

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

Bruno Leite Ferreira

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA GRÁFICA
EM AMBIENTE COMPUTACIONAL:
o caso da interseção entre planos

Recife

2011

Bruno Leite Ferreira

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA GRÁFICA
EM AMBIENTE COMPUTACIONAL:
o caso da interseção entre planos**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Franck Bellemain

Recife

2011

Bruno Leite Ferreira

**Resolução de Problemas de Geometria Gráfica em Ambiente Computacional:
o caso da interseção entre planos**

Comissão Examinadora

1º Examinador/Presidente
Prof. Dr. Franck Bellemain – UFPE

2º Examinador
Prof.^a Dr.^a Paula Moreira Baltar Bellemain – UFPE

3º Examinador
Prof.^a Dr.^a Ana Magda Alencar Correia – UFPE

Recife, 24 de Fevereiro 2011

*Dedico à minha família, pois sem eles não estaria aqui,
em especial à meu pai Luiz Ferreira da Silva que sempre torceu pelo meu sucesso.
A Ângela Velasco por toda sua contribuição à sociedade e a comunidade científica.
A Escola de Servos Kayrós, comunidade que contribuiu direta e indiretamente na
minha constituição enquanto profissional e cidadão.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por todas as provações que tem me colocado a fim de me mostrar que sou capaz de ir além do que eu acredite suportar. Por ter colocado em minha vida inúmeras pessoas que me fizeram sentir o Seu Amor de maneira mais concreta, a citar:

Meus familiares, Luiz, Dione, Iara, Gugu, Bia, Lucinha, Tassiana, João Guilherme e Luiz Felipe, que me ajudaram a superar desafios e dificuldades mesmo que sem perceberem. Meus amigos da Escola de Servos Kayrós, que me apoiaram e incentivaram rumo a mais essas conquistas.

Simone e Ana Cláudia, que acompanharam e compartilham a caminhada na carreira acadêmica, além de dividir a “cruz” em nossas partilhas de vida. Brayan e tia Sônia, que se tornaram muitas vezes meu refúgio como uma segunda família. Saulo e Talita, que sempre presentes se dispuseram ajudar tanto na dissertação quanto na vida pessoal; A Ana Lira, que sempre me acolheu e se disponibilizou a ajudar. A Frei Dennys e Juliana que me ajudando a manter o equilíbrio nos aspectos espiritual e psicológico. A Barata que soube compreender minha ausência e ainda me ajudou na reta final de entrega da dissertação.

Professores do programa de pós-graduação EDUMATEC da UFPE – Sérgio, que me mostrou que para ser docente não é essencial ter uma variedade de tecnologias e infraestrutura mas sim amor e vocação pela profissão. Ana e Carlos, que me ajudaram entender melhor o desenvolvimento cognitivo do aluno. Patrícia e Iranete, que me ensinaram a ir além das minhas forças, pois acreditam em nossas capacidades enquanto mestrandos, mesmo quando não acreditamos em nós mesmos. Dora, por ter me incentivado e apoiado em todo mestrado. Verônica, por suas contribuições nas aulas de Seminários. Rute e Gilda, que com toda dinamicidade me ajudaram a ver pesquisa em educação por outros olhares. Claude, professora convidada para ministrar a disciplina de TAD ensinando a teoria que me inspirou minha análise de maneira prática. Paula Baltar, que enriqueceu minha formação quanto a Didática da Matemática com seus comentários e questionamentos. Franck Bellemain, que abraçou minhas ideias, enquanto orientador, me guiando nessa longa jornada compreendendo minhas limitações.

Ana Magda, que foi como uma mãe em toda minha trajetória acadêmica desde a graduação, me orientando, aconselhando e partilhando. Iolanda, Mario Duarte e Alcy, exemplos de professores e pesquisadores que me servem de inspiração enquanto geômetras.

Colegas e amigos do mestrado, em especial Fabiana, Cris, Flávia, Ricardo, que dividiram medos, angústias, trabalhos, experiências, farras, alegrias e muitas risadas. Kátia, que foi minha “co-co-orientadora” me ajudando a organizar meu projeto. Juliana, por todas as conversas e ajuda em minha metodologia. Lúcia Durão e Gracivane que me aconselharam e ajudaram antes mesmo do início do meu mestrado.

Colegas e amigos da especialização, em especial Grazi, Sil, Sildivane Eduardo, Paulo e Andréa, que dividiram suas experiências pessoais e acadêmicas contribuindo na minha formação enquanto docente e pessoa.

Lilian Débora, que divide os mesmos anseios desde a graduação, seguindo o período no departamento de Expressão Gráfica e no mestrado, sempre preocupada tentando me acalmar nos momentos de tensão. Andiará e Thyana, que sempre se dispuseram a ajudar, além de me tranquilizarem nos momentos de tensão com suas brincadeiras e conselhos. Max contribuindo com as correções do texto final da dissertação. Núbia e Lêda, ex-alunas que acompanharam minha trajetória e me arremetem, pelos exemplos, ao início da descoberta pela docência.

Meus novos colegas de trabalho do CAP/UFPE que torceram por mim, em especial a Fabiana, por mesmo sem saber serviu de exemplo enquanto professora, pesquisadora e pessoa. Marcus Flávio pelas brincadeiras, apoio e incentivo; e Zé Carlos, diretor do colégio nesse período, por ter compreendido minhas ausências em decorrência do mestrado, pelas orientações e pelo exemplo de gestor.

Aos sujeitos da pesquisa (não citarei nomes por questões éticas), que com muita disponibilidade e senso de humor tornaram a pesquisa possível e mais agradável.

Ângela Velasco que se colocou disponível, mesmo em situações adversas, colaborando com materiais e informações para a dissertação, bem como Rodrigo Seabra, Eduardo Toledo, Vânia Valente e Danuza Gani, que disponibilizaram materiais (teses, dissertações, formulários) para a realização da presente pesquisa.

Acredito que Deus coloca em nossas vidas pessoas de diferentes personalidades e virtudes para que possamos encontrar em cada uma delas uma faceta de Sua divindade. Por isso, agradeço a cada uma delas por ser presença real de Deus em minha vida e expressão do Seu Amor.

RESUMO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática pressupõem para a educação fundamental, dentro do bloco de Espaço e Forma, a interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço. Entretanto, por diversas razões, o ensino da Geometria Gráfica, disciplina que desenvolve habilidades de visualização espacial necessárias para os requisitos citados dos PCN, tem se enfraquecido na educação básica, tendo como consequência, entre outras, levar ao ensino superior alunos com baixo nível dessa habilidade. Investigações na Área da Expressão Gráfica e da Educação Matemática levantam três tipos de dificuldades: epistemológicas, didáticas e cognitivas. Referente ao uso de tecnologias computacionais, estudos apontam que essas dificuldades podem ser superadas. Porém, o simples uso do computador não garante que ocorram aprendizagens. Nessa direção, propomos investigar os efeitos do uso de um programa de modelagem computacional por alunos de graduação para resolver uma situação problema de Geometria Gráfica Tridimensional. Como hipótese inicial, pressupomos que ao utilizarem o programa as dificuldades com relação à visualização espacial diminuem, contribuindo para os alunos resolverem o problema corretamente. Para nossa investigação, iniciamos com o estudo da Geometria Gráfica Tridimensional, enfocando a questão da representação desde a fisiologia da visão até os métodos de ensino utilizados. Após o estudo histórico e metodológico do método de Monge, enfocamos as questões didático-pedagógicas, abordando as dificuldades de aprendizagem dos alunos. Utilizamos a teoria das Situações Didáticas de Brousseau como norteadora da organização do nosso experimento, preocupando-se com a noção de meio (*milieu*) e sua importância na construção de situação de aprendizagem. Em nossa metodologia realizamos uma análise *a priori* para a escolha do programa de modelagem, bem como do problema. Foram sujeitos da pesquisa oito alunos do curso de licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE, matriculados na disciplina de Geometria Gráfica Tridimensional I. O Conteúdo escolhido foi “interseção entre planos”. Como instrumento de coleta de dados, utilizamos um teste de visualização espacial, no início do semestre. A situação problema foi aplicada em dois ambientes, em prancheta, com uso dos instrumentos tradicionais de desenho e em laboratório de informática, usando uma ferramenta computacional selecionada, além de entrevistas semiestruturadas após cada aplicação da situação problema. Como técnica de análise utilizamos a “análise de conteúdo” a partir do levantamento de técnicas utilizadas na resolução do problema e nas fases de resolução de problemas em GGT, fases inspiradas de Barros & Santos e Polya. Como resultado, percebemos que o uso do programa de modelagem minimizou as dificuldades quanto à visualização espacial, apesar deste fato não garantir o avanço da resolução do problema em comparação com o uso dos instrumentos tradicionais de desenho. Isso se deve à dificuldade com relação ao próprio conteúdo. Em contrapartida, os alunos realizaram a fase de retrospecto em todo processo operacional, o que antes não ocorria ou somente ocorria no final da resolução. Além disso, a etapa de Exploração proporcionou a elaboração de maior número de técnicas com uso da ferramenta computacional, dando-nos a oportunidade de identificar a gênese das dificuldades dos alunos para, futuramente, elaborar metodologias que minimizem essas dificuldades, conduzindo o aluno a uma aprendizagem efetiva dos conhecimentos em jogo.

Palavras-chave: Geometria Gráfica Tridimensional; resolução de problemas; programa de modelagem.

RÉSUMÉ

Les programmes nationaux d'enseignement (PCN) des mathématiques présuppose pour l'enseignement fondamental, dans le bloc de contenus « Espace et Forme », l'interprétation et la représentation de positions et mouvement dans l'espace. Pour diverses raisons, l'enseignement de la géométrie graphique, discipline que développe les aptitudes de visualisation spatiale nécessaire aux exigences des PCNs cités, a perdu de l'espace dans l'enseignement fondamental, permettant à des élèves ayant ces aptitudes peu développées d'accéder à l'enseignement supérieur. Des recherches dans le domaine de l'expression graphique et de l'enseignement des mathématiques mettent en évidence trois types de difficulté : épistémologiques, didactiques et cognitives. Relativement à l'utilisation de technologies informatiques, des études montrent que ces difficultés peuvent être dépassées, pourtant la simple utilisation de l'ordinateur ne garantit qu'il y ait des apprentissages. Dans ce sens, nous avons proposé d'étudier les effets de l'utilisation par des élèves d'université d'un logiciel de modelage pour résoudre une situation problème de Géométrie Graphique Tri-dimensionnelle. Comme hypothèse initiale, nous avons supposé que par l'utilisation du programme, les difficultés relatives à la visualisation spatiale diminuerai et contribuerai à ce que les élèves résolvent le problème correctement. Pour notre recherche, nous commençons par l'étude de la Géométrie Graphique, nous focalisant sur la question de la représentation graphique de la physiologie de la vision aux méthodes d'enseignement en oeuvre. Après l'étude historique et méthodologique des principes géométriques de Monge, nous avons abordé les questions didactiques-pédagogiques, nous intéressant particulièrement aux difficultés d'apprentissage des élèves. La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau nous a servi de guide pour l'organisation de notre expérimentation, nous préoccupant particulièrement de la notion de milieu et son importance dans la construction de situation d'apprentissage. Pour notre méthodologie, nous avons réalisé une analyse a priori pour le choix du logiciel de modelage et de la situation problème. Huit élèves du cours de licenciatura en Expression Graphique de l'UFPE faisant la disciplina de Géométrie Graphique Tri-Dimensionnelle I. Le contenu choisi a été l'intersection entre plans. Comme instrument de collecte des données, nous avons utilisé un test de visualisation spatiale au début du semestre ; une situation-problème appliquée dans deux environnements : planchette avec l'utilisation des instruments classiques de dessin et en laboratoire d'informatique avec le logiciel de modelage sélectionné ; et des interviews semi-structurées après chaque mise en oeuvre de la situation problème. Comme technique d'analyse, nous avons mis en oeuvre l'analyse de contenu à partir de la mise en évidence de techniques utilisées de la résolution de problème et des phases de résolutions de problème en GGT, phases inspirées de Barros & Santos et Polya. Comme résultat, nous avons observé que l'utilisation d'un logiciel de modelage a réduit les difficultés de visualisation spatiale, mais ce fait n'a pas garanti l'avancée dans la résolution de problème en comparaison avec l'utilisation des instruments classiques de dessin. Ceci vient de la difficulté avec le contenu lui-même. En contrepartie, les élèves ont effectué la phase de rétrospective dans tout le processus opérationnel, ce qui n'est pas le cas ou seulement à la fin de la résolution dans l'environnement classique. De plus, l'étape d'exploration a provoqué l'élaboration d'un plus grand nombre de techniques dans l'environnement informatique donnant la possibilité d'identifier la genèse des difficultés des élèves et, dans le futur, élaborer des méthodes que minimisent ces difficultés, amenant les élèves à un apprentissage effectif des connaissances en jeu.

Mots-clés: géométrie graphique tri-dimensionnelle, résolution de problèmes, programme de modélisation.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – formação da imagem no olho humano..... | 16 |
| Figura 2 – Estereoscópica..... | 17 |
| Figura 3 – Esquema projeção cônica..... | 20 |
| Figura 4 – <i>A última ceia</i> de Leonardo da Vinci..... | 20 |
| Figura 5 – Plana baixa e fachada do Palácio Iseppo Porto..... | 21 |
| Figura 6 – Esquema projeção cilíndrica..... | 21 |
| Figura 7: Perspectiva de projeção de um triângulo em π_1 e π_2 | 23 |
| Figura 8: Composição da Épura e projeção cotada..... | 24 |
| Figura 9 – Perspectiva de uma reta e um plano de cota constante projetados em π_1 | 25 |
| Figura 10 – Perspectiva de uma reta e um plano básicos projetados em π_1 | 25 |
| Figura 11: Perspectiva de reta e plano quaisquer projetados em π_1 | 26 |
| Figura 12 – Perspectiva da projeção de uma reta e um plano e seus intervalos..... | 26 |
| Figura 13 – Perspectiva cônica de 3 fugas, Cavaleira e Isométrica respectivamente. | 27 |
| Figura 14 – Vistas mongeanas..... | 27 |
| Figura 15: (1) prisma reto; (2) prisma oblíquo..... | 27 |
| Figura 16 – Projeção cotada do triângulo MNO..... | 28 |
| Figura 17 – épura e perspectiva da rcc de MNO..... | 29 |
| Figura 18 – Épura e perspectiva da projeção em vista básica da face MNO..... | 29 |
| Figura 19 – épura e perspectiva da V.G. do plano MNO..... | 30 |
| Figura 20: Processo de solução de problemas em GGT..... | 34 |
| Figura 21: Triângulo didático..... | 35 |
| Figura 22: Exemplo de questão do TVZ..... | 48 |
| Figura 23: Aparência do Rhinoceros..... | 59 |
| Figura 24- interseção entre os planos α e β | 60 |
| Figura 25 – Planos α e β cortados por um plano horizontal θ | 61 |
| Figura 26 – Interseção entre os planos α e β determinada pelo encontro das rcc..... | 61 |
| Figura 27 – A esquerda projeção do plano α determinado por um polígono, a direita projeção do plano α determinado pela sua reta de máximo declive..... | 63 |

| | |
|---|----|
| Figura 28 – Representação em Épura da interseção entre dois planos utilizando projeção secundária. | 65 |
| Figura 29 – Representação em Épura da interseção entre dois planos utilizando apenas projeção principal. | 66 |
| Figura 30 – representação dos planos da situação problema escolhida. | 68 |
| Figura 31 – Apresentação do problema no Rhino. | 68 |
| Figura 32 – Resolução em Épura da interseção entre três planos. | 69 |
| Figura 33 – Resolução do problema no Rhino. | 70 |
| Figura 34 – Visibilidade determinada pelo sujeito S1. | 74 |
| Figura 35 – Visibilidade determinada pelo sujeito S2. | 74 |
| Figura 36 – determinação de visibilidade entre dois planos. | 75 |
| Figura 37 – Modelo diagrama de tarefas. | 80 |
| Figura 38 – Levantamentos das técnicas da situação problema com uso do computador. | 80 |
| Figura 39 – Levantamento das técnicas utilizadas na situação problema em prancheta. | 82 |
| Figura 40 – Comparativo do cumprimento de subtarefas de T2 entre os dois ambientes. | 83 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|---|----|
| Quadro 1 – Categorização dos programas quanto ao objetivo. | 55 |
| Quadro 2 – Categorização dos programas ao tipo de apresentação. | 55 |
| Quadro 3 – Categorização dos programas quanto ao tipo. | 57 |
| Quadro 4 – Variáveis Didáticas de um problema de Interseção entre Planos. | 62 |
| Quadro 5 – Variáveis das ferramentas. | 66 |
| Quadro 6 – Dificuldades apresentadas pelos sujeitos na resolução do problema nos dois ambientes. | 76 |
| Quadro 7: – Organização pontual de T1 em ambiente computacional. | 78 |
| Quadro 8 – Organização pontual de T2 em ambiente computacional. | 79 |
| Quadro 9 – Organização pontual de T2 em ambiente com prancheta. | 82 |
| Quadro 10 – Comparação entre a fase de retrospecto nos dois ambientes. | 87 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|---|----|
| Gráfico 1 – Comparativo de tempo entre as tarefas T1 e T2 do ambiente computacional. | 81 |
| Gráfico 2 – Comparativo de tempo entre resolução em prancheta e computador. ... | 84 |
| Gráfico 3 – Relação entre as categorias de dificuldades por sujeitos. | 84 |
| Gráfico 4 – Acertos no Teste TVZ. | 85 |

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| AGRADECIMENTOS | 4 |
| LISTA DE FIGURAS | 8 |
| LISTA DE QUADROS | 10 |
| LISTA DE GRÁFICOS..... | 10 |
| SUMÁRIO..... | 11 |
| INTRODUÇÃO | 13 |
| CAPÍTULO 1 – PROBLEMÁTICA DA REPRESENTAÇÃO DO OBJETO NO ESPAÇO | 16 |
| 1.1 VISÃO E FORMAÇÃO DA IMAGEM | 16 |
| 1.2 HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL | 18 |
| 1.3 ORIGEM DA GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL (GGT) | 19 |
| 1.3.1 O Método de Monge | 23 |
| CAPÍTULO 2 – ENSINO DA GGT | 31 |
| 2.1 PARA QUE ENSINAR? | 31 |
| 2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM GGT..... | 31 |
| 2.3 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM..... | 34 |
| 2.4 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS | 38 |
| 2.5 CONTRIBUIÇÃO DAS MÍDIAS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DA GGT .. | 40 |
| 2.6 ENSINO DA GGT NA UFPE..... | 44 |
| CAPÍTULO 3 – DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO | 46 |
| 3.1 SUJEITOS | 46 |
| 3.2 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS..... | 47 |
| 3.2.1 TVZ | 48 |
| 3.2.2 Situação Problema em Prancheta/Computador | 49 |
| 3.2.3 Entrevista Semiestruturada..... | 50 |
| 3.3 TRATAMENTO DOS DADOS..... | 50 |
| CAPÍTULO 5 – ANÁLISES | 54 |
| 4.1 ANÁLISE A PRIORI..... | 54 |
| 4.1.1 Levantamento dos programas utilizados no Ensino da GGT | 54 |
| 4.1.2 Levantamento dos Conceitos e Variáveis Didáticas para escolha da Situação Problema..... | 59 |
| 4.2 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DO PROBLEMA | 70 |

| | |
|--|-----|
| 4.2.1 Comandos utilizados na resolução do problema com o <i>Rhino</i> | 71 |
| 4.2.2 Fase de visualização..... | 73 |
| 4.2.3 Fase de Concepção e Operacionalização | 77 |
| 4.2.4 Fase de Retrospecto..... | 87 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS | 89 |
| REFERÊNCIAS..... | 93 |
| APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido | 98 |
| APÊNDICE B – Problema Proposto na Prancheta..... | 99 |
| APÊNDICE C – Ficha para Resolução Descritiva | 100 |
| APÊNDICE D – Modelo de Resolução Gráfica | 101 |
| APÊNDICE E – Modelo de Resolução Descritiva | 102 |
| APÊNDICE F – Entrevista Semiestruturada..... | 103 |
| ANEXO 1 – Programa da disciplina de GGT1 do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE para o primeiro semestre de 2010..... | 104 |

INTRODUÇÃO

A Geometria está presente em nosso cotidiano e nas mais diversas áreas de conhecimento, desde os elementos da natureza até projetos de engenharia de alta complexidade. No entanto, a Geometria não está naquilo que vemos, pois ela é abstrata. Desse modo, para o seu entendimento e apropriação, precisamos desenvolver habilidades que se utilizem também da abstração, tais como a visualização espacial, atrelada ao domínio da manipulação e transformação das representações geométricas.

Historicamente, o modo de representar seja nas artes ou na arquitetura, por exemplo, sofre diferentes transformações influenciadas pela época, no que se refere ao momento histórico em que uma sociedade está inserida, e/ou a evolução do conhecimento. Desde as pinturas rupestres do período pré-histórico, passando pelas pinturas em perspectivas do Renascimento, aos sofisticados projetos de arquitetura e engenharia, percebemos como o homem transforma as representações adaptando-as de acordo de sua necessidade de visualizar e/ou reproduzir.

Na Matemática, as representações gráficas são utilizadas como importante recurso na elaboração de demonstração de propriedades geométricas, pois elas também facilitam a visualização de determinado contexto matemático.

Os métodos de representação foram ao longo dos anos deixando de ser técnicas utilizadas apenas por artistas, passando a ser sistematizadas como campos teóricos, na origem de diversas áreas da matemática e das ciências, como a Geometria Projetiva, desenvolvida pelo francês Jean Victor Poncelet (1788-1867).

A Geometria Projetiva fundamenta a maioria dos sistemas de representação utilizados atualmente. É considerado como Sistema de Representação, todo conjunto de métodos e representações que expressem um objeto, revelando os dados quantitativos e qualitativos necessários e suficientes para que se possa reconstruir esse objeto tal como ele é.

Destacamos entre eles o primeiro Sistema de Representação conhecido, sistematizado por Gaspard Monge (1746-1818). Monge denominou seu método de “geometria descritiva”. Para nós, tal termo não traduz sua aplicação, visto não ser uma Geometria. Preferimos, ao invés disso, a utilização do termo Método de Monge ou Sistema Mongeano.

Costa (1996a) utiliza o termo Geometria Gráfica para o:

“[...] estudo, através do desenho, de qualquer propriedade de forma. Poderá ser bidimensional, estudando apenas figuras planas diretamente no plano do desenho, ou tridimensional, utilizando os sistemas de representação para estudar formas de três dimensões em desenhos planos” (COSTA, 1996a, p.14).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Brasileiros (BRASIL, 1997), propõe para a educação fundamental, dentro do bloco de Espaço e Forma, o desenvolvimento de tais habilidades. As aulas de Geometria Gráfica, seja na disciplina de Desenho Geométrico ou Matemática, é um dos ambientes favoráveis para o desenvolvimento da visualização espacial.

No entanto, com o Movimento da Matemática Moderna, o Desenho, enquanto disciplina obrigatória foi retirada do currículo da escola básica (ZUIN, 1997), refletindo no abandono do estudo da Geometria, como também do seu estudo gráfico.

Tal fato reflete-se no ensino superior, em cursos que demandam a visualização espacial – como engenharias, arquitetura, licenciatura em expressão gráfica, design, entre outros – nos quais, seus estudantes apresentam deficiências, tanto com relação a elementos básicos da geometria, quanto à habilidade de visualização espacial.

Esforços vêm sendo realizados na área de Expressão Gráfica para minimizar essas deficiências, seja a nível básico ou superior. Exemplos claros podem ser observados nos Anais do GRAPHICA (Internacional Conference on Graphics Engineering for Arts and Design e Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico) onde a questão é sistematicamente discutida (BARROS E SANTOS, 2007; SEABRA, 2009; AMEIDA *et al* 2009, entre outros)

Neste cenário, o uso de novas tecnologias atrelado a metodologias de ensino vem demonstrando através da experiência, as contribuições no processo de ensino aprendizagem, tanto por parte dos professores na apresentação e ensino do conteúdo, quanto pelos alunos explorando e pondo em prática os conceitos abordados na disciplina.

Diante deste quadro, propomos investigar os efeitos do uso de um programa de modelagem computacional por alunos de graduação para resolver uma situação problema de Geometria Gráfica Tridimensional (GGT). Como hipótese inicial, pressupomos que ao utilizarem o programa, as dificuldades com relação à

visualização espacial diminuem, contribuindo para os alunos resolverem o problema corretamente.

Estabelecemos como objetivos específicos:

- Perceber potencialidades e limitações quanto ao uso de uma mídia computacional na resolução de problemas em GGT;
- Reconhecer diferenças e semelhanças entre as técnicas utilizadas na resolução de um mesmo problema de GGT em dois ambientes;
- Identificar as dificuldades dos alunos em resolver problemas de GGT nos aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos.

CAPÍTULO 1 – PROBLEMÁTICA DA REPRESENTAÇÃO DO OBJETO NO ESPAÇO

Para discutirmos sobre esta problemática, precisamos entender que o processo cognitivo de observar e analisar um objeto, sobretudo do ponto de vista geométrico, é diferente de observar a analisar sua representação. Este fato está intrinsecamente ligado à fisiologia da visão, à formação da imagem, a fatores cognitivos e aos métodos utilizados para representar.

1.1 VISÃO E FORMAÇÃO DA IMAGEM

A visão é responsável por cerca de setenta e cinco por cento de nossa percepção (RAMOS, 2006) e é a partir dela que podemos reconhecer formas e propriedades geométricas apenas pela observação.

A percepção visual (visão) de um objeto depende da luz que incide sobre ele. Noção do contorno, volume e textura depende da quantidade de luz ausente ou presente sobre o objeto. A formação da imagem se dá pela incidência de raios projetantes de luz que vão do objeto ao olho humano, atravessando a córnea, passando pela pupila, responsável pelo controle de entrada de luz no olho, depois o cristalino e projeta na retina a imagem invertida do objeto (Figura 1).

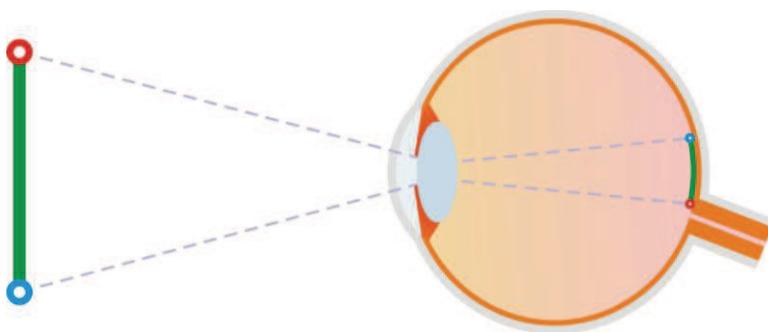


Figura 1 – formação da imagem no olho humano. Fonte: o autor.

O nervo óptico transmite impulsos nervosos para cérebro interpretando a imagem na posição correta. A visão tridimensional é formada pelo processo de fusão das imagens produzidas em cada olho realizado pelo cérebro. Esse par de imagens

é chamado de par estereoscópico (MALARD *et al* 2008, p. 6), nos permitindo perceber profundidade e relevo dos objetos.

Podemos ver o fenômeno da estereoscópica aplicado ao denominado cinema 3D, onde uma pessoa assiste ao filme com a sensação da tridimensionalidade. A tecnologia do cinema 3D tem como objetivo projetar na tela imagens distintas para o olho esquerdo e o olho direito do observador. Em geral, o observador utiliza óculos que filtram as imagens (filtros polarizantes, coloridos, etc).

A Figura 2 ilustra a simulação da projeção de um filme 3D em uma tela de cinema (linha verde). Cada projetor emite imagens polarizadas na tela e o espectador utiliza um par de óculos, onde é filtrada em cada lente, uma das imagens. O cérebro funde as duas imagens dando o efeito de visão tridimensional.

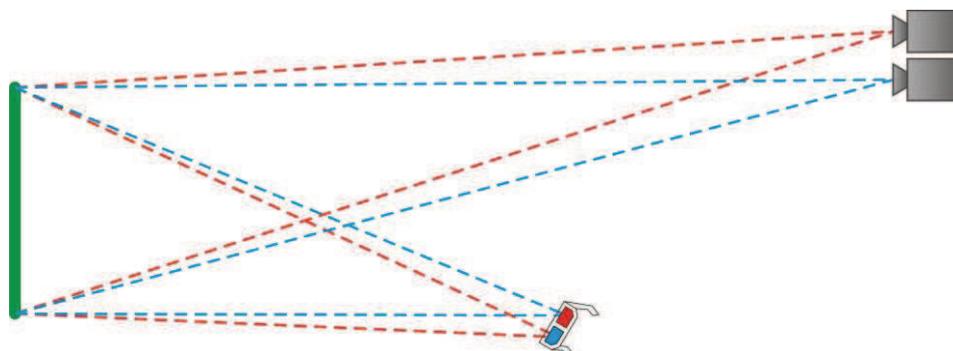


Figura 2 – Estereoscópica. Fonte: o autor.

Apesar da importância do olho humano na tarefa do “ver”, o cérebro é capaz de desenvolver habilidades que auxiliam uma pessoa a “ver” algo mesmo que mentalmente, sem a presença física do objeto. Podemos, por exemplo, explicar a alguém como ir a uma farmácia a partir de casa, fornecendo-lhe as coordenadas das ruas, referindo quantas quadras terá que andar, se dobrará a esquerda ou a direita, sem que essa pessoa tenha, ao menos, andado por essas ruas. Porém, quando a região do percurso é conhecida, a visualização da trajetória se torna mais fácil.

Do mesmo modo, quando pensamos em um cubo, nos vem a cabeça a sua imagem. Podemos contar mentalmente seu número de faces, vértices e arestas sem tê-lo em mãos, visto que sua forma é familiar, pois esta encontra-se presente em nosso cotidiano. Porém, se pedirmos para imaginar um icosaedro, alguns podem até mesmo saber que se trata de um poliedro regular e conseguir formular uma imagem mental (talvez não tão clara). No entanto, nem todos conseguem realizar operações mentais dessa forma, de modo que se consiga obter seus dados quanto ao número

total de faces, arestas e vértices, uma vez que sua representação é mais complexa e menos familiar.

Na Geometria, o estudante, professor ou pesquisador, necessita dessa habilidade de visualizar algo que não se vê e realizar operações mentais para compreender suas propriedades, pois não se trata de uma ciência concreta mas sim, abstrata. Tanto a Geometria Bidimensional quanto a Tridimensional requer da pessoa um pensamento abstrato, uns mais complexos que outros. Tal habilidade não é inerente ao sujeito, mas é desenvolvida ao longo do crescimento cognitivo.

1.2 HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL

A visualização espacial é uma importante habilidade cognitiva humana utilizada em mais de oitenta profissões (SORBY, 1999), assim como para qualquer indivíduo que realiza atividades mais simples no que se refere à localização espacial, abstração, percepção do espaço e distância relativa, entre outros requisitos necessários para a vida cotidiana.

A habilidade ou inteligência espacial envolve pensar em imagens, bem como a capacidade de perceber, transformar e recriar diferentes aspectos do mundo visual e espacial (SEABRA, 2004). Seabra (2004) afirma que indivíduos com alta habilidade de visualização espacial possuem, via de regra, sensibilidade aguçada para detalhes, esboçam ideias graficamente e se orientam facilmente no espaço tridimensional. Tais características são essenciais para engenheiros, arquitetos, físicos, matemáticos, pilotos, projetistas, geógrafos, médicos e muitos outros.

Esta capacidade, segundo Choi (2001 *apud* SEABRA, 2009, pag. 28), compreende três categorias distintas, quais sejam: (1) *rotação mental*, na qual o indivíduo consegue manipular um objeto mentalmente, podendo rotacionar, mudar de posição ou até mesmo torcer ou inverter um objeto, quando por exemplo, vemos um objeto e tentamos imaginar este em outra posição; (2) *percepção espacial*, a qual possibilita o indivíduo realizar relações espaciais a partir de informações visuais; (3) *visualização espacial*, possibilita o indivíduo não só “ver” mentalmente um objeto ou situação, mas é capaz de manipular problemas complexos, ou seja, não se trata de uma visualização estática, mas da compreensão do todo o processo para se resolver um problema.

Percebemos que essas categorias não ocorrem isoladamente, mas quase que simultaneamente variando uma ou outra de acordo com o acontecimento relacionado.

Nesta direção, entendemos que a habilidade de visualização espacial nos possibilita encontrar soluções para problemas a partir de operações mentais, mesmo sem o suporte de materiais concretos. De todo modo, o desenvolvimento dessa habilidade depende também da apropriação das propriedades dos conteúdos envolvidos no problema. Especificamente no estudo da Geometria, tal habilidade se faz necessária para a interpretação de suas representações gráficas, bem como na resolução de problemas de Geometria Gráfica.

1.3 ORIGEM DA GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL (GGT)

O homem ao longo da história encontrou maneiras de representar o mundo que o rodeava a partir de diferentes áreas de conhecimento, seja pelas artes ou pelas ciências, encontrando assim, em seu grupo social um estilo próprio de expressão do seu tempo e espaço.

Na idade Média, arquitetos e artistas utilizavam em suas obras conceitos empíricos de perspectiva. Já no Período do Renascimento, os arquitetos Brunelleschi e Alberti elaboraram técnicas de representação conhecidas como perspectiva cônica (BOYER, 1996), que é obtida do mesmo modo que a visão humana, tendo por elementos, um ponto de vista (S), uma superfície de projeção (π) e um objeto. As interseções dos raios projetantes, que partem de S com uma superfície, determinam os pontos da perspectiva (Figura 3). Essa projeção recebe o nome de Perspectiva Cônica, por conta do conjunto de projetantes formarem uma superfície cônica.

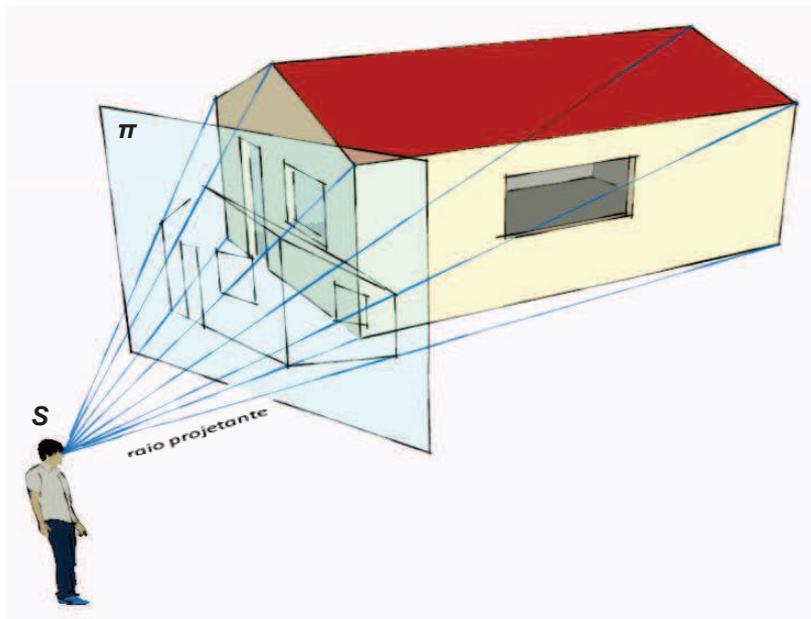


Figura 3 – Esquema projeção cônica. Fonte: o autor.

A partir da perspectiva, pode-se ver um ambiente similar à visão monocular (imagem produzida por um olho), representando espaços e formas tridimensionais em um plano. A **Erro! Fonte de referência não encontrada.** ilustra uma perspectiva na pintura renascentista do pintor Leonardo da Vinci.

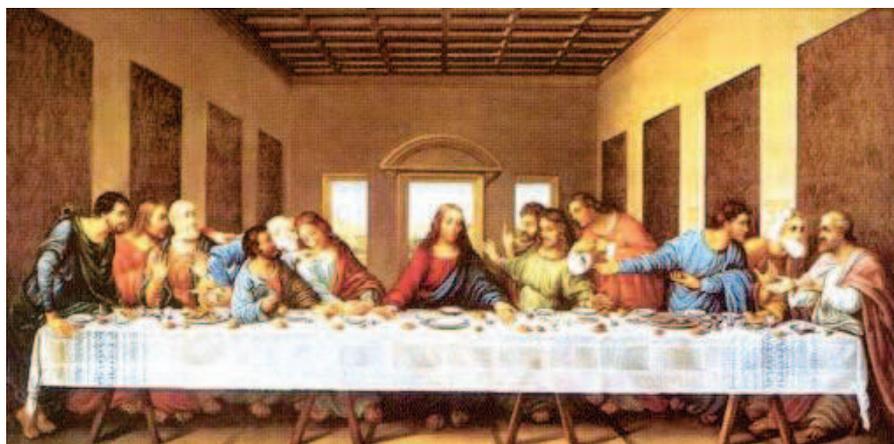


Figura 4 – *A última ceia* de Leonardo da Vinci. Fonte: <http://www.webdesignblog.com.br/70-million-by-hold-your-horses/>, acessado em julho de 2011.

Também na arquitetura, conceitos empíricos de projeção foram utilizados para representar as construções (Figura 5). Os estudos posteriores em Geometria Projetiva justificam tais representações em que a posição do ponto de vista, encontra-se infinitamente afastado do plano de projeção que, por consequência, torna todos os raios projetantes paralelos entre si (Figura 6). Essa projeção é

denominada Perspectiva Cilíndrica, por conta das projetantes formarem uma superfície cilíndrica.

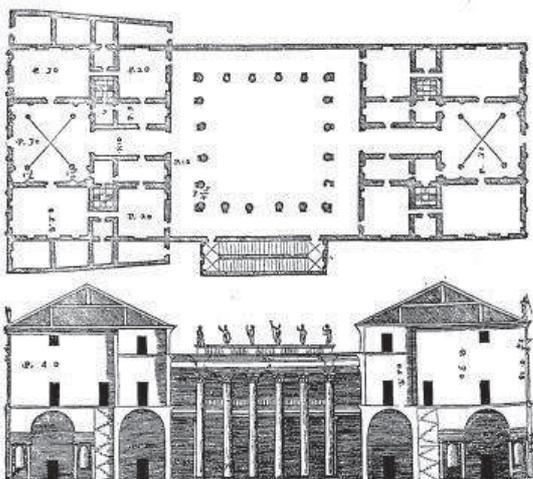


Figura 5 – Planta baixa e fachada do Palácio Iseppo Porto. Fonte: <http://hermes.ucs.br/ccet/deme/emsoares/inipes/palladio/>

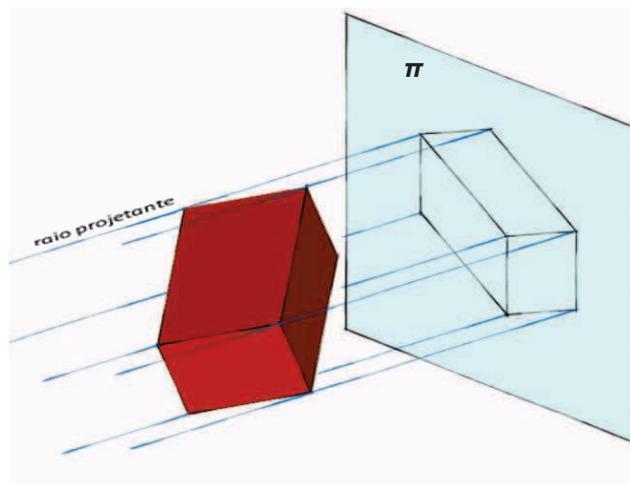


Figura 6 – Esquema projeção cilíndrica. Fonte: o autor.

Descartes (1596-1650) foi o primeiro a utilizar a associação entre duas projeções no estudo de uma curva reversa (não plana). Porém, todo seu estudo foi realizado sem utilizar ilustrações. Posteriormente à Descarte, estudos sobre Estereotomia – ciência do corte de figuras espaciais – tiveram importância fundamental no estudo da representação das formas tridimensionais no plano. Essa técnica consiste em dar, separadamente, a forma de cada elemento que deverá compor a construção (GANI, 2004, p.40-42).

Philibert Delorme (1510 – 1570) foi o primeiro a recorrer ao raciocínio geométrico para justificar as regras de estereotomia e do Desenho Arquitetônico através do tratado *Le premier tome de l'Architecture*. Em sua obra, ele trata o método com um olhar essencialmente prático, não se detendo a questões teóricas. Houve outros geômetras que abordaram o tema, sem, no entanto, causarem muitas mudanças conceituais com relação à Delorme (*ibid*, p.43).

Gérard Desargues (1591 – 1661), que era geômetra e arquiteto, detinha-se a questões da Geometria pura e de suas aplicações às técnicas gráficas. Escreveu estudos sobre perspectiva, corte de pedras, relógio de sol e o *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres du Cône avec un Plan*, sua obra mais conhecida, que trata das seções cônicas e é considerada a precursora da Geometria Projetiva (*ibid*, p. 46). Nessa obra, Desargues baseia-se em princípios teóricos, voltados para generalizações, apresentando apenas um exemplo, deixando ao leitor

a interpretação gráfica dos demais casos. Por esse motivo a obra de Desargues não teve muito sucesso entre os arquitetos e engenheiros da época.

A ideia de Desargues foi retomada por Amédée-François Frézier (1682–1773) que escreveu a obra *La Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des Bois pour la constructions des Voutes* ou *Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*, versando sobre princípios tanto teóricos como práticos, consagrando a importância dos estudos teóricos de Geometria e Mecânica como bases sólidas da Arquitetura. Contudo, não chegou a estabelecer princípios bem definidos (*ibid*, p. 50).

No início do século XIX, Gaspard Monge, matemático francês, desenvolveu o método de representação responsável pela expansão da maquinaria do século XIX considerado como o primeiro Sistema de Representação. Um método através do qual toda e qualquer situação espacial pudesse ser expressa através de um desenho plano e cada representação plana pudesse ser traduzida na conjuntura espacial que lhe deu origem. Essa transformação reversível tornou possível a dedução de medidas e formas do espaço por intermédio de um desenho plano (GANI, 2004). Seu método foi apresentado aos franceses pelo nome de *géométrie descriptive* (geometria descritiva), sendo inicialmente utilizado na engenharia militar e mantido em segredo durante aproximadamente 25 anos. Só posteriormente, foi inserido nos currículos escolares.

Os ensinamentos de Monge foram compilados em nove lições na obra *Geometrie Descriptive*, publicada por Hachette em 1799 (BELHOSTE & TATON, 1992), no qual Monge expôs uma teoria para em seguida colocar o aluno diante de soluções de problemas exemplares. Logo após, propôs novos problemas para que os aprendizes buscassem suas próprias soluções (*ibid*, p. 33).

Compreendemos que o sistema descrito por Monge não se trata de uma Geometria, mas sim de um método de representação no plano de objetos e operações geométricas espaciais. Posterior a Monge, o geômetra francês Jean Victor Poncelet (1788-1867) desenvolveu em 1822 a Geometria Projetiva, que amplia os conceitos da Geometria Euclidiana com do Princípio da Continuidade e da Dualidade, preservando seus entes elementares (ponto, reta e plano). Isso nos leva a corroborar Gani (2004, p.9) que compreende que o método não se reduz a sua utilização, mas do entendimento das teorias que justificam o método.

Antes de aprofundarmos nosso estudo apresentaremos os princípios básicos do método de Monge, para que nosso leitor possa compreender posteriormente as resoluções do problema utilizado em nossa pesquisa.

1.3.1 O Método de Monge

Em seu método, Monge toma por base projeções cilíndricas ortogonais, considerando uma como projeção principal no plano denominado π_1 . A distância de um ponto ao plano principal chama-se *cota*. Como um plano divide o espaço em dois semiespaço, um é considerado de cota positiva, o outro de cota negativa e todos os pontos contidos em π_1 de cota nula.

Pela projeção principal pode-se obter projeções secundárias, traçando planos perpendiculares a π_1 ou a qualquer outro plano secundário existente. A reta de interseção entre dois planos de projeção recebe o nome de *Linha de Terra* (LT), também denominada pelo nome dos planos que se interceptam, como por exemplo, $\pi_1\pi_2$ (LT entre os planos π_1 e π_2). Essa nomenclatura geralmente é usada quando se trabalha com mais de uma LT. A projeção da reta projetante em qualquer plano paralelo a ela denomina-se *linha de chamada*. Podemos observar na Figura 7 os elementos do Sistema Mongeano.

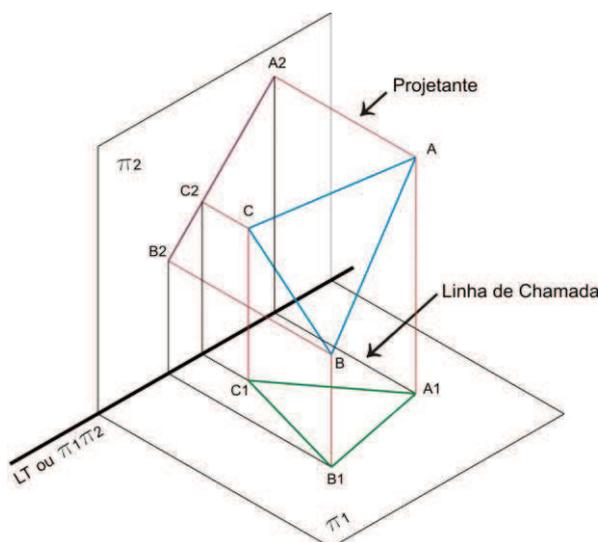


Figura 7: Perspectiva de projeção de um triângulo em π_1 e π_2 . Fonte: o autor.

Para representar um objeto tridimensional em duas dimensões, rebate-se os planos de projeção secundários sobre π_1 , obtendo assim a *Épura* (Figura 8). A sua

apresentação deve conter no mínimo duas projeções ou uma projeção de dados analíticos.

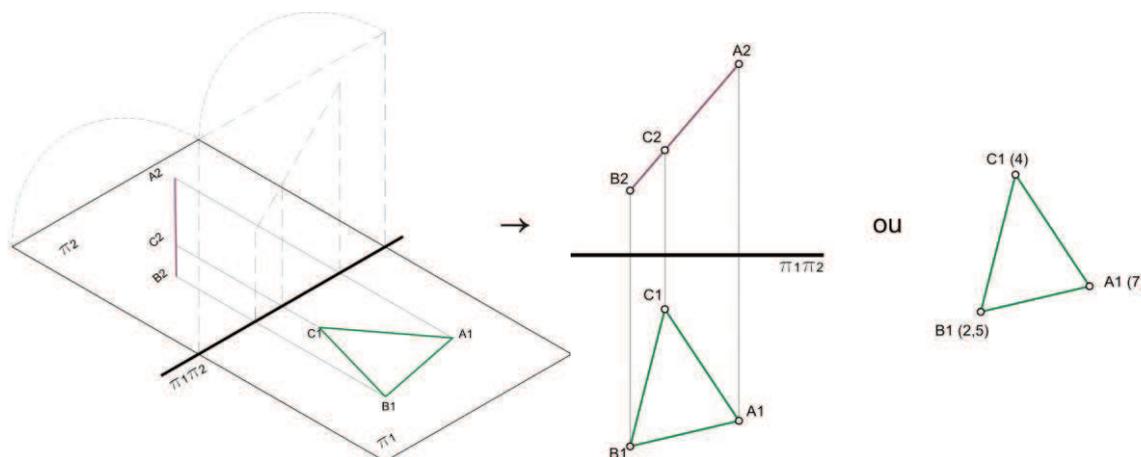


Figura 8: Composição da Épura e projeção cotada. Fonte: o autor.

No Método clássico de Monge, o estudo da posição relativa de ponto, reta e plano é realizado em função de dois planos de projeção. Deste modo, o espaço é dividido em quatro semiespaços (Diedros). A distância de um ponto a qualquer plano secundário perpendicular a π_1 é chamado de *afastamento*.

As vistas mongeanas apresentam códigos de representação diferentes das outras perspectivas, pois mostram as arestas que não estão sendo vistas, que são representadas por uma linha tracejada. Todas as arestas visíveis são representadas por uma linha contínua, as linhas de chamada por uma linha contínua fina e as linhas de terra por uma linha contínua grossa.

1.3.1.1 Posição relativa de reta e plano

Abordaremos esses princípios por se fazerem necessários para o entendimento da resolução do problema em nossa pesquisa. Basicamente, uma reta e um plano podem ocupar três posições com relação à inclinação tomando como referencial um plano de projeção, a citar:

De cota constante: quando a inclinação é igual a zero. Por consequência, todos os pontos da reta ou do plano têm a mesma cota, assumindo, a reta ou o plano, a posição paralela à π_1 . Quando estão sob essa posição são projetados em Verdadeira Grandeza (V.G.), isto é, suas projeções têm as medidas reais do objeto. A Figura 9 ilustra a projeção de uma reta de cota constante (rcc), determinada pelo

segmento AB e um plano de cota constante, determinado pelo polígono CDEF, ambos projetados no plano principal;

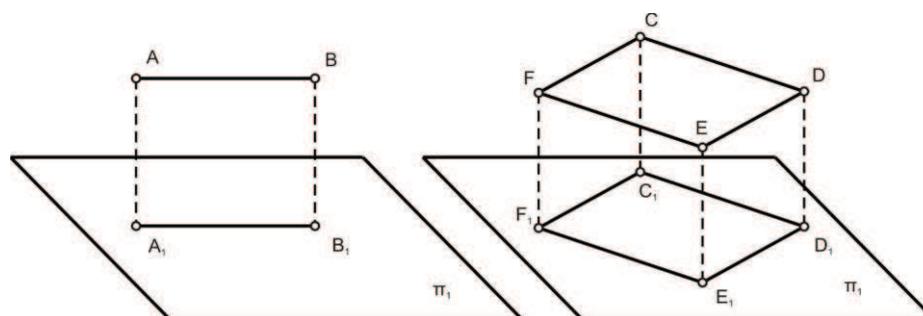


Figura 9 – Perspectiva de uma reta e um plano de cota constante projetados em π_1 . Fonte: o autor.

Básica: quando a inclinação é ortogonal. Ao se tratar de uma reta, sua projeção se degenera em um ponto, quando for um plano sua projeção é uma reta. A Figura 10 ilustra como se projeta a vista básica de uma reta e um plano determinados por um segmento e uma face respectivamente, onde todas as projeções dos pontos da reta coincidem com sua vista básica e todas as projeções dos pontos do plano pertencem à vista básica, representada pelo segmento de reta.

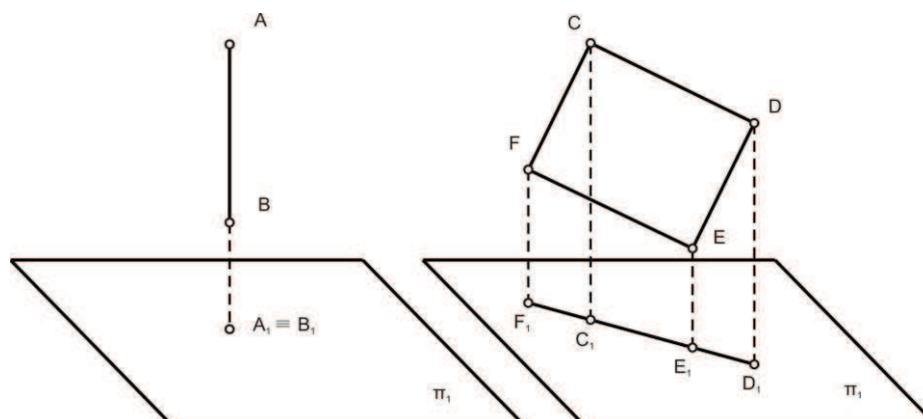


Figura 10 – Perspectiva de uma reta e um plano básicos projetados em π_1 . Fonte: do autor.

Qualquer: quando a reta ou o plano apresenta inclinação diferente de zero ou noventa graus com relação ao plano de projeção, ou seja, não estão nem paralelos, nem ortogonais ao plano. A Figura 11 ilustra uma reta qualquer e um plano qualquer, determinados por um segmento e uma face, respectivamente, projetados no plano principal de projeção. Podemos observar que a medida das projeções, seja linear ou superficial, é sempre menor que a medida real.

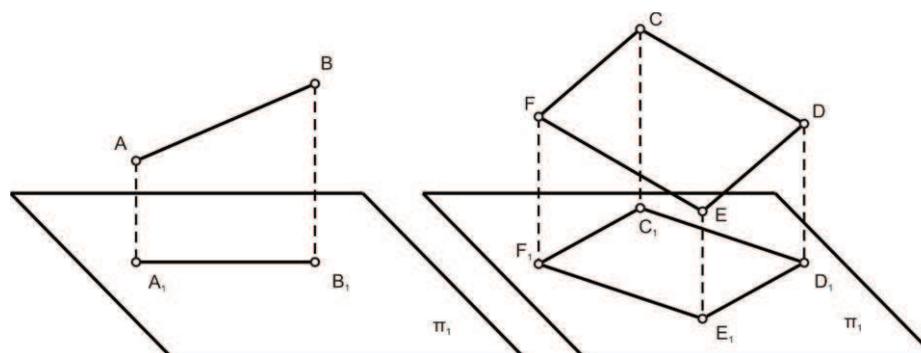


Figura 11: Perspectiva de reta e plano quaisquer projetados em π_1 . Fonte: o autor.

Todos os pontos de uma reta *qualquer* apresentam cotas distintas uns dos outros, isto é, não há ponto que possua cota igual a outro na mesma reta. Analogamente, um plano contém infinitas *rcc*, cada qual com cotas distintas entre si.

A projeção de um segmento da reta cuja diferença entre as cotas é igual a uma (1) unidade dá-se o nome de *intervalo* de reta. Do mesmo modo, chamamos de *intervalo de plano* a projeção da distância entre duas *rcc*, de um plano cuja diferença entre suas cotas é uma (1) unidade (Figura 12).

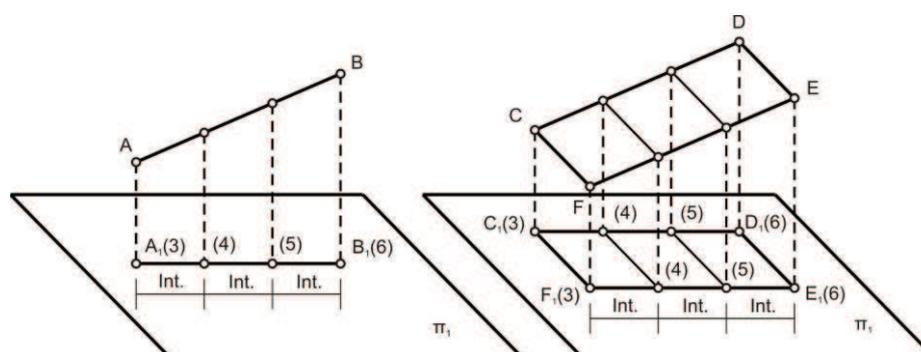


Figura 12 – Perspectiva da projeção de uma reta e um plano e seus intervalos. Fonte: o autor.

A partir do Método de Monge, as representações dos objetos tridimensionais expressam com exatidão as suas medidas, de modo que qualquer pessoa que conheça os códigos de representação pode reconstruir um dado objeto. Outros Sistemas de Representação tomam por base o método de Monge, a citar alguns métodos de Perspectiva Cônica. Entretanto, a interpretação desses códigos não ocorre facilmente, requerendo do indivíduo uma visualização espacial e raciocínio geométrico para leitura e tratamento das imagens.

Outros conceitos e propriedades projetivas e geométricas estão envolvidos no método de Monge, em questões que apresentam construções mais complexas como problemas de distância entre retas, ou ângulos entre planos, por exemplo. Por conta

dessa complexidade e de outros fatores, os alunos se distanciam muitas vezes da abstração se detendo nas execuções de métodos.

É importante destacar que no método de Monge o objeto é colocado em relação ao plano de projeção de modo que duas dimensões (largura e comprimento, por exemplo) sejam projetadas em V.G. Por esse motivo, na representação de um objeto são utilizados duas projeções ou outros dados que complementem as informações com relação à terceira dimensão, o que torna ainda mais complexo de compreender o que está representado, pois se distancia do modo como enxergamos. As figuras Figura 13 e Figura 14 ilustram respectivamente projeções de um sólido que mostram as três dimensões representadas e três projeções de um objeto, mostrando apenas duas dimensões cada.

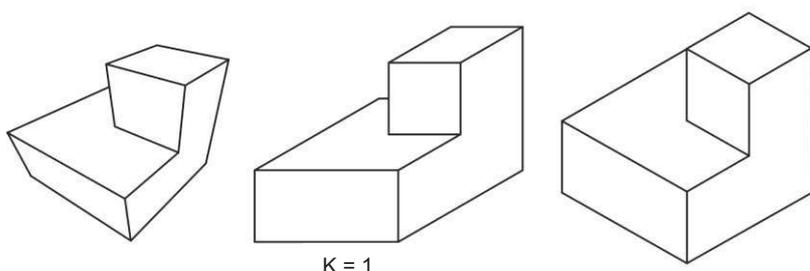


Figura 13 – Perspectiva cônica de 3 fugas, Cavaleira e Isométrica respectivamente. Fonte: o autor.

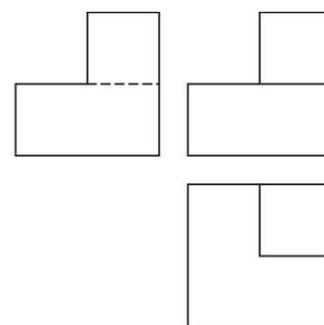


Figura 14 – Vistas mongeanas. Fonte: o autor.

Em contraponto, as projeções que apresentam as três dimensões não garantem, por si só, uma única interpretação. A Figura 15 ilustra um prisma representado por uma projeção cilíndrica. Entretanto, se imaginarmos um paralelepípedo retângulo (ortocadro) envolvendo o prisma, poderíamos imaginar duas formas distintas, um prisma reto (1) e um prisma oblíquo.

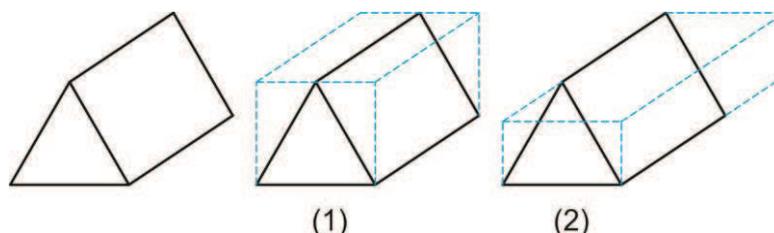


Figura 15: (1) prisma reto; (2) prisma oblíquo. Fonte: o autor com base em COSTA (1996).

Atualmente, o estudo do Método de Monge amplia-se ao que Costa (1996) chama de Geometria Gráfica Tridimensional (GGT), que é “o estudo, através do

desenho plano, de qualquer propriedade de forma tridimensional, utilizando os Sistemas de Representação” (Costa, 1996, p. 14).

Como uma das principais utilidades do método de Monge é determinar a Verdadeira Grandeza de faces e arestas, apresentamos um problema simples de GGT, para que o leitor perceba as diferenças no representar uma situação no espaço e interpretar essas representações de modo que se possa compreendê-la.

Como determinar a verdadeira grandeza de um triângulo que se encontra na posição *qualquer* em relação ao plano de projeção principal, dado a sua projeção cotada em π_1 ?

Para se projetar uma face em V.G. o plano de projeção encontrar-se-á paralelo a ela. Desde modo, se a face está na posição *qualquer* em relação ao plano de projeção principal π_1 (Figura 18), o plano em que será projetado em V.G. também é *qualquer*. Sabendo que todo plano de projeção secundário deve ser perpendicular a outro existente, não temos como encontrar um plano paralelo à face diretamente por π_1 . Desse modo, se colocarmos a face em vista básica em um plano secundário π_2 , podemos traçar um terceiro plano (π_3) paralelo à face e perpendicular a π_2 .

Encontramos a direção em que a face se projeta em vista básica a partir da *rcc*, pois o plano secundário é perpendicular a ela (Figura 19). Projetamos a face em π_2 obtendo sua vista básica (Figura 20).

Paralelo à face, conseqüentemente, à vista básica, traçamos um terceiro plano π_3 , obtendo a projeção da face em V.G. (Figura 21).

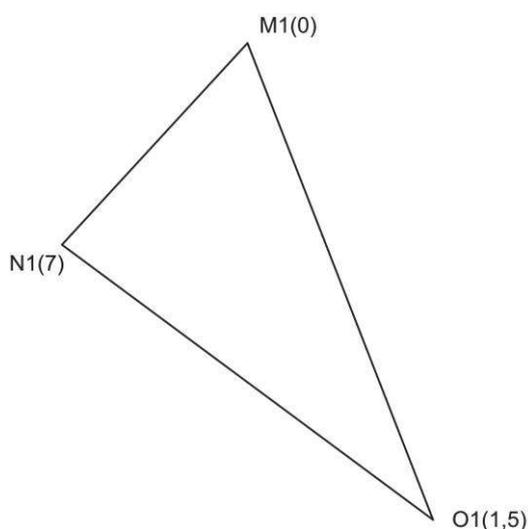


Figura 16 – Projeção cotada do triângulo MNO. Fonte: o autor.

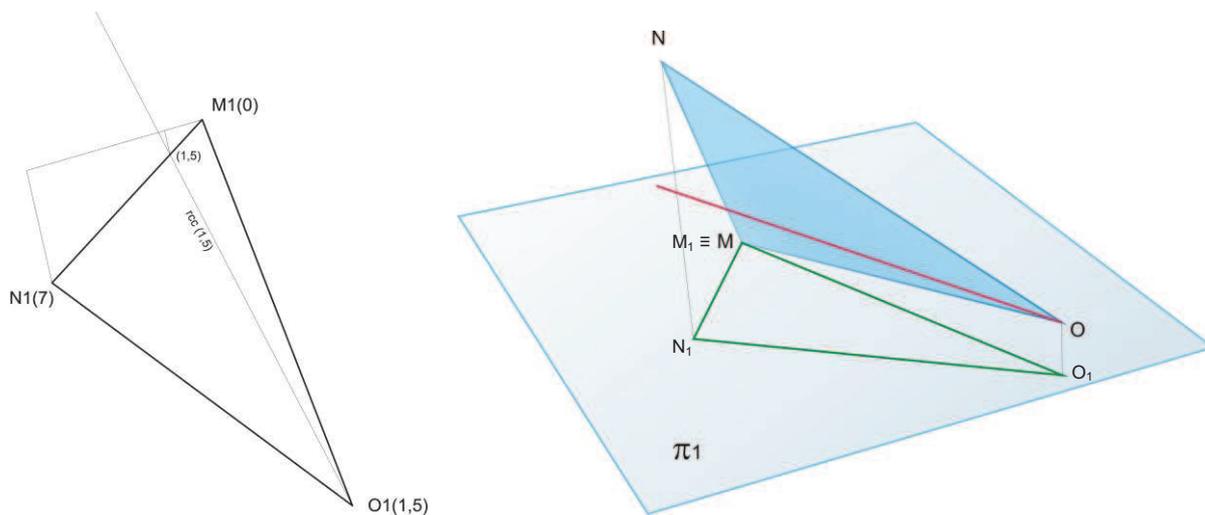


Figura 17 – é pura e perspectiva da rcc de MNO. Fonte: o autor.

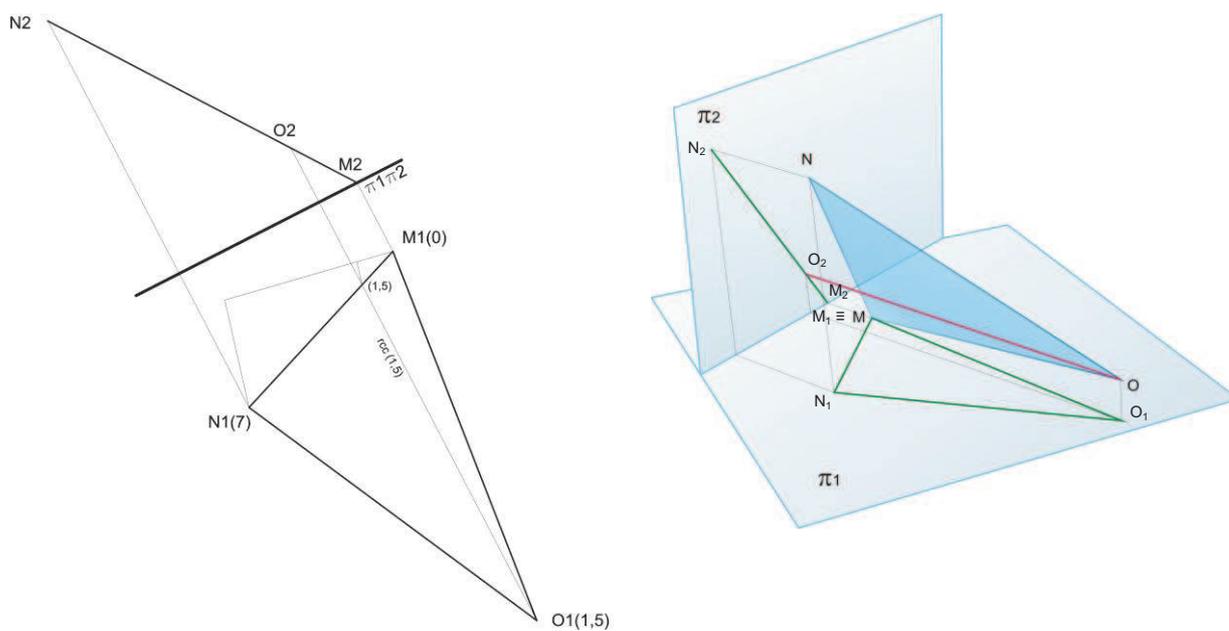


Figura 18 – É pura e perspectiva da projeção em vista básica da face MNO. Fonte: o autor.

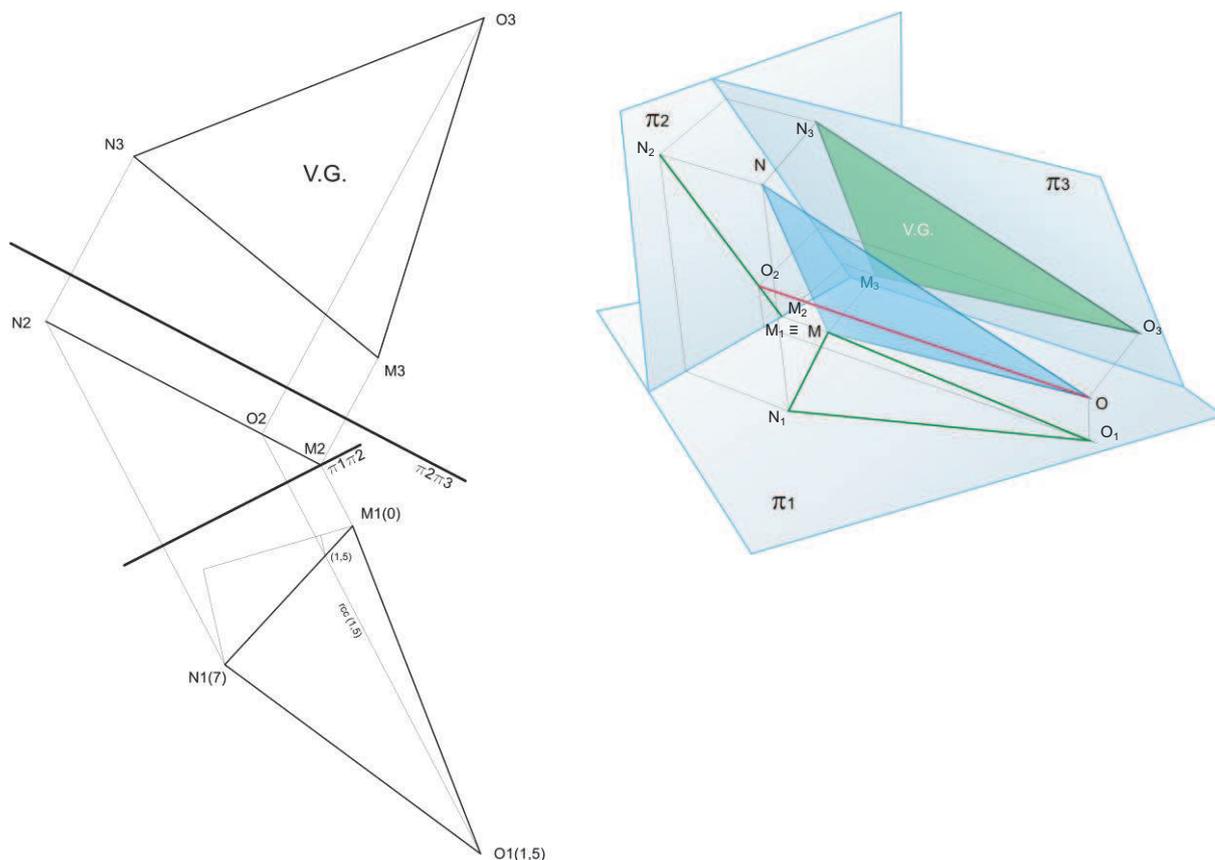


Figura 19 – é pura e perspectiva da V.G. do plano MNO. Fonte: o autor.

Diante do exposto, percebemos que compreender a GGT não é uma tarefa simples, pois envolve fatores que vão além da apropriação dos códigos de representação, como também fatores cognitivos, epistemológicos e didáticos. Nessa direção, trataremos na seção seguinte do ensino da GGT, as dificuldades de aprendizagem e as metodologias utilizadas no ensino da mesma.

CAPÍTULO 2 – ENSINO DA GGT

2.1 PARA QUE ENSINAR?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, p. 51) apontam como conteúdos conceituais e procedimentais para o bloco de Espaço e Forma, dentre outros, a interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários e a construção e representação de formas geométricas. Isso nos mostra que princípios básicos da GGT já estão, a princípio, inseridos no ensino de Matemática desde o ensino básico e não são reservados apenas ao ensino técnico e/ou superior.

Valente (2003) aponta como objetivo da disciplina de GGT:

“[...] o desenvolvimento das seguintes competências: visualização espacial; capacidade de representar elementos tridimensionais no plano, indicando corretamente sua forma, tamanho e posição relativa; capacidade de interpretar representações gráficas no plano e resolver problemas geométricos espaciais em épura”. (Valente, 2003, p. 27).

Tal afirmativa corrobora o fato da disciplina ajudar o aluno a desenvolver determinados conceitos geométricos por outros olhares dentro da Matemática. Contudo, os alunos encontram dificuldades de diversas naturezas (conceituais, cognitivas, didáticas) para alcançar esses objetivos.

Nesta direção, alguns teóricos se debruçam a estudar metodologias de ensino que nos ajude a entender como o aluno aprende, bem como que condições favoráveis à aprendizagem podem ser possibilitadas. Dentre as metodologias, destacamos a resolução de problemas como estratégia de ensino.

2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM GGT

A resolução de problemas é uma atividade privilegiada para favorecer o aluno a construir o seu conhecimento. Os problemas a serem resolvidos devem favorecer a utilização de conhecimentos antigos assim como a construção de novos. Do ponto de vista da didática e da cognição, a resolução de problemas traz as questões de conflito cognitivo, de acomodação, assimilação e equilíbrio. Essas questões são

abordadas por Piaget em sua psicogênese cognitiva em que o sujeito sofre desequilíbrios quando se depara com novas situações e o processo de re-equilibração produz conhecimento.

Segundo Torbert (1975), a compreensão sobre algo ocorre: pela interferência de terceiros, seja por instrução ou ensino ou pela experiência adquirida com a interação com o ambiente. No ensino, os problemas propostos devem instigar o aluno a relacioná-los com experiências anteriores, para assim torná-los significativos.

George Polya (1887-1985), matemático húngaro, escreveu *How to solve it* (1945), traduzido para o português como *A arte de resolver problemas* (POLYA, 2006). Neste livro, Polya classifica os problemas pelo seu método de resolução, dividindo em quatro etapas:

- *Compreensão do problema* – nesta fase o aluno interpreta o enunciado, onde ocorre a devolução do problema ao aluno. O professor deve ter a preocupação de não elaborar questões nem muito fáceis, provocando o desinteresse por parte do aluno, nem muito difíceis, provocando a sua desistência;
- *Estabelecimento de um plano* – é nessa fase que o aluno entra em contato com todas as experiências anteriores que trazem significado ao problema. O aluno recorre aos campos conceituais envolvidos de modo a criar uma estratégia, ou caminho metodológico. Porém, este plano não é ainda nítido e definido;
- *Execução do plano* – neste momento o aluno coloca em prática os planos elaborados anteriormente, verificando se a sua execução leva ao caminho planejado ou a algum resultado; é a fase em que mais ocorrem os erros. É importante destacar que muitos alunos se perdem nessa fase, principalmente quando o plano elaborado não provém dos mesmos, vindo por orientação do professor ou de outro colega, ou quando a compreensão do problema não está clara o suficiente. Isso nos mostra a fragilidade do domínio de conceitos e propriedades envolvidas no problema;
- *Retrospecto* – nesta fase os alunos compararam os resultados encontrados com o enunciado do problema, além de revisarem todo o caminho percorrido na resolução. Esta fase é um momento bastante importante, pois o aluno tem a oportunidade de consolidar os conhecimentos adquiridos, seja pela revisão

da resolução, por uma conversa com outro colega ou pela institucionalização do conteúdo por parte do professor.

Para Polya (2006), em cada etapa o aluno volta à etapa anterior para confirmar suas conjecturas. Todavia, elas não se sucedem rigorosamente. O aluno pode ter um “estalo”, passando pelas fases iniciais, resolvendo o problema, como também pode fazer inúmeros planos e não ter compreendido, e em outro momento a solução surge. O autor afirma ainda que para o problema ser resolvido o aluno precisa estar envolvido com a situação e querer resolver o problema.

Segundo Valente (2003), os elementos-chave da aprendizagem por resolução de problemas são: a formulação de hipóteses, que podem ser exploradas através de investigação autogerida, o teste dessas hipóteses e a revisão destas questões pela aplicação de seus conhecimentos.

Outros autores que falam especificamente sobre a resolução de problemas em GGT é Barros & Santos (2000). Estes afirmam que a principal razão da dificuldade por parte dos alunos com a disciplina é a baixa capacidade de visualização espacial, e que tal dificuldade pode ser trabalhada pela resolução de exercícios abstratos e aplicados. Os autores descrevem três fases na resolução de problemas em GGT, quais sejam:

- *Visualização* – nessa fase, assim como na primeira fase de Polya, o aluno interpreta a questão, necessitando dos conhecimentos do método de representação e da Habilidade de Visualização Espacial (HVE). Por esse motivo, muitos alunos têm dificuldades, pois param no primeiro obstáculo que é a falta de HVE. Nesta fase o aluno interpreta as representações bidimensionais em modelos mentais tridimensionais;
- *Concepção* – considerada a fase mais complexa, correspondente à fase de estabelecimento do Plano de Polya, onde o aluno não só precisa visualizar, mas realizar várias operações e transformações mentais para delimitação do caminho a seguir para resolução do problema. Toda concepção é feita a partir de representações mentais 3D. Isso acarreta que nem todo plano concebido nessa fase seja executável, pois depende dos mecanismos oferecidos pelo sistema de representação envolvido. Alguns alunos apoiam-se também em representações concretas para a concepção, utilizando desenhos em perspectiva, materiais didáticos, bem como ferramentas computacionais.

- *Operacionalização* – esta fase corresponde à execução do plano de Polya, no qual ocorre a codificação das estratégias elaboradas na fase anterior, a partir de representações em épura (2D). Os erros mais frequentes nessa fase são devidos a não concepção da estratégia, no intuito apenas de reproduzir mecanismos decorados de questões anteriores, sem necessariamente refletir sobre os conhecimentos geométricos envolvidos.

O que irá garantir o aprendizado do aluno não será consequência da simples passagem por essas fases, mas sim pela confrontação das conjecturas com suas aplicações no decorrer na resolução. Essa confrontação corresponde à fase de retrospecto de Polya. A Figura 20 mostra o diagrama das fases e o caminho que é percorrido na resolução de problemas em GGT.



Figura 20: Processo de solução de problemas em GGT. Fonte: BARROS & SANTOS, 2000, p.261.

O aluno, ao percorrer essas fases pode se deparar com dificuldades de diferentes fatores, de cunho epistemológico (fase concepção e operacionalização), cognitivo (visualização e concepção) e didáticos (nas três fases).

Entendemos que as fases propostas tanto por Polya – como por Barros & Santos – podem não só servir de caminho metodológico a ser percorrido pelo aluno, mas também de base para estudos didáticos. O professor pode observar as fases presentes nas resoluções de problemas dos seus alunos com o objetivo de identificar as “falhas” em cada fase, encontrando a origem dos erros.

2.3 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM

O erro é a expressão de um conhecimento. Conhecimento que talvez funcionou em alguma situação, que foi estabilizado, mas que é incompleto ou que tem um domínio de funcionamento que não inclui aquele do problema a ser resolvido. Uma das evoluções importantes da compreensão da aprendizagem é justamente ter que considerar o erro como a manifestação de algum conhecimento.

Segundo Astolfi (1999), a aprendizagem é influenciada por três fatores: epistemológicos, psicológicos e didáticos. Ele apresenta de maneira esquemática o triângulo didático clássico (Figura 21), onde aparecem associados em um mesmo sistema o Saber (S), o Aprendiz (A) e o Professor (P) para visualizar logicamente a ocorrência dos erros. Segundo o autor, o erro não é visto como algo negativo, mas como indicativo para a superação das dificuldades que leva a aprendizagem.



Figura 21: Triângulo didático. Fonte do autor baseado em Astolfi (1999)¹.

As dificuldades de origem didáticas referem-se às consequências de escolhas didáticas, dos dispositivos e métodos de ensino. As dificuldades de origem epistemológica dizem respeito a dificuldades que o aprendiz encontra na construção conceitual e que podem ser associadas a dificuldades que os matemáticos, geômetras encontram na elaboração dos mesmos conceitos. As dificuldades de origem psicológica dizem respeito às características cognitivas daquele que aprende. Piaget (1979), por exemplo, considera que dependendo das fases do desenvolvimento cognitivo da criança, ele pode ou não desenvolver certos conhecimentos.

Não podemos olhar cada grupo de dificuldades separadamente, pois todas estão interligadas, os fatores epistemológicos interferem no didático, como o didático pode interferir no cognitivo.

Uma das causas das dificuldades dos alunos em GGT é a falta de base dos conhecimentos geométricos. Na escola básica, os conteúdos de Desenho e

¹ Reproduzimos o mesmo diagrama de Astolfi substituindo o termo obstáculo por dificuldades, visto o primeiro termo levar a uma discussão que não é nosso foco.

Geometria quando trabalhados, resumem-se, via de regra, a receitas de traçados e memorização de fórmulas de área e volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

No Brasil, pesquisas apontam a importância do ensino das construções geométricas, auxiliando a construção do conhecimento em geometria e/ou mostram as dificuldades encontradas pelos alunos, nos cursos superiores, nos quais a Geometria e as construções geométricas são pré-requisitos imprescindíveis (LIBLIK & PINHEIRO, 1996; ZUIN, 1997; DIAS, 1998; ZUIN, 2000; PERES & ZUIN, 2001).

Raymond Duval (1995) descreve sobre o papel dos registros de representação semiótica para apreensão do conhecimento matemático. Segundo o autor, a Geometria envolve três categorias de processos cognitivos: a *visualização* que é a exploração de uma situação complexa, a *construção* de configurações de um modelo matemático representado e, o *raciocínio*, que é o processo que conduz a explicação.

O autor ressalta que há quatro maneiras de apreensões (interpretações autônomas) na descoberta dos problemas de geometria. São elas: *Sequencial*, é solicitada nas tarefas de construção ou descrição da figura; *Perceptiva*, é a interpretação das formas da figura; *Discursiva*, é a interpretação dos elementos da figura; e *Operatória*, dependem das modificações possíveis que a figura pode sofrer, as quais o autor classifica em três: *Modificação mereológica*, relação das subdivisões de uma figura com o todo; *Modificação ótica*, transformação de uma figura em outra considerada imagem; e *Modificação posicional*, deslocamento em relação a um referencial.

Segundo o autor, organizar problemas matemáticos que envolvam os mesmos conhecimentos determina uma categorização cognitiva indispensável ao aprendizado da demonstração, que é a conscientização dos conceitos a partir de deduções feitas pelo aluno. Assim, Duval (*ibid*) indica três níveis de problemas: no primeiro, o assunto do problema está diretamente ligado ao enunciado, a resolução é direta, não é necessária uma apreensão discursiva explícita. No segundo nível, é necessária uma apreensão discursiva, o assunto não está diretamente ligado ao enunciado. No terceiro nível, a resolução dos problemas exige mais que uma apreensão discursiva, o aluno tem que recorrer aos esquemas formais lógicos específicos, tais como o raciocínio disjuntivo e o raciocínio por contraposição.

Almeida *et al* (2009, p. 1222), mapeando as dificuldades de visualização de alunos de engenharia da UFPE, levantam a hipótese que:

“[...] as dificuldades residem, provavelmente, nas transformações das propriedades do objeto, decorrentes do sistema de representação adotado, gerando uma visualização incorreta do modelo. Considerando, como afirma Fischbein (1993) que o desenvolvimento cognitivo em Geometria necessita articular harmonicamente a componente conceitual e figural do objeto, entendemos que muito dos erros e dificuldades apresentados alunos são provenientes dessa desarmonia entre as propriedades do objeto e a imagem que vêm traduzidas na representação bidimensional, podendo, no entanto, ter origem em outros fatores como, por exemplo, em metodologias adotadas nos contratos didáticos etc.” (Almeida *et al*, 2009, p. 1222)

Como resultado da pesquisa aponta, os alunos apresentam limitações com o próprio sistema de representação, dificuldades de transformações do objeto e suas propriedades;. No entanto, outros fatores podem ser geradores dos erros, como falhas no processo de aprendizagem, o nível do desenvolvimento do pensamento geométrico em que se encontra o aluno, a ideia que está presente no seu raciocínio sobre o tema abordado, etc. Destacam a dificuldade por parte dos alunos com o sistema Mongeano por conta da necessidade de articulação entre as projeções, demandando um maior nível cognitivo do que quando se trabalha com representações em perspectiva, além da dissociação entre o conceito e a representação. Consideram ainda como causa dos erros mais frequentes a falta do domínio do método, a representação errada do objeto e a falta da formação nas séries iniciais, além da falta de tempo nas aulas.

Pesquisas sobre Habilidade de Visualização Espacial (HVE) aprofundam o estudo da mensuração desta habilidade a partir de testes e, segundo Velasco (2002), são classificados em duas categorias: testes de Rotação Mental, que priorizam a rapidez na execução de tarefas que envolvam a rotação mental de objetos, com base na comparação de representações de referência com outras apresentadas rotacionadas. São aplicados com duração de tempo reduzido; e os testes de Visualização Espacial, que priorizam a precisão na execução das mesmas, envolvendo a construção mental de imagens tridimensionais e não a velocidade na realização das tarefas. São aplicados com intervalos maiores de tempo.

Seabra (2009) cita algumas categorias de testes: *Mental Rotation Test* (MRT) (VANDENBERG & KUSE, 1978), o *Mental Cutting Test* (MCT) que é um subconjunto do *Special Aptitude Test in Spatial Relations* (CEEB, 1939) e o *Test de Visualización*

(TVZ) que foi desenvolvido a partir de modelos psicométricos e descobertas da psicologia cognitiva por Gerardo Prieto Adanez (ADANEZ; VELASCO, 2002).

Percebemos que a influência do meio é um importante fator no processo de ensino aprendizagem. Nesse cenário, precisamos entender o problema como uma situação colocada para o aluno resolver e que esta situação é elaborada pelo professor, enquanto mediador do processo de ensino-aprendizagem. Destacamos a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau como instrumento metodológico na elaboração de problemas.

2.4 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas foi descrita pelo francês Guy Brousseau pela qual busca responder ao seguinte questionamento:

“Que condições podem ser propiciadas para que um sujeito qualquer tenha a necessidade de um conhecimento matemático determinado para tomar certas decisões?” (BROUSSEAU, 2008, p. 18)

Para tal, o autor propõe que para interferir na aprendizagem do aluno devemos modelar o meio, ou seja, não apenas o local em o sujeito está inserido, mas as ferramentas que o mesmo irá utilizar, bem como os procedimentos que realizará. Brousseau descreve uma situação como

“[...] um modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável.” (BROUSSEAU, 2008, p. 19)

Ou seja, para que haja uma situação é necessário que o sujeito esteja interagindo com o meio que está inserido. Quando em uma situação há alguém que tem a intenção de ensinar e outra(s) de aprender caracterizamos uma *situação didática*, nela está incluído o professor e o sistema educacional.

Brousseau (2008, p. 25) classifica as situações didáticas em quatro tipos:

- **Situação de ação:** o sujeito não tem consciência de suas decisões e que relações matemáticas estão envolvidas no problema, caracterizando o *modelo implícito*;
- **Situação de formulação:** o sujeito aplica o *teorema-em-ato*, ou seja, consegue resolver o problema, porém não sabe explicar o porquê da

resposta. Ela pode ocorrer de maneira imediata (entre os sujeitos), ou mediata (por parte do meio);

- **Situação de validação:** o sujeito precisa provar sua estratégia, entender os porquês.
- **Institucionalização:** aqui o professor tem seu papel mais ativo, quando transpõe o conhecimento utilizado pelo aluno para resolver um problema em um *saber* daquela *instituição*.

Só podemos dizer que um sujeito realmente aprendeu, quando ele é capaz de utilizar aquele conhecimento em uma situação fora do contexto de ensino. Por isso, Brousseau defende que uma boa situação didática é rica em situações adidáticas, ou seja, o aluno assume a responsabilidade do problema. Quanto menos existir a necessidade do professor interferir na resolução de um problema, mais o aluno vai mobilizar conhecimentos prévios para resolvê-lo.

Para que o professor possa conduzir o aluno a uma situação didática, este deve a partir das *variáveis cognitivas*² que pode determinar e escolher as *variáveis didáticas*.

Vejam os exemplos: Um professor ao preparar um problema sobre simetria axial pode escolher a variável cognitiva – *posição de eixo de simetria* – para determinar que conhecimentos quer trabalhar com seus alunos. Os valores que essa variável pode ter seriam: horizontal, vertical, secante ao objeto, não secante, entre outros. Por se tratar de uma variável que o professor pode determinar, esta se caracteriza como uma variável didática.

Brousseau afirma que:

“A aprendizagem por adaptação implica que as variáveis sejam escolhidas de modo que o conhecimento que queremos que seja descoberto seja significativamente mais vantajoso que qualquer outro.” (BROUSSEAU, 2008, 46)

Por isso, o professor deve investigar as possíveis estratégias de resolução para a escolha das suas variáveis didáticas. É papel do professor modificar o meio para que o aluno sofra um desequilíbrio, “forçando-o” a adaptar/modificar seus conhecimentos para encontrar um novo equilíbrio nesse “novo meio”. Porém, o aluno só possuirá um conhecimento verdadeiro quando em uma nova situação ou

² Aquela que se encontra em uma situação tal que pela escolha de valores diferentes, pode alterar o conhecimento apropriado para resolvê-la. (BROUSSEAU, 2008, p.35)

mais ampla não se apresentar como sendo insuficiente para resolver aquela situação.

Nessa direção, podemos verificar em uma determinada situação, a partir das variáveis didáticas escolhidas, como estudantes de GGT resolvem um problema, encontrando possíveis conhecimentos falsos que precisam ser resignificados.

Ou seja, olharmos para as fases de resolução de problemas expostas anteriormente como sistematização da situação didática, tentando colocar o aluno como agente da ação, de modo que ele possa realizar em um curto período de tempo, aquilo que pesquisadores passaram anos para descobrir.

As novas tecnologias representam algumas das possibilidades de se modificar o meio e proporcionar condições de superação de dificuldades de aprendizagem.

2.5 CONTRIBUIÇÃO DAS MÍDIAS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DA GGT

Nas últimas décadas, a disseminação das tecnologias tem se tornado crescente, integrando cada vez mais nosso cotidiano. No mundo urbano é difícil imaginar alguma profissão que não utilize alguma das novas tecnologias, desde o cartão de crédito aos computadores que cabem na palma da mão. De fato, aprender a acompanhar os avanços tecnológicos e utilizá-las em prol do desenvolvimento social e científico tem sido o grande desafio para as diferentes áreas dos saberes.

Para a Educação, a utilização das novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem tem se tornado tema difundido em diversos congressos que debatem sobre o assunto. Aumenta a cada ano o número de cursos de graduação e pós-graduação voltados para a pesquisa e uso das mesmas, bem como suas áreas de atuação.

Como exemplo disso, temos profissões como arquitetura, engenharia, design, dentre outras que trabalham com a expressão gráfica, as quais utilizavam em seus projetos e produções materiais concretos, como papel, lápis, nanquim, tintas, telas. Hoje, toda a parte de planejamento e projeto é informatizada, sem no entanto, extinguir todas as práticas tradicionais.

Surgem novas metodologias de projeto como o *Building Information Modeling* (BIM) que representam uma nova geração de ferramentas do CAD, de modo que o

arquiteto ou engenheiro possa a partir de uma modelagem 3D gerar várias pranchas com plantas baixas, fachadas e cortes integrados.

Deste modo, a inserção das novas tecnologias na formação desses profissionais se torna imprescindível, visto que o estudante se depara com os mesmos instrumentos que encontrará no mercado de trabalho e haver a necessidade de estar atualizado às novas tendências.

Rego (2000) destaca que, além das perspectivas e método mongeano, as tecnologias da Gráfica Computacional se tornou uma terceira sistematização da representação gráfica utilizada no processo de projeção. Dentre elas, destacam-se os programas de auxílio à projeção (programas CAD) caracterizados por uma maneira diferente de interação entre o usuário e o instrumento. O conhecimento das características e potencialidades das ferramentas CAD e das redes informatizadas demonstra uma aplicabilidade inquestionável que se evidencia pelo aumento de produtividade e qualidade do projeto. Segundo Rego:

“As ferramentas CAD e os recursos de redes digitais estão hoje numa estreita relação e torna-se cada vez mais frequente o emprego simultâneo das mesmas: as ferramentas CAD como um instrumento de desenvolvimento, comunicação e documentação da proposta projetual e as redes informatizadas como recurso de acesso a dados, compartilhamento de equipamentos e gerenciamento integral da atividade” (REGO, 2000, p.62).

Além das ferramentas do CAD, existem os programas de animações que dão movimento ao objeto modelado ou parte deste, fazendo a simulação de um observador se locomovendo por dentro ou em torno do modelo. Tais ferramentas são consideradas instrumentos importantes para avaliar as formas do espaço (*ibid*). A maior vantagem em empregá-las consiste na rapidez com que as numerosas variáveis podem ser testadas, mas cabe ao projetista a análise dos resultados.

No desenvolvimento das hipermídias destaca-se o investimento por parte de empresas e pesquisadores da realidade virtual que é um recurso que dispõe da visualização tridimensional e da animação e permite a interação entre o observador e o espaço modelado através da simulação, possibilitando a imersão do observador no ambiente criado. Tal tecnologia se utiliza da Linguagem para Modelagem em Realidade Virtual (*Virtual Reality Modelling Language - VRML*), entre outras (*ibid*). O trabalho de SEABRA (2009) propõe a especificação e o desenvolvimento de uma ferramenta didática para apoio ao ensino de GGT baseada em técnicas de Realidade Virtual, em especial a estereoscópica.

Amplamente disseminado, o Cabri-Géomètre, *software* educativo de geometria dinâmica voltado para o ensino da Geometria Plana e a versão 3D voltado para o ensino da Geometria Espacial, é utilizado para o ensino da GGT, por conta dinamicidade e pelo seu desenvolvimento ser voltado para o trabalho das propriedades geométricas (GUIMARÃES *et al*, 2009).

Ferreira (2008) utiliza um *software* de modelagem (Rhinoceros) como ferramenta de ensino, com o intuito de trabalhar os métodos descritivos, atrelando a ferramenta com os conteúdos disciplinares.

Outro trabalho desenvolvido, este no voltado para o treinamento da visualização espacial, é o de Velasco & Adánez (2009). Foram aplicados exercícios eletrônicos na disciplina de Desenho Técnico envolvendo os assuntos trabalhados e para avaliação foram feitos testes de visualização espacial, observando-se uma melhora moderada na média dos alunos.

Carvalho (2004), no intuito de realizar um estudo relacional entre a utilização da mídia tradicional (prancheta, papel, lápis) e Digital (computador) na concepção do Projeto Arquitetônico, concluiu que os sujeitos analisados utilizam diferentes processos cognitivos nas duas mídias, levando-nos a entender que uma não substitui a outra, porém são complementares.

Rodrigues (2001) avalia o uso de recursos computacionais para o desenvolvimento do pensamento geométrico e conclui que a ferramenta estimula pesquisadores interessados na busca de novas alternativas que auxiliem os alunos a "pensar geometricamente".

Deste modo, as ferramentas computacionais devem ser utilizadas como auxiliares do desenvolvimento das habilidades espaciais, como destaca Rodrigues & Delmas (2009), valorizando o raciocínio baseado nos conhecimentos teóricos sobre os conceitos e propriedades inerentes aos elementos e às suas relações, envolvidos na situação problemática. Porém, não despreza as suas colaborações no que diz respeito, tanto a resolução de problemas, quanto ao processo de ensino-aprendizagem.

A partir das várias pesquisas levantadas sobre as diferentes tecnologias utilizadas no ensino da GGT, Alves *et al* (2009) aponta como contribuições os seguintes itens:

- Após o domínio dos comandos e da aplicação da capacidade de abstração, o usuário realiza a modelagem com rapidez e eficiência;

- A peculiaridade existente nos aplicativos é que, após a modelagem, o modelo produzido poderá servir de parâmetro para outros modelamentos, reutilizando-o para fazer possíveis alterações;
- Possibilita rotacioná-lo para observar detalhadamente a sua conformação. Isso se diferencia do desenho auxiliado com os instrumentos tradicionais em que a representação estática do papel não pode ser rotacionada.
- Obtenção das vistas gráficas ocorre de maneira automática. Assim, o desenvolvimento da visualização espacial pode ser trabalhado através das vistas ortográficas concomitantemente com as alterações feitas pela forma modelada, identificando as mudanças ocorridas, o posicionamento das retas e dos planos em relação à Linha de Terra (ALVES, 2008).

O autor salienta que o uso sem critérios do recurso de conversão automática de modelos 3D em desenhos 2D elimina etapas importantes para o aprendizado, pois não leva o aluno a uma análise crítica reflexiva sobre o que se está sendo feito, levando-o a chegar no resultado final do problema. Porém, nem sempre o significado dos passos dados ao longo do procedimento realizado é compreendido.

Consideramos também que o domínio da ferramenta computacional não é suficiente para o desenvolvimento do pensamento espacial, mas sim do conjunto de raciocínios geométricos envolvidos no campo conceitual correspondente.

Tal fato justifica a necessidade de um planejamento prévio, por parte do professor, quanto ao processo de ensino e utilização da ferramenta computacional. A este respeito, Gregio (2008) salienta que o professor deve refletir sobre os limites e possibilidades do programa, para saber selecioná-lo, e tal fato não é uma tarefa fácil. Balacheff e Kaput (1996) apresentam três características de ambientes informatizados construtivistas. São eles: meio dinâmico, meio interativo e meio para modelagem ou simulação. Esses pesquisadores investigaram o impacto da tecnologia em diferentes domínios da Matemática, como a Aritmética, a Álgebra, a Geometria, a Estatística e o Cálculo. Diante do presente quadro apresentamos como ocorre o ensino da GGT na UFPE.

2.6 ENSINO DA GGT NA UFPE

Atualmente o ensino da GGT no Brasil reflete a influência da obra “*Elementos de Geometria Descritiva*” da Coleção F.I.C., bastante disseminado pelas suas aplicações práticas. Porém, a sua utilização acaba recaindo na replicação de “receitas” levando o aluno muitas vezes à memorização de procedimentos sem a preocupação de compreender a situação no espaço.

Gani (2004) afirma que:

“[...] as publicações didáticas destinadas ao ensino da Geometria descritiva nas Artes e Engenharias procuraram minimizar o conteúdo teórico e se depararam com a dificuldade de representar aquilo que se desconhece. Para compensar tanta abstração, faziam “considerações de Geometria geral” [...]” Gani (2004, p.11).

Especificamente na UFPE, o ensino da GGT segue as diretrizes da coleção dos Professores Mario Costa e Alcy Costa, intitulada *Geometria Gráfica Tridimensional*, separados em três volumes. O primeiro, destinado ao estudo dos sistemas de representação, o segundo, correspondente aos estudos de Monge referente ao estudo do ponto, reta e plano e o terceiro voltado para o estudo da Geometria Projetiva. Os dois primeiros volumes são os mais utilizados nos diferentes cursos. A disciplina de GGT está no programa dos cursos das Engenharias, Arquitetura, Design, Matemática e licenciatura em Expressão Gráfica.

A licenciatura em Expressão Gráfica é o único curso da universidade que aprofunda os estudos da GGT distribuídos em três disciplinas. A primeira (GGT1), voltada para o estudo do ponto, reta e plano, a segunda (GGT2), para o estudo dos poliedros e a terceira (GGT3) para o estudo das superfícies. Conteúdos de GGT são também abordados em outras disciplinas de cunho prático, como Sistemas de Representação, Desenho Topográfico, Desenho Mecânico, Desenho Arquitetônico, entre outros.

No Anexo 1, apresentamos o programa da disciplina de GGT1, a qual escolhemos para realizar nossa pesquisa em virtude dos conteúdos abordados servirem de base para disciplinas subsequentes.

A metodologia utilizada na disciplina baseia-se no segundo volume da coleção de Costa (1984) que trás uma parte teórica subdividida em quatro capítulos, sessenta problemas resolvidos e sessenta problemas não resolvidos distribuídos por toda obra.

Nesta direção, pretendemos fazer um levantamento de softwares utilizados no ensino da GGT, selecionar um para ser utilizado em nosso experimento na resolução de problemas em GGT, com o intuito de observar como os alunos resolvem problemas com a ferramenta computacional.

CAPÍTULO 3 – DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO

Após a revisão da literatura, realizamos uma análise *a priori* a partir do levantamento dos *softwares* utilizados no ensino da GGT, com o intuito de selecionar um para uso em nosso experimento e do levantamento dos conteúdos abordados da disciplina, nos direcionando à escolha de um conteúdo, ao levantamento dos conceitos trabalhados no mesmo, bem como das variáveis didáticas envolvidas em um problema deste mesmo conteúdo. Partimos das questões do livro de Costa (1984), para escolha de situação problema³ utilizada em nossa pesquisa, por ser o adotado na disciplina, a qual os sujeitos estão inseridos.

3.1 SUJEITOS

Elegemos os alunos do curso de graduação em Licenciatura em Expressão Gráfica da Universidade Federal de Pernambuco por dois fatores: primeiro, por ser uma profissão que necessita de uma boa visualização espacial; e, segundo, por se tratar de licenciandos, pois ao pesquisarmos como esses alunos resolvem problemas de Geometria Gráfica Tridimensional podemos interferir, futuramente, a partir de novas pesquisas, em sua formação docente e na formação do ensino básico.

Os sujeitos selecionados são formados por alunos que cursaram a disciplina de Geometria Gráfica Tridimensional 1 no primeiro semestre do ano de 2010. Tal disciplina tem por objetivo a utilização de projeções ortogonais para resolução gráfica de problemas de posição entre pontos, retas e planos, de problemas métricos com segmentos lineares e ângulos e determinação de lugares geométricos no plano e no espaço. Apresenta como pré-requisitos as disciplinas de Geometria Gráfica Bidimensional e Sistemas de Representação. Como dados precedentes, os

³ Entendemos aqui por situação problema todo exercício que possua uma aplicação prática, sem necessariamente utilizar, em seu enunciado, termos matemáticos, de modo que o próprio aluno possa fazer as associações da realidade com os conceitos matemáticos e resolver o problema sem a ajuda do professor.

alunos devem apresentar algum conhecimento quanto às construções em Desenho Geométrico e às normas e procedimentos dos sistemas de representação.

Não foram excluídos da pesquisa alunos repetentes. Deste modo, pretendemos observar como um aluno que já teve contato com o conteúdo resolve o problema. Os dados com relação à repetência foram solicitados à coordenação do curso.

Todos os sujeitos assinaram um termo de livre consentimento (Apêndice A) concordando em realizar as atividades da pesquisa, sendo esclarecidos dos procedimentos de cada uma, bem como sobre ao uso dos dados recolhidos serem utilizados na publicação da dissertação e que suas identidades serão mantidas em sigilo. Por esse motivo, cada sujeito foi identificado por um código (S1, S2... S8) pela ordem de análise.

Foram excluídos os alunos que não realizaram alguma das etapas da pesquisa, em virtude de falta. Deste modo, a partir de uma população de dez sujeitos, oito compareceram a todas as etapas da pesquisa, sendo três mulheres, cinco homens, dois deles repetentes, compondo assim nossa amostra.

3.2 INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Utilizamos em nossa pesquisa três instrumentos: um teste de visualização espacial (TVZ) para observarmos como o aluno que apresentou um alto ou baixo nível de visualização espacial resolve o problema proposto; uma situação problema apresentada em dois formatos (impresso em papel e em mídia computacional), sendo aplicados em dois ambientes, o primeiro na prancheta, utilizando os instrumentos tradicionais de desenho (papel, par de esquadros, compasso, lapiseira e escala), e o segundo no computador utilizando ferramenta computacional. O terceiro instrumento é uma entrevista semiestruturada para complementar os dados da situação problema.

3.2.1 TVZ

O primeiro refere-se ao teste de visualização espacial TVZ (ADANEZ; VELASCO, 2002). O Teste é composto de duas partes, a primeira com intuito instrucional, a segunda composta por 18 questões de múltipla escolha resolvidas em um período de vinte e cinco minutos. Em cada questão são apresentadas duas figuras, uma de um cubo em cavaleira (a mesma para todas as questões) contendo em cada face uma letra; a outra figura da planificação do cubo, mostrando apenas a letra de uma das faces e uma interrogação em outra face (Figura 22). O objetivo é marcar a alternativa da letra e sua posição que corresponde à interrogação, tendo como referência a letra apresentada na planificação.

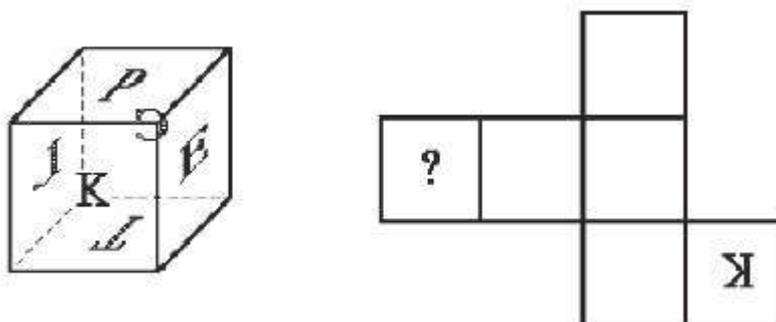


Figura 22: Exemplo de questão do TVZ. Fonte: ADÁNEZ & VELASCO, 2002, p.42.

O teste possui questões com três níveis de dificuldade, correspondendo à distância de faces entre a interrogação e a letra: três faces (C3), quatro faces (C4) e cinco faces (C5). Das dezoito questões, seis são do tipo C3, cinco do tipo C4 e sete do tipo C5. Na elaboração do teste Adanez & Velasco (2002) verificaram que quanto maior a distância das faces maior a dificuldade da questão. Partindo desta afirmação, verificamos quantas questões cada sujeito acertou, como também quantos acertos de cada tipo, assim pudemos diferenciar os níveis dos alunos levando em consideração o nível de dificuldade das questões.

Utilizamos esse teste com o objetivo aprofundar a análise das técnicas utilizadas pelos alunos, observando algum indicativo entre a relação do nível de visualização e as estratégias apresentadas.

Optamos pelo desenvolvimento de um formulário eletrônico para facilitar a operacionalização dos dados, inspirados no formulário desenvolvido por Seabra & Santos (2007). Em nosso caso, os formulários foram desenvolvidos nas linguagens

HTML para *interface*, Java Script para controle de tempo e registro do horário, PHP e MySQL para armazenamento em banco de dados.

O teste foi aplicado antes da apresentação do conteúdo na disciplina, em um laboratório contendo um computador para cada sujeito, podendo cada qual, iniciar o teste após término da leitura da primeira parte instrutiva.

3.2.2 Situação Problema em Prancheta/Computador

Para a escolha da situação problema realizamos o levantamento dos conceitos envolvidos e das variáveis didáticas para o conteúdo de interseção entre planos, que será detalhado no capítulo referente à análise *a priori*. Após a escolha, o problema foi apresentado para os sujeitos em dois formatos: o primeiro, impresso em papel A3 (Apêndice B), onde o aluno resolveu em prancheta utilizando os instrumentos tradicionais de desenho. No segundo momento, resolveu o mesmo problema com uso do computador utilizando como ferramenta um programa selecionado.

Os alunos foram submetidos à realização do problema no ambiente com prancheta após a institucionalização do conteúdo, por parte do professor da disciplina. Na aula subsequente os alunos foram submetidos à realização do problema no ambiente com o computador. Nos dois ambientes os alunos foram proibidos de realizar qualquer consulta, seja por meio de livros, dos colegas, ou da *internet*.

No ambiente em prancheta os alunos receberam a mais, uma ficha para justificativa descritiva (Apêndice C), pela qual observamos como os alunos resolveram o problema a partir de suas hipóteses e justificativas das construções. Sabemos que tais justificativas podem não expressar o real caminho metodológico percorrido pelo aluno; porém, como nosso foco é a resolução no ambiente computacional utilizamos essas fichas para nos dar ideia de como os alunos resolvem o problema em prancheta. Além da primeira ficha, foi entregue outra ficha modelo, contendo um exemplo de resolução gráfica de um problema (Apêndice D) e sua justificativa descritiva (Apêndice E).

A atividade foi iniciada com a explicação do exemplo seguido do início do problema. Todos os alunos foram orientados a colocar na folha de justificativa o horário que iniciaram o problema, bem como o horário que criaram cada hipótese e/ou justificativa. Os horários nos ajudarão a comparar os tempos gasto nos dois

ambientes para resolver o mesmo problema. Os alunos tiveram um período de no máximo três horas para realizar a atividade. Após a atividade foi realizada uma entrevista semiestruturada.

Na aula seguinte os alunos foram levados para o laboratório de informática, onde cada um ocupou um computador. Foi apresentado o mesmo problema da situação em prancheta, porém agora utilizando o programa. O levantamento dos aplicativos e a escolha do mesmo são detalhados na seção referente à análise *a priori*. Toda a resolução foi gravada com um programa de captura de tela (Camtasia 7⁴, versão Trial), para que fosse realizada a análise. Assim, foi possível analisar (melhor avaliar) todo o caminho que aluno fez para resolver o problema. Destacamos que foram oferecidas aulas extras sobre o programa selecionado. Quanto aos instrumentos tradicionais de desenho, os alunos já possuíam experiência com os mesmos em disciplinas anteriores.

Uma segunda entrevista, seguindo o mesmo modelo da primeira, foi realizada para complementar os dados referentes aos procedimentos realizados pelos alunos.

3.2.3 Entrevista Semiestruturada

A entrevista ocorreu em um momento posterior à aplicação das situações problemas no intuito de complementar os dados colhidos anteriormente, pois como afirma Triviños (2008, p.146), a entrevista semiestruturada não nasce *a priori* e é fruto dos dados já levantados pelo pesquisador. A entrevista teve duração de 10 minutos em média, foi gravada e feitas anotações complementares. As perguntas condutoras estão apresentadas no Apêndice F e foram elaboradas no intuito de identificar na fala do aluno as fases de resolução.

3.3 TRATAMENTO DOS DADOS

Os protocolos da prancheta e do computador foram interpretados e transcritos para categorização e análise. Com os dados do segundo e terceiro instrumento (folha de resolução gráfica da situação problema na prancheta com ficha de

⁴ Copyright © 1999-2010 TechSmith Corporation

justificativa descritiva, a gravação da resolução gráfica no computador e as entrevistas respectivamente) foi realizada uma análise de conteúdo (BARDIN, 1977), observando o que os dados nos falam com relação às fases de resolução de problema. Seguimos as fases indicadas para análise, pré-análise a partir da *leitura exhaustiva* dos protocolos, elaboração de hipóteses e definição das *Categorias de análise* e a Análise propriamente dita.

Com base nas fases de resolução de problemas em GGT de Barros & Santos adaptamos as fases mesclando alguns conceitos propostos por Polya (2006). Separamos o caminho metodológico de resolução do problema em quatro fases:

- *Visualização*: é nessa fase que o aluno define a *incógnita*, quais os *dados* e as *condicionantes* do problema, além de visualizar mentalmente fazendo a codificação das representações bidimensionais para representações mentais tridimensionais. Esta fase foi observada nas entrevistas, nas justificativas descritivas da resolução em prancheta e na gravação da resolução com a ferramenta computacional.
- *Concepção*: nesta fase, o aluno, a partir da sua experiência e conhecimentos prévios elabora hipóteses e conjecturas, com objetivo de responder o problema, fazendo conexões entre problemas correlatos e até adaptar para o atual contexto, e gerar um plano de execução. Esse plano nem sempre é definido e pode ser modificando durante toda a execução. Nesta fase o aluno realiza operações mentais tridimensionais.
- *Operacionalização*: nesta fase o aluno aplica suas estratégias e hipóteses. Essas aplicações são as codificações das representações mentais tridimensionais em representações bidimensionais. A diferença entre os dois ambientes é que na prancheta o aluno codifica em representações em *épura*, no ambiente com uso do computador codifica em representações que simulam o objeto tridimensional dinamicamente⁵.
- *Retrospecto*: iremos considerar o retrospecto como a fase em que o aluno retoma as construções verificando se as operacionalizações estão corretas. Foi observado nas entrevistas, e nas resoluções nos dois ambientes.

⁵ Referimo-nos ao dinamismo aqui, a possibilidade de mudar o ponto de vista do observador comparado a uma câmera em movimento.

Para analisarmos as fases de concepção e operacionalização inspiramo-nos nos elementos da Praxeologia Matemática de Bosch e Chevallard (1999) abordada na Teoria Antropológica do Didático (TAD).

A TAD, desenvolvida por Yves Chevallard, propõe que o saber matemático é fruto da ação humana institucional, algo que é produzido, utilizado, ensinado ou, mais geralmente, transposto em instituições. Para responder como analisar as práticas institucionais de maneira que permita a descrição e o estudo das condições de realização, Bosch e Chevallard (1999) propõem uma ferramenta para “modelizar” as práticas sociais matemáticas em uma instituição a partir do que chamam de organização praxeológica, ou praxeologia. A TAD (*ibid*) postula que qualquer atividade humana pode ser descrita por uma praxeologia, ou seja, um modelo de quatro componentes: $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

Para realizarmos qualquer atividade precisamos cumprir tarefas, e cada qual, pressupõe um tipo específico. Podemos realizá-las de diferentes maneiras, mas que não necessariamente nos leve a um resultado esperado; esse procedimento é a *técnica* da organização matemática. A palavra técnica é usada como uma “maneira de fazer” particular e não como um procedimento estruturado e metódico, ou algoritmo, caso particular de uma técnica. Toda técnica possui uma *Tecnologia* que permite justificá-la e uma *Teoria* que justifica a tecnologia; essa teoria pode ser diferente de acordo com a instituição.

Em outras palavras, se T é um tipo de tarefa matemática, cumprir uma tarefa t de certo tipo T , por meio de uma técnica τ , justificada por uma tecnologia θ permite ao mesmo tempo pensar ou mesmo produzir a técnica, a qual por sua vez, é justificável por uma teoria Θ . Chama-se de organização matemática (OM) a praxeologia $[T, \tau, \theta, \Theta]$ ligada a T .

Os quatro componentes são divididos em dois blocos:

- Um bloco prático-técnico $[T, \tau]$, designando o *saber-fazer* (do latim *praxis*), associação entre certo tipo de tarefa e uma determinada técnica.
- E um bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$, designando o saber (do latim *logos*), resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria.

A TAD não se restringe a praxeologia e essa praxeologia tem por culminância a análise da aprendizagem dentro de uma instituição. Para nós, nesse momento, interessa-nos olhar a praxeologia como modelo de organização das técnicas

utilizadas na resolução de um problema. Contudo, compreendemos que tal teoria se aprofunda em outros caminhos distintos do nosso objetivo pesquisa, desse modo não a utilizamos em nosso quadro teórico, mas inspiramo-nos na praxeologia para elaborar nossos instrumentos de análise.

A partir dos elementos da Praxeologia descrevemos as técnicas e tecnologias utilizadas na resolução gráfica e descritiva do ambiente em prancheta e da resolução gravada do ambiente com uso do computador. O bloco prático-técnico (tarefa e técnica) corresponde à operacionalização e o bloco tecnológico-teórico (tecnologia e teoria) corresponde à fase de concepção.

Os dados do primeiro instrumento, o TVZ, foram sistematizados em tabela, contendo o código do sujeito, o total de acertos no teste e a quantidade de acertos em cada tipo de questão (C3, C4 e C5), a fim de aprofundarmos a análise comparando as técnicas apresentados pelos sujeitos aos níveis de visualização espacial.

CAPÍTULO 4 – ANÁLISES

Neste capítulo apresentamos os resultados da pesquisa referentes ao levantamento e escolha do programa a ser utilizado em nosso experimento, bem como da situação problema e uma subseção com o desenvolvimento teórico do conteúdo escolhido.

4.1 ANÁLISE A PRIORI

4.1.1 Levantamento dos programas utilizados no Ensino da GGT

Para escolha da ferramenta computacional levantamos, inicialmente, alguns programas que são utilizados no ensino da Geometria Gráfica, tanto na universidade na qual o curso dos sujeitos está atrelado, como em outras universidades. Esse levantamento foi realizado por meio de pesquisas via internet e consultas a professores que lecionam tais disciplinas.

Dentre os programas levantados encontramos diferentes perfis, tanto programas desenvolvidos para fins educacionais, quanto desenvolvidos para uso em outras profissões, mas que são utilizados no ensino da Geometria. Nós os classificamos como programas educacionais e programas profissionais respectivamente. Salientamos que não estamos considerando programas educativos apenas aqueles que conduzem o usuário à formação do conhecimento, mas também, programas que necessitam do intermédio de um professor ou outra pessoa que assuma papel de instrutor.

No site da Associação dos Professores de Desenho e Geometria Descritiva⁶ (APROGED), com sede em Portugal, é apresentada uma lista de programas educacionais, dos quais pesquisamos as funcionalidades de alguns e suas características. Paralelamente relacionamos uma lista de programas profissionais utilizados no ensino da Geometria Gráfica, bem como suas características e funcionalidades (Quadro 1).

⁶ <<http://www.aproged.pt/mapadosite.html>>

| Categorias quanto ao objetivo | Programas |
|--------------------------------------|---|
| Educacional | AEIOU – GD ⁷ ; Archimedean; ArquiTutor; Cabri 3D ⁸ ; Cabri II Plus; GD@RV; Poly ⁹ ; Regua&compasso ¹⁰ ; Sketchpad ¹¹ |
| Profissional | 3D Studio Max; AutoCAD ¹² ; Blender ¹³ ; CorelDraw; Google SketchUp; Rhinoceros ¹⁴ |

Quadro 1 – Categorização dos programas quanto ao objetivo. Fonte: o autor.

Podemos caracterizar os programas quanto ao tipo de representação apresentado para o usuário (Quadro 2), quais sejam;

- *Apenas uma representação*: na tela principal do programa o usuário tem apenas a opção de visualizar um tipo de representação, seja bidimensional ou em perspectiva, porém não ao mesmo tempo, como por exemplo o aplicativo *CorelDraw*¹⁵.
- *Duas ou mais representações simultaneamente*: o programa apresenta mais de uma tela mostrando pontos de vista diferentes do mesmo objeto ou diferentes representações, como por exemplo, o aplicativo *3D Studio Max*¹⁶.

| Categorias quanto ao tipo de apresentação | Programas |
|--|---|
| Apenas uma representação | Archimedean; Cabri 3D; Cabri II Plus; GD@RV; Poly; Regua&compass; ketchpad; Blender; CorelDraw; Google SketchUp |
| Duas ou mais representações simultâneas | 3D Studio Max; AutoCAD; Rhinoceros |

Quadro 2 – Categorização dos programas ao tipo de apresentação. Fonte: o autor.

⁷ Copyright © 2001 MORGADO, José Francisco Monteiro.

⁸ Copyright © 2007 Cabrilog SAS

⁹ Copyright © Pedagoguery Software Inc.

¹⁰ Copyright © 2008 R. Grothmann

¹¹ Copyright © 2009 KCP Technologies

¹² Copyright © 1982 – 2006 Autodesk

¹³ Copyright © 2008 Blender Foundation

¹⁴ Copyright © 1993 – 2008 Robert McNeel & Associates

¹⁵ Copyright © 2008 Corel Corporation

¹⁶ Copyright © 2010 Autodesk, Inc.

Quanto ao tipo dos programas classificamos em:

- *Aplicativos de Geometria Dinâmica*: voltados para construções geométricas, de modo que se possa modificar a posição de elementos da construção sem alterar suas propriedades. Dos aplicativos pesquisados apenas os programas educacionais apresentam este objetivo, como por exemplo, o aplicativo *Cabri Géomètre II Plus*¹⁷.
- *Aplicativos de Modelagem Tridimensional*: utilizados para construções de maquetes virtuais, podendo apresentar um ou mais pontos de vista do objeto modelado simultaneamente e/ou não, como por exemplo o aplicativo *SketchUp*¹⁸.
- *Aplicativos Tutoriais*: tem caráter instrucional e não manipulativo, como uma apostila, onde o usuário pode navegar pelas seções do programa, ler textos e ver vídeos. A exemplo o aplicativo *ArquiTutor*¹⁹.
- *Aplicativos Simuladores*: de caráter experimental, onde o usuário pode simular determinadas propriedades geométricas em condições controladas pelo ambiente do programa, como por exemplo o aplicativo *Archimedean*²⁰.
- *Aplicativos de Realidade Virtual*: voltados para o uso da estereoscopia²¹, é utilizada com uso de óculos especiais dando ao usuário de estarem inseridos dentro do ambiente, como por exemplo o aplicativo *GD@RV*²²

Alguns programas apresentaram mais de uma característica, a exemplo do *GD@RV* que é um aplicativo de Realidade Virtual e Geometria Dinâmica (Quadro 3).

¹⁷ Copyright © 2001-2008 Cabrilog SAS

¹⁸ Copyright © Google Inc. 2008

¹⁹ O ArquiTutor é um software tutorial de Desenho Arquitetônico, desenvolvido durante o curso de especialização do Departamento de Expressão Gráfica da UFPE pela professora e arquiteta Gisele Calda de Araújo Cunha

²⁰ Copyright © 1998 Raffi J. Kasparian. Quantime Solutions

²¹ A estereoscopia é a simulação de duas imagens da cena que são projetadas nos olhos em pontos de observação ligeiramente diferentes, o cérebro funde as duas imagens, e nesse processo, obtém informações quanto à profundidade, distância, posição e tamanho dos objetos, gerando uma sensação de visão tridimensional.

²² Copyright © 2009 SEABRA, R. D.; SANTOS, E. T.; MENDES, R. M. Z.

| Categorias quanto ao tipo de programa | Programas |
|--|---|
| Geometria Dinâmica | AEIOU – GD; Cabri 3D; Cabri II Plus; GD@RV |
| Modelagem Tridimensional | 3D Studio Max; AutoCAD; Blender; Google SketchUp; Rhinoceros |
| Tutoriais | ArquiTutor |
| Simuladores | Archimedean; Poly |
| Realidade Virtual | GD@RV |

Quadro 3 – Categorização dos programas quanto ao tipo. Fonte: o autor.

Destacamos que os *softwares* utilizados no ensino da Geometria Gráfica não se restringem aos apresentados, nem tão pouco as classificações se limitam às citadas. Poderíamos mencionar programas educacionais voltados para aprendizagem colaborativa, a saber, o *Tabulæ*²³; porém, como nosso objetivo é observar como o aluno resolve um problema sem a influência de terceiros, deixamos tal tema para pesquisas futuras.

O levantamento dos programas nos encaminhou à escolha de um destes programas para ser utilizado em nosso estudo. Para tal, nos baseamos nas categorias apresentadas e apontamos um perfil de programa supostamente ideal para o ensino da Geometria Gráfica, a fim encontrarmos um, dentre os apresentados, com melhores potencialidades.

Acreditamos que quanto à apresentação do programa optamos por um que apresente uma representação tridimensional e que articule simultaneamente diferentes pontos de vista do mesmo ambiente. Assim, o aluno poderia realizar as analogias entre os diferentes tipos de representação e o que ocorre no espaço. Elencamos que nas representações tridimensionais é preferível que haja possibilidade de mudar a posição da câmera rotacionando-a em torno do objeto, já que alguns trazem a representação tridimensional estática. A Geometria Dinâmica traz elementos importantes para que o aluno possa testar suas construções e fazer novas inferências, principalmente em propriedades implícitas e que podem ser deduzidas das propriedades explícitas.

Destacamos que dentre os programas pesquisados não encontramos nenhum que articulasse as características citadas quanto às representações tridimensionais e a Geometria Dinâmica simultaneamente. Deste modo, optamos por um programa

²³ O *Tabulæ* é um programa de Geometria Dinâmica plana inteiramente desenvolvido na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

que trabalhe com mais de uma representação simultaneamente, eliminando os programas de geometria dinâmica.

Nesta direção, dos programas pesquisados três apresentam o perfil citado anteriormente, quais sejam, AutoCad, Rhinoceros e 3D Studio Max. Os três são programas profissionais. O primeiro é mais utilizado no Desenho Técnico, porém também utilizado na modelagem tridimensional e os dois últimos são diretamente voltados para modelagem. Os três possuem portabilidades entre si, entretanto, os dois primeiros possuem maior compatibilidade de comandos que o terceiro. Os três são utilizados no decorrer do curso de graduação dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Como os três programas apresentam características relativamente próximas, optamos pelo aplicativo que apresenta mais facilidade de acesso aos comandos, do ponto de vista do pesquisador. A partir do manuseio das três ferramentas, consideramos que o 3D Studio possui acesso às ferramentas a partir de muitos menus, não sendo tão dedutivo, visto que a apresentação de alguns comandos são por linguagem escrita e não gráfica, além da modelagem com precisão necessitar a inserção de dados analíticos ao invés da definição gráfica dos dados.

O AutoCad e o Rhinoceros, são ambos programas de precisão. Porém, o Rhinoceros, por ser próprio para modelagem apresenta algumas vantagens em relação ao AutoCad: mudança de uma vista para outra instantânea, não necessita de clique, ao contrário do AutoCad; possibilita ampliação em tela inteira e redução das vistas de modo mais prático; entre outros detalhes.

Por esses motivos selecionamos o Rhinoceros (Rhino) como ferramenta do nosso experimento. O Rhino é um programa de modelagem NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) utilizado cada vez mais por profissionais da área de design, arquitetura e engenharias, combinando a precisão das tradicionais tecnologias CAD e CAM (*Computer-aided Manufacturing*) com a flexibilidade da modelagem de curvas e superfícies, criando objetos de formas simples ou complexas. Também utilizado na elaboração de projetos em BIM. Ele traz em sua apresentação quatro vistas, sendo três em projeção cilíndrica ortogonal e uma em perspectiva (Figura 23).

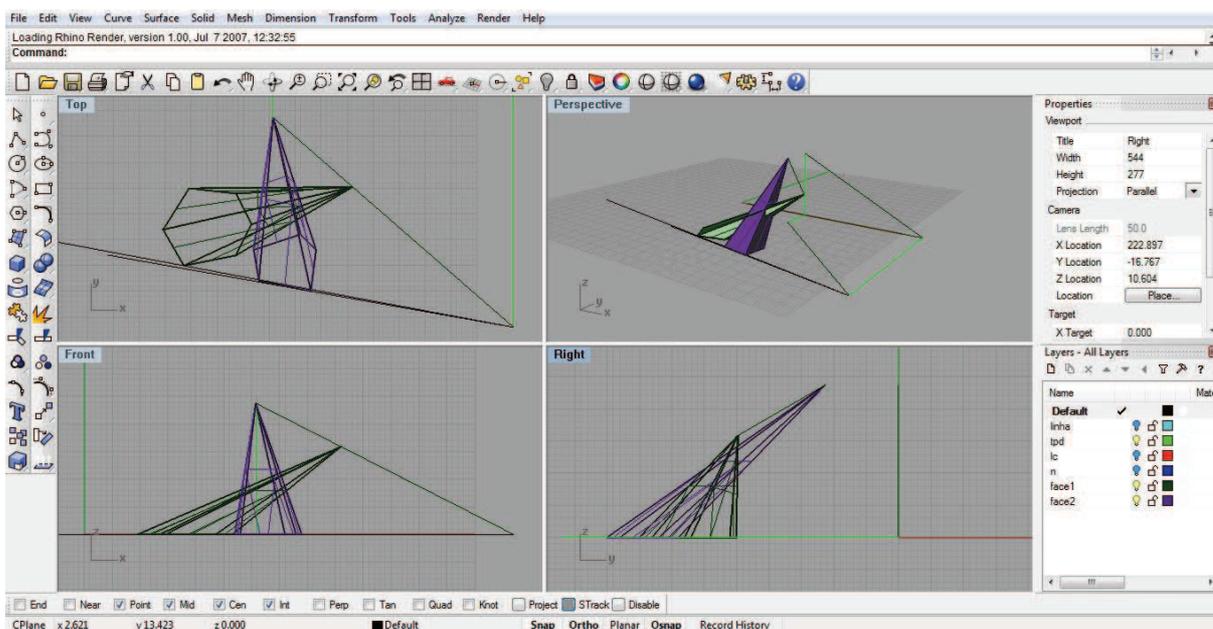


Figura 23: Aparência do Rhinoceros. Fonte: o autor.

O Rhino possui uma barra de ferramentas de inserção de objetos, sendo uma para modificar, uma de propriedades e outra de camadas, o que possibilita ativar e desativar objetos que estejam inseridos em alguma camada específica, além de comandos de Zoom e outras funcionalidades como SNAP, amarrando o ponteiro do cursor nos nós da malha, ORTHO, permitindo que linhas sejam construídas, ou objetos movidos, ou copiados em direções ortogonais em relação à tela do computador, ou seja, vertical e horizontal, e OSNAP, que permite o usuário selecionar pontos específicos do objeto, como vértices, pontos médios, centros, interseções, entre outros.

Após a escolha do programa nos detemos à escolha da situação problema baseado nas variáveis didáticas levantadas.

4.1.2 Levantamento dos Conceitos e Variáveis Didáticas para escolha da Situação Problema

Para definirmos nossa situação problema, partimos da escolha do conteúdo, este foi selecionado com base na ementa da disciplina Geometria Gráfica Tridimensional 1 (ANEXO 1).

Dentre os conteúdos trabalhados no ensino da GGT, optamos pela interseção entre planos. Tal conteúdo torna-se indispensável por envolver vários conceitos

utilizados ao longo da disciplina, assim como existem muitos problemas que podem ser generalizados em casos de interseção. Podemos destacar como conceitos trabalhados através da interseção de planos: pertinência, posição relativa entre retas no espaço (concorrentes e reversas), posição relativa entre reta e plano e entre planos (de cota constante, básica e qualquer), proporcionalidade (divisão de segmentos em partes iguais), inclinação, declividade, intervalo, lugar geométrico, propriedades de figuras planas, além das operações elementares da GGT (Mudança de Plano e Rebatimento).

Para definirmos as variáveis didáticas e seus valores precisamos compreender como ocorre a interseção tanto no espaço como em épura. Sabemos que a interseção entre dois planos se dá em uma linha reta. Imaginemos inicialmente dois planos α e β , tendo como interseção a reta r (Figura 24). Para defini-la, partimos do postulado euclidiano em que dois pontos distintos definem uma reta, deste modo, se encontramos dois pontos de r , a interseção está determinada.

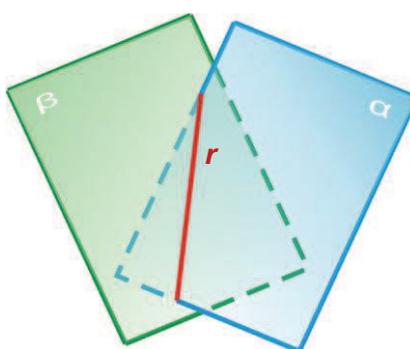


Figura 24- interseção entre os planos α e β . Fonte: o autor.

Para que a reta r seja a interseção entre os planos α e β , todos os pontos de r devem pertencer aos dois planos. Isso quer dizer, que é necessário encontrar dois pontos que pertençam a α e β simultaneamente.

Cortando α e β por meio de um terceiro plano (θ), obtemos o caso de um ponto (X) como interseção entre três planos e este ponto é determinado pelo encontro das retas de interseção entre os pares de planos. A Figura 25 ilustra o ponto X como interseção entre os planos α , β e θ , determinado pelo encontro das retas n , r e t , onde n é interseção entre β e θ e t é interseção entre α e θ .

Considerando θ como um plano paralelo a π_1 , todos os pontos e, conseqüentemente, todas as retas pertencentes a ele, têm a mesma cota. Isto implica que n e t , contidos em θ , são retas de cota constante (rcc), ou seja, X é determinado pelo encontro das rcc de mesma cota de dois planos. Analogamente,

cortando α e β por um feixe de planos intervalados e paralelos a π_1 , definimos as rcc dos dois planos que definem, em seus encontros, pontos da interseção (Figura 26).

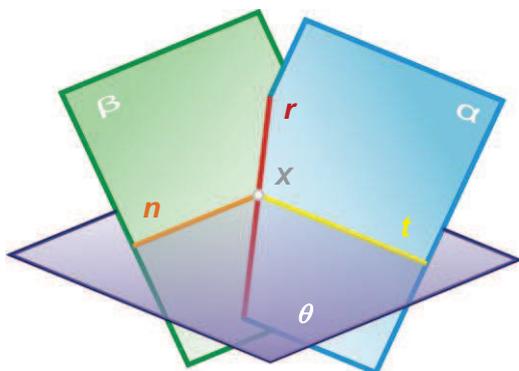


Figura 25 – Planos α e β cortados por um plano horizontal θ . Fonte: o autor.

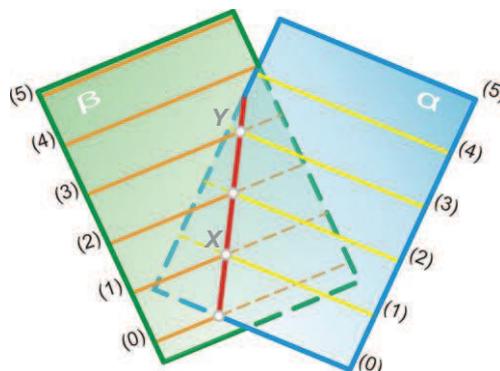


Figura 26 – Interseção entre os planos α e β determinada pelo encontro das rcc. Fonte: o autor.

Genericamente, a interseção entre planos se dá pelo encontro de retas pertencentes aos mesmos, sejam de cota constante ou não, mas que esses pontos de encontro pertençam aos dois planos. Deste modo, não importa quantos planos estejam envolvidos, pode-se decompor a situação em casos de interseção entre retas.

Em um problema de interseção podem estar envolvidos dois ou mais planos, e esses planos podem ocupar diferentes posições com relação a π_1 , podem estar representados de diferentes maneiras, gráficas e/ou por dados fornecidos no enunciado. O enunciado pode apresentar os dados do problema explícito e/ou implicitamente, além de possibilitar a restrição de caminhos de resolução.

O Quadro 4 nos mostra as variáveis didáticas levantadas e seus valores a fim de escolhermos um problema que se adéque aos dois ambientes sem muitas diferenças, no que se refere aos caminhos metodológicos de resolução.

| Variáveis | | Valores |
|--|--|--|
| Quanto aos dados do problema | Quantidade de Planos | Dois |
| | | Três |
| | | Mais de três |
| | Posição de cada plano em relação à π_1 | Cota constante |
| | | Básico |
| | | Qualquer |
| | Valores das medidas de cada cota | Inteiro |
| | | Decimal |
| | Determinação dos planos | Polígonos/curvas planas fechadas |
| | | Três pontos não colineares |
| | | Duas retas concorrentes |
| | | Uma reta e um ponto fora dela |
| | | Reta de máximo declive |
| | | Uma rcc e a inclinação/declividade/intervalo |
| | Representação dos planos | Uma Projeção cotada |
| | | Duas projeções |
| Modelo analógico tridimensional | | |
| Modelo Digital em perspectiva dinâmica | | |
| Analítica | | |
| Textual - na redação do enunciado | | |
| Quanto ao enunciado | Dados Explícitos | |
| | Dados Implícitos | |
| Quanto aos caminhos de resolução | Utilizando projeção secundária | |
| | Utilizando apenas projeção principal | |

Quadro 4 – Variáveis Didáticas de um problema de Interseção entre Planos. Fonte: o autor.

Sobre a quantidade de planos, inferimos que a utilização de apenas dois planos de projeção contempla as propriedades da interseção (determinar o lugar geométrico de todos os pontos que pertencem a dois planos distintos, ou seja, uma reta), porém não abrange a particularidade do caso utilizando três planos (um ponto como interseção de três planos distintos). No caso da utilização de mais de três planos, isto implicaria a repetição do mesmo procedimento dos casos anteriores. Vemos esse caso na aplicação do conteúdo interseção em cobertas, onde é necessário definir todas as faces (águas) do telhado a partir do seu contorno (beiral), dadas suas declividades. Pela experiência em sala de aula, percebemos que os alunos veem esta aplicação como outro assunto, visto que este apresenta particularidades. Deste modo, optamos pela interseção de *três planos* como valor da variável *quantidade de planos*.

Quanto à posição dos planos, tanto o plano *básico*, quanto o de *cota constante* apresentam particularidades que podem atrapalhar o aluno no processo de generalização. Como cada par de planos determina uma interseção, caso um dos planos seja básico ou de cota constante, isto acarreta duas interseções com planos

em situações particulares e uma genérica. Como nos interessa mais as generalizações, pois podem se aplicar em qualquer caso, optamos que todos os planos apresentem posição *qualquer*. Salientamos que situações particulares trazem novas contribuições no que diz respeito à elaboração de estratégias e construção do conhecimento, porém devem ser trabalhadas quando os conceitos gerais estão apropriados, diferente dos nossos sujeitos, pois foi o primeiro exercício de interseção de três planos realizados por eles.

Quanto ao valor das cotas, sabemos que os alunos apresentam maior dificuldade com valores decimais, mas esta dificuldade não está atrelada a visualização espacial ou ao método de monge, mas sim a problemas de concepção e representação de números decimais. Portanto, optamos por valores inteiros para a medida das cotas dos pontos, visto que nosso foco não é a dificuldade com números decimais.

Quanto à determinação do plano, inferimos que nesse momento de introdução ao conteúdo, deve ser o mais claro possível, ou mesmo, próximo à realidade, já que algumas delas requererem do aluno um maior nível de abstração do plano. Como exemplo, consideramos que é facilitador para o aluno visualizar o plano quando associado a uma face, diferente de quando este é determinado por uma reta de máximo declive. A Figura 27 mostra um exemplo de um mesmo plano definido por um polígono e por sua reta de máximo declive.

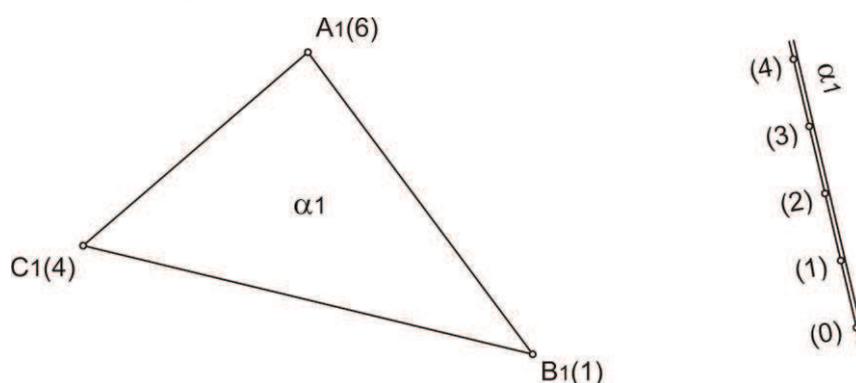


Figura 27 – A esquerda projeção do plano α determinado por um polígono, a direita projeção do plano α determinado pela sua reta de máximo declive. Fonte: o autor.

Outros tipos de determinação poderiam ser considerados também abstratos, a citar, uma reta de cota constante e a declividade. Não estamos aqui para analisar, a rigor, qual das maneiras facilita ou não a visualização, apenas inferimos a partir da nossa prática docente e experiências pessoais com o conteúdo, visto isto não ser o

foco de nossa pesquisa. Optamos, então, por questões que apresentam os três planos definidos por polígonos.

Para definirmos como os planos foram representados partimos da premissa que o aluno deveria partir do mesmo ponto nos dois ambientes, seja na prancheta, ou com uso do computador. Inicialmente inferimos sobre a representação ser textual, ou seja, descrito no enunciado, sem nenhum apoio de modelo analógico ou digital, desenho em épura ou perspectiva, pelo qual o aluno deduz a situação para reproduzi-la e responder o problema. Contudo, consideramos que o aluno mobiliza sua abstração espacial ainda mais sem auxílio dos modelos, pois parte apenas das próprias experiências para montar os modelos mentais. Descartamos essa possibilidade também, em virtude da imaturidade com o conteúdo por parte dos alunos, e analisamos então, as outras representações.

Duas representações poderiam ser trabalhadas concomitantemente nos dois ambientes: o modelo analógico na prancheta e o modelo digital com uso do computador. Todavia, o experimento na prancheta foi apresentado nos moldes tradicionais, que se utiliza apenas da representação em papel. Descartamos assim, esses valores para variável representação dos planos.

Definir a representação dos planos no papel pode interferir no modo como os alunos respondem o problema, pois uma determinada apresentação pode influenciá-lo a tender para essa ou aquela estratégia.

Basicamente temos duas maneiras de se resolver um problema de interseção de planos: utilizando projeções secundárias ou utilizando apenas a projeção principal. No primeiro caso (Figura 28), escolhemos um dos planos para ser projetado em vista básica (α , definido pelo triângulo PQR). Assim, podemos ver na projeção secundária (π_2) onde α corta o outro plano β (definido pelo triângulo STU), também projetado. Para tal, determinamos alguma *rcc* de α para indicar a direção em que o mesmo é projetado em vista básica e projetamos α e β em um plano secundário perpendicular a *rcc*. Definimos em π_2 as projeções dos pontos de interseção de β em α e projetamos de volta em π_1 .

O detalhe 1 da figura 30 ilustra os planos α e β definidos pelos triângulos PQR e STU respectivamente; o detalhe 2 a projeção de α em vista básica na direção de sua *rcc*; o 3 a projeção de β e determinação dos pontos da interseção (X e Y) na vista secundária; e o 4 a projeção dos pontos X e Y na vista principal, onde XY determina a reta de interseção entre α e β .

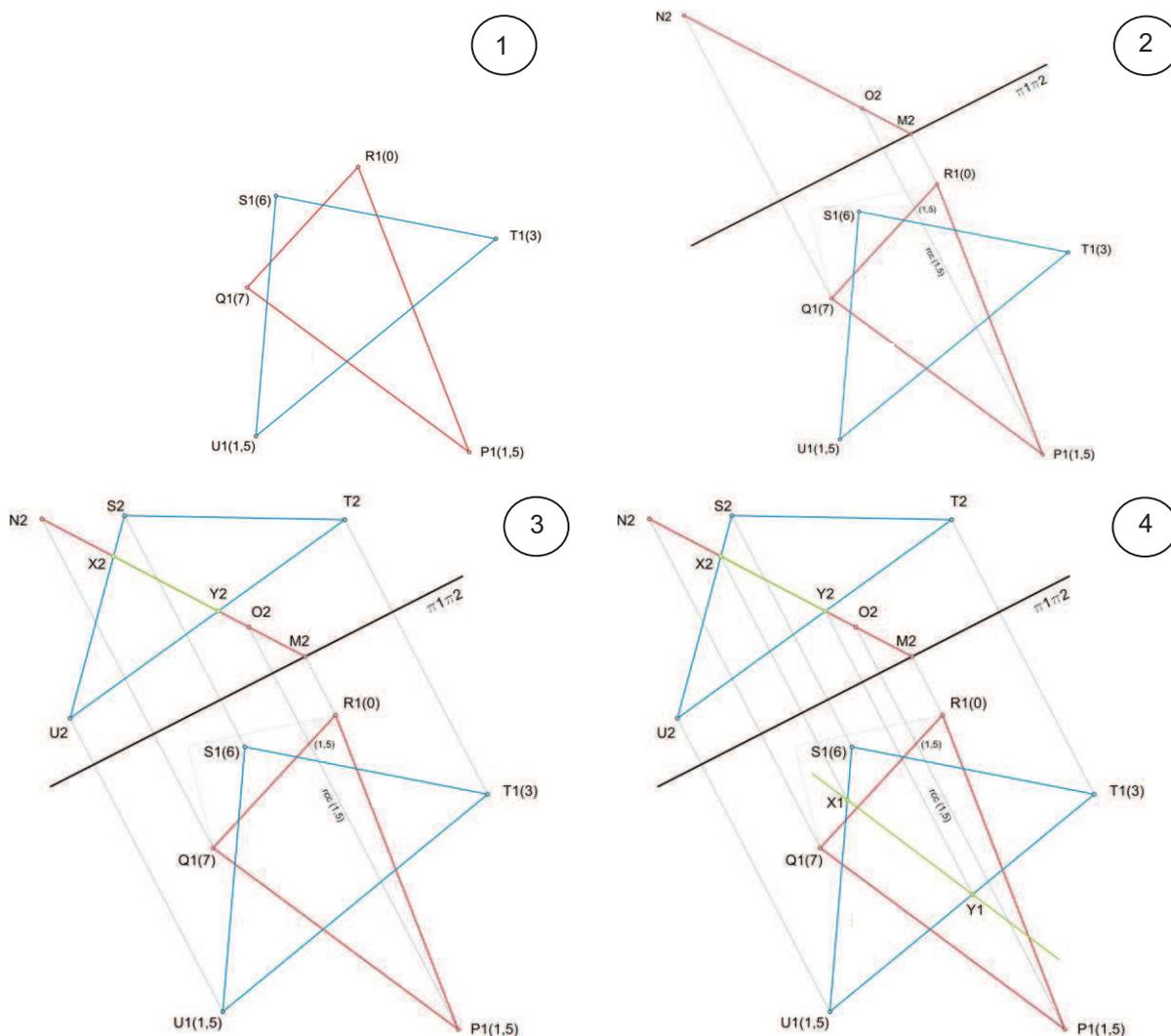


Figura 28 – Representação em Épura da interseção entre dois planos utilizando projeção secundária.
Fonte: o autor. (fonte 10)

No segundo caso, determinamos duas *rcc* de cada plano, e o encontro das retas de mesma cota de cada plano define os pontos da interseção (Figura 29).

O detalhe 1 ilustra o plano α e β definidos pelos triângulos PQR e STU respectivamente. O detalhe 2 a determinação das *rcc* de α . O 3 a determinação das *rcc* de β . O 4 a determinação dos pontos X e Y que definem a interseção dos planos dos planos α e β .

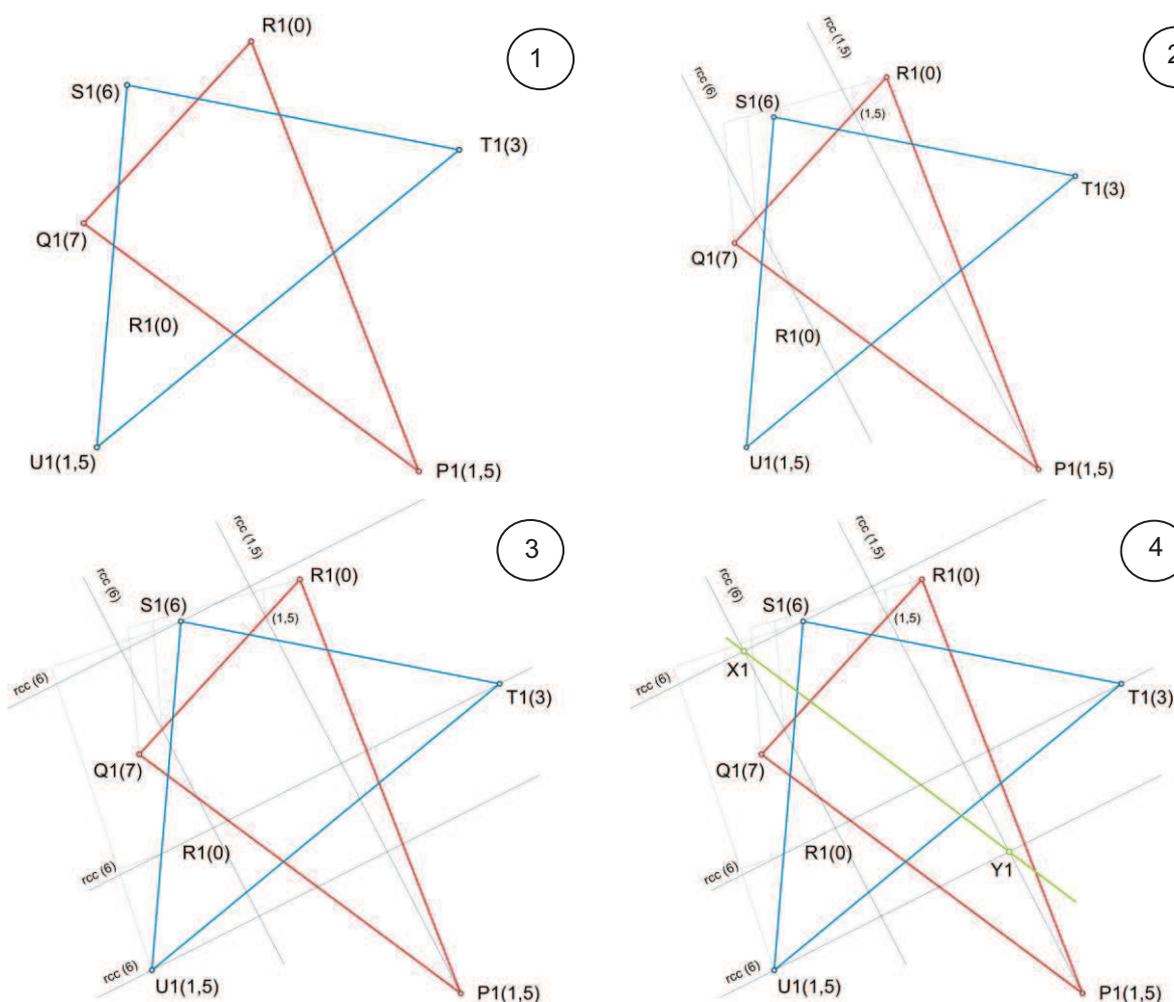


Figura 29 – Representação em Épura da interseção entre dois planos utilizando apenas projeção principal. Fonte: o autor.

Antes de definirmos o valor para essa variável verificamos a diferença entre os dois ambientes quanto ao procedimento de resolução. O Quadro 5 nos mostra algumas das características entre os ambientes.

| Características | Prancheta | Computador |
|--------------------------|------------------|--------------------|
| O que é fixo? | Objeto | Planos de projeção |
| Visualização 3D | Estática | Dinâmica |
| Precisão | Impreciso | Preciso |
| Visualização do conjunto | Uniforme | Por camadas |

Quadro 5 – Variáveis das ferramentas. Fonte: o autor.

Quando nos referimos ao que é fixo, estamos considerando dois elementos principais: o objeto e o(s) plano(s) de projeção, ou seja, no ambiente da prancheta o objeto é fixo no papel sob uma visualização estática e uniforme, pois vemos todos os objetos ao mesmo tempo. No ambiente computacional, os planos de projeção são configurados por cada uma das quatro vistas apresentadas. Neste caso, para

projetarmos uma face em vista básica, por exemplo, é necessário rotacioná-la até assumir a posição básica em relação à vista desejada. Deste modo, o objeto passa a ser móvel e os planos de projeções são fixos, diferente da situação anterior em que o aluno escolhe a posição dos planos de projeção conforme a necessidade.

Acreditamos que os processos mentais utilizando projeções secundárias são diferentes nos dois ambientes, pois mudam os referenciais do aluno. No intuito de uniformizar a possibilidade de caminhos de resolução do problema em questão, optamos pela resolução utilizando apenas a projeção principal. Apesar de existir diferenças no modo de visualizar entre os dois ambientes, não altera, *a priori*, nas possibilidades de resolver o problema.

Nesta direção, temos como hipótese que os alunos exploraram as características de modelagem tridimensional, visualização dinâmica (possibilidade de mudar o ponto de vista como uma câmera) e por camadas (possibilidade de deixar invisíveis os objetos que estejam contidos em determinada camada desativada) da ferramenta computacional, minimizando sua dificuldade quanto à visualização espacial.

Dentre os problemas analisados em Costa (1984) o 3.11.4 apresenta os valores indicados em nossa escolha. Acrescentamos apenas em seu enunciado a preposição de que a interseção entre os três planos deve ser resolvida utilizando apenas a projeção principal, limitando os alunos a responder apenas por um caminho.

O problema tem como enunciado: “As placas *ABC*, *DEF* e *GHIJ* são semitransparentes. Determinar a interseção dessas placas”, utilizando apenas projeção principal “e a visibilidade do conjunto” (*ibid*, p.60). A representação utilizada é conforme Figura 30. Todos os planos têm posição relativa à π_1 qualquer, os planos *ABC* e *DEF* são determinados por triângulos e *GHIJ* por um paralelogramo. *ABC* é um único que possui um dos lados de cota constante (*BC*) e a diferença entre cotas igual a uma unidade nos lados *AB* e *AC*.

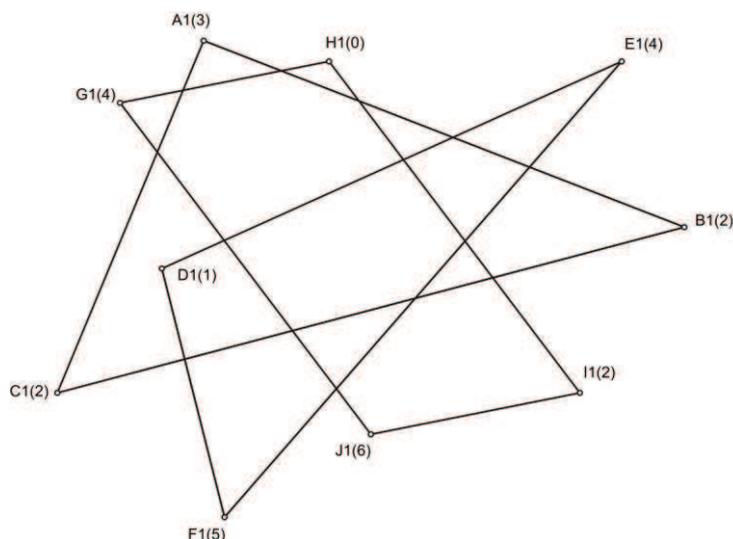


Figura 30 – representação dos planos da situação problema escolhida. Fonte: o autor.

O problema partirá da mesma representação para as duas mídias, conforme Apêndice B, para situação em prancheta e figura 33 para situação no computador.

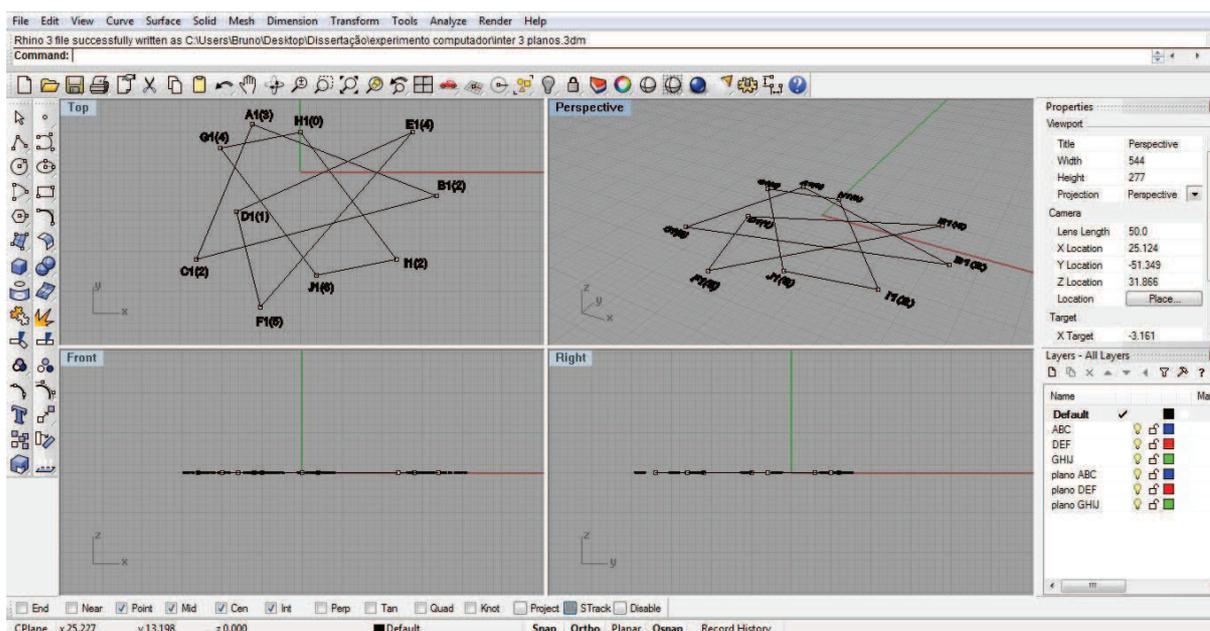


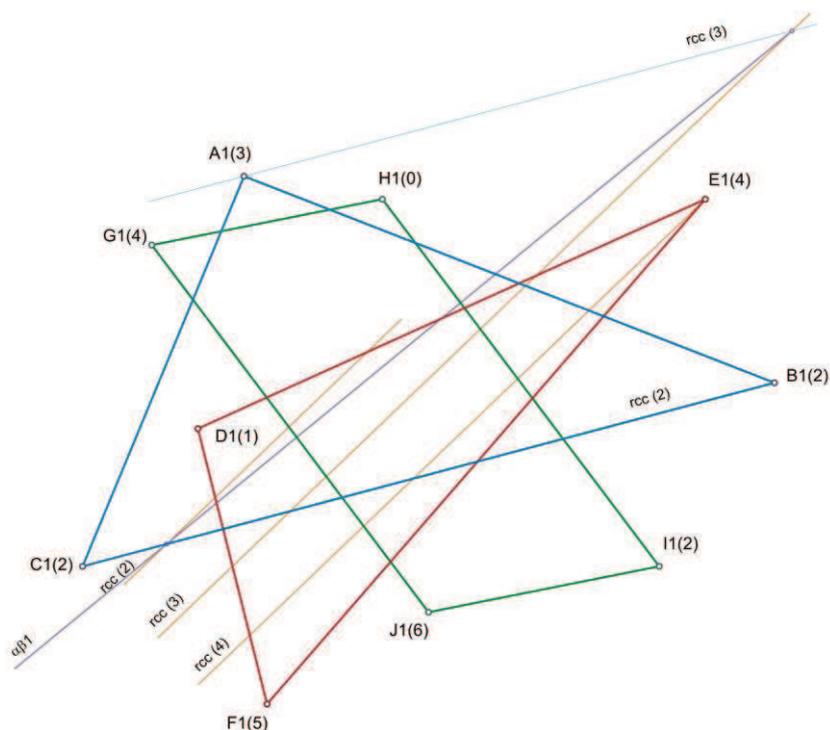
Figura 31 – Apresentação do problema no Rhino. Fonte: o autor.

Para resolver este problema o aluno deve determinar as *rcc* de cada plano, a fim de determinar, nos encontros das retas de mesma cota, pontos das interseções dos pares de planos. Para tal o aluno deve dividir os lados das faces em intervalos (utilizando o Teorema de Tales), ligar dois pontos de mesma cota do plano, repetir o processo ligando outros pontos de mesma cota ou passar retas paralelas por outro ponto do plano. Para a face *ABC* que já apresenta a *rcc* de cota dois, basta traçar uma paralela pelo ponto *A* determinando a *rcc* de cota três. No encontro das retas

de interseção dos pares de planos tem-se o ponto de interseção entre os três planos.

A Figura 32 ilustra a resolução do problema em é pura. O detalhe 1 ilustra a determinação da interseção de ABC (α) e DEF (β) pelo encontro de suas *rcc* de mesma cota; e o detalhe 2 a determinação das outras duas interseções ($\alpha\delta$ e $\beta\delta$) e da interseção dos três planos (X).

1



2

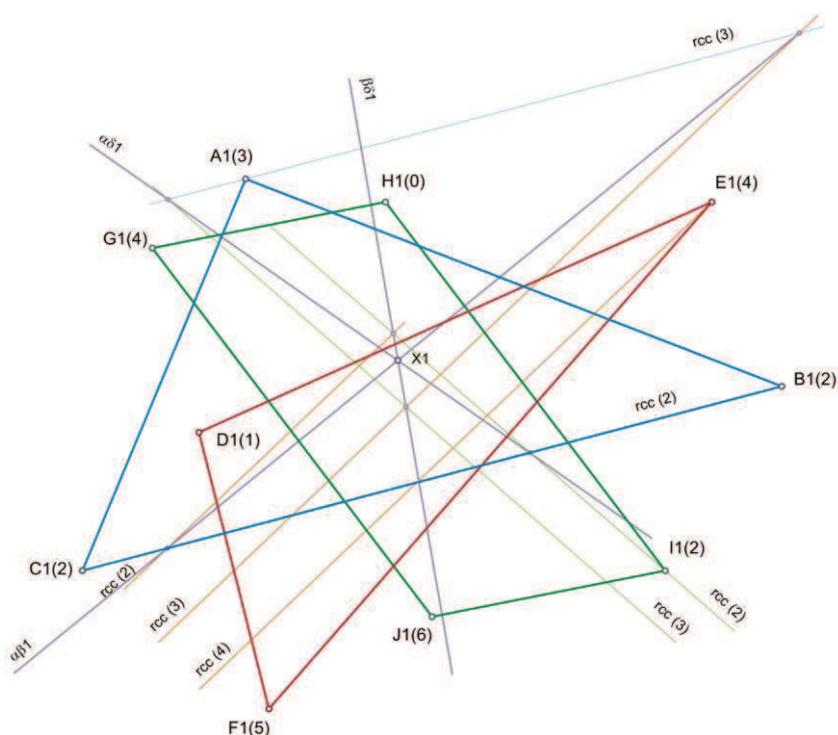


Figura 32 – Resolução em É pura da interseção entre três planos. Fonte: o autor.

A figura 33 ilustra o problema resolvido no Rhino.

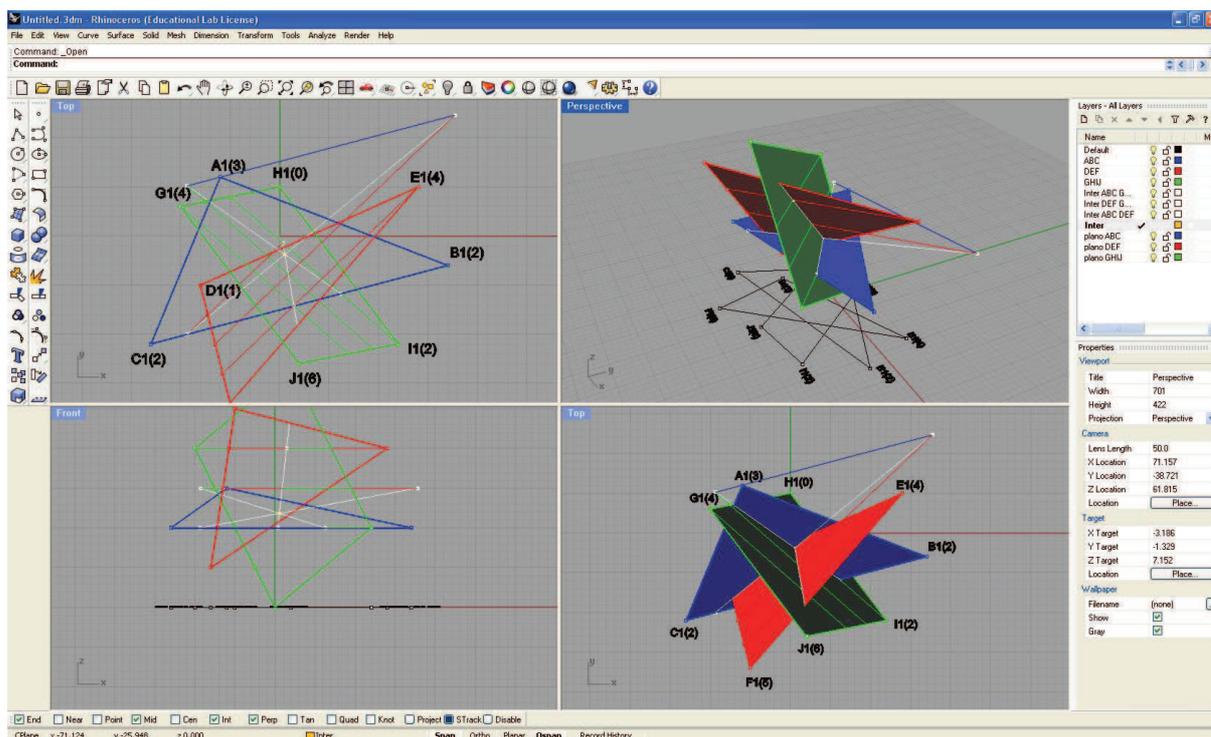


Figura 33 – Resolução do problema no Rhino. Fonte: o autor.

Como variação, presumimos que os alunos podem optar por diferentes cotas para determinar as *rcc*, porém nenhuma diferente das cotas um, dois, três, quatro, cinco e seis, respectivos aos valores das cotas dos vértices de cada face. O aluno não precisa encontrar as três interseções entre os pares de planos para determinar a interseção dos três planos, pois bastam duas. Mas, as três retas são necessárias para definição da visibilidade do conjunto.

A visibilidade do conjunto foi utilizada para identificar se o aluno concebe o problema. Na prancheta o aluno realiza a visibilidade após resolver o problema, já com uso do computador a visualização surge na modelagem do problema, antes de resolvê-lo, visto ser requerido que construa “tridimensionalmente”.

4.2 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DO PROBLEMA

Após a leitura fluente dos protocolos realizamos o levantamento dos comandos utilizados no ambiente com o *Rhino*. Posteriormente, analisamos as fases descritas por Barros e Santos (2000) e Polya (2006) na resolução do problema e as

técnicas utilizadas pelos sujeitos nos dois ambientes, com base no levantamento de técnicas utilizadas. Apresentamos a seguir os resultados da análise.

4.2.1 Comandos utilizados na resolução do problema com o *Rhino*

Dentre os comandos que o *Rhino* oferece, não foram apresentados aqueles que facilitariam a resolução do problema ao ponto do aluno não utilizar os conceitos geométricos trabalhados na disciplina, a citar, o comando *Object Intersection*, pelo qual se determina a interseção entre superfícies, seja uma linha poligonal ou curva, selecionando apenas as superfícies e confirmando o comando.

O levantamento dos comandos utilizados se faz tanto para familiaridade por parte do leitor ao serem citados nas outras análises, quanto ao estudo didático do uso de comandos na resolução de problemas utilizando o programa, focando quais devem ser bloqueados, ou disponibilizados para trabalhar determinados conceitos.

A seguir apresentamos os comandos utilizados na experimentação com uso do *Rhino*.

- Ferramentas de criação de objeto:
 - ✓ *Point* – cria pontos;
 - ✓ *Polyline* – cria segmentos de retas e linhas poligonais;
 - ✓ *Line from midpoint* – cria segmentos de retas a partir do seu ponto médio;
 - ✓ *Surface from 3 or 4 points* – cria superfície curvas ou planas a partir de três ou quatro pontos. Em nosso experimento foi utilizada apenas para criação de superfícies planas.
- Ferramentas de ação
 - ✓ *Move* – Move um ou mais objetos a partir de um ponto de referência. Salientamos que o usuário tem a possibilidade de mover o objeto simplesmente arrastando-o, porém sem referência, impossibilitando de coloca-lo em um ponto específico;
 - ✓ *Copy* – Copia um ou mais objetos a partir de um ponto de referência. Este comando foi utilizado também para simular o prolongamento de segmentos de reta;
 - ✓ *Rotate 2D* – Rotaciona um ou mais objetos a partir de um ponto de referência. O comando foi utilizando sempre nas vistas ortogonais;

- ✓ *Divide* – divide segmentos de retas ou linhas poligonais e partes iguais;
- ✓ *Fillet* cria um arco, com raio especificado, concordante a dois segmentos de reta. Este comando foi utilizado para encontrar a interseção de dois segmentos não concorrentes e, para isso, utiliza-se o raio igual a zero.
- Ferramentas de status:
 - ✓ *Snap* – permite com que o cursor do *mouse* se desloque apenas pelos nós da malha da tela;
 - ✓ *Ortho* – permite orientar a direção do cursor apenas em direções vertical e horizontal;
 - ✓ *Osnap* – permite indicar pontos específicos do objeto para facilitar seleção. Os pontos utilizados foram vértices (*end*), pontos médios (*midpoint*), pontos (*point*), interseção entre retas (*intersection*) e pé de perpendiculares (*perpendicular*).
- Ferramentas de manipulação de Tela:
 - ✓ *Pan* – muda o ponto de vista em um plano de referência, ou seja, move mais para cima ou para baixo, mas pra esquerda ou direita;
 - ✓ *Rotate View* – rotaciona o ponto de vista da tela. Diferente do Pan, este permite ter uma visão mais real do espaço, saindo do plano de referência, tendo por base um ponto de referência;
 - ✓ *Zoom Dynamic* – aproxima e afasta o ponto de vista da tela;
 - ✓ *Zoom Window* – aproxima o ponto de vista em torno de uma seleção retangular.
 - ✓ *Shade* – permite mostrar a visibilidade de superfícies com aparência transparente ou opaca.
- *Barra de propriedades (properties)* – permite modificar propriedades do objeto, como camada, cor, material do objeto (para renderizações²⁴). Basicamente foi utilizado para mudança de cor e de camada.
- *Barra de camadas (layers)* – permite criar e excluir camadas, mudar características como cor, bem como ativar e desativar (deixar invisível) camadas.

²⁴ Renderização é o processo pelo qual pode-se obter o produto final de um processamento digital qualquer. Este processo aplica-se essencialmente em programas de modelagem bidimensional

- *View* – janelas retangulares (quatro no total) dispostas na área de trabalho do programa, que mostram diferentes pontos de vista da mesma situação, com base em projeções cônicas ou cilíndricas ortogonais. São elas: *Top* – vista superior; *Front* – vista frontal; *Right* – vista lateral direita; e *Perspective* – vista em perspectiva cônica. As vistas anteriores são projeções ortogonais.

A seguir apresentamos as fases de resolução de problemas nos dois ambientes, enfatizando o ambiente com uso do computador, bem como alguns comandos que caracterizam as fases.

4.2.2 Fase de visualização

A fase de visualização ocorre em todo processo da atividade e, como afirma Polya (2006), a compreensão de um problema é muito incompleta no início, mas vai sendo incorporada à medida que as outras fases se seguem.

No experimento nos dois ambientes, a fase de visualização se torna mais definida no cumprimento da tarefa de determinar a visibilidade do conjunto. Porém, no ambiente em prancheta a visibilidade só pode ser definida após a determinação das três interseções, ou seja, ao final do problema, diferente do ambiente com uso do *Rhino*, onde o aluno tem a possibilidade de operacionalizar essa visualização logo no início.

Para compreender melhor demonstramos duas maneiras realizadas pelos alunos na prancheta para determinar a visibilidade do conjunto.

No primeiro caso (Figura 34), o sujeito S1 após determinar as interseções corretamente, produz a visibilidade entre cada par de planos, para depois visualizar os três planos simultaneamente. No segundo caso (Figura 35), o sujeito S2 resolve a visibilidade simultaneamente, apesar de não ter determinado corretamente a interseção, realiza a visibilidade com coerência.

e tridimensional, seja para obter uma imagem estática, seja para obter imagens realísticas em vídeo, também se aplica à programas de áudio e vídeo.

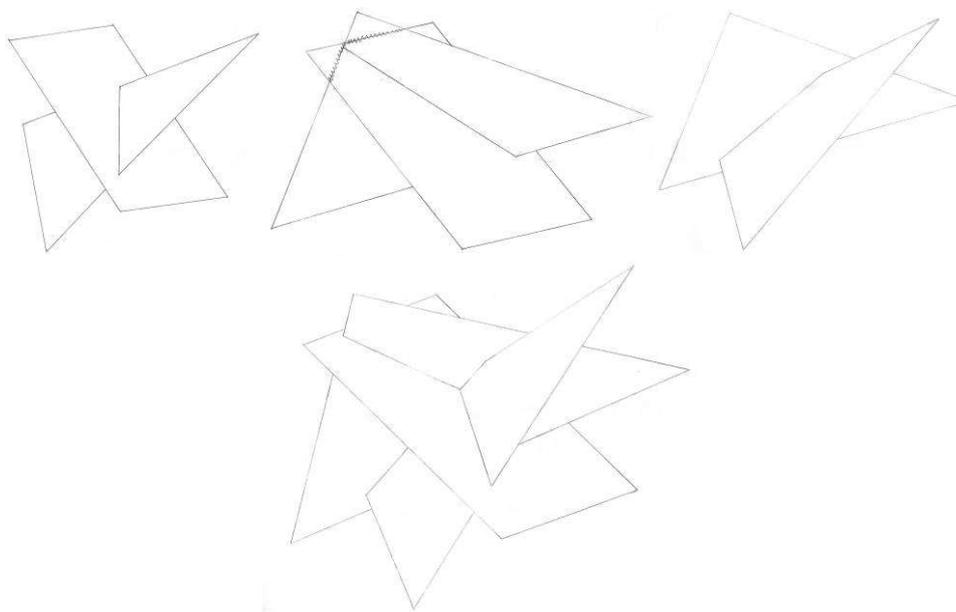


Figura 34 – Visibilidade determinada pelo sujeito S1. Fonte: o autor.

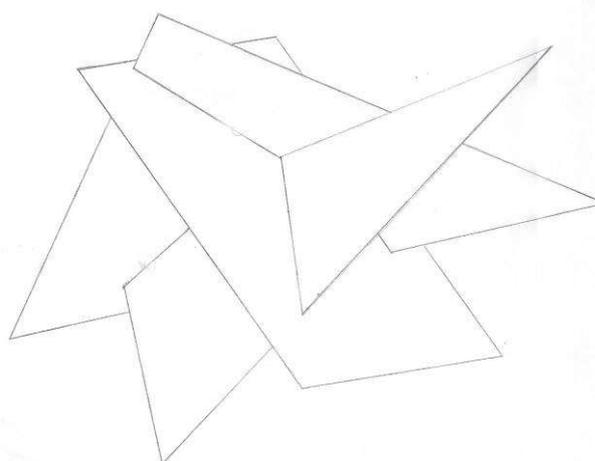


Figura 35 – Visibilidade determinada pelo sujeito S2. Fonte: o autor.

O que estamos considerando como coerente é a preocupação do aluno em colocar o trecho do plano que possui cotas mais altas por cima do outro plano que possui cotas mais baixas. A Figura 36 ilustra como determinar a visibilidade entre dois planos dado a interseção entre eles. Compreendamos que a reta de interseção $\beta\delta$ divide a parte do plano que está por cima da parte que está por baixo. Se todos os pontos do plano δ que se encontram a esquerda de $\beta\delta$ possuem cota maior que os pontos de β no mesmo lado, então toda a área do plano δ , a esquerda de s , estará encobrindo o mesmo lado no plano β . Conseqüentemente, a área de δ a direita de $\beta\delta$ é encoberta pela área de mesmo lado do outro plano. O segmento de

interseção entre os dois planos é definido pelo trecho da reta que está na área comum aos dois planos.

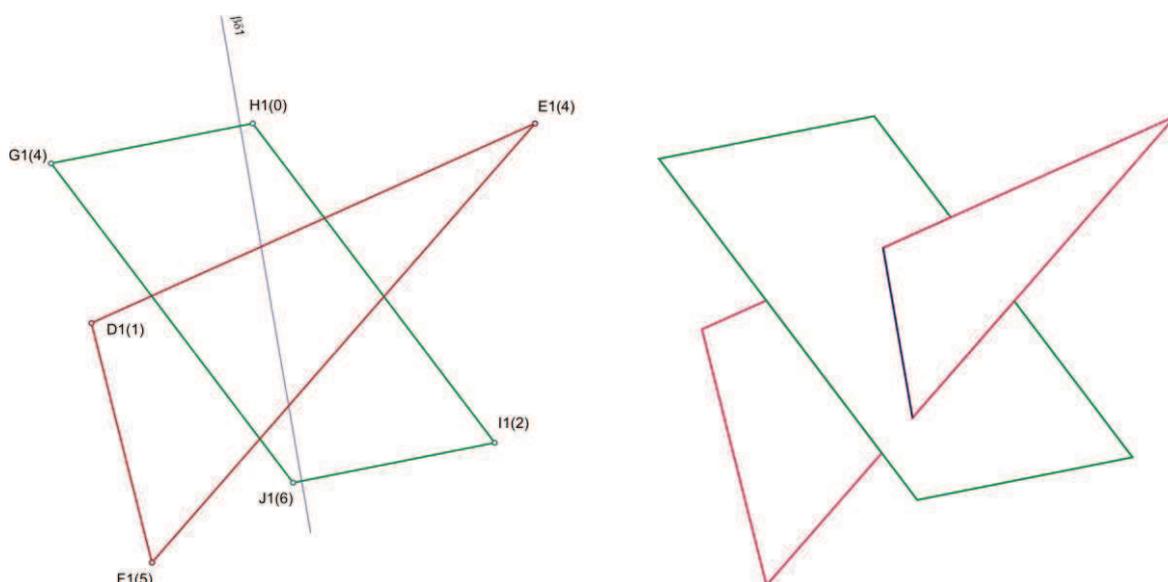


Figura 36 – determinação de visibilidade entre dois planos. Fonte: o autor.

A partir dos dados da entrevista referente às dificuldades apresentadas, categorizamos as respostas dos sujeitos em três categorias:

- Visualização Espacial – os valores apresentados pelos alunos foram: visualização e abstração;
- Epistemológica Conceitual – valores: método, procedimentos, traçados geométricos, geometria euclidiana, conteúdo, conceitos e raciocínio;
- Instrumental – valor: instrumento.

O Quadro 6 mostra os valores apresentados para cada sujeito nos dois ambientes. Podemos verificar que no experimento com uso do computador, praticamente os alunos não citam a dificuldade com relação à visualização espacial. Isso é justificado pelo fato dos sujeitos ao modelarem a visibilidade do conjunto em simulação tridimensional, transpõem a necessidade de realizar as imagens mentais, uma vez que está apresentada na tela tendo a possibilidade de olhar sob diferentes ângulos.

| Sujeitos | Dificuldades | |
|----------|----------------------------------|----------------------|
| | Prancheta | Computador |
| S1 | Abstração | Instrumento |
| S2 | Visualização e procedimentos | Instrumento e método |
| S3 | visualização, traçado geometria | Instrumento e método |
| S4 | geometria euclidiano | Conteúdo |
| S5 | abstração | Método e abstração |
| S6 | visualização, método | Conceitos e métodos |
| S7 | visualização, raciocínio, método | Método |
| S8 | abstração, raciocínio | Instrumento e método |

Quadro 6 – Dificuldades apresentadas pelos sujeitos na resolução do problema nos dois ambientes.
Fonte: o autor.

Não queremos dizer que o aluno ao modelar desenvolve a visualização espacial, pois não temos dados suficientes para assentirmos tal afirmação, visto não ser nosso objetivo. Porém, o aluno passa a visualizar, podendo guardar em sua mente as imagens e posteriormente fazer correlações e aplicar o que foi visto para então desenvolver essa habilidade. Desse modo, podemos inferir que na prancheta o aluno tem mais dificuldade em visualizar e essa visualização ocorre gradativamente com mais nitidez ao final após determinar a interseção e a visibilidade. No ambiente com uso do computador, o programa transpõe a dificuldade quanto a essa questão, ocorrendo, a fase de visualização simultaneamente à operacionalização.

A fase de concepção no computador é bastante ligada à operacional, bem como a fase de visualização. Quanto a esta fase, percebemos uma etapa na visualização que o aluno explora os comandos, se familiarizando com o ambiente, ao mesmo tempo em que perpassa pelas outras etapas da fase de visualização, cria suas hipóteses e estratégias. Chamamos essa etapa de *exploração*, que também ocorre no ambiente com prancheta, porém mais sutil, pois o processo é praticamente mental. Já no ambiente com uso do computador, o aluno pode “materializar” a partir das representações gráficas o que está em mente. Essa etapa é caracterizada pelo manuseio aleatório de comandos na busca de encontrar algum que indique caminhos de resolução ou encontre um comando até então desconhecido que execute a ação que está em mente.

Para melhor compreendermos esta fase adentraremos na discussão acerca das outras fases e ao final retomamos alguns pontos.

4.2.3 Fase de Concepção e Operacionalização

Após termos uma noção do material a ser analisado, optamos por iniciar o levantamento das técnicas utilizadas no experimento com o *Rhino*, pois além de ser o foco da pesquisa, apresentou maior riqueza de detalhes. Na situação problema utilizando a ferramenta computacional encontramos duas tarefas: modelar tridimensionalmente uma situação problema, dada representação em Épura ($T1$), correspondente à visibilidade do conjunto e determinar a interseção entre três planos ($T2$). Para melhor esclarecimento das técnicas dividimos as tarefas em subtarefas, assim podemos observar a variação de técnicas para uma mesma parte da tarefa. Subdividimo-las na seguinte disposição:

- Tarefa $T1$:
 - ✓ Subtarefa $T1.A$ – Posicionar pontos representados em π_1 no espaço;
 - ✓ Subtarefa $T1.B$ – Gerar visibilidade da interseção entre os planos.
 - ✓
- Tarefa $T2$:
 - ✓ Subtarefa $T2.C$ – Dividir segmentos em partes iguais;
 - ✓ Subtarefa $T2.D$ – Traçar as retas de cota constante (RCC) dos planos;
 - ✓ Subtarefa $T2.E$ – Traçar as interseções.

O Quadro 7 abaixo mostra as técnicas utilizadas pelos alunos, bem como os elementos tecnológicos e teóricos referente a cada técnica em $T1$.

| Tarefa T1- Modelar, tridimensionalmente, uma situação problema, dada representação em Épura | | |
|--|-------------------------------|----------------------------------|
| Subtarefa T1.A – Posicionar pontos representados em p_1 no espaço | | |
| Técnicas | Elementos Tecnológicos | Elementos Teóricos |
| τ_1 Marcou a medida das cotas com um segmento na vista TOP paralelo à vista FRONT em cada ponto e rotacionou para posição vertical. | θ_1 – Rotação | Θ_1 – Alçamento |
| τ_2 Gerar com SURFACE faces nas projeções dos planos em p_1 e rotacioná-las *Rotacionar os lados | | |
| τ_3 Selecionar o ponto em TOP, arrastá-lo em FRONT na altura de sua cota. *Com o comando MOVE, selecionar o ponto em TOP e movê-lo na altura de sua cota | θ_2 - Translação | Θ_2 - Projeção Secundária |

Subtarefa T1.B – Gerar visibilidade da interseção entre os planos

| | | | |
|----------|---|------------------------|---------------------------------------|
| τ_4 | Usar SURFACE para gerar faces e colocá-las em suas camadas | θ_3 - Polígonos | Θ_3 - Visibilidade do conjunto |
| τ_5 | Mover e rotacionar os lados em projeção para a direção do lado no espaço, e cria apenas cotorno do plano com LINE | θ_1, θ_2 | Θ_4 - Construção de polígonos |

Quadro 7: – Organização pontual de T1 em ambiente computacional. Fonte: o autor.

Não podemos comparar a realização de *T1* no computador com a tarefa de determinar a visibilidade do conjunto dos planos na prancheta, por se tratar de diferentes tarefas. Realizamos o levantamento das técnicas de *T1* para observarmos como o aluno monta a questão no computador, quais os diferentes caminhos apresentados para o cumprimento desta tarefa, pois o não cumprimento acarreta a impossibilidade de cumprir *T2*.

Das variações de técnicas, podemos resumir que os alunos ou tentaram levantar os pontos para a posição das suas cotas a partir da projeção principal, utilizando o comando COPY ou arrastando o ponto ou tentaram rotacionar as projeções das faces no intuito de colocá-las na posição no espaço, tendo como referência as cotas. Percebemos que os alunos que apresentaram esta última técnica ainda não se apropriaram do conceito de posição relativa entre plano, em que um plano qualquer não se projeta em verdadeira grandeza. Desse modo, não se pode rotacionar a projeção do plano considerando ela como sua verdadeira grandeza.

O sujeito S1 apresentou uma técnica diferente das demais (τ_1) colocando um segmento com a medida da cota no ponto em projeção principal e rotacionando-o para posição vertical. Apesar de não ser uma técnica prevista, foi eficaz para o cumprimento da tarefa.

A seguir, apresentamos no Quadro 8 as técnicas utilizadas para o cumprimento da *T2* no computador.

Tarefa T2 - Determinar a interseção entre 3 planos**Subtarefa T2.C – Dividir Segmentos em Partes Iguais**

| Técnicas | Elementos Tecnológicos | Elementos Teóricos |
|--|-------------------------------|---------------------------------|
| θ Criar segmento auxiliar em um ponto, marca pontos equidistantes no segmento | θ_4 - Teorema de Tales | Θ_5 - Intervalos de reta |
| τ_7 Usar DIVIDE para dividir segmento | θ_5 - Proporção | |
| τ_8 Divide o segmento em múltiplo de dois pelos pontos médios | | |

Subtarefa T2.D – Traçar Retas de Cota Constante (RCC) dos planos

| | | |
|--|---|---------------------------------------|
| τ_9 Ligar pontos de mesma cota de mesmo plano | 06 - Determinação de reta por dois pontos distintos | 06- Posição relativa de reta ao plano |
| τ_{10} Ligar pontos de mesma cota de planos diferentes | | |
| τ_{11} Ligar pontos de diferentes cotas de mesmo plano | | |
| τ_{12} Ligar os vértices com o ponto médio do lado oposto | | |

Subtarefa T2.E - Traçar as interseções

| | | |
|---|---|-----------------------------------|
| $\tau_{13.1}$ Prolongar (com COPY, ou LINE MIDPOINT) as rcc de mesma cota para concorrerem | 07 - Lugar Geométrico | 07- Interseção entre planos |
| $\tau_{13.2}$ Marcar pontos da inter entre dois planos | | |
| $\tau_{13.3}$ Traçar um reta nas inter das RCC de mesma cota | | |
| $\tau_{13.4}$ Marcar a concorrência das três interseções | | |
| τ_{14} Marcar as interseções dos planos pela visibilidade das faces | 08 - Reta como interseção entre dois planos | |
| τ_{15} Marcar as interseções das arestas com o plano pela visibilidade da vista básica | 09 - Projeção em vista básica | 08- Interseção entre reta e plano |
| τ_{16} Traçar a inter entre dois planos paralela a um dos lados de um dos planos | 010 - Paralelismo | 07 |
| τ_{17} Coloca dois planos em vista básica na e traça inter a partir da visibilidade | 09 | |

Quadro 8 – Organização pontual de T2 em ambiente computacional. Fonte: o autor.

A técnica τ_{13} foi subdividida em quatro partes porque alguns sujeitos utilizaram a técnica, mas não completamente, em virtude de não terem utilizado a técnica em todas as faces (α , β e δ). Como exemplo, o sujeito S5, que determinou as rcc de todos os planos, porém só encontrou a interseção de entre β e δ , faltando ao menos uma outra interseção para determinar o ponto comum aos três planos.

A partir do levantamento de técnicas montamos um esquema para visualizarmos a trajetória de cada sujeito no decorrer do problema. A Figura 37 ilustra a simbologia utilizada em nosso esquema.

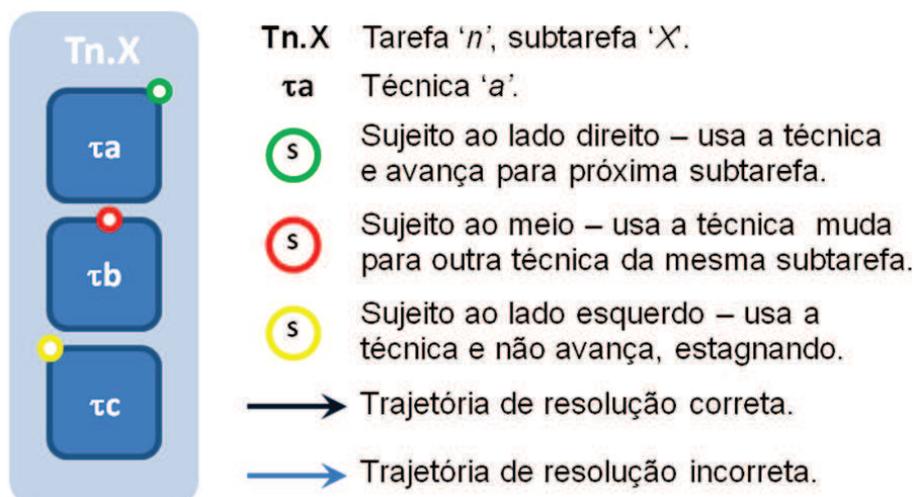


Figura 37 – Modelo diagrama de tarefas. Fonte: do autor.

A Figura 38 ilustra o esquema do caminho percorrido pelos sujeitos com relação às técnicas utilizadas em cada tarefa.

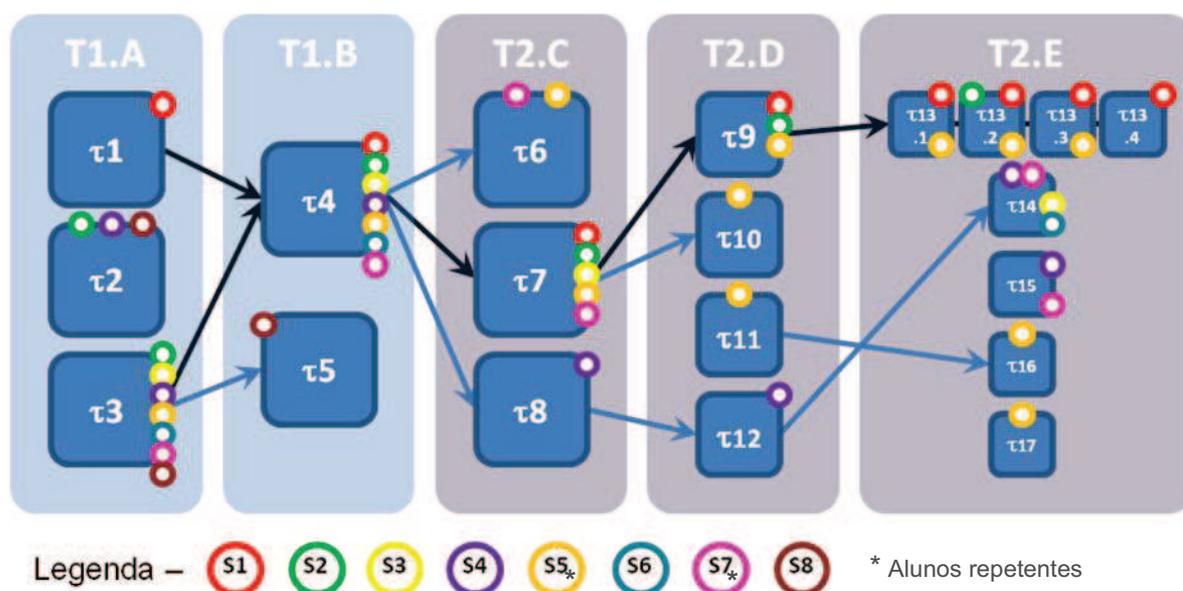


Figura 38 – Levantamentos das técnicas da situação problema com uso do computador. Fonte: o autor.

O sujeito S1 é o único que resolve a questão corretamente, enquanto o sujeito S5 apresenta o maior número de variações de técnicas. Ou seja, o fato de executar um maior número de técnicas não conduz necessariamente à resposta correta. O sujeito S2 não realiza a técnica $\tau_{13.1}$, referente ao prolongamento das retas de cota constante, apenas a $\tau_{13.2}$, que é marcar os pontos da interseção dos pares de planos no encontro das *rcc*. Para determinar alguns desses encontros é necessário prolongar as *rcc*, por esse motivo não avança.

Os sujeitos S3 e S7 pulam a subtarefa T2.D indo para da T2.C para T2.E, utilizando a técnica τ_{14} que não o conduz à resposta correta. S6, após cumprir T1 pula direto para subtarefa T2.E, utilizando também a técnica τ_{14} . Tal estratégia nos mostra como os alunos não estão apropriados dos conceitos envolvidos na interseção entre planos. Em nosso problema, o sucesso de sua execução se dá pelo cumprimento de todas as tarefas sucessivamente utilizando as técnicas apropriadas. O sujeito S4 cumpriu corretamente T1, perpassa por todas as subtarefas de T2, mas com técnicas não apropriadas para o cumprimento da tarefa, não respondendo o problema corretamente.

A partir do Gráfico 1 podemos observar quanto tempo os sujeitos demoraram em cada tarefa. Em sua maioria gastaram para cumprir a tarefa T1 mais da metade do tempo que gastaram para cumprir a tarefa T2. Apenas os S5 e S7 concluíram T1 em um tempo esperado, sendo este, menor que a metade gasto em T2. Consideramos que por serem repetentes, conseqüentemente já possuíam experiência com o programa, apresentando mais facilidade em montar a visibilidade. Podemos observar no Quadro 6, anteriormente apresentado, que nenhum dos dois sujeitos declarou ter dificuldade com uso da ferramenta computacional no experimento.

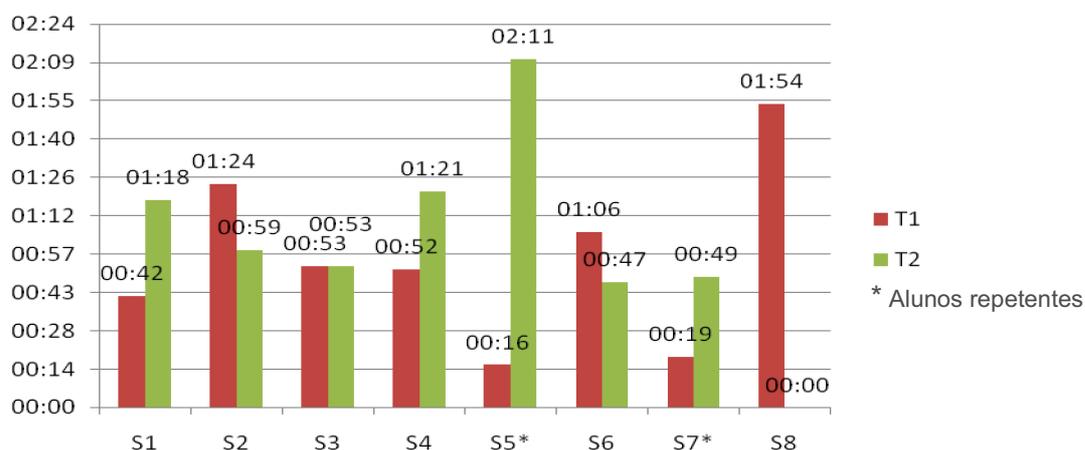


Gráfico 1 – Comparativo de tempo entre as tarefas T1 e T2 do ambiente computacional.
Fonte: o autor.

A seguir, apresentamos o levantamento das técnicas utilizadas no experimento em prancheta para inferirmos algumas comparações entre os dois ambientes (Quadro 9). Salientamos que não inserimos a tarefa de determinar a visibilidade, por ter sido tratada na subseção referente à fase de visualização.

| Tarefa T2 - Determinar a interseção entre 3 planos | | |
|--|--|-------------------------|
| Técnicas | Elementos Tecnológicos | Elementos Teóricos |
| τ_{18} Traçou uma linha de terra e fez projeção secundária | θ_9 ou θ_{10} - Verdadeira Grandeza | Θ_7 |
| Subtarefa T2.C – Dividir Segmentos em Partes Iguais | | |
| τ_6 | θ_4 | Θ_5 |
| τ_{19} Divide segmentos com uso de escala | θ_5 e θ_{11} - Operações fundamentais: Divisão | |
| Subtarefa T2.D – Traçar Retas de Cota Constante (RCC) dos planos | | |
| τ_9 | θ_6 | Θ_6 |
| τ_{10} | | |
| τ_{20} Traçar uma reta auxiliar em um dos vértices de um lado, ligando o ponto da cota desejado ao vértice do plano que possui mesma cota. | θ_4 e θ_6 | Θ_5 e Θ_6 |
| Subtarefa T2.E - Traçar as interseções | | |
| τ_{21} Traçar reta pelo ponto de um dos planos perpendicular a um segmento formado por dois vértices de mesma cota, sendo um de cada plano. | θ_{12} - Perpendicularidade | Θ_7 |
| $\tau_{13.2}$ | θ_7 | |
| $\tau_{13.3}$ | | |
| $\tau_{13.4}$ | | |

Quadro 9 – Organização pontual de T2 em ambiente com prancheta. Fonte: do autor.

Dentre as técnicas apresentadas, as τ_6 , τ_9 , τ_{10} e τ_{13} foram comum nos dois ambientes. A tarefa T1 e as técnicas τ_7 e $\tau_{13.1}$ são próprias do ambiente computacional. Montamos o esquema também para a tarefa T2 na prancheta, ilustrado pela Figura 39.

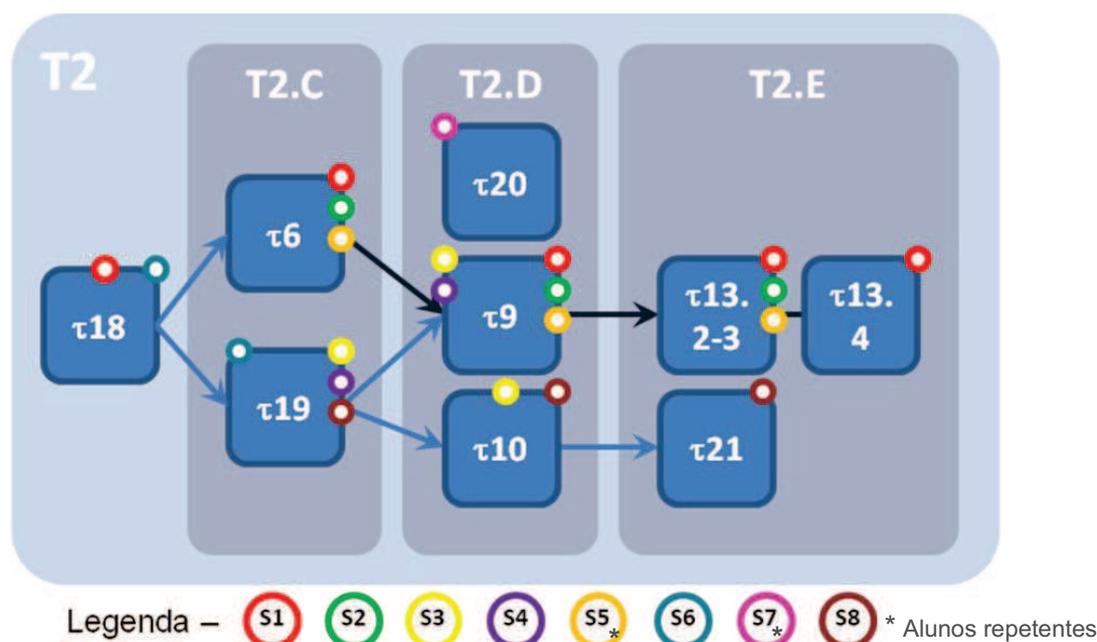


Figura 39 – Levantamento das técnicas utilizadas na situação problema em prancheta. Fonte: do autor.

Nesse caso, o sujeito S1 novamente é o único a resolver o problema corretamente. Os sujeitos S2 e S5 não completam a questão pelo mesmo motivo da resolução com uso do computador, a não determinação das interseções entre pelo menos mais um par de planos. Os sujeitos S3 e S4 cumprem a subtarefa T2.D, mas não avançam para a próxima subtarefa, T2. Ou seja, os alunos conseguem dividir os segmentos dos lados das faces em partes iguais, mas não ligam os pontos de mesma cota de um plano para determinar as *rcc*. Isso nos mostra que os alunos lembram, em parte, dos mecanismos utilizados para se determinar uma *rcc*, mas não compreenderam o porquê dessas construções.

A Figura 40 ilustra o comparativo de desempenho dos alunos nos dois ambientes. Destacamos que a figura apresentada marca até qual subtarefa cada sujeito cumpriu corretamente. Não consideramos as técnicas inapropriadas utilizadas nas subtarefas.

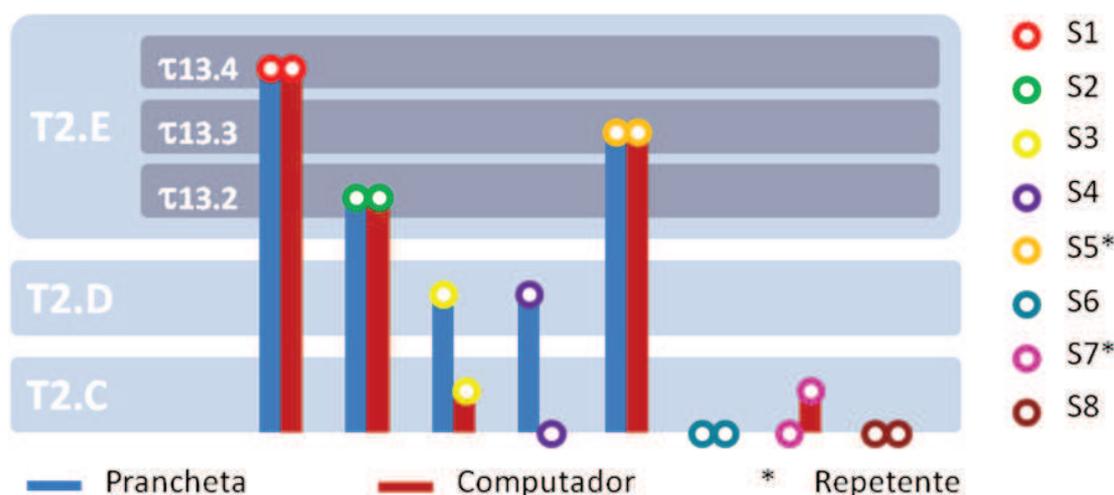


Figura 40 – Comparativo do cumprimento de subtarefas de T2 entre os dois ambientes. Fonte: do autor.

Como podemos perceber, cada sujeito praticamente não apresenta diferença significativa no cumprimento das subtarefas nos dois ambientes. Os sujeitos S3 e S4 apresentaram ainda um desempenho pior no ambiente computacional. Já o sujeito S7 foi o único que mostrou um pequeno avanço comparado com o ambiente em prancheta. Esperávamos que os alunos avançassem no cumprimento das tarefas no ambiente com uso do computador.

Comparamos ainda o tempo gasto em cada ambiente. O Gráfico 2 mostra como todos os sujeitos levaram mais tempo para responder, corretamente ou não, no ambiente com uso do computador do que na prancheta.

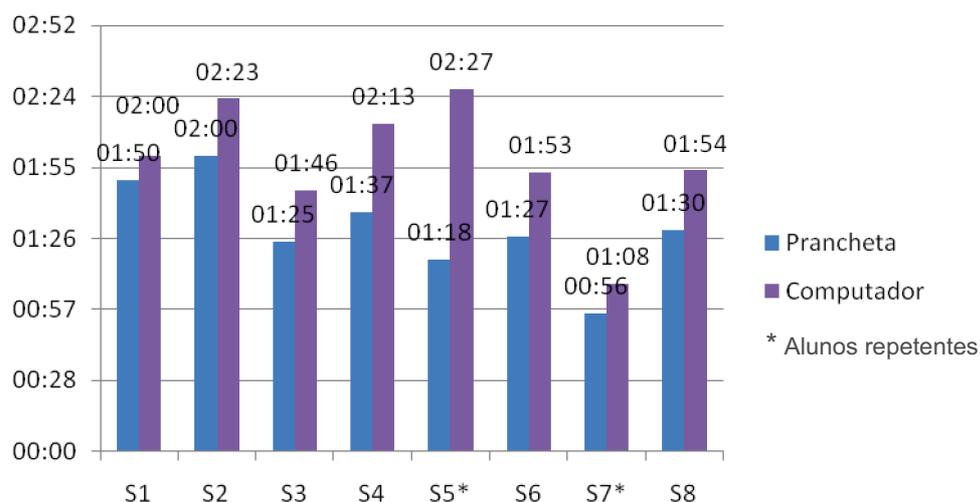


Gráfico 2 – Comparativo de tempo entre resolução em prancheta e computador. Fonte: do autor.

Não atrelamos tal fato isoladamente ao conhecimento da ferramenta pois o sujeito S5 que conhecia bem (o que?) demorou o dobro do tempo usado na prancheta para responder o problema com o *Rino*. Todavia sabemos que a prática em resolver problemas utilizando determinada mídia leva tempo para o aluno pensar no raciocínio de uso da ferramenta. Além disso, o ambiente computacional permite testar mais hipóteses que a prancheta e isso se traduz na quantidade de técnicas apresentadas pelos alunos com uso do *Rino* comparadas ao da prancheta.

Retomando a questão quanto as dificuldades apresentadas pelos alunos nos dois ambientes, comparamos as respostas dos alunos a partir da entrevista no Quadro 6.

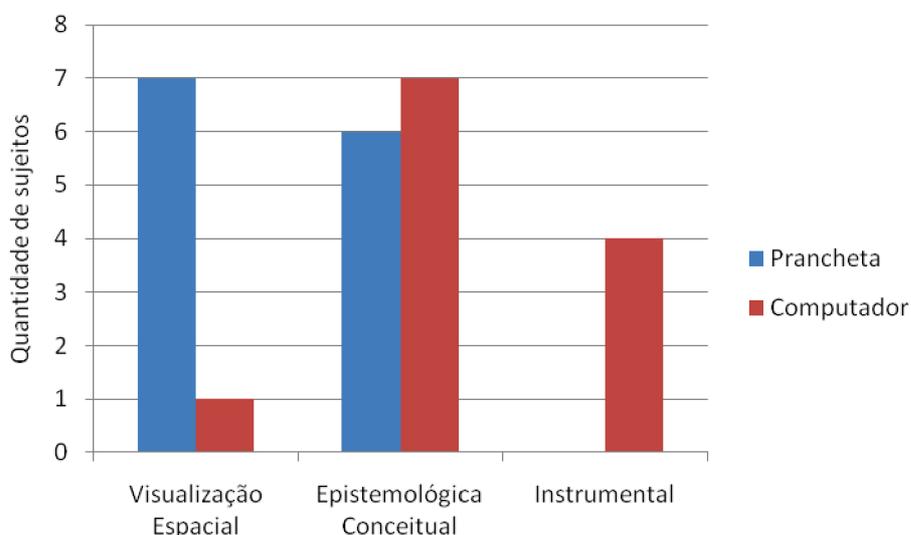


Gráfico 3 – Relação entre as categorias de dificuldades por sujeitos. Fonte: do autor.

Apesar do Gráfico 3 apontar um número equilibrado de problemas na questão epistemológica conceitual, houve divergência nos valores para a categoria nos dois ambientes. Na prancheta apenas três sujeitos se referiram ao método, enquanto que os demais citam construções de Geometria Plana e traçados. Já no computador, todos que declararam dificuldade com essa categoria utilizam o valor método, o que nos leva inferir que ao transpor a dificuldade de visualização, os alunos tomam consciência de outras dificuldades, antes encobertas por problemas antecedentes, como a visualização espacial. Por exemplo, apesar do sujeito S3 declarar que na prancheta não sentiu dificuldade com o método e raciocínio, apenas com construções de Geometria Euclidiana, ao pedir para explicar suas estratégias na entrevista percebemos a dificuldade com relação ao método. Já após o momento do computador, relata que teve dificuldade com o método.

Nesta direção, o déficit na visualização espacial se torna a primeira dificuldade encontrada pelo aluno. Transposta tal dificuldade, completamente ou parcialmente, o aluno se depara com outras dificuldades. Acreditamos que as dificuldades apontadas com relação ao instrumento podem sim interferir no raciocínio, pois o aluno precisa pensar em solucionar dentro de um contexto, que em nosso caso é o ambiente do *Rhino*.

Pelos resultados do teste TVZ podemos endossar as afirmações antepostas. O Gráfico 4 nos mostra a quantidade de questões que cada sujeito acertou no teste, além dos acertos em cada tipo de questões. Assim, podemos inferir qualitativamente sobre os dados.

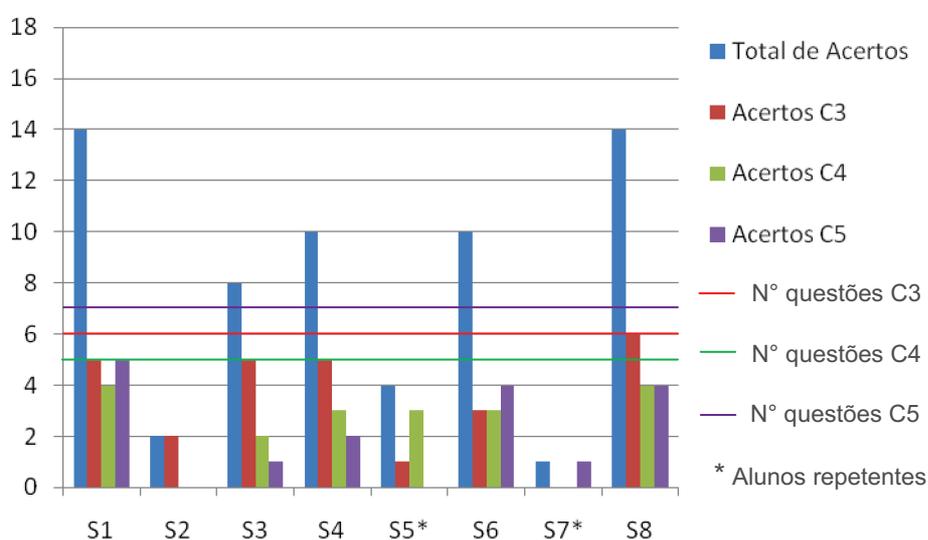


Gráfico 4 – Acertos no Teste TVZ. Fonte: do autor.

Apenas observando o resultado do teste poderíamos intuir que os sujeitos S1 e S8 teriam bom desempenho, visto que o total de acertos foi considerado bom, além da quantidade de acertos nos três tipos ser alto. Porém, ao voltarmos a Figura 40 e conferirmos os desempenhos na resolução do problema, constatamos que não condiz com o pressuposto. S1 completa a questão corretamente enquanto S8 completa até a subtarefa T2.D na prancheta, mas não chega nem sequer a completar a tarefa T1 no ambiente com uso do computador. Em entrevista, o sujeito S8 declara não ter se apropriado dos conceitos envolvidos na interseção entre planos, justificando, para nós, o mau desempenho.

Outro ponto que nos chama atenção é o fato do sujeito S5, que apresentou no teste um baixo nível de visualização espacial, chegou bem próximo do cumprimento de todas as tarefas. A resolução gráfica e descritiva da prancheta e a gravação no computador nos revelam que o aluno apresentou dificuldade em abstrair cada par de planos do conjunto, ou seja, as construções realizadas em conjunto, ao invés de separadamente, dificultaram na compreensão do que se estava fazendo; tal fato foi confirmado na entrevista. A maioria dos alunos colocaram as faces em camadas, utilizando a *barra de layers*, mas não utilizaram a função de desativar e ativar camadas, facilitando a visibilidade e abstração.

O mesmo pode ser afirmado para o sujeito S2, assim como o S5, apresentou dificuldade com a abstração não determinando as interseções com o plano α . Contudo, S2 apresentou dificuldade em determinar a *rcc* de cota três no plano α ; não só ele como os sujeitos S3 e S4. Tal fato ocorre em ambos os ambientes, o que nos apontam que os valores das variáveis didáticas do plano α influenciaram na determinação do problema. Isso se deve a um problema de generalização, pois os alunos estão acostumados em encontrar as *rcc* repetindo o mecanismo de dividir os segmentos em intervalos iguais e ligando os pontos de mesma cota. Os segmentos AB e AC de α têm projeções em π_1 com medida igual aos intervalos de suas respectivas retas e BC é *rcc* desse plano. Isso mostra que os alunos não observaram que o plano já apresentava os elementos necessários para determinar outra *rcc*.

Neste mesmo sentido, os alunos que apresentam baixo nível de visualização espacial resolveram grande parte do problema utilizando a vista *Top*, ou seja, como se estivesse utilizando o papel. O que nos leva a pensar que o aluno está reproduzindo mecanismos, mas não necessariamente visualizado. Memoriza um

procedimento para determinada situação e replica quando encontra uma situação semelhante, podendo não obter sucesso caso encontre o problema apresentado com outras variáveis. Caímos no mesmo problema de dificuldade nas generalizações apontada no parágrafo anterior. Para nós, esses alunos necessitam desenvolver a visualização espacial e de um trabalho de reconhecimento de generalizações nas diferentes variações didáticas de um problema.

Segundo Polya (2006), muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, correspondente a nossa fase de operacionalização, o aluno realizar um estudo de **verificar cada passo**. Ótimos raciocínios podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa. Esse estudo de verificar cada passo corresponde à nossa fase de Retrospecto.

4.2.4 Fase de Retrospecto

O Quadro 10 mostra em que momento ocorreu a fase de retrospecto nos dois ambientes. Na prancheta, apenas um sujeito (S1) realiza o retrospecto durante a operacionalização, três apenas ao final (S2, S4 e S6) e quatro não realizam (S3, S5, S7 e S8), conforme declaração em entrevista. No computador, a fase ocorreu durante a operacionalização para todos os sujeitos, caracterizada pela utilização do comando *Rotate View* na vista *Perspective* após cada construção. Essa verificação se tornava mais longa quando uma hipótese era testada pela primeira vez. Após a validação, o aluno replica a mesma técnica nos casos similares, sempre utilizando o *Rotate View Perspective* após cada procedimento; desta vez rapidamente.

| Sujeito | Retrospecto | |
|---------|-----------------------------|-----------------------------|
| | Prancheta | Computador |
| S1 | durante a operacionalização | durante a operacionalização |
| S2 | ao final | durante a operacionalização |
| S3 | não fez | durante a operacionalização |
| S4 | ao final | durante a operacionalização |
| S5 | não fez | durante a operacionalização |
| S6 | ao final | durante a operacionalização |
| S7 | não fez | durante a operacionalização |
| S8 | não fez | durante a operacionalização |

Quadro 10 – Comparação entre a fase de retrospecto nos dois ambientes. Fonte: do autor.

Como exemplo, citamos o sujeito S4 ao realizar a subtarefa T1. Ele utiliza a técnica τ_3 – mover as projeções dos vértices dos planos arrastando para posição referente a suas respectivas cotas – para o ponto B nas vistas *Front* e *Top*. Feito isto, usa o comando *Rotate View* na vista *Perspective* olhando em diferentes posições para se assegurar que está correto. Após concluir que está certo, replica a mesma técnica para os outros pontos, só que desta vez a verificação ocorre após todos os pontos levantados.

O comando *Rotate View Perspective* caracteriza a etapa de Exploração citada na fase de Visualização, que ocorre paralelamente à fase de Retrospecto. O aluno verifica uma técnica utilizada e, em seguida, explora o próximo passo ou a próxima hipótese. Em alguns momentos a maioria dos alunos coloca a vista *Perspective* na posição da vista *Top*. Acreditamos que o aluno por estar acostumado a ver em projeção principal (vista superior, no sistema mongeano) tenta colocar a vista na mesma posição por ser uma posição “familiar”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da análise das resoluções de problemas pudemos obter diferentes diagnósticos que refletem dificuldades apresentadas pelos alunos, seja de cunho epistemológico, cognitivo e/ou didático, podendo o professor interferir, através de sua prática docente na aprendizagem desse aluno, sanando o que realmente é preciso. Além disso, o uso da ferramenta computacional favoreceu a exploração das dificuldades apresentadas pelos alunos como a tomada de consciência dessas dificuldades.

Os alunos com uso do computador não apresentam dificuldade com relação a visualização do problema, apenas com abstração, já que o programa possibilita a modelagem de modelos similares aos modelos mentais que os alunos precisavam visualizar. Essa abstração também está ligada à habilidade de visualização espacial; contudo, os alunos não se apropriam das potencialidades da ferramenta para minimizar essas dificuldades.

Alves *et al* (2009) aponta como contribuições das ferramentas computacionais os seguintes itens:

- Após o domínio dos comandos e da aplicação da capacidade de abstração, o usuário realiza a modelagem com rapidez e eficiência;
- A peculiaridade existente nos aplicativos é que, após o modelamento do sólido, este poderá servir de parâmetro para outros modelamentos, reutilizando-o para fazer possíveis alterações;

Quando o sujeito conhece bem a ferramenta, a etapa de exploração acontece mais rapidamente. É o caso dos dois alunos repetentes que realizam a tarefa T1 mais rápido que os demais, visto estarem familiarizados não só com a ferramenta, mas também com a resolução de problemas com uso da mesma. Nas aulas extras para manuseio do programa não foram aplicadas aos problemas de GGT; foram restritas apenas à instrução dos comandos e suas funções, pois queríamos perceber como esses alunos criariam suas estratégias sem a influência de experiências anteriores. A aceitação dos alunos repetentes em nossa amostra nos deu a oportunidade de comparar a etapa de explorações em alunos com a experiência em resolver problemas de GGT com uso do computador e alunos sem experiência.

Verificamos que os alunos repetentes já estavam apropriados do instrumento, mas isso não foi o suficiente para responder o problema corretamente.

Os alunos em um primeiro contato com a ferramenta para resolver um problema, apesar das aulas extras, não foram capazes de explorar todas as potencialidades da ferramenta. É necessário tempo para que se apropriem, não só dos seus comandos, mas do pensar dentro da dinâmica do aplicativo, para então explorar a ferramenta.

O programa, por si só não desenvolve a visualização espacial do aluno. Ele ajuda o aluno a visualizar, mostrando situações que o aluno não consegue montar mentalmente, guardando na memória aquelas imagens para que, posteriormente em situações similares, o aluno possa trazer à mente aquela imagem sem necessidade de um modelo visível.

Um problema ainda presente é o fato de que os alunos reproduzem determinadas construções mecanicamente, em parte ou completamente. Quando é em parte, o professor tem a oportunidade de verificar as deficiências do aluno a partir dos erros; porém, quando o mecanismo é memorizado e replicado, não se tem como saber se o aluno realmente sabe. Em nosso caso, percebemos que o ato de replicar mecanismos ocorre independente do instrumento utilizado, seja uma mídia tradicional ou computacional. Por essa razão, ligamos tal fato a um problema epistemológico.

Podemos observar que no computador os alunos realizam a fase de retrospecto seguida de cada passo da operacionalização, bem caracterizado pelo comando *Rotate View*, correspondendo à manipulação virtual do objeto.

Sobre a fase de Retrospecto, ainda podemos dizer que o fato do aluno não evoluir comparando a execução do problema nos dois ambientes, como mostrado na Figura 40, implicaria na não relevância desta fase para um bom desempenho. Mas, verificamos que foi a partir dessa fase associada à etapa de exploração que surgiu uma maior variedade de técnicas, podendo o professor ajudar o aluno em cima do leque de conceitos apresentados e elaborar novas técnicas para chegar na resposta correta.

A realização do retrospecto sem um fundamento teórico dos conceitos envolvidos não é suficiente para um bom desempenho e esses conceitos só são internalizados com o tempo a partir de novas confrontações. Ou seja, um único

problema não é suficiente para que o aluno se aproprie de um conhecimento, mas sim um conjunto de experiências com que se depara ao longo do tempo.

Dependendo dos comandos fornecidos, isto pode ajudar ou dificultar a resolução da questão. Contudo, o problema se torna rico se essas dificuldades são transponíveis, ao invés de resultados óbvios ou “impossíveis” de se resolver. Cabe ao professor investigar o programa e verificar quais comandos podem estimular o aluno a mobilizar conhecimentos prévios para atuar em uma determinada tarefa e quais comandos conduzem o aluno a pular etapas no processo concepcional de um problema.

Em uma situação problema mais complexa – onde o aluno tenha que interpretar o enunciado e realizar algumas tarefas implícitas no enunciado para chegar a uma resposta – isto pode dificultar ainda mais para o aluno. Nesse ponto acreditamos que as barreiras com a visualização é maior e a modelagem tridimensional, seja ela analógica ou digital, pode contribuir para o aluno resolver o problema com sucesso.

Incentivamos que os professores utilizem várias maneiras de avaliar o discente quanto a um mesmo conceito em diferentes situações. Assim, poderá verificar que o aluno tem boa compreensão, já que um mesmo mecanismo não se aplica a todo problema de GGT da mesma maneira. Entenda-se que um mesmo instrumento de avaliação pode oferecer dados ao professor para realizar diferentes avaliações, seja instrumental (uso adequado dos instrumentos, precisão e apresentação do trabalho); geométrica (ligado ao raciocínio, abstração, visualização espacial e articulação dos conceitos) ou conceitual (propriedades dos conteúdos)

Sobre esse tema, o presente estudo nos leva a pensar sobre questões como avaliação discente, pela qual o professor pode a partir das dificuldades apontadas pelos alunos, elaborar um histórico do aluno mostrando sua evolução. Assim, professores de outras disciplinas conhecendo o seu perfil podem previamente elaborar estratégias de ensino, que possam vir a ajudar na superação ou minimização daquelas dificuldades.

A sugestão de variação da situação problema a ser utilizada em futuras pesquisas, seria alterar os valores de algumas variáveis no problema selecionado, a exemplo de colocar apenas o enunciado; dessa forma, o aluno teria que resolver o problema apenas com diferentes instrumentos sem o auxílio de nenhuma representação gráfica.

Outro ponto que chamamos atenção é quanto ao uso do comando *Rotate View Perspective* corresponder na manipulação virtual do objeto. Tal fato nos leva a questionar, apontando para futuras pesquisas, se o aluno seguiria os mesmo passos se estivesse com um modelo analógico em mãos, ou seja, quais seriam as diferenças no processo de resolução de um problema com um modelo analógico e um modelo virtual.

Apontamos ainda, a importância de pesquisas que explorem a utilização de outras mídias nas diferentes áreas da matemática, no intuito de construir o conhecimento junto ao discente e avaliá-lo mais próximo à realidade.

Por fim, consideramos que uma prática pedagógica sem base em pesquisas científicas pode nos mostrar resultados superficiais, que não expressam o que realmente está por trás de uma determinada metodologia e seus efeitos. Neste sentido, incentivamos ainda mais pesquisas sobre o uso de tecnologias que sejam realizadas com o intuito de explorar o seu uso, favorecendo não só uma prática docente mais elaborada, mas principalmente o aprendizado do aluno.

Pesquisas apontam que para compreender bem a Geometria Gráfica Tridimensional é necessário ter visualização espacial. Contudo, não devemos depositar nesta habilidade a responsabilidade pela compreensão dessa Geometria, mas sim o seu desenvolvimento atrelado à apropriação de conceitos geométricos. Não tiramos a importância da habilidade; ao contrário, consideramo-la essencial para formação dos conceitos e os modelos mentais.

Nessa direção, a análise da metodologia abordada pelo aluno para resolver um problema nos ajudará a identificar falhas no processo de concepção e a partir dessas falhas, o professor poderá elaborar novos mecanismos e estratégias para minimizar tais limitações, ajudando o aluno não só a desenvolver a visualização espacial, como também a se apropriar dos conceitos envolvidos na questão.

REFERÊNCIAS

ADÁNEZ, G. P.; VELASCO, A. D. Construção de um Teste de Visualização a partir da Psicologia Cognitiva. **Avaliação Psicológica**, v.1, n.1, p-39-47, 2002.

ALMEIDA, Iolanda Andrade Campos; MELO, Sandra de Souza; LOPES, Andiará Valentina de Freitas. Mapeando Dificuldades na Visualização Espacial dos Alunos de Engenharia da UFPE . In: **Anais Graphica 2009**, Bauru: UNESP. 2009. V.1.

ALVES, Maria da Conceição Amaral. **Geometria Descritiva**: um comparativo entre o uso dos instrumentos tradicionais de desenho e o computador. 2008, p.148. Dissertação (Mestrado em Desenho, Cultura e Interatividade). Universidade Estadual de Feira de Santana. Feira de Santana, 2008.

ALVES, Maria da Conceição Amaral; COSTA, Ivoneide de França; CARDOSO, Christina Araújo Paim. A Tecnologia Computacional no Ensino da Geometria Descritiva. In: **Anais do Graphica 2009 - 19º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**, Bauru, 2009.

ASTOLFI, Jean Pierre. **El error, un medio para enseñar**. Sevilla: Díada, 1999.

BALACHEFF, N; KAPUT, James. **Ambientes de Aprendizagem Matemática com Base no Computador**. IMAG. Grenoble, France and University of Massachusetts, U.S.A.,1996.

BARDIN, J. **L'Ére logique**. Paris: Robert Laffont, 1977.

BARROS, Leliane Nunes de; SANTOS, Eduardo Toledo. Um Estudo sobre a Modelagem do Domínio de Geometria Descritiva para a Construção de um Sistema Tutor Inteligente. **XI Simpósio Brasileiro de Informática Educativa – SBIE 2000**, Maceió, p. 259-266, 2000.

BELHOSTE, B.; TATON, R. L'invention d'une langue des figures. In: DHOMBRES, J. (dir.), **L'École Normale de l'an III. Leçons de Mathématiques**, Paris, Dunod, 1992, pp.269-317.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. Edgard Blucher LTDA, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da Matemática. In: BRUN, Jean. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. P. 35-113.

CARVALHO, Gisele Lopes de. **Ambientes cognitivos para projeção**: um estudo relacional entre as mídias tradicional e digital na concepção do projeto arquitetônico. 2004. Tese (Doutorado em Desenvolvimento Urbano) – Universidade Federal de Pernambuco, CAC, Desenvolvimento Urbano, Recife, 2004.

CASTELLI, L.; CORAZZINI, L. L.; GEMINIANI, G. C. Spatial Navigation in Large-Scale Virtual Environments: Gender Differences in Survey Tasks. **Computers in Human Behavior**, v.24, p.1643-1667, 2008.

CEEB Special Aptitude Test in Spatial Relations (MCT). Developed by the College Entrance Examination Board, USA, 1939.

CHEVALLARD, Y L' analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19.n.2, p.221-265, 1999.

CHOI, J. Sex Differences in Spatial Abilities in Humans: Two Levels of Explanation. In: VOKEY, J. R.; ALLEN, S. W. **Psychological Sketches**, Department of Psychology and Neuroscience, University of Lethbridge, 5ª ed., 2001.

COSTA, Mario Duarte, COSTA, Alcy P. de A. V. **Geometria gráfica tridimensional: Sistemas de Representação**. V1. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 1996.

_____. **Geometria gráfica tridimensional: Ponto, reta e plano**. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, v.2, 1984.

DEMO, Pedro. **Desafios Modernos da Educação**. 3ª. edição. Petrópolis: Editora Vozes Ltda, 1995.

DIAS, Mônica Souto da Silva. **A Importância do Desenho na construção dos conceitos geométricos**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998

DUVAL, Raymond. **Semiosis et pensée humaine**: Registres semiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Perter Lang. 1995.

ELIOT, J. About Spatial Intelligence: I. **Perceptual and Motor Skills**, v.94, p.479-486, 2002.

FERREIRA, Bruno Leite. Geometria Descritiva aplicada ao software de Modelagem. In: **SIPEMAT** – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2. Recife: UFRPE, 2008.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. In: **Educational Studies in Mathematics**, 24/2, 139-162, 1993.

GÁLVEZ, Grecia. A Didática da Matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). Didática da Matemática: Reflexões Psicológicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 2, p. 26-35.

GANI, Danusa Chini. **As lições de Gaspard Monge e o ensino subsequente da Geometria Descritiva**. 2004 Dissertação (Mestrado em História da Ciência e das Técnicas e Epistemologia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GREGIO, Bernadete Maria Andrezza. Seqüência didática: a integração da tecnologia no ensino de geometria no ensino fundamental. In: SIPEMAT – **Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2., 2008, Recife: UFRPE. 2008.

GUIMARÃES, Humberto Silva; *et al.* A Utilização do Cabri Géomètre II no Ensino de Geometria Descritiva. In: **Anais do Graphica 2009** - 19º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, Baurú, 2009.

LIBLIK, Maria Petraitis; PINHEIRO, Marta. Sobre a contribuição do ensino do desenho geométrico nas artes e na matemática: a importância da integração curricular. In: **Anais da 48ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência** (CD Rom). PUC-SP, 1996.

MALARD, Maria Lúcia; *et al.* **Princípios Teóricos da Estereoscopia**. Belo Horizonte, 2008. Disponível em <<http://www.arq.ufmg.br/eva/aivits/Princ%EDpios%20Te%F3ricos%20da%20Estereoscopia.pdf>>.

MONTENEGRO, G. **Habilidades Espaciais**: exercícios para o despertar de idéias. Santa Maria: sCHDs, 2003.

PIAGET, Jean. **Aprendizagem e Conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1979.

PERES, Gilmer J. & ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Avaliando o ensino das construções geométricas para a construção do conhecimento de geometria. In: **REUNIÃO ANUAL DA SBPC**, 53, 2001, Salvador. Anais “Nação e diversidade, patrimônio do futuro”. (CD-ROM), Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2001.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**:. (Trad. Heitor Lisboa de Araújo). Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RAFI, A. *et al.* Improving Spatial Ability Using a Web-based Virtual Environment (WbVE). **Automation in Construction**, v.14, p.707-715, 2005.

RAMOS, André. **Fisiologia da Visão: um estudo sobre o “ver” e o “enxergar”**. Rio de Janeiro, 2006. Disponível em <<http://www.users.rdc.puc-rio.br/imago/site/semiotica/producao/ramos-final.pdf>>.

REGO, R. M. **Arquitetura e Tecnologias Computacionais: Novos Instrumentos Mediadores e as Possibilidades de Mudança no Processo Projetual**. 2000. 173 f. Dissertação (Mestrado em Arquitetura e Urbanismo) - Faculdade de Arquitetura, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, 2000.

RODRIGUES, Maria Helena Wyllie Lacerda. Expressão Gráfica e Novos Meios Educativos: conjugando recursos para desenvolver o “pensamento geométrico”. In: **Revista Escola de Minas**, 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0370-44672001000100011>, acessado em 06 de outubro de 2008.

RODRIGUES, Maria Helena Wyllie Lacerda; DELMAS, Anita de Sá e Benivides. Três variações sobre um mesmo problema de geometria descritiva. In: **Anais do Graphica 2009 - 19º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**, Baurú, 2009.

SEABRA, Rodrigo Duarte. **Uma Ferramenta em Realidade Virtual para o Desenvolvimento da Habilidade de Visualização Espacial**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia de Construção Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

SEABRA, Rodrigo Duarte; SANTOS, Eduardo Toledo. Proposta de desenvolvimento da habilidade de visualização espacial através de sistemas estereoscópicos. In: **EGRAFIA - 4º Congresso Nacional e 1º Encuentro Internacional de Profesores e Investigadores del Área de Expresión Gráfica**, 2004, Rosario. Anais do 4º EGRAFIA. Rosario : Universidad Nacional de Rosario, 2004. v. 1.

_____. **Mensuração e Análise da Aptidão Espacial de Estudantes em um Curso de Geometria Gráfica para Engenharia: uma Abordagem Computacional Interativa do Mental Rotation Test**. GRAF&TEC, n.22, p.1-10, 2007.

SORBY, S. A. Developing 3-D Spatial Visualization Skills. **Engineering Design Graphics Journal**, v.63, n.2, p.21-32, 1999.

_____. A. Assessing and Improving Spatial Visualization Skills of Engineering Students: International Collaborations and Studies. In: **Proceedings of the IV International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design**, São Paulo, Brazil, pp. 1285-1313, 2001.

SORBY, S. A.; DRUMMER, T.; MOLZON, R. Experiences in Using Spatial Skills Testing Instruments with Younger Audiences. **Journal for Geometry and Graphics**, v.10, n.2, 2006.

TORBERT, W. **Aprendendo pela experiência**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

TRIVINOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em Educação**. São Paulo: Atlas, 1987. p.158-166.

TSUTSUMI, E. Descriptive Geometry Education at the Department of Clothing and Textiles, Otsuma Women's University. **Journal for Geometry and Graphics**, v.1, n.1, p.83-89, 1997.

VANDENBERG, S. G.; KUSE, A. R. Mental Rotations, a Group Test of Three-Dimensional Spatial Visualization. **Perceptual and Motors Skills**, v.47, p.599-604, 1978.

VALENTE, Vânia Cristina Pires Nogueira. **Desenvolvimento de um Ambiente Computacional Interativo e Adaptativo para apoiar o Aprendizado de Geometria Descritiva**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia de Construção Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

WANG, H.; CHANG, C.; LI, T. The Comparative Efficacy of 2D-Versus 3D-Based Media Design for Influencing Spatial Visualization Skills. **Computers in Human Behavior**, n.23, p.1943-1957, 2007.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Geometria e Desenho Geométrico, por quê e para quê? In: **Congresso Nacional de Educação**, 2, 1997, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. O Desenho Geométrico como disciplina escolar no Brasil. In: **Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, 4, 2000, Rio Claro. Anais... Rio Claro, UNESP, 2000. p. 276-282.

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Analisei a possibilidade participar de um atividade, envolvendo o uso de ferramenta computacional e instrumentos de desenho, além da execução de um teste de visualização espacial, a ser realizada na disciplina de Geometria Gráfica Tridimensional 1 do Curso de graduação em Licenciatura em Expressão Gráfica da Universidade Federal de Pernambuco, no semestre corrente.

Fui informado pelos responsáveis da atividade que, sob nenhuma hipótese, os participantes desse estudo terão seus nomes citados em qualquer meio de divulgação desta pesquisa. Os pesquisadores responsáveis garantem o sigilo quanto às informações coletadas que me identifique, assim como o uso de tais dados apenas em publicações e eventos de natureza científica.

Estou ciente de que minha participação é inteiramente voluntária e gratuita. Não sofrerei nenhuma espécie de prejuízo ou punição se, mesmo depois de iniciado o teste, resolver interromper a atividade. A realização da atividade ocorrerá no horário normal das aulas e no reservado à monitoria da disciplina e não atrapalhará o desempenho das atividades em sala de aula.

Estou de acordo em participar da pesquisa e, pela presente, consinto voluntariamente em participar da mesma.

Recife, ____ de _____ de 2010.

| Nome do participante (letra de forma) | CPF | Telefone | E-mail | Assinatura |
|--|-----|----------|--------|------------|
| As assinaturas dos sujeitos foi encobertas para preservar o sigilo de suas identidades | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Assinatura do pesquisador responsável: Bruno Leite Ferraz

Agradeço antecipadamente sua colaboração e me coloco à disposição para o esclarecimento de eventuais dúvidas, através do telefone (81) 9928-1395 e pelo E-mail: bruno_if@hotmail.com

APÊNDICE B – Problema Proposto na Prancheta

APÊNDICE C – Ficha para Resolução Descritiva

Dados do Sujeito

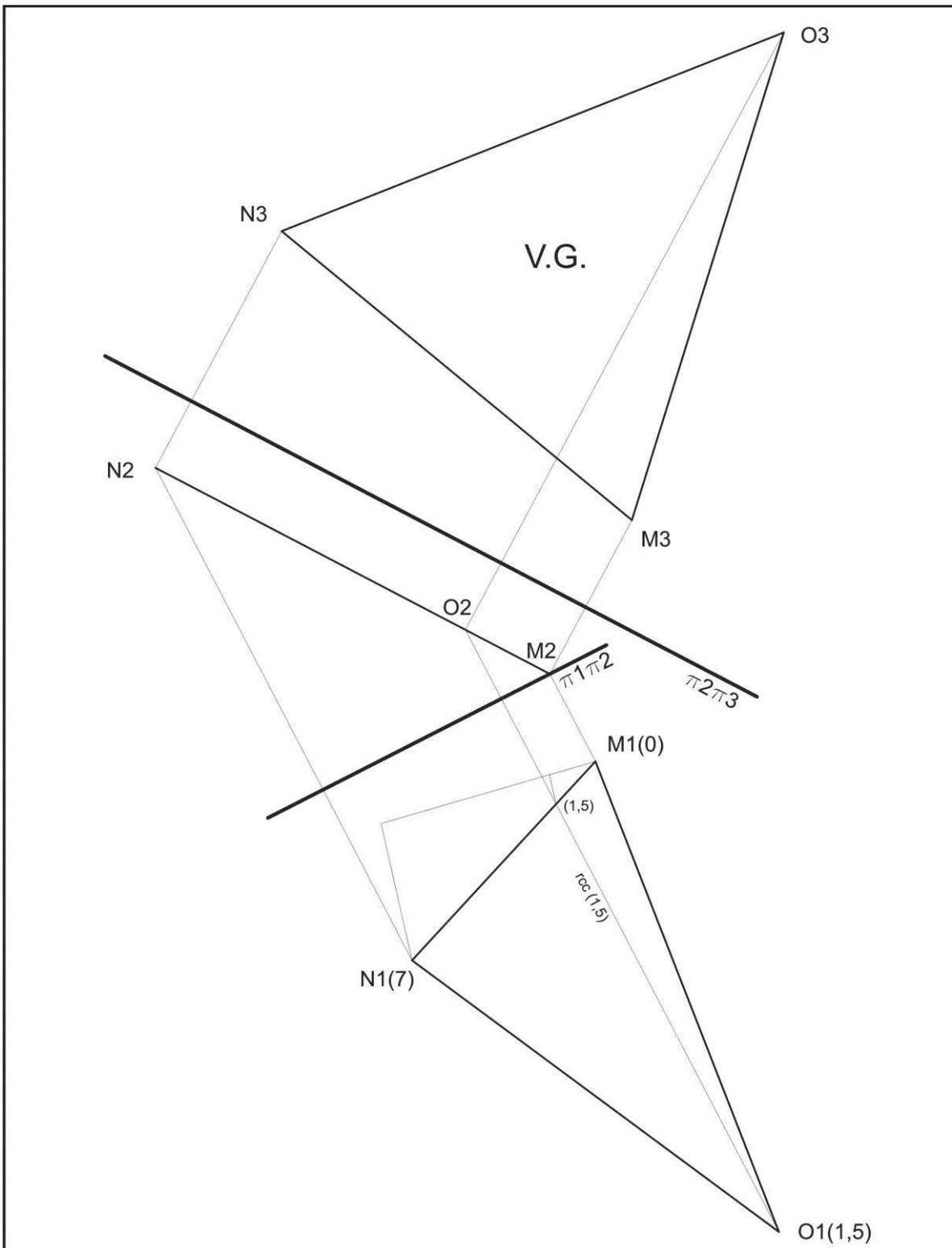
Nome:

Horário de Início:

Hipóteses

Justificativa

APÊNDICE D – Modelo de Resolução Gráfica



Determinar a Verdadeira Grandeza do plano definido pelo triângulo MNO.

| | | |
|------------------------------|------------------------------------|--------|
| UFPE | Licenciatura em Expressão Gráfica | |
| | Geometria Gráfica Tridimensional 1 | |
| Assunto: Verdadeira Grandeza | | |
| Aluno: Pseudo Sujeito | | |
| Data: 07/04/2010 | Escala: 1/100 | Visto: |

APÊNDICE E – Modelo de Resolução Descritiva**Dados do Sujeito**Nome: *Pseudo Sujeito*

Horário de Início: 14:20

Hipóteses

14: 30 – *Para achar a V.G. é necessário passar um plano secundário paralelo a um dos lados do triângulo.*

15:00 – *Lembrei-me que é necessário fazer uma mudança de plano, visto a face ser oblíqua ao plano principal e não aparecer a V.G. diretamente na projeção secundária. Para realizar uma mudança de plano é necessário projetar a face em vista básica em um plano secundário, depois projetar a face em um terceiro plano paralelo à mesma e perpendicular ao plano secundário.*

Justificativa

15:05 – *Primeiramente dividi o segmento MN em intervalos para encontrar a cota 1,5 para determinar a reta de cota constante (rcc) de cota 1,5. Esta reta indicará a direção que o plano é projetado em vista básica;*

15:25 – *Tracei um plano secundário perpendicular a rcc (1,5), de modo que a face se projete em vista básica. Marquei as cotas dos pontos a partir da linha de terra ($\pi_1\pi_2$), perpendicular a mesma seguindo a linha de chamada, por estarmos utilizando projeções ortogonais.*

15:35 – *Tracei um terceiro plano paralelo a face e perpendicular ao plano principal para encontrar a verdadeira grandeza da face. Marquei a partir da linha de terra ($\pi_2\pi_3$)*

15:50 – *Término da questão.*

APENDICE F- Entrevista Semiestruturada

Sujeito: _____ Data: _____

Perguntas Conductoras

- 1- O que você vê na Épura do enunciado?

- 2- Quais as estratégias você utilizou para resolver o problema?

- 3- Sabe explicar o porquê de cada procedimento?

- 4- Tem certeza do que fez está certo?

- 5- Conferiu se a resposta encontrada se enquadra com as estratégias utilizadas?

- 6- A sua dificuldade na questão foi quanto a visualização espacial, aos conceitos de Geometria Euclidiana, ao método de Monge, à ferramenta utilizada, e/ou ao raciocínio em GGT.

ANEXO 1 – Programa da disciplina de GGT1 do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE para o primeiro semestre de 2010.



**Universidade Federal de Pernambuco
Pró-Reitoria para Assuntos Acadêmicos**

**COORDENAÇÃO GERAL DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO
DIVISÃO DE CURRÍCULOS E PROGRAMAS**

PROGRAMA VÁLIDO PARA O 1º SEMESTRE DE 2010

PROGRAMA DE DISCIPLINA

DADOS DA DISCIPLINA

| CÓDIGO | NOME | CARGA HORÁRIA SEMANAL | | N.º DE CARGA HORÁRIA | |
|---------------|---|-----------------------|----------|----------------------|-----------|
| | | TEÓRICA | PRÁTICA | CREDITOS | GLOBAL |
| DE 419 | GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL 1 | 3 | 3 | 4 | 90 |

PRÉ – REQUISITOS

Geometria Gráfica Bidimensional

CÓ – REQUISITOS

Sistemas de Representação

EMENTA

Utilização de projeções ortogonais para resolução gráfica de problemas de posição entre pontos, retas e planos; de problemas métricos com segmentos lineares e ângulos, e determinação de lugares geométricos no plano e no espaço.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Posições de pontos, retas e planos em relação ao plano principal de projeção;
2. Pertinência de ponto a reta e de reta a plano;
3. Interseção de retas e planos; seção plana de um sólido;
4. Distância de ponto a reta e a plano; distância entre retas reversas;
5. Ângulos entre retas, entre planos e entre retas e planos;
6. Bissetrizes, bissetores, mediatrizes e planos mediadores: lugares geométricos de distância e ângulos no plano e no espaço tridimensional;
7. Construção das projeções de pirâmides, prismas, cones, cilindros e esferas, determinadas por suas medidas.
8. Transformação de épuras por rebatimento, rotação ou mudança de planos para simplificação de um problema gráfico envolvendo pontos, retas e planos.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

CHAPUT. Frère Ignace. **Elementos de geometria descritiva com numerosos exercícios**. Tradução e adaptação brasileira de Eugenio B. Raja Gabaglia; revista, correta e atualizada pelo Ten. Cel. Dr. Waldemar Pereira Cotta. F. Briguiet & Cia. 1954. Rio de Janeiro : F. Briguiet & Cia., 1960.

COSTA, Mario D.; COSTA, Alcy Paes de Andrade V. **Geometria Gráfica Tridimensional**. v.2. Recife: Editora Universitária/UFPE, 1986.

GIESECKE, Frederick E. et al. **Comunicação gráfica moderna**. Rio Grande do Sul: ARTMED, 2002.

ROUBAUDI, C. **Traite de geometrie descriptive: a l'usage des eleves des classes de mathematiques speciales et des candidats**. 3.ed. Paris: Masson, 1926.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE A DISCIPLINA

Expressão Gráfica

HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO

Licenciatura em Expressão Gráfica

ASSINATURA DO CHEFE DO DEPARTAMENTO

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO OU ÁREA