



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ALEXIS CARLOS GARCÍA WONG

INTERAÇÃO DE UM TREM DE PULSOS ULTRACURTOS COM VAPOR DE Rb:
ANÁLISE DA LINHA D_2

Recife
2016

ALEXIS CARLOS GARCÍA WONG

**INTERAÇÃO DE UM TREM DE PULSOS ULTRACURTOS COM VAPOR DE Rb:
ANÁLISE DA LINHA D₂**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora:
Prof^a Dr^a Sandra Sampaio Vianna
Universidade Federal de Pernambuco

Recife
2016

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB 4-572

G216i García Wong, Alexis Carlos.
Interação de um trem de pulsos ultracurtos com vapor de Rb: análise da
linha D₂ / Alexis Carlos García Wong. – 2016.
80 f.: fig., tab.

Orientadora: Sandra Sampaio Vianna.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN.
Física. Recife, 2016.
Inclui referências e apêndices.

1. Óptica. 2. Espectroscopia de laser. 3. Átomos – modelos. I. Vianna,
Sandra Sampaio (Orientadora). II. Título.

535.2 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2016-43

ALEXIS CARLOS GARCÍA WONG

**INTERAÇÃO DE UM TREM DE PULSOS ULTRACURTOS COM VAPOR DE Rb:
ANÁLISE DA LINHA D₂**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 26/07/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a Dr^a Sandra Sampaio Vianna
Orientadora
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Leonardo de Souza Menezes
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Thierry Marcelino Passerat de Sillans
Examinador Externo
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial à minha mãe por todo seu apoio.

Aos meus amigos de Cuba, pela preocupação e incentivo.

À minha orientadora Sandra, por sua dedicação na minha formação, pela paciência, pelos conselhos e pela confiança.

Aos colegas do laboratório: Jesús, Ammis, Alexandre e Natalia pelo conselhos e ajuda no Origin.

Aos meus amigos do Brasil pela acolhida, principalmente: Diane, Dayane e China.

À Joyce Bruna pela ajuda no português e por fazer os meus dias bem mais felizes. Aos colegas de turma pelo apoio e bons momentos, em particular: Winnie, Leo, Alysso e ambos os Luises.

À Raoni pelas altas dicas no Inkscape e pela sua grande ajuda no Latex.

Aos meus amigos Yoandris e Victor que desde a graduação tem me ajudado, e agora fazem parte da minha família.

Ao CNPq, pela apoio financeiro à pesquisa.

A ciência é a aproximação progressiva do homem com o mundo real.
Max Planck

Resumo

Apresentamos um estudo da interação de um laser de femtosegundos de Ti:safira, com alta taxa de repetição, com vapor atômico de Rubídio. Trabalhamos no regime de acumulação coerente, em que o tempo de relaxação dos átomos do meio é maior que o tempo entre os pulsos. Para sondar a excitação produzida pelo laser pulsado sobre os vários grupos de velocidades atômicos usamos um laser contínuo de diodo. Estudamos a transmissão do laser de diodo em função de sua frequência, na presença e na ausência do laser pulsado, quando ambos os lasers estão sintonizados na transição $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$. Os resultados experimentais mostram que a transmissão do laser de diodo aumenta ou diminui dependendo do modo do pente de frequências que está interagindo com o grupo de átomos. Descrevemos os resultados experimentais trabalhando no domínio da frequência e modelando o meio atômico por um conjunto de dois sistemas de três níveis tipo Λ e um sistema de dois níveis, todos independentes entre si, interagindo com os modos do pente de frequência. Assim, a modelagem teórica considera os vários níveis hiperfinos e discrimina a interação com a transição cíclica do efeito de bombeio ótico, apresentado um resultado em concordância com os dados experimentais obtidos. O experimento foi realizado sem travar a taxa de repetição nem a frequência de off-set do laser de femtosegundos.

Palavras-chave: Vapor de Rubídio. Pente de frequências. Laser de femtosegundos. Espectroscopia. Regime de acumulação coerente.

Abstract

We present a study of the interaction of a high repetition rate femtosecond Ti:sapphire laser with a vapor atomic rubidium. We work on coherent accumulation regime, in which the atomic relaxation time is greater than the time interval between pulses. The action of the ultrashort-pulsed laser over different atomic velocity groups is probed by a diode laser. We studied the transmission of the diode laser as a function of frequency, with and without the presence of the ultrashort-pulsed laser, when both lasers are tuned to $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ transition. The experimental results show that the diode laser transmission increases or decreases depending on the mode of the frequency comb that interacts with different velocity groups. The experimental results are described in the frequency domain and the atomic system is modeled by a set of two three-level Λ systems and a system of two-level all independent and interacting with the frequency comb modes. The theoretical treatment considers the hyperfine transitions and distinguishes the interaction between the cyclic transitions from optical pumping effect, showing results in good agreement with the experimental data. The experiment is performed without lock repetition rate or the off-set frequency of the femtosecond Ti:sapphire laser.

Keywords: Rubidium vapor. Frequency comb. Ultrashort-pulsed laser. Spectroscopy. Coherent accumulation regime.

Lista de Figuras

- 1.1 Representação (a) de um trem de pulsos [Eq.(1.1)] e (b) um pente de frequências [Eq. (1.3)]. Em (a) a curva em vermelho é a envoltória dos pulsos e a curva em azul representa a onda portadora. 18
- 1.2 Representação esquemática de um sistema de dois níveis, onde ω_c é a frequência central do campo, Γ é a taxa de relaxação do estado excitado e δ é a dessintonia entre o campo e a transição atômica. 19
- 1.3 Diagrama do programa realizado para resolver as equações de Bloch. 21
- 1.4 População do estado excitado em função do tempo para um valor de dessintonia $\delta = 0MHz$. 22
- 1.5 População do estado excitado em função do tempo para um valor de dessintonia $\delta = 10MHz$. 22
- 1.6 População do estado excitado em função do tempo para um valor de dessintonia $\delta = 50MHz$. 23
- 1.7 População ρ_{22} excitada por um trem de pulsos ultracurtos com taxa repetição de $100MHz$ em função da dessintonia dos grupos de velocidade atômicos de um vapor. 24

- 2.1 Perfil espectral do laser de Ti:safira pulsado. 26
- 2.2 Montagem experimental: As linhas vermelhas representam os feixes dos lasers. Os detalhes do experimento de absorção saturada não são representados na figura. BS: *beam-splitter* (separador de feixes), F: Filtro, L: Lente, P: polarizador. 26
- 2.3 Foto do feixe do laser de femtossegundos, tomada pela camera CCD digital *Thorlabs* modelo *DCU224C-BG* no foco da lente. 27
- 2.4 Absorção linear para a linha D_2 do Rubídio. 29
- 2.5 Diagrama da montagem experimental para o experimento de absorção saturada. BS: *beam-splitter* (separador de feixes), F: Filtro. 29
- 2.6 (a) Absorção saturada para as quatro linhas Doppler dos isótopos ^{85}Rb e ^{87}Rb do Rubídio. Em (b) temos uma ampliação da região destacada em (a), onde os números indicam as transições, os outros picos correspondem aos *crossover*. O zero da escala em frequência corresponde à frequência da transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 30

LISTA DE FIGURAS

- 2.7 Transmissão do laser de diodo na presença (curva azul) e na ausência (curva vermelha) do laser de fs em função da frequência do laser de diodo para as linhas Doppler $F = 3$ do ^{85}Rb e $F = 2$ do ^{87}Rb de esquerda a direita. Ambos lasers estão sintonizados em 780nm . A curva cinza representa a absorção saturada e o zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 31
- 2.8 Níveis de energia do isótopo ^{87}Rb envolvidos no experimento. A seta azul representa o laser de diodo que pode fazer as transições $F = 2 \rightarrow F' = 1, 2, 3$ e a seta vermelha o laser de femtossegundos. 32
- 2.9 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . A relação de intensidades entre o laser de femtossegundos e o laser de diodo é de $1,2$ ($\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 1,2$). A curva cinza representa a absorção saturada, e o zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 33
- 2.10 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb , na configuração contra-propagante. A curva cinza representa a absorção saturada, e o zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 34
- 2.11 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . Para duas relações de intensidades diferentes: (a) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 2,5$ ($I_{cw} = 0,9I_s$) e (b) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 7,6$ ($I_{cw} = 0,3I_s$). A cor cinza representa a absorção saturada, cujo zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Em (a) temos sinalizado com uma linha pontilhada em torno dos -650MHz o começo da rampa na outra direção. 35
- 2.12 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . Para dois pares de relações de intensidades diferentes: (a) e (c) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 0,5$ ($I_{cw} = 4,8I_s$) e (b) e (d) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 2,5$ ($I_{cw} = 0,9I_s$). A curva cinza representa a absorção saturada, cujo zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Em (d) temos sinalizado com uma linha pontilhada em torno dos -650MHz o começo da rampa na outra direção. A seta azul indica o pico mais a esquerda relacionado a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . 36
- 2.13 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para as linhas Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb e $F = 3$ do ^{85}Rb . Sinalizado por um retângulo azul o pico correspondente a linha $F = 3$ do ^{85}Rb que aparece misturado na linha $F = 2$ do ^{87}Rb . A curva cinza representa a absorção saturada, cujo zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 37

LISTA DE FIGURAS

- 2.14 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT , em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb para duas intensidades distintas do laser de fs, I_0 curva superior (vermelha) e $0,2I_0$ curva inferior (azul), onde $I_0 = 2,4I_s$. 38
- 3.1 (a) Níveis de energia do ^{87}Rb envolvidos no experimento. As setas verde e azul representam os lasers de femtossegundos e de diodo, respectivamente. (b) Posição das transições atômicas (linhas azuis) em relação aos modos do pente de frequências (linhas verdes). As setas indicam as diferenças em frequências (em MHz), entre: (i) os níveis de energia, (ii) os modos do pente de frequências e (iii) os níveis de energia e os modos do pente de frequências. Consideramos que o modo m está em ressonância com a transição $F = 2 \rightarrow F' = 1$. (c) Modelo de um sistema de três níveis tipo Λ e um sistema de dois níveis, onde ω_m e $\omega_{m'}$ representam dois modos do pente de frequências. 40
- 3.2 Resultado do cálculo da população do estado $|1\rangle$ a partir da Eq.3.16 para um sistema de três níveis tipo Λ . 43
- 3.3 Modelo dos dois sistemas de três níveis tipo Λ e um sistema de dois níveis, onde ω_m e $\omega_{m'}$ representam dois modos do pente de frequências, onde cada estado é representado pelo nível de energia correspondente. 44
- 3.4 Sistema de três níveis $1^{\text{ro}}\Lambda$, com os níveis específicos. Variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$, devido à interação com os modos do pente de frequências. O diodo sonda a população em três transições diferentes (mostradas em letras azuis), em letras vermelhas representamos que transição excita o modo do pente. O zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 45
- 3.5 Sistema de três níveis $2^{\text{do}}\Lambda$, com os níveis específicos. Variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$, devido à interação com os modos do pente de frequências. O diodo sonda a população em três transições diferentes (mostradas em letras azuis), em letras vermelhas representamos que transição excita o modo do pente. O zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 46
- 3.6 Sistema de dois níveis, com os níveis específicos. Variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$, devido a interação com o modo do pente de frequências. O diodo sonda a população em três transições diferentes (mostradas em letras azuis). Em letras vermelhas representamos que transição excita o modo do pente. O zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 47
- 3.7 Variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do laser de diodo. Para (a), cada contribuição em separado, (b) para as três contribuições somadas. O zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 48

LISTA DE FIGURAS

- 3.8 (a) Variação da transmissão do laser de diodo (com sinal trocado, ΔT), em função de sua frequência, com ambos os lasers sintonizados em 780nm . A relação de intensidades entre o laser de femtossegundos e o laser de diodo é de 1,2 ($\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 1,2$). (b) Resultado analítico que representa a variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do diodo para a situação experimental definida em (a) que corresponde com uma frequência de Rabi dada por $\Omega = 0,7\Gamma\sqrt{S_{FF'}}$. Em ambas as figuras, o zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Sinalizamos que a maior diferença em frequência ao comparar teoria e experimento é de 30MHz 49
- 3.9 Resultado teórico que representa a variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do diodo para a diferentes potencias do laser de femtossegundos. 51
- 3.10 Cálculo da variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do diodo para a diferentes potências do laser de femtossegundos, para intensidades acima da I_s . 51
- 3.11 Cálculo da variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do diodo para a diferentes potências do laser de femtossegundos, para $I \gg I_s$. 52
- 3.12 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . Para dois pares de relações de intensidades diferentes: (a) e (c) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 0,5$ e (b) e (d) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 2,5$. A curva cinza representa a absorção saturada, cujo zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Em (d) temos sinalizado com uma linha pontilhada em torno dos -650MHz o começo da rampa na outra direção. A seta azul indica o pico quando ambos os lasers fazem a transição ciclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . 53
- 3.13 (a) Variação da transmissão do laser de diodo (com sinal trocado) em função da frequência do laser de diodo, as curvas em diferentes cores correspondem as curvas experimentais que mostramos na Fig.2.12 no capítulo 2. $\Delta v_{2-3'exp}$ corresponde a posição que ocupa o pico para baixo mais a direita respeito a transição cíclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$ que medimos com a absorção saturada. (b) Variação da população do nível $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do diodo, onde consideramos que o modo do pente de frequências pode deslocar-se. $\Delta v_{2-3'teo}$ corresponde a posição do pico da transição cíclica do sistema de dois níveis respeito ao valor central em frequência de uma gaussiana centrada em 0. 54
- B.1 Diagrama de níveis para a estrutura hiperfina da linha D_2 do ^{85}Rb e ^{87}Rb . 65
- C.1 Sistema de três níveis tipo Λ . 66
- D.1 Sistema de três níveis tipo Λ , com somente um campo atuando na transição $1 \rightarrow 3$. 70

LISTA DE FIGURAS

D.2 Sistema de três níveis tipo Λ , com somente um campo atuando na transição $2 \rightarrow 3$.

74

Sumário

1	Introdução	14
1.1	O trem de pulsos ultracurtos e o pente de frequências	16
1.2	Interação coerente entre um laser pulsado e um sistema atômico de dois níveis	17
1.2.1	Interação do átomo com o laser pulsado	21
1.2.2	Espectroscopia seletiva em velocidade	23
2	Experimento	25
2.1	Sistema experimental	25
2.2	Absorção saturada	28
2.3	Resultados experimentais	31
3	Modelagem Teórica	39
3.1	Níveis de energia e modelo teórico	39
3.2	Modelagem teórica	41
3.3	Resultados teóricos para a linha D_2 do ^{87}Rb	44
3.4	Dependência com a intensidade e a posição do modo do pente de frequências	50
4	Conclusões	56
	Perspectivas	57
	Referências	58
	Apêndices	60
A	Programa em C++	61
B	Tabela de dados	64
C	Equações de Bloch para um sistema de três níveis Λ	66
D	Obtenção das equações 16 e 17 do capítulo 3	69
D.1	Transição $1 \rightarrow 3$	70
D.2	Transição $2 \rightarrow 3$	74
D.3	Sistema de dois níveis	78

CAPÍTULO 1

Introdução

Uma grande contribuição para a ciência foi a invenção do laser por Theodore Maiman [1] e A. Javan [2] em 1960. Em seguida, a comunidade científica começou a utilizar esta nova ferramenta e surgiram diversas aplicações em diferentes áreas como Medicina, Eletrônica, Biologia e na Física.

Os lasers pulsados com duração temporal extremamente curta surgiram devido ao desenvolvimento da técnica de modos travados (*mode-locked* em inglês) [3], na mesma década da criação do laser. A duração dos pulsos, assim como a relação de fase bem definida entre cada pulso do trem, é determinada pela quantidade de modos travados, que oscilam em fase na cavidade do laser. Os lasers de modos travados passaram a ser utilizados na geração dos pentes de frequências óticas, a partir do resultado: pulsos uniformemente espaçados no tempo equivalem, no domínio da frequências, a modos de frequências uniformemente espaçados; devido aos pentes de frequências e outras contribuições na área da ótica o prêmio Nobel de Física no ano 2005 foi outorgado a Theodor W. Hänsch e a John L. Hall.

No início de 1990, a tecnologia de lasers ultra-rápidos avançou consideravelmente com a descoberta, por Wilson Sibbett na Universidade de St. Andrews, do efeito *Kerr-lens* por modos travados [4]. Em seguida, lasers comerciais de femtossegundos (entre os quais se encontram os laser de Titânio-safira) se tornaram disponíveis, o que fez a geração de pulsos de luz ultracurtos mais acessíveis.

Os lasers de modos travados de femtossegundos ocasionaram o surgimento de inúmeras aplicações que utilizam as principais características dos pulsos de luz: largo espectro no domínio das frequências, energia concentrada em um intervalo temporal da ordem dos femtossegundos e potência de pico extremamente alta. As aplicações podem se dividir em dois grupos fundamentais. Aquela que usa sua característica na escala temporal, por exemplo, é considerada a chave para o intrigante campo da ciência dos attossegundos [5]. Por outro lado, sua utilização como uma quase perfeita régua no domínio das frequências.

Os lasers de femtossegundos podem ligar e comparar frequências óticas (uma transição atômica bem definida) e frequências de micro-ondas (taxa de repetição do laser de femtossegundos) em uma única etapa [6]. Portanto, são considerados o mecanismo faltante do relógio atômico ótico. Com tais relógios, medições espectroscópicas futuras podem atingir precisões de partes em 10^{18} [6].

O espectro de um laser de femtossegundos pode ser alargado em um meio ótico não-linear para abranger mais do que uma oitava ótica sem destruir a integridade das linhas do pente de frequências. Em uma implementação agora comum, o trem de pulsos de um laser de Ti:safira baseado no efeito *Kerr-lens* de modos travados, é enviado através de uma fibra de sílica micro estruturada, com um pequeno núcleo de fibra sólida e cercada por buracos cheios de ar [7, 8].

A grande mudança no índice de refração na interface ar-sílica permite orientar por reflexão interna total o feixe do laser, mesmo que o feixe que entra seja fortemente focado pela alta intensidade.

Uma das áreas mais estudadas usando lasers ultracurtos é sua interação com sistemas atômicos, a qual teve seus primeiros trabalhos no final da década de 1960 [9, 10]. A partir daí, uma grande quantidade de trabalhos nesse tema foram sendo desenvolvidos, logrando importantes resultados até o presente. O primeiro tratamento teórico da excitação de sistemas atômicos por um trem de pulsos ultracurtos foi feito por Kocharovskaya e Khanin [11], em que consideraram a fase bem definida entre os pulsos do trem e estudaram a interação quando o tempo de vida dos átomos é maior que o intervalo de tempo entre dois pulsos consecutivos, circunstância que chama-se atualmente por regime de acumulação coerente.

No ano 2003 se obteve uma solução analítica no estudo da interação coerente de um laser de pulsos ultracurtos em um sistema atômico de dois níveis com alargamento Doppler [12]. Posteriormente, essa solução foi desenvolvida para sistemas de três níveis em cascata utilizando-se uma expansão perturbativa [13]. A primeira observação da impressão do pente de frequências na distribuição atômica de velocidades de um vapor de Rubídio (Rb) foi feita pelo grupo do Pichler, na Croácia, em trabalhos teóricos e experimentais [14, 15, 16]. Em 2009, foi realizado por Felinto um estudo da interação de um trem de pulsos ultracurtos com sistemas atômicos com uma quantidade arbitrária de níveis utilizando teoria de perturbações [17].

Está bem estabelecido que, no regime de acumulação coerente, a excitação induzida pelo trem de pulsos ultracurtos nos átomos pode ser tratada no domínio da frequência, onde se analisa a interação dos átomos com os modos do pente de frequências e não como uma sequência de pulsos do trem. Nosso grupo de trabalho tem realizado importantes contribuições na área [12, 13, 18, 19]. Os trabalhos antes mencionados, abordam o problema no regime do tempo, em quanto que em nossa abordagem pesquisamos o problema no domínio da frequência. Além disso em nosso trabalho usamos um laser de Ti:safira com uma taxa de repetição de aproximadamente 1 GHz o que permite estudar com mais detalhes as transições hiperfinas ao invés de se utilizar um laser pulsado de 100 MHz (mais usado na literatura) onde as transições hiperfinas encontram-se superpostas.

Nessa dissertação, continuamos estudando a interação de um trem de pulsos ultracurtos com vapor de Rb, no regime de acumulação coerente, especificamente, estudamos a linha D_2 do Rb. Inicialmente, mostramos as principais características de um trem de pulsos ultracurtos, nos domínios do tempo e da frequência. Além disso, apresentamos os tópicos essenciais da interação coerente entre um laser pulsado de femtossegundos e um átomo de dois níveis. Utilizamos o formalismo da matriz densidade para a determinação das populações e das coerências atômicas devido à interação com o campo dos lasers. A partir da solução numérica das equações de Bloch, exibimos no regime estacionário o comportamento da população do nível excitado do átomo de dois níveis.

No capítulo 2, apresentamos a montagem, bem como os resultados experimentais do estudo da interação de um laser de femtossegundos com alta taxa de repetição com o vapor atômico de Rb. Utilizamos um laser de diodo com o objetivo de sondar as transições excitadas pelo pente de frequências. O experimento foi realizado sem travar a taxa de repetição nem a frequência de *off-set* do laser de femtossegundos.

No capítulo 3, modelamos os nossos resultados experimentais. O tratamento teórico é desenvolvido no domínio da frequência, de forma que consideramos o laser de fs como um pente de frequências com uma separação bem definida (taxa de repetição do laser) entre os modos. Os resultados teóricos obtidos estão em boa concordância com os resultados experimentais. Por fim, apresentamos nossas conclusões e algumas perspectivas.

Para maior facilidade e clareza na leitura da dissertação optamos por produzir 4 apêndices. No apêndice A, mostramos o programa desenvolvido em C++ com o qual resolvemos numericamente a interação de um trem de pulsos ultracurtos com um sistema atômico de dois níveis. No apêndice B, apresentamos as principais constantes físicas e dados do Rubídio que utilizamos. Já no apêndice C, obtivemos de forma detalhada as equações de Bloch para um sistema de três níveis tipo Λ e por último, no apêndice D, evidenciamos como alcançamos as equações (16) e (17) do capítulo 3, de vital importância na modelagem teórica.

1.1 O trem de pulsos ultracurtos e o pente de frequências

Podemos definir um trem de pulsos curtos como uma sequência de pulsos com envoltórias idênticas, separados temporalmente por um intervalo constante, e com uma relação de fase bem definida entre si. Esses pulsos são obtidos nos lasers pulsados com travamento na fase (mode-locking), como é o caso do laser de Ti:Safira pulsado usado nessa dissertação.

Pode-se escrever matematicamente o módulo do campo elétrico de um trem de pulsos [20]:

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_0(t - nT_R) e^{i\omega_c t} e^{in(\Delta\phi - \omega_c T_R)}, \quad (1.1)$$

onde $E_0(t)$ representa a envoltória de um pulso, n indica o número de pulsos, T_R o intervalo de tempo entre dois pulsos consecutivos, ω_c a frequência da onda portadora, $\Delta\phi$ a diferença de fase entre cada pulso introduzida pelos elementos óticos da cavidade do laser e $\omega_c T_R$ representa a fase adquirida devido a uma volta completada na cavidade do laser.

Aplicando a transformada de Fourier na Eq. (1.1) se obtém o espectro do trem de pulsos, ou seja:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_0(t - nT_R) e^{i\omega_c t} e^{in(\Delta\phi - \omega_c T_R)} e^{-i\omega t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\Delta\phi - \omega_c T_R)} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t - nT_R) e^{-i(\omega - \omega_c)t} dt. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Fazendo a mudança de variável $t' = t - nT_R$ se tem:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\Delta\phi - \omega_c T_R)} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-i(\omega - \omega_c)(t' + nT_R)} dt' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\Delta\phi - \omega T_R)} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') e^{-i(\omega - \omega_c)t'} dt' \\
&= \tilde{E}_0(\omega - \omega_c) \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\Delta\phi - \omega T_R)}. \tag{1.3}
\end{aligned}$$

As Eq. (1.1) e Eq. (1.3) representam o trem de pulsos e o pente de frequências, respectivamente, e são mostrados na Fig. 1.1. Usando o fato de que podemos escrever formalmente $\sum_{n=0}^{\infty} e^{inA} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(A - 2\pi n)$ [21], temos

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(\omega) &= \tilde{E}_0(\omega - \omega_c) \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\Delta\phi - \omega T_R)} \\
&= \tilde{E}_0(\omega - \omega_c) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Delta\phi - \omega T_R - 2\pi m) \\
&= \frac{\tilde{E}_0(\omega - \omega_c)}{T_R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{\Delta\phi}{T_R} + \frac{2\pi m}{T_R}\right). \tag{1.4}
\end{aligned}$$

Para obter a última equação utilizam-se as propriedades da delta de Dirac. Definindo $1/T_R \equiv f_R$, que chama-se taxa de repetição e considerando $\Delta\phi f_R = 2\pi f_0$, pode-se reescrever a Eq. (1.4) da seguinte maneira:

$$\tilde{E}(\omega) = \tilde{E}_0(\omega - \omega_c) f_R \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_m), \tag{1.5}$$

onde

$$\omega_m = 2\pi(f_0 + mf_R). \tag{1.6}$$

ω_m e f_0 representam a frequência do m -ésimo modo do pente de frequências e a frequência de off-set, respectivamente.

A quantidade de modos contida no pente de frequências depende da separação entre os modos, f_R , e da largura de banda do pulso, Δf . O valor é da ordem de $\frac{\Delta f}{f_R}$, ou equivalente, $\frac{T_R}{T_p}$, onde $T_p \approx 1/\Delta f$ é a largura temporal do pulso. Um laser com $f_R = 100 \text{ MHz}$ e $T_p = 100 \text{ fs}$ apresenta em torno de 10^5 modos.

1.2 Interação coerente entre um laser pulsado e um sistema atômico de dois níveis

Nessa subseção, apresentamos os fundamentos da interação coerente entre um laser pulsado e um sistema atômico de dois níveis, tema que será relevante no desenvolvimento da dissertação. Serão consideradas três aproximações importantes. Na primeira, se considera o campo

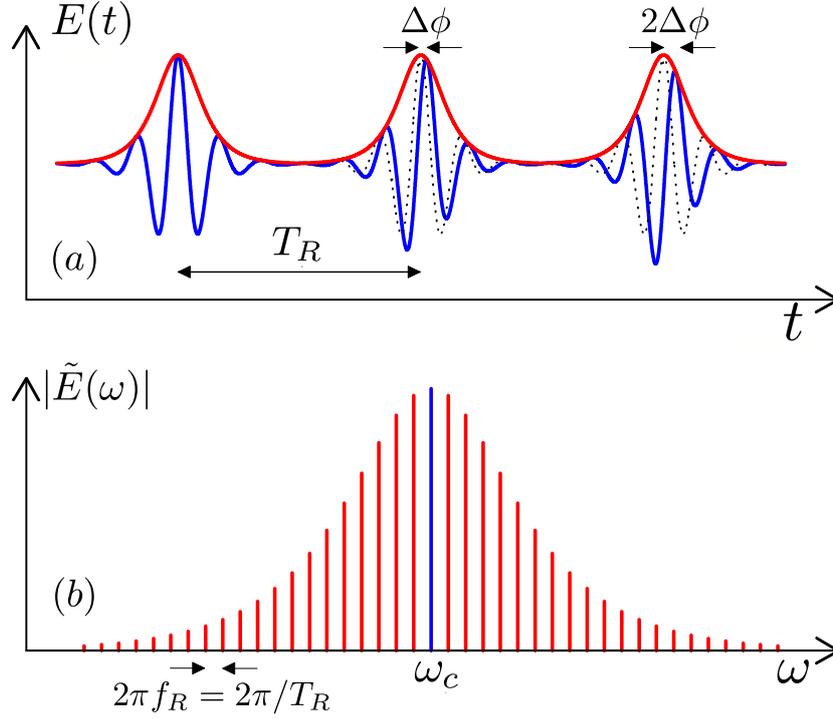


Figura 1.1 Representação (a) de um trem de pulsos [Eq. (1.1)] e (b) um pente de frequências [Eq. (1.3)]. Em (a) a curva em vermelho é a envoltória dos pulsos e a curva em azul representa a onda portadora.

eletromagnético como uma grandeza clássica, no caso em estudo pode-se desprezar o caráter corpuscular do campo devido a sua alta intensidade. A segunda aproximação trata da interação átomo-campo eletromagnético, onde usamos a aproximação de dipolo elétrico; portanto daqui para frente usaremos campo elétrico ao nos referir ao campo eletromagnético. Além disso será considerado que o campo elétrico é uniforme na região próxima do átomo. A terceira e última aproximação é sobre o átomo, consideramos que somente um elétron (o de maior energia) interage com o campo elétrico; essa aproximação é válida para os átomos alcalinos, dentro dos quais encontra-se o Rubídio, que é o metal estudado neste trabalho.

Os átomos apresentam diversas ressonâncias, não obstante apenas algumas são acessíveis por um laser. A partir dessa ideia, se desprezam as transições que estejam longe da ressonância com a frequência do laser. Nesta subseção, consideramos que o átomo possui apenas dois níveis de energia $|1\rangle$ e $|2\rangle$ (Fig.1.2), sendo este o sistema atômico mais simplificado. A partir destas considerações, podemos escrever o Hamiltoniano total do sistema como [22, 23, 24, 25],

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_0(\mathbf{r}, t). \quad (1.7)$$

Onde \hat{H}_0 é o hamiltoniano livre do sistema e se representa

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2|, \quad (1.8)$$

onde $\hbar\omega_i$ representa a energia do estado $|i\rangle$, com $i = 1, 2$. Por outro lado $\hat{V}_0(\mathbf{r}, t)$ é o hamiltoniano

niano de interação na aproximação de dipolo elétrico

$$\hat{V}_0(\mathbf{r}, t) = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.9)$$

onde e é a carga do elétron e $\hat{\mathbf{r}}$ o operador vetor posição do elétron. O campo elétrico do laser pode ser escrito como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{e}_1, \quad (1.10)$$

onde $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ é a amplitude do campo elétrico, ω e \mathbf{k} representam a frequência central e o vetor de onda do campo respectivamente e \hat{e}_1 é o versor polarização do campo elétrico.

Na base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ o hamiltoniano de interação pode ser reescrito como

$$\hat{V}_0(\mathbf{r}, t) = -\mu_{12}\varepsilon(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) |1\rangle \langle 2| + h.c., \quad (1.11)$$

onde $e\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu\varepsilon(\mathbf{r}, t)$, μ é a componente do operador de dipolo elétrico na direção do campo, $\mu_{ij} = e \langle i | \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{e}_1 | j \rangle$ é o momento de dipolo elétrico na transição $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$ e por último h.c significa “hermitiano conjugado”.

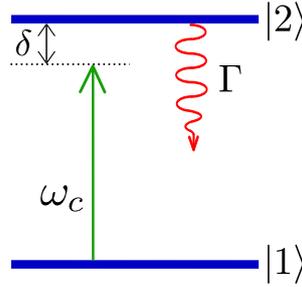


Figura 1.2 Representação esquemática de um sistema de dois níveis, onde ω_c é a frequência central do campo, Γ é a taxa de relaxação do estado excitado e δ é a dessintonia entre o campo e a transição atômica.

Na dissertação se estuda a ação do campo elétrico em um ensemble de átomos, e se usa o formalismo da matriz densidade para calcular a probabilidade de encontrar um elétron em certo estado. Por conseguinte, é necessário resolver a equação de Liouville para a evolução temporal da matriz densidade [22, 23, 25].

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{\mathbf{H}}], \quad (1.12)$$

onde $\hat{\rho}$ representa a matriz densidade. Os elementos de matriz ρ_{ii} representam as populações atômicas, e os elementos ρ_{ij} , para $i \neq j$, representam as coerências entre os estados $|i\rangle$ e $|j\rangle$.

Temos então que os elementos da matriz densidade ρ_{ii} ficam

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle 1 | [\hat{\rho}, \hat{\mathbf{H}}_0] | 1 \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle 1 | [\hat{\rho}, \hat{V}_0] | 1 \rangle,$$

onde o primeiro termo é zero pois $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ são autoestados de $\hat{\mathbf{H}}_0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{11}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \langle 1 | [\hat{\rho}, \hat{\mathbf{H}}_0] | 1 \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle 1 | [\hat{\rho}, \hat{\mathbf{V}}_0] | 1 \rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar} \rho_{12} \langle 2 | \hat{\mathbf{V}}_0 | 1 \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle 1 | \hat{\mathbf{V}}_0 | 2 \rangle \rho_{21} \\
&= -\frac{i}{\hbar} \mu_{12}^* \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rho_{12} + \frac{i}{\hbar} \mu_{12} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rho_{21} \\
&= -i \frac{\Omega^*(t)}{2} \sigma_{12} + i \frac{\Omega(t)}{2} \sigma_{21}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Podemos fazer o mesmo procedimento, obtendo:

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = i \frac{\Omega^*(t)}{2} \sigma_{12} - i \frac{\Omega(t)}{2} \sigma_{21}. \tag{1.14}$$

Para as coerências se tem

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \langle 1 | [\hat{\rho}, \hat{\mathbf{H}}_0] | 2 \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle 1 | [\hat{\rho}, \hat{\mathbf{V}}_0] | 2 \rangle, \\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \rho_{12} \hbar \omega_2 - \frac{i}{\hbar} \hbar \omega_1 \rho_{12} + \frac{i}{\hbar} \rho_{11} \langle 1 | \hat{\mathbf{V}}_0 | 2 \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle 1 | \hat{\mathbf{V}}_0 | 2 \rangle \rho_{22}, \\
\frac{d\rho_{12}}{dt} &= i \omega_{21} \rho_{12} + \frac{i}{\hbar} \mu_{12} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) (\rho_{11} - \rho_{22}), \\
\frac{d\sigma_{12}}{dt} &= -i \delta \sigma_{12} + i \frac{\Omega(t)}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Fazemos o mesmo para σ_{21} e obtemos:

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = i \delta \sigma_{21} - i \frac{\Omega^*(t)}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}) \tag{1.16}$$

temos que $\omega_1 = E_1/\hbar$ e $\omega_2 = E_2/\hbar$, onde E_1 e E_2 são as energias dos estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$, respectivamente; $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$ e, que $\delta = \omega - \omega_{21}$ é a dessintonia entre o campo e a transição atômica. Para obter as equações Eqs. (1.13-1.16), usamos a aproximação de onda girante [23, 24, 25], introduzindo as variáveis lentas $\rho_{12} = \sigma_{12} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ (isto se pode fazer quando a frequência do campo estiver próxima da frequência de ressonância dos átomos) e a definição de frequência de Rabi dependente do tempo, $\Omega(t) = \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)}{\hbar}$.

As equações de Bloch para o sistema de dois níveis são obtidas adicionando fenomenologicamente os termos de relaxação espontânea às Eqs. (1.13 -1.16) [25]:

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = -i \frac{\Omega^*(t)}{2} \sigma_{12} + i \frac{\Omega(t)}{2} \sigma_{21} + \Gamma \rho_{22}, \tag{1.17}$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = i \frac{\Omega^*(t)}{2} \sigma_{12} - i \frac{\Omega(t)}{2} \sigma_{21} - \Gamma \rho_{22}, \tag{1.18}$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = -i \delta \sigma_{12} + i \frac{\Omega(t)}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\Gamma}{2} \sigma_{12}, \tag{1.19}$$

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = i \delta \sigma_{21} - i \frac{\Omega^*(t)}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\Gamma}{2} \sigma_{21}. \tag{1.20}$$

Consideramos $\Gamma_2 = \Gamma$ e $\Gamma_1 = 0$ as taxas de decaimento dos níveis fundamental e excitado respectivamente e $\Gamma_{12} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = \frac{\Gamma}{2}$ a taxa de decaimento das coerências. Usando a condição de normalização $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ e que $\sigma_{12} = \sigma_{21}^*$, o sistema de equações Eqs. (1.17-1.20) pode se reduzir a duas equações:

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = -\Gamma\rho_{22} + i\frac{\Omega^*(t)}{2}\sigma_{12} + c.c., \tag{1.21}$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = -(i\delta + \frac{\Gamma}{2})\sigma_{12} - i\frac{\Omega(t)}{2}(1 - 2\rho_{22}), \tag{1.22}$$

onde c.c significa complexo conjugado.

1.2.1 Interação do átomo com o laser pulsado

De ponto de vista numérico se tem um sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem, a solução desse conjunto de equações fornece a matriz densidade $\hat{\rho}(t)$ evoluindo no tempo. Para a solução numérica desse problema utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem [26] que permite realizar a integração das Eqs. (1.17-1.20). Este método otimiza a relação entre a alta ordem polinomial, para realizar interpolações na grade temporal de $\hat{\rho}(t)$, e a complexidade do algoritmo de interpolação usado.

Para modelar a interação átomo-campo elétrico, vamos usar um laser pulsado com travamento na fase (mode-locked) como o descrito na subseção 1. O programa usado para resolver o sistema de equações Eqs. (1.17-1.20) foi desenvolvido em C++ (Apêndice A) usando que $\Omega(t) = \Omega_0(t)e^{i\alpha}$ com $\alpha = -n\omega_c T_R + n\Delta\phi$. Nesse programa, modela-se a interação átomo-campo elétrico da seguinte forma (ver Fig.1.3). Primeiro são resolvidas numericamente as Eqs. (1.17-1.20), a partir do algoritmo de Runge- Kutta de quarta ordem. O resultado obtido é usado como condição inicial para o decaimento espontâneo, situação onde $\Omega_0(t) = 0$ e podem-se resolver exatamente as equações de Bloch. O ciclo excitação-decaimento é repetido para os n pulsos. Obtivemos os resultados mostrados nas Figs.1.4, 1.5, 1.6, para diferentes valores de dessintonia e considerando os pulsos quadrados e os seguintes valores $T_R = 10ns$, $\Delta\phi = 0$, $\frac{\Gamma}{2\pi} = 5MHz$ (tempo de vida igual a 25 ns, valor bem próximo da transição $5S \rightarrow 5P$), $T_p = 100fs$ largura temporal do pulso, $\frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\delta}{2\pi} + 400THz$, $\frac{\omega_{21}}{2\pi} = 400THz$ e $\Omega_0 \frac{T_p}{T_R} = 0.01\Gamma$.

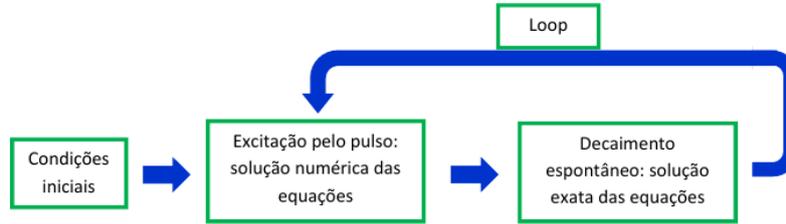


Figura 1.3 Diagrama do programa realizado para resolver as equações de Bloch.

Da Fig.1.4, vemos que a população ρ_{22} tende ao equilíbrio para tempos longos, mesmo que esteja oscilando em torno de um valor médio. Pode-se chamar essa situação de regime estacionário, pois a população oscila em torno de um valor. Quando $\delta = 0MHz$ temos a situação de

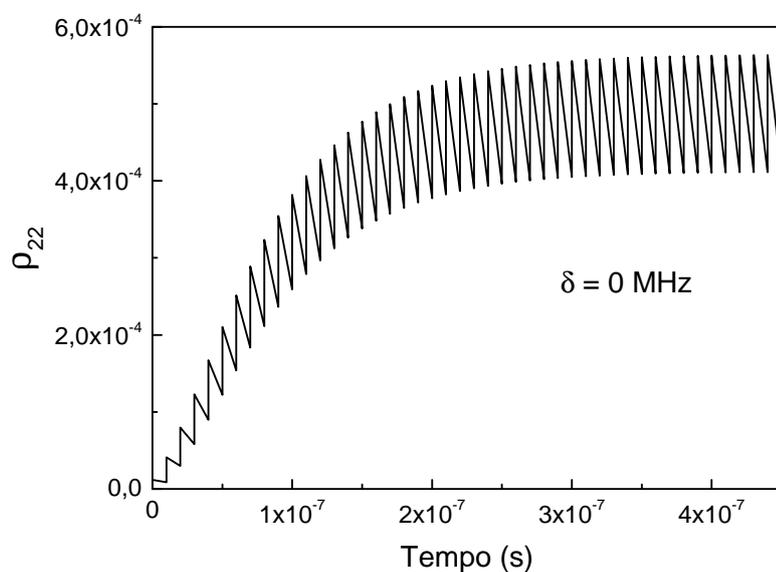


Figura 1.4 População do estado excitado em função do tempo para um valor de dessintonia $\delta = 0$ MHz.

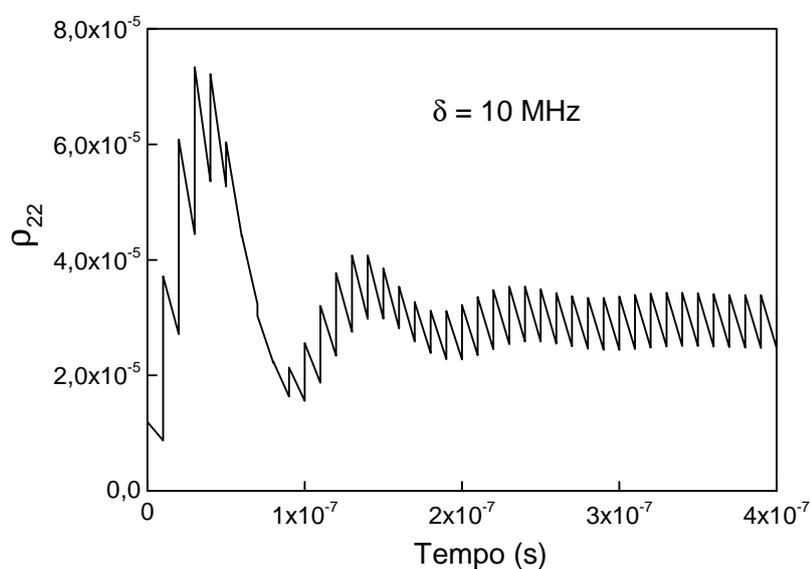


Figura 1.5 População do estado excitado em função do tempo para um valor de dessintonia $\delta = 10$ MHz.

que um modo m do laser está em ressonância com o sistema, de tal forma que podemos dizer que o trem de pulsos e o átomo oscilam com a mesma frequência. Portanto, a sequência de pulsos do trem deixa uma coerência total no sistema atômico que resulta em uma interferência

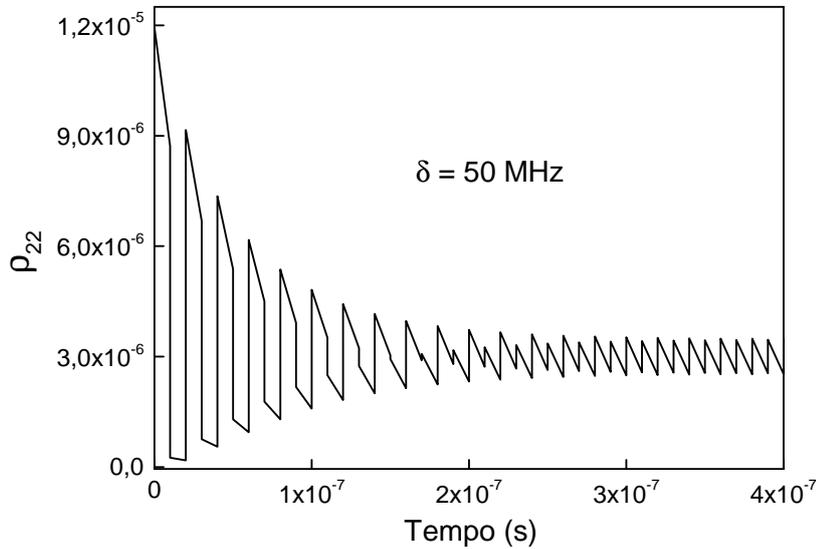


Figura 1.6 População do estado excitado em função do tempo para um valor de dessintonia $\delta = 50\text{MHz}$.

construtiva. Esse fenômeno acontece quando o tempo de vida do estado excitado é maior que o intervalo entre os pulsos do trem, portanto o átomo antes de decair “sente” mais de um pulso. Quando nos encontramos nessa situação se diz que estamos no regime de acumulação coerente [12].

Na Fig.1.5, se tem uma pequena dessintonia $\delta = 10\text{MHz}$. Nesse caso, a coerência total passa a resultar em uma interferência parcialmente construtiva, diminuindo em aproximadamente uma ordem de grandeza a população quando comparado ao sistema em ressonância ($\delta = 0\text{MHz}$).

Já na situação da Fig.1.6, temos uma dessintonia máxima $\delta = f_R/2 = 50\text{MHz}$, correspondendo à condição de uma interferência totalmente destrutiva, já que a ressonância atômica se situa exatamente entre dois modos do pente de frequências.

1.2.2 Espectroscopia seletiva em velocidade

Quando se consideram as diferentes velocidades que possuem os átomos no vapor, temos que incluir o efeito Doppler. Nesse caso, os átomos com diferentes velocidades sentem as frequências dos modos do pente deslocadas em $\Delta = \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}$, onde \mathbf{k}_m é o vetor de onda do modo m e \mathbf{v} é a velocidade do átomo. No caso particular do vapor de rubídio, a largura do perfil Doppler na temperatura ambiente é da ordem de 500 MHz, fazendo com que os átomos entrem em ressonância com vários modos do laser ao interagir com o trem de pulsos com uma taxa de repetição de 100 MHz. Na Fig.1.7, observa-se a população ρ_{22} para diferentes grupos de velocidades, quando consideramos um tempo de interação de $t = 2\mu\text{s}$, e pesamos a resposta

pelo perfil Doppler,

$$\rho_{22}^D = \rho_{22} e^{-\frac{\delta^2}{2\Delta_D^2}}. \quad (1.23)$$

Para este cálculo tomamos $\frac{\Delta_D}{2\pi} = 200\text{MHz}$ e os outros parâmetros são iguais aos utilizados anteriormente. Cada pico da Figura 7 corresponde à excitação de um determinado grupo de átomos por um dos modos do pente de frequências [12].

Estes resultados indicam claramente que quando estamos no regime de acumulação coerente, temos o efeito de interferência fazendo com que os átomos vejam o pente de frequências. Isto nos permite analisar o efeito do trem de pulsos ultracurtos com uma alta taxa de repetição como uma série de lasers contínuos com uma separação em frequência bem definida, dada pela taxa de repetição (f_R) [18].

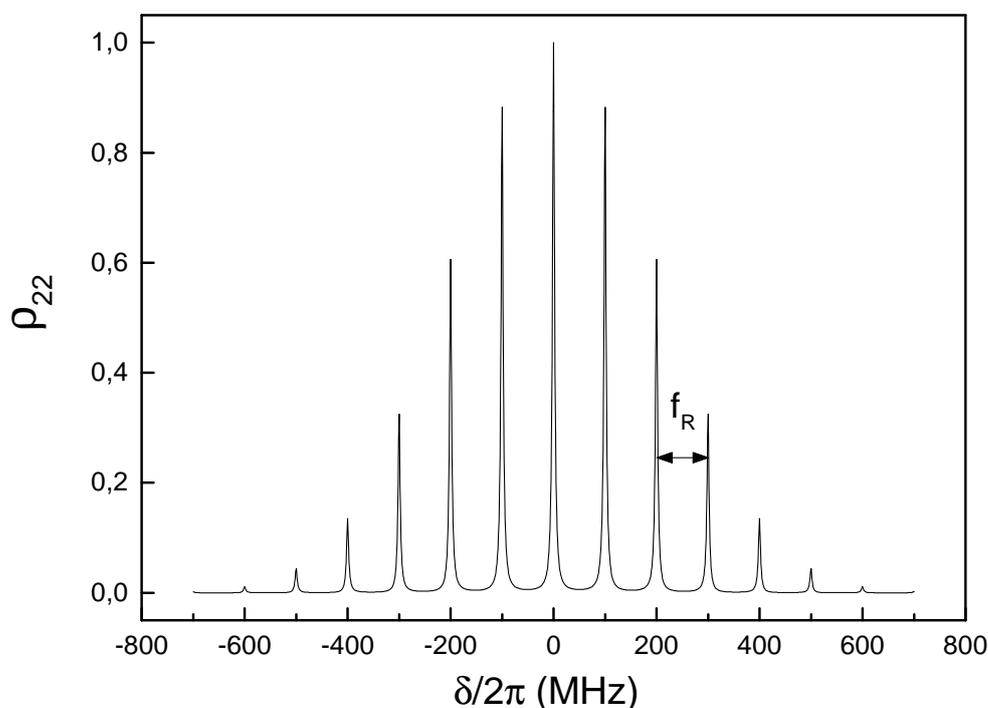


Figura 1.7 População ρ_{22} excitada por um trem de pulsos ultracurtos com taxa repetição de 100MHz em função da dessintonia dos grupos de velocidade atômicos de um vapor.

Experimento

Neste capítulo, descrevemos o sistema experimental e apresentamos os principais resultados obtidos em nosso experimento de espectroscopia coerente em um vapor de Rubídio utilizando um laser de femtossegundos (fs) com uma alta taxa de repetição ($\sim 1\text{ GHz}$). A excitação provocada pelo laser de fs nos vários grupos de velocidades atômicos é sondada por um laser de diodo.

2.1 Sistema experimental

Para a obtenção de nossos resultados experimentais, utilizamos um laser de diodo contínuo e um laser de fs de Ti:Safira. O laser de diodo da marca *Sanyo*, modelo *DL-7140-201*, operou em 780 nm a $26,6^\circ\text{C}$. A sintonização em frequência é feita a partir de um controlador da corrente elétrica de injeção que, por meio do efeito Joule, muda a temperatura, e assim, o tamanho da cavidade [27]. Para modular a frequência da luz emitida usamos um gerador de funções. A largura de linha do laser de diodo é de aproximadamente 1 MHz .

Um laser de Ti:safira de femtossegundos, da marca *BR-Labs*, modelo *TIS-ML-01* é o encarregado de gerar o trem de pulsos ópticos. Esse laser apresenta uma cavidade óptica de seis espelhos em forma de anel, de aproximadamente 30 cm , gerando pulsos da ordem de 100 fs de duração, com relação de fase bem definida entre eles, e uma taxa de repetição em torno de 1 GHz . O meio de ganho é um cristal de safira dopado com Titânio ($Ti : Al_2O_3$) o qual é bombeado por um sistema Verdi (laser de $Nd : YVO_4$ bombeado por lasers de diodo com frequência dobrada), da marca *Coherent*, no comprimento de onda de 532 nm e com uma potência contínua de 5 W . O mecanismo de geração dos pulsos ultracurtos é o efeito de auto-focalização que ocorre no meio não linear devido à intensidade dos pulsos propagantes, este processo é chamado de Kerr-lens (baseado no efeito Kerr). Consiste basicamente em que as perdas da cavidade são minimizadas quando a intensidade do pulso é máxima [20, 28]. A potência média de saída do laser de Ti:safira encontra-se na faixa de 300 a 900 mW . A largura de banda do laser é da ordem de 15 nm . Na Fig.2.1, mostramos um perfil espectral típico da luz emitida pelo laser, o qual foi obtido em nosso laboratório com um espectrômetro da *Ocean Optics*, modelo *USB 4000*.

O esquema experimental completo é mostrado na Fig.2.2. Ambos os lasers estão sintonizados em 780 nm , correspondendo à linha D_2 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$) do Rubídio. O laser de diodo será usado para sondar as transições atômicas excitadas pelo laser de femtossegundos, tendo sua frequência determinada por uma absorção saturada que será descrita na próxima seção.

No experimento, quando usamos o amplificador *lock-in* a potência média de saída do laser

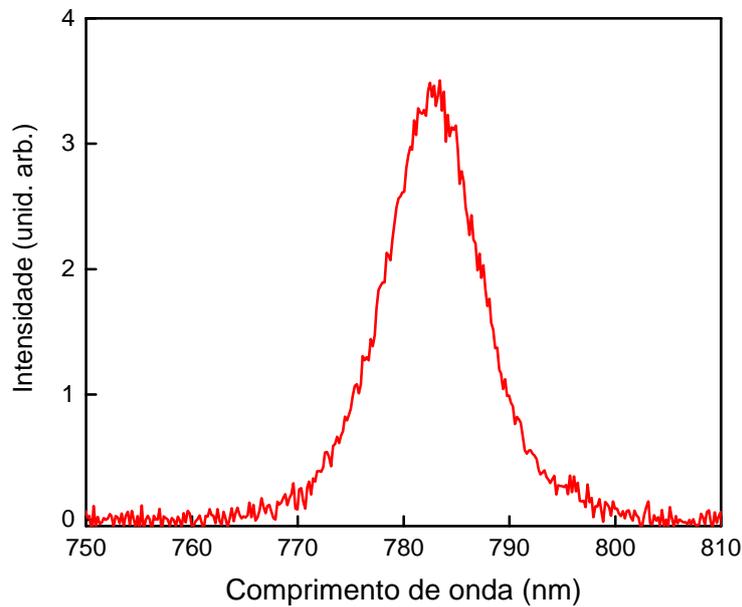


Figura 2.1 Perfil espectral do laser de Ti:safira pulsado.

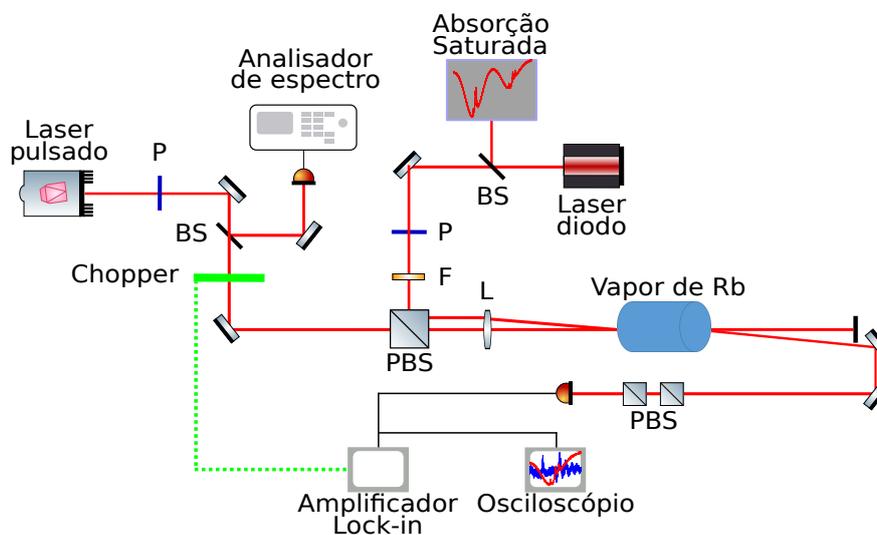


Figura 2.2 Montagem experimental: As linhas vermelhas representam os feixes dos lasers. Os detalhes do experimento de absorção saturada não são representados na figura. BS: *beam-splitter* (separador de feixes), F: Filtro, L: Lente, P: polarizador.

de femtossegundos está em torno de 220 mW , o que significa uma potência por modo de aproximadamente $22\ \mu\text{W}$ (o laser possui aproximadamente 10^4 modos). O diâmetro do feixe tem um valor aproximado de $0,6\text{ mm}$. A taxa de repetição dos pulsos foi monitorada com um anali-

sador de espectro da marca *Agilent*, modelo *N9320B* e o valor obtido foi $f_R = 986,95 \text{ MHz}$. É necessário comentar que a taxa de repetição do laser não foi travada durante a realização do experimento, e observamos que a variação do valor obtido ocorria na terceira casa decimal depois da vírgula, razão pela qual reportamos e usaremos no resto da dissertação o valor antes mencionado. Tendo em consideração a Eq. (1.6) do capítulo 1 e a quantidade de modos de nosso laser, vemos que a variação de kHz em f_R pode levar a que a frequência do m -ésimo modo pode varie em torno de uns GHz . O laser de diodo possui uma potência máxima na entrada da célula de $(4,4 \pm 0,1) \text{ mW}$ e um diâmetro de $0,5 \text{ mm}$. Para medir o diâmetro dos feixes de ambos os lasers foi utilizada uma câmera CCD *Thorlabs* modelo *DCU224C-BG*. Na Fig.2.3 mostra-se uma foto do feixe do laser de fs tomada com a câmera CCD, a partir da qual obtivemos uma matriz contendo os valores da intensidade a cada *pixel*. Com os valores das linhas e as colunas da matriz ajustamos uma gaussiana, tendo como resultado o valor do diâmetro do feixe. Vale ressaltar que, durante o experimento, a potência do laser de fs foi mantida fixa, enquanto que a potência do laser de diodo foi variada usando diferentes filtros neutros.

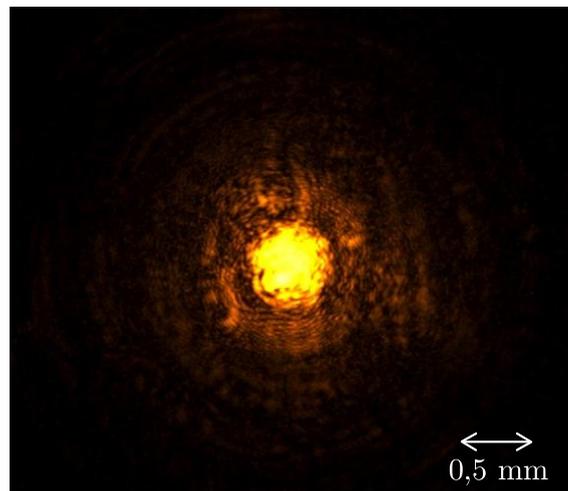


Figura 2.3 Foto do feixe do laser de femtossegundos, tomada pela camera CCD digital *Thorlabs* modelo *DCU224C-BG* no foco da lente.

Os feixes dos dois lasers, que possuem polarizações perpendiculares entre si, se encontram em um prisma polarizador, de onde saem copropagantes e separados por uma distância $0,5 \text{ mm}$. Em seguida passam por uma lente de 30 cm cujo objetivo é focalizar os dois feixes no vapor de Rubídio contido em uma célula selada com 5 cm de comprimento e mantida à temperatura ambiente.

Os dados foram obtidos de duas maneiras distintas: por meio da detecção direta da transmissão do laser de diodo após passar pela célula, e com a ajuda de um amplificador *lock-in*. No caso em que usamos o *lock-in*, uma roda dentada (*chopper* em inglês) serve de referência e o sinal de saída do *lock-in* representa a variação da transmissão do laser de diodo devido à presença do laser de femtossegundos. Tanto o sinal direto do detetor como o sinal tratado pelo *lock-in* são armazenados, simultaneamente, junto com o sinal de absorção saturada em um osciloscópio da *Lecroy*, modelo *Wave Surfer 24Xs-A*. No experimento, todos os detetores

usados são simples, feitos em nosso laboratório (*home-made*). Os dados obtidos são tratados utilizando o programa *Origin*.

2.2 Absorção saturada

A absorção saturada é um dos muitos tipos de espectroscopia laser não linear de alta resolução utilizada na investigação de estruturas espectrais [29, 30]. Sua aplicação num vapor atômico de metais alcalinos (como o Rubídio) à temperatura ambiente permite a observação das transições hiperfinas que são ofuscadas pelo efeito Doppler numa espectroscopia linear. Em tal técnica, dois feixes da mesma frequência incidem contra-propagantes no vapor atômico. Um dos feixes é denotado como feixe forte F e o outro, mais fraco, é geralmente chamado de feixe de prova P. Quando a frequência do laser ω_L é diferente da frequência da transição atômica ω_0 (por exemplo $\omega_L > \omega_0$), o feixe forte F interage com um grupo de átomos com velocidade v_z , enquanto que o feixe de prova P excita o grupo simétrico com velocidade $-v_z$. Como resultado, os dois feixes interagem com diferentes classes de átomos e os espectros de absorção são idênticos ao obtido utilizando um único feixe para a excitação laser (absorção linear) mostrado na Fig.2.4. Nessa figura, temos a curva de absorção linear para a linha D_2 do Rubídio, que possui dois isótopos ^{85}Rb e ^{87}Rb , com as maiores abundâncias naturais, 72.17% e 27.82%, respectivamente (ver tabela B.2 do apêndice B). Como a separação entre os níveis hiperfinos do estado fundamental $5S_{1/2}$ é maior do que a largura do perfil Doppler (ver Fig.B.1 do apêndice B), é possível observar quatro perfis Doppler que chamaremos $^{85}\text{Rb}, F = 2$, $^{85}\text{Rb}, F = 3$, $^{87}\text{Rb}, F = 1$, $^{87}\text{Rb}, F = 2$ (como mostra a Fig.2.4), cada um contendo as três linhas diretas de absorção linear. No entanto, sob a circunstância especial quando $\omega_L = \omega_0$, ambos os feixes interagem com a mesma classe de átomos de velocidade $v_z = 0$. Nesse caso, o feixe forte F satura a transição atômica, diminuindo o número de átomos com velocidade $v_z = 0$ no estado fundamental. Como resultado, a absorção do feixe de prova é diminuída, uma vez que, a maioria dos átomos já foram excitados pelo feixe forte. A absorção do feixe de prova, finalmente, apresenta um perfil Doppler alargado, no qual está sobreposto um pico Lorentziano que corresponde à frequência ressonante, pois nessa frequência os átomos absorvem o feixe forte enquanto o fraco é transmitido [30].

Quando duas transições do átomo de Rubídio, nas frequências ω_1 e ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) estão suficientemente próximas em energia (a diferença entre as frequências deve ser menor que a largura Doppler) e a frequência do laser é ajustada exatamente a meio caminho entre as duas ressonâncias, $\omega_L = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, o feixe forte interage com duas classes de átomos com velocidades opostas v_z e $-v_z$. Átomos com velocidade positiva v_z experimentam um deslocamento de frequência para o vermelho (menor frequência de transição) $\omega_1 = \omega_L \left(1 - \frac{v_z}{c}\right)$, enquanto átomos com velocidade negativa $-v_z$ experimentam um deslocamento para o azul (maior frequência de transição) $\omega_2 = \omega_L \left(1 + \frac{v_z}{c}\right)$. Isso resulta em uma diminuição do número de átomos com velocidades $\pm v_z$ no estado fundamental. Com a mesma frequência, o feixe de prova interage com exatamente o mesmo grupo de átomos, mas de forma oposta, posto que átomos com velocidade $-v_z$ (v_z) são ressonante com a transição ω_1 (ω_2). Então, o perfil de absorção do feixe de prova mostra um pico mais intenso, conhecido como *crossover* que não corresponde a uma transição

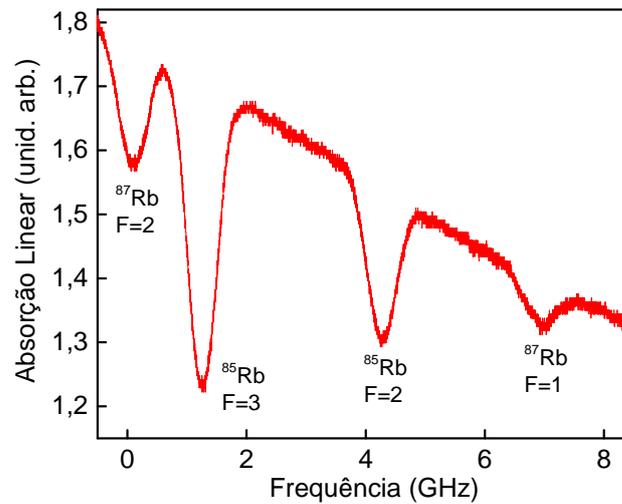


Figura 2.4 Absorção linear para a linha D_2 do Rubídio.

atômica real, pois envolve dois grupos de velocidades dos átomos [29, 30].

A espectroscopia de absorção saturada em vapores atômico deve então revelar os *crossover* e as ressonâncias diretas referentes às transições hiperfinas entre os níveis que satisfazem a regra de seleção $\Delta F = F' - F = 0, \pm 1$. Esta técnica é de vital importância, pois nos fornece uma medida da frequência do laser de diodo a partir das transições atômicas. Ela também nos será útil para passar os resultados experimentais que são obtidos no domínio do tempo para o domínio das frequências, é dessa maneira que trabalhamos nessa dissertação.

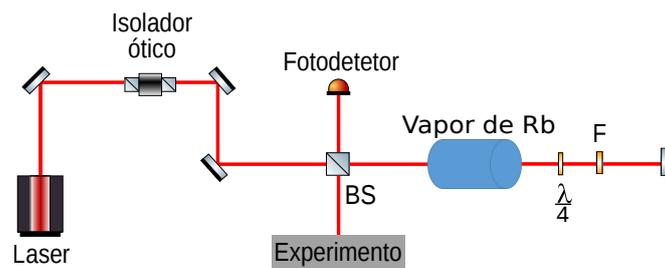


Figura 2.5 Diagrama da montagem experimental para o experimento de absorção saturada. BS: *beam-splitter* (separador de feixes), F: Filtro.

A Fig.2.5 representa um diagrama da montagem experimental usada para realizar a absorção saturada. O laser de diodo sintonizado perto de 780nm passa por um isolador óptico e em seguida por um separador de feixes ((BS) *beam-splitter* em inglês) onde o feixe é dividido em dois. Um desses feixes será usado no experimento junto com o laser de fs e o outro para a obtenção dos espectros de absorção saturada. Conforme descrevemos anteriormente, o feixe forte F viaja através da célula onde encontra-se o vapor de Rubídio. Logo depois é

refletido por um espelho, nesse caminho passa duas vezes por uma placa de $\frac{\lambda}{4}$ (o feixe muda sua polarização 90°) e por um filtro que faz que sua intensidade diminua até menos de 1% do feixe forte, transformando-se em nosso feixe de prova P. Finalmente, o feixe P é refletido pelo BS e detectado por um fotodetector, que está conectado a um osciloscópio para obter os dados experimentais.

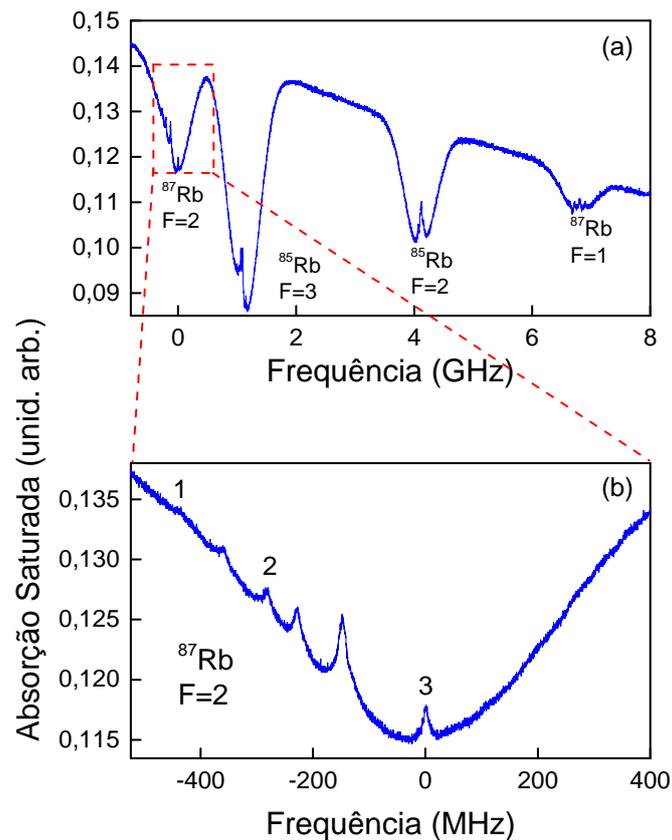


Figura 2.6 (a) Absorção saturada para as quatro linhas Doppler dos isótopos ^{85}Rb e ^{87}Rb do Rubídio. Em (b) temos uma ampliação da região destacada em (a), onde os números indicam as transições, os outros picos correspondem aos *crossover*. O zero da escala em frequência corresponde à frequência da transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

Na Fig.2.6(a), temos a curva de absorção saturada para todas as transições Doppler da linha D_2 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$) do Rubídio. É possível observar os quatro perfis Doppler anteriormente mostrados ^{85}Rb , $F = 2$, ^{85}Rb , $F = 3$, ^{87}Rb , $F = 1$, ^{87}Rb , $F = 2$, cada um contendo as três linhas diretas de absorção saturada mais as três linhas de *crossover* correspondentes às combinações duas a duas entre as linhas diretas, como mostra a Fig.2.6(a). A linha ^{87}Rb , $F = 2$ está representada em detalhe na Fig.2.6(b), onde podemos ver todas as transições hiperfinas

$F = 2 \rightarrow F' = 1, 2, 3$ e os *crossover*. A transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ corresponde, por dipolo elétrico, a uma transição cíclica, pois quando o elétron encontra-se no estado excitado $F' = 3$ somente pode decair para $F = 2$. É essa transição que corresponde ao nosso zero na escala em frequência.

2.3 Resultados experimentais

A Fig.2.7 mostra a transmissão do laser de diodo através das linhas Doppler $F = 3$ do ^{85}Rb e $F = 2$ do ^{87}Rb em função de sua frequência, na presença e na ausência do laser de femtossegundos. A linha em cinza representa a absorção saturada e será nossa régua em frequência, o zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Ambos os lasers estão sintonizados em 780nm ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$), a potência média dos laser é $P_{fs} = 430\text{mW}$ e $P_{cw} = 4\text{mW}$, para o laser de femtossegundos e diodo, respectivamente. Esta medida foi feita diretamente da transmissão do diodo, ou seja, não foi utilizado o amplificador *lock-in*. Notamos na Fig.2.7 que no caso onde não está presente o laser de femtossegundos temos uma absorção linear como a mostrada na Fig.2.4. Por outro lado, quando os dois lasers interagem com o vapor atômico dentro da célula, com o aumento da frequência do laser de diodo aparecem vários picos para cima e para baixo, comportamento diferente de quando somente temos o laser de diodo. Estes picos indicam que o efeito do laser de femtossegundos é aumentar ou diminuir a transmissão do laser de diodo.

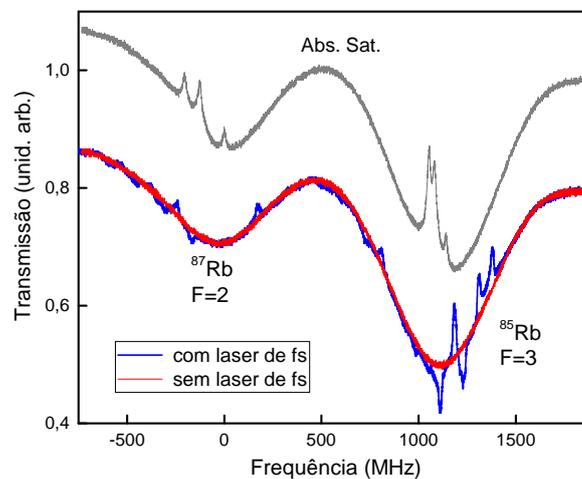


Figura 2.7 Transmissão do laser de diodo na presença (curva azul) e na ausência (curva vermelha) do laser de fs em função da frequência do laser de diodo para as linhas Doppler $F = 3$ do ^{85}Rb e $F = 2$ do ^{87}Rb de esquerda a direita. Ambos lasers estão sintonizados em 780nm . A curva cinza representa a absorção saturada e o zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

Um aspecto importante a comentar é o fato de a taxa de repetição do laser de Ti:Safira, $f_R = 986,95\text{MHz}$, ser bem maior que a taxa de repetição do laser pulsado usado no capítulo 1 ($f_R = 100\text{MHz}$); onde modelamos a interação do trem de pulsos com um sistema de dois níveis. Portanto, a principal diferença entre nossos resultados experimentais e a modelagem feita no capítulo 1, é que, agora, para cada linha Doppler, teremos somente um modo do laser de femtossegundos.

Na Fig.2.7, os picos devido à presença do laser pulsado na linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb são bem pequenos e não conseguimos fazer uma análise detalhada. Decidimos então usar um amplificador *lock-in* e nos concentraremos no estudo quando os dois lasers estão sintonizados na linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb .

O *lock-in* utiliza um *chopper* que serve de referência (com uma frequência de 390Hz) para nos devolver um sinal de saída que representa a variação da transmissão do laser de diodo devido à presença do laser de fs. A finalidade do *lock-in* é calcular a diferença entre os sinais do laser de diodo na presença ($T_{cw,fs}$) e na ausência (T_{cw}) do laser de fs e amplificá-la. Chamaremos essa variação de ΔT , $\Delta T = -(T_{cw,fs} - T_{cw})$. A amplificação ocorre pois o *lock-in* faz uma média do sinal, em um tempo de integração (escolhido por nós), e o amplifica. No experimento, para conseguir fazer a média, precisamos varrer a frequência do diodo bem devagar (nosso caso foi aproximadamente $0,5\text{Hz}$).

Antes de começar a apresentar os resultados experimentais para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb , vamos mostrar para uma maior compreensão da situação experimental, um diagrama do sistema de níveis do ^{87}Rb junto com os dois lasers que interagem com os átomos do vapor atômico, ver Fig.2.8. O laser de femtossegundos, interage com um sistema de seis níveis, originando seis ressonâncias com os modos do pente de frequências. Por outro lado, o laser de diodo sonda a resposta dos átomos em três transições distintas da linha D_2 : $F = 2 \rightarrow F' = 1, 2, 3$.

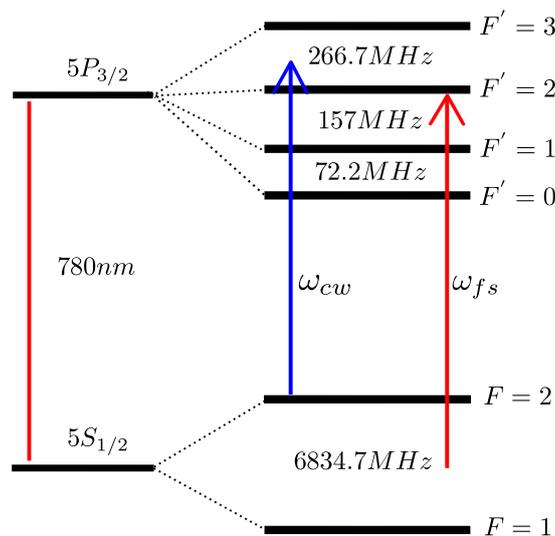


Figura 2.8 Níveis de energia do isótopo ^{87}Rb envolvidos no experimento. A seta azul representa o laser de diodo que pode fazer as transições $F = 2 \rightarrow F' = 1, 2, 3$ e a seta vermelha o laser de femtossegundos.

Na Fig.2.9, apresentamos o sinal após o *lock-in* (curva vermelha), que representa a variação da transmissão do laser de diodo em função de sua frequência na presença do laser de femtossegundos para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . Na Fig.2.9 e em todas as figuras seguintes do experimento, representamos $\Delta T = -(T_{cw,fs} - T_{cw})$, como definimos acima, para uma comparação mais direta com os resultados teóricos que mostraremos no próximo capítulo. O zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb e será assim para todas nossas figuras experimentais. Mostramos a relação de intensidades entre o laser de femtossegundos e o laser de diodo, que no caso é $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 1,2$. Calculamos essa relação a partir dos valores de potências médias medidas na entrada da célula e os valores dos diâmetros dos feixes. Os diâmetros dos feixes medem, aproximadamente, $0,6\text{ mm}$ e $0,5\text{ mm}$ para os laser de femtossegundos e diodo, respectivamente. As intensidades no caso foram $I_{fs} = 8,5 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2}$ e $I_{cw} = 6,9 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2}$ para o laser de fs e diodo respectivamente, que ao comparar com o valor de intensidade de saturação (I_s) para a transição cíclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb ($I_s = 3,6 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2}$), temos $I_{fs} = 2,4I_s$ e $I_{cw} = 1,9I_s$, indicando que estamos numa situação onde ambos os lasers apresentam intensidades maiores que a intensidade de saturação. Vale lembrar que em nosso experimento a única intensidade que estamos variando é a do laser de diodo.

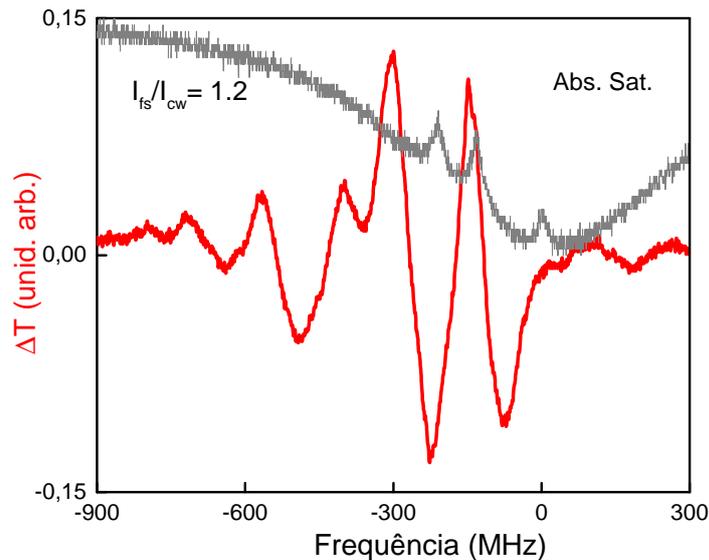


Figura 2.9 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . A relação de intensidades entre o laser de femtossegundos e o laser de diodo é de $1,2$ ($\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 1,2$). A curva cinza representa a absorção saturada, e o zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

Notamos que com a ajuda do *lock-in* conseguimos melhorar nosso sinal relativo à Fig.2.7 e observamos mais uma vez vários picos para cima e para baixo, correspondentes ao aumento

e diminuição da transmissão do laser de diodo. O número de picos observados depende não apenas das transições excitadas pelo laser de fs, mas também das transições sondadas pelo laser de diodo.

Antes de continuar com os outros resultados experimentais, mostraremos na configuração contra-propagante, a variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb , ver Fig.2.10. Nesse caso, não foi utilizada a lente, portanto, os lasers não são focalizados na célula. Podemos observar que a forma da curva é similar a curva mostrada na Fig.2.9, o que indica que nossos resultados são independentes da configuração que utilizamos, copropagante ou contra-propagante. Apresentaremos a seguir uma comparação entre os distintos resultados experimentais obtidos, na configuração copropagante.

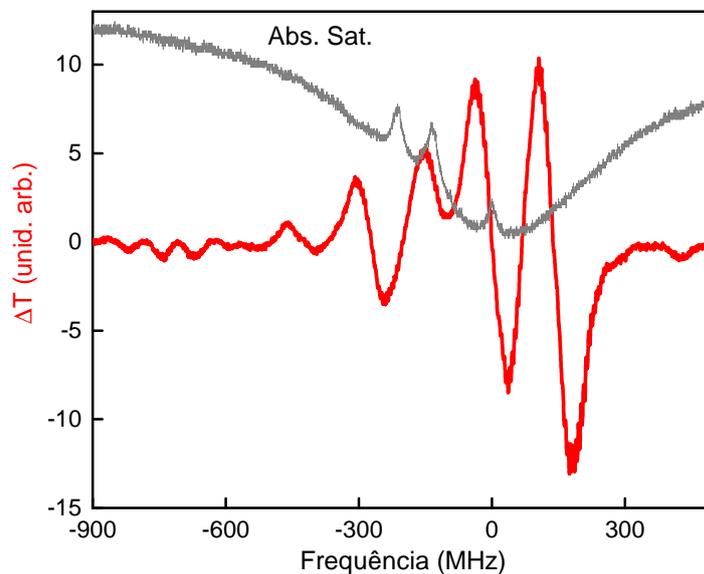


Figura 2.10 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb , na configuração contra-propagante. A curva cinza representa a absorção saturada, e o zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

Na Fig.2.11, temos a variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb , para duas intensidades do laser de diodo (em (a) $I_{cw} = 0,9I_s$ e em (b) $I_{cw} = 0,3I_s$). Na Fig.2.11(b) a intensidade do laser de diodo é aproximadamente três vezes maior que na Fig.2.11(a). Notamos que as figuras são bem semelhantes: ambas apresentam um pico correspondente ao aumento da transmissão um pouco depois de 250MHz e uma série de picos para baixo e para cima, que começam com uma diminuição da transmissão em torno de -250MHz . Podemos dizer que a forma das curvas é a mesma, ambas apresentando o mesmo

comportamento, mesmo com uma grande variação na relação de intensidades. Na Fig.2.11(a) em torno de -650MHz temos sinalizado com uma linha pontilhada o começo da rampa na outra direção.

O comportamento apresentado nas curvas da Fig.2.11 indica que a intensidade do diodo não é tão relevante em nossos resultados. Isto poderá ser confirmado nos resultados que se seguem.

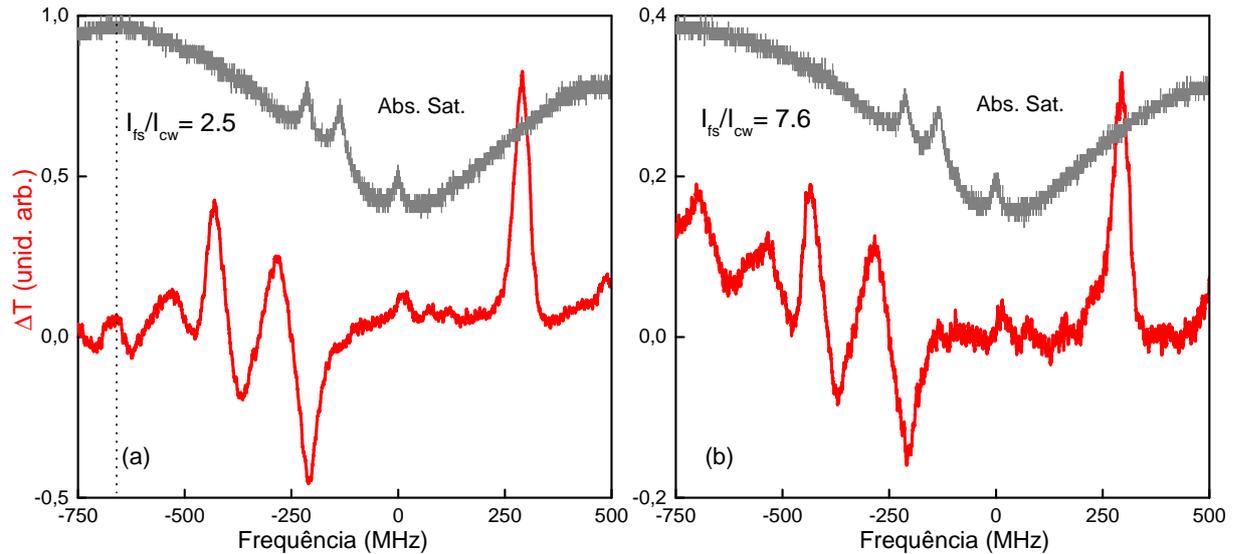


Figura 2.11 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . Para duas relações de intensidades diferentes: (a) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 2,5$ ($I_{cw} = 0,9I_s$) e (b) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 7,6$ ($I_{cw} = 0,3I_s$). A cor cinza representa a absorção saturada, cujo zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Em (a) temos sinalizado com uma linha pontilhada em torno dos -650MHz o começo da rampa na outra direção.

Na Fig.2.12, temos novamente a variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb para diferentes intensidades do laser de diodo, mas também para diferentes posições dos modos do pente de frequências dentro da curva Doppler. Aqui é importante chamar a atenção que a taxa de repetição do laser não está travada, o que pode fazer com que o modo do pente de frequências se desloque na linha Doppler. Veremos que este deslocamento pode ser de fundamental importância na análise dos resultados a seguir. Na Fig.2.12, as curvas (a) e (c) têm o mesmo valor de intensidade do laser de diodo ($I_{cw} = 4,8I_s$), assim como as curvas (b) e (d) ($I_{cw} = 0,9I_s$), mas a intensidade do laser de diodo do conjunto (b) e (d) é cinco vezes maior que do conjunto (a) e (c).

Começaremos nossa análise por aqueles pares com as mesmas intensidades. Notamos que entre (a) a (c) a forma da curva mudou bastante. Observamos que o primeiro pico, da direita para a esquerda (o qual é sinalizado sempre com uma seta azul), para baixo em (a) aparece um pouco antes de 300MHz , em (c) encontra-se bem mais à esquerda aproximadamente entre uns

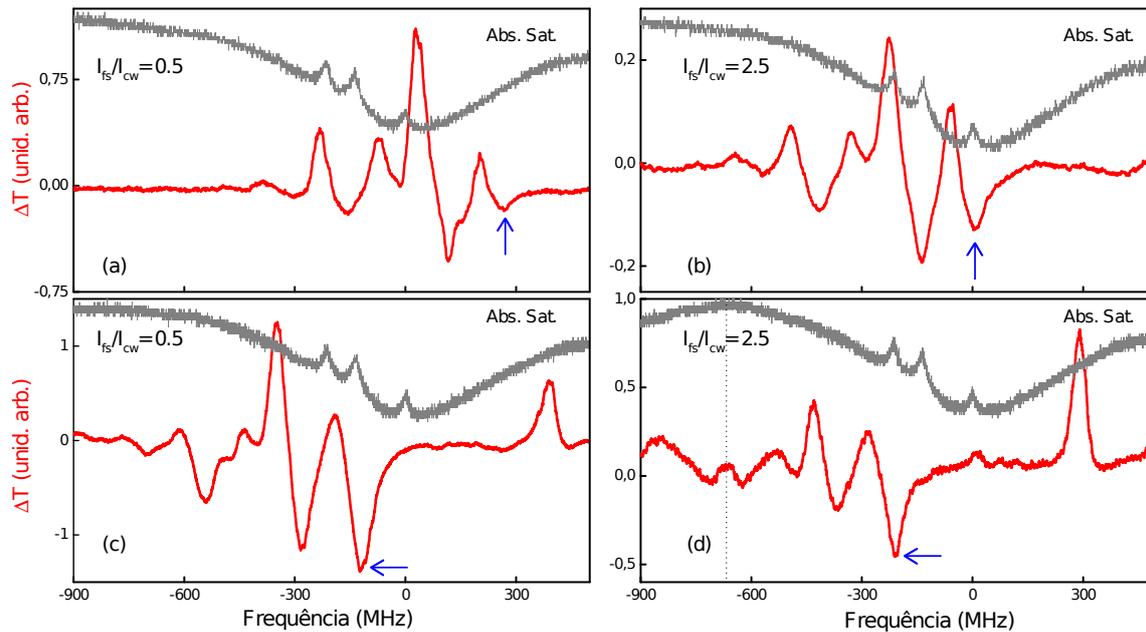


Figura 2.12 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . Para dois pares de relações de intensidades diferentes: (a) e (c) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 0,5$ ($I_{cw} = 4,8 I_s$) e (b) e (d) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 2,5$ ($I_{cw} = 0,9 I_s$). A curva cinza representa a absorção saturada, cujo zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Em (d) temos sinalizado com uma linha pontilhada em torno dos -650MHz o começo da rampa na outra direção. A seta azul indica o pico mais a esquerda relacionado a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb .

(-100 e -150) MHz . Também podemos notar que a relação de intensidades entre os picos variou: em (a) o primeiro pico para baixo é muito menos intenso que o segundo pico para baixo (que aparece também na parte positiva da escala em frequência); já em (c), o primeiro pico para baixo é um pouco mais intenso que o segundo pico para baixo (que se encontra quase em -300MHz). Por outro lado, o pico correspondente ao maior valor de transmissão em ambas curvas também se deslocou para esquerda e podemos dizer que sua diferença em intensidade com relação ao pico vizinho à direita diminuiu de (a) para (c). Em (a), à esquerda do pico de maior transmissão, temos dois picos para cima e no meio deles um pequeno pico para baixo, já em (c) vemos que a situação muda, os dois picos para cima diminuem notavelmente, mas o pico para baixo, no meio de ambos, aumenta.

Se olharmos para o outro par de curvas com a mesma relação de intensidades ((b) e (d)) podemos dizer que o comportamento é muito parecido. No caso da Fig.2.12(d), a linha pontilhada significa que começa a rampa na outra direção.

Comparando as quatro curvas da Fig.2.12, podemos dizer que a variação da intensidade do laser de diodo não parece ser um fator fundamental no experimento. Percebemos, entretanto, que a posição do modo do pente dentro da Doppler parece ser importante. Se olharmos a Fig.2.12 na ordem (a), (b), (c) e (d), vemos claramente que os picos se deslocam para a

esquerda, no sentido contrário do aumento da frequência do laser de diodo. De (a) para (b), vemos como as relações de intensidades entre os picos começam a variar conforme descrito anteriormente. Em particular, a relação de intensidade entre os 2 primeiros picos para baixo inverte conforme vamos de (a) para (d). Nas Figs. 2.12(c) e (d), notamos um pico para cima que aparece nas frequências positivas e se desloca também para a esquerda. Consideramos que esse pico corresponde a um resquício do modo do pente de frequências que está atuando na linha Doppler $F = 3$ do ^{85}Rb , conforme mostrado na Fig. 2.13.

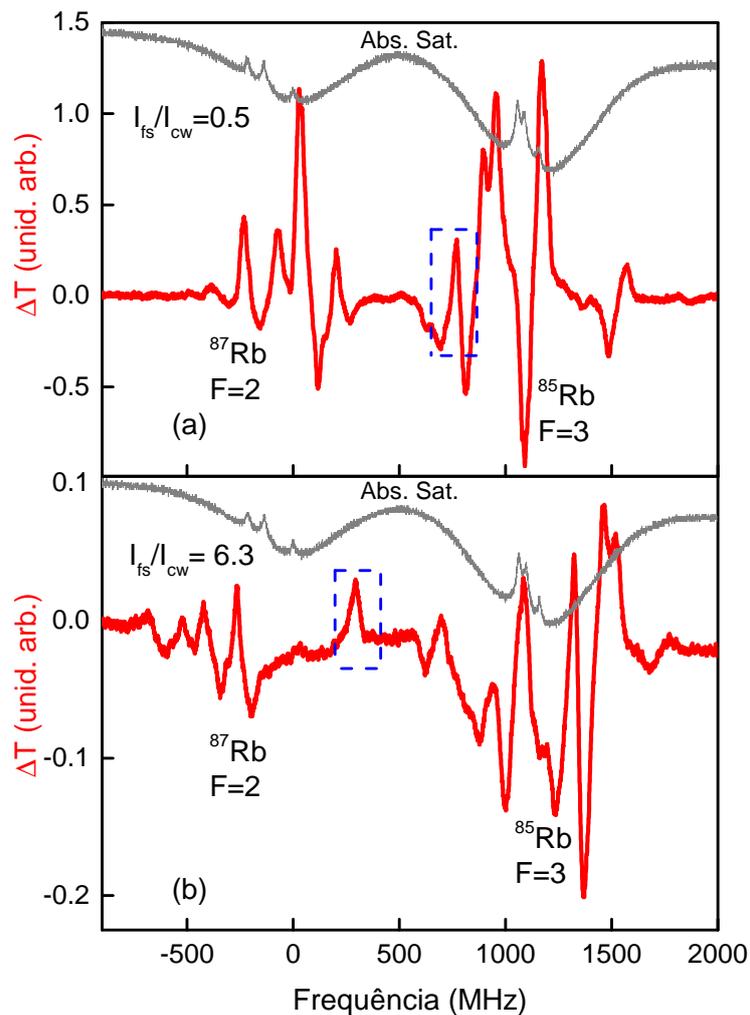


Figura 2.13 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para as linhas Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb e $F = 3$ do ^{85}Rb . Sinalizado por um retângulo azul o pico correspondente a linha $F = 3$ do ^{85}Rb que aparece misturado na linha $F = 2$ do ^{87}Rb . A curva cinza representa a absorção saturada, cujo zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

Na Fig.2.14, apresentamos novamente a variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT , em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb , para duas intensidades distintas do laser de fs, onde $I_0 = 2,4I_s$. Notamos que para duas intensidades bem diferentes, acima (curva vermelha) e abaixo (curva azul) da intensidade de saturação, a forma e a largura de linha das curvas são bem similares, indicando que em todo momento no experimento ($I_0 = 2,4I_s$) as curvas apresentam alargamento por potência.

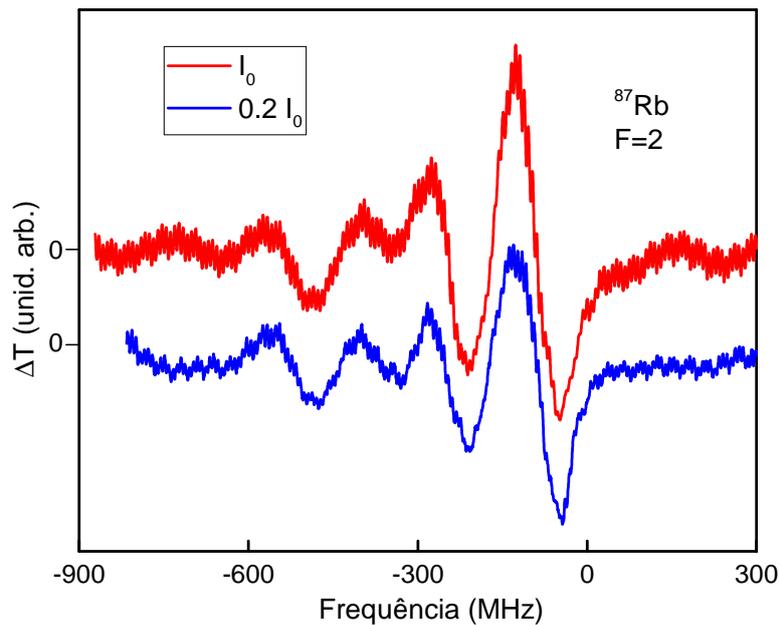


Figura 2.14 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT , em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb para duas intensidades distintas do laser de fs, I_0 curva superior (vermelha) e $0,2I_0$ curva inferior (azul), onde $I_0 = 2,4I_s$.

Dos resultados apresentados, ainda não temos condições de determinar a origem de cada pico. Entretanto, nossos resultados indicam uma forte dependência com a posição em frequência dos modos do pente e do laser de diodo, enquanto que a intensidade do laser de diodo parece ser irrelevante para a sequência ou a relação de intensidades dos picos.

No capítulo a seguir, construiremos uma teoria com o objetivo de explicar a forma das curvas, isto é, a quantidade e o porquê dos picos para cima e para baixo que aparecem em nossos resultados experimentais.

Modelagem Teórica

Neste capítulo, desenvolvemos um modelo simples com o propósito de explicar os resultados experimentais obtidos. Vamos considerar que a intensidade do laser de diodo é fraca, de forma que este será utilizado somente para sondar a população de um dois níveis fundamentais $5S_{1/2}$ do ^{87}Rb , sem modificá-la significativamente, conforme visto experimentalmente. Também, vamos considerar os resultados obtidos no capítulo 1, no regime de acumulação coerente, ou seja, modelaremos o laser pulsado de alta taxa de repetição (f_R), como uma série de lasers contínuos com uma separação bem definida em frequência (taxa de repetição do laser).

3.1 Níveis de energia e modelo teórico

Antes de começar com a modelagem teórica dos resultados experimentais, mostramos um esquema com o sistema de níveis de energia que levaremos em conta em nosso modelo. Vamos nos concentrar nos resultados do isótopo ^{87}Rb , com ambos os lasers de femtossegundos e de diodo, na linha D_2 , ver Fig.3.1(a). Como descrito no capítulo 2; o laser de femtossegundos interage com um sistema de seis níveis, originando seis ressonâncias com os modos do pente de frequências. Por outro lado, o laser de diodo sonda a resposta atômica em três transições distintas da linha D_2 : $F = 2 \rightarrow F' = 1, 2, 3$. Assim, vamos focar nosso estudo na população do nível $F = 2$, que corresponde a um dois níveis fundamentais $5S_{1/2}$ do ^{87}Rb .

Na Fig.3.1(b) as linhas azuis e verdes representam as transições atômicas e os modos do pente de frequências, respectivamente. A separação entre os modos é dada pela taxa de repetição de nosso laser de femtossegundos $f_R = 986,95 \text{ MHz}$, e estão representadas as diferenças em frequência entre os distintos níveis de energia que participam da interação. Nesta Fig.3.1(b), também estamos considerando que um grupo de átomos com velocidade fixa v_1 encontra-se em ressonância com a transição $F = 2 \rightarrow F' = 1$ realizada por um modo m do pente de frequências, e que outro grupo de átomos (com velocidade distinta de v_1) estará em ressonância com a transição $F = 1 \rightarrow F' = 1$ para um modo $m - 7$, tal que:

$$\frac{\omega_{21}}{2\pi} = 7 \cdot f_R - 73,9 \text{ MHz}, \quad (3.1)$$

onde $\omega_{21} = \frac{E_{F=2} - E_{F=1}}{\hbar}$, com $E_{F=2}$ e $E_{F=1}$ representando as energias dos níveis fundamentais do nível $5S_{1/2}$ do ^{87}Rb .

Assim modelaremos o vapor atômico, como sendo constituído por dois sistemas de três níveis tipo Λ e um sistema de dois níveis, todos independentes entre si, e interagindo com os modos do pente de frequências, ver Fig.3.1(c). Vale lembrar que nosso objeto de estudo é a

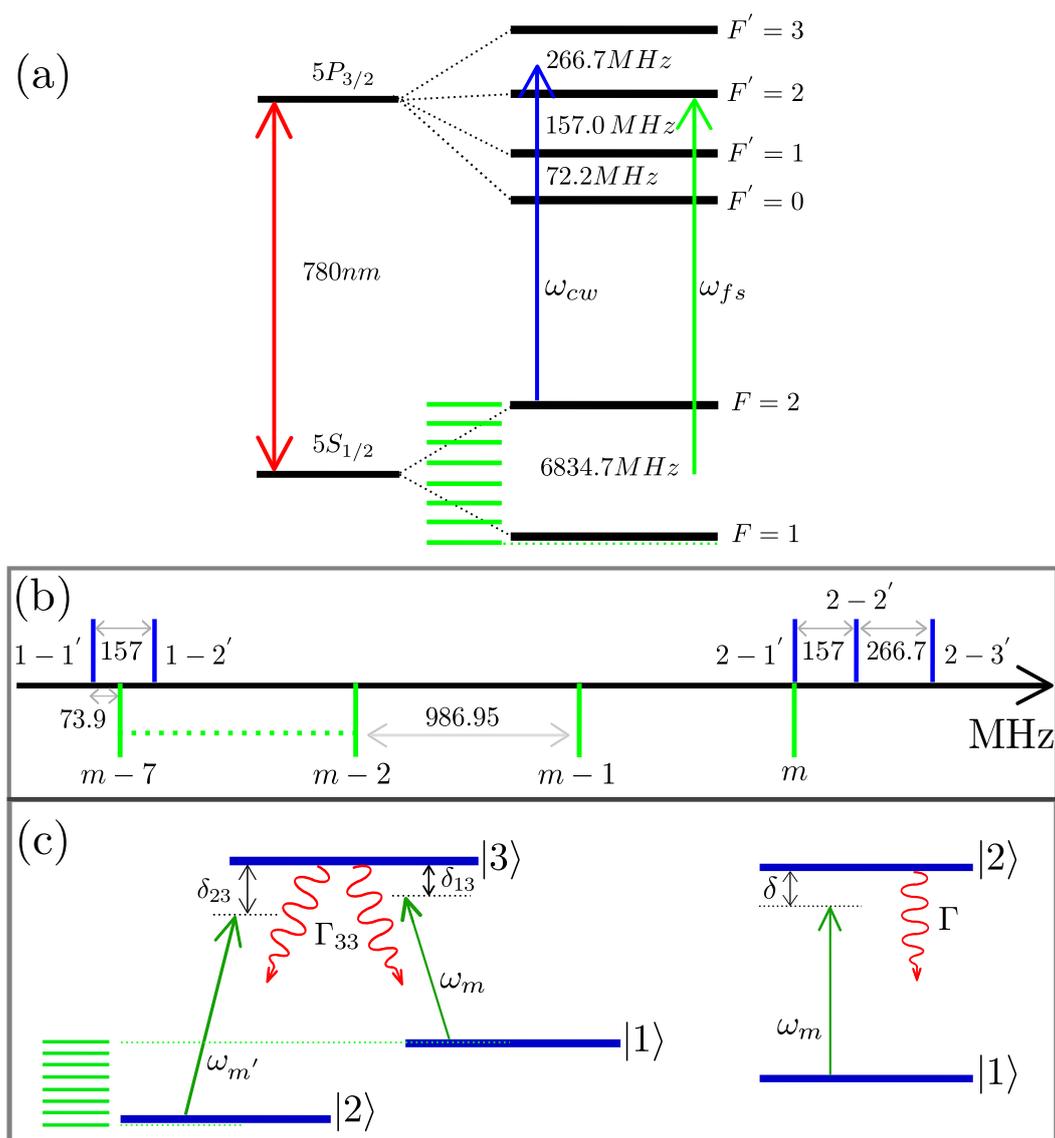


Figura 3.1 (a) Níveis de energia do ^{87}Rb envolvidos no experimento. As setas verde e azul representam os lasers de femtossegundos e de diodo, respectivamente. (b) Posição das transições atômicas (linhas azuis) em relação aos modos do pente de frequências (linhas verdes). As setas indicam as diferenças em frequências (em MHz), entre: (i) os níveis de energia, (ii) os modos do pente de frequências e (iii) os níveis de energia e os modos do pente de frequências. Consideramos que o modo m está em ressonância com a transição $F = 2 \rightarrow F' = 1$. (c) Modelo de um sistema de três níveis tipo Λ e um sistema de dois níveis, onde ω_m e $\omega_{m'}$ representam dois modos do pente de frequências.

população do nível $F = 2$, que chamaremos de estado $|1\rangle$ em ambos os esquemas (sistema de três e dois níveis). Por outro lado, o estado $|2\rangle$, no caso dos sistemas tipo Λ , será sempre representado pelo nível $F = 1$, ver Fig.3.1(a). Já o estado $|3\rangle$, correspondente ao estado excitado,

será no caso do primeiro sistema de três níveis, representado por $F' = 1$ e no caso do segundo sistema tipo Λ pelo nível $F' = 2$. No sistema de dois níveis o estado $|2\rangle$ será representado pelo nível $F' = 3$. O laser de femtossegundos pode excitar também a transição $F = 1 \rightarrow F' = 0$, mas esse caso particular pela regra de seleção $\Delta F = F' - F = 0, \pm 1$ [22, 25, 31], não afetaria a população do nível que estamos interessados ($F = 2$), pois não pode fazer a transição $F' = 0 \rightarrow F = 2$.

3.2 Modelagem teórica

Nesta subseção, calcularemos, analiticamente, a população do nível fundamental $F = 2$ do ^{87}Rb , ver Fig.3.1(a), devido somente à interação com os modos do pente de frequências. A partir das considerações realizadas no início do capítulo o laser de diodo não entrará nas nossas equações.

Para descrever a dinâmica temporal das populações atômicas e as coerências entre os distintos estados do átomo, usamos as equações de Bloch. Inicialmente, mostraremos o cálculo para um sistema tipo Λ e em seguida para um sistema de dois níveis.

O hamiltoniano total átomo-campo, para um sistema de três níveis tipo Λ , pode ser escrito como

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{V}}_0(\mathbf{r}, t). \quad (3.2)$$

Onde $\hat{\mathbf{H}}_0$ é o hamiltoniano livre do sistema,

$$\hat{\mathbf{H}}_0 = \hbar\omega_{21} |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_{31} |3\rangle\langle 3|, \quad (3.3)$$

com $\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j = \frac{E_i - E_j}{\hbar}$. O hamiltoniano de interação $\hat{\mathbf{V}}_0(\mathbf{r}, t)$ na aproximação de dipolo elétrico pode se escrever,

$$\hat{\mathbf{V}}_0(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{eD} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (3.4)$$

Utilizando a equação de Liouville (Eq.(12) capítulo 1), a aproximação de onda girante e passando para as variáveis lentas, obtemos as equações de Bloch para um sistema de três níveis tipo Λ , ver Fig.3.1(c). No Apêndice C, mostramos a dedução destas equações.

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \sigma_{31} - \Omega_{13}^*(t) \sigma_{13} \} + \Gamma_{31} \rho_{33} - \gamma \rho_{11} + \gamma \rho_{11}^{(0)}, \quad (3.5)$$

$$\dot{\rho}_{22} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) \sigma_{32} - \Omega_{23}^*(t) \sigma_{23} \} + \Gamma_{32} \rho_{33} - \gamma \rho_{22} + \gamma \rho_{22}^{(0)}, \quad (3.6)$$

$$\dot{\rho}_{33} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}^*(t) \sigma_{13} - \Omega_{13}(t) \sigma_{31} + \Omega_{23}^*(t) \sigma_{23} - \Omega_{23}(t) \sigma_{32} \} - (\Gamma_{33} + \gamma) \rho_{33}, \quad (3.7)$$

$$\dot{\sigma}_{12} = -(i\delta_{12} + \gamma) \sigma_{12} + \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \sigma_{32} - \Omega_{23}^*(t) \sigma_{13} \}, \quad (3.8)$$

$$\dot{\sigma}_{13} = - \left(i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \sigma_{13} - \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) (\rho_{11} - \rho_{33}) + \Omega_{23}(t) \sigma_{12} \}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\sigma}_{23} = - \left(i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \sigma_{23} - \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) (\rho_{22} - \rho_{33}) + \Omega_{13}(t) \sigma_{21} \}. \quad (3.10)$$

Onde ρ_{ii} representa a população do estado i , σ_{ij} ($i \neq j$) as coerências entre os estados $|i\rangle$ e $|j\rangle$, δ_{ij} as dessintonias entre os campos e as distintas transições atômicas, com $i, j = 1, 2, 3$, $\Omega_{k3}(t)$ as frequências de Rabi dependentes do tempo para as transições $|k\rangle \rightarrow |3\rangle$, Γ_{3k} as taxas de decaimento de $3 \rightarrow k$, com $k = 1, 2$, e $\Gamma_{33} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32}$, a taxa de decaimento espontâneo do nível excitado (tomamos $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\Gamma_{33}$), γ a taxa média de entrada e saída de átomos da região de interação e $\rho_{11}^{(0)}$ e $\rho_{22}^{(0)}$ as populações de equilíbrio térmico dos níveis $|1\rangle$ e $|2\rangle$ antes de interagirem com os campos elétricos.

Estamos interessados no estudo do sistema depois de atingir o estado estacionário, situação que acontece após alguns milissegundos, onde $\dot{\rho}_{ii} = \dot{\sigma}_{ij} = 0$. Também usaremos a condição de normalização $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1$ para eliminar uma das equações. Obtemos então:

$$(\Gamma_{31} + \gamma) \bar{\rho}_{11} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \bar{\sigma}_{31} - \Omega_{13}^*(t) \bar{\sigma}_{13} \} + \Gamma_{31} (1 - \bar{\rho}_{22}) + \gamma \rho_{11}^{(0)}, \quad (3.11)$$

$$(\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{22} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) \bar{\sigma}_{32} - \Omega_{23}^*(t) \bar{\sigma}_{23} \} + \Gamma_{32} (1 - \bar{\rho}_{11}) + \gamma \rho_{22}^{(0)}, \quad (3.12)$$

$$(i\delta_{12} + \gamma) \bar{\sigma}_{12} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \bar{\sigma}_{32} - \Omega_{23}^*(t) \bar{\sigma}_{13} \}, \quad (3.13)$$

$$\left(i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \bar{\sigma}_{13} = -\frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) (2\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho}_{22} - 1) + \Omega_{23}(t) \bar{\sigma}_{12} \}, \quad (3.14)$$

$$\left(i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \bar{\sigma}_{23} = -\frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) (2\bar{\rho}_{22} + \bar{\rho}_{11} - 1) + \Omega_{13}(t) \bar{\sigma}_{21} \}, \quad (3.15)$$

onde a barra significa que estamos estudando o estado estacionário do sistema.

Neste momento consideramos que, como mostrado na Fig.3.1(b), para qualquer grupo de átomos com uma certa velocidade, as ressonâncias com dois modos do pente de frequências nunca ocorrem simultaneamente, de forma que podemos tomar essas ressonâncias como independentes. Isto implica que vamos separar o cálculo da população do nível 1 em duas partes. Primeiro, calcularemos $\bar{\rho}_{11}$ somente na presença do campo que faz a transição $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e depois consideramos a interação somente com a transição $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, para então somarmos estas duas contribuições. O resultado obtido depois de fazer todos os cálculos (ver Apêndice C), onde utilizamos a aproximação $\Gamma_{33} \gg \gamma$ (temos que $\frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \approx 12$, os valores são mostrados mais adiante), é o seguinte:

$$\bar{\rho}_{11} = \rho_{11}^{(0)} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} |\Omega_{13}(t)|^2 \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{\left(4\delta_{13}^2 + \Gamma_{33}^2 + |\Omega_{13}(t)|^2 \right)} \right]^{-1} + \rho_{22}^{(0)} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} |\Omega_{23}(t)|^2 \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2 \Gamma_{33}}{2\gamma}} \right], \quad (3.16)$$

onde o primeiro termo à direita representa a solução das equações com um modo próximo à transição $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$, ao mesmo tempo que o segundo termo corresponde à solução quando o outro modo encontra-se perto da transição $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$.

O sistema Λ é de vital importância para a modelagem e interpretação física de nossos resultados, pois permite descrever como a população é afetada pelo distintos modos do pente de frequências. No caso do primeiro termo da direita da Eq.3.16 temos que esse modo (representado como m na Fig.3.1(c)) diminui a população do estado $|1\rangle$, enquanto o outro modo

(representado como m' na Fig.3.1(c)) excita a transição $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, portanto transfere população para o estado $|1\rangle$ por bombeio óptico, o que faz com que aumente a população desse estado.

A partir da Eq.3.1 (ver Fig.3.1(c)), vemos que existe uma diferença de $73,9\text{MHz}$ entre os dois grupos de átomos, que têm sua absorção aumentada ou diminuída, devido aos modos do pente de frequências.

Como exemplo, na Fig.3.2 mostramos o cálculo da população do nível $|1\rangle$, $\bar{\rho}_{11}$ usando a Eq.3.16. Observamos dois picos, como era de esperar, o pico para baixo, correspondente a uma diminuição de população devido ao modo do pente de frequências que atua na transição $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e o pico para cima que representa o aumento da população por bombeio óptico, causado pelo modo do pente que excita a transição $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$.

A curva da Fig.3.2 foi obtida para o modo m fazendo a transição $F = 2 \rightarrow F' = 1$ com $\Omega = 0,7\sqrt{\frac{1}{20}}\Gamma$ e o modo m' fazendo a transição $F = 1 \rightarrow F' = 1$ com $\Omega = 0,7\sqrt{\frac{5}{12}}\Gamma$. Além disso, utilizamos que $\frac{\Gamma}{2\pi} = 6,07\text{MHz}$ representa a taxa de decaimento do nível excitado (Γ_{33} nas equações de Bloch, ver tabela B.3 do apêndice B) e $\frac{\gamma}{2\pi} = 0,5\text{MHz}$. Este último valor foi calculado a partir de nossos resultados experimentais. Calculamos γ a partir da equação $\gamma = \frac{v}{d}$ onde v representa a velocidade média dos átomos do vapor de Rb à temperatura ambiente e d o diâmetro do feixe do laser de fs.

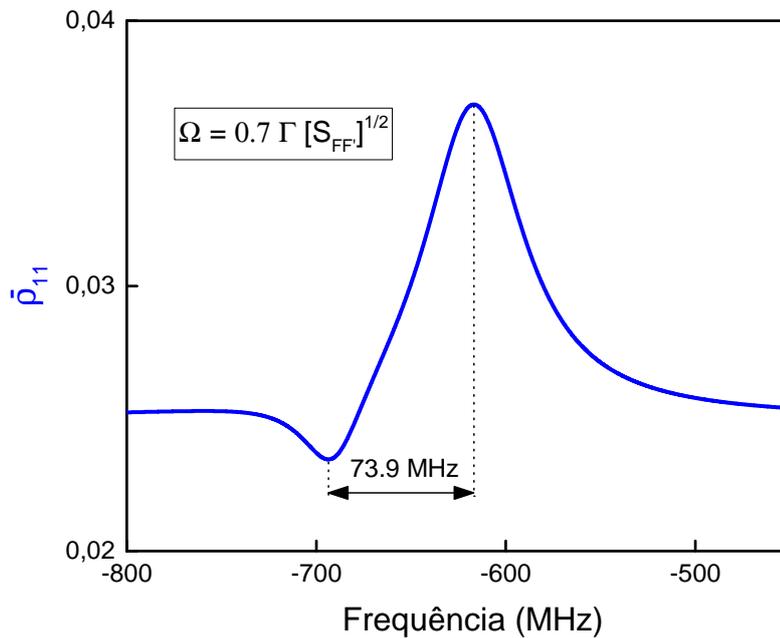


Figura 3.2 Resultado do cálculo da população do estado $|1\rangle$ a partir da Eq.3.16 para um sistema de três níveis tipo Λ .

Para o caso do sistema de dois níveis, ver Fig.3.1(c), as equações de Bloch foram escritas no capítulo 1 e a solução para $\bar{\rho}_{11}$ é bem mais simples (ver Apêndice C), onde obtemos:

$$\bar{\rho}_{11} = \frac{4\delta^2 + \Gamma^2 + |\Omega(t)|^2}{4\delta^2 + \Gamma^2 + 2|\Omega(t)|^2}. \quad (3.17)$$

Neste caso, o efeito da excitação da transição $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, pelo modo do pente de frequências, é simplesmente diminuir a população do estado $|1\rangle$.

3.3 Resultados teóricos para a linha D_2 do ^{87}Rb

Nesta subseção, calculamos a variação total da população do nível $F = 2$, do estado fundamental $5S_{1/2}$ do ^{87}Rb . Chamaremos essa variação de $\Delta\bar{\rho}_{11} = \bar{\rho}_{11} - \rho_{11}^{(0)}$, onde $\bar{\rho}_{11}$ corresponde à população do nível 1, na presença do campo de femtossegundos, devido ao dois sistemas de três níveis tipo Λ (Eq.3.16) e ao sistema de dois níveis (Eq.3.17). Para facilitar os cálculos, adotaremos que na ausência dos modos, os níveis hiperfinos do estado fundamental sejam igualmente populados, ou seja, $\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} = 0,5$. Os sistemas em estudo encontram-se representados na Fig.3.3. Em cada sistema especificamos a transição que o modo do pente de frequências está ressonante para um determinado grupo de velocidades.

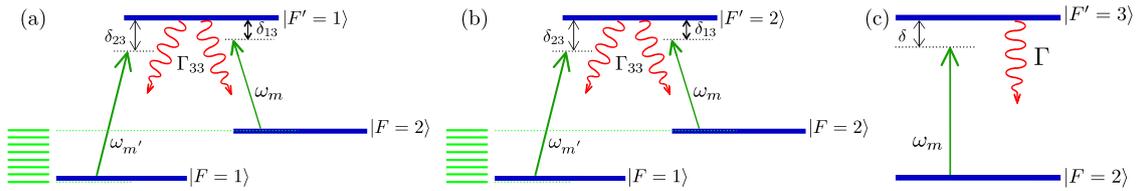


Figura 3.3 Modelo dos dois sistemas de três níveis tipo Λ e um sistema de dois níveis, onde ω_m e $\omega_{m'}$ representam dois modos do pente de frequências, onde cada estado é representado pelo nível de energia correspondente.

Como já mencionamos, o laser de diodo sonda a população do estado fundamental $F = 2$ em três transições distintas, as quais precisam ser adicionadas, tendo como peso seus momentos de dipolos. Temos que, conforme variamos a frequência do laser de diodo, todos os grupos de velocidades são sondados nas três transições. Entretanto, só estamos interessados nos grupos que interagem com o laser de femtossegundos. Na Fig.3.4, apresentamos os resultados do cálculo de $\Delta\bar{\rho}_{11}$ para a situação representada pelo sistema Λ da Fig.3.3(a), onde um modo m do pente de frequências está em ressonância com a transição $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ e outro modo $m' = m - 7$ encontra-se a $73,9\text{MHz}$ da transição $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$. O cálculo é feito separadamente para cada transição que o diodo sonda e depois são adicionados, levando em conta o peso dos momentos de dipolo e a distância entre os níveis hiperfinos $F' = 1, 2, 3$, ver Fig.3.1(a). Em cada pico sinalizamos a que transição corresponde para cada um dos lasers. Temos 6 picos, três para cima correspondentes ao modo do femto m' que, aumenta a população do estado $|1\rangle$ por bombeio óptico, e três picos para baixo que representam a interação com o modo m , o qual diminui a população. Tomamos o zero da escala em frequência, igual que no capítulo 2, na transição cíclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

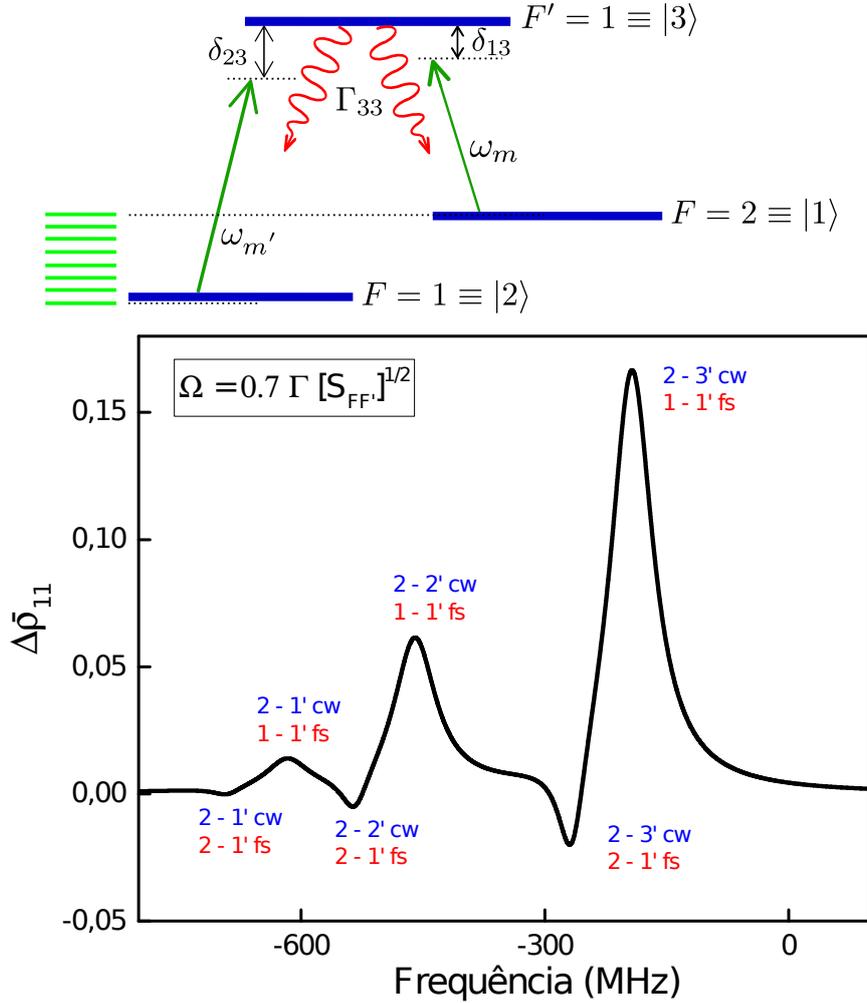


Figura 3.4 Sistema de três níveis $1^{ro}\Lambda$, com os níveis específicos. Variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$, devido à interação com os modos do pente de frequências. O diodo sonda a população em três transições diferentes (mostradas em letras azuis), em letras vermelhas representamos que transição excita o modo do pente. O zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

A curva foi obtida tratando a frequência de Rabi como $\Omega = 0,7\Gamma\sqrt{S_{FF'}}$, onde $S_{FF'}$ é a força do acoplamento, relativo, do campo com as transições de $5S_{1/2}, F \rightarrow 5P_{3/2}, F'$ (ver Tabela B.4 do apêndice B). Ao calcular a frequência de Rabi como $\Omega = 0,7\Gamma\sqrt{S_{FF'}}$ estamos considerando os nossos valores experimentais, ou seja, calculamos o campo elétrico do modo do pente de frequências a partir da intensidade do laser de femtossegundos [25] (que corresponde a $I_{fs} \approx 2,4I_s$, onde I_s é a intensidade de saturação, ver Tabela B.5 do apêndice B). Na construção de todos os gráficos teóricos seguintes (incluindo a Fig.3.4), mantemos os mesmos valores para Γ e γ utilizados na obtenção da Fig.3.2. Além disso, consideraremos as dessintonias com relação à transição $5S_{1/2}, F = 2 \rightarrow 5P_{3/2}, F' = 3$ correspondente à transição cíclica e dessa forma

escrevemos $\delta_{FF'} = \delta$ para $F = 2 \rightarrow F'$ e $\frac{\delta_{FF'}}{2\pi} = \frac{\delta}{2\pi} + 73,9 \text{ MHz}$ para $F = 1 \rightarrow F'$, com $F' = 1, 2$ variando em dependência da transição excitada que estudemos. Esta última informação é válida para ambos sistemas de três níveis, no caso do sistema de dois níveis, bastará ter em conta $\delta_{FF'} = \delta$ para $F = 2 \rightarrow F' = 3$.

A Fig.3.5 apresenta o resultado obtido para $\Delta\bar{\rho}_{11}$ quando os modos do pente de frequências estão interagindo com as transições $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ e $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$, como na Fig.3.3(b). Como o nível excitado do sistema de três níveis mudou, os valores de $S_{FF'}$ são distintos, causando uma variação nas relações de intensidades dos picos.

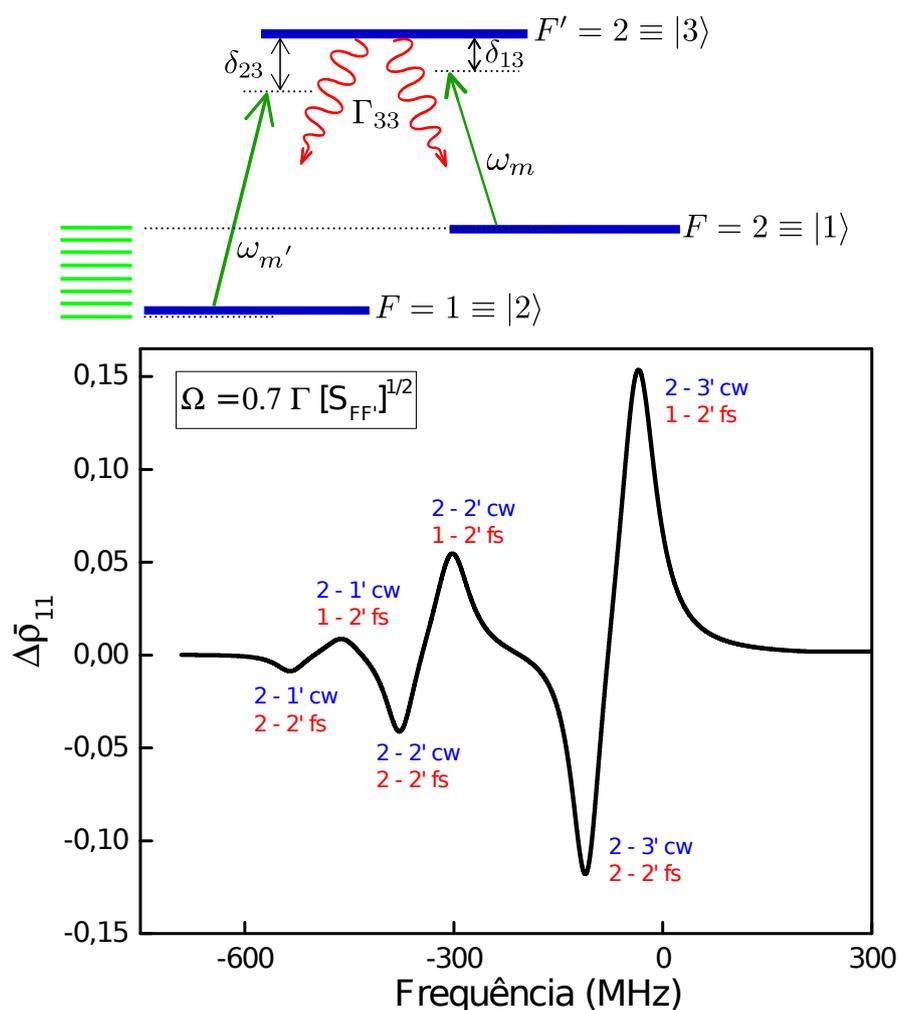


Figura 3.5 Sistema de três níveis $2^{do} \Lambda$, com os níveis específicos. Variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$, devido à interação com os modos do pente de frequências. O diodo sonda a população em três transições diferentes (mostradas em letras azuis), em letras vermelhas representamos que transição excita o modo do pente. O zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

Para o caso do sistema de dois níveis, o nível excitado é $F' = 3$. Nesse caso, somente temos diminuição da população do estado $|1\rangle$, pois temos somente um modo do pente de frequências

ressonante. O comportamento correspondente está mostrado na Fig.3.6.

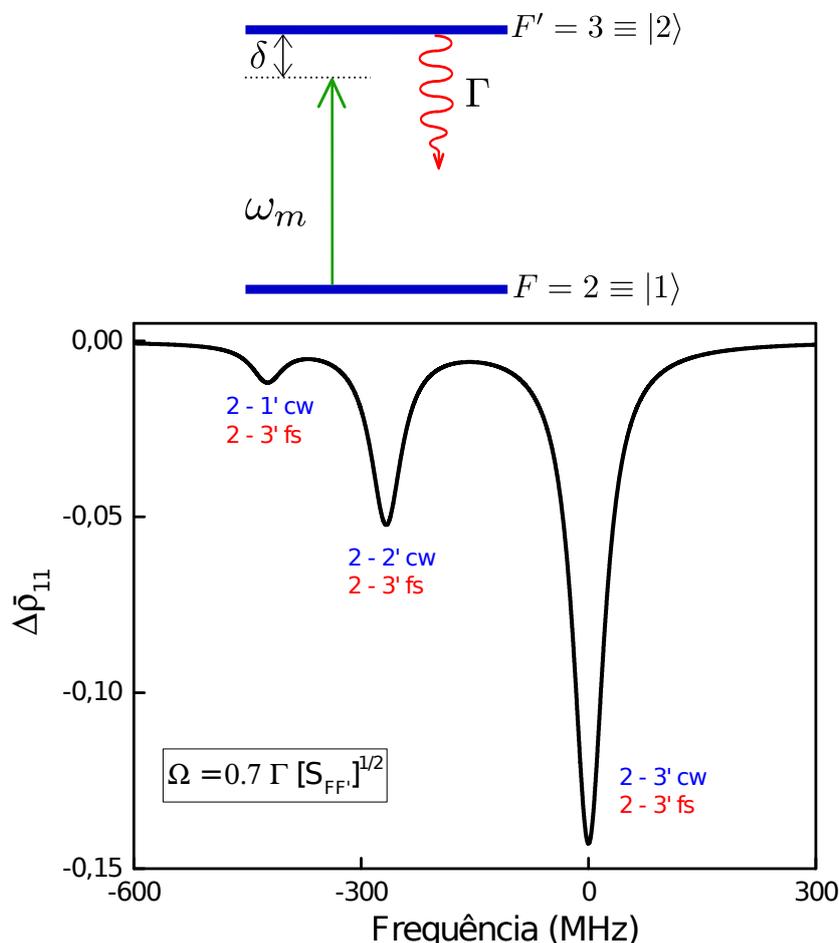


Figura 3.6 Sistema de dois níveis, com os níveis específicos. Variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$, devido a interação com o modo do pente de frequências. O diodo sonda a população em três transições diferentes (mostradas em letras azuis). Em letras vermelhas representamos que transição excita o modo do pente. O zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

É importante chamarmos a atenção de que os três sistemas estudados são totalmente independentes entre si e que modelamos o laser de femtossegundos como cinco laser de diodos (2 lasers por cada sistema de três níveis e 1 laser no sistema de dois níveis) sem nenhuma relação de fase entre eles. Isto não significa que estamos omitindo a relação de fase entre os pulsos do laser de fs, essa relação é considerada logo no início, como foi estudado no final do capítulo 1 e é ela que nos permite tratar o trem de pulsos como um pente de frequências [18].

Até o momento, temos modelado as diferentes contribuições de cada grupo de velocidades que interage com os modos do laser de fs em separado e mostramos nas figuras 3.4, 3.5 e 3.6 os resultados obtidos para cada um deles. Em seguida mostramos o que acontece quando unimos estas três contribuições, que é equivalente à obtenção do resultado total de nosso modelo teórico

para o cálculo da variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$, devido à interação com os modos do pente de frequências. Esse resultado é mostrado na Fig.3.7.

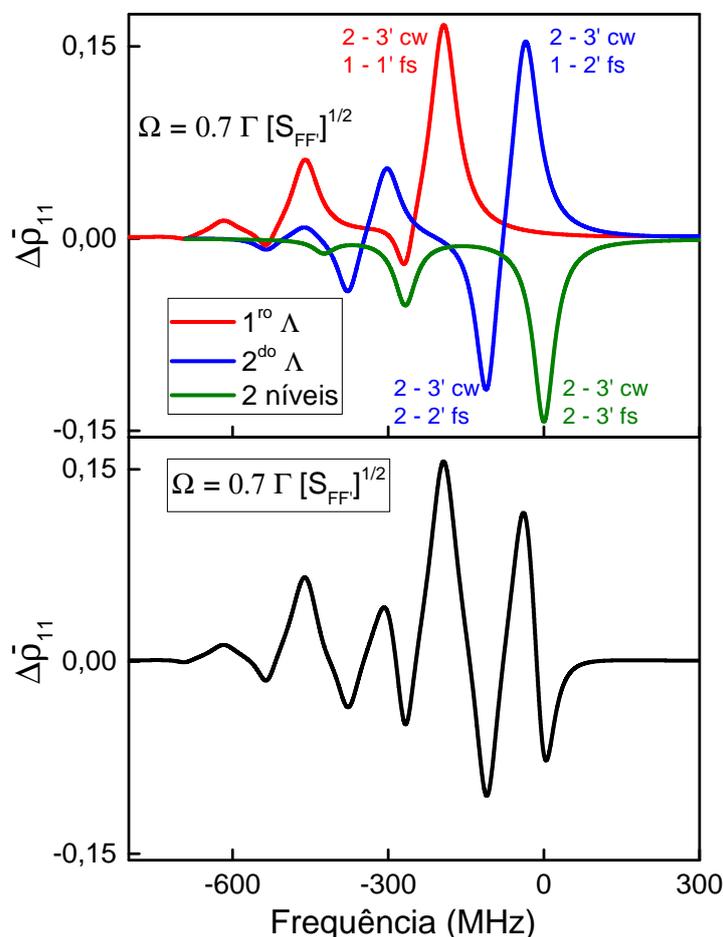


Figura 3.7 Variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do laser de diodo. Para (a), cada contribuição em separado, (b) para as três contribuições somadas. O zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

Finalmente, temos condições de comparar nossa teoria desenvolvida até agora com os resultados experimentais que foram apresentados no capítulo 2. Na Fig.3.8, temos a comparação entre a curva experimental (vermelha) correspondente à variação da transmissão do laser de diodo (com o sinal trocado, ΔT), em função de sua frequência, com ambos os lasers sintonizados em 780nm e a curva teórica (azul) que representa a variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$, em função da frequência do diodo para a situação experimental definida em Fig.3.8(a). Podemos observar que nosso modelo simples apresenta uma boa concordância com os resultados experimentais. Permite descrever a quantidade de picos para cima e para baixo, a

forma das curvas e a relação de intensidades entre os diferentes picos. Sinalizamos na Fig.3.8 que a maior diferença em frequência ao comparar teoria e experimento é de 30MHz . Devemos lembrar que em nosso experimento não temos travada a taxa de repetição, nem a frequência do *off-set* do laser pulsado e, mesmo assim, conseguimos explicar os processos óticos analisando a interação do vapor atômico com os modos do pente de frequências. O principal problema que representa não ter travada a taxa de repetição do laser de fs, é que não conseguimos colocar o modo do pente de frequências numa determinada posição fixa dentro da linha Doppler que estamos estudando.

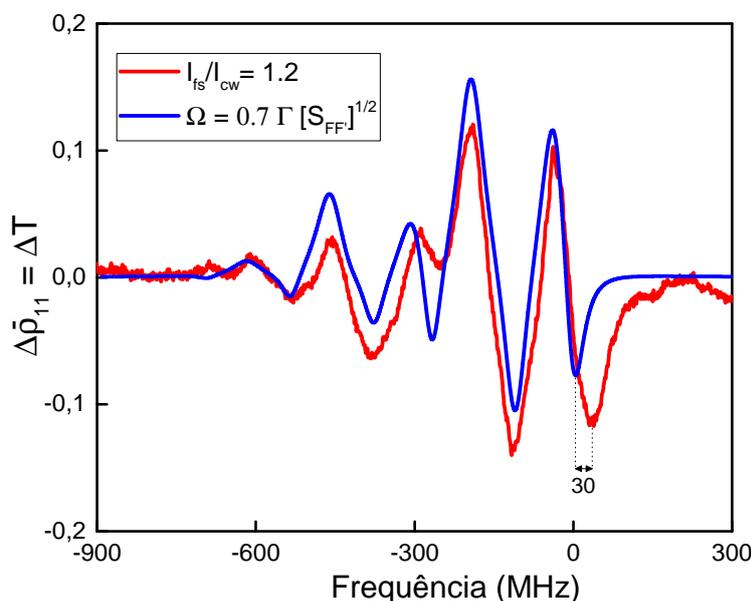


Figura 3.8 (a) Variação da transmissão do laser de diodo (com sinal trocado, ΔT), em função de sua frequência, com ambos os lasers sintonizados em 780nm . A relação de intensidades entre o laser de femtossegundos e o laser de diodo é de 1,2 ($\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 1,2$). (b) Resultado analítico que representa a variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do diodo para a situação experimental definida em (a) que corresponde com uma frequência de Rabi dada por $\Omega = 0,7\Gamma\sqrt{S_{FF}}$. Em ambas as figuras, o zero da escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Sinalizamos que a maior diferença em frequência ao comparar teoria e experimento é de 30MHz .

Na Fig.3.8 o laser de diodo varre toda a linha Doppler em aproximadamente 2 segundos. No experimento, ao utilizar o amplificador *lock-in*, 10ms corresponde ao valor da maior constante de tempo de integração que foi possível utilizar, pois nesse intervalo de tempo o laser de diodo varre 5MHz . Ao utilizar uma constante de tempo de integração de 100ms o laser de diodo varre 50MHz , o que não permite observar com resolução o efeito da interação do laser de fs com o vapor atômico devido a diferença em frequências das transições hiperfinas que estamos estudando (ver Fig.B.1).

Vale lembrar que nossos resultados experimentais mostram a variação da transmissão do laser de diodo (com sinal trocado) em função de sua frequência, devido à presença do laser de femtossegundos. Por outro lado, na modelagem teórica estudamos a variação da população do nível fundamental $5S_{1/2}$, $F = 2$ do ^{87}Rb devido à presença dos modos do pente. Portanto, deveríamos obter o seguinte resultado: quando a população de um nível aumenta, sua absorção também aumenta e, portanto, a transmissão do laser de diodo deve diminuir e vice-versa. No caso apresentado na Fig.3.8, observamos esse comportamento, pois a relação entre experimento e a teoria é $\Delta\bar{\rho}_{11} = \Delta T$, onde $\Delta T = -(T_{cw,fs} - T_{cw})$ e por isso que desde o capítulo anterior apresentamos os nossos resultados experimentais da variação da transmissão do laser de diodo com sinal trocado.

3.4 Dependência com a intensidade e a posição do modo do pente de frequências

Estudamos como a intensidade do laser de Ti:safira pode mudar os resultados antes obtidos a partir do modelo teórico. A Fig.3.9 mostra novamente a variação da população do estado $5S_{1/2}$, $F = 2$ do ^{87}Rb devido à presença dos modos do pente de frequências, em função da frequência do diodo. A curva em vermelho representa o resultado para o valor da frequência de Rabi com que realizamos o experimento $\Omega = 0,7\Gamma\sqrt{S_{FF'}}$, que corresponde a $2,4I_s$. Por outro lado as curvas em azul e verde correspondem a valores de potência do laser de femtossegundos um pouco menores. A curva azul foi obtida para aproximadamente 43% do valor experimental e é da ordem da intensidade de saturação (I_s), enquanto que a curva em verde foi para 29% e seu valor está abaixo de I_s . Ao diminuir a potência temos que a intensidade dos picos e a largura da linha diminuem, mas a forma da curva não varia.

Ao aumentarmos um pouco a potência do laser de fs, notamos que a largura da linha começa a aumentar, ver Fig.3.10, e no caso de $\Omega = 2\Gamma\sqrt{S_{FF'}}$ a forma da curva começa a mudar devido ao alargamento por potência. Por outro lado para os valores $\Omega = 0,7\Gamma\sqrt{S_{FF'}}$ e $\Omega = \Gamma\sqrt{S_{FF'}}$ as curvas são muito parecidas, o que nos faz pensar que no experimento nos encontramos efetivamente perto desses valores da frequência de Rabi. No caso da Fig.3.11, quando aumentamos a potência do laser de femtossegundos por um fator da ordem de 3 ou 4, a forma da curva muda consideravelmente devido ao efeito de alargamento por potência. Nestes casos, a intensidade do laser de fs alcança uma ordem de magnitude maior que a intensidade de saturação. A partir dos resultados mostrados, consideramos que o modelo consegue descrever os efeitos que acontecem quando variamos a potência do laser de femtossegundos.

Vamos ter em conta que o laser de femtossegundos não tem a taxa de repetição travada nem a frequência de *off-set*. Portanto, o modo do pente de frequências pode se deslocar na linha Doppler que estamos estudando e isso pode afetar os nossos resultados experimentais, como visto no capítulo anterior.

Primeiro explicaremos as considerações realizadas para modelar o deslocamento do pente de frequências e para isso é preciso voltar para a Fig.2.12 do capítulo 2 (que será também a Fig.3.12 do capítulo 3). Para um melhor entendimento, repetimos aqui essa figura e para poder identificar a que transição corresponde cada pico podemos olhar a Fig.3.7. Notamos na

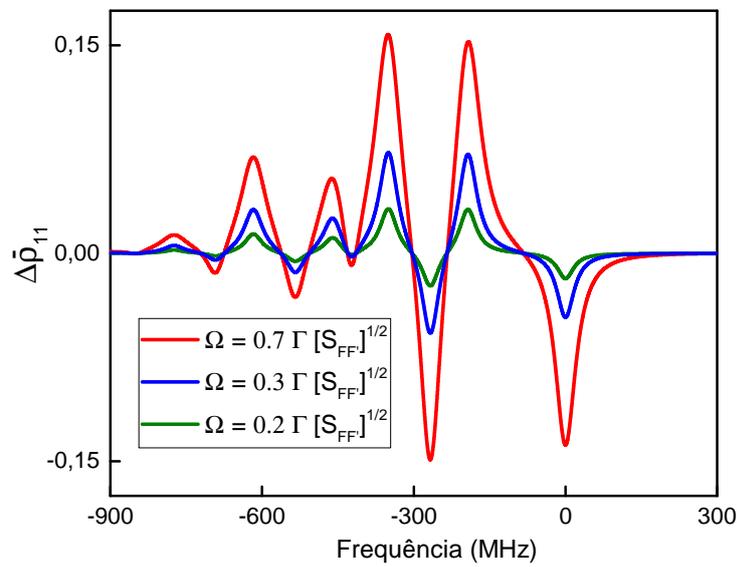


Figura 3.9 Resultado teórico que representa a variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}$, $F = 2$ em função da frequência do diodo para a diferentes potências do laser de femtossegundos.

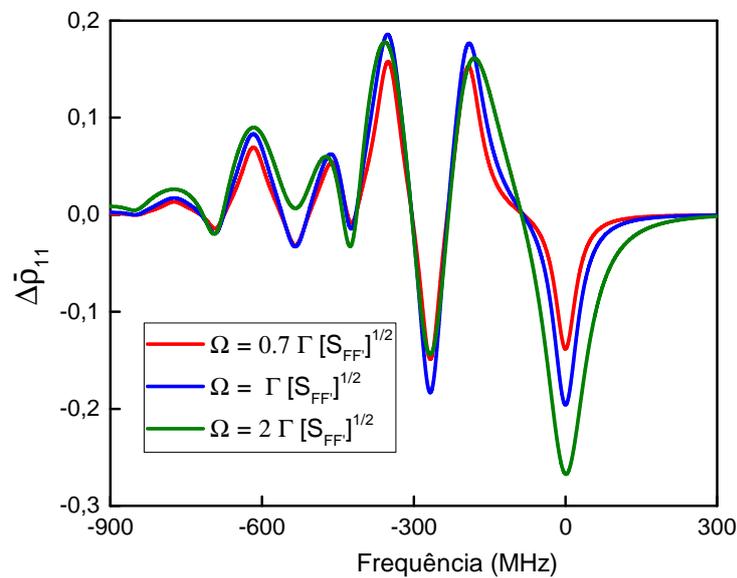


Figura 3.10 Cálculo da variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}$, $F = 2$ em função da frequência do diodo para a diferentes potências do laser de femtossegundos, para intensidades acima da I_5 .

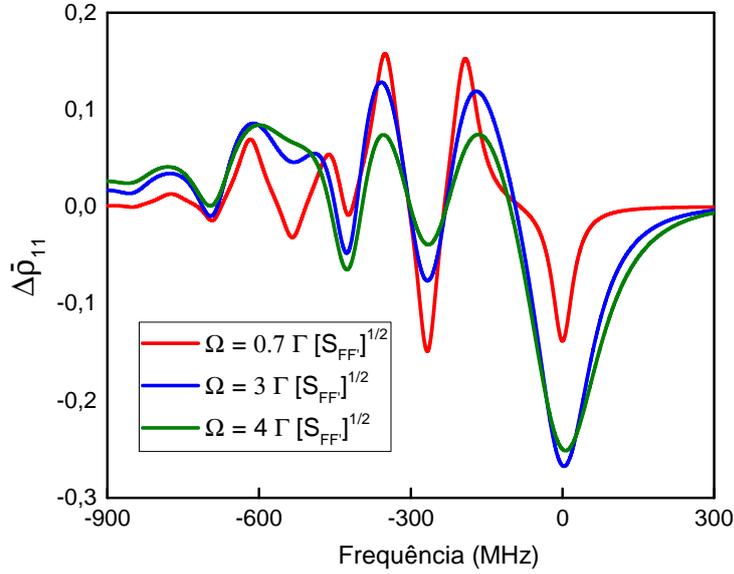


Figura 3.11 Cálculo da variação da população do estado $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}$, $F = 2$ em função da frequência do diodo para a diferentes potências do laser de femtossegundos, para $I \gg I_s$.

Fig.3.12(a) o pico mais intenso corresponde ao primeiro sistema Λ , especificamente à transição $F = 1 \rightarrow F' = 1$ do laser de femtossegundos e $F = 2 \rightarrow F' = 3$ (transição cíclica) no caso do laser de diodo. Por outro lado, nessa mesma figura os picos correspondentes às transições cíclicas sondadas pelo laser de diodo do segundo sistema Λ e no sistema de dois níveis (sinalizada por uma seta azul) são bem menores. Por esta razão, estimamos que o modo do pente de frequências encontra-se mais perto das transições correspondentes ao primeiro sistema Λ . Já na Fig.3.12(b), o pico mais intenso continua sendo o mesmo que em (a) mas a diferença em intensidades com relação às transições cíclicas do segundo sistema Λ e do sistema de dois níveis, diminui consideravelmente. Observamos como os picos de maior intensidade (transições cíclicas sondadas pelo laser de diodo) em cada um dos sistemas Λ e no sistema de dois níveis (sinalizado por a seta azul) começam a ser mais notáveis. Portanto, seguindo o mesmo raciocínio anterior podemos dizer que o modo do pente de frequências encontra-se numa posição mais perto das transições correspondentes ao segundo sistema Λ e ao sistema de dois níveis. Estes resultados indicam que à medida que as curvas experimentais se deslocam para a esquerda, comparado com a absorção saturada (como vemos nas Fig.3.12(a) e Fig.3.12(b)) o modo do pente de frequências se desloca para a direita, ou seja, no sentido de se aproximar da transição cíclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$.

Vamos testar essas ideias com a análise das Fig.3.12(c) e Fig.3.12(d). Notamos em (c) que o pico correspondente à transição mais intensa do sistema de dois níveis (sinalizado por uma seta azul) é maior que os picos correspondente as transições mais intensas dos sistemas Λ , o que nos dá a ideia que o pente está mais perto da transição cíclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$ (sistema

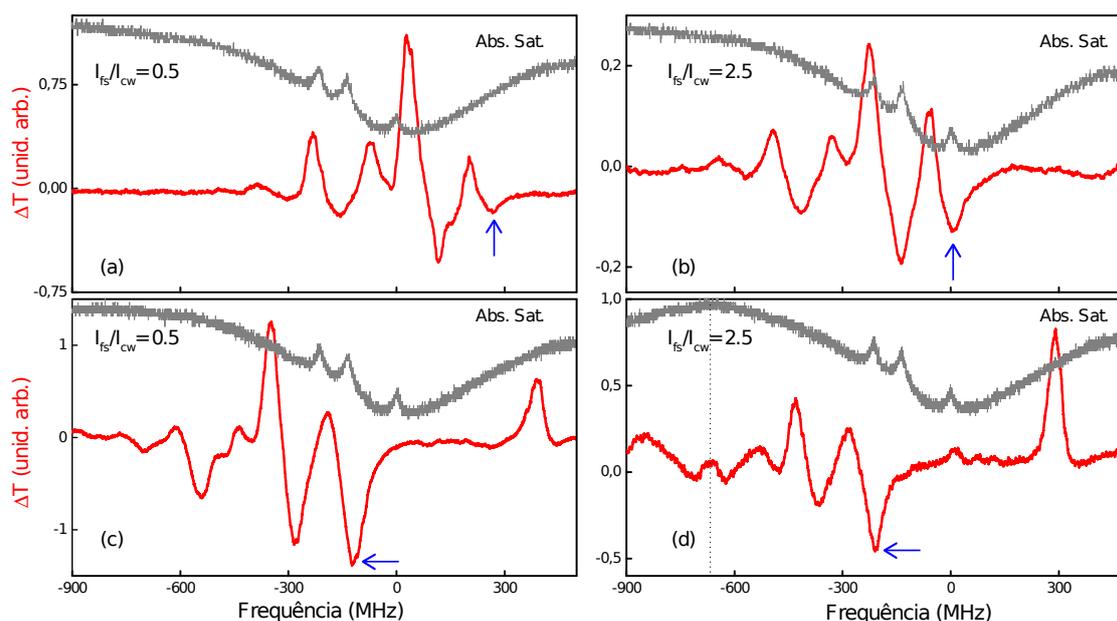


Figura 3.12 Variação da transmissão do laser de diodo na presença do laser de femtossegundos, ΔT (curva vermelha), em função de sua frequência, para a linha Doppler $F = 2$ do ^{87}Rb . Para dois pares de relações de intensidades diferentes: (a) e (c) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 0,5$ e (b) e (d) $\frac{I_{fs}}{I_{cw}} = 2,5$. A curva cinza representa a absorção saturada, cujo zero na escala em frequência está determinado pela transição $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb . Em (d) temos sinalizado com uma linha pontilhada em torno dos -650MHz o começo da rampa na outra direção. A seta azul indica o pico quando ambos os lasers fazem a transição cíclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$ do ^{87}Rb .

de dois níveis). No caso (d) as transições menos intensas dos três sistemas (as mais afastadas da transição cíclica) não aparecem na figura devido a que chegamos a um valor de frequência onde a rampa começa na outra direção (sinalizado por a linha pontilhada) e as transições mais intensas de cada sistema diminuem. Isto está em completa concordância com que o modo do pente de frequências está se deslocando para a direita (comparação realizada a partir da curva da absorção saturada). Além disso em (c) e (d) aparece um pico que corresponde a um aumento da transmissão que, como descrevemos no capítulo anterior, corresponde a um resquício da interação do pente com a linha Doppler $F = 3$ do ^{85}Rb e que só aparece quando a curva experimental se desloca para a esquerda (modo do pente se desloca para a direita).

Para modelar o deslocamento do pente dentro da linha Doppler, consideramos que a taxa de repetição do laser de femtossegundos está travada, mais não a frequência de *off-set*. Por conseguinte, o modo do pente de frequências ainda pode se deslocar dentro da linha Doppler. Isto pode ser analisado calculando $\Delta\tilde{\rho}_{11}$ para diferentes grupos de velocidades e pesando pelo perfil Doppler, igual ao que foi feito no capítulo 1, ver Eq.1.23. O resultado é mostrado na Fig.3.13 onde em (a) temos a variação da transmissão do laser de diodo (com sinal trocado) em função da frequência do laser de diodo, para as curvas experimentais que mostramos na Fig.2.12 no capítulo 2. As curvas foram organizadas a partir da posição do pico para baixo mais à direita, que representa a transição cíclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$, com relação à transição cíclica da

curva da absorção saturada. Os valores negativos (positivos) de $\Delta v_{2-3'exp}$ correspondem a um deslocamento deste pico para a esquerda (direita). Na curva correspondente ao valor de $\Delta v_{2-3'exp} = -210 \text{ MHz}$ temos uma linha pontilhada que corresponde ao começo da rampa na outra direção.

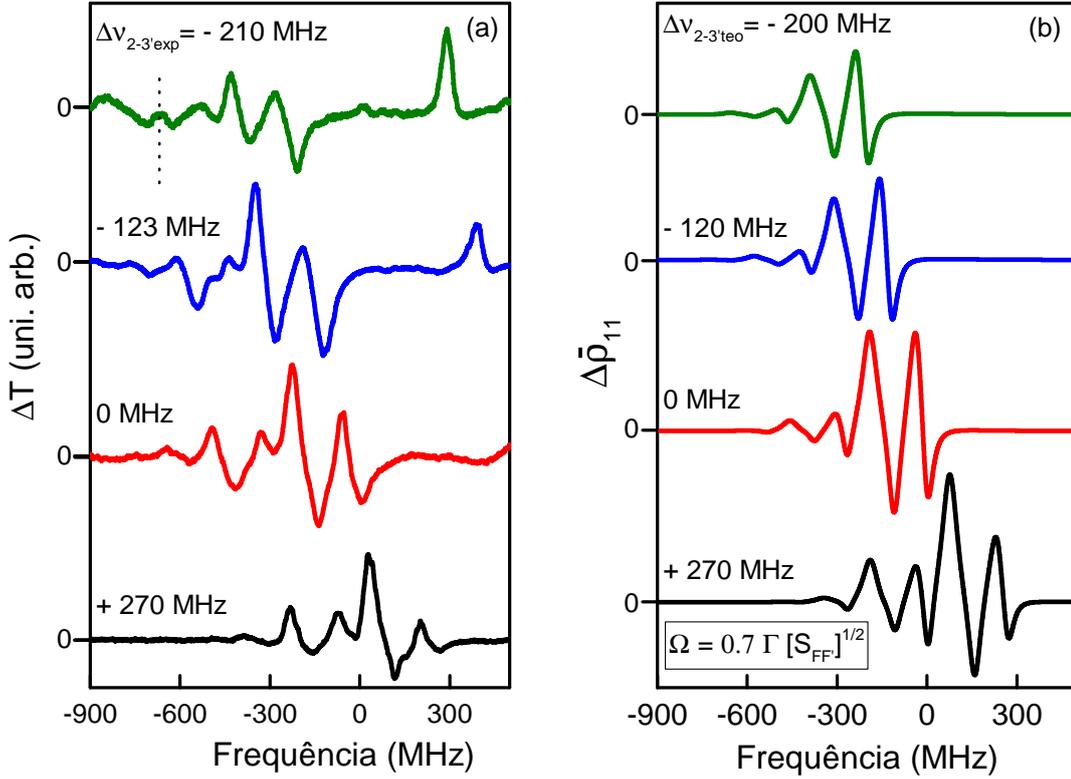


Figura 3.13 (a) Variação da transmissão do laser de diodo (com sinal trocado) em função da frequência do laser de diodo, as curvas em diferentes cores correspondem as curvas experimentais que mostramos na Fig.2.12 no capítulo 2. $\Delta v_{2-3'exp}$ corresponde a posição que ocupa o pico para baixo mais a direita respeito a transição cíclica $F = 2 \rightarrow F' = 3$ que medimos com a absorção saturada. (b) Variação da população do nível $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do diodo, onde consideramos que o modo do pente de frequências pode deslocar-se. $\Delta v_{2-3'teo}$ corresponde a posição do pico da transição cíclica do sistema de dois níveis respeito ao valor central em frequência de uma gaussiana centrada em 0.

Na Fig.3.13(b) apresentamos os valores calculados para a variação da população do nível $|1\rangle \equiv 5S_{1/2}, F = 2$ em função da frequência do diodo. As diferentes curvas representadas em (b) correspondem ao modo do pente de frequências deslocando-se dentro do perfil Doppler. Ao construir as figuras, tivemos em conta o raciocínio anterior, em que as curvas experimentais se deslocam para a esquerda (valores negativos de $\Delta v_{2-3'exp}$) o modo do pente de frequências está se trasladando para a direita. Isto é visto em nossa figura a partir de $\Delta v_{2-3'teo}$, que se refere ao valor em frequência para onde o pico, que corresponde a transição cíclica do sistema de dois

níveis, está se deslocando (o modo do pente de frequências desloca-se em sentido contrario) tomando como referência uma gaussiana centrada em 0. Em nosso modelo, isso significa que a gaussiana da Eq.1.23 está centrada, por exemplo, 200 MHz à direita no caso da curva verde em Fig.3.13(b).

Comparando os resultados experimentais e teóricos da Fig.3.13 observamos que nosso modelo teórico não consegue descrever muito bem a relação de intensidades dos picos para cima. Por outro lado, está em concordância com o resultado experimental de que à medida em que as curvas se deslocam para a esquerda perdemos informação relacionada aos picos correspondentes às outras duas transições não cíclicas que consideramos em nosso modelo. Esta perda de informação, como já foi mencionado, se deve ao deslocamento do modo do pente de frequências, para direita, no sentido onde cresce a energia e portanto se afastando das transições de menor energia, fato que foi considerado ao construir as curvas.

CAPÍTULO 4

Conclusões

Nesta dissertação, estudamos a interação entre um vapor atômico de Rubídio e um trem de pulsos ultracurtos, onde um laser de diodo foi usado para sondar a resposta atômica em três transições distintas da linha D_2 : $F = 2 \rightarrow F' = 1, 2, 3$.

1. Tratamos o problema no domínio temporal para um sistema de dois níveis. A solução numérica das equações de Bloch permitiram investigar o comportamento da população do nível excitado para diferentes dessintonias. Ao ter em conta o efeito Doppler, conseguimos observar a impressão do pente de frequências na distribuição atômica de velocidades num vapor de Rubídio.
2. Na parte experimental, utilizamos um laser de Ti:safira com alta taxa de repetição (986,95 MHz) para fazer espectroscopia coerente no vapor de Rb. Para esta taxa, o tempo de vida dos estados é muito maior que a separação dos pulsos, levando a um regime de acumulação coerente, onde o sistema atômico não interage com um único pulso, mas sim com um pente de frequências. Estudamos a transmissão do laser de diodo em função de sua frequência, na presença e na ausência do laser pulsado, quando ambos os lasers estão sintonizados na transição $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$. Os resultados experimentais mostram que a transmissão do laser de diodo aumenta ou diminui dependendo do modo do pente de frequências que está interagindo com o grupo de átomos.
3. Analisamos os resultados experimentais no domínio da frequência, a partir de um modelo teórico, onde modelamos o meio atômico por um conjunto de dois sistemas de três níveis (tipo Λ) e um sistema de dois níveis, todos independentes entre si, interagindo com os modos do pente de frequências. Conseguimos explicar com boa concordância a forma das curvas: o número de picos e com que transição está relacionado cada um dos picos que aparece em nossos resultados experimentais. O efeito do bombeio ótico foi de vital importância para o entendimento dos resultados.
4. Embora o experimento tenha sido realizado sem travar a taxa de repetição nem a frequência de *off-set* do laser de Ti:safira, conseguimos realizar espectroscopia coerente com uma boa distinção de todos os níveis hiperfinos envolvidos no processo de interação.

Perspectivas

1. Precisamos travar a taxa de repetição do laser de Ti:safira, o que nos proporcionaria um maior controle no experimento. Além disso, é necessário diminuir o ruído causado pelo *chopper* do *lock-in* que afeta as medições, o que permitiria uma medição simultânea da transmissão e da variação da transmissão do laser de diodo na presença e na ausência do laser de fs.
2. Diminuir a frequência de varredura do laser de diodo de forma que o tempo de integração do *lock-in* permita estudar com maior precisão os processos que ocorrem na interação de ambos os lasers com o vapor de Rubídio. Além de que, ao diminuir a frequência de varredura do laser de diodo e focar nossa atenção na transição cíclica, poderíamos estudar efeitos não lineares como mistura de quatro ondas e transparência eletromagneticamente induzida (EIT pela suas siglas em inglês) em nosso sistema.
3. Seria interessante utilizar um detetor mais rápido, de maneira que não precisássemos da utilização do *lock-in*. Além disso, poderíamos diminuir a intensidade do laser de femtossegundos para estudar os efeitos de saturação.
4. Desenvolver o modelo teórico para a linha Doppler $F = 3$ do ^{85}Rb e dessa forma poder modelar as duas linhas juntas.

Referências

- [1] MAIMAN, T. H. Optical and microwave-optical experiments in ruby. *Phys. Rev. Lett.*, v. 4, p. 564–566, Jun 1960.
- [2] JAVAN, A.; BENNETT, W. R.; HERRIOTT, D. R. Population inversion and continuous optical maser oscillation in a gas discharge containing a He-Ne mixture. *Phys. Rev. Lett.*, v. 6, p. 106–110, Feb 1961.
- [3] DIDOMENICO, M. Small signal analysis of internal (coupling type) modulation of lasers. *Journal of Applied Physics*, v. 35, n. 10, p. 2870–2876, 1964.
- [4] SPENCE, D. E.; KEAN, P. N.; SIBBETT, W. 60-fsec pulse generation from a self-mode-locked Ti:sapphire laser. *Opt. Lett.*, OSA, v. 16, n. 1, p. 42–44, Jan 1991.
- [5] BALTUSKA, A. et al. Attosecond control of electronic processes by intense light fields. *Nature*, v. 421, p. 611–615, Feb 2003.
- [6] HÄNSCH, T. W. Nobel lecture: Passion for precision. *Rev. Mod. Phys.*, v. 78, p. 1297–1309, Nov 2006.
- [7] BIRKS, T. A. et al. Full 2-d photonic bandgaps in silica/air structures. *Electronics Letters*, v. 31, n. 22, p. 1941–1943, Oct 1995.
- [8] RANKA, J. K.; WINDELER, R. S.; STENTZ, A. J. Optical properties of high-delta air-silica microstructure optical fibers. *Opt. Lett.*, v. 25, n. 11, p. 796–798, Jun 2000.
- [9] MCCALL, S. L.; HAHN, E. L. Self-induced transparency by pulsed coherent light. *Phys. Rev. Lett.*, v. 18, p. 908–911, May 1967.
- [10] CRISP, M. D. Propagation of small-area pulses of coherent light through a resonant medium. *Phys. Rev. A*, v. 1, p. 1604–1611, Jun 1970.
- [11] KOCHAROVSKAYA, . A.; KHANIN, Y. I. Population trapping and coherent bleaching of a three-level medium by a periodic train of ultrashort pulses. *Sov. Phys. JETP*, v. 63, p. 945–950, May 1986.
- [12] Felinto, D. et al. Coherent accumulation in two-level atoms excited by a train of ultrashort pulses. *Opt. Commun.*, v. 215, p. 69–73, 2003.

- [13] FELINTO, D.; ACIOLI, L. H.; VIANNA, S. S. Accumulative effects in the coherence of three-level atoms excited by femtosecond-laser frequency combs. *Phys. Rev. A*, v. 70, p. 043403, Oct 2004.
- [14] AUMILER, D. et al. Velocity selective optical pumping of Rb hyperfine lines induced by a train of femtosecond pulses. *Phys. Rev. Lett*, v. 95, p. 233001, Nov 2005.
- [15] BAN, T. et al. Mapping of the optical frequency comb to the atom-velocity comb. *Phys. Rev. A*, v. 73, p. 043407(1), Apr 2006.
- [16] BAN, T. et al. Cancellation of the coherent accumulation in rubidium atoms excited by a train of femtosecond pulses. *Phys. Rev. A*, v. 76, p. 043410(1), Oct 2007.
- [17] FELINTO, D.; LÓPEZ, C. E. E. Theory for direct frequency-comb spectroscopy. *Phys. Rev. A*, v. 80, p. 013419, Jul 2009.
- [18] MORENO, M. P.; VIANNA, S. S. Femtosecond 1 GHz Ti:sapphire laser as a tool for coherent spectroscopy in atomic vapor. *J. Opt. Soc. Am. B*, v. 28, n. 9, p. 2066–2069, Sep 2011.
- [19] MORENO, M. P.; VIANNA, S. S. Coherence induced by a train of ultrashort pulses in a lambda-type system. *J. Opt. Soc. Am. B*, v. 28, n. 5, p. 1124–1129, May 2011.
- [20] CUNDIFF, S. T. Phase stabilization of ultrashort optical pulses. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 35, n. 8, p. R43–R59, Apr 2002.
- [21] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1991. (Quantum Mechanics, v. 1).
- [22] SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1967. 1-334 p.
- [23] YARIV, A. *Quantum electronics*. Wiley, 1967.
- [24] FOOT, C. *Atomic physics*. Oxford University Press, 2005. (Oxford master series in physics).
- [25] BOYD, R. *Nonlinear Optics*. Elsevier Science, 2008. (Nonlinear Optics Series).
- [26] PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007.
- [27] WIEMAN, C. E.; HOLLBERG, L. Using diode lasers for atomic physics. *Review of Scientific Instruments*, v. 62, n. 1, p. 1–20, Jan 1991.
- [28] NAGOURNEY, W. *Quantum Electronics for Atomic Physics and Telecommunication*. Oxford University Press, 2014. (Oxford graduate texts).
- [29] PRESTON, D. W. Doppler-free saturated absorption: Laser spectroscopy. *American Journal of Physics*, v. 64, n. 11, p. 1432–1436, Jul 1996.

- [30] JACQUES, V. et al. Nonlinear spectroscopy of rubidium: an undergraduate experiment. *European Journal of Physics*, v. 30, n. 5, p. 921–934, Jul 2009.
- [31] SCULLY, M. O. M. O.; ZUBAIRY MUHAMMAD SUHAIL, . *Quantum optics*. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1997. ISBN 0521434580.
- [32] STECK, D. A. *Alkali D Line Data*. Feb 2016. Disponível em: <<http://steck.us/alkalidata>>.

APÊNDICE A

Programa em C++

Apresentamos o código na linguagem C++ do programa utilizado para calcular a evolução temporal dos elementos da matriz densidade para um trem de pulsos ultracurtos interagindo com um sistema de dois níveis. As equações são resolvidas numericamente na presença dos pulsos e analiticamente na ausência deles.

Programa

```
# include <stdio.h>
# include <math.h>

double q12, q22, w, alpha, N, wL, w2, dd, Omega, h, t, Tr, fr, phi, Tp, x, y;
double a[4]={0}, b[4]={0}, k1[4]={0}, k2[4]={0}, k3[4]={0}, k4[4]={0};
double Pi = 3.141592654;
int Pulsos, i, j, k, m, iteracoes, g;

//Equações de Bloch

double f(double a1, double a2, double a12, double b12, int i)
{
    if (i==0) return +2*Omega*(b12*cos(alpha)+a12*sin(alpha)) + q22*a2;
    if (i==1) return -2*Omega*(b12*cos(alpha)+a12*sin(alpha)) - q22*a2;
    if (i==2) return -dd* b12 - Omega*(a2-a1)*sin(alpha) - q12*a12;
    if (i==3) return +dd* a12 + Omega*(a2-a1)*cos(alpha) - q12*b12;
}

main()
{ FILE *arquivo;
  arquivo = fopen("detuning0.dat","w");//Cria o arquivo detuning0.dat
  iteracoes = 10 ;

  // Variáveis físicas do problema, em unidades do SI

  q22 = (2*Pi)*5e6;           // Taxa de relaxação da população
  q12 = 0.5*q22;             // Taxa de relaxação da coerência
  fr = 100e6;                 // Taxa de repetição do trem de pulsos
```

```

Tp = 100e-15;           // Largura temporal do pulso
Pulsos = 100;          // Número de pulsos do trem
Omega = 0.01*q22/(fr*Tp); // Frequência de Rabi por modo
w2 = (2*Pi)*(400e12);  // Frequência de ressonância do átomo
wL = (2*Pi)*400e12;    // Frequência da onda portadora do trem de pulsos
phi = (2*Pi)*0.4*0;    // Fase relacionada ao off-set
t = 0; N = -1; dd = w2-wL; // dd é a dessintonia
Tr = 1/fr;

// Condições iniciais
a[0] = 1; // População do estado 1
a[1] = 0; // População do estado 2
a[2] = 0; // Parte real da coerência
a[3] = 0; // Parte imaginaria da coerência

// Interação com N pulsos do trem

for ( i = 0; i <= (2* Pulsos)+1; i++)
{
w = a[0] + a[1]; //Soma das populações tem que ser 1

// Imprime o resultado na tela
printf("%d %12.10f %12.10f %12.10f %12.10f", i, a[0], a[1], sqrt(a[2]*a[2]+a[3]*a[3]),w);
printf("\n ");

// Imprime o resultado no arquivo
fprintf(arquivo,"%12.10f %12.10f %12.10f %12.10f",t, a[0], a[1], sqrt(a[2]*a[2]+a[3]*a[3]));
fprintf(arquivo,"\n ");

//Solução das equações na presença do pulsos

if (i%2 == 0)
{
N = N + 1;
g = iteracoes;
h = (1/double (g))*Tp; // passo do tempo
alpha = -N*wL*Tr + N*phi; //fase do campo elétrico do laser

//Começo do código do Runge-Kutta de quarta ordem

for(int k = 0; k <= g; k++)
{
t = t + h; // tempo crescendo com passo h

```

```

for(j = 0; j <= 3; j++)
k1[j] = f(a[0],a[1],a[2],a[3],j);

for(j = 0; j <= 3; j++)
k2[j] = f(a[0] + k1[0]*h/2,a[1] + k1[1]*h/2,a[2] + k1[2]*h/2,a[3] + k1[3]*h/2,j);

for(j = 0; j <= 3; j++)
k3[j] = f(a[0] + k2[0]*h/2,a[1] + k2[1]*h/2,a[2] + k2[2]*h/2,a[3] + k2[3]*h/2,j);

for(j = 0; j <= 3; j++)
k4[j] = f(a[0] + k3[0]*h,a[1] + k3[1]*h,a[2] + k3[2]*h,a[3] + k3[3]*h,j);

for(j = 0; j <= 3; j++)
b[j] = a[j] + h*(k1[j]/6 + k2[j]/3 + k3[j]/3 + k4[j]/6);

for (m = 0; m <= 3; m++)
a[m] = b[m];
    }
}

//Solução das equações no decaimento

if (i%2 == 1)
{
    t = t + (Tr-Tp);
    x = dd*(Tr-Tp);
    y = (Tr-Tp)*q22;

    b[0] = a[0] + a[1]*(1-exp(-y));
    b[1] = a[1]*exp(-y);
    b[2] = (a[2]*cos(x) - a[3]*sin(x))*exp(-y/2);
    b[3] = (a[2]*sin(x) + a[3]*cos(x))*exp(-y/2);

    for (m = 0; m <= 3; m++)
a[m] = b[m];
}
}

fclose(arquivo); //Fecha o arquivo
printf("\a"); //Alerta sonoro de finalização do programa

}

```

APÊNDICE B

Tabela de dados

Apresentamos neste apêndice as constantes utilizadas na dissertação. Em cada tabela, incluímos a referência usada.

Tabela B.1 - Principais Constantes Físicas [32]		
Velocidade da luz	c	$3.0 * 10^8 \text{ m/s}$
Permissividade elétrica do vácuo	ϵ_0	$8.85 * 10^{-12} \text{ F/m}$
Permissividade magnética do vácuo	μ_0	$4\pi * 10^{-7} \text{ H/m}$
Constante de Planck	\hbar	$1.05 * 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Tabela B.2 - Propriedades Físicas do Rubídio [32]		
	Número atômico	37
^{85}Rb	Abundância natural relativa	72,2%
	Spin nuclear	5/2
^{87}Rb	Abundância natural relativa	27,8%
	Spin nuclear	3/2

Tabela B.3 - Rubídio, Linha D_2 ($5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$) Propriedades das Transições Óticas [32]		
Frequência de excitação	ω_0	$2\pi \cdot 384 \text{ THz}$
Comprimento de onda (vácuo)	λ	$780,2 \text{ nm}$
Tempo de vida	T	$26,2 \text{ ns}$
Largura de linha	Γ	$2\pi \cdot 6,07 \text{ MHz}$
Momento de dipolo elétrico	μ	$3,6 \cdot 10^{29} \text{ C} \cdot \text{m}$

Tabela B.4 - Força do Oscilador [$S_{FF'}$] das transições hiperfinas $F \rightarrow F'$ do ^{87}Rb [32]				
$5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ (Linha D_2)	S_{23}	7/10	S_{12}	5/12
	S_{22}	1/4	S_{11}	5/12
	S_{21}	1/20	S_{10}	1/6

Tabela B.5 - Rubídio, Linha D_2 ($5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$) Propriedades das Transições Óticas [32]		
Momento de dipolo	$\langle J = 1/2 er J' = 3/2 \rangle$	$3.58 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$
Intensidade de saturação $F = 2 \rightarrow F' = 3$	I_s	$3.57 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2}$

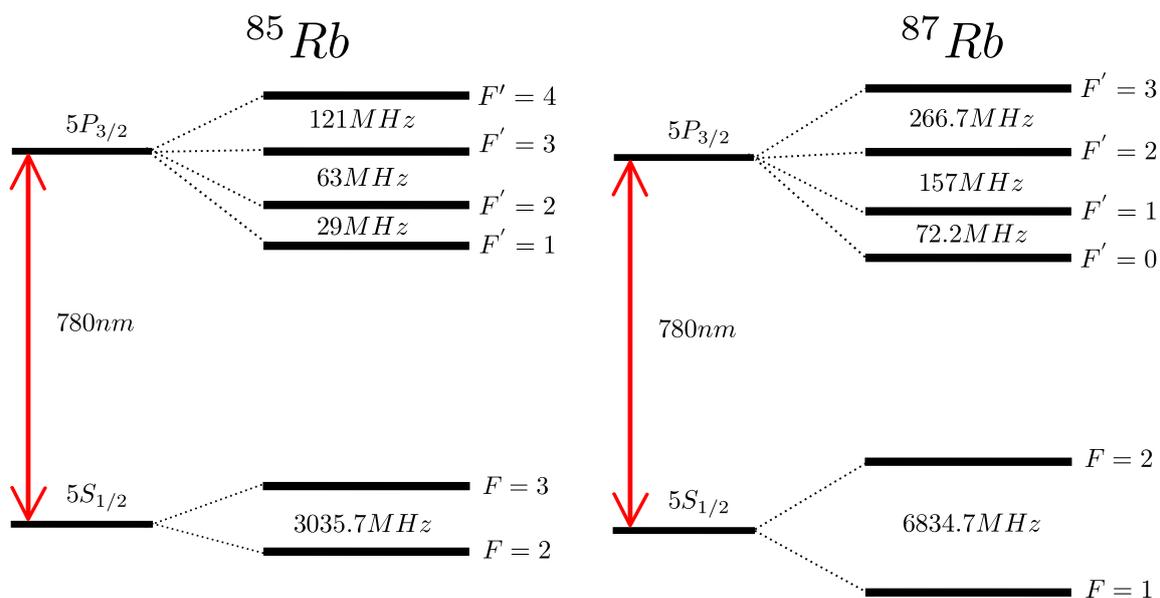


Figura B.1 Diagrama de níveis para a estrutura hiperfina da linha D_2 do ^{85}Rb e ^{87}Rb .

Equações de Bloch para um sistema de três níveis

Λ

Consideremos um sistema de três níveis tipo Λ , ver Fig.C.1, excitado por dois campos elétricos

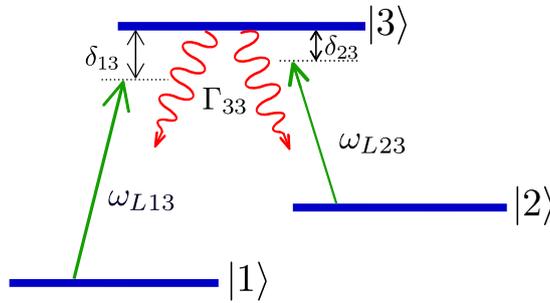


Figura C.1 Sistema de três níveis tipo Λ .

$$\mathbf{E}_{i3}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{i3}(\mathbf{r}, t) \cos(\omega_{L_{i3}} t - \mathbf{k}_{i3} \cdot \mathbf{r}) \hat{e}_i,$$

onde ε_{i3} representa a amplitude do campo, $\omega_{L_{i3}}$ a frequência do campo, k_{i3} o vetor de onda do campo, com $i = 1, 2$ e \hat{e}_i representa o vetor unitário de polarização que indica a direção de oscilação do campo elétrico.

O hamiltoniano total do sistema átomo-campo pode ser escrito como

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{V}}_0(\mathbf{r}, t).$$

Onde $\hat{\mathbf{H}}_0$ é o hamiltoniano livre do sistema,

$$\hat{\mathbf{H}}_0 = \hbar\omega_{21} |2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_{31} |3\rangle\langle 3|,$$

com $\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j = \frac{E_i - E_j}{\hbar}$. Todas as energias sendo definidas a partir da energia E_1 do nível de menor energia.

No sistema temos que as transições $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$ são permitidas por dipolo elétrico, enquanto a transição $1 \rightarrow 2$ é proibida. O hamiltoniano de interação $\hat{\mathbf{V}}_0(\mathbf{r}, t)$ na aproximação de dipolo elétrico,

$$\hat{\mathbf{V}}_0(\mathbf{r}, t) = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

na base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ pode ser reescrito como:

$$\hat{V}_0(\mathbf{r}, t) = -\mu_{13}\varepsilon_{13}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r})|1\rangle\langle 3| - \mu_{23}\varepsilon_{23}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})|2\rangle\langle 3| + h.c.,$$

onde h.c significa “hermitiano conjugado”, e $\mu_{ij} = e\langle i|\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i|j\rangle$ é o momento de dipolo elétrico da transição $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$.

A partir da equação de Liouville $\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\rho}, \hat{\mathbf{H}}]$, onde $\hat{\rho}$ representa a matriz densidade, temos então

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{i}{\hbar}\langle 1|[\hat{\rho}, \hat{\mathbf{H}}_0]|1\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle 1|[\hat{\rho}, \hat{V}]|1\rangle,$$

onde o primeiro termo é zero pois $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ são autoestados de $\hat{\mathbf{H}}_0$, esse primeiro termo também é 0 para $\dot{\rho}_{22}$ e $\dot{\rho}_{33}$ pela mesmas razões. Temos então

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{i}{\hbar}(\mu_{13}\rho_{31} - \mu_{13}^*\rho_{13})\varepsilon_{13}\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r}).$$

Fazendo o mesmo para $\dot{\rho}_{22}$, $\dot{\rho}_{33}$ e $\dot{\rho}_{44}$ obtemos,

$$\dot{\rho}_{22} = \frac{i}{\hbar}(\mu_{23}\rho_{32} - \mu_{23}^*\rho_{23})\varepsilon_{23}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\dot{\rho}_{33} = \frac{i}{\hbar}\{(\mu_{13}^*\rho_{13} - \mu_{13}\rho_{31})\varepsilon_{13}\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r}) + (\mu_{23}^*\rho_{23} - \mu_{23}\rho_{32})\varepsilon_{23}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})\}.$$

Para o caso das coerências, temos as seguintes equações

$$\dot{\rho}_{12} = i\omega_{21}\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}\{-\mu_{23}^*\varepsilon_{23}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})\rho_{13} + \mu_{13}\varepsilon_{13}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r})\rho_{32}\},$$

$$\dot{\rho}_{13} = i\omega_{31}\rho_{13} + \frac{i}{\hbar}\{-\mu_{13}\varepsilon_{13}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r})(\rho_{11} - \rho_{33}) - \mu_{23}\varepsilon_{23}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})\rho_{12}\},$$

$$\dot{\rho}_{23} = i\omega_{32}\rho_{23} + \frac{i}{\hbar}\{-\mu_{23}\varepsilon_{23}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})(\rho_{22} - \rho_{33}) - \mu_{13}\varepsilon_{13}(\mathbf{r}, t)\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r})\rho_{21}\}.$$

Vamos definir as frequências de Rabi dependentes do tempo,

$$\Omega_{13}(t) = \frac{\mu_{13}\varepsilon_{13}(t)}{\hbar},$$

$$\Omega_{23}(t) = \frac{\mu_{23}\varepsilon_{23}(t)}{\hbar},$$

então temos

$$\dot{\rho}_{11} = i(\Omega_{13}(t)\rho_{31} - \Omega_{13}^*(t)\rho_{13})\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\dot{\rho}_{22} = i(\Omega_{23}(t)\rho_{32} - \Omega_{23}^*(t)\rho_{23})\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\dot{\rho}_{33} = i\{(\Omega_{13}^*(t)\rho_{13} - \Omega_{13}(t)\rho_{31})\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r}) + (\Omega_{23}^*(t)\rho_{23} - \Omega_{23}(t)\rho_{32})\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})\},$$

$$\dot{\rho}_{12} = i\{\omega_{21}\rho_{12} - \Omega_{23}^*(t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})\rho_{13} + \Omega_{13}(t)\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r})\rho_{32}\},$$

$$\dot{\rho}_{13} = i\{\omega_{31}\rho_{13} - \Omega_{13}(t)\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r})(\rho_{11} - \rho_{33}) - \Omega_{23}(t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})\rho_{12}\},$$

$$\dot{\rho}_{23} = i\{\omega_{32}\rho_{23} - \Omega_{23}(t)\cos(\omega_{L23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r})(\rho_{22} - \rho_{33}) - \Omega_{13}(t)\cos(\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r})\rho_{21}\}.$$

Utilizando a aproximação de onda girante, passando para as variáveis lentas,

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= \sigma_{12} e^{i[(\omega_{L13} - \omega_{23})t - (\mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{23}) \cdot \mathbf{r}]}, \\ \rho_{13} &= \sigma_{13} e^{i[\omega_{L13}t - \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r}]}, \\ \rho_{23} &= \sigma_{23} e^{i[\omega_{23}t - \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r}]},\end{aligned}$$

e incluindo os efeitos da emissão espontânea e alargamento por tempo de vôo médio, ficamos com as seguintes equações de Bloch

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{11} &= \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \sigma_{31} - \Omega_{13}^*(t) \sigma_{13} \} + \Gamma_{31} \rho_{33} - \gamma \rho_{11} + \gamma \rho_{11}^{(0)}, \\ \dot{\rho}_{22} &= \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) \sigma_{32} - \Omega_{23}^*(t) \sigma_{23} \} + \Gamma_{32} \rho_{33} - \gamma \rho_{22} + \gamma \rho_{22}^{(0)}, \\ \dot{\rho}_{33} &= \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}^*(t) \sigma_{13} - \Omega_{13}(t) \sigma_{31} + \Omega_{23}^*(t) \sigma_{23} - \Omega_{23}(t) \sigma_{32} \} - (\Gamma_{33} + \gamma) \rho_{33}, \\ \dot{\sigma}_{12} &= -(i\delta_{12} + \gamma) \sigma_{12} + \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \sigma_{32} - \Omega_{23}^*(t) \sigma_{13} \}, \\ \dot{\sigma}_{13} &= - \left(i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \sigma_{13} - \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) (\rho_{11} - \rho_{33}) + \Omega_{23}(t) \sigma_{12} \}, \\ \dot{\sigma}_{23} &= - \left(i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \sigma_{23} - \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) (\rho_{22} - \rho_{33}) + \Omega_{13}(t) \sigma_{21} \},\end{aligned}$$

onde Γ_{3j} representam as taxas de decaimento de $3 \rightarrow j$ e $\Gamma_{33} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32}$ a taxa de decaimento espontâneo do nível excitado (tomamos $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\Gamma_{33}$). γ representa a taxa média de entrada e saída de átomos da região de interação e $\rho_{11}^{(0)}$ e $\rho_{22}^{(0)}$ as populações de equilíbrio térmico dos níveis $|1\rangle$ e $|2\rangle$ antes de interagirem com os campos elétricos. Por último δ_{ij} representa as dessintonias entre os campos e as distintas transições atômicas.

$$\begin{aligned}\delta_{13} &= \omega_{L13} - \omega_{31} \\ \delta_{23} &= \omega_{L23} - \omega_{32} \\ \delta_{12} &= \omega_{L13} - \omega_{L23} - \omega_{21} = \delta_{13} - \delta_{23}.\end{aligned}$$

Obtenção das equações 16 e 17 do capítulo 3

Neste apêndice, descrevemos em detalhe a obtenção das equações (16) e (17) do capítulo 3, com as quais desenvolvemos nossa modelagem teórica. Partimos das equações de Bloch para um sistema de três níveis tipo Λ , que como mostramos no Apêndice C são,

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \sigma_{31} - \Omega_{13}^*(t) \sigma_{13} \} + \Gamma_{31} \rho_{33} - \gamma \rho_{11} + \gamma \rho_{11}^{(0)}, \quad (\text{D.1})$$

$$\dot{\rho}_{22} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) \sigma_{32} - \Omega_{23}^*(t) \sigma_{23} \} + \Gamma_{32} \rho_{33} - \gamma \rho_{22} + \gamma \rho_{22}^{(0)}, \quad (\text{D.2})$$

$$\dot{\rho}_{33} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}^*(t) \sigma_{13} - \Omega_{13}(t) \sigma_{31} + \Omega_{23}^*(t) \sigma_{23} - \Omega_{23}(t) \sigma_{32} \} - (\Gamma_{33} + \gamma) \rho_{33}, \quad (\text{D.3})$$

$$\dot{\sigma}_{12} = -(i\delta_{12} + \gamma) \sigma_{12} + \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \sigma_{32} - \Omega_{23}^*(t) \sigma_{13} \}, \quad (\text{D.4})$$

$$\dot{\sigma}_{13} = - \left(i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \sigma_{13} - \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) (\rho_{11} - \rho_{33}) + \Omega_{23}(t) \sigma_{12} \}, \quad (\text{D.5})$$

$$\dot{\sigma}_{23} = - \left(i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \sigma_{23} - \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) (\rho_{22} - \rho_{33}) + \Omega_{13}(t) \sigma_{21} \}, \quad (\text{D.6})$$

Estamos interessados no estudo do sistema depois de atingir o estado estacionário, onde $\dot{\rho}_{ii} = \dot{\sigma}_{ij} = 0$. Além disso, vamos usar a condição de normalização $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1$ para eliminar uma das equações. Temos então,

$$(\Gamma_{31} + \gamma) \bar{\rho}_{11} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \bar{\sigma}_{31} - \Omega_{13}^*(t) \bar{\sigma}_{13} \} + \Gamma_{31} (1 - \bar{\rho}_{22}) + \gamma \rho_{11}^{(0)}, \quad (\text{D.7})$$

$$(\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{22} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) \bar{\sigma}_{32} - \Omega_{23}^*(t) \bar{\sigma}_{23} \} + \Gamma_{32} (1 - \bar{\rho}_{11}) + \gamma \rho_{22}^{(0)}, \quad (\text{D.8})$$

$$(i\delta_{12} + \gamma) \bar{\sigma}_{12} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) \bar{\sigma}_{32} - \Omega_{23}^*(t) \bar{\sigma}_{13} \}, \quad (\text{D.9})$$

$$(i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2}) \bar{\sigma}_{13} = -\frac{i}{2} \{ \Omega_{13}(t) (2\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho}_{22} - 1) + \Omega_{23}(t) \bar{\sigma}_{12} \}, \quad (\text{D.10})$$

$$(i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2}) \bar{\sigma}_{23} = -\frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) (2\bar{\rho}_{22} + \bar{\rho}_{11} - 1) + \Omega_{13}(t) \bar{\sigma}_{21} \}, \quad (\text{D.11})$$

onde a barra significa que estamos estudando o estado estacionário do sistema. Vamos focar nossa análise em dois casos particulares. Primeiro, quando só temos um campo atuando na transição $1 \rightarrow 3$, e segundo quando temos só um campo na transição $2 \rightarrow 3$. Nesses dois casos, calculamos a população no nível 1.

D.1 Transição $1 \rightarrow 3$

Começemos com o caso quando só temos um campo na transição $1 \rightarrow 3$, ou seja $\Omega_{23}(t) = \Omega_{23}^*(t) = 0$, ver Fig.D.1. As equações (7-11) ficam

$$(\Gamma_{31} + \gamma)\bar{\rho}_{11} = \frac{i}{2}\{\Omega_{13}(t)\bar{\sigma}_{13} - \Omega_{13}^*(t)\bar{\sigma}_{31}\} + \Gamma_{31}(1 - \bar{\rho}_{22}) + \gamma\rho_{11}^{(0)}, \quad (\text{D.12})$$

$$(\Gamma_{32} + \gamma)\bar{\rho}_{22} = \Gamma_{32}(1 - \bar{\rho}_{11}) + \gamma\rho_{22}^{(0)}, \quad (\text{D.13})$$

$$(i\delta_{12} + \gamma)\bar{\sigma}_{12} = \frac{i}{2}\Omega_{13}(t)\bar{\sigma}_{32}, \quad (\text{D.14})$$

$$(i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2})\bar{\sigma}_{13} = -\frac{i}{2}\Omega_{13}(t)(2\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho}_{22} - 1), \quad (\text{D.15})$$

$$(i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2})\bar{\sigma}_{23} = -\frac{i}{2}\Omega_{13}(t)\bar{\sigma}_{21}. \quad (\text{D.16})$$

Trabalhamos com as equações 12, 13 e 15 e usamos as seguintes definições

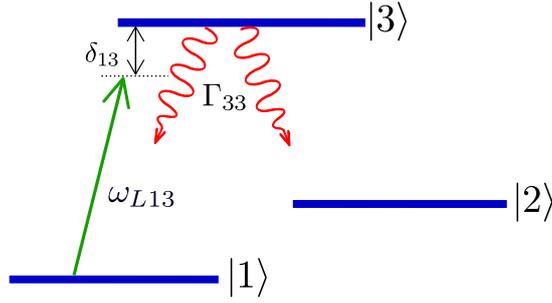


Figura D.1 Sistema de três níveis tipo Λ , com somente um campo atuando na transição $1 \rightarrow 3$.

$$a = \left(\delta_{13}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right), \quad (\text{D.17})$$

$$b = |\Omega_{13}(t)|^2, \quad (\text{D.18})$$

temos então,

$$\begin{aligned}
\left(\delta_{13}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) (\Gamma_{31} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= \frac{i}{2} \left\{ \Omega_{13}(t) (i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2}) \left(\frac{i}{2} \Omega_{13}^*(t) (2\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho}_{22} - 1) \right) \right\} \\
&+ \frac{i}{2} \left\{ \Omega_{13}^*(t) (-i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2}) \left(\frac{i}{2} \Omega_{13}(t) (2\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho}_{22} - 1) \right) \right\} \\
&+ \left(\delta_{13}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) \left(\Gamma_{31} (1 - \bar{\rho}_{22}) + \gamma \rho_{11}^{(0)} \right), \\
a(\Gamma_{31} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= -\frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{4} \{ (2\bar{\rho}_{11} + \bar{\rho}_{22} - 1) [2\gamma + \Gamma_{33}] \} \\
&+ a \left[\Gamma_{31} (1 - \bar{\rho}_{22}) + \gamma \rho_{11}^{(0)} \right], \\
\left(a(\Gamma_{31} + \gamma) + \frac{b}{2} [2\gamma + \Gamma_{33}] \right) \bar{\rho}_{11} &= \frac{b}{4} \{ (1 - \bar{\rho}_{22}) [2\gamma + \Gamma_{33}] \} + a \left[\Gamma_{31} (1 - \bar{\rho}_{22}) + \gamma \rho_{11}^{(0)} \right], \\
\left(a(\Gamma_{31} + \gamma) + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] \right) \bar{\rho}_{11} &= (1 - \bar{\rho}_{22}) \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + a\Gamma_{31} \right\} + a\gamma \rho_{11}^{(0)}, \\
\left(a(\Gamma_{31} + \gamma) + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] \right) (\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= (\Gamma_{32} + \gamma) \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + a\Gamma_{31} \right\} + (\Gamma_{32} + \gamma) a\gamma \rho_{11}^{(0)} \\
&- \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + a\Gamma_{31} \right\} \left(\Gamma_{32} (1 - \bar{\rho}_{11}) + \gamma \rho_{22}^{(0)} \right), \\
\left(a(\Gamma_{31} + \gamma) + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] \right) (\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= (\Gamma_{32} + \gamma) \left[\frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \left(\Gamma_{31} + \gamma \rho_{11}^{(0)} \right) a \right] \\
&- \Gamma_{32} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\} \\
&+ \Gamma_{32} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\} \bar{\rho}_{11} \\
&- \gamma \rho_{22}^{(0)} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\}, \\
\left(a(\Gamma_{31} + \gamma) + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] \right) (\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= \Gamma_{32} \gamma \rho_{11}^{(0)} a + \gamma (1 - \rho_{22}^{(0)}) \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\} \\
&+ \gamma^2 \rho_{11}^{(0)} a + \Gamma_{32} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\} \bar{\rho}_{11}, \\
\left(a(\Gamma_{31} + \gamma) + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] \right) (\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= \gamma \rho_{11}^{(0)} (\Gamma_{32} + \gamma) a + \gamma \rho_{11}^{(0)} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\} \\
&+ \Gamma_{32} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\} \bar{\rho}_{11}, \\
\left(a(\Gamma_{31} + \gamma) + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] \right) (\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= \gamma \rho_{11}^{(0)} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + (\Gamma_{33} + \gamma) a \right\} \\
&+ \Gamma_{32} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\} \bar{\rho}_{11},
\end{aligned} \tag{D.19}$$

onde usamos que $\rho_{11}^{(0)} + \rho_{22}^{(0)} = 1$ e $\Gamma_{31} + \Gamma_{32} = \Gamma_{33}$. Agrupando $\bar{\rho}_{11}$ no membro esquerdo da Eq.(19),

$$\begin{aligned}
& \left[\left(a(\Gamma_{31} + \gamma) + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] \right) (\Gamma_{32} + \gamma) - \Gamma_{32} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + \Gamma_{31} a \right\} \right], \\
& a(\Gamma_{31} + \gamma) (\Gamma_{32} + \gamma) + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] (\Gamma_{32} + \gamma) - \Gamma_{32} \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] - \Gamma_{32} \Gamma_{31} a, \\
& a\Gamma_{31}\gamma + a\Gamma_{32}\gamma + a\gamma^2 + b \left[\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right] \left(\frac{\Gamma_{33}}{2} + \gamma \right) - \Gamma_{32} \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}], \\
& a\Gamma_{33}\gamma + a\gamma^2 + b \left(\frac{\Gamma_{33}}{2} + \gamma \right)^2 - \frac{\Gamma_{33}}{2} \gamma \frac{b}{2} - \frac{\Gamma_{33}}{2} \Gamma_{33} \frac{b}{4}, \\
& a\Gamma_{33}\gamma + a\gamma^2 + b \left\{ \left(\frac{\Gamma_{33}}{2} + \gamma \right)^2 - \frac{\Gamma_{33}}{4} \gamma - \frac{\Gamma_{33}^2}{8} \right\}, \\
& a\Gamma_{33}\gamma + a\gamma^2 + b \left\{ \frac{\Gamma_{33}^2}{8} + \frac{3}{4} \Gamma_{33} \gamma + \gamma^2 \right\}, \\
& (a+b)\gamma^2 + (a + \frac{3}{4}b)\Gamma_{33}\gamma + b\frac{\Gamma_{33}^2}{8}, \tag{D.20}
\end{aligned}$$

então temos que $\bar{\rho}_{11}$ fica,

$$\begin{aligned}
\left((a+b)\gamma^2 + (a + \frac{3}{4}b)\Gamma_{33}\gamma + b\frac{\Gamma_{33}^2}{8} \right) \bar{\rho}_{11} &= \gamma \rho_{11}^{(0)} \left\{ \frac{b}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + (\Gamma_{33} + \gamma) a \right\}, \\
\left((a+b)\gamma^2 + (a + \frac{3}{4}b)\Gamma_{33}\gamma + b\frac{\Gamma_{33}^2}{8} \right) \bar{\rho}_{11} &= \rho_{11}^{(0)} \left\{ b \left[\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\Gamma_{33}}{4} \gamma \right] + (\Gamma_{33}\gamma + \gamma^2) a \right\}, \\
\left((a+b)\gamma^2 + (a + \frac{3}{4}b)\Gamma_{33}\gamma + b\frac{\Gamma_{33}^2}{8} \right) \bar{\rho}_{11} &= \rho_{11}^{(0)} \left\{ \left(a + \frac{b}{2} \right) \gamma^2 + \left(a + \frac{b}{4} \right) \Gamma_{33} \gamma \right\},
\end{aligned}$$

agrupando,

$$\bar{\rho}_{11} = \rho_{11}^{(0)} \frac{(a + \frac{b}{2})\gamma^2 + (a + \frac{b}{4})\Gamma_{33}\gamma}{((a+b)\gamma^2 + (a + \frac{3}{4}b)\Gamma_{33}\gamma + \frac{b}{8}\Gamma_{33}^2)},$$

substituindo a e b , obtemos

$$\bar{\rho}_{11} = \rho_{11}^{(0)} \frac{\left(\left(\delta_{13}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{2} \right) \gamma^2 + \left(\left(\delta_{13}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{4} \right) \Gamma_{33} \gamma}{\left\{ \left(\delta_{13}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) + |\Omega_{13}(t)|^2 \right\} \gamma^2 + \left\{ \left(\delta_{13}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) + \frac{3}{4} |\Omega_{13}(t)|^2 \right\} \Gamma_{33} \gamma + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{8} \Gamma_{33}^2}.$$

Vamos considerar agora que $\Gamma_{33} \gg \gamma$, então o primeiro termo do numerador e o primeiro do denominador serão excluídos.

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_{11} &= \rho_{11}^{(0)} \frac{\left(\left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} \right) + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{4} \right) \Gamma_{33} \gamma}{\left(\left\{ \left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} \right) + \frac{3}{4} |\Omega_{13}(t)|^2 \right\} \Gamma_{33} \gamma + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{8} \Gamma_{33}^2 \right)}, \\
\bar{\rho}_{11} &= \rho_{11}^{(0)} \frac{\left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{4} \right)}{\left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{3}{4} |\Omega_{13}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{8} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right)}, \\
\bar{\rho}_{11} &= \rho_{11}^{(0)} \frac{\left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{4} \right)}{\left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{1}{4} |\Omega_{13}(t)|^2 + \frac{2}{4} |\Omega_{13}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{8} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right)}, \\
\bar{\rho}_{11} &= \rho_{11}^{(0)} \frac{\left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{4} \right)}{\left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{1}{4} |\Omega_{13}(t)|^2 + \frac{1}{2} |\Omega_{13}(t)|^2 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right) \right)}, \\
\bar{\rho}_{11} &= \rho_{11}^{(0)} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} |\Omega_{13}(t)|^2 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right)}{\left(\delta_{13}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2}{4} \right)} \right]^{-1}. \tag{D.21}
\end{aligned}$$

Se agora consideramos que o termo $\gamma \Gamma_{33} \approx 0$ e $1 + \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \approx \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}$ temos que

$$\bar{\rho}_{11} = \rho_{11}^{(0)} \left[1 + \frac{2 |\Omega_{13}(t)|^2 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right)}{\left(4 \delta_{13}^2 + \Gamma_{33}^2 + |\Omega_{13}(t)|^2 \right)} \right]^{-1} \tag{D.22}$$

$$\bar{\rho}_{11} = \rho_{11}^{(0)} \left[1 + \frac{|\Omega_{13}(t)|^2 \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{\left(4 \delta_{13}^2 + \Gamma_{33}^2 + |\Omega_{13}(t)|^2 \right)} \right]^{-1} \tag{D.23}$$

A Eq.D.23 corresponde ao primeiro termo à da Eq.(16) do capítulo 3.

D.2 Transição 2 → 3

Estudamos agora o caso quando só temos um campo na transição 2 → 3, ou seja $\Omega_{13}(t) = \Omega_{13}^*(t) = 0$, ver Fig.D.2. As equações (7-11) ficam

$$(\Gamma_{31} + \gamma) \bar{\rho}_{11} = \Gamma_{31} (1 - \bar{\rho}_{22}) + \gamma \rho_{11}^{(0)}, \quad (\text{D.24})$$

$$(\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{22} = \frac{i}{2} \{ \Omega_{23}(t) \bar{\sigma}_{32} - \Omega_{23}^*(t) \bar{\sigma}_{23} \} + \Gamma_{32} (1 - \bar{\rho}_{11}) + \gamma \rho_{22}^{(0)}, \quad (\text{D.25})$$

$$(i\delta_{12} + \gamma) \bar{\sigma}_{12} = -\frac{i}{2} \Omega_{23}^*(t) \bar{\sigma}_{13}, \quad (\text{D.26})$$

$$\left(i\delta_{13} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \bar{\sigma}_{13} = -\frac{i}{2} \Omega_{23}(t) \bar{\sigma}_{12}, \quad (\text{D.27})$$

$$\left(i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \bar{\sigma}_{23} = -\frac{i}{2} \Omega_{23}(t) (2\bar{\rho}_{22} + \bar{\rho}_{11} - 1). \quad (\text{D.28})$$

Para obter $\bar{\rho}_{11}$ utilizamos as equações 26, 37 e 30 e as seguintes definições

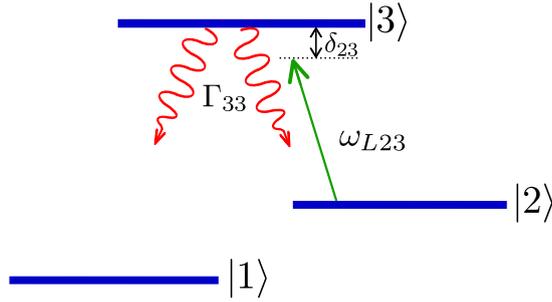


Figura D.2 Sistema de três níveis tipo Λ , com somente um campo atuando na transição 2 → 3.

$$c = \left(\delta_{23}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right), \quad (\text{D.29})$$

$$d = |\Omega_{23}(t)|^2. \quad (\text{D.30})$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left(\delta_{23}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2}\right)^2\right) (\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{22} &= \frac{i}{2} \left\{ \Omega_{23}(t) \left(i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \frac{i}{2} \Omega_{23}^*(t) (2\bar{\rho}_{22} + \bar{\rho}_{11} - 1) \right\} \\
&+ \frac{i}{2} \left\{ \Omega_{23}^*(t) \left(-i\delta_{23} + \gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right) \frac{i}{2} \Omega_{23}(t) (2\bar{\rho}_{22} + \bar{\rho}_{11} - 1) \right\} \\
&+ \left(\delta_{23}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) \left(\Gamma_{32} (1 - \bar{\rho}_{11}) + \gamma \rho_{22}^{(0)} \right), \\
c(\Gamma_{32} + \gamma) \bar{\rho}_{22} &= -\frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{4} \{ (2\bar{\rho}_{22} + \bar{\rho}_{11} - 1) [2\gamma + \Gamma_{33}] \} \\
&+ c \left(\Gamma_{32} (1 - \bar{\rho}_{11}) + \gamma \rho_{22}^{(0)} \right), \tag{D.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2} [2\gamma + \Gamma_{33}] \right) \bar{\rho}_{22} &= \frac{d}{4} \{ (1 - \bar{\rho}_{11}) [2\gamma + \Gamma_{33}] \} + c \left(\Gamma_{32} (1 - \bar{\rho}_{11}) + \gamma \rho_{22}^{(0)} \right), \\
\left(c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2} [2\gamma + \Gamma_{33}] \right) \bar{\rho}_{22} &= (1 - \bar{\rho}_{11}) \left\{ \frac{d}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + c\Gamma_{32} \right\} + c\gamma \rho_{22}^{(0)}. \tag{D.32}
\end{aligned}$$

A partir da Eq.(26) temos:

$$(\Gamma_{31} + \gamma) \bar{\rho}_{11} - \left(\Gamma_{31} + \gamma \rho_{11}^{(0)} \right) = -\Gamma_{31} \bar{\rho}_{22}. \tag{D.33}$$

Agora multiplicamos a Eq.(33) por $-\Gamma_{31}$ e substituímos a equação 34, para obter,

$$\begin{aligned}
\left(c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2} [2\gamma + \Gamma_{33}] \right) (\Gamma_{31} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= \left(\Gamma_{31} + \gamma \rho_{11}^{(0)} \right) \left(c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2} [2\gamma + \Gamma_{33}] \right) \\
&- \Gamma_{31} \left\{ (1 - \bar{\rho}_{11}) \left\{ \frac{d}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + c\Gamma_{32} \right\} + c\gamma \rho_{22}^{(0)} \right\}, \\
\left(c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2} [2\gamma + \Gamma_{33}] \right) (\Gamma_{31} + \gamma) \bar{\rho}_{11} &= \left(\Gamma_{31} + \gamma \rho_{11}^{(0)} \right) \left(c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2} [2\gamma + \Gamma_{33}] \right) \\
&- \Gamma_{31} \left\{ \left\{ \frac{d}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + c\Gamma_{32} \right\} + c\gamma \rho_{22}^{(0)} \right\} \\
&+ \Gamma_{31} \left\{ \frac{d}{4} [2\gamma + \Gamma_{33}] + c\Gamma_{32} \right\} \bar{\rho}_{11},
\end{aligned}$$

agrupando as frações de $\bar{\rho}_{11}$ e em seguida discriminando, obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{11} &= \frac{(\Gamma_{31} + \gamma \rho_{11}^{(0)}) (c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2}[2\gamma + \Gamma_{33}]) - \Gamma_{31} \left\{ \frac{d}{4}[2\gamma + \Gamma_{33}] + c\Gamma_{32} \right\} + c\gamma \rho_{22}^{(0)}}{\left\{ (c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2}[2\gamma + \Gamma_{33}]) (\Gamma_{31} + \gamma) - \Gamma_{31} \left\{ \frac{d}{4}[2\gamma + \Gamma_{33}] + c\Gamma_{32} \right\} \right\}}, \\ \bar{\rho}_{11} &= \frac{c\Gamma_{31}\gamma + \Gamma_{31}\frac{d}{2}[2\gamma + \Gamma_{33}] + \gamma \rho_{11}^{(0)} (c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2}[2\gamma + \Gamma_{33}]) - \Gamma_{31} \left\{ \frac{d}{4}[2\gamma + \Gamma_{33}] + c\gamma \rho_{22}^{(0)} \right\}}{\left\{ c\Gamma_{32}\gamma + c\Gamma_{31}\gamma + c\gamma^2 + (\frac{d}{2}[2\gamma + \Gamma_{33}]) (\Gamma_{31} + \gamma) - \Gamma_{31}\frac{d}{4}[2\gamma + \Gamma_{33}] \right\}}, \\ \bar{\rho}_{11} &= \frac{c\Gamma_{31}\gamma + \Gamma_{31}\frac{d}{4}[2\gamma + \Gamma_{33}] - c\Gamma_{31}\gamma \rho_{22}^{(0)} + \gamma \rho_{11}^{(0)} (c(\Gamma_{32} + \gamma) + \frac{d}{2}[2\gamma + \Gamma_{33}])}{\left\{ c\Gamma_{33}\gamma + c\gamma^2 + \frac{d}{2}\gamma\Gamma_{31} + d\gamma^2 + \frac{d}{4}\Gamma_{33}\Gamma_{31} + \frac{d}{2}\gamma\Gamma_{33} \right\}}, \\ \bar{\rho}_{11} &= \frac{c\Gamma_{31}\gamma (1 - \rho_{22}^{(0)}) + \Gamma_{31}\frac{d}{4}[2\gamma + \Gamma_{33}] + c\Gamma_{32}\gamma \rho_{11}^{(0)} + c\gamma^2 \rho_{11}^{(0)} + \gamma \rho_{11}^{(0)} \frac{d}{2}[2\gamma + \Gamma_{33}]}{\left\{ (c+d)\gamma^2 + (c + \frac{3}{4}d)\Gamma_{33}\gamma + \frac{d}{8}\Gamma_{33}^2 \right\}}, \\ \bar{\rho}_{11} &= \frac{c\Gamma_{33}\gamma \rho_{11}^{(0)} + \gamma \rho_{11}^{(0)} (c\gamma + \frac{d}{2}[2\gamma + \Gamma_{33}]) + \Gamma_{31}\frac{d}{4}[2\gamma + \Gamma_{33}]}{\left\{ (c+d)\gamma^2 + (c + \frac{3}{4}d)\Gamma_{33}\gamma + \frac{d}{8}\Gamma_{33}^2 \right\}}, \\ \bar{\rho}_{11} &= \frac{\gamma \rho_{11}^{(0)} \left(c\Gamma_{33} + c\gamma + d\gamma + d\frac{\Gamma_{33}}{2} \right) + \frac{d}{8}\Gamma_{33}[2\gamma + \Gamma_{33}]}{\left\{ (c+d)\gamma^2 + (c + \frac{3}{4}d)\Gamma_{33}\gamma + \frac{d}{8}\Gamma_{33}^2 \right\}}, \\ \bar{\rho}_{11} &= \frac{\gamma \rho_{11}^{(0)} \left((c + \frac{d}{2})\Gamma_{33} + \gamma(c+d) \right) + \frac{d}{8}\Gamma_{33}[2\gamma + \Gamma_{33}]}{\left\{ (c+d)\gamma^2 + (c + \frac{3}{4}d)\Gamma_{33}\gamma + \frac{d}{8}\Gamma_{33}^2 \right\}}.\end{aligned}$$

Agrupando temos,

$$\bar{\rho}_{11} = \frac{\gamma \rho_{11}^{(0)} \left((c + \frac{d}{2})\Gamma_{33} + \gamma(c+d) \right) + \frac{d}{4}\Gamma_{33}\gamma + \frac{d}{8}\Gamma_{33}^2}{\left\{ (c+d)\gamma^2 + (c + \frac{3}{4}d)\Gamma_{33}\gamma + \frac{d}{8}\Gamma_{33}^2 \right\}}.$$

Substituindo c e d obtemos,

$$\bar{\rho}_{11} = \frac{\gamma \rho_{11}^{(0)} \left\{ \left(\left(\delta_{23}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \right) \Gamma_{33} + \gamma \left(\left(\delta_{23}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) + |\Omega_{23}(t)|^2 \right) \right\} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{4}\Gamma_{33}\gamma + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8}\Gamma_{33}^2}{\left(\left(\delta_{23}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) + |\Omega_{23}(t)|^2 \right) \gamma^2 + \left(\left(\delta_{23}^2 + \left(\gamma + \frac{\Gamma_{33}}{2} \right)^2 \right) + \frac{3}{4}|\Omega_{23}(t)|^2 \right) \Gamma_{33}\gamma + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8}\Gamma_{33}^2}.$$

Vamos considerar agora que $\Gamma_{33} \gg \gamma$, então os termos γ^2 serão excluídos,

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_{11} &= \frac{\gamma \rho_{11}^{(0)} \Gamma_{33} \left(\delta_{23}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \right) + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{4} \Gamma_{33} \gamma + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8} \Gamma_{33}^2}{\left\{ \left(\delta_{23}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{3}{4} |\Omega_{23}(t)|^2 \right) \Gamma_{33} \gamma + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8} \Gamma_{33}^2 \right\}} \\
&= \frac{\rho_{11}^{(0)} \left(\delta_{23}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \right) + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{\left\{ \delta_{23}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{3}{4} |\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right\}} \\
&= \frac{\rho_{11}^{(0)} \left(\delta_{23}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \right) + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{\left\{ \delta_{23}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} + \frac{1}{4} |\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right\}} \\
&= \frac{\rho_{11}^{(0)} \left(\delta_{23}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \right) + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right)}{\left\{ \delta_{23}^2 + \gamma \Gamma_{33} + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right) \right\}}.
\end{aligned}$$

Se agora consideramos que o termo $\gamma \Gamma_{33} \approx 0$ e $1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \approx \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}$ temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_{11} &= \frac{\rho_{11}^{(0)} \left(\delta_{23}^2 + \frac{\Gamma_{33}^2}{4} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \right) + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{8} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}} \\
&= \frac{\rho_{11}^{(0)} \left(4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 \right) + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}} \\
&= \frac{\rho_{11}^{(0)} \left(4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \right) - \rho_{11}^{(0)} \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}} \\
&= \rho_{11}^{(0)} + \frac{\frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma} \left(1 - \rho_{11}^{(0)} \right)}{4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}, \\
&= \rho_{11}^{(0)} + \frac{\rho_{22}^{(0)} \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}} \\
&= \rho_{22}^{(0)} \left[\frac{\rho_{11}^{(0)}}{\rho_{22}^{(0)}} + \frac{\frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}} \right].
\end{aligned}$$

Tomando $\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} = 0,5$ temos:

$$\bar{\rho}_{11} = \rho_{22}^{(0)} \left[1 + \frac{\frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}}{4\delta_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 + 2|\Omega_{23}(t)|^2 + \frac{|\Omega_{23}(t)|^2}{2} \frac{\Gamma_{33}}{\gamma}} \right]. \quad (\text{D.34})$$

Que representa o segundo termo do membro à direita da Eq.(16) do capítulo 3.

D.3 Sistema de dois níveis

Como vimos no capítulo 1, podemos escrever as equações de Bloch para um sistema de dois níveis da seguinte forma,

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = -i\frac{\Omega^*(t)}{2}\sigma_{12} + i\frac{\Omega(t)}{2}\sigma_{21} + \Gamma\rho_{22}, \quad (\text{D.35})$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = i\frac{\Omega^*(t)}{2}\sigma_{12} - i\frac{\Omega(t)}{2}\sigma_{21} - \Gamma\rho_{22}, \quad (\text{D.36})$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = -i\delta\sigma_{12} - i\frac{\Omega(t)}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{12}, \quad (\text{D.37})$$

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = i\delta\sigma_{21} + i\frac{\Omega^*(t)}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{21}. \quad (\text{D.38})$$

O sistema de equações Eqs. (D.35-D.38) pode ser reduzido a duas equações usando a condição de normalização $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ e que $\sigma_{12} = \sigma_{21}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{11}}{dt} &= -i\frac{\Omega^*(t)}{2}\sigma_{12} + i\frac{\Omega(t)}{2}\sigma_{21} + \Gamma(1 - \rho_{11}), \\ \frac{d\sigma_{12}}{dt} &= -\left(i\delta + \frac{\Gamma}{2}\right)\sigma_{12} - i\frac{\Omega(t)}{2}(2\rho_{11} - 1). \end{aligned}$$

Estamos interessados no estudo do sistema depois de atingir o estado estacionário onde, $\dot{\rho}_{ii} = \dot{\sigma}_{ij} = 0$, temos então

$$\begin{aligned} \Gamma\bar{\rho}_{11} &= -i\frac{\Omega^*(t)}{2}\bar{\sigma}_{12} + i\frac{\Omega(t)}{2}\bar{\sigma}_{21} + \Gamma, \\ \left(i\delta + \frac{\Gamma}{2}\right)\bar{\sigma}_{12} &= -i\frac{\Omega(t)}{2}(2\bar{\rho}_{11} - 1). \end{aligned}$$

Queremos obter $\bar{\rho}_{11}$. Temos então

$$\begin{aligned}
\left(\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2\right)\Gamma\bar{\rho}_{11} &= -i\frac{\Omega^*(t)}{2}\left(-i\delta + \frac{\Gamma}{2}\right)\left(-i\frac{\Omega(t)}{2}(2\bar{\rho}_{11} - 1)\right) \\
&\quad + i\frac{\Omega(t)}{2}\left(i\delta + \frac{\Gamma}{2}\right)i\frac{\Omega(t)}{2}(2\bar{\rho}_{11} - 1) + \left(\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2\right)\Gamma, \\
&= -\frac{|\Omega(t)|^2}{4}(2\bar{\rho}_{11} - 1)\Gamma + \left(\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2\right)\Gamma, \\
\left\{\left(\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2\right) + \frac{|\Omega(t)|^2}{2}\right\}\bar{\rho}_{11} &= \frac{|\Omega(t)|^2}{4} + \left(\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2\right), \\
\bar{\rho}_{11} &= \frac{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{|\Omega(t)|^2}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{|\Omega(t)|^2}{2}} \\
&= \frac{4\delta^2 + \Gamma^2 + |\Omega(t)|^2}{4\delta^2 + \Gamma^2 + 2|\Omega(t)|^2}.
\end{aligned}$$

Que corresponde à Eq.(17) do capítulo 3.