UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

CÉSAR THIAGO JOSÉ DA SILVA

A ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA NA PROTOTIPAÇÃO DE UM SOFTWARE PARA ABORDAR O CONCEITO DE TAXA DE VARIAÇÃO

RECIFE
2016

CÉSAR THIAGO JOSÉ DA SILVA

A ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA NA PROTOTIPAÇÃO DE UM SOFTWARE PARA ABORDAR O CONCEITO DE TAXA DE VARIAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª. Drª. Verônica Gitirana

RECIFE

2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S586e Silva, César Thiago José da.
A engenharia didático-informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação / César Thiago José da Silva. – 2016.
163 f. ; 30 cm.
Orientadora: Verônica Gitirana Gomes Ferreira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.
Inclui Referências.

1. Tecnologia educacional. 2. Engenharia de software. 3. UFPE - Pós-graduação. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. II. Título.

371.334 CDD (22. ed.) UFPE (CE2016-89)

CÉSAR THIAGO JOSÉ DA SILVA

A Engenharia Didático-Informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação

Aprovado em: 29/06/2016

Comissão Examinadora

___

Profª. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira - Orientadora/Presidente
Universidade Federal de Pernambuco

___

Prof. Dr. Franck René Gilbert Bellemain - Examinador interno
Universidade Federal de Pernambuco

___

Prof. Dr. Luc Trouche - Examinador externo
Ecole Normale Supérieure de Lyon

___

Profª. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin - Examinadora externa
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Recife, 29 de junho de 2016.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter concluído com êxito este percurso.

Aos meus pais, Carlos e Joseli, pela dedicação e apoio em tudo.

À minha esposa Irla, por acreditar em mim e por ser minha motivação.

A todos os meus familiares, que sempre me apoiaram.

À minha orientadora, Prof.ª Dr. Verônica Gitirana, pela competência com que me orientou nesta pesquisa, pela confiança, apoio e compreensão.

Ao Professor Dr. Franck Bellemain e ao meu colega Ricardo Tibúrcio, pelo grande aprendizado da nossa parceria.

Aos demais professores da banca examinadora, Prof. Dr. Luc Trouche e Profª Dr. Rosana Miskulin, pelas grandes contribuições neste trabalho.

Ao LEMATEC, grupo de pesquisa onde aprendi e recebi o apoio de todos os meus colegas.

Aos estudantes participantes da pesquisa, pela disponibilidade em contribuir com o trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo elicitar requisitos, prototipar e validar um software para abordar a taxa de variação de funções em uma abordagem variacional. A prototipação do software adotou um Modelo de Processo de Software desenvolvido com base na Engenharia Didático-informática (EDI), que alia aspectos da Engenharia Didática à Engenharia de Software e, que foi desenvolvida por Ricardo Tibúrcio em sua pesquisa de mestrado, paralela a esta. Tal processo é constituído de cinco fases: (i) Análises Preliminares, nas quais o conceito matemático foi situado em relação aos aspectos cognitivos, epistemológicos, didáticos e informáticos, (ii) Análise de Requisitos, na qual os resultados das Análises Preliminares foram traduzidos em requisitos do sistema, (iii) Análise à priori e Prototipação, nas quais o protótipo foi desenvolvido considerando-se as situações de uso a serem abordadas, (iv) Experimentação, na qual o software foi testado com os estudantes e (v) Análise à Posteriori e Validação, nas quais foi analisado se o protótipo atendeu aos objetivos especificados na sua concepção. Além da EDI, articularam-se na fundamentação uma sistematização da utilização das tecnologias digitais na Educação Matemática e um quadro de referência para analisar a contribuição do protótipo na abordagem de taxa de variação - o Quadro de Ações Mentais no Raciocínio Covariacional, de Marilyn Carlson e colaboradores. A validação foi realizada por meio da experimentação com uma dupla de estudantes da Licenciatura em Matemática da UFPE, que realizaram duas atividades com o uso do software, que foi chamado de *Function Studium*, para que fossem analisados os benefícios e limitações do seu uso na abordagem da taxa de variação das funções afim e quadrática. Os resultados da validação apontaram que: (a) Os benefícios do uso do software para a abordagem da taxa de variação fundamentaram-se, principalmente, na conexão entre os aspectos do objeto matemático levantados nas Análises Preliminares e os recursos do software *Function Studium*, requisitados e implementados com base nas necessidades apontadas, (b) A conexão simultânea e dinâmica das ações sobre as notações no software, contribuíram para a análise do comportamento da taxa de variação em função da variável independente e para relacionar a taxa instantânea com aspectos do gráfico como pontos de inflexão e concavidade e (c) Dificuldades emergidas no experimento, revelaram a necessidade da experimentação de versões parciais do software na Prototipação, o que sugere a participação dos estudantes e uma melhor discussão sobre a operacionalização da Análise à Priori.

Palavras-chave: Taxa de variação, covariação, Engenharia Didático-informática, Engenharia de Software Educativo

ABSTRACT

This research aimed to elicit requirements, prototype and validate an educational software to explore the rate of change of functions in a variational approach. The prototyping process adopted a Model of Software development based on Didactic-Informatics engineering (EDI), which combines aspects of Didactic and Software Engineering, and was developed in parallel with this research in Ricardo Tibúrcio's dissertation. This Process comprises five steps: (i) Preliminary Analysis, in which the mathematical concept was analyzed in relation to cognitive, epistemological, didactic and computational aspects (ii) Requirements Analysis, in which the results of the Preliminary Analysis were translated into system requirements, (iii) *A priori* Analysis and Prototyping process, in which the prototype was developed considering the situations of use to be approached, (iv) Experimentation, in which the software was tried out with students and (v) A posteriori analysis and Validation, in which it was examined whether the prototype met the aims specified in its conception. In addition to EDI, a systematization of the aspects of digital technologies in Mathematics Education and a referential framework to analyze the contribution of the prototype in the approach of the rate of change were articulated into the foundation: The Framework of Mental Actions in Covariational Reasoning, from Marilyn Carlson and collaborators. The validation process was done within an experiment undertaken by a pair of students of Mathematics Teacher Training course from a Brazilian state university. They performed two activities using the software called Function Studium, so that the benefits and limitations of its use in the approach of the rate of change of linear and quadratic functions were analyzed. The validation process results showed that: (a) The benefits of software used to approach the rate of change were based mainly on the connection between the aspects of the mathematical object gathered in the Preliminary Analyzes and the Function Studium software tools required and implemented based on identified needs, (b) The simultaneous and dynamic links of the actions on the notations in the software contributed to the analysis of the characteristics of the rate of change as a function of the independent variable and to relate instantaneous rate to the aspects of the graph such as inflection points and concavity and (c) Difficulties emerged in the experiment revealed the need for trying out partial versions of the software in the prototyping phase, suggesting the participation of students and a better discussion on the operationalization of *A Priori* Analysis.

Keywords: Rate of change, covariation, Didactic-informatics Engineering, Educational Software Engineering

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de funções têm se consolidado como objeto central de investigações na Educação Matemática, como consequência tanto da sua importância e centralidade para a Matemática como da dificuldade dos estudantes em lidar com os conceitos que constituem esse campo.

Um dos conceitos essenciais na Escola Básica e na introdução ao Cálculo no Ensino Superior é o de taxa de variação, o qual é um elemento essencial para a caracterização dos diversos tipos de funções estudadas na Escola Básica, e no Cálculo, é a porta de entrada para a compreensão do conceito de derivada, a taxa de variação instantânea no ponto.

Com relação à abordagem desse conceito, a perspectiva covariacional caracteriza-se por torná-lo importante (CONFREY; SMITH, 1994), pois, a covariação propõe estabelecer uma relação entre as variáveis da função, no sentido de como uma varia em função da variação da outra. Apesar disso, tem prevalecido no ensino da taxa uma perspectiva que privilegia apenas a correspondência entre valores da função, em detrimento do aspecto variacional.

No contexto dos recursos tecnológicos utilizados na abordagem da taxa, o uso de softwares computacionais tem se mostrado uma experiência enriquecedora (CASTRO FILHO, 2001; VILLA-OCHOA, 2011). Essas experiências mostraram que o ambiente computacional pode auxiliar estudantes e professores a lidar com as dificuldades no ensino e aprendizagem dos conceitos funcionais, notadamente aspectos variacionais como taxa de variação, limites e derivada.

É preciso, no entanto, que tais ambientes atendam a um conjunto de necessidades relacionadas ao ensino e à aprendizagem do objeto matemático, que se apresentam em diferentes áreas como: aspectos cognitivos e das dificuldades dos estudantes com o conceito, especificidades do conceito em si, restrições relativas ao ensino do tema, além das perspectivas e possibilidades que a tecnologia permite. Essas exigências fazem muitas vezes com que os softwares desenvolvidos para o Ensino da Matemática limitem-se à dualidade entre corresponder às necessidades didáticas e às informáticas, conforme relata Tibúrcio (2016).

Nesse sentido, a presente pesquisa se integra colaborativamente à pesquisa de Mestrado de Tibúrcio (2016) em um projeto maior de desenvolvimento e testagem de Engenharia de Software Educativo, a Engenharia Didático-Informática (EDI), que busca aliar à Engenharia de Software os princípios e métodos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), para produzir um Modelo de Processo de Software que reúna os aspectos do ensino e da aprendizagem do conceito matemático às possibilidades dos recursos computacionais.

A colaboração entre as duas pesquisas foi viabilizada no âmbito do LEMATEC (Laboratório de Ensino de Matemática e Tecnologia), um grupo de pesquisa da UFPE que investiga a introdução das Tecnologias Computacionais na Educação Matemática, ao qual são vinculados os pesquisadores. Nesse contexto, as duas pesquisas se relacionam da seguinte forma: o Modelo de Processo de Software desenvolvido em Tibúrcio (2016) foi aplicado nesta pesquisa para a prototipação e validação de um software, que foi utilizado como caso para validar o Modelo naquela pesquisa.

Dessa forma, caracteriza-se como objetivo geral desta pesquisa, a prototipação e validação de um software para a abordagem da taxa de variação de funções, orientado pelo quadro teórico-metodológico da Engenharia Didático-Informática. O termo prototipação, referente à Engenharia de Software (SOMMERVILLE, 2003) foi tomado aqui no sentido do processo de estabelecimento dos requisitos e modelos prévios à versão final do software, já a validação corresponde a avaliação que busca responder se o software atendeu aos objetivos pré-definidos.

Como hipótese de pesquisa, buscou-se a construção de um software que pudesse contribuir para a aprendizagem do conceito de taxa de variação em uma perspectiva covariacional, ao integrar características que aliam as necessidades do ensino e da aprendizagem da taxa de variação às potencialidades do ambiente computacional para suportar as atividades com esse conceito.

Com tal objetivo geral tivemos como objetivos específicos:

- Analisar as dimensões epistemológica, cognitiva e didática em relação à taxa de variação sob uma perspectiva covariacional, integrando a estas a dimensão informática, de forma a estabelecer requisitos para o protótipo;
- Prototipar um software para o ensino de taxa de variação orientado pela EDI;
- Testar e analisar o uso do software no caso das funções afim e quadrática com estudantes de Cálculo da Licenciatura em Matemática;
- Validar o software dentro do contexto e campo de situações construídas, utilizando-se do modelo estabelecido na EDI.

Na seção 2 são apresentados os quadros teóricos-metodológicos norteadores da pesquisa, que além da EDI, são constituídos do Quadro de Raciocínio Covariacional de

Carlson et al (2002) e da Sistematização proposta por Kaput (1992) relativa às Tecnologias Computacionais aplicadas ao Ensino da Matemática.

Na seção 3 são descritas as Análises Preliminares, que levantaram os aspectos cognitivos, epistemológicos e didáticos relativos ao conceito, que se articularam com os aspectos informáticos para produzir, na seção 4, a Elicitação e Análise de Requisitos, que definiram os requisitos do protótipo.

Na seção 5 é descrito o processo de desenvolvimento do protótipo e na seção 6 são apresentados os Resultados da Validação, que incluem o desenvolvimento do experimento e o Estudo de Caso com o uso do software por estudantes da Licenciatura em Matemática. Por fim, a Conclusão na seção 7.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Nesta seção são descritas as bases teórico-metodológicas que norteiam a pesquisa: A Engenharia Didático-informática como base de um modelo de processo de software educativo, desenvolvido e utilizado na prototipação do software dessa investigação; uma discussão com base na literatura sobre a Tecnologia na Educação Matemática e um quadro de referência para a análise do raciocínio covariacional de acordo com Carlson et al (2002).

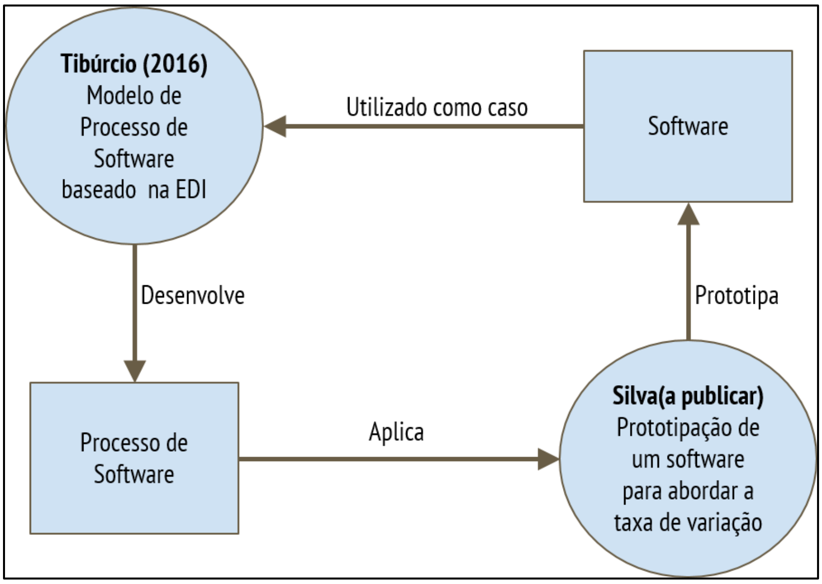
2.1 A Engenharia Didático-Informática

A Engenharia Didático-Informática (EDI) (BELLEMAIN et al, 2015) caracteriza-se como uma metodologia de desenvolvimento de software educativo, que busca aliar os aspectos do ensino e da aprendizagem aos aspectos tecnológicos computacionais, na concepção e desenvolvimento de softwares educacionais de Matemática.

A EDI é objeto de estudo e desenvolvimento no grupo de pesquisa LEMATEC da Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE, que investiga a introdução das tecnologias computacionais no Ensino da Matemática, abordando desde o seu processo de desenvolvimento e avaliação à sua integração no Ensino.

A presente pesquisa foi inserida na proposta do grupo e seguiu um processo dialético e inovador em sua metodologia, ao articular-se à outra pesquisa do LEMATEC (TIBÚRCIO, 2016) para que, ao mesmo tempo que utilizasse a Engenharia Didático-Informática como metodologia para a prototipação de um software, servisse de caso para a pesquisa de Tibúrcio (2016), que tinha por objeto de estudo e desenvolvimento o Modelo de Processo de Software baseado na EDI.

Figura 1: Articulação entre as pesquisas



Fonte: Ilustrado pelo autor

A ideia de um Processo de Software é utilizada aqui no sentido de um percurso de construção de um software, constituído de fases específicas, conforme define Sommerville (2004):

> Um processo de software é um conjunto de atividades e resultados associados que geram um produto de software. Essas atividades são, em sua maioria, executadas por engenheiros de software. Há quatro atividades de processos fundamentais comuns a todos os processos de software. Essas atividades são: 1. Especificação do software. A funcionalidade do software e as restrições em sua operação devem ser definidas. 2. Desenvolvimento do software. O software deve ser produzido de modo que atenda a suas especificações. 3. Validação do software. O software tem de ser validado para garantir que ele faz o que o cliente deseja. 4. Evolução do software. O software deve evoluir para atender às necessidades mutáveis do cliente (SOMMERVILLE, 2004 *apud* TIBÚRCIO, 2016, p. 36).

A Engenharia Didático-Informática (BELLEMAIN et al, 2015) busca fundamentar o conjunto de atividades e fases do desenvolvimento de Softwares Educativos para a Educação Matemática, reunindo as contribuições da Engenharia de Software às especificidades e necessidades que o ensino e a aprendizagem de cada conceito matemático requer. Para isso, Bellemain et al (2015) descrevem a EDI como uma aplicação dos métodos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) à Engenharia de Software, o que também justifica, segundo

Tibúrcio (2016) a utilização dos termos “Didático-Informática” pelos autores, sendo cada um deles uma referência à Engenharia associada.

Tibúrcio (2014), ao analisar alguns estudos sobre o desenvolvimento e a utilização de softwares na Educação Matemática, observou a dificuldade de que as necessidades específicas do ensino e da aprendizagem de cada conceito fossem atendidas por essas ferramentas. Segundo o autor, o desenvolvimento desses softwares se guia ora pelos aspectos tecnológicos em detrimento dos aspectos de ensino e aprendizagem, ora em uma fundamentação na educação, porém sem estabelecer uma articulação com as potencialidades tecnológicas, o que gerou a necessidade de aliar em uma Engenharia de Software Educativo, as potencialidades tecnológicas e os aspectos do ensino e da aprendizagem dos conceitos.

Dessa forma, Tibúrcio (2016) apoiou a construção de um Modelo de Processo de Software, dentro da EDI, baseado nas contribuições da Engenharia de Software, da Engenharia de Requisitos e do modelo teórico-metodológico da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). Vale salientar que, o sentido do termo “modelo” empregado em Tibúrcio (2016), não é o de exclusividade, porém o de um “percurso metodológico a ser seguido” com base na Engenharia Didático-Informática.

2.1.1 A Engenharia Didática

A Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) tem sido utilizada nas pesquisas em Educação Matemática para a construção de sequências de ensino, servindo como um modelo direcionador da investigação, de forma sistemática e bem definida, comparável ao trabalho de um engenheiro.

Tal Engenharia é realizada em fases, quando definidos o objeto matemático e os objetivos de investigação, são realizadas as análises preliminares, com o objetivo de situar o objeto de estudo no contexto de pesquisas já realizadas, delimitando aspectos cognitivos, epistemológicos e didáticos relacionados ao conceito ou ao campo investigado, levando em consideração o campo de delimitações onde será realizada a situação didática.

Posteriormente às análises preliminares, é feita a concepção e a análise *à priori*, nas quais as situações concebidas são descritas em termos dos seus objetivos e variáveis de comando, e analisadas preditivamente no sentido das possibilidades de ação e comportamento dos estudantes. Assim, aplica-se a sequência didática na fase de experimentação e, posteriormente, é feita a análise *a posteriori* que confrontada com a análise *a priori* resulta na validação da sequência.

A Engenharia Didática fornece um percurso metodológico direcionado à investigação, no contexto da Didática da Matemática, do ensino e da aprendizagem relacionada a conceitos e campos da Matemática. No entanto, Tibúrcio (2016) afirma que esse modelo teórico-metodológico torna-se de grande importância no desenvolvimento de softwares educativos, pois tal modelo considera aspectos como “a pluralidade de usuários, as finalidades, os conhecimentos envolvidos, entre outros fatores” (TIBÚRCIO, 2016, p.43), tais fatores distinguem os softwares educativos daqueles concebidos para outros fins e são levados em conta no seu processo de desenvolvimento, o que faz da ED um quadro de grande utilidade para ser articulado com a Engenharia de Software:

> A Engenharia Didática (ARTIGUE, 1990, 2011), que trata da construção de sequências de ensino-aprendizagem a partir da utilização de conceitos e resultados de pesquisa, é objeto de reflexão de inúmeros estudos em didática da matemática. Nossa posição epistemológica é considerar que a concepção e o desenvolvimento de softwares educativos exigem a mobilização de uma engenharia didática específica que deve integrar conceitos e métodos da informática. Esta engenharia também faz parte do domínio da engenharia de software, mas o desenvolvimento de um software educativo tem especificidades que o diferenciam de outros softwares (BELLEMAIN, 2014 apud TIBÚRCIO, 2016, p. 43)

Dessa forma, foi proposta em Tibúrcio (2016) a articulação da ED com a Engenharia de Software, para a determinação de um modelo que orientasse o desenvolvimento de softwares educativos, na intenção de satisfazer às necessidades do ensino e da aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos, bem como observando os princípios e fases da Engenharia de Software.

2.1.2 A articulação entre as Engenharias de Software e Didática

Na construção de um Modelo de Processo que atendesse aos objetivos especificados por Tibúrcio (2016), principalmente, na fundamentação tanto tecnológica quanto didática desse modelo, propôs-se a articulação entre a Engenharia de Software e a Engenharia Didática.

No contexto da Engenharia de Software, Tibúrcio (2016) aponta a Engenharia de Requisitos como uma ferramenta útil na identificação das necessidades do software, dada a pluralidade dos usuários no contexto educativo. Essa engenharia provê elementos para a fase de especificação (SOMMERVILLE, 2004) e é fundamental para o desenvolvimento de softwares educacionais, pois está ligada à conexão entre as necessidades pré-estabelecidas e o produto final, conforme Nuseibeh e Easterbrook (2000 apud TIBÚRCIO, 2016, p. 40):

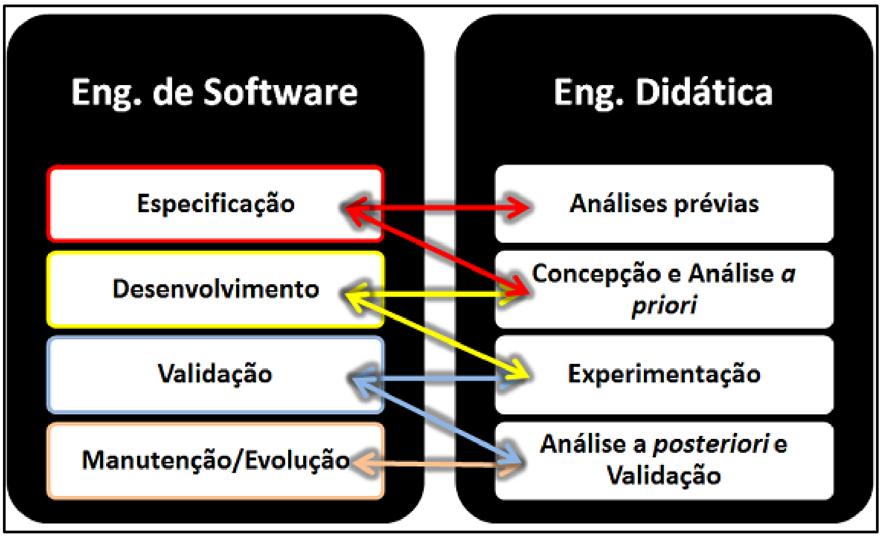
> A principal medida de sucesso de um sistema de software é o grau em que se encontra com o propósito para o qual foi concebido. Em termos gerais, a engenharia de requisitos para sistemas de softwares - ER é o processo de descobrir a finalidade, através da identificação das partes interessadas e suas necessidades, e documentá-las de uma forma passível de análise, comunicação e posterior implementação.

Segundo Sommerville (2004), as fases que constituem o processo de Engenharia de Requisitos são:

- Estudo de viabilidade: é feita uma análise que relaciona as necessidades dos usuários às possibilidades tecnológicas, no sentido de saber se estas são possíveis de responder àquelas necessidades.
- Levantamento e análise de requisitos: configura-se como uma fase de levantamento e análise multidimensional dos requisitos, tendo como fonte usuários, sistemas, tarefas propostas, etc.
- Especificação de requisitos: os dados coletados na fase anterior são sistematizados em um documento que estabelece os requisitos.
- Validação de requisitos: nessa fase os requisitos estabelecidos são testados a fim de serem reconhecidos como tal. Para isso, são estabelecidos os critérios de pertinência, integralidade e consistência. Nesta fase cabe a modificação dos requisitos.

Na articulação proposta por Tibúrcio (2016), as necessidades levantadas, analisadas e documentadas nas fases da Engenharia de Requisitos têm como fonte principal as análises preliminares realizadas nos moldes da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). As demais fases do processo de desenvolvimento do software (SOMMERVILLE, 2004) e, consequentemente, a Engenharia de Software foram articulados com a Engenharia Didática, por Tibúrcio (2016) na figura seguinte:

Figura 2: Comparativo entre as engenharias



Fonte: TIBÚRCIO, (2016, p. 46)

Segundo o autor apesar de os processos que constituem cada fase de ambas as engenharias não serem equivalentes, as relações entre eles possibilitaram articular os dois quadros.

Como visto anteriormente, as análises prévias articulam-se com a fase de especificação, na qual a Engenharia de Requisitos tem grande importância. O resultado dessa fase da Engenharia Didática fornece as características e necessidades a serem implementadas. As etapas de concepção e análise a priori, nas quais é construída a sequência didática e feita uma previsão de respostas em relação aos objetivos da sequência, articulam-se com a etapa de desenvolvimento, na qual as características elencadas na etapa de especificação são implementadas e testes de unidades isoladas são feitos no sentido de verificar seu funcionamento.

A Experimentação, etapa da Engenharia Didática em que a sequência é aplicada, é associada no contexto da Engenharia de Software com a fase de Validação, segundo Tibúrcio (2016, p. 47) “Validar o software significa verificar se o mesmo realiza o que se propõe a fazer. Fazem parte desta fase os testes, a criação de situações de utilização bem como a utilização do software nas situações de uso. ” O autor também associa a fase de Validação da ES com a fase de análise a posteriori e validação da ED. Com o teste do software é verificado se as funcionalidades, além do que foi definido na análise à priori, atendem aos objetivos do software.

Finalmente, o autor explica que a associação entre as fases da Análise a posteriori com as etapas de Manutenção/evolução do software se dá por meio dos elementos que a fase da ED fornece para o aperfeiçoamento do software.

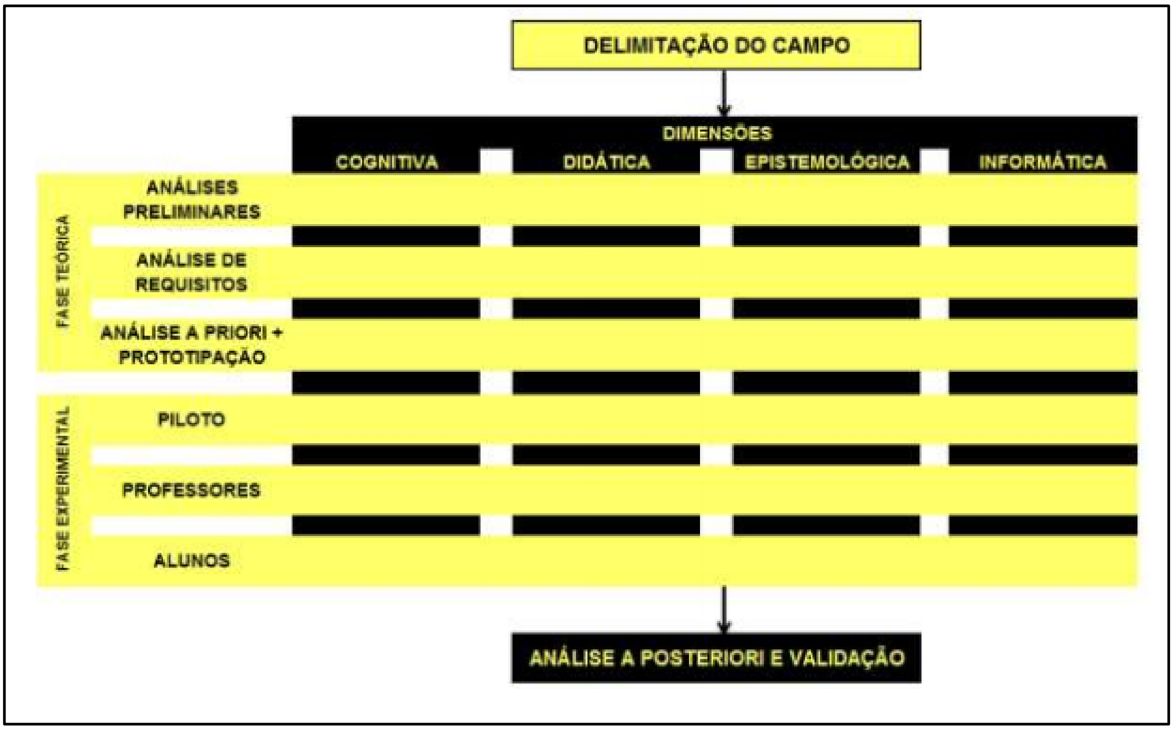
2.1.3 O Modelo de Processo de Software baseado na Engenharia Didático-Informática

Como afirmado anteriormente, a EDI busca aliar as contribuições da Engenharia Didática aos processos e princípios da Engenharia de Softwares para fundamentar um modelo que atenda tanto às necessidades do ensino e da aprendizagem da área a ser abordada pelo software como as exigências das metodologias de sua concepção e desenvolvimento. Dessa forma, o Modelo de Processo de Software proposto em Tibúrcio (2016) visa reunir em um mesmo percurso metodológico, os métodos e características de ambas as engenharias.

Uma característica essencial nesse modelo é a inserção da dimensão informática no quadro proposto pela Engenharia Didática, que tradicionalmente aplica-se às dimensões epistemológica, cognitiva e didática. Dessa forma, a inserção da dimensão informática tem como objetivo fazer emergir os aspectos da tecnologia computacional que incorporam e viabilizam a representação dos conceitos matemáticos nesse meio, além das contribuições e limitações advindas dessa abordagem.

Dessa forma, na construção do Modelo no estudo de Tibúrcio (2016), as dimensões estabelecidas (cognitiva, epistemológica, didática e tecnológica) permearam as etapas do Modelo de Processo definido. Tal modelo é ilustrado na figura seguinte:

Figura 3: Versão final do Modelo de Processo de SE



Fonte: Tibúrcio (2016), p. 56

A primeira etapa proposta no Modelo apresentado é a *delimitação do campo*, no qual é definido o campo de conceitos matemáticos a ser abordado pelo software, além disso, o autor propõe que nessa fase seja delimitada a equipe de desenvolvimento, no sentido de definir quais profissionais farão parte do projeto, conforme a contribuição esperada de cada um.

Na segunda etapa, são realizadas as *análises preliminares*, que buscam fundamentar a abordagem do conceito em um conjunto de pesquisas realizadas em torno dos aspectos cognitivos, didáticos, epistemológicos e informáticos ligados ao campo abordado. Os resultados dessas análises servem de base para o levantamento de requisitos do protótipo.

Na fase de *análise de requisitos*, a fundamentação na Engenharia de Requisitos (SOMMERVILLE, 2004) permite tratar os resultados das análises preliminares, para definir os requisitos do sistema.

Em seguida, dá-se início à fase de *prototipação*, na qual há a tradução dos requisitos do sistema, inicialmente em modelos experimentáveis de recursos do software e de outros elementos como o *layout*, para em seguida culminar no desenvolvimento do programa propriamente dito. Concomitantemente, a *análise à priori* é realizada, na qual segundo o autor "são pensadas nas situações de uso, nos problemas que podem surgir com a utilização, nas hipóteses de respostas dos usuários finais e (...) verifica-se o funcionamento do protótipo para que eventuais erros sejam corrigidos…" (TIBÚRCIO, 2016, p. 58).

Após a fase de prototipação e análise à priori, são realizados os testes do software, as chamadas fases experimentais, em que o autor sugere um teste piloto e em seguida outro com professores, para por último ser testado com os estudantes. Tais testes sevem para fornecer dados para uma posterior análise que tem o objetivo de verificar se o software atende aos objetivos previamente estabelecidos, quando explorado por seus usuários finais (professores e estudantes).

A última etapa proposta é a de *análise à posteriori e validação*, na qual é analisado o que ocorreu na experimentação e é verificado se o software atende às necessidades do ensino e da aprendizagem dos conceitos abordados. Nesse momento, segundo o autor, se abrem espaços para a consideração das sugestões de melhorias obtidas nas fases experimentais.

2.2 A Tecnologia Computacional na Educação Matemática: uma sistematização dos aspectos computacionais aplicados ao ensino de funções

Em seu trabalho "Technology and Mathematics Education", Kaput (1992) sistematiza as contribuições computacionais quando aplicadas ao ensino e aprendizagem da Matemática. O autor articula processos cognitivos e os sistemas de notações em Matemática, descrevendo de que forma a mídia eletrônica se aplica aos objetivos educacionais quando provê *meios* nos quais se instanciam tais notações.

Kaput (1992) define um sistema de notação como um sistema de regras que estabelecem relações entre objetos nesse sistema:

> Informalmente, então, definimos um sistema de notação como um sistema de regras: (i) para identificar ou criar caracteres; (ii) para operar sobre eles e (iii) para determinar relações sobre eles (especialmente relações de equivalência) (KAPUT, 1992, p. 523, tradução nossa)

O autor distingue os termos sistema de notação e sistema de representação, defendendo o aspecto mais abrangente de um sistema de notação, para além de uma função representacional específica, aplicando-se também a representações de aspectos matemáticos selecionados de uma situação não-matemática. Kaput (1992) ainda faz mais uma distinção, entre um sistema de notação e o meio no qual ele está instanciado:

> Tecnicamente falando, um sistema de notação, como um conjunto de regras que definem objetos dele e ações permitidas sobre eles (...), é essencialmente algo abstrato até decidirmos instanciá-lo, ou modelá-lo usando o mundo material. Os aspectos particulares do mundo físico que usamos compreendem o *meio* no qual os sistemas de notação são instanciados. Os quais podem incluir papel e lápis, objetos físicos, monitores de computador, som (como na linguagem falada), entre outros. (KAPUT, 1992, p. 523, tradução nossa)

As ações em um sistema de notação correspondem a transformações dentro desse sistema, quando se muda o objeto para outro com uma função diferente ou quando se muda a forma ou a visualização do mesmo objeto. Já as ações entre sistemas de notação correspondem às translações entre sistemas, para Kaput (1992) a maior parte das atividades matemáticas envolvem a coordenação e as translações entre diferentes sistemas de notação.

Os sistemas de notação ainda são distinguidos por Kaput (1992) quanto ao uso que tipicamente se dá a eles. Para o autor, alguns sistemas são usados para exibir informações, por isso são referidos como notações de exibição, outros sistemas são usados como bases para transformações, o autor refere-se a tais sistemas como notações de ação. Kaput (1992) pontua a não exclusividade de tal classificação, baseada apenas no uso típico, o que de fato será percebido mais adiante pois novos meios ao instanciarem notações tipicamente de exibição, possibilitam ações sobre seus objetos, dando-lhes características de notações de ação.

2.2.1 Distinções entre tipos de mídias

Kaput (1992) examina particulares distinções entre as mídias tradicionais e a mídia eletrônica, apontando três características bases: dinamismo, interatividade e captura de procedimentos e facilidade de execução em um dispositivo externo *versus* na memória e cognição humana.

a) Mídias dinâmicas e Mídias estáticas

As mídias dinâmicas são aquelas em que "o estado dos objetos podem mudar em função do tempo" (KAPUT, 1992, p. 525, tradução nossa), já as mídias estáticas não têm essa propriedade, o que as coloca na dependência da cognição humana para aplicar processos como a variação, por vezes, ainda auxiliada por recursos complementares. Na mídia dinâmica a variação torna-se natural e fácil de ser percebida pelo usuário, pois é inerente a esse tipo de mídia, o que contribui para aspectos importantes na aprendizagem matemática, como a invariância:

> Um aspecto muito importante do pensamento matemático é a abstração da invariância. Mas claro, para reconhecer invariância — para ver o que permanece o mesmo — é preciso haver variação. *Mídias dinâmicas facilitam o alcance da variação inerentemente.* (KAPUT, 1992, p. 525, tradução nossa)

b) Mídias interativas e mídias inertes

O sentido dado por Kaput (1992) para mídia interativa, no contexto de sua discussão, é o que vê a interação como uma contribuição física do sistema de notação e do meio no qual ele está instanciado, ou seja, uma resposta do sistema a uma ação do usuário. O meio inerte é caracterizado, no contexto da interação, como aquele em que a única mudança de estado, dada a ação do usuário, é a exibição da entrada. O autor coloca como característica chave para as mídias interativas, a adição de algo novo a ação do usuário, requerendo sua reposta.

2.2.2 Representações conectadas em mídias dinâmicas e interativas

Kaput (1992) usa o termo “hot-link” para se referir à forma como diferentes notações podem ser conectadas, a tradução “conexão a quente” nesse contexto pode ser interpretada como uma conexão que possibilita ações em um sistema de notação simultaneamente refletidas no outro sistema conectado:

> Considerando dois sistemas, A e B, definimos “conexão a quente” a capacidade automática ou através de um comando, de refletir uma ação tomada em um sistema A no sistema conectado B (note a direcionalidade). É aqui onde a contribuição computacional se torna mais aparente em um meio dinâmico e interativo. (KAPUT, 1992, p. 530, tradução nossa)

Dada a necessidade da representação de uma ideia complexa por múltiplos sistemas notacionais, uma mídia dinâmica e interativa que possibilita a conexão simultânea das ações em diferentes sistemas de notação, torna-se uma contribuição de grande importância segundo o autor. Já no meio estático, tanto as conexões entre sistemas quanto a dinamização dos seus objetos ocorrem apenas cognitivamente (KAPUT, 1992).

2.2.3 Captura de procedimentos e facilidade de execução em um dispositivo externo *versus* na memória e cognição humana

Na distinção entre os aspectos da mídia eletrônica e a tradicional e suas consequências para a Educação Matemática, Kaput (1992) aponta a terceira classe das características que trata das tarefas que podem ser desenvolvidas com o auxílio de um dispositivo eletrônico ou na memória humana. Nesse contexto, são delimitadas as seguintes classes de aspectos: captura e armazenamento de procedimentos, acesso facilitado, estruturado e ativo às informações armazenada e aos registros de ações do usuário.

A captura e armazenamento de procedimentos realizados pelo usuário é uma funcionalidade particularmente usada em softwares de geometria como o Cabri-géomètre (BELLEMAIN; LABORDE, 1997), segundo Kaput (1992) essa característica contribui para que o usuário teste a generalidade de uma hipótese gerada em um procedimento particular sobre um objeto matemático aplicando o procedimento em outras classes de objetos. Outros tipos de aplicações como armazenamento de medidas ou taxas e criação de funções reais específicas podem servir ao contexto de funções.

Kaput (1992) aponta a funcionalidade de que uma vez armazenados tais procedimentos ou informações, possam ser acessados de forma prática e fácil através de hipertextos ou hipermídias e até grafos direcionados que descrevem o estado dos objetos e as transformações que eles sofrem quando o usuário age sobre eles. O uso de links ainda pode ser potencializado para incorporar ligações externas ao sistema, como direcionamento a uma página da internet ou a um vídeo relacionado ao conceito tratado.

As funcionalidades de captura, armazenamento e acesso às informações ou ao registro das ações do usuário provêm uma forma de reflexão sobre as estratégias de quem usa o dispositivo ou pode servir como uma poderosa ferramenta para pesquisa por meio da análise das ações dos estudantes.

2.2.4 Impactos e contribuições da nova tecnologia no ensino da álgebra e funções

Entre as contribuições computacionais sistematizadas por Kaput (1992), foram selecionadas as que mais se inserem no contexto do ensino de funções, seja por tratarem diretamente de recursos aplicáveis gráficos e representações de função ou por atuarem de forma indireta, porém ativa na abordagem funcional.

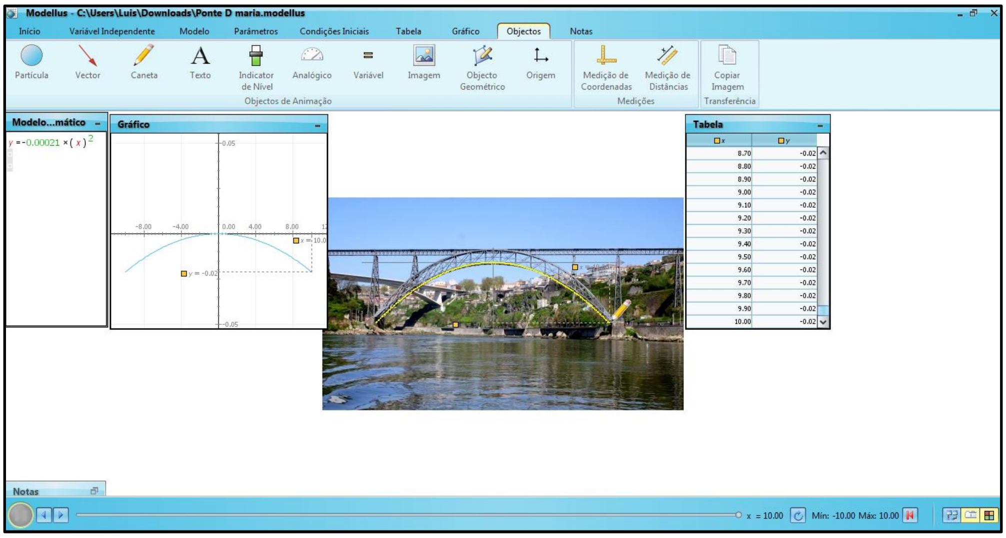
a) Uso da mídia dinâmica para instanciar variáveis

A mídia dinâmica é defendida por Kaput (1992) como sendo o ambiente ideal para abordar variáveis: “A mídia dinâmica é a casa natural das variáveis, preferencialmente à mídia estática, que requer que o usuário aplique muito a variação cognitivamente.” (KAPUT, 1992, p. 534, tradução nossa). O autor coloca esse ponto como uma importante contribuição para o desenvolvimento da ideia chave de variável, tirando o foco do significado como valor desconhecido e abrindo mais espaço para a abordagem variacional, fundamental para trabalhar conceitos relacionados a função (CONFREY; SMITH, 1994; CARLSON et al, 2002).

b) Construção de novas notações conectadas em conjunto para representar ideias e processos algébricos

O avanço das novas tecnologias tem propiciado a implementação de diversos recursos que articulados às representações de função podem funcionar como auxiliares na sua compreensão. Os Micromundos têm expressado essas possibilidades, o Modellus (TEODORO et al, 1997) cria simulações interativas articulando um modelo algébrico a diversos registros que descrevem o comportamento do fenômeno modelado, inclusive tornando possível a representação por notações não convencionais como tabelas ou gráficos, mas aquelas implementadas pelo usuário na construção da simulação. Ainda é possível o uso de imagens ou vídeos na construção do modelo.

Figura 4 - Software Modellus



Fonte: Disponível em http://www.mat.uc.pt/~mat0616/aulas/modellus/modellus.html

c) A compreensão de gráficos, incluindo escalas e o papel da experiência numérica

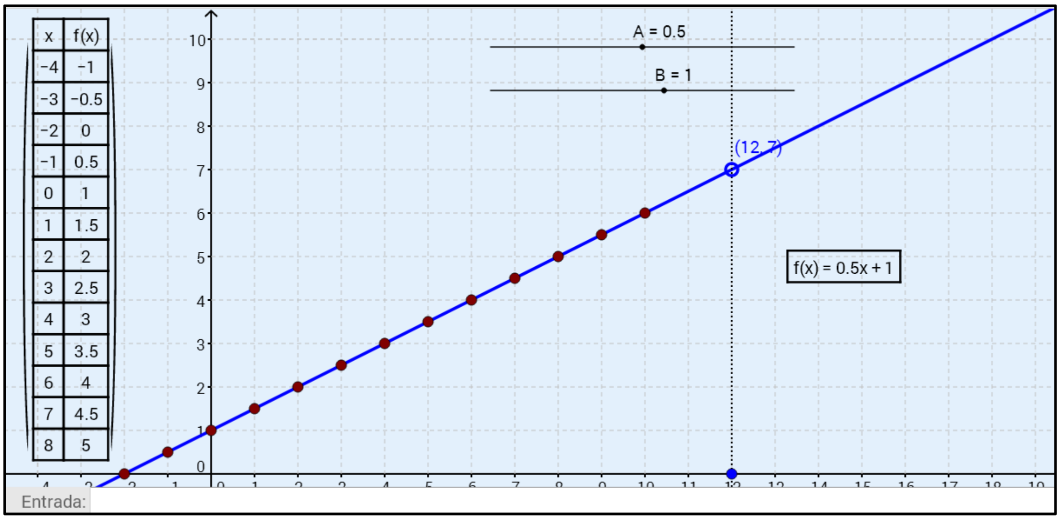
Kaput (1992) coloca a compreensão de escalas como central e não mero coadjuvante na compreensão de funções, além de pontuar que o seu desenvolvimento não vem rápida e automaticamente. Um exemplo de problema relacionado a uma fraca compreensão de escala é a relação entre a inclinação ou coeficiente angular e funções afins (LIMA et al, 2005; RAMOS, 2007).

A natureza do gráfico de coordenadas utilizado pelos estudantes é descrita como improdutiva: “Há poucas marcas de escala e indicações, e não há grade de fundo disponível para estabilizar as percepções” (KAPUT, 1992, p. 535, tradução nossa). Estas limitações são potencializadas pela natureza estática do ambiente que instancia estes gráficos, em contrapartida, Kaput (1992) afirma que os ambientes possibilitados pela mídia dinâmica providenciam a reescala e a visualização do gráfico de diferentes formas, inclusive provendo transições animadas entre visualizações com escalas diferentes.

Em tais ambientes, ainda é possível alterar as marcas e o valor numérico de tais escalas, a parametrização do intervalo e a ferramenta do zoom dinâmico, provendo a melhor visualização do gráfico ou de partes dele, aspectos importantes no tratamento com escalas segundo o autor. Avanços computacionais também permitem enfrentar o problema gráfico gerado na “interseção gráfica” de pontos ou curvas que por definição não se cruzam.

Um outro aspecto que contrasta a construção de gráficos mediada por computador dinamicamente com a feita à mão é a experiência numérica, que segundo Kaput (1992) é atalhada ao ser usada a tecnologia computacional. Softwares que trabalham função têm procurado reduzir esta limitação possibilitando importantes dados numéricos no próprio gráfico ou articulados a representações como a tabela com intervalos definidos pela ação do usuário:

Figura 5 - Gráfico da função afim articulado com dados numéricos no GeoGebra



Fonte: Disponível em https://tube.geogebra.org/student/m125573

d) Automatização de cálculos rotineiros ou “dispensáveis”

Kaput (1992) traz a discussão a respeito da delegação de cálculos rotineiros ou complexos à tecnologia através de calculadoras instanciadas no computador. A justificativa para o uso dessa ferramenta é o alívio da carga cognitiva para o estudante, que ao lidar com um conceito matemático apresentado em diferentes situações e representações, compromete-se cognitivamente com uma ação que nem sempre é importante para a construção do conhecimento alvo. A questão, segundo Kaput, é qual a importância da tarefa do cálculo numérico para o objeto do conhecimento trabalhado:

> Por exemplo, ao eliminar o passo numérico na passagem da equação para o gráfico, como a compreensão de gráfico está sendo mudada (Kieran & Wagner, 1989)? Sem o componente numérico fica incompleto de alguma forma? (...) Fazer o cálculo é educacionalmente importante? (KAPUT, 1992, p. 533, tradução nossa)

Calculadoras de sistemas simbólicos também ganham destaque, não apenas pela implantação de recursos mais dinâmicos e práticos como clicar e arrastar uma variável em uma fatoração como pelo instanciamento de recursos auxiliares ao cálculo simbólico como gráficos. Da mesma forma, porém, é preciso refletir quando os recursos de simplificação ou fatoração constituem apenas “cargas cognitivas” podendo ser delegadas à tecnologia.

A calculadora pode assumir papel principal e auxiliado por recursos gráficos ou pode assumir papel auxiliar mais especificamente como ferramenta de cálculo numérico instanciada em um outro tipo de software, como por exemplo no contexto das funções este recurso pode ser usado para o cálculo da variação da função no intervalo, ou da sua taxa de variação, cujo cálculo numérico para valores reais torna-se dispensável para o estudante que lida com o conceito funcional.

e) Variação Paramétrica

A variação paramétrica (Kaput, 1992) é uma funcionalidade da mídia eletrônica geralmente aplicada à articulação entre o modelo algébrico e representação gráfica, é um recurso computacional bastante útil no tratamento de álgebra e funções, pois permite uma rápida e prática atribuição de valores para analisar o comportamento de um modelo funcional ou testar um conjunto de valores apenas fazendo deslizar um botão na tela.

Esta utilidade tem sido relatada como uma vantagem e uma contribuição do uso computacional por pesquisas que abordam o uso de tecnologias computacionais no ensino e aprendizagem de função (ROCHA; MIRAGEM, 2010; LAUDARES et al, 2012; SILVA; GITIRANA, 2013). Um exemplo bastante útil do uso computacional da variação paramétrica é a análise da influência dos coeficientes do modelo algébrico no gráfico de uma função.

2.2.5 A Plasticidade representacional

Kaput (1992) define a plasticidade representacional como a capacidade de um meio de suportar uma variedade de formas notacionais, aspecto fundamental para um ambiente que aborde funções. O autor atribui à mídia eletrônica a capacidade de criação de notações dinâmicas conectadas entre si, possibilitando a conexão entre ações realizadas em uma e outra notação. São analisadas formas de manifestação dessa plasticidade de acordo com Kaput (1992):

a) Mudança de notações de exibição para notações de ação

As ações do estudante nas notações podem sofrer mudanças dependendo do meio no qual são instanciadas. Segundo o autor, quando se passa de um meio estático para um meio dinâmico, as novas ações se baseiam na natureza do novo meio, fazendo com que as notações passem a permitir a ação do usuário de forma interativa com o meio. Segundo Kaput (1992), exemplos podem ser vistos em gráficos que permitem translação e rotações, exibição de informações pré-definidas por meio de um simples clique no eixo do gráfico e até mesmo a ação direta no gráfico para definir novas delimitações.

A tabela é outro exemplo de notação que se abre para novas possibilidades de ação quando instanciada em uma mídia dinâmica, essa nova condição possibilita, segundo Kaput, gerar tabelas de dados de quaisquer intervalos, formar diferenças sucessivas entre os dados da tabela, ação fundamental em uma abordagem covariacional de função e com foco na taxa de variação, além de outras possibilidades que tornam a tabela uma notação de ação e não meramente de exibição.

b) Novos sistemas de notação e simulações

Kaput (1992) situa o surgimento de novos sistemas de notações no contexto da dualidade concreto-abstrato, em como essas notações estabelecem conexões equilibradas entre esses dois aspectos. O autor divide tais notações em duas classes: “Um tipo tenta expressar abstrações em novos termos concretos, e o outro expressa situações concretas em formas estruturadas que suportam abstração e generalização. ” (Kaput, 1992, p. 539, tradução nossa).

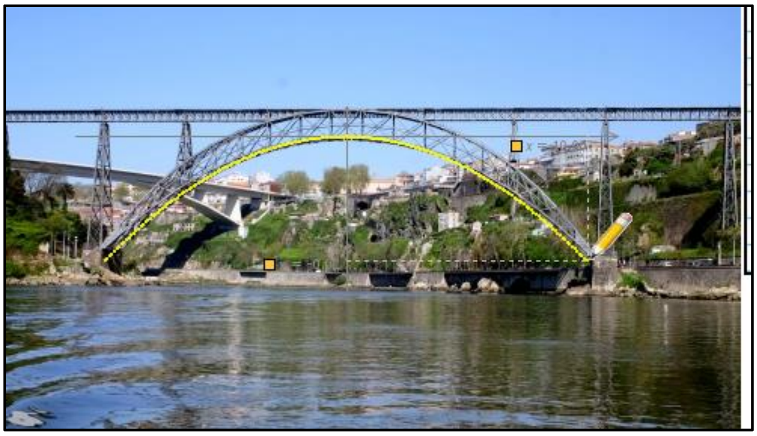
O autor ainda afirma que as novas notações conectam situações a serem modeladas e notações matemáticas formais usadas como linguagem para a modelação. A simulação é citada como um exemplo de representação manipulável, na qual o manuseamento do estudante é feito naturalmente dentro da situação estabelecendo uma conexão entre os aspectos matemáticos incorporados à simulação e uma representação matemática.

As simulações dinâmicas, além de especialmente úteis a uma abordagem funcional que articule situações modeladas por função e representações matemáticas, se mostram úteis principalmente quando esses modelos têm como uma variável o tempo, softwares como o Modellus (TEODORO et al, 1997) permitem a “encenação” da situação modelada pelo tempo definido pelo usuário.

c) Sistemas de notação sobrepostos

A sobreposição de sistemas de notação ganha mais força e importância com as possibilidades de instanciamento de vídeos e imagens. Kaput (1992) apresenta uma série de possibilidades a partir dessa funcionalidade, que incluem o uso de ferramentas de desenho, cálculo ou medidas para atuar sobre a imagem, o vídeo, ou um outro sistema de notação como o gráfico.

Figura 6 - Imagem no Software Modellus



Fonte: Teodoro et al (1997)

2.2.6 Foco no que é essencial

Kaput (1992) coloca como essencial a interação entre o estudante e o sistema usado, no sentido de que é necessário que, seja qual forem os aspectos incorporados, estes alcancem os estudantes e não passem despercebidos na sua utilização. Tão importante quanto o instanciamento desses aspectos ou funcionalidades é a incorporação de "motivações" ou direcionamentos que levem os estudantes a atingir os objetivos educacionais para os quais os aspectos foram instanciados. Assim, o autor descreve fatores que demandam a atenção do estudante e como aspectos computacionais auxiliam a cognição humana a manter o foco no que é essencial.

a) Translações entre notações e modelos

O processo de translações entre sistemas de notações demanda uma carga cognitiva acentuada, conforme Kaput (1992):

> O processo de relacionar ações em uma notação A com ações ou consequências em outra B relacionada, frequentemente se mostra

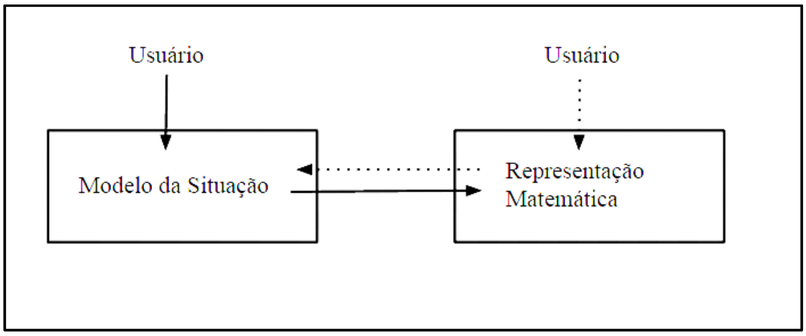
> esmagador. Em particular, é preciso estar engajado em três diferentes atividades: (i) ações em A que resultam em mudanças de estado em A; (ii) ações em B que resultam em mudanças de estado em B; (iii) coordenação de objetos, relações e mais importante, mudanças de estado entre A e B. (KAPUT, 1992, p. 541, tradução nossa)

Essa limitação é ainda mais acentuada em um sistema onde as ações realizadas se perdem no decorrer da atividade do estudante, não permitindo o resgate de tais ações. Kaput (1992) sugere que ‘gravações repetíveis de ações’ ajudam os estudantes a, por meio da reprodução da ação, atenuar a dificuldade, entretanto outro aspecto computacional que favorece ainda mais esse processo é, segundo o autor, a desvinculação das ações de translação entre notações a uma sequência: “Ações em A podem ser refletidas em B imediatamente ou quando o usuário estiver pronto para visualizá-las. ” (KAPUT, 1992, p. 541, tradução nossa)

Um caso particularmente interessante de translação entre notações descrito por Kaput (1992), conecta uma situação a uma representação matemática que serve como um modelo dinamicamente manipulável dela, de forma a estabelecer duas formas de interação:

> Quer pelo ajuste das características da situação e examinando as consequências dessas mudanças na representação matemática, ou pelo ajuste dos parâmetros na representação matemática e examinando suas consequências na situação descrita. (KAPUT, 1992, p. 541, tradução nossa)

Figura 7 - Esquema de translação entre modelos



Fonte: Ilustrado pelo autor

b) Conexões dinâmicas entre notações

Segundo Kaput (1992) a conexão dinâmica entre notações pode facilitar a visualização da variação especialmente quando em gráficos de coordenadas. Tal conexão se justifica por “expor diferentes aspectos de uma ideia complexa e revelar os significados de ações em uma notação por meio da exibição das suas consequências em outra notação. ” (KAPUT, 1992, p. 542, tradução nossa)

O autor aponta que ideias complexas raramente são bem representadas quando se usa apenas um sistema de notação, sugere então diferentes notações conectadas de forma dinâmica para auxiliar a exposição das diferentes faces do conceito. No Cálculo, a taxa de variação serve como exemplo: “Taxa de variação pode ser vista em notações que incluem variação instantânea, inclinações de gráficos de coordenadas, derivadas algébricas formais, e em quocientes de diferenças numéricas, entre outros. ” (KAPUT, 1992, p. 542, tradução nossa)

2.3 Raciocínio Covariacional: Um quadro para referenciar a atividade com taxa de variação

A Covariação é uma das abordagens propostas para se trabalhar funções (CONFREY; SMITH, 1994), na qual o conceito é apresentado de forma a estabelecer uma relação entre variáveis, a fim de entender como uma varia em função da variação da outra. Essa abordagem, segundo Confrey e Smith (1994) tanto facilita a visibilidade do conceito de taxa de variação como o torna mais importante, já os estudos citados por Carlson et al (2002) apontam para a importância dessa abordagem para conceitos do Cálculo como limites e derivadas.

Carlson et al (2002) definem o raciocínio covariacional como: “**...** atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades variáveis enquanto se observam as formas como elas mudam uma em relação à outra” (CARLSON et al, 2002, p. 354, tradução nossa) e estabelecem quadros para analisar as ações mentais no raciocínio de estudantes em situações de função com foco covariacional e níveis de desenvolvimento para as imagens de covariação.

Um primeiro quadro descreve e classifica as ações mentais e os comportamentos associados a elas, o segundo estabelece níveis de desenvolvimento das imagens mentais dos estudantes, onde a noção de imagem mental é referenciada em Thompson (1994) e baseada em uma construção "...dinâmica, originada em ações e movimentos corporais de atenção, e como fonte e suporte de operações mentais (...) tem seu foco na dinâmica das operações mentais” (THOMPSON, 1994 apud CARLSON et al, 2002, p. 354, tradução nossa).

Segundo os autores, os níveis mentais são desenvolvidos "conforme uma imagem individual de covariação se desenvolve, ela suporta mais sofisticado raciocínio covariacional". (CARLSON et al, 2002, p. 357, tradução nossa).

Quadro 1- Ações mentais no raciocínio covariacional: Quadro Teórico

Ação mental	Descrição da ação mental	Comportamentos
MA1	Coordenar o valor de uma variável com a mudança em outra	-Indicar aos eixos com indicações verbais da coordenação das duas variáveis. *Ex.: y muda com a mudança em x*
MA2	Coordenar a direção de mudança de uma variável com a mudança em outra variável	-Construir uma reta crescente; -Verbalizar uma consciência da direção de mudança no valor de saída enquanto considera mudanças no valor de entrada.
MA3	Coordenar a quantidade de mudança de uma variável com a mudança em outra variável	-Plotar pontos/ construir retas secantes -Verbalizar uma consciência da quantidade de mudança no valor de saída enquanto considera mudanças no valor de entrada.
MA4	Coordenar a taxa de variação média da função com incrementos uniformes de mudança na variável de entrada	-Construir retas secantes contíguas para o domínio -Verbalizar uma consciência da taxa de variação do valor de saída (com respeito ao valor de entrada) enquanto considera incrementos uniformes no valor de entrada.
MA5	Coordenar a taxa de variação instantânea da função com mudanças contínuas na variável independente para todo o domínio da função	-Construir uma curva suave com claras indicações de mudança de concavidade -Verbalizar uma consciência da mudança instantânea na taxa de variação para todo o domínio da função (direção de concavidades e pontos de inflexão são corretos)

Fonte: Adaptado de Carlson et al (2002, p. 357)

Um segundo quadro é estabelecido por Carlson et al (2002) com base no quadro de ações mentais, associando um nível de desenvolvimento para cada conjunto de ações mentais suportadas pelas imagens de covariação:

Quadro 2 - Níveis de raciocínio covariacional

Nível	Ações mentais suportadas
L1 – Coordenação	As imagens de covariação podem suportar a ação mental de coordenar a mudança de uma variável com a mudança em outra variável (MA1)
L2 – Direção	As imagens de covariação podem suportar as ações mentais de coordenação da direção de mudança de uma variável com a mudança em outra variável. As ações mentais identificadas como MA1 e MA2 são ambas suportadas por imagens desse nível.
L3 - Coordenação quantitativa	As imagens de covariação podem suportar as ações mentais de coordenar a quantidade de mudança em uma variável com a mudança em outra variável. As ações mentais identificadas como MA1, MA2 e MA3 são suportadas por imagens desse nível.
L4 - Taxa média	As imagens de covariação podem suportar as ações mentais de coordenar a taxa média de variação da função com mudanças uniformes na variável de entrada. A taxa média de variação pode ser decomposta para coordenar a quantidade de mudança da variável de saída com mudanças na variável de entrada. As ações mentais de MA1 à MA4 são suportadas por imagens desse nível.
L5 - Taxa instantânea	As imagens de covariação podem suportar as ações mentais de coordenar a taxa instantânea de variação da função com mudanças contínuas na variável de entrada. Este nível inclui uma consciência de que a taxa instantânea de variação resulta de cada vez menores refinamentos da taxa de variação média. Também inclui consciência de que os pontos de inflexão estão localizados onde a taxa de variação muda de crescente para decrescente, e vice-versa. As ações mentais de MA1 à MA5 são suportadas por imagens desse nível.

Fonte: Adaptado de Carlson et al (2002, p. 358)

O objetivo do uso do quadro teórico de Carlson et al (2002), foi o de tomá-lo como um quadro de referência para a análise da contribuição do protótipo desenvolvido no entendimento dos estudantes acerca da taxa de variação em uma perspectiva covariacional. Os autores reconhecem a possibilidade da contribuição da tecnologia computacional nesse sentido:

> Devidamente fundamentada e juntamente com formação suficiente de professores, estas tecnologias oferecem ferramentas valiosas para estudantes na aprendizagem para aplicar o raciocínio covariacional para analisar e interpretar situações dinâmicas de funções. (CARLSON et al, 2002, p. 374, tradução nossa)

Um exemplo da aplicação desse quadro teórico em uma abordagem da tecnologia computacional foi provido por Villa-Ochoa (2011) na análise do raciocínio covariacional de um estudante com o auxílio de situações em simulações em softwares. Este caso mostrou as possibilidades providas pela tecnologia usada, como a ação do estudante em modelos dinâmicos, interativos e com o uso de representações diversas conectadas (como tabelas, gráficos e modelos geométricos).

3. ANÁLISES PRELIMINARES

Nesta seção são apresentadas as análises preliminares que deram suporte à análise do objeto matemático em seus aspectos epistemológicos, de ensino e aprendizagem, dos aspectos cognitivos relativos às dificuldades dos estudantes quando lidam com o conceito e da sua abordagem com o uso de tecnologias computacionais.

As análises preliminares fundamentaram o levantamento de requisitos para o protótipo por meio dos princípios, caracterizações e necessidades relativas ao conceito apontados nessa fase e que se integram aos quadros já estabelecidos na fundamentação teórica (Quadro de Carlson et al (2002) e sistematização de Kaput (1992)) para servir de base à elicitação e análise de requisitos.

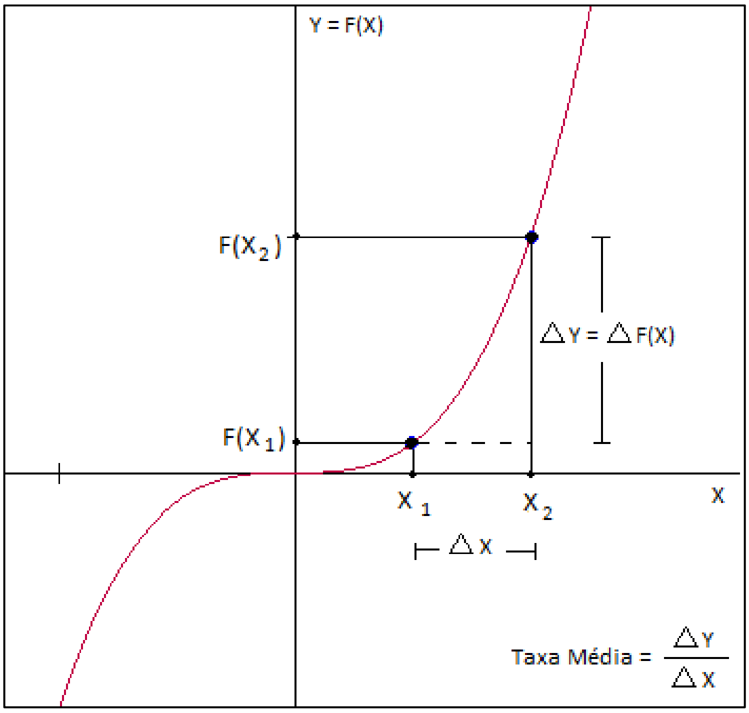
3.1 Taxa de variação média e taxa de variação instantânea

A taxa de variação está presente em vários conceitos e na análise de fenômenos nas mais diversas ciências. No entanto, antes da noção de derivada, esta análise se restringe à taxa de variação média, que permite apenas o seu cálculo para um intervalo [a,b] do domínio, por exemplo, a velocidade média de um móvel entre dois instantes de tempo.

A taxa de variação média pode ser expressa algebricamente como o quociente da diferença entre dois valores de $f(x_2)$ e $f(x_1)$ pela diferença entre os dois valores correspondentes x_2 e x_1 (STEWART, 2001), isto é, uma medida comparativa da variação em $y=f(x)$ dada uma variação correspondente em x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Figura 8: Representação gráfica da taxa de variação média



Fonte: Elaborado pelo autor

Esta expressão também é escrita nos livros didáticos de formas distintas porém com a mesma estrutura, a exemplo de Ribeiro (2010): “Seja uma função *f:* $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dados x ϵ $\mathbb{R}$ e x+h ϵ $\mathbb{R}$, com h≠0, o número $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se taxa de variação da função f no intervalo de extremos *x* e *x+h*.” (RIBEIRO, 2010, p. 105), e Guidorizzi (2001): “Seja a função y = f(x). A razão *f (x + Δx) - f (x) / Δx* é a taxa média de variação de f entre x e *Δx*.” (GUIDORIZZI, 2001, p.196).

Quando a diferença x se torna cada vez menor, o que significa uma aproximação dos pontos x_1 e x_2, percebe-se intuitivamente que o valor da taxa média pode ser calculado para intervalos cada vez menores, permitindo precisar cada vez mais o comportamento da função em uma perspectiva variacional.

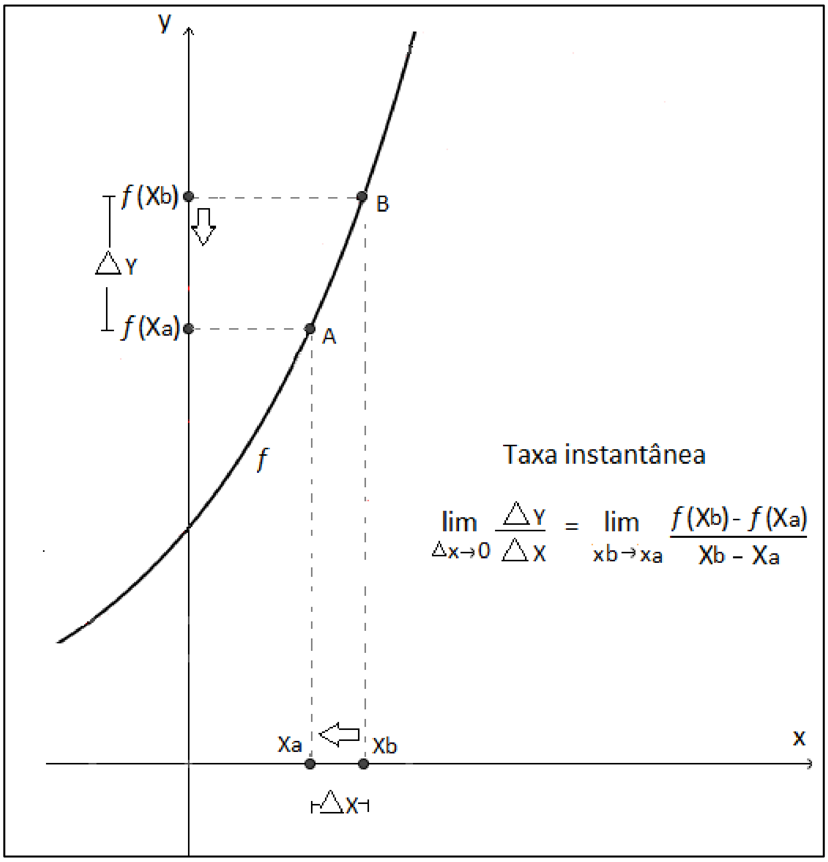
Com o conceito de limite, é possível que essa aproximação seja feita de forma que x tenda a zero, permitindo chegar ao conceito de taxa de variação instantânea, a derivada da função em um ponto. A passagem da taxa média para a instantânea é expressa da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que, com y = f (x) e h real diferente de zero, é equivalentemente a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

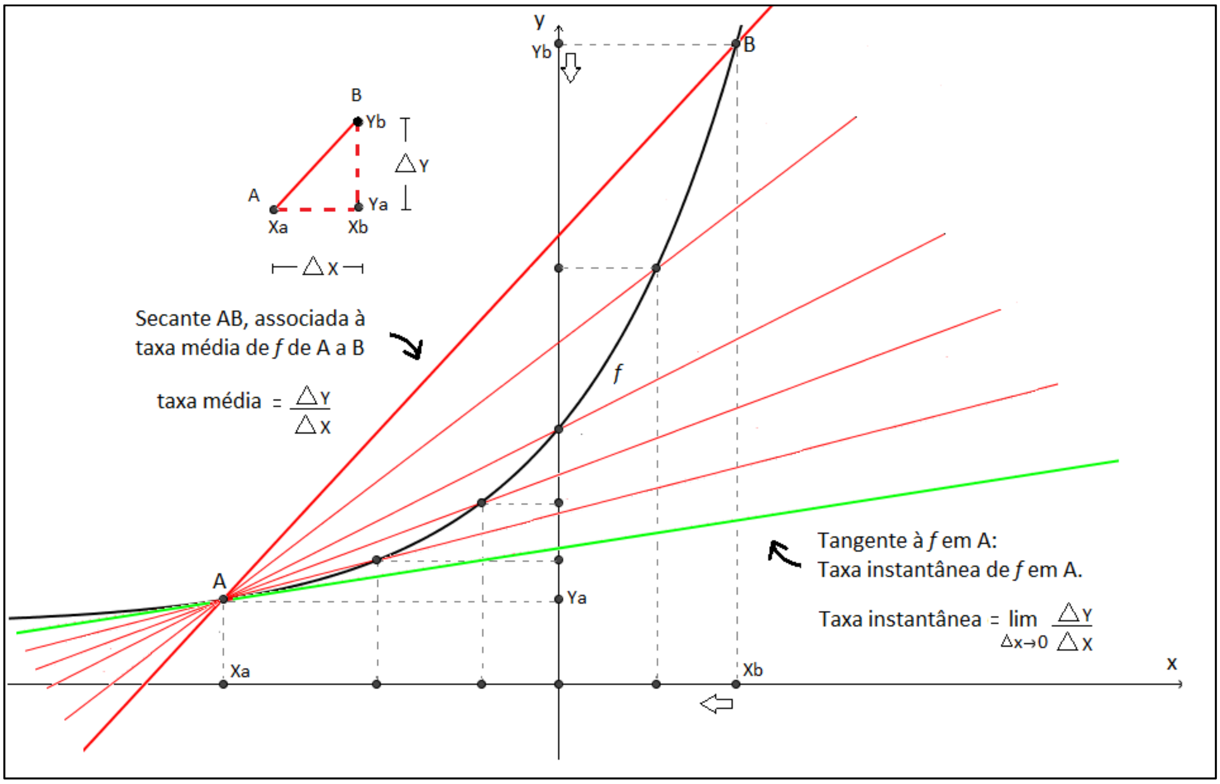
Figura 9: Representação da taxa instantânea no gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor

A taxa instantânea é associada por meio da derivada com sua interpretação geométrica, a declividade da reta tangente em um ponto dado. Nesse contexto, é possível partir da associação da taxa de variação média com segmentos contidos em retas secantes à curva e obter a taxa de variação instantânea (reta tangente) pela aproximação das secantes à reta tangente ao ponto dado.

Figura 10: Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea: o contexto geométrico das retas secantes e tangentes ao gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor

3.2 A taxa de variação nas funções afim e quadrática: uma perspectiva variacional

3.2.1 Função afim

A partir de uma perspectiva variacional a função afim é caracterizada como uma função real de variáveis reais e contínua que possui taxa de variação constante, dessa forma, como afirmam Lima et al (2005) “acréscimos iguais em x correspondem a acréscimos iguais em f(x)” (LIMA et al, 2005, p.100).

Tabela 1: Variação na função afim

x	Δx	$f(x) = ax + b$	$\Delta f(x)$
k	-	$ak + b$	-
$k + h$	h	$ak + b + ah$	ah
$k + 2h$	h	$ak + b + 2ah$	ah
...	...	...	...
$k + (n - 1)h$	-	$ak + b + a(n - 1)h$	-
$k + nh$	h	$ak + b + anh$	ah

Fonte: Elaborado pelo autor

A taxa média de variação para tal f, dada por $f(x) = ax + b$ é a seguinte:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = a$$

E a taxa instantânea:

$$\lim_{h \to 0} \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = a$$

Assim, a taxa de variação de uma função afim para todo valor de x corresponde ao valor do coeficiente a de $f(x) = ax + b$.

3.2.2 Função quadrática

Lima et al. (2005) ao caracterizarem a função quadrática enunciam o seguinte teorema:

> "A fim de que a função contínua f: ℝ -> ℝ seja quadrática é necessário e suficiente que toda a progressão aritmética não-constante $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $y_1= f(x_1), y_2= f(x_2), \ldots, y_n= f(x_n), \ldots$" (LIMA et al., 2005, p. 149)

Tal caracterização nos permite ter uma abordagem variacional, que relaciona a variação em x com a variação em f(x), essa relação estabelece uma taxa de variação variável porém com um padrão de comportamento, de forma que para acréscimos sucessivos iguais em x resultam, em f(x), acréscimos com diferenças sucessivas constantes:

Tabela 2: Variação na função quadrática

x	Δ x	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\Delta f(x)$	$\Delta(\Delta f(x))$
k	-	$ak^2 + bk + c$	-	-
$k + h$	h	$ak^2 + bk + c + ah^2 + 2ahk + bh$	$ah^2 + 2ahk + bh$	-
$k + 2h$	h	$ak^2 + bk + c + 4ah^2 + 4ahk + 2bh$	$3ah^2 + 2ahk + bh$	$2ah^2$
$k + 3h$	h	$ak^2 + bk + c + 9ah^2 + 6ahk + 3bh$	$5ah^2 + 2ahk + bh$	$2ah^2$
...	...	...	...	...
$k + (n-3)h$	-	$f(k + (n-3)h)$	...	...
$k + (n-2)h$	h	$f(k + (n-2)h)$	$(2n-5)ah^2 + 2ahk + bh$	...
$k + (n-1)h$	h	$f(k + (n-1)h)$	$(2n-3)ah^2 + 2ahk + bh$	$2ah^2$
$k + nh$	h	$f(k + nh)$	$(2n-1)ah^2 + 2ahk + bh$	$2ah^2$

Fonte: Elaborado pelo autor

O padrão de variação das diferenças sucessivas de f(x) relaciona-se com a variação de x conforme a expressão:

$$\Delta(\Delta f(x)) = 2a(\Delta x)^2$$

A taxa média de variação da função quadrática é dada por:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$\frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - (ax^2 + bx + c)}{h} =$$

$$2ax + b + ah$$

A taxa de variação em função do ponto de f dada por f (x) = ax^2 + bx + c é a seguinte:

$$\text{Taxa instantânea (x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{Taxa instantânea (x)} = \lim_{h \to 0} 2ax + b + ah = 2ax + b$$

Assim, a taxa de variação de uma função quadrática em cada valor de x corresponde a $2ax + b$.

3.3 O conceito de taxa de variação no Ensino Médio e Superior

A taxa com que uma grandeza varia e a própria noção de variação estão presentes desde os anos iniciais, mesmo que informalmente ou em um contexto mais simples. No entanto, quando este conceito é apresentado formalmente, é definido na sua fórmula final ou como apenas uma propriedade (CONFREY; SMITH, 1994), além de ser muitas vezes desconectado das aplicações já vistas em sala de aula ou ligados a situações específicas como a velocidade.

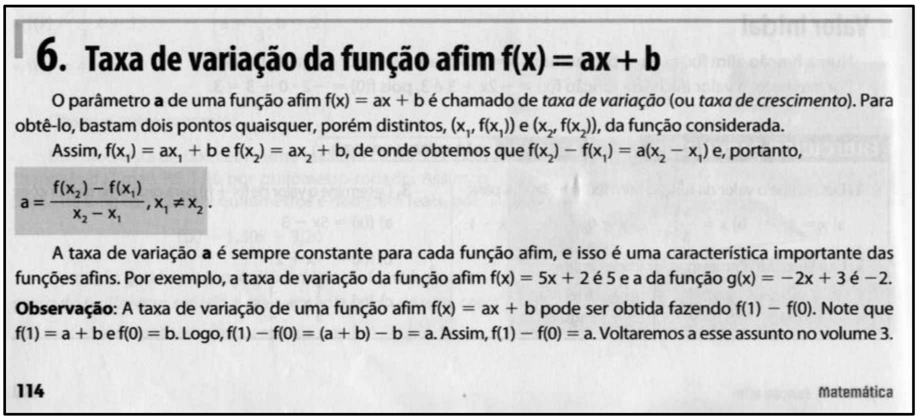
A dificuldade em se abordar função nos seus aspectos variacionais, parece residir em parte na dualidade dos tipos de abordagem para este tema, ou seja, ou covariação ou correspondência (CONFREY; SMITH, 1994), é observável nos livros didáticos que quando é introduzido o conteúdo de funções, geralmente, se tem partido de uma abordagem de correspondência entre valores, e a covariação tem se restringido a poucos exemplos aplicativos. Por outro lado, a mídia estática em que se instancia o livro didático contribui ainda mais para que não seja possível discutir o conceito que é essencialmente dinâmico.

3.3.1 O conceito de Taxa de Variação no Ensino Médio

Castro Filho (2011) defende que o desenvolvimento do conceito de taxa de variação é afetado pela forma isolada como se estudam os tipos de funções, pois ao invés de o conceito direcionar e fundamentar os diferentes tipos de funções reais, é definido no âmbito de cada função de forma abstrata, como se fosse apenas uma propriedade da função específica e não a própria essência do tipo de função real de variável real.

Essa abordagem isolada e restrita é notável nas coleções usadas no Ensino Médio, por isso o esforço em inserir a perspectiva variacional já na Escola Básica ainda não tem sido satisfatório. Dante (2010) e Ribeiro (2010) abordam taxa de variação no contexto de algumas funções específicas, restringindo o conceito às funções afim e quadrática, um privilégio que parece ser devido à "praticidade" do registro algébrico nos casos das funções polinomiais, cujo tratamento leva a expressões específicas para descrever a taxa de variação.

Figura 11 - Taxa de variação da função afim



6. Taxa de variação da função afim $f(x) = ax + b$

O parâmetro **a** de uma função afim $f(x) = ax + b$ é chamado de *taxa de variação* (ou *taxa de crescimento*). Para obtê-lo, bastam dois pontos quaisquer, porém distintos, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, da função considerada.

Assim, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, de onde obtemos que $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ e, portanto,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2.$$

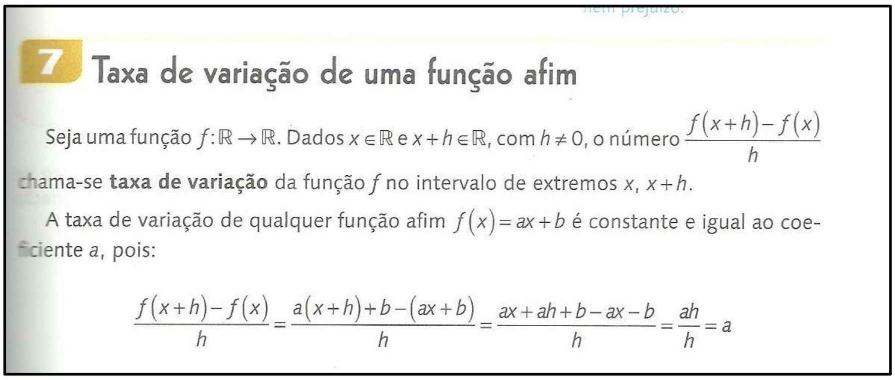
A taxa de variação **a** é sempre constante para cada função afim, e isso é uma característica importante das funções afins. Por exemplo, a taxa de variação da função afim $f(x) = 5x + 2$ é 5 e a da função $g(x) = -2x + 3$ é -2.

Observação: A taxa de variação de uma função afim $f(x) = ax + b$ pode ser obtida fazendo $f(1) - f(0)$. Note que $f(1) = a + b$ e $f(0) = b$. Logo, $f(1) - f(0) = (a + b) - b = a$. Assim, $f(1) - f(0) = a$. Voltaremos a esse assunto no volume 3.

114 Matemática

Fonte: Dante (2010, p.214)

Figura 12 - Taxa de variação da função afim



7 Taxa de variação de uma função afim

Seja uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dados $x \in \mathbb{R}$ e $x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se **taxa de variação** da função f no intervalo de extremos x, $x + h$.

A taxa de variação de qualquer função afim $f(x) = ax + b$ é constante e igual ao coeficiente a, pois:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Fonte: Ribeiro (2010, p. 105)

A abordagem do conceito de taxa de variação é restrita não só a famílias específicas de funções, mas a representações específicas. A manipulação do registro algébrico por meio da ‘fórmula’ e a limitação do tratamento da taxa aos elementos desse registro é evidente, enquanto representações como tabelas e gráficos, apesar de mais aplicáveis a uma abordagem covariacional (CONFREY; SMITH, 1994; CARLSON et al, 2002) são explorados de forma limitada covariacionalmente.

Figura 13 - Taxa de variação da função quadrática

6 Taxa de variação da função quadrática

Ao estudarmos função afim, vimos que a **taxa de variação** da função no intervalo de extremos x, $x+h$ é uma constante, dada pelo número $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, o qual corresponde ao coeficiente a na expressão $f(x)=ax+b$.

No caso de uma função quadrática, a taxa de variação não é uma constante, mas também é dada por este número. No entanto, dada a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, a taxa de variação da função no intervalo de extremos $x, x+h$ é dada por:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)}{h}=\frac{h(2ax+ah+b)}{h}=2ax+ah+b$$

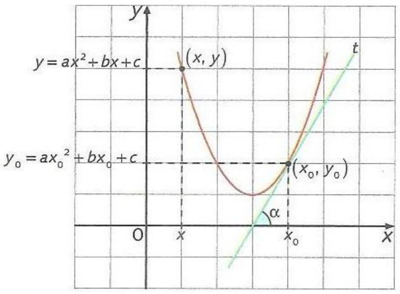
Se h for um valor próximo de zero, temos: $ah \simeq 0$ e, dessa forma: $2ax+ah+b \simeq 2ax+b$, ou seja, a taxa de variação da função quadrática será aproximadamente $2ax+b$.

Fonte: Ribeiro (2010, p. 150)

Quando é abordado na representação gráfica, o conceito de taxa de variação é conectado ao contexto geométrico da parábola e desviando o foco do aspecto variacional, limitando o significado da taxa.

Figura 14 - Gráfico no contexto geométrico da reta tangente à parábola.

A taxa de variação de uma função quadrática, quando h se aproxima de zero, corresponde à inclinação da **reta tangente** à parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ no ponto (x_0, y_0).



Observação

A inclinação da reta tangente no ponto (x_0, y_0) é dada por $2ax_0+b$.

Fonte: Ribeiro (2010, p. 150)

3.3.2 O conceito no Ensino de Cálculo no Ensino Superior

Após uma breve análise de alguns livros didáticos usados nos cursos de Cálculo (LEITHOLD, 1994; STEWART, 2001; GUIDORIZZI, 2001; SIMMONS, 1987), foi percebido que o conceito de taxa de variação aparece no Ensino Superior de forma bastante específica. Apesar de ser um conceito bastante geral e apropriado de ser abordado nas noções introdutórias de função e seus padrões de variação, os autores geralmente abordam esta noção apenas nos capítulos relacionados à derivada, onde de fato o conceito é abordado com mais propriedade e recursos matemáticos para uma análise mais profunda.

Ao ser abordada nos capítulos relativos à derivação, a noção de taxa de variação, que é a princípio independente de contextualização com problemas físicos ou de outras ciências, apareceu nesses capítulos sempre ligada a contextos como velocidade ou reta tangente ao gráfico, ou ainda como uma interpretação da derivada: “A velocidade no movimento retilíneo corresponde ao conceito mais geral de taxa de variação instantânea (LEITHOLD, 1994, p. 167)”.

A noção de taxa de variação parece ganhar sentido apenas quando emerge de um problema aplicado às ciências, o significado da taxa como um aspecto puramente matemático de comparação entre duas variáveis parece não ter espaço: “De fato, o limite (...) surge sempre que calculamos uma taxa de variação em uma das ciências ou engenharia tais como a taxa de reação em química ou o custo marginal em economia. ” (STEWART, 2001, p.156).

Além da velocidade, outro contexto ligado à ideia de taxa de variação é a inclinação da reta tangente ao gráfico. Stewart (2001) faz três relações: a da reta tangente como limite da reta secante ao gráfico em relação a um ponto, a velocidade como limite da velocidade média e a taxa instantânea como limite da taxa média quando Δx tende a zero. A relação entre a taxa de variação e a inclinação da reta tangente é vista abaixo:

> A conexão com a primeira interpretação é que se esboçarmos a curva $y = f(x)$, então a taxa instantânea da variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde $x = a$. Isso significa que quando a derivada for grande (e portanto a curva será íngreme no ponto (...) os valores de y mudarão rapidamente. Quando a derivada for pequena, a curva será relativamente achatada, e os valores de y mudarão lentamente. (STEWART, 2001, p.152)

Em Leithold (1994), a derivada é introduzida na abordagem da inclinação da reta tangente, já a taxa de variação, vista como uma interpretação da derivada é ligada ao contexto do movimento e da velocidade.

Apesar da dependência de um “contexto auxiliar” para abordar a taxa de variação, os autores deixam clara a associação direta entre taxa e derivada. Em “Um Curso de Cálculo”, Guidorizzi (2001) ao fim do capítulo de derivada, reserva um tópico com o título “*Velocidade e aceleração. Taxa de variação*”, onde a partir de um exemplo de um ponto que se move sobre um gráfico, insere a definição da taxa média de variação e posteriormente associa a taxa de variação com a derivada de forma direta:

> Seja a função y = f(x). A razão $f(x + \Delta x) - f(x) / \Delta x$ é a taxa média de variação de f entre x e Δx. A derivada de f, em x, é também denominada taxa de variação de f, em x. Referir-nos-emos a dy/dx como a taxa de variação de y em relação a x. (GUIDORIZZI, 2001, p.196)

Simmons (1987) chama a derivada de taxa de variação, além de conceituá-la em uma perspectiva covariacional mais explícita entre as variáveis:

> Para toda a função y = f(x), a derivada dy/dx chama-se a taxa de variação de y com relação a x. Intuitivamente, esta é a variação em y que seria produzida por um acréscimo de uma unidade de x se a taxa de variação permanecesse constante. (SIMMONS, 1987, p.89)

Leithold (1994) define a taxa de variação obtendo-a como o limite da taxa de variação média quando Δx tende a zero:

> ... a taxa média de variação de y por unidade de variação de x, quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) / \Delta x = \Delta y / \Delta x$. Se o limite desse quociente existir quando Δx tende a 0, esse limite será o que intuitivamente consideramos como a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1. De acordo com essas considerações, temos a definição a seguir: Seja y = f(x); a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1 é $f'(x_1)$ ou equivalentemente, a derivada de y com respeito a x em x_1, se ela existir no ponto x_1. (LEITHOLD, 1994 p. 167)

Stewart (2001) segue a mesma linha, toma o incremento $\Delta x = x_2 - x_1$ e sua variação correspondente $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e define a taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ como sendo o quociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

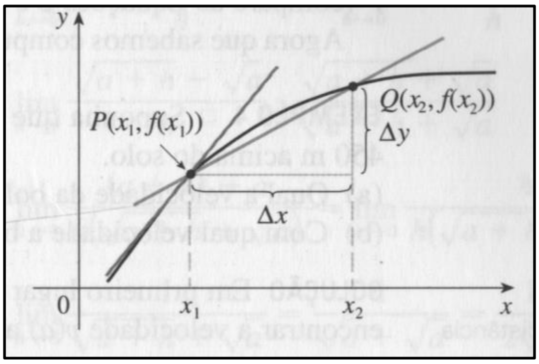
O autor toma o quociente acima considerando intervalos cada vez menores de x_2 e x_1 e define a taxa de variação instantânea como o limite associado a esse quociente quando Δx tende a zero.

Figura 15- Definição da Taxa instantânea por Stewart

$$\boxed{4} \quad \textbf{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fonte: Stewart (2001, p. 152)

Figura 16- Ilustração da Taxa instantânea a partir do limite da taxa média

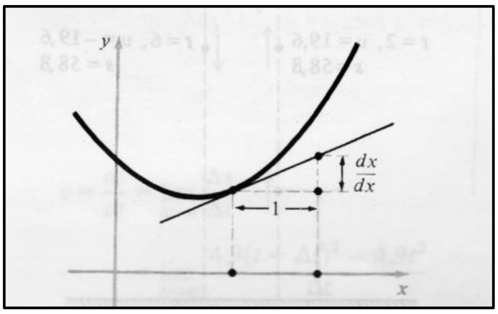


Fonte: Stewart (2001, p.152)

Percebe-se, das definições acima que Leithold (1994) e Simmons (1987) abordam a taxa apelando mais fortemente para a perspectiva covariacional, com variações de x afetando a variação de y, além de referirem-se a variações em termos de unidades de cada variável, o que se aproxima de uma abordagem covariacional (CONFREY; SMITH, 1994).

Em termos da abordagem representacional para o conceito de taxa de variação, Simmons (1987) se utiliza do registro algébrico e do gráfico, não necessariamente articulados:

Figura 17 - Interpretação gráfica da taxa por Simmons



Fonte: Simmons(1987, p. 90)

Guidorizzi (2001) limita-se ao tratamento do registro algébrico para abordar taxa de variação, cuja definição faz baseado no contexto da velocidade e aceleração, para posteriormente relacioná-la com a derivada. Já Stewart (2001) aborda taxa de variação, bem como os demais conteúdos, em uma perspectiva rica na representação gráfica, articuladamente ao registro algébrico e tabular, embora o faça dentro das limitações impostas pela mídia estática, na qual estão instanciados. Leithold (1994) também explora a articulação entre os registros algébrico e gráfico, o registro tabular não foi explorado para abordar diretamente o conceito de taxa de variação, apesar de ser usado pelo autor em outros conteúdos.

3.3.3 Interpretação da concavidade e pontos de inflexão

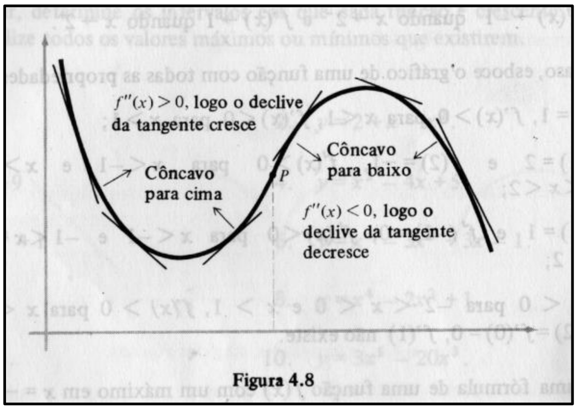
Ao interpretar a taxa de variação no contexto do gráfico de uma função, podemos estabelecer relações entre a forma como varia a função e aspectos do gráfico como concavidade, pontos de inflexão e máximos ou mínimos locais. Em relação à concavidade, livros de Cálculo tem definido este aspecto relacionando-o geralmente com a reta tangente ao gráfico:

> Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é chamado de côncavo para cima em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, é chamado de côncavo para baixo em I. (STEWART, 2001, p. 297)

Simmons (1987) articula representações algébrica e gráfica (em um contexto geométrico) quando relaciona a segunda derivada com a variação do coeficiente angular da reta tangente:

> Uma segunda derivada positiva, $f''(x) > 0$, indica que o coeficiente angular $f'(x)$ é uma função crescente de x. Isto significa que a tangente à curva gira no sentido anti-horário quando nos movemos ao longo da curva, da esquerda para a direita (...) A curva é dita *côncava para cima*. Tal curva está a cima de sua tangente, exceto no ponto de tangência. Analogamente, se a segunda derivada é negativa, $f''(x)<0$ (...) a curva é *côncava para baixo*, ela fica abaixo de sua tangente, exceto no ponto de tangência. (SIMMONS, 1987, p. 154)

Figura 18 - Concavidade e a reta tangente



Fonte: Simmons, (1987, p. 154)

Esta relação se limita a uma interpretação gráfica no contexto geométrico, o que não é facilmente identificável em uma situação problema instanciada em outro tipo de registro, como no estudo de Carlson et. al (2002) onde os estudantes tiveram dificuldades na interpretação da taxa ao analisarem um evento dinâmico modelado por uma função.

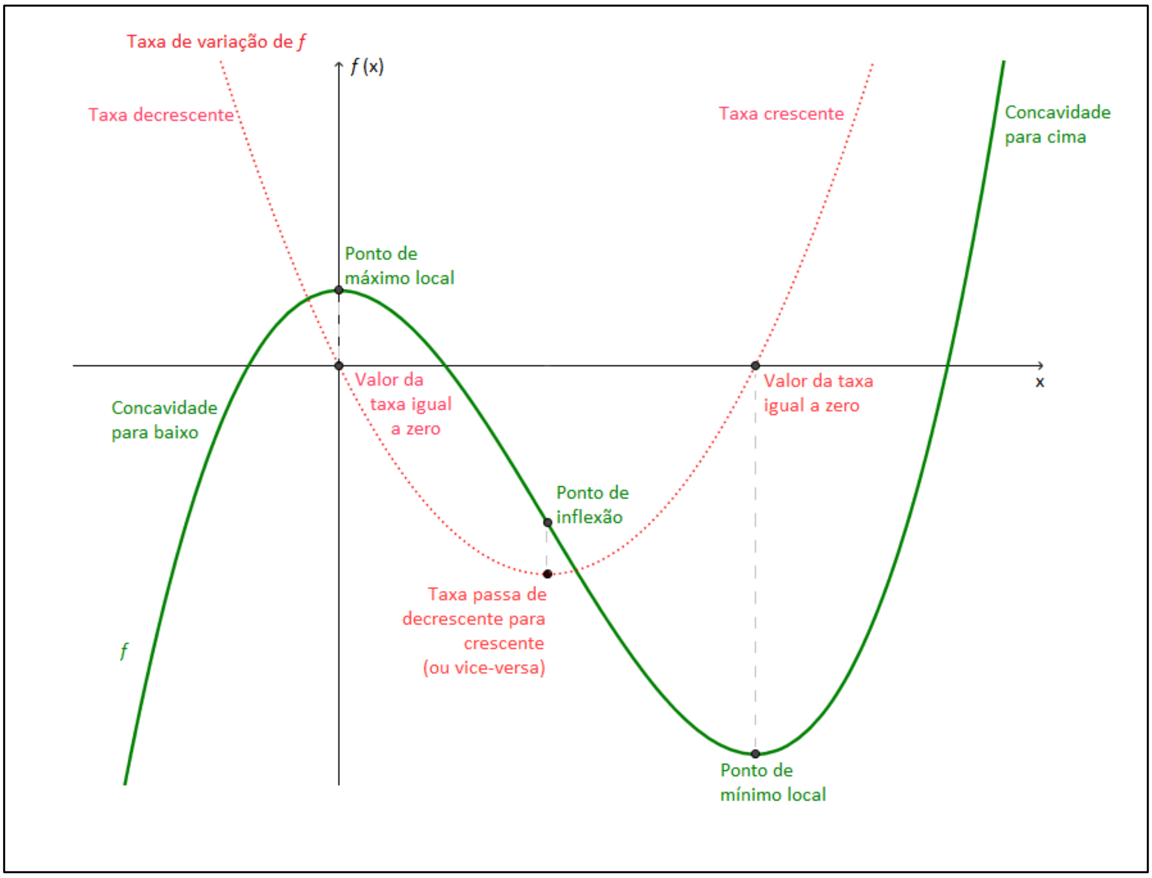
Na interpretação da concavidade que a relaciona com a taxa de variação instantânea da função, os intervalos onde a concavidade do gráfico é 'voltada para baixo' mostram uma taxa de variação decrescente, intervalos onde a concavidade é voltada para cima mostram que a taxa de variação é crescente no mesmo.

Os pontos de inflexão são definidos como os pontos onde há a mudança de concavidade:

> Um ponto como P (...) no qual o sentido da concavidade muda, chama-se um *ponto de inflexão.* Se f"(x) é contínua e tem sinais opostos em cada lado de P, deve-se anular no próprio P. (SIMMONS, 1987, p. 154)
>
> Um ponto P sobre uma curva é chamado de ponto de inflexão se a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice e versa em P. (STEWART, 2001, p. 289)

Novamente, percebe-se uma interpretação gráfica para este aspecto. No entanto, quando se busca uma interpretação de tal ponto como um aspecto do comportamento variacional da função, pode-se, com base na interpretação da concavidade, dizer que a taxa de variação instantânea nesse ponto muda de crescente para decrescente ou vice e versa: "Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se (c,f(c)) for um ponto de inflexão do gráfico de f, então, se f"(c) existe, f "(c) = 0" (LEITHOLD, 1994, p. 245). Já nos pontos em que a função atinge um máximo ou mínimo, variacionalmente falando, temos a anulação da taxa instantânea naquele ponto.

Figura 19: Aspectos do gráfico e a taxa de variação



Fonte: Elaborado pelo autor

3.4 Documentos oficiais e os aspectos de função

De acordo com os documentos oficiais para o Ensino Médio, o trabalho com função deve partir da noção de dependência entre grandezas em diferentes situações, de forma articulada com a resolução de problemas e suas diferentes representações, notadamente o registro gráfico, utilizando-se inclusive da tecnologia computacional como recurso (BRASIL, 2000; BRASIL, 2002; BRASIL, 2006). Além disso, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, enfatizam que a exploração dessas situações privilegie uma abordagem qualitativa da relação funcional (BRASIL, 2006).

As Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002) dividem o eixo de Álgebra e Funções em duas unidades temáticas, das quais uma é ‘variação de grandezas’. Os aspectos de função a serem trabalhados incluem “variações exponenciais ou logarítmicas” e “taxa de variação de grandezas”.

As OCEM, ao orientar uma perspectiva qualitativa e centralizada no gráfico das funções, sugerem a importância de compreender funções em uma abordagem covariacional e seus padrões de variação:

> Também é interessante provocar os estudantes para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). (...) Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. (BRASIL, 2006, p. 72)

3.5 Dificuldades dos estudantes em Taxa de Variação

Neste tópico é apresentada uma revisão de literatura acerca das dificuldades que os estudantes encontram quando lidam com o conceito de taxa de variação em diferentes contextos, na sua maioria pesquisas que abordam a taxa de variação na representação gráfica ou na articulação desta representação com situações problema.

3.5.1 A dificuldade em interpretar e representar a taxa de variação

Carlson et al (2002) citaram as dificuldades que os estudantes têm para interpretar a taxa de variação quando ela é representada graficamente. Nos estudos desses autores e também nos de Monk (1992), citado por Carlson et al (2002), os estudantes tiveram dificuldade em interpretar e representar aspectos do gráfico como pontos de inflexão e concavidade quando articulados no contexto de uma situação física.

Isto é, os estudantes não conseguiam articular o comportamento da variação de um modelo físico com o seu gráfico, de forma a relacionar o momento em que a taxa mudava de crescente para decrescente com um ponto de inflexão e os intervalos em que a taxa era crescente ou decrescente na situação como intervalos de diferentes concavidades no gráfico. Tal dificuldade segundo Carlson et al (2002) está ligada a dificuldade de construir uma imagem contínua da taxa.

Os autores relataram ainda dificuldades dos estudantes quando interpretavam o gráfico da taxa de variação para obter ou descrever o gráfico da função que modela a situação. Quando solicitados a esboçar o gráfico da função cuja taxa de variação foi dada graficamente (Figura seguinte), um quarto dos estudantes de um curso de Cálculo esboçaram um gráfico igual ao da taxa de variação e mais da metade dos estudantes desconsideraram as mudanças de concavidade no gráfico da taxa e sua correlação com o gráfico da função.

Figura 20 - Esboçar o gráfico da temperatura a partir do gráfico da taxa de variação

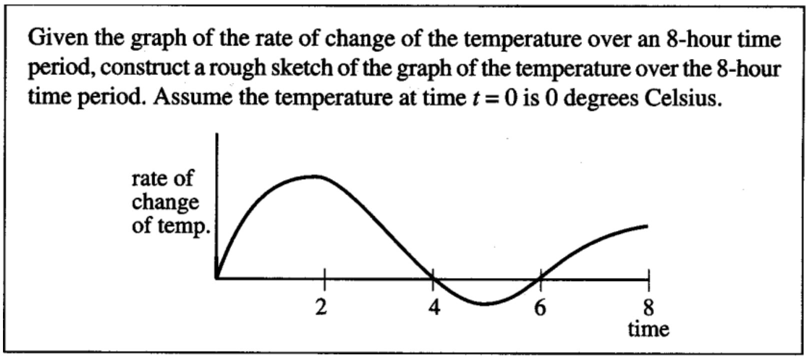


Figure 3. The Temperature Problem.

Fonte: Carlson et al (2002, p. 369)

Monk (1992) indicou que dificuldades com a taxa de variação no registro gráfico são geradas pela tendência para se distrair com a forma do gráfico. Além disso, Gomes Ferreira (1999) mostrou que a dificuldade de estudantes do ensino médio brasileiro em interpretar os gráficos em uma perspectiva variacional, é consequência em parte do tratamento dado ao estudo de funções em gráficos, que privilegia aspectos pictóricos e pontuais nessa representação.

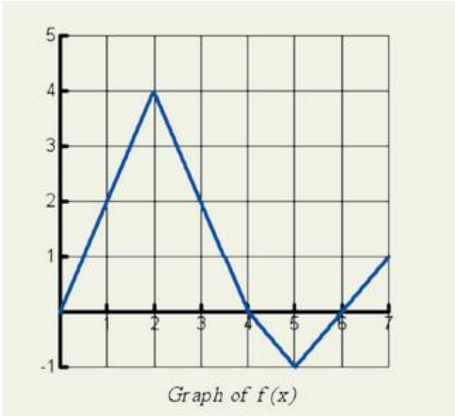
Também apareceram dificuldades na interpretação da taxa de variação negativa, que emergiu como um problema no estudo de Silveira (2001) com estudantes do curso de Cálculo: “Os estudantes demonstraram não perceber que quando a função é decrescente, a variação da função deve ter um valor negativo. ” (SILVEIRA, 2001, p.75).

Além disso, nos casos em que calculavam a variação em um intervalo dado, se o resultado fosse negativo, a configuração do cálculo da taxa mudava, sugerindo uma desconsideração da taxa negativa: “os estudantes não estavam acostumados a fazer cálculos de uma variação que resultasse em valor negativo, pois ao fazer a variação, consideravam o valor maior menos o valor menor, e não o valor final menos o valor inicial. ” (SILVEIRA, 2001, p.74).

Na articulação entre equações e gráficos, no âmbito das funções e conceito de taxa de variação, a compreensão dos estudantes acerca da relação entre a taxa e a noção geométrica da inclinação da reta é abordada no estudo de Teuscher e Reys (2010). Os autores apontaram problemas na interpretação da taxa de variação em modelos lineares no contexto do gráfico.

Os estudantes associaram intervalos com segmentos lineares representando gráficos de sinais de taxa opostos como representando a mesma taxa de variação, como mostra a figura abaixo:

Figura 21 - Gráfico do teste aplicado



Fonte: Teuscher e Reyes (2010, p. 520)

Isso mostrou que os estudantes estão atentos apenas a valores numéricos do gráfico, como "o quanto varia numericamente" sem considerar o sentido da inclinação em uma leitura variacional do gráfico e a articulação com a inclinação como uma ferramenta para trazer sentido à taxa.

No que diz respeito à relação entre taxa de variação e a declividade da reta no gráfico, amplamente trabalhada no ensino de derivadas, outros autores apontaram dificuldades que podem ser geradas pela forma como se articula tais conceitos. Lima et al (2005) chama a atenção para a inadequação do termo "coeficiente angular" para a referência ao coeficiente '*a*' que representa a taxa de variação de uma função do tipo ax+b, os autores justificaram com dois motivos, primeiramente, na maioria dos casos não há ângulos nos problemas relacionados à função dada, e depois, o ângulo que o gráfico da função faz com o eixo horizontal depende das unidades (escalas) para os eixos x e y, o que pode gerar ângulos diferentes para retas com o mesmo valor de inclinação.

Ramos (2007) também abordou em uma investigação essa relação equivocada que se faz entre taxa de variação e o ângulo entre a reta e o eixo horizontal. A autora verificou procedimentos equivocados de estudantes em um laboratório experimental, que na tentativa de determinar os coeficientes da função a partir do gráfico do deslocamento de um objeto em velocidade constante, associaram a tangente do ângulo à taxa de variação, o que resulta em problemas no caso de escalas não monométricas em tal gráfico por gerar uma inclinação diferente da inclinação em um gráfico monométrico.

3.5.2 A dificuldade na passagem da taxa média para a taxa instantânea ou a derivada.

No Ensino Médio, a taxa de variação é definida em tipos específicos de funções e em termos da sua taxa média, sem a formalidade do conceito de limite. Ribeiro (2010), ao calcular uma expressão algébrica para a taxa de variação da função quadrática, usa informalmente esta noção apenas para efeitos de simplificação da expressão: “Se h for um valor próximo de zero, temos: $ah \simeq 0$ e, dessa forma: $2ax+ah+b \simeq 2ax+b$” (RIBEIRO, 2010, p. 150). A abordagem da taxa de variação se resume a encontrar sua expressão para um tipo específico de função, calcular em um ponto através da fórmula ou estabelecer conexões com a reta tangente ao gráfico.

Quando os estudantes encaram novamente tal conceito no Cálculo, ele aparece desvinculado de funções específicas, mas como o sinônimo ou uma interpretação para a própria derivada, a taxa média é revisitada fazendo com que por meio do conceito de limite se obtenha formalmente a noção de taxa de variação instantânea, a derivada no ponto.

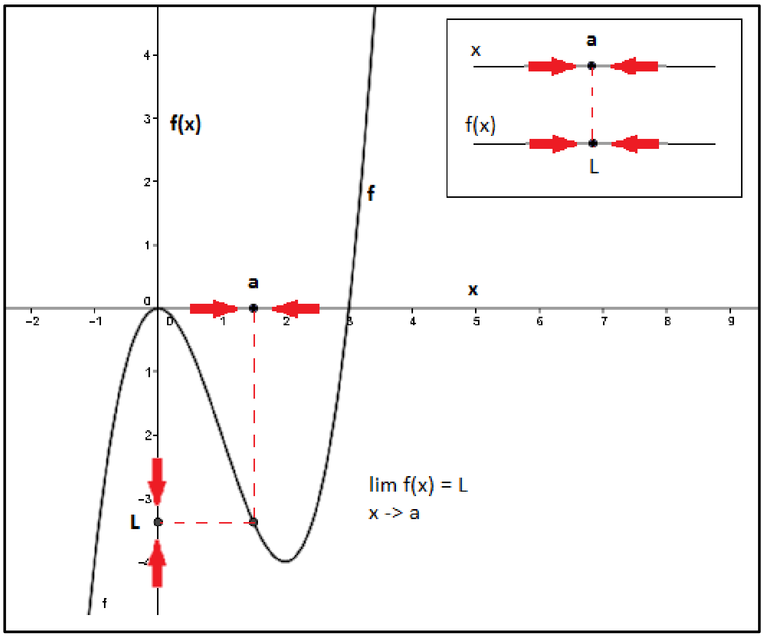
Percebe-se, então, que nessa abordagem a compreensão da taxa instantânea traz como requisito a compreensão de limite, além da coordenação de duas quantidades variando simultaneamente. Pesquisas que abordaram a compreensão da taxa de variação por estudantes, mostraram as dificuldades quando é requerido que eles demonstrem compreender a taxa instantânea a partir da taxa média. Carlson et al. (2002) apontaram para a persistência da dificuldade com essa compreensão e sugeriram problemas de interpretação no gráfico:

> A dificuldade em visualizar uma taxa de variação instantânea pela imagem de refinamentos cada vez menores da taxa de variação média persiste. Esta limitação (...) aparenta criar dificuldades para interpretar e compreender precisamente o sentido de um ponto de inflexão e na explicação do porquê a curva é suave (...) A análise de alguns estudantes (...) que eles não eram capazes de explicar como a taxa instantânea era obtida. Esta fraqueza parece ser resultado de dificuldades em trazer significados para suas construções e interpretações gráficas. (CARLSON et al, 2002, p.373 , tradução nossa)

Villa Ochoa (2011), ao analisar a compreensão de um estudante de uma disciplina Pré-Cálculo sobre a taxa de variação na função quadrática, verificou que, apesar de ele ter esboçado um gráfico com curva suave, não havia demonstrado elementos de compreensão da taxa instantânea ou continuidade. Assim como em Carlson et al. (2002), alguns estudantes acabaram traçando gráficos contínuos apenas porque estão acostumados a lidar com esse tipo de gráfico.

A compreensão da taxa instantânea está intimamente relacionada com o entendimento da noção de limite, estudos citados por Carlson et al (2002) relacionaram a dificuldade desta noção com fragilidades em relação ao raciocínio covariacional. Os autores acompanham a sugestão de Cottrill et al. (1996) de que o trabalho com limites seja desenvolvido em uma abordagem dinâmica da coordenação de dois valores que mudam simultaneamente, um se aproximando de um valor limite enquanto o outro se aproxima de um valor dado.

Figura 22 - Coordenação da variação no conceito de limite.



Fonte: Elaborado pelo autor

3.6 O uso das Novas Tecnologias no tratamento de Taxa de Variação

Segundo Kaput (1992), os meios dinâmicos e interativos são propícios para tratar a variação. Além disso, as possibilidades computacionais descritas pelo autor sugerem benefícios para uma abordagem covariacional por permitirem trabalhar com diferentes sistemas de notação ou representação interconectados. Confrey e Smith (1994) defendem a coordenação de representações específicas articuladas para atender ao desenvolvimento da noção de taxa de variação, o que pode ser facilmente conseguido em um meio interativo, dinâmico e com um certo grau de plasticidade representacional (KAPUT, 1992).

Villa-Ochoa (2011) se utilizou dos aspectos descritos acima na análise do raciocínio covariacional de um estudante ao propor duas situações apresentadas em simulações computacionais, uma delas articulando o modelo geométrico da situação com os registros tabular, numérico, gráfico, o que possibilitou trabalhar em um ambiente de amplas possibilidades de recursos.

Na outra situação, a simulação articulada à ação do estudante ao esboçar o gráfico da função com lápis e papel representou um avanço em relação a atividades totalmente instanciadas no papel, requerendo do estudante um alto grau de comprometimento cognitivo para interpretar a variação.

Castro Filho (2001) no seu estudo com professores de uma escola de ensino médio, utilizou dois artefatos tecnológicos, um sensor de movimento que gerava gráficos em tempo real de velocidade, posição e aceleração; e um diagrama interativo chamado "Conta Bancária", que permitia associar a taxa de variação de forma interativa aos seus contextos numérico de variação em diferenças sucessivas e gráfico.

O uso dos recursos descritos acima possibilitou a conexão de taxa de variação por diversos significados e representações, como entre a situação de depósitos e retiradas, o gráfico da função linear que modelava a função e a noção de inclinação da reta em um contexto geométrico. Para o autor, as tecnologias serviram tanto como ferramentas integradoras às aulas e currículo de funções como geradoras de contextos e significados do conteúdo para a reflexão sobre o conhecimento dos próprios professores.

Laudares et al (2012) utilizaram dois softwares como suportes em uma sequência didática para abordar o conceito de derivada a partir de taxa de variação. Dentro da proposta dos autores essas tecnologias serviram como recursos para possibilitar abordagens com diferentes representações de função e promoveram dinamismo e facilidade de parametrização das variáveis.

As possibilidades providas pelas tecnologias computacionais têm sido verificadas nas investigações que as caracterizam tanto como suporte auxiliar como enquanto objeto de pesquisa. As salas de aula de matemática podem ser realmente impactadas por essas contribuições, como coloca Carlson et al (2002) são oportunidades ricas pedagogicamente, que requerem apenas fundamentação e formação de professores para que se extraia a riqueza das ferramentas tecnológicas.

4. ELICITAÇÃO E ANÁLISE DE REQUISITOS

É apresentada em seguida uma articulação entre as delimitações do objeto matemático determinadas na análise preliminar, as contribuições computacionais sistematizadas na seção da Tecnologia aplicada à Educação Matemática com foco em função e taxa de variação, além do quadro de Carlson et al (2002), determinando a dimensão informática e fornecendo elementos para o levantamento de requisitos do protótipo.

A articulação entre esses três quadros teve como objetivo estabelecer inicialmente princípios fundamentais para nortear as características e funcionalidades a serem elicitadas e implementadas no software.

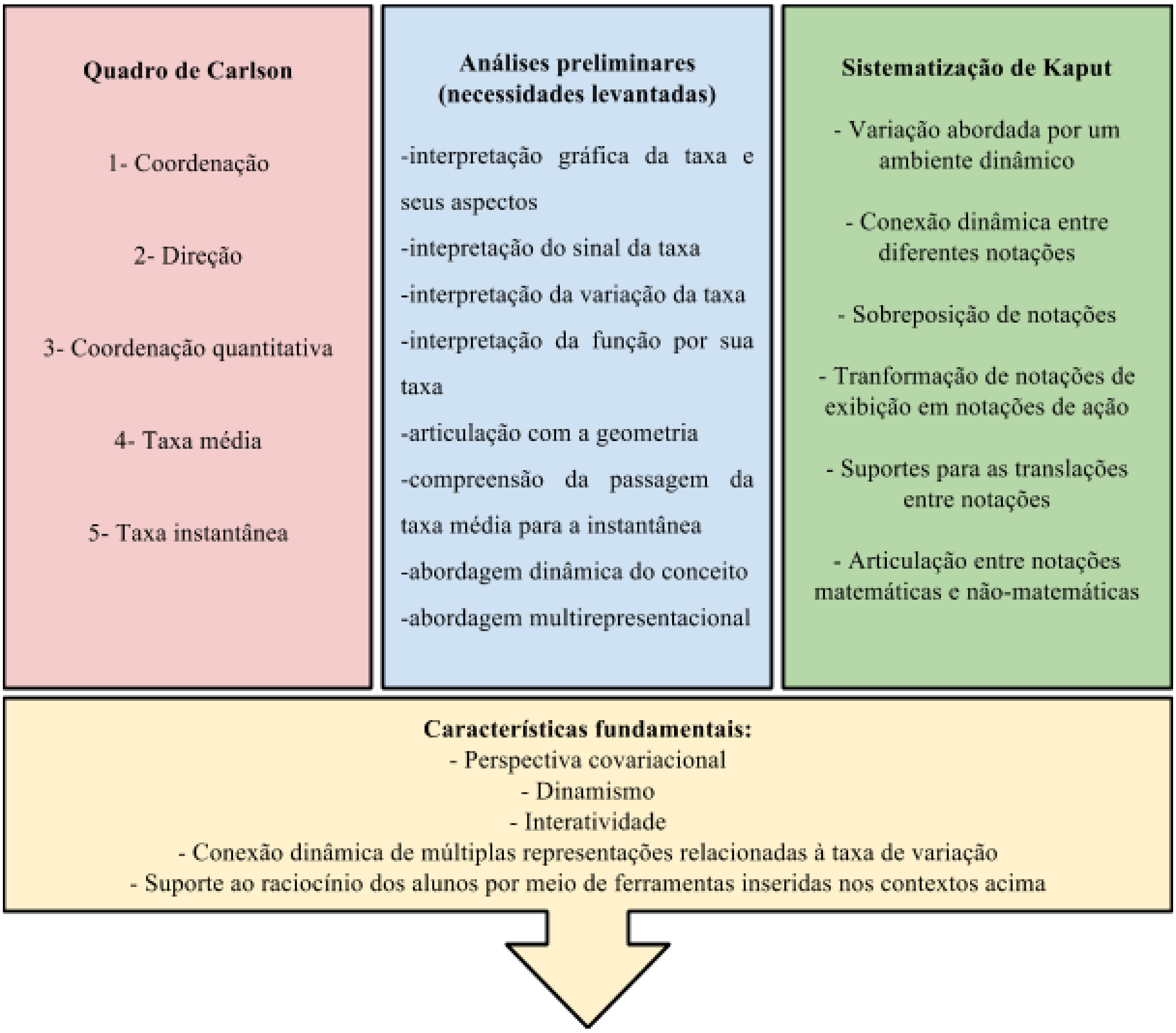
O quadro de Carlson et al (2002) aponta cinco níveis de raciocínio covariacional dos estudantes em atividades com função e taxa de variação: coordenação da mudança, coordenação da direção, coordenação quantitativa, coordenação da taxa média e coordenação da taxa instantânea. Foi proposto que o software possibilitasse aos estudantes um suporte tecnológico para apoiá-los na sua atividade e no desenvolvimento do seu raciocínio nesses níveis.

A sistematização proposta por Kaput (1992) traz aspectos que evidenciam como os recursos digitais podem oferecer esse suporte na abordagem de função e taxa de variação. Por isso, foram levantados seis aspectos computacionais que se relacionam diretamente com a abordagem covariacional e que respondem às necessidades levantadas nas análises preliminares, servindo por isso como norteadores para o desenvolvimento do software. Tais aspectos são descritos no próximo quadro.

Os aspectos levantados na análise preliminar revelaram necessidades a serem atendidas no desenvolvimento do software por meio de características e funcionalidades específicas que respondessem a essas necessidades. Em alguns casos, essas necessidades já haviam sido contempladas por meio dos princípios mais gerais do software, como o dinamismo e a conexão dinâmica entre diferentes notações, que contrastam com aspectos do ensino da taxa de variação como a abordagem do conceito em mídias estáticas e o foco em uma única representação.

O esquema abaixo ilustra a articulação para estabelecer os princípios fundamentais do protótipo:

Figura 23: Articulação entre o quadro de Carlson, os aspectos computacionais e as necessidades levantadas na análise preliminar



Fonte: Elaborado pelo autor

As características fundamentais definidas são norteadores a partir dos quais foram elicitados os requisitos do software, constituindo-se um referencial para guiar a concepção dos recursos que o integram. A perspectiva covariacional relaciona-se ao conjunto de recursos que potencializam e favorecem a coordenação da variação entre duas variáveis, já o dinamismo, a interatividade (no sentido atribuído por Kaput (1992)), a conexão dinâmica de notações/representações e o suporte ao raciocínio, referem-se aos recursos baseados nos aspectos computacionais levantados por Kaput (1992) em sua sistematização.

Com base nos norteadores acima, são relacionados no quadro seguinte os requisitos estabelecidos para guiar a concepção do software. Tal quadro reúne características e funcionalidades que foram propostas de serem implantadas apoiando-se nos aspectos levantados por Kaput (1992) e buscando responder às demandas das análises preliminares, ao mesmo tempo inserindo-se na perspectiva dos níveis de raciocínio covariacional de Carlson et al (2002).

As seis linhas do quadro direcionam as características do protótipo por princípios contidos na sistematização de Kaput (1992), as colunas são divididas em três seções, onde a primeira concentra os três primeiros níveis de Carlson et al (2002) (coordenação da mudança, coordenação da direção e coordenação da quantidade), as segunda e terceira colunas concentram as características e funcionalidades para apoiar a coordenação das taxas média e a instantânea, respectivamente.

A fim de que as características e funcionalidades levantadas no quadro seguinte também sejam identificadas como respostas da tecnologia em relação aos aspectos levantados na análise preliminar, elas foram relacionadas com os aspectos do conceito e consequentemente com as dificuldades dos estudantes quando lidam com o conceito.

Quadro 3: Requisitos com base no quadro de Carlson, nas análises preliminares e nas potencialidades computacionais sistematizadas por Kaput

	Coordenação do valor, direção e quantidade de variação em variáveis mudando em conjunto (Níveis 1 a 3)	Coordenação da taxa média (Nível 4)	Coordenação da taxa instantânea (Nível 5)
Variação em um ambiente dinâmico	Permitir variação por meio de um controle deslizante, pela manipulação da própria variável no gráfico ou de um objeto em uma animação, facilitando a coordenação da mudança (valor, direção e quantidade de variação) de variáveis em múltiplas notações. (P1) Permitir a variação simultânea de uma variável enquanto se coordena manualmente a variação em outra.	Permitir variação dinâmica do incremento e do intervalo considerado na taxa média por meio de controles deslizantes ou na manipulação direta do intervalo no gráfico. (P5) Conectar tais objetos a fim de que a variação no intervalo no gráfico implique em variação simultânea no incremento da taxa média. (P5)	Oferecer a opção de traçar o gráfico a partir de um ponto e a taxa de variação da função (P2, P3). Ao deslizar a variável pelo intervalo no gráfico ou em um controle deslizante, a função vai sendo traçada em relação aos valores percorridos no domínio (contínua ou discretamente) e à taxa de variação definida (P3). Permitir o deslize suave no gráfico e nas notações que representem a variação da taxa de variação contínua. Oferecer as opções escala automática e zoom, para uma melhor visualização da ideia de duas quantidades se aproximando indefinidamente (P5).
Conexão dinâmica entre diferentes notações	Conectar notações (gráfico, animação, etc) a uma tabela dinâmica e a registros numéricos para facilitar a visualização da covariação numericamente (P1). Conectar notações a um sistema de coordenadas que trace o gráfico ao se deslizar uma das variáveis incorporadas a essas notações.	Conectar notações para dar suporte à análise da variação da taxa média e à passagem para a taxa instantânea, conectando o gráfico e a tabela às barras dinâmicas sobrepostas ao gráfico. (P1, P2, P5)	Representar a taxa instantânea em diferentes notações e símbolos ou ferramentas para tornar visível a sua variação: barras em cores, gráficos de barras, gráfico de inclinação, movimento de objetos em uma animação, etc. Possibilitar que o gráfico da função seja traçado simultaneamente ao gráfico da taxa, além de conectá-los às notações de forma que exibam a influência da taxa de variação no comportamento do modelo. (P1, P2, P3) Conectar notações para expor a ideia de limite na obtenção da taxa instantânea. (P5) Expor a covariação ao traçar o gráfico conforme se desliza a variável independente, expor o aspecto da aproximação indefinida ao conectar a variação no gráfico à uma tabela dinâmica que permita aproximação numérica por várias casas decimais, expor o aspecto da variação da taxa média e a passagem para a instantânea ao conectar o gráfico e a tabela às barras dinâmicas sobrepostas ao gráfico possibilitando representar os refinamentos no intervalo, etc. (P5)
Transformação de notações de exibição em notações de ação	Permitir ações como determinar e alterar valores (por entradas digitáveis, controle deslizante, movendo o objeto que é ligado à variável) sobre gráficos, sobre objetos da animação e sobre a tabela. Permitir traçar o gráfico da função ou da taxa de variação por meio do deslize da variável no próprio gráfico. Possibilitar ações sobre a tabela que conectem a mudança em uma variável à mudança em outra simultaneamente.	Implementar a função calculadora e permitir que ela realize cálculos diretamente no gráfico ao selecionar pontos para calcular a taxa média de variação no intervalo. (P1, P2) Permitir ações sobre as barras dinâmicas sobrepostas ao gráfico, como alterar o valor do incremento diretamente no gráfico para abordar a variação da taxa média (P2).	Implementar no gráfico a função limite, fazendo com que uma variável se aproxime indefinidamente de um valor (manual ou automaticamente) enquanto outra aproxima-se de um valor limite. (P4, P5) Permitir definir a escala ao arrastar um intervalo no eixo de coordenadas. (P4)

Quadro 4: (Continuação) Requisitos com base no quadro de Carlson, nas análises preliminares e nas potencialidades computacionais sistematizadas por Kaput

	Coordenação do valor, direção e quantidade de variação em variáveis mudando em conjunto (Níveis 1 a 3)	Coordenação da taxa média (Nível 4)	Coordenação da taxa instantânea (Nível 5)
Sobreposição de notações	Sobrepor objetos da geometria dinâmica no gráfico como a reta que indica a inclinação no ponto ou no intervalo. (P1, P4) Permitir a sobreposição de uma ferramenta no gráfico que calcule a taxa de variação ao selecionar dois pontos e cujo valor varie simultaneamente com a variação desses pontos. (P1, P2)	Sobrepor objetos da geometria dinâmica no gráfico (como a reta que representa a inclinação em um ponto ou em um intervalo) (P4) Sobrepor gráficos de barras dinâmicas conectados ao gráfico permitindo parametrização do intervalo de forma a exibir características da variação da taxa média. (P2, P5)	Sobrepor gráficos da função e da taxa de variação (P1, P2, P3, P4) Sobrepor gráficos de barras dinâmicas conectados ao gráfico permitindo parametrização do intervalo, de forma a exibir características em pontos de inflexão e concavidade, variação da taxa e o sinal da taxa.(P2) Permitir carregamento de uma imagem e uma ferramenta de geração do gráfico (aproximação) a partir da imagem para permitir a análise da variação naquele gráfico (P3).
Suporte à cognição nas translações entre notações	Em uma animação do modelo, permitir tanto a repetição da simulação no modo automático (definindo previamente um intervalo a ser percorrido no domínio) como manual (por meio da mobilização da variável) de forma articulada às notações. Criação de "macros" para permitir o armazenamento de funções. (P1, P2) Implementar a ferramenta "rastro", para auxiliar na coordenação da direção.(P1, P2) Implementar a ferramenta "memória" para guardar o valor da variação de um ponto a outro. (P1, P2)	Permitir repetição automática e manual em uma animação do modelo. Criação de "macros" para permitir o armazenamento de funções específicas na coordenação da taxa média de variação. (P1, P2, P3, P4, P5) Implementar a ferramenta "memória" para guardar o valor da variação de um ponto a outro. (P1, P2, P5)	Permitir repetição automática e manual em uma animação do modelo. Criação de "macros" para permitir o armazenamento de funções específicas na coordenação da taxa instantânea de variação.(P1, P2, P3, P4, P5) Implementar a ferramenta "memória" para guardar o valor da variação de um ponto a outro. (P1, P2, P5)
Articulação entre notações matemáticas e não-matemáticas	Articular o gráfico, a tabela e o modelo algébrico a objetos de uma animação que facilitem a visualização da variação (mudança, direção e quantidade) ou a notações como uma barra dinâmica de variação onde a altura da barra varia de acordo com a variação da função ou da taxa de variação. (P1)	Articular o gráfico, a tabela e o modelo algébrico com objetos de uma animação ou notações como barra dinâmica de variação, gráfico de inclinação da reta, gráfico de barras dinâmicas, tabela dinâmica., etc permitindo uma encenação do comportamento da taxa no ponto ou intervalo. (P1, P2, P3, P4, P5)	Articular o gráfico, a tabela e o modelo algébrico com objetos de uma animação ou notações como barra dinâmica de variação, gráfico de inclinação da reta, gráfico de barras dinâmicas, tabela dinâmica., etc permitindo uma encenação do comportamento da taxa no ponto ou intervalo. (P1, P2, P3, P4, P5)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 5: Aspectos da análise preliminar contemplados nos requisitos do protótipo

ASPECTOS DA ANÁLISE PRELIMINAR: aspectos do conceito e cognitivos	
P1	Interpretar o sinal da taxa de variação
P2	Interpretar a taxa de variação graficamente (variação, concavidade e pontos de inflexão no gráfico)
P3	Interpretar a função por sua taxa de variação
P4	Articulações com o contexto geométrico (coeficiente angular, inclinação e as escalas do gráfico; movimento fictivo das retas)
P5	Compreender a taxa instantânea por refinamentos da taxa média (compreensão de limite)

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a articulação proposta, foram estabelecidos os tipos de notações e funcionalidades a serem requisitadas para o protótipo, possibilitando uma abordagem de taxa de variação baseada em múltiplas notações de função. A seguir, são descritas tais notações e as possíveis ações interligadas entre elas, com alguns exemplos ilustrativos das atividades sobre tais notações:

a) Modelo algébrico: Destinado a escrever a expressão algébrica que modela a função ou sua taxa de variação. Os parâmetros escritos neste modelo podem ser controlados na própria notação ou ao serem atrelados a um controle deslizante ou a um objeto em outra notação.

b) Tabela Dinâmica: A tabela dinâmica oferece a possibilidade de abordar a taxa de variação ao conectar-se às demais notações e oferecer uma perspectiva da correspondência dos valores da função ou da taxa de variação quando as variáveis mudam. Essa notação propõe permitir não somente a exibição dinâmica dos valores das variáveis, mas relacionar a variação da variável dependente (diferenças sucessivas) ou a taxa de variação para os intervalos definidos no gráfico. A tabela também oferece as possibilidades de definir relações entre as variáveis, como calcular a razão multiplicativa entre valores sucessivos da tabela ou definir novas funções que os relacionem.

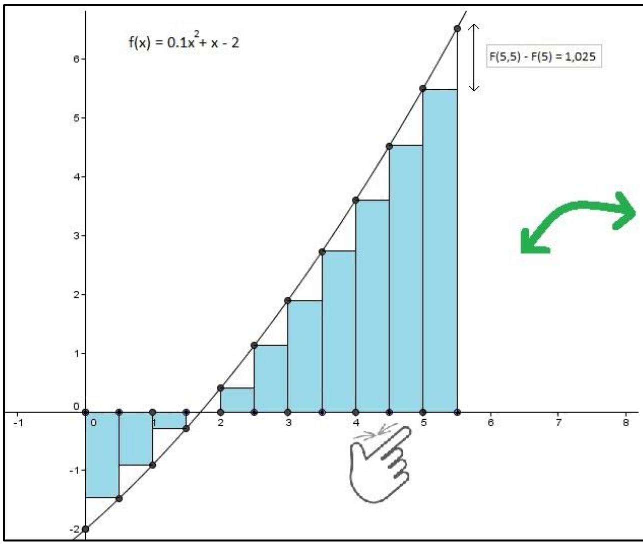
c) Barra de variação: Esta barra tem a função de exibir o valor e o sinal da variação ou taxa. Definida a função ou a taxa de variação, a barra do sinal atrela-se à variação da variável independente. Quando a taxa de variação (ou variação) aumenta ela aumenta em altura, de acordo com o valor assumido pela taxa, o mesmo comportamento para taxas negativas. Além disso exibe cores distintas para identificar de forma prática se a taxa é positiva ou negativa, dando maior possibilidade de concentração na notação em que se dá a ação.

d) Animação: A animação proporciona a encenação do modelo funcional ao atribuir as propriedades matemáticas do modelo a objetos dessa simulação, dando-lhes o comportamento de tais propriedades traduzidos na animação. Logo articulam-se propriedades formais de modelos matemáticos com objetos em uma notação não-matemática fazendo a articulação concreto-abstrato, tanto permitindo que os objetos da animação sejam controlados pelas variáveis instanciadas nos modelos formais como vice-versa.

e) Gráfico de coordenadas: Traça o gráfico da função ou da taxa de variação a partir de diferentes possibilidades de entrada articuladas simultaneamente como o modelo algébrico, a tabela, a animação ou a ação no próprio gráfico por meio do deslize no eixo representando a variação da variável independente. O gráfico de coordenadas conecta-se a diversas notações e permite ações sobre o gráfico da função, como definir a inclinação da reta no ponto dado ou calcular a taxa de variação média no intervalo dado.

f) Gráfico de barras dinâmicas: Este gráfico serve especialmente à variação da taxa de variação no gráfico quando se varia o incremento no intervalo na variável independente. A transição para a taxa instantânea pode ser abordada ao refinar os intervalos com incrementos cada vez menores.

Figura 24: Ilustração da articulação entre o gráfico de barras dinâmicas e a tabela dinâmica



Incremento	f(x) = f(x)=ax2+bx+c			
0,5	a= 0,1	b= 1	c= -2	
x	f(x)	Δ f(x)	Taxa Média	Δ Taxa
0	-2	-	-	-
0,5	-1,475	0,525	1,05	-
1	-0,9	0,575	1,15	0,1
1,5	-0,275	0,625	1,25	0,1
2	0,4	0,675	1,35	0,1
2,5	1,125	0,725	1,45	0,1
3	1,9	0,775	1,55	0,1
3,5	2,725	0,825	1,65	0,1
4	3,6	0,875	1,75	0,1
4,5	4,525	0,925	1,85	0,1
5	5,5	0,975	1,95	0,1
5,5	6,525	1,025	2,05	0,1

Fonte: Elaborado pelo autor

g) Gráfico da inclinação da taxa: Este gráfico articula a taxa de variação ao significado geométrico, associando ao valor da função no ponto, uma reta tangente ao gráfico, além de exibir a sua declividade.

5. DESENVOLVIMENTO DO PROTÓTIPO

Após a sistematização das necessidades do protótipo com base na articulação entre as análises preliminares, o Quadro de Níveis de Raciocínio Covariacional de Carlson et al (2002) e a sistematização de Kaput (1992), deu-se prosseguimento ao desenvolvimento do protótipo em interação com a equipe de desenvolvimento, composta por um engenheiro-pesquisador, autor da pesquisa paralela (TIBÚRCIO, 2016) e um engenheiro-programador desenvolvedor do protótipo e orientador da pesquisa de Tibúrcio (2016), o professor Dr. Franck Bellemain. Tal desenvolvimento, baseado no modelo de processo de software de Tibúrcio (2016), foi executado apoiado em interações entre os pesquisadores deste estudo e os da equipe de desenvolvimento, as quais são descritas nas seções seguintes.

5.1 Primeira interação: explicitação das necessidades essenciais do protótipo

A primeira interação teve como objetivos, por um lado explicitar para a equipe de desenvolvimento as necessidades básicas do protótipo, e por outro servir como uma experimentação do questionário que foi o instrumento usado por Tibúrcio (2016) para coletar desta pesquisa as necessidades do protótipo. À medida que as questões nele contidas sondavam que características e princípios seriam importantes para o software, elas mesmas eram testadas em se cumpriam o papel de delimitar o quanto possível as especificações do protótipo.

As questões foram enviadas pela equipe de desenvolvimento para os pesquisadores deste estudo, e posteriormente foram discutidas em uma disciplina de Educação Matemática e Tecnológica do Programa de Pós-Graduação PPGEDUMATEC-UFPE entre os pesquisadores, os estudantes e o professor dessa disciplina, os quais contribuíram para a reformulação das questões no sentido de aperfeiçoar o instrumento.

Abaixo seguem as questões da primeira interação:

> - Qual conhecimento pretende-se abordar?
> - Quais são as dificuldades de aprendizagem do conhecimento?
> - Por que as simulações configuram-se como opção para superar as dificuldades?
> - Quais as características fundamentais que o ambiente deve conter para atender as necessidades/características da aprendizagem do domínio?

> - Existem ambientes que trabalham com o domínio de interesse, quais são os recursos que contribuem para a aprendizagem e o que falta nesses softwares para contemplar as necessidades do domínio?
> - Existem indicações na literatura para superar dificuldades cognitivas dos conceitos do domínio?
> - Qual é o estado atual do ensino do domínio? Quais são as contribuições e as principais dificuldades geradas pelo ensino atual?
> - Quais são as características do conhecimento que dificultam a aprendizagem e o ensino? (TIBÚRCIO, 2016, p. 59)

Após a discussão e reformulação do questionário, as novas questões foram aplicadas pelos pesquisadores desenvolvedores utilizando um documento on-line compartilhado entre os pesquisadores:

> 1) Qual campo de conhecimentos pretende-se abordar? Dentro deste campo de conhecimentos delimite conceitos e definições que serão trabalhadas e qual o foco que será dado ao conhecimento trabalhado.
> 2) Levando em consideração as tipologias de software educacionais existentes (tutoriais, jogos, simuladores, etc.) qual tipo de software pretende-se criar e quais são as justificativas para essa escolha?
> 3) Quais as características fundamentais que o ambiente deve conter para atender as necessidades/características da aprendizagem do domínio?
> 4) Existem ambientes que trabalham com o domínio de interesse, quais são os recursos que contribuem para a aprendizagem e o que falta nesses softwares para contemplar as necessidades do domínio?
> 5) Existem indicações na literatura que contribuam para o desenvolvimento do conhecimento que será trabalhado no software relacionadas a área cognitiva?
> 6) Qual é o estado atual do ensino do domínio? Quais são as consequências desse ensino?
> 7) Quais são as características do conhecimento que dificultam a aprendizagem? (TIBÚRCIO, 2016, p. 63)

Para responder às questões levantadas, recorreu-se tanto aos princípios norteadores da pesquisa, com base na fundamentação teórica, como às necessidades apontadas pelas análises prévias.

Como resposta à primeira questão, o conhecimento a ser abordado pelo protótipo é a própria taxa de variação das principais funções reais de uma variável real, bem como de funções obtidas por operações básicas (adição, subtração, multiplicação e quociente) e pela composição com essas funções. Além disso, foi especificado que o conceito será abordado sob uma perspectiva variacional de função, no contexto da covariação, com base no Quadro de ações e níveis mentais no raciocínio covariacional, de Carlson et al (2002), tendo como principais conceitos a taxa de variação média e a taxa de variação instantânea (como sendo a derivada) das funções reais. De acordo com as necessidades apontadas preliminarmente, esses conceitos devem ser abordados em notações diversas (gráfico, tabela, modelo algébrico, etc) e articuladas com o contexto geométrico da derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico.

Com relação às tipologias de softwares educacionais existentes (questão 2), foi decidido por um ambiente computacional que permitisse simulações dinâmicas, interativas e em múltiplas representações, a justificativa é que esse tipo de ambiente possibilita um tratamento de caráter variacional da função e da sua taxa de variação, permitindo abordar o conceito por ferramentas que auxiliem na análise do que acontece com a taxa de variação enquanto se varia as variáveis da função. As características fundamentais que esse ambiente deveria conter (questão 3) foram fundamentadas nos quadros teóricos: perspectiva covariacional, dinamismo, interatividade, conexão dinâmica de múltiplas representações relacionadas à taxa de variação e suporte ao raciocínio dos estudantes por meio de ferramentas inseridas nos contextos acima.

Na questão 4 foi feita uma breve análise dos softwares que podiam abordar a taxa de variação e as suas limitações para contemplar as necessidades dos estudantes com o conceito. Foram citados quatro softwares, e com base na análise do autor, explicitaram-se seus limites.

O *Modellus* (TEODORO et al, 1997) permite simulações do modelo funcional ao incorporá-lo a diferentes objetos em uma animação e também possibilita representar e descrever a encenação do modelo por diferentes representações conectadas ao modelo algébrico. A abordagem covariacional é facilitada nesse software, pois permite encenações de modelos em que a dependência entre as variáveis fica mais clara em “gráficos animados”, nos quais a curva vai sendo traçada conforme se varia a variável independente ou algum parâmetro da função. Com relação aos limites do *Modellus,* um deles é que a articulação entre as representações e as possibilidades de ação sobre o gráfico principal e a tabela não permitem manipulações diretas sobre eles, o que os caracteriza mais como notações de exibição do que de ação (KAPUT, 1992). Outro ponto é que, de forma geral, as simulações dependem do tempo como variável independente, o que restringe o modelo ao tempo como variável.

O *Geogebra* (HOHENWARTER et al, 2015) articula a álgebra e a geometria dinâmica, com múltiplas representações conectadas dinamicamente. O modelo algébrico pode ter seus coeficientes conectados a controles deslizantes, aumentando o dinamismo. A tabela (planilha) permite ações como criar funções para relacionar variáveis (semelhante às planilhas eletrônicas usadas atualmente), o que permite uma abordagem numérica dinâmica da covariação entre variáveis, além da conexão ao gráfico e ao modelo algébrico, o que facilita a abordagem da taxa de variação. Um ponto que na visão do autor, restringe esse software no aspecto funcional é justamente o fato de não ser um software com foco *a priori* em funções, e sim na articulação álgebra-geometria dinâmica, o que faz com que aspectos puramente funcionais não tenham maior foco no ambiente, como a definição do domínio ou de um intervalo específico, a dependência entre variáveis ou a construção do gráfico variacionalmente.

Outro software, o *Winplot* (PARRIS, 1985), traça o gráfico da função a partir do modelo algébrico, que é conectado a controles deslizantes. A representação tabular é apenas para fins de exibição dos valores das variáveis, não sendo permitida a ação direta sobre o gráfico ou a tabela, apenas a partir do modelo algébrico. Como a função principal do software é traçar o gráfico, não há conexão com outros contextos como a geometria dinâmica ou a física, por isso as simulações são bastante restritas, dificultando uma abordagem covariacional.

Já o *Casyopée* (LAGRANGE, 2014) modela relações funcionais a partir de situações da geometria dinâmica e articulando múltiplas representações de função, além disso, permite o tratamento do modelo algébrico por um CAS (computer algebra system). A proposta do *Casyopée* é de uma perspectiva covariacional, dinâmica e articulada à geometria, o que valoriza o seu potencial principalmente para a abordagem da taxa instantânea, sua limitação para a abordagem de taxa de variação é a falta de uma melhor articulação da representação tabular com as demais representações e as possibilidades de manipulação direta sobre essa representação e sobre o gráfico.

De modo geral, o que foi explicitado para a equipe de desenvolvimento em termos de limitações dos softwares citados, é que como esses softwares não foram produzidos com o foco na abordagem da taxa de variação, faltam-lhes ferramentas específicas que suportem a atividade dos estudantes nesse conceito em um contexto covariacional, o que justificou o desenvolvimento de uma nova ferramenta que agregasse aos valores existentes nesses softwares e suprisse as limitações explicitadas.

As questões 5, 6 e 7 do questionário exploraram os aspectos cognitivos, didáticos e do próprio conceito de taxa de variação. Esses aspectos foram discutidos na seção que tratou dos requisitos do protótipo com base nas análises prévias, por isso fundamentaram fortemente as respostas à essas questões.

Os aspectos cognitivos (questão 5) apontaram para uma necessidade da abordagem do conceito articulando e conectando diferentes representações, além de uma perspectiva variacional dinâmica. Na questão sobre o estado atual do ensino do domínio e suas consequências (questão 6), os quatro aspectos principais apontados nas análises prévias foram a abordagem do conceito em "mídias estáticas" (o que requer um esforço mental muito grande para visualizar a variação), as abordagens que focalizam no tratamento algébrico (limitam uma visão variacional), a forma desconexa como a taxa é definida nos Ensinos Médio e Superior (focos desconectados do conceito) e os problemas na articulação com o contexto geométrico, como a mera importação do conceito de reta tangente da geometria quando é abordada a taxa instantânea ou o aspecto gráfico da inclinação da reta e suas associações com a taxa de variação (podem gerar entraves quando não abordados com a devida importância).

Já os aspectos do conceito de taxa de variação apontados nas análises prévias e retomados na questão 7 relacionavam-se a cinco pontos principais: interpretação variacional da taxa de variação e dos aspectos do gráfico da função; a variação da taxa, em que o estudante precisa lidar com a variação da variação; o sinal da taxa, que quando negativa foi relacionada à dificuldade de interpretação por estudantes; a passagem da taxa média para a instantânea, na qual a compreensão do conceito de limite torna-se fundamental, e por fim, os aspectos da articulação com a geometria já citados nos aspectos do ensino.

5.2 Segunda interação: refinamento das questões

Na segunda interação entre os pesquisadores, foi aplicado mais um questionário pela equipe de desenvolvimento, por meio do qual alguns conceitos e princípios emergidos na primeira interação foram revisitados para uma maior compreensão do seu papel e sentido no protótipo.

Em seguida são descritas as questões que fizeram parte dessa segunda interação, aplicadas por meio de um questionário on-line compartilhado entre os pesquisadores:

> 1) O que o cliente entende por "simulações dinâmicas"? Quais recursos tecnológicos poderiam viabilizar tal situação desejada?
> 2) Qual o conceito de "interatividade" que o cliente pretende trabalhar?
> 3) As múltiplas representações fazem referência aos possíveis registros de representação do conceito de função (algébrica, tabular, gráfica, etc). Como o cliente pretende viabilizar a visualização múltipla desses registros?
> 4) Como o cliente pretende configurar o "suporte ao raciocínio dos estudantes"? (TIBÚRCIO, 2016, p. 69)

A dinâmica dessa interação possibilitou respostas e réplicas às questões levantadas, fazendo com que complementos às respostas, sugestões ou esclarecimentos de termos não compreendidos fossem feitos no próprio corpo do questionário e em momentos distintos. Na primeira questão foi discutido o termo simulações dinâmicas e de que forma esse aspecto poderia ser implementado no protótipo.

Quadro 6: Discussão da questão 1

Engenheiro-Pesquisador: O que o cliente entende por “simulações dinâmicas”? Quais recursos tecnológicos poderiam viabilizar tal situação desejada? Pesquisador do estudo - usuário: A expressão simulações dinâmicas é usada no sentido de que os objetos do ambiente possam ser manipulados dinamicamente, como as variáveis em um gráfico de coordenadas ou um objeto ao qual é atrelado um modelo matemático que modele sua movimentação na tela. O termo também faz referência ao dinamismo na conexão entre notações e representações, por exemplo, ao variar um ponto no gráfico mostrar o valor da variável sendo modificado simultaneamente, ou ainda, mostrar uma sequência de valores em uma tabela que são modificados simultaneamente à variação no gráfico. Sugestão do Engenheiro-Pesquisador: Para a proposta de dinamismo no ambiente que será criado é possível utilizar o recurso *touchscreen* (bem como aproximação e distanciamento da tela possibilitados pelo recurso). Réplica do pesquisador do estudo - usuário: O *Touchscreen* potencializa ainda mais o dinamismo do ambiente por permitir um contato suave e contínuo com a tela, dando mais controle da ação de variar pelo sujeito e evitando movimentos pausados e particionados pelo *mouse* ou *mousepad.*

A funcionalidade da tela sensível ao toque (*touchscreen*) foi uma característica pensada para o protótipo, de forma a permitir a sua implementação em dispositivos móveis e potencializar o dinamismo, no entanto, no decorrer do projeto esta proposta não se tornou viável para a primeira versão do software e ficou para uma fase futura de implementação.

Na questão 2 foi esclarecido aos desenvolvedores o sentido do conceito de interatividade, uma das características fundamentais do software:

Quadro 7: Discussão da questão 2

Engenheiro-Pesquisador: Qual o conceito de "interatividade" que o cliente pretende trabalhar? Pesquisador do estudo - usuário: O sentido dado por Kaput (1992) para mídia interativa, no contexto de sua discussão, é o que vê a interação como uma contribuição física do sistema de notação e do meio no qual ele está instanciado, ou seja, uma resposta do sistema a uma ação do usuário. Ele diferencia meio inerte e meio interativo, o primeiro é caracterizado como aquele em que a única mudança de estado, dada uma ação do usuário, é a exibição da entrada. O autor coloca como característica chave para as mídias interativas, a adição de algo novo a ação do usuário, requerendo sua reposta, ele aponta dois aspectos geralmente presentes em mídias interativas: *"limitações ou suportes embutidos"* (como por exemplo, a auto-escala que define automaticamente as escalas do eixo y conforme o eixo x) e *"agentes que realizam ações para o usuário virtualmente"* (como realizar e checar cálculos, dar feedback da ação do usuário ou gravar ações e resultados para uso posterior).

Na terceira questão foi abordada a configuração das múltiplas representações na tela do software, de que forma registros distintos poderiam ser visualizados:

Quadro 8: Discussão da questão 3

Engenheiro-Pesquisador: As múltiplas representações fazem referência aos possíveis registros de representação do conceito de função (algébrica, tabular, gráfica, etc). Como o cliente pretende viabilizar a visualização múltipla desses registros? Sugestão do Engenheiro-Programador: A divisão da tela em partes, ou janelas que possam ser minimizadas (com o recurso de selecionar múltiplas, ou apenas uma) é uma opção para a representação de vários objetos ao mesmo tempo. Pesquisador do estudo - usuário: Além da possibilidade da divisão da tela e de selecionar uma ou mais representações para possibilitar o trabalho com as principais representações, é pretendido contemplar um dos aspectos levantados por Kaput (1992), a sobreposição de notações/representações, quando esta for possível. A sobreposição de notações visa possibilitar por exemplo sobrepor dados numéricos ao gráfico ou objetos da geometria dinâmica como uma reta secante para representar a taxa média de variação entre dois pontos. Além disso, pretende-se trabalhar com gráficos sobrepostos como o gráfico da função e da taxa de variação da função sendo traçados sobrepostos e simultaneamente ou um gráfico de barras dinâmico que se sobreponha ao gráfico para representar a variação da taxa média em um intervalo.

Na última questão foi abordada a implementação dos suportes ao raciocínio dos estudantes no software. Esses suportes ganham importância porque o software possibilitará uma abordagem de representações múltiplas e de forma simultânea, fazendo com que os processos envolvidos nas ações realizadas nele sejam difíceis de serem processados na mesma velocidade pelos estudantes:

Quadro 9: Discussão da questão 4

Engenheiro-Pesquisador: Como o cliente pretende configurar o “suporte ao raciocínio dos estudantes”?   Pesquisador do estudo - usuário: Kaput (1992) refere-se a esse suporte como necessário principalmente em uma abordagem que conecte ações em diferentes sistemas de notação. Para o autor, o processo de translações entre sistemas de notações demanda uma carga cognitiva acentuada, principalmente em um sistema onde as ações realizadas se perdem no decorrer da atividade do estudante, não permitindo o seu resgate. Exemplos de suporte ao raciocínio segundo o autor seriam a “gravação repetível de uma ação” para possibilitar a reprodução da ação e a desvinculação de uma sequência nas ações de translação entre sistemas, o que permite que ações em um sistema A possam ser refletidas em B imediatamente ou quando o sujeito estiver pronto para visualizá-las.   No contexto da taxa de variação e da perspectiva covariacional, ainda foram elencadas outras funcionalidades importantes para suportar o raciocínio dos estudantes: ● Rastro da variável (discreto e contínuo);   ● Variação automática (por um botão *play*) ou manual (ao manipular as variáveis e objetos ligados a ela);   ● Macros e possibilidade de definir novas operações (como definir uma nova função/operação em uma planilha);   ● Ferramenta de memorização da variação ou da taxa de um intervalo ao selecionar dois pontos do gráfico.

Esta interação permitiu que a equipe de desenvolvimento estabelecesse as características norteadoras para o desenvolvimento do protótipo, levando o processo às etapas posteriores.

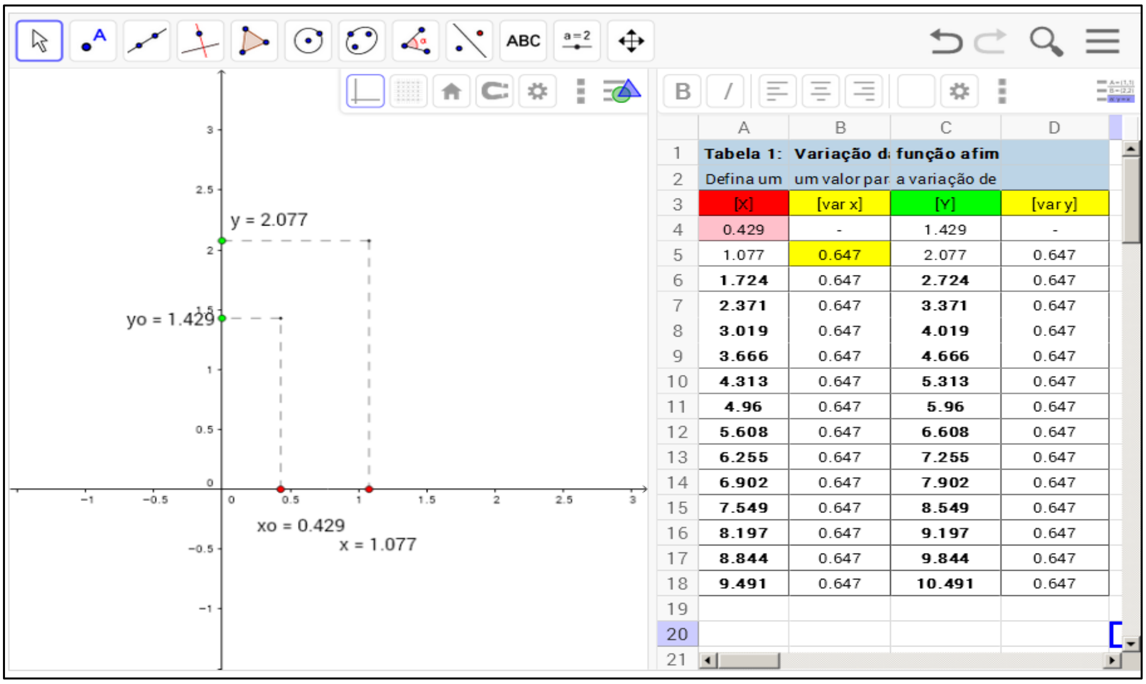
5.3 Detalhamento dos recursos requisitados: prototipação com o uso do software GeoGebra

No processo de desenvolvimento do software, uma ferramenta bastante útil para comunicar de forma mais eficaz os recursos e as funcionalidades necessárias ao software, foi a prototipação utilizando o software *GeoGebra.* O mesmo foi escolhido por se inserir em um contexto bastante próximo do protótipo em desenvolvimento e permitir a construção de simulações em articulação com a geometria dinâmica e com múltiplas notações de função.

Foram construídas simulações para comunicar apenas os recursos requisitados para serem implantados no software, desconsiderando questões de *layout*, botões e demais aspectos construtivos. Os recursos ou funções simuladas foram as seguintes:

a) Tabela dinâmica: a tabela dinâmica foi um recurso considerado importante de ser simulado e comunicado aos pesquisadores desenvolvedores, devido à sua importância para a covariação e a necessidade da articulação dessa representação com as demais. Era preciso reforçar a importância de que a tabela não apenas refletisse simultaneamente as ações no gráfico, no modelo algébrico e outros, mas que ela mesma fosse uma notação de ação, conforme descrito por Kaput (1992), na qual fosse possível executar ações a serem refletidas tanto na própria tabela como em outras notações do software.

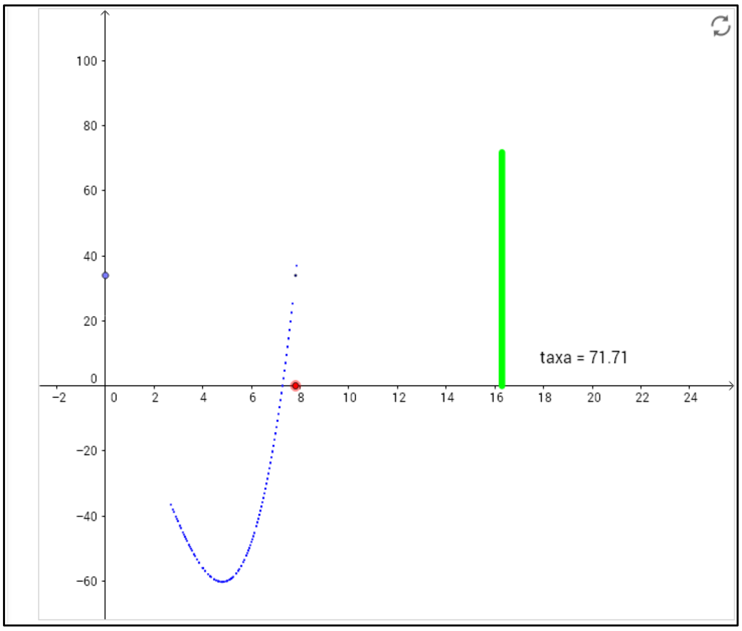
Figura 25: Simulação da tabela dinâmica articulada ao gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor com o uso do GeoGebra

b) Barra de variação: A barra de variação foi idealizada para ser um objeto sobreposto ao gráfico, que expressasse a variação de forma dinâmica, simples e acessível visualmente. Ao ser acionada, a "altura" da barra dinâmica variaria com a mudança da variável ou da relação à qual ela fosse atrelada, por exemplo, a variação de y. Uma característica dessa barra seria a representação do sinal da variação por cores distintas, ajudando a visualizar intervalos do gráfico onde a variação fosse negativa.

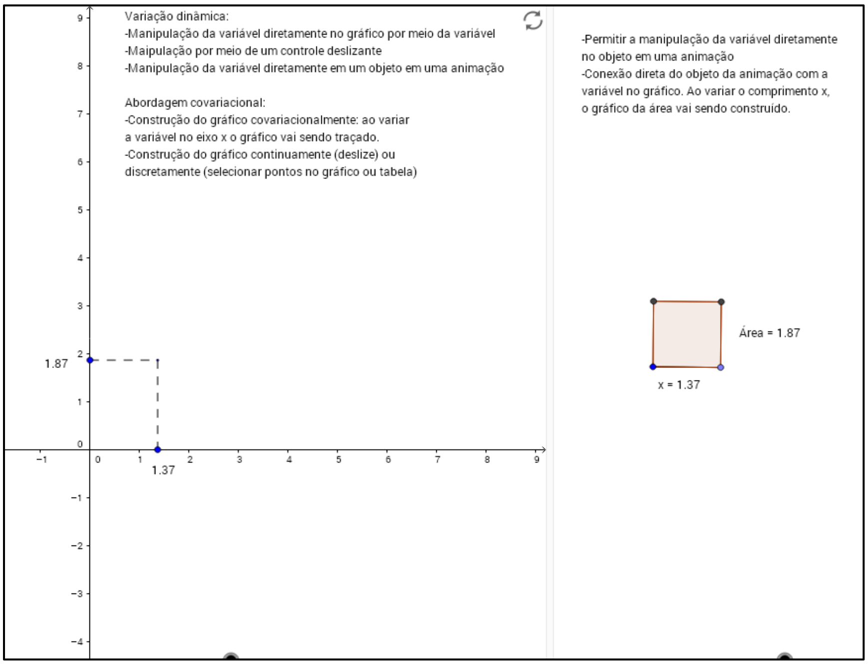
Figura 26: Simulação da barra dinâmica de variação



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra

c) Animação: O recurso da animação foi idealizado para possibilitar a articulação entre notações, tanto entre notações matemáticas como entre notações matemáticas e não matemáticas, de forma que fosse possível incorporar uma variável em objetos nessas notações e fazê-los variar de forma automática ou manual, caracterizando dessa forma uma manipulação indireta da variável. Um exemplo seria atrelar uma partícula à variável y e outro seria atrelar um quadrado à sua área em função da variável x que expressa o valor do lado.

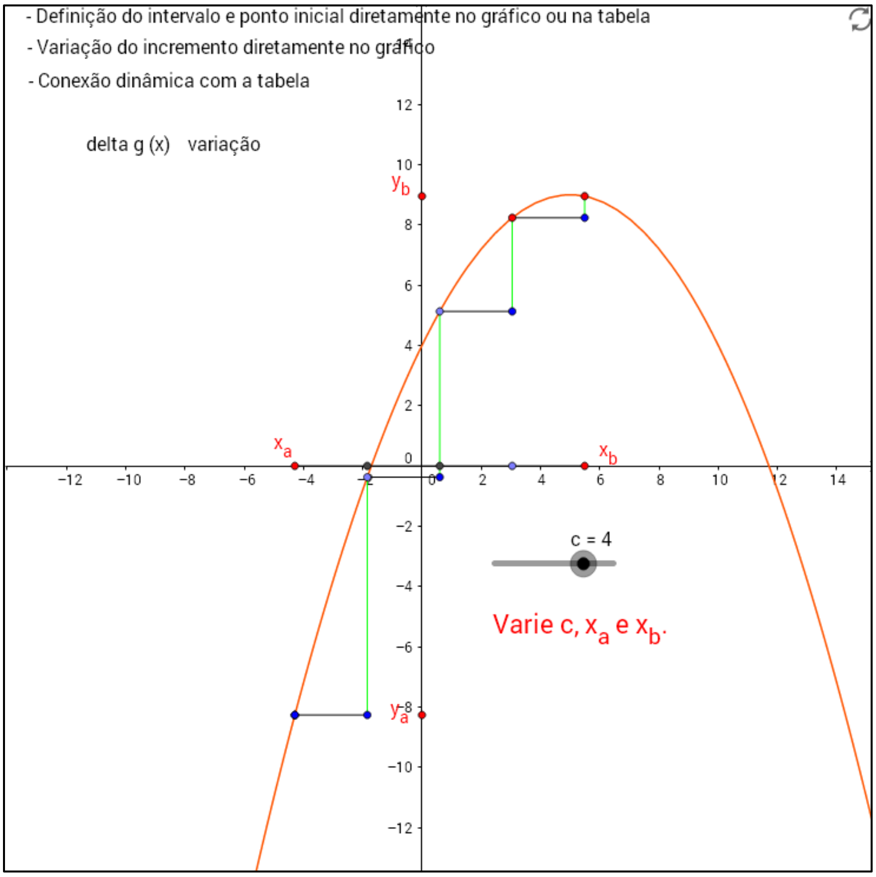
Figura 27: Simulação da articulação do gráfico com uma animação



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra

d) Barras dinâmicas: As barras dinâmicas desempenham um papel fundamental na análise da variação das funções abordadas neste estudo. Elas são caracterizadas por segmentos que lembram "escadas", em que o segmento em x (variação de x) é fixo e o segmento em y é variável conforme a variação de y. Essa ferramenta é altamente articulada com as demais representações, principalmente, a tabela, na qual a alteração dos valores é refletida nas barras simultaneamente.

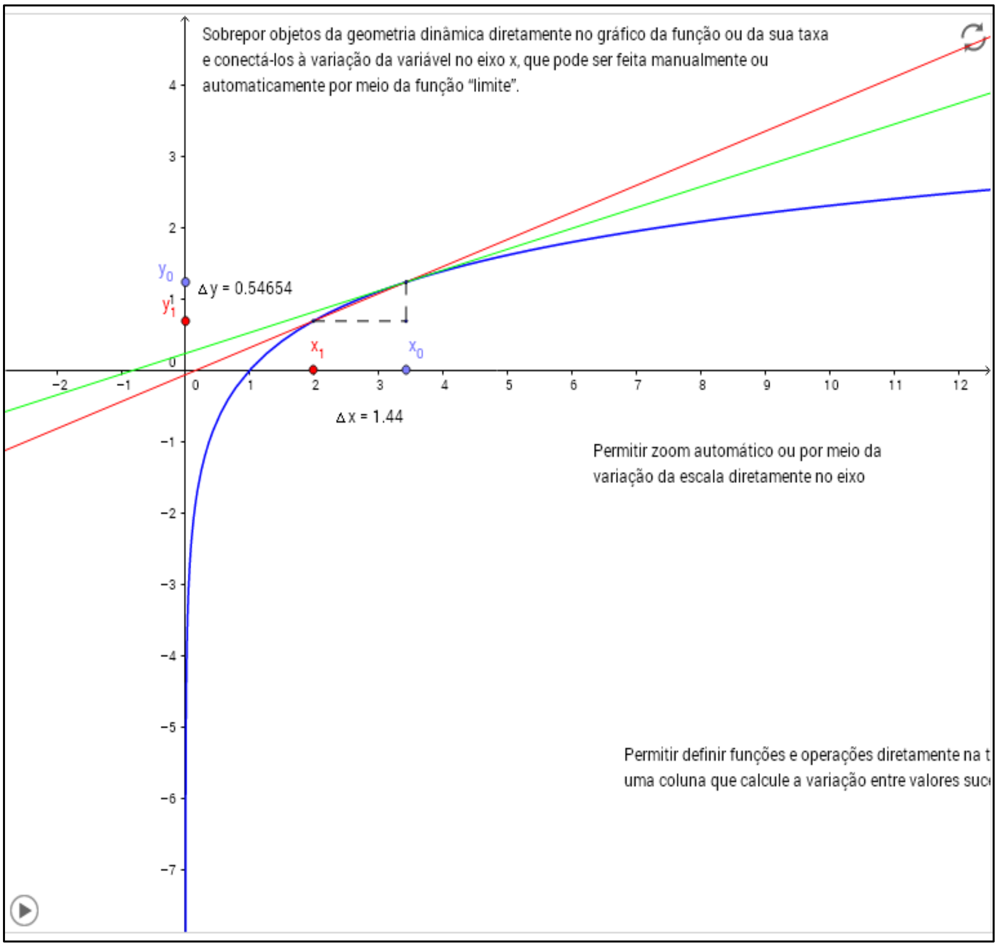
Figura 28: Simulação de barras dinâmicas sobrepostas ao gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra

e) Reta de inclinação: Essa funcionalidade abrange a sobreposição de retas tangentes ou secantes no gráfico. Considerando a importância de tais retas e da sua declividade na interpretação geométrica da taxa de variação média e da instantânea, bem como da passagem da média para a instantânea, foram consideradas como uma ferramenta necessária ao protótipo.

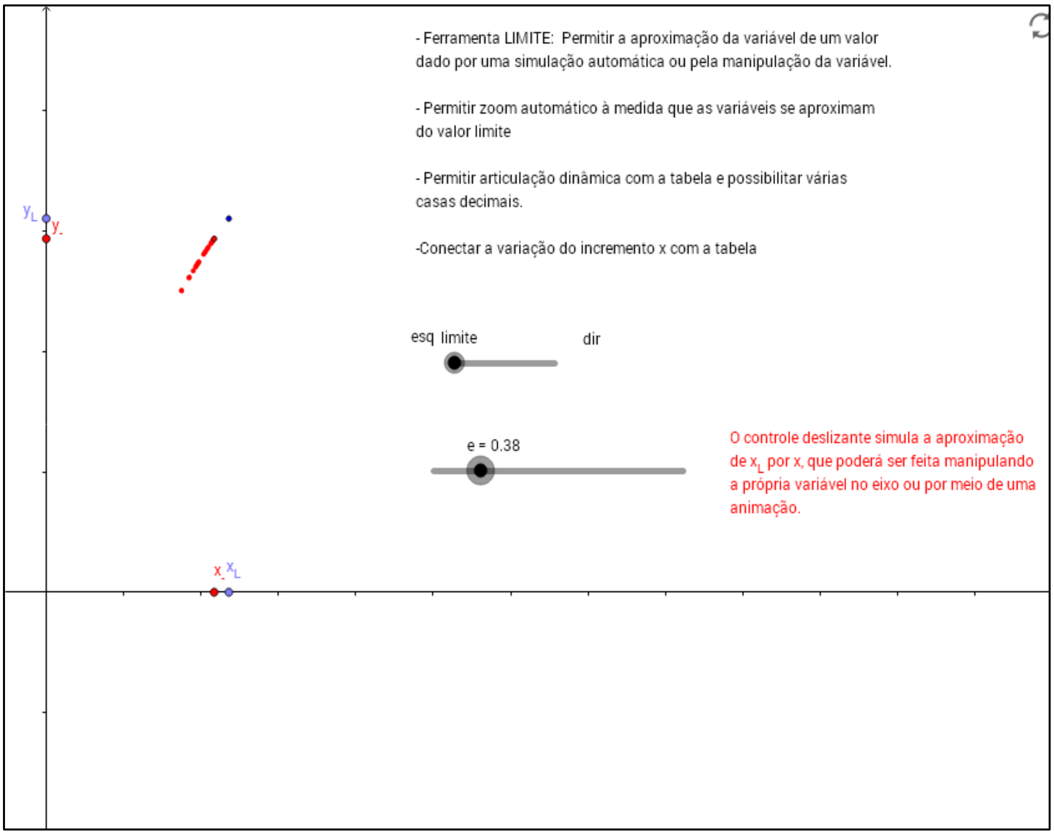
Figura 29: Simulação das retas tangente e secante ao gráfico



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra

f) Ferramenta limite: Dada a importância do conceito de limite na passagem da taxa média para a taxa instantânea, a abordagem dinâmica e covariacional desse conceito se tornou essencial no protótipo. Conforme a figura seguinte, foi simulada a ferramenta limite com a variável x se aproximando de um valor x_0 pela esquerda ou direita, enquanto a variável y se aproxima do valor associado y_0. A diferença entre x e x_0 é tão próxima quanto o estudante queira (respeitando-se os limites da tecnologia) sendo possibilitada pelo zoom dinâmico e articulada com a tabela dinâmica.

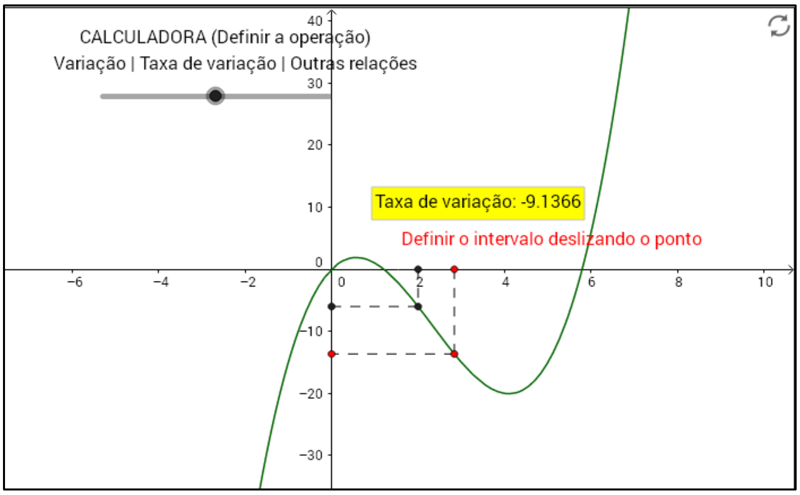
Figura 30: Simulação da ferramenta limite



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra

g) Calculadora: É um recurso amplamente usado em diversos softwares, no entanto para o protótipo em desenvolvimento a calculadora seria uma ferramenta para dar um suporte ainda maior à análise da variação. Com a sua articulação com as demais representações, seria possível por exemplo selecionar um intervalo do gráfico e calcular a taxa de variação nele, ou selecionar dois valores da tabela e calcular a taxa média entre eles.

Figura 31: Simulação da ferramenta calculadora no gráfico



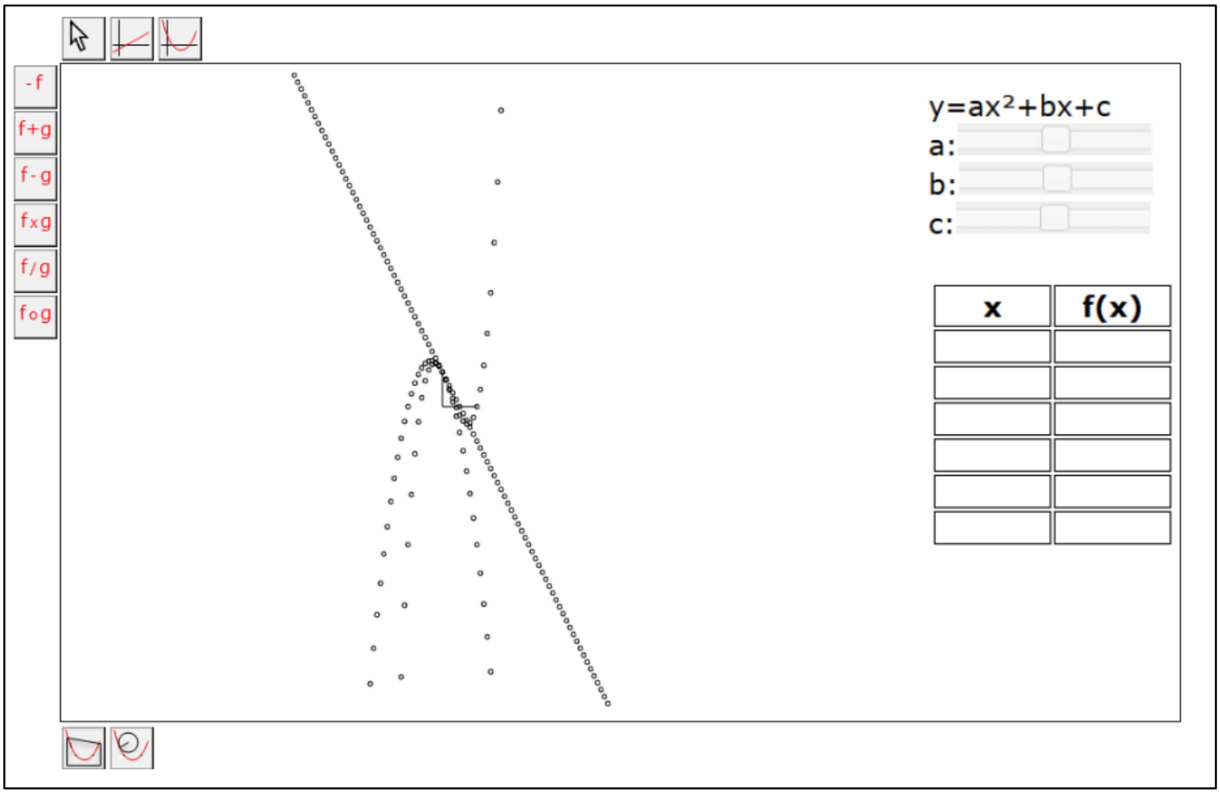
Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra

5.4 Prototipação do layout, funções e recursos: uso de telas múltiplas em um documento on-line compartilhado

Nesta fase do desenvolvimento, o engenheiro-programador já havia disponibilizado um *layout* inicial, com os primeiros ícones associados às funções que seriam implementadas. Esse *layout* preliminar serviu de base para mais uma forma de prototipação, usando telas múltiplas em um programa de apresentação de slides on-line, que foi compartilhado entre os pesquisadores envolvidos.

Os autores deste estudo e os pesquisadores desenvolvedores participaram dessa prototipação, em que algumas funções e recursos requisitados nas fases anteriores foram inseridos no *layout*. Na figura seguinte, pode-se perceber que o engenheiro-programador inseriu ícones associados às funções afim e quadrática, abordadas neste estudo, e às operações que podem ser aplicadas a elas. Além disso, inseriu as principais representações e duas ferramentas para a análise da variação, uma delas referente à taxa média e outra à tangente.

Figura 32: Layout, representações e recursos iniciais



A proposta dessa segunda prototipação foi utilizar as telas múltiplas para descrever as possíveis ações e opções do menu, tanto dos recursos que já estavam representados nesse primeiro *layout* quanto dos que ainda seriam implementados. Com isso, tomou-se por base esse *layout* e a partir dele foram inseridos os recursos e as notações com os menus e ações associadas a eles.

Figura 33: Inserção dos recursos pendentes no layout inicial

Por meio de *hiperlinks*, os menus dos recursos e das representações foram ligados às telas seguintes, que mostravam as opções associadas aos menus ou os objetos ligados às representações, conforme pode ser visto na sequência de figuras a seguir:

Figura 34: Ações ao clicar no menu "Modelo"

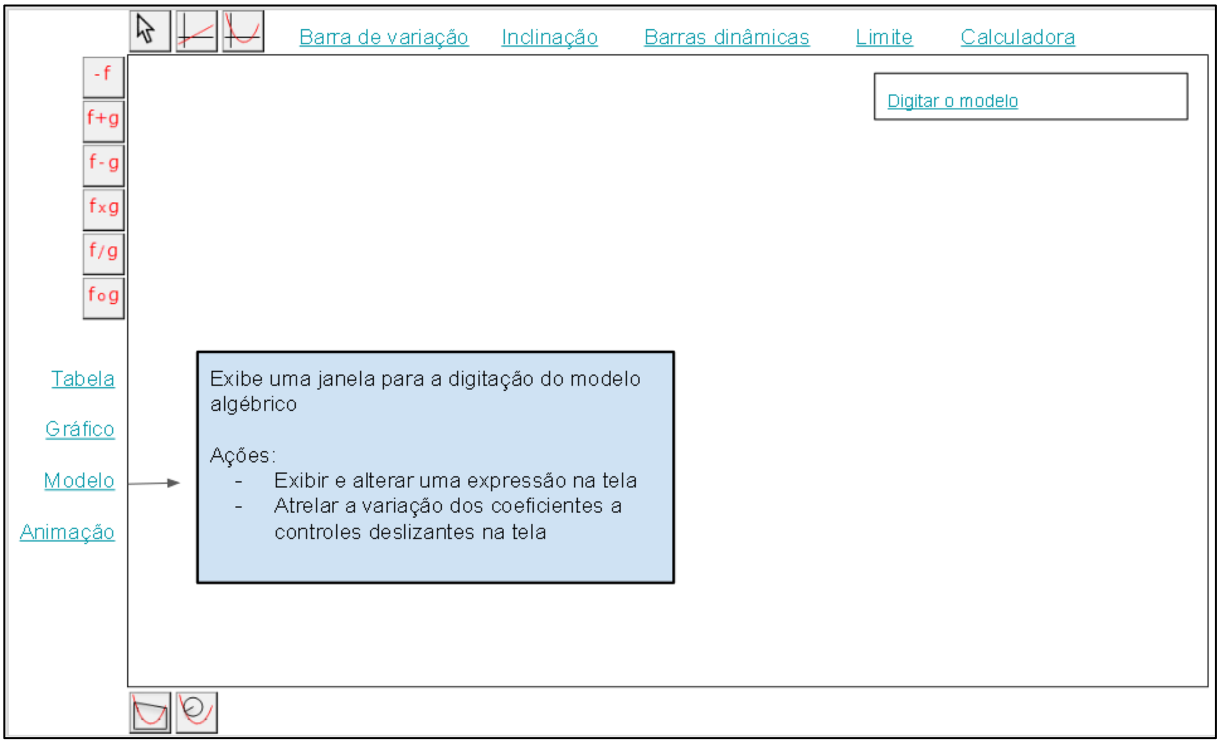
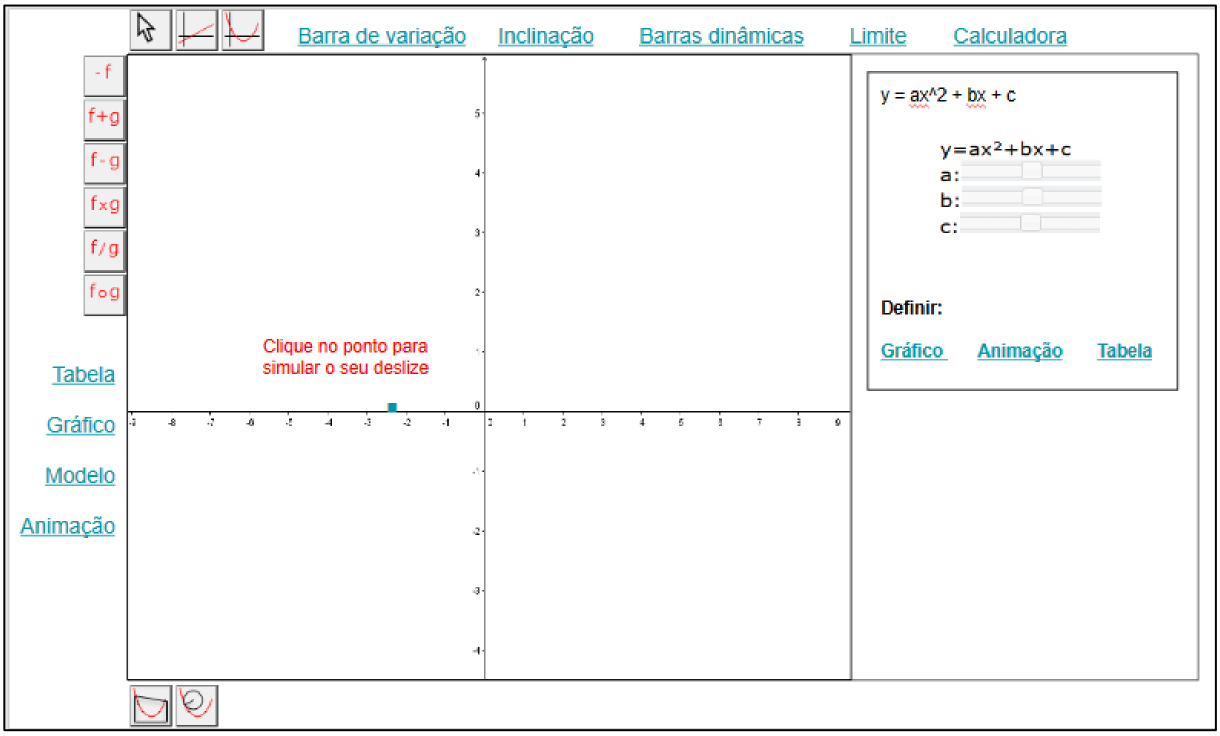


Figura 35: Opções disponíveis ao definir o modelo algébrico

Figura 36: Ações ao clicar em definir "Função" com o modelo algébrico

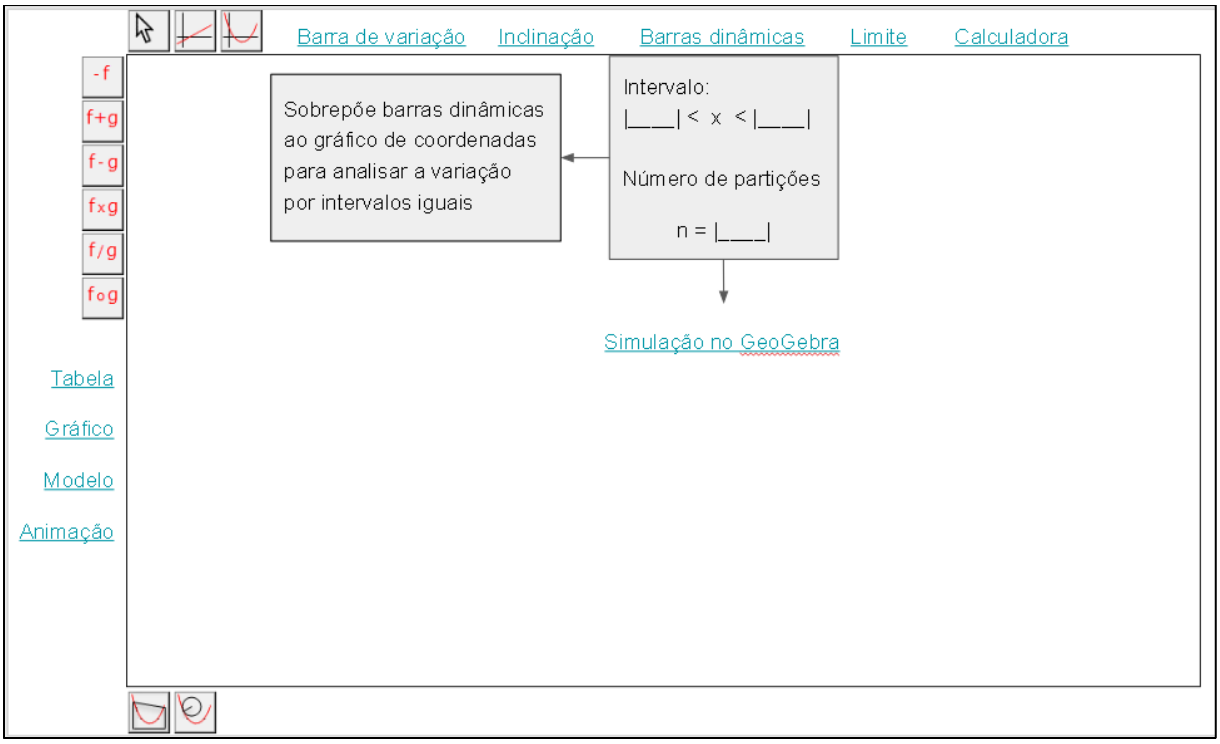
Figura 37: Ações ao selecionar o parâmetro e clicar na opção de gerar "Controle deslizante"

Figura 38: Ações ao selecionar os parâmetros e clicar na opção definir "Gráfico"



Os menus referentes às ferramentas da barra de variação, inclinação, barras dinâmicas, limite e calculadora, além de representados nessa prototipação, foram ligados por meio de um *hiperlink* à simulação da ferramenta no GeoGebra, conforme visualizado na figura seguinte.

Figura 39: Ações ao clicar na ferramenta “Barras dinâmicas”



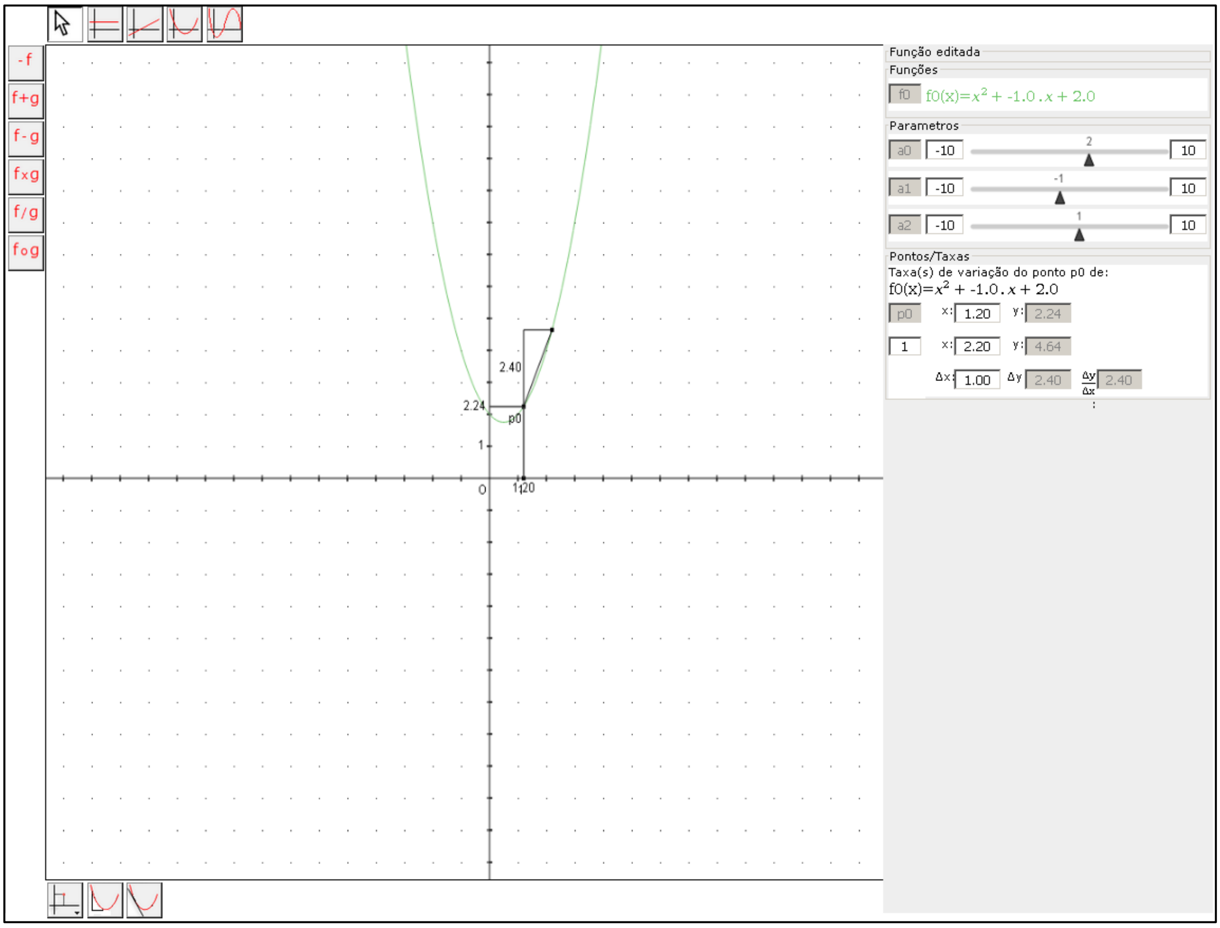
A prototipação em telas múltiplas forneceu aos pesquisadores desenvolvedores, ainda mais informações sobre de que forma os recursos e as representações implementadas no protótipo seriam articuladas, além de descrever as possíveis ações associadas a cada recurso ao clicar no menu correspondente. Dessa forma, prosseguiu-se com o desenvolvimento da primeira versão do protótipo.

5.5 Primeira versão do protótipo

A primeira versão do protótipo foi compartilhada pelos pesquisadores desenvolvedores em um ambiente on-line, no qual os pesquisadores deste estudo tiveram livre acesso para conhecer o protótipo, explorar, analisar e fornecer *feedback* sobre a contemplação das necessidades comunicadas e dos ajustes necessários.

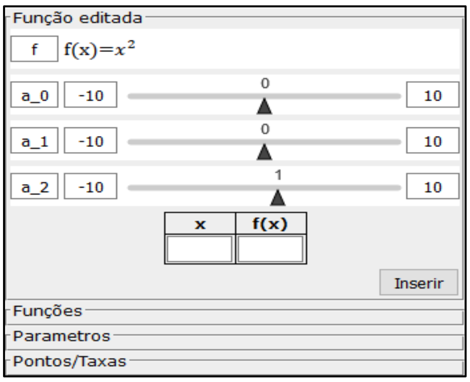
Na figura seguinte é apresentada a tela da primeira versão, já as funcionalidades do software e as principais ferramentas são descritas em seguida.

Figura 40: Tela da primeira versão do software



Os ícones na parte superior da tela se referem aos tipos de função, com exceção do primeiro ícone da esquerda para a direita, que se refere à seleção de um objeto no gráfico, os demais se referem à função constante, afim, quadrática e polinomial de grau 3, respectivamente. Ao clicar no ícone referente a cada função, o estudante tem disponível na janela "Função Editada" os controles deslizantes para escolher os valores de cada coeficiente, após isso deverá clicar em inserir para que o software trace o gráfico da função.

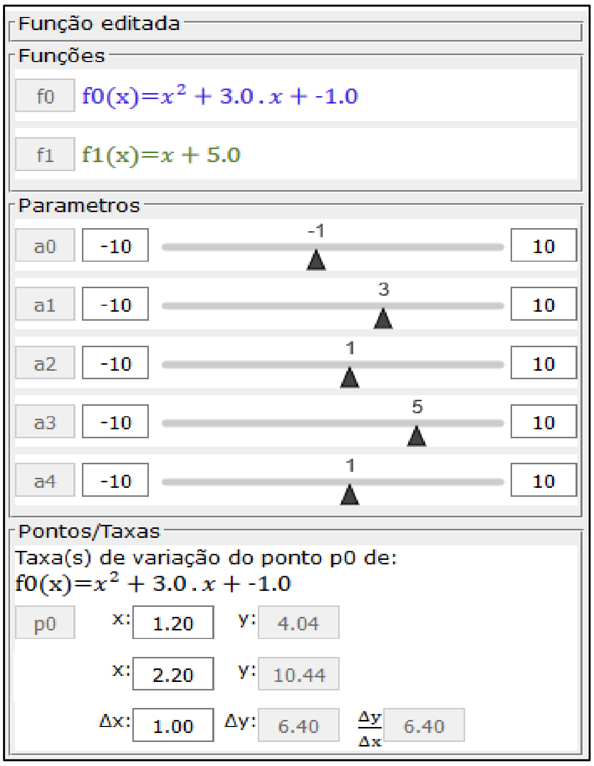
Figura 41: Janela "Função Editada"



Os ícones da parte lateral esquerda estão associados às operações com funções: função oposta, soma, diferença, produto, quociente e função composta. Já os ícones da parte inferior da tela se referem, da esquerda para a direita, às ferramentas: ponto, taxa média de variação e reta tangente.

A tela do software foi dividida em duas partes, entre o gráfico e as demais janelas, privilegiando o gráfico. Além da já citada janela "Função Editada", foi inserida uma janela chamada "Funções" que exibe o modelo algébrico das funções traçadas. Caso seja necessário editar uma função, mudar o valor dos seus coeficientes, essa ação se dará na janela "Função Editada" ou na janela "Parâmetros".

Figura 42: Janelas "Funções" e "Parâmetros"



A janela "Pontos/Taxas" foi criada para exibir pontos do gráfico e para calcular a taxa média de variação em relação a esses pontos, por meio da ferramenta "Taxa média", que é acionada ao clicar no ícone correspondente na parte inferior e em um ponto do gráfico. O valor de "delta x" pode ser definido tanto no gráfico como na janela "Pontos/Taxas".

Figura 43: Janela “Pontos/Taxas”

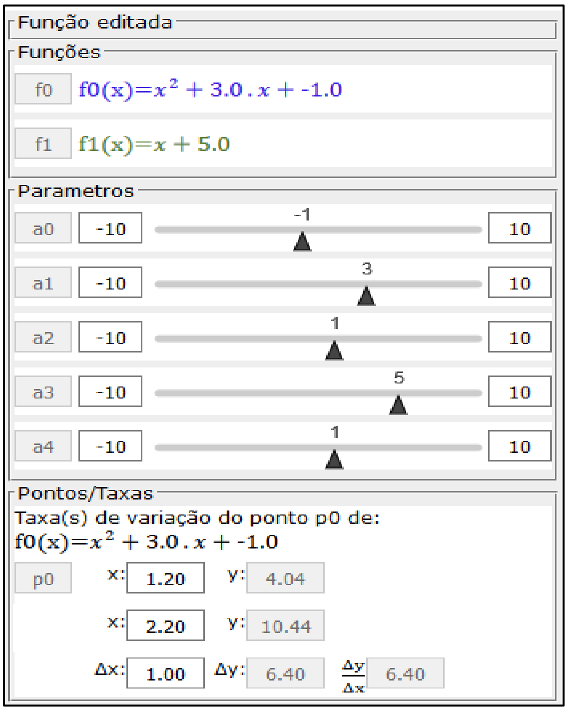
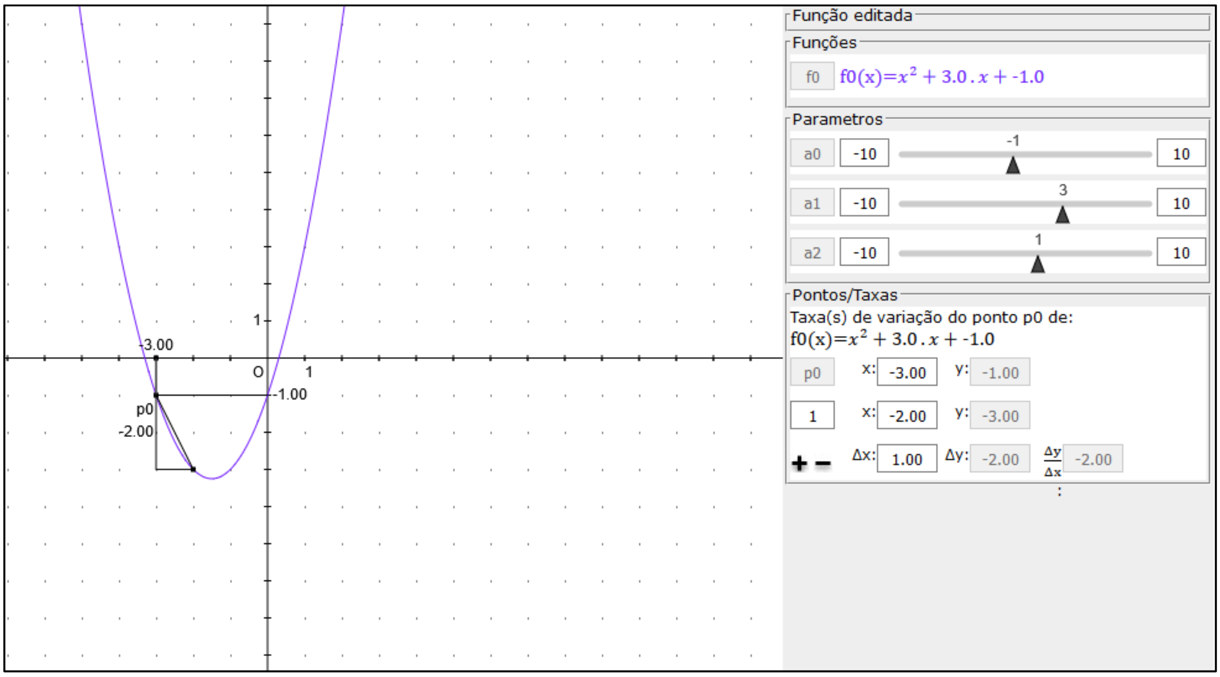
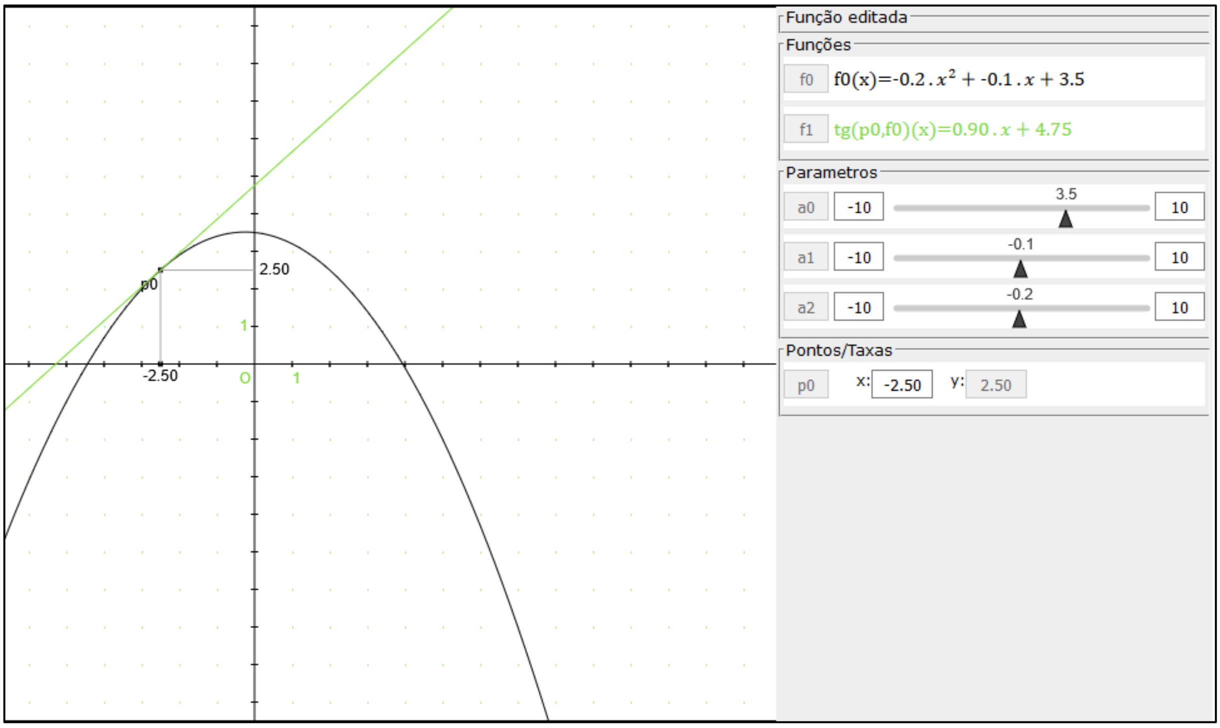


Figura 44: Ferramenta “Taxa de variação média”



Por fim, a ferramenta “Reta Tangente” ao ser acionada define uma reta tangente ao gráfico da função no ponto selecionado. O modelo algébrico dessa reta pode ser visualizado na janela “Funções”

Figura 45: Ferramenta "Reta Tangente"



5.5.1 Análise da primeira versão em relação aos requisitos

Nesta seção é apresentada uma discussão entre os requisitos comunicados aos desenvolvedores e a primeira versão apresentada, determinando as necessidades atendidas e as pendentes de implementação. É necessário destacar que o software desenvolvido se insere em um projeto maior, o que faz com que o seu percurso de desenvolvimento não esteja acabado neste estudo, o que abre possibilidades de futuras implementações no sentido de melhorá-lo continuamente.

A primeira versão foi apresentada aos pesquisadores deste estudo com a finalidade de que a exploração por parte destes fornecesse mais especificações em relação ao que precisaria ser melhorado ou implementado para a versão de teste, além de avaliar se as funcionalidades implementadas correspondiam aos requisitos comunicados pelos pesquisadores do estudo. Dessa forma, é feita uma breve discussão entre o protótipo apresentado e os elementos presentes nos requisitos.

a) Dinamismo na variação e na conexão das notações

Os recursos para abordar funções e sua taxa de variação de forma dinâmica foram satisfatoriamente implementados no protótipo. A variação das variáveis e dos objetos do gráfico são feitas simplesmente ao "deslizá-los" na tela e a utilização de controles deslizantes para variar os coeficientes da função possibilita atuar no modelo algébrico de forma mais dinâmica.

O dinamismo também foi contemplado na conexão entre as notações, possibilitando que as ações em uma notação fossem refletidas simultaneamente nas outras. Como exemplo, ao variar as variáveis no gráfico, os valores das coordenadas eram exibidos simultaneamente na janela de pontos, ao variar os coeficientes na janela "Parâmetros", o gráfico da função mudava simultaneamente no gráfico, e ao variar o valor do "delta x" no gráfico, o valor da taxa de variação mudava simultaneamente na janela "Pontos/Taxas".

Uma limitação se deu pela não implementação, nessa primeira versão, do recurso "Animação", cujo objetivo era articular notações matemáticas e não-matemáticas por meio da conexão entre as variáveis de uma função e objetos de uma animação, intensificando o dinamismo e a interação no software, além de possibilitar a visualização da variação incorporada nesses objetos. Esse recurso também poderia ser aplicado a outras notações, como por exemplo, permitir a variação automática de uma variável no gráfico.

b) Perspectiva covariacional

A perspectiva covariacional foi contemplada em partes, pois algumas funcionalidades e recursos que facilitam esse aspecto foram implementados apenas parcialmente ou não foram implementados nessa versão. No gráfico, alguns dos suportes à perspectiva covariacional seriam a possibilidade de exibir o rastro de variação, a conexão da variação em y com a variação em x e a geração do gráfico da função enquanto se desliza a variável no eixo x, no entanto, apenas a segunda foi contemplada nessa primeira versão.

A covariação também é abordada na tabela, por isso havia sido requisitado que uma tabela dinâmica fosse conectada às demais notações, além de possibilitar que ações (como edição) fossem possíveis nela, a fim de exibir tanto a variação das variáveis como definir relações entre essas variáveis (como a taxa de variação).

Nesse contexto, a primeira versão contemplou parcialmente a implementação de uma tabela dinâmica, pois a janela "Pontos/Taxas" exibiu uma configuração tabular na qual os valores das variáveis refletiam simultaneamente a variação no gráfico, além de serem exibidas células com os valores da variação de x e de y e da taxa média de variação, sendo possível também digitar valores para x e para “delta x” na janela.

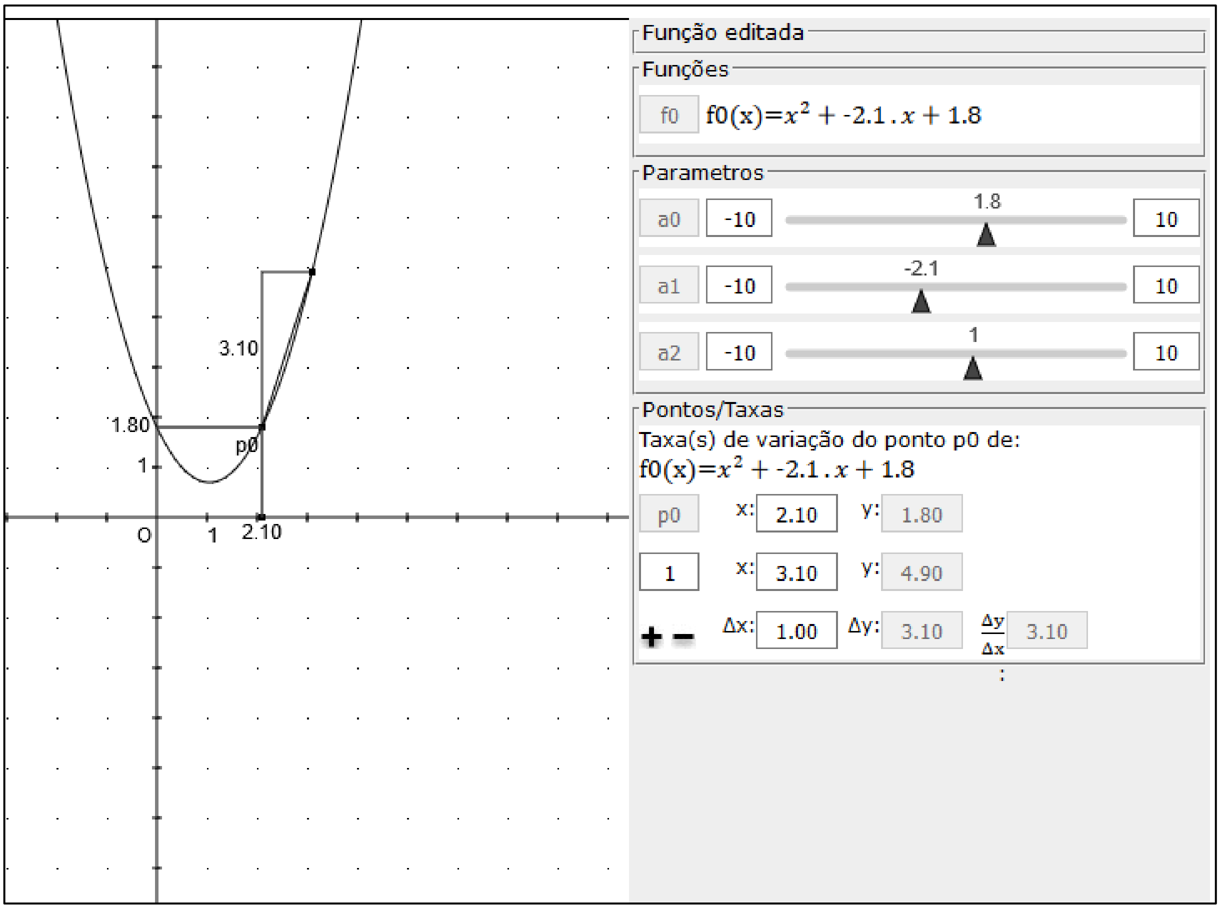
No entanto, a janela “Pontos/Taxas” só permitia a exibição de dois valores de x e os valores de y associados a eles, além do valor da variação e da taxa de variação para esses valores, o que limitava a visão dessa janela como uma tabela propriamente dita, em que é possível listar uma série de valores em uma coluna e relacioná-los com uma outra coluna e seus valores.

c) Ferramentas do software

As principais ferramentas requisitadas para serem implementadas foram a barra de variação, reta de inclinação (tangente, secante), barras dinâmicas e limite. As ferramentas “Barra de Variação” e “Limite” não foram implementadas nessa primeira versão.

Duas ferramentas foram implementadas e suas funcionalidades atenderam parcialmente às necessidades comunicadas. Uma foi a “Reta Tangente”, que ao ser acionada, traçava uma reta tangente ao ponto selecionado no gráfico da função, e a outra foi a ferramenta denominada “Taxa de Variação” que ao ser acionada calculava a taxa de variação média entre os pontos selecionados do gráfico, articuladamente à janela “Pontos/Taxas” na qual também era possível definir o intervalo e o ponto inicial.

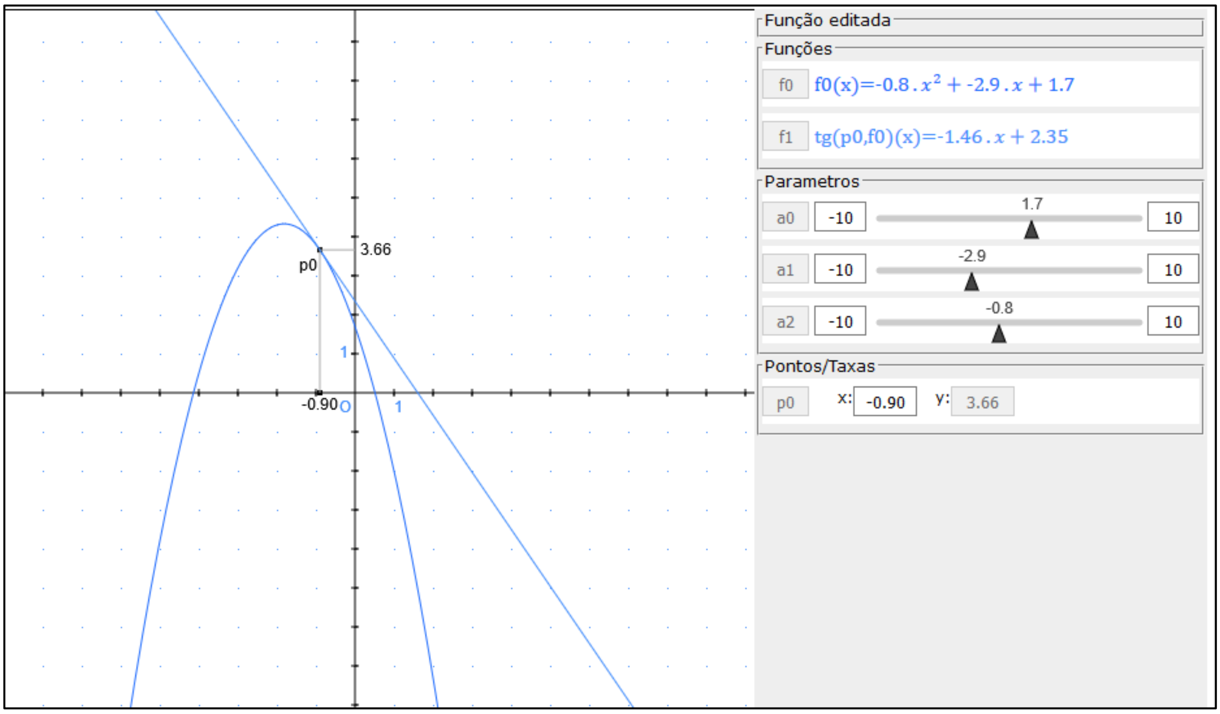
Figura 46: Ferramenta “Taxa de Variação”



A ferramenta “Taxa de Variação” fez a função da ferramenta requisitada “Barras Dinâmicas”, mas era preciso ainda que ela permitisse calcular a taxa em intervalos sucessivos do eixo x, para que atendesse às necessidades dessa ferramenta. Essa pendência foi comunicada aos desenvolvedores na interação de discussão da primeira versão, descrita na próxima seção.

Já a ferramenta “Tangente” também atendeu em partes às necessidades do protótipo. Ela fez o papel da ferramenta “Inclinação”, que incluiria tanto a tangente como a secante ao gráfico, para trabalhar a passagem da taxa média para a instantânea no contexto geométrico. Dessa forma, a necessidade de implementar o recurso da “Secante” também foi comunicada aos desenvolvedores na seção de interação de discussão da primeira versão.

Figura 47: Ferramenta “Reta Tangente”



d) Ferramentas e funcionalidades de suporte ao raciocínio

As ferramentas e funcionalidades requisitadas para dar suporte ao raciocínio na exploração do protótipo ficaram pendentes de implementação nessa primeira versão, sendo parcialmente implementadas após a interação de discussão da primeira versão. O rastro da variável e da função não foram implementados inicialmente, nem ferramentas como a variação automática (apenas a manual) ou “calculadora” com o recurso “memória”.

Além destas, outra ferramenta que não foi implementada foi a “Macros”, cujas possibilidades incluiriam definir novas operações ou funções e salvá-las, no entanto, tal ferramenta de fato precisaria ser melhor discutida em termos de que operações e funções seriam possíveis de serem armazenadas como novos recursos.

Apesar de não serem ferramentas diretamente ligadas às atividades principais no software, as ferramentas de suporte ao raciocínio têm importância para o auxílio cognitivo do estudante na exploração da taxa de variação no contexto proposto, de dinamismo e múltiplas representações, por isso são necessárias em versões posteriores do software.

5.5.2 Interação de discussão das implementações pendentes na primeira versão

As limitações e pendências analisadas na primeira versão do protótipo foram discutidas com os pesquisadores desenvolvedores (engenheiro-pesquisador e engenheiro-programador), sendo definido que essas necessidades seriam analisadas e avaliadas quanto a possibilidade de implementação para a versão de teste, levando em conta tanto a definição de uma versão com recursos e funcionalidades mínimas para a experimentação pelos pesquisadores do estudo, quanto as limitações de disponibilidade e tempo para as modificações pela equipe de desenvolvedores.

Dessa forma, foi realizada mais uma seção de interação entre os pesquisadores de forma on-line em um documento compartilhado, em que foram estabelecidas as funcionalidades e ferramentas pendentes na primeira versão do protótipo e que eram necessárias de serem implementadas na versão de teste. Considerando-se ainda que mesmo aquelas funcionalidades que não fossem implementadas para a versão de teste, seriam futuramente postas em discussão, dada a continuidade do projeto.

Foi estabelecido pelos pesquisadores deste estudo que havia cinco aspectos do protótipo que precisavam ser implementados ou melhorados para que o mesmo atendesse aos requisitos mínimos para a experimentação: o aspecto covariacional, a tabela dinâmica, a ferramenta taxa de variação (barras dinâmicas), a ferramenta limite e as ferramentas do contexto geométrico (tangente e secante).

As discussões foram transcritas nos quadros seguintes:

Quadro 10: Discussão do aspecto covariacional - variação dos pontos diretamente nos eixos

Pesquisador do estudo - usuário: Ao traçar um gráfico, o protótipo permite o deslize de um ponto do gráfico diretamente na curva. É interessante que essa variação também seja permitida ao selecionar-se o ponto do eixo x correspondente ao ponto da curva, além de conectar a variação em x à variação em y. **Engenheiro - Programador:** OK, veja se o que fiz resolve. **Pesquisador do estudo - usuário:** Ok, agora só falta a figura do ponto para indicar melhor onde posicionar o cursor no eixo. **Engenheiro-Programador:** OK, feito.

Após a interação descrita acima, o desenvolvedor implementou as modificações que tornaram possíveis a manipulação da variável no eixo x, e não apenas na curva da função como antes. Essa manipulação diretamente no eixo x e a conexão da sua variação com a variação de y, tiveram como objetivo reforçar a visão covariacional no gráfico.

No quadro seguinte discutiu-se o rastro como mais uma funcionalidade para reforçar a visão covariacional. O desenvolvedor argumentou que, pela forma como ele programou, o rastro só poderia ser implementado parcialmente, para a versão de teste. Foi implementada então uma forma prévia de visualizar a função sendo traçada pelo rastro da variável.

Quadro 11: Discussão do aspecto covariacional - rastro

Pesquisador do estudo - usuário: Permitir uma forma alternativa de traçar o gráfico da função, com base na covariação. Ao definir a função, o gráfico é traçado simultaneamente ao "deslize" do ponto no eixo x, em uma forma de rastro. **Engenheiro - Programador:** Minha proposta aqui é de permitir a geração da função pelo rastro na criação, mas quando inserida (botão inserir), a função é traçada de forma "habitual". Podemos pensar depois em uma outra interface, mas a proposta é para a primeira experimentação. Veja se deu. E veja se você achar que precisa ter as coordenadas do ponto gerado na parte direita junto com os slides de mudança de valor de coeficientes. **Pesquisador do estudo - usuário:** Ok, acho que o rastro atende para a experimentação. Sobre as coordenadas do ponto, acho que a exibição no gráfico já atende. Mas acho que seria interessante se houver uma conexão com a tabela, na qual seria definido um delta x previamente e com o deslize do ponto x, valores vão sendo gerados na tabela, tendo delta x como passo.

Em relação às necessidades da tabela, o desenvolvedor realizou algumas mudanças propostas na janela "Pontos/Taxas". Além de medir a taxa de variação, foi possibilitado medir a variação da taxa de variação nessa janela.

Quadro 12: Discussão das necessidades da tabela

Pesquisador do estudo - usuário: Possibilidade de edição da tabela, representar os valores da função em uma tabela e atrelar a variação no gráfico à variação na tabela. Além disso, permitir definir novas colunas, como uma coluna que calcule a taxa de variação entre dois valores da função ou uma coluna que calcule a variação entre os valores da coluna anterior. **Engenheiro - Programador:** (sem resposta)

No quadro seguinte foram descritas as pendências ou melhorias necessárias para a ferramenta "Taxa de Variação", principalmente para que a mesma possibilitasse medir a taxa de variação em intervalos particionados, para fazer a função das barras dinâmicas requisitadas inicialmente.

Quadro 13: Discussão da ferramenta “Taxa de Variação”

Pesquisador do estudo - usuário:

- Definição do intervalo: Ao definir o intervalo no qual será calculada a taxa de variação no gráfico, exibir a informação numérica dos pontos P_0 e P_1 (atualmente só são exibidas as coordenadas de P_0)
- Exibição do valor numérico da variação de y no gráfico: Quando é aplicada a ferramenta taxa de variação no gráfico, um triângulo (de delta y e delta x) é representado no intervalo tomado, este triângulo varia ao variar o ponto P. É interessante que quando se estiver variando o ponto em x, seja exibido o valor de “delta y” variando simultaneamente.
- Partição: Na ferramenta taxa de variação, permitir que um intervalo seja particionado em “deltas x” iguais proporcionando uma análise da variação em uma sequência. As informações numéricas a serem exibidas no gráfico podem se limitar às coordenadas do ponto inicial (P_0) e a do ponto final, evitando várias informações na tela. Os demais pontos do intervalo podem ser configurados para exibir seus valores ao posicionar-se o cursor em cima do ponto.

Engenheiro - Programador: OK, veja se resolve...

Pesquisador do estudo - usuário: Ok, resolvido!

Pesquisador do estudo - usuário:

- Casas decimais: Em alguns casos a análise da variação da taxa de variação vai pedir um número maior de casas decimais. É interessante aumentar o número ou permitir que se aumente tal quantidade a critério do usuário.
- Variação no ponto: permitir que seja exibida/representada no gráfico a variação ou a taxa de variação no ponto dado simultaneamente ao seu deslize no eixo x. Essa ferramenta foi exemplificada na prototipação por meio de uma barra dinâmica de variação cuja altura aumentava ou diminuía, conforme se deslizava em x e mudava de cor conforme o sinal da variação fosse positivo ou negativo. Funcionalidades semelhantes podem ser implementadas para auxiliar a percepção da variação no ponto.

Engenheiro - Programador: Pode ser algo na hora da definição da função como é o caso da função traçada por rastro?

Pesquisador do estudo - usuário: Pode ser.

A ferramenta “limite” não havia sido implementada na primeira versão, apesar da sua importância, não foi possível implementá-la também para a versão de teste. Apesar disso, foi encontrada uma forma de explorar o limite utilizando a ferramenta “Taxa de Variação” e fazendo a diferença $x - x_0$ ficar pequena o suficiente no software.

Quadro 14: Discussão da ferramenta “Limite”

Pesquisador do estudo - usuário:

- Ao escolher essa ferramenta e uma função dada, permitir que na aproximação entre dois valores no eixo x (x e x_0), o gráfico exiba a aproximação entre os dois valores correspondentes no eixo y(y e y_0), simulando o limite. Seria interessante que nessa ferramenta se usasse o zoom dinâmico, mas as ferramentas de zoom que foram implementadas nos eixos x e y já permitem um primeiro passo.

- É interessante também que tal ferramenta possa permitir a abordagem dos limites laterais.

Engenheiro - Programador: (sem resposta)

Na discussão acerca da articulação com a geometria, foi solicitada a implementação da reta secante, para abordar a passagem da taxa média para a instantânea no contexto geométrico, tal ferramenta foi implementada na versão de teste.

Quadro 15: Discussão das ferramentas “Tangente” e “Secante”

Pesquisador do estudo - usuário: É interessante que o software contemple também retas secantes ao gráfico, para abordar as situações da “aproximação” da tangente por secantes.

Engenheiro - Programador: queria entender o que você quer dizer com isso.

Pesquisador do estudo - usuário: É naquela situação em que tomamos dois pontos da curva e traçamos uma secante ou então uma corda. Quando tomamos pontos cada vez mais próximos um dos outros, as secantes definidas se aproximam cada vez mais da tangente no ponto dado. Seria interessante permitir traçar, além da tangente, a secante e poder variá-las ao variar o x.

Engenheiro - Programador: OK, veja se resolve....

Pesquisador do estudo - usuário: Ok resolvido. Agora só estou sentindo a necessidade de que quando eu posicione o cursor sobre a curva ou sobre o eixo, seja exibida a coordenada. Pois quando quero traçar a secante por dois pontos conhecidos ou mesmo definir um ponto dado na curva, não sei previamente sobre qual ponto estou clicando.

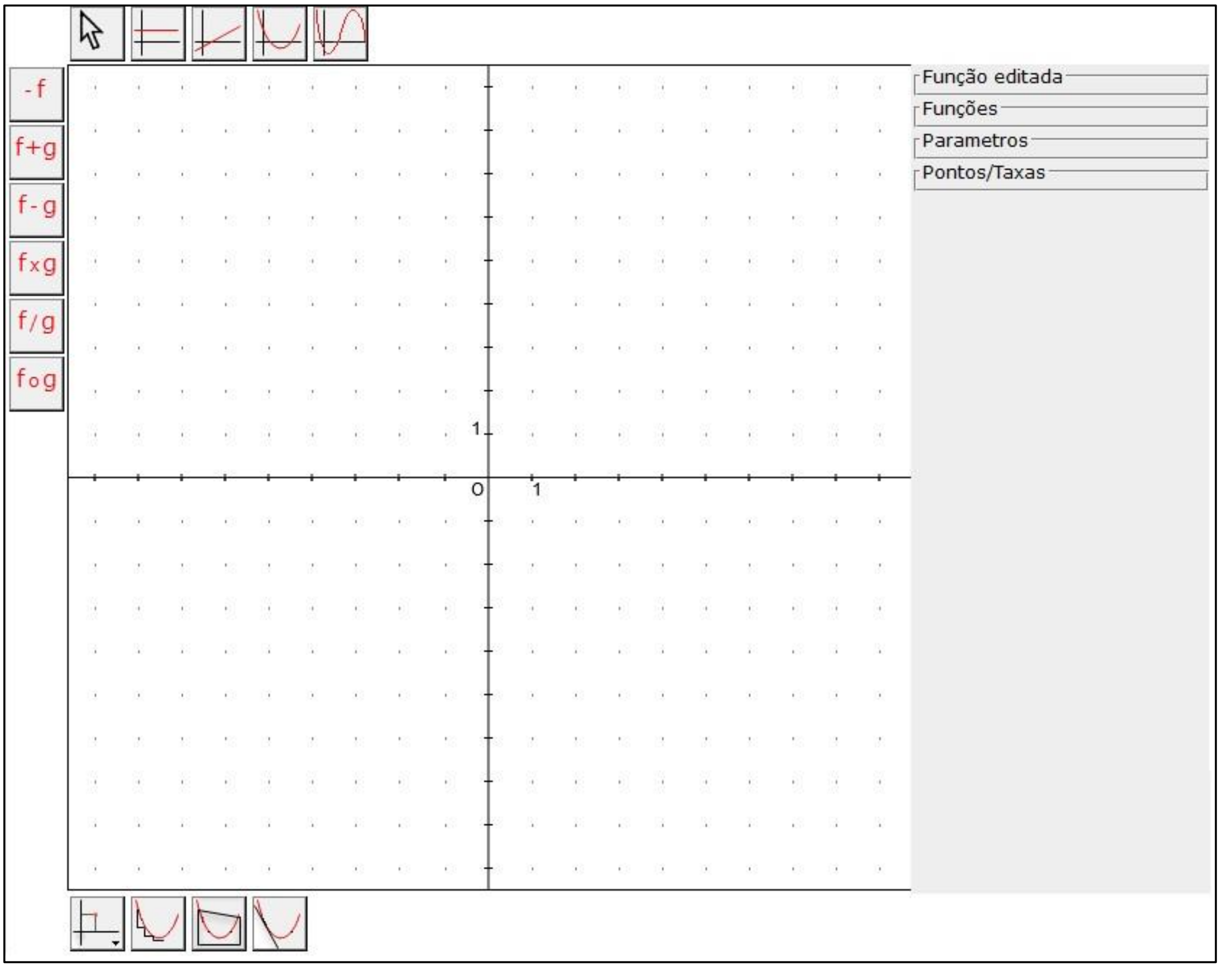
Pesquisador do estudo - usuário: Se bem que, posso mover esse ponto até o valor desejado após definir o ponto.

5.6 Versão do software *Function Studium* para o teste

Após a discussão de análise das implementações pendentes na primeira versão, o engenheiro-programador realizou as implementações discutidas e apresentou a versão de teste do software, que foi denominado *Function Studium*.

Tal versão é descrita em seguida, acrescentando-se às funcionalidades da primeira versão, as melhorias e implementações discutidas entre os pesquisadores do estudo e os desenvolvedores. Ao final da seção, foram elencados os elementos ausentes ou carentes de melhorias para versões futuras do *Function Studium*, com base em uma análise comparativa com os requisitos levantados.

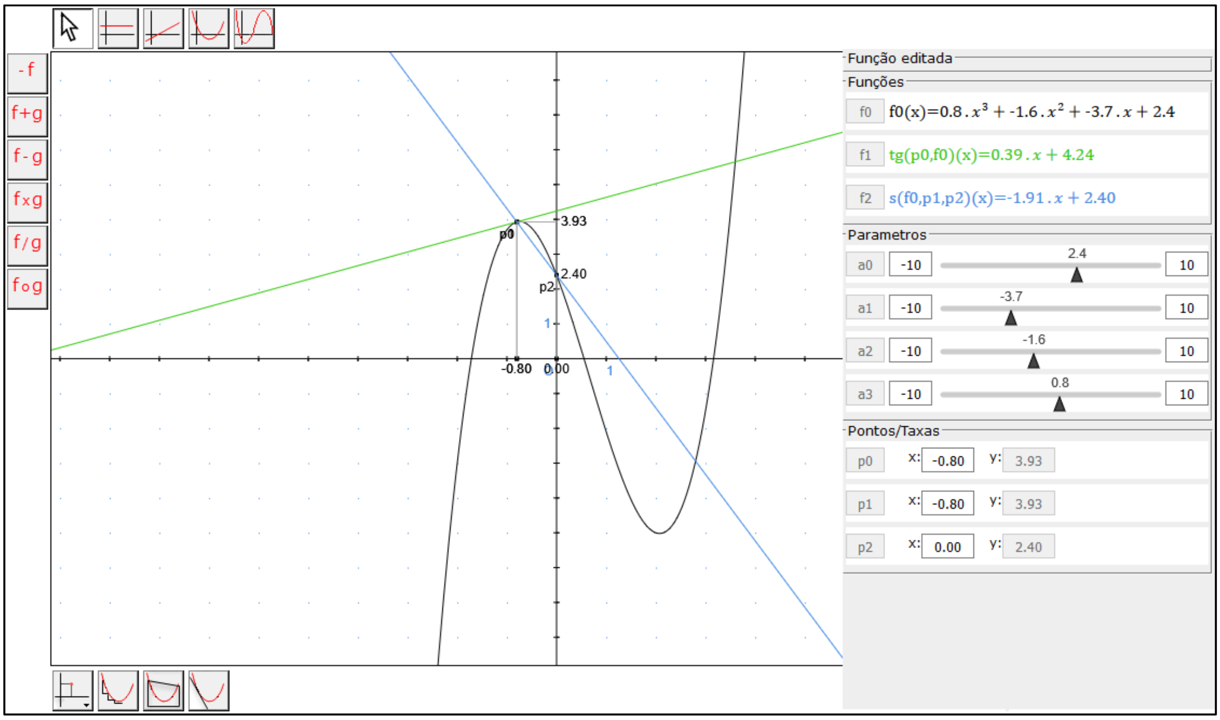
Figura 48: Tela principal do software *Function Studium*



Em relação à primeira versão, foram realizadas as seguintes implementações:

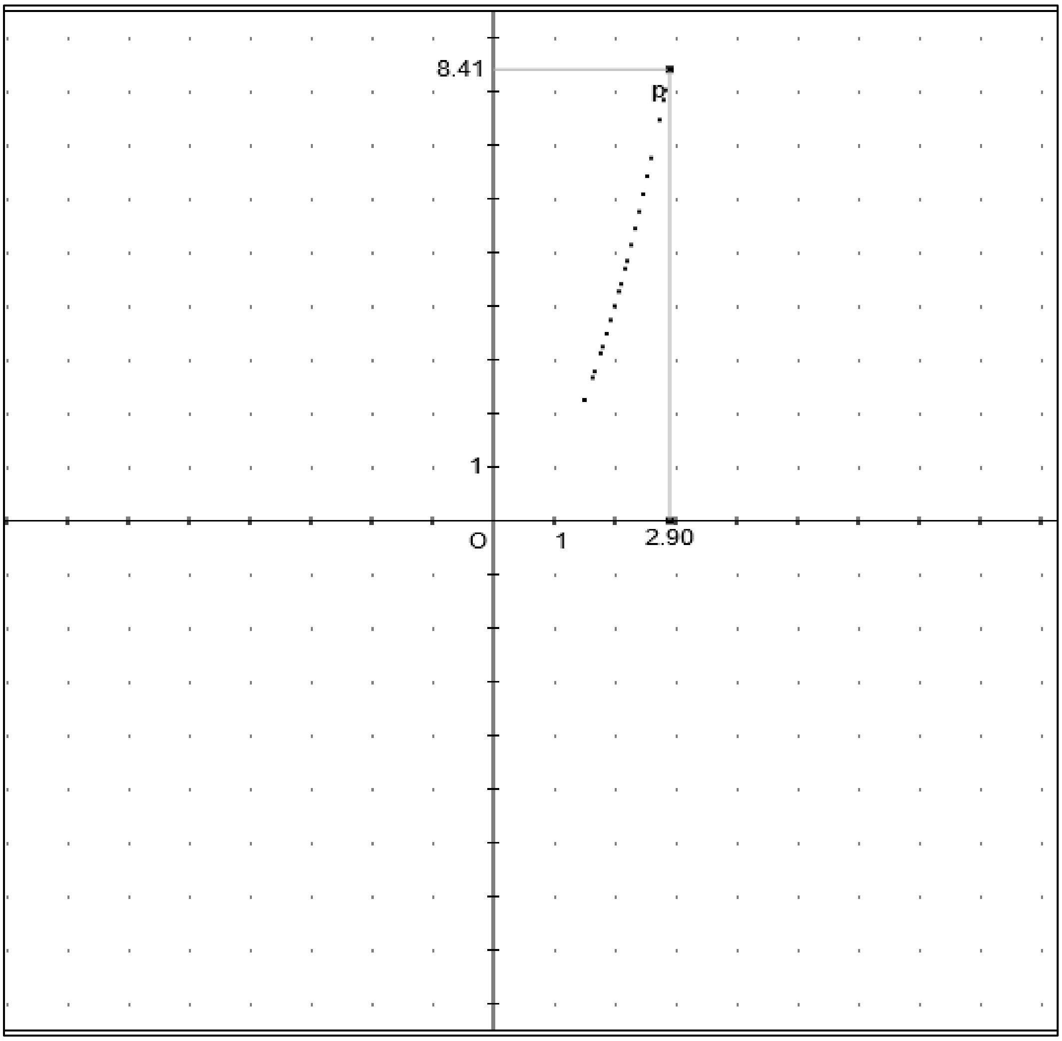
a) Ferramenta "Reta Secante": Além da reta tangente, a reta secante foi implementada para permitir representar geometricamente a passagem da taxa média para a instantânea. Esta ferramenta é acionada ao clicar no terceiro ícone da parte inferior da tela e selecionando os pontos no gráfico.

Figura 49: Retas Tangente e Secante



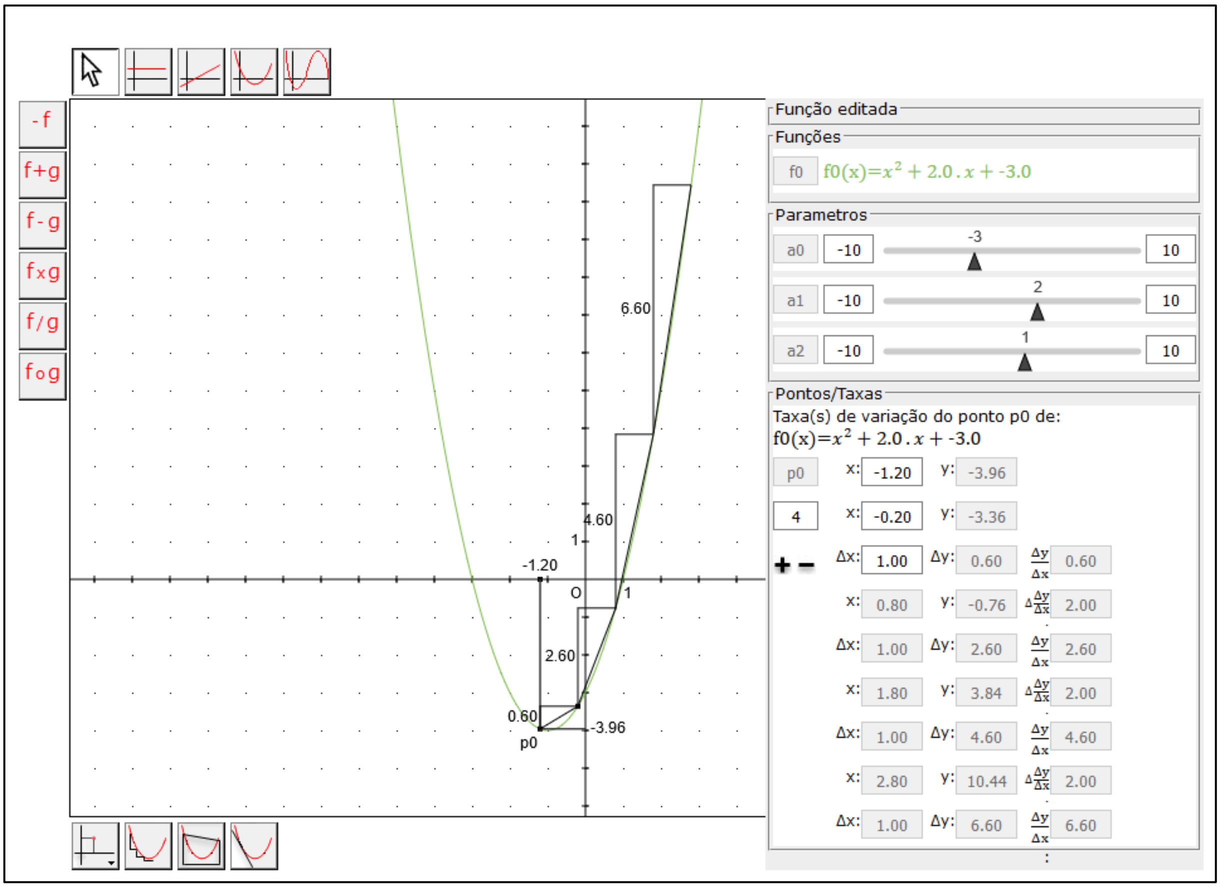
b) Rastro: O rastro foi implementado como uma forma alternativa de visualizar a geração do gráfico da função, com base na visão covariacional de função. Para visualizar a função sendo traçada pelo rastro é preciso escolher o tipo de função, definir os coeficientes e mover a variável x no eixo, o gráfico é traçado simultaneamente. No entanto, ao clicar em "Inserir" o gráfico é traçado da forma tradicional, sem a necessidade da mobilização da variável.

Figura 50: Rastro da função



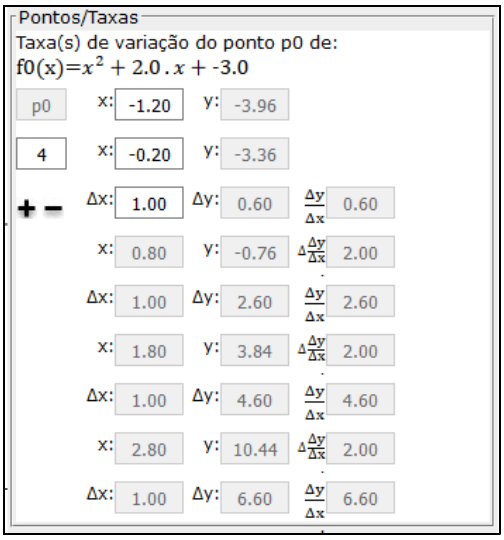
c) Ferramenta “Taxa de Variação”: As implementações nessa ferramenta permitiram calcular não apenas a taxa de variação média em um intervalo, mas em uma sequência sucessiva de intervalos iguais, como requisitado no recurso “Barras Dinâmicas”. Além disso, a ferramenta articula-se com a janela “Pontos/Taxas”, na qual é permitido visualizar a taxa de variação para cada intervalo da sequência, além da variação da taxa de variação.

Figura 51: Ferramenta “Taxa de Variação”



d) Janela “Pontos/Taxas”: Nessa janela foram adicionadas a opção de aumentar ou diminuir o número de incrementos e visualizar o valor da variação da taxa de variação na sequência de intervalos de x.

Figura 52: Janela “Pontos/Taxas”



Com relação aos recursos ou funcionalidades pendentes nesta versão do software, em termos de notações, a única que fez parte dos requisitos, mas não foi implementada foi a "Animação". Esse recurso tinha por objetivo promover a articulação entre as notações matemáticas e não-matemáticas, como a conexão de um objeto a uma variável, enriquecendo a incorporação dos aspectos de taxa de variação em objetos que simulam o mundo real.

Já a tabela foi representada na janela "Pontos/Taxas" como uma configuração tabular que permite a visualização de valores da variação das variáveis e a variação da taxa de variação das funções. No entanto, tal configuração poderia ser melhorada ao posicionar cada variável em uma coluna e cada valor por ela assumido em uma linha, associando os valores de x com os valores de y e suas respectivas variações, tal configuração se tornaria mais organizada visualmente e poderia contribuir melhor para a análise da variação. Além disso, a possibilidade de definir novas relações em colunas da tabela poderia ser discutida em implementações futuras.

As principais ferramentas não implementadas foram o limite, a barra de variação e a calculadora. A ferramenta limite inclusive abrangeria, conforme os requisitos, os limites laterais e incluiria a variação automática da variável x se aproximando do valor x_0 enquanto y se aproximaria de y_0, suportado pelo zoom dinâmico.

A barra de variação tinha por propósito auxiliar a análise da variação enquanto se variava o x no gráfico, inclusive a distinção do sinal da taxa em cada ponto. Já a calculadora configurava-se como uma ferramenta de suporte ao raciocínio, com recursos como calcular a variação ou a taxa de variação em um intervalo do gráfico e memorizá-lo para comparar com outros intervalos.

Os recursos caracterizados como suportes ao raciocínio, além da calculadora, incluíam a repetição automática de uma simulação (no caso de uma animação), os "macros", o rastro da variação da função e de suas variáveis, a função memória implementada na calculadora, entre outras possibilidades.

Apesar de não terem sido implementados nessa versão, estes recursos podem se mostrar importantes no uso do software pelos estudantes, merecendo assim serem objetos de discussão para as próximas versões. No que diz respeito ao uso do software *Function Studium* para os objetivos deste estudo, foram implementados os requisitos suficientes na versão aqui descrita.

6. RESULTADOS DA VALIDAÇÃO

Nesta seção são apresentados os resultados da validação do software *Function Studium*, com base na experimentação e na análise dos dados (análise à posteriori) do caso com os estudantes participantes da pesquisa.

6.1 Experimentação

O experimento foi planejado para a aplicação das atividades com uma dupla de estudantes da Licenciatura em Matemática, a fim de testar como o software contribuiria ou não para a abordagem da taxa de variação das funções afim e quadrática com eles.

6.1.1 Descrição do Experimento

A experimentação com os estudantes teve como objetivo testar o software *Function Studium* como ferramenta de exploração da taxa de variação das funções abordadas, servindo para apontar as implicações do seu uso em termos de contribuição ou limitação à aprendizagem do conceito da taxa.

A aplicação das atividades foi realizada em uma sala com uma dupla de estudantes da Licenciatura em Matemática, selecionados pelos critérios de terem cursado ou estarem cursando alguma disciplina de Cálculo Básico e terem alguma experiência anterior de uso da tecnologia computacional no estudo de funções, a fim de terem um olhar mais crítico e detalhado sobre os recursos do software.

Os instrumentos de aplicação foram as fichas de atividades em papel e um computador com acesso à internet para utilizar o *Function Studium*. A interação entre os estudantes e o software e a interação entre os próprios estudantes foram registradas por meio de um software de captura de tela e uma câmera filmadora respectivamente, além dos registros escritos na ficha de atividades.

Antes da realização das atividades foram apresentados aos estudantes os objetivos da experimentação e o software utilizado. Após isso, eles foram orientados a ler as questões na ficha de atividades e explorarem o software para respondê-las. O tempo para a execução da atividade foi de aproximadamente 2 horas, que adicionadas ao tempo inicial de apresentações dos objetivos e do software, levou a um tempo total de 2 horas e meia.

6.1.2 Descrição das atividades

A seguir são descritas as duas atividades que fizeram parte da experimentação, explicitando-se o tempo previsto para cada tarefa, os aprendizados esperados dos estudantes e as implicações decorrentes do uso do software para a abordagem da taxa de variação no contexto desta pesquisa.

Atividade 1

Para a realização das atividades abaixo, acesse o software de funções no link: http://lematec.net.br/funcao.

1.1) No software, trace a função $f(x) = 0{,}7x - 3{,}8$ para responder as seguintes questões:

a) Use a ferramenta “Taxa de variação” no gráfico da função e insira os valores abaixo na janela “Pontos/Taxas” para responder: quando x varia de 0,5 a 1,5 qual a variação em y? E quando x varia de 3,5 a 4,5? E de -2,5 a -1,5?

b) Com o valor $\Delta x = 1$, varie o valor de x no gráfico para obter diferentes valores para x e y e observe o comportamento de Δy na janela “Pontos/Taxas”. O que você percebe em relação ao comportamento de Δy?

Tempo previsto: 5 min

Aprendizados esperados: Perceber que para a função dada, para um dado Δx, o Δy é fixo para todo o x alcançado na tela.

Benefícios com o uso do software: A variação dinâmica permite testar um conjunto de valores do domínio enquanto a conexão do gráfico com a janela de pontos permite observar a invariabilidade do Δy simultaneamente ao deslize de x. É possível testar valores isolados de x por meio da janela de pontos ou um conjunto de valores por meio do deslize da variável x.

Dificuldades/limitações com o uso do software: É preciso coordenar variações em duas notações. Apesar de se estar variando x e x_1 simultaneamente, o gráfico só mostra x, o que pode dar a impressão de só estar variando um ponto, dessa forma se o estudante mantiver a atenção apenas no gráfico, pode confundir a variação de y com a variação de Δy e achar que esta última varia com a variação de x. Uma restrição causada pelo uso do software, que de certa forma se aplica a toda esta atividade, é a perda da experiência numérica do cálculo da variação.

c) Escolha diferentes valores para Δx, insira-os na janela "Pontos/Taxas" e varie x para observar o comportamento da variação Δy para cada Δx. Como se comporta Δy nos valores do domínio da função alcançados?

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Perceber que para a função dada, ao variar o Δx, o Δy é fixo para cada Δx, para todo o x alcançado na tela.

Benefícios com o uso do software: Variação dinâmica e conexão de ações entre o gráfico e a janela de pontos para testar vários valores de Δx de forma rápida.

Dificuldades/limitações com o uso do software: O software não permite memorizar cada valor testado ou disponibilizar uma sequência com os valores testados para auxiliar o estudante na análise, dessa forma o estudante pode esquecer o que ocorreu em simulações anteriores.

1.2) Escolha outras funções afim e para cada caso teste o item (c) da questão anterior. O que você percebeu no item anterior continua válido para esses casos? O que isso sugere em relação à variação na função afim?

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Inferir que na função afim, variações iguais em x levam a variações iguais em f(x).

Benefícios com o uso do software: Variação dinâmica e conexão de ações entre o gráfico, a janela de pontos e a janela de parâmetros para testar várias funções de forma prática.

Dificuldades/limitações com o uso do software: O software não permite memorizar cada valor testado ou disponibilizar uma sequência com os valores testados para auxiliar o estudante na análise. Outra limitação é não permitir a variação automática de x ou de Δx, por exemplo, o que permitiria reduzir as ações do estudante na tela e manter a atenção no essencial.

1.3) Mantendo o *Δx* fixo, varie os coeficientes da função afim e observe a variação da taxa média de variação *Δy/Δx.* Que relações você percebe entre tais coeficientes e o valor de *Δy/Δx?*

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Perceber a influência de cada coeficiente da função afim na variação da taxa de variação.

Benefícios com o uso do software: Variação dinâmica dos coeficientes e conexão com o gráfico e a janela de pontos para explorar a influência dos mesmos na taxa de variação.

Dificuldades/limitações com o uso do software: O software não permite memorizar cada valor testado ou disponibilizar uma sequência com os valores testados para auxiliar o estudante na análise. Existe também a limitação de não permitir a variação automática da variável x. E ainda, a experiência numérica do cálculo da taxa de variação, em que se calcula o quociente da variação de y pela variação de x é suprimida, fato inevitável face à escolha de manter o foco no aspecto variacional da taxa.

Use a ferramenta "taxa de variação" e em um intervalo qualquer de x faça o Δx cada vez menor no gráfico ou diretamente na janela "pontos/taxas" (por exemplo, 1; 0,5; 0,1; 0,05; 0,01; 0,001; 0,0001), observando o comportamento do valor da taxa de variação. No software, quando Δx é pequeno o suficiente, por exemplo Δx = 0,0001, é possível simular o limite da função no ponto x_0 *quando x tende a* x_0.

1.4) Ao simular o processo descrito acima, tome diferentes funções afim e varie a variável x observando o valor de *Δy/Δx*. Como esse valor varia em função de x? O que isso sugere a respeito da taxa de variação na função afim?

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Inferir que dada uma função afim, a taxa de variação em função de x é constante e corresponde ao coeficiente a de ax + b.

Benefícios com o uso do software: A limitação com o número de casas decimais, por outro lado, possibilita simular a taxa de variação no ponto ao se escolher um Δx pequeno o suficiente para o software, dessa forma, apesar de a ferramenta limite não ter sido disponibilizada nesta versão, tal simulação dá conta de explorar alguns aspectos da taxa de variação instantânea. A variação dinâmica dos coeficientes e da variável x em conexão com o gráfico e a janela de pontos permite simular um grande número de funções afim, para perceber a relação entre a função e sua taxa de variação no ponto de forma empírica.

Dificuldades/limitações com o uso do software: O software não permite memorizar cada valor testado ou disponibilizar uma sequência com os valores testados para auxiliar o estudante na análise. Outra limitação é devido a ausência de uma função "zoom dinâmico" que aproxime ou afaste automaticamente conforme se "deslize" a variável x, o que faz com que o domínio da função a ser testado seja bem limitado, embora seja possível mover manualmente o eixo de coordenadas, ou alterar a escala dos eixos, que permite visualizar uma maior parte do eixo x e manipular a variável. Além disso, apesar de o software prover uma exploração empírica do fato matemático em questão, é preciso consolidar as inferências dos estudantes com a demonstração matemática, que nesse caso utiliza o conceito de limite aplicado à expressão matemática da taxa de variação.

Atividade 2

2.1 Escolha uma função quadrática, trace seu gráfico e varie a variável x usando a ferramenta *taxa de variação* no gráfico. Mantendo Δx fixo, descreva como Δy varia com a variação de x. Repita a operação para outras funções quadráticas (Para isso, altere os valores dos coeficientes na janela "Parâmetros") e observe como se dá essa variação em cada caso.

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Perceber que a variação de Δy não é constante para acréscimos iguais em Δx, como na função afim. Descrever brevemente como se dá o padrão da variação de Δy em função de x (para os casos em que $a > 0$ e $a < 0$).

Benefícios com o uso do software: A variação dinâmica no gráfico e nos parâmetros em conexão simultânea com a janela de pontos provê a exploração de várias funções quadráticas de forma rápida e prática, possibilitando a percepção de um padrão de variação de Δy.

Dificuldades/limitações com o uso do software: Variar x no gráfico e coordenar a variação simultânea de Δy na janela de pontos em uma única célula pode tornar trabalhosa a busca por um padrão. Um segundo gráfico em paralelo, no qual fosse possível visualizar a variação de Δy em função de x poderia auxiliar o estudante na percepção do padrão de variação.

2.2 Ainda utilizando a ferramenta *taxa de variação*, aumente o número de incrementos na janela "Pontos/Taxas" para calcular a taxa média de variação entre intervalos sucessivos com Δx fixo. Ao analisar a sequência de valores de $\Delta y/\Delta x$ na janela "Pontos/Taxas" que relação você observa na sua variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ e o que tal relação sugere?

Tempo previsto: 10 min
Aprendizados esperados: Perceber que $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ é constante.
Benefícios com o uso do software: O software permite articular notações como o gráfico e a tabela da janela de pontos de forma dinâmica, e com as ações em uma notação refletindo-se simultaneamente na outra. A ferramenta taxa de variação com vários incrementos de Δx possibilita visualizar a peculiaridade da variação no modelo quadrático, no qual as variações sucessivas de Δy são acrescidas/decrescidas de um valor constante.
Dificuldades/limitações com o uso do software: A configuração tabular da janela de pontos não facilita a visualização do que acontece na covariação, como seria em uma tabela na qual há uma coluna para cada variável e suas variações sucessivas podem ser facilmente relacionadas por estarem na mesma linha da tabela. Um fator que dificulta tal leitura covariacional é que, na mesma coluna da janela de pontos são encontrados valores tanto para $\Delta y/\Delta x$ quanto para $\Delta (\Delta y/\Delta x)$. A descrição das variáveis junto às células da janela de pontos minimiza essas dificuldades, mas não deixa de exigir do estudante uma maior atenção para a leitura correta da variação de $\Delta y/\Delta x$.

2.3 Ainda na simulação do item anterior, varie a variável x no gráfico e observe a variação da taxa de variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ na janela "Pontos/Taxas", como se comporta $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ com a variação de x? Teste outras funções quadráticas, descreva o que você percebeu e o que isso sugere em relação à variação nas funções quadráticas.

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Inferir que as variações sucessivas de $\Delta y/\Delta x$ variam conforme o mesmo valor em todo o domínio da função; Inferir que tal característica é peculiar ao modelo quadrático.

Benefícios com o uso do software: Como essa questão é uma continuação da anterior, os benefícios referentes a ela se aplicam também aqui. Além deles, a variação dinâmica da variável e das barras dinâmicas sobrepostas ao gráfico é conectada simultaneamente à tabela da janela de pontos, provendo uma articulação poderosa entre as notações. Os valores nas janelas de pontos respondem de forma instantânea à variação da variável no gráfico ou à variação dos parâmetros para a obtenção de uma nova função, sem necessitar repetir o processo cada vez que uma nova função é gerada.

Dificuldades/limitações com o uso do software: As dificuldades expostas na questão anterior também se aplicam aqui, com o acréscimo de que, nesse caso em que a articulação entre notações e o dinamismo das ações é intenso, seriam importantes os recursos de suporte ao raciocínio do estudante como, por exemplo, ferramentas de memória para “guardar” o valor de $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ para uma dada função ou mesmo listá-los em uma tabela, além da variação automática de x no gráfico e a possibilidade de sobrepor ao gráfico uma janela que mostrasse a variável $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ para que não se recorresse sempre à janela de pontos para buscar esse valor.

2.4 Que influência você percebe do valor dos coeficientes da função quadrática sobre o valor de $\Delta(\Delta y/\Delta x)$?

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Perceber que apenas o coeficiente *a* de $ax^2 + bx + c$ tem influência sobre $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ e descrevê-la brevemente.

Benefícios com o uso do software: A articulação do modelo algébrico com a tabela possibilita uma visão clara da relação entre os coeficientes e a variação da taxa de variação. O software potencializa essa possibilidade ao dinamizar a variação dos coeficientes e conectar simultaneamente essa variação com a tabela, que já fornece o valor da variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$. Dada a característica peculiar da função quadrática, na qual a variação da taxa de variação é constante, o software já disponibiliza essa variável na janela de pontos, otimizando o tempo do estudante para explorar essa propriedade em várias funções.

Dificuldades/limitações com o uso do software: Um fator que pode limitar a exploração do estudante é que a variação dos parâmetros pelo controle deslizante é limitada, caso o limite seja ultrapassado há um tipo de extrapolação dos valores, levando a números muito grandes e inviabilizando a visualização no gráfico. Além disso, como já colocado em questões anteriores, a ausência de recursos como memória, variação automática e listar em uma tabela a relação entre a função e a variável escolhida, limita o suporte ao raciocínio dos estudantes. Por fim, ao analisar a influência do coeficiente a em $\Delta(\Delta y/\Delta x)$, o estudante tem apenas a exibição do valor na janela de pontos, que varia com a variação de *a*, mas que depende também do valor escolhido para Δx. Assim, pode-se chegar a conclusões precipitadas em relação a como $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ varia em relação ao coeficiente *a* quando não é considerada a influência de Δx.

2.5 Escolha uma função quadrática e use a simulação do limite (descrito na atividade 1) para observar como a taxa de variação no ponto varia em função de x. Quando x cresce, como se comporta o valor da taxa de variação? Em que intervalo a taxa é negativa e quando ela muda para positiva, e o que isso tem a ver com o gráfico dessa função?

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Descrever como a taxa de variação simulada varia em função de x e articular tal dependência com os aspectos do gráfico da função quadrática escolhida.

Benefícios com o uso do software: A natureza da questão pede um ambiente dinâmico e articulado entre o gráfico da função e os valores numéricos tomados pela taxa de variação a cada ponto. Dessa forma, o software provê tal dinamismo ao permitir que a variável x seja manipulada de forma conectada à janela de pontos, enquanto é simulado o limite da taxa de variação quando Δx tende a zero. A articulação requerida entre a variação da taxa e os aspectos do gráfico da função é possível no software, pois as ações nas janelas do gráfico e de pontos/taxas são conectadas simultaneamente. Além disso, são indicados os pontos do gráfico da função por linhas demarcadoras, o que facilita delimitar a parábola para relacioná-la com o valor da taxa de variação no ponto dado.

Dificuldades/limitações com o uso do software: Uma limitação do software é a própria ausência da ferramenta limite, que embora tenha sido suprida pela sua simulação, tem limitações. A ferramenta “macro”, de suporte ao raciocínio, caso implementada poderia ter suprido ainda mais a ausência da ferramenta limite pois a simulação seria adicionada ao conjunto de funções do software e poderia ser usada sempre que o estudante a requisitasse. Outro aspecto é a limitação da janela de pontos para a análise da taxa de variação, pois nela apenas pode ser acompanhada a variação simultânea do valor da taxa, o que pode gerar dificuldade para que o estudante, que manipula a variável no gráfico e observa a mudança numérica na janela de pontos, perceba o que acontece com a taxa. Esta dificuldade poderia ser minimizada com um gráfico da taxa de variação paralelo ao da função ou mesmo uma tabela de valores que relacionasse a variação de x com a variação da taxa.

2.6 Na mesma função que você escolheu no item anterior, use a função "reta tangente" para observar como a inclinação dessa reta varia quando se varia o valor de x. Que relações você percebe entre a inclinação da reta tangente ao gráfico e o comportamento da taxa de variação no ponto?

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Relacionar a variação da inclinação da reta tangente com a taxa de variação no ponto.

Benefícios com o uso do software: A sobreposição de objetos da geometria no gráfico da função possibilita uma articulação da taxa de variação com a reta tangente ao ponto. O ambiente dinâmico proporciona ao estudante variar a variável x e visualizar a variação da inclinação da tangente associada a x. A ideia do movimento da reta, ao mesmo tempo que requer cuidados de interpretação, pode proporcionar uma poderosa associação com uma maior ou menor taxa de variação sem necessariamente exibir seus valores.

Dificuldades/limitações com o uso do software: No software, não é possível atrelar a reta tangente à ferramenta taxa de variação para manipular a variável e, simultaneamente, observar tanto a variação da taxa como a inclinação da reta tangente, percebendo a relação entre elas. Devido a essa limitação, foi necessário explorar previamente a relação entre a parábola que representa o gráfico e a taxa de variação instantânea, para que o estudante possa relacionar a inclinação da reta com a taxa de variação de forma indireta, ao relacionar a reta com o gráfico da função. Em relação à ferramenta da reta tangente em si, é possível observar que ao ponto que ela varia com a variação de x, a reta tangente nunca é a mesma, pois variando o ponto x, a reta que passa pelo ponto associado também muda. No entanto, essa conclusão pode não ser imediata para alguns estudantes, pois ao mover-se o x há a impressão de que se está movendo a mesma reta. No software, a indicação de que tais retas tangentes são distintas está na janela de funções, onde é possível ver a equação da reta, no entanto, essa limitação é frequente de ambientes dinâmicos, nos quais há a impressão de que o mesmo objeto está se movendo.

2.7 Teste outras funções quadráticas e observe as relações entre a concavidade da parábola que representa o gráfico da função e o comportamento da taxa de variação no ponto ao variar x no gráfico. O que você percebeu?

Tempo previsto: 10 min

Aprendizados esperados: Inferir que se a concavidade da parábola que representa a função é para cima, a taxa de variação no ponto é estritamente crescente quando x cresce, se a concavidade é para baixo, a taxa de variação no ponto é estritamente decrescente quando x cresce.

Benefícios com o uso do software: A variação dinâmica dos coeficientes na janela de parâmetros e da variável x no gráfico, de forma conectada à variação da taxa de variação na janela de pontos, proporciona explorar as relações entre a concavidade da parábola e a taxa de variação de forma prática e rápida, possibilitando testar várias funções quadráticas representadas por parábolas côncavas para cima e côncavas para baixo e perceber como se diferencia a variação da taxa em ambos os casos.

Dificuldades/limitações com o uso do software: As dificuldades esperadas em relação a essa tarefa com o uso do software, giram em torno de como analisar a variação da taxa, dada uma função e sua parábola, pois não há ferramentas que exibam com mais detalhes essa variação, além da janela de pontos, na qual é exibido o valor da taxa simultaneamente à variação de x e em apenas uma célula. Como foi levantado antes, essa limitação seria minimizada pela disposição de um gráfico auxiliar, no qual fosse possível acompanhar o gráfico da taxa de variação em função de x, ou mesmo por uma tabela, na qual fosse listada tal relação. Além disso, é possível que a ausência de ferramentas de suportes ao raciocínio, como variação automática ou memória, sejam sentidas quando os estudantes lidarem com várias funções e as respectivas relações entre seu gráfico e a taxa.

2.8 Trace uma função polinomial de grau 3 no gráfico e simule a taxa de variação no ponto. Em seguida, varie x no gráfico e observe como a taxa de variação varia em função de x. Como a taxa de variação da função se comporta na mudança de concavidade no gráfico? Teste outros casos desse mesmo tipo de função e descreva o que você percebeu.

Tempo previsto: 15 min

Aprendizados esperados: Relacionar o ponto de inflexão com a taxa de variação no ponto; Inferir que na mudança de concavidade a taxa de variação muda o sentido de crescimento.

Benefícios com o uso do software: Os benefícios relativos a utilização do software nessa tarefa são praticamente os mesmos da questão 2.5, visto que a diferença entre aquela questão e a presente é que, nesta, a análise da variação da taxa tem o objetivo de relacioná-la com o ponto de inflexão do gráfico. Adicionalmente, quando se utiliza o software para estabelecer essa relação, o benefício específico é a possibilidade de variar a variável no gráfico e visualizar a variação simultânea do valor da taxa de variação no ponto, de forma que ao "mover" a variável na região do gráfico associada ao ponto de inflexão, seja possível estabelecer um padrão de comportamento da taxa nessa região ao analisar várias funções do tipo dado.

Dificuldades/limitações com o uso do software: As dificuldades relacionadas à tarefa 2.5 também se aplicam nesta tarefa. Especificamente na articulação da taxa de variação com o ponto de inflexão no gráfico, as dificuldades giram em torno da ausência de ferramentas no software para "acessar" esse ponto e poder visualizar com mais clareza o momento em que a taxa de variação troca o sentido de crescimento. Sem recursos explícitos para determinar exatamente esse ponto, os estudantes apenas podem guiar-se pelo valor da taxa de variação na janela de pontos e verificar que em algum momento o sentido de crescimento é invertido, mas, ainda assim, o software pode não dar conta de determinar tal ponto, o que pode gerar confusão a respeito do ponto de inflexão. Uma solução mais prática seria que o software indicasse os pontos notáveis para cada tipo de função ao variar a variável no gráfico, possibilitando assim uma visão mais clara do comportamento da taxa de variação nesses pontos.

6.2 Análise e discussão dos dados

Nesta seção são apresentadas a análise e a discussão dos dados da experimentação, associada à fase de análise à posteriori no Processo de Software. Tais dados consistiram da gravação da tela do *Function Studium*, gravação em vídeo da interação dos estudantes, folhas do teste escrito e observações do pesquisador.

O experimento foi realizado em uma sala, onde a dupla de estudantes tinha um computador disponível para explorar o software enquanto realizavam as atividades e escreviam as conclusões dos seus raciocínios nas folhas. O pesquisador assumiu o papel de observador, entretanto pontuou comentários e questionamentos em alguns momentos, para esclarecer dúvidas ou obter respostas mais claras dos estudantes.

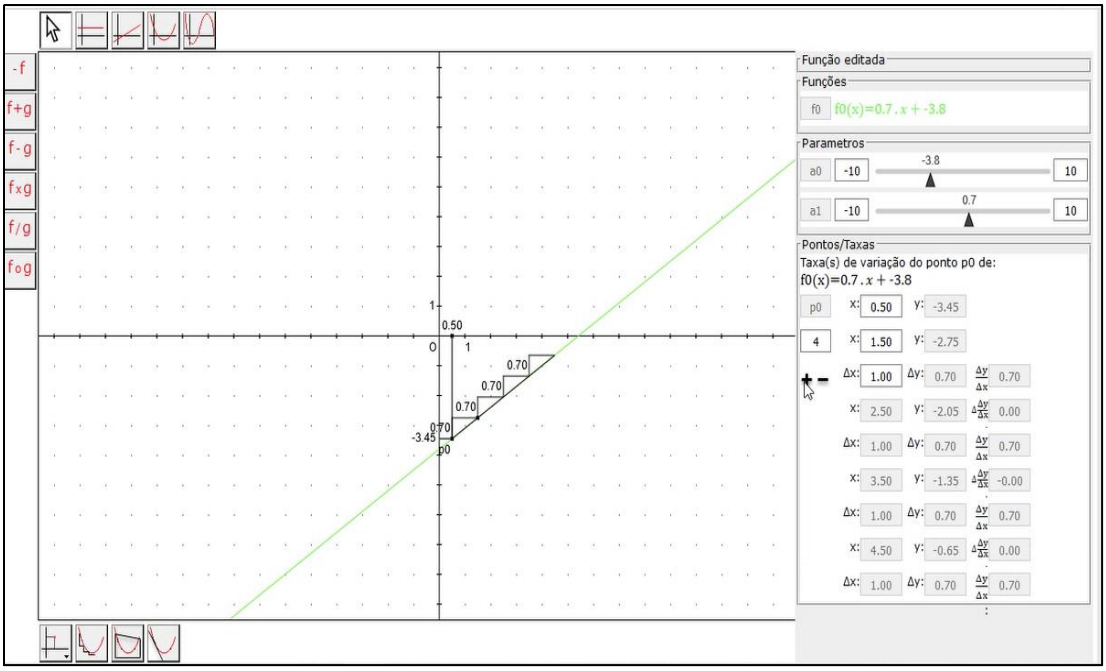
A seguir, foram relacionadas as questões que fizeram parte das atividades, sendo descritas as interações e uma análise sobre a forma como o uso do software *Function Studium* beneficiou ou limitou a experiência e o entendimento dos estudantes ao abordar a taxa de variação. Posteriormente, esses resultados são discutidos em relação ao Quadro de Carlson (2002) dos Níveis de Raciocínio Covariacional e em relação às fases do Modelo de Processo de Software adotado.

6.2.1 Análise dos dados (Análise à posteriori)

Questão 1.1 - item (a)

Neste item, os estudantes deveriam traçar a função $f(x) = 0{,}7x - 3{,}8$ e verificar a variação em $y = f(x)$ nos intervalos indicados, sendo esperado que começassem a inferir que nessa função, para os intervalos em x com o mesmo Δx, os intervalos em y também tinham Δy fixo. As ferramentas do software auxiliaram os estudantes nessas conclusões e a inferir antecipadamente que esse padrão seria observado nos demais intervalos da função, ao usarem por livre escolha o recurso da taxa de variação em intervalos sucessivos.

Figura 53: Atividade dos estudantes na questão 1.1



Benefícios do uso do software

B1- A representação da variação em duas opções de notação (gráfico e janela de pontos) permitiu aos estudantes optar por aquela que expressava mais claramente o valor da variação em y com uma variação dada em x.

Quadro 16: Discussão dos estudantes na questão 1.1a

Estudante 1: Aí ele tá perguntando qual é a variação de y. Estudante 2: É do... É de... Tem de menos três vírgula setenta... Estudante 1: É “zero vírgula setenta”. Tem aqui. (*Exibe o valor na janela de pontos*) Estudante 2: Ah to vendo. Certo (...) Qual é a variação de y... É zero vírgula sete... Certo...

B2 - A opção de manipular a variável pontualmente (na janela de pontos) ou continuamente (pelo deslize do ponto no gráfico) permitiu aos estudantes mobilizar as notações que se aplicassem melhor às suas intenções, o que reforça o benefício das “notações de ação”.

B3- O uso da ferramenta “taxa de variação”, aplicada em intervalos sucessivos do domínio abordada neste item, fez com que os estudantes inferissem antecipadamente (ainda no item a) que para intervalos iguais em x, as variações em y correspondentes seriam também iguais.

Quadro 17: Discussão dos estudantes na questão 1.1a

Estudante 1: (*Interrompe*) Bota no mais... Dá pra baixar César? Pesquisador: Baixar o quê? Estudante 1: Quando aperta aqui o… (*Refere-se à opção de gerar vários intervalos sucessivos na ferramenta taxa de variação*) Estudante 2: Ele coloca mais opções né? Pesquisador: Bem, você tá pegando vários intervalos. Estudante 1: Ah... Mas aqui é de... É, vai dar certo, a gente só precisa disso aqui ó…(*aponta no gráfico as variações iguais em y*). Na verdade, a gente nem precisava ter feito isso, vai ser igual mesmo, porque não é a função afim né? Então a variação dela é constante... A taxa de variação dela. É... É “zero vírgula sete”. Estudante 2: É constante...

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL1- Os estudantes sentiram falta de digitar o modelo algébrico diretamente no software, como opção aos controles deslizantes.

Quadro 18: Discussão dos estudantes na questão 1.1a

Estudante 1: Dá pra digitar né? (*pergunta ao pesquisador, sobre como definir os coeficientes da função*) Dá pra digitar direto ou precisa…? Pesquisador: Não... Tem que... (gesticula que é preciso variar o controle) Estudante 2: Precisa... Tem que variar a setinha né?

DL2 - O automatismo em se obter a variação de y com a variação de x na janela de pontos, reduziu a experiência numérica bem como a de leitura do gráfico para obter essa variação.

Questão 1.1 - item (b)

No item (b), os estudantes deveriam manter $\Delta x = 1$ e variar a variável x observando o comportamento de Δy na janela “Pontos/Taxas”, sendo esperado que eles ampliassem para todo o valor de x alcançado, a propriedade que haviam percebido no item (a). Como mostrado no item anterior, essa propriedade foi percebida antecipadamente pelos estudantes ao variarem o x usando a ferramenta taxa de variação em intervalos sucessivos.

Benefícios do uso do software

B4 - A variação dinâmica da variável x no gráfico, percorrendo o domínio da função, contribuiu para que os estudantes percebessem que a variação Δy se manteve invariável, fixado o Δx.

Quadro 19: Discussão dos estudantes na questão 1.1b

Estudante 1: É.. Quando você dá uma determinada (..) variação do x, você vai ter a mesma variação do delta y. Pesquisador: Se você quiser deslizar isso aqui pra você observar no domínio, você pode variar esse ponto x... Estudante 2: Esse ponto aqui no caso né? (*Varia o ponto x no gráfico*) Pesquisador: É, você pode deslizar ele e observar essas variações. Estudante 2: É.. ela se mantém. Estudante 1: Fixada a variação do x (...) fica fixada também a do y porque a tangente do ângulo é constante. Tem que dar igual aquele valor de delta y sobre delta x.

Questão 1.1 - item (c)

No item (c) os estudantes deveriam mudar o valor de Δx e variar a variável x para observar o comportamento da variação Δy para cada Δx. Era esperado que os estudantes percebessem que a propriedade inferida nos itens anteriores permanecia invariável também nesses casos, o que foi confirmado com a exploração dos casos no software.

Benefícios do uso do software

B5- A articulação da ferramenta “taxa de variação” em intervalos sucessivos com a variação dinâmica da variável x no gráfico percorrendo o domínio, fez com que os estudantes percebessem que mesmo para valores de delta x diferentes do item anterior, intervalos iguais em x ainda levavam a variações iguais em y.

Quadro 20: Discussão dos estudantes na questão 1.1c

Estudante 2: O delta x… Vou colocar dois (...) (*define* $\Delta x = 2$*).* Já alterou essa escadinha no caso né? Só que alterou o x né? Estudante 1: E também o y. Antes estava marcando zero vírgula sete, agora tá marcando um ponto quarenta. Estudante 2: Mas a variação continua a mesma… Ou seja, a cada dois pontos... Estudante 1: A taxa! A taxa de variação é a mesma. Estudante 2: A taxa de variação continua a mesma… E se eu dividir um ponto quarenta por dois vai dar… ponto setenta… Estudante 1: Aí foi bom quando ele (*o pesquisador*) falou que a gente desliza e vai ó (*varia a variável x no gráfico* e *mostra ao colega que o valor da variação de* Δy *permanece constante*).

Questão 1.2

Na questão 1.2, os estudantes deveriam testar a invariabilidade da propriedade inferida anteriormente para outras funções afins, tendo que repetir, para cada caso, o item (c) da questão anterior. Ao realizar os testes para cada função escolhida, eles perceberam que a propriedade continuava invariável, o que os fez inferir que a mesma constitui o padrão de variação no modelo afim.

Benefícios do uso do software

B6 - A conexão dinâmica e simultânea entre o modelo algébrico e a janela de pontos foi útil para testar diferentes funções observando ao mesmo tempo o comportamento do Δy para cada Δx escolhido.

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL3 - A ausência de uma ferramenta de memorização de valores testados fez falta nesse item, pois os estudantes testaram novos valores de taxa de variação em uma outra função e tiveram dificuldade de lembrar qual o valor da taxa eles haviam obtido no caso anterior.

Questão 1.3

Na questão 1.3, os estudantes deveriam manter o Δx fixo e variar os coeficientes da função afim, observando a variação da taxa média de variação $\Delta y/\Delta x$ para estabelecer uma relação entre suas variações. Era esperado que os mesmos percebessem como cada coeficiente influenciava a taxa média de variação.

Inicialmente, os estudantes tentaram a estratégia de escolher três valores distintos e pré-fixados para os coeficientes da função, ao invés de variar o controle deslizante e observar simultaneamente a variação da taxa. Nesse tipo de estratégia, seria interessante o recurso de uma lista ou tabela, que relacionasse cada valor de coeficiente escolhido com o valor da variação da taxa.

Após uma certa dificuldade em obter os valores escolhidos pelos controles deslizantes e com a sugestão do pesquisador, os estudantes decidiram observar a influência dos coeficientes no valor da taxa enquanto deslizavam os respectivos controles e observavam a variação simultânea na janela de pontos. Dessa forma, concluíram que a variação do coeficiente do termo independente não altera o valor da taxa de variação, enquanto o coeficiente relacionado à variável x é igual à taxa de variação.

Benefícios do uso do software

B7 - A conexão simultânea entre o modelo algébrico e a janela de pontos foi útil para testar diferentes coeficientes observando ao mesmo tempo a influência dos seus valores na variação da taxa média de variação.

Quadro 21: Discussão dos estudantes na questão 1.3

Pesquisador: O que essa questão tá procurando saber é a relação entre o coeficiente... Por exemplo, o que é que o coeficiente b pode mudar na taxa de variação. É... Vocês observam o valor da taxa de variação… Então, mudando o b, o que é que muda na taxa de variação e mudando o a o que é que muda na taxa de variação. Estudante 1: Mudando o b não muda nada. (*Conclui após variar o valor do coeficiente e observar o valor da taxa na janela de pontos.*) Estudante 1: Quando muda o a, o valor dela vai mudar exatamente pra onde o valor de a foi. (*Conclui após variar o valor do coeficiente e observar o valor da taxa na janela de pontos.*) Estudante 2: Mas a taxa de variação continua a mesma coisa, continua zero Estudante 1: Não, não.. A taxa da taxa média de variação!

Estudante 1: Então a relação que a gente pode perceber …. No caso do coeficiente b não tem alteração, o valor dele pode ser qualquer um que o valor de $\Delta y/\Delta x$ vai ser o que ele for. Estudante 2: Sempre igual ao coeficiente angular (*confunde o b com o a*) Estudante 1: E ele é igual ao valor do coeficiente angular (*Refere-se ao coeficiente a*)

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL4 - Ausência de uma ferramenta de memorização ou lista de valores relacionados para analisar a relação entre os coeficientes da função e a variação da taxa média, na estratégia inicial utilizada pelos estudantes.

DL5 - Os valores dos coeficientes obtidos no software por meio dos controles deslizantes limitaram-se a inteiros e decimais de no máximo uma casa, o que restringiu a escolha dos estudantes. Além disso, alguns valores não puderam ser obtidos por alguma falha pontual do aplicativo.

Quadro 22: Discussão dos estudantes na questão 1.3

Estudante 1: Vamos botar… menos um, um e dois, nos coeficientes. (*Varia o controle deslizante do termo independente, mas não consegue chegar ao valor -1 devido a uma falha do aplicativo*) Estudante 1: Ah… Estudante 2: Bota aí que eu não tô conseguindo não… Estudante 1: Beleza, então acho que não vou conseguir também. Estudante 1: Coloca dois então no caso… Estudante 2: Ele pula de “zero nove” pra “ponto um”… Estudante 1: É, o dois também tá pulando (…) Mas não tem problema não.. Estudante 2: Vamos botar dois e meio então.. Fica mais… Estudante 1: Acho que não vai também não.

Questão 1.4

Na questão 1.4, os estudantes foram solicitados a construir uma simulação do limite da taxa média quando *Δx* tende a zero, o que foi possível no software ao escolher um valor pequeno o suficiente (*Δx = 0,0001*). A partir dessa simulação, os estudantes deveriam tomar diferentes funções afim e observar como a taxa de variação variava em função de x.

Era esperado que os estudantes inferissem que dada uma função afim, a taxa de variação em função de x é constante e corresponde ao coeficiente *a* de *a*x+*b*, o que foi constatado ao variarem o valor de x por todo o domínio disponível na tela e perceberem a invariância do valor da taxa de variação.

Benefícios do uso do software

B8- A abordagem de função por notações/representações distintas conectadas de forma simultânea, permitiu que dependendo do aspecto a ser explorado, fosse escolhida a representação que expressava o aspecto de forma mais clara e eficiente para a compreensão das propriedades analisadas.

Quadro 23: Discussão dos estudantes na questão 1.4

Estudante 1: Então tem que variar aqui o valor de delta x né? Não, não... Tem que variar o valor de x, porque o delta x vai ser sempre pequeninho. (*Os estudantes decidem variar o valor de x por meio da janela de pontos*) Estudante 2: *Escolhe x=5 (E observa o valor da taxa)* Estudante 1: Bem, nesse caso aqui não vai mudar nada. (*Verifica que para o valor escolhido, a taxa de variação permanece inalterada*) Pesquisador: Você Testou pra um ponto né? Estudante 1: Indução vulgar.. (*Brinca*) Pesquisador: Pra ficar mais dinâmico você poderia fazer isso de outro jeito… Você tá analisando diretamente na janela, você pode ir lá no gráfico… (*Sugere que os estudantes variem o x diretamente no gráfico*) Estudante 1: É verdade, bem mais rápido. Genial, genial. O delta x não ta mudando né? Só o x… (*Varia o x no gráfico e observa a invariância do valor da taxa para todos os pontos alcançados*) Estudante 1: Entendesse? (*Questiona se o colega teve a mesma conclusão*) O valor do “delta y sobre delta x”… Ele não varia. Quando você faz o delta x ser sempre pequenininho e aí você vai mudando o valor de x, ele (*Refere-se ao Δy/Δx*) não vai variar. Estudante 2: Ok…

Estudante 1: O que isso sugere a respeito da variação na função afim? (...) Hum… Ah que a variação dela é constante.
Pesquisador: Bom, vocês decidem se é isso mesmo.
Estudante 1: O que tu achas?
Estudante 2: Assim, a taxa de variação dela é constante. Sempre igual ao coeficiente angular.
Estudante 2: Eu acho assim, que esse aplicativo é como se ele fosse um “estudo”... Porque, por exemplo, tem coisas que você olha no gráfico e já pode tirar conclusões... E você podendo alterar qualquer uma dessas variáveis, você consegue visualizar melhor como a função funciona né?

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL6- As simulações das propriedades da taxa de variação no software por um lado permitiram visualizar de forma muito clara tais propriedades, mas por outro, em alguns momentos isolados levou os estudantes a afirmarem como verdadeiras proposições que estavam sendo testadas em apenas um tipo de função ou em apenas uma parte do domínio.

DL7- A limitação da quantidade de casas decimais exibidas na janela de pontos, que faz com que o software exiba dois valores muito próximos como sendo iguais e a variação por consequência, igual a zero.

Quadro 24: Discussão dos estudantes na questão 1.4

Estudante 2: (*Insere o valor* $\Delta x = 0{,}0001$)
Estudante 1: Ta parecendo como se fosse zero a variação…
Estudante 2: (*Tenta refazer o procedimento*)

Questão 2.1

Na questão 2.1, os estudantes deveriam traçar o gráfico de algumas funções quadráticas e variar a variável x usando a ferramenta *taxa de variação* com o Δx fixo, para descrever como Δy variava em função de x. Era esperado que eles percebessem que a variação de Δy não é constante para acréscimos iguais em Δx e descrevessem como se comportava tal variação em função de x, nos casos $a > 0$ e $a < 0$.

Quadro 25: Discussão dos estudantes na questão 2.1

Estudante 1: (*Escolhe a função $x^2 - 2x + 2$ e usando a ferramenta taxa de variação varia o valor de x no gráfico, enquanto visualiza a variação de Δy na janela de pontos.)* Estudante 1: Olha, tô mudando aqui o x ó, e olha só pra o delta y... O delta x é o mesmo, tá "um", e aí o delta y vai aumentando. Consequentemente a taxa de variação né? Porque se o delta x tá sempre igual a "um" e o delta y tá aumentando, então a taxa de variação vai aumentar também. Escreve aí.. Estudante 2: Como é? O que tu dissesse? Estudante 1: Que o delta y tá aumentando conforme você aumenta os valores de x (...) (...) Estudante 2: Não é aumentando, é variando né? Estudante 1: Não, porque eu acho que ele vai diminuir... Se eu variar o x mais pra o vértice da parábola (*ao dizer isso, varia o x para a esquerda*) ele vai diminuir né? Não vai tá sempre aumentando não. Estudante 2: Sim... Mas.. A taxa de variação aumenta né? Ou diminui, no caso? Estudante 1: Depende. (...) Estudante 2: Então no caso, se eu vario o delta x... Estudante 1: Não, o delta x é constante. Estudante 2: Se eu vario o x ... Estudante 1: O delta y vai variar, deixando o delta x constante.

Apesar de terem variado o valor de x nos dois sentidos do eixo no gráfico, os estudantes se concentraram apenas em descrever como o Δy variava quando o x aumentava. Por isso foi necessária a intervenção do pesquisador no sentido de chamá-los a atenção para descrever o que acontece com essa variação com a diminuição contínua do valor de x.

Quadro 26: Discussão dos estudantes na questão 2.1

Pesquisador: Essa descrição que eu "tô" pedindo, é pra você descrever, se o x aumenta o que acontece com o delta y, se o x diminui, o que acontece com o delta y? Estudante 1: É porque... Vai ter uma hora que quando você começar a diminuir o x, o delta y vai… Eita, não… Ele vai diminuir, é verdade. (...) Estudante 2: Quer dizer, se aumentar o x… Estudante 1: Vai aumentar o delta y, e se diminuir o x, vai diminuir o delta y.

Em seguida, os estudantes testaram uma função em que o coeficiente *a* é negativo.

Quadro 27: Discussão dos estudantes na questão 2.1

Estudante 1: *(Escolhe a função -$2x^2 + 3x$ e varia o valor de x no gráfico, observando a variação no valor de* Δy *na janela de pontos.)* Estudante 2: Vê, aumenta o x pra ver, positivo... Estudante 1: (*Varia o valor de x no gráfico e observa a variação na janela de pontos*) Tá ao contrário… Vê, quando você vai diminuindo aqui o x ele (*refere-se ao* Δy) vai aumentando. Estudante 1: Aí ele ta perguntando o que? (...) Estudante 2: Só pra você perceber a diferença. O que deu pra perceber é, assim, quando o coeficiente "a dois" é negativo há uma inversão, quando eu aumento o x eu diminuo o delta y e quando eu diminuo o x eu aumento o delta y.

Os estudantes testaram apenas uma função em que $a>0$ e uma função em que $a<0$. Apesar de terem chegado a conclusões acertadas, precisariam testar mais casos para fortalecer sua inferência.

Benefícios do uso do software

B9 - Quando os estudantes precisaram coordenar a variação de Δy com a variação de x, a janela de pontos foi a notação escolhida para a visualização dessa variação, apesar de estarem manipulando o x por meio do gráfico. Nesse caso, houve uma articulação de notações, em que a ação se deu em uma notação e a visualização do resultado da ação se deu em outra. A janela de pontos facilitou a visualização da variação do valor de Δy enquanto exibia fixo o valor de Δx.

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL8 - Quando os estudantes precisaram coordenar a variação de Δy com a variação de x, a visualização da variação do valor de Δy ficava prejudicada sempre que esse valor alcançava um ponto fora do alcance da tela, comprometendo a coordenação das duas variações no gráfico.

Questão 2.2

Nesta questão, foi solicitado que os estudantes utilizassem um recurso da ferramenta taxa de variação para calcular a taxa em intervalos sucessivos com o mesmo valor de Δx, sendo esperado que ao analisar a sucessão de valores da taxa, os estudantes percebessem que tais valores variavam conforme um valor fixo.

A ferramenta taxa de variação se mostrou útil para auxiliar os estudantes a perceberem a característica variacional no modelo quadrático, principalmente com o recurso do aumento de incrementos, entretanto a disposição das linhas e colunas em que são exibidos os valores das variáveis e suas variações dificultaram a análise dos estudantes por estarem misturadas.

Benefícios do uso do software

B10 - A ferramenta taxa de variação aplicada ao gráfico e articulada à janela de pontos, ao permitir o aumento do número de incrementos e calcular a variação da taxa média de variação, permitiu visualizar o padrão de variação no modelo quadrático.

Dificuldades/limitações pelo uso do software

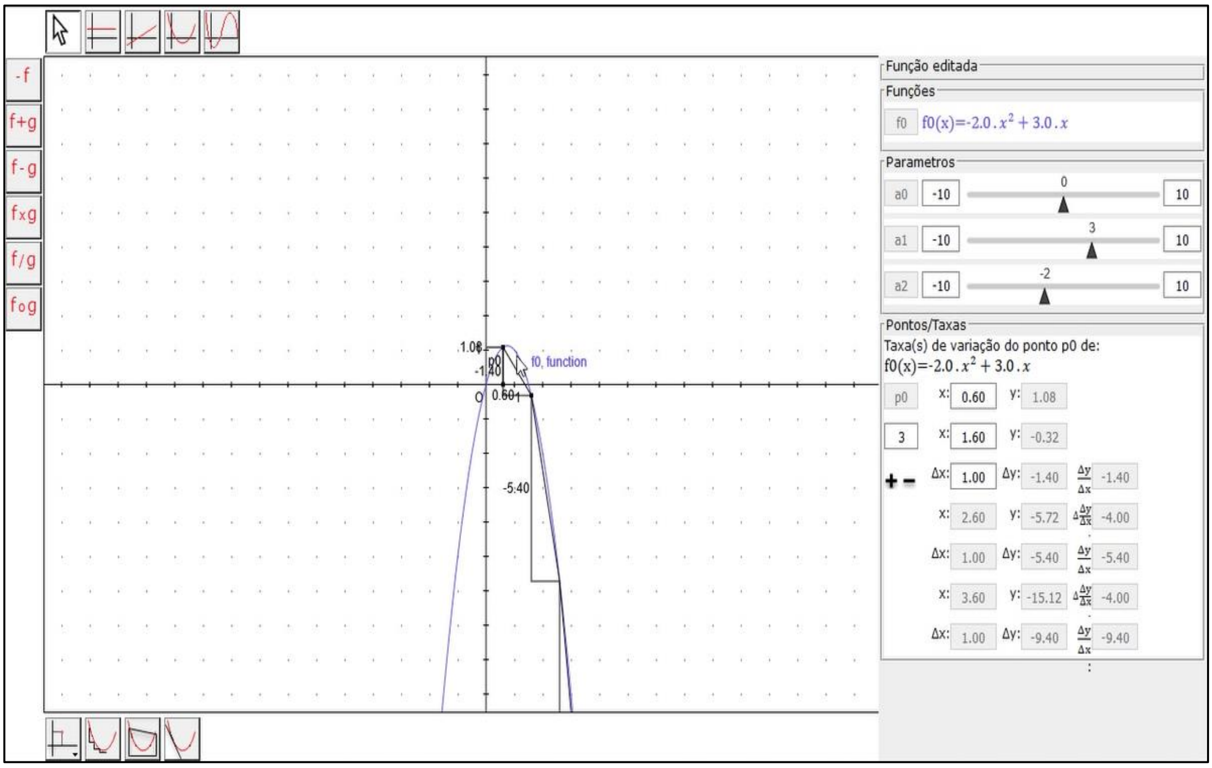
DL9 - A disposição das linhas e colunas da janela de pontos/taxas dificultou a análise dos estudantes quando exploravam a variação da taxa de variação, especialmente por inserir em uma mesma coluna valores da taxa de variação e da variação da taxa de variação.

Quadro 28: Discussão dos estudantes na questão 2.2

Estudante 1: A gente vai observar isso aqui… (*refere-se à terceira coluna da janela de pontos/taxa, na qual são exibidos valores para a taxa e a variação da taxa*) Estudante 1: Caramba… (*varia o x no gráfico e observa na janela de pontos que a sequência de valores exibidos não segue um padrão porque não distingue os valores de* $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ *e os de* $\Delta y/\Delta x$) Estudante 2: Teve um que se manteve constante (*distingue os valores de* $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ *e os de* $\Delta y/\Delta x$*, e observa que* $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ *permanece invariável com a variação de x*) Estudante 1: Teve não. Estudante 2: Aqui “taxa da taxa de variação”? (*refere-se a* $\Delta(\Delta y/\Delta x)$) Estudante 1: Uma tá menos quatro, outra tá menos seis..

Estudante 2: Não, mais aí você tem intercalado.. Você tem primeiro a taxa de variação e a "taxa da taxa de variação". A "taxa da taxa de variação" se mantém sempre quatro… Menos quatro! (...) Ou seja, o que a gente vê em relação à função afim (*compara com a atividade anterior*) é… A função afim tem uma "taxa da taxa de variação" nula e a taxa de variação nessa aqui (*na função quadrática*)… (*retifica*) A "taxa da taxa de variação" ela é constante e diferente de zero.
Estudante 1: É, constante e não-nula.
Pesquisador: No caso, essa variação que você tá dizendo que é constante é a variação da taxa de variação (*chama a atenção para o termo correto para* $\Delta(\Delta y/\Delta x)$).
Estudante 2: É, a variação da taxa de variação.

Figura 54: Atividade dos estudantes na questão 2.2



Questão 2.3

Na questão 2.3, os estudantes deveriam variar a variável x no gráfico e observar a variação da taxa de variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$, buscando entender o comportamento dessa variação em função de x, para estabelecer o padrão de variação no modelo quadrático. A conexão entre a variação no gráfico e na janela de pontos, em que a variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ foi exibida, contribuiu para que os estudantes percebessem um padrão claro.

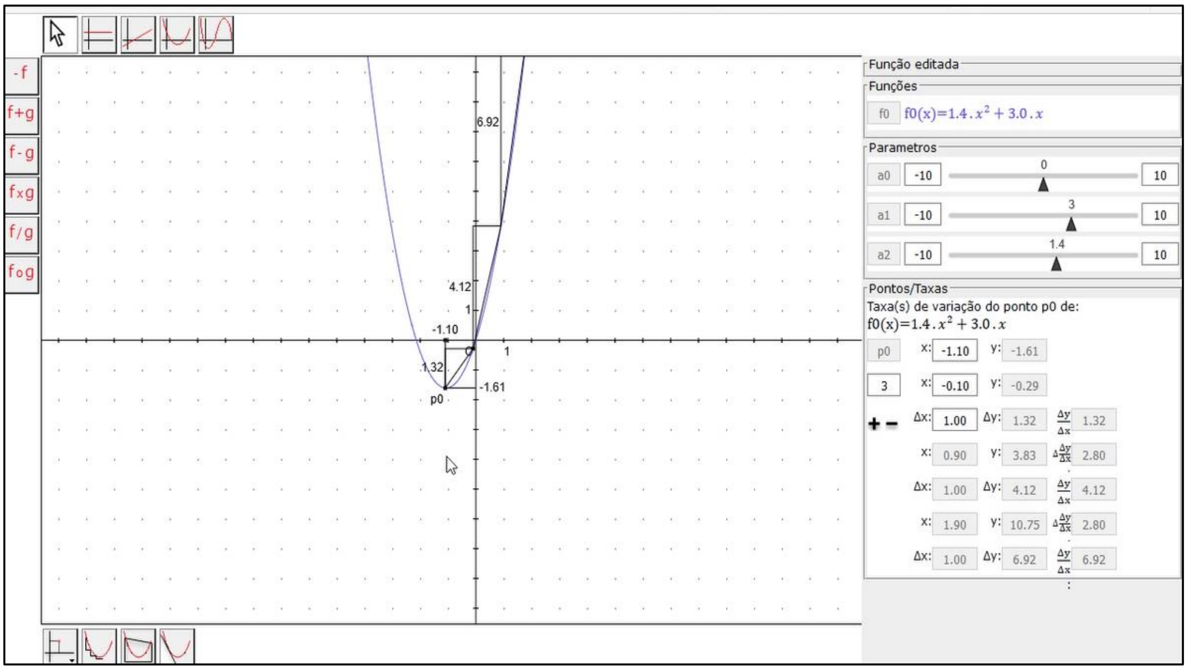
Benefícios do uso do software

B11 - A variação dinâmica da variável x no gráfico conectada simultaneamente à variação da taxa de variação na janela de pontos, permitiu aos estudantes perceber que em todo o domínio alcançado a variação da taxa de variação tinha um valor constante não-nulo nas funções quadráticas exploradas.

Quadro 29: Discussão dos estudantes na questão 2.3

Estudante 1: (*Varia o x no gráfico e observa a janela de pontos, onde são exibidas as diferenças sucessivas entre as taxas de variação nos intervalos do gráfico*) Estudante 1: Em questão da taxa de variação, quando você varia o x, a taxa de variação vai variar… Só que aí a diferença entre um "delta y dois sobre delta x dois" e o "delta y um sobre delta x um" é constante. A diferença entre as taxas de variação vai ser constante. É interessante isso.

Figura 55: Atividade dos estudantes na questão 2.3



Questão 2.4

Na questão 2.4 os estudantes foram questionados sobre a influência do valor dos coeficientes da função quadrática sobre o valor da variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$, sendo esperado que os mesmos percebessem que apenas o coeficiente *a* de $ax^2 + bx + c$ tem influência sobre $\Delta(\Delta y/\Delta x)$, além de descreverem brevemente de que forma se dava essa dependência. Com o auxílio do software, eles puderam perceber a influência do coeficiente *a* na variação da taxa, mas não perceberam que Δx também influencia nessa variação.

Benefícios do uso do software

B12 - A articulação entre o modelo algébrico e a janela de pontos, permitiu que a variação dinâmica dos coeficientes da função quadrática refletissem simultaneamente no valor da variação da taxa de variação, o que contribuiu para que os estudantes estabelecessem relações entre os coeficientes e o valor de tal variação.

Quadro 30: Discussão dos estudantes na questão 2.4

Estudante 1: (*Inicia a variação do coeficiente a e observa o valor de $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ na janela de pontos*) Estudante 1: Quando é quatro (*o valor de a*) é oito (*o valor de $\Delta(\Delta y/\Delta x)$*)… Estudante 2: Tá sendo o dobro né? Quando é três, é seis... Quando é um e meio, é três… Estudante 1: Vamos mexer os outros (*inicia a variação de b*) Estudante 1: Tá mudando alguma coisa na “taxa da taxa de variação”? Estudante 2: A “taxa da taxa de variação” se mantém constante. Estudante 1: Quando muda o b né? Estudante 2: Quando muda o b. Estudante 1: *Inicia a variação de c* Estudante 2: Mexendo o *c* não interfere em nada. Nem na taxa de variação, nem na “taxa da taxa de variação” Estudante 1: É só translada… Estudante 2: Mexendo o *b* também não altera a taxa da taxa de variação Estudante 2: Mexendo o *a* altera tudo. É o dobro né? Estudante 1: É o dobro. (...) Estudante 2: O que que a gente vê? Se a gente mexer o *c*, o termo independente, não altera, se a gente mexer o termo que tem o x, que é o termo *b*, também não altera…

Estudante 1: Não, ele não altera a variação né?
Estudante 2: É, mas altera a taxa de variação. E no caso quando a gente mexe no *a*, no coeficiente de "x ao quadrado" ele altera os dois, tanto a taxa de variação quanto a taxa da taxa de variação.

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL 10 - Uma lista, tabela ou ferramenta que memorizasse e exibisse a relação entre os valores escolhidos para o coeficiente e a variação da taxa de variação poderia ter auxiliado os estudantes na melhor percepção da relação entre tais variáveis e da influência adicional de Δx.

Questão 2.5

Nessa questão, os estudantes deveriam escolher uma função quadrática e usar a simulação da taxa de variação no ponto para observar e descrever como a taxa variava em função de x. Era esperado que os estudantes descrevessem essa dependência articulando os aspectos do gráfico da função, especialmente com o ponto de mudança do sinal da taxa de variação.

Por meio da exploração do software, os estudantes perceberam que tal mudança de sinal da taxa relaciona-se com o gráfico por meio da coordenada x do vértice.

Benefícios do uso do software

B13 - A articulação dinâmica entre os pontos da parábola, correspondente à função e o valor da taxa de variação associado a cada ponto, contribuiu para que os estudantes estabelecessem uma ligação direta entre o sinal da taxa e o gráfico da função, representado na parábola.

B14 - A simulação do limite contribuiu para que os estudantes visualizassem as relações entre o gráfico da função e a taxa de variação em cada ponto do gráfico, de forma dinâmica, compensando a ausência da ferramenta limite.

Quadro 31: Discussão dos estudantes na questão 2.5

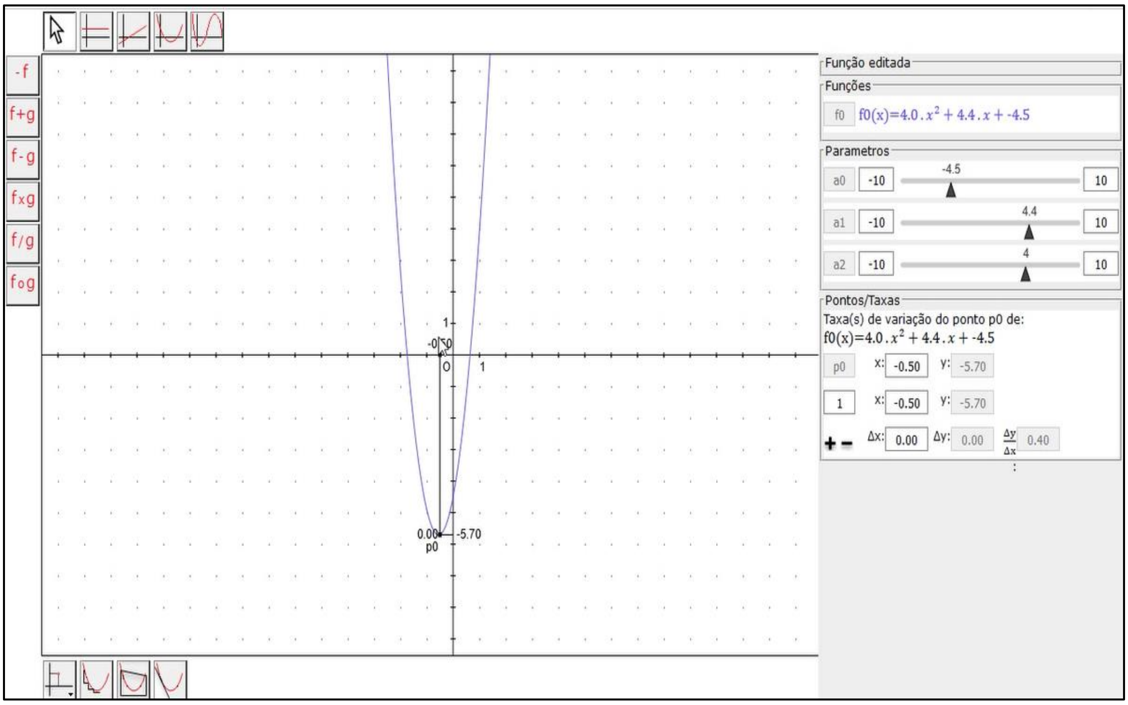
Estudante 1: (*Escolhe a função quadrática $4x^2+4,4x-4,5$*) Estudante 1: (*Constrói a simulação do limite*) A gente vai ter que pegar um delta x pequenininho né? Estudante 1: (*Inicia a variação do x a partir do valor x=-0,10 e observa o valor da taxa no ponto*) Estudante 1: Aqui nesse x ta "três ponto seis" (*refere-se ao valor da taxa de variação em x=-0,10*)… Aumentando o x ela vai aumentando, mas ele ta perguntando onde é que ela vai mudar de… (*refere-se à mudança de sinal da taxa*) Estudante 2: Passa pra o lado negativo pra ver o que acontece… (*refere-se ao eixo x*) Estudante 1: (*Varia o x no gráfico nas duas direções*) Na hora que ela chega em zero (*refere-se à variável no eixo x*) ainda assim é positivo (*refere-se à taxa de variação*), perto de zero… Em zero ela é positivo. Só que depende do gráfico… Estudante 1: Sim, a pergunta é: em que intervalo a taxa é negativa e quando ela muda pra positiva. Estudante 2: Ela muda no…. Nesse cume aí né? Estudante 1: No vértice. Estudante 2: No vértice da parábola. Estudante 1: (*Continua variando o x*) Olha, ela é zero mesmo. Também pode dizer que ela é negativa de… De menos infinito… Estudante 2: Volta, volta pra lá (*pede para que o colega varie o x para valores à esquerda do "x do vértice"*)… Isso, ta ok agora, a taxa de variação, negativa. Aí ela chega a zero quando passa no vértice e quando passa pra o positivo (*refere-se a valores a direita do x do vértice*) ela fica positiva. Então... a taxa de variação é negativa quando eu "tô" antes do x do vértice e ela é positiva quando ta depois do x do vértice.

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL 11 - A possibilidade de exibir o valor da taxa de variação no gráfico poderia ter auxiliado os estudantes na análise do que acontece com esse valor em cada x, sem a necessidade de recorrer à janela de pontos a cada movimentação realizada na variável.

DL 12 - A possibilidade de localizar mais facilmente (destacado) valores especiais do gráfico como o x do vértice, poderia ter auxiliado os estudantes na exploração do gráfico. Houve dificuldade para atingir esse ponto devido a imprecisões (descontinuidade) na variação da variável x.

Figura 56: Atividade dos estudantes na questão 2.5



DL13 - Uma lista ou tabela que associasse o valor de cada x ao valor correspondente da taxa de variação, poderia ter contribuído melhor para a análise dos estudantes, pois os mesmos precisaram variar o x no gráfico e ao mesmo tempo observar o valor da taxa em cada ponto em uma única célula da janela de pontos.

Questão 2.6

Na questão 2.6 foi solicitado que os estudantes retomassem a função do item anterior e acionassem a ferramenta “reta tangente”, para observar que relações percebiam entre a inclinação dessa reta e a taxa de variação em cada x. Era esperado que os estudantes relacionassem um aumento no ângulo de inclinação com um aumento na taxa de variação, o que os estudantes conseguiram ao apoiar-se na exploração do software.

Benefícios do uso do software

B15- A sobreposição da reta tangente ao gráfico da função e a sua mobilização por meio da variável x, contribuíram para o estabelecimento da relação entre a inclinação da reta e a taxa de variação no ponto. Entretanto essas contribuições só foram possíveis com a conclusão do item anterior, que estabeleceu relação entre o gráfico da função e a taxa de variação em cada ponto.

Quadro 32: Discussão dos estudantes na questão 2.6

Estudante 1: (*O estudante 1 varia a variável x no gráfico*) Estudante 2: Vê, coloca no vértice, ela (*refere-se à tangente*) fica o que? Ela fica paralela. Após o vértice ela fica crescente, e antes do vértice ela fica decrescente. Não é essa a conclusão? Estudante 1: E quanto mais longe do vértice ela vai ficando mais decrescente, quando ta indo (*refere-se ao x*) pra o lado esquerdo né? E quando vai pra o lado direito, depois do vértice, ela vai ficando cada vez mais crescente. Então tem a mesma ideia da taxa de variação, que ela sempre crescia mais quando ficava maior que o vértice, aquela coisa que a gente tinha visto... Estudante 1: Agora tem a ver também com o coeficiente *a* né? Ele vai ser dominante. Quando ele é positivo aí toda vez que você aumenta o x, você aumenta a taxa de variação, toda a vez que você diminui, você diminui a taxa de variação. E quando… Foi até tu que percebeu… Quando o *a* é negativo é ao contrário… Estudante 2: Se inverte…

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL14 - A articulação das ferramentas reta tangente e taxa de variação, de forma que ao variar o valor de x, fosse variado tanto a tangente associada quanto a taxa de variação no ponto, poderia ter contribuído para que os estudantes percebessem as relações entre a inclinação da reta e a taxa instantânea de forma mais clara.

Quadro 33: Discussão dos estudantes na questão 2.6

Estudante 1: (*aciona a ferramenta reta tangente, varia o x e observa que na janela de pontos/taxas não há conexão com a variação no gráfico, os valores permanecem inalterados*) Estudante 1: É normal (*questiona ao pesquisador*) ele não dar o "delta y sobre o delta x", a variação, quando ta falando da tangente? Pesquisador: É porque isso aí é outra função… (*Explica que os estudantes podem usar a conclusão da questão anterior, em que a variação da taxa foi relacionada com o x do vértice na parábola, para relacionar com a inclinação da reta*)

Questão 2.7

Nesta questão foi solicitado que os estudantes testassem outras funções quadráticas e observassem as relações entre a concavidade da parábola e o comportamento da taxa de variação no ponto ao variar o x. O objetivo era que os mesmos inferissem que a posição da concavidade revelava o sentido de crescimento da taxa de variação em relação a x.

Os estudantes se valeram das conclusões que tiraram antecipadamente nos itens anteriores, ao usarem a simulação do limite para explorar a taxa de variação no ponto e a reta tangente. Nesse caso, foi concluído que a depender do sinal do coeficiente *a*, que também determina a concavidade da parábola, a taxa de variação se comporta de formas distintas com a variação de x. Com isso, a exploração do software nesse item não trouxe benefícios ou limitações adicionais além dos que já relatados anteriormente.

Quadro 34: Discussão dos estudantes na questão 2.7

Estudante 1: Agora tem a ver também com o coeficiente *a* né? Ele vai ser dominante. Quando ele é positivo aí toda vez que você aumenta o x, você aumenta a taxa de variação, toda a vez que você diminui, você diminui a taxa de variação. E quando… Foi até tu que percebeu… Quando o *a* é negativo é ao contrário… Estudante 2: Se inverte…

Questão 2.8

Na questão 2.8 os estudantes deveriam traçar uma função polinomial de grau 3, utilizar a simulação da taxa de variação no ponto para variar a variável x e observar a variação da taxa em função de x. Era esperado que os estudantes relacionassem o ponto de inflexão do gráfico dessa função com a variação da taxa de variação, caracterizando-o como um ponto em que a taxa muda o sentido de crescimento.

Na interação abaixo, é descrito como os estudantes inicialmente atribuem aos pontos de máximo e mínimo (em que a taxa muda de sinal) a função de pontos de inflexão. Nesse caso, o equívoco foi apenas de nomenclatura, pois eles demonstraram entender o que estava ocorrendo com a taxa de variação nesses pontos. Após a discussão com o colega e a exploração do software, um dos estudantes percebeu que os pontos antes declarados como de inflexão, na verdade eram pontos críticos de máximo e mínimo locais em que a taxa mudava de sinal, além disso, o único ponto de inflexão encontrava-se em outra parte do gráfico.

Não está totalmente esclarecido pela interação entre os estudantes ou pelo registro da exploração no software, quais elementos fizeram com que um dos estudantes percebesse onde estava de fato o ponto de inflexão. Mas esses registros apontam para a hipótese de que o mesmo tenha usado o conhecimento prévio do tipo de função e tenha se beneficiado da exploração do software ao variar o x no gráfico e acompanhar a variação simultânea da taxa na janela de pontos, percebendo que ao passar por esse ponto, a taxa que se comportava de forma decrescente inverteu o sentido de crescimento.

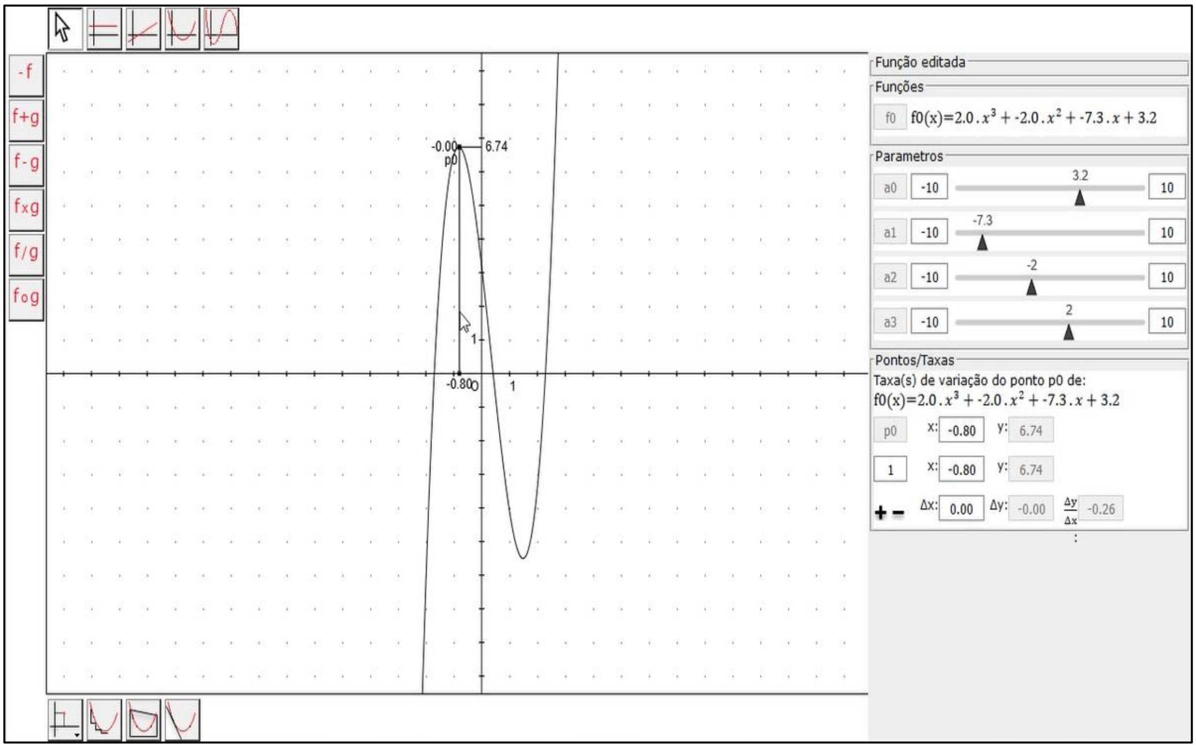
Quadro 35: Discussão dos estudantes na questão 2.8

Estudante 1: (*Escolhe a função* $f(x) = x^3$, *constrói a simulação do limite e varia o x no gráfico, observando o valor da taxa de variação em cada ponto*)
Estudante 1: Ela só faz aumentar né? Quer dizer... Ela é sempre positiva ou igual a zero, ela vai diminuindo né?
Estudante 2: Ela, na verdade, é crescente para todos os intervalos né?
Estudante 1: Não… Porque vê, nesse intervalo aqui ó (*varia x entre -2 e 0*), a variação tá diminuindo, mas é positivo… Porque aqui ela cresce (*em valores de x maiores que zero*). Quando se aproxima do (*sugere o x do vértice*)… É um pouco parecido com a do segundo grau.
(...)
Estudante 1: Quando a concavidade é voltada pra cima, que isso é depois do zero, ela vai crescer né? Você aumenta o x, aumenta a variação… A taxa de variação! E quando você vai pra concavidade pra baixo, que é a esquerda do zero, você vai diminuindo o x, a taxa de variação aumenta.
(...)
Estudante 1: (*decide testar outra função*, $f(x)=2x^3-2x^2-7{,}3x+3{,}2$)
Pesquisador: Agora, você falou que esse ponto de mudança é no zero né? Aí é que eu peço pra mudar a função pra ver se é sempre no zero esse ponto. Que ponto é esse?
Estudante 1: (*inicia a variação de x a partir de x = -7,2*)
Estudante 1: Vamos lá, ele (*refere-se a x*) tá aqui bem negativo, aí ele tá aumentando, aí tá diminuindo a taxa de variação…(*posiciona a variável no valor do x do máximo local e equivoca-se afirmando que é a coordenada do ponto de inflexão*) É... São os pontos de inflexão né? Os pontos de mudança de concavidade. Quando a concavidade for voltada pra baixo, quanto menor o valor de x, maior vai ser a taxa de variação. Aí no ponto de inflexão (*apesar de referir-se ao ponto de inflexão, posiciona a variável na coordenada do ponto de máximo local*), a taxa de variação vai ser zero (*devido ao equívoco, chega a uma conclusão precipitada sobre a taxa no ponto de inflexão*)...

(...)
(*continua aumentando o valor de x no gráfico*)
Estudante 1: Aí chega em outro ponto de inflexão (*chegou na verdade no mínimo local*), aí vai mudar a concavidade, agora a concavidade é voltada pra cima, vai aumentar o x e vai aumentar o valor da taxa de variação… É mais ou menos assim...
Estudante 2: No caso, essa função do terceiro grau ela tem dois pontos de inflexão né?
Estudante 1: É.
Estudante 2: Então ela tem duas mudanças. (*refere-se à mudança de concavidade*)
Estudante 1: É, e três tipos de concavidade.
Estudante 2: É, então você tem aqui como se fossem duas funções. Você tem uma função crescente, você tem uma função, como se fosse uma função que tivesse o *a* maior que zero e o *a* menor que zero. Então, o que acontece, a gente viu dois experimentos, um em que x aumenta e a taxa de variação aumenta, e viu outra que se x diminui, a taxa de variação diminui. Nesse caso acontece as duas coisas… E essa mudança acontece no ponto de inflexão do gráfico né?
Estudante 1: (*enquanto o colega concluía seu pensamento, o estudante 1 variava o x no gráfico por toda a extensão do gráfico disponível na tela, observando o valor da taxa de variação, em seguida volta atrás no que havia afirmado*) Ah, mas aqui… Aqui só vai ter um ponto de inflexão, eu falei errado. Eu troquei ponto de inflexão com crítico. Crítico é… Máximo e mínimo. Ponto de inflexão é aqui. (*tenta posicionar no ponto de inflexão*)
Estudante 2: Então, no caso eu refaço o que eu disse… Não é ponto de inflexão, é ponto de máximo e de mínimo, quer dizer nos vértices dos pontos de máximo e de mínimo é que ocorrem as mudanças que eu tinha falado antes.
Estudante 1: Não, mas não é assim não. É no ponto de inflexão que vai ocorrer… (*posiciona em x=-3,10 e varia para a direita*) Ele ta na mesma concavidade aqui, porque só vai mudar a concavidade quando passar pelo ponto de inflexão, aí ta com a concavidade pra baixo aqui (*x=-3,10*). Aí a gente vai aumentando o x e só vai diminuindo a taxa de variação… Só diminui, só diminui... Aí chega no ponto crítico (*varia o x até a coordenada do ponto de máximo local*), ela vai mudar o sinal da taxa de variação, mas não quer dizer que vai mudar o jeito de comportar (*refere-se a uma taxa crescente ou decrescente*)… Aumentar o x e aí vai...Vai mudar se ela ta diminuindo ou aumentando. E aí a gente aumenta o x, (*vai aumentando o valor de x*) continua aumentando e chega um ponto que ela para de diminuir e começa a aumentar (*passa pelo ponto de inflexão*), que é no ponto de inflexão.
Estudante 2: Que é no caso esse ponto aqui?
Estudante 1: É.
Estudante 2: Então a gente pode perceber que esse ponto nem sempre acontece na origem né? Nesse caso aí ele tá próximo à origem né? Mais ou menos no ponto… Zero ponto cinco né?
Estudante 1: É, tem que ver aqui… (*varia o x próximo à coordenada do ponto de inflexão*) Hum… Diminui… Diminui... Aí aqui ele para de (*refere-se à taxa, que para de decrescer*)… Aqui ele mudou, ele tava “menos sete ponto noventa e seis”, em vez de diminuir ele vai pra

“menos sete ponto noventa e quatro.” (*Confirma que ao passar pelo ponto de inflexão, a taxa de variação deixou de decrescer e começou a crescer*)

Figura 57: Atividade dos estudantes na questão 2.8



Benefícios do uso do software

B16 - A simulação do limite, articulada com a variação da variável no gráfico e a janela de pontos, contribuiu para esclarecer o comportamento da taxa de variação no ponto de inflexão, caracterizando esse ponto variacionalmente.

Dificuldades/limitações pelo uso do software

DL15 - Dificuldade para acessar as coordenadas de pontos pré-definidos ou específicos no gráfico (máximo, mínimo, inflexão) devido à descontinuidade da variação e à ausência de um recurso para encontrar de forma prática os pontos especiais do gráfico.

Quadro 36: Discussão dos estudantes na questão 2.8

Estudante 1: Ele aqui tá passando direto (*ao variar o x no gráfico, percebe uma descontinuidade na variação, inclusive no ponto crítico*) Estudante 2: Zero, parou aí. Estudante 1: Não, não, não é o delta x. É... A taxa de variação. Ele passa direto, mas ela vai chegar no zero, porque aqui tava positiva e aqui tá negativa, ela é contínua, então tem que passar no zero.

DL16 - Uma lista ou tabela que relacionasse a variação de x com a taxa de variação no ponto poderia ser mais efetiva na análise da variação da taxa, auxiliando os estudantes a identificarem os intervalos de crescimento e decrescimento por meio da sequência gerada.

6.2.2 Discussão dos resultados do experimento

Nesta subseção os resultados do experimento são discutidos em relação ao Quadro Covariacional (Carlson et al, 2002) e ao Modelo de Processo com base na EDI (Tibúrcio, 2016).

6.2.2.1 Discussão dos resultados em relação ao Quadro de Níveis de Raciocínio Covariacional

O Quadro Covariacional proposto por Carlson et al (2002) baseia-se na perspectiva da covariação e do raciocínio covariacional, isto é, nas "... atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades variáveis enquanto se observam as formas como elas mudam uma em relação à outra" (CARLSON et al, 2002, p. 354, tradução nossa). A partir dessa perspectiva, os autores definiram um quadro de ações mentais, que foram classificadas em níveis mentais para analisar a atividade dos estudantes como a taxa de variação.

A perspectiva covariacional de Carlson et al (2002) apoiou nesta pesquisa, tanto o desenvolvimento do software como a construção da experimentação, com foco especial no apoio dado à tecnologia para dar suporte às atividades dos estudantes com a taxa de variação. Em relação ao desenvolvimento do software, essa perspectiva foi elencada como uma das características fundamentais do protótipo, além de terem sido especificadas as funcionalidades e recursos inseridos nela.

No experimento com o *Function Studium*, as atividades buscaram explorar a taxa de variação dentro da perspectiva covariacional, de forma a avaliar dentro dessa perspectiva a utilização dos recursos implementados, por meio da experiência dos estudantes com eles.

As atividades que constituíram o experimento concentraram-se nos três últimos níveis de covariação, com foco nos quarto e quinto níveis, por explorarem particularmente as funções afim e quadrática em suas taxas de variação média e instantânea, além de uma questão envolvendo uma função polinomial de grau 3. Dessa forma, as interações dos estudantes foram analisadas em relação ao suporte oferecido pela tecnologia quando eles abordaram a taxa de variação dessas funções, considerando o nível covariacional em questão.

Como anteriormente afirmado, as atividades concentraram-se nos dois últimos níveis de raciocínio covariacional, os quais envolvem a coordenação da taxa média e da taxa instantânea, entretanto segundo Carlson et al (2002), cada nível covariacional deve comportar ações envolvidas no nível anterior.

O item a da questão 1.1 abordou uma tarefa relacionada ao nível 3 (coordenação quantitativa), no qual os comportamentos envolvem a coordenação da quantidade de mudança em uma variável com a mudança em outra variável. Nesta questão, foi pedido que os estudantes determinassem a variação de y, dadas três variações distintas em x, o que, conforme as antecipações dos estudantes, mostrou que ao perceberem que os intervalos distintos apresentavam variação igual, por consequência em todos eles teriam a mesma variação em y.

Nos itens em que as atividades se concentraram na coordenação da taxa média de variação, a referência clara a essa taxa nem sempre estava explícita nos enunciados, como por exemplo o nível 4 (coordenação da taxa média), que envolveu a coordenação da variação na função com variações uniformes na variável de entrada, o que funciona às vezes como uma decomposição da taxa média (coordenar a variação de Δx e Δy separadamente).

A coordenação da taxa média no modo decomposto foi abordada nos itens b e c da questão 1.1, na questão 1.2 e na questão 2.1, nas quais os estudantes tinham que variar o valor de x, dado um Δx, e observar como se comportava o valor de Δy. Trata-se então da coordenação da variação em y com variações uniformes em x, o que por meio da variação dinâmica do x no software, proporcionou que a coordenação dessa covariação fosse feita continuamente no gráfico, abrangendo todo o domínio alcançado na tela, o que foi fundamental para testar as hipóteses dos estudantes.

Nas questões da atividade 1 acima, o que estava em jogo era testar no software a validade do que tinha sido inferido no primeiro item, que variações iguais em x levariam a variações iguais em y, partindo para uma inferência maior de que essa propriedade se constitui a caracterização das funções afim. No caso da questão 2.1 essa característica não estava mais presente, os estudantes deveriam perceber que Δy variava com a variação de x, ou seja, ao tomar diferentes valores de x com o mesmo Δx, estes valores não levavam a Δy iguais, logo, a taxa média de variação variava com a mudança em x.

Dessa forma, o *Function Studium* ofereceu suporte ao raciocínio covariacional dos estudantes ao possibilitar que eles testassem essa propriedade no caso da função afim, variando o x dinamicamente e percebendo a invariância na variação de y na janela de pontos. No caso da função quadrática, os estudantes perceberam que ao variar valores de x no gráfico, com $\Delta x = 1$, os valores correspondentes de y não tinham a propriedade de Δy ser também constante, conforme iam percebendo sua variação simultânea na janela de pontos, o que mostrou que a conexão simultânea do dinamismo do gráfico com a janela de pontos foi fundamental nesses casos.

Já a coordenação da taxa média em sua composição normal ($\Delta y/\Delta x$), foi abordada na questão 1.3 da atividade 1 e nas questões 2.2, 2.3 e 2.4 da atividade 2. Na primeira atividade, os estudantes deveriam variar os coeficientes da função afim e perceber que influência eles exerciam em um maior ou menor valor da taxa média, nesse caso, já estava inferido pelos estudantes que variações iguais em x levavam a variações iguais em y, o que estava em jogo era coordenar a taxa média com as variações dos coeficientes.

O suporte dado pela tecnologia implementada no *Function Studium* foi por meio da conexão simultânea do modelo algébrico com a janela de pontos. Com essa conexão, foi possível variar os coeficientes dinamicamente e um por vez, por meio dos controles deslizantes, e visualizar o valor da taxa média que a janela de pontos exibia, possibilitando ao estudante perceber a influência de cada coeficiente separadamente, uma covariação entre a e $\Delta y/\Delta x$ e outra entre b e $\Delta y/\Delta x$.

Com relação às questões da atividade 2 que abordaram a coordenação da taxa média na sua composição normal ($\Delta y/\Delta x$), os estudantes tinham que perceber um padrão de variação característico da função quadrática, na qual valores sucessivos de $\Delta y/\Delta x$, apesar de não serem constantes, tinham diferença constante. Nesse sentido, o software ofereceu um importante suporte por meio da ferramenta taxa de variação, que tem o recurso de aumentar o número de incrementos para aplicar intervalos sucessivos de Δx ao gráfico, o que possibilitou aos estudantes coordenarem a taxa média de variação em intervalos sucessivos para perceber que apesar de variar, a taxa média da função quadrática segue um padrão de variação.

É destacado, entretanto, que nas questões que envolveram a coordenação da taxa média de variação na sua composição normal, um dos recursos bastante utilizados pelos estudantes foi a janela de pontos/taxas, que exibia o valor da taxa de variação média conforme os valores tomados no gráfico, o que reforça a importância da representação tabular na perspectiva covariacional. Porém, a janela de pontos foi limitada pela forma como estavam configuradas as linhas e colunas que exibiam os valores das variáveis envolvidas: x, y, Δx, Δy, $\Delta y/\Delta x$ e $\Delta(\Delta y/\Delta x)$, pois nem todas as variáveis estavam listadas na mesma linha ou coluna, por exemplo os valores sucessivos de $\Delta(\Delta y/\Delta x)$, o que dificultou acompanhar a sucessão desses valores, como descrito na interação entre os estudantes na questão 2.2.

As questões que envolveram a coordenação da taxa instantânea foram a 1.4 na atividade 1 e as questões 2.5 a 2.8 na atividade 2. Essas questões utilizaram a simulação da passagem da taxa média para a instantânea para analisar como esta variava a cada x no domínio da função, tal simulação partia da taxa média entre dois valores de x, os quais deveriam ser aproximados cada vez mais até um valor de Δx suficientemente pequeno para que o computador considerasse $\Delta x = 0$.

As ações envolvidas nessa questão são descritas no nível 5 do raciocínio covariacional de Carlson et al (2002), pois envolviam a inferência de que a taxa instantânea é obtida por refinamentos cada vez menores da taxa média e a coordenação dessa taxa com mudanças contínuas na variável de entrada.

Ao analisar o raciocínio covariacional envolvido e o suporte dado pelo *Function Studium* nessa abordagem da taxa instantânea pelos estudantes, foi percebido que na simulação da obtenção da taxa instantânea, a covariação envolvida se deu entre Δx e $\Delta y/\Delta x$, pois os estudantes deveriam variar o valor da primeira e observar a variação na segunda. Esse processo dinâmico, que ocorreu com a mobilização do gráfico (para coordenar a aproximação entre os pontos x_1 e x_2) e da janela de pontos (para coordenar os valores de Δx e $\Delta y/\Delta x$) foi possível pelo tipo de ambiente no *Function Studium*, em que as variáveis puderam ser mobilizadas dinamicamente e com a conexão das notações.

Houve um suporte importante da janela de pontos e sua configuração tabular, permitindo aos estudantes acompanharem em simultâneo a variação de Δx tendendo a zero ao mesmo tempo que a variação da taxa média tendia ao valor do coeficiente *a* da função. Por outro lado, a limitação do número de casas decimais na janela de pontos também limitou a visualização da aproximação cada vez maior de Δx e $\Delta y/\Delta x$ de seus valores limites em alguns casos, limitação essa que também poderia ser suprida por uma listagem de valores sucessivos de Δx e $\Delta y/\Delta x$.

Analisando as questões propriamente ditas, na questão 1.4 os estudantes deveriam coordenar a variação da taxa instantânea em função de x, ou seja, deveriam inferir que a cada ponto na variável de entrada, a taxa no ponto permanecia invariável. Dessa forma, o *Function Studium* apoiou o raciocínio dos estudantes ao permitir que o deslize do x no gráfico representasse a variação contínua no domínio da função, e a conexão simultânea com a janela de pontos/taxas permitisse atestar a invariância da taxa ao calculá-la a cada ponto.

Nas questões sobre a função quadrática, a taxa de variação instantânea foi abordada com relação à forma como varia em função de x, à sua contextualização com a reta tangente ao gráfico e à sua articulação com aspectos do gráfico como concavidades e pontos de inflexão.

Na questão 2.5 os estudantes variaram o valor de x para descrever como a taxa de variação instantânea se comportava em função da variável de entrada, o que caracteriza o nível 5 de raciocínio covariacional. A coordenação de x foi feita no gráfico, enquanto a coordenação do valor da taxa foi feita na janela de pontos/taxas de forma simultânea à variação de x, com isso, os estudantes perceberam que a taxa instantânea em função de x é crescente ou decrescente, a depender do sinal do coeficiente *a,* e sua mudança de sinal se relaciona com o valor de x associado ao vértice da parábola que representa o gráfico, reforçando assim a importância da articulação dinâmica e simultânea entre o gráfico, a janela de pontos e a janela de parâmetros.

Já a abordagem da taxa instantânea articulada ao contexto geométrico foi feita na questão 2.6, na qual os estudantes deveriam estabelecer uma ligação entre a taxa instantânea no ponto e a inclinação da reta tangente, ao coordenar a variação de x e a variação da inclinação da reta. A coordenação de ambas as variações foi possibilitada pela sobreposição da reta tangente ao gráfico, conectando-a dessa forma à variação de x, em uma variação contínua.

Dessa forma, os estudantes perceberam que a variação da inclinação da reta está intimamente ligada com a taxa de variação no ponto associado, o que mostrou a importância da conexão entre ambas as variações, possibilitada pela sobreposição da reta tangente ao gráfico. Entretanto, foi percebido na experiência dos estudantes que a desconexão entre a ferramenta reta tangente e a janela de pontos/taxas (na qual é calculada a taxa de variação) limitou a articulação entre a taxa de variação e o contexto geométrico, pois com a ferramenta "reta tangente" ativada não era possível obter o valor da taxa de variação na janela de pontos.

Por fim, nas duas últimas questões da atividade 2 foram abordadas articulações entre aspectos do gráfico como concavidades e pontos de inflexão e a sua interpretação do ponto de vista variacional. Para isso, os estudantes deveriam analisar e descrever a variação da taxa instantânea em partes do gráfico com concavidades distintas e nos pontos em que se davam a mudança de concavidades, ou seja, nos pontos de inflexão.

Descrever variacionalmente o que acontece em concavidades distintas e nos pontos de inflexão está relacionado ao nível 5 de raciocínio covariacional, por isso, os estudantes deveriam realizar tal análise por meio da simulação da taxa instantânea. Nessa tarefa, os estudantes puderam coordenar a variação de x e a variação da taxa instantânea por meio da conexão simultânea entre as ações no gráfico, onde manipulavam a variável, e na janela de pontos/taxas, onde visualizavam o valor da taxa instantânea variando simultaneamente.

Os resultados exibidos na análise das duas questões, 2.7 e 2.8, mostraram que os estudantes perceberam que as diferentes concavidades se relacionavam com a forma como variava a taxa, se crescente ou decrescente, e os pontos de inflexão foram descritos como os pontos em que a taxa mudava o seu comportamento variacional, de crescente para decrescente, e vice-versa. Os estudantes chegaram a essas inferências quando variaram o valor da variável nas diferentes partes do gráfico e perceberam a variação no valor da taxa na janela de pontos, ora crescendo, ora decrescendo e em um momento particular mudando de sentido de crescimento.

Essa coordenação da variação da taxa instantânea em relação às concavidades e pontos de inflexão, teve suporte da simulação da taxa instantânea e da conexão entre as notações do gráfico e janela de pontos. No entanto, essa coordenação poderia ter sido beneficiada com a opção de exibir no software uma lista ou tabela com os valores de x e de $\Delta y/\Delta x$, para que fossem analisados ponto a ponto os intervalos de crescimento e a mudança de sentido de crescimento, ou mesmo de um gráfico auxiliar em que a variação da taxa fosse traçada simultaneamente ao deslize da variável x no gráfico.

6.2.2.2 Discussão dos resultados em relação ao Modelo de Processo de Software

O Modelo de Processo de Software desenvolvido na pesquisa de Tibúrcio (2016) norteou as fases de desenvolvimento do *Function Studium*, que teve como fase de teste a experimentação com os estudantes. Essa fase gerou um corpo de dados que descreveu a experiência dos estudantes com o software, contribuindo para a validação do mesmo em relação ao contexto no qual foi experimentado.

A discussão proposta aqui, visa refletir a utilização do Modelo de Processo de Software utilizado, principalmente a partir da fase do experimento, mas não se restringindo a ela, pois no entendimento do pesquisador as reflexões sobre o Modelo de Processo aplicado ocorreram também nas outras fases do processo, e são pontuadas no decorrer deste texto.

O software *Function Studium* fundamentou suas funcionalidades e recursos da forma mais geral possível, em relação à abordagem do conceito de função em um contexto variacional. No entanto, o caso analisado levou em consideração as funções afim e quadrática, em como tais modelos puderam ter sua abordagem suportada pelo software para serem explorados do ponto de vista da covariação.

O Modelo de Processo que orientou o desenvolvimento do *Function Studium* constitui-se de fases, com base na Engenharia Didática e nos modelos de processo de software da Engenharia de Softwares. A delimitação do campo, as análises preliminares, a análise de requisitos, a análise à priori e prototipação, os experimentos e a análise a posteriori e validação são as fases que constituem esse Modelo.

Partindo dos resultados da experimentação e apoiando-se nas reflexões sobre o processo como um todo, as fases do Modelo de Processo foram revisitadas para analisar como os requisitos, elencados como resultado dessas fases, tiveram sua validação na exploração pelos estudantes na experimentação.

a) Benefícios do uso do *Function Studium* e a relação com as etapas do Modelo de Processo de Software

Os resultados do experimento revelaram uma série de benefícios decorrentes do uso do *Function Studium* para abordar a taxa de variação das funções afim e quadrática em uma perspectiva covariacional. Igualmente, foram reveladas algumas limitações e dificuldades que a mesma tecnologia trouxe para essa mesma abordagem.

De forma geral, os benefícios do uso do software *Function Studium* apontados na análise dos dados do experimento referem-se a recursos, funcionalidades e notações elencadas na análise de requisitos, com base nas análises preliminares. É preciso destacar, dentro do Modelo de Processo, a sequência definida (análise preliminar - análise de requisitos - desenvolvimento) como importante para a conexão entre os objetivos pretendidos pelo software e os recursos nele implementados.

Um dos benefícios do *Function Studium* mais destacados no experimento foi relacionado às contribuições da conexão de notações de forma simultânea (B1, B5 a B13), um requisito elicitado para o software com base nas análises preliminares. Essa funcionalidade conectou as ações nas notações algébrica, gráfica e janela de pontos/taxa (perspectiva tabular) de forma que a taxa de variação pode ser representada em cada uma delas, fazendo emergir diferentes aspectos desse conceito.

Dentro das análises preliminares, a conexão de notações de forma simultânea emergiu como um aspecto da dimensão informática, dentro da sistematização proposta por Kaput (1992), com relação aos aspectos computacionais aplicados ao Ensino da Matemática, particularmente na área de funções. Ao ser definida como um aspecto necessário para a abordagem da taxa de variação, essa característica foi relacionada na análise de requisitos e gerou funcionalidades para operar a conexão entre as notações do software.

Além da conexão de notações, outros aspectos levantados na análise preliminar que promoveram benefícios na experimentação, foram as notações de ação (B2), variação abordada em ambiente dinâmico (B4) e a sobreposição de notações (B15). Tais aspectos foram articulados com os resultados da análise preliminar nas demais dimensões (epistemológica, didática e cognitiva) para definir recursos e funcionalidades na elicitação de requisitos, os quais foram implementados no desenvolvimento.

Também houve benefícios do uso de recursos idealizados e implementados a partir dos resultados da análise preliminar nas dimensões epistemológica e cognitiva, como a aplicação de intervalos sucessivos na ferramenta taxa de variação (B3). A própria taxa de variação tem a característica conceitual de poder variar, porém na análise das dificuldades dos estudantes foram relacionados problemas com a interpretação dessa característica no gráfico, o que gerou a necessidade de requisitar uma ferramenta que representasse variações sucessivas tomadas a partir de intervalos de x, de forma dinâmica e conectada às demais notações, o que foi implementado e trouxe os resultados citados acima.

Em relação à fase da prototipação, foram destacadas as interações entre os pesquisadores do estudo e os desenvolvedores, para a análise das versões parciais do protótipo. Essas fases tiveram por objetivo explorar tais versões para identificar falhas ou limitações que não atendessem as necessidades básicas elicitadas nos requisitos, sendo comunicadas aos pesquisadores desenvolvedores para a alteração ou implementação dos recursos.

Essas interações ocorreram durante a prototipação e em suas fases finais tiveram a função de um “teste piloto” que apesar de não ter sido realizado com estudantes, foi realizado pelo pesquisador do estudo e gerou a proposição de algumas alterações e implementações. Nessa fase de testes antes do experimento, foi “descoberto” que apesar de não poder contar com uma ferramenta requisitada (o limite), o funcionamento dessa ferramenta poderia ser simulado ao escolher um valor de delta x tão pequeno que o programa o considerasse zero. Dessa forma, o uso dessa ferramenta compensou a ausência da ferramenta limite e trouxe benefícios à abordagem da taxa de variação (B14, B16).

Em conjunto com a fase da prototipação, o Modelo de Processo possui a fase de análise à priori, com o objetivo de pensar as situações de uso, os possíveis problemas que poderiam surgir com a utilização e nas hipóteses de respostas dos estudantes. Com relação a esse procedimento, parte dele foi efetuado nos testes das versões parciais, nas quais foram apontadas sugestões e alterações para os desenvolvedores, com base na experiência do pesquisador desse estudo com os recursos do protótipo, a outra parte, que se relaciona às possíveis respostas dos estudantes só foi possível ser gerada quando foram construídas as atividades do experimento, por estarem elas intimamente relacionadas.

De forma geral, as relações entre os benefícios do uso do *Function Studium* que emergiram na experimentação, apontam para a importância de uma análise preliminar que explore as dimensões determinadas (epistemológica, didática, cognitiva e informática) para traduzir seus resultados em requisitos de funcionalidades, permitindo abordar o conceito dentro da perspectiva previamente definida. Aliado a isso, tais relações mostraram a importância da interação entre os desenvolvedores e os pesquisadores, no sentido de realizar testes de versões parciais do protótipo para verificar se as implementações em andamento atenderam ao que foi requisitado.

b) Dificuldades e limitações pelo uso do *Function Studium* e a relação com as etapas do Modelo de Processo de Software

As dificuldades e limitações advindas do uso do *Function Studium* na experimentação, apontaram para um conjunto de relações com as fases do Modelo de

Processo utilizado, o que forneceu condições básicas tanto para o aprimoramento do software e do Modelo, como para a adequação e superação em relação aos entraves que persistirem.

Conforme a análise dos dados do experimento, apesar de se relacionarem diretamente com as questões associada a elas, as dificuldades e limitações apontaram aspectos que se concentraram em dois momentos distintos do Processo de Software utilizado: as análises prévias e a fase de prototipação e análise à priori.

A importância das análises prévias articuladas à análise de requisitos já havia sido citada na discussão dos benefícios advindos do uso do software, entretanto faz-se necessário confirmar a importância dessa fase com base nas dificuldades e limitações que ocorreram no experimento. Dois aspectos confirmaram essa importância, em primeiro, a necessidade de analisar o objeto matemático como forma de antecipar as dificuldades e restrições que poderão ser encontradas pela sua abordagem com o uso da tecnologia e, em segundo, a confirmação, no experimento, de dificuldades ou limitações causadas pela ausência de ferramentas e recursos que tiveram a sua necessidade apontada nessas primeiras análises.

Como exemplos do primeiro aspecto destacado acima, foram relatadas limitações na abordagem proposta pelo software em relação à redução da experiência numérica (DL2, devido ao automatismo do cálculo dos valores da função e da taxa) e em relação à generalização pelos estudantes das propriedades inferidas sem a devida formalização (DL6, ao afirmarem como verdadeiras proposições que estavam sendo testadas em apenas um tipo de função ou em apenas uma parte do domínio). Estas limitações foram previstas nos resultados da análise preliminar, que também consideraram aspectos limitadores da abordagem computacional, o que fornece ao professor/pesquisador possibilidade de prover elementos para superar tais limitações previamente ao surgimento delas na exploração do software pelos estudantes,

O segundo aspecto apontou a confirmação da necessidade de ferramentas e recursos que foram elicitados na análise de requisitos, com base nas necessidades levantadas na análise preliminar. Alguns desses recursos, que foram elicitados mas não implementados até o experimento, foram as ferramentas memória, tabela e lista, que dariam suporte ao raciocínio dos estudantes na análise da variação da função e sua taxa e cuja ausência limitou essa análise conforme as dificuldades DL3, DL4, DL10, DL13 e DL16, e o zoom dinâmico que daria suporte à coordenação contínua da covariação, mas que a ausência provocou a dificuldade DL8.

Como anteriormente destacado, o surgimento de tais dificuldades e limitações apenas reforçou a importância das análises preliminares para articular os aspectos cognitivos, didáticos, epistemológicos e informáticos relacionados ao conceito, e traduzir as necessidades resultantes dessa análise em requisitos, garantindo sua implementação na fase de prototipação.

Além dos aspectos relacionados às análises prévias, outra fase do Processo de Software que emergiu no experimento foi a de prototipação e análise à priori, cujas dificuldades e limitações relacionadas apontaram algumas necessidades tanto em relação à prototipação quanto à análise à priori. Em relação à primeira, as dificuldades associadas apontaram para a necessidade de testar versões parciais do protótipo, para obter novas necessidades de implementação. Além disso, os resultados mostraram que a participação dos estudantes nesse processo poderia minimizar as limitações e adequar melhor a tecnologia a eles.

Com relação à necessidade de testes das versões parciais, houve dois aspectos que confirmaram a importância desse procedimento, um foi a limitação da quantidade de casas decimais, aspecto importante para a análise da variação em valores muito “próximos”, que foi diagnosticada em uma fase de teste com o próprio pesquisador do estudo (uma espécie de teste piloto) e o outro foi a desarticulação entre as ferramentas taxa de variação e reta tangente, que limitou a associação entre esses dois aspectos e só foi observada na experimentação final com os estudantes.

No processo de desenvolvimento do protótipo, após a apresentação de suas primeiras versões pelo engenheiro-programador, foram iniciadas algumas sessões de interação entre os pesquisadores, na intenção de aproximar o software de uma versão cada vez mais compatível com os requisitos, considerando as limitações de tempo e disponibilidade das equipes. Essas interações contribuíram para essa aproximação, no entanto o experimento final com os estudantes revelou que sempre há um aspecto a ser adequado, alterado ou implementado, a fim de que os requisitos sejam atendidos.

Dessa forma, é possível afirmar que as experimentações das versões preliminares do software podem contribuir para um maior sucesso em termos de satisfação dos requisitos. Além disso, a participação dos estudantes já nesses testes preliminares parece ser outro ponto a ser considerado, já que na experimentação emergiram situações que sugeriram que o envolvimento deles em fases experimentais preliminares poderia ter adequado melhor o software ao uso deles, como por exemplo, formas alternativas de inserir a função (DL1), limitações na escolha dos coeficientes (DL5) ou a configuração dos valores exibidos na janela de pontos (DL9).

Com relação à análise à priori e sua aplicação no Processo de Software, os resultados do experimento apontaram dificuldades e limitações que poderiam ter sido minimizados ou eliminados caso fossem objeto de uma análise à priori ainda durante a fase de desenvolvimento, em conjunto com testes das versões preliminares do protótipo. Foram relatadas limitações do software na determinação das coordenadas de pontos especiais do gráfico, para auxiliar na associação desses pontos com a taxa de variação (DL12, DL15) e também quanto à impossibilidade de exibição no gráfico dos valores da taxa de variação, para auxiliar na coordenação da taxa no próprio gráfico enquanto se varia o x (DL11).

Apesar de uma análise à priori ser muito importante para antever possíveis dificuldades e limitações do software, a fim de que sejam corrigidos e implementados antes do teste da versão final, essa fase só foi plenamente executada a partir da construção das atividades, posteriormente à entrega da versão do *Function Studium* para a experimentação. Com isso, quando as atividades foram construídas, as situações matemáticas criadas geraram necessidades específicas, que só emergiram no contexto específico, porém de forma relevante para o software.

Dessa forma, tais necessidades só puderam ser vistas após a análise do experimento, o que levantou a possibilidade de que a análise à priori fosse aplicada mais cedo, tendo que para isso, as atividades terem sido construídas já na fase de desenvolvimento, o que por outro lado limitaria as atividades, pelo fato da impossibilidade de contar com todos os recursos do software nesse momento. Outra possibilidade seria construir situações básicas de uso do software, sem a necessidade da construção das atividades finais que comporão o experimento final, e aplicar uma análise à priori sobre essas situações básicas, testando as versões parciais do protótipo.

Essa possibilidade permitiria construir uma análise sobre ações básicas no software (como traçar uma função e utilizar a ferramenta taxa de variação para observar como esta varia em função de x), que ao serem testadas gerariam novas necessidades para o protótipo, com base nas dificuldades e limitações observadas. Essa alternativa tem a vantagem de a análise à priori ser aplicada em um primeiro momento, sobre situações básicas e gerais e depois sobre situações específicas, mais próximas aos objetivos do estudo, mas também requer mais tempo e um processo mais extenso por contar com mais de uma análise à priori, experimentação e análise à posteriori.

Em resumo, as dificuldades e limitações observadas na experiência dos estudantes com o *Function Studium* mostraram a importância das análises preliminares aplicadas às dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática para traduzir as necessidades advindas dessas dimensões em requisitos e ferramentas do software, além disso apontaram para a necessidade de dar um foco maior às experimentações do software em versões preliminares, com a participação dos estudantes, bem como de refletir de que forma e em que momento a aplicação da análise à priori pode ser feita para potencializar os resultados obtidos no software.

7. CONCLUSÃO

Esta pesquisa teve como objetivo a prototipação e validação de um software para abordar a taxa de variação de funções, orientado por um Processo de Software desenvolvido na pesquisa de Tibúrcio (2016). O caráter colaborativo entre as duas pesquisas, foi explicitado pela aplicação do Modelo desenvolvido em Tibúrcio (2016) para prototipar o software nesta pesquisa e pela utilização deste caso na pesquisa de Tibúrcio (2016), o que foi possibilitado dentro do Grupo de Pesquisas LEMATEC, na Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE.

O Modelo de Processo de Software adotado foi baseado na Engenharia Didático-Informática (EDI), que propõe a articulação dos aspectos do ensino e da aprendizagem dos conceitos matemáticos aos aspectos informáticos, para desenvolver artefatos computacionais que atendam necessidades e possibilidades de ambas as áreas. Além da EDI, fundamentaram esta pesquisa o Quadro de Covariação de Carlson et al (2002), que define ações e níveis de raciocínio covariacional, e a Sistematização proposta por Kaput (1992) relativa às Tecnologias Computacionais aplicadas ao Ensino da Matemática.

O software *Function Studium*, prototipado e validado nesta pesquisa, foi desenvolvido pelo professor Dr. Franck Bellemain, a quem atribuiu-se o termo “Engenheiro-programador”, sendo o mesmo também o orientador da pesquisa de Tibúrcio (2016), que recebeu o termo “Engenheiro-pesquisador”. O *Function Studium* foi experimentado por meio de atividades com uma dupla de estudantes de Cálculo da Licenciatura em Matemática da UFPE, no caso da taxa de variação das funções afim e quadrática.

Ao iniciar o percurso metodológico descrito no Modelo de Processo de Software adotado, definiu-se o objeto matemático como sendo a taxa de variação de funções, e o caso a ser estudado como a taxa nas funções afim e quadrática. Assim, seguiu-se à fase das Análises Preliminares para determinar um quadro de aspectos epistemológicos, didáticos, cognitivos e informáticos relacionados ao conceito, tais análises produziram necessidades para o protótipo, as quais foram traduzidas em requisitos na fase seguinte.

Na fase de Análise de Requisitos, as necessidades levantadas nas Análises prévias foram traduzidas em termos de recursos que constituiriam o protótipo. Na fase de prototipação, houve uma maior interação com os pesquisadores envolvidos no desenvolvimento do Processo de Software e do protótipo, para a explicitação dos requisitos que deveriam ser incorporados no software, tal interação se deu tanto presencialmente, por meio de reuniões em grupo, como à distância, por meio de questionários on-line respondidos pelo pesquisador deste estudo.

Nesta fase, foram utilizados métodos de prototipação para auxiliar na comunicação dos requisitos ao programador. Os métodos foram: (a) prototipação com o uso do *GeoGebra*, para simular as ferramentas requisitadas e (b) prototipação com telas múltiplas utilizando um software de apresentação, para simular as opções e funcionalidades dos menus do protótipo.

Os desenvolvedores apresentaram uma versão parcial do protótipo, que ao ser analisada em relação aos requisitos pré-definidos, revelou a ausência de alguns recursos importantes. Dessa forma, houve uma interação entre os pesquisadores para definir que recursos precisariam ser implementados para que o software atendesse aos requisitos essenciais para este estudo, posteriormente, a versão do software *Function Studium* para o experimento foi apresentada para a aplicação das atividades com os estudantes.

A Análise à Priori tinha o objetivo de pensar nas situações de uso, nas hipóteses de respostas dos estudantes e nos possíveis problemas que poderiam surgir com a utilização do software. No Modelo de Processo adotado, essa análise seria realizada na fase de prototipação, no entanto houve dificuldades para realizá-la nesse momento, visto que as atividades não haviam sido concebidas até a entrega da versão final do software, para que aproveitassem todos os recursos implementados, tal dificuldade será melhor abordada posteriormente.

Na fase de Experimentação, o *Function Studium* foi utilizado por uma dupla de estudantes da Licenciatura em Matemática, com a aplicação de duas atividades que deveriam ser realizadas com o auxílio dele, uma atividade sobre a taxa de variação na função afim e a outra sobre a taxa na função quadrática. Os estudantes interagiram entre si e com o software para realizar as atividades, tais interações foram registradas com uma gravação em vídeo, além da gravação da tela do computador e as observações do pesquisador deste estudo.

Em seguida, deu-se a fase de Análise à Posteriori e Validação, por meio da análise dos dados do experimento, na qual foram analisados os benefícios e as limitações do uso do *Function Studium* para alcançar os aprendizados esperados. Tais resultados foram confrontados com os quadros teórico-metodológicos para entender como os recursos requisitados e implementados se relacionaram com os aspectos desses quadros.

Na busca de traçar algumas conclusões, foi feita uma síntese dos resultados obtidos no processo de desenvolvimento e validação do software *Function Studium*, que tomam por base os resultados da experimentação discutidos em relação aos quadros teórico-metodológicos, bem como os resultados de cada fase do Processo de Software particularmente.

Ao confrontar os resultados do experimento com o Quadro de Carlson et al (2002) foi procurado entender como os recursos requisitados e implementados ofereceram suporte e promoveram o raciocínio covariacional dos estudantes ao abordarem a taxa de variação. Além dos benefícios, foi procurado entender também as limitações e dificuldades que os estudantes tiveram para abordar a taxa na perspectiva covariacional com o uso do software.

Dessa forma, a análise realizada mostrou que os benefícios proporcionados pelo *Function Studium* foram importantes para que os estudantes compreendessem os aspectos da taxa de variação, como: (a) a conexão simultânea e dinâmica entre notações para analisar a influência dos coeficientes da função na taxa de variação e analisar como a taxa varia em função da variável x; (b) a simulação dinâmica da taxa instantânea, para relacioná-la com aspectos do gráfico como as concavidades e os pontos de inflexão.

É importante observar, também, que os benefícios proporcionados por esses recursos, refletiram a aplicação de requisitos que tiveram por base as necessidades levantadas na análise preliminar.

Como exemplo disso, a ferramenta que aplica a taxa de variação em intervalos sucessivos foi implementada com base na característica variacional dos modelos afim e quadrático, que apresentam formas de variar distintas, que são claramente perceptíveis quando se analisa sua variação em intervalos constantes. Além disso, a necessidade de articulação com o contexto geométrico foi traduzida na implementação de ferramentas que permitiram que os estudantes relacionassem a taxa de variação com a inclinação da reta tangente ao gráfico.

Por outro lado, algumas características do *Function Studium* limitaram o raciocínio covariacional dos estudantes quando eles tentaram coordenar a variação em notações distintas, o que exige um esforço cognitivo e, consequentemente, um suporte tecnológico. Foram exemplos desses fatores limitadores, a disposição das variáveis na janela de pontos/taxas, a desconexão entre as ferramentas taxa de variação e reta tangente e a ausência de alguns suportes ao raciocínio dos estudantes que poderiam ter auxiliado na coordenação da variação em notações distintas, como a memória, uma lista de valores das variáveis associadas ou até mesmo um gráfico auxiliar.

Ao confrontar os resultados do experimento com as fases do Processo de Software adotado, também, foram percebidos benefícios e dificuldades que se relacionaram com tais fases, reforçando a importância de algumas e expondo a necessidade de reflexão sobre outras.

Na análise dos benefícios com o uso do software, foi evidenciada a contribuição da sequência “análise preliminar - análise de requisitos – prototipação (desenvolvimento) ” no Processo de Software usado, pois permitiu reunir uma série de necessidades relativas ao objeto matemático na análise preliminar. Tais necessidades foram traduzidas em requisitos na fase posterior e implementadas em ferramentas do software na prototipação.

Na experimentação, os benefícios associados a essas implementações mostraram as relações com as primeiras necessidades levantadas na análise preliminar, como um caminho inverso. É importante destacar a relevância de que essas análises tenham sido feitas nas quatro dimensões propostas pela EDI (epistemológica, cognitiva, didática e informática), pois cada dimensão gerou necessidades para o protótipo e na articulação deles foram idealizadas e desenvolvidos recursos que deram suporte a atividades dos estudantes com a taxa de variação.

Na fase de prototipação foram destacadas as interações com os desenvolvedores para o teste de versões parciais do *Function Studium*. Nessas interações foi possível aproximar as versões parciais do protótipo idealizado pelo pesquisador do estudo (por meio das prototipações com uso do GeoGebra e das telas múltiplas), testando as funcionalidades do protótipo em relação ao que havia sido requisitado e fornecendo novas necessidades de alterações e implementações.

As dificuldades e limitações relacionadas na fase do experimento também proveram ricas contribuições para a reflexão sobre o Processo de Software aplicado nesse estudo.

Com relação às análises preliminares, os aspectos limitadores que emergiram no experimento apontaram duas perspectivas: a primeira foi a função dessa análise como um instrumento para o professor/pesquisador antecipar-se à possíveis dificuldades, que virão com o uso do software pelos estudantes e planejar caminhos para minimizar tais dificuldades; a segunda, foi a de um instrumento de referência para comparar como a ausência dos requisitos não implementados influenciaram a experiência dos estudantes com o software, em termos de objetivos de aprendizagem alcançados.

Com relação à prototipação, as dificuldades e limitações emergidas no experimento reforçaram a necessidade da experimentação das versões parciais do protótipo, para aproximá-las dos requisitos pré-estabelecidos, além disso sugeriram a participação dos estudantes já nessa fase, para adequar o software centralizando-o no seu uso por eles, o que minimizaria limitações nesse sentido em versões posteriores.

No que diz respeito à análise à priori, houve uma necessidade de reflexão sobre a aplicação dessa fase, visto que a sua execução propriamente dita se deu na construção das atividades do experimento, ao tempo da versão final do software, o que levou ao surgimento de dificuldades e limitações no experimento que poderiam ter sido minimizadas caso ela tivesse sido realizada antes dos testes das versões prévias.

No entanto, essa aplicação prévia da análise à priori seria limitada pela versão do software ainda incompleta e pelas atividades da experimentação, que dependiam da versão final do software para explorarem todos os seus recursos. Dessa forma, em uma reflexão inicial, foi levantada como sugestão a aplicação de uma análise à priori sobre situações básicas com o uso do software, previamente, aos testes das versões parciais e que geraria necessidades de adequação e implementação, e outra análise à priori mais específica, sobre as atividades do experimento final e a versão final do software, mas que requer ainda uma discussão com os pesquisadores responsáveis pelo Modelo de Processo de Software.

De forma geral, o processo de validação do software desenvolvido com base no Modelo adotado, apontou os benefícios e as limitações proporcionados aos estudantes pelo uso do software e suas relações com as características e as ferramentas implementadas para abordar a taxa de variação das funções afim e quadrática.

Tais relações foram associadas com cada fase do Modelo de Processo, de modo a avaliar a aplicação de cada uma delas com base nos resultados, o que mostrou a importância das fases teóricas para garantir o desenvolvimento de um software que abordasse as necessidades levantadas e a importância das fases experimentais para garantir que as funcionalidades fossem implementadas aproximando-se o máximo possível dos requisitos. Além disso, também foi exposta a necessidade de uma melhor discussão e adequação das fases de prototipação e análise à priori, para a obtenção de melhores resultados.

Com relação a novas possibilidades de investigações ligadas ao objeto abordado nesta pesquisa e à metodologia aplicada, são apontados alguns dos vários percursos possíveis:

- A aplicação do Processo de Software adotado na implementação de novos recursos, requisitados em resposta a necessidades específicas de outras funções (exponencial, logarítmica, trigonométricas, etc.);

- O papel da conexão dinâmica e simultânea entre notações/representações na mobilização dos aspectos variacionais de função abordados em ambientes computacionais;

- As novas características, contribuições e limitações da implementação de uma tela sensível ao toque (*touchscreen*) na interface do *Function Studium*.

- A integração do *Function Studium* à sala de aula e às atividades dos professores e estudantes;

- A utilização do *Function Studium* no ensino e aprendizagem do Cálculo, no Ensino Superior;

- A integração e aplicabilidade do *Function Studium* à modalidade de Ensino à Distância, dada a possibilidade de o mesmo ser acessado on-line;

- A utilização do Modelo de Processo de Software baseado na EDI para a concepção de ferramentas computacionais que abordem outros conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap 4, p. 193 -217.

BELLEMAIN, F. & LABORDE J.M. **Cabri-géomètre II**, version 1.0 Windows 3.1, 95 et NT, Dallas: Texas-Instruments. 1997

BELLEMAIN, F. G. R.; RAMOS C. S.; dos SANTOS, R. T. Engenharia de Softwares Educativos, o caso do Bingo dos Racionais. In: VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM**. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015. v. 1. p. 1-12.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC; SEB, 2006.

CARLSON, Marilyn et al. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. **Journal for Research in Mathematics Education**, p. 352-378, 2002.

CASTRO FILHO, J. A. . Novas Tecnologias e o ensino de função, taxa de variação e acumulação.. In: VII Encontro Nacional de Educação Matemática - VII Enem, 2001, Rio de Janeiro. **Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2001.

CONFREY, Jere; SMITH, Erick. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. **Educational Studies in mathematics**, v. 26, n. 2-3, p. 135-164, 1994.

COTTRILL, J. et al. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. **Journal of Mathematical Behavio**r, 15, 167-192, 1996.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações, 1**. São Paulo, Ed. Ática, 2010.

GOMES FERREIRA, V. G. **Exploring Mathematical Functions through dynamic microworlds**. 1997. Tese de Doutorado. Institute of Education (University of London).

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HOHENWARTER, M. et al. **GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone**, versão 5.0.146.0, Windows, Mac OS X e Linux. Linz: Austria, 2015. Disponível em: < http://www.geogebra.org/> Acesso em: 31 de agosto de 2015.

KAPUT, J. Technology and Mathematics Educacion. In: D.A. Grows (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Macmillan, NY, 1992, p. 515-556.

LAUDARES, J. B. ; GUIMARAES, Y. P. B. Q. ; MIRANDA, D. F. . Utilização de sequências investigativas no ensino-aprendizagem de taxa de variação. In: Simpósio Internacional de Educação Matemática, 2012, Petrópolis- RJ. SIPEM-2012. Brasilia: Sbem, 2012.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3. ed. v.1. São Paulo: Harbra, 1994

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v.1, 8 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

MONK, S..Students' Understanding of a function given by a physical model. In G Harel & E Dubinsky (Eds.), **The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy**, MAA Notes, Vol. 25 (pp. 175-193). Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992.

PORTAL DO LEMATEC. *Home*. Disponível em: < http://www.lematec.no-ip.org/>. Acesso em 04 de março de 2015.

RAMOS, E. E. L. Taxa de variação ou coeficiente angular - uma questão de transposição didática? In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2007.

RIBEIRO, J. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia, 1: Ensino médio. São Paulo: Scipione, 2010.

ROCHA, J. , MIRAGEM, F. F. . Explorando a Função Quadrática com o Software Winplot. RENOTE. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 8, p. 01-10, 2010.

SILVA, C.T.J., GITIRANA GOMES-FERREIRA, V**.** . Função Quadrática e Progressões Aritméticas: uma abordagem com o auxílio de softwares. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba-PR. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.** Brasilia-DF: SBEM, 2013. v. 1. p. 1-14.

SILVEIRA, E. **Uma Seqüência didática para aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função**. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com Geometria Analıtica**. Traduçao: Seiji Hariki, Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnolatto. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SOMMERVILLE, I. **Engenharia de software**. São Paulo. 6. ed. Pearson Education Companion, 2003.

STEWART, James. **Cálculo. v. I** . São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2001.

TEUSCHER, D., REYS, R. E. Slope, Rate of Change, and Steepness: Do Students Understand These Concepts?. **Mathematics Teacher**, v. 103, n. 7, p. 519-524, 2010.

TEODORO, V. et al., **Modellus, interactive modelling with mathematics** [software for windows]. San Mateo, CA: Knowledge Revolution, 1997. Disponível em: < http://modellus.fct.unl.pt > Acesso em: 25 de setembro de 2013.

THOMPSON, P. W. Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. **Educational Studies in Mathematics**, 26, p. 229-274, 1994.

TIBÚRCIO, R S. Método de Elicitação de Requisitos para Software Educativo: um estudo a partir da prototipação de um software para função em plataformas móveis. In: XVIII EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2014, Recife. **Caderno de Resumos**, 2014.

TIBÚRCIO, R. S. **Processo de Desenvolvimento de Software Educativo: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2016.

VILLA-OCHOA, J. A. Raciocínio “covariacional”: O caso da função quadrática. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife: Comité Interamercano de Educação Matemática, 2011.