



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Engenharia Civil

Pós-graduação em Engenharia Civil

Simulação por Linhas de Fluxo com Acoplamento Geomecânico

Jonathan da Cunha Teixeira

Tese de Doutorado

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências

Jonathan da Cunha Teixeira

Simulação por Linhas de Fluxo com Acoplamento Geomecânico

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia e Geociências da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Simulação e Gerenciamento de reservatórios de petróleo.

Orientador: Leonardo José do Nascimento Guimarães

Coorientador: Darlan Karlo Elisiário de Carvalho

Catálogo na fonte
Bibliotecária: Rosineide Mesquita Gonçalves Luz / CRB4-1361 (BCTG)

T266s Teixeira, Jonathan da Cunha.
Simulação por Linhas de Fluxo com Acoplamento Geomecânico /
Jonathan da Cunha Teixeira. – Recife: O Autor, 2015.
156fol. il., figs., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães.
Co-orientador: Prof. Dr. Dalan Karlo Elisiário de Carvalho.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2015.
Inclui Referências e Apêndice.

1. Engenharia Civil. 2. Acoplamento Hidromecânico. 3. Simulação
por Linhas de Fluxo. 4. Geomecânica. 5. Acoplamento Iterativo. I.
Guimarães, Leonardo José do Nascimento (Orientador). II. Carvalho,
Darlán Karlo Elisiário de (Co-orientador). III. Título.

624 CDD (22.ed) UFPE/BCTG-2016/ 15



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Tese de Doutorado

SIMULAÇÃO POR LINHAS DE FLUXO COM ACOPLAMENTO GEOMECÂNICO

defendida por

Jonathan da Cunha Teixeira

Considera o candidato APROVADO

Recife, 03 de agosto de 2015

Orientadores:

Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães - UFPE
(orientador)

Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho - UFPE
(co-orientador)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães - UFPE
(orientador)

Prof. Dr. Márcio Arab Murad – LNCC
(examinador externo)

Prof.^a Dr.^a Analice França Lima Amorim – UFPE
(examinadora externa)

Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf – UFPE
(examinador interno)

Prof. Dr. Ivaldo Dario da Silva Pontes Filho – UFPE
(examinador interno)

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente ao orientador dos orientadores DEUS!, que me concedeu toda a sabedoria, perseverança, paciência e fé que foram de grande importância para a finalização desta tese. SUA misericórdia e amor, que me acompanha a cada dia, foram e são o meu sustento para continuar avançando.

Aos meus pais pelo carinho, pela paciência, pelo apoio e pelo esmero que me ajudaram na formação pessoal e profissional e que na vida. Às minhas irmãs, que sempre acreditaram em meu potencial e através de sua admiração, sempre me incentivaram a aprender continuamente.

Ao Programa de Recursos Humanos da Agência Nacional de Petróleo (PRH-26), pela bolsa concedida durante o período de realização do doutorado, bem como aos coordenadores (Prof. Mário e Prof. Aduino) que passaram pelo PRH-26 durante o doutoramento.

Agradeço ao Prof. Leonardo pela orientação e pela confiança (inicialmente assustadora para mim) depositada a mim no desenvolvimento deste trabalho e tantos outros projetos que têm sido desenvolvidos no LMCG, fazendo o Laboratório expandir suas atividades. Ao Prof. Darlan, agradeço pelas incessantes, calorosas e frutíferas discussões e orientações acerca do trabalho desenvolvido e pela amizade demonstrada durante toda a jornada.

Um agradecimento especial aos colegas da PETROBRÁS Gustavo e Flávia Falcão, pelo apoio e confiança nos projetos desenvolvidos pelo grupo LMCG.

Agradeço também aos professores Ézio, Bernardo Horowitz, Antônio Barbosa, Ramiro e Ivaldo, pessoas com quem tenho convivido e aprendido bastante, os quais são dignos de muito respeito e admiração.

Não posso esquecer de agradecer aos amigos de trabalho, com os quais tenho convivido nestes últimos anos. Obrigado à: Marcos George pelos vários conselhos dados e pela amizade impar. À Igor um grande amigo com quem tenho convivido e aprendido bastante, agradeço também à Inaldo, Leonardo Cabral e Roubier pela amizade, pelos bons momentos juntos e boas risadas. Agradeço também à Luciana, Julliana, Nayra, Liliane, Débora, Aline, Laís, Rose, Sara, Isabella, Priscila Gamero e Gabriela bem como as meninas do GRS (Erika, Talita e Priscila Macedo) pelas pessoas especiais que têm sido em minha vida e às novas amizades adquiridas durante o doutorado Thiago, Rafael, Vinicius, Ana Itamara, Aldemir, Oscar, Aura, Leila, Marcela, Thiago Mamu entre tantas outros com quem tenho convivido. Obrigado também à Vânia, Seu Bill e Brito pelas pessoas de bem que são e pelos momentos juntos.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

RESUMO

A importância da geomecânica e do estudo de esquemas de acoplamento entre a geomecânica e fluxo multifásico têm sido cada vez mais importantes e utilizados pela indústria a medida que formações cada vez mais profundas vêm sendo descobertas e exploradas. O entendimento do comportamento do estado de tensão em um reservatório permite produzir um melhor entendimento das implicações geomecânicas que ocorrem durante a fase de exploração, isso porque durante esta fase, as alterações na poro-pressão conduzem perturbações no equilíbrio mecânico afetando o estado de tensão de formações profundas, de maneira a alterar as propriedades da rocha tais como permeabilidade e porosidade. No entanto, a simulação acoplada (hidromecânica) em um grande campo heterogêneo implica na solução de equações de fluxo e mecânica, associadas a um grande número de graus de liberdade que torna esse tipo de abordagem inviável e computacionalmente cara. Neste contexto, um simulador geomecânico-linhas de fluxo é apresentado dentro de um algoritmo sequencial iterativo. Neste trabalho, aplica-se o método de elementos finitos com volume de controle para o subproblema poro-mecânico que fornece um campo de velocidade de Darcy pós-processado e a porosidade como entradas para o subproblema de transporte. Este subproblema é resolvido através do método de decomposição de operador, no qual baseia-se em um esquema preditor-corretor com os passos preditor e corretor discretizados pelos esquemas baseados em tempo de vôo e volumes finitos, respectivamente. Simulações numéricas de injeção de água foram comparadas com soluções encontradas na literatura, mostrando bons resultados. Em problemas dominados pela advecção, envolvendo um reservatório naturalmente fraturado, a abordagem implementada foi capaz de prever a distribuição do campo de saturação ao longo de toda simulação. Além disso, para avaliar a resposta geomecânica, simulações numéricas foram realizadas em um grande sistema de reservatório-rocha capeadora em uma fase de recuperação primária de hidrocarboneto, mostrou que a formulação apresentada provou ser: uma alternativa promissora para simulação hidro-geomecânica tradicional; úteis para o modelo de fluxo de redução de ordem nos casos em que o comportamento geomecânico são mais importantes do que o comportamento de fluxo e de uma ferramenta complementar para simulação geomecânica convencional.

Palavras-chave: acoplamento hidromecânico, simulação por linhas de fluxo, geomecânica, acoplamento iterativo.

ABSTRACT

The importance of geomechanics and the study of coupling between geomechanics and multiphase flow have been increasingly recognized and used by the industry as deeper formations are discovered and exploited. The knowledge of the state of stress in a reservoir yields a better understanding of the geomechanical implications during exploitation stage, because during the primary recovery stage, changes in pore pressure leads to perturbations in the mechanical equilibrium, affecting the stress state in the formations in a way that alters the rock properties such as permeability and porosity. However, the coupled simulation (hydromechanical) in large field heterogeneous models involves stress and flow equations solving, associated with a large number of degrees-of-freedom which becomes infeasible and computationally costly. In this context, a geomechanical-streamline simulator is presented within an iteratively coupled framework algorithm. In the present work, we applied control volume finite element method for the poromechanics subproblem which provides a Darcy velocity field through a post-processing velocity procedure and porosity as input fields to the transport subproblem. Such subproblem is solved by means of an operator splitting method, which is based on a predictor-corrector scheme with the predictor and corrector steps discretized by a time-of-flight and a finite volume based schemes, respectively. Numerical simulations of water-flooding are compared to the numerical results available in literature, showing good results. In convection-dominated problems, involving a naturally fractured reservoir, the approach was able to predict the saturation distributions for the whole simulation correctly. Furthermore, to appraise the geomechanical response, numerical simulation was performed in a large reservoir-caprock system in a primary hydrocarbon recovery stage, showing that the formulation presented proved to be: a promising alternative to traditional hydro-geomechanical simulation; useful for flow model order reduction in cases where the geomechanical behavior is more important than the flow behavior and a complementary tool for conventional geomechanical simulations.

Keywords: hydromechanical coupling, streamline simulation, geomechanics, iterative coupling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Fenômenos físicos encontrados em reservatórios de petróleo quando submetidos à depleção.	34
Figura 3.1 – Modelos de permeabilidades relativas das fases em função da saturação da água.	54
Figura 3.2 – Deslocamento (a), deformação normal (b) e deformação cisalhante (c).	55
Figura 3.3 – Forças atuando em um corpo arbitrário.	57
Figura 3.4 – Tensor de tensões em um sistema de coordenadas arbitrário(esquerda). Tensor de tensões no sistema de coordenadas principal(direita).	58
Figura 3.5 – Esquema ilustrativo da formulação IMPES.	66
Figura 3.6 – Esquema ilustrativo da formulação IMPES modificado.	67
Figura 3.7 – (a) Campo de velocidade e incógnitas do procedimento de Pollock para o traçado das linhas de fluxo em uma célula, (b) determinação da face de saída da linha com os tempo de percurso para cada face.	69
Figura 3.8 – Sub-célula do volume finito mapeada para o espaço normalizado utilizando a transformação isoparamétrica.	71
Figura 3.9 – Método de Pollock considerando malhas não-estruturada.	74
Figura 4.1 – Domínio de um problema arbitrário Ω e seu contorno $\partial\Omega$	78
Figura 4.2 – Função teste φ_i	79
Figura 4.3 – Ilustração do domínio do problema de equilíbrio.	80
Figura 4.4 – Ilustração do domínio do problema da pressão.	83
Figura 4.5 – Representação da malha triangular primal (simplex) e a malha de volumes finitos (dual).	86
Figura 4.6 – (a) Definição dos vetores normais \vec{n}_1 e \vec{n}_3 ; (b) Velocidade total no i -ésimo elemento \vec{v}_i e velocidades nodais (\vec{v}_{s1} , \vec{v}_{s2} e \vec{v}_{s3}) e interpolada (\vec{v}_s) do sólido (c) definição das arestas do sub-volume de controle (\mathcal{Q}) e (d) vazões sobre as superfícies de controle (V) diretamente da solução da pressão.	87
Figura 4.7 – (a) 52 Linhas traçadas empregando o campo de velocidade descontínuo, \vec{v} ; (b) 52 Linhas traçadas empregando o campo de velocidade pós-processado.	88
Figura 4.8 – Vazões normais (a) nas arestas internas do volume de controle; (b) e sobre o perímetro do volume de controle ∂V_p	89
Figura 4.9 – Condição de irrotacionalidade do campo de pressão em torno do nó p (p-ésimo volume de controle).	90
Figura 4.10–Ilustração do domínio do subproblema de transporte.	91

Figura 4.11–Definição de nó e segmento de linha de fluxo lançada de um poço injetor. O primeiro nó corresponde ao nó de contorno atribuído à injeção de fluido.	92
Figura 4.12–Processo de regularização de uma linha de fluxo.	93
Figura 4.13–Processo de regularização de uma linha de fluxo.	96
Figura 4.14–Entidades geométricas associadas ao processo de discretização do problema de transporte.	98
Figura 4.15–Ilustrações dos tipos de acoplamento.	104
Figura 5.1 – Geometria do problema e condições de contorno.	109
Figura 5.2 – Malhas utilizadas pelo MRST (a) e CODE_BRIGTH (b).	111
Figura 5.3 – Comparativo entre as linhas de fluxotraçadas pelo modulo baseado em linhas de fluxo(linhas vermelhas) com as linhas geradas pelo MRST (linhas azuis).	111
Figura 5.4 – Comparação entre a solução analítica e a solução numérica pseudo-unidimensional.	113
Figura 5.5 – Evolução do corte de água no poço produtor para as razões de mobilidade de (a) $M = 0,5$; (b) $M = 0,9$; (c) $M = 10,0$	115
Figura 5.6 – Relação entre o tamanho do passo de tempo implícito pela média do passo de tempo de explícito para as razões de mobilidade de (a) $M = 0,5$; (b) $M = 0,9$; (c) $M = 10,0$ (caso homogêneo).	116
Figura 5.7 – (a) Geometria e condições de contorno do problema, (b) malha alinhada ao escoamento, (c) malha transversal ao escoamento e (d) malha não-estruturada.	117
Figura 5.8 – (a) linhas de fluxo traçadas e (b) perfil de saturação obtidos em $VPI=0,1$ considerando malha alinhada ao escoamento.	119
Figura 5.9 – (a) linhas de fluxo traçadas e (b) perfil de saturação obtidos em $VPI=0,1$ considerando malha transversal ao escoamento.	119
Figura 5.10–(a) linhas de fluxo traçadas e (b) perfil de saturação obtidos em $VPI=0,1$ considerando malha não estruturada.	120
Figura 5.11–Comparativo do óleo acumulado para o problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços obtidos para as três configurações de malha.	121
Figura 5.12–Comparativo para o óleo recuperado no problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços.	121
Figura 5.13–Perfis do divergente a nível de elemento e irrotacional do campo de velocidade pós-processado para a malha alinhada para $VPI=0,1$	122
Figura 5.14–Perfis do divergente a nível de elemento e irrotacional do campo de velocidade pós-processado para a malha transversal para $VPI=0,1$	122
Figura 5.15–Perfis do divergente a nível de elemento e irrotacional do campo de velocidade pós-processado para a malha não-estruturada para $VPI=0,1$	123

Figura 5.16–Geometria e condições de contorno do reservatório sintético naturalmente fraturado.	123
Figura 5.17–Curvas de permeabilidade relativas usadas no caso do reservatório naturalmente fraturado.	125
Figura 5.18–Perfis de (a) saturação de água, (b) saturação de água sobre as linhas de fluxo, (c) divergente a nível de elemento e (d) irrotacional.	125
Figura 5.19–Detalhes das regiões onde ocorre dispersão dos fluidos, no topo linhas de fluxotraçadas e abaixo perfil do módulo da velocidade de Darcy total em $t= 3$ dias.	126
Figura 5.20–Evolução do perfil de saturação sobre a malha de elementos finitos (à esquerda) e ao longo das linhas de fluxo(à direita).	127
Figura 5.21–Problema de compactação.	128
Figura 5.22–Condições de contorno hidráulicas e mecânicas impostas no problema de compactação.	129
Figura 5.23–Curvas de produção acumulada de óleo (efeito do acoplamento geomecânico).	129
Figura 5.24–Variação da porosidade com o tempo no poço produtor e injetor.	131
Figura 5.25–Variação da permeabilidade com o tempo no poço produtor e injetor.	131
Figura 5.26–Distribuição da poro-pressão: (a) geostático; (b) Após abertura dos poços.	132
Figura 5.27–Deslocamento vertical: (a) Evolução da compactação sobre a bacia (b) Distribuição dos deslocamentos no modelo.	133
Figura 5.28–Perfis de saturação ao longo das linhas de fluxotraçadas para problema de compactação considerando e não considerando o efeito geomecânico.	134
Figura A.1– <i>Streamline</i> e o campo de velocidade no espaço bidimensional.	155
Figura A.2– <i>Streamtube</i> no espaço bidimensional.	156
Figura C.1–Condições iniciais e de contorno do caso de $\frac{1}{4}$ do problema padrão de cinco poços alocados (<i>five spot</i>).	161
Figura C.2–Campo de pressão obtido.	162
Figura C.3–Campo de velocidade obtido.	162
Figura C.4–Malha de elementos finitos com volumes de controle.	163
Figura C.5–Lista de nós e elementos.	164
Figura C.6–Lista de nós e elementos.	168
Figura C.7–Fluxos normais as faces do elemento.	170

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Propriedades do domínio e dos fluidos para o caso de validação do traçado.	110
Tabela 5.2 – Propriedades do domínio e dos fluidos para o problema Buckley-Leverett.	112
Tabela 5.3 – Propriedades do domínio e dos fluidos.	114
Tabela 5.4 – Parâmetros utilizados para o controle do passo de tempo.	114
Tabela 5.5 – Propriedades do domínio e dos fluidos para a solução de transporte. . .	118
Tabela 5.6 – Propriedades do domínio e dos fluidos para o caso sintético.	124
Tabela 5.7 – Propriedades do domínio e dos fluidos para o caso de compactação. . .	130
Tabela C.1 – Vetores velocidade.	164
Tabela C.2 – Coordenada dos nós necessários.	165
Tabela C.3 – Dados geométricos.	165
Tabela C.4 – Vetores velocidade.	169
Tabela C.5 – Coordenada dos nós necessários.	169
Tabela C.6 – Vetores das velocidades pós-processadas dos nós do elemento 25.	170

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

1. INTRODUÇÃO

IMPES abreviação de *Implicit Pressure Explicit Saturation*.

2. REVISÃO

CVFEM Método dos Elementos Finitos com Volume de Controle.

MFEM Método dos Elementos Finitos Mistos.

MPFA Método dos Volumes Finitos com Aproximação de Múltiplos Pontos.

SAGD *Steam Assisted Gravity Drainage*.

SPH Método *Smooth Particle Hydrodynamic*.

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

$\Delta\tau_{e,i}$ Incremento do tempo de vôo que atravessa o i-ésimo sub-volumes de controle/sub-células (eq. 3.94)

$\Delta\tau_{e,i}$ Incremento do tempo de vôo que atravessa o i-ésimo sub-volumes de controle/sub-células (eq. 3.98)

(ξ_e, η_e) coordenadas de saída da linha de fluxono espaço normalizado. (eq. 3.88)

(ξ_o, η_o) coordenadas de entrada da linha de fluxono espaço normalizado. (eq. 3.88)

(x_e, y_e) coordenadas de saída da linha de fluxona célula. (eq. 3.70)

(x_i, y_i) coordenadas de entrada da linha de fluxona célula. (eq. 3.70)

(x_o, y_o) coordenada local de referência na célula. (eq. 3.66)

α fator poroelástico de Biot (eq. 3.31)

σ' tensor de tensões efetivas (eq. 3.30)

ϵ tensor de deformação (eq. 3.7)

$\mathbf{K}(\phi)$ tensor de segunda ordem, permeabilidade intrínseca da matriz porosa (eq. 3.1)

\mathbf{K}_o tensor permeabilidade inicial (eq. 3.42)

\mathbf{S} tensor de tensão desviador (eq. 3.20)

- \mathbf{T} ou $\boldsymbol{\sigma}$ tensor de tensões (eq. 3.14)
- χ e ψ *bistreamfunction* (eq. 3.96)
- δ_{ij} delta de Kronecker (eq. 3.28)
- κ_0 factor modificador da forma dos poros da equação de Kozeny-Carman (eq. 3.41)
- λ constante elástica de Lamè (eq. 3.27)
- λ mobilidade total (eq. 3.58)
- $\lambda_\alpha(s_w)$ mobilidade da fase α (eq. 3.3)
- λ_g mobilidade gravitacional total (eq. 3.58)
- \mathbb{C} tensor (de quarta ordem) constitutivo elástico (eq. 3.24)
- C_{ijkl} componentes do tensor constitutivo elástico (eq. 3.24)
- f_η componente na direção η do fluxo volumétrico total linearmente interpolada no espaço normalizado. (eq. 3.78)
- f_ξ componente na direção ξ do fluxo volumétrico total linearmente interpolada no espaço normalizado. (eq. 3.78)
- v_i velocidade intersticial normal da i -ésima face da célula quadrada (eq. 3.65)
- v_x componente na direção x da velocidade intersticial linearmente interpolada na célula. (eq. 3.66)
- v_y componente na direção y da velocidade intersticial linearmente interpolada na célula. (eq. 3.66)
- μ constante elástica de Lamè (eq. 3.27)
- μ_α saturação da fase α (eq. 3.1)
- Ω domínio de um corpo arbitrário no espaço (eq. 3.8)
- $\bar{\sigma}$ tensão média (eq. 3.20)
- ∂V_i contorno da i -ésima célula / volume de controle. (eq. 4.39)
- $\partial\Omega$ fronteira do domínio Ω (eq. 3.8)
- ϕ porosidade (eq. 3.1)
- ϕ_o porosidade inicial (eq. 3.42)

ρ	massa específica da matriz rochosa (eq. 3.12)
$\rho_\alpha(p)$	densidade da fase α (representando a fase óleo ou a fase água) (eq. 3.0)
ρ_α^o	densidade da fase α (representando a fase óleo ou a fase água) na pressão de referência (eq. 3.0)
ρ_s	densidade da rocha (eq. 3.34)
ρ_s^o	densidade da rocha obtida na pressão de referência (eq. 3.34)
σ	representação matricial do tensor de tensões no sistema de coordenadas cartesiano (eq. 3.10)
σ_1	tensão principal maior (eq. 3.16)
σ_2	tensão principal intermediária (eq. 3.16)
σ_3	tensão principal menor (eq. 3.16)
σ_{ij}	componente $ij \in 1, 2, 3$ ou x, y, z do tensor de tensões (eq. 3.11)
$\tau(s)$	Tempo de vôo ao longo da linha de fluxos (eq. 3.93)
\vec{v}_α	velocidade intersticial da fase α (eq. 3.48)
Δt^m	passo de tempo da solução da equação de transporte da linha de fluxo (eq. 4.57)
Δt^m	passo de tempo da solução da equação de transporte da linha de fluxo (eq. 4.59)
Δt_p	passo de tempo da solução da pressão (eq. 4.57)
Δt_p	passo de tempo da solução da pressão (eq. 4.59)
Δx	dimensão da célula em x. (eq. 3.67)
Δx	dimensão da célula em y. (eq. 3.67)
$\Delta \tau_e$	tempo de percurso que a linha de fluxoleva para atravessar a célula. (eq. 3.71)
$\Delta \tau_{e,x}$	tempo de percurso da partícula percorrer a distância entre x_i e x_e . (eq. 3.70)
$\Delta \tau_{e,y}$	tempo de percurso da partícula percorrer a distância entre y_i e y_e . (eq. 3.70)
ε	representação matricial do tensor de deformação ε no sistema de coordenadas cartesiano (eq. 3.8)
ε_i	Comprimento da i-ésima face da célula. (eq. 3.78)
ε_{ij}	componente $ij \in 1, 2, 3$ ou x, y, z do tensor de deformação (eq. 3.7)

ε_{kk} ou $tr(\boldsymbol{\varepsilon})$	deformação volumétrica (eq. 3.29)
\vec{v}_{si}	velocidade do deslocamento do sólido interpolado no i -ésimo elemento (eq. 4.41)
\vec{b}	Foças de corpo atuantes no interior de um corpo (eq. 3.8)
\vec{f}	Foça externa pontual atuante sobre a fronteira do corpo arbitrário $\partial\Omega$ (eq. 3.8)
\vec{g}	vetor força gravidade (eq. 3.1)
\vec{n}_i	velocidade total. (eq. 3.64)
\vec{n}_i	vetor normal a i -ésima face apontando para fora da célula. (eq. 3.65)
\vec{s}	estado de tensão definido no plano normal \vec{n} (eq. 3.10)
\vec{t}_i	vetor tangente ligando os pontos médios de duas arestas do triângulo \mathcal{T} (eq. 4.46)
\vec{u}	vetor deslocamento (eq. 3.6)
\vec{v}	velocidade intersticial (eq. 3.64)
\vec{v}	velocidade total (eq. 3.57)
\vec{v}_i^*	vetor velocidade resultante ($\vec{v} + \vec{v}_s$) obtido após o pós-processamento do campo de velocidade resultante (eq. 4.47)
\vec{v}_s	velocidade de deslocamento da rocha (eq. 3.38)
\vec{v}_s	velocidade de deslocamento da rocha (eq. 3.43)
\vec{x}'	vetor posição de um ponto material na condição deformada (eq. 3.6)
\vec{x}	vetor posição de um ponto material na condição indeformada (eq. 3.6)
ξ e η	coordenadas do espaço de referência ou normalizado. (eq. 3.78)
b	parâmetro do material da relação exponencial da permeabilidade. (eq. 3.42)
c_α	compressibilidade da fase α (eq. 3.0)
$d\tau$	variação do tempo de vôo no interior da célula. (eq. 3.68)
d_g	diâmetro dos grãos da equação de Kozeny-Carman (eq. 3.41)
f_α	fluxo fracional da fase α (eq. 3.62)
f_i	fluxo volumétrico total normal a i -ésima face da célula. (eq. 3.78)
$f_{i,1}$	fluxo volumétrico no segmento 1 (ε_1) i -ésimo elemento (eq. 4.41)

$f_{i,2}$	fluxo volumétrico no segmento 2 (ε_2) i i-ésimo elemento (eq. 4.41)
$f_{i,3}^*$	fluxo normal a aresta ε_3 do subvolume \mathcal{Q}_i (eq. 4.43)
$f_{i,4}^*$	fluxo normal a aresta ε_4 do subvolume \mathcal{Q}_i (eq. 4.43)
$f_{r,i}$	fluxo mapeado para o espaço normalizado. (eq. 3.86)
f_{scv}	fluxo de um segmento do volume de controle (eq. 4.48)
f_{wp}	fluxo fracionário de água no p-ésimo poço produtor. (eq. 4.56)
f_{wp}	fluxo fracionário de água no p-ésimo poço produtor. (eq. 4.58)
G	módulo de cisalhamento (eq. 3.29)
g_α	fluxo fracional gravitacional da fase α (eq. 3.63)
I_1	primeiro invariante do tensor de tensões (eq. 3.19)
I_2	segundo invariante do tensor de tensões (eq. 3.19)
I_3	terceiro invariante do tensor de tensões (eq. 3.19)
$J(\xi, \eta)$	Jacobiano. (eq. 3.82)
J_1	primeiro invariante do tensor de tensão desviador (eq. 3.24)
J_2	segundo invariante do tensor de tensão desviador (eq. 3.24)
J_3	terceiro invariante do tensor de tensão desviador (eq. 3.24)
K_T	módulo de rigidez do meio rochoso, <i>bulk modulus</i> (eq. 3.32)
K_T	módulo de rigidez dos grãos da rocha (eq. 3.32)
$k_{r\alpha}(s_w)$	permeabilidade relativa da fase α (eq. 3.1)
m_α	vazão mássica de injeção da fase α (eq. 3.48)
m_η	gradiente de fluxo na direção η no interior do quadrado unitário. (eq. 3.84)
m_ξ	gradiente de fluxo na direção ξ no interior do quadrado unitário. (eq. 3.84)
m_x	gradiente da velocidade na direção x no interior da célula. (eq. 3.67)
m_y	gradiente da velocidade na direção y no interior da célula. (eq. 3.67)
n_{el}^{ssl}	número de segmentos de linhas de fluxo que passam pelo elemento el . (eq. 4.60)
$n_{e,p}$	número de sub-volume, \mathcal{Q}_i , que formam o p-ésimo volume de controle, V_p (eq. 4.45)

- n_{scv}^{sl} o número de linhas lançadas no segmento do volume de controle (eq. 4.48)
- n_{sc} Número de sub-volumes de controle/sub-células atravessadas pela linha de fluxo (eq. 3.94)
- n_{sol} número de soluções internas da equação de transporte da linha de fluxo (eq. 4.57)
- n_{sol} número de soluções internas da equação de transporte da linha de fluxo (eq. 4.59)
- n_{ssl} número de segmentos da linha de fluxoregularizada. (eq. 4.57)
- n_{ssl} número de segmentos da linha de fluxoregularizada. (eq. 4.59)
- p pressão total de fluido, equivalente a poro-pressão efetiva (eq. 3.4)
- p_o pressão de referência (eq. 3.0)
- p_α pressão da fase α (eq. 3.1)
- q vazão volumétrica total (eq. 3.57)
- q^{sl} fluxo atribuído em uma linha de fluxotraçada (eq. 4.48)
- q_α vazão volumétrica de injeção da fase α (eq. 3.48)
- s_w^{sl} Saturação de água no i -ésimo segmento da linha de fluxo. (eq. 4.60)
- s_w saturação da fase α (eq. 3.1)
- s_w^{el} Saturação de água no elemento el (eq. 4.60)
- t tortuosidade da equação de Kozeny-Carman (eq. 3.41)
- $tr(\bullet)$ operador traço (eq. 3.19)
- u_i ou u_j componente i ou j do vetor de deslocamento (eq. 3.7)
- V_i i -ésima célula / volume de controle. (eq. 4.39)
- \vec{v}_α velocidade de Darcy da fase α (eq. 3.1)
- CFL Courant–Friedrichs–Lewy .

4. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

$(f_w^{sl})_i$ fluxos fracionários de água no i -ésimo segmento da linha de fluxoregularizada. (eq. 4.53)

$(s_w)_i^{(n+1)}$ saturação da água no i -ésimo volume de controle. (eq. 4.65)

- $(s_w^{sl})_i^{(n+1)}$ predição da saturação de água no i -ésimo segmento da linha de fluxoregularizada avaliado no $n + 1$ passo de tempo. (eq. 4.53)
- $[\phi^e]$ porosidade do e -ésimo elemento finito (eq. 4.36)
- σ tensor de segunda ordem de tensões. (eq. 4.7)
- Δt_p^{n+1} tamanho do passo de tempo para atualização do campo de pressão (eq. 4.76)
- $\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t}$ taxa de deslocamento prescrita no contorno $\partial\Omega^u$ (eq. 4.69)
- γ_p fator multiplicador da vazão prescrita aplicada no contorno $\partial\Omega^p$ (eq. 4.70)
- γ_u fator multiplicador do vetor força aplicado no contorno $\partial\Omega^u$ (eq. 4.69)
- $[\lambda(s_w)]^e$ mobilidade total do e -ésimo elemento. (eq. 4.30)
- $[\vec{v}_s]_j$ velocidade de deslocamento do sólido avaliado no j -ésimo segmento do volume finito. (eq. 4.65)
- $[g_w(s_{wj})]_j$ fluxo fracionário gravitacional da fase água avaliado no j -ésimo segmento do volume de controle V_i (eq. 4.65)
- $L(x)$ operador de derivadas parciais (eq. 4.1)
- B_j matriz de funções de forma diferencial do problema de equilíbrio mecânico. (eq. 4.19)
- B_p matriz de funções de forma diferenciadas do problema da equação da pressão. (eq. 4.28)
- C_p matriz de acoplamento do problema da equação da pressão (eq. 4.34)
- C_u matriz de acoplamento do problema de equilíbrio mecânico (eq. 4.21)
- D tensor constitutivo mecânico expresso na forma matricial. (eq. 4.20)
- K_p matriz de rigidez do problema da equação da pressão (eq. 4.34)
- K_u matriz de rigidez do problema de equilíbrio mecânico (eq. 4.21)
- N_p matriz de funções de forma do problema da equação da pressão. (eq. 4.26)
- N_u matriz de funções de forma do problema de equilíbrio mecânico. (eq. 4.15)
- S_u forma matricial do operador em derivadas parciais do problema de equilíbrio mecânico. (eq. 4.17)
- Ω domínio do problema arbitrário. (eq. 4.6)
- Ω^u domínio do problema de equilíbrio mecânico. (eq. 4.8)

Ω_e	domínio do elementos finitos (eq. 4.6)
\bar{p}	pressão de fundo de poço ou pressão prescrita aplicada no contorno $\partial\Omega^p$ (eq. 4.70)
\bar{q}	condição de contorno mista aplicada à equação da pressão. (eq. 4.22)
$\partial\Omega$	contorno do domínio arbitrário. (eq. 4.6)
ϕ_e	porosidade do e-ésimo elemento finito. (eq. 4.66)
ϕ_i	porosidade do i-ésimo volume de controle. (eq. 4.65)
Δt_s	passo de tempo da solução do problema corretor, definido pelo critério CFL. (eq. 4.65)
Δt_{sl}	passo de tempo utilizado na solução da linha de fluxo, satisfazendo o critério CFL. (eq. 4.53)
$\Delta\tau$	passo de tempo de vôo da linha de fluxo após o processo de regularização. (eq. 4.53)
$\vec{\sigma}$	representação vetorial do tensor de tensões. (eq. 4.12)
$\vec{\varepsilon}$	representação vetorial do tensor de deformações. (eq. 4.12)
\vec{b}	vetor de forças de corpo. (eq. 4.7)
\vec{f}_b	contribuição ao vetor de carga de forças de corpo (eq. 4.21)
\vec{f}_{Γ_p}	contribuição de imposição de fluxo no contorno (eq. 4.34)
\vec{f}_{Γ_u}	contribuição ao vetor de carga devido às condições de contorno (eq. 4.21)
\vec{f}_g	desconto do fluxo devido à parcela gravitacional (eq. 4.34)
\vec{f}_N	Vetor de forças aplicada no contorno $\partial\Omega^u$ (eq. 4.69)
\vec{m}	vetor para cálculo de traço de tensores na forma vetorial. (eq. 4.20)
\vec{n}_i	vetor normal do i-ésimo fluxo (eq. 4.77)
\vec{n}_j	vetor normal orientado para fora do j-ésimo segmento do volume de controle. (eq. 4.65)
\vec{p}	vetor de pressões nodais do e-ésimo elemento. (eq. 4.27)
\vec{u}^e	vetor de deslocamentos do e-ésimo elemento. (eq. 4.16)
\vec{v}_h^{n+1}	velocidade total constante sobre os elementos (eq. 4.37)
f_i^n	fluxo pós-processado no intervalo n (eq. 4.77)

- f_i^{n-1} fluxo pós-processado no intervalo $n - 1$ (eq. 4.77)
- n^p número de funções de forma escalares do problema da equação da pressão. (eq. 4.9)
- n^u número de funções de forma escalares do problema de equilíbrio mecânico. (eq. 4.9)
- n_{CFL} o número de Courant-Fredrich-Lewy. (eq. 4.54)
- n_{el} número de elementos finitos (eq. 4.6)
- q_n vazão volumétrica prescrita de óleo no contorno $\partial\Omega^p$ (eq. 4.70)
- q_w vazão volumétrica prescrita de água no contorno $\partial\Omega^p$ (eq. 4.70)
- R_{Ω^p} resíduo da equação da pressão do método dos elementos finitos. (eq. 4.22)
- s_{wj} saturação de água avaliado no j -ésimo ponto de integração (segmento do volume de controle) (eq. 4.65)
- V_e volume do e -ésimo elemento. (eq. 4.66)
- V_i volume do i -ésimo volume de controle. (eq. 4.65)
- V_i i -ésimo volume de controle. (eq. 4.63)
- v_{max}^w máxima velocidade de choque. (eq. 4.54)
- DVTOL tolerância prescrita limitando a variação do campo de velocidade ao longo da simulação (eq. 4.76)

MRP Método dos Resíduos Ponderados.

Apêndices

- Ψ_A e Ψ_B *streamfunction* da linha de fluxo A e *streamfunction* da linha de fluxo B (eq. A.4)
- ds comprimento infinitesimal de um segmento da linha de fluxo (eq. A.3)
- q_{AB} vazão volumétrica de um tubo de fluxo (eq. A.4)
- v_x e v_y componentes x e y do campo de velocidade local (eq. A.2)
- $x(s, t)$ e $y(s, t)$ forma parametrizada da linha de fluxo (eq. A.1)

SUMÁRIO

	Sumário	29
1	INTRODUÇÃO	33
1.1	Motivação	33
1.2	Objetivos	36
1.3	Organização do documento	36
1.4	Notação	37
I	REVISÃO DA LITERATURA	39
2	REVISÃO	41
2.1	Linhas de fluxo	41
2.2	Linhas de fluxo em malhas não-estruturadas	44
2.3	Simulação por linhas de fluxo considerando outras físicas	46
2.4	Modelagem geomecânica e acoplamento com simulação por linhas de fluxo	47
II	ASPECTOS TEÓRICOS	51
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	53
3.1	Equações do contínuo	53
3.1.1	Fase fluida	53
3.1.2	Fase sólida	55
3.1.2.1	Deformação	55
3.1.2.2	Tensão	56
3.1.2.3	Elasticidade Linear	59
3.1.2.4	Poroelasticidade	59
3.1.2.5	Densidade do sólido	61
3.1.2.6	Permeabilidade	62
3.2	Conservação de massa para meios porosos deformáveis	62
3.2.1	Fase sólida	62
3.2.2	Fases fluidas	63
3.3	Equações governantes da formulação IMPES	64
3.4	Formulação baseada em linhas de fluxo	68
3.4.1	Construção das linhas de fluxo	68

3.4.1.1	Malhas estruturadas - método de Pollock	68
3.4.1.2	Malhas não-estruturadas	71
3.4.1.3	Transformação isoparamétrica bilinear	74
3.4.2	Equação de transporte ao longo das linhas de fluxo	75
4	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	77
4.1	Problema generalizado	77
4.2	Discretização do domínio	78
4.3	Subproblema poromecânico	79
4.3.1	Equação de equilíbrio	79
4.3.2	Equação da pressão	82
4.4	Subproblema da porosidade	84
4.5	Processamento e pós-processamento da velocidade total	85
4.6	Subproblema de transporte	90
4.6.1	Problema preditor	91
4.6.1.1	Processo de regularização das linhas e mapeamento das propriedades de transporte	93
4.6.1.2	Solução da equação de transporte sobre as linhas de fluxo	94
4.6.1.3	Mapeamento da vazão e propriedades transportadas para os poços produtores	95
4.6.1.4	Mapeamento das propriedades para a malha de simulação	96
4.6.2	Problema corretor	97
4.7	Condições de contorno e iniciais dos subproblemas	98
4.7.1	Subproblema poromecânico	98
4.7.2	Subproblema de transporte	99
4.8	Estratégia do controle do passo de tempo	99
4.9	Acoplamento hidro-geomecânico	101
4.9.1	Tipos de acoplamento	101
4.9.2	Implementação do acoplamento	103
III	RESULTADOS	107
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	109
5.1	Traçado das linhas de fluxo	109
5.2	Solução de transporte ao longo das linhas de fluxo	112
5.2.1	Transporte unidimensional - Problema Buckley-Leverett	112
5.2.2	Estratégia de controle do passo de tempo	113
5.2.3	Efeito de malha - Problema de 1/4 de Cinco Poços	116
5.3	Reservatório naturalmente fraturado: caso sintético	120
5.4	Problema de compactação e subsidência	126

IV	CONSIDERAÇÕES FINAIS	135
6	CONCLUSÃO	137
7	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	141
	REFERÊNCIAS	143
	 APÊNDICES	 153
	APÊNDICE A – LINHAS E TUBOS DE FLUXO	155
A.1	Definição	155
	 APÊNDICE B – TRANSFORMAÇÃO ISOPARAMÉTRICA BILINEAR INVERSA	 157
B.1	Caso 1	158
B.2	Caso 2	158
B.3	Caso 3	159
B.4	Caso 4	159
B.5	Caso 5	159
	 APÊNDICE C – PÓS-PROCESSAMENTO DO CAMPO DE VE- LOCIDADE RESULTANTE	 161
C.1	Nó no interior do domínio	164
C.2	Nó no contorno	168
C.3	Implicações do pós-processamento	170

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

A divulgação dos grandes reservatórios do pré-sal, que representam um novo potencial petrolífero para o país, traz novos desafios científicos e tecnológicos que tendem a crescer durante a fase operacional. Assim, o desenvolvimento de pesquisa de fronteira de cunho multidisciplinar na área de simulação de reservatórios é base essencial para a exploração racional da riqueza gerada pela produção de óleo e gás.

Para isso a engenharia de reservatório apresenta um importante papel, pois um de seus objetivos é o estudo de novas estratégias e métodos para otimização da produção de hidrocarbonetos contidos no campo. Para realização deste objetivo é preciso prever o comportamento do reservatório durante todo o tempo de concessão, para uma melhor tomada de decisão sobre como desenvolver e produzir o petróleo, para isso, o desenvolvimento de modelos matemáticos e ferramentas computacionais para a simulação de reservatórios se apresenta como um tema de grande interesse.

Para a adequada modelagem de reservatórios, torna-se necessária a caracterização geológica detalhada, levando em consideração a complexidade geométrica, heterogeneidades de fácies, porosidades e permeabilidades. Em vista disso, hoje os engenheiros de reservatórios e geólogos fazem uso de complexos e cada vez maiores *workflows* como ferramenta de tomada de decisão, envolvendo métodos geoestatísticos com o intuito de construir modelos de reservatórios mais realísticos. Entretanto, a combinação de reservatórios extensos com a necessidade de melhor caracterização conduz à modelos da ordem de 10^6 a 10^7 células, tendo como consequência o crescimento dos tempos de simulação e atrasos na definição de projetos de produção ou restrição na quantidade de alternativas e cenários de desenvolvimento a serem analisados.

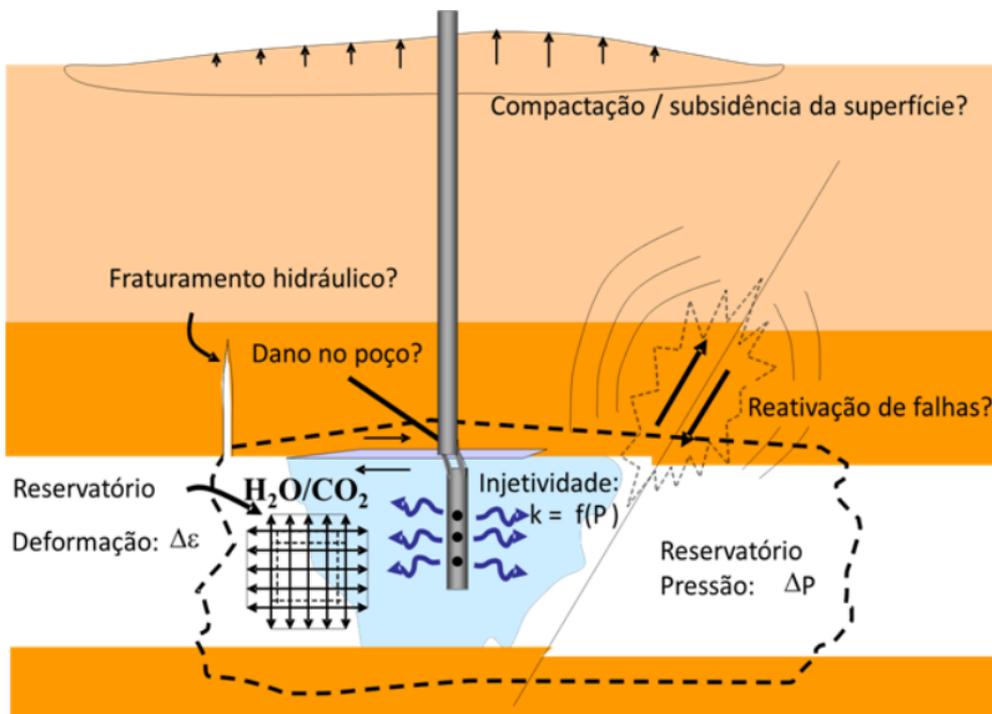
Apenas a geração de um modelo geológico detalhado não é o bastante para um correto gerenciamento de reservatório, pois no processo de exploração de hidrocarbonetos em formações geológicas não-consolidadas, as mudanças na poro-pressão, devido à produção, resultam na redistribuição das tensões efetivas na matriz porosa, tendo como consequência a compactação do meio, originando o fenômeno de subsidência. A importância do conhecimento do comportamento geomecânico de tais formações cresce continuamente, na medida que reservatórios cada vez mais profundos têm sido detectados e explorados.

Portando, para a maximização da recuperação de óleo em um campo, previsões precisas da extração em formações geológicas deste tipo requerem um modelo detalhado para a simulação do escoamento e da deformação mecânica, exigindo tanto um conhecimento

profundo dos fatores geomecânicos, que influenciam na dinâmica do escoamento, quanto uma metodologia numérica capaz de capturar a física do problema, representada pelo modelo matemático. A representação numérica precisa dos fenômenos físicos que ocorrem quando submetidos à depleção (ilustrados na Figura 1.1) exige o desenvolvimento de novos esquemas computacionais capazes de simular a interação entre os acoplamentos fluido-mecânicos e a heterogeneidade da formação.

Porém, a capacidade de resolver grandes modelos de reservatórios não manteve o mesmo ritmo que os avanços na geoestatística. Além disso os fenômenos físicos listados na Figura 1.1 envolvem a modelagem de diferentes físicas que são caracterizadas por serem extremamente caras do ponto de vista computacional. Uma alternativa para a melhoria dos simuladores é o desacoplamento dos domínios e o uso de computadores paralelos. A melhor escolha é procurar ferramentas de simulação de fluxo mais rápidas e mais avançadas. Este objetivo poderá ser alcançado utilizando uma nova linha de simuladores, chamada de simuladores baseados em linhas de fluxo (*streamlines*). Nestes simuladores, busca-se uma minimização a lacuna existente entre modelos geológicos e de simulação.

Figura 1.1 – Fenômenos físicos encontrados em reservatórios de petróleo quando submetidos à depleção.



Fonte: o autor

A simulação por linhas de fluxo é bastante eficaz para modelos de grande escala, que possam ser simulados considerando fluidos próximos ao comportamento incompressível em que o processo de advecção seja dominante na descrição do fluxo dos fluidos, ou seja, que o mecanismo de recuperação de fluido é dominado pelos efeitos da heterogeneidade do meio ao invés de processos físicos que atuam transversalmente à direção do escoamento (compressibilidade, efeitos capilares, segregação gravitacional e composicional). É notório que este tipo de simulação não substitui a convencional (simulações por diferenças, volumes ou elementos finito(a)s), uma vez que este tipo de simulação não é capaz, atualmente, de representar os processos físicos supracitados, de maneira eficiente e precisa. Apesar disso, como será visto nos próximos itens, a simulação por linhas de fluxo vem se desenvolvendo para contornar algumas destas limitações. Contudo, mesmo quando a abordagem convencional é a escolha para resolver problemas de caracterização ou gerenciamento de reservatório, a simulação por linhas de fluxo poderá retornar importantes aspectos nestes casos, como a possibilidade de visualizar os padrões de fluxo identificando como a disposição dos poços, a geometria do reservatório e as heterogeneidades ditam/interagem na dinâmica do escoamento.

A característica fundamental que leva o método das linhas de fluxo ser eficiente no ponto de vista computacional é o desacoplamento das equações de movimento de fluido do problema totalmente 3D/2D em múltiplos problemas 1D que são resolvidos ao longo das linhas de fluxo. A solução do campo de pressões dita a direção das linhas enquanto que o problema de transporte capturado pela solução 1D ao longo das linhas de fluxo. Isto implica que a solução da pressão não necessita ser atualizada a todo instante durante o movimento do fluido para uma melhor captura das não-linearidades do campo de pressões, por isso, os simuladores baseados em linhas de fluxo são especialmente aplicáveis, com grande redução de tempo de processamento, à solução de sistemas de grandes dimensões, heterogêneos e geologicamente complexos, como comentado anteriormente.

Apesar dessas vantagens, os simuladores por linhas de corrente também possuem limitações. A eficiência pode ser prejudicada quando variações nas condições de produção são bastante frequentes. Isso ocorre, por exemplo, na fase de ajuste de histórico, onde as vazões são alteradas a cada mês, à medida que novos poços são acrescentados ao reservatório. Para sistemas em que os efeitos geomecânicos são importantes, as implementações e metodologias empregadas atualmente a esse tipo de simulação são limitadas ao acoplamento entre softwares e não são plenamente satisfatórias, assim necessitando de um maior desenvolvimento.

1.2 Objetivos

O desenvolvimento deste trabalho tem como principal objetivo propor uma alternativa mais barata e eficiente para a modelagem geomecânica acoplada com o método das linhas de fluxo. O acoplamento entre a simulação geomecânica e as linhas de fluxo será desenvolvido e implementado no código *in-house* de elementos finitos *CODE_BRIGHT*^[1] adotando um algoritmo do tipo sequencial, no qual o problema geomecânico (poro-mecânica) será resolvido sequencialmente ao problema de fluxo multifásico (linha de fluxo).

Desta forma, os objetivos específicos do presente trabalho são baseados em:

- Permitir avanços de P&D na área de simulação de fenômenos acopladas estabelecendo um modelo computacional para descrever o comportamento hidro-geomecânico da exploração de reservatórios de petróleo sensíveis ao estado de tensões (reservatórios não consolidados), com acoplamento das rochas capeadoras;
- Estudo, implementação e desenvolvimento de métodos de elementos finitos para escoamentos em meios porosos heterogêneos abordando escoamentos saturados e bifásicos (água-óleo) em meios deformável;
- Viabilizar a simulação, acoplada hidro-geomecânica, de cenários em grandes escalas (reservatório e campo).

1.3 Organização do documento

Para atingir os objetivos propostos, este texto foi dividido em 4 partes.

A parte **I** consistem em uma revisão da literatura a respeito dos principais desenvolvimentos na área de simulação por linhas de fluxo.

Em seguida, os aspectos teóricos serão abordados referente a formulação matemática para o simulador baseado em linhas de fluxo bem como as equações de equilíbrio mecânico empregado no subproblema da poro-mecânica que foram desenvolvidos, bem como o processo de discretização das equações de conservação para o problema abordado são apresentados na parte **II** deste documento.

Na parte **III**, são descritos os casos e os resultados das simulações utilizados para testes, avaliação e validação das implementações realizadas. Finalmente na parte **IV**, as conclusões e as recomendações para trabalhos futuros são listadas e comentadas.

1.4 Notação

Para facilitar a compreensão das deduções apresentadas, a convenção tipográfica adotada neste texto é definida abaixo:

- escalares:
 - caracteres arábicos ou gregos maiúsculos ou minúsculos italizados. Ex.: u, ε, E
 - subíndices, super índices ou sinais gráficos específicos para diferenciar escalares que empregam a mesma letra em formulações diferentes, quando possa haver confusão. Ex.: $g_\alpha, q^{sl}, \tilde{s}_{wi}$
 - componentes de vetores, tensores de segunda ou quarta ordem recebem os mesmos caracteres das entidades de origem com sub indexação. Ex.: $v_1, \varepsilon_{ij}, C_{ijkl}$
- vetores:
 - caracteres arábicos ou gregos minúsculos italizados ou não (quando possa haver confusão) e com o sinal gráficos $\vec{\bullet}$. Ex.: \vec{u}, \vec{v}
 - subíndices, super índices ou sinais gráficos específicos para diferenciar escalares que empregam a mesma letra em formulações diferentes, quando possa haver confusão. Ex.: $\vec{v}_s, \vec{v}_s, \vec{v}^*$
- tensores de segunda ordem:
 - caracteres arábicos maiúsculos ou gregos, ambos italizados em negrito. Ex.: $\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}$;
 - subíndices, super índices ou sinais gráficos específicos para diferenciar tensores que empregam a mesma letra em formulações diferentes. Ex.: $\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{K}_o$;
 - o tensor identidade de segunda ordem e tamanho consistente com o contexto recebe a letra \mathbf{I} ;
- tensores de quarta ordem:
 - caracteres arábicos maiúsculos no estilo *blackboard*, Ex.: \mathbb{C}
- operador ∇ :
 - recebe a notação segundo o resultado da operação ou pela natureza do operando. Ex.: $\vec{\nabla}v, \nabla\vec{v}$
- produto interno:
 - entre dois vetores: $\vec{v} \cdot \vec{n}$
 - entre tensores de segunda ordem: $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$

- entre funções no domínio Ω : $\langle \bullet, \bullet \rangle_\Omega$
- operador tensorial:
 - recebe a notação \otimes , Ex.: $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$
- diferenciação
 - operador em derivada material: $\frac{D(\bullet)}{Dt}$
 - operador em derivada espacial: $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$

Parte I

Revisão da Literatura

2 REVISÃO

2.1 Linhas de fluxo

Historicamente a primeira referência sobre a descrição e aplicação das equações básicas que definem os tubos de fluxo (*streamtubes*) e linhas de fluxo (*streamlines*¹) em problemas de fluxo de fluido em meios porosos e transporte sobre um domínio bidimensional, data de 1937 apresentada por Muskat [2]. Desde então, muitos autores tem aplicado e estendido os conceitos de tubos de fluxo e linhas de fluxo em problemas de simulação de reservatórios [3, 4, 5, 6, 7, 8].

Fay e Prats^[3] desenvolveram um modelo para a simulação de traçador e do fluxo bifásico em um sistema 2D homogêneo sobre um esquema de 1/4 de cinco poços. Eles observaram que as linhas de fluxo poderiam mudar de posição para o problema de fluxo bifásico a medida que o fluido avançava. Para considerar isso, Fay e Prats propuseram o rastreamento da intersecção da frente de saturação com a linha de fluxo obtida após o cálculo da equação da pressão, porém como consequência o método numérico tornou-se bastante complexo e impreciso.

Em 1981, Glimm et al. [9] apresentaram o método de rastreamento da frente (*front tracking*) aplicando em um modelo bidimensional heterogêneos utilizando um esquema 1/4 de cinco poços para vários níveis de heterogeneidades e razões de mobilidade. Este foi o trabalho que introduziu o método de rastreamento da frente que exibiu efeitos de orientação de malha e difusão numérica desprezíveis. Em seguida, o mesmo método foi aplicado considerando efeitos gravitacionais nos trabalhos de Glimm et al. [10] e Colella, Concus e Sethian [11] utilizando para isso a técnica da decomposição do operador (*operator splitting*).

Até então, os métodos de rastreamento da frente e linhas de fluxo eram apenas utilizados para problemas que apresentavam apenas um poço produtor e um poço injetor, foi então que Shafer [12] aplicando o método de Runge-Kutta para traçar as trajetórias de partículas em um modelo bidimensional heterogêneo com múltiplos poços (*multiwells*), mantendo assim o controle do “tempo de viagem” em cada linha de fluxo traçada. Foi então que no ano seguinte, Pollock [13] apresentou um método de obtenção das trajetórias das linhas de maneira semi-analítica, onde as equações de fluxo eram resolvidas por diferenças finitas numa malha cartesiana. Dentro de cada célula da malha, foi considerado que cada componente da velocidade varia linearmente em uma direção e sendo constantes nas demais direções. Isto permitiu uma integração analítica da velocidade para obter a linha de fluxo

¹ Uma breve definição dos termos linhas de fluxo e tubos de fluxo pode ser encontrado no Apêndice A

e o tempo de viagem dentro de cada célula.

Bratvedt et al.^[14] apresentaram um o método similar ao trabalho de Glimm et al.^[10], porém estendeu o conceito para problemas tridimensionais com múltiplos poços, que foi implementado no código comercial FRONTSIM®. Bratvedt et al. também observou que o método implementado apresentou uma maior eficiência computacional e de memória e sofreu menos efeitos difusivos e de orientação de malha quando comparado aos métodos convencionais.

Em 1994, Thiele^[15] usou o conceito de tubos de fluxo para modelar o escoamento em seções de reservatório verticais heterogêneos. Para honrar a não linearidade do escoamento² Thiele propôs que fossem feitas atualizações periódicas da geometria dos tubos de fluxo deste modo todos os tubos apresentavam o mesmo fluxo no passo de tempo atual. Thiele usou este método para estudar exemplos de escoamento de traçadores, escoamento imiscível, escoamento com miscibilidade de primeiro contato e o escoamento composicional bifásico. A principal consideração observada no trabalho de Thiele reside sobre o mapeamento da solução analítica para as trajetórias, onde constatou-se que o fluxo dos fluidos eram governados pelas heterogeneidades, tais que as trajetórias dos tubos de fluxo não são alterados de passo de tempo para passo de tempo. Além disso, como as trajetórias dos tubos permanecem relativamente fixadas, grandes passos de tempo poderiam ser utilizados e, ainda sim, capturar as não linearidades do escoamento. Thiele comparou os resultados obtidos pelo método proposto com as soluções tradicionalmente obtidas por diferenças finitas em escoamentos heterogêneos com miscibilidade de primeiro contato e observou-se reduções de custo computacional de cerca de 3-5 vezes sobre o método convencional.

De maneira análoga, Datta-Gupta e King^[16] adaptaram o cálculo da trajetória em um algoritmo onde a mesma é determinada analiticamente em termos do conceito de tempo de vôo³ (do inglês *time of flight*) simplificando assim a equação de transporte em termos do *time of flight* permitindo assim representar a velocidade do fluxo sem utilizar o conceito de tubos de fluxo e facilitando a implementação para casos tridimensionais e heterogêneos.

Fazendo o uso do tempo de vôo e continuando a pesquisa de Thiele^[15], Batycky^[17] apresentou o desenvolvimento e aplicação em escala de campo de um simulador bifásico, tridimensional, baseado em linhas de fluxo. O conceito de linha de fluxo foi associado a trajetórias de partículas, trazendo simplificações na abordagem matemática, quando comparado ao conceito de tubo de fluxo^[15]. Neste trabalho foram apresentados casos de escoamento de traçadores, influxo de água, deslocamento imiscível e deslocamento com miscibilidade de primeiro contato. As soluções sobre as linhas de fluxo foram obtidas tanto

² não linearidade do escoamento é caracterizado pela mudança abrupta do campo de velocidade a medida que o fluido esco.

³ o tempo que uma partícula leva para percorrer uma certa distância ao longo da linha de fluxo.

analiticamente como numericamente. As soluções analíticas foram extremamente rápidas e livres de problemas de difusão numérica, entretanto somente aplicáveis a algumas situações. Utilizando a solução numérica foi possível estender o método para condições dinâmicas de produção dos poços, campo de saturação inicial variável e efeitos gravitacionais.

Com a elevada aplicabilidade e a popularização da simulação por linhas de fluxo surgiu a necessidade de minimizar os efeitos de *mixing* (difusão do perfil de saturação entre mapeamentos *streamline-grid*), foi então que [Bratvedt, Gimse e Tegnander](#) [18] realizaram comparações de duas formas de transferência dos perfis de saturação das linhas para a malha de diferenças finitas que ocorriam entre um passo de solução de pressão e o passo seguinte. Uma forma é baseada nas saturações médias das células da malha 3D, enquanto a outra se baseia em projeções de perfis de saturação de segmentos das linhas anteriores em segmentos das novas linhas. Eles demonstraram que a transferência baseada em segmentos das linhas de fluxo é muito mais precisa que a baseada na saturação média das células.

A partir deste trabalho, surgiram algumas variações, como o trabalho de [Mallison, Gerritsen e Matringe](#) [19] que propuseram que a saturação fosse interpolada linearmente entre a entrada e a saída da célula atravessada pela linha de fluxo, deixando de ser representada por intervalos constantes. Para o cálculo das saturações das células a partir das linhas de fluxo, foi proposto um método baseado em “krigagem”, que reduz o erro de balanço de massa, porém com o aumento do custo computacional. Ainda seguindo a linha de melhoramento do balanço de massa, [Kippe, Haegland e Lie](#) [20] apresentaram uma correção feita no cálculo do tempo de vôo, a qual reduziria significativamente o erro no balanço de massa. Essa correção permitiria simulações com uma quantidade muito menor de linhas e, conseqüentemente, mais eficientes, embora sacrificando ligeiramente a qualidade das respostas obtidas.

À medida que a simulação por linhas de fluxo tornou-se popular na simulação de reservatórios, geometricamente complexos, [Jimenez et al.](#) [21] investigaram como a discretização espacial e o mapeamento afetam a precisão da solução em células distorcidas. Os autores observaram que a maior fonte de erro da discretização e do mapeamento do perfil de saturação são: o uso do tempo de vôo na discretização da equação de transporte (*mixing*), principalmente em regiões de estagnação e onde as células apresentavam grandes distorções, pois afeta a continuidade do fluxo nas fáceis das células, influenciando no traçado das linhas de fluxo, isso contribui na imprecisão do cálculo do tempo de vôo, contribuindo para erros de balanço de massa, culminando na dispersão numérica e efeitos de orientação de malha, principalmente nas áreas de geometrias complexas.

Desde o trabalho de [Batycky](#) [17] e os melhoramentos da transferência dos perfis de saturação, vários trabalhos foram publicados empregando os simuladores baseados em linhas de fluxo a uma vasta gama de aplicações. Beneficiando-se do menor tempo de processamento e das características desse tipo de simulação, aliado aos recentes avanços da

geoestatística que levam a construção de modelos geológicos de elevada resolução, [Stenerud](#) ^[22] apresentou uma nova abordagem na caracterização de reservatórios e em problemas inversos, combinado a simulação por linha de fluxo e um novo solver multiescala (*mimetic multiscale solver*). Empregando a mesma combinação, [Natvig et al.](#) ^[23] aplicaram para a caracterização de reservatórios naturalmente fraturados.

Outra área de aplicação do método foi em drenagem por gravidade utilizando injeção de vapor, conhecido como SAGD (*Steam Assisted Gravity Drainage*), podendo ser observados nos trabalhos ^[24, 25, 26, 27].

Na quantificação de incertezas temos os trabalhos de [Hogg, Shook e Pyrcz](#) ^[28] apresentando um novo *workflow* considerando capacidade de armazenamento, de fluxo, e área de varredura de água obtidos de simulações por linhas de fluxo e cálculo do coeficiente de Lorenz sobre condições dinâmicas. O trabalho de [Fenwick e Batycky](#) ^[29] usando método baseado em espaços métricos aplicado a reservatórios cujo método de recuperação é feito através de SAGD.

Na área de ajuste de histórico de produção temos os trabalhos de [Stenerud](#) ^[22] e [Ibrahim](#) ^[30] combinando solvers multiescala com linhas de fluxo em um método “rápido e robusto” para ajuste de histórico de modelos geológicos de alta resolução. [Oyerinde](#) ^[31] realizou ajuste de histórico utilizando o simulador DESTINY considerando fluxo trifásico. Também empregando o DESTINY, [Al-Zawawi et al.](#) ^[32] realizaram análise quantitativa dos fatores de alocação de poços e eficiência de injeção em campos reais, considerando escoamento bifásico. Recentemente, [Wen et al.](#) ^[33] aplicaram otimização por dois estágios para o gerenciamento de um campo e ajuste de histórico.

Recentemente, uma primeira abordagem visando o simulações baseadas em linhas de fluxo em escala próximo ao poço, é considerado por [Hashem](#) ^[34]. Neste trabalho, a metodologia foi aplicada usando malhas cartesianas e sistema de coordenadas polares, desprezando efeitos mecânicos e gravitacionais.

Como observado, a utilização das linhas de fluxo vêm aumentando consideravelmente devido a capacidade, das diversas áreas da indústria de petróleo, em desenvolver modelos estáticos que integrem, detalhadamente, dados geofísicos e geológicos 3D, produzindo modelos da ordem de 10^6 a 10^7 células. Assim, tendo como consequência, o crescimento dos tempos de simulação, *workflows* utilizados e atrasos na definição de projetos de produção ou restrição na quantidade de alternativas e cenários de desenvolvimento a serem analisados, por este motivo, a utilização das linhas de fluxotêm sido impulsionada nos últimos anos.

2.2 Linhas de fluxo em malhas não-estruturadas

A primeira contribuição para simulação de linhas de fluxo em malhas não estruturadas e empregando o método dos elementos finitos veio de [Cordes e Kinzelbach](#) [35]. É sabido que o campo de velocidade, gerado pelo método de elementos finitos, utilizando Galerkin, apresenta um caráter descontínuo, e, conseqüentemente, linhas de fluxo imprecisas são geradas através deste método. Os autores propuseram um pós-processamento do campo de velocidades com o objetivo de recuperar a continuidade do campo. O pós-processamento é relativamente barato. O método consiste em resolver um conjunto de equações locais em cada nó da malha de elementos finitos de maneira a considerar a conservação de massa local em torno de cada nó da malha. Assim, fazendo o uso deste novo campo de velocidades é realizado o traçado das linhas, no espaço de referência fazendo o uso da transformação isoparamétrica e o método de Piola para mapear as coordenadas e o campo de velocidade, respectivamente.

Em 2002, [Prévost, Blunt e Edwards](#) [36] estenderam a técnica de pós-processamento da velocidade [Cordes e Kinzelbach](#) para método dos elementos finitos com volume de controle (CVFEM) centrados no nó, onde a permeabilidade é constante sobre os elementos, e centrados no elemento, onde a permeabilidade é constante sobre o polígono da malha dual, empregando elementos triangulares. Mais adiante, Prévost desenvolveu o processo de recuperação da velocidade para malhas tetraédricas [37].

Visando o melhoramento e a precisão do traçado das linhas, [Matringe](#) [38] considerando método dos elementos finitos mistos (MFEM) em malhas triangulares e quadrilaterais, propôs varios métodos para controlar a densidade das linhas no domínio. Neste trabalho foi analisado o erro introduzido na construção das linhas de fluxo devido ao esquema linear de interpolação de velocidade utilizado (Raviart-Thomas de primeira ordem), critério de lançamento das linhas da célula com poço injetor e imprecisão no cálculo das velocidades nas faces das células. Para minimizar os erros foram propostos dois métodos, o primeiro baseado no refinamento adaptativo da célula e outro baseado em interpolação da velocidade ao longo das faces das células empregando esquemas de maior ordem de interpolação do campo de velocidade. As linhas de fluxo são obtidas analiticamente através da função de fluxo (Ψ) no interior das células, entretanto o ponto de saída e o tempo de vôo devem ser obtidos numericamente. Apesar do traçado apresentar maior precisão que o método convencional, foi observado que o método proposto apresenta um custo computacional adicional.

Em outros trabalhos, [Matringe, Juanes e Tchelepi](#) [39, 40] apresentaram um novo espaço vetorial conforme $H(\text{div})$ matematicamente similar a uma variante do método dos volumes finitos com aproximação de múltiplos pontos (MPFA) onde se estabeleceu uma relação direta entre a variante do MPFA, MPFA-O, e o novo espaço [41], estendendo o novo espaço para malhas hexaédricas [42], neste mesmo trabalho os fluxos obtidos nas

meia-arestas através do MPFA são interpolados usando as funções de forma dos espaços de: Raviart-Thomas, Raviart-Thomas-Nédélec de baixa ordem e Brezzi-Douglas-Marini de primeira ordem obtendo o campo de velocidade no espaço de referência (normalizado) onde é realizado o traçado das linhas.

Hægland et al.^[43] consideraram o problema da reprodução de fluxo uniforme em três dimensões em malhas hexaédricas irregulares. A principal vantagem deste método é que ele pode reproduzir um campo de escoamento uniforme e permite boa precisão no traçado das linhas. Entretanto, este método para produzir traçados precisos, necessita de baixo grau de liberdade (de cunho geométrico) válido somente para malhas levemente distorcidas, e devido a isso se o método for aplicado em malhas com elevado grau de distorção poderia produzir divergente diferentes de zero (não conservativo) com isso o traçado poder terminar prematuramente (antes de atingir um poço produtor ou contorno). Para contornar esse problema, Hægland e Nordbotten^[44] adicionaram mais graus de liberdade no campo de velocidade no método, porém, apesar de melhorar a conservação de massa ao longo das linhas de fluxo os graus de liberdade adicionados culminaram no aumento (expressivo) do custo computacional.

Mais recentemente, Zhang, Datta-Gupta e King^[45] apresentaram oito diferentes esquemas de interpolação do campo de velocidade, realizando combinações dos métodos de: interpolação da velocidade^[44], refinamento local^[38], pós-processamento do campo de velocidade^[36] e interpolação dos fluxos^[41], sendo possível produzir métodos que obtêm campos contínuos e conservativos de velocidade. Neste trabalho, diferentemente do trabalho de Prévost^[36] os métodos propostos são baseados, somente, nos fluxos sobre as faces das células, evitando assim o uso de transmissibilidade ou permeabilidades das células (restrição de irrotacionalidade dos campos de velocidades). Os autores constataram que mesmo com o aumento da ordem de interpolação (precisão) dos campos de velocidades obtidos pelas combinações, o ganho na qualidade do traçado e do cômputo do tempo de vôo foram mínimos comparados ao incremento do custo computacional empregado para obtê-los.

2.3 Simulação por linhas de fluxo considerando outras físicas

A primeira abordagem visando a consideração de outras físicas foi apresentada por Glimm et al.^[9]. Este trabalho considerou os efeitos gravitacionais empregando a técnica da *operator splitting*, onde após a solução convectiva (passo predictor) de um intervalo de tempo, a gravidade pode ser levada em consideração através de um segundo passo convectivo (passo corretor) com linhas verticais.

Rodriguez e Kindelan^[46] estenderam a utilização do método de *operator splitting* considerando, além da gravidade, a capilaridade dos fluidos. Esse mesmo método foi

incorporado a um simulador de linhas de fluxo por [Berenblyum](#) ^[47], mostrando pequenas alterações nas trajetórias das linhas nas proximidades da frente de saturação da água.

Nestes trabalhos os autores empregaram o algoritmo similar a [\[9\]](#), com o passo preditor obtido pela solução da equação de transporte sobre as linhas e em seguida, no mesmo passo de tempo, o passo corretor onde a equação de transporte considerando os efeitos gravitacionais e capilares são resolvidos sobre a malha de diferenças finitas, eles observaram que quando considerando os efeitos capilares o custo computacional aumentou, porém ainda mais eficiente que os simuladores convencionais.

[Di Donato e Blunt](#) ^[48] apresentaram um simulador por linhas de fluxo para a modelagem de injeção de água em reservatórios fraturados. A transferência de fluidos entre a matriz e a rocha porosa foi representada por “fontes/sumidouros” nas equações de transporte 1D. Diferentes formas de função de transferência foram estudadas. Resultados similares aos de simuladores por diferenças finitas para malhas de 100.000 e 1.000.000 de células ativas foram obtidos, porém com velocidade de processamento de até duas vezes menor.

[Usman e Arihara](#) ^[49] desenvolve um simulador para recuperação de óleo pesado empregando vapor, a estratégia utilizada foi a resolução de forma sequencial das equações de transporte de massa e de energia, Usman comparou a eficiência computacional com simulador comercial STARS[®]. Empregando método similar [Zhu, Gerritsen e Thiele](#) ^[50] adicionaram efeitos térmicos no simulador 3DSL[®].

Em 2006, [Osako](#) ^[51] e em seguida [Beraldo](#) ^[52] propuseram formulações para considerar a compressibilidade dos fluidos, empregando formulações não-conservativas e conservativas, respectivamente. Eles consideraram o termo relacionado ao divergente do campo de velocidade na solução das linhas de fluxo. [Osako](#) comparou um caso de 21x21x4 células ativas com um simulador comercial por diferenças finitas e observou que os tempos de processamento foram similares. [Beraldo](#) além de considerar efeitos compressíveis também considerou a variação espacial da composição inicial de óleo. Seguindo uma proposta similar [Podgornova et al.](#) ^[53] utilizaram modelos analíticos de curvas de equilíbrio de fases e outras funções termodinâmicas, na solução das linhas em formulação composicional, visando reduzir o esforço computacional.

Recentemente, [Herrera, Vallochi e Beckie](#) ^[54] apresentaram o método baseado em linhas de fluxo para simular o transporte reativo em meios porosos. A principal inovação do trabalho é a introdução de um método híbrido que emprega a simulação baseada em linhas de fluxo e o método *Smooth Particle Hydrodynamic* (SPH) de forma a considerar ambas dispersão longitudinal e transversal com relativa precisão e sem dispersão numérica, uma vez que o método SPH não faz uso de malhas (*meshless*).

2.4 Modelagem geomecânica e acoplamento com simulação por linhas de fluxo

Tensões tectônicas atuam em todos os lugares da crosta terrestre e emergem de cargas litostáticas das rochas e do movimento das placas litosféricas [55]. Na crosta, estas tensões inevitavelmente resultam em deformações elásticas e inelásticas, deformações irreversíveis de fraturamentos e falhamentos [56]. Na combinação com as propriedades mecânicas da crosta, as tensões tectônicas controlam a estabilidade e os processos de todos os tipos de operações subterrâneas, tais como: mineração subterrânea, escavações, exploração de hidrocarbonetos em reservatórios. A quantificação dessas tensões e deformações na crosta da Terra e a predição de seu impacto sobre as operações subterrâneas é a motivação básica de todas as pesquisas na área da geomecânica.

A magnitude destas tensões depende da profundidade e da configuração tectônica, bem como das poro-pressões. A orientação das tensões é definida na maioria das vezes pelo movimento relativo das placas litosféricas e suas interações ao longo das bordas das placas [57]. Estes processos estabelecem um campo de tensões tradicionalmente descrito pelas componentes de tensão vertical (s_v), tensão horizontal máxima (s_{hmax}) e a mínima (s_{hmin}).

Os campos de tensões são afetados pela atividade tectônica contínua e pelos impactos criados pelo homem, como exploração de hidrocarbonetos nos reservatórios [58, 59]. A magnitude e a orientação deste campo de tensões variam significativamente em termos de tempo e espaço. Tensões tectônicas variam temporalmente, do tempo geológico ao tempo de concessão do reservatório de dezenas de anos, além de variar significativamente no espaço, alcançando desde escalas de placas litosféricas até, escala de blocos de falhas ou até mesmo, escala de grãos. A configuração do campo de Paleo-tensão controla a geração e a reativação de falhas e fraturas bem como o tamanho e densidade.

Em escala de reservatório e de bloco de falhas, o campo de tensões é influenciado particularmente por falhas (descontinuidades estruturais) e por diferentes propriedades mecânicas das litologias, resultando em variações de até 90° de orientação e várias dezenas de Megapascal (MPa) em magnitude no campo de tensões. O estado de tensão alterado afeta o comportamento hidráulico das falhas e fraturas existentes, levando a anisotropia na permeabilidade, geração de caminhos preferenciais e controla a geração e características de novas fraturas, além da estabilidade dos poços. Portanto, as tensões *in situ* são de fundamental importância, especialmente na indústria do petróleo para a exploração ótima dos reservatórios.

Entretanto, quase todas as medições de tensão dependem de sondagens, realizadas comumente durante a perfuração de poços, através de medidas *in situ* ou experimentos em amostras extraídas da formação (plugs) [60]. Procedimentos durante as perfurações

são sempre realizadas o mínimo possível, devido ao elevado custo, refletindo na pequena quantidade de dados geomecânicos (tensões). Os problemas surgem quando as informações do campo de tensões são necessárias antes da perfuração ou quando o planejamento de operações no reservatório exige informações do estado de tensões em áreas que não foram perfuradas. A falta de acesso e de informação representa a motivação para a modelagem geomecânica de reservatório em fornecer estimativas mais robustas do estado de tensão *in situ* ou previsões idealmente confiáveis antes da perfuração. Isto exige a incorporação da geometria de subsuperfície e dos parâmetros mecânicos, em combinação com o estado de tensão das rochas adjacentes no modelo numérico.

O conhecimento da distribuição do estado de tensão *in situ* fornecidos pelo modelo geomecânico do reservatório pode produzir grandes benefícios para várias questões relacionadas com a tensão no desenvolvimento do reservatório. A informação do estado de tensões pode fornecer a melhor trajetória de perfuração, assegurando a estabilidade do poço. A distribuição do estado de tensões ajuda na alocação ótima dos poços injetores e produtores devido a relação da tensão com a permeabilidade anisotrópica [61], como também pode fornecer o estado de tensão ao longo de falhas em reservatórios e assim revelar o comportamento cisalhante e seu estado crítico, estas informações podem ser relacionadas com as propriedades hidráulicas [62]. Identificar as propriedades hidráulicas das falhas é crucial para o desenvolvimento do reservatório. A determinação dos estados críticos das falhas comumente mostra elevada permeabilidade e elevada característica de cisalhamento (deslizamento) da falha que pode resultar em um selamento da mesma e ao isolamento (compartimentalização) do reservatório.

A necessidade dos modelos geomecânicos de reservatório cresce com o aumento dos aspectos relativos à tensão em muitos reservatórios não convencionais, tais como: reservatório naturalmente fraturados [63, 64], gás de folhelho [65, 66, 67], reservatórios do pré-sal [68, 69, 70], reservatórios de alta pressão e temperatura (HPHT) [71, 72] e no armazenamento de CO₂ [73, 74, 74].

Com os avanços na caracterização dos reservatórios, otimização da produção e gestão de reservatório em tempo real, a complexidade dos “*workflows*” que levam a tomada de decisões, ficam cada vez maiores, somando-se os modelos geomecânicos de reservatório, isso leva a uma procura de ferramentas de simulação de fluxo mais rápidas e avançadas, daí surge a alternativa de acoplamento da geomecânica com a simulação de reservatórios baseada em linhas de fluxo para tornar esses tipos de modelagem viável. O primeiro trabalho visando este acoplamento foi apresentado por Parihar [75]. Neste trabalho o acoplamento foi realizado através da combinação de dois simuladores, o simulador de linhas de fluxo TAMU DESTINY e o simulador geomecânico ECLIPSE 300[®] da Schumberger. De maneira semelhante, Torre [76] também combinou dois simuladores, o FRONTSIM[®] - simulador baseado em linhas de fluxo e FLAC^{3D} - simulador geomecânico, para as

realizações das simulações geomecânicas acopladas. Ambos os trabalhos aplicaram o acoplamento iterativo (*Loose Coupling/Iterative Coupling*) a problemas de compactação e subsidência e observaram elevado custo computacional empregando este tipo de simulação. Recentemente, o esquema *Loose Coupling* foi aplicado a problemas de armazenamento de CO₂ [77], também fazendo uso de dois diferentes simuladores.

Para além das publicações citadas anteriormente, o campo da geomecânica de reservatório está descrito de forma abrangente em [56]. Para fornecer uma visão mais geral sobre a mecânica das rochas relacionadas com a área de petróleo ver [78, 79].

Parte II

Aspectos Teóricos

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo serão apresentadas as equações governantes do problema envolvendo o acoplamento hidro-geomecânico empregando uma formulação de fluxo baseada no método das linhas de fluxo, bem como as relações constitutivas necessárias para o acoplamento.

As equações fundamentais que regem o escoamento bifásico água-óleo em meios porosos baseiam-se nas leis de conservação de massa dos fluidos que coexistem na matriz porosa, e de Darcy e nas relações termodinâmicas apropriadas (Equações de estado). Existem vários tipos de formulações para descrever o escoamento bifásico em meios porosos, neste trabalho adotou-se a formulação IMPES (*IMplicit Pressure Explicit Saturation*) comumente utilizada na indústria do petróleo.

3.1 Equações do contínuo

Antes de descrever as equações governantes do problema acoplado é necessário definir algumas variáveis e relações do contínuo. Primeiro serão abordados estas relações para a fase fluida, e depois da fase sólida.

3.1.1 Fase fluida

Para fluxo de fluido bifásico é comum considerar que os fluidos que coexistem no meio poroso são imiscíveis, portanto não há transferência de massa entre as fases e o meio é dito isotérmico. Fazendo uso da última consideração, as densidades das fases dependem unicamente do campo de pressão do meio, normalmente relacionada da seguinte forma:

$$\rho_\alpha(p) = \rho_\alpha^o e^{c_\alpha(p-p_o)} \quad \alpha \in \{o, w\} \quad (3.1)$$

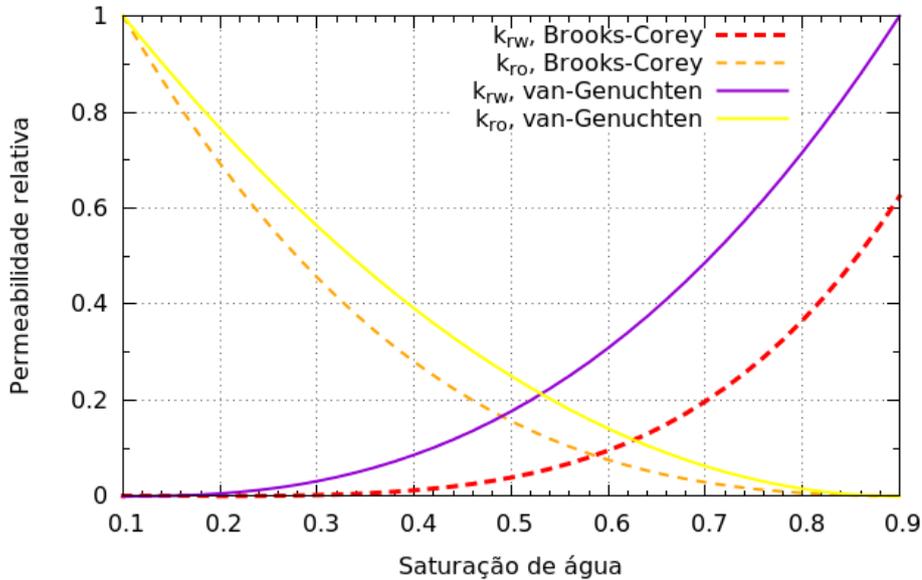
sendo ρ_α^o é a densidade da fase α (representando a fase óleo ou a fase água) na pressão de referência p_o e c_α é a compressibilidade da fase α .

Em muitas formulações os fluidos são admitidos incompressíveis, logo a densidade não varia com a pressão. Como não há transferência de massa entre as fases a principal força que faz com que ocorra o escoamento de fluidos no meio poroso é o gradiente de pressão, o escoamento obedece a lei de Darcy que representa a conservação da quantidade de movimento dos fluidos no meio poroso. E estabelece uma relação linear entre o gradiente de pressão do fluido e a velocidade com que o mesmo escoar [80].

$$\vec{v}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}(s_w)}{\mu_\alpha} \mathbf{K}(\phi) \left[\vec{\nabla} p_\alpha - \rho_\alpha(p) \vec{g} \right] \quad \alpha \in \{o, w\} \quad (3.2)$$

sendo \vec{v}_α a velocidade da Darcy da fase α . $k_{r\alpha}(s_w)$ a permeabilidade relativa da fase α . A permeabilidade relativa quantifica a resistência adicional que um fluido exerce sobre o movimento do outro no meio poroso. A Figura 3.1 ilustra um comportamento típico da permeabilidade relativa para a água e óleo em função da saturação s_w . μ_α a viscosidade da fase α . O parâmetro $\mathbf{K}(\phi)$ é um tensor de segunda ordem conhecido como permeabilidade intrínseca da matriz porosa em função da porosidade ϕ , que apresenta informações da estrutura sólida relevante para o escoamento de fluido e quantifica a facilidade com que este escoar através do meio poroso, p_α é a pressão da fase fluida α e \vec{g} é o vetor gravidade ($\vec{g} = [0, 0, -g]$).

Figura 3.1 – Modelos de permeabilidades relativas das fases em função da saturação da água.



Fonte: O autor

A razão entre a permeabilidade relativa e a viscosidade, é definida como mobilidade:

$$\lambda_\alpha(s_w) = \frac{k_{r\alpha}(s_w)}{\mu_\alpha} \quad \alpha \in \{o, w\} \quad (3.3)$$

Uma vez que as equações 3.2 e 3.3 envolvem grandezas associadas as fases, as saturações podem ser relacionadas entre si mediante a equação de restrição volumétrica, a qual se origina na hipótese que todo o espaço poroso é ocupado completamente pelas fases fluidas [81]. Para o caso de escoamento bifásico de água e óleo esta equação toma a forma:

$$s_o + s_w = 1 \quad (3.4)$$

Outra relação necessária que envolve a fase fluida é a pressão total de fluido¹(p), utilizada também nas relações constitutivas da fase sólida através do princípio das tensões

¹ equivalente a poro-pressão (efetiva) [79]

efetivas, abordado na próxima secção, e que é definida por:

$$p = p_o s_o + p_w s_w \quad (3.5)$$

3.1.2 Fase sólida

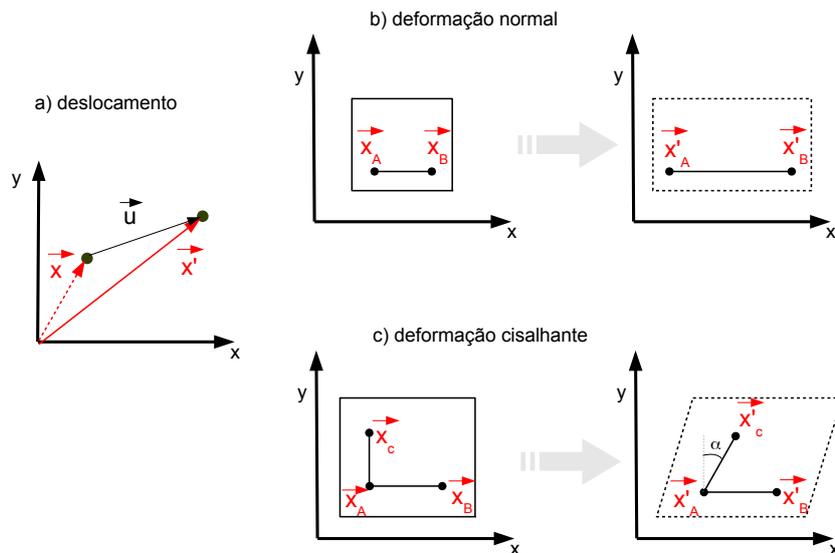
O reservatório é considerado um meio poroso deformável, pois quando há variação da pressão dos fluidos contidos nele, durante a produção de hidrocarbonetos, há uma redistribuição das forças no reservatório e o meio rochoso passa a ser sobrecarregado e, conseqüentemente, sofre mudança referente ao seu estado inicial.

3.1.2.1 Deformação

Cada ponto material em um corpo pode ser identificado através da sua posição local em um sistema de coordenadas. Quando um corpo sofre movimento de corpo rígido, ou seja, translação ou rotação, ou ainda a qualquer combinação destes dois, o ponto material dentro deste corpo muda sua posição local de $\vec{x} = (x, y, z)$ para $\vec{x}' = (x', y', z')$. O vetor que conecta a nova posição com a configuração inicial é denominado de vetor deslocamento $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ (Figura 3.2 a)

$$\vec{u} = \vec{x}' - \vec{x} \quad (3.6)$$

Figura 3.2 – Deslocamento (a), deformação normal (b) e deformação cisa-lhante (c).



Fonte: o autor

Se a distância de quaisquer dois pontos de um corpo mudar durante uma transformação rígida (translação, rotação, ou combinação de ambos), é dito que o corpo se

deformou. deformações normais são caracterizadas pela contração ou expansão do corpo, o que significa que a distancia de dois pontos materiais quaisquer dentro do corpo arbitrário (L) foi alterada (L') durante a transformação (Figura 3.2 b), enquanto que as deformações cisalhantes descrevem as distorções entre dois segmentos dentro do corpo (Figura 3.2 c), assim a representação do tensor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, sob a hipótese de pequenas deformações, é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \forall i, j \in [1, 3] \quad (3.7)$$

Na forma matricial o tensor de deformações é apresentado da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla}^T \vec{u}] \quad (3.8)$$

3.1.2.2 Tensão

Considerando um corpo (reservatório) Ω com contorno $\partial\Omega$ no espaço, que sofre ação de força sobre Ω e em seu contorno $\partial\Omega$, Figura 3.3, as forças atuantes sobre o corpo Ω podem ser de duas diferentes naturezas:

- Forças de superfície \vec{f} quem atuam sobre a fronteira do corpo $\partial\Omega$;
- Forças por unidade de volume \vec{b} ou $\rho \vec{v}$ que atuam no interior do corpo Ω (Forças devido a efeitos gravitacionais);

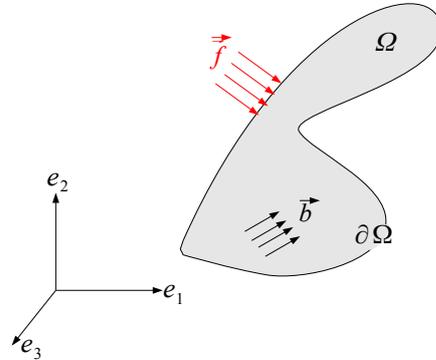
Pelo teorema de Cauchy da mecânica do meio contínuo, as forças atuantes sobre o corpo arbitrário, precisam satisfazer as leis de balanço de momento linear e angular e implicam na existência de um campo tensorial \boldsymbol{T} , que recebe o nome de tensor de tensões de Cauchy e representa o estado de tensões em cada ponto de Ω . A representação do campo tensorial \boldsymbol{T} depende do sistema de coordenadas utilizado. Para o sistema de coordenadas cartesianas o tensor é representado como:

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (3.9)$$

Na forma matricial o tensor é apresentado da seguinte forma conhecida:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Este tensor de tensões deve satisfazer as seguintes condições^[79, 82]:

Figura 3.3 – Forças atuando em um corpo arbitrário.**Fonte:** o autor

1. Para todo vetor unitário \vec{n} , temos

$$\vec{s} = \mathbf{T}\vec{n} \quad (3.11)$$

2. \mathbf{T} deve ser simétrico

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall i, j \in 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

3. \mathbf{T} satisfaz a equação de momento linear

$$\text{div}\mathbf{T} + \vec{b} = \rho\dot{\vec{v}} \quad (3.13)$$

Para simplificar a notação, o tensor de tensões \mathbf{T} será denominado pela letra grega σ , daqui em diante.

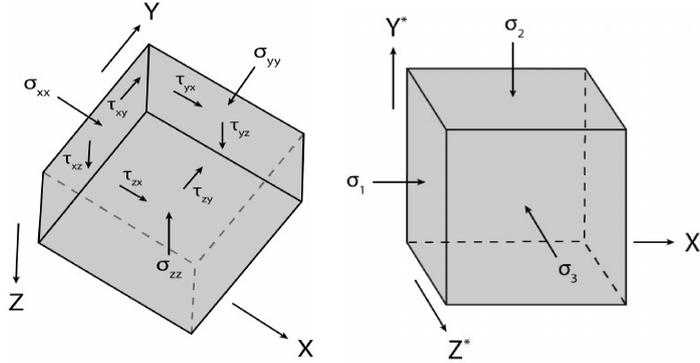
$$\sigma \equiv \mathbf{T} \quad (3.14)$$

Conhecendo o tensor de tensões em uma base (sistema de coordenadas) qualquer, as tensões podem ser rotacionadas e analisadas em qualquer outra base usando os cossenos diretores (transformação de tensor)^[56]. Para cada tensor de tensões, há um sistema de coordenadas onde as tensões cisalhantes ($\sigma_{ij} \quad \forall i \neq j$) são nulas e somente há tensões normais. Estas tensões normais, que representam os auto-valores do tensor de tensões (Equação 3.16), são conhecidas como tensões principais (Figura 3.4).

As soluções do problema de auto-valor (Equação 3.15) são denominadas de tensão principal maior (σ_1), intermediária (σ_2) e menor (σ_3), onde com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, obtidos através de Equação 3.16:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

Figura 3.4 – Tensor de tensões em um sistema de coordenadas arbitrário(esquerda). Tensor de tensões no sistema de coordenadas principal(direita).



Fonte: Zoback^[56]

$$\sigma^3 + I_1\sigma^2 + I_2\sigma + I_3 = 0 \quad (3.16)$$

Os parâmetros I_1 , I_2 e I_3 são os invariantes de $\boldsymbol{\sigma}$, caracterizados por:

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (3.17)$$

$$I_2 = \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) \quad (3.18)$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} - (\sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 + \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 + \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2) \quad (3.19)$$

O tensor de tensões pode ser definido por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} + \bar{\sigma}\mathbf{I} \quad (3.20)$$

onde \mathbf{S} a tensão desviadora e $\bar{\sigma}$ é a tensão média definida por:

$$\bar{\sigma} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (3.21)$$

Caracterizado \mathbf{S} é possível definir seus invariantes J_1 , J_2 e J_3 dados por:

$$J_1 = \text{tr}(\mathbf{S}) = s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} \quad (3.22)$$

$$J_2 = s_{xy}^2 + s_{xz}^2 + s_{yz}^2 - (s_{xx}s_{yy} + s_{xx}s_{zz} + s_{yy}s_{zz}) \quad (3.23)$$

$$J_3 = s_{xx}s_{yy}s_{zz} + 2s_{xy}s_{xz}s_{yz} - (s_{xx}s_{yz}^2 + s_{yy}s_{xz}^2 + s_{zz}s_{xy}^2) \quad (3.24)$$

3.1.2.3 Elasticidade Linear

O comportamento elástico de uma rocha modela a forma como as variáveis de tensão de deformação se relacionam em um contexto de pequenas deformações.

Neste trabalho será considerado um modelo elástico linear para representar a relação constitutiva das rochas. Portanto temos que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.25)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.26)$$

sendo \mathbb{C} o tensor (de quarta ordem) constitutivo isotrópico. Definindo λ e μ como as constantes de Lamé [83], temos que:

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{(2+2\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3.27)$$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

O módulo de Young (E) e de Poisson (ν) representam o primeiro e segundo módulos elásticos, que descrevem o comportamento elástico linear da rocha, obtidos através do ensaio de compressão uniaxial [56], podendo ser obtidos através de propagação de ondas acústicas sobre a amostra [78]. Portanto, para descrever o comportamento elástico linear de uma rocha assumindo que a mesma é um material isotrópico e homogêneo [78] a expressão generalizada da tensão e deformação formulada para tais materiais pode ser definida como:

Na equação anterior, δ_{ij} é o delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.28)$$

Das Equação 3.25 e Equação 3.27, temos

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (3.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}$$

onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de cisalhamento

3.1.2.4 Poroelasticidade

Todas as rochas apresentam espaços porosos e fraturas de tamanhos variados, preenchidos por algum fluido (ar, água, gás, hidrocarbonetos) que percolam através do

meio devido ao gradiente de pressão, permeabilidade e viscosidade dos fluidos. Estes fluidos influenciam significativamente o comportamento mecânico da rocha.

Com o objetivo de descrever os processos geomecânicos que ocorrem no meio poroso, rochas saturadas de fluidos, a influencia dos fluidos no comportamento mecânico das rochas necessita ser considerado. A teoria que descreve o comportamento acoplado hidro-mecânico e chamado de poroelasticidade basea-se na teoria de Biot. Este conceito é baseado nas três principais considerações^[56]: (i) o espaço poroso do material está interconectado e uniformemente saturado com um fluido; (ii) o volume poroso é pequeno comparado ao volume total da rocha; (iii) a poro-pressão, as tensões atuantes externamente e internamente sobre os grãos da rocha são considerados estatisticamente uniformes.

Este conceito relaciona que se um meio poroso, saturado por fluidos, sofre a atuação de um carregamento externo, a tensão irá ser parcialmente suportada pela matriz rochosa e parcialmente pelos fluidos contidos nos poros. Assim, a tensão sobre a matriz rochosa de uma rocha saturada será menor que a mesma rocha sem a presença de fluidos, daí surge o conceito de tensão efetiva, introduzida por Terzaghi em 1923. Defini-se que a tensão efetiva ($\boldsymbol{\sigma}'$) é a tensão total ($\boldsymbol{\sigma}$) reduzida da poro-pressão efetiva² ($p\mathbf{I}$),

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} \quad (3.30)$$

Terzaghi deduziu este conceito através de ensaios de consolidação unidimensional, este conceito foi generalizado para o caso tridimensional mais adiante por Biot^[84] e inclui o fator poroelástico (também conhecido como parâmetro α de Biot-Willis), que é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \alpha p\mathbf{I} \quad (3.31)$$

O parâmetro α é obtido pela relação entre o módulo de rigidez do meio poroso (*bulk modulus* K_T) e o módulo de rigidez dos grãos (K_s), dado pela equação:

$$1 - \alpha = \frac{K_T}{K_s} \quad (3.32)$$

Pode-se observar que a equação proposta por Terzaghi é o caso onde $\alpha = 1$, isto é, para o caso onde os grãos da matriz rochosa são incompressíveis.

A rigidez do meio poroso descreve a resistência do material submetida a uma sollicitação hidrostática, $tr(\boldsymbol{\sigma}')/3$:

$$K_T = \frac{tr(\boldsymbol{\sigma}')}{3tr(\boldsymbol{\varepsilon})} \quad (3.33)$$

² Neste trabalho consideramos a compressão positiva

A [Equação 3.29](#) representa a relação tensão-deformação para um meio isotrópico linear sem a contribuição da poro-pressão na tensão total. No caso da poroelasticidade, a tensão efetiva na matriz rochosa pode ser determinada analogamente como uma função de deformação da rocha e o módulo elástico do meio poroso:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2G\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \quad (3.34)$$

3.1.2.5 Densidade do sólido

Considerando a fase sólida compressível, e utilizando a consideração de meio poroso isotérmico, podemos assumir que a densidade da fase sólida é uma função da poro-pressão efetiva ([Equação 3.5](#)) e do primeiro invariante do tensor de tensão efetiva, $\rho_s = \rho_s(p, \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')/3)$ dado por^[79],

$$\rho_s = \rho_s^o e^{\frac{p-p_o}{K_s} + \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')}{3(1-\phi)K_s}} \quad (3.35)$$

sendo ρ_s^o a densidade da fase sólida obtida na pressão de referência p_o . Aproximando [Equação 3.35](#) pelo o primeiro termo de sua expansão em série, temos:

$$\rho_s = \rho_s^o \left(1 - \frac{p-p_o}{K_s} + \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')}{3(1-\phi)K_s} \right) \quad (3.36)$$

Pela conservação da massa:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho_s V_s}{Dt} &= 0 \\ \frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} &= -\frac{1}{V_s} \frac{DV_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{3(1-\phi)K_s} \frac{D\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')}{Dt} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Da [Equação 3.33](#), temos que uma rocha submetida a uma solicitação hidrostática exibe uma deformação volumétrica, logo a variação da solicitação da rocha ao longo do tempo será,

$$\frac{D\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')}{Dt} = 3K_T \left(\nabla \vec{v}_s + \frac{1}{K_s} \frac{Dp}{Dt} \right) \quad (3.38)$$

sendo \vec{v}_s a velocidade de deslocamento da rocha,

$$\nabla \vec{v}_s \equiv \frac{D\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}{Dt} \equiv \nabla \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (3.39)$$

Na [Equação 3.38](#), surge um termo em função da variação da poro-pressão efetiva, ela surge pois o termo $-\frac{1}{K_s} \frac{Dp}{Dt}$ representa a taxa de deformação volumétrica total causada pela compressão uniforme das partículas (não da matriz rochosa) pela poro-pressão média. Em solos esta deformação volumétrica é relativamente insignificante e é ignorada, porém ela é importante na mecânica das rochas e em concreto^[79]. Substituindo [Equação 3.38](#) em [Equação 3.37](#), obtemos

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{1-\phi} \left[(\alpha - \phi) \frac{1}{K_s} \frac{Dp}{Dt} - (1-\alpha) \nabla \vec{v}_s \right] \quad (3.40)$$

3.1.2.6 Permeabilidade

A determinação da permeabilidade do material poroso é bastante complexa, podendo ser pela através de micro-sísmica (*microseismic logging*) e também através de testes numéricos em escala de poro, combinado com imagens de microtomografia de raio X (*micro-CT*)^[85, 86] bem como pela variação de propriedades mecânicas como a porosidade.

Várias são as relações entre estas propriedades, como a equação de Kozeny-Carman^[78]:

$$k(\phi) = \frac{d_g^2}{\kappa_0 t^2} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (3.41)$$

sendo d_g o diâmetro dos grãos, κ_0 é o factor modificador que introduz a forma dos poros e t a tortuosidade. Outra expressão é a relação exponencial entre estas propriedades com base em resultados experimentais ^[87].

$$\mathbf{K}(\phi) = \mathbf{K}_o e^{b(\phi - \phi_o)} \mathbf{I} \quad (3.42)$$

sendo \mathbf{K}_o tensor permeabilidade inicial, ϕ_o porosidade inicial e b parâmetro do material.

3.2 Conservação de massa para meios porosos deformáveis

As equações que descrevem o escoamento bifásico água-óleo em meios porosos deformáveis são as equações de conservação de massa das fases fluidas e a sólida. Por motivos didáticos iremos descrever a conservação de massa da fase sólida primeiro, diferentemente da seção anterior.

3.2.1 Fase sólida

A conservação de massa da matriz sólida determina a variação da porosidade da rocha através da velocidade de deslocamento da rocha:

$$\frac{\partial(1 - \phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi)\rho_s \vec{v}_s) = 0 \quad (3.43)$$

Introduzindo a identidade da derivada material em relação a matriz rochosa

$$\frac{\partial(f)}{\partial t} = \frac{D(f)}{Dt} - \vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}(f) \quad (3.44)$$

sendo f uma função qualquer. Desta forma podemos escrever a [Equação 3.43](#) como:

$$\frac{D(1 - \phi)\rho_s}{Dt} - \vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}[(1 - \phi)\rho_s] + \nabla \cdot ((1 - \phi)\rho_s \vec{v}_s) = 0 \quad (3.45)$$

expandindo o primeiro termo e usando a identidade:

$$\nabla((1 - \phi)\rho_s \vec{v}_s) = \vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}[(1 - \phi)\rho_s] + (1 - \phi)\rho_s \nabla(\vec{v}_s) \quad (3.46)$$

Nós temos da [Equação 3.45](#),

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi) \nabla \vec{v}_s \quad (3.47)$$

Na equação, o primeiro termo do lado direito representa a compressibilidade da rocha enquanto o segundo consiste do termo geomecânico que define o meio poroso deformável.

3.2.2 Fases fluidas

Admitindo ausência de troca de massa entre as fases, pressão capilar nula e considerando as fases compressíveis, a equação governante da conservação de massa das fases fluidas é dada por:

$$\frac{\partial \phi \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \nabla(\rho_\alpha \phi s_\alpha \vec{v}_\alpha) = m_\alpha \quad (3.48)$$

sendo \vec{v}_α a velocidade intersticial da fase α e $m_\alpha = q_\alpha \rho_\alpha$ é a vazão mássica de injeção da fase α . Para meios porosos deformáveis, as tensões aplicadas a matriz sólida provocam deslocamentos na rocha. Neste caso, para satisfazer o princípio da invariância relativa à mudança do observador, as velocidades dos fluidos no meio poroso \vec{v}_α são definidas em relação a velocidade da rocha [\[88, 79\]](#), dado por:

$$\vec{v}_\alpha = \phi s_\alpha (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_s) \quad (3.49)$$

Substituindo na equação de conservação de massa temos:

$$\frac{\partial \phi \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \nabla(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha + \phi \rho_\alpha s_\alpha \vec{v}_s) = m_\alpha \quad (3.50)$$

expandindo, os termos da derivada temporal e do termo da velocidade da matriz sólida dentro do divergente, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha s_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi s_\alpha \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \phi \rho_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \nabla(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) + \rho_\alpha s_\alpha \vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}(\phi) \\ + \phi s_\alpha \vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}(\rho_\alpha) + \phi \rho_\alpha \vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}(s_\alpha) + \phi \rho_\alpha s_\alpha \nabla \vec{v}_s = m_\alpha \end{aligned} \quad (3.51)$$

Utilizando a identidade [3.44](#), chegamos a,

$$\rho_\alpha s_\alpha \frac{D\phi}{Dt} + \phi s_\alpha \frac{D\rho_\alpha}{Dt} + \phi \rho_\alpha \frac{Ds_\alpha}{Dt} + \nabla(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) + \phi \rho_\alpha s_\alpha \nabla \vec{v}_s = m_\alpha \quad (3.52)$$

Aqui, definimos a compressibilidade do fluido como:

$$c_\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{D\rho_\alpha}{Dp} \quad (3.53)$$

sendo p pressão total de fluido³, podemos reescrever a [Equação 3.52](#), como:

$$s_\alpha \frac{D\phi}{Dt} + \phi s_\alpha c_\alpha \frac{Dp}{Dt} + \phi \frac{Ds_\alpha}{Dt} + \frac{1}{\rho_\alpha} \nabla(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) + \phi s_\alpha \nabla \vec{v}_s = q_\alpha \quad (3.54)$$

A porosidade aparece na equação não somente como coeficiente, mas também como um termo envolvendo sua variação no tempo. A porosidade aparece também na permeabilidade, pois esta é função da porosidade. Para expressar o termo da derivada como uma função de variáveis de estado, basta realizar a substituição da equação de conservação de massa da fase sólida [3.47](#) na [Equação 3.54](#) ^[1], obtendo assim a formulação geral para problemas de acoplamento hidro-mecânico⁴:

$$\phi \left[s_\alpha c_\alpha \frac{Dp}{Dt} + \frac{Ds_\alpha}{Dt} \right] + s_\alpha \frac{(1-\phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + \frac{1}{\rho_\alpha} \nabla(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) + s_\alpha \nabla \vec{v}_s = q_\alpha \quad (3.55)$$

3.3 Equações governantes da formulação IMPES

Nesta seção as equações da pressão e saturação para escoamento bifásico para água e óleo usadas na formulação IMPES, considerando a deformação do meio poroso, são apresentadas. Para a formulação convencional basta considerar o meio poroso rígido ($\vec{v}_s = 0$ portanto $\frac{D\bullet}{Dt} \rightarrow \frac{\partial\bullet}{\partial t}$). Para a derivação desta formulação são consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. incompressibilidade das fases fluidas e da fase sólida ($c_\alpha = 0$, ρ_α e ρ_s constantes);
2. efeitos capilares nulos ($p_o = p_w = p$);

Portanto, a equação de conservação de massa das fases fluidas é reescrita da forma,

$$\phi \frac{Ds_\alpha}{Dt} + \nabla \vec{v}_\alpha + s_\alpha \nabla \vec{v}_s = q_\alpha \quad (3.56)$$

somando todas as fases ([Equação 3.56](#)), temos

$$\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}_s = q \quad (3.57)$$

³ Equivalente a poro-pressão efetiva^[79]

⁴ Note que se a derivada material nas equações de conservação podem ser aproximadas como Euleriana se considerarmos pequenas deformações

A velocidade total \vec{v} pode ser definida realizando a soma da [Equação 3.2](#) para as π fases para dar,

$$\vec{v} = -\lambda \mathbf{K}(\phi) \vec{\nabla} p + \lambda_g \mathbf{K}(\phi) \vec{g} \quad (3.58)$$

A mobilidade total λ e a mobilidade gravitacional total λ_g são definidas como,

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\pi} \lambda_i, \quad \lambda_g = \sum_{i=1}^{\pi} \lambda_i \rho_i \quad (3.59)$$

Finalmente, combinando a [Equação 3.57](#) e equação [3.58](#) obtemos a equação da pressão para fluxo multifásico incompressível considerado meio poroso deformável, chegamos a:

$$-\nabla \left[\lambda \mathbf{K}(\phi) \vec{\nabla} p \right] + \nabla \left[\lambda_g \mathbf{K}(\phi) \vec{g} \right] + \nabla \vec{v}_s = q \quad (3.60)$$

A equação governante da saturação (conhecida também de equação de transporte) para o método IMPES pode ser obtida da [Equação 3.56](#), substituindo a lei da Darcy ([Equação 3.2](#)) na [Equação 3.56](#) e eliminando $\vec{\nabla} p$ usando a equação da velocidade total ([Equação 3.58](#)) logo, obtemos,

$$\phi \frac{Ds_\alpha}{Dt} + \nabla (f_\alpha \vec{v}) + \nabla [g_\alpha \mathbf{K}(\phi) \vec{g}] + s_\alpha \nabla \vec{v}_s = q_\alpha \quad (3.61)$$

onde o fluxo fracional da fase α é definido por,

$$f_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} \quad (3.62)$$

e o fluxo fracional gravitacional da fase α é definido por,

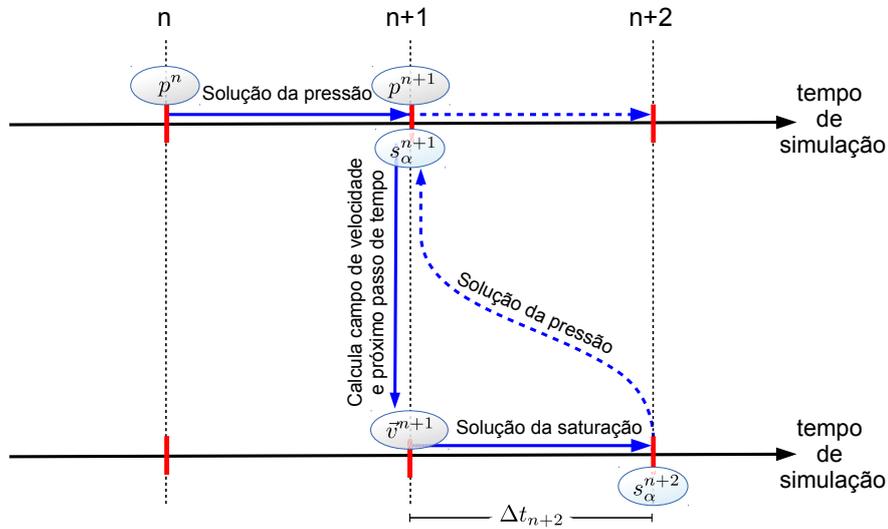
$$g_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\sum_{i=1}^{\pi} \lambda_i} \sum_{i=1}^{\pi} \lambda_i (\rho_i - \rho_\alpha) \quad (3.63)$$

As equações [3.60](#) e [3.61](#) formam as equações governantes da formulação IMPES. Embora as variáveis sejam parcialmente desacopladas, cada equação apresenta propriedades matemáticas completamente diferentes.

Devido a natureza desacoplada das variáveis é possível realizar diferentes aproximações e métodos de discretização, obtendo incógnitas em níveis de tempo diferentes. Assim, enquanto que o sistema linear resultante das equações da pressão ([Equação 3.60](#)) possui incógnitas relativas ao passo de tempo n , o sistema da saturação ([Equação 3.61](#)) apresenta incógnitas correspondem ao passo de tempo subsequente, ou seja, $n + 1$, desta forma facilitando a implementação da formulação. Na [Figura 3.5](#) é ilustrado o esquema IMPES convencional, onde cada nível de tempo é representado como um nó sobre a linha de tempo de simulação. As variáveis em um dado passo de tempo são representadas na vertical.

O procedimento de avanço no tempo do campo da pressão para o passo de tempo t_{n+1} , ilustrado na [Figura 3.5](#), pode ser resumido através dos seguintes passos:

Figura 3.5 – Esquema ilustrativo da formulação IMPES.



Fonte: o autor

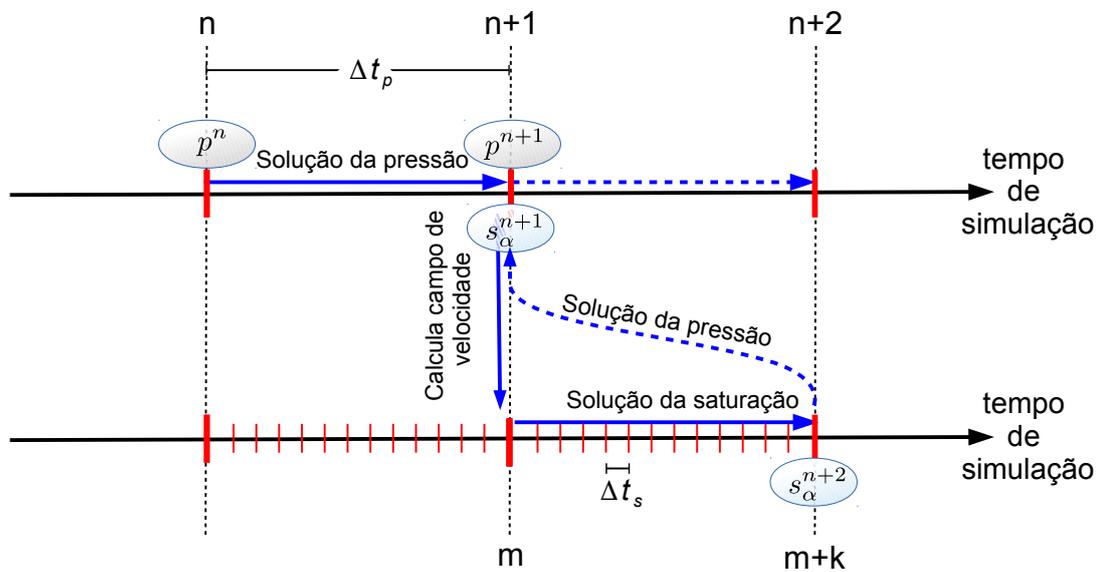
1. Calcular o campo de pressão empregando o campo de saturação no passo de tempo $n + 1$, que já foi obtido no intervalo de tempo anterior;
2. Determinar o campo de velocidade através do campo de pressão atualizado (passo 1) e o campo de saturação;
3. Avaliação do próximo passo de tempo (Δt_{n+2}), condicionado pela restrição de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL);
4. Solução da equação da saturação, para a obtenção do novo campo de saturação em $n + 2$;
5. Atualizar passo de tempo e voltar para o passo 1;

Para o primeiro passo de tempo, a estratégia considerada é determinar, primeiramente, o campo de pressão assumindo o campo de saturação neste nível igual ao campo prescrito como condição inicial. Uma vez obtido o campo de pressão, pode ser determinado o campo de velocidade e realizar as outras etapas da procedimento.

Diferentemente, da formulação totalmente implícita, que apresenta caráter incondicionalmente estável, que significa que podem ser empregados passos de tempos de qualquer magnitude sem comprometer a estabilidade numérica da solução do problema, como comentado nos parágrafos anteriores a formulação IMPES apresenta uma restrição no passo de tempo a qual se origina na aproximação explícita da equação de transporte (saturação).

Por este motivo, surgiu uma variante da formulação IMPES, na qual diferentes passos de tempo são considerados para as equações da saturação e da pressão. A Figura 3.6 ilustra o esquema desta variante, conhecido como IMPES modificado, na qual cada passo de tempo empregado para a equação da pressão é equivalente a um certo número de passos de tempo da equação da saturação, determinados de modo que a restrição de estabilidade do algoritmo explícito (condição CFL) seja satisfeita.

Figura 3.6 – Esquema ilustrativo da formulação IMPES modificado.



Δt_p - passo de tempo da solução da pressão

Δt_s - passo de tempo da solução da saturação (satisfaz critério CFL)

Fonte: o autor

Desta forma após resolver a equação da pressão e determinar o campo de velocidade de escoamento em um dado passo de tempo, é realizado um *loop* interno de soluções em que a equação da saturação é resolvida até que o intervalo de tempo acumulado da equação da saturação seja igual ao intervalo de tempo da equação da pressão, para então ser necessário a resolução da equação da pressão para iniciar um novo passo de tempo.

O esquema descrito acima permite reduzir significativamente o tempo de computação necessário para completar a simulação, uma vez que o volume de cálculo é diminuído expressivamente permitindo tornar o método IMPES apto para resolver alguns problemas de simulação de reservatórios e problemas em que os níveis de discretização da malha variam no domínio, cuja solução era inviável anteriormente com o esquema convencional dessa formulação (Fig. 3.5).

3.4 Formulação baseada em linhas de fluxo

Como brevemente comentado no Capítulo 1, a formulação baseada em linhas de fluxo aproxima as equações de escoamento bifásico 2D/3D em múltiplos problemas 1D ao longo das linhas de fluxo. A trajetória das linhas e a aproximação unidimensional da equação de transporte torna a formulação extremamente eficiente para problemas dominados pela advecção, como os casos que apresentam elevada heterogeneidade e grande quantidades de fraturas (reservatórios naturalmente fraturados) onde estes fatores influenciam o comportamento do fluxo dos fluidos no reservatório.

A formulação baseada em linhas de fluxo usa o esquema IMPES e seguem alguns princípios básicos [17]:

1. Traçado das linhas de fluxo a partir da solução da pressão;
2. Redefinição das equações de conservação de massa nas linhas de fluxo em termos do tempo de percurso da partícula ou “tempo de vôo“;
3. Atualização periódica das linhas de fluxo;
4. Solução numérica 1D do transporte de fluidos nas linhas de fluxo;
5. Mapeamento das propriedades de transporte para a malha original;
6. Tratamento de outras físicas inerentes ao fluxo como: efeitos gravitacionais, efeitos capilares e os efeitos geomecânicos, tratados neste trabalho.

3.4.1 Construção das linhas de fluxo

Num dado instante de tempo, a linha de fluxo é definida como uma curva instantânea no espaço onde todos os pontos sobre ela são tangentes ao campo de velocidade local [80]. O traçado das linhas de fluxo do injetor ao produtor é baseado na expressão analítica da trajetória da linha dentro do elemento, conhecido como o método de Pollock [13].

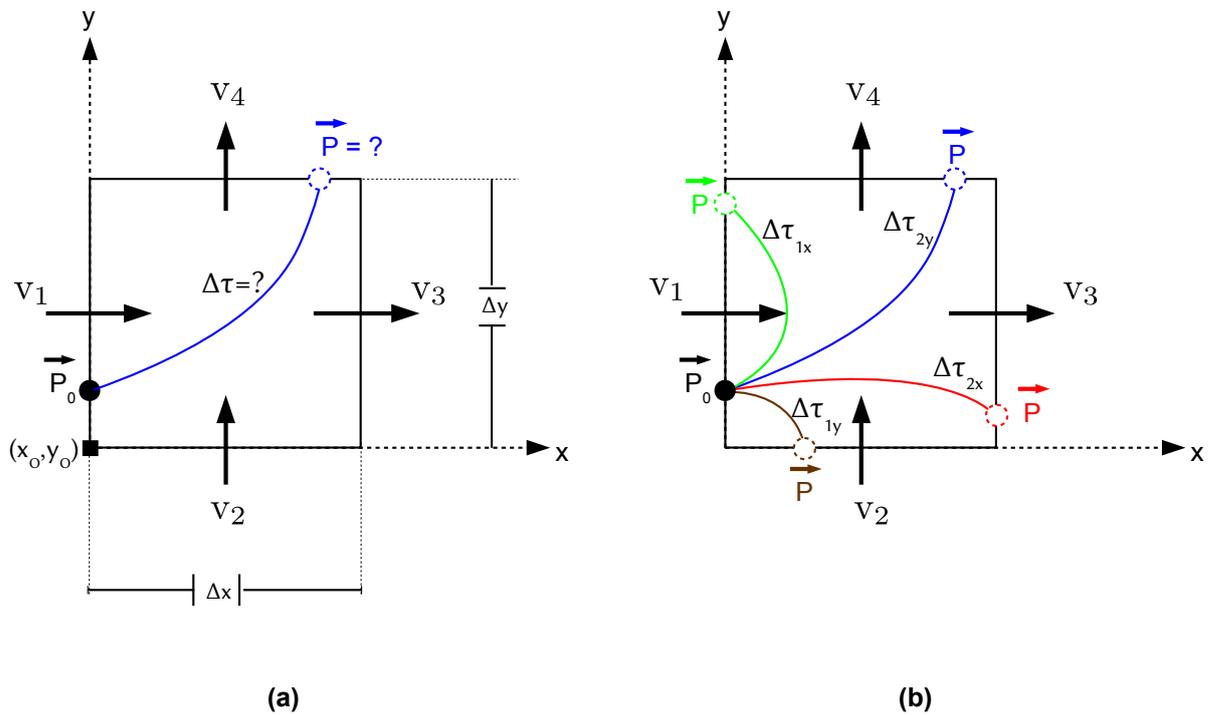
Este método considera que o campo de velocidade ao longo de cada direção (x,y,z) varia linearmente e é independente das velocidades nas outras direções. Assim, conhecendo as velocidade de entrada e saída do elemento, podemos encontrar o ponto de saída da trajetória da linha de fluxo e o tempo necessário para alcançá-lo partindo de um ponto de entrada.

3.4.1.1 Malhas estruturadas - método de Pollock

Considerando a célula da Figura 3.7(a), onde conhecemos o campo de velocidade intersticial definido por:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\phi} \quad (3.64)$$

Figura 3.7 – (a) Campo de velocidade e incógnitas do procedimento de Pollock para o traçado das linhas de fluxo em uma célula, (b) determinação da face de saída da linha com os tempo de percurso para cada face.



Fonte: o autor

Definido um sistema de coordenadas local e uma origem, a velocidade intersticial em cada uma das faces da célula é definida como:

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{n}_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.65)$$

sendo \vec{n}_i o vetor unitário normal a i -ésima face apontando para fora da célula. Para obter a trajetória da linha (ponto de entrada e saída da linha de fluxo) calculamos as componentes da velocidade nas direções x e y no interior da célula, como:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 + m_x(x - x_o) \\ v_y &= v_2 + m_y(y - y_o) \end{aligned} \quad (3.66)$$

sendo m_x e m_y os gradientes da velocidade dentro da célula, definidos por:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{v_3 - v_1}{\Delta x} \\ m_y &= \frac{v_4 - v_2}{\Delta y} \end{aligned} \quad (3.67)$$

As velocidades na célula são dadas por:

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{d\tau}{\phi} \quad (3.68)$$

sendo $d\tau$ é a variação do tempo de vôo no interior da célula.

Estas equações podem ser integradas explicitamente e independentemente para cada direção, utilizando equação 3.66. A partícula entra em um ponto na célula podendo sair em uma das faces da mesma. Integrando a equação 3.68 o tempo de vôo de cada face pode ser obtido por:

$$\frac{\Delta\tau_{e,x}}{\phi} = \int_{x_i}^{x_e} \frac{dx}{v_1 + m_x(x - x_o)} = \frac{1}{m_x} \ln \left[\frac{v_1 + m_x(x_e - x_o)}{v_1 + m_x(x_i - x_o)} \right] \quad (3.69)$$

$$\frac{\Delta\tau_{e,y}}{\phi} = \int_{y_i}^{y_e} \frac{dy}{v_2 + m_y(y - y_o)} = \frac{1}{m_y} \ln \left[\frac{v_2 + m_y(y_e - y_o)}{v_2 + m_y(y_i - y_o)} \right] \quad (3.70)$$

onde (x_e, y_e) são as coordenadas para o ponto de saída, e (x_i, y_i) são as coordenadas do ponto de entrada, \vec{P}_o , conforme ilustrado na Figura 3.7(a). A face onde a linha de fluxo irá sair será a face que apresentar o menor valor de tempo de percurso,

$$\Delta\tau_e = \text{MinPositivo}(\Delta\tau_{1,x}, \Delta\tau_{2,x}, \Delta\tau_{1,y}, \Delta\tau_{2,y}) \quad (3.71)$$

Conhecido o tempo mínimo, $\Delta\tau_e$, a exata coordenada de saída da linha de fluxo é determinada reescrevendo as eqs. 3.69 e 3.70 como:

$$x_e = x_o + v_1 \left(\frac{e^{m_x \Delta\tau_e / \phi} - 1}{m_x} \right) \quad (3.72)$$

$$y_e = y_o + v_2 \left(\frac{e^{m_y \Delta\tau_e / \phi} - 1}{m_y} \right) \quad (3.73)$$

Para o caso do gradiente em alguma direção ser zero, por exemplo, para $m_x = 0$ a Equação 3.69 torna-se

$$\frac{\Delta\tau_{e,x}}{\phi} = \int_{x_i}^{x_e} \frac{dx}{v_1} = \frac{(x_e - x_i)}{v_1} \quad (3.74)$$

e a posição nesta direção será dada por:

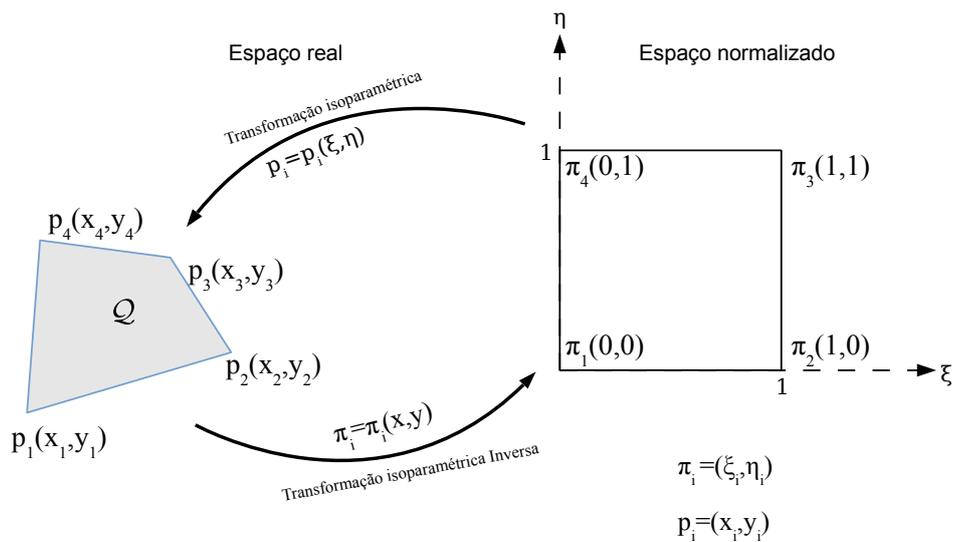
$$x_e = x_o + v_1 \Delta\tau_e \quad (3.75)$$

3.4.1.2 Malhas não-estruturadas

As equações governantes do método de Pollock são desenvolvidas assumindo malhas cartesianas. Para malhas não-estruturadas, *corner point geometry grid*-CPG e malhas triangulares de elementos finitos, é usada uma transformação isoparamétrica do espaço real (malha não-estruturada) para o espaço de referência ou unitário (cubo ou quadrado unitário), **Figura 3.8**, onde é realizado o traçado segundo o método de Pollock, e então transformando o ponto de saída da linha de fluxode volta ao espaço físico.

Este procedimento foi primeiramente descrito por [Cordes e Kinzelbach^{\[35\]}](#), para elementos finitos, e posteriormente estendido por [Jimenez et al.^{\[21\]}](#), para malhas CPG contendo falhas.

Figura 3.8 – Sub-célula do volume finito mapeada para o espaço normalizado utilizando a transformação isoparamétrica.



Fonte: o autor

Para traçar as linhas de fluxo em malhas não-estruturadas, é necessário reescrever a equação de Pollock em variáveis adimensionais e converter as velocidades intersticiais em vazões volumétricas, empregando:

$$\xi = x/\Delta x \quad (3.76)$$

$$\eta = y/\Delta y \quad (3.77)$$

$$f_i = \vec{v} \cdot \vec{n}_i \varepsilon_i \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (3.78)$$

sendo ξ e η as coordenadas do espaço de referência ou normalizado; f_i é a vazão volumétrica total normal a i -ésima face da célula; \vec{n}_i é o vector unitário normal, apontando para fora da célula, da i -ésima face da célula e ε_i é o comprimento da i -ésima face da célula.

Destas forma as equações do método de Pollock podem ser reescritas, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\phi \Delta x \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{f_\xi(\xi)}{\Delta y} \\ \phi \Delta y \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{f_\eta(\eta)}{\Delta x}\end{aligned}\tag{3.79}$$

Combinando as equações temos a seguinte relação:

$$\frac{d\tau}{\phi \Delta x \Delta y} = \frac{d\xi}{f_\xi(\xi)} = \frac{d\eta}{f_\eta(\eta)}\tag{3.80}$$

Note que a equação acima é semelhante a [Equação 3.68](#), aqui temos reescrito o método de Pollock em termos de vazões volumétricas e comprimentos dimensionais. Fazendo o uso de interpolação bilinear na forma de $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ podemos empregar o método em malhas não-estruturadas. A única diferença está na utilização das vazões ao invés de velocidades. Assim podemos proceder da mesma forma, integrando separadamente as equações em cada direção normalizada e obtendo a trajetória da linha de fluxo. O Jacobiano da transformação isoparamétrica pode ser usado para determinar a área da célula:

$$J(\xi, \eta) = \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right\|\tag{3.81}$$

$$\text{Área de } \mathcal{Q} = \int_0^1 \int_0^1 J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) d\xi d\eta \equiv \int_0^1 \int_0^1 J_m d\xi d\eta\tag{3.82}$$

Para encontrar o tempo de vôo de cada face, integramos explicitamente e independentemente em cada direção,

$$\begin{aligned}\phi \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{f_\xi(\xi)}{J(\xi, \eta)} \\ \phi \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{f_\eta(\eta)}{J(\xi, \eta)}\end{aligned}\tag{3.83}$$

A vazão volumétrica é linearmente interpolada em cada direção, similarmente a interpolação da velocidade na [Equação 3.66](#), como:

$$\begin{aligned}f_\xi(\xi) &= f_1 + m_\xi \xi \\ f_\eta(\eta) &= f_2 + m_\eta \eta\end{aligned}\tag{3.84}$$

A identidade [Equação 3.83](#) é a base para a extensão do método de Pollock para malhas não-estruturadas proposto por [Prévost, Blunt e Edwards^{\[36\]}](#) e o método de Jimenez [\[21\]](#).

A diferença entre estes métodos está na avaliação dada para o Jacobiano $J(\xi, \eta)$, enquanto que no método de Jimenez o Jacobiano é obtido numericamente, [Prévost, Blunt e Edwards^{\[36\]}](#) aproximam o Jacobiano no ponto médio da célula no espaço normalizado, isto é $J(\xi, \eta) \approx J_m$.

O método de [Prévost, Blunt e Edwards^{\[36\]}](#) reproduz linhas de fluxo exatas para fluxo uniforme, porém a aproximação do determinante do Jacobiano para um valor constante introduz erros no cálculo do tempo de vôo (malhas distorcidas), uma vez que o Jacobiano varia no quadrilátero, como discutido em [\[21\]](#).

No presente trabalho, com o objetivo de minimizar o custo computacional, optou-se em utilizar a aproximação do Jacobiano proposto por [Prévost, Blunt e Edwards^{\[36\]}](#), deste modo, a partir daqui será dada continuidade a sua derivação.

A [Figura 3.9](#) será utilizada para exemplificar a metodologia de traçado da linha de fluxo. O primeiro passo é determinar a face através da qual a partícula sairá. No exemplo ilustrado, devemos encontrar o tempo de percurso para cada face do quadrado unitário, para isso devemos integrar a [Equação 3.83](#) para cada direção, considerando a direção ξ ,

$$\int_0^{\Delta\tau_{e,\xi}} d\tau = \phi \int_{\xi_o}^{\xi_e} \frac{d\xi}{\frac{f_\xi(\xi)}{J_m}} \quad (3.85)$$

A vazão volumétrica pode ser substituída pela interpolação linear na direção ξ , dado pela [Equação 3.84](#), logo

$$\Delta\tau_{e,\xi} = \phi \int_{\xi_o}^{\xi_e} \frac{d\xi}{\frac{f_{r,1} + m_\xi \xi}{J_m}} = \phi \int_{\xi_o}^{\xi_e} \frac{d\xi}{f_{r,1} + m_\xi \xi} = \frac{\phi}{m_\xi} \ln \left[\frac{f_{r,1} + m_\xi \xi_e}{f_{r,1} + m_\xi \xi_o} \right] \quad (3.86)$$

sendo $f_{r,i} = \frac{f_i}{J_m}$ e redefinimos $m_\xi = f_{r,3} - f_{r,1}$. Com uma integração análoga na direção η , obtemos

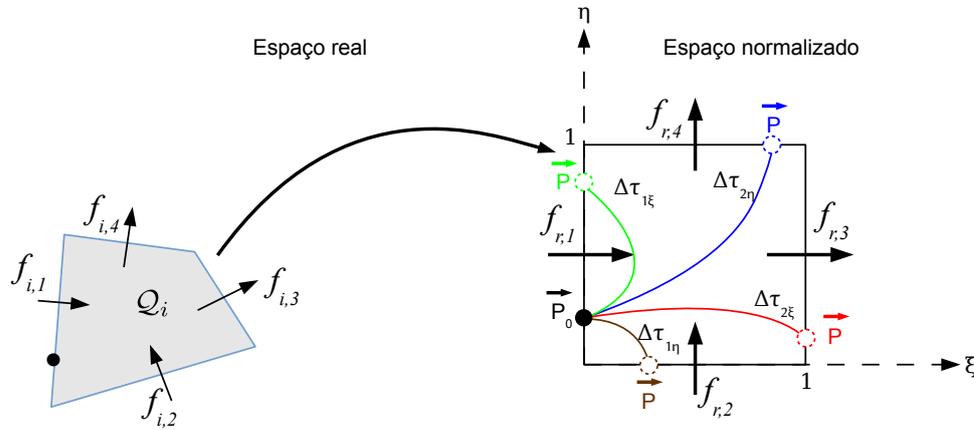
$$\Delta\tau_{e,\xi} = \frac{\phi}{m_\xi} \ln \left[\frac{f_{r,1} + m_\xi \xi_e}{f_{r,1} + m_\xi \xi_o} \right] \quad (3.87)$$

$$\Delta\tau_{e,\eta} = \frac{\phi}{m_\eta} \ln \left[\frac{f_{r,2} + m_\eta \eta_e}{f_{r,2} + m_\eta \eta_o} \right] \quad (3.88)$$

avaliaremos o tempo de percurso em cada uma das faces inserindo $\xi_e = \{0, 1\}$ e $\eta_e = \{0, 1\}$ em [3.87](#) e [3.88](#), respectivamente. A face onde a linha de fluxo irá sair será a face que apresentar o menor valor não negativo dos tempos de percurso,

$$\Delta\tau_e = \text{MinPositivo}(\Delta\tau_{1\xi}, \Delta\tau_{2\xi}, \Delta\tau_{1\eta}, \Delta\tau_{2\eta}) \quad (3.89)$$

Figura 3.9 – Método de Pollock considerando malhas não-estruturada.



Fonte: o autor

obtido o tempo de percurso, a coordenada de saída da partícula é encontrada a partir da [Equação 3.83](#), portanto temos:

$$\xi_e = \xi_o + (f_{r,1} + m_\xi \xi_o) \left(\frac{e^{m_\xi \Delta \tau_e} - 1}{m_\xi} \right) \eta_e = \eta_o + (f_{r,2} + m_\eta \eta_o) \left(\frac{e^{m_\eta \Delta \tau_e} - 1}{m_\eta} \right) \quad (3.90)$$

Com as coordenadas de saída da linha de fluxo no espaço normalizado, (ξ_e, η_e) , realizamos a transformação isoparamétrica para obtermos as coordenadas de saída da linhas no espaço real.

3.4.1.3 Transformação isoparamétrica bilinear

Quando traçamos as linhas de fluxo em malhas não-estruturadas precisamos realizar o mapeamento do quadrilátero convexo, Q , conforme ilustrado na [Figura 3.8](#), para um quadrado unitário através da transformação isoparamétrica bilinear. Este mapeamento é realizado através das seguintes equações:

$$x(\xi, \eta) = x_1(1 - \xi)(1 - \eta) + x_2\xi(1 - \eta) + x_3\xi\eta + x_4(1 - \xi)\eta, \quad (3.91)$$

$$y(\xi, \eta) = y_1(1 - \xi)(1 - \eta) + y_2\xi(1 - \eta) + y_3\xi\eta + y_4(1 - \xi)\eta, \quad (3.92)$$

Sendo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) e (x_4, y_4) as coordenadas da célula no espaço real, onde $0 \leq \xi \leq 1$ e $0 \leq \eta \leq 1$. As equações [3.91](#) e [3.92](#) são usadas para mapear coordenadas

do espaço normalizado para o espaço real. Contudo, quando mapeamos do espaço real para o normalizado, transformação isoparamétrica inversa⁵ ($\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(x, y)$), não é tão direta.

3.4.2 Equação de transporte ao longo das linhas de fluxo

Durante o processo de traçado das linhas de fluxo, determina-se o ponto de saída da partícula além do tempo necessário para alcançá-lo partindo de um ponto de entrada, esse tempo também é conhecido como tempo de vôo (*time of flight*), que é definido como o tempo que uma partícula leva para alcançar uma certa distância, s , ao longo da linha de fluxobaseado no campo de velocidade.

$$\tau(s) = \int_0^s \frac{\phi(\zeta)}{\|v_s(\zeta)\|} d\zeta \quad (3.93)$$

A integral pode ser obtida analiticamente usando as eqs. 3.69 ou 3.87, conduzindo a:

$$\tau = \sum_i^{n_{sc}} \Delta\tau_{e,i} \quad (3.94)$$

onde $\Delta\tau_{e,i}$ é o incremento de tempo de vôo que atravessa o i -ésimo sub-volume de controle

Em uma formulação IMPES, a equação de transporte (Equação 3.61) é resolvida ao longo das três dimensões da malha de simulação. Na formulação baseada em linhas de fluxo, a Equação 3.61 é decomposta em múltiplas equações unidimensionais que são resolvidas ao longo de cada linha de fluxotraçada. Essa decomposição é feita através das informações que τ incorpora, deste modo reescrevemos a subseção 3.93 como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial s} &= \frac{\phi}{\|\vec{v}\|} \\ \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\tau &= \phi \end{aligned} \quad (3.95)$$

Empregando as coordenadas (τ, χ, ψ) podemos definir o operador gradiente, como:

$$\vec{\nabla}(\bullet) = (\vec{\nabla}\tau) \frac{\partial}{\partial\tau}(\bullet) + (\vec{\nabla}\chi) \frac{\partial}{\partial\chi}(\bullet) + (\vec{\nabla}\psi) \frac{\partial}{\partial\psi}(\bullet) \quad (3.96)$$

Como \vec{v} é ortogonal a $(\vec{\nabla}\chi)$ e $(\vec{\nabla}\psi)$ temos então,

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\bullet) = \phi \frac{\partial}{\partial\tau}(\bullet) \quad (3.97)$$

Utilizando a identidade 3.97 na equação de transporte (3.61) obtemos,

$$\frac{Ds_\alpha}{Dt} + \frac{Df_\alpha}{D\tau} + \frac{1}{\phi} \nabla [g_\alpha \mathbf{K}(\phi) \vec{g}] + \frac{s_\alpha}{\phi} \nabla \vec{v}_s = \frac{q_\alpha}{\phi} \quad (3.98)$$

⁵ ver apêndice B

A [Equação 3.98](#) apresenta as equações de transporte através das coordenadas das linhas de fluxo. Como o termo gravitacional e o termo da deformação do meio poroso não coincidem com as linhas de fluxo, a equação [3.98](#) é resolvida através do método da decomposição do operador, onde a mesma é decomposta em duas partes (advecção - alinhada com as linhas de fluxo e os termos gravitacionais e de deformação do meio - não alinhadas às linhas de fluxo).

$$\frac{Ds_\alpha}{Dt_1} + \frac{Df_\alpha}{D\tau} = 0 \quad (3.99)$$

$$\phi \frac{Ds_\alpha}{Dt_2} + \nabla [g_\alpha \mathbf{K}(\phi) \vec{g}] + s_\alpha \nabla \vec{v}_s = q_\alpha \quad (3.100)$$

Outra maneira de resolver a [Equação 3.98](#) é empregando o conceito de projeção ortogonal [\[89\]](#).

4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo apresentaremos a discretização das equações governantes da formulação implementadas no código de elementos finitos com volume de controle CODE_BRIGTH.

Para isso, iremos particionar as equações governantes em subproblemas apresentados de forma independente entre si. Primeiro iremos apresentar a discretização do subproblema poro-mecânico, composto pelas equações de equilíbrio ou momento linear (eq. 3.13) e a equação da pressão (eq. 3.60), em seguida do subproblema da atualização da porosidade, formada pela equação da conservação de massa do sólido (eq. 3.47) e por último o subproblema de transporte (eqs. 3.98).

Nas equações que serão discretizadas não será especificado o instante de tempo de alguns campos apenas das variáveis de cada subproblema. Tais questões serão posteriormente resolvidas quando introduzirmos o algoritmo de acoplamento entre os módulos na seção 4.9.

4.1 Problema generalizado

Dado um operador em derivadas parciais, L , e um termo fonte, s , o problema generalizado pode ser definido como:

$$Lx = s \quad (4.1)$$

no domínio Ω (Figura 4.1), sujeito a condições de contorno, em $\partial\Omega$.

O problema (eq. 4.1) pode ser modelado, na forma fraca, pelo método dos resíduos ponderados (MRP), através de:

$$\langle Lx, v \rangle_{\Omega} = \langle s, v \rangle_{\Omega} \quad x \in D(\Omega), \forall v \in V(\Omega) \quad (4.2)$$

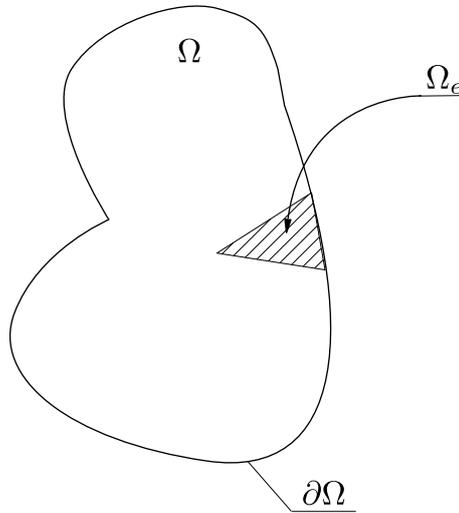
sendo $\langle a, b \rangle_{\Omega}$ o produto interno definido por:

$$\langle a, b \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} (b \cdot a) d\Omega \quad (4.3)$$

e $D(\Omega)$ e $V(\Omega)$ são espaços finitos de funções admissíveis e testes, respectivamente, convenientemente escolhidos. Por exemplo, para um subespaço finito, $D_h(\Omega) \subset D(\Omega)$ e uma base $\beta_{D_h} = [\varphi_i]$, podemos escrever $x_h \in D_h(\Omega)$ como:

$$x_h \equiv \sum_{i=1}^{n_{shape}} \varphi_i x_{h(i)} \quad (4.4)$$

Figura 4.1 – Domínio de um problema arbitrário Ω e seu contorno $\partial\Omega$.



Fonte: o autor

A mesma analogia é válida para um subespaço $V_h(\Omega) \subset V(\Omega)$. Basta agora que a expressão 4.2 seja válida para qualquer $v_h \in V_h(\Omega)$ para o qual x_h seja solução, aproximada, do problema generalizado na sua forma fraca (equação 4.2). Portanto, podemos observar que a escolha destes espaços é a chave para a qualidade da resposta do problema, de acordo com a escolha das funções testes¹. Neste trabalho foi utilizado o método de Galerkin, onde os subespaços de funções admissíveis e testes são definidos como:

$$D_h(\Omega) \equiv V_h(\Omega) \equiv \{\varphi |_{\text{elemento}} \in \mathbb{P}_k\} \quad (4.5)$$

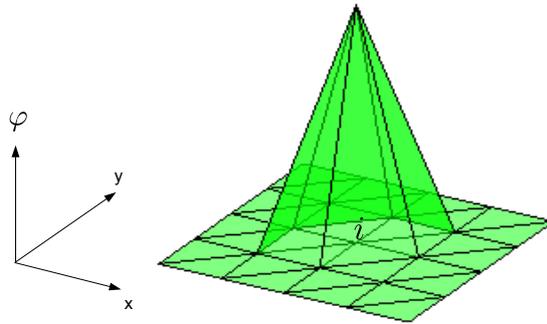
sendo \mathbb{P}_k o espaço de polinômios de grau menor ou igual a k , definido sobre os elementos finitos que subdivide o domínio Ω ; φ são funções testes prescritas em termos das variáveis independentes (coordenadas x , y , etc), conforme ilustrado na Figura 4.2.

4.2 Discretização do domínio

O domínio do problema é subdividido em subdomínios ou elementos. Considerando-se um domínio, Ω , este pode ser subdividido em um conjunto de n_{el} subdomínios, cada qual denominado Ω_e :

$$\begin{aligned} \Omega \cup \partial\Omega &\equiv \cup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e \\ \cap_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

¹ dependendo da escolha do subespaço das funções testes $V_h(\Omega)$, diferentes nomes são dados, podendo citar: Colocação pontual, colocação por subdomínios, Petrov-Galerkin, Bubnov-Galerkin, etc

Figura 4.2 – Função teste φ_i .

Fonte: o autor

Um típico elemento finito e de uma malha M_h , é definido pelos nós, i, j, k , etc, e linhas que conectam cada nó, $\partial\Omega_e$.

4.3 Subproblema poromecânico

As equações governantes do fenômeno poromecânico utilizado neste trabalho são formados pela equação de momento linear (eq. 3.13) e pela equação da pressão (eq. 3.60). As incógnitas deste subproblema são os deslocamentos (u, v, w) e a pressão de fluido (p) . A seguir, será mostrado as formas discretizadas das duas equações.

4.3.1 Equação de equilíbrio

Desprezando os efeitos inerciais, a equação do momento linear (eq.3.13) tornar-se,

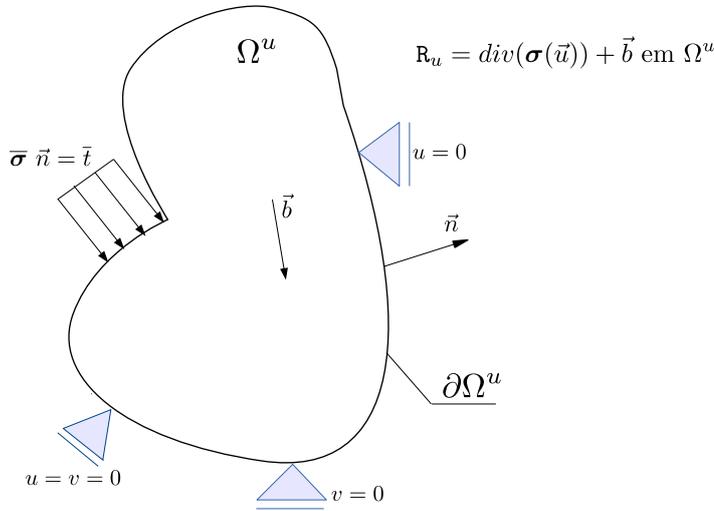
$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \vec{b} = 0 \quad (4.7)$$

O problema de equilíbrio pode ser ilustrado pela Figura 4.3, onde \vec{t} é a tensão aplicada em um contorno do domínio, $\partial\Omega^u$,

Aplicando-se o MRP (seção 4.1) à equação acima sobre o domínio Ω , podemos escrever o resíduo como:

$$-R_u = \int_{\Omega^u} \vec{\varphi}^T \left[\text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\vec{u}_h)) + \vec{b} \right] d\Omega^u \quad (4.8)$$

Figura 4.3 – Ilustração do domínio do problema de equilíbrio.



Fonte: o autor

sendo R_u o resíduo do problema mecânico² e $\vec{\varphi}$ é a função de forma disposta vetorialmente,

$$\vec{\varphi}_{i+3(j-1)} = \varphi_i \begin{bmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \end{bmatrix}, i \in 1, 2, 3; j \in 1, 2, \dots, n^u \quad (4.9)$$

com n^u sendo o número de funções de forma escalares do problema de equilíbrio mecânico, da mesma forma que n^p será o número de funções de forma do problema da equação da pressão. No presente trabalho, $n^u = n^p$

Aplicando-se a integração por partes e o teorema da divergência no primeiro termo da eq. 4.8 equação de equilíbrio pode ser reescrita, como:

$$R_u = \int_{\Omega^u} [(\nabla \vec{\varphi})^T \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}_h)] d\Omega^u - \int_{\Omega^u} \vec{\varphi}^T \vec{b} d\Omega^u - \int_{\partial\Omega^u} \vec{\varphi}^T \vec{t} d\partial\Omega^u \quad (4.10)$$

Reescrevendo a tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e a deformação, ε , na forma vetorial (notação de engenharia), temos:

$$\vec{\sigma} = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \right]^T \quad (4.11)$$

$$\vec{\varepsilon} = \left[\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz} \right]^T \quad (4.12)$$

deste modo, o tensor constitutivo (D), que é função do modelo constitutivo geomecânico empregado, pode ser expresso na forma de uma matriz 6x6, assim a relação tensão deformação pode ser expressada como:

$$\Delta \vec{\sigma} = D \Delta \vec{\varepsilon} \quad (4.13)$$

² O sinal à frente do resíduo R_u foi colocado por conveniência e será invertido no decorrer da formulação

A solução elementar do problema representada pela eq. 4.4, pode ser expressada de forma matricial pelo produto:

$$\vec{u} = \mathbf{N}_u \vec{u}_h = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \quad (4.14)$$

logo é necessário redefinimos o espaço de funções de forma (eq. 4.9) matricialmente conforme a eq. 4.15 e definimos o vetor de incógnitas como apresentado na eq. 4.16.

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & \varphi_{n^u} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \dots & 0 & \varphi_{n^u} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & \varphi_{n^u} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\vec{u}_h = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \dots & u_{n^u} & v_{n^u} & w_{n^u} \end{bmatrix}^T \quad (4.16)$$

Deste modo, também precisamos redefinir o operador de derivadas parciais como a matriz da eq. 4.17. Se admitirmos que a regra do produto matricial possa ser aplicado sobre este operador, podemos escrever, de forma mais compacta, o vetor de deformações (eq. 4.12) na forma matricial como expresso pela equação 4.18, onde define-se a matriz \mathbf{B}_u , e conseqüentemente, $\nabla \vec{\varphi} = \mathbf{S}_u \mathbf{N}_u = \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{B}_{n^u} \end{bmatrix}$, onde cada componente de \mathbf{B}_j é a matriz deformação-deslocamento do elemento segundo a equação 4.19.

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{B}_u \vec{u}_h \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Durante o processo de simulação é necessário desenvolver uma forma incremental da expressão 4.10. Portanto, temos que:

$$\Delta \vec{\sigma}(\Delta \vec{u}_h) = \mathbf{D} \Delta \vec{\varepsilon} + \alpha \vec{m} \mathbf{N}_p \Delta p^{\vec{\varepsilon}} + \vec{\sigma}'_0 \quad (4.20)$$

Sendo: \mathbf{D} o tensor constitutivo mecânico (matriz 6x6 conforme eq. 4.13); $\Delta \vec{\epsilon} = \mathbf{B}_u \Delta \vec{u}^e$, com $\Delta \vec{u}^e = \vec{u}^{e^{n+1}} - \vec{u}^{e^n}$ definido como o incremento dos deslocamentos dos nós do e-ésimo elemento; $\vec{m} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ o vetor para cálculo de traço de tensores na forma vetorial e $\Delta \vec{p}^e = \vec{p}^{e^{n+1}} - \vec{p}^{e^n}$ o incremento da pressão de fluido dos nós do e-ésimo elemento.

Portanto, substituindo-se as relações 4.19, 4.18, 4.16, 4.14 e 4.20 na equação de equilíbrio mecânico (eq. 4.10), obtemos:

$$R_u = \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e^u} [\mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u]}_{\mathbf{K}_u} d\Omega_e^u \Delta \vec{u}^e + \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e^u} [\mathbf{B}_u^T \alpha \vec{m} \mathbf{N}_p \Delta \vec{p}^e]}_{\mathbf{C}_u} d\Omega_e^u - \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e^u} \mathbf{N}_u^T \vec{b}}_{\vec{f}_b} d\Omega_e^u - \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\partial \Omega_e^u} \mathbf{N}_u^T \vec{t}}_{\vec{f}_{\Gamma_u}} d\partial \Omega_e^u \quad (4.21)$$

onde \mathbf{K}_u é a matriz de rigidez, definida pelos termos da integração de tensões interna, \mathbf{C}_u é a matriz de acoplamento do problema de equilíbrio mecânico, \vec{f}_b é a contribuição ao vetor de carga de forças de corpo e \vec{f}_{Γ_u} é a contribuição ao vetor de carga devido às condições de contorno. Todos os vetores e matrizes são construídas através da contribuição dos elementos Ω_e^u que formam a malha \mathbf{M}_h^u do problema de equilíbrio mecânico.

4.3.2 Equação da pressão

Na seção 3.3 foram apresentadas as equação governantes da formulação IMPES. No presente trabalho a equação da pressão (eq.3.60) é resolvida implicitamente e de forma sequencial a equação de equilíbrio mecânico. Considere o problema da difusão (equação da pressão), ilustrado pela Figura 4.4, onde \bar{q} é a condição de contorno mista aplicada em uma dada região do contorno do domínio, $\partial \Omega^p$, e aplicando o MRP (seção 4.1), de forma análoga ao problema de equilíbrio mecânico, implica em:

$$R_{\Omega^p} = \int_{\Omega^p} \varphi [\nabla \cdot (\vec{v} + \vec{v}_s) - q] d\Omega^p \quad (4.22)$$

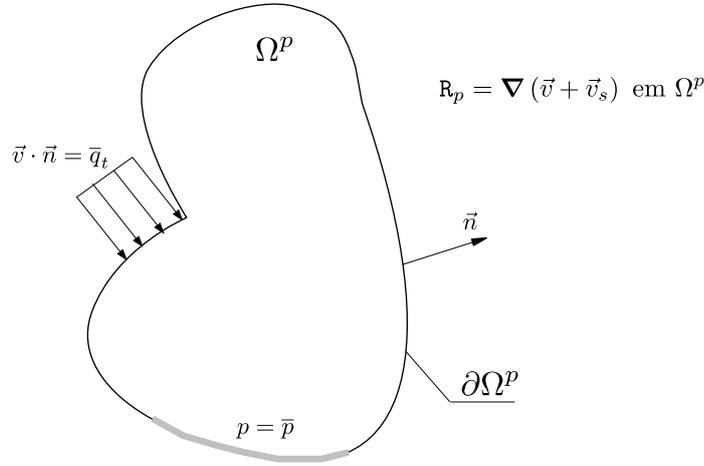
Como aqui o resíduo é um escalar a função de forma também será escalar, a aplicação do teorema da divergência para redução da ordem do primeiro termo da expressão de resíduos ponderados do problema da difusão 4.22, obtemos:

$$\int_{\Omega^p} [(\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{v}] d\Omega^p + \int_{\Omega^p} \varphi [\nabla \cdot \vec{v}_s] d\Omega^p - \int_{\partial \Omega^p} \varphi [\bar{q}] d\partial \Omega^p = 0 \quad (4.23)$$

Inserindo a lei de Darcy (eq.3.2) na expressão 4.23, obtemos a expressão final para a equação da pressão,

$$- \int_{\Omega^p} (\vec{\nabla} \varphi) \cdot [\lambda \mathbf{K}(\phi) \vec{\nabla} p_h] d\Omega^p + \int_{\Omega^p} (\vec{\nabla} \varphi) \cdot [\lambda_g \mathbf{K}(\phi) \vec{g}] d\Omega^p + \int_{\Omega^p} \varphi [\nabla \cdot \vec{v}_s] d\Omega^p - \int_{\partial \Omega^p} \varphi [\bar{q}] d\partial \Omega^p = 0 \quad (4.24)$$

Figura 4.4 – Ilustração do domínio do problema da pressão.



Fonte: o autor

Analogamente ao problema de equilíbrio mecânico, para expressar a formulação fraca da equação da pressão (eq. 4.24) na forma matricial, devemos redefinir a função de forma e o operador diferencial. Como a pressão de fluido é um escalar, portanto, pode ser escrita com o emprego das funções polinomiais elementares da forma expressa em 4.25, onde N_p é a matriz contendo os coeficientes polinomiais das funções de forma, como apresentado na eq. 4.26. Apesar de N_p ser um vetor, será representado como matriz (sem a notação \bullet) por ser definido como um vetor linha e não coluna. Isto simplifica a notação, a definição das operações e garante a analogia com a matriz N_u .

$$p_h = N_p \vec{p} \quad (4.25)$$

$$N_p = \left[\varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_{n^p} \right] \quad (4.26)$$

$$\vec{p} = \left[p_1 \quad \dots \quad p_{n^p} \right]^T \quad (4.27)$$

Novamente, define-se analogamente ao problema mecânico o operador gradiente das funções de forma B_p , como:

$$\vec{\nabla} \varphi = B_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n^p}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n^p}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n^p}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\vec{\nabla} p_h = B_p \vec{p} \quad (4.29)$$

Finalmente, substituindo as expressões 4.28, 4.29 e 4.26 no primeiro termo da equação 4.24 implica em:

$$\int_{\Omega_e^p} (\vec{\nabla}\varphi) \cdot [\lambda \mathbf{K}(\phi) \vec{\nabla}p_h] d\Omega_e^p \approx \int_{\Omega_e^p} [\lambda(s_w)]^e [\mathbf{B}_p^T \mathbf{K}(\phi) \mathbf{B}_p] d\Omega_e^p \vec{p} \quad (4.30)$$

O termo gravitacional segue as mesmas considerações, logo temos:

$$\int_{\Omega_e^p} (\vec{\nabla}\varphi) \cdot [\lambda_g \mathbf{K}(\phi) \vec{g}] d\Omega_e^p \approx \int_{\Omega_e^p} [\lambda_g(s_w)]^e [\mathbf{B}_p^T \mathbf{K}(\phi) \vec{g}] d\Omega_e^p \quad (4.31)$$

O tratamento do termo do deslocamento do sólido é realizado pela transformação do termo em função dos deslocamentos nodais. Da identidade 3.39, temos que,

$$\nabla \vec{v}_s = \nabla \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{m}^T \mathbf{B}_u \frac{\partial \vec{u}^e}{\partial t} = \vec{m}^T \mathbf{B}_u \left(\frac{\vec{u}^{e(n)} - \vec{u}^{e(n-1)}}{\Delta t} \right) \quad (4.32)$$

Portanto o termo da velocidade do sólido será dado por:

$$\int_{\Omega_e^p} \varphi [\nabla \vec{v}_s] d\Omega_e^p \approx \int_{\Omega_e^p} \mathbf{N}_p^T \vec{m}^T \mathbf{B}_u \left[\frac{\vec{u}^{e(n)} - \vec{u}^{e(n-1)}}{\Delta t} \right] d\Omega_e^p \quad (4.33)$$

Finalmente a expressão 4.24, na forma discretizada será:

$$\underbrace{- \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e^p} [\lambda(s_w)]^e [\mathbf{B}_p^T \mathbf{K}(\phi) \mathbf{B}_p] d\Omega_e^p \vec{p}}_{\mathbf{K}_p} + \underbrace{\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e^p} \mathbf{N}_p^T \vec{m}^T \mathbf{B}_u \left[\frac{\vec{u}^{e(n)} - \vec{u}^{e(n-1)}}{\Delta t} \right] d\Omega_e^p}_{\mathbf{C}_p} + \underbrace{\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e^p} [\lambda_g(s_w)]^e [\mathbf{B}_p^T \mathbf{K}(\phi) \vec{g}] d\Omega_e^p}_{\vec{f}_g} - \underbrace{\sum_{e=1}^{nel} \int_{\partial\Omega_e^p} \mathbf{N}_p^T \vec{q} d\partial\Omega_e^p}_{\vec{f}_{\Gamma_p}} = 0 \quad (4.34)$$

Nos termos advectivo e gravitacional, a notação $[\bullet]^e$ indica propriedades que são avaliadas no e -ésimo elemento, ou seja, no centro do elemento e através da média nodal das propriedades.

4.4 Subproblema da porosidade

Ao desprezarmos a advecção induzida pelo movimento da fase sólida e considerarmos o meio poroso incompressível como descrito na subseção 3.2.1, chegamos a expressão,

$$\frac{D\phi}{Dt} = (1 - \phi) \nabla \vec{v}_s \quad (4.35)$$

Com observado na expressão acima, a variação da porosidade é principalmente causada pelo termo de deformação volumétrica. A equação 4.35 é usada de duas formas:

a primeira consiste na substituição da variação da porosidade nas equações de balanço eliminando a derivada da porosidade; e segundo pela avaliação da variação da porosidade. Em vista disso, a equação 4.35 é resolvida explicitamente, logo temos:

$$[\phi^e]^{(n+1)} = \frac{[\phi^e]^{(n)} + [1 - [\phi^e]^{(n)}(1 - \epsilon)] \nabla \vec{v}_s}{1 + \epsilon \nabla \vec{v}_s} \quad (4.36)$$

onde $\nabla \vec{v}_s$ é dado pela equação 4.32.

4.5 Processamento e pós-processamento da velocidade total

Uma vez que as pressões e os deslocamentos nodais foram definidos, calcula-se, a velocidade total (velocidade dos fluidos no meio poroso e a velocidade do sólido) constante sobre os elementos \vec{v}_h^{n+1} por meio da expressão:

$$\begin{aligned} \vec{v}_h^{n+1} &\approx -\lambda(s_w) \mathbf{K}(\phi) \vec{\nabla} p_h + \lambda_g(s_w) \mathbf{K}(\phi) \vec{g} + \vec{v}_s \\ &= \underbrace{[\lambda(s_w)]^e \mathbf{K}(\phi) \mathbf{B}_p \vec{p}}_{\vec{k}_v} + \underbrace{[\lambda_g(s_w)]^e \mathbf{K}(\phi) \vec{g}}_{\vec{g}_v} + \underbrace{\left(\frac{\vec{u}^{e(n)} - \vec{u}^{e(n-1)}}{\Delta t} \right)}_{\vec{c}_v} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Em uma simulação por linhas de fluxo a velocidade total de Darcy computada é utilizada na construção das linhas de fluxo e determinação dos tempos de vôo.

Porém para a formulação implementada neste trabalho, as malhas utilizadas são formadas por triângulos lineares (simplex), que compõe a malha *primal* e, a partir desta, é construído uma malha *dual* de volumes finitos, empregando o método das medianas, conforme ilustrado na Figura 4.5.

Como discutido na seção 3.4.1.2, o processo de traçado das linhas de fluxo em malhas não-estruturadas necessita das vazões para determinar o ponto de saída e o tempo de percurso da linha na célula. Para obtermos estas vazões, a partir da equação da pressão, reescreveremos a equação 3.60, novamente, da seguinte forma:

$$\nabla(\vec{v} + \vec{v}_s) = q \quad (4.38)$$

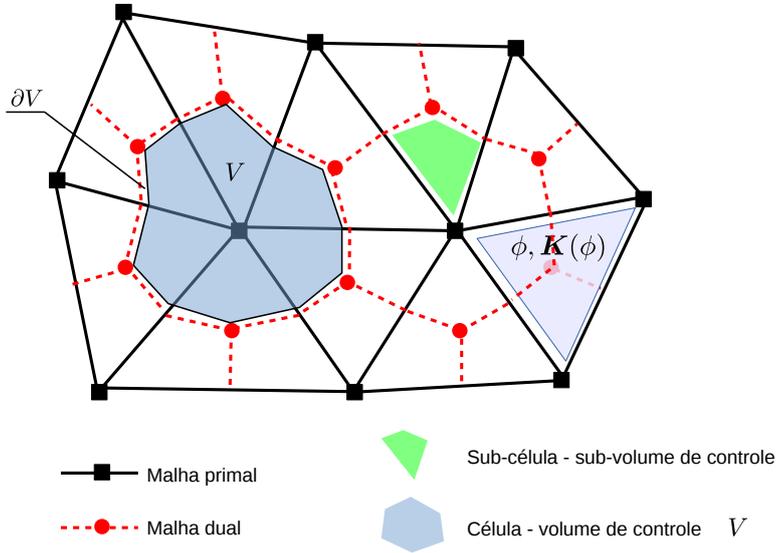
Discretizando a equação acima, sobre uma célula (volume de controle) centrado no nó i (V_i), com contorno ∂V_i , obtemos:

$$\oint_{\partial V_i} [\vec{v} + \vec{v}_s] \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (4.39)$$

sem perda de generalidade, podemos definir a vazão sobre um segmento de ∂V_i como:

$$f_{i,j} = \int_{\varepsilon_j} [\vec{v} + \vec{v}_s] \cdot \vec{n} dS \text{ com } j \in \{1, \dots, n_{e,p}\} \quad j \in \{1, 2\} \quad (4.40)$$

Figura 4.5 – Representação da malha triangular primal (simplex) e a malha de volumes finitos (dual).



Fonte: o autor

sendo ε_j o j -ésimo segmento da superfície de controle que pertence ao triângulo i (ver Figura 4.6(d)) e $n_{e,p}$ é o número de sub-volumes de controle da p -ésima célula (volume de controle).

Como observado na Figura 4.5, os volumes de controle são divididos em $n_{e,p}$ sub-volumes de controle. Desde que as propriedades do meio poroso (permeabilidade e porosidade), são consideradas constantes sobre os triângulos, \mathcal{T} , bem como a velocidade total de Darcy (\vec{v}) e a velocidade do sólido (\vec{v}_s), esta última interpolada através das funções de forma (Figura 4.6(b)), podemos obter as vazões sobre as superfície de controle como:

$$f_{i,1} = [\vec{v} + \vec{v}_s]_i \cdot \vec{n}_{A1} \quad (4.41a)$$

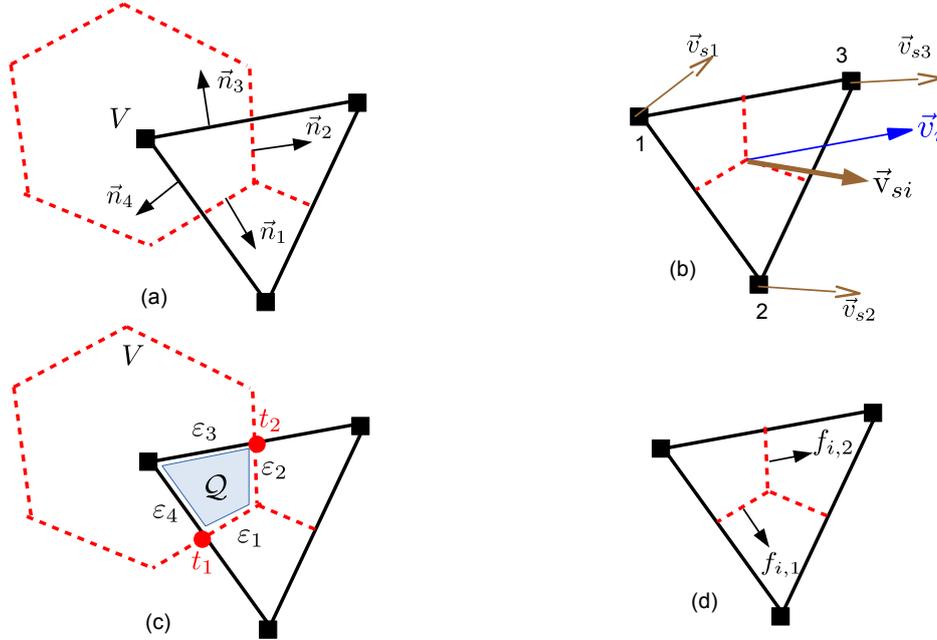
$$f_{i,2} = [\vec{v} + \vec{v}_s]_i \cdot \vec{n}_{A2} \quad (4.41b)$$

sendo $\vec{n}_{Aj} = \vec{n}_j \varepsilon_j$ vetor área normal do j -ésimo segmento apontando para fora da superfície de controle, \vec{n}_j vetor normal unitário do j -ésimo segmento apontando para fora da superfície de controle.

Entretanto, a velocidade total, \vec{v}_i , não é adequada para realizar o traçado das linhas de fluxo. Isto ocorre porque as componentes normais do campo de velocidade total obtido não são contínuas na fronteira elemento-elemento (arestas ε_3 e ε_4).

A descontinuidade do campo de velocidade total ocorre porque a continuidade do fluxo é imposta no contorno dos volumes finitos, ∂V , ou seja nas arestas ε_1 e ε_2 , através da aplicação do teorema de Green-Gaus necessário para a integração do campo descontínuo

Figura 4.6 – (a) Definição dos vetores normais \vec{n}_1 e \vec{n}_3 ; (b) Velocidade total no i -ésimo elemento \vec{v}_i e velocidades nodais (\vec{v}_{s1} , \vec{v}_{s2} e \vec{v}_{s3}) e interpolada (\vec{v}_s) do sólido (c) definição das arestas do sub-volume de controle (Q) e (d) vazões sobre as superfícies de controle (V) diretamente da solução da pressão.



Fonte: o autor

da velocidade total, onde estes são projetados sobre as superfícies de contorno, \vec{n}_{Ai} , para obter a integral de superfície:

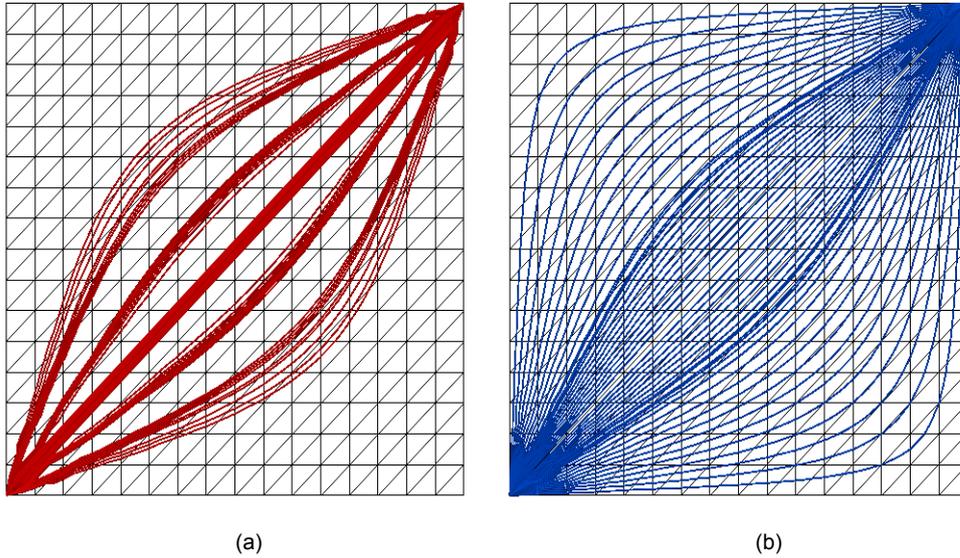
$$\oint_{Volumes} \vec{v} \cdot \vec{n} dS \equiv \int_{Elementos} \nabla \vec{v} dV \quad (4.42)$$

Esta descontinuidade do campo de velocidade total não produz conservação de massa ao longo das linhas de fluxo, conduzindo a linhas incorretamente traçadas, conforme ilustrado na Figura 4.7(a), onde apenas foi utilizado o campo \vec{v} .

Para obtermos linhas de fluxo corretamente traçadas é necessário realizar um pós-processamento do campo de velocidade descontínuo obtido pelo FEM [35, 36], tornando-o adequado para o traçado. Para isso, o campo precisa satisfazer as seguintes condições:

1. O campo de velocidade deve satisfazer (4.38) em todo os pontos do domínio Ω ;
2. A componente normal da velocidade \vec{v} deve ser contínua elementos-a-elemento.
3. O campo de velocidade deve ser localmente irrotacional.

Figura 4.7 – (a) 52 Linhas traçadas empregando o campo de velocidade descontinuo, \vec{v} ; (b) 52 Linhas traçadas empregando o campo de velocidade pós-processado.



Fonte: o autor

O pós-processamento consiste em impor estas restrições ao campo de velocidade. Impomos no sub-volume de controle as condições de continuidade e conservação, conforme ilustrado na Figura 4.8, e sobre o volume de controle a condição de irrotacionalidade (Figura 4.9).

Aplicando diretamente a condição de conservação de massa sobre o sub-volume de controle, $\mathcal{Q}_{i,p}$, obtemos a expressão:

$$f_{i,3}^* + f_{i,4}^* = -(f_{i,1} + f_{i,2}) \quad (4.43)$$

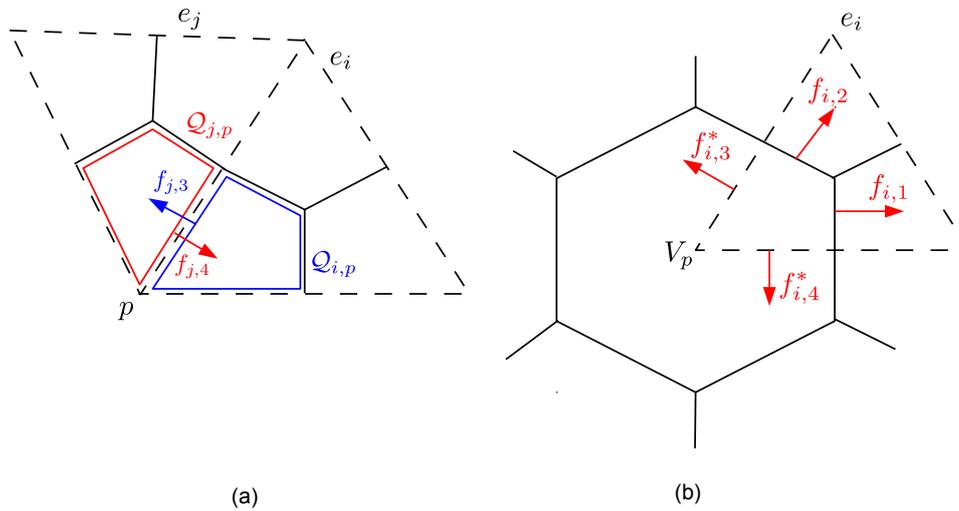
Aplicamos a condição de continuidade em cada aresta do interior do volume finito V_p (arestas ε_3 e ε_4) que compartilha dois diferentes sub-volumes de controle ($\mathcal{Q}_{i,p}$ e $\mathcal{Q}_{j,p}$), ilustrado na Figura 4.8(a), obtemos:

$$f_{i,3}^* + f_{j,4}^* = 0 \quad (4.44)$$

Considerando o sistema linear resultante das condições impostas sobre o volume finito V_p , temos, portanto:

$$\begin{cases} f_{i,3}^* + f_{i,4}^* = -(f_{i,1} + f_{i,2}) & i = 1, \dots, n_{e,p} \\ f_{i,3}^* + f_{j,4}^* = 0 & i = 1, \dots, n_{e,p} \quad j = 1, \dots, n_{e,p} \end{cases} \quad (4.45)$$

Figura 4.8 – Vazões normais (a) nas arestas internas do volume de controle; (b) e sobre o perímetro do volume de controle ∂V_p .



Fonte: o autor

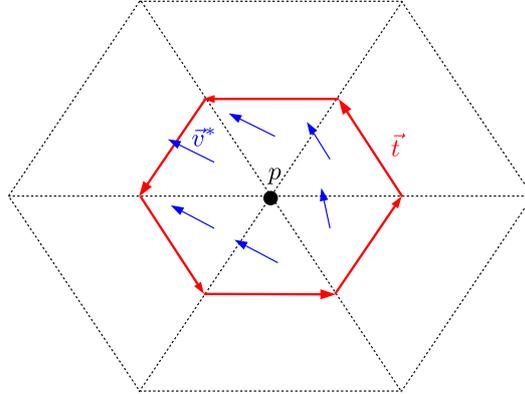
Utilizando apenas as equações 4.45 não será possível obter uma solução ($f_{i,3}$ e $f_{i,4}$), pois o sistema linear apresenta uma das equações linearmente dependente [35, 36] (o posto do sistema diferente do número de incógnitas), isso ocorre devido a redundância da conservação de massa impostas sobre os sub-volumes de controle que somando-se as equações do sistema 4.45 leva a forma discreta da equação 4.39, conforme relatado na literatura [35, 36].

Para contornar essa dependência linear, substitui-se no sistema uma das restrições de conservação sobre um dos sub-volumes de controle pela condição de irrotacionalidade do campo de velocidade pós-processado (Figura 4.9),

$$\sum_{i=1}^{n_{e,p}} \mathbf{K}(\phi)^{-1} \vec{v}_i^* \cdot \vec{t}_i = 0 \quad i = 1, \dots, n_{e,p} \quad (4.46)$$

sendo $\vec{t}_i = t_2 - t_1$ conforme Figura 4.9.

Figura 4.9 – Condição de irrotacionalidade do campo de pressão em torno do nó p (p -ésimo volume de controle).



Fonte: o autor

Assim o sistema linear resultante 4.45, torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_{i,3}^* + f_{i,4}^* = -(f_{i,1} + f_{i,2}) & i = 1, \dots, n_{e,p} - 1 \\ f_{i,3}^* + f_{j,4}^* = 0 & i = 1, \dots, n_{e,p} \quad j = 1, \dots, n_{e,p} \\ \sum_{i=1}^{n_{e,p}} \mathbf{K}(\phi)^{-1} \vec{v}_i^* \cdot \vec{t}_i = 0 & i = 1, \dots, n_{e,p} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

onde $f_{i,1}$ (eq. 4.41a) e $f_{i,2}$ (eq. 4.41b) são os fluxos obtidos da discretização da equação da pressão (eq. 4.38), $f_{i,3}^* = \vec{v}_i^* \cdot \vec{n}_{A3}$ e $f_{j,4}^* = \vec{v}_j^* \cdot \vec{n}_{A4}$ as vazões normais sobre as arestas internas.

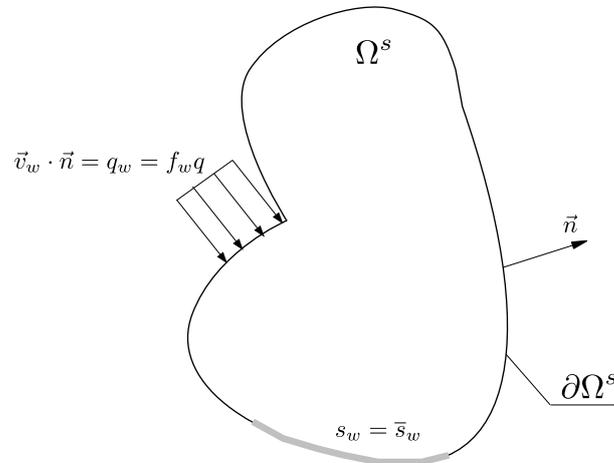
Após a resolução do sistema linear eq. 4.47 o traçado poderá ser realizado empregando as vazões $f_{i,1}$, $f_{i,2}$, $f_{i,3}^*$ e $f_{i,4}^*$ sobre cada sub-volume de controle, $\mathcal{Q}_{i,p}$, empregando o procedimento discutido na página 71, produzindo as linhas ilustradas na Figura 4.7(b). Uma consequência do pós-processamento do campo de velocidade resultante é a obtenção da conservação de massa em nível de sub-volume de controle e portanto de elemento, como mostrado no apêndice C.

4.6 Subproblema de transporte

O subproblema de transporte (Figura 4.10), envolve a equação de transporte 3.98, que é resolvida aplicando a técnica de decomposição de operadores baseado num esquema de predição e correção, com o objetivo de avaliar separadamente o transporte advectivo da saturação e os demais termos.

Este procedimento é realizado definindo a sequencia de problemas para cada

Figura 4.10 – Ilustração do domínio do subproblema de transporte.



Fonte: o autor

intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$. Para este fim reescreveremos a equação 3.98 na forma decomposta, onde a equação 3.99 é resolvida ao longo das linhas de fluxo e definido como problema preditor e a equação 3.100 é resolvida sobre a malha de volumes finitos (malha dual) definido como problema corretor.

4.6.1 Problema preditor

O problema preditor é resolvido ao longo das linhas de fluxo traçadas. As linhas traçadas do injetor ao produtor atingem um número arbitrário de sub-células e elementos finitos, em diferenças finitas as linhas são lançadas a partir das faces de todos os blocos que possuem um poço injetor.

Na formulação implementada neste trabalho, as linhas se iniciam sobre os segmentos do volume de controle em torno dos nós injetores, conforme ilustrado na Figura 4.11. O número total de linhas desejado é dividido entre os segmentos do volume de controle, em proporção à vazão total da superfície de controle, ou seja, mais linhas serão traçadas em segmentos localizados em regiões com elevado fluxo e menos linhas serão traçadas em segmentos com baixo fluxo.

Como a vazão sobre as superfícies de controle é uniforme, as linhas de fluxo são distribuídas em cada segmento de maneira uniforme. Uma vez determinado o ponto de lançamento de uma linha de fluxo, o fluxo atribuído em cada linha de fluxo traçada (q^{sl}) é dado por:

$$q^{sl} = \frac{f_{scv}}{n_{scv}^{sl}} \quad (4.48)$$

sendo f_{scv} o fluxo de saída de um segmento do volume de controle e n_{scv}^{sl} o número de linhas lançadas a partir do segmento. Em seguida, é realizado o traçado da trajetória da linha lançada empregando o método de Pollock em malhas não-estruturadas, explanado na seção 3.4.1.2, até que uma sub-célula pertencente a um poço produtor ou um contorno seja atingido. Durante esse processo são determinados os tempos de vôo para alcançar cada “nó da linha de fluxo”. Este “nó” representa a posição em que a linha passa de uma sub-célula para a sub-célula seguinte, conforme ilustrado na Figura 4.11.

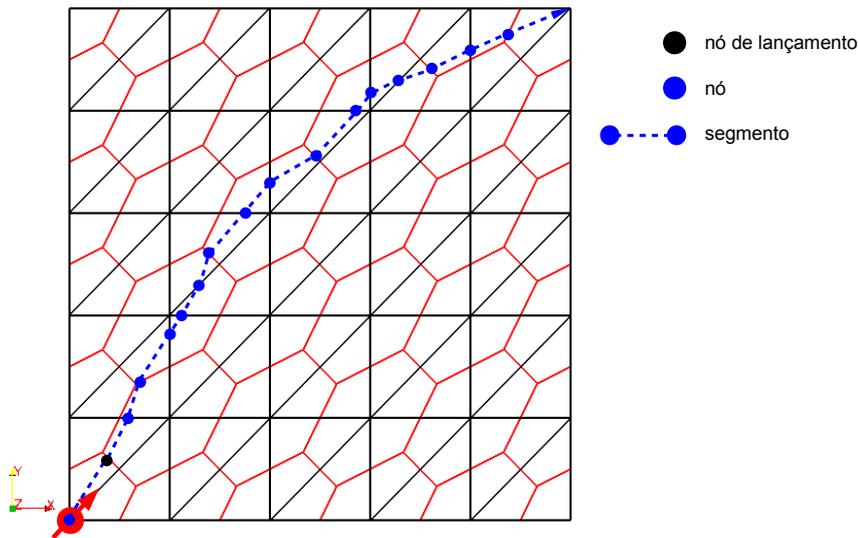
Por definição, nas proximidades do poço injetor, o primeiro nó da linha de fluxocorresponde ao nó atribuído a condição de contorno. O incremento do tempo de vôo entre o nó injetor e a superfície de controle de lançamento corresponde ao tempo necessário para o preenchimento do volume poroso do volume de controle pela vazão de injeção. A mesma consideração é aplicada para o último nó, quando se atinge o poço produtor.

$$\Delta\tau_1 = \frac{\phi_{cv}V_{cv}}{q_{inj}} \quad (4.49)$$

$$\Delta\tau_N = \frac{\phi_{cv}V_{cv}}{q_{prd}} \quad (4.50)$$

Durante o processo de traçado das linhas, além dos intervalos de tempos de vôos, as saturações de água também devem ser obtidas para a condição inicial da solução do transporte. No caso desta propriedade considerou-se duas abordagens. A primeira é

Figura 4.11 – Definição de nó e segmento de linha de fluxo lançada de um poço injetor. O primeiro nó corresponde ao nó de contorno atribuído à injeção de fluido.



Fonte: o autor

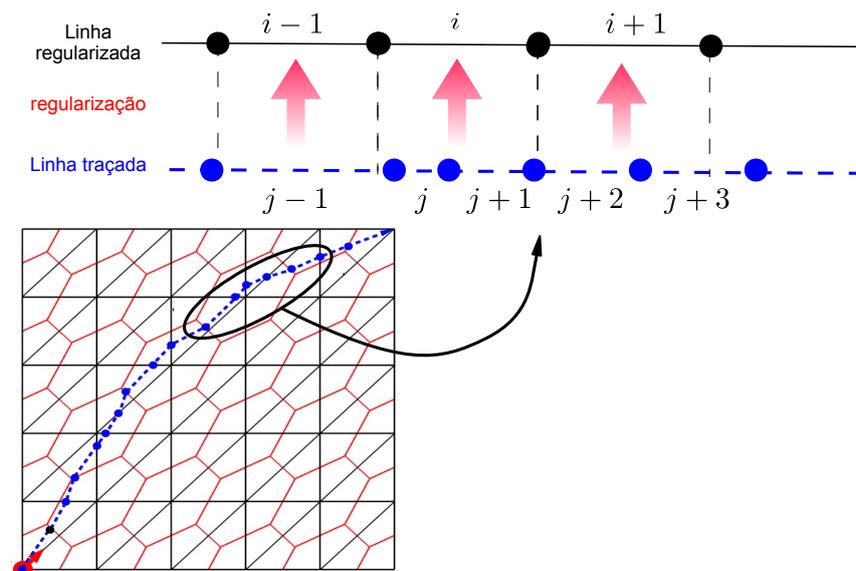
aproximar a saturação de água no segmento da linha de fluxo apenas pela saturação média do elemento finito que ela atravessa, a segunda aproximação é feita através da interpolação do ponto médio do segmento que atravessa o elemento finito pelas funções de interpolação.

Na maioria dos casos envolvendo a simulação baseada em linhas de fluxo, nem todos os elementos e volumes de controle serão atravessados por linhas, normalmente, nestes casos, ocorre o processo de traçado adicional de linhas que iniciam no centro destes elemento não atingidos. Em malhas de simulação envolvendo simulações acopladas, a malha apresenta além do reservatório as rochas adjacentes, e por este motivo não foi considerado o processo de traçado adicional nos elementos não atingidos pelas linhas de fluxo.

4.6.1.1 Processo de regularização das linhas e mapeamento das propriedades de transporte

Antes de avançar o campo de saturação ao longo da linha de fluxo é necessário realizar um processo de regularização da linha de fluxo em intervalos de tempo de vôo constantes. A Figura 4.12 ilustra o processo de regularização, esta etapa representa a principal fonte de difusão numérica do método das linhas de fluxo. A linha em preto representa a linha regularizada, com seus segmentos e nós, a linha em azul esquematiza a linha traçada.

Figura 4.12 – Processo de regularização de uma linha de fluxo.



Fonte: o autor

Na ilustração o i -ésimo segmento regularizado engloba mais de um intervalo da linha traçada, enquanto que o intervalo $i-1$ da linha regularizada está completamente

contida dentro de um único intervalo da linha traçada. Quando não existe coincidência entre os limites dos segmentos, o intervalo da linha traçada é dividido, como pode ser observado em relação ao intervalo $j + 3$ da linha traçada.

O número de elementos da linha regularizada é um múltiplo do número de nós da linha traçada. Para problemas incompressíveis observa-se que dois é um multiplicador adequado. O processo de regularização é realizado de forma a manter a conservação das massas das fases envolvidas na simulação. Quando o escoamento é incompressível, a vazão na linha é uniforme em toda a sua extensão, como comentado anteriormente. Como o tempo de vôo é proporcional ao volume poroso, a regularização emprega as seguintes expressão:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} S_\alpha d\tau = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} S_\alpha d\tau \quad (4.51)$$

O campo de saturação das fases na linha regularizada é obtido através da integração da equação 4.51. Na situação onde o trecho regularizado engloba vários intervalos, a saturação, no i -ésimo trecho, é obtida por:

$$S_\alpha|_i = \frac{\sum_j S_\alpha|_j (\tau_j - \tau_{j-1})}{\Delta\tau_i} \quad (4.52)$$

Para a situação onde o trecho regularizado está contido no intervalo entre dois nós, intervalo $i - 1$, a saturação do intervalo são simplesmente copiadas para o trecho regularizado.

4.6.1.2 Solução da equação de transporte sobre as linhas de fluxo

Após a regularização da linha de fluxotraçada, procedemos com a solução do problema predictor, equação 3.99. Esta é discretizada empregando o método de ponderação a montante de primeira ordem explícita, logo a forma discreta para i -ésimo segmento da linha de fluxoregularizada é dado por:

$$(s_w^{sl})_i^{(n+1)} = (s_w^{sl})_i^{(n)} + \frac{\Delta t_{sl}}{\Delta\tau} [(f_w^{sl})_i^{(n)} - (f_w^{sl})_{i-1}^{(n)}] \quad (4.53)$$

sendo $(s_w^{sl})_i^{(n+1)}$ a saturação de água no i -ésimo segmento da linha de fluxoregularizada; n é o indicador de nível de tempo; Δt_{sl} é o passo de tempo utilizado na solução da linha de fluxo, satisfazendo o critério CFL; $\Delta\tau$ é o passo de tempo de vôo da linha de fluxo após o processo de regularização; $(f_w^{sl})_i^{(n)}$ e $(f_w^{sl})_{i-1}^{(n)}$ são os fluxos fracionários de água à montante e à jusante do segmento da linha de fluxoregularizada.

O passo de tempo de solução da equação 4.53, Δt_{sl} , é uma das principais vantagens da simulação por linha de fluxo, uma vez que é possível utilizar o passo de tempo mais adequado na solução do transporte para cada linha. O passo de tempo estável para a

solução desta equação é obtido através de:

$$\Delta t_{sl} = \frac{n_{CFL} \Delta \tau}{v_{max}^w} \quad (4.54)$$

sendo $n_{CFL} \leq 1$ o número de Courant e v_{max}^w representa a máxima velocidade de choque [17],

$$v_{max}^w = \left[\frac{(f_w^{sl})_i^{(n)} - (f_w^{sl})_{i-1}^{(n)}}{(s_w^{sl})_i^{(n)} - (s_w^{sl})_{i-1}^{(n)}} \right]_{max} \quad (4.55)$$

Cada linha é resolvida várias vezes, obedecendo-se o máximo intervalo de tempo para estabilidade, até que o intervalo de tempo utilizado na solução de pressão (Δt_p) seja atingido, ou seja, $\Delta t_p = \sum \Delta t_{sl}$.

4.6.1.3 Mapeamento da vazão e propriedades transportadas para os poços produtores

Após a solução da equação de transporte ao longo da linha de fluxo, a vazão atribuída em cada linha de fluxo (q^{sl}) é usada para determinar o fluxo fracionário dos poços produtores, esta propriedade é calculada pela média entre os fluxos fracionários das linhas que chegam a esse poço,

$$f_{wp} = \frac{\sum_{i=1}^{n_p^{sl}} q_i^{sl} \tilde{f}_{wi}}{\sum_{i=1}^{n_p^{sl}} q_i^{sl}} \quad (4.56)$$

sendo n_p^{sl} número de linhas de fluxo que atinge o nó e \tilde{f}_{wi} o fluxo fracionário acumulado médio da i -ésima linha de fluxo no intervalo de tempo da solução da pressão, dado pela expressão

$$\tilde{f}_{wi} = \frac{\sum_{m=1}^{n_{sol}} \Delta t^m f_w |_{j=n_{ssl}}^m}{\Delta t_p} \quad (4.57)$$

onde n_{sol} é número de soluções internas da equação de transporte da linha de fluxo, Δt^m o passo de tempo da solução da equação de transporte da linha de fluxo, n_{ssl} o número de segmentos da linha de fluxo regularizada e Δt_p e passo de tempo da solução da pressão.

De maneira similar, as quantidades transportadas são aproximadas,

$$s_{wp} = \frac{\sum_{i=1}^{n_p^{sl}} q_i^{sl} \tilde{f}_{wi} \tilde{s}_{wi}}{\sum_{i=1}^{n_p^{sl}} q_i^{sl}} \quad (4.58)$$

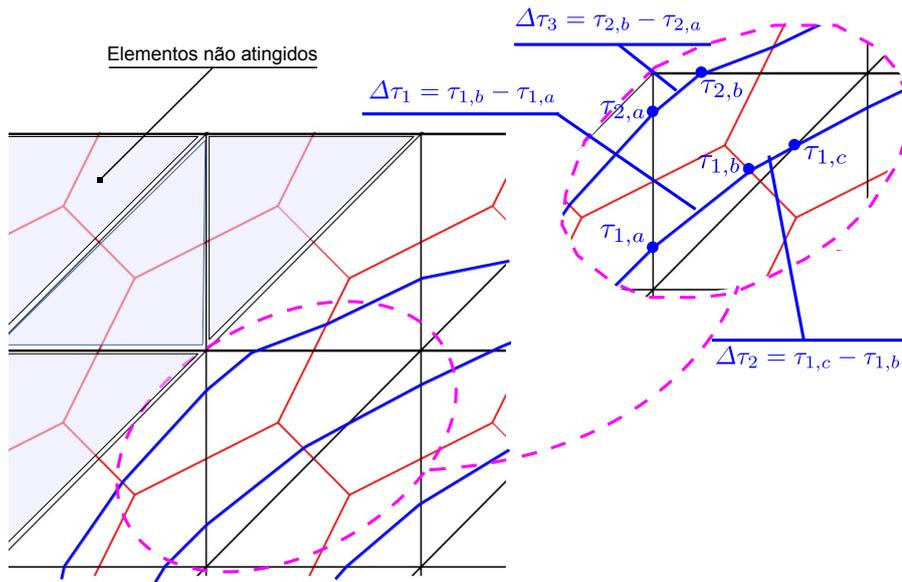
$$\tilde{s}_{wi} = \frac{\sum_{m=1}^{n_{sol}} \Delta t^m f_w |_{j=n_{ssl}}^m s_w |_{j=n_{ssl}}^m}{f_w |_{j=n_{ssl}}^m \Delta t_p} \quad (4.59)$$

4.6.1.4 Mapeamento das propriedades para a malha de simulação

Para atribuímos as propriedades de transporte na malha de simulação (Elementos Finitos), onde estas serão as condições iniciais para o problema corretor, é preciso levar em consideração que as linhas que passaram próximas aos volumes de controle, através de médias ponderadas, conforme ilustrado na Figura 4.13. Batycky^[17] propõe uma média ponderada pelo “comprimento” do tempo de vôo de cada linha dentro de uma célula da malha de diferenças finitas. Para a formulação implementada neste trabalho optou-se em uma ponderação considerando as variações e o tempo de vôo das linhas que passam pelos elementos finitos.

$$s_w^{el} = \frac{\sum_{i=1}^{n^{sl}} \Delta\tau_i q_i^{sl} s_{wi}^{sl}}{\sum_{i=1}^{n^{sl}} \Delta\tau_i q_i^{sl}} \quad (4.60)$$

Figura 4.13 – Processo de regularização de uma linha de fluxo.



Fonte: o autor

Após o mapeamento das saturações sobre os elementos finitos, é realizada a atualização do campo de saturação sobre os volumes de controle. No presente trabalho utiliza-se a ponderação por volume da sub-célula, que é dado por:

$$s_{wi} = \frac{\sum_{j=1}^{n_{e,p}} \frac{V_j^{el}}{3} s_{wj}^{el}}{V_{cvi}} \quad (4.61)$$

sendo s_{wi} a saturação de água no i -ésimo nó; V_j^{el} o volume do j -ésimo elemento; s_{wj}^{el} a saturação de água do j -ésimo elemento e V_{cvi} volume do i -ésimo volume de controle. Na situação onde os elementos não são atingidos por linhas de fluxo, a saturação é atualizada pela média dos nós conectados.

4.6.2 Problema corretor

Na técnica de decomposição do operador, após resolver o problema 3.99 no intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ obtemos a predição $(s_w^*)_i^{(n+1)}$ da saturação de água para o instante t_{n+1} que é usada como condição inicial neste problema. Negligenciamos todos os termos que não são paralelos ao traçado da linha de fluxo,

$$\phi \frac{Ds_w}{Dt} + \nabla[g_w(s_w)\mathbf{K}(\phi)\vec{g}] + s_w \nabla \vec{v}_s = f_w q \quad (4.62)$$

sendo q a vazão total de fluido. Integrando a equação sobre o volume finito V_i , temos:

$$\int_{V_i} \phi \frac{Ds_w}{Dt} dV + \int_{V_i} \nabla[g_w(s_w)\mathbf{K}(\phi)\vec{g}] dV + \int_{V_i} s_w \nabla \vec{v}_s dV = \int_{V_i} f_w q dV \quad (4.63)$$

dentro de cada volume finito V_i , a saturação s_w é assumida constante. Aplicando o teorema da divergência na equação 4.63 temos:

$$\int_{V_i} \phi \frac{Ds_w}{Dt} dV + \int_{\partial V_i} [g_w(s_w)\mathbf{K}(\phi)\vec{g}] \cdot \vec{n} d\partial V + \int_{\partial V_i} s_w [\vec{v}_s] \cdot \vec{n} d\partial V = \int_{V_i} f_w q dV \quad (4.64)$$

Utilizando ainda a aproximação pelo método de Euler avançado, no termo temporal e depois de alguns rearranjos, a forma discretizada da evolução da saturação de água é dado por:

$$(s_w)_i^{(n+1)} = (s_w)_i^{(n)} - \frac{\Delta t_s}{\phi_i V_i} \left[\underbrace{\sum_j^{n_{si}} [g_w(s_{wj})]_j \mathbf{K}(\phi)\vec{g} \cdot \vec{n}_j}_{(g_s)_i} + \underbrace{\sum_j^{n_{si}} s_{wj} [\vec{v}_s]_j \cdot \vec{n}_j}_{(c_s)_i} + \underbrace{f_{wj} q}_{(f_{\Gamma_s})_i} \right] \quad (4.65)$$

onde $(s_w)_i^{(n+1)}$ é a saturação da água no i -ésimo volume de controle; Δt_s é o passo de tempo, seu comprimento é definido pelo critério CFL. ϕ_i é a porosidade do i -ésimo volume de controle, e que é dado, por:

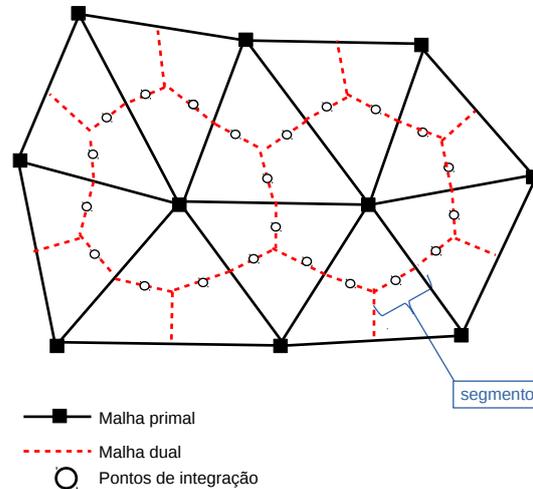
$$\phi_i V_i = \sum_e^{n_{si}/2} \frac{\phi_e V_e}{3} \quad (4.66)$$

sendo ϕ_e a porosidade do e -ésimo elemento finito, V_e o volume do e -ésimo elemento e V_i o volume do i -ésimo volume de controle. n_{si} é o número de segmentos que definem a superfície de controle do volume de controle V_i , conforme ilustrado da Figura 4.14. $g_w(s_{wj})$ é o fluxo fracionário gravitacional da água avaliado no j -ésimo segmento do volume de controle V_i , expressado por:

$$g_w(s_{wj}) = \frac{\lambda_w(s_{wj})\lambda_n(s_{wj})}{\lambda(s_{wj})} (\rho_w - \rho_o) \quad (4.67)$$

onde s_{wj} é a saturação da água avaliado no j -ésimo ponto de integração (segmento do volume de controle). \vec{n}_j é o vetor normal orientado para fora do j -ésimo segmento do volume de controle; $[\vec{v}_s]_j$ é a velocidade de deslocamento do sólido avaliado no j -ésimo segmento do volume finito; f_{wj} é o fluxo fracionário computado no j -ésimo segmento do volume de controle.

Figura 4.14 – Entidades geométricas associadas ao processo de discretização do problema de transporte.



Fonte: o autor

4.7 Condições de contorno e iniciais dos subproblemas

Nesta seção apresentamos alguns aspectos referentes as condições de contorno e iniciais que devem ser impostas sobre cada subproblema.

4.7.1 Subproblema poromecânico

Como descrito anteriormente, o subproblema poro-mecânico é formado pelas equações de equilíbrio mecânico e pela equação da pressão que são resolvidas sequencialmente. Para a equação da pressão não é necessário impor condição inicial, pois a mesma é uma equação elíptica. Para a equação de equilíbrio mecânico precisamos impor a condição de repouso inicial sobre todo o domínio $\Omega^u \cup \partial\Omega^u$,

$$\nabla \left[\frac{\partial \vec{u}_h^{(0)}}{\partial t} \right] = 0 \quad (4.68)$$

Já para condições de contorno do problema de equilíbrio mecânico, aplicamos:

$$\bar{t} = \vec{f}_N + \gamma_u \left(\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \Delta t, \text{ em } \partial\Omega^u \quad (4.69)$$

sendo $\vec{f}_N = [f_x \ f_y \ f_z]^T$; γ_u fator multiplicador; $\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t}$ taxa de deslocamento prescrito. Este tipo de condição de contorno incorpora as condições de contorno do tipo Neumann e Cauchy. Para grandes valores de γ_u impomos taxas de deslocamentos. Se $\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} = 0$ e γ_u é muito grande, o deslocamento não é permitido na direção considerada.

Para o problema da equação da pressão, temos que

$$\bar{q} = (q_n + q_w) + \gamma_p (\bar{p} - p), \text{ em } \partial\Omega^p \quad (4.70)$$

onde q_n e q_w são as vazões volumétricas prescritas de óleo e da água, respectivamente; γ_p fator multiplicador, podendo ser também o índice de poço; \bar{p} pressão de fundo de poço ou pressão prescrita. Quando não é especificada nenhuma condição de contorno na fronteira, está-se assumindo que tal fronteira é impermeável.

4.7.2 Subproblema de transporte

Para o subproblema de transporte, devemos apresentar as condições iniciais do campo de saturação. Para o problema preditor, as condições iniciais são obtidas a partir da malha de simulação no processo de regularização e mapeamento.

$$s_w = s_w^0, \quad \forall s_w \in \Omega^s \cup \partial\Omega^s \quad (4.71)$$

enquanto que, para o problema corretor, utilizamos a solução preditora como condição inicial:

$$s_w = s_w^*, \quad \forall s_w \in \Omega^s \cup \partial\Omega^s \quad (4.72)$$

onde s_w^* é a predição da saturação da água (solução do problema preditor).

Referente as condições de contorno, como observado no problema preditor, equação 4.53, temos:

$$(s_w^{sl})_{i=0}^{(n)} = s_{inj} \text{ e } (f_w^{sl})_{i=0}^{(n)} = 1 \quad (4.73)$$

sendo s_{inj} a saturação de água de injeção.

Já para o problema corretor temos:

$$(s_w)_i^{(n+1)} = \bar{s}_i, \text{ em } \partial\Omega_D^s \quad (4.74)$$

e

$$q = q_w + q_n = \gamma_p (\bar{p} - p), \text{ em } \partial\Omega_N^s \quad (4.75)$$

onde $\partial\Omega_D^s \cup \partial\Omega_N^s \equiv \partial\Omega^s$.

4.8 Estratégia do controle do passo de tempo

Segundo já mencionado, a maior desvantagem de um algoritmo seqüencial como o descrito na seção 3.3 é o fato da estabilidade estar condicionada ao uso de passos de tempo restritos, devido a aproximação explícita das equações de transporte.

Devido ao conceito base que rege a formulação por linhas de fluxo, a transformação do sistema de coordenadas (equação 3.97), que aproxima as equações de transporte 2D/3D

em múltiplos problemas unidimensionais ao longo das linhas, praticamente elimina essa limitação da abordagem IMPES.

Geralmente, o controle de passos de tempo dos simuladores de linhas de fluxo é definido pelo balanço de massa global [17, 52] ou pela divisão do tempo total de simulação pelo número de vezes que a equação da pressão necessita ser atualizada [90]. E este último conduz a uma aproximação descontrolada, orientada ou pela experiência de engenharia de reservatório do usuário ou pelo estudos de sensibilidade do tamanho do passo de tempo no início de um projeto.

Para evitar isso, Osako^[90] desenvolveu uma nova abordagem para a seleção do passo de tempo durante a simulação por linhas de fluxo que é baseada na reformulação do critério CFL para o passo corretor, produzindo um mecanismo que assegura a estabilidade numérica através da escolha de um passo de tempo estável para as atualizações da pressão, fornecendo as mesmas ferramentas para o controle do passo de tempo que estão disponíveis dentro dos simuladores de reservatórios convencionais.

Neste trabalho, optou-se pela implementação baseada na variação temporal do campo de velocidade [91], por ser mais adequada para a formulação das linhas de fluxo, pois consiste em permitir que a equação de pressão seja resolvida um número menor de vezes atribuindo passos de tempo mais longos, porém limitados a variação do campo de velocidade, uma vez que o traçado (percurso) das linhas, conseqüentemente o tempo de vôo, só será alterado significativamente se o campo de velocidade tiver uma considerável variação.

Desta forma, a seguinte relação será usada para determinar o passo de tempo para a atualização do campo de pressão

$$\Delta t_p^{n+1} = \frac{DVTOL}{|\Delta \vec{v}|^n} \Delta t_p^n \quad (4.76)$$

sendo $DVTOL$ a tolerância prescrita limitando a variação do campo de velocidade ao longo da simulação e $|\Delta \vec{v}|$ a norma da variação do campo de velocidade durante o intervalo Δt_p^n .

A partir de uma pequena modificação do trabalho de Hurtado, Maliska e Silva^[91] a variação do campo de velocidade, $|\Delta \vec{v}|^n$, é calculada fazendo uso dos fluxos pós-processados (ver seção 4.5), logo:

$$|\Delta \vec{v}|^n = \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_{flux}} \left[\frac{|f_i^n - f_i^{n-1}|}{|\vec{n}_{Ai}|} \right] \quad (4.77)$$

onde f_i^n e f_i^{n-1} são a i -ésima vazão pós-processada no intervalo de tempo n e $n - 1$, respectivamente; \vec{n}_{Ai} é o vetor área normal da i -ésima vazão pós-processado e n_e é numero de elementos pertencentes ao domínio $\Omega^s \cup \partial\Omega^s$.

Para evitar uma variação rápida no tamanho do passo de tempo de modo que o passo de tempo torne-se muito grande, utilizam-se algumas restrições:

$$DVel_{min} \leq \frac{DVTOL}{|\Delta \vec{v}|^n} \leq DVel_{max} \quad (4.78)$$

$$\Delta t_p^{n+1} \leq \Delta t_{max} \quad (4.79)$$

sendo $DVel_{min}$ e $DVel_{max}$ mínima e máxima razão entre os passos de tempo $n + 1$ e n , e Δt_{max} é o máximo tamanho do passo de tempo.

4.9 Acoplamento hidro-geomecânico

Nas seções anteriores aplicamos técnicas de discretização sobre o nosso modelo matemático produzindo um sistema de equações de diferentes incógnitas primárias regidas por fenômenos físicos separados, que estão acoplados uns aos outros sobre o domínio, o subproblema mecânico (equação 4.21) resulta de equações diferenciais parciais elípticas, de caráter não-linear no comportamento mecânico do material. A contrapartida de fluxo (equação 4.34) tem origem na equação da continuidade e é um problema de natureza também elíptica e o subproblema de transporte (equações 4.53 e 4.63) de caráter hiperbolico não-linear.

O acoplamento físico do problema hidro-geomecânico é definido pela combinação entre a equação do momento linear (equação de equilíbrio) e as equações de conservação de massa das fases (fluidas e sólida), de forma que, a física do problema de fluxo interfere no comportamento mecânico do meio poroso e vice e versa. O problema (geo)mecânico (equação de equilíbrio) terá o comportamento tensão-deformação dependente das tensões atuantes e dos campos de pressões e saturações dos fluidos (tensão total) enquanto que o problema de fluxo será afetado pelas alterações dos campos de permeabilidade e porosidade devido a deformação do meio poroso.

O próximo passo lógico é implementar estes modelos numéricos baseados na formulação de linhas de fluxo no código de elementos finitos CODE_BRIGTH para testar e validar a sua aplicabilidade e analisar os resultados obtidos posteriormente. No entanto, como já salientado, os processos de fluxo de fluidos e de deformação mecânica no reservatório são regidos por fenômenos físicos separados, porém acoplados sobre o domínio, por isso o grau de acoplamento depende da cenário ou caso a ser analisado.

4.9.1 Tipos de acoplamento

As interações entre os subproblemas de fluxo e geomecânico tem sendo modelados utilizando vários esquemas de acoplamento [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104]. Os

métodos de acoplamento são geralmente classificados em quatro tipos: totalmente acoplado, acoplamento iterativo, pseudo acoplamento e o acoplamento fraco [94, 100]. De maneira geral os métodos de acoplamento apresentam as seguintes características:

Totalmente acoplado (*fully coupled*): As equações governantes, de fluxo e equilíbrio mecânico, são resolvidas simultaneamente a cada passo de tempo (ver Figura 4.15). A solução do problema de acoplamento é geralmente obtida usando o método de Newton-Raphson ([105, 101, 106, 107, 108]). Este tipo de acoplamento é incondicionalmente estável, que é a sua principal característica, porém, dependendo do problema a ser resolvido, a simulação pode apresentar um custo computacional bastante elevado e de difícil convergência, além de demandar um enorme investimento do ponto de vista de desenvolvimento de software.

Acoplamento iterativo (*iteratively coupled* ou *staggered*): Aqui, ou o problema de fluxo, ou o mecânico é resolvido primeiro, e então o outro problema é resolvido empregando a solução intermediária do primeiro ([92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 101, 106, 104]). Esta sequência é iterada em cada passo de tempo até a obtenção da convergência dentro da tolerância considerada (Figura 4.15). A solução deste tipo de acoplamento é idêntica a obtida usando a abordagem totalmente acoplada. Este esquema permite que os subproblemas possam ter diferentes aproximações e métodos de discretização em diferentes partes do domínio. Outra vantagem é a facilidade de implementação, diferentemente do totalmente acoplado, e a sua flexibilidade em lidar com diferentes tipos de problemas.

Em vista disso, esforços significativos têm sido empregados para encontrar um procedimento sequencial que seja estável e eficiente ([109, 110, 111, 112, 113, 114, 102, 103, 104]). Dos trabalhos desenvolvidos sobre o método, quatro esquemas são relevantes: (i) decomposição drenada (*drained split*); (ii) decomposição não-drenada (*undrained split*); (iii) deformação fixada (*fixed strain*) e (iv) tensão fixada (*fixed stress*).

A decomposição drenada simplesmente congela o campo da pressão durante a solução do subproblema mecânico, então com as deformações e tensões calculadas resolve-se o problema de fluxo. Apesar da sua simplicidade, a decomposição drenada é condicionalmente estável. Por outro lado, na decomposição não-drenada o balanço de massa de fluido é congelado quando o problema mecânico é resolvido, então com os campos de tensão e deformação atualizados procede o cálculo do subproblema de fluxo. A decomposição não-drenada é incondicionalmente estável [101].

No acoplamento iterativo empregando o esquema de deformação fixada e tensão fixada, diferentemente dos esquema drenado e não drenado, o subproblema de fluxo é resolvido primeiro em seguida o subproblema mecânico. Para o esquema de deformação fixada, os deslocamentos são congelados durante a solução do problema de fluxo, já para o método de tensão fixa, são as tensões que são congeladas quando resolvemos o problema de fluxo. O esquema de tensão fixada é incondicionalmente estável, não apresenta instabilidade

espacial e pode ser aplicado satisfatoriamente em problemas poro-mecânicos [102]. Além disso, o método de tensão fixada apresenta uma taxa de convergência similar ao método totalmente acoplado, e com poucas iterações (1 ou 2), as soluções numéricas obtidas apresentam considerável ajuste com as soluções de referência (simulações totalmente acopladas), enquanto que o esquema de deformação fixada, é condicionalmente estável, e poderá convergir para uma solução errada (produzindo soluções fisicamente plausíveis) com passos de tempo pequenos, mesmo que satisfaça a condição de estabilidade [102].

Pseudo-acoplamento: Neste tipo de acoplamento, algumas respostas mecânicas (compactação, variação da tensão) são calculadas através de relações (multiplicadores) entre porosidade e permeabilidade. A porosidade e permeabilidade são calculadas a partir de um modelo empírico dependente apenas da pressão [115]. O modelo empírico é “implementado” em forma de tabelas de porosidade, permeabilidade versus a pressão. Deste modo, este acoplamento minimiza o custo computacional por não necessitar de um módulo para resolver o problema mecânico, porém os dados empíricos necessitam ser obtidos através de ensaios de laboratórios das amostras de testemunhos retirados do campo.

Acoplamento fraco: O acoplamento entre os problemas é resolvido somente depois de um certo número “m” de passos de tempo do problema de fluxo ([100, 115]). Este método pode reduzir o custo computacional comparado aos acoplamento total e iterativo, mas perde precisão e requer uma estimativas confiáveis do número de passos “m” até a atualização das respostas mecânicas.

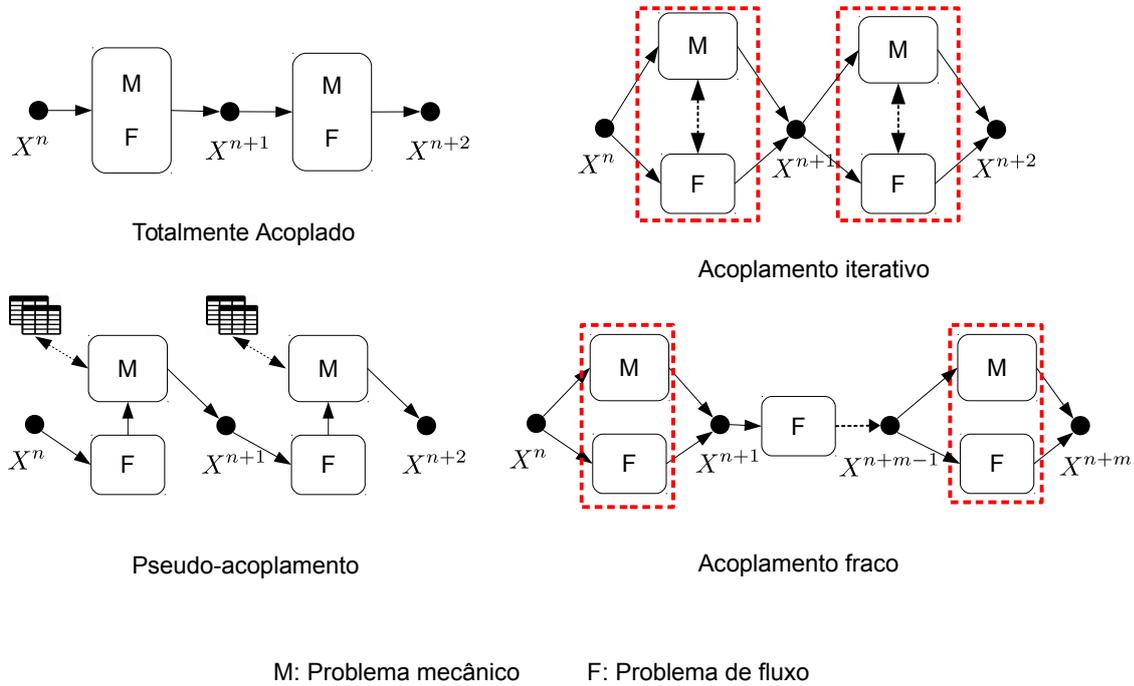
4.9.2 Implementação do acoplamento

Tendo em vista as principais características dos tipos de acoplamento, partimos para a seleção do acoplamento a ser empregado. Como mencionado anteriormente a ferramenta computacional empregada para o desenvolvimento deste trabalho foi o código de elementos finitos CODE_BRIGTH [1], implementado em FORTRAN77, foi projetado para lidar com problemas geotécnicos acoplados utilizando o esquema de acoplamento totalmente implícito (totalmente acoplado) e posteriormente adaptado para resolver problemas de geomecânica de reservatório [87, 117] através do acoplamento iterativo com deformação fixada.

Como a formulação por linhas de fluxo é baseada no método IMPES (ver secção 3.3), optou-se pelo esquema de acoplamento iterativo, em um via, adaptado à versão modificada da formulação IMPES, similar ao proposto por Kim [116] e Murad et al. [104] com controle de passe de tempo adaptativo [91]. Logo, os termos C_p , \vec{c}_v e \vec{c}_s nas equações governantes 4.34, 4.37 e 4.65, respectivamente, serão nulos. Assim o algoritmo de acoplamento pode ser descrito como:

1. Atribuição das condições iniciais (eqs. 4.68 e 4.71);

Figura 4.15 – Ilustrações dos tipos de acoplamento.



Fonte: Adaptado de Kim^[116]

2. Dado os campos $\vec{u}_k(\vec{x}, 0)$ e $p_k(\vec{x}, 0)$ realizamos a integração do estado de tensão obtendo o estado inicial de tensão $\vec{\sigma}(\vec{x}, 0)$;
3. Com os campos $\mathbf{K}(\phi)$, $s_w(\vec{x}, t^n)$ e $\phi(\vec{x}, t^{n-1})$ resolvemos o subproblema da pressão (eq. 4.34) obtendo o campo escalar $p_k(\vec{x}, t^n)$;
4. Assim com $p_k(\vec{x}, t^n)$ e $\vec{u}_k(\vec{x}, t^{n-1})$ obtida na k-ésima iteração, resolvemos o subproblema mecânico (eq.4.21) obtendo $\vec{u}_k(\vec{x}, t^n)$;
5. Realizamos a integração do estado de tensão com $p_k(\vec{x}, t^n)$, $\vec{u}_k(\vec{x}, t^{n-1})$ e $\vec{u}_k(\vec{x}, t^n)$ obtendo $\vec{\sigma}(\vec{x}, t^n)$;
6. Usando os campos $\vec{u}_k(\vec{x}, t^{n-1})$ e $\vec{u}_k(\vec{x}, t^n)$, computamos a porosidade, $\phi(\vec{x}, t^n)$, através da eq. 4.36 e conseqüentemente atualiza o campo $\mathbf{K}(\phi)$
7. Através dos campos $\mathbf{K}(\phi)$, $p_k(\vec{x}, t^n)$ e $s_w(\vec{x}, t^n)$ obtemos o campo de velocidade $\vec{v}(\vec{x}, t^n)$ através da equação 4.37;
8. Dado o campo $\vec{v}(\vec{x}, t^n)$ realizamos o pós-processamento deste através do procedimento descrito na subseção 4.5, obtendo as vazões pós-processados $f^*(\vec{x}, t^n)$;

9. De posse das vazões $f^*(\vec{x}, t^n)$ computamos a variação do campo de velocidade durante o intervalo Δt_p^n , $|\Delta \vec{v}|^n$, e o próximo intervalo de tempo Δt_p^{n+1} (eq.4.76);
10. Dados $f^*(\vec{x}, t^n)$ e $s_w(\vec{x}, t^n)$ resolvemos o problema predictor do subproblema de transporte, para computar $s_w^*(\vec{x}, t^{n+1})$, realizando os seguinte passos:
 - a) Traçado das linhas computando o tempo de vôo, conforme descrito na seção 3.4.1 (página 71);
 - b) Realizamos o procedimento de regularização da linha em tempos de vôo constantes e mapeamento das propriedades transportadas, conforme seção 4.6.1;
 - c) Para cada linha traçada/regularizada resolvemos a equação de transporte unidimensional (eq. 4.53) várias vezes, obedecendo-se o máximo intervalo de tempo para estabilidade (eq. 4.54), até que o intervalo de tempo, Δt_p^{n+1} , seja atingido;
 - d) Após a solução da equação de transporte, realizamos o mapeamento das propriedades transportadas da linha de fluxoregularizada para a linha de fluxotraçada e por fim para a malha de simulação (elementos finitos);
11. Com os campos $\phi(\vec{x}, t^n)$, $\mathbf{K}(\phi)$ e $s_w^*(\vec{x}, t^{n+1})$ resolvemos o problema corretor para calcular $s_w(\vec{x}, t^{n+1})$
12. Avançamos o tempo de simulação e retorna para o passo 3.

Parte III

Resultados

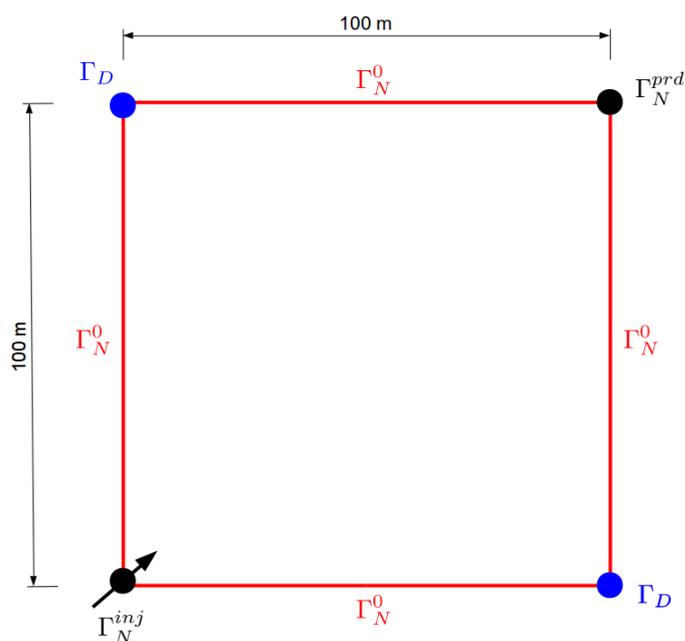
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo validamos e analisamos os resultados obtidos com a metodologia numérica proposta através de simulações computacionais de problemas de recuperação primária de petróleo. Inicialmente analisamos a robustez e a acurácia das discretizações do módulo da simulação por linhas de fluxo, referente ao traçado das linhas, transporte e o comportamento da metodologia frente a problemas de caráter fortemente advectivos. Em seguida procedemos uma análise qualitativa da simulação computacional hidromecânica acoplada focando principalmente no comportamento das curvas de produção.

5.1 Traçado das linhas de fluxo

Dando início a validação das implementações realizadas no módulo das linhas de fluxo, resolvemos um problema clássico de fluxo em meio poroso homogêneo, sobre a geometria de 1/4 de cinco poços, como ilustrado na Figura 5.1. Para avaliar o correto processo de traçado, comparamos as linhas obtidas pelo módulo das linhas de fluxocom àquelas obtidas pelo *toolbox* MRST [118]. Os parâmetros atribuídos às propriedades do meio poroso e às condições de contorno para este problema estão dispostas na Tabela 5.1.

Figura 5.1 – Geometria do problema e condições de contorno.



Fonte: o autor

Tabela 5.1 – Propriedades do domínio e dos fluidos para o caso de validação do traçado.

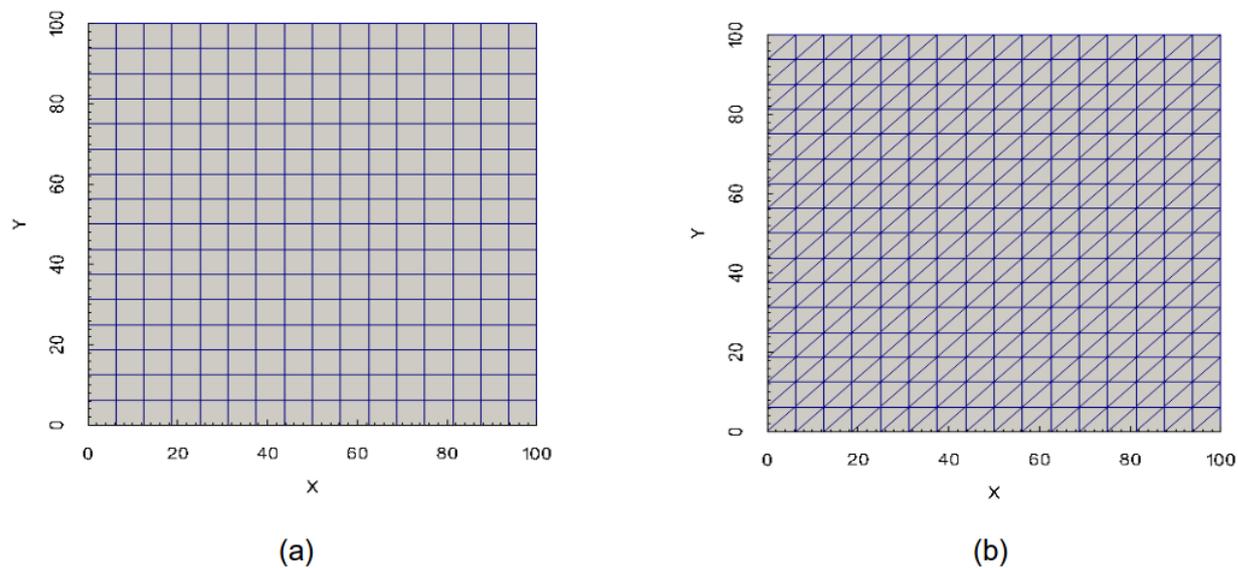
Propriedade do Meio Poroso			
Permeabilidade, K	$[m^2]$		$8,471 \times 10^{-12}$
Porosidade, ϕ	$[-]$		0,3
Propriedade dos Fluidos			
Viscosidade da água, μ_w	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$		$1,0 \times 10^{-12}$
Densidade da água, ρ_w	$[kg \cdot m^{-3}]$		1000
Viscosidade do óleo, μ_o	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$		$4,0 \times 10^{-12}$
Densidade do óleo, ρ_o	$[kg \cdot m^{-3}]$		875
Condições de Contorno			
Γ_N^{znj} [Neumann]:			
q_w, q_o	$[kg \cdot s^{-1}]$	$q_w = 1,0 \times 10^{-5}$	$q_o = 0,0$
s_w	$[-]$		$s_w = 1,0$
Γ_N^{prd} [Neumann]:			
q_w, q_o	$[kg \cdot s^{-1}]$	$q_w = 0,0$	$q_o = 1,0 \times 10^{-5}$
Γ_N^0 [Neumann]:			
q_w, q_o	$[kg \cdot s^{-1}]$	$q_w = 0,0$	$q_o = 0,0$
Γ_D [Dirichlet]:			
p	[MPa]		$p = 62$
Condições Iniciais			
			$s_w = 0,0$

Fonte: o autor

As malhas empregadas para a validação do traçado são ilustradas na [Figura 5.2](#). O método utilizado pelo MRST para a solução da equação da pressão foi o TPFa, considerando fluidos incompressíveis e imiscíveis. Como já mencionado, a utilização direta do campo de velocidade obtido pelo método dos elementos finitos (FEM) produzirá trajetórias incorretas (ver [Figura 4.7](#)), isso ocorre porque o campo de velocidade obtido pelo FEM é apenas globalmente conservativo além de ser descontínuo entre elementos (interface elemento-elemento), por esse motivo, é necessário realizar o pós-processamento (seção 4.5) deste campo para produzir fluxos que sejam contínuos na interface elemento-elemento e localmente conservativos¹. Como evidenciado na [Figura 5.3](#), as linhas traçadas pelo módulo baseado em linhas de fluxo implementado no CODE_BRIGHT apresentam considerável concordância com as linhas obtidas pelo simulador MRST [\[118\]](#).

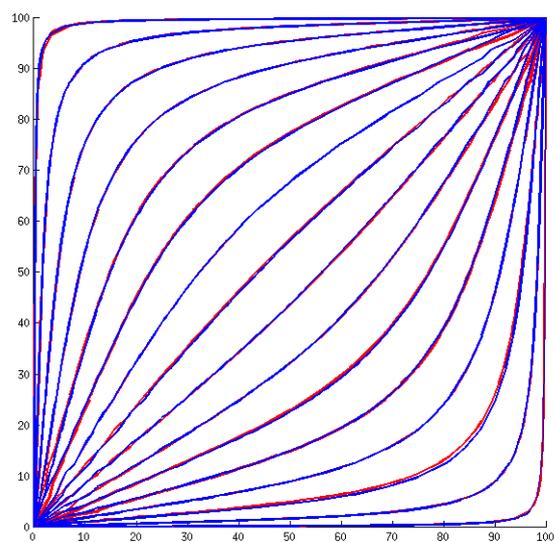
¹ ver Apêndice C

Figura 5.2 – Malhas utilizadas pelo MRST (a) e CODE_BRIGHT (b).



Fonte: o autor

Figura 5.3 – Comparativo entre as linhas de fluxotraçadas pelo módulo baseado em linhas de fluxo (linhas vermelhas) com as linhas geradas pelo MRST (linhas azuis).



Fonte: o autor

5.2 Solução de transporte ao longo das linhas de fluxo

5.2.1 Transporte unidimensional - Problema Buckley-Leverett

Se a gravidade e os efeitos capilares são negligenciados, o problema de fluxo multifásico se reduz ao problema Buckley-Leverett [119], para os quais as soluções analíticas podem ser derivadas [120].

O método numérico é comparado com uma solução analítica do unidimensional problema Buckley-Leverett utilizando os dados listados na Tabela 5.2. A malha é pseudo unidimensional com elementos finitos triangulares uniformes que consiste de 50 nós na direcção x.

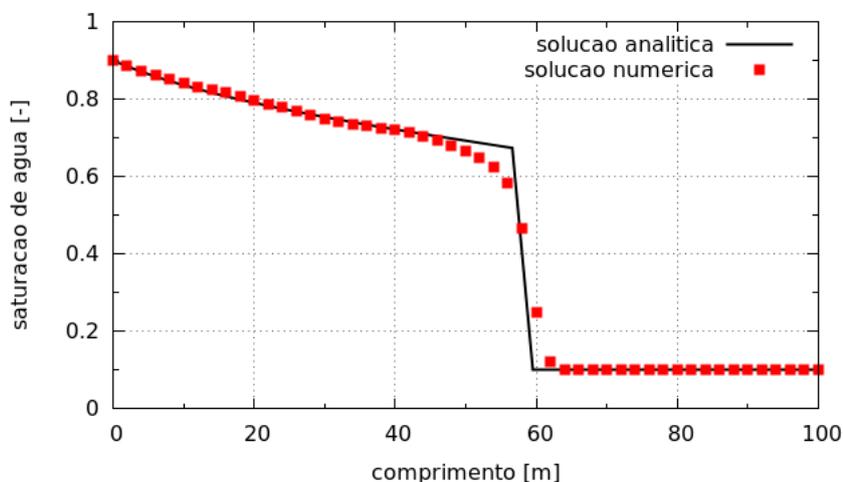
Tabela 5.2 – Propriedades do domínio e dos fluidos para o problema Buckley-Leverett.

Propriedade do Meio Poroso		
Permeabilidade, K	$[m^2]$	$1,000 \times 10^{-12}$
Porosidade, ϕ	$[-]$	0,473
Propriedade dos Fluidos		
Viscosidade da água, μ_w	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$	$1,0 \times 10^{-9}$
Densidade da água, ρ_w	$[kg \cdot m^{-3}]$	1000
Viscosidade do óleo, μ_o	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$	$1,0 \times 10^{-9}$
Densidade do óleo, ρ_o	$[kg \cdot m^{-3}]$	1000
Condições de Contorno		
$\partial P / \partial x$	$[MPa \cdot m^{-1}]$	1,000
s_w^{inj}	$[-]$	$s_w = 0,9$
Condições Iniciais		
		$s_w = 0,1$

Fonte: o autor

A Figura 5.4 mostra a comparação da solução numérica com a solução analítica para o problema Buckley-Leverett após 20 dias. A solução numérica mostra uma boa concordância com a solução analítica. Difusão numérica na frente de choque e na região de rarefação, ou seja, na mudança não-linear de S_w à esquerda da frente de choque, apresenta boa concordância com a solução analítica e típico comportamento de aproximações de primeira ordem (upwind de primeira ordem).

Figura 5.4 – Comparação entre a solução analítica e a solução numérica pseudo-unidimensional.



Fonte: o autor

5.2.2 Estratégia de controle do passo de tempo

Como comentado nos capítulos anteriores, a elegância da simulação por linhas de fluxo baseia-se principalmente na sua capacidade de permitir grandes passos de tempo com poucas soluções da equação da pressão (Equação 4.34). Além disso, a formulação é fundamentada na abordagem IMPES, e como tal, a solução da equação de transporte é obtida considerando que a variação temporal do campo de velocidade é aproximada por uma sequência de campos de velocidade estacionários, assim, a qualidade desta aproximação irá ser naturalmente dependente da magnitude dos fluxos transversais² que necessitam ser contabilizados, apropriadamente, entre atualizações sucessivas do campo de pressão. Por isso, é necessário resolver a equação da pressão e re-traçar as linhas de fluxo sempre que há uma significativa alteração das condições dos poços (tais como: mudança na vazão, adição de novos poços, realocação de poços e etc) e mesmo sem, para contabilizar os fluxos transversais, pois diferentemente da simulação convencional, o passo de tempo é agora muito grande, e a aproximação que o campo de velocidade total deve ser tratado como constante durante o passo de tempo não pode ser tão precisa^[121].

Para entender a natureza desta aproximação e demonstrar a utilidade da abordagem de controle do passo de tempo proposta, foi utilizada uma série de simulações numéricas em padrões de 1/4 cinco poços considerando o campo de permeabilidade homogêneo e várias razões de mobilidade. O modelo empregado foi retirado de Osako^[90], as propriedades deste modelo são apresentadas na Tabela 5.3. Um modelo quadrático de permeabilidade relativa é empregado nas simulações.

² fluxos transversais são os termos do campo de velocidade que não estão alinhados com a direção do fluxo, estes fluxos são oriundos das forças gravitacionais, de variação de mobilidade entre as fases e etc.

Tabela 5.3 – Propriedades do domínio e dos fluidos.

Propriedade do Meio Poroso		
Dimensão	$[m \times m]$	41×41
Permeabilidade, K	$[m^2]$	$8,000 \times 10^{-15}$
Porosidade, ϕ	$[-]$	0,300
Saturação residual da água, s_{rw}	$[-]$	0,200
Saturação residual do óleo, s_{ro}	$[-]$	0,250
Propriedade dos Fluidos		
Viscosidade da água, μ_w	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$	$1,0 \times 10^{-9}$
Densidade da água, ρ_w	$[kg \cdot m^{-3}]$	999,000
Viscosidade do óleo, μ_o	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$	$1,0 \times 10^{-9}$
Densidade do óleo, ρ_o	$[kg \cdot m^{-3}]$	999,000
Condições de Contorno		
$\partial P / \partial x$	$[MPa \cdot m^{-1}]$	1,000
s_w^{inj}	$[-]$	$s_w = 0,9$
Condições Iniciais		
		$s_w = 0,1$

Fonte: Retirado de Osako^[90]

Foram realizadas 3 simulações, correspondendo as três razões de mobilidade, $M = 0,5$; $0,9$; $10,0$ e considerando tolerâncias prescritas para a variação do campo de velocidade, os parâmetros empregados são listados na Tabela 5.4. A medida que a razão de viscosidade torna-se mais favorável (M baixo), espera-se que exista mais fluxo transversal viscosos^[90].

Tabela 5.4 – Parâmetros utilizados para o controle do passo de tempo.

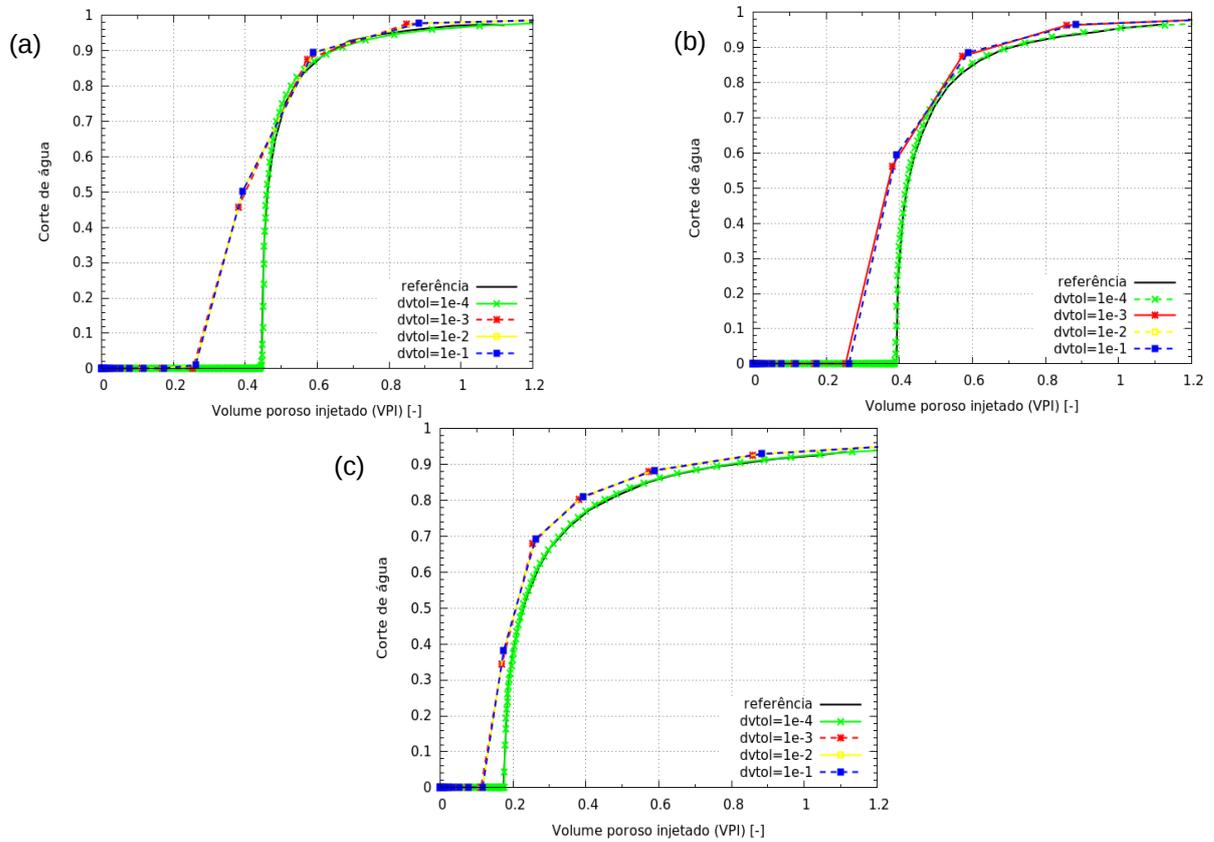
$DVTOL, [m^3 \cdot s]$	$1 \times 10^{-1}; 1 \times 10^{-2}; 1 \times 10^{-3}; 1 \times 10^{-4}$
$DVel_{min}, [m^3 \cdot s]$	0,25
$DVel_{max}, [m^3 \cdot s]$	1,50
$\Delta t_{max}, [dias]$	10,00

Fonte: o autor

As simulações foram comparadas com a solução de referência apresentada no trabalho de Osako^[90]. O corte de água no poço produtor ao longo da simulação é mostrado na Figura 5.5, aqui é observado que, para desvios do campo de velocidade maiores ($DVTOL$) o tempo de irrupção da água no poço produtor (*breakthrough*) ocorre antecipadamente. Já para $DVTOL = 1 \times 10^{-4}$ obtemos considerada concordância com a solução de referência, uma vez que, a pressão é recalculada um número de vezes suficiente para capturar o fluxo transversal durante toda a simulação.

Na Figura 5.6 é ilustrado a relação entre o tamanho do passo de tempo de implícito (avanço do campo da pressão e cômputo do campo de velocidade) pelo tamanho médio do passo de tempo explícito (avanço do campo de saturação sobre as linhas de fluxo traçadas). Observamos que a estratégia da seleção do passo de tempo apenas acelera a simulação, aumento da relação entre os passos de tempo, a partir do ponto de irrupção de água no

Figura 5.5 – Evolução do corte de água no poço produtor para as razões de mobilidade de (a) $M = 0,5$; (b) $M = 0,9$; (c) $M = 10,0$.

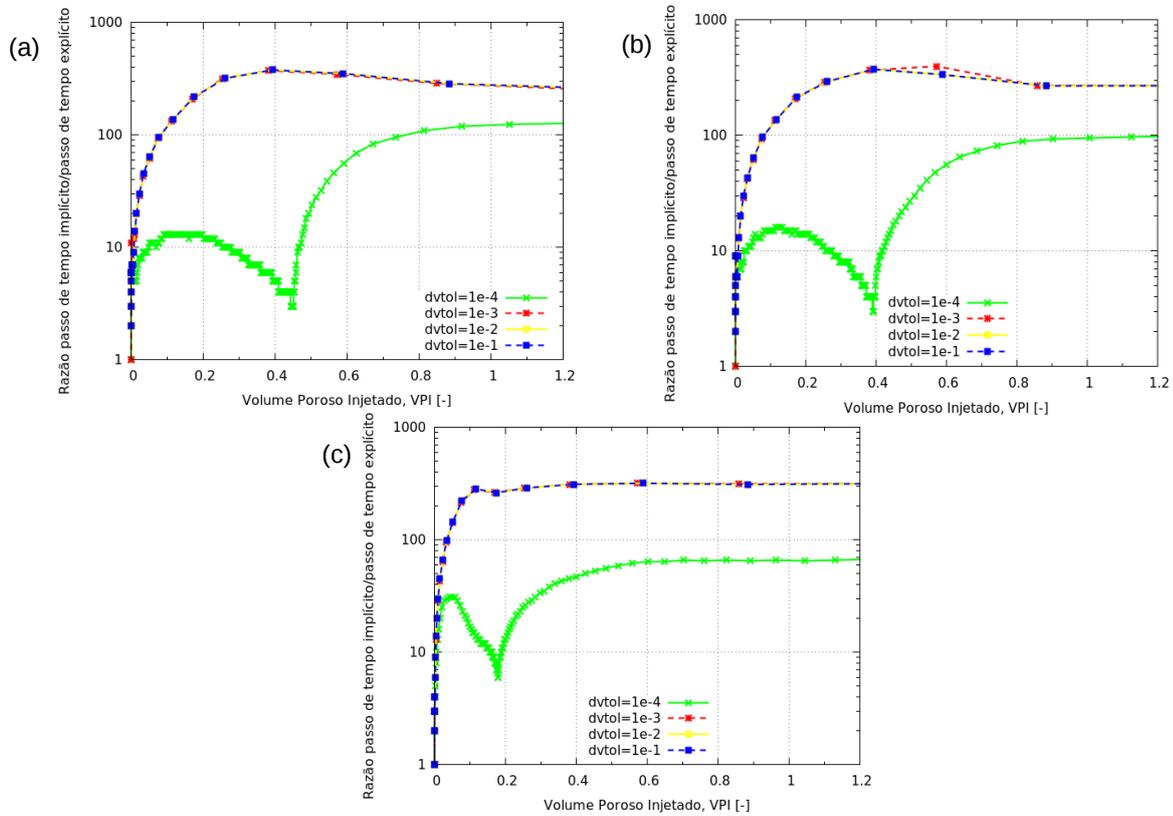


Fonte: o autor

poço produtor, onde o passo de tempo da pressão pode atingir até 100 vezes maior que a média do passo de tempo da saturação.

Ainda analisando a Figura 5.6, apenas para $DVTOL = 1 \times 10^{-4}$ é observado uma diminuição da relação entre os passo de tempo da pressão e saturação no momento que precede a ocorrência do *breakthrough* no poço produtor. Para as demais restrições de $DVTOL$ isso não ocorre, evidenciando que, para estes casos, o efeito do fluxo transversal não é capturado e a consideração que a variação temporal do campo de velocidade é aproximado por uma sequência de campos de velocidade estacionários não é válida, produzindo soluções com *breakthrough* antecipados, devido a baixa frequência com que a pressão e o campo de velocidade são atualizados^[89].

Figura 5.6 – Relação entre o tamanho do passo de tempo implícito pela média do passo de tempo de explícito para as razões de mobilidade de (a) $M = 0,5$; (b) $M = 0,9$; (c) $M = 10,0$ (caso homogêneo).



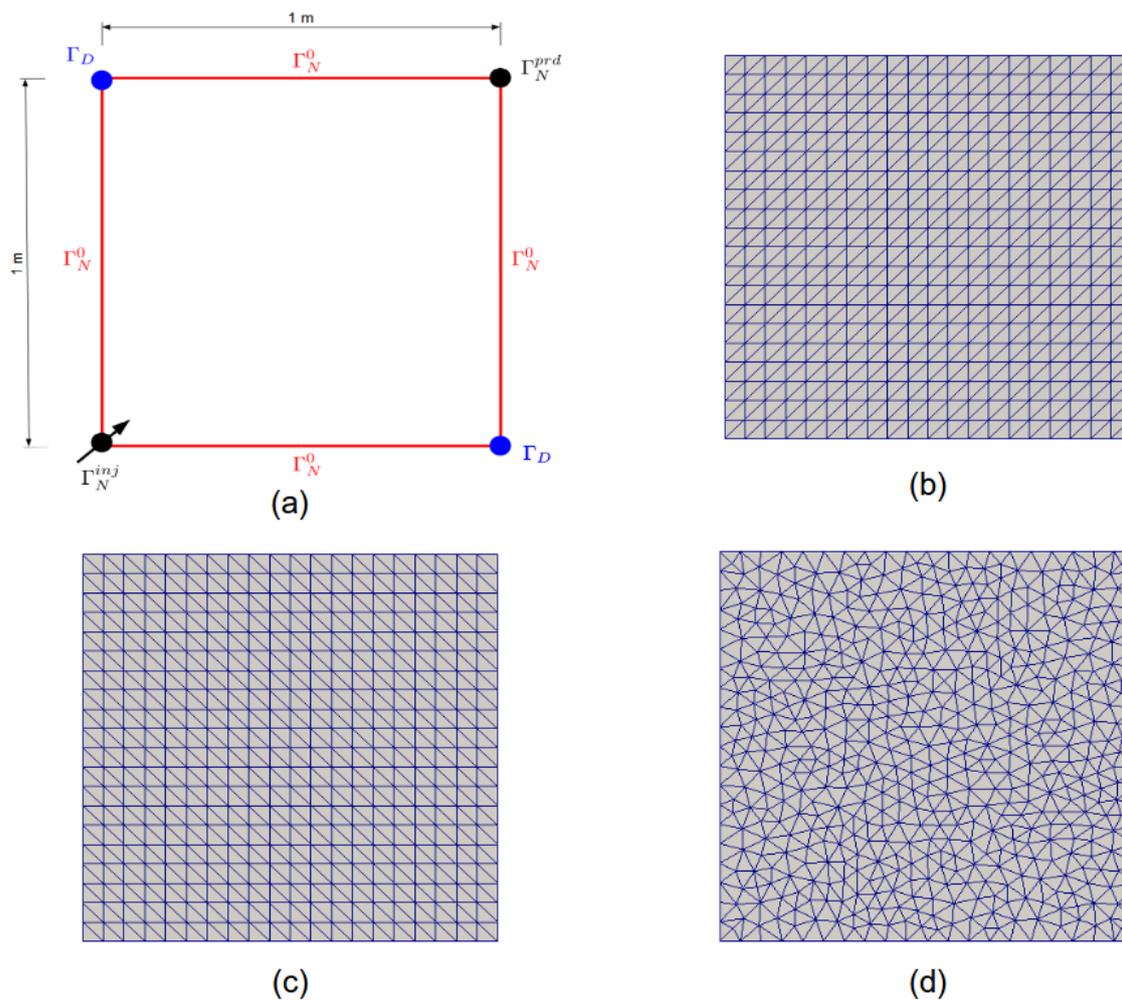
Fonte: o autor

5.2.3 Efeito de malha - Problema de 1/4 de Cinco Poços

Este exemplo é uma versão adimensionalizada do clássico problema de 1/4 de cinco poços (Figura 5.7(a)), adaptado de Durlofsky^[122], neste trabalho as saturações residuais da água e do óleo são $s_{wr} = s_{or} = 0,0$ e o meio poroso é considerado homogêneo e isotrópico sendo o tensor de permeabilidade $\mathbf{K} = \mathbf{I}$ em todo o domínio. A porosidade é considerada constante, porém seu valor real não é relevante já que esta é apenas utilizada para adimensionalizar o tempo. A razão entre as viscosidades é $M = \frac{\mu_o}{\mu_w} = 4,0$. As condições de contorno são $s_{inj} = 1,0$ no poço injetor e as pressões nos cantos diagonais superior esquerdo e inferior direito $p_{se} = p_{id} = 0,0$.

Durlofsky^[122] resolveu este problema, utilizando uma formulação hídrica, em que o problema pressão-velocidade foi resolvido a partir do método de elementos finitos mistos e a equação de saturação foi resolvida utilizando um método de volumes finitos de ordem mais alta. Para avaliar o efeito de orientação de malhas, Durlofsky^[122] utilizou duas malhas estruturadas e uniformes com 800 elementos (malha alinhada) e outra, cujos elementos são orientados transversalmente ao escoamento.

Figura 5.7 – (a) Geometria e condições de contorno do problema, (b) malha alinhada ao escoamento, (c) malha transversal ao escoamento e (d) malha não-estruturada.



Fonte: o autor

Em todos os casos analisados, foram utilizados os parâmetros listados na [Tabela 5.5](#) e as malhas de elementos finitos empregadas apresentam 20x20 subdivisões e dispostas em três variações topológicas ([Figura 5.7](#)):

1. Malha paralela (alinhada) a direção do escoamento, com 800 elementos e 441 nós;
2. Malha diagonal (transversal) a direção do escoamento, com 800 elementos e 441 nós;
3. Malha não-estruturada sem nenhuma direção preferencial para o escoamento, com 1054 elementos e 568 nós.

Em [Figura 5.8](#), [Figura 5.9](#) e [Figura 5.10](#) são apresentadas as linhas de fluxo bem como o perfil de saturação em $VPI=0,1$ obtidos com cada tipo de malha, respectivamente.

Tabela 5.5 – Propriedades do domínio e dos fluidos para a solução de transporte.

Propriedade dos Fluidos			
Permeabilidade relativa da água, k_{rw}	[-]		$k_{rw} = s_w^2$
Permeabilidade relativa do óleo, k_{ro}	[-]		$k_{ro} = (1 - s_w)^2$
Parâmetros da simulação			
Número de linhas de fluxo, n_{sl}	[-]		100
DVTOL	$[m \cdot s^{-1}]$		$5,0 \times 10^{-4}$
$DVel_{min}$	$[m \cdot s^{-1}]$		0,55
$DVel_{max}$	$[m \cdot s^{-1}]$		1,55
Condições de Contorno			
Γ_N^{inj} [Neumann]:			
q_w, q_o	$[kg \cdot s^{-1}]$	$q_w = 1,0 \times 10^{-5}$	$q_o = 0,0$
s_w	[-]		$s_w = 1,0$
Γ_N^{prd} [Neumann]:			
q_w, q_o	$[kg \cdot s^{-1}]$	$q_w = 0,0$	$q_o = 1,0 \times 10^{-5}$
Γ_N^0 [Neumann]:			
q_w, q_o	$[kg \cdot s^{-1}]$	$q_w = 0,0$	$q_o = 0,0$
Γ_D [Dirichlet]:			
p_{se}, p_{id}	[MPa]		$p_{se} = p_{id} = 0,0$
Condições Iniciais			
			$s_w = 0,0$

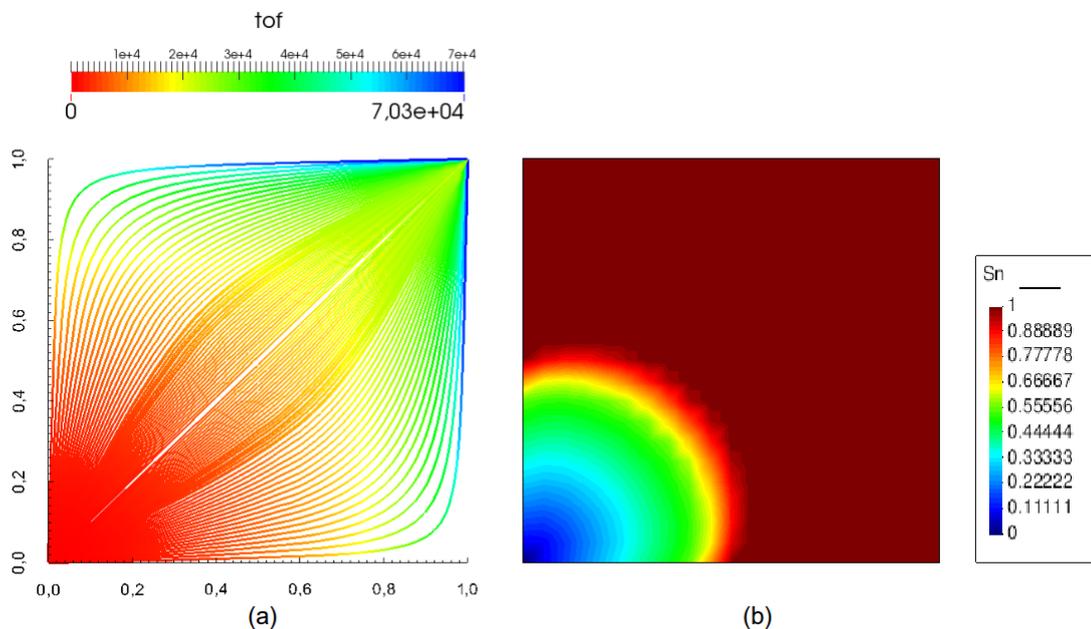
Fonte: o autor

Em [Figura 5.11](#) e [Figura 5.12](#) são ilustrados, respectivamente, o volume de óleo acumulado e o óleo recuperado, normalizado pelo volume total injetado, comparados às soluções obtidas no trabalho de [Durlfolsky^{\[122\]}](#) [\[122\]](#) considerando a malha transversal ao escoamento.

Conforme apontado por [Durlfolsky^{\[122\]}](#) [\[122\]](#), teoricamente, as soluções deveriam ser as mesmas independentemente da configuração da malha. Porém como mostram as [Figuras 5.8, 5.9 e 5.10](#), é observado um efeito moderado de orientação de malha nos perfis de saturação, além da disposição das linhas traçadas. Devido ao procedimento de pós-processamento (seção [4.5](#)) foi possível realizar o traçado das linhas corretamente, uma vez que o campo de velocidade pós-processado é contínuo na interface elemento-elemento, apresenta conservação local ($f \nabla \vec{v} \approx 0$) e irrotacional ($\nabla \times \vec{v} \approx 0$), como ilustrado nas [Figuras 5.13, 5.14 e 5.15](#).

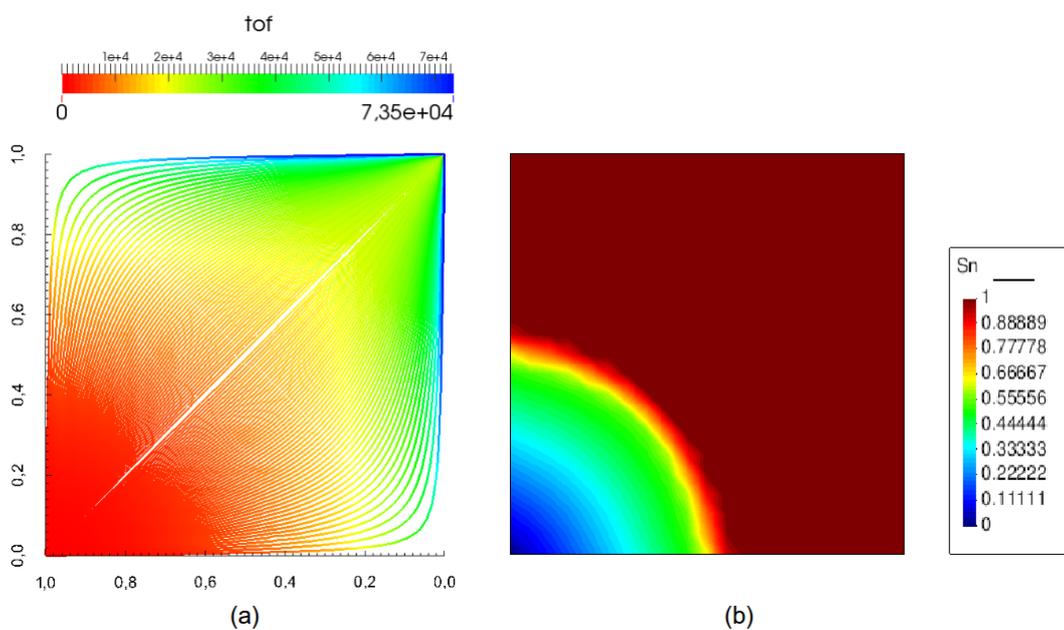
A partir da análise das [Figuras 5.11 e 5.12](#), tomando como base os resultados obtidos para a malha não-estruturada, que, não apresenta efeito de orientação de malha além disso, as linhas de fluxotraçadas estão mais dispersas, podemos observar que os resultados obtidos com os três tipos de malha são bastante similares quando comparados entre si e aos resultados obtidos por [Durlfolsky^{\[122\]}](#) [\[122\]](#).

Figura 5.8 – (a) linhas de fluxo traçadas e (b) perfil de saturação obtidos em $VPI=0,1$ considerando malha alinhada ao escoamento.



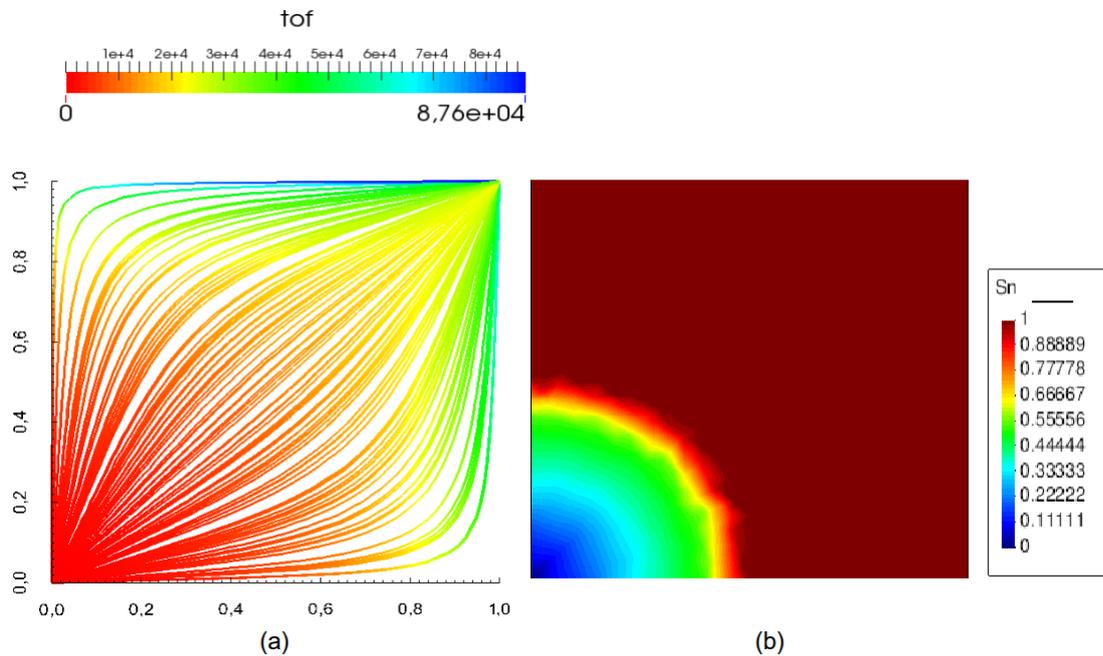
Fonte: o autor

Figura 5.9 – (a) linhas de fluxo traçadas e (b) perfil de saturação obtidos em $VPI=0,1$ considerando malha transversal ao escoamento.



Fonte: o autor

Figura 5.10 – (a) linhas de fluxo traçadas e (b) perfil de saturação obtidos em $VPI=0,1$ considerando malha não estruturada.



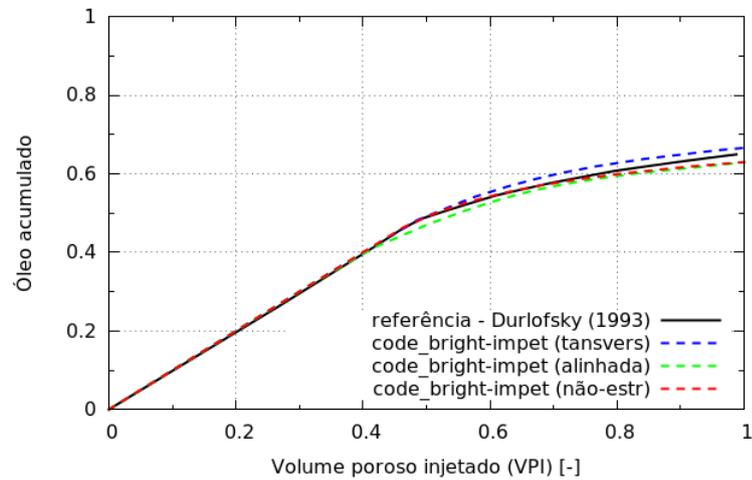
Fonte: o autor

Na figura do óleo recuperado (5.12), observa-se que, para a malha alinhada, o fluido injetado (água) apresenta um *breakthrough* antecipado comparado com os resultado obtido com a malha não estruturada, devido a configuração da malha estar paralela à direção do fluxo, fato este também evidenciado pela elevada concentração de linhas ao longo da diagonal onde os poços estão localizados. Isto ocorre, devido a estratégia empregada no momento do “lançamento” das linhas, onde mais linhas serão traçadas em segmentos que apresentarem maior fluxo e menos linhas serão traçadas em segmentos com baixo fluxo. Por outro lado, os resultados obtidos com a malha transversal, tanto neste trabalho quanto no trabalho de Durlinsky^[122], apresentam um pequeno atraso para a irrupção de agua no poço produtor.

5.3 Reservatório naturalmente fraturado: caso sintético

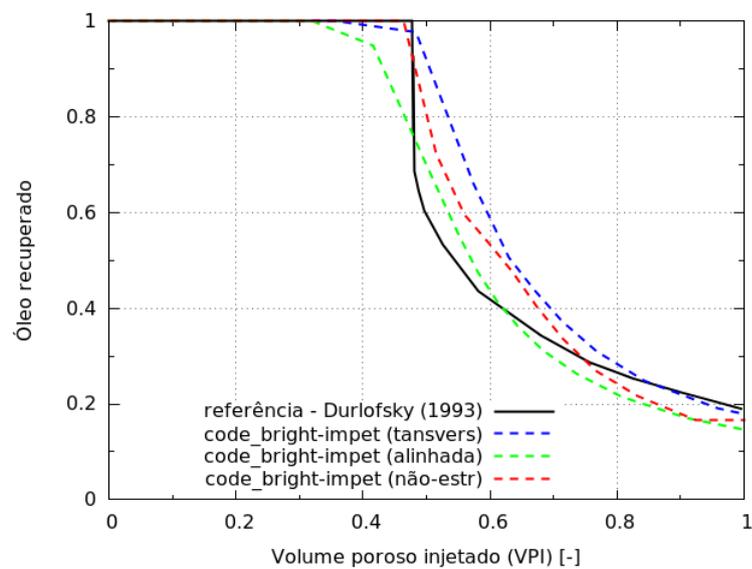
Neste exemplo, testamos nossa discretização por linhas de fluxo em um problema com advecção dominante. Utilizamos uma representação sintética de um reservatório naturalmente fraturado por três famílias de fraturas altamente interconectadas (Figura 5.16). Para esta simulação, foram utilizados os parâmetros listados na Tabela 5.6. As curvas de permeabilidade relativa utilizadas são ilustradas na Figura 5.17. O injetor é colocado no face esquerda do modelo ($x = 0m$), o produtor na face direita do modelo ($x = 50m$). A permeabilidade da matriz é de 10 mD e as fraturas são 1000 vezes mais permeáveis.

Figura 5.11 – Comparativo do óleo acumulado para o problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços obtidos para as três configurações de malha.



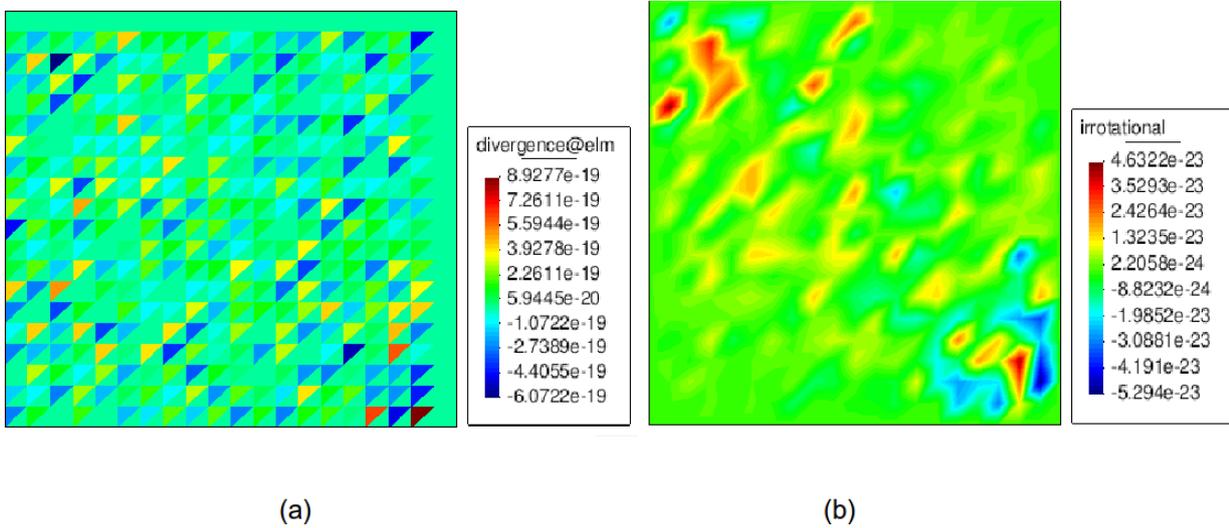
Fonte: o autor

Figura 5.12 – Comparativo para o óleo recuperado no problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços.



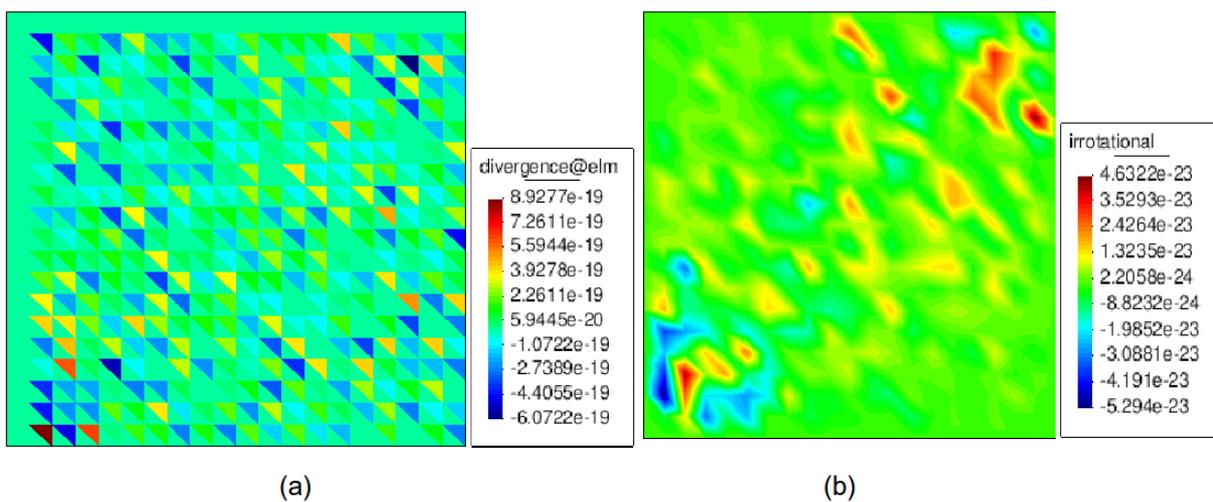
Fonte: o autor

Figura 5.13 – Perfis do divergente a nível de elemento e irrotacional do campo de velocidade pós-processado para a malha alinhada para $VPI=0,1$.



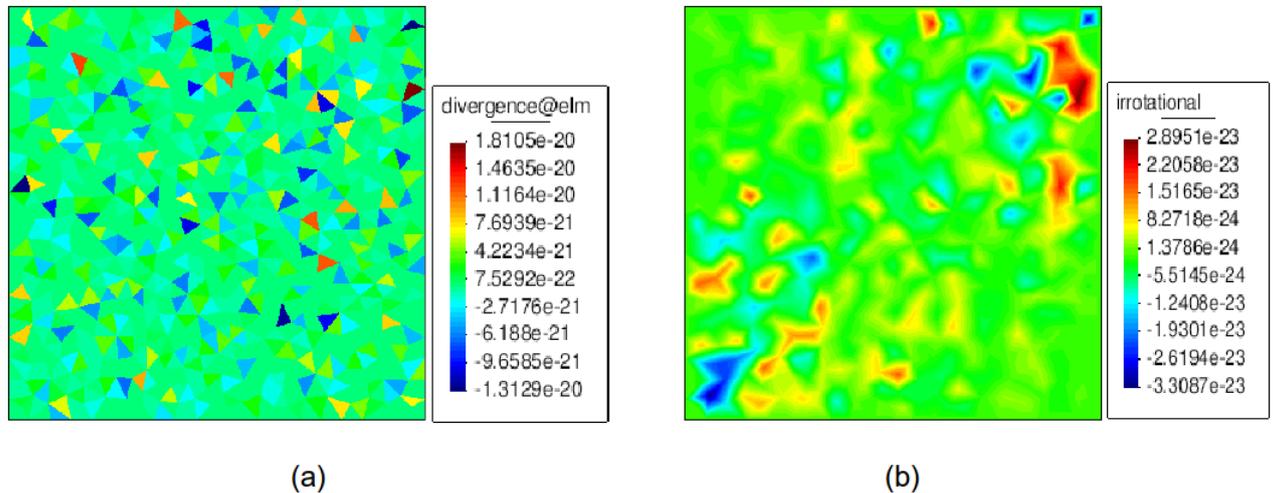
Fonte: o autor

Figura 5.14 – Perfis do divergente a nível de elemento e irrotacional do campo de velocidade pós-processado para a malha transversal para $VPI=0,1$.



Fonte: o autor

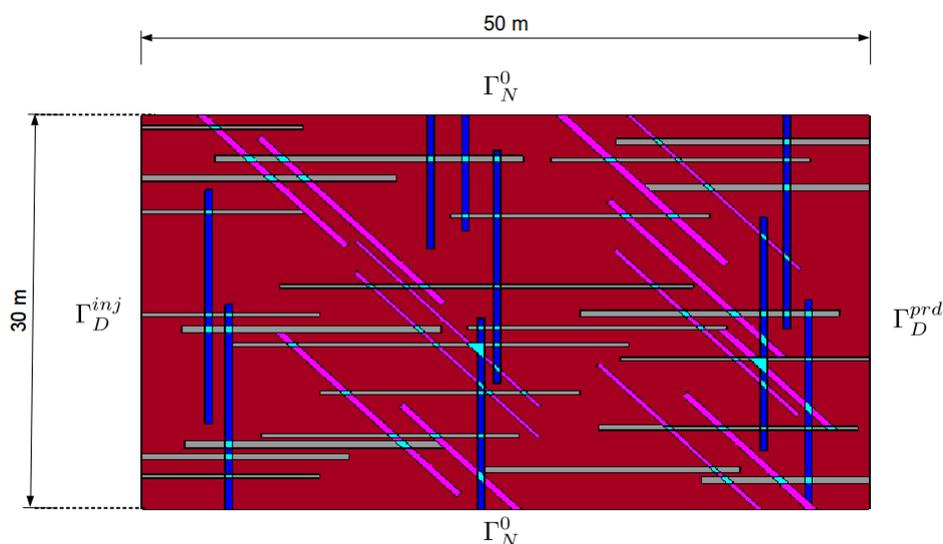
Figura 5.15 – Perfis do divergente a nível de elemento e irrotacional do campo de velocidade pós-processado para a malha não-estruturada para VPI=0,1.



Fonte: o autor

A porosidade das fraturas são 0,990. No total, aproximadamente 13.000 nós e 27.000 elementos triangulares são usados para discretizar a geometria (Figura 5.16)

Figura 5.16 – Geometria e condições de contorno do reservatório sintético naturalmente fraturado.



Fonte: o autor

A Figura 5.18 mostra o perfil de saturação da água depois de 3 dias. Como esperado, as fraturas dominam o fluxo e a frente de óleo escoo mais rapidamente através da rede de fraturas até o poço produtor. Nas discontinuidades, cruzamento das fraturas ou onde elas

Tabela 5.6 – Propriedades do domínio e dos fluidos para o caso sintético.

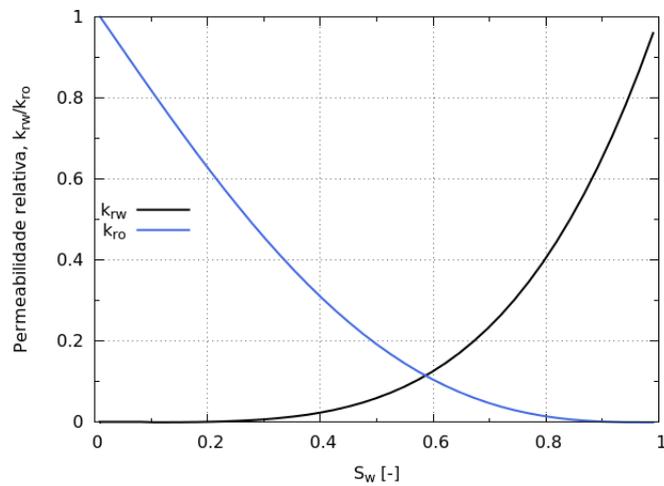
		Propriedade do Meio Poroso	
		Matriz	Fraturas
Permeabilidade, K	$[m^2]$	$9,871 \times 10^{-15}$	$9,871 \times 10^{-12}$
Porosidade, ϕ	$[-]$	0,100	0,990
		Propriedade dos Fluidos	
Viscosidade da água, μ	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$		$1,0 \times 10^{-12}$
Densidade da água, ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$		1000
Viscosidade do óleo, μ	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$		$4,0 \times 10^{-12}$
Densidade do óleo, ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$		875
		Condições de Contorno	
Γ_D^{inj} [Dirichlet]:			
p_{inj}	[MPa]		$p_{inj} = 9,676$
s_w	$[-]$		$s_w = 0,990$
Γ_D^{prd} [Dirichlet]:			
p_{prd}	[MPa]		$p_{prd} = 0,000$
Γ_N^0 [Neumann]:			
q_w, q_o	$[kg \cdot s^{-1}]$	$q_w = 0,000$	$q_o = 0,000$
		Condições Iniciais	
			$s_w = 0,025$
		Parâmetros da simulação	
Número de linhas de fluxo, n_{sl}	$[-]$		1680
DVTOL	$[m \cdot s^{-1}]$		$5,0 \times 10^{-4}$
$DV_{el_{min}}$	$[m \cdot s^{-1}]$		0,25
$DV_{el_{max}}$	$[m \cdot s^{-1}]$		1,75

Fonte: o autor

terminam, ocorre a dispersão dos fluidos devido a diminuição na velocidade de percolação, isso é evidenciado através padrão de comportamento das linhas como ilustrado nas regiões destacadas na Figura 5.19 em que algumas linhas mudam de direção à "procura" de regiões mais favoráveis ao escoamento.

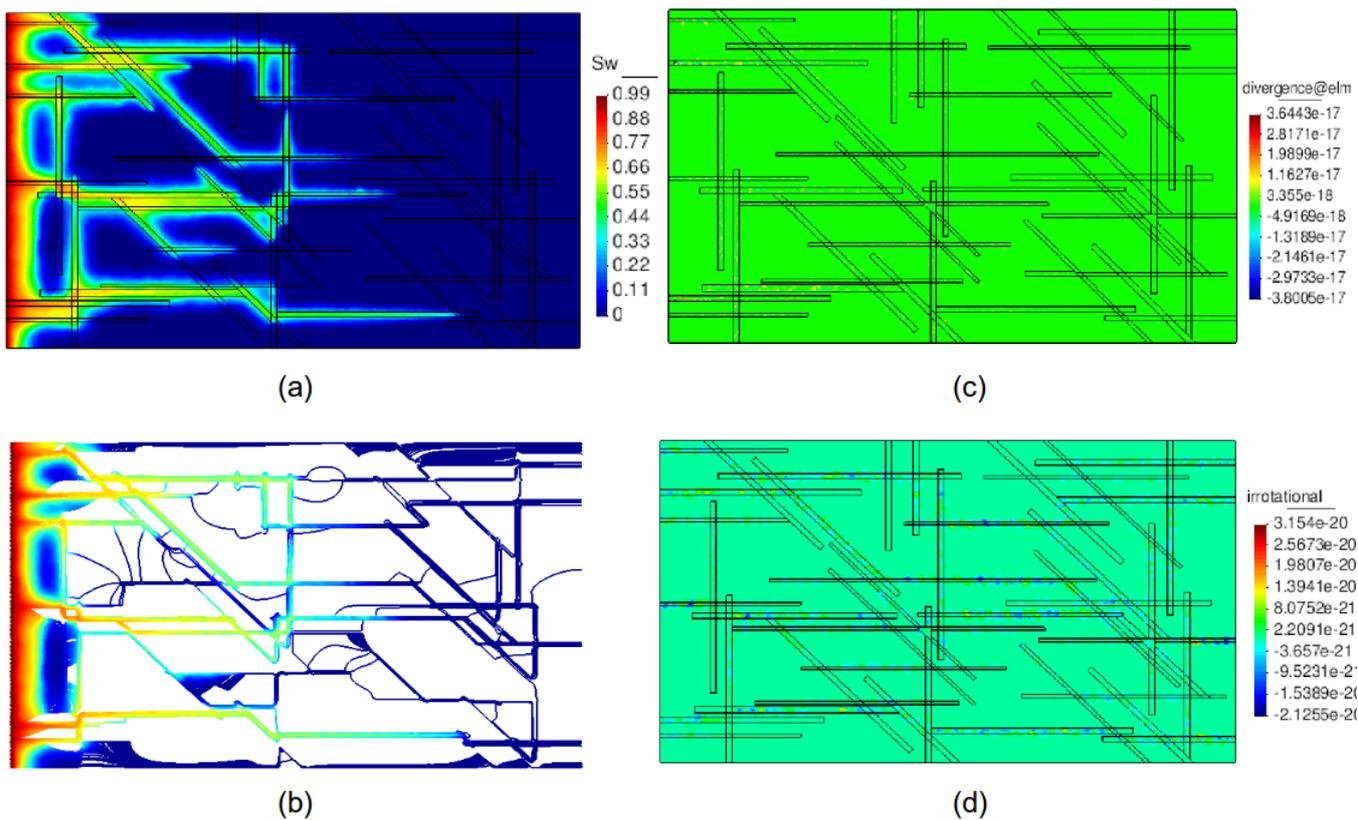
Conforme ilustrado na Figura 5.20, observamos que as fraturas auxiliam na formação dos dedos viscosos (*viscous fingers*), que aliado a diferença de viscosidade das fases presentes no escoamento, favorece no aumento do contraste da mobilidade entre as fraturas preenchidas por água e a matriz saturada de óleo, este processo protege/isola blocos da matriz concentrando ainda mais o fluxo nas fraturas que apresentam maior permeabilidade. Além disso, após a irrupção (5,8 dias) o fluido injetado inicia o processo de infiltração nos blocos da matriz (evidenciado pela quantidade de linhas que percorrem a matriz que aumenta ao longo do tempo), até atingir o estado estacionário.

Figura 5.17 – Curvas de permeabilidade relativas usadas no caso do reservatório naturalmente fraturado.



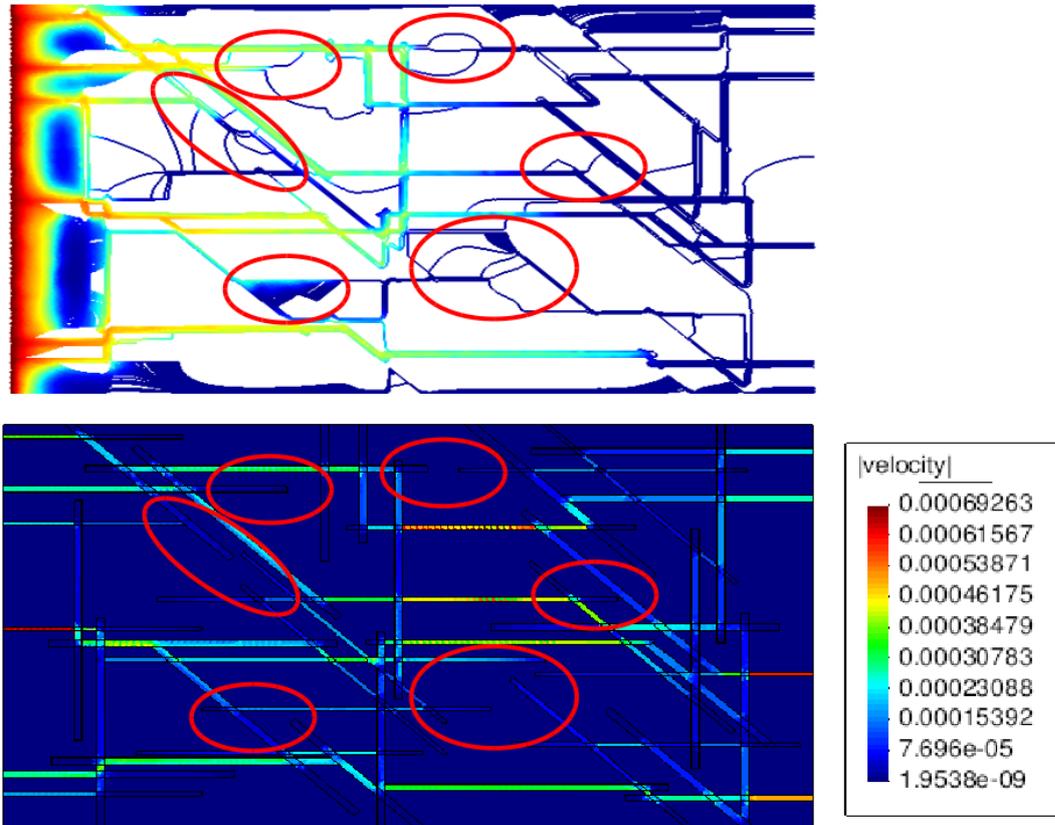
Fonte: o autor

Figura 5.18 – Perfis de (a) saturação de água, (b) saturação de água sobre as linhas de fluxo, (c) divergente a nível de elemento e (d) irrotacional.



Fonte: o autor

Figura 5.19 – Detalhes das regiões onde ocorre dispersão dos fluidos, no topo linhas de fluxotraçadas e abaixo perfil do módulo da velocidade de Darcy total em $t= 3$ dias.



Fonte: o autor

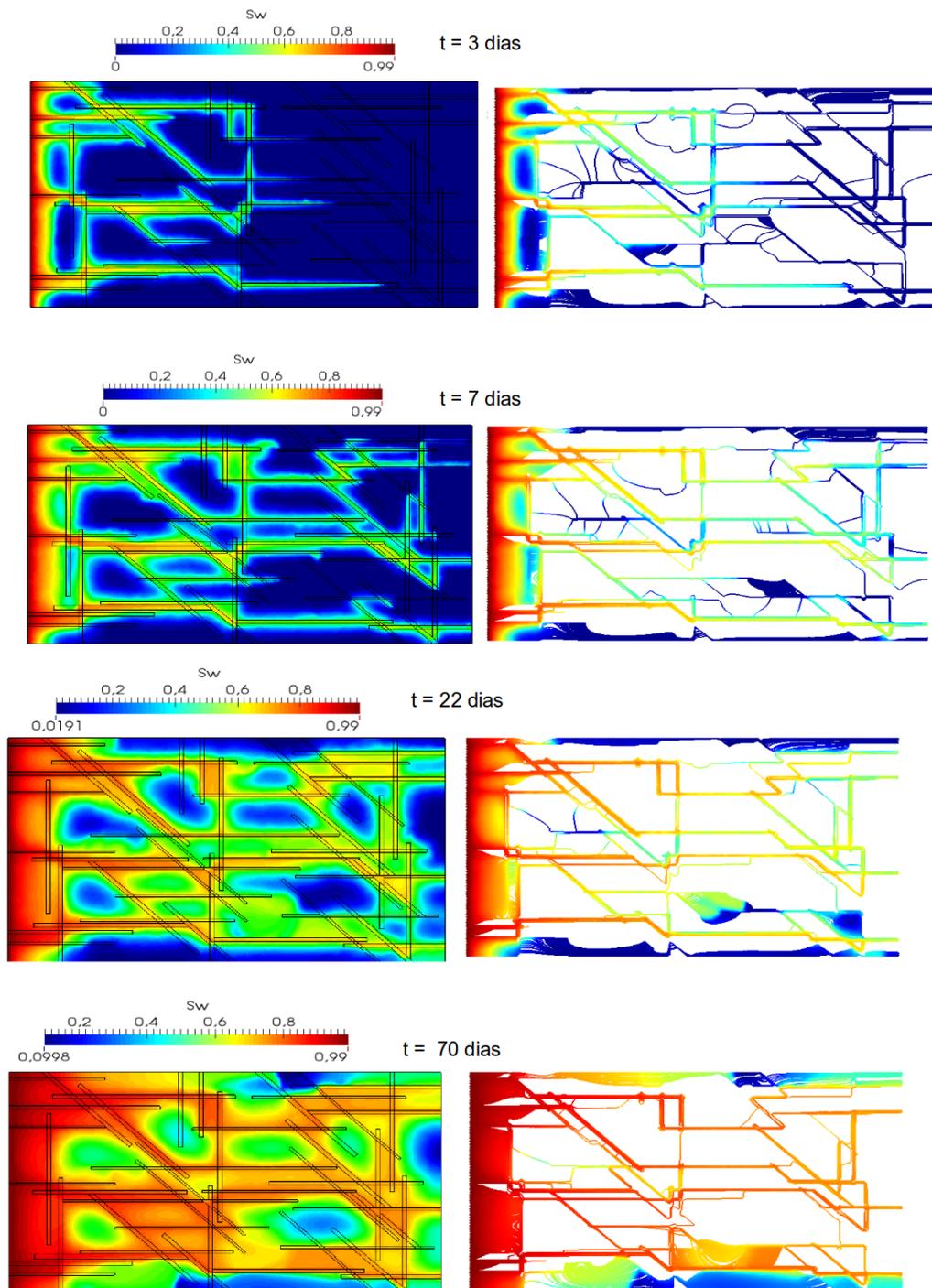
5.4 Problema de compactação e subsidência

Após analisarmos a performance da formulação de fluxo proposta, objetivamos agora verificar o efeito qualitativo do acoplamento geomecânico com a metodologia implementada neste trabalho em um problema de recuperação primária de petróleo. Isso será verificado através de comparações entre os resultados obtidos em simulações de fluxo considerando e desconsiderando o acoplamento geomecânico (elástico), focando principalmente no comportamento das curvas de produção.

Para este fim, consideramos um reservatório homogêneo localizado a uma profundidade de 3.000 metros abaixo do nível do mar com confinamento imposto pelas rochas vizinhas (*overburden* e *underburden*).

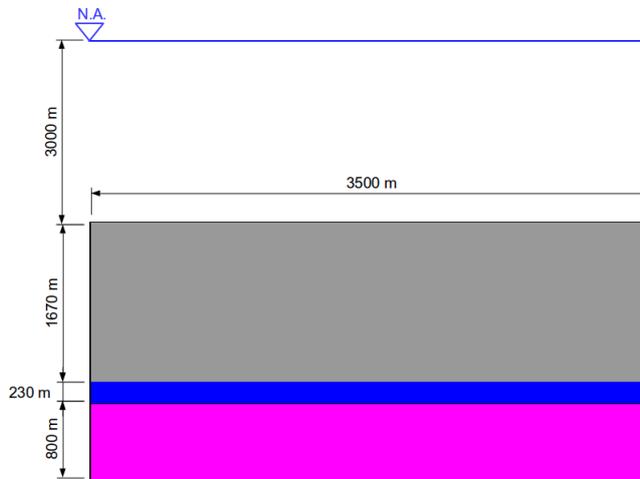
O reservatório encontra-se a uma profundidade de 4670 metros e tem uma espessura de 230 metros (Figura 5.21), soterrado por uma camada de rocha (*overburden*) de 1670 metros de espessura. O problema é formado, aproximadamente, por 3000 nós e 5600 elementos sobre uma configuração não-estruturada.

Figura 5.20 – Evolução do perfil de saturação sobre a malha de elementos finitos (à esquerda) e ao longo das linhas de fluxo (à direita).



Fonte: o autor

Figura 5.21 – Problema de compactação.



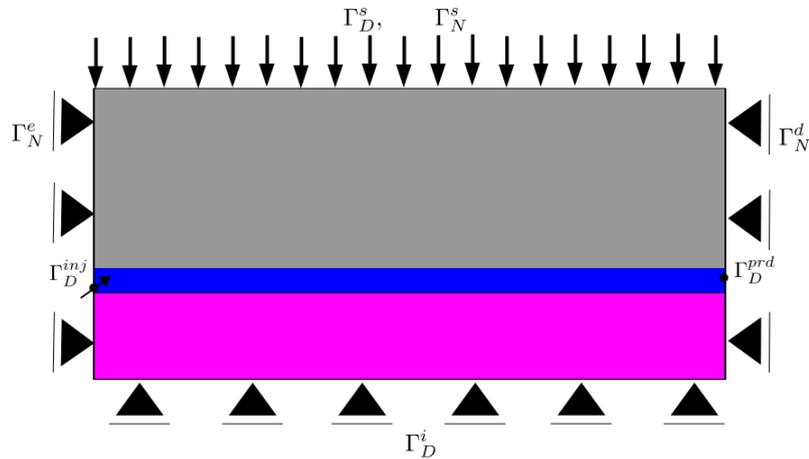
Fonte: o autor

Sobre o problema são aplicadas condições de contorno tais que levem a um estado de tensões efetivas nulo nesta região, ou seja, é admitida uma tensão total e uma pressão de fluido em todo o campo de 30 MPa, e nesta superfície uma pressão de lâmina d'água atuante de 30 MPa, levando, pelo princípio das tensões efetivas (Equação 3.31), a uma tensão efetiva nula. Os poços injetores e produtores, bem como as condições de contorno mecânicas estão ilustradas na Figura 5.22. Os valores das condições de contorno impostas e os parâmetros empregados no problema são apresentadas na Tabela 5.4. O comportamento da variação da permeabilidade segue a lei exponencial (Equação 3.42). O poço produtor encontra-se completado a uma profundidade de 30 metros do topo do reservatório, já o poço injetor à 190 metros.

A Figura 5.23 mostra o comparativo entre as curvas de produção acumulada de óleo, onde o efeito geomecânico influencia positivamente a produção de óleo, decorrente da compactação originada pela queda de pressões na zona do poço produtor, levando a um aumento nas tensões efetivas e deformação do reservatório, em especial na zonas próximas ao poço produtor. Isso leva à redução da porosidade e da permeabilidade do meio, contribuindo, assim, para a expulsão do fluido do interior deste poros no sentido do gradiente de pressão gerado pela produção.

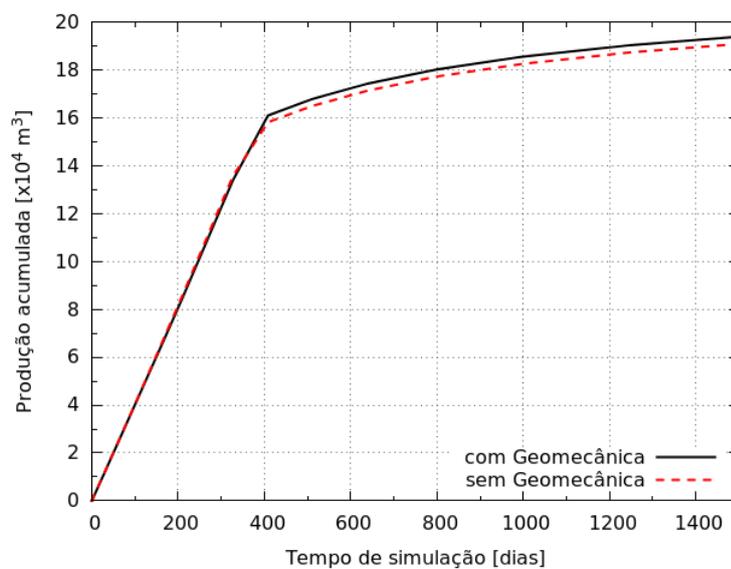
A porosidade e a permeabilidade têm seus valores alterados ao longo do período de produção, conforme ilustrado nas Figuras 5.24 e 5.25), observamos um salto nos valores de permeabilidade e porosidade, isso ocorre devido a formulação implementada considerar fluidos e rocha incompressíveis onde apenas a deformação volumétrica contribui para a variação da porosidade e o gradiente imposto entre os poços é gerado instantaneamente (estado estacionário) 5.26, deste modo, potencializando o efeito de compactação, na região do poço produtor, e expansão, nas imediações do poço injetor.

Figura 5.22 – Condições de contorno hidráulicas e mecânicas impostas no problema de compactação.



Fonte: o autor

Figura 5.23 – Curvas de produção acumulada de óleo (efeito do acoplamento geomecânico).



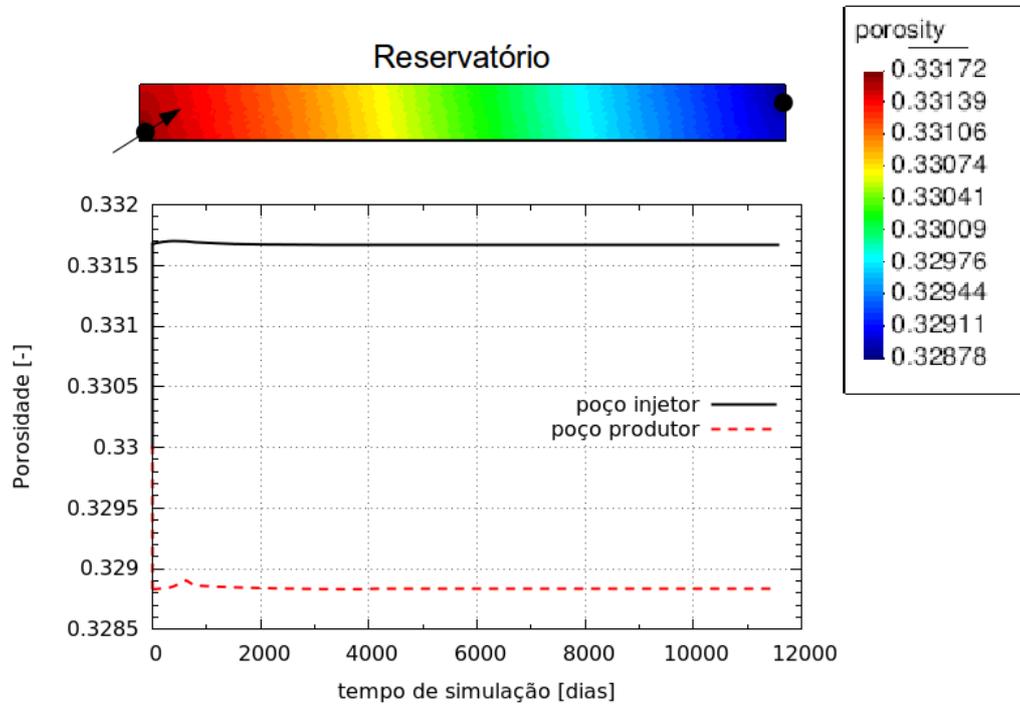
Fonte: o autor

Tabela 5.7 – Propriedades do domínio e dos fluidos para o caso de compactação.

		Propriedade do domínio	
		Reservatório	Rochas Capeadoras (<i>overburden</i> e <i>underburden</i>)
Permeabilidade, K	$[m^2]$	$8,00 \times 10^{-12}$	$1,00 \times 10^{-30}$
Porosidade, ϕ	$[-]$	$b = 100$ 0,33	$b = 0,0$ 0,10
Mód. de elasticidade, E	$[MPa]$	3000,00	6000,00
Coef. de Poisson, ν	$[-]$	0,35	0,30
Coef. de Biot, α	$[-]$	1,00	0,0
Densidade, ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	2478,00	2478,00
		Propriedade dos Fluidos	
Viscosidade da água, μ		$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$	$1,0 \times 10^{-12}$
Densidade da água, ρ		$[kg \cdot m^{-3}]$	1000
Viscosidade do óleo, μ		$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$	$4,0 \times 10^{-12}$
Densidade do óleo, ρ		$[kg \cdot m^{-3}]$	875
Permeabilidade relativa da água, k_{rw}		$[-]$	$k_{rw} = s_w^2$
Permeabilidade relativa da óleo, k_{ro}		$[-]$	$k_{ro} = (1 - s_w)^2$
		Condições de Contorno	
Γ_D^{inj} [Dirichlet]:			
p_{inj}	$[MPa]$	$p_{inj} = 57$	
s_w	$[-]$	$s_w = 0,990$	
Γ_D^{prd} [Dirichlet]:			
p_{prd}	$[MPa]$	$p_{prd} = 37$	
Γ_D^s [Dirichlet]:			
p_s	$[MPa]$	$p_s = 30$	
Γ_N^s [Neumann]:			
\vec{f}_N	$[MPa]$	$\vec{f}_N = [0 \ -30 \ 0]^T$ e $\gamma_u = 0$	
Γ_D^e, Γ_D^d [Dirichlet]:			
$\vec{u}_h = [u_{hx} \ u_{hy} \ u_{hz}]^T$	$[m]$	$\gamma_u \neq 0, u_{hx} = 0$ e $u_{hy}, u_{hz} \neq 0$	
Γ_D^i [Dirichlet]:			
$\vec{u}_h = [u_{hx} \ u_{hy} \ u_{hz}]^T$	$[m]$	$\gamma_u \neq 0, u_{hy} = 0$ e $u_{hx}, u_{hz} \neq 0$	
		Condições Iniciais	
			$s_w = 0,01$
		Parâmetros da simulação	
Número de linhas de fluxo, n_{sl}		$[-]$	2000
DVTOL		$[m \cdot s^{-1}]$	$5,0 \times 10^{-4}$
$DVel_{min}$		$[m \cdot s^{-1}]$	0,25
$DVel_{max}$		$[m \cdot s^{-1}]$	1,75

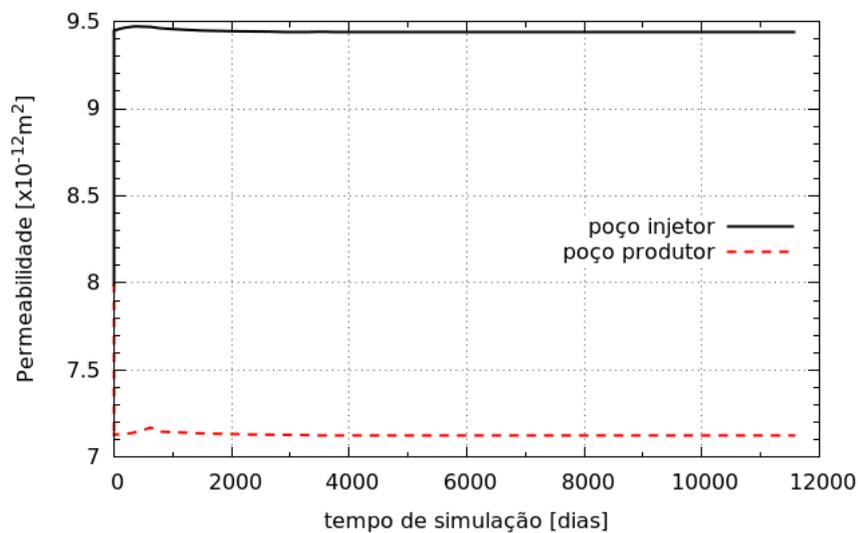
Fonte: o autor

Figura 5.24 – Variação da porosidade com o tempo no poço produtor e injetor.



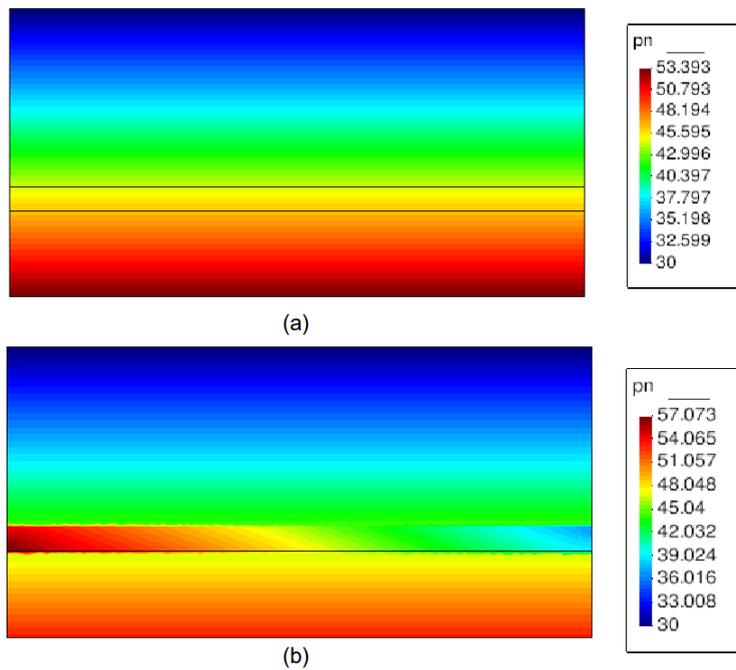
Fonte: o autor

Figura 5.25 – Variação da permeabilidade com o tempo no poço produtor e injetor.



Fonte: o autor

Figura 5.26 – Distribuição da poro-pressão: (a) geostático; (b) Após abertura dos poços.

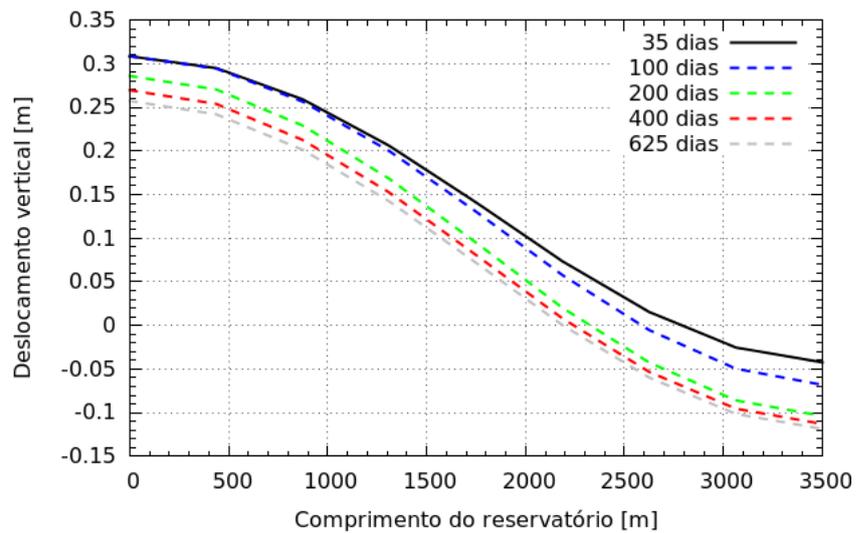


Fonte: o autor

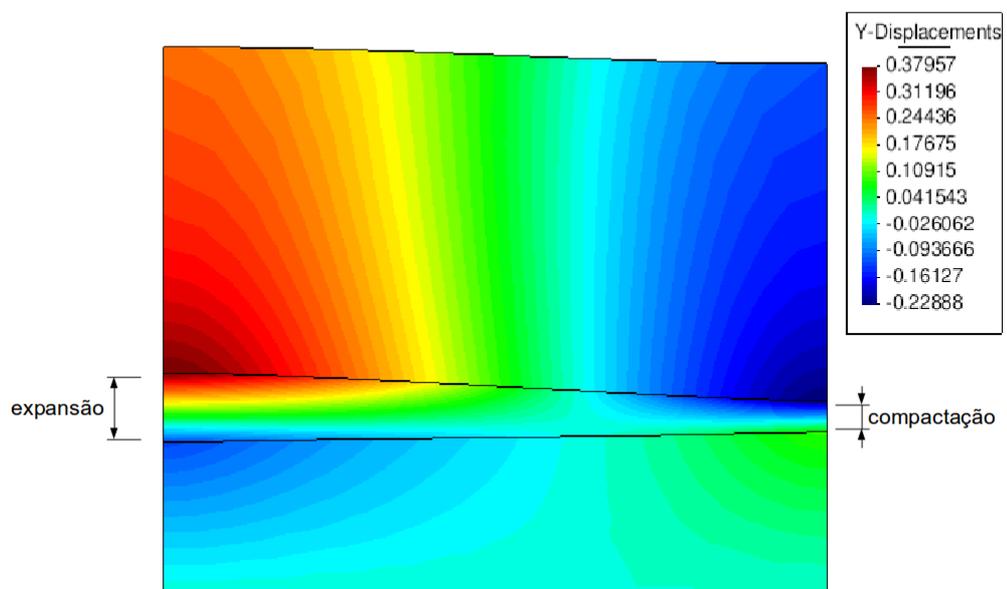
Na Figura 5.27 representamos a compactação observada através do deslocamento vertical na superfície partindo da extremidade onde está localizado o poço injetor e estendendo-se até a outra extremidade do reservatório onde ocorre o processo de produção. Inicialmente, podemos verificar que o aumento da poro-pressão junto ao poço de injeção produz uma expansão vertical da bacia gerando deformações de tração pronunciadas na vizinhança onde o poço injetor foi perfurado. À medida que nos distanciarmos do poço de injeção em direção a região de produção, notamos que o efeito de expansão diminui ocorrendo inversão para um efeito de compressão (compactação), devido a depletação, nas imediações do poço produtor. Com a evolução do tempo, o processo de varrido da água (inundação) induz a um decréscimo da expansão do reservatório e aumento da compactação tal como podemos observar na Figura 5.27. Tal efeito de compressão do meio poroso auxilia na percolação dos fluidos em direção ao poço produtor, como evidenciado no perfil de saturação ao longo das linhas de fluxo(Figura 5.28).

Por fim, como observado e analisado, os resultados obtidos neste caso foram condizentes com as respostas/resultados encontrados em casos clássicos da geomecânica [117, 116, 123, 105], além de verificar a importância das análises hidro-mecânicas acopladas no impacto da produção do campo de petróleo e fenômenos físicos que ocorrem durante o processo de depletação.

Figura 5.27 – Deslocamento vertical: (a) Evolução da compactação sobre a bacia (b) Distribuição dos deslocamentos no modelo.



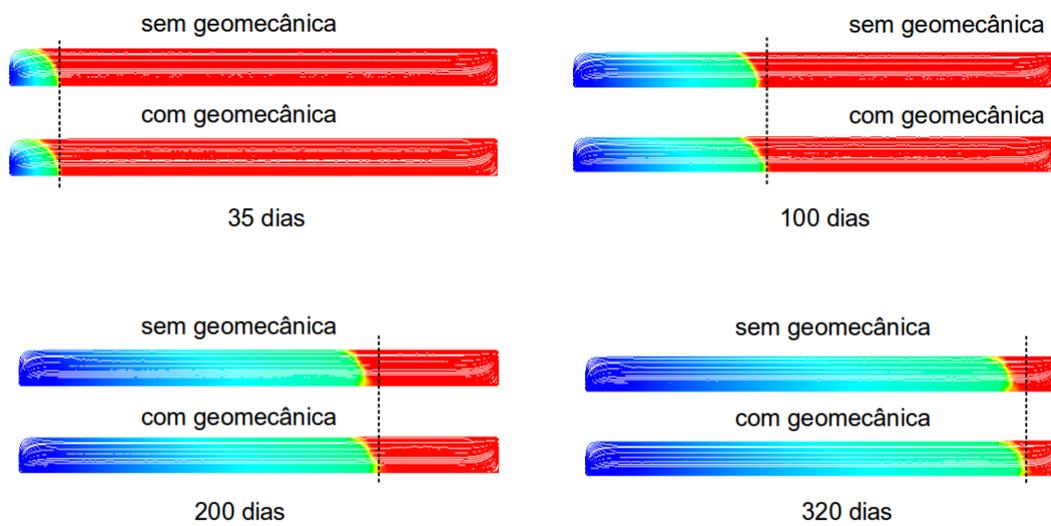
(a)



(b)

Fonte: o autor

Figura 5.28 – Perfis de saturação ao longo das linhas de fluxotraçadas para problema de compactação considerando e não considerando o efeito geomecânico.



Fonte: o autor

Parte IV

Considerações Finais

6 CONCLUSÃO

No presente trabalho, propusemos uma alternativa mais barata e eficiente para a modelagem geomecânica acoplada com o método das linhas de fluxo que não envolvesse o acoplamento entre softwares. A formulação baseada em linhas de fluxo foi implementada no código *in-house* de elementos finitos *CODE_BRIGHT*^[1] e demandou o desenvolvimento de vários módulos implementados em FORTRAN 2003. O primeiro deles foi o módulo de pós-processamento do campo de velocidade computado através da discretização dos métodos dos elementos finitos e volumes de controle (CVFEM) pelo *CODE_BRIGHT*.

O procedimento de pós-processo (seção 4.5) resolve um conjunto de equações locais em cada nó da malha de elementos finitos de maneira a impôr a conservação de massa local em torno de cada nó, obtendo assim, um campo de fluxos normais às arestas dos elementos finitos com as seguintes características: contínuo na interface elemento-elemento, localmente conservativo, e satisfazendo o campo de pressão obtido pela solução da equação de difusão.

Foi implementado também um módulo de volumes finitos para a resolução de equações hiperbólicas não-lineares, fazendo uso de uma estrutura baseada em arestas, que foi utilizada na construção de um módulo que contempla a abordagem IMPES e IMPES modificada (seção 3.3) para a simulação de fluxo em meios porosos. Isso propiciou a criação do principal módulo desenvolvido neste doutoramento, que baseia-se na formulação de linhas de fluxo que é formado por outros 2 módulos. O primeiro módulo consiste no procedimento de traçado das linhas em malhas triangulares não-estruturadas conforme descrito na seção 3.4.1, fazendo o uso das vazões oriundas do pós-processamento realiza-se o mapeamento dos fluxos e das coordenadas dos sub-volume de controle para o espaço normalizado onde realiza-se o cálculo do tempo de vôo e das posições onde a linha visita tal sub-volume. E o segundo módulo desenvolvido foi o “resolvedor” unidimensional da equação de transporte que engloba o procedimentos descritos nas seções 4.6.1 e 4.6.

O acoplamento entre o módulo geomecânico (*CODE_BRIGHT*^[1]) e o módulo desenvolvido neste doutoramento (linhas de fluxo) adotou um algoritmo de sequenciamento, de uma via, no qual o problema geomecânico (poro-mecânica) é resolvido sequencialmente ao problema de fluxo multifásico (linha de fluxo) baseada na formulação IMPES modificada empregando um campo de velocidade “enriquecido” para o problema do transporte, que é resolvido seguindo um esquema de decomposição do operador empregando o método das linhas de fluxo para a parte advectiva (preditor) e o método dos volumes finitos para outras físicas como parte do passo corretor. Este mesmo campo “enriquecido” é utilizado como critério de seleção para o próximo passo de tempo para a equação da pressão,

que é realizado de forma adaptativa seguindo como restrição, a variação da velocidade pós-processada.

Os casos teste propostos para validação das implementações realizadas correspondem às análises de: traçado das linhas, solução obtida através da aproximação das equações de fluxo multifásico 2D em múltiplos problemas 1D ao longo das linhas de fluxofrente aos problemas de fluxo bifásico que envolvem: confronto com soluções analíticas, escolha de parâmetros para a seleção de passos de tempo estáveis, orientação da malha e onde a convecção é o processo dominante no escoamento dos fluidos (reservatório naturalmente fraturados) e por último análise de cunho qualitativo do algoritmo de acoplamento em um problema de compactação e subsidência.

A validação do procedimento de traçado se deu através do confronto das linhas traçadas pelo simulador *open source* MRST [118] considerando um problema de 1/4 de cinco poços, onde observamos boa concordância com as linhas traçadas pelo MRST. A análise da solução do transporte ao longo das linhas de fluxo foi realizado através da comparação das soluções obtidas por Durlinsky^{[122][122]} para a análise do efeito de orientação de malha. Os experimentos computacionais mostram que o método implementado é sensível ao fenômeno de orientação de malha devido aos fluxos que são calculados através do CVFEM. Deste modo, percebemos que o corte de água (*breakthrough*) varia para cada tipo malha comparado com a solução de referência (em malha não estruturada) que, em princípio, não apresenta o fenômeno de orientação de malha. Para reduzir este viés, é necessário considerar esquemas de discretização multidimensionais que levem em consideração o computo dos fluxos tangenciais sobre as faces dos elementos, necessitando assim, da mudança do método de discretização.

Através do exemplo bidimensional considerando o escoamento dominado pela advecção, verificamos a capacidade da metodologia implementada em tratar problemas de escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos (reservatórios naturalmente fraturados). No problema estudado, as linhas de fluxo foram capazes de representar a descontinuidade no meio poroso de maneira bastante acurada, em meios em que a diferença entre as permeabilidades chega a 1000, observou-se que a metodologia foi capaz de prever a distribuição do campo de saturação em todo o espectro da simulação (chegada da frente de saturação para o poço produtor, formação dos dedos viscosos, percolação do fluido injetado nos blocos da matriz após irrupção da água no poço produtor e isolamento de alguns blocos circundados por várias fraturas).

Com relação ao algoritmo de acoplamento, o estudo da implementação do módulo de acoplamento sequencial de duas vias sobre a estrutura do *CODE_BRIGHT* demandou mais tempo de implementação e depuração que o planejado e inviabilizou seu desenvolvimento, devido a oscilações espaciais que ocorrem devido ao emprego de mesmas ordens de interpolação para os problemas mecânico e de fluxo, que viola a condição de

estabilidade de de Babuska-Brezzi (i.e. locking)^[112, 102], que necessitaria do emprego de formulações com espaços de funções de interpolação alternativos, que demandariam mais tempo comprometendo os prazos inicialmente acordados, isso inviabilizou a implementação do acoplamento iterativo em duas vias e partindo para o esquema de uma via. Apesar disso, a simulação hidro-mecânica do problema de compactação e subsidência submetido à injeção de água, como resposta geomecânica, obteve-se a ocorrência do fenômeno de compactação do reservatório devido ao alívio das tensões provocado pela depletação do mesmo produzindo resultados condizentes com as encontradas na literatura especializada. A ferramenta desenvolvida mostrou-se bastante promissora para ser aplicada como uma análise preliminar em modelagem geomecânica.

Finalmente, as conclusões deste trabalho pode ser resumidas da seguinte forma:

- Foi desenvolvido neste trabalho de doutoramento um módulo do método das linhas de fluxo que foi acoplado ao código *in-house* de elementos finitos *CODE_BRIGHT*^[1] adotando um algoritmo do tipo sequencial, no qual o problema geomecânico (poromecânica) é resolvido sequencialmente ao problema de fluxo multifásico (linha de fluxo), este último empregando a metodologia IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) modificado na qual a equação elíptica de pressão é resolvida de forma implícita, utilizando a estrutura do *CODE_BRIGHT*, e a equação hiperbólica de saturações é resolvida explicitamente, através do método dos volumes finitos (implementado);
- Com o módulo desenvolvido foi possível realizar uma simulação hidro-geomecânica acoplada da exploração de reservatórios de petróleo sensíveis ao estado de tensões, obtendo resultados condizentes com as respostas encontradas em casos clássicos da geomecânica ^[117, 116, 123, 105];
- Observamos que a metodologia implementada pode ser empregada como uma ferramenta DFN (*Discrete Frature models*) auxiliar em reservatórios naturalmente fraturados;
- A ferramenta desenvolvida mostrou-se bastante promissora para ser aplicada como uma análise preliminar em modelagem geomecânica;

7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O desenvolvimento do trabalho apresentado nesta tese de doutoramento usufruiu de diversos momentos de reanálise, discussão de escopo, avaliação das tecnologias importantes a incorporar, entre outros. Estas etapas de redirecionamento foram importantes para enriquecer o trabalho, mas algumas melhorias identificadas não puderam ser aplicadas porque o tempo necessário ao redirecionamento do desenvolvimento comprometeria os prazos inicialmente acordados. Outras extensões foram identificadas somente ao final do desenvolvimento deste trabalho.

Nesta seção estas possíveis extensões de funcionalidades são brevemente descritas e documentadas para trabalhos futuros:

- Implementação dos métodos de cálculo do tempo de vôo proposto por: [Jimenez et al.](#) [21] [21] e [Matringe, Juanes e Tchelepi](#) [39] [39], a fim de empregar aproximações de ordem superior às implementadas neste trabalho no que se refere ao traçado e computo do tempo de vôo;
- Implementação da metodologia sequencial implícita, onde a equação da saturação no passo corretor é resolvida de maneira implícita, assim como a equação da difusão;
- Implementação de formulações que levem em consideração o computo dos fluxos tangenciais sobre as faces dos elementos a fim de capturar o comportamento do fluxo com maior precisão, isso torna-se crucial para problemas altamente advectivos e anisotrópicos como é o caso dos reservatórios naturalmente fraturados;
- Extensão do simulador para geometrias tridimensionais;
- Aperfeiçoamento do modelo físico, introduzindo os termos de capilaridade e de deformação volumétrica, ou fazendo uso da abordagem de decomposição do operador ou através de decomposição ortogonal [89], bem como compressibilidade, esta última poderia solucionar o problema de estabilidade de solução do esquema acoplado iterativo pois funcionaria como termo de estabilização para a equação de difusão;
- Após implementação de formulações elastoplásticas implícitas aplicar a formulação (após a consideração da compressibilidade sobre as linhas) desenvolvida neste trabalho;
- Implementação de formulações de estabilização de solução que possibilitem o acoplamento iterativo em duas vias, seria interessante estudar a condição de estabilidade de

Babuska-Brezzi para evitar problemas de oscilação espacial no processo de solução para futuros desenvolvimento ligados à esquemas de acoplamento;

- Implementação do acoplamento iterativo com tensão fixada (após a implementação de termos/formulações de estabilização);
- À medida que o número de linhas traçadas aumenta o custo computacional também aumenta, em termos de computação de alto desempenho, os procedimentos de: traçado, mapeamento das propriedades transportadas e solução unidimensional, são altamente paralelizáveis;

REFERÊNCIAS

- 1 OLIVELLA, S.; GENS, A.; CARRERA, J.; ALONSO, E. E. Numerical formulation for a simulator (code_bright) for the coupled analysis of saline media. *Engineering Computations*, v. 13, p. 87–112, 1996.
- 2 MUSKAT, M. Flow of homogenous fluids. *International Human Resources Development Corporation*, Newbury Street, Boston MA, v. 137, 1937.
- 3 FAY, C.; PRATS, M. The application of numerical methods to cycling and flooding problems. In: *Proceedings of the 3rd World Petroleum Congress*. [S.l.: s.n.], 1951.
- 4 YIH, C. Stream functions in three-dimensional flow. *La Houille Blanche*, p. 445–450, 1957.
- 5 NELSON, R. Stream functions for three-dimensional flow in heterogeneous porous media. *Int. Assc. Sci. Hydrology*, v. 64, p. 290–300, 1963.
- 6 HIGGINS, R.; LEIGHTON, A. J. A computer method to calculate two-phases flow in any irregularly bounded porous medium. *Journal of petroleum technology*, v. 14, n. 6, p. 679–683, 1962.
- 7 HIGGINS, R.; LEIGHTON, A. J. Computer prediction of water drive of oil and gas mixtures through irregularly bounded porous media - three-phase flow. *Journal of petroleum technology*, v. 14, p. 1048–1054, 1962.
- 8 MARTIN, J.; WEGNER, R. Numerical solution of multiphase, two-dimensional incompressible flow using streamtube relationships. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 19, p. 313–323, 1979.
- 9 GLIMM, J.; ISSACSON, E.; MARCHESIN, D.; MCBRYAN, O. Front tracking for hyperbolic systems. *Advances in Applied Mathematics*, v. 2, p. 91–119, 1981.
- 10 GLIMM, J.; LINDQUIST, B.; MCBRYAN, O.; PADMANABHAN, L. A front tracking reservoir simulator, five-spot validation studies and the water coning problem. *The Mathematics of Reservoir Simulation*, p. 107–136, 1983.
- 11 COLELLA, P.; CONCUS, P.; SETHIAN, J. Some numerical methods for discontinuous flows in porous media. *The Mathematics of Reservoir Simulation*, v. 19, n. 1, p. 161–183, 1983.
- 12 SHAFER, J. Reverse pathline calculation of time-related capture zones in nonuniform flow. *Ground Water*, v. 23, n. 3, p. 283–289, 1987.
- 13 POLLOCK, D. Semianalytical computation of path lines for finite-difference models. *Ground Water*, v. 26, n. 6, p. 743–750, 1988.
- 14 BRATVEDT, F. et al. Frontline and frontsim: Two full scale, two-phase, black oil reservoir simulators based on front tracking. *Surv. Math. Ind.*, v. 3, n. 3, p. 185–215, 1993.

- 15 THIELE, M. R. *Modeling multiphase flow in heterogeneous media using streamtubes*. 203 p. Tese (Doutorado), 1994.
- 16 DATTA-GUPTA, A.; KING, M. A semianalytic approach to tracer flow modeling in heterogeneous permeable media. *Advances in Water Resources*, v. 18, p. 9–24, 1995.
- 17 BATYCKY, R. P. *Three-Dimensional Two-Phase Field Scale Streamline Simulator*. 163 p. Tese (Doutorado), 1997.
- 18 BRATVEDT, F.; GIMSE, T.; TEGNANDER, C. Streamline computations for porous media flow including gravity. *Transport in Porous Media*, v. 25, n. 1, p. 63–67, 1996.
- 19 MALLISON, B.; GERRITSEN, M.; MATRINGE, S. Improved mappings for streamline-based simulation. *SPE DOE Fourteenth symposium on improved oil recovery*, v. 4, 2004.
- 20 KIPPE, V.; Haegland, H.; LIE, K. A method to improve the mass balance in streamline methods. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 2007.
- 21 JIMENEZ, E.; SABIR, K.; DATTA-GUPTA, A.; KING, M. J. Spatial error and convergence in streamline simulation. *Society of Petroleum Engineers Journal*, p. 221–232, 2007.
- 22 STENERUD, V. *Multiscale-Streamline Inversion for High-Resolution Reservoir Models*. Tese (Doutorado), 2007.
- 23 NATVIG, J. et al. Multiscale mimetic solvers for efficient streamline simulation of fractured reservoirs. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.]: SPE, 2009.
- 24 SCHEIDT, C.; CARES, J. Representing spatial uncertainty using distance and kernels. *Mathematical Geosciences*, v. 41, n. 4, p. 397–419, 2009.
- 25 FENIK, D.; NOURI, A.; DEUTSCH, C. Criteria for ranking realizations in the investigation of sagd reservoir performance. In: *Canadian International Petroleum Conference*. [S.l.: s.n.], 2009.
- 26 JIN, J.; LIM, J.; LEE, H.; CHOE, J. Calculation of reservoir distance in oil sands using streamline simulation. In: *Annual Conference on The Korean Society for Geosystem Engineering*. [S.l.]: Korean Society for Geosystem Engineering, 2011.
- 27 JIN, J.; LIM, J.; LEE, H.; CHOE, J. Metric space mapping of oil sands reservoirs using streamline simulation. *Geosystem Engineering*, v. 14, n. 3, 2011.
- 28 HOGG, M.; SHOOK, G.; PYRCZ, M. Selection of geological models for uncertainty assessment with a novel streamline approach. In: *AAPG Annual Convention & Exhibition*. [S.l.: s.n.], 2010.
- 29 FENWICK, D.; BATYCKY, R. P. Using metric space methods to analyse reservoir uncertainty. In: *Gussow Geoscience Conference*. [S.l.: s.n.], 2011.
- 30 IBRAHIM, F. *History Matching with Reduced Parameterization and Fast Streamline-based Sensitivities*. Dissertação (Mestrado), set. 2012.
- 31 OYERINDE, A. *Streamline-Based Three-Phase History Matching*. 139 p. Tese (Doutorado), 2008.

- 32 AL-ZAWAWI, A. et al. Using streamline and reservoir simulation to improve waterflood management. *Saudi Aramco Journal of Technology*, 2011.
- 33 WEN, T. et al. Reservoir management using two-stage optimization with streamline simulation. In: *13th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*. [S.l.: s.n.], 2012.
- 34 HASHEM, M. *Near Well Bore streamline simulation*. Dissertação (Mestrado), fev. 2011.
- 35 CORDES, C.; KINZELBACH, W. Continuous groundwater velocity fields and path lines in linear, bilinear and trilinear finite elements. *Water Resources Research*, v. 28, n. 11, p. 2903–2911, nov. 1992.
- 36 PRÉVOST, M.; BLUNT, M.; EDWARDS, M. Streamline tracing on curvilinear structured and unstructured grids. *Society of Petroleum Engineers Journal*, p. 139–148, jun. 2002.
- 37 PRÉVOST, M. Accurate coarse reservoir modeling using unstructured grids, flow-based upscaling and streamline simulation. p. 254, 2003.
- 38 MATRINGE, S. Accurate streamline tracing and coverage. 2004.
- 39 MATRINGE, S.; JUANES, R.; TCHELEPI, H. Mixed finite element and related control volume discretizations for reservoir simulation on three-dimensional unstructured grids. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.]: SPE, 2007.
- 40 MATRINGE, S.; JUANES, R.; TCHELEPI, H. Streamline tracing on general triangular and quadrilateral grids. *Society of Petroleum Engineers Journal*, p. 217–223, jun. 2007.
- 41 MATRINGE, S.; JUANES, R.; TCHELEPI, H. Tracing streamlines on unstructured grids from finite volume discretizations. *Society of Petroleum Engineers Journal*, p. 423–431, 2008.
- 42 MATRINGE, S.; JUANES, R.; TCHELEPI, H. Convergence of mpfa on hexahedra. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 2009.
- 43 HÆGLAND, H. et al. Improved streamlines and time-of-flight for streamline simulation on irregular grid. *Advances in Water Resources*, v. 30, n. 4, p. 1027–1045, 2007.
- 44 HÆGLAND, H.; NORDBOTTEN, J. On reproducing uniform flow exactly on general hexahedral cells using one degree of freedom per surface. *Advances in Water Resources*, v. 32, n. 2, p. 264–267, 2008.
- 45 ZHANG, Y.; DATTA-GUPTA, A.; KING, M. J. Robust streamline tracing using inter-cell fluxes in locally refined and unstructured grids. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 2012.
- 46 RODRIGUEZ, P.; KINDELAN, M. Streamline methodology using an efficient operator splitting for accurate modeling of capillary and gravity effects. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.]: SPE, 2003. v. 2.

- 47 BERENBLYUM, R. A. Streamline simulation with capillary effects applied to petroleum engineering problems. p. 180, 2004.
- 48 Di Donato, G.; BLUNT, M. Streamline-based dual-porosity simulation of reactive transport and flow in fractured reservoirs. *Water Resources Research*, v. 40, 2004.
- 49 USMAN; ARIHARA, N. Development of streamline-based heat transport model for thermal oil-recovery simulation. *Journal of the Japan Petroleum Institute*, v. 48, n. 1, p. 9–21, 2005.
- 50 ZHU, Z.; GERRITSEN, M.; THIELE, M. R. Thermal streamline simulation for hot water flooding. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.]: SPE, 2009.
- 51 OSAKO, I. *A rigorous compressible streamline formulation for black oil and compositional simulation*. 91–119 p. Tese (Doutorado), dez. 2006.
- 52 BERALDO, V. T. *Simulação por Linhas de Corrente com Compressibilidade e Variação Espacial e Dinâmica de Composição de óleo*. Tese (Doutorado), 2008.
- 53 PODGORNOVA, O.; MYASNIKOVA, A.; BRATVEDT, K. et al. Thermodynamically consistent analytical approach for streamline simulations of multicomponent hydrocarbon reservoirs. *SPE EUROPEC/EAGE Annual Conference and Exhibition*, v. 6, 2007.
- 54 HERRERA, P.; VALLOCHI, A.; BECKIE, R. A multidimensional streamline-based method to simulate reactive solute transport in heterogeneous porous media. *Advances in Water Resources*, v. 33, p. 711–727, 2010.
- 55 RICHARDSON, R.; SOLOMON, S.; SLEEP, N. Intraplate stress as an indicator of plate tectonic driving forces. *Journal of Geophysical Research*, v. 81, n. 11, p. 1847–1856, 1976. ISSN 2156-2202. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/JB081i011p01847>>.
- 56 ZOBACK, M. D. *Reservoir Geomechanics*. Cambridge University Press, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511586477>>.
- 57 ZOBACK, M. D.; HEALY, J. H. In situ stress measurements to 3.5 km depth in the cajon pass scientific research borehole: Implications for the mechanics of crustal faulting. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 97, n. B4, p. 5039–5057, 1992. ISSN 2156-2202. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/91JB02175>>.
- 58 HERWANGER, J.; KOUTSABELOULIS, N.; ENGINEERS, E. A. of G. .; STAFF, E. A. of G. . E. *Seismic Geomechanics: How to Build and Calibrate Geomechanical Models Using 3D and 4D Seismic Data*. European Association of Geoscientists & Engineers Publications B.V. (EAGE), 2011. (Education tour series). ISBN 9789073834101. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=JOuaMQEACAAJ>>.
- 59 MORRIS, A. P. et al. Production-induced fault compartmentalization at elk hills field, california. *AAPG Bulletin*, v. 96, n. 6, p. 1001–1015, 2012. Disponível em: <<http://aapgbull.geoscienceworld.org/content/96/6/1001.abstract>>.
- 60 LJUNGGREN, C.; CHANG, Y.; JANSON, T.; CHRISTIANSSON, R. An overview of rock stress measurement methods. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, v. 40, n. 7–8, p. 975–989, 2003. ISSN 1365-1609. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160903001230>>.

- 61 HEFFER, K. Geomechanical influences in water injection projects: an overview. *Oil and Gas Science and Technology*, v. 57, n. 5, p. 415–422, 2002. ISSN 1294-4475.
- 62 ROGERS, S. F. Critical stress-related permeability in fractured rocks. *Geological Society, London, Special Publications*, v. 209, n. 1, p. 7–16, 2003. Disponível em: <<http://sp.lyellcollection.org/content/209/1/7.abstract>>.
- 63 HENNINGS, P. et al. Relationship between fractures, fault zones, stress, and reservoir productivity in the suban gas field, sumatra, indonesia. *AAPG Bulletin*, v. 96, n. 4, p. 753–772, 2012. Disponível em: <<http://aapgbull.geoscienceworld.org/content/96/4/753.abstract>>.
- 64 BOURNE, S. J.; RIJKELS, L.; STEPHENSON, B. J.; WILLEMSE, E. J. M. Predictive modelling of naturally fractured reservoirs using geomechanics and flow simulation. *GeoArabia (Manama)*, v. 6, n. 1, p. 27–42, 2000. Disponível em: <<http://www.gulfpetrolink.net/publication/geoarabia.htm>>.
- 65 RUTQVIST, J.; RINALDI, A.; CAPPÀ, F.; MORIDIS, G. Modeling of fault reactivation and induced seismicity during hydraulic fracturing of shale-gas reservoirs. In: *47th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium*. [S.l.]: ARMA, 2013.
- 66 RODRIGUEZ-HERRERA, A. et al. Field-scale geomechanical characterization of the haynesville shale. In: *47th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium*. [S.l.]: ARMA, 2013.
- 67 SONE, H.; ZOBACK, M. Analysis of intra-reservoir stress variations in shale gas reservoirs based on the variation of viscoelastic properties. In: *47th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium*. [S.l.]: ARMA, 2013.
- 68 FREDRICH, J. et al. Pre-drill estimation of subsalt fracture gradient: Analysis of the spa prospect to validate nonlinear finite element stress analyses. In: *SPE/IADC Drilling Conference and Exhibition*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2007.
- 69 MACKAY, F.; INOUE, N.; FONTOURA, S.; BOTELHO, F. Geomechanical effects of a 3d vertical salt well drilling by fea. In: *42nd US Rock Mechanics / Rock Mechanics Symposium*. [S.l.]: ARMA, 2008.
- 70 NIKOLINAKOU, M.; LUO, G.; HUDEC, M.; FLEMINGS, P. Geomechanical modeling of stresses adjacent to salt bodies: Part 2 - poroelastoplasticity and coupled overpressures. In: *AAPG Bulletin*. [S.l.]: AAPG, 2012.
- 71 NAGY, Z. et al. Iterative 3d geomechanical modeling to determine distribution and impact of stresses in deepwater gulf of mexico subsalt and near-salt environments. In: *47th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium*. [S.l.]: ARMA, 2013.
- 72 NIKOLINAKOU, M. et al. Geomechanical modeling of the mad dog salt, gulf of mexico. In: *47th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium*. [S.l.]: ARMA, 2013.
- 73 RUTQVIST, J. The geomechanics of co2 storage in deep sedimentary formations. *Geotechnical and Geological Engineering*, v. 30, p. 525–551, 2012.
- 74 ORLIC, B. Site-specific geomechanical modeling for predicting stress changes around depleted gas reservoirs considered for co2 storage in the netherlands. In: *47th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium*. [S.l.]: ARMA, 2013.

- 75 PARIHAR, P. *Visualizing flow patterns in coupled geomechanical simulation using streamlines*. 120 p. Dissertação (Mestrado), 2008.
- 76 TORRE, R. *Inclusion of Geomechanics in Streamline Simulation*. 140 p. Dissertação (Mestrado), 2010.
- 77 HOSSEINI, K. B.; CHALATURNYK, R.; DARCIS, M. Inclusion of geomechanics in streamline simulation for hydromechanical modeling of underground co2 storage. In: *47th US Rock Mechanics / Geomechanics Symposium*. [S.l.]: ARMA, 2013.
- 78 FJÆR, E. et al. *Petroleum Related Rock Mechanics*. Elsevier Science, 2008. (Developments in Petroleum Science). ISBN 9780080868912. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=DAf15hUXHuMC>.
- 79 LEWIS, R. W.; SHREFLER, B. A. *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. 2nd ed. ed. [S.l.]: Chichester, England ; New York : John Wiley, 1998. ISBN 0471928097.
- 80 BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York: American Elsevier, 1972.
- 81 PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 1991. ISBN 0444415785.
- 82 GURTIN, M. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Elsevier Science, 1982. (Mathematics in Science and Engineering). ISBN 9780080918495. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=W-0b09yIgg4C>.
- 83 NETO, E. de S.; PERIC, D.; OWEN, D. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley, 2011. ISBN 9781119964544. Disponível em: <http://books.google.fr/books?id=21Q0oLGFZuoC>.
- 84 BIOT, M. A.; WILLIS, D. G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 594–601, 1957.
- 85 MOSTAGHIMI, P.; BLUNT, M.; BIJELJIC, B. Computations of absolute permeability on micro-ct images. *Mathematical Geosciences*, Springer-Verlag, v. 45, n. 1, p. 103–125, 2013. ISSN 1874-8961. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11004-012-9431-4>.
- 86 LANGHEINRICH, A. C.; RITMAN, E. L. Quantitative imaging of microvascular permeability in a rat model of lipopolysaccharide-induced sepsis: evaluation using cryostatic microcomputed tomography. *Invest Radiol*, v. 41, n. 8, p. 645–50, 2006. ISSN 0020-9996. Disponível em: <http://www.biomedsearch.com/nih/Quantitative-imaging-microvascular-permeability-in/16829748.html>.
- 87 GUIMARÃES, L. N. *Análisis multi-componente no isoterma em médio poroso deformable no saturado*. 195 p. Tese (Doutorado), 2002.
- 88 BEAR, J. *Hydraulics of groundwater*. New York: McGraw-Hill, 1979.
- 89 DATTA-GUPTA, A.; KING, M. J.; TANAKA, S. A novel approach for incorporation of capillarity and gravity into streamline simulation using orthogonal projection. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.]: SPE, 2013.

- 90 OSAKO, I. *Timestep selection during streamline simulation via transverse flux correction*. 61 p. Dissertação (Mestrado), 2003.
- 91 HURTADO, F. S. V.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C. da. A variable timestep strategy for accelerating the impes solution algorithm in reservoir simulation. In: *Proceedings of the XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. [S.l.: s.n.], 2006.
- 92 PREVOST, J. H. Partitioned solution procedure for simultaneous integration of coupled-field problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, John Wiley Sons, Ltd, v. 13, n. 4, p. 239–247, 1997. ISSN 1099-0887. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199704\)13:4<239::AID-CNM51>3.0.CO;2-2](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199704)13:4<239::AID-CNM51>3.0.CO;2-2)>.
- 93 SETTARI, A.; MOURITS, F. M. A coupled reservoir and geomechanical simulation system. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 8, p. 219–226, 1998. ISSN SPE-50939-PA.
- 94 SETTARI, A.; WALTERS, D. A. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 8, 2001. ISSN SPE-74142-PA.
- 95 M., M.; P., L. Partitioned solution procedure for simultaneous integration of coupled-field problems. *Oil Gas Science and Technology*, v. 57, n. 4, p. 355–367, 2002.
- 96 S.E., M. et al. Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 28, p. 37–56, 2003.
- 97 THOMAS, L.; CHIN, L.; PIERSON, R. Coupled geomechanics and reservoir simulation. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 9, p. 362–369, 2004. ISSN 978-1-55563-153-6.
- 98 TRAN, D.; SETTARI, A.; NGHIEM, L. New iterative coupling between a reservoir simulator and a geomechanics module. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 9, p. 362–369, 2004. ISSN 1086-055X.
- 99 TRAN, D.; NGHIEM, L.; BUCHANAN, L. Improved iterative coupling of geomechanics with reservoir simulation. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 9, p. 362–369, 2005. ISSN 978-1-61399-010-0.
- 100 DEAN, R. H.; GAI, X.; STONE, C. M.; MINKOFF, S. E. A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 11, n. 01, p. 132–140, 2006.
- 101 JHA, B.; JUANES, R. A locally conservative finite element framework for the simulation of coupled flow and reservoir geomechanics. *Acta Geotechnica*, Springer-Verlag, v. 2, n. 3, p. 139–153, 2007. ISSN 1861-1125. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11440-007-0033-0>>.
- 102 KIM, J.; TCHELEPI, H.; JUANES, R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Fixed-stress and fixed-strain splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 13–16, p. 1591 – 1606, 2011. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510003786>>.

- 103 KIM, J.; TCHELEPI, H.; JUANES, R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 23–24, p. 2094 – 2116, 2011. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511000466>>.
- 104 MURAD, M. A.; BORGES, M.; OBREGÓN, J. A.; CORREA, M. A new locally conservative numerical method for two-phase flow in heterogeneous poroelastic media. *Computers and Geotechnics*, v. 48, n. 0, p. 192 – 207, 2013. ISSN 0266-352X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X12001437>>.
- 105 WAN, J. *Stabilized finite element methods for coupled geomechanics and multiphase flow*. Tese (Doutorado) — Stanford University, nov. 2002.
- 106 JEANNIN, L.; MAINGUY, M.; MASSON, R.; VIDAL-GILBERT, S. Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, John Wiley Sons, Ltd., v. 31, n. 10, p. 1163–1181, 2007. ISSN 1096-9853. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nag.576>>.
- 107 PHILLIPS, P.; WHEELER, M. A coupling of mixed and continuous galerkin finite element methods for poroelasticity i: the continuous in time case. *Computational Geosciences*, Kluwer Academic Publishers, v. 11, n. 2, p. 131–144, 2007. ISSN 1420-0597. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10596-007-9045-y>>.
- 108 PHILLIPS, P.; WHEELER, M. A coupling of mixed and continuous galerkin finite element methods for poroelasticity ii: the discrete-in-time case. *Computational Geosciences*, Kluwer Academic Publishers, v. 11, n. 2, p. 145–158, 2007. ISSN 1420-0597. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10596-007-9044-z>>.
- 109 PARK, K. C. Stabilization of partitioned solution procedure for pore fluid-soil interaction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley Sons, Ltd, v. 19, n. 11, p. 1669–1673, 1983. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620191106>>.
- 110 FARHAT, C.; PARK, K.; DUBOIS-PELERIN, Y. An unconditionally stable staggered algorithm for transient finite element analysis of coupled thermoelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 85, n. 3, p. 349 – 365, 1991. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578259190102C>>.
- 111 ARMERO, F.; SIMO, J. C. A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley Sons, Ltd, v. 35, n. 4, p. 737–766, 1992. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620350408>>.
- 112 MURAD, M. A.; LOULA, A. F. D. On stability and convergence of finite element approximations of biot’s consolidation problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley Sons, Ltd, v. 37, n. 4, p. 645–667, 1994. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620370407>>.
- 113 HUANG, M.; ZIENKIEWICZ, O. C. New unconditionally stable staggered solution procedures for coupled soil-pore fluid dynamic problems. *International Journal for*

Numerical Methods in Engineering, John Wiley Sons, Ltd, v. 43, n. 6, p. 1029–1052, 1998. ISSN 1097-0207. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19981130\)43:6<1029::AID-NME459>3.0.CO;2-H](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19981130)43:6<1029::AID-NME459>3.0.CO;2-H)>.

114 ARMERO, F. Formulation and finite element implementation of a multiplicative model of coupled poro-plasticity at finite strains under fully saturated conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 171, n. 3–4, p. 205 – 241, 1999. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782598002114>>.

115 SAMIER, P.; GENNARO, S. de. Practical iterative coupling of geomechanics with reservoir simulation. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2007.

116 KIM, I. *Sequential methods for coupled geomechanics and multiphase flow*. 274 p. Tese (Doutorado), 2010.

117 GOMES, I. *Implementação em elementos finitos das equações de pressão e saturação para simulação de fluxo bifásico em reservatórios de petróleo deformáveis*. 216 p. Tese (Doutorado), 2009.

118 S., K. et al. Mrst-ad - an open-source framework for rapid prototyping and evaluation of reservoir simulation problems. In: *Reservoir simulation Symposium, Houston, Texas, USA*. [S.l.: s.n.], 2015.

119 BUCKLEY, S. E.; LEVERRET, M. C. Mechanism of fluid displacements in sands. *Transactions of the AIME*, v. 146, p. 107–117, 1942.

120 GEIGER, S. et al. Combining finite element and finite volume methods for efficient multiphase flow simulations in highly heterogeneous and structurally complex geologic media. *Geofluids*, v. 4, p. 284–299, 2004.

121 DATTA-GUPTA, A.; KING, M. *Streamline Simulation: Theory and Practice*. Society of Petroleum Engineers, 2007. ISBN 978-1-55563-111-6. Disponível em: <<http://store.spe.org/Streamline-Simulation-Theory-and-Practice-P76.aspx>>.

122 DURLOFSKY, L. A triangle based mixed finite-element finite-volume technique for modeling two phase flow through porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 105, p. 252–266, 1993.

123 JHA, B. *A mixed finite element framework for modeling coupled fluid flow and reservoir geomechanics*. Dissertação (Mestrado) — Stanford University, 2005.

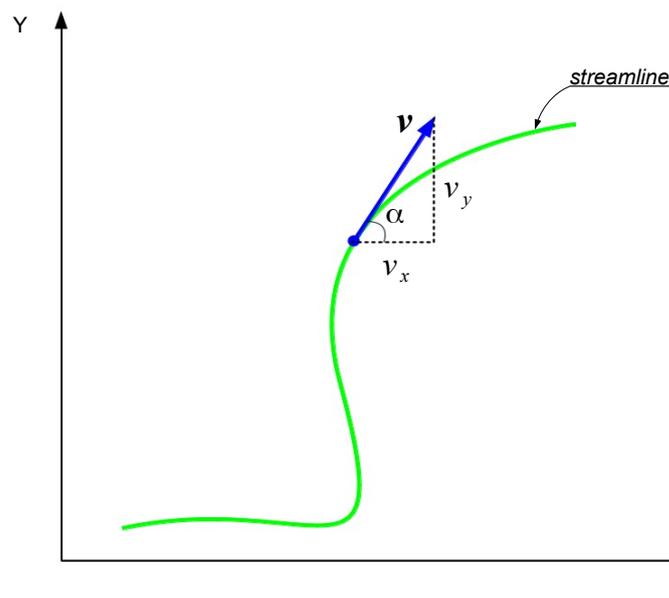
Apêndices

APÊNDICE A – LINHAS E TUBOS DE FLUXO

A.1 Definição

A *streamline* é uma linha/curva que sempre e em qualquer lugar é tangente ao vetor velocidade, conforme ilustrado na Figura A.1. Deste modo, podemos escrever a *streamline*, na forma parametrizada como:

Figura A.1 – *Streamline* e o campo de velocidade no espaço bidimensional.



Fonte: Adaptado de Bear^[80]

$$x = x(s, t); \quad y = y(s, t); \quad (\text{A.1})$$

Logo a inclinação do vetor velocidade em qualquer posição da *streamline*, em um dado instante de tempo¹ é dado por:

$$\frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{v_y}{v_x} \quad (\text{A.2})$$

¹ para fluxo estacionário *streamlines* e *pathlines* coincidem. *pathline* é o lugar geométrico de uma partícula no espaço com o passar do tempo.

que podemos reescrever da seguinte forma:

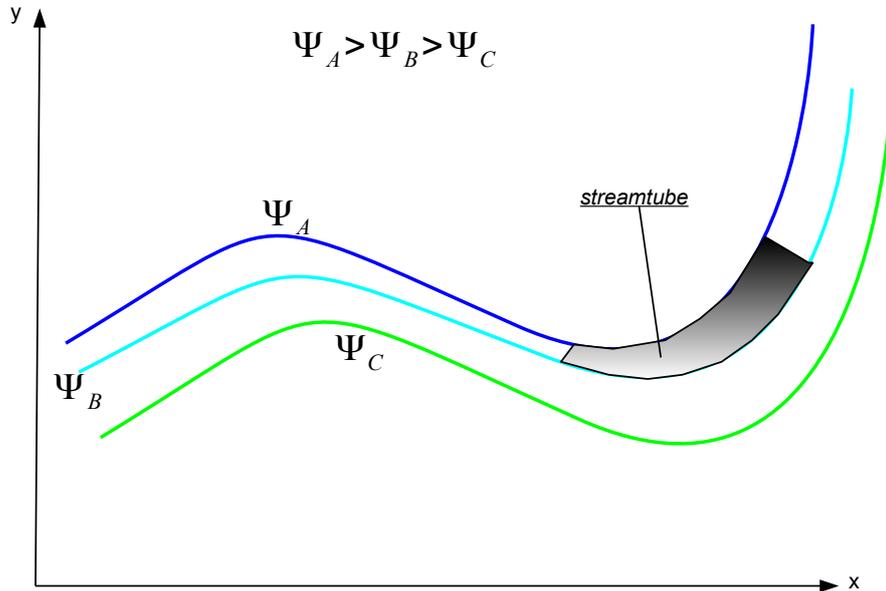
$$v_y \frac{dx}{ds} - v_x \frac{dy}{ds} = 0 \quad (\text{A.3})$$

sendo v_x e v_y as componentes da velocidade de Darcy² na direção x e y, respectivamente. A solução exata de A.3 é a família de funções $\Psi = \Psi(x, y) = cte$ que descreve a geometria da *streamline*. A condição para que a a função Ψ seja exata é $dv_x/dx + dv_y/dy = 0$, que nada mais é que a equação da continuidade $div \mathbf{v} = 0$. Desde que a função Ψ^3 é uma solução exata e constante ao longo da *streamline*, essa função é chamada de *streamfunction*.

Daí, para cada valor constante de Ψ temos uma *streamline*, conforme ilustrado na Figura A.2, a diferença entre duas *streamfunctions* é igual a a vazão volumétrica de duas *streamlines*. Isto define um *streamtube* e sua vazão em 2D:

$$q_{AB} = \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_A^B d\Psi = \Psi_A - \Psi_B \quad (\text{A.4})$$

Figura A.2 – *Streamtube* no espaço bidimensional.



Fonte: o autor

² negligenciando efeitos capilares e gravitacionais

³ Em 3D a *streamline* é definida pelas *bistreamfunction* Ψ e χ onde $\vec{v} = \vec{\nabla}\Psi \times \vec{\nabla}\chi$

APÊNDICE B – TRANSFORMAÇÃO ISOPARAMÉTRICA BILINEAR INVERSA

Aqui descreveremos a transformação isoparamétrica bilinear inversa, $\pi(x, y)$, ou seja, nós queremos encontrar um ponto no espaço normalizado, dado um ponto no espaço real.

Definimos o quadrilátero convexo, \mathcal{Q} , no espaço real formado pelos pontos p_1, p_2, p_3 e p_4 (Figura 3.8), e dado um ponto arbitrário $p = (x, y)$ pertencente a \mathcal{Q} ¹. Podemos reescrever as eqs. 3.91 e 3.92 como

$$a_x \xi \eta = b_x \xi + c_x \eta + d_x, \quad (\text{B.1a})$$

$$a_y \xi \eta = b_y \xi + c_y \eta + d_y, \quad (\text{B.1b})$$

sendo

$$a_x = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \quad (\text{B.2a})$$

$$b_x = x_1 - x_2 \quad (\text{B.2b})$$

$$c_x = x_1 - x_4 \quad (\text{B.2c})$$

$$d_x = x - x_1 \quad (\text{B.2d})$$

$$a_y = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \quad (\text{B.2e})$$

$$b_y = y_1 - y_2 \quad (\text{B.2f})$$

$$c_y = y_1 - y_4 \quad (\text{B.2g})$$

$$d_y = y - y_1 \quad (\text{B.2h})$$

Para minimizar a notação durante o desenvolvimento, definimos também

$$r = c_x a_y - a_y a_x \quad (\text{B.3a})$$

$$s = b_x a_y - b_y a_x \quad (\text{B.3b})$$

$$t = d_x a_y - d_y a_x \quad (\text{B.3c})$$

$$u_x = x_3 - x_4 \quad (\text{B.3d})$$

$$u_y = y_3 - y_4 \quad (\text{B.3e})$$

$$v = b_x y_y - b_y e_x \quad (\text{B.3f})$$

¹ O termo "pertencente" refere-se a pontos contidos no interior de \mathcal{Q} ou em seu contorno $\partial\mathcal{Q}$

B.1 Caso 1

Assumindo:

$$a_x \neq 0, \quad (\text{B.4})$$

assim podemos resolver a eq. B.1a fazendo,

$$\xi\eta = \frac{b_x\xi + c_x\eta + d_x}{a_x}, \quad (\text{B.5})$$

inserindo na eq. B.1b

$$s\xi = -r\eta - t, \quad (\text{B.6})$$

considerando

$$s \neq 0 \quad (\text{B.7})$$

resolvemos a eq. B.6 para ξ ,

$$\xi = \frac{-r\eta - t}{s}, \quad (\text{B.8})$$

inserindo na eq. B.1a e agrupando os termos temos,

$$-a_x r \eta^2 + (b_x r - a_x t - c_x s) \eta - b_x t - d_x s = 0, \quad (\text{B.9})$$

se $r \neq 0$, a equação é da forma,

$$\alpha\eta^2 + \beta\eta + \gamma = 0, \quad (\text{B.10})$$

sendo $\alpha \neq 0$, a solução é²

$$\eta = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad (\text{B.11})$$

Então nós escolhemos a onde $0 \leq \eta \leq 1$, e ξ é encontrado pela eq. B.8

B.2 Caso 2

Considerando (B.4) e (B.7), agora considerando $r = 0$ em (B.8), temos

$$\xi = \frac{-t}{s}, \quad (\text{B.12})$$

e da eq. B.9

$$\eta = \frac{d_x s - b_x t}{a_x t + c_x s}, \quad (\text{B.13})$$

² Nós não consideraremos o caso de $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} < 0$, pelo fato de considerar apenas quadriláteros convexos

B.3 Caso 3

Novamente considerando (B.4) e assumindo $s = 0$ e $r \neq 0$ temos da eq. B.6,

$$\eta = \frac{-t}{r}, \quad (\text{B.14})$$

e então encontramos ξ através,

$$\xi = \frac{-d_x r + c_x t}{b_x r + a_x t}, \quad (\text{B.15})$$

B.4 Caso 4

Assumindo $a_x = 0$ na eq. B.1a, podemos escrever a equação como,

$$c_x \eta = -b_x \xi - d_x, \quad (\text{B.16})$$

se $c_x \neq 0$ logo η é obtido por,

$$\eta = \frac{-b_x \xi - d_x}{c_x}, \quad (\text{B.17})$$

substituindo em (B.1b)

$$-a_y b_x \xi^2 + (b_x c_y - b y c_x - a_y d_x) \xi - c_y d_x - c_x d_y = 0, \quad (\text{B.18})$$

Agora se $a_y b_x = 0$, temos

$$\xi = \frac{-c_y d_x - c_x d_y}{b_x c_y - b y c_x - a_y d_x}, \quad (\text{B.19})$$

e η obtemos através de (B.17). Assumindo $a_y b_x \neq 0$ logo a eq. B.18 terá a forma da eq. B.10, onde $0 \leq \xi \leq 1$ e η encontrado através de (B.17)

B.5 Caso 5

Partinda da eq. B.16, assumindo $c_x = 0$, temos

$$\xi = \frac{-d_x}{b_x}, \quad (\text{B.20})$$

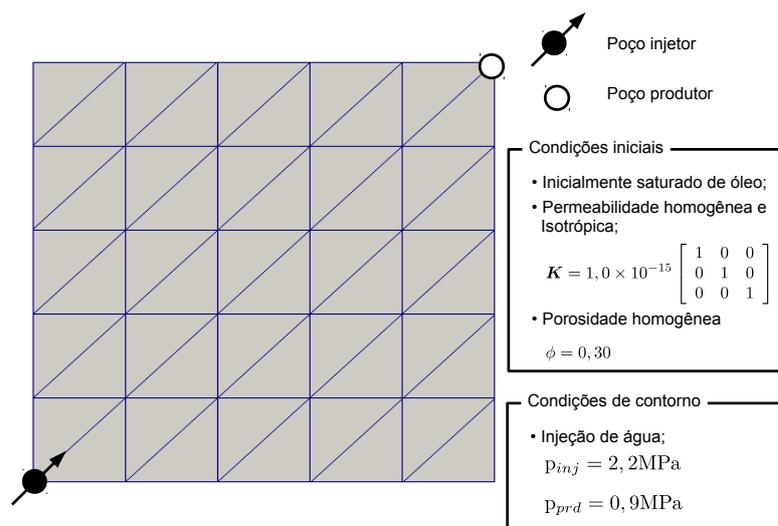
substituindo em (B.1b), temos que η é dado por:

$$\eta = \frac{b_y d_x - b_x d_y}{b y c_x + a_y d_x}, \quad (\text{B.21})$$

APÊNDICE C – PÓS-PROCESSAMENTO DO CAMPO DE VELOCIDADE RESULTANTE

Aqui descreveremos o pós-processamento do campo de velocidade resultante e ilustraremos algumas consequências obtidas deste procedimento. Considerando o $\frac{1}{4}$ de problema de fluxo bifásico sobre um padrão de cinco poços alocados (*five spot*), ilustrado na Figura C.1.

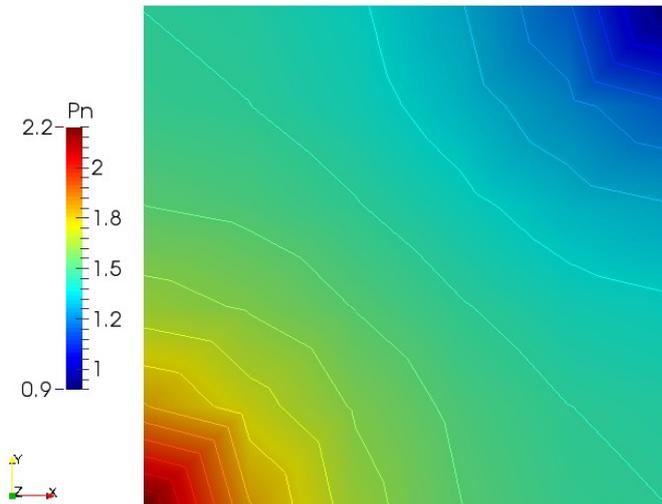
Figura C.1 – Condições iniciais e de contorno do caso de $\frac{1}{4}$ do problema padrão de cinco poços alocados (*five spot*).



Fonte: o autor

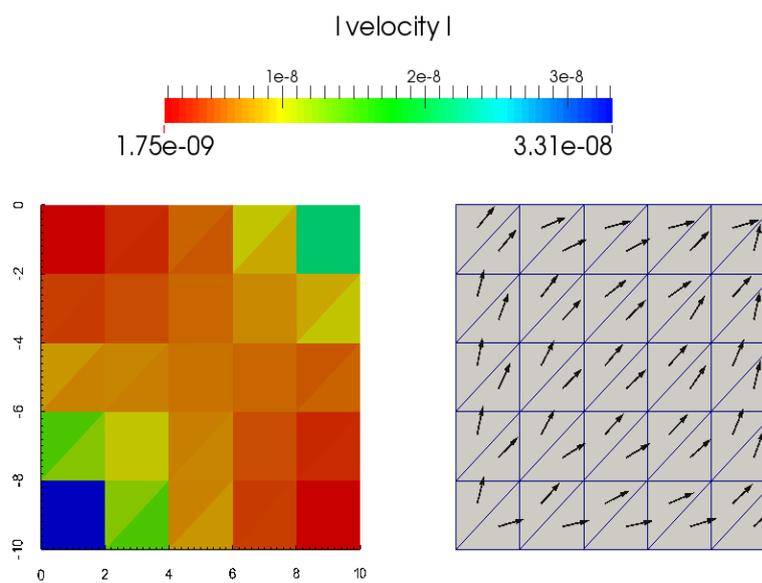
Após solução do problema de *five spot*, através da resolução da equação da pressão, eq. 3.60, considerando o meio poroso rígido, $\vec{v}_s = 0$, obtemos os seguintes campos de pressão e de velocidade,

Figura C.2 – Campo de pressão obtido.



Fonte: o autor

Figura C.3 – Campo de velocidade obtido.



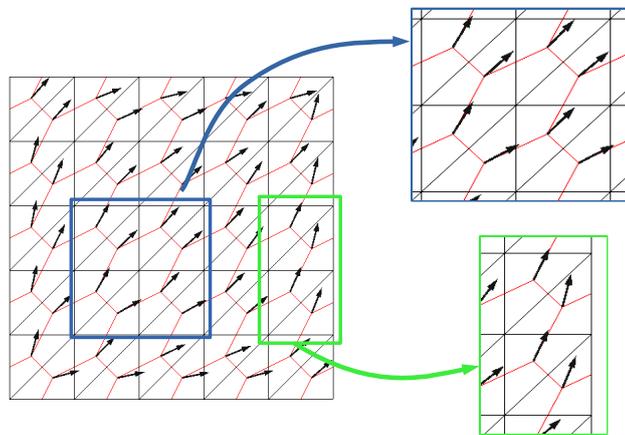
Fonte: o autor

Utilizando o procedimento de pós-processamento do campo de velocidade, a partir do sistema linear 4.45 temos:

$$\begin{cases} f_{i,3} + f_{i,4} = -(f_{i,1} + f_{i,2}) & i = 1, \dots, n_{e,p} \\ f_{i,3} + f_{j,4} = 0 & i = 1, \dots, n_{e,p} - 1, n_{e,p} \quad j = 2, \dots, n_{e,p}, 1 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Para demonstrar, que o sistema acima apresenta deficiência no posto (posto do sistema menor que o número de incógnitas), vamos construir o sistema para um nó (volume de controle) localizado no domínio e outro nó no contorno, conforme ilustrado na Figura C.4.

Figura C.4 – Malha de elementos finitos com volumes de controle.

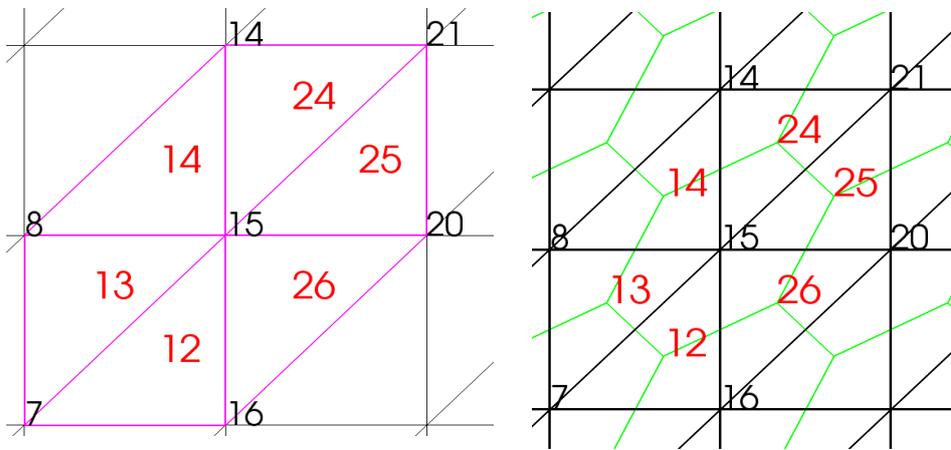


Fonte: o autor

C.1 Nó no interior do domínio

Primeiro, analisando o nó no interior do domínio, temos 6 nós e 6 sub-volumes de controle em torno do nó 15 (Figura C.5), obtendo desta forma os seguintes dados listados nas Tabelas C.1 e C.1.

Figura C.5 – Lista de nós e elementos.



Fonte: o autor

Tabela C.1 – Vetores velocidade.

Elementos	velocidade total \vec{v}	
	componente-x	componente-y
12	$8,5391 \times 10^{-9}$	$4,9462 \times 10^{-9}$
13	$4,9462 \times 10^{-9}$	$8,5391 \times 10^{-9}$
14	$4,9462 \times 10^{-9}$	$4,7113 \times 10^{-9}$
24	$4,2194 \times 10^{-9}$	$4,7113 \times 10^{-9}$
25	$4,7113 \times 10^{-9}$	$4,2194 \times 10^{-9}$
26	$4,7113 \times 10^{-9}$	$4,9462 \times 10^{-9}$

Fonte: o autor

Com base nos dados tabelados, é possível processar alguns parâmetros geométricos, como vetores normais e comprimento de segmentos para construir o sistema linear, considerando que a malha de volumes de controle são formados pela conexão dos baricentros dos elementos finitos e dos pontos médios das faces, podemos confeccionar os seguintes dados geométricos:

Tabela C.2 – Coordenada dos nós necessários.

nó	coordenadas	
	componente-x	componente-y
7	2	-8
8	2	-6
14	4	-4
15	4	-6
16	4	-8
20	6	-6
21	6	-4

Fonte: o autor

Tabela C.3 – Dados geométricos.

$\vec{n}_{i,j}$	componente-x	componente-y	arestas comprimento	
$\vec{n}_{13,1}$	-0,8944	0,4472	$\varepsilon_{13,1}$	0,7453
$\vec{n}_{13,2}$	-0,7071	-0,7071	$\varepsilon_{13,2}$	0,4714
$\vec{n}_{12,1}$	-0,7071	-0,7071	$\varepsilon_{12,1}$	0,4714
$\vec{n}_{12,2}$	0,4472	-0,8944	$\varepsilon_{12,2}$	0,7453
$\vec{n}_{26,1}$	0,4472	-0,8944	$\varepsilon_{26,1}$	0,7453
$\vec{n}_{26,2}$	0,8944	-0,4472	$\varepsilon_{26,2}$	0,7453
$\vec{n}_{25,1}$	0,8944	-0,4472	$\varepsilon_{25,1}$	0,7453
$\vec{n}_{25,2}$	0,7071	0,7071	$\varepsilon_{25,2}$	0,4714
$\vec{n}_{24,1}$	0,7071	0,7071	$\varepsilon_{24,1}$	0,4714
$\vec{n}_{24,2}$	-0,4472	0,8944	$\varepsilon_{24,2}$	0,7453
$\vec{n}_{14,1}$	-0,4472	0,8944	$\varepsilon_{14,1}$	0,7453
$\vec{n}_{14,2}$	-0,8944	0,4472	$\varepsilon_{14,2}$	0,7453
$\vec{n}_{13,3}$	0,7071	-0,7071	$\varepsilon_{13,3}$	1,4142
$\vec{n}_{12,3}$	1,0000	0,0000	$\varepsilon_{12,3}$	1,0000
$\vec{n}_{26,3}$	0,0000	1,0000	$\varepsilon_{26,3}$	1,0000
$\vec{n}_{25,3}$	-0,7071	0,7071	$\varepsilon_{25,3}$	1,4142
$\vec{n}_{24,3}$	-1,0000	0,0000	$\varepsilon_{24,3}$	1,0000
$\vec{n}_{14,3}$	0,0000	-1,0000	$\varepsilon_{14,3}$	1,0000
\vec{t}_1	0,0000	-1,0000	$\ \vec{t}_1\ $	1,0000
\vec{t}_2	1,0000	0,0000	$\ \vec{t}_2\ $	1,0000
\vec{t}_3	1,0000	1,0000	$\ \vec{t}_3\ $	1,4142
\vec{t}_4	0,0000	1,0000	$\ \vec{t}_4\ $	1,0000
\vec{t}_5	-1,0000	0,0000	$\ \vec{t}_5\ $	1,0000
\vec{t}_6	-1,0000	-1,0000	$\ \vec{t}_6\ $	1,4142

Fonte: o autor

Com os seguintes dados podemos montar o sistema linear 4.45, para minimizar a notação iremos renumerar os elementos em torno do nó 15 para: $13 \rightarrow 1$, $12 \rightarrow 2$, $26 \rightarrow 3$, $25 \rightarrow 4$, $24 \rightarrow 5$ e $14 \rightarrow 6$, obtendo assim:

Fazendo o uso dos dados fornecidos, construímos A e b ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$b^T \times 10^9 = \left[8,5391 \quad 4,9462 \quad -0,4918 \quad -4,2194 \quad -4,7112 \quad -3,5929 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (\text{C.5})$$

Ao tentar resolver o sistema linear:

$$Av = b \quad (\text{C.6})$$

observaremos que o posto da matriz A é igual a 11. Como comentado anteriormente, a deficiência do posto da matriz A ocorre devido a dependência linear da restrição de consistência imposta no perímetro do volume de controle. Para contornar essa deficiência substitui-se uma das equações de consistência (uma das 6 primeiras linhas de A) pela restrição de irrotacionalidade,

$$\sum_{i=1}^{n_{e,p}} \mathbf{K}(\phi)^{-1} \vec{v}_i^* \cdot \vec{t}_i \|t_1\| = 0 \quad i = 1, \dots, n_{e,p} \quad (\text{C.7})$$

agora o sistema linear será dado pelo sistema 4.47, chegando ao seguinte sistema linear:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,7 & 0,7 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0,7 & -0,7 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

e

$$b^T \times 10^9 = \left[8,5391 \quad 4,9462 \quad -0,4918 \quad -4,2194 \quad -4,7112 \quad 0 \right] \quad (\text{C.9})$$

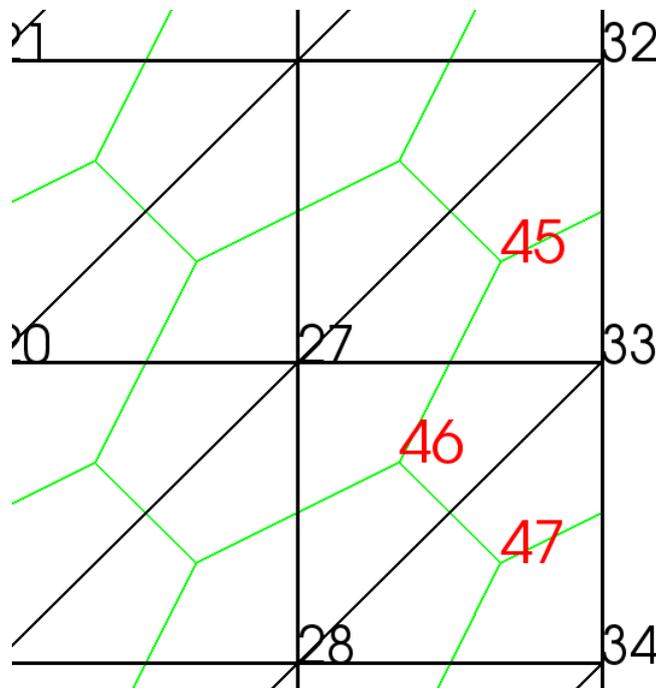
Agora poderemos resolver o sistema C.6, obtendo as velocidades pós-processadas em torno no nó 15

$$v^T \times 10^9 = \begin{bmatrix} 8,5391 \\ 7,6354 \\ 5,8499 \\ 4,9462 \\ 5,8499 \\ 5,3581 \\ 4,2194 \\ 5,3581 \\ 3,5726 \\ 4,7112 \\ 3,5726 \\ 7,6354 \end{bmatrix}$$

C.2 Nó no contorno

Analisando agora o nó 33 no contorno do domínio, temos 4 nós e 3 sub-volumes de controle em torno do nó 33 (Figura C.6), renumerando os elementos para $45 \rightarrow 1$, $46 \rightarrow 2$ e $47 \rightarrow 3$, temos desta forma os seguintes dados listados nas Tabelas C.3 e C.2.

Figura C.6 – Lista de nós e elementos.



Fonte: o autor

Procedendo de maneira análogo ao nó no interior do domínio, a única diferença está na restrição de continuidade do elemento 1 no contorno do domínio, onde impomos

Tabela C.4 – Vetores velocidade.

Elementos	velocidade total \vec{v}	
	componente-x	componente-y
1	$1,4022 \times 10^{-9}$	$3,1480 \times 10^{-9}$
2	$1,3019 \times 10^{-9}$	$3,2482 \times 10^{-9}$
3	$1,3019 \times 10^{-9}$	$1,1657 \times 10^{-9}$

Fonte: o autor

Tabela C.5 – Coordenada dos nós necessários.

nó	coordenadas	
	componente-x	componente-y
27	8,0000	-6,0000
28	8,0000	-8,0000
32	10,0000	-4,0000
33	10,0000	-6,0000
34	10,0000	-8,0000

Fonte: o autor

fluxo zero (4^a linha de A_{cont}), deste modo chegamos ao sistema linear

$$A_{cont} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,x}v_{1x}^* & \alpha_{1,y}v_{1y}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{2,x}v_{2x}^* & \alpha_{2,y}v_{2y}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,x}v_{3x}^* & \alpha_{3,y}v_{3y}^* \\ \beta_{1,x}v_{1x}^* & \beta_{1,y}v_{1y}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{1,x+v_{1x}}^* & \beta_{1,y+v_{1y}}^* & \beta_{2,x}v_{2x}^* & \beta_{2,y}v_{2y}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{2,x+v_{2x}}^* & \beta_{2,y+v_{2y}}^* & \beta_{3,x}v_{3x}^* & \beta_{3,y}v_{3y}^* \end{bmatrix} \quad (C.10)$$

$$b_{cont}^T = \begin{bmatrix} -(f_{1,1} + f_{1,2}) & -(f_{2,1} + f_{2,2}) & -(f_{3,1} + f_{3,2}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.11)$$

Fazendo o uso dos dados fornecidos, construímos A e b ,

$$A_{cont} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (C.12)$$

$$b_{cont}^T \times 10^9 = \begin{bmatrix} -4,1705 & 1,4022 & 3,2483 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.13)$$

Resolvendo o sistema, obtemos as velocidades pós-processadas

$$v_{cont}^T \times 10^9 = \begin{bmatrix} 0,0000 & 4,1705 & 1,4021 & 4,1705 & 4,7989 & 3,2482 \end{bmatrix} \quad (C.14)$$

C.3 Implicações do pós-processamento

Vamos observar o elemento 25 no interior do domínio, e coletar as velocidades pós-processadas computadas em torno dos nós 15, 20 e 21, temos as seguintes velocidades

Tabela C.6 – Vetores das velocidades pós-processadas dos nós do elemento 25.

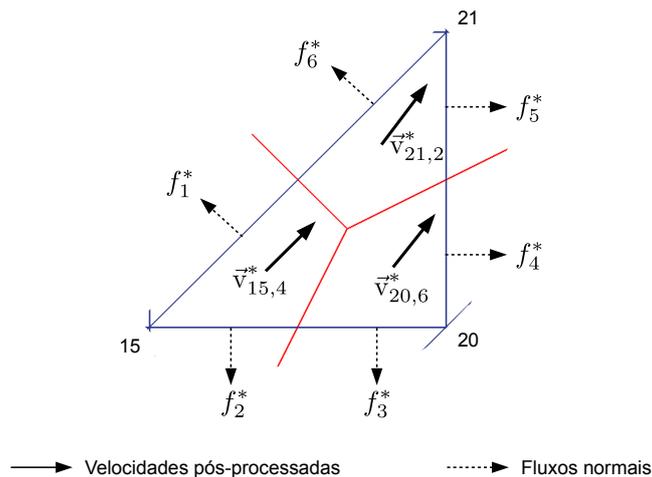
Nó	velocidade \vec{v}	
	componente-x	componente-y
15	4.2194×10^{-9}	5.3580×10^{-9}
20	2.7715×10^{-9}	7.0742×10^{-9}
21	5.0643×10^{-9}	4.2194×10^{-9}

Fonte: o autor

Avaliando os fluxos normais às arestas do elemento 25, conforme ilustrado na Figura C.7, e as restrições de consistência impostas sobre os sub-volumes de controle, podemos observar que

$$\sum_{i=1}^6 f_i^* \approx 0 \quad (\text{C.15})$$

Figura C.7 – Fluxos normais as faces do elemento.



Fonte: o autor

Da expressão C.15, obtemos 8.4497×10^{-10} . Isso mostra que uma das consequências do pós-processamento do campo de velocidade é a conservação da massa sobre o elemento através dos fluxos normais derivados das velocidades pós-processadas.