos dá

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + \frac{1}{\beta} \left[r\dot{\nu}^2 - \ddot{r} - \frac{\kappa}{r^2(\sqrt{1 + 2\beta \cos \theta + \beta^2})^3} \right] \sin \theta = 0. \quad (1.10)$$

Escolhendo ν como novo tempo, utilizando as expressões de $\dot{\nu}$ (1.4), as relações

$$\frac{d}{dt} = \dot{\nu} \frac{d}{d\nu}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \dot{\nu}^2 \frac{d^2}{d\nu^2} - \frac{2n\dot{\nu}(1 + e \cos \nu)e \sin \nu}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{d\nu} \quad (1.11)$$

e a fórmula (1.12)

$$\frac{\kappa}{r^3} = \frac{n^2(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \quad (1.12)$$

temos da equação do movimento (1.10),

$$\beta^2 r^2 \dot{\nu}^2 \theta'' - \beta r \left(-\dot{\nu}^2 r \frac{1}{1 + e \cos \nu} \right) \sin \theta - \frac{\kappa}{r} \frac{\beta \sin \theta}{\sqrt{1 + 2\beta \cos \theta + \beta^2}} = 0$$

ou seja, a equação do movimento no novo tempo ν (1.13),

$$\theta'' + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{1}{(\sqrt{1 + 2\beta \cos \theta + \beta^2})^3} \right] \sin \theta = 0. \quad (1.13)$$

A linha denota a derivada com relação ao novo tempo ν . Esta equação (1.13) é a mesma obtida por [4] (ver equação (11) em [4] quando $\ell = r\beta$).

1.2 Abordagem Hamiltoniana do problema

A equação do movimento (1.13) pode ser escrita como um sistema Hamiltoniano de equações

$$\theta' = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad p'_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

basta fazer $p_\theta = \theta'$ para obter a função Hamiltoniana

$$H(p_\theta, \theta) = \frac{1}{2} p_\theta^2 - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{1}{\beta} \cos \theta + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\beta \cos \theta + \beta^2}} \right). \quad (1.14)$$

O sistema com Hamiltoniano (1.14) tem soluções particulares para as quais p_θ e θ satisfazem as relações (E1) e (E2) abaixo.

$$(E1) \quad p_\theta = 0, \quad \theta = 0. \quad (E2) \quad p_\theta = 0, \quad \theta = \pi.$$

Estas soluções estão associadas com as seguintes posições de equilíbrio sobre o eixo $\mathbf{e}_z$ (Figura 1.2): solução (E1) corresponde ao pêndulo apontado na direção contrária à Terra, e solução (E2) corresponde ao pêndulo apontado na direção da Terra.

Definindo

$$(E1) \quad p_\theta = y, \quad \theta = x. \quad (E2) \quad p_\theta = y, \quad \theta = \pi + x.$$

obtemos os Hamiltonianos perturbados de cada solução. Usamos esta terminologia pelo fato de que o Hamiltoniano está expresso nas variáveis x e y que representam o desvio do ponto desde o equilíbrio, isto é, uma perturbação do equilíbrio.

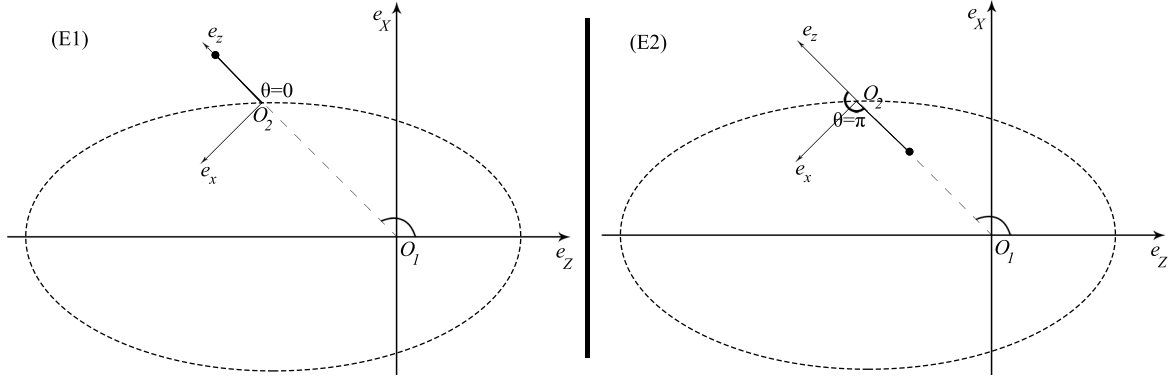


Figura 1.2: Posições dos equilíbrios (E1) e (E2) do pêndulo simples.

Para solução (E1), a parte quadrática do Hamiltoniano perturbado H (1.14) é

$$H_2^{(E1)} = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left[\frac{\beta^2 + 3\beta + 3}{(1 + \beta)^3} \right] \frac{1}{2}x^2, \beta > 0. \quad (1.15)$$

Para solução (E2), a parte quadrática do Hamiltoniano perturbado H (1.14) é

$$H_2^{(E2)} = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left[\frac{\beta^2 - 3\beta + 3}{(1 - \beta)^3} \right] \frac{1}{2}x^2, 0 < \beta < 1. \quad (1.16)$$

Para o equilíbrio (E1), não existe restrição para o valor de β . Para o equilíbrio (E2), β não pode ser maior que 1, porque seria o caso em que o pêndulo passaria pela Terra, que se encontra no ponto O_1 (Figura 1.2).

A diferença entre os Hamiltonianos $H_2^{(E1)}$ e $H_2^{(E2)}$ está na parte entre colchetes das suas expressões, então assumindo que β pode ser positivo ou negativo, é suficiente considerarmos apenas um tipo de Hamiltoniano perturbado. Iremos considerar o Hamiltoniano perturbado associado a solução (E1).

Portanto, o caso em que $\beta > 0$ corresponde ao equilíbrio (E1) e o caso $-1 < \beta < 0$ corresponde ao equilíbrio (E2).

Seja α a seguinte função de β ,

$$\alpha = \frac{\beta^2 + 3\beta + 3}{(1 + \beta)^3}, \quad \beta > -1. \quad (1.17)$$

A função α é uma função decrescente.

Logo, consideramos o seguinte Hamiltoniano perturbado

$$H_2 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\alpha}{2(1 + e \cos \nu)}x^2, \alpha > 0, \quad (1.18)$$

onde $0 < \alpha < 3$, se $\beta > 0$ e, $\alpha > 3$, se $-1 < \beta < 0$.

Expandimos o Hamiltoniano H_2 (1.18) em séries de potência da excentricidade e , temos

$$H_2(x, y, \nu, \alpha, e) = H_2^0(x, y, \alpha) + eH_2^1(x, y, \nu, \alpha) + e^2H_2^2(x, y, \nu, \alpha) + \cdots, \quad (1.19)$$

onde

$$H_2^0 = \frac{1}{2}(y^2 + \alpha x^2), \quad (1.20)$$

$$H_2^j = (-1)^j \cos^j \nu x^2, j \geq 1. \quad (1.21)$$

1.3 Estabilidade dos Equilíbrios

O caso limite $e = 0$ corresponde ao pêndulo em uma órbita circular. Neste caso, o polinômio característico de

$$JG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

é

$$\lambda^2 + \alpha = 0, \quad (1.23)$$

onde G é a matriz Hessiana de H_2^0 (1.20) e

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\alpha > 0$, então as raízes do polinômio característico (1.23), $\pm i\sqrt{\alpha}$, são imaginárias puras e o pêndulo apontando no sentido contrário à Terra bem como o pêndulo apontando na direção da Terra são estáveis no sentido de Lyapunov.

1.4 Normalização do Hamiltoniano para $e = 0$

A normalização do Hamiltoniano quadrático (1.20) é simples e poderíamos dizer que ela é efetuada pela transformação simplética (1.25) descrita abaixo. Mas, vamos normalizar utilizando o método geral como descrito na Seção 2.7.1, ver também [14], ou artigo [8], ou dissertação [18].

O autovetor associado a $i\sqrt{\alpha}$ da matriz JG (1.22) é

$$\begin{aligned} v &= \left(-\frac{i}{\sqrt{\alpha}}, 1 \right) \\ v &= (0, 1) + i \left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, 0 \right) \\ v &= r + is. \end{aligned}$$

Assim, $(r, Js) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, de onde deduzimos

$$\delta = \text{sinal}(r, Js) = +, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{|(r, Js)|}} = \alpha^{\frac{1}{4}}.$$

Temos a seguinte matriz simplética

$$N = \text{Col} \begin{pmatrix} -\kappa s & \delta \kappa r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & \alpha^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

a qual nos dá a seguinte mudança canônica de variáveis $x, y \rightarrow \xi, \eta$ definida pelas fórmulas

$$x = \alpha^{-\frac{1}{4}}\xi, \quad y = \alpha^{\frac{1}{4}}\eta. \quad (1.25)$$

A notação $\text{Col}(a_1 \cdots a_n)$ denota a matriz cujas colunas são $a_1, \dots, a_n$.

A mudança de variáveis dada por (1.25) leva o Hamiltoniano (1.19) em

$$H_2(\xi, \eta, \nu, \alpha, e) = \tilde{H}_2^0(\xi, \eta, \alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m}{m!} \tilde{H}_2^m(\xi, \eta, \nu, \alpha), \quad (1.26)$$

e, em particular, o Hamiltoniano (1.20) à forma normal

$$\tilde{H}_2^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha} (\eta^2 + \xi^2). \quad (1.27)$$

1.5 Construção das Curvas de Fronteira

Citamos como referência para melhor acompanhar esta seção, a dissertação [18] que faz um estudo detalhado do algoritmo descrito em [14] para a construção das curvas de fronteira, que separam as regiões de estabilidade e instabilidade, para o caso de sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade.

1.5.1 Ressonâncias

Segundo o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, se $2\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Z}$, então sistemas com Hamiltoniano (1.26) com $\alpha > 0$ são estáveis para pequenos valores de e , ou seja, o sistema é parametricamente estável.

Ainda de acordo com o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii, para sistemas com Hamiltoniano (1.26) com $\alpha > 0$, os pontos geradores das curvas de fronteira, que dividem o plano $\alpha \times e$ em regiões de estabilidade e instabilidade, são os pontos do eixo $e = 0$ nos quais

$$2\sqrt{\alpha} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\},$$

por simplicidade estes valores serão chamados de ressonâncias. Estes valores de α são enumeráveis e satisfazem

$$\alpha = \frac{\ell^2}{4}, \quad \ell \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.28)$$

As primeiras sete ressonâncias (em ordem crescente) são

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= \frac{1}{4}, & \alpha_{02} &= 1, & \alpha_{03} &= \frac{9}{4}, \\ \alpha_{04} &= 4, & \alpha_{05} &= \frac{25}{4}, & \alpha_{06} &= 9, & \alpha_{07} &= \frac{49}{4}. \end{aligned}$$

A título de informação, enunciamos o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii em sua forma geral abaixo

Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii Consideremos um sistema linear com Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \sigma_{\ell}(\xi_{\ell}^2 + \eta_{\ell}^2) + e\mathbf{H}_1 + e^2\mathbf{H}_2 + \dots,$$

onde $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots$ são formas quadráticas nas variáveis $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ com coeficientes contínuos e 2π -periódicos em ν . Então, para e suficientemente pequeno, o Hamiltoniano $\mathbf{H}$ é estável se, e somente se, as quantidades $\sigma_j = \delta_j \omega_j$, onde $\delta_j = \pm 1$, não estão relacionadas pela igualdade

$$\sigma_l + \sigma_k = N, \quad k, l = 1, 2, \dots, n; \quad N = \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.5.2 Determinação dos Coeficientes

Vamos determinar as equações das curvas de fronteira que emanam das ressonâncias. Escreveremos as curvas na forma:

$$\alpha_\ell^\pm = \alpha_{0\ell} + \alpha_{1\ell}e + \alpha_{2\ell}e^2 + \alpha_{3\ell}e^3 + \dots \quad (1.29)$$

Estas curvas determinam as regiões de estabilidade e instabilidade no plano $\alpha \times e$, $0 < e \ll 1$, que emanam dos pontos $(\alpha_{0\ell}, 0)$.

Seja

$$\alpha = \alpha_{0\ell} + \alpha_{1\ell}e + \alpha_{2\ell}e^2 + \alpha_{3\ell}e^3 + \dots \quad (1.30)$$

Substituímos a expressão (1.30) de α em (1.26), expandimos em e e reorganizamos para obter

$$H_2(\xi, \eta, \nu, \alpha_{0\ell}, \alpha_{1\ell}, \dots, \alpha_{m\ell}, \dots, e) = \hat{H}_2^0(\xi, \eta, \alpha_{0\ell}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m}{m!} \hat{H}_2^m(\xi, \eta, \nu, \alpha_{1\ell}, \dots, \alpha_{m\ell}), \quad (1.31)$$

onde

$$\hat{H}_2^0(\xi, \eta, \alpha_{0\ell}) = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_{0\ell}} (\eta^2 + \xi^2). \quad (1.32)$$

Para cada valor $\alpha_{0\ell}$, no Hamiltoniano (1.31) fazemos a mudança de variáveis $\xi, \eta \rightarrow x_1, y_1$ dada pelas fórmulas

$$\xi = \cos \frac{\ell\nu}{2} x_1 + \sin \frac{\ell\nu}{2} y_1, \quad \eta = -\sin \frac{\ell\nu}{2} x_1 + \cos \frac{\ell\nu}{2} y_1. \quad (1.33)$$

Então, aplicamos o método de Deprit-Hori e obtemos um Hamiltoniano autônomo K . A partir deste Hamiltoniano autônomo K será possível determinar cada coeficiente

$$\alpha_{1\ell}, \alpha_{2\ell}, \alpha_{3\ell} \dots \quad (1.34)$$

Obtivemos os 10 primeiros coeficientes de cada curva. Detalhamos como calcular os coeficientes das curvas $\alpha_1^\pm$. Para as demais curvas o procedimento é análogo.

1.5.3 O Método de Deprit-Hori

Consideremos um sistema Hamiltoniano de equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.35)$$

com Hamiltoniano

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t, e) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^m}{m!} H_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (1.36)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ são os vetores coordenada e momento, respectivamente, e e é um pequeno parâmetro ($0 < e \ll 1$).

Fazemos uma transformação simplética

$$\mathbf{x}, \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{y}, \mathbf{Y} \quad (1.37)$$

que leva o Hamiltoniano (1.36) à forma

$$K(\mathbf{y}, \mathbf{Y}, e) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^m}{m!} K_m(\mathbf{y}, \mathbf{Y}), \quad (1.38)$$

que dará os valores dos coeficientes (1.34) das curvas (1.29) que separam as regiões de estabilidade/instabilidade.

Para obtermos o Hamiltoniano autônomo K , utilizamos o método de Deprit-Hori que está baseado no fato de que a transformação no espaço de fase definida pelo movimento de um sistema Hamiltoniano é canônica. Neste método, ver [14], ou Capítulo 3 de [18], ou ainda o artigo [8], a função geradora $W(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)$ tomada como função Hamiltoniana, conduz à definição da transformação simplética (1.37).

O método dá as seguintes relações de recorrência que determinam os polinômios homogêneos K_m do Hamiltoniano K .

$$K_0 = H_0, \quad (1.39)$$

$$K_m = H_m + \sum_{j=1}^{m-1} (C_{m-1}^{j-1} L_j H_{m-j} + C_{m-1}^j K_{j,m-j}) - \frac{DW_m}{Dt}, \quad (1.40)$$

onde

$$\frac{DW_m}{Dt} = \frac{\partial W_m}{\partial t} - L_m H_0, \quad (1.41)$$

$$K_{j,i} = L_j K_i - \sum_{s=1}^{j-1} C_{j-1}^{s-1} L_s K_{j-s,i}, \quad (1.42)$$

$$C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!} \quad (1.43)$$

e $L_i f$ denota o colchete de Poisson de f e W_i , a saber

$$L_i f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{Y}} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}}, \frac{\partial W_i}{\partial \mathbf{y}} \right). \quad (1.44)$$

Resolvendo as equações que surgem das fórmulas (1.39) e (1.40) obtemos o Hamiltoniano K (1.38).

1.5.4 Coeficientes das curvas $\alpha_1^\pm$

Vamos determinar os coeficientes $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{91}, \alpha_{101}$ que definem as curvas α_1^+ e α_1^- .

O valor de α_{01} já é conhecido, $\alpha_{01} = \frac{1}{4}$ e, neste caso, $2\sqrt{\alpha_{01}} = 1$.

Fazemos a mudança de variáveis $\xi, \eta \rightarrow x, X$ dada pelas fórmulas

$$\xi = \cos \frac{\nu}{2} x + \sin \frac{\nu}{2} X, \quad \eta = -\sin \frac{\nu}{2} x + \cos \frac{\nu}{2} X. \quad (1.45)$$

Esta mudança, ver em Cabral [6] o complemento do Capítulo 4 do livro da referência [14], é dada pela seguinte função geradora dependente do tempo ν .

$$S(\xi, X) = -\frac{1}{2}(\xi^2 + X^2) \frac{\sin \frac{\nu}{2}}{\cos \frac{\nu}{2}} + \frac{\xi X}{\cos \frac{\nu}{2}}, \quad (1.46)$$

cuja derivada no tempo é

$$\frac{\partial S}{\partial \nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_{01}}(x^2 + X^2). \quad (1.47)$$

Assim, após esta mudança de variáveis, o Hamiltoniano (1.31) se torna

$$H_2 = \mathcal{H}_2^0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m}{m!} \mathcal{H}_2^m, \quad (1.48)$$

onde

$$\mathcal{H}_2^0 = 0. \quad (1.49)$$

Logo, com o Hamiltoniano (1.48) estamos aptos para iniciar o procedimento de Deprit-Hori descrito de forma resumida na Subseção 1.5.3.

Da fórmula (1.39), temos que $K_0 = 0$. Para $m = 1$, da fórmula (1.40), temos

$$K_1 = \mathcal{H}_2^1 - \frac{\partial W_1}{\partial \nu} \quad (1.50)$$

e, para obter K_1 e W_1 , calculamos

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_2^1(y, Y, \nu) d\nu, \quad W_1 = \int (\mathcal{H}_2^1 - K_1) d\nu. \quad (1.51)$$

De modo análogo, repetimos o procedimento para $m = 2$ e assim por diante.

Portanto, obtemos o Hamiltoniano autônomo K ,

$$K = K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m}{m!} K_m, \quad (1.52)$$

onde

$$\begin{aligned} K_0 &= 0, \\ K_1 &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{8} + \alpha_{11} \right) y^2 + \left(\frac{1}{8} + \alpha_{11} \right) Y^2 \right], \\ K_2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{15}{64} - \frac{\alpha_{11}}{2} - 2\alpha_{11}^2 + 2\alpha_{12} \right) y^2 + \left(\frac{15}{64} + \frac{\alpha_{11}}{2} - 2\alpha_{11}^2 + 2\alpha_{12} \right) Y^2 \right] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.53)$$

O Hamiltoniano K (1.52) pode ser escrito na forma

$$K = k_{20}y^2 + k_{11}yY + k_{02}Y^2, \quad (1.54)$$

com

$$k_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m}{m!} k_{ij}^{(m)}, \quad k_{ij}^{(m)} \text{ constante.} \quad (1.55)$$

Como a equação característica de

$$JD^2K = \begin{pmatrix} -k_{11} & -2k_{02} \\ 2k_{20} & k_{11} \end{pmatrix}$$

é

$$\lambda^2 - (k_{11}^2 - 4k_{20}k_{02}) = 0$$

a região de estabilidade é definida por $k_{11}^2 - 4k_{20}k_{02} < 0$, cuja fronteira é

$$k_{11}^2 = 4k_{20}k_{02}. \quad (1.56)$$

Igualando nesta identidade (1.56) os termos de mesma potência em e podemos sucessivamente calcular os coeficientes $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots$

De acordo com as equação (1.56), as equações de segunda e terceira ordens, são respectivamente

$$4 \left(-\frac{1}{256} + \frac{\alpha_{11}^2}{4} \right) = 0, \quad (1.57)$$

$$4 \left(\frac{11\alpha_{11}}{256} - \frac{\alpha_{11}^3}{2} + \frac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{2} \right) = 0. \quad (1.58)$$

Resolvendo sucessivamente as equações (1.57), (1.58) e as equações de ordem superior em e , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \pm \frac{1}{8}, \\ \alpha_{12} &= -\frac{9}{128}, \\ \alpha_{13} &= \mp \frac{9}{2048}, \\ \alpha_{14} &= -\frac{603}{32768}, \\ \alpha_{15} &= \mp \frac{1341}{524288}, \\ \alpha_{16} &= -\frac{159687}{16777216}, \\ \alpha_{17} &= \mp \frac{957681}{536870912}, \\ \alpha_{18} &= -\frac{1641123}{268435456}, \\ \alpha_{19} &= \mp \frac{186937137}{137438953472}, \\ \alpha_{110} &= -\frac{4815500769}{1099511627776}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Portanto, temos as curvas

$$\begin{aligned} \alpha_1^- &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8}e - \frac{9}{128}e^2 + \frac{9}{2048}e^3 - \frac{603}{32768}e^4 + \frac{1341}{524288}e^5 - \frac{159687}{16777216}e^6 \\ &\quad + \frac{957681}{536870912}e^7 - \frac{1641123}{268435456}e^8 + \frac{186937137}{137438953472}e^9 \\ &\quad - \frac{4815500769}{1099511627776}e^{10} \end{aligned} \quad (1.60)$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha_1^+ = & -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e - \frac{9}{128}e^2 - \frac{9}{2048}e^3 - \frac{603}{32768}e^4 - \frac{1341}{524288}e^5 - \frac{159687}{16777216}e^6 \\
& - \frac{957681}{536870912}e^7 - \frac{1641123}{268435456}e^8 - \frac{186937137}{137438953472}e^9 \\
& - \frac{4815500769}{1099511627776}e^{10}.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Gráficos das curvas α_1^- e α_1^+ no plano $\alpha \times e$ no intervalo $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, para $0 < e < 1$, são exibidos na Figura 1.3.

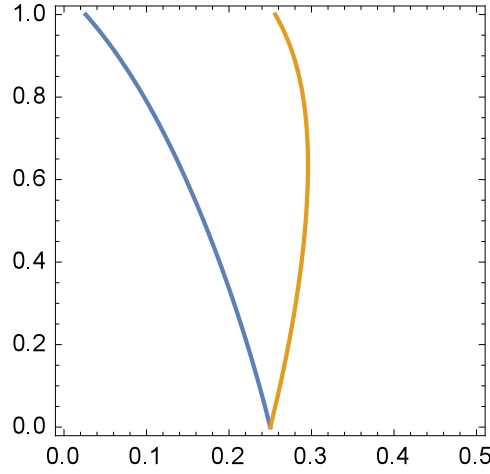


Figura 1.3: Gráficos das curvas α_1^- (azul) e α_1^+ (amarela) no plano $\alpha \times e$.

Portanto, os sistemas para os quais o ponto (α, e) está localizado entre as duas curvas de fronteira α_1^- e α_1^+ são instáveis, enquanto que aqueles para os quais o ponto (α, e) está à esquerda da curva α_1^- (azul) ou à direita da curva α_1^+ (amarela) são estáveis, desde que não pertençam a regiões de instabilidade de outras ressonâncias, ver Figura 1.4.

1.6 Equações das Curvas

Explicitamos a seguir, até ordem e^6 ou e^7 , as equações das curvas de fronteira, ordenadas da esquerda para direita no plano $\alpha \times e$ (Figura 1.4):

$$\alpha_1^- = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}e - \frac{9}{128}e^2 + \frac{9}{2048}e^3 - \frac{603}{32768}e^4 + \frac{1341}{524288}e^5 + O(e^6), \quad (1.62)$$

$$\alpha_1^+ = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e - \frac{9}{128}e^2 - \frac{9}{2048}e^3 - \frac{603}{32768}e^4 - \frac{1341}{524288}e^5 + O(e^6),$$

$$\alpha_2 = 1 - \frac{1}{3}e^2 - \frac{19}{216}e^4 - \frac{889}{19440}e^6 + O(e^7),$$

$$\alpha_3^- = \frac{9}{4} - \frac{207}{256}e^2 - \frac{9}{2048}e^3 - \frac{56151}{262144}e^4 - \frac{5139}{2097152}e^5 + O(e^6),$$

$$\alpha_3^+ = \frac{9}{4} - \frac{207}{256}e^2 + \frac{9}{2048}e^3 - \frac{56151}{262144}e^4 + \frac{5139}{2097152}e^5 + O(e^6),$$

$$\alpha_4 = 4 - \frac{22}{15}e^2 - \frac{1313}{3375}e^4 - \frac{2157091}{10631250}e^6 + O(e^7), \quad (1.63)$$

$$\alpha_5^- = \frac{25}{4} - \frac{1775}{768}e^2 - \frac{4341475}{7077888}e^4 + \frac{225}{2097152}e^5 - \frac{10437896525}{32614907904}e^6 + O(e^7),$$

$$\alpha_5^+ = \frac{25}{4} - \frac{1775}{768}e^2 - \frac{4341475}{7077888}e^4 - \frac{225}{2097152}e^5 - \frac{10437896525}{32614907904}e^6 + O(e^7),$$

$$\alpha_6 = 9 - \frac{117}{35}e^2 - \frac{304389}{343000}e^4 - \frac{389172579}{840350000}e^6 + O(e^7),$$

$$\alpha_7^\mp = \frac{49}{4} - \frac{7007}{1536}e^2 - \frac{68583781}{56623104}e^4 - \frac{3298824658927}{5218385264640}e^6 + O(e^7).$$

Não encontramos a divisão das curvas α_2, α_4 e α_6 em termos até a ordem e^{10} .

As curvas α_7^- e α_7^+ irão se diferenciar uma da outra a partir dos termos de ordem e^7 . Seguem abaixo os termos das curvas $\alpha_7^\mp$ a partir da ordem e^7 :

$$\begin{aligned} \alpha_{77} &= \mp \frac{1225}{536870912}, \\ \alpha_{78} &= - \frac{157227628880890477}{384741108791377920}, \\ \alpha_{79} &= \mp \frac{9093175}{2199023255552}, \\ \alpha_{710} &= - \frac{2086269254499059082649}{7091548117242677821440}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

As curvas α_3^- e α_3^+ , α_5^- e α_5^+ , α_7^- e α_7^+ estão muito próximas uma da outra de maneira que, na escala do gráfico (Figura 1.4), não é possível fazer a distinção entre cada par de curvas α_ℓ^- e α_ℓ^+ ($\ell = 3, 5, 7$).

Um fato curioso é que as curvas $\alpha_1^\mp$ referentes à ressonância $2\sqrt{\alpha_{01}} = 1$ passam a se diferenciar uma da outra a partir do termo e , fato semelhante ocorre com as curvas $\alpha_3^\mp, \alpha_5^\mp$ e $\alpha_7^\mp$ que são referentes as ressonâncias $2\sqrt{\alpha_{03}} = 3, 2\sqrt{\alpha_{05}} = 5$ e $2\sqrt{\alpha_{07}} = 7$, respectivamente, e passam a se diferenciar uma da outra a partir do termo e^3, e^5 e e^7 , respectivamente. No artigo [12], Kholostova também nota um padrão para as curvas que ela obtém no problema específico estudado por ela.

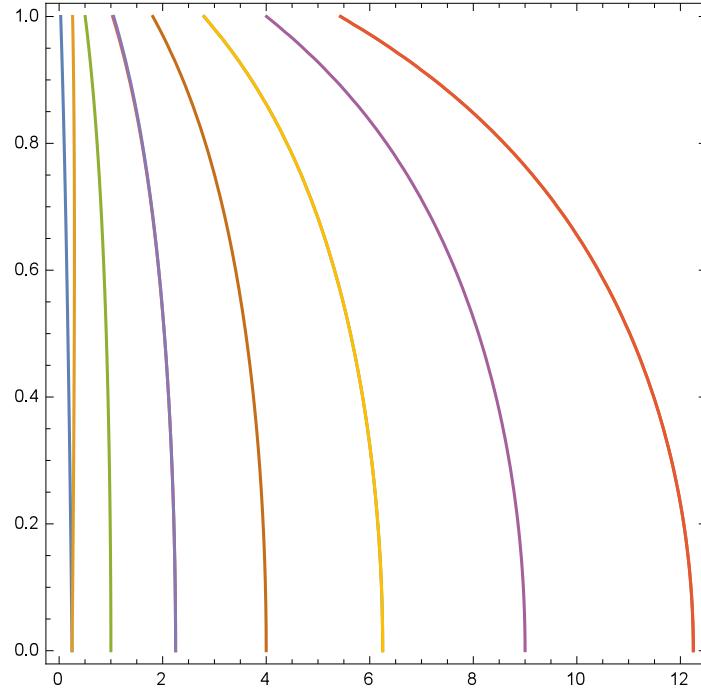


Figura 1.4: Gráficos das curvas α_1^- a α_7^+ , ordenadas da esquerda para a direita. Plano $\alpha \times e$, $0 < \alpha \leq \frac{49}{4}, 0 \leq e \leq 1$.

1.6.1 Gráfico das Curvas $\alpha_3^\mp$, $\alpha_5^\mp$ e $\alpha_7^\mp$

Apresentamos os gráficos das curvas $\alpha_3^\mp$, $\alpha_5^\mp$ e $\alpha_7^\mp$ numa escala onde é possível distinguí-las.

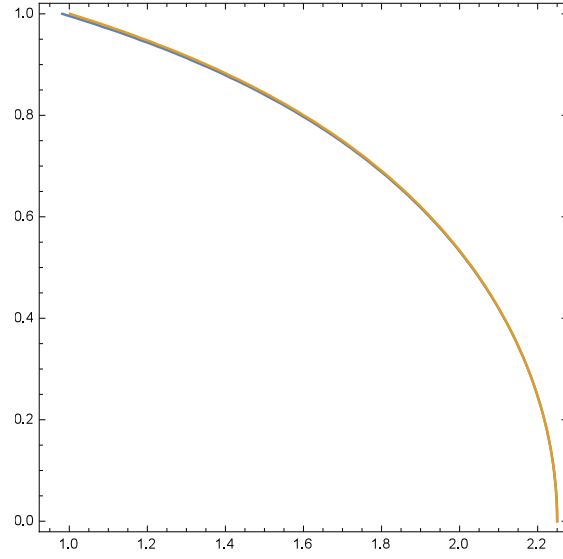


Figura 1.5: Gráficos das curvas α_3^- (azul) e α_3^+ (amarela), $0 \leq e < 1$.

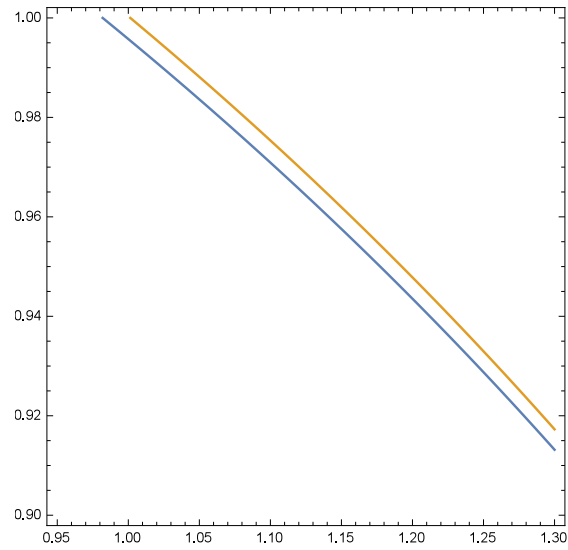


Figura 1.6: Gráficos das curvas α_3^- (azul) e α_3^+ (amarela), $0.9 \leq e < 1$.

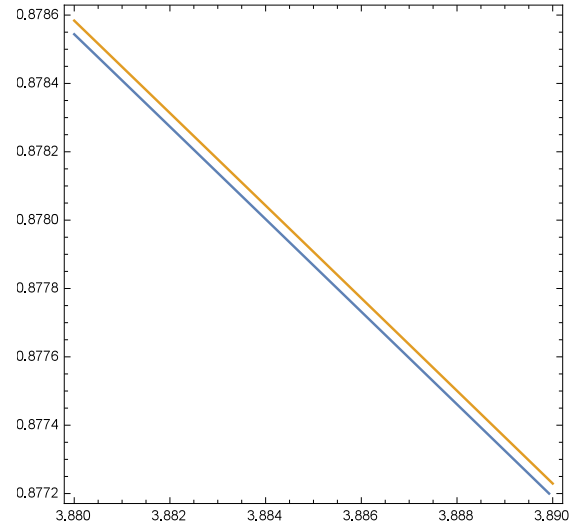


Figura 1.7: Gráficos das curvas α_5^- (azul) a α_5^+ (amarela).

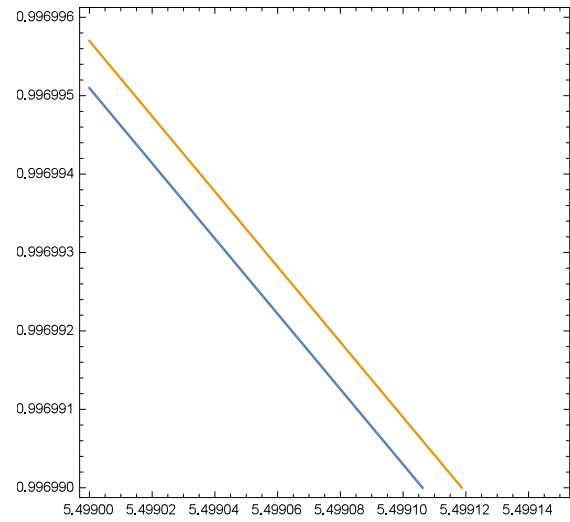


Figura 1.8: Gráficos das curvas α_7^- (azul) a α_7^+ (amarela).

1.7 Estabilidade/Instabilidade: comparativo

No estudo de Burov, Guerman e Kosenko [4], utilizando outros métodos, eles exibem regiões de estabilidade e instabilidade para o caso de $0 < \alpha < 0.5$ (Figura 1.9 – imagem extraída do artigo [4]). Ressaltamos que o que chamamos de parâmetro α , eles denominam por K , e o que chamamos de β , eles denominam por η ; o plano que eles tratam é $e \times K$. A região de instabilidade apresentada por eles, se assemelha com a região que obtivemos delimitada pelas curvas α_1^- e α_1^+ , no mesmo intervalo $0 < \alpha < 0.5$. Não afirmamos que a região é igual, porque as equações das curvas da região obtida em [4] não são explicitadas. Fizemos uma rotação e espelhamento na figura do artigo [4] para melhor visualização (Figura 1.10).

Em [4], pelo fato da equação do movimento obtida a partir do Hamiltoniano (1.15) ser uma equação de Hill, a região de estabilidade delimitada pela cor cinza (Figura 1.9), refere-se ao teste de Zhukovsky aplicável a equações de Hill, no qual diz que

Se $\frac{n^2\pi^2}{T^2} < p(\nu) < \frac{(n+1)\pi^2}{T^2}$ ($n = 0, 1, \dots$), então a solução nula é estável no sentido de Lyapunov.

Mais precisamente, neste caso considera-se $p(\nu) = \frac{\beta^2+3\beta+3}{(1+\beta)^3} \frac{1}{1+e\cos\nu}$, $T = 2\pi$ e as regiões cinzas correspondem a verificação destas desigualdades para os casos em que n é igual a 1 e 2. Mais detalhes sobre este teste no Capítulo VIII do livro de Yakubovich e Starzhinsky [22].

Um ponto que queremos destacar é a abrangência que conseguimos para o parâmetro α . No artigo [4], α varia no intervalo $0 < \alpha < 0.5$ e no nosso estudo fizemos $0 < \alpha < \frac{49}{4}$, mas esta análise pode se estender para qualquer valor de $\alpha > 0$. Para valores de $\alpha > 3$, Burov, Guerman e Kosenko [4] relatam que, pelo fato de β ser limitado nesta condição, então é mais conveniente fazer o estudo com β ao invés de α e informam que, no estudo numérico feito por eles, tem-se estabilidade nos intervalos de $0 \leq \beta \leq 0.8$ e $0 \leq e \leq 0.9$. Na tabela abaixo está um comparativo entre os valores de α e β estudados nesta tese.

α	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9	$\frac{49}{4}$
β	3.97	0.84	0.16	-0.14	-0.30	-0.40	-0.48

Lembramos que o intervalo $0 < \alpha < 3$ corresponde ao equilíbrio no qual o pêndulo aponta no sentido contrário à Terra. Se $\alpha \rightarrow 3^-$, então $\beta \rightarrow 0$; e, se $\alpha \rightarrow 0$, então $\beta \rightarrow +\infty$.

O intervalo $\alpha > 3$ corresponde ao equilíbrio no qual o pêndulo aponta no sentido da Terra. Se $\alpha \rightarrow 3^+$, então $\beta \rightarrow 0$; e, se $\alpha \rightarrow +\infty$, então $\beta \rightarrow -1$.

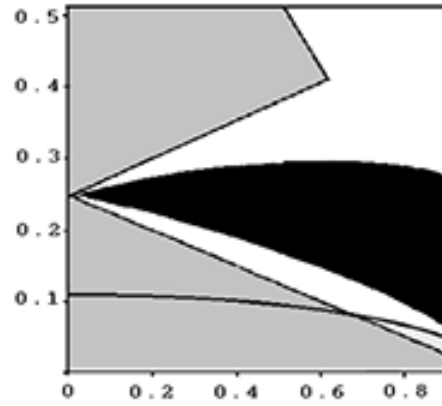


Figura 1.9: Regiões de instabilidade (preto) e estabilidade (branco e cinza) encontrada no artigo [4].

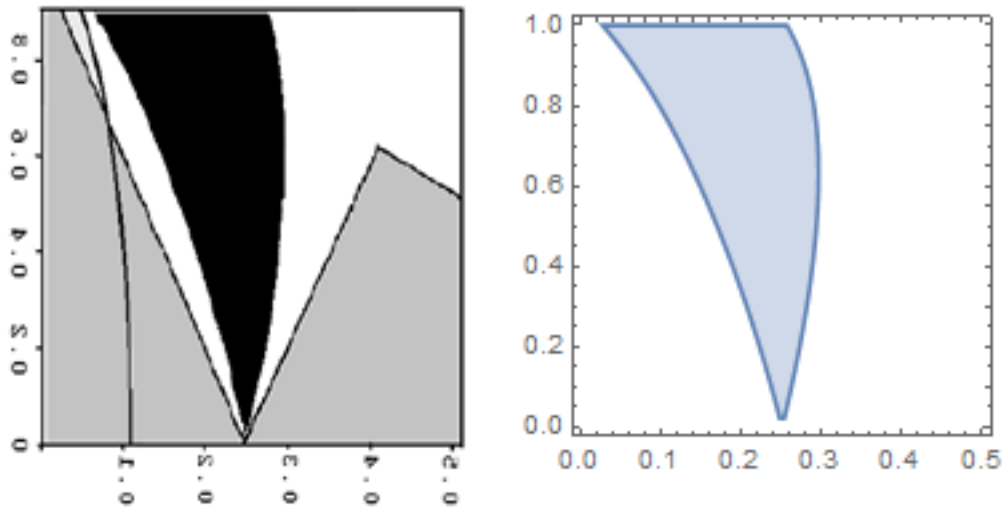


Figura 1.10: Comparativo entre as regiões de instabilidade. Na esquerda, região de instabilidade (preto) obtida em [4]; na direita região de instabilidade (azul) delimitada pelas curvas α_1^- e α_1^+ .

2 Pêndulo Duplo: caso elíptico

Sarychev [17] considerou o movimento de um sistema de três massas (P_1 de massa m_1 , P de massa m_3 , e O_2 de massa m_2) conectadas por duas hastes rígidas de massa desprezível P_1P de comprimento l_1 e PO_2 de comprimento l_2 , cujo centro de massa, O , descreve uma órbita circular ao redor da Terra. As duas hastes estão conectadas entre si por uma junta universal no ponto P . Tal sistema é chamado de pêndulo duplo. A Figura 2.1 exibe a configuração proposta por Sarychev.

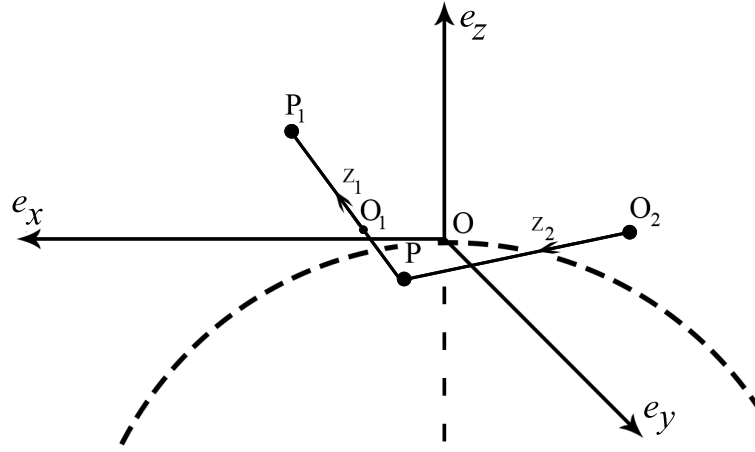


Figura 2.1: Pêndulo duplo em órbita circular ao redor da Terra.

A orientação dos eixos $O_j z_j$ ($j = 1, 2$) é determinada relativamente ao referencial orbital $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z$ com o eixo $\mathbf{e}_z$ direcionado ao longo do vetor radial conectando o centro de massa da Terra com o centro de massa O do pêndulo duplo; o eixo $\mathbf{e}_x$ é perpendicular ao eixo $\mathbf{e}_z$, está no plano da órbita e na direção do movimento orbital do pêndulo; e o eixo $\mathbf{e}_y$ é perpendicular ao plano da órbita e completa a triade da mão direita. Esta orientação é definida por meio dos ângulos de Euler ψ_j (ângulo de precessão) e θ_j (ângulo de nutação).

Também são utilizados os referenciais $PXYZ$ (Figura 2.2) e O_2XYZ (Figura 2.3) cujos eixos são paralelos a $\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$.

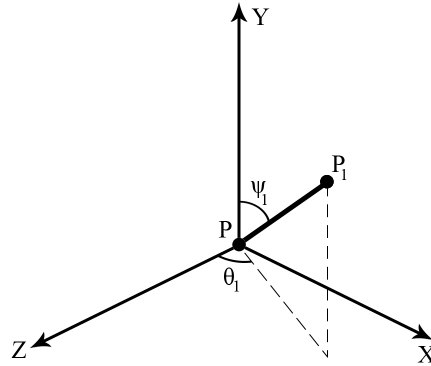


Figura 2.2: Haste l_1 no referencial $PXYZ$.

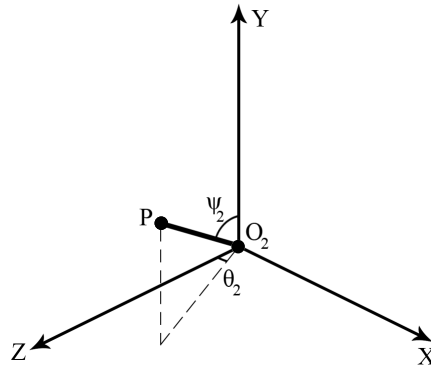


Figura 2.3: Haste l_2 no referencial O_2XYZ .

Sugerimos a leitura do artigo de Guerman [9] que detalha o caso geral de estruturas em órbita compostas de vários corpos conectados por hastes, bem como os artigos de Kholostova [10] e [11] por tratar de movimentos de pêndulo duplo.

2.1 Coordenadas dos vetores $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$

Consideramos os vetores

$$\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{PP_1} = (a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{O_2P} = (a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}). \quad (2.2)$$

Os vetores $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ auxiliam na obtenção das coordenadas dos pontos P, P_1 e O_2 no referencial $\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$.

Temos que, no referencial $PXYZ$,

$$\begin{aligned} a_{1x} &= l_1 \sin \theta_1 \sin \psi_1, \\ a_{1y} &= l_1 \sin \theta_1 \cos \psi_1, \\ a_{1z} &= l_1 \cos \theta_1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

e, no referencial O_2XYZ ,

$$\begin{aligned} a_{2x} &= l_2 \sin \theta_2 \sin \psi_2, \\ a_{2y} &= l_2 \sin \theta_2 \cos \psi_2, \\ a_{2z} &= l_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2 Pêndulo duplo numa órbita elíptica

Usaremos a mesma notação e, em parte, a configuração formulada por Sarychev com as seguintes modificações, dadas pelas condições (C1) a (C5) abaixo

C1. a órbita é elíptica com raio $r = \frac{p}{1+e \cos \nu}$;

C2. as hastes tem comprimento variável, $l_1 = l_2 = r\beta$ e onde $\beta > 0$ é uma constante;

C3. as massas são iguais, $m_1 = m_2 = m_3 = m$;

C4. trabalhamos no plano da órbita, ou seja, $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{2}$ (Figura 2.4);

C5. utilizaremos a energia potencial em sua configuração original.

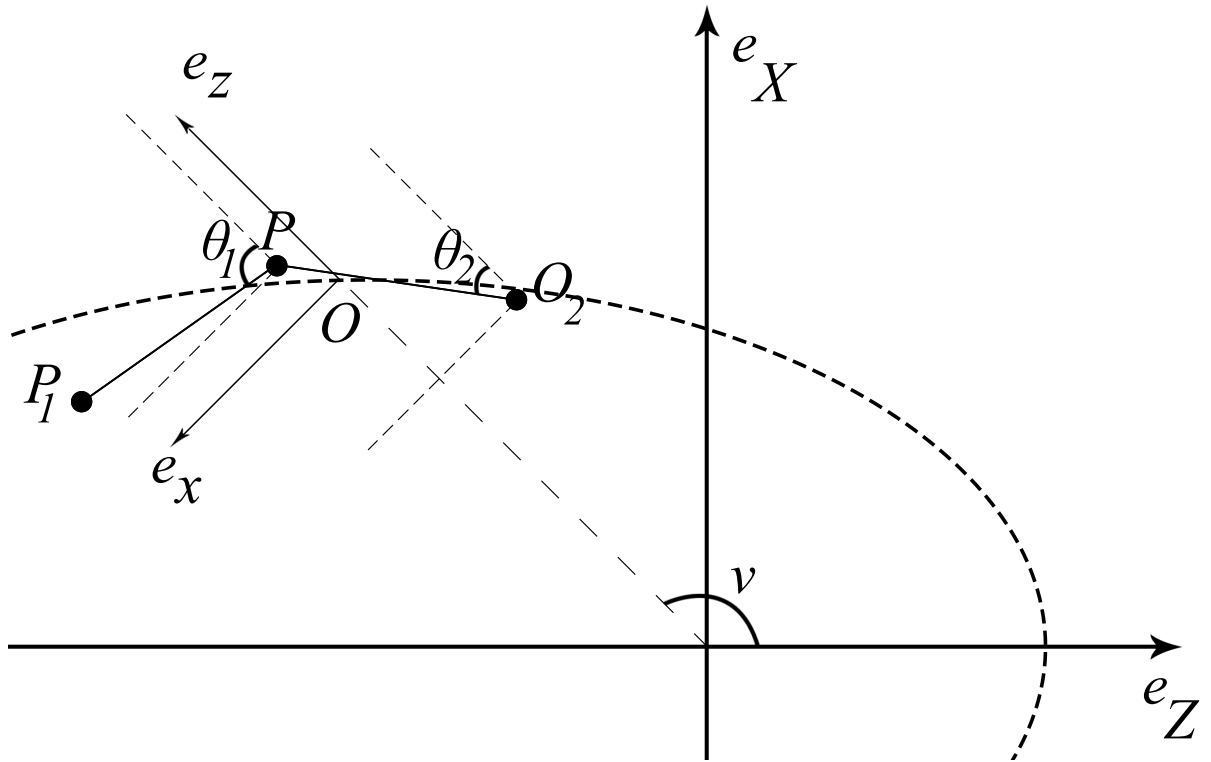


Figura 2.4: Pêndulo duplo em uma órbita elíptica. Plano da órbita.

Nestas condições, os vetores $\mathbf{a}_1$ (2.1) e $\mathbf{a}_2$ (2.2) ficam na forma

$$\mathbf{a}_1 = (a_{1z}, a_{1x}) = (r\beta \cos \theta_1, r\beta \sin \theta_1), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a}_2 = (a_{2z}, a_{2x}) = (r\beta \cos \theta_2, r\beta \sin \theta_2). \quad (2.6)$$

Temos por objetivo descrever os pontos P, P_1 e O_2 apenas em função das coordenadas no referencial móvel $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z$. Ressaltamos que $O = \mathbf{0} = (0, 0)$. Consideramos os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= \overrightarrow{OP_1} = (d_{1z}, d_{1x}), \\ \mathbf{d}_2 &= \overrightarrow{OO_2} = (d_{2z}, d_{2x}), \\ \mathbf{d}_3 &= \overrightarrow{OP} = (d_{3z}, d_{3x}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como o centro de massa do sistema está na origem, temos

$$m\mathbf{d}_1 + m\mathbf{d}_2 + m\mathbf{d}_3 = \mathbf{0}$$

e, além disso, temos as relações

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_2.$$

Logo, obtemos

$$\mathbf{d}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1), \quad \mathbf{d}_2 = -\frac{1}{3}(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{d}_3 = \frac{1}{3}(-\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2). \tag{2.8}$$

Portanto, no referencial móvel $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z$, $P_1 = (d_{1z}, d_{1x})$, $O_2 = (d_{2z}, d_{2x})$ e $P = (d_{3z}, d_{3x})$, onde

$$\begin{aligned} d_{1z} &= \frac{1}{3}r\beta(\cos \theta_2 + 2\cos \theta_1), & d_{1x} &= \frac{1}{3}r\beta(\sin \theta_2 + 2\sin \theta_1), \\ d_{2z} &= -\frac{1}{3}r\beta(\cos \theta_1 + 2\cos \theta_2), & d_{2x} &= -\frac{1}{3}r\beta(\sin \theta_1 + 2\sin \theta_2), \\ d_{3z} &= \frac{1}{3}r\beta(\cos \theta_2 - \cos \theta_1), & d_{3x} &= \frac{1}{3}r\beta(\sin \theta_2 - \sin \theta_1). \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3 Lagrangeano do Pêndulo Duplo

Seguindo o que foi feito na Seção 1.1 para o pêndulo simples, para cada ponto P_1 , O_2 e P escrevemos a posição de cada ponto em relação ao referencial inercial na forma

$$\mathbf{R}_{P_1} = \mathbf{R}_0 + A\rho_1, \quad \mathbf{R}_{O_2} = \mathbf{R}_0 + A\rho_2, \quad \mathbf{R}_P = \mathbf{R}_0 + A\rho_3$$

com $\mathbf{R}_0 = r \sin \nu \mathbf{e}_X + r \cos \nu \mathbf{e}_Z$, A é a matriz dada em (1.2) e

$$\rho_1 = d_{1x}\mathbf{e}_x + d_{1z}\mathbf{e}_z, \quad \rho_2 = d_{2x}\mathbf{e}_x + d_{2z}\mathbf{e}_z, \quad \rho_3 = d_{3x}\mathbf{e}_x + d_{3z}\mathbf{e}_z.$$

Assim, utilizando a expressão da velocidade dada pela equação (1.5), temos que a velocidade para cada ponto P_1 , O_2 e P é, respectivamente,

$$\mathbf{v}_\ell = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \times A\rho_\ell + A\dot{\rho}_\ell \quad (\ell = 1, 2, 3).$$

Utilizamos a fórmula geral da energia cinética

$$T = \sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{2} m_\ell \|\mathbf{v}_\ell\|^2$$

para obter

$$T = \sum_{\ell=1}^3 \frac{m_\ell}{2} \{[\dot{d}_{\ell x} + \dot{\nu}(d_{\ell z} + r)]^2 + (\dot{d}_{\ell z} + \dot{r} - \dot{\nu}d_{\ell x})^2\}. \quad (2.10)$$

Assumindo $m_1 = m_2 = m_3 = m$ e substituindo as coordenadas de P_1, O_2 e P , dadas em (2.9), na energia cinética T (2.10), obtemos a energia cinética do pêndulo duplo

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{3} m \beta^2 \{[r^2 \dot{\nu}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\nu} \dot{\theta}_1 + r^2 \dot{\nu} \dot{\theta}_2 + r^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & - r \dot{r} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + r^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\nu} \dot{\theta}_1 + 2 \dot{\nu} \dot{\theta}_2)\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Em (2.11) omitimos os termos que não dependem de θ_j e $\dot{\theta}_j$ ($j = 1, 2$).

A energia potencial do pêndulo duplo é dada por

$$U = \frac{\kappa m_1}{\|\mathbf{R}_{P_1}\|} + \frac{\kappa m_2}{\|\mathbf{R}_{O_2}\|} + \frac{\kappa m_3}{\|\mathbf{R}_P\|},$$

o que nos leva a

$$U = \kappa \sum_{\ell=1}^3 \frac{m_\ell}{\sqrt{d_{\ell x}^2 + (r + d_{\ell z})^2}}, \quad (2.12)$$

onde κ é o parâmetro gravitacional associado ao centro atrator.

Considerando $m_1 = m_2 = m_3 = m$ e substituindo os valores dados em (2.9) na fórmula (2.12), obtemos

$$U = \frac{\kappa m}{r} \tilde{U}, \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{U} = 3 & \left(\frac{1}{\sqrt{9 + 5\beta^2 - 6\beta \cos \theta_1 + 4\beta^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 12\beta \cos \theta_2}} \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{9 + 2\beta^2 - 6\beta \cos \theta_1 - 2\beta^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 6\beta \cos \theta_2}} \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{9 + 5\beta^2 + 12\beta \cos \theta_1 + 4\beta^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 6\beta \cos \theta_2}} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Usando a energia cinética T (2.11) e a energia potencial U (2.13), o Lagrangeano L do pêndulo duplo numa órbita elíptica é dado por

$$L = T + U. \quad (2.15)$$

2.4 Equações do Movimento

As equações do movimento associadas ao Lagrangeano (2.15) são dadas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} - \frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.16)$$

que nos levam às seguintes equações

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \beta^2 m \{ [2r\dot{r}\dot{\nu} + r^2\ddot{\nu} + 2r\dot{r}\dot{\theta}_2 + r^2\ddot{\theta}_2] \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & \quad - [r\ddot{r} - r^2\dot{\nu} - 2r^2\dot{\nu}\dot{\theta}_2 - r^2\dot{\theta}_2] \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ & \quad + 2(2r\dot{r}\dot{\theta}_1 + r^2\ddot{\theta}_1) + 2(2r\dot{r}\dot{\nu} + r^2\ddot{\nu}) \} - \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \beta^2 m \{ [2r\dot{r}\dot{\nu} + r^2\ddot{\nu} + 2r\dot{r}\dot{\theta}_1 + r^2\ddot{\theta}_1] \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & \quad + [r\ddot{r} - r^2\dot{\nu} - 2r^2\dot{\nu}\dot{\theta}_1 - r^2\dot{\theta}_1] \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ & \quad + 2(2r\dot{r}\dot{\theta}_1 + r^2\ddot{\theta}_1) + 2(2r\dot{r}\dot{\nu} + r^2\ddot{\nu}) \} - \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Passando ao novo tempo ν , utilizando (1.4), (1.11) e (1.12), as equações (2.17) e (2.18) ficam na forma

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \theta_1'' + \frac{1}{3} \theta_2'' \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{3} \theta_2'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{2}{3} \theta_2' \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ & \quad + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{1}{3} \sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta_1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \theta_2'' + \frac{1}{3} \theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{3} \theta_1'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{2}{3} \theta_1' \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ & \quad + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(-\frac{1}{3} \sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta_2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.5 Hamiltoniano do Pêndulo Duplo

A fim de determinar o Hamiltoniano para o nosso problema do pêndulo duplo, utilizaremos a técnica da Transformada de Legendre, que é um método para se passar de um sistema Lagrangeano para um sistema Hamiltoniano, e vice-versa. Para tanto, definimos a função

$$\widehat{L} = \frac{1}{3}(\theta_1'^2 + \theta_2'^2) + \frac{1}{3}(\theta_1' + \theta_1'\theta_2' + \theta_2')\cos(\theta_1 - \theta_2) + \widehat{U}, \quad (2.21)$$

onde

$$\widehat{U} = \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{1}{3} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{\beta^2} \widetilde{U} \right). \quad (2.22)$$

A função $\widehat{L}$ satisfaz as equações do movimento (2.19) e (2.20) ao desenvolvermos

$$\frac{d}{d\nu} \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \theta_j'} - \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \theta_j} = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (2.23)$$

Logo, aplicando a Transformada de Legendre na função $\widehat{L}$, temos que a expressão do Hamiltoniano do pêndulo duplo é dada por

$$H = p_1\theta_1' + p_2\theta_2' - \widehat{L}, \quad (2.24)$$

onde p_1 e p_2 são os momentos definidos por

$$p_1 = \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \theta_1'} = \frac{2}{3}\theta_1' + \frac{1}{3}\cos(\theta_1 - \theta_2)\theta_2' + \frac{1}{3}\cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.25)$$

$$p_2 = \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \theta_2'} = \frac{2}{3}\theta_2' + \frac{1}{3}\cos(\theta_1 - \theta_2)\theta_1' + \frac{1}{3}\cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.26)$$

Substituímos as expressões de p_1 , p_2 e $\widehat{L}$ na equação (2.24) para obter

$$H = \frac{1}{3}\theta_1'^2 + \frac{1}{3}\theta_2'^2 + \frac{1}{3}\cos(\theta_1 - \theta_2)\theta_1'\theta_2' - \widehat{U}. \quad (2.27)$$

Das equações (2.25) e (2.26), obtemos expressões de θ_1' e θ_2' em função de $p_1, p_2, \theta_1, \theta_2$,

$$\theta_1' = \frac{6p_1 - 3p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}{4 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (2.28)$$

$$\theta_2' = \frac{6p_2 - 3p_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}{4 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (2.29)$$

Em seguida, substituímos os valores de θ'_1 (2.28) e θ'_2 (2.29) em (2.27) para obtermos a expressão final do Hamiltoniano do pêndulo duplo H ,

$$H = \frac{g(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)}{12 - 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} - \widehat{U}, \quad (2.30)$$

com

$$\begin{aligned} g(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = & 9(p_1^2 + p_2^2) - (6p_1 + 6p_2 + 9p_1p_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & + (2 + 3p_1 + 3p_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - \cos^3(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Portanto, as equações do movimento (2.19) e (2.20) podem ser escritas como um sistema Hamiltoniano de equações

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \theta'_1, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \theta'_2, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = -p'_1, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -p'_2, \quad (2.33)$$

onde H é a função em (2.30).

2.6 Equilíbrios

O Hamiltoniano H (2.30) possui os seguintes equilíbrios

$$\mathbf{E1.} \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{E2.} \quad \theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = \pi, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{E3.} \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad p_1 = -\frac{1}{3}, \quad p_2 = -\frac{1}{3},$$

$$\mathbf{E4.} \quad \theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = 0, \quad p_1 = -\frac{1}{3}, \quad p_2 = -\frac{1}{3}.$$

Os equilíbrios (E1) e (E2) correspondem ao pêndulo duplo esticado: (E1) apontado na direção contrária a Terra e (E2) apontado na direção da Terra.

Os equilíbrios (E3) e (E4) correspondem ao pêndulo duplo dobrado: (E3) apontado na direção da Terra e (E4) apontado na direção contrária à Terra.

Na Figura 2.5 exibimos uma noção da configuração de cada equilíbrio de acordo com o posicionamento dos pontos P , P_1 e O_2 . Os eixos OX e OZ na Figura 2.5 servem apenas como referência e não representa sua posição real como visto na Figura 2.4.

Fizemos um estudo mais aprofundado sobre os equilíbrios (E2) e (E3).

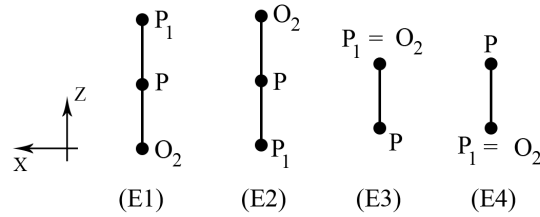


Figura 2.5: Representação dos equilíbrios (E1), (E2), (E3) e (E4).

2.7 Equilíbrio (E2): $\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi$

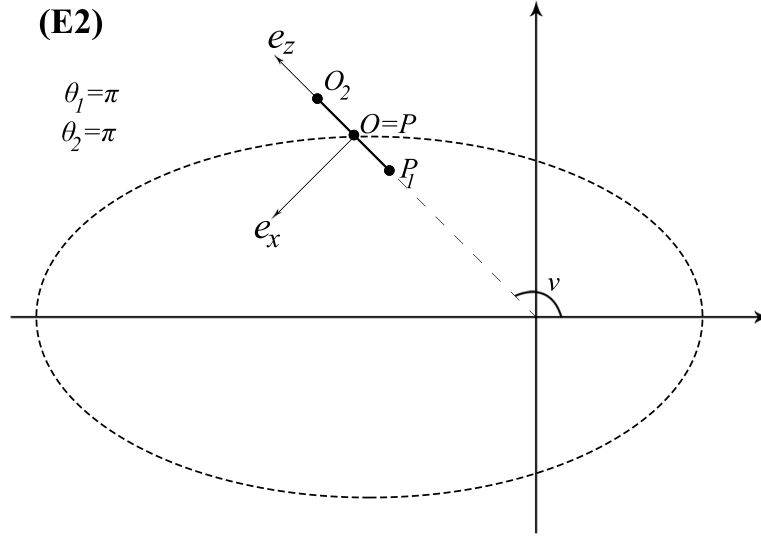


Figura 2.6: Configuração do equilíbrio (E2).

No equilíbrio (E2), os três pontos P, P_1 e O_2 são colineares, para verificar esta informação basta substituir os valores $\theta_1 = \pi$ e $\theta_2 = \pi$ nas equações (2.9). O ponto P está na mesma posição que o centro de massa do pêndulo duplo, ponto O (Figura 2.6). Neste caso, o parâmetro β pode variar para valores maiores que 0 e menores que 1, $0 < \beta < 1$, $\beta = 1$ seria o caso em que o ponto P_1 estaria na Terra.

Neste equilíbrio, fazendo $\theta_j = \pi + x_j$ e $p_j = \frac{1}{3} + y_j$ ($j = 1, 2$), a parte quadrática do Hamiltoniano perturbado é

$$H^{(2)} = y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} [(\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)x_1^2 - 2\gamma_1 x_1 x_2 + (\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \gamma_4)x_2^2], \quad (2.34)$$

onde $0 < \beta < 1$ e

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{2}{9} - \frac{1}{9(1 - \beta)^3} - \frac{1}{9(1 + \beta)^3}, & \gamma_2 &= \frac{1}{6\beta(1 - \beta)^3}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{6\beta(1 + \beta)^3}, & \gamma_4 &= \frac{1}{6\beta}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sejam $G^{(2)}$ a matriz Hessiana de $H^{(2)}$ com $e = 0$ e

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

então, desde que $0 < \beta < 1$, a matriz

$$J_4 G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -2(\gamma_1 - 2\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4) & 2\gamma_1 & 0 & 0 \\ 2\gamma_1 & -2(\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \gamma_4) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

tem os seguintes autovalores imaginários puros $\pm i\omega_1$ e $\pm i\omega_2$, onde ω_1 e ω_2 são chamados de frequências e são dadas por

$$\omega_1 = \sqrt{2}\sqrt{3\gamma_1 + 3\gamma_2 - 3\gamma_3 + \Gamma}, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\sqrt{3\gamma_1 + 3\gamma_2 - 3\gamma_3 - \Gamma}, \quad (2.38)$$

com

$$\Gamma = \sqrt{3}\sqrt{3\gamma_1^2 + 3\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3^2 - \gamma_2\gamma_4 - \gamma_3\gamma_4 + \gamma_4^2}.$$

Portanto, no intervalo $0 < \beta < 1$ o equilíbrio (E2) é estável.

Fazemos um procedimento semelhante ao que foi feito no Capítulo 1. Expandimos o Hamiltoniano $H^{(2)}$ (2.34) em e para obter

$$H^{(2)} = H_0^{(2)}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \sum_{m=1}^{\infty} e^m H_m^{(2)}(x_1, x_2, y_1, y_2, \nu), \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned} H_0^{(2)} &= y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2 + (\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)x_1^2 \\ &\quad - 2\gamma_1 x_1 x_2 + (\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \gamma_4)x_2^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

e

$$\begin{aligned} H_m^{(2)} &= (-1)^m \cos^m \nu [(\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)x_1^2 \\ &\quad - 2\gamma_1 x_1 x_2 + (\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \gamma_4)x_2^2], \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.7.1 Normalização de $H_0^{(2)}$

O autovetor associado a $i\omega_j$ é v_j ($j = 1, 2$), com

$$v_j = r_j + is_j, \quad j = 1, 2, \quad (2.42)$$

onde

$$r_1 = (0, 0, r_{13}, 1), \quad s_1 = (s_{11}, s_{12}, 0, 0), \quad (2.43)$$

$$r_2 = (0, 0, r_{23}, 1), \quad s_2 = (s_{21}, s_{22}, 0, 0), \quad (2.44)$$

e

$$\begin{aligned} r_{13} &= -\frac{\gamma_2 + \gamma_3 - 2\gamma_4 + \Gamma}{3\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \gamma_4}, \\ s_{11} &= \frac{\omega_1(\gamma_2 + \gamma_3 - 2\gamma_4 + \Gamma)}{2(\Omega + \gamma_1\Gamma)} \\ s_{12} &= -\frac{\omega_1(3\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)}{2(\Omega + \gamma_1\Gamma)}, \\ r_{23} &= -\frac{\gamma_2 + \gamma_3 - 2\gamma_4 - \Gamma}{3\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \gamma_4}, \\ s_{21} &= \frac{\omega_2(\gamma_2 + \gamma_3 - 2\gamma_4 - \Gamma)}{2(\Omega - \gamma_1\Gamma)}, \\ s_{22} &= -\frac{\omega_2(3\gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)}{2(\Omega - \gamma_1\Gamma)}, \end{aligned}$$

com

$$\Omega = 3\gamma_1^2 + 6\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_2^2 - 6\gamma_1\gamma_3 - 5\gamma_2\gamma_3 + 2\gamma_3^2 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4 - \gamma_4^2.$$

Calculamos

$$(r_1, J_4 s_1) = \frac{\omega_1\Gamma(\Gamma + \gamma_2 + \gamma_3 - 2\gamma_4)}{(3\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \gamma_4)(\Omega + \gamma_1\Gamma)}, \quad (2.45)$$

$$(r_2, J_4 s_2) = \frac{\omega_2\Gamma(\Gamma - \gamma_2 - \gamma_3 + 2\gamma_4)}{(3\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 + \gamma_4)(\Omega - \gamma_1\Gamma)}. \quad (2.46)$$

Se $0 < \beta < 1$ e $\beta \neq 0.589001$, então $\delta_1 = \text{senal}(r_1, J_4 s_1) = +$, $\delta_2 = \text{senal}(r_2, J_4 s_2) = +$ e

$$\kappa_j = \frac{1}{\sqrt{|(r_j, J_4 s_j)|}} \quad (j = 1, 2). \quad (2.47)$$

A matriz N da transformação simplética linear que normaliza $H_0^{(2)}$ é a matriz cujas colunas são construídas com os vetores (2.43) e (2.44) do seguinte modo, ver Capítulo 1

de [14], ou Seção 2.1 de [1], ou Seção 4.2 de [20],

$$N = \text{Col} \begin{pmatrix} -\kappa_1 s_1 & -\kappa_2 s_2 & \delta_1 \kappa_1 r_1 & \delta_2 \kappa_2 r_2 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Ela define a seguinte mudança simplética de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= -\kappa_1 s_{11} \xi_1 - \kappa_2 s_{21} \xi_2 \\ x_2 &= -\kappa_1 s_{12} \xi_2 - \kappa_2 s_{22} \xi_2 \\ y_1 &= \kappa_1 r_{13} \eta_1 + \kappa_2 r_{23} \eta_2 \\ y_2 &= \kappa_1 \eta_1 + \kappa_2 \eta_2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

que transforma (2.39), reorganizado de tal forma que,

$$H^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \nu, e, \beta) = H_0^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m}{m!} H_m^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \nu, \beta), \quad (2.50)$$

no qual o termo autônomo (2.40) fica normalizado,

$$H_0^{(2)} = \frac{1}{2} \omega_1 (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (\xi_2^2 + \eta_2^2). \quad (2.51)$$

2.7.2 Ressonâncias

Para o caso do equilíbrio (E2), aparecem ressonâncias do “tipo básico” e do tipo “combinação de ressonâncias simples”. A nomenclatura de cada tipo de ressonância está entre aspas, porque é a denominação dada por Markeev [14].

Apresentamos as três primeiras ressonâncias do “tipo básico” em ordem crescente tais que $2\omega_1 \in \mathbb{Z}$ e $2\omega_2 \notin \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\beta &= 0.383867 \quad (2\omega_1 = 7), \\ \beta &= 0.494725 \quad (2\omega_1 = 8), \\ \beta &= 0.561842 \quad (2\omega_1 = 9).\end{aligned}\tag{2.52}$$

Três primeiras ressonâncias do “tipo básico” em ordem crescente tais que $2\omega_1 \notin \mathbb{Z}$ e $2\omega_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\beta &= 0.323437 \quad (2\omega_2 = 4), \\ \beta &= 0.504656 \quad (2\omega_2 = 5), \\ \beta &= 0.604858 \quad (2\omega_2 = 6).\end{aligned}\tag{2.53}$$

Duas primeiras ressonâncias do tipo “combinação de ressonâncias simples” em ordem crescente tais que $\omega_1 + \omega_2 \in \mathbb{Z}$, $2\omega_1 \notin \mathbb{Z}$ e $2\omega_2 \notin \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\beta &= 0.224683 \quad (\omega_1 + \omega_2 = 5), \\ \beta &= 0.441031 \quad (\omega_1 + \omega_2 = 6).\end{aligned}$$

Estudamos o comportamento das curvas que emanam das ressonâncias $\beta_{01} = 0.383867$ (2.52) e $\beta_{02} = 0.323437$ (2.53) no plano $\beta \times e$. Para construção das curvas, seguiremos o algoritmo dado no livro de Markeev [14], o qual é descrito na tese de Araujo [1], Seção 4.2.1.

2.7.3 Construção das Curvas: β_{01}

No Hamiltoniano $H^{(2)}$ (2.50), substituímos β por

$$\beta = \beta_{0\ell} + \beta_{1\ell}e + \beta_{2\ell}e^2 + \beta_{3\ell}e^3 + \dots \quad (2.54)$$

e reorganizamos de modo que

$$H^{(2)} = H_0^{(2)}(\xi, \eta, \beta_{0\ell}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^m}{m!} H_m^{(2)}(\xi, \eta, \nu, \beta_{0\ell}, \beta_{1\ell}, \dots, \beta_{m\ell}), \quad (2.55)$$

com

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2).$$

Mostraremos como é feita a construção da curva ate ordem e^3 para o caso em que $\beta_{01} = 0.383867$ (2.52). Neste caso, $N = 7$, pois β_{01} satisfaz $2\omega_1(\beta_{01}) = N = 7$, e β (2.54) fica na forma

$$\beta = \beta_{01} + \beta_{11}e + \beta_{21}e^2 + \beta_{31}e^3. \quad (2.56)$$

A notação $\omega_j(\beta_{0\ell})$ significa ω_j calculado em $\beta_{0\ell}$.

No Hamiltoniano $H^{(2)}$ (2.55), para o caso em que $\beta_{01} = 0.383867$ (2.52), fazemos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos\left(\frac{N}{2}\nu\right)x_1 + \sin\left(\frac{N}{2}\nu\right)X_1, & \xi_2 &= x_2 \\ \eta_1 &= -\sin\left(\frac{N}{2}\nu\right)x_1 + \cos\left(\frac{N}{2}\nu\right)X_1, & \eta_2 &= X_2, \quad (N = 7), \end{aligned} \quad (2.57)$$

para obter

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}\omega(x_2^2 + X_2^2) + \sum_{m=1}^3 \frac{e^m}{m!} H_m(x_1, x_2, X_1, X_2, \beta_{01}, \dots, \beta_{m1}, \nu), \quad (2.58)$$

onde

$$\omega = \omega_2(\beta_{01}) = 2.12663. \quad (2.59)$$

Esta mudança de variáveis (2.57) se assemelha com a mudança descrita no Capítulo 1, ver equações (1.33) e (1.45).

Estamos aptos para aplicar o método de Deprit-Hori com o Hamiltoniano $H^{(2)}$ descrito na equação (2.58).

Utilizando as fórmulas de recorrência (1.39) e (1.40), até $m = 3$, determinamos o Hamiltoniano $K^{(21)} = \sum_{m=0}^3 \frac{e^m}{m!} K_m$, associado ao Hamiltoniano $H^{(2)}$ (2.58) e a ressonância β_{01} (2.52). O Hamiltoniano $K^{(21)}$ nos dará os coeficiente β_{11} , β_{21} e β_{31} .

De acordo com o método de Deprit-Hori, pelo fato de $N = 7$ ser ímpar, a função W tem período 4π em ν . Se N fosse par, o período seria 2π .

Da fórmula (1.39), temos

$$K_0 = \frac{1}{2}\omega(x_2^2 + X_2^2). \quad (2.60)$$

Para $m = 1$, da fórmula (1.40), temos

$$K_1 = H_1^{(2)} + \omega \left(y_2 \frac{\partial W_1}{\partial Y_2} - Y_2 \frac{\partial W_1}{\partial y_2} \right) - Y_2 \frac{\partial W_1}{\partial y_2} - \frac{\partial W_1}{\partial t}. \quad (2.61)$$

Escrevemos W_1 , $H_1^{(2)}$ e K_1 da seguinte forma

$$W_1 = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2} w_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(21)} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} Y_1^{\mu_1} Y_2^{\mu_2}, \quad (2.62)$$

$$H_1^{(2)} = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2} h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(21)} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} Y_1^{\mu_1} Y_2^{\mu_2}, \quad (2.63)$$

$$K_1 = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2} k_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(21)} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} Y_1^{\mu_1} Y_2^{\mu_2}. \quad (2.64)$$

Igualando os coeficientes de mesma potência em y_1, y_2, Y_1, Y_2 do lado esquerdo e direito da equação (2.61), obtemos dez relações que serão organizadas em quatro grupos independentes um do outro.

Grupo 1:

$$\begin{aligned} k_{2000}^{(21)} &= h_{2000}^{(21)} - \frac{dw_{2000}^{(21)}}{d\nu}, \\ k_{1010}^{(21)} &= h_{1010}^{(21)} - \frac{dw_{1010}^{(21)}}{d\nu}, \\ k_{0020}^{(21)} &= h_{0020}^{(21)} - \frac{dw_{0020}^{(21)}}{d\nu}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Grupo 2:

$$\begin{aligned} k_{1100}^{(21)} &= h_{1100}^{(21)} + \omega w_{1001}^{(21)} - \frac{dw_{1100}}{d\nu}, \\ k_{1001}^{(21)} &= h_{1001}^{(21)} - \omega w_{1100}^{(21)} - \frac{dw_{1001}}{d\nu}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Grupo 3:

$$\begin{aligned} k_{0110}^{(21)} &= h_{0110}^{(21)} + \omega w_{0011}^{(21)} - \frac{dw_{0110}}{d\nu}, \\ k_{0011}^{(21)} &= h_{0011}^{(21)} - \omega w_{0110}^{(21)} - \frac{dw_{0011}}{d\nu}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Grupo 4:

$$\begin{aligned} k_{0002}^{(21)} &= h_{0002}^{(21)} - \omega w_{0101}^{(21)} - \frac{dw_{0002}}{d\nu}, \\ k_{0101}^{(21)} &= h_{0101}^{(21)} + 2\omega(w_{0002}^{(21)} - w_{0200}^{(21)}) - \frac{dw_{0101}}{d\nu}, \\ k_{0200}^{(21)} &= h_{0200}^{(21)} + \omega w_{0101}^{(21)} - \frac{dw_{0200}}{d\nu}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Do Grupo 1 (2.65) segue, em virtude de W ser de período 4π , que

$$k_{2000}^{(21)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} h_{2000}^{(21)} d\nu, \quad w_{2000} = \int (h_{2000}^{(21)} - k_{2000}^{(21)}) d\nu, \quad (2.69)$$

$$k_{1010}^{(21)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} h_{1010}^{(21)} d\nu, \quad w_{1010} = \int (h_{1010}^{(21)} - k_{1010}^{(21)}) d\nu, \quad (2.70)$$

$$k_{0020}^{(21)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} h_{0020}^{(21)} d\nu, \quad w_{0020} = \int (h_{0020}^{(21)} - k_{0020}^{(21)}) d\nu. \quad (2.71)$$

Podemos resolver este sistema pelo método de variação de parâmetros, ver em [6] o complemento ao Capítulo 4 do livro [14].

Do Grupo 2 (2.66), as funções $w_{1100}^{(21)}$ e $w_{1001}^{(21)}$ podem ser determinadas 4π -periódicas em ν para qualquer escolha das constantes $k_{1100}^{(21)}$ e $k_{1001}^{(21)}$. Para simplificarmos K_1 , tomamos

$$k_{1100}^{(21)} = 0, \quad k_{1001}^{(21)} = 0. \quad (2.72)$$

Então, uma solução 4π -periódica do sistema de equações do Grupo 2 (2.66) pode ser obtida da seguinte maneira. Definimos

$$\begin{aligned} J_{1100}^{(21)} &= \int_0^\nu (h_{1100}^{(21)} \sin \omega \nu + h_{1001}^{(21)} \cos \omega \nu) d\nu, \\ J_{1001}^{(21)} &= \int_0^\nu (h_{1100}^{(21)} \cos \omega \nu - h_{1001}^{(21)} \sin \omega \nu) d\nu, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} a_{1100}^{(21)} &= -\frac{1}{2} \left(J_{1100}^{(21)}(4\pi) + \cot 2\pi\omega J_{1001}^{(21)}(4\pi) \right), \\ a_{1001}^{(21)} &= -\frac{1}{2} \left(J_{1001}^{(21)}(4\pi) - \cot 2\pi\omega J_{1100}^{(21)}(4\pi) \right). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Assim, as soluções do sistema (2.66) são

$$\begin{aligned} w_{1100}^{(21)} &= (J_{1100}^{(21)}(\nu) + a_{1100}^{(21)} \sin \omega \nu) + (J_{1001}^{(21)}(\nu) + a_{1001}^{(21)}) \cos \omega \nu, \\ w_{1100}^{(21)} &= (J_{1100}^{(21)}(\nu) + a_{1100}^{(21)} \cos \omega \nu) - (J_{1001}^{(21)}(\nu) + a_{1001}^{(21)}) \sin \omega \nu. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Para resolver o sistema de equações do Grupo 3 (2.67), fazemos do mesmo jeito que foi feito no sistema do Grupo 2 (2.66).

Para resolver o sistema de equações do Grupo 4 (2.68), fazemos o seguinte ajuste

$$u = w_{0101}^{(21)}, \quad v = w_{0002}^{(21)} - w_{0200}^{(21)}, \quad \Omega = 2\omega, \quad (2.76)$$

então a segunda equação do Grupo 4 e a equação obtida pela subtração da primeira pela terceira equação do Grupo 4 produz o seguinte sistema

$$\begin{aligned} k_{0101}^{(21)} &= h_{0101}^{(21)} + \Omega v - \frac{du}{d\nu}, \\ k_{0002}^{(21)} - k_{0200}^{(21)} &= h_{0002}^{(21)} - h_{0200}^{(21)} - \Omega u - \frac{dv}{d\nu}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

A estrutura deste sistema (2.77) é análoga ao sistema do Grupo 1 (2.65). Logo, temos

$$k_{0101}^{(21)} = 0, \quad k_{0002}^{(21)} = k_{0200}^{(21)} \quad (2.78)$$

e as soluções 4π -periódicas do sistema (2.77), $u(\nu)$ e $v(\nu)$, são obtidas de modo análogo ao que foi feito na resolução do sistema do Grupo 1 (2.65).

Inserindo $u(\nu)$ ao invés de $w_{0101}^{(21)}$ na última equação do Grupo 4 (2.68), obtemos a equação

$$k_{0200}^{(21)} = h_{0200}^{(21)} + \omega u - \frac{dw_{0200}^{(21)}}{d\nu}. \quad (2.79)$$

Assim, de (2.78) e (2.79) temos

$$\begin{aligned} k_{0200}^{(21)} &= k_{0002}^{(21)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} (h_{0200}^{(21)} + \omega u) d\nu, \\ w_{0200}^{(21)} &= \int (h_{0200}^{(21)} + \omega u - k_{0200}^{(21)}) d\nu. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Da equação (2.76) concluímos

$$w_{0002}^{(21)} = w_{0200}^{(21)} + v(\nu). \quad (2.81)$$

Para calcular K_{22} , usamos a fórmula (1.40) para $m = 2$, escrevemos $W_2, H_2^{(2)}$ e K_2 na forma

$$W_{22} = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2} w_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(22)} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} Y_1^{\mu_1} Y_2^{\mu_2}, \quad (2.82)$$

$$H_2^{(2)} = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2} h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(22)} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} Y_1^{\mu_1} Y_2^{\mu_2}, \quad (2.83)$$

$$K_2 = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2} k_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(22)} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} Y_1^{\mu_1} Y_2^{\mu_2}, \quad (2.84)$$

obtemos os grupos de equações semelhantes aos grupos (2.65), (2.66), (2.67) e (2.68) e resolvemos de modo análogo. Fazemos o mesmo procedimento para calcular K_3 .

Escrevemos o Hamiltoniano $K^{(21)}$ da seguinte forma

$$K^{(21)} = \frac{1}{2}(\omega + 2k_{0200}^{(2)})(y_2^2 + Y_2^2) + k_{2000}^{(2)}y_1^2 + k_{1010}^{(2)}y_1Y_1 + k_{0020}^{(2)}Y_1^2, \quad (2.85)$$

onde

$$k_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(2)} = \sum_{m=1}^3 \frac{e^m}{m!} k_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(2m)}, \quad k_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}^{(2m)} = \text{constante}. \quad (2.86)$$

Por exemplo,

$$k_{1010}^{(2)} = -e^3 \frac{(2.04319)(10^{-13})\beta_{11}^2}{24\pi} \approx 0, \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} k_{2000}^{(2)} = & (0.325846)e^2 + (1.64606)e\beta_{11} + (0.310869)e^3\beta_{11} \\ & + (4.33779)e^2\beta_{11}^2 + (8.22908)e^3\beta_{11}^3 + (1.64606)e^2\beta_{21} \\ & + (8.67557)e^3\beta_{11}\beta_{21} + (1.64606)e^3\beta_{31}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} k_{0020}^{(2)} = & (0.325846)e^2 + (1.64606)e\beta_{01} + (0.310869)e^3\beta_{01} \\ & + (4.33779)e^2\beta_{11}^2 + (8.22908)e^3\beta_{11}^3 + (1.64606)e^2\beta_{21} \\ & + (8.67557)e^3\beta_{11}\beta_{21} + (1.64606)e^3\beta_{31}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Igualando os termos de segunda, terceira e ordens superiores em e em ambos os membros da equação

$$(k_{1010}^{(2)})^2 = 4k_{2000}^{(2)}k_{0020}^{(2)} \quad (2.90)$$

nos permite obter $\beta_{11} = 0$, $\beta_{21} = -0.197955$ e $\beta_{31} = 0$. Portanto, temos a curva

$$\beta_1 = \beta_{01} + \beta_{11}e + \beta_{21}e^2 + \beta_{31}e^3 = 0.383867 - (0.197955)e^2. \quad (2.91)$$

2.7.4 Construção das Curvas: β_{02}

Para a construção da curva que emana de $\beta_{02} = 0.323437$ (2.53), fazemos a seguinte mudança de variáveis no Hamiltoniano $H^{(2)}$ (2.55)

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1, & \xi_2 &= \cos\left(\frac{N}{2}\nu\right)x_2 + \sin\left(\frac{N}{2}\nu\right)X_2 \\ \eta_1 &= X_1, & \eta_2 &= -\sin\left(\frac{N}{2}\nu\right)x_2 + \cos\left(\frac{N}{2}\nu\right)X_2, \quad (N=4),\end{aligned}\quad (2.92)$$

para obter

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}\omega(x_1^2 + X_1^2) + \sum_{m=1}^3 \frac{e^m}{m!} H_m(x_1, x_2, X_1, X_2, \beta_{01}, \dots, \beta_{m1}, \nu). \quad (2.93)$$

Neste caso,

$$\omega = \omega_1(\beta_{02}) = 3.32949. \quad (2.94)$$

Com o Hamiltoniano $H^{(2)}$ como descrito na equação 2.93, estamos aptos para aplicar o método de Deprit-Hori, semelhante ao que foi feito para calcular a curva β_1 .

Após todo o procedimento, obtemos a curva

$$\beta_2 = 0.323437 - (0.199891)e^2. \quad (2.95)$$

As funções φ_1 e φ_2 são positivas no intervalo $0 < \beta < \frac{3}{2}$.

O polinômio característico de $J_4 G^{(3)}$ é

$$\lambda^4 + (8\varphi_1 + 2\varphi_2)\lambda^2 + 12\varphi_1^2 - 3\varphi_2^2, \quad (2.99)$$

onde $G^{(3)}$ é a matriz Hessiana de $H^{(3)}$ com $e = 0$ e J_4 é a matriz (2.36).

O polinômio (2.99) tem as seguintes raízes para λ^2

$$\lambda^2 = \frac{-(8\varphi_1 + 2\varphi_2) \pm \sqrt{(8\varphi_1 + 2\varphi_2)^2 - 4(12\varphi_1^2 - 3\varphi_2^2)}}{2} = -4\varphi_1 - \varphi_2 \pm 2(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (2.100)$$

Logo, λ será imaginário puro se a expressão $-4\varphi_1 - \varphi_2 \pm 2(\varphi_1 + \varphi_2)$ for negativa, o que será possível para todos os valores de β no intervalo $0 < \beta < \frac{3}{2}$.

Portanto, o equilíbrio ($E3$) é estável para todos os valores de β no intervalo $0 < \beta < \frac{3}{2}$ e as raízes do polinômio (2.99) são imaginárias puras, $\pm i\omega_1$ e $\pm i\omega_2$,

$$\omega_1 = \sqrt{2\varphi_1 - \varphi_2}, \quad \omega_2 = \sqrt{3}\sqrt{2\varphi_1 + \varphi_2}. \quad (2.101)$$

Expandimos o Hamiltoniano (2.96) em e para obtermos

$$H^{(3)} = H_0^{(3)}(x_1, x_2, y_1, y_2) + \sum_{m=1}^{\infty} e^m H_m^{(3)}(x_1, x_2, y_1, y_2, \nu), \quad (2.102)$$

onde

$$H_0^{(3)} = y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + \varphi_1(x_1^2 + x_2^2) + \varphi_2 x_1 x_2 \quad (2.103)$$

e

$$H_m^{(3)} = (-1)^m \cos^m \nu [\varphi_1(x_1^2 + x_2^2) + \varphi_2 x_1 x_2], \quad m \geq 1. \quad (2.104)$$

2.8.1 Normalização de $H_0^{(3)}$

Descrição dos autovetores associados a matriz $J_4 G^{(3)}$.

O autovetor associado ao autovalor $i\omega_1$ é

$$v_1 = \left(\frac{i\omega_1}{2\varphi_1 - \varphi_2}, -\frac{i\omega_1}{2\varphi_1 - \varphi_2}, -1, 1 \right) = r_1 + is_1, \quad (2.105)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1 &= (0, 0, -1, 1), \\ s_1 &= \left(\frac{\omega_1}{2\varphi_1 - \varphi_2}, -\frac{\omega_1}{2\varphi_1 - \varphi_2}, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

O autovetor associado ao autovalor $i\omega_2$ é

$$v_2 = \left(-\frac{i\omega_2}{2\varphi_1 + \varphi_2}, -\frac{i\omega_2}{2\varphi_1 + \varphi_2}, 1, 1 \right) = r_2 + is_2, \quad (2.106)$$

onde

$$\begin{aligned} r_2 &= (0, 0, 1, 1), \\ s_2 &= \left(-\frac{\omega_2}{2\varphi_1 + \varphi_2}, -\frac{\omega_2}{2\varphi_1 + \varphi_2}, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Assim, $\delta_1 = \text{sinal}(r_1, J_4 s_1) = +$, $\delta_2 = \text{sinal}(r_2, J_4 s_2) = +$ e

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\sqrt[4]{2\varphi_1 - \varphi_2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\omega_1}}{2}, \\ \kappa_2 &= \frac{\sqrt[4]{2\varphi_1 + \varphi_2}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{\omega_2}}{6}. \end{aligned}$$

Utilizamos o mesmo padrão de matriz N (2.48) para obter a seguinte mudança de variáveis definida pelas fórmulas

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\sqrt{2\omega_1}}{2\omega_1}\xi_1 + \frac{\sqrt{6\omega_2}}{2\omega_2}\xi_2, \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2\omega_1}}{2\omega_1}\xi_1 + \frac{\sqrt{6\omega_2}}{2\omega_2}\xi_2, \\ y_1 &= -\frac{\sqrt{2\omega_1}}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{6\omega_2}}{6}\eta_2, \\ y_2 &= \frac{\sqrt{2\omega_1}}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{6\omega_2}}{6}\eta_2. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Aplicamos esta mudança de variáveis (2.107) no Hamiltoniano $H^{(3)}$ (2.102), que, em particular, fará com que o Hamiltoniano $H_0^{(3)}$ (2.103) seja escrito na sua forma normal

$$H_0^{(3)} = \frac{1}{2}\omega_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(\xi_2^2 + \eta_2^2). \quad (2.108)$$

2.8.2 Ressonâncias

Para o caso do equilíbrio (E3), aparecem ressonâncias do “tipo básico” e do tipo “combinação de ressonâncias simples”.

Apresentamos as três primeiras ressonâncias do “tipo básico” em ordem crescente tais que $2\omega_1 \in \mathbb{Z}$ e $2\omega_2 \notin \mathbb{Z}$:

$$\beta = 0.533608 \quad (2\omega_1 = 2), \quad (2.109)$$

$$\beta = 0.960277 \quad (2\omega_1 = 3),$$

$$\beta = 1.10976 \quad (2\omega_1 = 4).$$

Três primeiras ressonâncias do “tipo básico” em ordem crescente tais que $2\omega_1 \notin \mathbb{Z}$ e $2\omega_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\beta = 0.298837 \quad (2\omega_2 = 4), \quad (2.110)$$

$$\beta = 0.564763 \quad (2\omega_2 = 5),$$

$$\beta = 0.71415 \quad (2\omega_2 = 6).$$

Duas primeiras ressonâncias do tipo “combinação de ressonâncias simples” em ordem crescente tais que $\omega_1 + \omega_2 \in \mathbb{Z}$, $2\omega_1 \notin \mathbb{Z}$ e $2\omega_2 \notin \mathbb{Z}$:

$$\beta = 0.334508 \quad (\omega_1 + \omega_2 = 3),$$

$$\beta = 0.689636 \quad (\omega_1 + \omega_2 = 4).$$

Estudamos o comportamento das curvas que emanam das ressonâncias $\beta_{01} = 0.533608$ (2.109) e $\beta_{02} = 0.298837$ (2.110) no plano $\beta \times e$.

2.8.3 Construção das Curvas: β_{01}, β_{02}

Procedemos de modo análogo à construção das curvas referente ao equilíbrio (E2) e obtemos as seguintes curvas

$$\begin{aligned}\beta_1^{(3)} &= 0.533608 - (0.381665)e^2, \\ \beta_2^{(3)} &= 0.298837 - (0.283153)e^2.\end{aligned}$$

2.9 Gráficos das Curvas

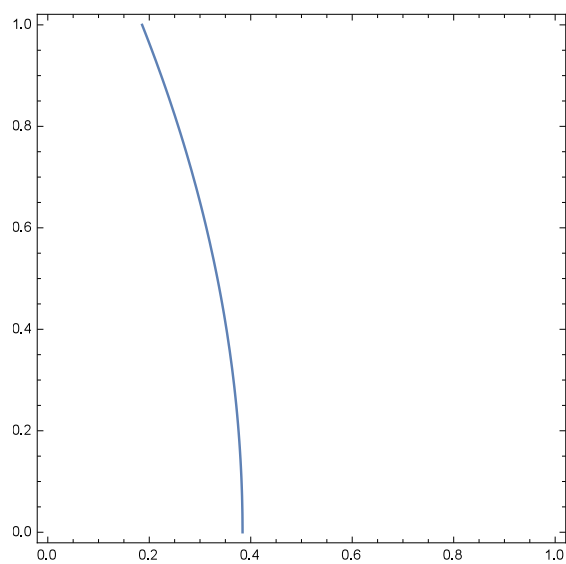


Figura 2.8: Gráfico da curva β_1 .

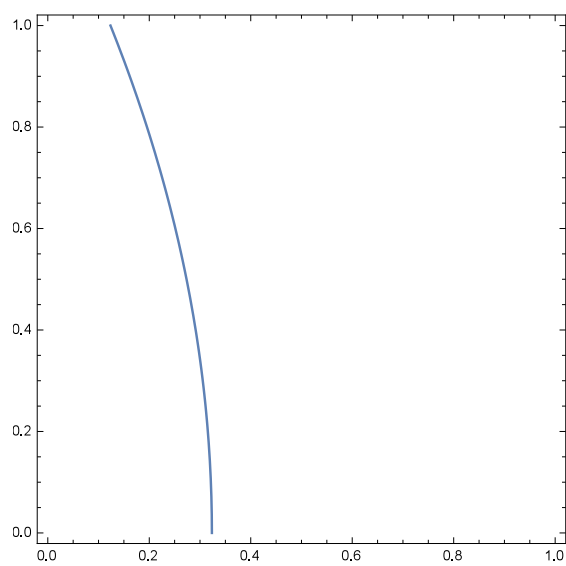


Figura 2.9: Gráfico da curva β_2 .

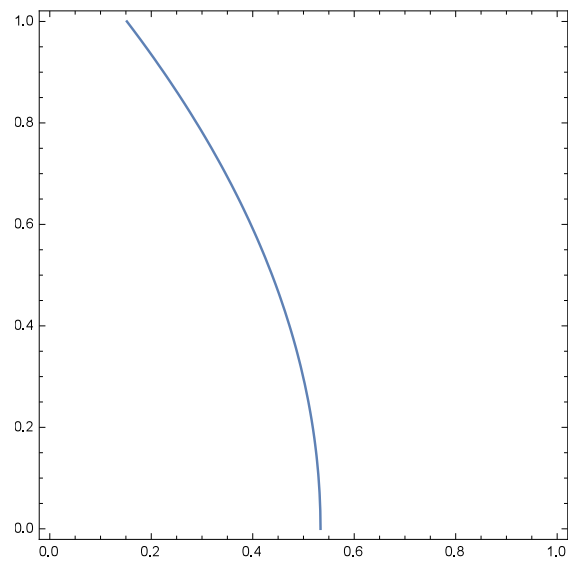


Figura 2.10: Gráfico da curva $\beta_1^{(3)}$.

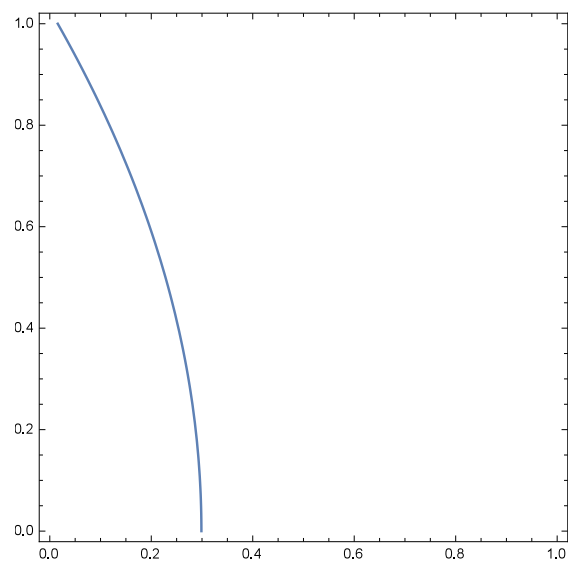


Figura 2.11: Gráfico da curva $\beta_2^{(3)}$.

3 Pêndulo Duplo: caso circular

Sarychev [17], quando fez o seu estudo do pêndulo duplo em órbita, calculou todos os equilíbrios possíveis para o caso circular. Com uma modificação do Hamiltoniano obtido no Capítulo 2 (2.30), vamos obter e verificar a estabilidade de casos particulares dos equilíbrios correspondentes as soluções (9), (11), (14) e (15) de [17]. No nosso caso, estamos fazendo as seguintes considerações: vamos nos restringir ao caso circular ($e = 0$, r constante), o estudo é feito no plano da órbita ($\psi_1 = \frac{\pi}{2}, \psi_2 = \frac{\pi}{2}$), $l_1 = l_2 = r\beta$ e $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

3.1 Energia Potencial aproximada

Consideremos a energia potencial (2.22) no caso em que $e = 0$ escrita da seguinte forma

$$\hat{U} = \frac{1}{3} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{\beta^2} \tilde{U}, \quad (3.1)$$

onde

$$\tilde{U} = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{9 + \tilde{U}_1}} + \frac{1}{\sqrt{9 + \tilde{U}_2}} + \frac{1}{\sqrt{9 + \tilde{U}_3}} \right), \quad (3.2)$$

e

$$\tilde{U}_1 = 5\beta^2 - 6\beta \cos \theta_1 + 4\beta^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 12\beta \cos \theta_2, \quad (3.3)$$

$$\tilde{U}_2 = 2\beta^2 - 6\beta \cos \theta_1 - 2\beta^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 6\beta \cos \theta_2, \quad (3.4)$$

$$\tilde{U}_3 = 5\beta^2 + 12\beta \cos \theta_1 + 4\beta^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 6\beta \cos \theta_2. \quad (3.5)$$

Observamos que $\tilde{U}$ (3.2) é apenas uma maneira de reescrever a expressão (2.14).

Vamos fazer a mesma aproximação da energia potencial considerada por Sarychev [17].

Para cada termo de $\tilde{U}$ na forma $\frac{1}{\sqrt{9+\tilde{U}_j}}$ ($j=1,2,3$), vamos expandir em $\tilde{U}_j$ e considerar os termos até segunda ordem em β .

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{9+\tilde{U}_1}} &= \frac{1}{3} - \frac{\tilde{U}_1}{54} + \frac{\tilde{U}_1^2}{648} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5\beta^2}{54} + \frac{1}{9}\beta \cos \theta_1 + \frac{1}{18}\beta^2 \cos^2 \theta_1 - \frac{2}{27}\beta^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + \frac{2}{9}\beta \cos \theta_2 + \frac{2}{9}\beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \frac{2}{9}\beta^2 \cos^2 \theta_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, após fazermos cada expansão e substituirmos na fórmula de $\tilde{U}$ (3.2), temos a expressão final

$$\tilde{U} = \beta^2 \left(\cos^2 \theta_1 - \frac{1}{3} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos^2 \theta_2 \right), \quad (3.7)$$

na qual omitimos os termos que não dependem de θ_1, θ_2 por não serem relevantes à dinâmica do sistema.

Portanto, substituindo (3.7) em (3.1), temos que a forma final do potencial aproximado é

$$\hat{U} = \cos^2 \theta_1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos^2 \theta_2. \quad (3.8)$$

3.2 Hamiltoniano do Sistema

Utilizando a energia potencial aproximada (3.8) para o caso em que $e = 0$, temos que o Hamiltoniano (2.30) fica na forma

$$H = \frac{g(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)}{12 - 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} - (\cos^2 \theta_1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos^2 \theta_2), \quad (3.9)$$

onde $g(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)$ é dada pela expressão (2.31).

3.2.1 Equilíbrios

O Hamiltoniano H (3.9) possui os seguintes equilíbrios

$$\mathbf{D1.} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D2.} \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D3.} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad p_1 = -\frac{1}{3}, \quad p_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D4.} \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = -\frac{1}{3}, \quad p_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D5.} \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D6.} \quad \theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = \pi, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D7.} \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad p_1 = -\frac{1}{3}, \quad p_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D8.} \quad \theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = 0, \quad p_1 = -\frac{1}{3}, \quad p_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D9.} \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad p_1 = -\frac{1}{6}, \quad p_2 = -\frac{1}{6}.$$

$$\mathbf{D10.} \quad \theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3}, \quad p_1 = -\frac{1}{6}, \quad p_2 = -\frac{1}{6}.$$

$$\mathbf{D11.} \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_2 = 0, \quad p_1 = -\frac{1}{6}, \quad p_2 = -\frac{1}{6}.$$

$$\mathbf{D12.} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = \pi, \quad p_1 = -\frac{1}{6}, \quad p_2 = -\frac{1}{6}.$$

Os equilíbrios (D1) a (D4) correspondem à posição pêndulo ao longo do eixo OX (relacionado à solução (9) de Sarychev [17]).

Os equilíbrios (D5) a (D8) correspondem à posição pêndulo ao longo do eixo OZ (relacionado à solução (11) de Sarychev [17]).

Os equilíbrios (D9) e (D10) correspondem à situação em que o eixo de simetria O_1z_1 é paralelo ao eixo OZ e o eixo de simetria O_2z_2 está no plano OXZ (relacionado à solução (14) de Sarychev [17]).

Os equilíbrios (D11) e (D12) correspondem à situação em que o eixo de simetria O_2z_2 é paralelo ao eixo OZ e o eixo de simetria O_1z_1 está no plano OXZ (relacionado à solução (15) de Sarychev [17]).

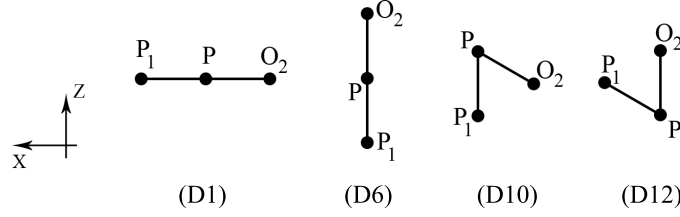


Figura 3.1: Configuração dos equilíbrios (D1), (D6), (D10) e (D12).

3.2.2 Estabilidade dos Equilíbrios

Vamos verificar a estabilidade dos equilíbrio (D1), (D6), (D10) e (D12) (Figura 3.1), pois são casos particulares que foram estudados por Misra, Amier e Modi [16].

Na Figura 3.1, o eixo OXZ serve apenas como referência e não representa sua posição real como visto na Figura 2.4.

No equilíbrio (D1), fazendo $\theta_j = \frac{\pi}{2} + x_j$ e $p_j = \frac{1}{3} + y_j$ ($j = 1, 2$) no Hamiltoniano (3.9), então a parte quadrática do Hamiltoniano perturbado é

$$H^{(D1)} = -(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2.$$

O polinômio característico de $J_4G^{(D1)}$ é

$$P^{(D1)}(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 + 9 = (\lambda - \sqrt{3})^2(\lambda + \sqrt{3})^2, \quad (3.10)$$

onde $G^{(D1)}$ é a matriz Hessiana de $H^{(D1)}$ e J_4 é a matriz (2.36).

O polinômio característico $P^{(D1)}(\lambda)$ (3.10) possui as seguintes raízes duplas: $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, portanto o equilíbrio (D1) é instável.

Procedendo de modo análogo para os demais equilíbrios (D6), (D10) e (D12), obtemos os dados:

$$H^{(D6)} = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2, \quad (3.11)$$

$$H^{(D10)} = \frac{11x_1^2}{12} - \frac{x_1x_2}{3} - \frac{7x_2^2}{12} + \frac{2}{5}(2y_1^2 + y_1y_2 + 2y_2^2), \quad (3.12)$$

$$H^{(D12)} = -\frac{7x_1^2}{12} - \frac{x_1x_2}{3} + \frac{11x_2^2}{12} + \frac{2}{5}(2y_1^2 + y_1y_2 + 2y_2^2). \quad (3.13)$$

e

$$P^{(D6)} = \lambda^4 + 12\lambda^2 + 27 = (\lambda - i3)(\lambda + i3)(\lambda - i\sqrt{3})(\lambda + i\sqrt{3}), \quad (3.14)$$

$$P^{(D10)} = \left(\lambda - i\sqrt{\frac{1}{5}(2 + \sqrt{139})} \right) \left(\lambda + i\sqrt{\frac{1}{5}(2 + \sqrt{139})} \right) \\ \left(\lambda - \sqrt{\frac{1}{5}(\sqrt{139} - 2)} \right) \left(\lambda + \sqrt{\frac{1}{5}(\sqrt{139} - 2)} \right), \quad (3.15)$$

$$P^{(D12)} = P^{(D10)}. \quad (3.16)$$

Portanto, apenas o equilíbrio (D6) é estável, os demais equilíbrios (D1), (D10) e (D12) são instáveis. Esta conclusão corrobora com o que é feito por Misra, Amier e Modi (ver seção 3 de [16]).

Considerações Finais

De um modo geral, notamos que tanto no caso do pêndulo simples quanto no pêndulo duplo, os equilíbrios estáveis quando usamos um potencial aproximado para o problema, mantém-se ao usarmos o potencial original.

Referente ao Capítulo 1, que trata do pêndulo simples em uma órbita elíptica, temos interesse em fazer um estudo mais geral, seguindo a ideia de Burov, Kosenko e Guerman [4], que considera a massa do satélite no ponto O_2 .

Referente ao Capítulo 2, temos interesse de estudar o comportamento dos demais equilíbrios (E1) e (E4), bem como outras ressonâncias no caso dos equilíbrios (E2) e (E3), por exemplo, as ressonâncias do tipo “combinação de ressonâncias simples”. Além de estudar o problema da forma geral como descrita por Sarychev [17], com as massas m_1, m_2 e m_3 não necessariamente iguais, o mesmo referente aos comprimentos l_1 e l_2 .

Fazendo uma junção do estudo feito nos Capítulos 1 e 2, temos interesse de estudar um pêndulo simples articulado, que seria o caso do pêndulo duplo proposto por Sarychev [17] no caso em que $m_2 = m_3 = 0$, acoplado no centro de massa de um satélite, como proposto por Synge [19]. Com este estudo do pêndulo simples articulado, poderemos fazer um comparativo da estabilidade do pêndulo simples normal.

Seria possível, de acordo com o equilíbrio (E3) do Capítulo 2, pensar em uma adaptação para estudar o comportamento de um *dumbbell* com uma haste de comprimento variável, onde, por exemplo, em uma ponta teríamos um objeto de massa m e, na outra ponta, um objeto de massa $2m$. Um *dumbbell* (halteres em português) é uma estrutura constituída por duas massas unidas por uma haste. Ver o artigo [7] para mais detalhes da estrutura de um *dumbbell*.

Referências

- [1] ARAUJO, G. C. **Estabilidade Paramétrica em um Problema de $P + 2$ Corpos**, Tese de Doutorado, Programa de Pós Graduação em **Matemática**, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, 2015.
- [2] BARDIN, B. S.; MARKEEV, A. P. **The Stability of the Equilibrium of a Pendulum for Vertical Oscillations of the Point of Suspension**, J. App. Maths Mechs, Vol. 59, No. 6, pp. 879-886, 1995.
- [3] BLITZER, L. **Equilibrium and stability of a pendulum in an orbiting spaceship**, Am. J. Phys., 1979.
- [4] BUROV, A.; KOSENKO, I.; GUERMAN, A. **Dynamics of a Moon-anchored Tether with Variable Length**, Adv. Astronautical Sci., 2012.
- [5] BUROV, A.; GUERMAN, A.; KOSENKO, I. **On Plane Oscillations of a Pendulum with Variable Length Suspended on the Surface of a Planet's Satellite**, Cosmic Research, 2014.
- [6] CABRAL, H. E. **Complemento ao Capítulo 4 do livro de A. P. Markeev**. Disponível em: <http://www.ufpe.br/hild> (Consulta realizada em 23/10/2016)

- [7] CELLETTI, A.; SIDORENKO, V. V. **Some Properties of the Dumbbell Satellite Attitude Dynamics**, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Volume 101, Issue 1, pp 105-126, 2008.
- [8] DIAS, L. F. B.; CABRAL, H. E. **Parametric Stability in a Sitnikov-like Restricted P-body Problem**, Journal of Dynamics and Differential Equations, v. 28, pp 1-12, 2016.
- [9] GUERMAN, A. D. **Spatial Equilibria of Multibody Chain in a Circular Orbit**, Acta Astronautica, Vol. 58, pp. 1-14, 2006.
- [10] KHOLOSTOVA, O. V. **On Stability of Relative Equilibria of a Double Pendulum with Vibrating Suspension Point**, Mechanics of Solids, Vol. 46, No. 4, pp 508-518, 2011.
- [11] KHOLOSTOVA, O. V. **On the Motions of a Double Pendulum with Vibrating Suspension Point**, Mechanics of Solids, Vol. 44, No. 2, pp 184-197, 2009.
- [12] KHOLOSTOVA, O. V. **Stability of Plane Oscillations of a Satellite in a Circular Orbit**, Mechanics of Solids, Vol. 43, No. 2, pp 185-198, 2008.
- [13] LEONOV, G. A. **Lyapunov Exponents and Problems of Linearization. From Stability to Chaos**, St. Petersburg University Press, 1997.
- [14] MARKEEV Markeev, A. P. **Linear Hamiltonian Systems and some Applications to the Problem of Stability of Motion of Satellites Relative to the Center of Mass**, Publ. Regular and Chaotic Dynamics, Moscow-Izhevsk, 2009. (em russo)
- [15] MARKEEV, A. P. **Theoretical Mechanics**, Izhevsk: NITS Regular and Chaotics Dynamics, 2007. (em russo)
- [16] MISRA, A. K.; Z. AMIER, Z.; MODI, V. J. **Attitude Dynamics of Three-Body Tethered Systems**, Acta Astronautica, Vol. 17, No. 10, pp. 1059-1068, 1988.

- [17] V. A. SARYCHEV, **Equilibria of a Double Pendulum in a Circular Orbit**, Acta Astronautica, Vol. 44, No. 1, pp. 63-65, 1999.
- [18] SOUZA, R. S. **Estabilidade Paramétrica em Sistemas Hamiltonianos com um grau e meio de liberdade**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, 2015. Disponível em: <http://bdtd.ufs.br/handle/tede/2684> (Consulta realizada em 23/10/2016)
- [19] SYNGE, J. L. **On the behavior, according to newtonian theory of a plumb line or pendulum attached to an artificial satellite**, Proceedings of The Royal Irish Academy, 1959.
- [20] VALERIANO, L. R. **Estabilidade Paramétrica no Problema de Robe**, Tese de Doutorado, Programa de Pós Graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, 2015.
- [21] VALERIANO, L. R. **Parametric Stability in Robe's Problem**, Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 21, No. 1, pp 126-135, 2016.
- [22] YAKUBOVICH, V. A.; STARZHINSKY, V.M. **Linear Differential Equations with Periodic Coefficients**, Wiley, New York, 1980.