UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Omar Stevenson Guzmán Rea

FLUIDO MICROPOLAR: EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO FORTE

RECIFE

2016

Omar Stevenson Guzmán Rea

FLUIDO MICROPOLAR: EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO FORTE.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. **Miguel Fidencio Loayza Lozano**

RECIFE

2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

R281f Rea, Omar Stevenson Guzmán
Fluido micropolar: existência e unicidade de solução forte / Omar Stevenson Guzmán Rea. – 2016.
69 f.

Orientador: Miguel Fidencio Loayza Lozano.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, Recife, 2016.
Inclui referências.

1. Análise (Matemática). 2. Equações diferenciais parciais. I. Lozano, Miguel Fidencio Loayza (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2016-108

OMAR STEVENSON GUZMÁN REA

FLUIDO MICROPOLARES: EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES FORTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 19/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marko A. Rojas Medar (Examinador Externo)
Instituto de Alta Investigación, Unversidad de Tarapacá, Chile

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado sabedoria e força para que podesse chegar até aqui. Sem Ele não teria conseguido nada do que conquistei na minha vida, pois está sempre na minha frente.

A minha família, por ter sempre me apoiado em cada momento de minha vida. Sempre os levo em meu coração, já que são minha motivação cada día.

A minha noiva, Grace Peralta, por sua paciência, apoio e torcer por mim cada día.

A meus amigos, por apoiarme e torcer por mim em cada momento.

A meu orientador, Miguel Loayza, por sua paciência e dedicação em minha orientação na dissertação do mestrado.

Aos professores da banca examinadora, por todas as correções e sugestões apontadas.

A todos os professores das disciplinas que cursei no mestrado.

Aos amigos do DMAT-UFPE. em especial a Ricardo Maldonado e sua esposa, Juscelino Lopez e Filipe Andrade.

Á CNPq, pelo apoio financiero.

A todos os funcionários do DMAT-UFPE.

RESUMO

Estudamos aspectos teóricos de um sistema que modela o comportamento dos fluidos micropolares incompressíveis num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). Especificamente, utilizamos o método espectral de Galerkin para mostrar a existência de soluções fortes e com determinadas condições mostramos a unicidade das soluções.

Palavras-chave: Existência, Unicidade e regularidade. Soluções fortes. Fluidos micropolares. Método espectral de Galerkin.

ABSTRACT

We study theoretical aspects of a system that models the behavior of incompressible micropolar fluids in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or 3). Specifically, we use the spectral Galerkin method to show the existence of strong solutions and under certain conditions show the uniqueness of solutions.

Keywords: Existence, Uniqueness and regularity. Strong Solutions. Micropolar fluids. Spectral Galerkin method.

SUMÁRIO

1 Introdução

O estudo das equações de fluidos micropolares é de grande interesse devido a que as equações de Navier-Stokes para fluidos newtonianos não podem descrever satisfatoriamente a dinâmica dos fluidos com microestrutura. As equações de fluidos micropolares descrevem a dinâmica das particulas que estão imersas no fluido, as quais estão sujeitas tanto a translações como a rotações. Os fluidos micropolares também são chamados de fluidos assimétricos. A teoria de fluidos micropolares foi introduzida por Eringen (1966).

Neste trabalho enunciaremos e demonstraremos resultados de existência e unicidade de soluções fortes para as equações que descrevem o movimento de um fluido não-homogêneo, viscoso, incompressível e assimétrico num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2$ ou $3)$, durante um intervalo de tempo $[0, T],\ 0 < T \leq \infty$. Este sistema é dado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - (\mu + \chi)\Delta u + \nabla p = \chi rot\ w + f, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega - \gamma\Delta\omega + 2\chi\omega - (\alpha + \beta)\nabla div\ \omega = \chi rot\ u + g, \tag{1.2}$$

$$div\ u = 0 \text{ em } \Omega. \tag{1.3}$$

As condições na fronteira $\partial\Omega$ de Ω são

$$u(t, x) = \omega(t, x) = 0;\ (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \tag{1.4}$$

e as condições iniciais são

$$u(0, x) = u_0(x), \omega(0, x) = \omega_0(x),\ x \in \Omega. \tag{1.5}$$

É um sistema de equações não homogêneos, onde $u(t,x) \in \mathbb{R}^n$, $\omega(t,x) \in \mathbb{R}^n$ e $p(t,x) \in \mathbb{R}^n$ são incógnitas que denotam, respectivamente, a velocidade do fluido, a velocidade microrotacional e a pressão hidrostática no punto $x \in \Omega$ e no tempo $t \in [0,T]$. As constantes $\mu, \chi, \alpha, \beta, \gamma$ e ν são positivas associadas ás propriedades do material e satisfazem a seguinte condição $\min\{\mu, \chi, 1, \alpha+\beta+\gamma\} > 0$. As funções $f(t,x), g(t,x) \in \mathbb{R}^n$ são forças externas dadas.

A equação (1.1) tem uma forma similar as equações de Navier-Stokes, mas está acoplada com a equação (1.2). Para fluidos Newtonianos, as equações (1.1) e (1.2) estão desacopladas quando $\chi = 0$.

Se no sistema (1.1) - (1.5) não há microrotação; ou seja, se $w = 0$ e $\chi = 0$, o sistema (1.1) - (1.5) se reduz a

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - \mu\Delta u + \nabla p = f, \tag{1.6}$$

$$div\ u = 0,\ em\ \Omega, \tag{1.7}$$

$$u = 0\ em\ \partial\Omega \times [0,T], \tag{1.8}$$

com condição inicial

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \tag{1.9}$$

que é o sistema de Navier-Stokes com densidade constante $\rho = 1$. Os resultados de existência de soluções do sistema (1.6) - (1.9) tem sido bastante estudado (HEYWOOD, 1980; LADYZHENSKAYA, 1969; TEMAN, 1979; SOHR, 2001).

O problema (1.1)-(1.5), foi estudado por Lukaszewicz (1999), quem mostrou a existência global de soluções fracas para o problema, sob determinadas condições utilizando linearização e o teorema do punto fixo. Usando a mesma técnica, ele mostra a existência local, global, e tambén a unicidade da solução forte.

Neste trabalho mostramos a existência e unicidade das soluções fortes, baseado no trabalho de Rojas-Medar (1997), quem utilizou o método espectral de Galerkin.

O trabalho é organizado da seguinte maneira. No capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados preliminares que serão usados ao longo do texto. No capítulo 2, apresentamos a forma linearizada e estacionária das equações de Navier-Stokes, que é conhecida como as equações de Stokes estacionárias, e as equações de fluidos micropolares. Também enunciamos resultados importantes, associadas a estas equações. No capítulo 3, enunciamos e demonstramos os resultados de existência e unicidade de soluções fortes.

2 Conceitos preliminares

Este capítulo tem como principal objetivo é introduzir os conceitos básicos e notações que utilizaremos no restante do trabalho. Para detalhes das demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo, veja Adams (1975), Brezis (1984), Evans (2000), Kufner, John, Fucik (1978) e Teman (1979).

2.1 Definições iniciais.

Nas seguintes definições, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denotará um conjunto aberto.

Definição 2.1. *(i) Um função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita Lipschitziana se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|,$$

para todo $x, y \in \Omega$.

(ii) Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita localmente Lipschitziana se para cada $x \in \Omega$, existir uma vizinhança U_x, do ponto x, tal que $f|_{U_x}$ é Lipschitziana.

(iii) Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função $C^{1,1}$ se f for diferenciável em Ω, com derivadas parciais localmente Lipschitziana.

Agora apresentamos duas definições que tratam sobre a regularidade da fronteira $\partial\Omega$ do conjunto Ω.

Definição 2.2. *Um conjunto aberto Ω em $\mathbb{R}^n$ é dito conjunto aberto de classe $C^{1,1}$ se existem constantes positivas δ_0 e c tais que para todo $z \in \partial X$, existe uma função de classe $C^{1,1}$, $f = f_z : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$, $\|\nabla f\|_{L^\infty} \leq$*

c, $\|\nabla f(x) - \nabla f(w)| \leq c\|x - w\|$ *e um sistema de coordenadas ortonormal* $CS_z : y = (y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n) := (\tilde{y}, y_n)$*, com sua origem em* z *tal que*

$$B(z, \delta_0) \cap \Omega = \{y \in B(0, \delta_0) \text{ em } CS_z \ ; \ y_n > f(\tilde{y})\}.$$

Definição 2.3. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *um conjunto aberto. Dizemos que a fronteira de* Ω *é uniformemente de classe* $C^k, k \in \mathbb{N}$*, quando é possível escolher coordenadas cartesianas locais* (x_1, x_2, x_3) *numa vizinhança* U_y *de cada* $y \in \partial\Omega$ *tal que* $\partial\Omega \cap U_y$ *seja representado por uma função* $x_3 = \psi(x_1, x_2, y)$ *de classe* C^k*. Além disso, as vizinhanças* U_y *podem ser escolhidas como sendo bolas, todas com o mesmo diâmetro, com respectivos centros* y*, e as derivadas até ordem* k *de cada função* $\psi(\cdot, \cdot, y)$ *são limitadas por uma constante independente de* y*.*

2.2 Espaços L^p

Nesta secção apresentamos algumas definições e propriedades fundamentais dos espaços L^p.

Iniciamos apresentando conceitos de $\sigma-$álgebra, medida e função mensurável.

Definição 2.4. *Seja* Ω *um conjunto não vazio.*

(i) Seja $\mathcal{M}$ *uma família formada por subconjuntos de* Ω*. Dizemos que* $\mathcal{M}$ *é uma* σ***-álgebra*** *se satisfaz as seguintes propriedades :*

(a) $\emptyset \in \mathcal{M}$*, onde* $\emptyset$ *é o conjunto vazio.*

(b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$*, onde* A^c *é o complemento do conjunto* A *respeito ao conjunto* Ω*.*

(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ *sempre que* $A_n \in \mathcal{M}$ *para todo* n*.*

Um espaço mensurável é um par $(\Omega, \mathcal{M})$ *formado pelo conjunto* Ω *e uma* σ***-álgebra*** $\mathcal{M}$ *de subconjuntos de* Ω*. Um subconjunto* $A \subset \Omega$ *é mensurável se* $A \in \mathcal{M}$*.*

(ii) Dado um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{M})$*, uma* ***medida*** μ *é uma função* $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tal que:*

(a) $\mu(A) \geq 0$*, para todo* $A \in \mathcal{M}$*.*

(b) $\mu(\emptyset) = 0$, *onde* $\emptyset$ *é o conjunto vazio.*

(c) $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ *se* $A_i \in \mathcal{M}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

*Um **espaço de medida** é uma tripla* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *formada por um espaço mensurável e uma medida nela definida.*

(iii) Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida.*

Seja $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *uma função. Então* f *é mensurável se, e somente se, o conjunto*

$$\{x \in \Omega : \ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

Definição 2.5. *(i)* $L^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f$ *é mensurável e* $\int_\Omega |f| d\mu < +\infty\}$.

(ii) Seja $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 < p < \infty$; *definimos:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com norma

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right]^{1/p}.$$

(iii) Definimos:

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{r} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ quase todo ponto em } \Omega \end{array} \right\}$$

com norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq \ C \text{ quase todo ponto em } \Omega\}.$$

2.2.1 Desigualdades Elementares.

Apresentamos algumas desigualdades que serão utilizadas ao longo do texto.

1. **Desigualdade de Cauchy.**

$$a.b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \ (a, b \in \mathbb{R}).$$

2. **Desigualdade de Cauchy com ε.**

$$a.b \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \ (a, b > 0, \varepsilon > 0).$$

3. **Desigualdade de Young.** Seja $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então:

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ (a, b > 0).$$

4. **Desigualdade de Young com ε.**

$$a.b \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \ (a, b > 0, \varepsilon > 0),$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

5. **Desigualdade de Holder.** Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, temos:

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

6. **Desigualdade de Minkowski.** Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$. Então:

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

7. **Desigualdade de Holder Generalizada.** Sejam $1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$, com $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1$, e suponha que $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para $k = 1, \ldots, m$. Então:

$$\int_\Omega |u_1 \ldots u_m| dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_i\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

8. **Desigualdade de Interpolação para as normas L^p.** Sejam $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ e

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}.$$

Suponha também que $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$. Então $u \in L^r(\Omega)$, e

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^s(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^t(\Omega)}.$$

Antes de enunciar a desigualdade de Gronwall, en su forma diferencial e integral, definimos o seguinte. Uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita **absolutamente contínua** se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda família $\{(a_i, b_i)\}$ de intervalos disjuntos em $[a, b]$ tais que $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ se cumpre a desigualdade $\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$.

9. **Desigualdade de Gronwall (Forma Diferencial).**

(i) Seja $\eta(.)$ uma função não negativa e absolutamente contínua em $[0, T]$, a qual satifaz para quase todo t a desigualdade diferencial:

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas e pertencem a $L^1([0, T])$. Então:

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

(ii) Em particular, se

$$\eta' \leq \phi\eta \text{ em } [0, T] \text{ e } \eta(0) = 0,$$

então

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

10. **Desigualdade de Gronwall (Forma Integral).**

(i) Seja $\xi(t)$ uma função não negativa e pertence a $L^1([0, T])$ a qual satisfaz para quase todo t desigualdade integral:

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2,$$

para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Então:

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}),$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$.

(ii) Em particular, se

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds,$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$, então

$$\xi(t) = 0 \text{ para quase todo } t.$$

2.2.2 Propriedades dos espaços L^p.

Agora apresentamos algumas propriedades fundamentais dos espaçoes L^p.

1. L^p é um espaço vetorial e $\| \ \|_p$ é uma norma para qualquer p, $1 \leq p \leq \infty$.

2. (Fischer-Riesz). L^p é um espaço de Banach para qualquer p, $1 \leq p \leq \infty$.

3. Seja (f_n) uma *sequência* em L^p e seja $f \in L^p$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Então, existe uma *subsequência* (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p$ tal que:

   (a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ para quase todo ponto em Ω.

   (b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$, quase todo ponto em Ω.

4. L^p é reflexivo para qualquer p, $1 < p < \infty$.

5. (Teorema de Representação de Riesz para $L^p(\Omega)$). Sejam $1 < p < \infty$ e $\phi \in (L^p(\Omega))^*$, onde $(L^p(\Omega))^*$ é o dual de $L^p(\Omega)$.

   Então existe uma única função $u \in L^{p'}$(onde p' verifica $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$), tal que

   $$\langle \phi, f \rangle = \int uf, \forall f \in L^p.$$

   Além disso,

   $$\|u\|_{p'} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*}.$$

6. (Teorema de representação de Riesz para $L^1(\Omega)$). Seja $\varphi \in (L^1(\Omega))^*$.

   Então existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^1(\Omega)$

   $$\langle \varphi, u \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e

$$\|v\|_\infty = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))^*}$$

Para f definida em Ω, definimos o *suporte* de f como o fecho do conjunto $\{x \in \Omega \;:\; f(x) \neq 0\}$ e denotamos por supp f.

Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um multi-índice cujas coordenadas são inteiros não negativos. Escrevemos $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$, e

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

A função $f \in C^k(\Omega)$ se existem as derivadas parciais $D^\alpha f$ para todo α com $|\alpha| \leq k$ tal que são contínuas em Ω.

Além disso,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ ao conjunto dos $f \in C^\infty(\Omega)$ para qual supp $f \subset \Omega$.

Note que, se Ω é limitado, então supp $f \subset \Omega$ é um subconjunto compacto de Ω.

Teorema 2.6. *Seja Ω um subconjunto aberto não vazio e limitado de $\mathbb{R}^n$. Então o conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para qualquer p, $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 2.7. *O espaço $C_0(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para qualquer p, com $1 \leq p < \infty$.*

Definição 2.8. *Seja $1 \leq p \leq \infty$, dizemos que uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f|_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Lema 2.9 (Du Bois-Reymond)**.** *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que:*

$$\textstyle\int_\Omega fu = 0, \ \forall u \in C_c(\Omega).$$

Então $f = 0$ quase em toda parte em Ω.

Definição 2.10. *O espaço de medida Ω é chamado separável se há uma familia enumerável (E_n) subconjuntos de M tal que a $\sigma -$ algebra gerada por (E_n) coincide com M, isto é, M é a maior $\sigma -$ algebra que contém aos E_n's.*

Teorema 2.11. *Seja Ω um espaço de medida, separável. Então $L^p(\Omega)$ é separável para qualquer p, $1 \leq p < \infty$.*

2.3 Espaços de Hilbert.

Definição 2.12. *Seja H um espaço vetorial. Um produto escalar $(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear em $H \times H$ com valores em $\mathbb{R}$, tal que:*

$$(u,v) = (v,u),\ \forall u,v \in H \qquad \textit{(Simetria).}$$

$$(u,u) \geq 0,\ \forall u \in H \qquad \textit{(Positividade).}$$

$$(u,u) \neq 0,\ \forall u \neq 0 \qquad \textit{(Definida).}$$

Lembremos de que um produto escalar satisfaz a desigualdade de $Cauchy-Schwarz$

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{1/2}(v,v)^{1/2},\ \forall u,v \in H.$$

Teorema 2.13 (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Dado qualquer $\varphi \in H^*$; existe $f \in H$ único tal que:*

$$\langle \varphi, v\rangle = (f,v), \forall v \in H$$

Além disso,

$$|f| = \|\varphi\|_{H^*}.$$

Definição 2.14. *Seja $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear*

(i) é dita contínua se existe uma constante C tal que:

$$|a(u,v) \leq C|u||v|; \forall u,v \in H;$$

(ii) é dita coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que:

$$a(v,v) \geq \alpha|v|^2, \forall v \in H.$$

Teorema 2.15 (Stampacchia)**.** *Suponhamos que $a(u,v)$ é uma forma bilinear contínua coerciva em H. Seja $K \subset H$ um conjunto não vazio, fechado e convexo. Então, dado qualquer $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $u \in K$ tal que*

$$a(u,v-u) \geq \langle \varphi, v-u\rangle, \forall v \in K.$$

Além disso, se a é simétrica, então u é caracterizada pela propriedade

$$u \in K \ e \ \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle\}.$$

Corolário 2.16 (Lax - Milgram)**.** *Suponhamos que $a(u,v)$ é uma forma bilinear contínua e coerciva em H. Então, dado qualquer $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, então u é caracterizada pela propriedade

$$u \in H \ e \ \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle\}$$

Definição 2.17. *Seja $(E_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de subespaços fechados de H. Diz-se que H é soma de Hilbert dos E_n's e escrevemos $H = \oplus_n E_n$ se:*

(a) Os espaços E_n são mutuamente ortogonais, ou seja,

$$(u,v) = 0, \ \forall u \in E_n, \forall v \in E_m, m \neq n,$$

(b) O espaço linear gerado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é denso em H.

Lema 2.18. *Suponhamos que (v_n)é uma sequência em H tal que*

$$(v_m, v_n) = 0, \forall m \neq n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_k|^2 < \infty.$$

Seja

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Então

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n, \ \text{existe}$$

e, além disso,

$$|S|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2$$

Teorema 2.19. *Suponhamos que H é soma de Hilbert dos E_n's.Dado $u \in H$, seja*

$$u_n = P_{E_n} u$$

e

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Então temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = u$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_k|^2 = |u|^2, \quad (\textit{Indetidade de Bessel - Parseval})$$

Definição 2.20. *Uma sequência $(e_n)_{n\geq 1}$ em H diz-se uma base ortonormal de H (ou uma base de Hilbert ou simplesmente base) se são satisfeitas as seguintes propriedades:*

(i) $|e_n| = 1, \forall n$ *e* $(e_m, e_n) = 0, \forall m \neq n,$

(ii) o espaço linear gerado pelos e_n'n é denso em H.

Corolário 2.21. *Seja (e_n) é uma base ortonormal. Então para cada $u \in H$, temos*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k) e_k,$$

e

$$|u|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, e_k)|^2$$

Por outro lado, dado qualquer sequência $(\alpha_n) \in \ell^2$, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ converge para algum elemento $u \in H$ tal que $(u, e_k) = \alpha_k, \forall k$ e $|u|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$.

Teorema 2.22. *Cada espaço de Hilbert tem uma base ortonormal.*

2.4 Espaços de Sobolev

Definição 2.23 (Derivada Generalizada)**.** *Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um multi-índice com coordenadas inteiras não negativas. Dizemos que $f^\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a α-*

ésima derivada generalizada ou derivada fraca em Ω *de* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *se para cada* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^\alpha \varphi.$$

Definição 2.24. *Seja* m *um inteiro positivo,* $1 \leq p < \infty$*. Denotamos por* $W^{m,p}(\Omega)$ *ao espaço linear de elementos* f *em* $L^p(\Omega)$ *para os quais as derivadas parciais generalizadas* $D^\alpha f$ *existem para todo* $|\alpha| \leq m$ *e pertencem a* $L^p(\Omega)$*, com norma*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p)^{1/p}$$

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Teorema 2.25. *O espço* $W^{m,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach. Para* $1 < p < \infty$*,* $W^{m,p}(\Omega)$ *é reflexivo.*

Definição 2.26. *Denotamos por* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *ao fecho do conjunto* $C_0^\infty(\Omega)$ *na norma de* $W^{m,p}(\Omega)$*.*

Os espaços $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto escalar

$$(f, g) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2}$$

Definição 2.27. *Seja* m *um inteiro positivo,* $1 < p < \infty$*, e* $1/p + 1/q = 1$*. Denotamos por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *ao dual do espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$*.*
O espaço $W^{-m,2}(\Omega)$ *é denotado por* $H^{-m}(\Omega)$*.*

Agora introduzimos no conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ a seguinte noção de convergência.

Definição 2.28. *Dizemos que uma sequência* $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ *converge a zero se existe um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que*

(i) supp $\varphi_n \subset K$ *para cada* φ_n*,*

(ii) $\lim_{n \to \infty} D^\alpha \varphi_n = 0$ *para cada multi-índice* α*, uniformemente em* Ω*.*

Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ *ao conjunto* $C_0^\infty(\Omega)$ *junto com a convergência introducida acima.*

Definição 2.29. *Dizemos que a função $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ uma distribuição em Ω se*

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e se

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = 0$$

para cada sequência $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ que converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ ao conjunto de todas as distribuições em Ω e escrevemos $\langle T, \varphi\rangle$ em lugar de $T(\varphi)$. Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, a função em $\mathcal{D}(\Omega)$ definida por

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$$

é uma distribuição. Por causa disso , podemos considerar $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 2.30 (Derivada de uma distribuição)**.** *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então a função $\frac{\partial T}{\partial x_i} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, n\}$ definido por*

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, é uma distribuição. Analogamente, para α um multi-índice arbitrário, se define $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, chamamos $D^\alpha T$ a α-ésima derivada da distribuição de T.

Teorema 2.31. *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$, Lipschitz, isto é, $\Omega \subset C^{0,1}$. Então*

(i) se $kp < n$, então a imersão de $W^{k,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$ é contínua, $p^* = np/(n - kp)$, e a imersão de $W^{k,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ é compacta para $q < p^*$;

(ii) *se* $0 \leq m < k - n/p < m+1$, *então a imersão de* $W^{k,p}(\Omega)$ *em* $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ *é contínua,* $\alpha = k - n/p - m$, *e a imersão de* $W^{k,p}(\Omega)$ *em* $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ *é compacta, para* $\beta < \alpha$.

Lema 2.32. *Seja* Ω *um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *aberto e limitado. Então a imersão de* $H_0^1(\Omega)$ *em* $L^2(\Omega)$ *é compacto.*

Teorema 2.33. *Seja* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^m, *e seja* u *qualquer função em* $W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega), 1 \leq r, q \leq \infty$. *Para qualquer número inteiro* $j, 0 \leq j < m$, *e para qualquer número* θ *do intervalo* $j/m \leq \theta \leq 1$, *seja*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{m} + \theta(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}) + (1-\theta)\frac{1}{q}.$$

Se $m - j - n/r$ *não é um número inteiro não negativo, então*

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|^{\theta}_{W^{m,r}(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

Se $m-j-n/r$ *é inteiro não negativo, então a desigualdade (1.1) vale para* $\theta = j/m$. *A constante* C *depende somente de* $\Omega, r, q, m, j, \theta$.

Observação 2.34. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *como no Teorema 2.33. Então*

(i) *a imersão de* $W^{1,2}(\Omega)$ *em* $L^6(\Omega)$ *é contínua,*

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

(ii) *a imersão de* $W^{1,2}(\Omega)$ *em* $L^4(\Omega)$ *é compacta.*

(iii) *a imersão de* $W^{2,2}(\Omega)$ *em* $C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$ *é contínua, e a imersão de* $C^{0,1/2}(\Omega)$ *em* $C(\overline{\Omega})$ *é compacta; em particular, temos:*

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Lema 2.35 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* Ω *um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$, *aberto e limitado,* n *um inteiro positivo,* $d =$ *diam* $\Omega = \sup\{dist(x,y) \ : \ x, y \in \Omega\}$. *Então* *para cada* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *e* $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Veja demonstração em Lukaszewicz (1999).

Corolário 2.36. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e limitado. Então, as duas seguintes normas são equivalentes em* $W_0^{1,2}(\Omega)$*:*

$$\|u\| = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

e

$$|||u||| = (\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

Lema 2.37. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto e limitado. Então para todo* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \|Du\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}.$$

Veja demonstração em Ladyzhenskaya (1969) e Lukaszewicz (1999).

Lema 2.38. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *um conjunto aberto e limitado. Então para todo* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|u\|^{1/4}_{L^2(\Omega)} \|Du\|^{3/4}_{L^2(\Omega)}.$$

Veja demonstração em Ladyzhenskaya (1969) e Lukaszewicz (1999).

Lema 2.39. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *um conjunto aberto e limitado. Então para todo* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq 48^{1/6} \|Du\|_{L^2(\Omega)}.$$

Veja demonstração em Ladyzhenskaya (1969) e Lukaszewicz (1999).

2.4.1 Operadores fortemente elípticos

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^k, para algum $k \geq 1$. Consideremos o operador de ordem $2m$

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

no qual os coeficientes $a_\alpha(x)$ são funções C^1 com valores complexos para $x \in \overline{\Omega}$. A parte principal $A'(x, D)$ de $A(x, D)$ é o operador

$$A'(x, D) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Definição 2.40. *O operador $A(x, D)$ é fortemente elíptico se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$Re[(-1)^m A'(x, \xi)] \geq c\|\xi\|_2^{2m},$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Para operadores fortemente elípticos temos uma importante desigualdade

Teorema 2.41 (Desigualdade de Garding)**.** *Se $A(x, D)$ é um operador fortemente elíptico de ordem $2m$ então existem constantes $c_0 > 0$ e $\lambda_0 \geq 0$ tal que para cada $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ temos*

$$Re(Au, u) \geq c_0\|u\|^2_{W^{m,p}(\Omega)} - \lambda_0\|u\|^2_{W^{0,p}(\Omega)}$$

A demonstração deste teorema será omitida, já que pode ser encontrada em Pazy (1983).

2.5 Espaços de Bochner

Os espaços de funções que mapeiam o intervalo $(0, T)$ (tempo) em algum espaço de Banach é chamado espaço de Bochner. Seja $u : (0, T) \to X$ uma função de um intervalo $(0,T), T>0$, para um espaço de Banach X. Dizemos que u é *fortemente mensurável* se a função real $t \to \|u(t)\|_X$ é mensurável.

Para $q \in [1,\infty]$ e um espaço de Banach X com a norma $\| \, . \, \|_X$, denotamos por $L^q(0,T;X)$ ao conjunto de todas as funções $f:[0,T] \to X$ que são fortemente mensuráveis tais que

$$\|f\|_{L^q(0,T;X)} = \begin{cases} (\int_0^T \|f(t)\|_X^q dt)^{\frac{1}{q}} < \infty & \text{para } q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X < \infty & \text{para } q = \infty. \end{cases}$$

O espaço $L^q(0,T;X)$ com a norma $\| \, . \, \|_{L^q(0,T;X)}$ é um espaço de Banach. Observemos que, $L^q(0,T;L^q(\Omega)) = L^q(\Omega \times (0,T))$.

Seja X um espaço de Banach, X' é seu dual, e seja $u \in L^1(0,T;X)$. Denotamos por u' (ou por u_t) um elemento de $L^1(0,T;X)$ tal que para todo $v \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle v, u(t)\rangle_{X',X} = \langle v, u'(t)\rangle_{X',X},$$

no sentido das distribuições em $(0,T)$. Assim, temos para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$,

$$-\int_0^T \langle v, u(t)\rangle_{X',X}\varphi'(t)dt = \int_0^T \langle v, u'(t)\rangle_{X',X}\varphi(t)dt,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$ denota a dupla emparelhamento entre X' e X.

Lema 2.42. *Sejam V, H, V' três espaços de Hilbert, com $V \subset H \equiv H' \subset V'$, onde cada espaço é denso no próximo e as injecções são contínuas, sendo H' o dual de H, V' o dual de V. Se a função u pertence a $L^2(0,T;V)$ e sua derivada u' pertence a $L^2(0,T;V')$, então u é igual , quase sempre, a uma função contínua de $[0,T]$ em H, e temos a seguinte igualdade, que está dada no sentido das distribuições em $(0,T)$:*

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle_{V',V}.$$

Para demonstração do resultado anterior veja Teman (1979).

Teorema 2.43 (Aubin - Lions)**.** *Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach com B_0 e B_1 reflexivos tais que $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ com injeções contínuas e a injeção $B_0 \hookrightarrow B$*

compacta. Para $T \in (0, \infty)$ *e* $1 \leq p_i \leq \infty, i = 0, 1$, *seja*

$$\mathcal{Y} = \{v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

munido da norma

$$\|v\|_{\mathcal{Y}} = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Então $\mathcal{Y}$ *é um espaço de Banach e*

$$\mathcal{Y} \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; B)$$

com injeção compacta.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Lions (1969) e Teman (1979).

Lema 2.44. *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach tal que* $X \hookrightarrow Y$ *é contínua. Se a função* u *pertence a* $L^\infty(0, T; X)$ *e é fracamente contínua com valores em* Y*; isto é, para todo* $v \in Y$ *a função* $t \to (u(t), v)$ *é contínua, então* u *é fracamente contínua com valores em* X.

Veja demonstração em Teman (1979).

Lema 2.45. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *um conjunto aberto e limitado, e seja*

$$u \in L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Então, $u \in L^4(0, T; L^3(\Omega))$.

Veja demonstração em Lions (1969).

2.6 Resultado importante

O seguinte resultado que enunciaremos, vai ser fundamental na demonstração que veremos no Capítulo 3. O resultado pode ser encontrado em Heywood (1980)

Assumimos que as funções $\phi(t), \psi(t), f(t), h(t)$ são não-negativas,C^k $(k \geq 1)$ e definidas para todo $t \geq 0$

Lema 2.46. *Suponhamos que* $\phi(0) = \phi_0$ *e* $\phi'(t)\psi(t) \leq g(\phi(t)) + f(t)$*, para* $t \leq 0$*, onde a função* g *é não-negativa, contínua, Lipschitz e definida para* $\phi \geq 0$*. Então se cumple que* $\phi(t) \leq F(t;\phi_0)$*, para* $t \in [0, T(\phi_0))$*, onde* $F(\cdot; T(\phi_0))$ *é solução do problema com valor inicial* $F'(t) = g(F(t)) + f(t), F(0) = \phi_0$*, e* $[0, T(\phi_0))$ *é o maior intervalo onde* F *pode ser contínua. Também, se* g *é não-decrescente, então* $\int_0^t \psi(s)ds \leq \tilde{F}(t;\phi_0)$*, onde* $\tilde{F}(t;\phi_0) = \phi_0 + \int_0^t [g(F(s;\phi_0)) + f(s)]ds$*.*

3 Equação de Stokes e Equação Micropolar.

Neste capítulo vamos apresentar a forma linearizada e estacionária das equações de Navier-Stokes, que é conhecida como as equações de Stokes estacionárias, e as equações de fluidos micropolares. Também, enunciamos resultados importantes, associadas a estas equações. Estes resultados serão muito úteis para o tratamento das equações de Navier - Stokes e das equações dos fluidos micropolares.

3.1 Equação de Stokes (estacionária).

Nesta seção vamos apresentar certos espaços de funções fundamentais.

Iremos frequentemente trabalhar com funçoes em espaços n-dimensionais com componentes nesses espaços. Usaremos a seguinte notação:

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \{L^p(\Omega)\}^n,\ \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{W^{m,p}(\Omega)\}^n$$

$$\mathbf{H}^m = \{H^m(\Omega)\}^n,\ \mathscr{D}(\Omega) = \{\mathcal{D}(\Omega)\}^n,$$

onde Ω é qualquer conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Vamos supor que estes espaços produtos são equipados com a norma produto usual ou uma norma equivalente (exceto $\mathscr{D}(\Omega)$ e $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$, que não são espaços normados).

Seja $\mathscr{V}$ o espaço (sem topologia)

$$\mathscr{V} = \{u \in \mathscr{D}(\Omega)\ ;\ div\ u = 0\}. \tag{3.1}$$

Definimos os espaços H e V da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} H &= \text{o fecho de } \mathscr{V} \text{ em } \mathbf{L}^2(\Omega) \\ V &= \text{o fecho de } \mathscr{V} \text{ em } \mathbf{H}_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Os espaços H e V são importantes para o estudo das equações de Navier-Stokes.

3.1.1 Caracterização dos espaços H e V

Caracterização do gradiente de uma distribuição.

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $p \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Para todo $v \in \mathscr{V}$, temos

$$\langle grad\ p, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle D_i p, v_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle p, D_i v_i\rangle = \langle p, div\ v\rangle = 0$$

Esta propriedade caracteriza as distribuições que podem ser em termos do gradiente de uma distrinuição, como especifica o seguinte resultado

Proposição 3.1. *Seja Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f = \{f_1, \dots, f_n\}, f_i \in \mathscr{D}'(\Omega), i = 1, \dots, n$. Uma condição necessária e suficiente para que $f = grad\ p$, para algum $p \in \mathscr{D}'(\Omega)$, é que $\langle f, v\rangle = 0$, para todo $v \in \mathscr{V}$.*

Para demontração veja Teman (1979).

Proposição 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e Lipschitz em .*

(i) Se uma distribuição p tem todas suas derivadas de primeira ordem $D_i p$, $1 \leq i \leq n$, em $L^2(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega)|grad\ p\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}.$$

(ii) Se uma distribuição p possui todas suas derivadas de primeira ordem $D_i p$, $1 \leq i \leq n$, em $H^{-1}(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega)\|grad\ p\|_{\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)},$$

onde $L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \{p \in L^2(\Omega),\ \int_\Omega p(x)dx = 0\}$.
Em ambos casos, se Ω *é qualquer conjunto aberto em* $\mathbb{R}^n$, $p \in L^2_{loc}(\Omega)$.

Para uma prova deste resultado veja Teman (1979).

Caracterização do espaço H

Agora daremos uma caracterização dos espaços H e $H^\perp$, onde $H^\perp$ é o complemento ortogonal de H em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Teorema 3.3. *Seja* Ω *um conjunto aberto, limitado e Lipschitz em* $\mathbb{R}^n$. *Então:*

$$H^\perp = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) :\ u = grad\ p, p \in H^1(\Omega)\},$$

$$H = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) :\ div\ u = 0, \gamma_v u = 0\}.$$

Uma prova do resultado anterior pode ser encontrada em Teman (1979).

Observação 3.4. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto aberto. Então*

$$H^\perp = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) : u = grad\ p,\ p \in L^2_{loc}(\Omega)\}.$$

Se Ω *é ilimitado e sua fronteira* $\partial\Omega$ *é localmente Lipschitz, então*

$$H^\perp = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) : u = grad\ p,\ p \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})\}.$$

Teorema 3.5. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *limitado e aberto de classe* C^2. *Então*

$$\boldsymbol{L}^2(\Omega) = H \oplus H_1 \oplus H_2,$$

onde H, H_1, H_2 *são espaços mutuamente ortogonais, e*

$$H_1 = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) : u = grad\ p, p \in H^1(\Omega), \Delta p = 0\},$$

$$H_2 = \{u \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) : u = grad\ p, p \in H^1_0(\Omega)\}$$

Para a demonstrção do teorema veja Teman (1979).

Observação 3.6. *(a) Seja P_H o projetor ortogonal de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ em H. A função P_H é contínua em $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Além disso, P_H também leva $\boldsymbol{h}^1(\Omega)$ em si mesmo e é contínua para a norma de $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$.*

(b) P_H é contínuo de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ em $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$:

$$\|P_H u\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \leq c(\Omega)\|u\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}, \forall u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega).$$

(c) Se Ω é de classe $C^{r+1}, r \geq 1$ $(r \in \mathbb{Z})$. Se $u \in H^r(\Omega)$ então $P_H \in H^r(\Omega)$ e P_H é linear e contínua para a norma de $H^r(\Omega)$

$$\|P_H u\|_{\boldsymbol{H}^r(\Omega)} \leq c(r,\Omega)\|u\|_{\boldsymbol{H}^r(\Omega)}, \forall u \in \boldsymbol{H}^r(\Omega)$$

Caracterização do espaço V

A seguinte caracterizção pode ser encontrada em Teman (1979).

Teorema 3.7. *Seja Ω um conjunto aberto e Lipschitz. Então*

$$V = \{u \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) : div\ u = 0\}.$$

3.1.2 Existência e unicidade para as equações de Stokes.

As equações de Stokes são a forma estácionaria e linearizada das equações de Navier-Stokes. Nosso objetivo aquí é apressentar a formulação variacional do problema de Stokes, um resultado de existência e unicidade utilizando o Teorema de projeção e regularidade de soluções.

Formulação Variacional

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$, e seja $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Procuramos uma função vetorial $u = (u_1, \ldots, u_n)$ que representa a velocidade do fluído, e uma função escalar p que representa a pressão, que são definidos em Ω e satisfazem as seguintes equações e condições de contorno ($\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade cinemática, o qual é uma constante positiva):

$$-\nu\Delta u + grad\ p = f \text{ em } \Omega, \tag{3.2}$$

$$div\ u = 0 \text{ em } \Omega, \tag{3.3}$$

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.4}$$

Se $f, u,$ e p são funções regulares que satisfazem (3.2) - (3.4) , então tomando o produto escalar em (3.2) com uma função $v \in \mathscr{V}$ obtemos,

$$(-\nu\Delta u + grad\ p, v) = (f, v).$$

Integrando por partes temos que

$$(-\Delta u, v) = \sum_{i=1}^{n}(grad\ u_i, grad\ v_i) = ((u, v)), \tag{3.5}$$

e

$$(grad\ p, v) = -(p, div\ v) = 0$$

Daí,

$$\nu((u, v)) = (f, v), \tag{3.6}$$

para todo $v \in \mathscr{V}$.

Como cada um dos lados da equação (3.6) depende linear e continuamente de v na topología $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, a igualdade (3.6) ainda é válida, por continuidade, para cada $v \in V$. Se o conjunto Ω é de classe C^2 devido a (3.4), a função regular u pertence a $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, e por causa de (3.3) e ao Teorema 3.7, $u \in V$. Chegamos então à seguinte conclusão:

$$u \text{ pertence a } V \text{ e satisfaz } \ \nu((u, v)) = (f, v), \text{ para todo } v \in V \tag{3.7}$$

Vamos supor que u satisfaz (3.7) e, mostraremos que u satisfaz (3.2) - (3.4) em algum sentido. Como u pertence somente a $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, temos menos regularidade e só pode exceto u para satisfazer (3.2) - (3.4) em um sentido mais fraco do que o sentido clássico. Na realidade, $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ implica que os traços $\gamma_0 u_i$ dos seus componentes são zero em $H^{1/2}(\partial\Omega)$; $u \in V$ implica (usando Teorema 3.7) que $div\ u = 0$ no sentido das distribuições. Usando (3.7) temos

$$\langle -\nu\Delta u - f, v\rangle = 0, \forall v \in \mathscr{V}.$$

Então, em virtude das Proposições 3.1 e 3.2, existe alguma distribuição $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$-\nu\Delta u - f = -grad\ p,$$

no sentido das distribuições ou em $\mathscr{D}'(\Omega)$. Assim provamos o seguinte lema

Lema 3.8. *Seja Ω um conjunto aberto e limitado de classe C^2, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ As seguintes condições são equivalentes*

(i) $u \in V$ satisfaz (3.7)

(ii) u pertence a $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ e satisfaz (3.2) - (3.4) no seguinte sentido fraco existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$-\nu\Delta u + grad\ p = f \textit{ no sentido da distribuição em } \Omega; \tag{3.8}$$

$$div\ u = 0 \textit{ no sentido de distribuição em } \Omega; \tag{3.9}$$

$$u = \phi \textit{ em } \Gamma \tag{3.10}$$

O Teorema de Projeção

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que

$$\Omega \text{ é limitado em alguma direção,} \tag{3.11}$$

ou seja, existe um vetor unitario $h \in \mathbb{R}^n$ e constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < x \cdot h < b$ (onde x · h, é o produto interno do vetor x com o vetor h), $\forall x \in \Omega$.

Teorema 3.9. *Para todo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que é limitada em alguma direção, e para todo $f \in L^2(\Omega)$. o problema 3.7 tem uma única solução u. (O resultado* *também é válido se f é dada em $H^{-1}(\Omega)$).*

Além disso, existe uma função $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ tal que (3.8) - (3.10) são satisfeitas.

Se Ω é um conjunto aberto, limitado e de classe C^2, então $p \in L^2(\Omega)$ e (3.8) - (3.11) são satisfeitas por u e p.

Lema 3.10. *Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear contínua em um espaço de Hilbert W. Seja ϕ_m e ψ_m uma sequência de elementos de W tal que $\phi_m \to \phi$ e $\psi_m \to \psi$ na topología fraca (ou forte) de W. Então*

$$\lim_{m\to\infty} a(\psi_m, \phi_m) = a(\psi, \phi). \tag{3.12}$$

$$\lim_{m\to\infty} a(\phi_m, \psi_m) = a(\phi, \psi). \tag{3.13}$$

Ver a demonstração do resultado anterior em Teman (1979).

O problema de Stokes não homogéneo

Agora consideremos o problema de Stokes não homogéneo

$$-\nu\Delta u + grad\ p = f \text{ em } \Omega, \tag{3.14}$$

$$div\ u = g \text{ em } \Omega, \tag{3.15}$$

$$u = \phi \text{ em } \Gamma, \tag{3.16}$$

O seguinte teorema mostra a existência de soluções, com certas condições, do problema (3.14) - (3.16). Para a demonstração do seguinte resultado ver Teman (1979).

Teorema 3.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e de classe C^2; com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Sejam as funções dadas $f \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega), g \in L^2(\Gamma), \phi \in \boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma)$, tal que*

$$\int_\Omega g\ dx = \int_{\partial\Omega} \phi \cdot \nu\ d\Gamma, \tag{3.17}$$

Então existem $u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega), p \in L^2(\Omega)$, que são soluções de (3.14) - (3.16).

As funções u e p são únicas a menos adição de uma constante.

Observação 3.12. *(a) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e Lipschitz. Então, o operador divergente leva $H_0^1(\Omega)$ para o espaço $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.*

(b) O Teorema 3.9 é estendido para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que é apenas aberto, limitado e Lipschitz, desde que ϕ é dado como o traço de uma função ϕ_0 em $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ e (3.16) e (3.17) são estendidas como segue

$$\int_\Omega g\ dx = \int_\Omega div\ \phi_0\ dx, u - \phi_0 \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

Tomando $u_0 = \phi_0$.

Resultados de regularidade.

Um resultado clássico de regularidade é que a solução $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ do problema de Dirichlet, $-\Delta u + u = f$ pertence a $\mathbf{H}^{m+2}(\Omega)$ sempre que $f \in \mathbf{H}^m(\Omega)$. Um pergunta natural é se existem resultados similares de regularidade para o problema de Stokes. Este resultado é similar em espaços L^p a qual é dada pela seguinte proposição. Para a demonstração do resultado veja Teman (1979).

Proposição 3.13. *Seja Ω um conjunto aberto e limitado, de classe C^{m+2}, onde $m \in \mathbb{Z}^+$. Vamos supor que:*

$$u \in W^{1,\alpha}(\Omega), p \in L^\alpha(\Omega),\ 1 < \alpha < +\infty, \tag{3.18}$$

são soluções do problema de Stokes (3.14) - (3.16). Além disso, se $f \in W^{m,\alpha}(\Omega)$, $g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$ e $\phi \in W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)$, então

$$u \in W^{m+2,\alpha}(\Omega),\ p \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)\ e \tag{3.19}$$

existe uma constante $c_0 = c_0(\alpha, \nu, m, \Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m+2,\alpha}(\Omega)} + \|p\|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \\ c_0\{\|f\|_{W^{m,\alpha}(\Omega)} + \|g\|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)} + d_\alpha\|u\|_{L^\alpha(\Omega)}\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

$d_\alpha = 0$ para $\alpha \geq 2$, $d_\alpha = 1$ para $1 < \alpha < 2$.

A seguinte proposição dá um resultado de existência geral e uma demonstração é dada em Cattabriga (1961) e Teman (1979).

Proposição 3.14. *Seja Ω uma conjunto aberto e limitado, de classe C^r, onde $r = max\ \{m+2, 2\}$, $m \in \mathbb{Z}$ com $m \geq -1$, e seja $f \in W^{m,\alpha}(\Omega), g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega), \phi \in W^{m+2-\alpha,\alpha}(\Gamma)$, dados, satisfaz a condição de compatibilidade*

$$\int_\Omega g\ dx = \int_\Omega \phi \cdot v\ d\Gamma, \tag{3.21}$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Então existem funções u e p únicas (p é única a menos adição de uma constante) talque são soluções de (3.16) - (3.18) e satisfazem (3.19) e (3.20) com $d_\alpha = 0$ para cada α, $1 < \alpha < \infty$.

3.1.3 Caso linear da equação de Navier - Stokes.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto , limitado e Lipschitz . Os espaqs $\mathscr{V}$, V e H são os mesmos espaços que definimos, anteriormente.

O espaço V está contido H, é denso em H, e a injeção é contínua. Seja H^* e V^* denota os espaços duais de H e V, respectivamente. Denotemos i a injeção contínua de V em H. O operador adjunto i^* é linear e contínua de H^* para V^*,

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*, \tag{3.22}$$

Como consequência da identificação de H e H^*, o produto escalar em H de $f \in H$ e $u \in V$ é o mesmo que o producto de f e u na dualidade entre V^* e V, isto é

$$\langle f, u\rangle = (f, u), \text{ para todo } f \in H, \text{ para todo } \forall u \in V. \tag{3.23}$$

Por outro lado, para cada $u \in V$, a aplicação

$$\nu \in V \to ((u, \nu)) \in \mathbb{R} \tag{3.24}$$

é linear e contínua em V. Portanto, existe um elemento de V^*, que denotaremos por Au, tal que

$$\langle Au, \nu \rangle = ((u, \nu)), \forall \nu \in V. \tag{3.25}$$

Lema 3.15. *Seja X um espaço de Banach dado com dual X^*. Suponha que u e $g$são duas funções que pertencem a $L^1(a, b; X)$. Então, as seguintes condições são equivalentes*

(a) u é igual à primitiva da função g em quase todo ponto e

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \text{ para quase todo } t \in [a, b], \tag{3.26}$$

onde $\xi \in X$.

(b) Para cada função $\phi \in \mathscr{D}(a, b)$,

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt \tag{3.27}$$

onde $\phi' = \frac{d\phi}{dt}$.

(c) Para cada $\eta \in X^*$,

$$\frac{d}{dt}\langle u, \eta \rangle = \langle g, \eta \rangle, \tag{3.28}$$

no sentido das distribuções escalares, em (a, b).

Se as condições foram satisfeitas, u é, em quase todo ponto, igual a uma função contínua de $[a, b]$ em X.

Veja demontração em Teman (1979).

3.1.4 Teoremas de existência e unicidade.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e Lipschitz e $T > 0$ fixo.

Denotemos por $\mathfrak{Q}_T$ ao cilindro $\Omega \times (0, T)$. As equações de Navier-Stokes linearizadas são as equações de evolução correspondentes ao problema Stokes:

O problema é encontrar uma função vetorial $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$, onde a função u representa a velocidade do fluido e a função p representa sua pressão, de tal modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + gradp &= f \ em \ \mathcal{Q}, && (3.29)\\
div \ u &= 0 \ em \ \mathcal{Q}, && (3.30)\\
u &= 0 \ em \ \partial\Omega \times [0,T], && (3.31)\\
u(x,0) &= u_0(x), \ em \ \Omega, && (3.32)
\end{aligned}$$

onde as funções f e u_0 são dadas, f está definida em $\Omega\times[0,T]$, u_0 está definida em Ω. As equações (3.31) e (3.32) são as condiçoes de fronteira e inicial, respectivamente. Suponhamos que u e p são soluções clássicas de (3.29) - (3.32), e $u \in C^2(\overline{Q})$, $p \in C^1(\overline{Q})$. Se v denota qualquer elemento de $\mathscr{V}$, então

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, v) + v((u,v)) = (f,v). \quad (3.33)$$

Pela continuidade, a igualdade (3.33) vale também para cada $v \in V$.

Agora, observemos que

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, v) = \frac{d}{dt}(u,v)$$

Isto conduz à seguinte formulação fraca do problema (3.29) - (3.32):

Para f e u_0 dados, tais que

$$\begin{aligned}
f &\in L^2(0,T;V^*), && (3.34)\\
u_0 &\in H, && (3.35)
\end{aligned}$$

encontrar u, satisfazendo

$$u \in L^2(0,T;V) \quad (3.36)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) &= \langle f,v\rangle, \forall v \in V. && (3.37)\\
u(0) &= u_0. && (3.38)
\end{aligned}$$

Por (3.23) e (3.25), podemos escreve (3.36) da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt}\langle u, v\rangle \;=\; \langle f - \nu Au, v\rangle, \forall v \in V. \tag{3.39}$$

Como A é linear e contínua de V em V^* e $u \in L^2(V)$, a função Au pertence $L^2(V^*)$; consequentemente $f - \nu Au \in L^2(V^*)$. Por (3.39) e Lema 2.16, temos que

$$u' \in L^2(0, T, V^*) \tag{3.40}$$

e u é igual, em quase todo ponto, a uma função contínua de $[0, T]$ em V^*.

Qualquer função que satisfaça (3.36) e (3.37) é, após a alteração de um conjunto de medida zero, uma função contínua de $[0, T]$ em V^*, e portanto a condição)(3.38) faz sentido.

Vamos a supor novamente que f é dada em $L^2(V^*)$ como em (3.34). Se u satisfaz (3.36) e (3.37) então, como é observado antes, u satisfaz (3.39) e (3.40). De acordo com o Lema 2.16 a igualdade (3.39) é equivalente a

$$u' + vAu = f. \tag{3.41}$$

Por outro lado, se u satifaz (3.36), (3.40) e (3.41), então u claramente (3.37), $\forall v \in V$.

Uma formulação alternativa do problema fraco é a seguinte

Dados f e u_0 satisfazendo (3.34) - (3.35), encontrar u satisfazendo:

$$u \in L^2(0, T; V),\; u' \in L^2(0, T; V^*), \tag{3.42}$$

$$u' + vAu = f,\; em\; (0, T), \tag{3.43}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.44}$$

Qualquer solução de (3.42) - (3.44) é solução de (3.36) - (3.38) e, inversamente.

Sobre a existência e unicidade de soluçõ destes problemas, vamos a enunciar o seguinte resultado

Teorema 3.16. *Dados f e u_0 satisfazendo (3.34) e (3.35), existe uma única função* *u que satisfaz (3.42) - (3.44). Além disso,*

$$u \in C([0,T];H). \tag{3.45}$$

Veja demontração da existência em Teman (1979).

3.2 Equação Micropolar.

A seguir vamos a considerar o problema com condições de fronteira

$$-(\nu+\nu_r)\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 2\nu_r rot\omega + f, \tag{3.46}$$

$$div\ u = 0, \tag{3.47}$$

$$-(c_a+c_d)\Delta\omega + (u\cdot\nabla)\omega - (c_0+c_d-c_a)\nabla div\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r rotu + g, \tag{3.48}$$

em Ω,

$$u = 0,\ \omega = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.49}$$

As funções $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)), p(x)$ e $\omega(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x))$ representam a velocidade do vetor, a pressão e a velocidade angular de rotação das partículas dos fluidos respectivamente. As funções $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ e $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ denotam fontes externas de momento linear e angular, respectivamente. Eles dependem explicitamente do campo externo. As constantes positivas $\nu, \nu_r, c_0, c_a, c_d$ caracterizam as propriedades isotrópicas do fluido; ν é a viscosidade cinemática newtoniana habitual, ν_r, c_0, c_a, c_d são viscosidades, em consequência, com a aparência do campo de rotação interna ω no modelo de fluido dado. Assumimos que $c_0 + c_d > c_a$.

Note que, se $\nu_r = c_0 = c_a = c_d = 0$ e $g = \omega = 0$ em (3.46) e (3.48), então o sistema (3.46) - (3.49) reduz-se ao sistema de Navier-Stokes da hidrodinâmica clássica. .

Escrevemos $b(u, v, \omega) = ((u\cdot\nabla)v, \omega)$.

Note que $b(u, \omega, \omega) = 0$ para $u \in V, \omega \in H_0^1(\Omega)$.

Definição 3.17. *Dizemos que* (u, p, ω) *é solução fraca do problema (3.46) - (3.49) se*

$$u \in V,\ p \in L^q(\Omega)\ (q \geq 1),\ e\ (p, 1) = 0,\ \omega \in H_0^1(\Omega), \tag{3.50}$$

e as seguintes identidades são válidas para todos $\psi_i \in H_0^1(\Omega), i = 1, 2:$

$$(\nu + \nu_r)((u, \psi)) + b(u, u, \psi_1) - (p, div\psi_1) = 2\nu_r(rot\omega, \psi_1), \tag{3.51}$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$,

$$(u, \nabla\xi) = 0, \tag{3.52}$$

para todo $\xi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^1)$, *and*

$$\begin{aligned}(c_a + c_d)((\omega, \psi)) + b(u, \omega, \psi) + (c_0 + c_d - c_a)(div\omega, div\psi)\\ +4\nu_r(\omega, \psi) = 2\nu_r(rotu, \psi) + (g, \psi),\end{aligned} \tag{3.53}$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Se verifica que qualquer solução clássica de (3.46) - (3.49) satisfaz identidades (3.51) - (3.53).

Agora, vejamos os seguintes resultados sobre existência, unicidade e regularidade da solução para o problema (3.46) - (3.49).

Teorema 3.18 (Existência)**.** *Se* $f \in L^2(\Omega),\ g \in L^2(\Omega)$, *então existe uma solução fraca do problema (3.46) - (3.49).*

Teorema 3.19 (Unicidade)**.** *Se* ν *é suficientemente grande, então a solução do Teorema 2.19 é única.*

Teorema 3.20 (Regularidade)**.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.19, temos que* $u \in W_2^2(\Omega),\ p \in W_2^1(\Omega)$ *e* $\omega \in W_2^2(\Omega)$. *Além disso, a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_{2,2} + \|p\|_{1,2} + \|\omega\|_{2,2} \leq F(|f|_2, |g|_2), \tag{3.54}$$

onde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, não crescente suas componentes, tal que $F(0,0) = 0$.

Para detalhes das demonstrações dos Teoremas 2.19, 2.20 e 2.21 veja Lukaszewicz (1999).

3.2.1 Problema auxiliar linear

Consideremos o problema com condição de fronteira:

$$-(c_a + c_d)\Delta\omega + (u \cdot \nabla)\omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla div\ \omega + 4\nu_r\omega = 2v_r rot\ u + g \tag{3.55}$$

em Ω, com

$$\omega = 0 \tag{3.56}$$

em $\partial\Omega$, $u \in V$.

Lema 3.21. *Se $g \in L^2(\Omega)$ e $u \in V$, então o problema:*

$$\begin{aligned}(c_a + c_d)((\omega, \psi)) + b(u, \omega, \psi) + (c_0 + c_d - c_a)(div\ \omega, div\ \psi) \\ +4\nu_r(\omega, \psi) = 2\nu_r(rot\ u, \psi) + (g, \psi),\end{aligned} \tag{3.57}$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$, uma forma fraca do problema (3.55), (3.56), tem uma única solução em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, temos a seguintes desigualdades:

$$(c_a + c_d)\|\omega\|_1 \leq 2\nu_r|u|_2 + d|g|_2, \ \textit{onde } d \textit{ é o diâmetro de } \Omega, \tag{3.58}$$

$$2\nu_r|\omega|_2 \leq \nu_r\|u\|_1 + 2^{-1}|g|_2 \tag{3.59}$$

Para a prova do resultado anterior veja Lukaszewicz (1999).

3.2.2 Problemas não estacionários.

Consideremos um problema de valor inicial no contorno para o sistema de equações de fluidos micropolares viscosos com densidade constante $\rho = 1$. Enunciaremos um resultado de existência de soluções fracas do problema.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitado em com fronteira $\partial\Omega$ regular, e seja $T > 0$.

Estudaremos o seguinte sistema de equações na região de espaço-tempo $\mathcal{Q}_T = \Omega \times (0,T)$:

$$u_t - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r rot\ \omega + f, \tag{3.60}$$

$$div\ u = 0, \tag{3.61}$$

$$\omega_t - (c_a + c_d)\Delta\omega + (u \cdot \nabla)\omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla div\ \omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r rot\ u + g. \tag{3.62}$$

Este sistema descreve o movimento de um fluido micropolar viscoso com densidade constante $\rho = 1$. As equações (3.60) - (3.62) são leis de conservação: conservação do momento linear, massa e momento angular, respectivamente, do fluido.

Juntos com o sistema (3.60) - (3.62) consideramos as seguintes iniciais e de fronteira para o sistema

$$u|_{t=0} = u_0,\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{3.63}$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0,\ \omega|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{3.64}$$

As funções

$$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)),$$

$$\omega(x,t) = (\omega_1(x,t), \omega_2(x,t), \omega_3(x,t)),$$

e $p(x,t)$ denotam a velocidade, velocidade angular de rotação das partículas, e a pressão do fluido, respectivamente. As funções:

$$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$$

e

$$g(x,t) = (g_1(x,t), g_2(x,t), g_3(x,t))$$

denotam forças externas de momento linear e angular, respectivamente. Assumimos que $c_0 + c_d > c_a$.

Se $\nu_r = c_0 = c_a = c_d = 0$, e $g = 0, \omega = 0$ em (3.60) e (3.62), então o sistema (3.60) - (3.62) reduz-se o sistema de Navier-Stokes da hidrodinâmica clássica. Além disso, se a viscosidade microtacional cinemática $\nu_r = 0$, os problemas (3.60), (3.61), (3.62) e (3.63), (3.64) torna-se independente uns dos outros.

Lembramos que ∇, Δ, rot e div denotam os operadores gradiente, Laplaciano, rotacional e divergente, respectivamente; de modo que $\Delta u, (u.\nabla)u, (u.\nabla)\omega, \nabla p$, e rot ω são vectores com componentes

$$\Delta u_i,\ u_j(\frac{\partial}{\partial x_j})u_i,\ u_j(\frac{\partial}{\partial x_j})\omega_i,\ (\frac{\partial}{\partial x_j})p,\ e$$
$$\varepsilon_{mij}(\frac{\partial}{\partial x_j})\omega_m,\ i = 1, 2, 3,$$

respectivamente, (índices repetidos são somados, ε_{mij} são tensores alternados de Levi-Civita), $div\ u = (\frac{\partial}{\partial x_j})u_j;\ u_t = (\frac{\partial}{\partial t})u,\ u_{ij} = (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j})u.$

O problema com condições iniciais e de fronteira (3.60) - (3.64) tem pelo menos uma solução. Mais estritamente, assumindo que f, g, u_0, ω_0 são funções dadas, temos que existem funções u, p, ω que satisfazem (3.60) - (3.62) em $\mathcal{Q}_T$ e condição inicial e de fronteira (3.63), (3.64).

Considerando o problema (3.60) - (3.64) no caso em que os dados iniciais $u_0 \in H$ e $\omega_0 \in L^2(\Omega)$. Pode-se provar um o seguinte teorema de existência, cuja demonstração pode ser encontrada em Lukaszewicz (1999).

Teorema 3.22. *Suponhamos que $u_0 \in H, \omega_0 \in L^2(\Omega)$, $f, g \in L^2(\mathcal{Q}_T)$. Então existem funções u, ω e uma distribuição p,*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \\ \omega &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ p &\in \mathcal{D}'(\mathcal{Q}_T), \end{aligned}$$

satisfazendo as equações (3.60) - (3.62) no sentido das distribuições em $\mathcal{Q}_T$ e dados iniciais fracos em $L^2(\Omega)$.

4 Existência e unicidade da solução forte do sistema micropolar

4.1 Enunciados e notações.

Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$(n = 2 ou 3) limitado e com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{1,1}$.

Se B é um espaço de Banach, denotamos por $L^q(0,T;B)$ ao espaço de Banach funções com valores em B e definidas no intervalo $(0,T)$ talque são L^q-integráveis no sentido de Bochner.

Consideremos os seguintes espaços:

$$\mathscr{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega);\ div\ v = 0 \text{ em } \Omega\},$$

$$H = \text{ fecho de } \mathscr{V} \text{ em } L^2(\Omega),$$

$$V = \text{ fecho de } \mathscr{V} \text{ em } H^1(\Omega).$$

O espaço V é caracterizado por:

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega);\ div\ u = 0\ em\ \Omega\}.$$

O espaço $L^2(\Omega)$ tem a seguinte decomposição $L^2(\Omega) = H \oplus H^\perp$, onde

$$H^\perp = \{\phi \in L^2(\Omega);\ existem\ p \in H^1(\Omega)\ com\ \phi = \nabla p\}$$

(decomposição de Helmholtz). Como foi apresentado no Capítulo 2.

Denotamos P como a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em H.

Seja $A : D(A) \hookrightarrow H$ um operador, definido por $A = -P\Delta$ com domínio $D(A) = H^2(\Omega) \cap V$, este operador é chamado o operador de Stokes. O operador A é definido positivo, auto-adjunto e é caracterizada pela seguinte relação:

$$(A\omega, v) = (\nabla\omega, \nabla v), \ \forall\omega \in D(A), \ \forall v \in V$$

O operador $A^{-1} : H \to D(A)$ um operador linear e contínuo. Como a injeção de $D(A)$ em H é compacta, temos que A^{-1} é um operador compacto e é um operador auto-adjunto em H. Além disso, como H é um espaço de Hilbert, então existe uma sequência de números $(\mu_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $\mu_j > 0$ e $\mu_{j+1} < \mu_j, \forall j$ e existe uma base ortonormal de H, $\{\varphi^j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $A^{-1}\varphi^j = \mu\varphi^j$. Denotemos $\lambda_j = \mu_j^{-1}$. Como A^{-1} tem como contradomínio a $D(A)$, temos $\varphi^j \in D(A)$,

$$A\varphi^j = \lambda_j\varphi^j,$$

$0 < \lambda_1 < \cdots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \cdots, \lim_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty$ e $\{\varphi^j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma base ortogonal de H. Portanto, $\{\varphi^j/\sqrt{\lambda_j}\}_{j=1}^{\infty}$ é uma base ortogonal em V, com o produto interno $(\nabla u, \nabla v)$, para $u, v \in V$, e $\{\varphi^j/\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma base ortogonal em $H^2(\Omega) \cap V$, com o produto interno (Au, Av), para $u, v \in D(A)$. Denotemos por $V_k =$ span $\{\varphi^1(x), \ldots, \varphi^k(x)\}$.

Considerações semelhantes são válidas para o operador Laplaciano $B \equiv -\Delta : D(B) \to L^2(\Omega)$ com as condições de contorno de Dirichlet e domínio $D(B) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Denotemos por $\psi^i(x)$ as autofunções de B, γ_i os autovalores B e $H_k =$ span $\{\psi^1(x), \ldots, \psi^k(x)\}$.

Agora, consideremos o seguinte problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - (\mu + \chi)\Delta u + \nabla p = \chi rot\ w + f, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega - \gamma\Delta\omega + 2\chi\omega - (\alpha + \beta)\nabla div\ \omega = \chi rot\ u + g, \tag{4.2}$$

$$div\ u = 0 \text{ em } \Omega. \tag{4.3}$$

Com condições na fronteira $\partial\Omega$ de Ω

$$u(t, x) = \omega(t, x) = 0;\ (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \tag{4.4}$$

e con condições iniciais

$$u(0, x) = u_0(x), \omega(0, x) = \omega_0(x),\ x \in \Omega, \tag{4.5}$$

Este sistema é um sistema de equações não homogêneos, onde $u(t, x) \in \mathbb{R}^n$,$\omega(t, x) \in \mathbb{R}^n$ e $p(t, x) \in \mathbb{R}^n$ são incógnitas que denotam, respectivamente, a velocidade do fluido, a velocidade microrotacional e a pressão hidrostática no punto $x \in \Omega$ e no tempo $t \in [0, T]$. As constantes $\mu, \chi, \alpha, \beta, \gamma$ e ν são positivas associadas ás propriedades do material e satisfazem a seguinte condição $\min\{\mu, \chi, 1, \nu, \alpha+\beta+\gamma\} > 0$, $f(t, x), g(t, x) \in \mathbb{R}^n$ são forças externas dadas.

Usando as propriedades da projeção P, podemos reformular o problema (4.1) - (4.5) da seguinte forma

Encontrar

$$u \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D(A)) \text{ e } \omega \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; D(B))$$

tais que

$$(u_t, \varphi) + ((u \cdot \nabla)u, \varphi) + (\mu + \chi)(Au, \varphi) = \chi(rot\ \omega, \varphi) + (f, \varphi),\ \forall \varphi \in V, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}(\omega_t, \phi) + ((u \cdot \nabla)\omega, \phi) + \gamma(B\omega, \phi) + 2\chi(\omega, \phi) + (\alpha + \beta)(div\ \omega, div\ \phi) &= \\ \chi(rot\ u, \phi) + (g, \phi),\ \forall \phi \in H_0^1(\Omega)\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$u(0) = u_0, \ \omega(0) = \omega_0. \tag{4.8}$$

Definição 4.1. *Sejam* $u_0 \in V$, $\omega_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f, g \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$. *Dizemos que* u *e* ω *são soluções fortes do problema (4.1) - (4.5), se* $u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$ *e* $\omega \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(B))$ *e satisfazem (4.6) - (4.8).*

4.2 Teoremas de Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções Fortes.

Para provar a existência local de uma solução forte, vamos a utilizar o método espectral de Galerkin aplicada a (4.6) - (4.8), ou seja, consideremos os subespaços de dimensão finita $V_k = \text{span } \{\varphi^1, \ldots, \varphi^k\}$ e $H_k = \text{span } \{\psi^1, \ldots, \psi^k\}, k \in \mathbb{N}$, e as projecções ortogonais correspondente $P_k : H \to V_k, R_k : L^2 \to H_k$. As soluções aproximadas são dadas por

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ik}(t)\varphi^i(x)$$

$$\omega^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} d_{ik}(t)\psi^i(x)$$

,

expressadas em termos das autofunções do operador de Stokes e do operador Laplaciano, satisfazendo as seguintes condições:

$$u_t^k + (\mu+\chi)Au^k + P_k((u^k \cdot \nabla)u^k) = \chi P_k(rot\ \omega^k) + P_k(f), \tag{4.9}$$

$$\omega_t^k + R_k((u^k \cdot \nabla)\omega^k) + \gamma B\omega^k + 2\chi\omega^k - (\alpha+\beta)R_k(\nabla div\ \omega^k) = \chi R_k(rot\ u^k) + R_k(g),$$

$$u^k(0) = P_k u_0, \ \omega^k(0) = R_k\omega_0.$$

O sistema (4.9) é equivalente à forma fraca

$$
\begin{aligned}
(u_t^k, \varphi) + (\mu+\chi)(\nabla u^k, \nabla\varphi) + (u^k.\nabla u^k, \varphi) &= \\
\chi(rot\ \omega^k, \varphi) + (f, \varphi),\ \forall \varphi \in V_k, & \quad (4.10)\\
(\omega_t^k, \phi) + \gamma(\nabla\omega^k, \nabla\phi) + (u^k.\nabla\omega^k, \phi) + 2\chi(\omega^k, \phi) + (\alpha+\beta)(div\ \omega^k, div\ \phi) &= \\
\chi(rot\ u^k, \phi),\ \forall \phi \in H_k, & \quad (4.11)\\
u^k(0) = P_k u_0,\ \omega^k(0) = R_k\omega_0, & \quad (4.12)
\end{aligned}
$$

Temos o seguinte resultado

Teorema 4.2. *Seja $u_0 \in V$ e $\omega_0 \in H_0^1(\Omega)$, são valores iniciais, e f, g em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ são funções dadas. Então, em um intervalo de tempo (possivelmente pequeno) $[0,T_1]$, onde $0 < T_1 \leqslant T$, o problema (4.6) - (4.8) possui uma solução forte $(u,\omega) \in C([0,T_1];V) \times C([0,T_1];H_0^1(\Omega))$ e existem funções $F(t), F_1(t)$ e $G(t)$ que são C^1; tais que para qualquer $t \in [0,T_1]$, temos*

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|^2 + \|\omega(t)\|^2 + \int_0^t ((\mu+\chi)\|\nabla u(s)\|^2 + \gamma\|\nabla\omega(s)\|^2)ds + \\
\int_0^t (4\chi\|\omega(s)\|^2 + 2(\alpha+\beta)\|div\ \omega(s)\|^2)ds \le F(t), \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

$$
\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla\omega(t)\|^2 + C\int_0^t (|Au(s)\|^2 + \|B\omega(s)\|^2)ds \le F_1(t) \qquad (4.14)
$$

$$
\int_0^t (\|u_t(s)\|^2 + \|\omega(s)\|^2)ds \le G(t) \qquad (4.15)
$$

Vale tambén as estimativa do mesmo tipo para as aproximações de Galerkin $(u^k, \omega^k), k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $f = g = 0$.

Reemplazando $\varphi = u^k$ em (4.6) e $\phi = w^k$ em 4.7. Além disso, temos que: $((u^k\cdot\nabla)u^k,u^k) = ((u^k\cdot\nabla)w^k,w^k) = 0$. Daquí obtemos o seguinte:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\|u^k\|^2 + (\mu+\chi)\|\nabla u^k\|^2 = \chi(rot\ w^k, u^k),$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\|w^k\|^2 + \gamma\|\nabla u^k\|^2 + (\alpha+\beta)\|div\ w^k\|^2 + 2\chi\|w^k\|^2 = \chi(rot\ u^k, w^k).$$

Integrando em t e somando as desigualdades anteriores obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^k(t)\|^2 + \|w^k(t)\|^2 + \int_0^t (2(\mu+\chi)\|\nabla u^k(s)\|^2 + 2\gamma\|\nabla w^k(s)\|^2 \\
+4\chi\|w^k(s)\|^2 + 2(\alpha+\beta)\|divw^k(s)\|^2)ds \\
= 2\chi\int_0^t ((rot\ w^k, u^k) + (rot\ u^k, w^k))ds + \|u^k(0)\|^2 + \|w^k(0)\|^2 \\
\leq 2\chi\int_0^t (\|rot\ w^k\|\|u^k\| + \|rot\ u^k\|\|w^k\|)ds + \|u^k(0)\|^2 + \|w^k(0)\|^2. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Como a projeção é uma função continua, então temos que

$$\|u^k(0)\| \leq \|u_0\|,\ \|w^k(0)\| \leq \|w_0\|, \qquad (4.17)$$

Utilizando a desigualdade de Young, temos que para cada $\delta > 0$, existe uma constante C_δ tal que

$$\begin{aligned}
2\chi\int_0^t (\|rot\ w^k(s)\|\|u^k(s)\|)ds &\leq 2\chi\int_0^t (\|\nabla w^k(s)\|\|u^k(s)\|)ds \\
&\leq \delta\int_0^t \|\nabla w^k(s)\|^2 ds + C_\delta\int_0^t \|u^k(s)\|^2 ds \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Analogamente, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante C_ε tal que

$$2\chi\int_0^t (\|rot\ u^k(s)\|\|w^k(s)\|)ds \leq \varepsilon\int_0^t \|\nabla u^k(s)\|^2 ds + C_\varepsilon\int_0^t \|w^k(s)\|^2 ds \qquad (4.19)$$

Tomando $\delta = \gamma$ em (4.18), $\varepsilon = \mu + \chi$ em (4.19), usando (4.16) em (4.17) e

$C = max\{C_\delta, C_\varepsilon\}$, temos

$$\begin{aligned}\|u^k(t)\|^2 + \|w^k(t)\|^2 &+ \int_0^t [(\mu+\chi)\|\nabla u^k(s)\|^2 + \gamma\|\nabla w^k(s)\|^2]ds \\ &+ \int_0^t [4\chi\|w^k(s)\|^2 + (\alpha+\beta)\|div\ w^k(s)\|^2]ds \\ &\leq \|u_0\|^2 + \|w_0\|^2 + C\int_0^t [\|u^k(s)\|^2 + \|w^k(s)\|^2]ds \quad (4.20)\end{aligned}$$

Com $F(t) = (\|u_0\|^2 + \|w_0\|^2)e^{Ct}$. aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos (4.13).

Esta última desigualdade implica a existência global em t para aproximações (u^k, w^k) e também que

$$\begin{cases} u^k \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \\ w^k \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \end{cases}$$

Tomamos $\varphi = Au^k$ em (4.10), obtemos

$$\frac{1}{2}.\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2 + (\mu+\chi)\|Au^k\|^2 = \chi(rot\ w^k, Au^k) - ((u^k\cdot\nabla)u^k, Au^k) \quad (4.21)$$

Temos, pela desigualdade de Young, que para qualquer $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}|\chi(rot\ w^k, Au^k)| &\leq \chi\|rot\ w^k\|_2.\|Au\|_2 \\ &= \chi\|\nabla w^k\|_2.\|Au\|_2 \\ &\leq c_\delta\|\nabla w^k\|_2^2 + \delta\|Au^k\|_2^2. \quad (4.22)\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdade de Holder , desigualdade de Youn e a Observação 2.34, temos que para qualquer $\delta > 0$

$$\begin{aligned}|((u^k\cdot\nabla)u^k, Au^k)| &\leq \|Au^k\|_2.\|u^k\|_6.\|\nabla u^k\|_3 \leq C\|Au^k\|_2.\|\nabla u^k\|_2.\|\nabla u^k\|_6^{\frac{1}{2}}.\|\nabla u^k\|_2^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\|Au^k\|_2^{\frac{3}{2}}.\|\nabla u^k\|_2^{\frac{3}{2}} \leq C_\delta\|\nabla u^k\|_2^2 + \delta\|Au^k\|_2^2 \quad (4.23)\end{aligned}$$

Logo, utilizando as estimativas (4.22) e (4.23) em (4.21), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^k\|^2 + (\mu+\chi)\|Au^k\|^2 \leq c_\delta\|\nabla w^k\|^2 + c_\delta\|\nabla u^k\|^2 + 2\delta\|Au^k\|^2. \tag{4.24}$$

Como o operador

$$Lw = \gamma\Delta w + (\alpha+\beta)\nabla div\ w,$$

é fortemente elíptico, temos que

$$\begin{aligned}(Lw, \Delta w) &= \gamma(\Delta w, \Delta w) + (\alpha+\beta)(\nabla div\ w, \Delta w)\\ &= \gamma\|\Delta w\|^2 + (\nabla div\ w, \Delta w)\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 2.41, temos

$$(Lw, \Delta w) \geq \gamma\|\Delta w\|_2^2 - c_0\|\nabla w\|_2^2 \tag{4.25}$$

onde $c_0 > 0$ dependendo de γ, $\alpha + \beta$ e $\partial\Omega$.

Tomando $\phi = -\Delta w^k$ em (4.11), temos

$$\begin{aligned}(w_t^k, -\Delta w^k) + \gamma(\nabla w^k, \nabla(-\Delta w^k)) + ((u^k\cdot\nabla)w^k, -\Delta w^k) + 2\chi(w^k, -\Delta w^k)&\\ +(\alpha+\beta)(divw^k, div(-\Delta w^k)) = \chi(rotu^k, -\Delta w^k)&\end{aligned}$$

Daí temos o seguinte

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w^k\|^2 + \gamma\|\Delta w^k\|^2 = \chi(rotu^k, Bw^k) - ((u^k\cdot\nabla)w^k, Bw^k)&\\ -2\chi(w^k, Bw^k) - (\alpha+\beta)(divw^k, div(Bw^k))&\end{aligned}$$

Usando 4.25, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w^k\|^2 + \gamma\|\Delta w^k\|^2 \leq c_0\|\nabla w^k\|^2 + \chi(rotu^k, Bw^k)&\\ -((u^k\cdot\nabla)w^k, Bw^k) - 2\chi(w^k, Bw^k)&\end{aligned} \tag{4.26}$$

Agora analizaremos os termos do lado dereito da desigualdade 4.26

- $\chi(rot\ u^k, Bw^k)$. Para todo $\sigma > 0$,

  $|\chi(rot\ u^k, Bw^k)| \leq \sigma \|Bw^k\|^2 + c_\sigma \|\nabla u^k\|^2$. (Desigualdade de Young).

- $2\chi(w^k, Bw^k)$. Para todo $\sigma > 0$,

  $|2\chi(w^k, Bw^k)| \leq \sigma \|Bw^k\|^2 + c_\sigma \|w^k\|^2$. (Desigualdade de Young).

- $((u^k \cdot \nabla)w^k, Bw^k)$.

  $|((u^k \cdot \nabla)w^k, Bw^k)| \leq \|u^k\|_\infty \|\nabla w^k\| \|Bw^k\|$

  $\leq c_\sigma \|u^k\|_\infty^2 \|\nabla w^k\|^2 + \sigma \|Bw^k\|^2$ (Desigualdade de Young).

  $\leq c_\sigma c(\|u^k\|_6 \|\nabla u^k\|_6 + \|u^k\|_6^2) \|\nabla w^k\|^2 + \sigma \|Bw^k\|^2$ (Interpolação de Gagliardo - Niremberg).

  $\leq c_\sigma c \|\nabla u^k\| \|Au^k\| \|\nabla w^k\|^2 + c_\sigma c \|\nabla u^k\|^2 \|\nabla w^k\|^2 + \sigma \|Bw^k\|^2$ (Desigualdade de Sobolev).

  $\leq c_{\sigma,\delta} \|\nabla u^k\|^2 \|\nabla w^k\|^4 + \delta \|Au^k\|^2 + c_\sigma \|\nabla u^k\|^2 \|\nabla w^k\|^2 + \sigma \|Bw^k\|^2$ (Desigualdade de Young),

  onde σ e δ são números positivos dados. A constante c_σ depende de σ e a constante $c_{\sigma,\delta}$ depende de σ e δ.

. Assim, temos o seguinte

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w^k\|^2 + \gamma \|\Delta w^k\|^2 \leq c_0 \|\nabla w^k\|^2 + c_\sigma \|\nabla u^k\|^2 + c_{\sigma,\delta} \|\nabla u^k\|^2 . \|\nabla w^k\|^4$$
$$c_\sigma \|\nabla u^k\|^2 . \|\nabla w^k\|^2 + 3\sigma \|Bw^k\|^2 + \delta \|Au^k\|^2 + c_\sigma \|w^k\|^2 \quad (4.27)$$

Tomando $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e $\sigma > 0$ suficientemente pequenos e somando (4.24) e (4.27) temos a seguinte desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}\theta^k(t) + \tau^k(t) \leq c\theta^k(t)^3 + c\theta^k(t)^2 + c\theta^k(t), \quad (4.28)$$

onde,

$$\theta^k(t) = \|\nabla u^k(t)\|^2 + \|\nabla w^k(t)\|^2,$$
$$\tau^k(t) = c\|Au^k\|^2 + \|Bw^k\|^2.$$

Em particular, temos

$$\frac{d}{dt}\theta^k(t) \leq c\theta^k(t)^3 + c\theta^k(t)^2 + c\theta^k(t).$$

Aplicando o Lema 2.46, conclui-se que existe $T_1 \in (0, T]$ tal que

$$\theta^k(t) \leq F_0(t, \theta(0)), \;\; \forall t \in [0, T_1],$$

onde $\theta(0) = \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla w_0\|^2$, e F_0 é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} F_0' = cF_0^3 + cF_0^2 + cF_0, \\ F_0(0) = \theta(0). \end{cases}$$

Portanto, integrando no tempo a desigualdade diferencial (4.28), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla u^k(t)\|^2 + \|\nabla w^k(t)\|^2 + c\int_0^t (\|Au^k(s)\|^2 + \|Bw^k(t)\|^2)ds \\ \leq \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla w_0\|^2 + c\int_0^t F_0(s, \theta(0))^3 ds \\ + c\int_0^t F_0(s, \theta(0))^2 ds + c\int_0^t F_0(s, \theta(0))ds \equiv F_1(t) \end{aligned} \tag{4.29}$$

Assim, concluímos que:

$$\begin{cases} u^k \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T_1; V) \bigcap L^2(0, T_1; D(A)) \\ w^k \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T_1; H_0^1(\Omega)) \bigcap L^2(0, T_1; D(B)). \end{cases} \tag{4.30}$$

Tomando $\varphi = u_t^k$ em (4.11) e $\phi = w_t^k$ em (4.12), temos

* $\|u_t^k\|^2 + (\mu + \chi)(\nabla u^k, \nabla u_t^k) + ((u^k \cdot \nabla)u^k, u_t^k) = \chi(rotw^k, u_t^k)$,

  $\|u_t^k\|^2 = \chi(rotw^k, u_t^k) - (\mu + \chi)(Au^k, u_t^k) - ((u^k \cdot \nabla)u^k, u_t^k)$,

* $\|w_t^k\|^2 + \gamma(\nabla w^k, \nabla w_t^k) + ((u^k \cdot \nabla)w^k, w_t^k) + 2\chi(w^k, w_t^k) + (\alpha + \beta)(divw^k, divw_t^k) = \chi(rotu^k, w_t^k)$,

$\|w_t^k\|^2 + \frac{(\alpha+\beta)}{2}\frac{d}{dt}\|divw^k\|^2 = \chi(rotu^k, w_t^k) - \gamma(Bw^k, w_t^k) - ((u^k \cdot \nabla)w^k, w_t^k) - 2\chi(w^k, w_t^k)$.

A partir disto temos

$$\int_0^t \|u_t^k(s)\|^2 ds \leq c\int_0^t (\|\nabla w^k(s)\|^2 + \|Au^k(s)\|^2)ds + c\int_0^t \|(u^k \cdot \nabla)u^k\|^2 ds, \quad (4.31)$$

$$\int_0^t \|u_t^k(s)\|^2 ds \leq c\int_0^t (\|\nabla w^k(s)\|^2 + \|Au^k(s)\|^2)ds + c\int_0^t \|(u^k \cdot \nabla)u^k\|^2 ds,$$

$$+\int_0^t \|w_t^k(s)\|^2 ds + \frac{\alpha+\beta}{2}\|divw^k(t)\|^2$$

$$\leq \frac{\alpha+\beta}{2}\|divw^k(0)\|^2$$

$$+c\int_0^t (\|\nabla u^k(s)\|^2 + \|Bw^k(s)\|^2 + \|w^k(s)\|^2)ds + c\int_0^t \|(u^k \cdot \nabla)w^k\|^2 ds. \quad (4.32)$$

Tendo em conta (4.29) e a imersão de Sobolev $H^2 \hookrightarrow L^\infty$, obtemos a seguinte estimativa

* $\|(u^k \cdot \nabla)u^k\|^2 \leq \|u^k\|_\infty^2\|\nabla u^k\|^2 \leq c\|Au^k\|^2\|\nabla u^k\|^2 \leq c \sup\limits_{0\leq t\leq T_1} F_1(t)\|Au^k\|^2$
* $\|(u^k \cdot \nabla)w^k\|^2 \leq \|u^k\|_\infty^2\|\nabla w^k\|^2 \leq c\|\nabla u^k\|\|Au^k\|\|\nabla w^k\|^2 \leq c\ F_1(t)\|Au^k\|^2 \leq c \sup\limits_{0\leq t\leq T_1} F_1(t)\|Au^k\|^2$

Usando (4.31) e (4.32), temos

$$\int_0^t (\|u_t^k(s)\|^2 + \|w_t^k(s)\|^2)ds \leq c\int_0^t (\|\nabla u^k(s)\|^2 + \|\nabla w^k(s)\|^2)ds$$

$$+c\int_0^t (\|Au^k(s)\|^2 + \|Bw^k(s)\|^2)ds + c\int_0^t \|u^k.\nabla u^k\|^2 ds + c\int_0^t \|(u^k \cdot \nabla)w^k\|^2 ds$$

$$\leq c\int_0^t F_1(s)ds + F_1(t) + c.t \sup_{0\leq t\leq T_1} F_1(t)\|Au^k\|^2 \equiv G_1(t)(4.33)$$

Assim, concluímos que

$$
\begin{cases} u_t^k \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T_1;H), \\ w_t^k \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T_1;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{4.34}
$$

Por 4.30, concluímos que existem $u \in L^2(0,T_1;D(A)) \cap L^\infty(0,T_1;V)$ e $w \in L^2(0,T_1;D(B)) \cap L^\infty(0,T_1;H_0^1(\Omega)$ e subsequências, que denotaremos tamém $\{u^k\},\{w^k\}$ por simplicidade de notação, tal que

$$
u^k \rightharpoonup u \text{ fraco em } L^2(0,T_1;D(A)) \text{ e fraco-estrela em } L^\infty(0,T_1;V),
$$
$$
w^k \rightharpoonup w \text{ fraco em } L^2(0,T_1;D(B)) \text{ e fraco-estrela em } L^\infty(0,T_1;H_0^1(\Omega)).
$$

Além disso, 4.34 implica que $u_t \in L^2(0,T_1;H)$, $w_t \in L^2(0,T_1;L^2(\Omega))$ e

$$
u_t^k \rightharpoonup u_t \text{ fracamente em } L^2(0,T_1;H),
$$
$$
w_t^k \rightharpoonup w_t \text{ fracamente em } L^2(0,T_1;L^2(\Omega)).
$$

Portanto, fazendo uso do lema Aubin-Lions 2.43 com $B_0 = D(A)$, $p_0 = 2$, $B_1 = H$, $p_1 = 2$ e $B = V$, temos

$$
u^k \to u \text{ fortemente em } L^2(0,T_1;V).
$$

Analogamente, tomando $B_0 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $p_0 = 2$, $B_1 = L^2(\Omega)$, $p_1 = 2$ e $B = H_0^1(\Omega)$, concluímos

$$
w^k \to w \text{ fortemente em } L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega)).
$$

Utilizando o Lema 3.10, temos que o sistema (4.10) e (4.11) possui solução.Deste modo, conclui-se que o sistema (4.6) - (4.8) possui solução.

Agora, mostraremos a unicidade da solução. Suponhamos que (u^1,w^1) e (u^2,w^2) são duas soluções do problema (4.1) - (4.3), com as mesmas condições iniciais,u_0 e w_0, e definimos $v = u^1 - u^2$ e $z = w^1 - w^2$. Então

$$
(v_t,\varphi) + (\mu+\chi)(Av,\varphi) = \chi(rot\ z,\varphi) - ((v\cdot\nabla)u^1,\varphi) - ((u^2\cdot\nabla)v,\varphi),\ \forall\varphi \in V,
$$

$$(z_t, \phi) + \gamma(Bz, \phi) + (\alpha + \beta)(div\ z, div\ \phi) =$$
$$\chi(rot\ v, \phi) - ((v \cdot \nabla)w^1, \phi) - ((u^2 \cdot \nabla)z, \phi),\ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

e $v(0) = z(0) = 0$.

Tomando $\varphi = v$ e $\phi = z$ nas identidades acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2 + (\mu + \chi)\|\nabla v\|^2 = \chi(rot\ z, v) - ((v \cdot \nabla)u^1, v) \quad (4.35)$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2 + \gamma\|\nabla z\|^2 + 2\chi\|z\|^2 + (\alpha + \gamma)\|div\ z\|^2 = \chi(rot\ v, z) - ((v \cdot \nabla)w^1, z) \quad (4.36)$$

Adicionando (4.35) e (4.36), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v\|^2 + \|z\|^2) + (\mu + \chi)\|\nabla v\|^2 + \gamma\|\nabla z\|^2 + 2\chi\|z\|^2 + (\alpha + \beta)\|div\ z\|^2$$
$$= \chi(rot\ z, v) + \chi(rot\ v, z) - ((v \cdot \nabla)w^1, z). \quad (4.37)$$

Daí deduzimos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v\|^2 + \|z\|^2) \leq c(1 + \|Au^1(s)\|^2 + \|Bw^1(s)\|^2)(\|v\|^2 + \|z\|^2),$$

onde c é uma constante.

Logo, pela desigualdade de Gronwall, temos

$$\|v\|^2 + \|z\|^2 \leq (\|v(0)\|^2 + \|z(0)\|^2) \exp^{\theta(t)},$$

onde $\theta(t) = c\int_0^t (1 + \|Au^1(s)\|^2 + \|Bw^1(s)\|^2)ds < +\infty$, devido a estimativa (4.14). Esta última desigualdade implica que $v(t) = w(t) = 0$. Portanto, $u^1 = u^2$ e $w^1 = w^2$, assim a unicidade está mostrada.

Finalmente, mostraremos a continuidade. Temos

$$u_t \in L^2(0, T_1; H) \text{ e } w_t \in L^2(0, T_1; L^2(\Omega)),$$

Esta condição, junto com $u \in L^2(0, T_1; D(A))$ e $w \in L^2(0, T_1; D(B))$ implica, pelo Lema 2.42, que u é igual a uma função contínua de $[0, T_1]$ em V, em quase toda parte, e w é igual a uma função conntínua de $[0, T_1]$ em $H_0^1(\Omega)$, em quase toda parte, consequentemente as condições iniciais $u(0) = u_0$ e $w(0) = w_0$ faz sentido. ■

Teorema 4.3. *Sejam $u_0 \in V$ e $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, condições iniciais, e $f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Assumimos que,*

$$u_0 \in V \cap H^2(\Omega),\ w_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ f_t, g_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Então a solução (u, w) satisfaz

$$\|u_t(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + c\int_0^t (\|\nabla u_t(s)\|^2 + \|\nabla w_t(s)\|^2) ds \leq H_0(t), \tag{4.38}$$

$$\|Au(t)\|^2 \leq H_1(t), \tag{4.39}$$

$$\|Bw(t)\|^2 \leq H_2(t), \tag{4.40}$$

$$\int_0^t (\|u_{tt}(s)\|_{V^*}^2 + \|w_{tt}(s)\|_{H^{-1}}^2) ds \leq H_3(t), \tag{4.41}$$

para cada $t \in [0, T_1]$, onde $H_i(t), i = 0, 1, 2, 3,$ são funções contínuas em $t \in [0, T_1]$. Também,

$$u \in C^1([0, T_1]; H) \cap C([0, T_1]; D(A)),$$
$$w \in C^1([0, T_1]; L^2(\Omega)) \cap C([0, T_1]; D(B))$$

Além disso, o mesmo tipo de estimativas mantenha uniformemente em k as aproximaï¿½ï¿½es Galerkin (u^k, w^k).

Demonstração. Precisaremos de mais estimativas para as aproximações u^k, w^k. Tomando $\varphi = u_t^k$ em (4.119 e $\phi = w_t^k$ em (4.12), rescpectivamente.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\|u_t^k\|^2 + (\mu + \chi)\|\nabla u_t^k\|^2 = \chi(rot\ w_t^k, u_t^k) - ((u_t^k \cdot \nabla)u^k, u_t^k), \tag{4.42}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t^k\|^2 + \gamma\|\nabla w_t^k\|^2 + (\alpha+\beta)\|div\ w_t^k\|^2 + 2\chi\|w_t^k\|^2$$
$$= \chi(rot\ u_t^k, w_t^k) - ((u_t^k \cdot \nabla)w^k, w_t^k), \tag{4.43}$$

Como $((u^k \cdot \nabla)u_t^k, u_t^k) = ((u^k \cdot \nabla)w_t^k, w_t^k) = 0$,

Para qualquer $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, temos

$|\chi(rot\ w_t^k, u_t^k)| \leq c_\delta\|u_t^k\|^2 + \delta\|\nabla w_t^k\|^2$ (Desigualdade de Young),

$|\chi(rot\ u_t^k, w_t^k)| \leq c_\varepsilon\|w_t^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^k\|^2$ (Desigualdade de Young).

Para estimar o segundo termo em (4.42), utilizaremos as desigualdades de Holder (5) e Young (3), junto com a imersão de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^4$. Obtemos para qualquer $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$,

$$|((u_t^k \cdot \nabla)u^k, u_t^k)| \leq \|u_t^k\|\|\nabla u^k\|_{L^4}\|u_t^k\|_{L^4} \leq c_\varepsilon\|Au^k\|^2\|u_t^k\|^2 + \varepsilon\|\nabla u_t^k\|^2,$$

$$|((u_t^k \cdot \nabla)w^k, w_t^k)| \leq \|u_t^k\|.\|\nabla w^k\|_{L^4}.\|w_t^k\|_{L^4} \leq c_\delta\|Bw^k\|^2\|u_t^k\|^2 + \delta\|\nabla w_t^k\|^2.$$

Somando as desigualdades (4.42) e (4.43), e usando as estimativas dacima com $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos a seguinte desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}\theta^k(t) + c\tau^k(t) \leq c\ \theta^k(t)\ \eta^k(t), \tag{4.44}$$

onde

$$\begin{aligned}
\theta^k(t) &= \|u_t^k(t)\|^2 + \|w_t^k(t)\|^2,\\
\tau^k(t) &= c(\|\nabla u_t^k(t)\|^2 + \|\nabla w_t^k(t)\|^2 + \|div\ w_t^k(t)\|^2 + \|w_t^k(t)\|^2),\\
\eta^k(t) &= c(\|Au^k(t)\|^2\|Bw^k(t)\|^2 + 1).
\end{aligned}$$

Integrando as desigualdade (4.44) dacima de 0 ate t, obtemos

$$\theta^k(t) + c\int_0^t \tau^k(s)ds \quad \leq \quad c\int_0^t \theta^k(s)\eta^k(s)ds + \theta^k(0)$$

Utilizando a desigualdade de Young, a desigualdade de HÃ¶lder e a imersão de

Sobolev, ao tomar $\varphi = u_t^k$ em (4.10) e $\phi = w_t^k$ em (4.11), temos que

$$\theta^k(0) = \|u_t^k(0)\|^2 + \|w_t^k(0)\|^2 \leq c$$

e

$$\int_0^t \eta^k(s)ds \leq cF_1(t) + ct,$$

isto é devido a estimativa (4.29). Consequentemente, aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\theta^k(t) + c\int_0^t \tau^k(s)ds \leq k\exp(cF(t) + ct) \equiv H(t).$$

Por tanto temos

$$\begin{cases} u_t^k \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T_1;H) \cap L^2(0,T_1;V) \\ w_t^k \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T_1;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T_1;H_0^1(\Omega)) \end{cases} \tag{4.45}$$

Agora, tomando $\varphi = Au^k$ em (4.10), obtemos

$$(\mu + \chi)\|Au^k\|^2 = \chi(rotw^k, Au^k) - ((u^k \cdot \nabla)u^k, Au^k) - (u_t^k, Au^k)$$

Utilizando a desigualdade de Young junto com as estimativas (4.22) e (4.23) e $|(u_t^k, Au^k)| \leq c_\delta\|u_t^k\|^2 + \delta\|Au^k\|^2$, para qualquer $\delta > 0$ com constante adequada c_δ obtemos

$$(\mu + \chi)\|Au^k\|^2 \leq c_\delta\|\nabla w^k\|^2 + c_\delta\|\nabla u^k\|^6 + c_\delta\|u_t^k\|^2 + 3\delta\|Au^k\|^2 \leq cF_1(t) + cH_0(t) \equiv H_1(t),$$

isto devido as estimativa (4.14) e (4.15). Consequentemente,

$$u^k \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0,T_1;D(A)). \tag{4.46}$$

Tomando $\phi = Bw^k$ em (4.11) e usando (4.25), para qualquer $\sigma > 0$ temos

$$\sigma\|Bw^k\|^2 \leq c_\sigma(c_0\|\nabla w^k\|^2 + \|w_t^k\|^2 + c|Au^k\|^2\|\nabla w^k\|^2 + 2\chi\|w^k\|^2 + \chi\|\nabla u^k\|^2) + 4\sigma\|Bw^k\|^2$$

Tomando $\sigma = 1/8\gamma$, temos

$$\gamma\|Bw^k\|^2 \leq cF_1(t) + cH_0(t) + cH_1(t)F_1(t) \equiv H_2(t),$$

isto é devido as estimativas (4.14), (4.15) e (4.38). Assim,

$$w^k \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T_1; D(B)). \tag{4.47}$$

De (4.46) temos que existe $u \in L^\infty(0, T_1; D(A))$ e existe uma subsequência u^m de u^k, tal que

$$u^m \text{ converge a } u, \text{ na topología fraco-estrela de } L^\infty(0, T_1; D(A)), \tag{4.48}$$

e de (4.47) temos que existe $w \in L^\infty(0, T_1; D(B))$ e existe uma subsequência w^m de w^k, tal que

$$w^m \text{ converge a } w, \text{ na topología fraco-estrela de } L^\infty(0, T_1; D(B)). \tag{4.49}$$

Agora, por (4.48) e (4.49), e as estimativas (4.45), (4.46) e (4.47) nos permitem concluir que a solução (u, w) do problema (4.6) - (4.8) e satisfazem as estimativas (4.41), (4.42) e (4.43). Para mostrar a continuidade de $u_t(t)$ e $w_t(t)$ com a norma de L^2, precisamos mostrar que $u_{tt} \in L^2(0, T_1; V^*)$ e $w_{tt} \in L^2(0, T_1; H^{-1}(\Omega))$. De fato, se $u_{tt} \in L^2(0, T_1; V^*)$ e $w_{tt} \in L^2(0, T_1; H^{-1}(\Omega))$ então do fato que $u_t \in L^2(0, T_1; V)$ e $w_t \in L^2(0, T_1; H_0^1(\Omega))$ implica que $u \in C^1([0, T_1]; H)$ e $w \in C^1([0, T_1]; L^2(\Omega))$, isto devido ao Lema 2.42. Para mostrar que $u_{tt} \in L^2(0, T_1; V^*)$ e $w_{tt} \in L^2(0, T_1; H^{-1}(\Omega))$ é suficiente demonstrar a existência de $c > 0$ (independente de k) tal que

$$\int_0^{T_1} (\|u_{tt}^k(s)\|_{V^*}^2 + \|w_{tt}^k(s)\|_{H^{-1}}^2) ds \leq c.$$

Mostraremos somente que

$$\int_0^{T_1} \|u_{tt}^k(s)\|_{V^*}^2 \leq c \tag{4.50}$$

já que a prova para $w_{tt}^k(t)$ é similar. Para provar (4.50), diferenciamos (4.9) em relação a t e temos que

$$u_{tt}^k = \chi P_k(rot\ w_t^k) - (\mu+\chi)Au_t^k - P_k((u_t^k\cdot\nabla)u^k) - P_k((u^k\cdot\nabla)u_t^k) \equiv g^k \tag{4.51}$$

As estimativas anteriores para u^k e w^k implicam que g^k é uniformemente limitada em $L^2(0,T_1;V^*)$. De fato, temos

$$\|\chi P_k(rotw^k)\|_{V^*} = \chi \sup_{\|v\|_V\leq 1} |(rotw_t^k, P_kv)\| \leq c\chi\|\nabla w_t^k\|.$$

Esta desigualdade junto com (4.38) temos, para todo $t\in[0,T_1]$

$$\int_0^t \|\chi P_k(rotw_t^k)\|_{V^*}^2 ds \leq c\chi^2 \int_0^t \|\nabla w_t^k\|^2 ds \leq c\chi^2 H_0(t).$$

Também, para todo $t\in[0,T_1]$, da estimativa (4.38), temos

$$\int_0^t \|(\mu+\chi)Au_t^k\|_{V^*}^2 ds \leq (\mu+\chi)^2 \int_0^t \|\nabla u_t^k\|^2 ds \leq (\mu+\chi)^2 H_0(t).$$

Para estimar o termo $P_k((u_t^k\cdot\nabla)u^k)$, procedemos da seguinte forma

$$\begin{aligned}\|P_k((u_t^k\cdot\nabla)u^k)\|_{V^*} &= \sup_{\|v\|_V\leq 1} |((u_t^k\cdot\nabla)u^k, P_kv)| \\ &\leq c\|u_t^k\|_4\|\nabla u^k\|_4 \\ &\leq c\|Au^k\|\|\nabla u_t^k\|,\end{aligned}$$

o qual é devido a imersão de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^4$. Além disso, usando as estimativas (4.38) e (4.39), temos que para todo $t\in[0,T_1]$

$$\int_0^t \|P_k((u_t^k\cdot\nabla)u^k)\|_{V^*}^2 \leq c\int_0^t \|Au^k\|^2\|\nabla u_t^k\|^2 \leq c \sup_{0\leq t\leq T_1} H_1(t)H_0(t).$$

Agora, estimaremos o termo $P_k((u^k \cdot \nabla)u_t^k)$. A partir da imersão de Sobolev $H^2 \hookrightarrow L^\infty$ e da estimativa (4.39), temos

$$\begin{aligned}\|P_k((u^k \cdot \nabla)u_t^k)\| &= \sup_{\|v\|_V \leq 1} |((u^k \cdot \nabla)u_t^k, P_k v)| \\ &\leq \|u^k\|_{L^\infty}\|\nabla u_t^k\| \\ &\leq c\|Au^k\|\|\nabla u_t^k\| \\ &\leq cH_1(t)\|\nabla u_t^k\|.\end{aligned}$$

Para todo $t \in [0, T_1]$ a última desigualdade implica

$$\int_0^t \|P_k((u^k \cdot \nabla)u_t^k)\|_{V^*}^2 \leq c \sup_{0 \leq t \leq T_1} H_1(t)H_0(t).$$

Como $H_0(t)$ é uma função contínua de t, obtemos

$$\int_0^{T_1} \|u_{tt}^k(s)\|_{V^*}^2 \leq c \sup_{0 \leq t \leq T_1} H_0(t) \leq c.$$

Isto mostra (4.41).

Para terminar a prova temos que mostrar a continuidade de $u(t)$ e $w(t)$ na norma $H^2(\Omega)$.

Observemos que

$$\begin{aligned}(\mu + \chi)Au(t) &= \chi P(rot\ w(t)) + Pf(t) - P((u(t) \cdot \nabla)u(t)) - u_t(t) \\ &\equiv L(t).\end{aligned}$$

Lembremos que $w \in C([0, T_1], H_0^1(\Omega))$ então $rot\ w \in C([0, T_1]; L^2(\Omega))$ e consequentemente

$$P(rot\ w) \in C([0, T_1]; H).$$

Como $f, f_t \in L^2(0, T_1; L^2(\Omega))$, por interpolação, temos que $f \in C([0, T_1]; L^2(\Omega))$ e, consequentemente, $Pf \in C([0, T_1]; H)$. Também, $u \in C([0, T_1]; V)$ e a estimativa

$\|Au\| \leq C$ implica que $(u \cdot \nabla)u \in C([0, T_1]; L^2(\Omega))$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \|(u(t) \cdot \nabla)u(t) - (u(t_0) \cdot \nabla)u(t_0)\| & \\ & \leq \|((u(t) - u(t_0)) \cdot \nabla)u(t)\| \\ +\|(u(t_0) \cdot \nabla)(u(t) - u(t_0))| & \\ & \leq c\|Au(t)\|\|\nabla(u(t) - u(t_0))\| \\ +c\|Au(t_0)\|\|\nabla(u(t) - u(t_0)\| & \\ & \leq C\|\nabla(u(t) - u(t_0)\| \to 0, \text{ quando } t \to t_0. \end{aligned}$$

Finalmente, concluímos

$$P((u \cdot \nabla)u) \in C([0, T_1]; H).$$

Como $u_t \in C([0, T_1]; H)$, temos que $L \in C([0, T_1]; H)$. Consequentemente, $Au \in C([0, T_1]; H)$, isto implica que $u \in C([0, T_1]; D(A))$. ■

Teorema 4.4. *Sob as hipóteses do Teorema 4.2, existe uma única função $p \in L^2(0, T_1; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ tal que (u, w, p) é solução de (4.1) - (4.5). Sob as hipóteses do Teorema 4.3, $p \in L^\infty(0, T_1; H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \cap C([0, T_1]; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$.*

Demonstração. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= J, && (4.52) \\ div u &= 0 \text{ em } \Omega, && (4.53) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. && (4.54) \end{aligned}$$

Observamos que 4.1 é equivalente a

$$Au = P(J), \text{ onde } J = \chi rot\ w - (u \cdot \nabla)u - u_t$$

Com as hipótese do Teorema 4.2 e Teorema 4.3, temos $J \in L^2(0, T_1; L^2(\Omega))$ e $J \in L^\infty(0, T_1; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$, respectivamente. Portanto, devido a Proposição (3.13), implica que existe uma única $p \in L^2(0, T_1; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$, tal que é solução de (4.52).

Agora, com a hipótese do Teorema 4.3 e pela Proposição 3.13, temos $p \in L^\infty(0, T_1; H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \cap C([0, T_1]; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$.

Deste modo, mostramos o teorema. ■

REFERÊNCIAS

7. ADAMS, Robert. **Sobolev spaces**. New York: Academic Press, 1975.

8. AMROUCHE, C.; GIRAULT, V. On the existence and regularity of the solutions of Stokes problem in arbitrary dimension. **Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.**, v. 67, n. 5, p. 171-175, 1991.

9. BREZIS, Haim. **Análisis Funcional: Teoría y aplicaciones**. Madrid: Alianza, 1984.

10. CATTABRIGA, L. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. **Rend. Mat. Sem. Univ. Padova**, v. 31, p. 308-340, 1961.

11. DUFF, G. D. Derivative estimates for the Navier - Stokes equations in a three dimensional Region. **Acta Math.**, v. 164, p. 145-210, 1990.

12. ERIGEN, A. C. Theory of micropolar fluids. **J. Math. Mech.**, v. 16, p. 1-8, 1966.

13. EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Berkeley: American Mathematical Society, 2000.

14. HEYWOOD, J. G. The Navier - Stokes equations on the existence, regularity and decay of solutions. **Indiana Univ. Math.**, v. 29, p. 639-681, 1980.

15. KUFNER, A.; JOHN, O.; FUCIK, S. **Function spaces**. Prague: Academia, 1978.

16. LADYZHENSKAYA, O. A. **The mathematical theory of viscous incompressible flow**.2nd edition, New York: Gordon and Breach, 1969.

17. LIONS, J. L. **Quelques méthodes de résolution de problémes aux limites non linéaires**. París: Dunod, 1969.

18. LUKASZEWICZ, G. **Micropolar fluids:**Theory and applications. Boston: Birkhauser, 1999.

19. PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. New York: Springer-Verlag, 1983.

20. TEMAN, R. **Navier-Stokes equations:**Theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland, 1979.

21. ROJAS-MEDAR, M. A. Magneto-Micropolar fluid motion: Existence and uniqueness of strong solution. **Math. Nachr.**, v. 188, p. 301-319, 1997.

22. SOHR, H. **The Navier-Stokes equations: An elementary functional analytic approach**. Basel: Springer, 2001.