UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

THAMIRES SANTOS CRUZ

Uma Teoria de Regularidade para Equações de Volterra Fracionárias com Dados Iniciais Locais e Não Locais

Tese de Doutorado

RECIFE

2016

THAMIRES SANTOS CRUZ

Uma Teoria de Regularidade para Equações de Volterra Fracionárias com Dados Iniciais Locais e Não Locais

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em matemática.

Orientador: Prof. Dr. **BRUNO LUIS DE ANDRADE SANTOS**

RECIFE

2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C957t Cruz, Thamires Santos
Uma teoria de regularidade para equações de Volterra fracionárias com dados iniciais locais e não locais / Thamires Santos Cruz. – 2016.
99 f.: il., fig.

Orientador: Bruno Luis de Andrade Santos.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, Recife, 2016.
Inclui referências.

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais. I. Santos, Bruno Luis de Andrade (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2016-143

THAMIRES SANTOS CRUZ

UMA TEORIA DE REGULARIDADE PARA EQUAÇÕES DE VOLTERRA FRACIONÁRIAS COM DADOS INICIAIS LOCAIS E NÃO LOCAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 26/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos (Orientador)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Cláudio Rodrigo Cuevas Henriquez (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Arlúcio da Cruz Viana (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Alejandro Caicedo Roque (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me dado força e coragem para superar os obstáculos encontrados ao longo dessa jornada.

Ao meu orientador, Bruno Luis, por ter aceitado me orientar nos dois últimos anos do doutorado, pela paciência, confiança e dedicação.

Aos professores do DMAT, pelos ensinamentos. Em especial, ao professor Marcos Rabelo, que me orientou no período inicial do doutorado.

À minha família, em especial, meus pais e irmão por terem suportado meus estresses nos momentos difíceis e me dado apoio quando eu mais precisei. Saibam que sem vocês eu não chegaria até aqui.

De forma especial, ao meu noivo, que mesmo sendo físico, estudou comigo em alguns momentos, ouvia e me aconselhava em todos os momentos e foi meu ombro amigo durante todas as etapas.

Aos meus colegas do departamento, em especial, Clessius Silva, Filipe Andrade, Cris, Alan(Champs), Tiago Mendonça, Gleybson, Ricardo(peruano), Gabriel, Tarciana, Gigi, Bruna e Felipe Sinésio pelos vários momentos de estudos juntos ou por suas contribuições indiretas.

Aos meus colegas de trabalho da UFRPE por todo o apoio dado, principalmente pelo afastamento concedido nos últimos meses de pesquisa. Em especial, Ricardo, Rodrigo, Nacib, Danilo, DK, Karla, Márcia e Maité.

Às minhas amigas Rúbia, Edjane, Camila e Renata por me aguentarem tanto em momentos bons quanto ruins, principalmente àquelas que dividiram ap comigo.

Ao meu amigo Felipe Wergete, que mesmo distante esteve sempre presente com sua amizade.

Aos meus amigos do vôlei pelo apoio, confiança e momentos de diversão ao meu lado.

Às secretárias da pós-graduação, Tânia e Cynthia. Com mais ênfase para Tânia, pois convivi mais tempo com a mesma e pude ver sua boa vontade em resolver os problemas ou ajudar os alunos da melhor forma possível.

Ao CNPQ pelo suporte financeiro.

RESUMO

Este trabalho trata da teoria de existência, unicidade, regularidade, continuação e alternativa de Blow-up de soluções brandas para Equações de Volterra Fracionárias com condições iniciais locais cujo termo não linear satisfaz certas propriedades localmente Lipschitz. Analisamos também o caso de condições iniciais não locais e não linearidades verificando condições do tipo Carathéodory. Neste caso estudamos as propriedades topológicas do conjunto solução de tais equações.

Palavras-chave: Equações de Volterra. Família Resolvente. Operador Setorial. Espaços de Potência Fracionária. Condição Inicial Local e Não Local.

ABSTRACT

This work deals with existence, uniqueness, regularity, continuation and Blow up Alternative of mild solutions for Fractional Volterra Equations with local initial conditions, whose nonlinear terms satisfy some locally Lipschitz properties. Moreover we analyse the case of nonlocal initial conditions and nonlinearities of Carathéodory type. In this case, we study topological properties of the solution set of such equations.

Keywords: Volterra Equations. Resolvent Family. Sectorial Operator. Fractional Power Spaces. Local and Nonlocal Initial Condition.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

Introdução

Os modelos matemáticos de fenômenos físicos, biológicos e atmosféricos formam uma ponte entre o mundo real e as ciências teóricas. Por este motivo, eles são de grande interesse para cientistas aplicados e também para os matemáticos puros. Dentre tais modelos destacam-se aqueles descritos por meio de equações diferenciais parciais e suas generalizações contendo termos integrais. Neste trabalho temos particular interesse por Equações de Volterra.

Equações de Volterra são um tipo especial de equações integrais e elas foram introduzidas no final do século 19 pelo matemático e físico italiano Vito Volterra. Devido às suas aplicações em problemas físicos, tais como viscoelasticidade, condução de calor em materiais com memória, eletrodinâmica com memória, e à necessidade de ferramentas para atacar problemas que aparecem nesses campos, esta teoria tem se desenvolvido rapidamente. Além disso, muitos fenômenos interessantes do ponto de vista matemático, não encontrados na teoria de equações diferenciais e que podem ser observados em exemplos específicos de Equações de Volterra, estimularam a pesquisa e aprimoraram nosso entendimento e conhecimento deste assunto, como por exemplo (1) e referências citadas.

Especificamente, estudamos nesta tese dois Problemas. No primeiro deles abordamos a teoria de existência, unicidade, regularidade, continuação da solução para um intervalo máximo de existência e explosão da solução em tempo finito para a equação

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_0^t dg(s)\Delta u(t-s,x) + |u|^{\rho-1}u + h(t), & \text{em } (0,\infty)\times\Omega \\ u(t,x) = 0, & \text{em } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $\rho > 1$, $u_0 \in L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sob certas condições e o núcleo g é do tipo fracionário, isto é, dado por

$$g(t) = \frac{e^{-\gamma t}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

com $\gamma, t > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$. Em geral, equações do tipo (1) podem ser utilizadas para descrever vários fenômenos naturais que surgem em muitos campos tais como eletrônica, dinâmica de fluidos e modelos biológicos. Na literatura tem sido estudado existência, regularidade, estabilidade, periodicidade de soluções e problemas de controle. Por exemplo, utilizando condições de parabolicidade e estimativas resolventes, Prüss (2) estuda Regularidade Maximal para uma versão linear abstrata do Problema (1). Em (3), Cuevas e Lizama abordam a teoria de periodicidade assintótica para uma versão escalar de (1), onde o termo não linear satisfaz condições do tipo Lipschitz e o núcleo g satisfaz certas condições de regularidade.

Por outro lado, nos últimos anos diversos pesquisadores vêm demonstrando grande interesse em núcleos fracionários. Por exemplo, em uma vertente mais teórica, Cuevas e Lizama estabelecem condições suficientes para garantir um comportamento quase automórfico das soluções de certas equações integrais abstratas e aplicam seus resultados abstratos em equações escalares com tais núcleos (4, Exemplo 3.6). Em (5), os autores estudam um modelo de campo de fase com memória dependendo da temperatura. Dentre outras coisas, eles garantem boa colocação global para uma Equação de Cahn-Hilliard não-isotérmica com memória fracionária. Por brevidade, os trabalhos (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14) e (15) fornecem maiores informações sobre aplicações e desenvolvimento desta teoria.

O segundo problema abordado nesta tese consiste em substituir o dado inicial em (1) por uma condição não local, isto é, tratar o Problema

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_0^t dg(s)\Delta u(t-s,x) + f(t,u), & \text{em } (0,\infty)\times\Omega \\ u(t,x) = 0, & \text{em } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i(x)u(T_i,x), & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $T_i \in (0,\infty)$, são números reais fixados, $\beta_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,\tilde{k}$, são funções contínuas e f satisfaz certas condições. No início dos anos 80, o estudo de equações de evolução com condições iniciais não locais foi proposto por vários pesquisadores, no contexto de problemas distintos, com aplicações em elasticidade e viscoelasticidade em materiais com memória. Em 1991, Byszewskii e colaboradores (16) introduziram condições não locais em problemas de valor inicial, as quais são uma generalização da condição inicial clássica. Recentemente, vários artigos têm sido dedicado ao estudo de existência de soluções para equações diferenciais com condições não locais. A exemplo, em (17) a condição não local é usada para descrever o fenômeno de difusão de um pequeno montante de gás em um tubo transparente. Nestes casos, a condição inicial não local possibilita que mais informações estejam disponíveis, já que permite medidas em tempos diferentes do inicial. Em (18), de Andrade e colaboradores estabeleceram condições suficientes para existência e regularidade de soluções brandas com respeito ao Problema

$$\begin{cases} \partial_t^\gamma u = \Delta u + f(t,u), & \text{em } [0,\infty)\times\Omega \\ u(t,x) = 0, & \text{em } [0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i(x) u(T_i,x), & x\in\Omega \end{cases}$$

onde ∂_t^γ é a Derivada de Caputo de ordem $\gamma \in (0,1]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $T_i \in (0,\infty)$, são números reais fixados, $\beta_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,\tilde{k}$, e $f : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com f satisfazendo, para algum $\rho > 1$,

$$|f(t,s) - f(t,r)| \leq c(1 + |s|^{\rho-1} + |r|^{\rho-1})|s-r|$$

e

$$|f(t,s)| \leq c(1+|s|^\rho),$$

para todo $t \in [0,\infty)$ e $r,s \in \mathbb{R}$. Em (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26), (27), (28), (29), (30), (31), (32), (33), (34), (35) e (36) podemos encontrar maiores informações sobre este tipo de problema.

Um fato curioso sobre equações de evolução com condições iniciais não locais é, em geral, a impossibilidade de se demonstrar a unicidade de solução do problema. Tal situação é motivada principalmente pela não possibilidade de se utilizar teoremas de ponto fixo para contrações. Por este motivo, os principais objetivos no estudo do Problema (2) são estudar existência e regularidade de soluções brandas e, numa tentativa de amenizar tal situação, estabelecer propriedades topológicas do conjunto de soluções desta equação.

Finalmente, sobre a organização da tese, o texto está dividido em 4 Capítulos. Começamos, no primeiro Capítulo, intitulado por Preliminares, introduzindo os prérequisitos necessários para o desenvolvimento da tese. Nele são apresentadas algumas definições básicas, funções especiais, resultados conhecidos na literatura e um pouco da teoria utilizada nos Capítulos posteriores, tais como Operador solução, Operadores Setoriais e Espaços de Potência Fracionária. No Capítulo 2, fazemos um estudo detalhado sobre a Família Resolvente associada aos Problemas (1) e (2) nos Espaços L^q e em Espaços de Potência Fracionária associados ao Operador Laplaciano com condições de Dirichlet. Esse Capítulo fornece as ferramentas básicas para os resultados dos Capítulos posteriores. Os Capítulos 3 e 4 contêm nossos resultados sobre os Problemas (1) e (2), respectivamente.

1 Preliminares

Neste Capítulo, enunciaremos resultados, estabeleceremos notações e teorias que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Para maiores detalhes, recomendam-se as referências (37), (38), (39), (40), (41), (42), (43), (44), (1), (45) e (46).

1.1 Espaços de funções

Começaremos definindo alguns espaços de funções que serão utilizados ao longo da tese.

Definição 1.1. (Espaços $L^p(\Omega)$) Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}_+^*$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis u definidas em Ω para qual

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty. \tag{3}$$

Identificamos em $L^p(\Omega)$ as funções que são iguais em quase toda parte de Ω, isto é, os elementos de $L^p(\Omega)$ são classes de equivalência de funções mensuráveis satisfazendo (3). Consequentemente, temos que $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com norma

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

se $1 \leq p < \infty$. E, se $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach dotado da norma

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Definição 1.2. (Espaços $W^{m,p}(\Omega)$) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}_+$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$.

Na literatura tais espaços são chamados de Espaços de Sobolev. Se considerarmos

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,p} := \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p,\ p = \infty,$$

temos que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Além disso,

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \text{ o fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ no espaço } W^{m,p}(\Omega)$$

e

$$H^{m,p}(\Omega) := \text{ o completamento de } \{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}.$$

O seguinte Teorema nos fornece relações entre Espaços de Sobolev e Espaços L^p.

Teorema 1.3 (Rellich-Kondrachov,(47))**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto e limitado com fronteira ∂U Lipschitz, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, as seguintes condições são satisfeitas:*

a) Se $kp \leq d$ e $1 \leq q < p^* = \dfrac{dp}{d-kp} \in (p, \infty]$, então a inclusão

$$J : W^{k,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$$

é compacta. (Por exemplo, seja $q = p$.)

b) Se $k - \frac{d}{p} > j \in \mathbb{N}_0$, então o mergulho

$$J : W^{k,p}(U) \hookrightarrow C^j(\bar{U})$$

é compacto.

Finalizamos esta seção com uma versão mais geral da famosa Desigualdade de Gronwall.

Lema 1.4 (Gronwall Singular, (48))**.** *Sejam $b \geq 0$, $\beta > 0$, $a(t)$ uma função não-negativa, localmente integrável em $t \in [0,T)$, e $u(t)$ não -negativa e localmente integrável sobre $[0,T)$, com*

$$u(t) \leq a(t) + b\int_0^t (t-s)^{\beta-1}u(s)\ ds,\ t \in [0,T).$$

Então

$$u(t) \leq a(t) + \theta\int_0^t E'_\beta(\theta(t-s))a(s)\ ds,\ t \in [0,T),$$

onde $\theta = (b\Gamma(\beta))^{1/\beta}$, $E_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}$ *e* $E'_\beta(z) = \frac{d}{dz}E_\beta(z)$. *Se* $a(t) \equiv a$, *constante, então*

$$u(t) \leq aE_\beta(\theta t).$$

1.2 Operador solução

Sejam X um espaço de Banach, A um operador linear, ilimitado e fechado em X, com domínio denso, $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ um núcleo escalar não nulo.

Consideremos a equação Volterra

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)\,ds,\ t \in J, \tag{4}$$

onde $f \in C(J;X)$ e $J = [0,T]$.

A Definição à seguir trata da noção de Família Resolvente para a equação (4).

Definição 1.5. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ de operadores lineares limitados em X é chamada um Resolvente ou Operador solução para (4), se as seguintes condições forem satisfeitas

(i) $S(t)$ é fortemente contínua em $\mathbb{R}_+$ e $S(0) = I$;

(ii) $S(t)$ comuta com A, isto é, $S(t)D(A) \subset D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$, para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$;

(iii) a equação resolvente é satisfeita, ou seja,

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)x\,ds, \text{ para todo } x \in D(A),\ t \geq 0.$$

É importante observar que, se existe um resolvente para a equação (4), então ele é único. A noção de resolvente é muito útil no estudo destas equações, visto que, pode-se provar que elas estão bem postas se, e somente se, admitem um resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Além disso, através de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ podemos derivar uma fórmula de variação das constantes para (4), conforme pode ser visto em (1).

1.3 Operadores Setoriais e Espaços de Potência Fracionária

Os resultados desta seção podem ser encontrados, por exemplo, nas referências (48), (49) e (50).

Definição 1.6. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é setorial, se existirem constantes $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e $M > 0$ tais que

(i) $\rho(A) \supset \sum_{\theta,\omega} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega,\ |arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$;

(ii) $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M}{|\lambda - \omega|}$, $\lambda \in \sum_{\theta,\omega}$.

Quando $\omega = 0$, denotamos o setor $\sum_{\theta,0}$ simplesmente por $\sum_{\theta}$. No decorrer desta seção, A denotará um Operador Setorial.

Definição 1.7. Para $\alpha > 0$, $(-A)^{-\alpha}$ é o operador definido por

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{At}\, dt,$$

onde $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo analítico gerado por A.

Um fato importante da Teoria de Potência Fracionária de operadores setoriais é a injetividade de $(-A)^{-\alpha}$, quando $\alpha > 0$. Isso nos permite definir potências positivas de tais operadores. A saber, para $\alpha > 0$ definimos $(-A)^{\alpha} = ((-A)^{-\alpha})^{-1} : D((-A)^{\alpha}) \subset X \to X$ com domínio $D((-A)^{\alpha}) = R((-A)^{-\alpha})$, onde $R((-A)^{-\alpha}) = \{(-A)^{-\alpha}x : x \in X\}$ e $(-A)^0 = Id_X$.

Teorema 1.8. *As seguintes propriedades são verificadas.*

a) $(-A)^{\alpha}$ *é um operador fechado, para* $\alpha > 0$;

(b) Se $\alpha \geq \beta > 0$, *então* $D((-A)^{\alpha}) \subset D((-A)^{\beta})$;

(c) $\overline{D((-A)^{\alpha})} = X$, *para todo* $\alpha \geq 0$;

(d) Se $\alpha, \beta \geq 0$, *então* $(-A)^{\alpha+\beta}x = (-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x$, *para todo* $x \in D((-A)^{\gamma})$, *onde* $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Definição 1.9. Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, definimos para cada $\alpha \geq 0$ o espaço

$$X^{\alpha} = (D((-A)^{\alpha}), \|\cdot\|_{\alpha}),$$

onde $\|x\|_\alpha = \|(-A)^\alpha x\|$.

Os espaços X^α são chamados de Espaços de Potência Fracionária associado ao operador $-A$. Vejamos algumas propriedades desses espaços.

Teorema 1.10. *(48) Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, então X^α é um espaço de Banach na norma $\|\cdot\|_\alpha$, para $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$ e para $\alpha \geq \beta \geq 0$, X^α é um subespaço denso de X^β com inclusão contínua. Se A tem resolvente compacto, então a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta, para $\alpha > \beta \geq 0$.*

A necessidade de se utilizar Espaços de Potência Fracionária no estudo de equações diferenciais parciais não lineares de evolução deve-se ao fato de que, em geral, os termos não lineares destas equações aplicam o domínio do operador em algum espaço intermediário entre X^1 e X^0. Por exemplo, para $\rho > 1$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = |s|^{\rho-1}s,$$

induz uma aplicação de X^1 em X^β, com $0 < \beta < 1$, como veremos adiante.

1.4 Ferramentas Topológicas

O objetivo desta seção é apresentar algumas noções topológicas que serão utilizadas neste trabalho. A primeira delas é o famoso Princípio da Contração de Banach.

Teorema 1.11. *(51)[Princípio da Contração de Banach] Seja X um espaço de Banach. Se D é um subconjunto fechado de X, F é uma função de D em D e existe um número γ tal que $0 \leq \gamma < 1$ e*

$$|Fx - Fy| \leq \gamma |x - y|,$$

para todo $x, y \in D$, então existe um único ponto $z \in D$ tal que $Fz = z$. Além disso, se $x_0 \in D$ e $x_n = Fx_{n-1}$, para $n = 1, 2, \ldots$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ e a estimativa

$$|x_n - z| \leq \gamma^n (1-\gamma)^{-1} |x_1 - x_0|.$$

é satisfeita para $n = 1, 2, \ldots$.

Definição 1.12. Se (X, ρ) é um espaço métrico, dizemos que $E \subset X$ é totalmente limitado, se para cada $\epsilon > 0$, pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ.

O próximo resultado fornece a relação entre conjuntos relativamente compactos e conjuntos totalmente limitados.

Teorema 1.13. *Um subconjunto M de um espaço métrico completo X é relativamente compacto se, e somente se, M é totalmente limitado.*

Outra ferramenta importante para o estudo dessa Tese é o Teorema de Arzelá-Ascoli.

Teorema 1.14. *(Arzelá-Ascoli) Seja $\mathcal{F} \subset C([a,b];X)$, satisfazendo*

(i) para qualquer $t \in [a,b]$, $\{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto em X;

(ii) $\mathcal{F}$ é equicontínuo em $[a,b]$, isto é, para qualquer $\epsilon > 0$ e para qualquer $t \in [a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que $\|f(t) - f(s)\| < \epsilon$, para qualquer $s \in [a,b]$ satisfazendo $|t-s| < \delta$ e para todo $f \in \mathcal{F}$.

Então, $\mathcal{F}$ é relativamente compacto.

Definição 1.15. Um espaço métrico X é chamado contrátil, se existir uma homotopia contínua

$$\begin{aligned} h : X \times [0,1] &\to X \\ (x,t) &\mapsto h(x,t) \end{aligned}$$

tal que

$$h(x,0) = x, \text{ para todo } x \in X$$

e

$$h(x,1) = x_0, \text{ para todo } x \in X \text{ e algum } x_0 \in X.$$

Definição 1.16. Um espaço métrico X é chamado absolutamente retrátil se para todo espaço métrico Y, todo subconjunto fechado $B \subset Y$ e toda aplicação contínua $f : B \to X$, existir uma extensão contínua $\tilde{f} : Y \to X$ de f sobre Y, isto é, $\tilde{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in B$.

Definição 1.17. Um espaço métrico X é chamado um $R_\delta-$conjunto, se existir uma sequência de espaços, $\{X_n\}$, contráteis, não vazios e compactos, tais que

$$X_{n+1} \subsetneq X_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Observação 1.18. *Qualquer $R_\delta-$conjunto é um espaço conexo, não vazio e compacto que é acíclico com respeito ao funtor homologia de $\check{C}$ech, ou seja, tem a mesma homologia que o espaço de um ponto.*

Definição 1.19. Sejam X e Y espaços métricos, $f : X \to Y$ uma função contínua e $y \in Y$. Dizemos que f é própria em y, se existir $\epsilon > 0$ tal que para qualquer conjunto compacto $K \subset B(y, \epsilon)$, o conjunto $f^{-1}(K)$ é compacto, onde $B(y, \epsilon)$ é a bola aberta em Y, com centro em $y \in Y$ e raio ϵ.

Vejamos a reformulação do Teorema de Browder-Gupta, atribuída à L. Górniewicz.

Teorema 1.20. *(52) Sejam E um espaço de Banach, X um espaço métrico e $f : X \to E$ uma aplicação contínua tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) f é própria em $0 \in E$.

(2) para todo $\epsilon > 0$ existe uma aplicação contínua $f_\epsilon : X \to E$ para a qual temos:

(i) $\|f(x) - f_\epsilon(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in X$,

(ii) a aplicação $\tilde{f}_\epsilon : f_\epsilon^{-1}(B(0, \epsilon)) \to B(0, \epsilon)$, tal que $\tilde{f}_\epsilon(x) = f_\epsilon(x)$ para todo $x \in f_\epsilon^{-1}(B(0, \epsilon))$ é um homeomorfismo.

Então, o conjunto $f^{-1}(\{0\})$ é um $R_\delta-$conjunto.

O próximo resultado fornece condições para que uma função contínua satisfaça o item (2) do Teorema (1.20).

Consideremos K um subconjunto convexo e limitado de um espaço normado e E um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Sejam $C = C(K, E)$, o espaço de todas as funções contínuas e limitadas de K em E, com a topologia da convergência uniforme, $t_0 \in K$, $f_0 \in E$ e Ω a família de todas as vizinhanças abertas de 0 em E. Denotaremos por Φ o conjunto de todas as funções contínuas $F : C \to C$ tal que

(i) $F(C)$ é um subconjunto equiuniformemente contínuo de C, isto é, para qualquer $U \in \Omega$, existe $\epsilon > 0$ tal que $F(f)(t) - F(f)(s) \in U$, para cada $f \in C$, $t, s \in K$ tal que $|t - s| \leq \epsilon$;

(ii) $F(f)(t_0) = f_0$, para todo $f \in C$;

(iii) Para todo $\epsilon > 0$,

$$\text{se } f|_{K_\epsilon} = g|_{K_\epsilon} \text{ então } F(f)|_{K_\epsilon} = F(g)|_{K_\epsilon}, \text{ com } f, g \in C$$

onde $K_\epsilon = \bar{B}(t_0, \epsilon) \cap K$ e $\bar{B}(t_0, \epsilon)$ é a bola fechada de centro em t_0 e raio ϵ.

Consideremos I como sendo a aplicação identidade em C.

Lema 1.21. *(53) Para qualquer $F \in \Phi$, existe uma sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $I - F_n : C \to C$ é um homeomorfismo e $\lim_{n\to\infty} F_n(f) = F(f)$, uniformemente em $f \in C$.*

Definição 1.22. Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V. A envoltória convexa de S em V é definida por

$$co\{S\} := \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+,\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1,\ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset S\}.$$

Teorema 1.23. *(51) Sejam Z um espaço de Banach e $f : [\alpha, \beta] \to Z$ uma função integrável. Então*

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(\tau) d\tau \ \in \ \bar{co}\{f(\tau); \tau \in [\alpha, \beta]\}.$$

O Teorema de Ponto Fixo adotado no Capítulo 4 é o do Ponto Fixo de Krasnoselskii.

Teorema 1.24. *(51)[Ponto Fixo de Krasnoselskii] Se D é um subconjunto limitado, convexo e fechado de um espaço de Banach X e Γ_1, Γ_2 são funções contínuas de D em X tais que*

(i) $\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) \in D$, para todo $x \in D$;

(ii) $\overline{\Gamma_2(D)}$ é compacto;

(iii) Existe um número γ, $0 \leq \gamma < 1$, tal que $\|\Gamma_1(x) - \Gamma_1(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$, para todo $x, y \in D$.

Então, existe $z \in D$ tal que $\Gamma_1(z) + \Gamma_2(z) = z$.

Os resultados desta seção podem ser encontrados, por exemplo, em (54), (51) e (53).

1.4.1 Medida de não compacidade

Medidas de não compacidade são ferramentas muito importantes na Análise Funcional. A primeira medida de não compacidade, denotada por α, foi definida por Kuratowski em 1930. A mesma foi utilizada por Darbo em 1955 para generalizar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, o qual incluiu a parte de existência do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Posteriormente, novas medidas foram introduzidas por *Goldenštein*, Goh'berg, Markus e outros. Para maiores detalhes, recomendamos (55), (56), (52) e (57).

Começaremos definindo medida de não compacidade e em seguida apresentaremos as suas propriedades mais importantes.

Seja $\mathcal{M}_X$ a classe de todos subconjuntos limitados de um espaço métrico X.

Definição 1.25. Seja X um espaço métrico completo. Uma aplicação $\phi : \mathcal{M}_X \to [0, \infty)$ é chamada uma medida de não compacidade em X, se satisfizer as seguintes condições, para todo $Q, Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_X$:

1) $\phi(Q) = 0$ se e, somente se, Q é relativamente compacto;

2) $\phi(Q) = \phi(\bar{Q})$;

3) $\phi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\phi(Q_1), \phi(Q_2)\}$.

Proposição 1.26. *(57) Qualquer medida de não compacidade ϕ satisfaz as seguintes condições, para todo $Q, Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_X$:*

(i) se $Q_1 \subset Q_2$, então $\phi(Q_1) \leq \phi(Q_2)$;

(ii) $\phi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\phi(Q_1), \phi(Q_2)\}$;

(iii) $\phi(Q) = 0$ para todo conjunto finito.

Definição 1.27. Seja (X,d) um espaço métrico completo.

a) A função $\alpha : \mathcal{M}_X \to [0, \infty)$ com

$$\alpha(Q) = \inf\left\{\epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_k,\ S_k \subset X,\ diam(S_k) < \epsilon, (k = 1, \ldots, n \in \mathbb{N})\right\}$$

é chamada a medida de não compacidade de Kuratowski.

b) A função $\chi : \mathcal{M}_X \to [0, \infty)$ com

$$\chi(Q) = \inf \left\{ \epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r_k),\ x_k \in X,\ r_k < \epsilon, (k = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}) \right\}$$

é chamada a medida de não compacidade da bola ou de Hausdorff.

Elas satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\chi(Q) \leq \alpha(Q) \leq 2\chi(Q), \text{ para todo } Q \in \mathcal{M}_X.$$

Se X é um espaço de Banach, então as funções α e χ tem propriedades adicionais. Listaremos as mais importantes.

Proposição 1.28. *(57) Sejam X um espaço de Banach, $Q, Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_X$ e ψ qualquer uma das medidas de não compacidade definidas anteriormente. Então*

(i) $\psi(Q_1 + Q_2) \leq \psi(Q_1) + \psi(Q_2)$;

(ii) $\psi(Q + x) = \psi(Q)$, *para cada* $x \in X$;

(iii) $\psi(\lambda Q) = |\lambda|\psi(Q)$, *para* $\lambda \in \mathbb{C}$;

iv) $\psi(Q) = \psi(co(Q))$.

Além disso, se X tem dimensão infinita e $B(0,1)$, S_X são, respectivamente, a bola unitária aberta e a esfera unitária em X, então

$$\alpha(B(0,1)) = \alpha(S_X) = 2 \text{ e } \chi(B(0,1)) = \chi(S_X) = 1.$$

2 Cálculo Funcional

2.1 Introdução

Consideramos, para este Capítulo, o seguinte Problema:

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_0^t dg(s)\Delta u(t-s,x) + |u|^{\rho-1}u + h(t), & \text{em } (0,\infty)\times\Omega \\ u(t,x) = 0, & \text{em } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{5}$$

no qual $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $g(t) = \dfrac{e^{-\gamma t}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, com $\gamma, t > 0$ e $0 < \alpha \leq 1, u_0 \in L^q(\Omega),\ 1 < q < \infty,\ \rho > 1$ e h sob certas condições.

Note que o Problema (5) pode ser visto como a seguinte equação integral

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\ ds + \int_0^t |u(s)|^{\rho-1}u(s)\ ds + \int_0^t h(s)\ ds,\ t \geq 0, \tag{6}$$

onde Δ é o Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet em Ω.

Sabe-se (48) que Δ é setorial, isto é, dado $\eta_0 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|(\lambda - \Delta)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|},\ \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{\eta_0}, \tag{7}$$

onde $\Sigma_{\eta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}/\ |\arg(\lambda)| < \eta_0\}$.

A observação à seguir será muito útil quando aplicarmos a Transformada de Laplace na equação (6).

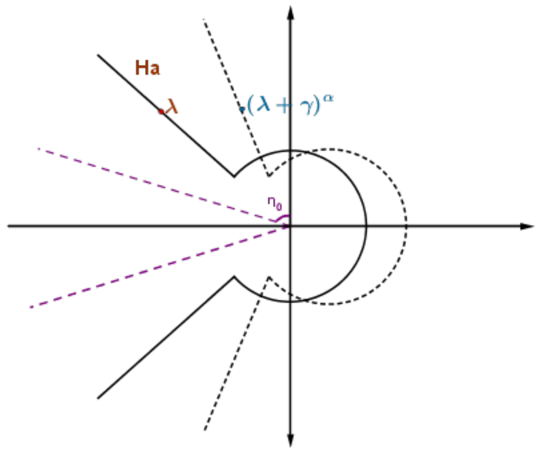
Observação 2.1. *Note que, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, temos $Re(\lambda + \gamma) = Re(\lambda) + \gamma$ e $Im(\lambda + \gamma) = Im(\lambda)$. Logo, se $\lambda \in Ha$, então $(\lambda + \gamma)^\alpha \in \Sigma_{\eta_0} \subset \rho(\Delta)$(figura 1), onde Ha é o caminho(figura 2)*

$$\begin{aligned} Ha(r,\eta) &:= \{se^{i\eta} : r \leq s < \infty\} \cup \{re^{is} : |s| \leq \eta\} \cup \{se^{-i\eta} : r \leq s < \infty\} \\ &= Ha_1 + Ha_2 - Ha_3, \end{aligned} \tag{8}$$

$\gamma \in \mathbb{R}_+$ e $\eta \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \eta_0\right)$.

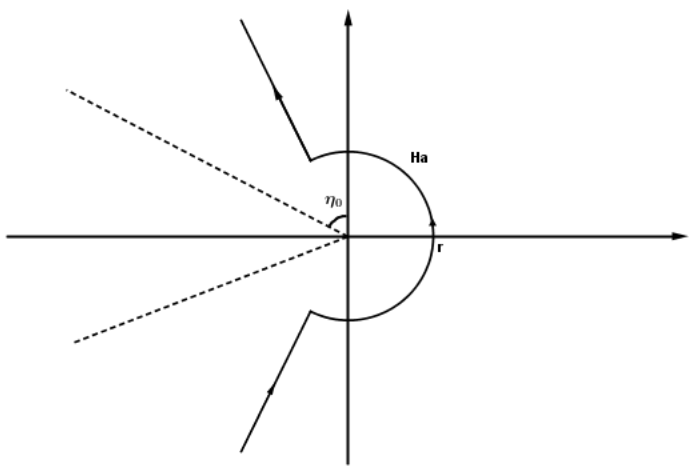
Já sabemos que, se $\lambda \in Ha$, então $(\lambda + \gamma)^\alpha \in \rho(\Delta)$. Aplicando, formalmente, a Transformada de Laplace em (6) e utilizando o fato que $\hat{g}(\lambda) = (\lambda + \gamma)^{-\alpha}$, temos que

Figura 1: Caminho deslocado



Fonte: produzido pela própria autora

Figura 2: Caminho Ha



Fonte: produzido pela própria autora

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}u_0 + \hat{g}(\lambda)\Delta\hat{u}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}\hat{f}(\lambda) + \frac{1}{\lambda}\hat{h}(\lambda)$$

$$\Rightarrow (\lambda+\gamma)^\alpha\hat{u}(\lambda) = \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha u_0 + \Delta\hat{u}(\lambda) + \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\hat{f}(\lambda) + \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\hat{h}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)\hat{u}(\lambda) = \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha u_0 + \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\hat{f}(\lambda) + \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\hat{h}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\lambda) = \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1}u_0 + \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1}\hat{f}(\lambda)$$

$$+ \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1}\hat{h}(\lambda),$$

onde $f(u(s)) = |u(s)|^{\rho-1}u(s)$.

Aplicando a inversa da Transformada de Laplace, obtemos

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))\ ds + \int_0^t S(t-s)h(s)\ ds,$$

onde

$$S(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha} - \Delta\right)^{-1}\ d\lambda. \tag{9}$$

2.2 Cálculo Funcional Fracionário

O objetivo desta seção é estudar o comportamento da família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ no espaço $L^q(\Omega)$ e em Espaços de Potência Fracionária associados ao Laplaciano. Para isto, mostraremos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é uma Família Resolvente para a equação (6).

Proposição 2.2. *Seja $\alpha \in (0,1]$. A função*

$$S(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha} - \Delta\right)^{-1}\ d\lambda, & se\ t>0, \\ I, & se\ t=0, \end{cases} \tag{10}$$

onde Ha é o caminho (8) e I é o operador identidade, está bem definida sobre $L^q(\Omega)$ e existe uma constante $N \geq 1$, tal que

$$\|S(t)\psi\|_{L^q(\Omega)} \leq N\|\psi\|_{L^q(\Omega)},$$

para quaisquer $t \geq 0$ e $\psi \in L^q(\Omega)$.

Demonstração. Observe que, para todo $\psi \in L^q(\Omega)$ e cada $t > 0$ fixado, se assumirmos $r = t^{-1}$, então utilizando a estimativa do Resolvente do Laplaciano (7)

• Sobre Ha_1

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_1} e^{\lambda t}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\lambda^{-1}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha} - \Delta\right)^{-1}\psi\ d\lambda\right\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} \frac{e^{ts\cos\eta}}{|se^{i\eta}|}\ ds$$

$$\leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi} \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{ts\cos\eta} t \, ds$$

$$\leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi\cos\eta} \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{ts\cos\eta} t\cos\eta \, ds$$

$$\leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi\cos\eta} \lim_{b\to\infty} e^{ts\cos\eta}\Big|_{\frac{1}{t}}^{b}$$

$$\leq \frac{-C\|\psi\|_{L^q(\Omega)} e^{\cos\eta}}{2\pi\cos\eta}.$$

- Sobre Ha_2

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_2} \frac{e^{\lambda t}(\lambda+\gamma)^{\alpha}}{\lambda} \left((\lambda+\gamma)^{\alpha} - \Delta\right)^{-1} \psi \, d\lambda \right\|_{L^q(\Omega)} &\leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{e^{rt\cos s}}{|re^{is}|} r \, ds \\
&\leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos s} \, ds \\
&\leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} e \, ds \\
&\leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi} e 2\eta \\
&\leq \frac{C\|\psi\|_{L^q(\Omega)} e\eta}{\pi}.
\end{aligned}$$

- Sobre Ha_3

  O procedimento é análogo ao de Ha_1.

  Tomando

$$N = \max\left\{ \frac{-Ce^{\cos\eta}}{2\pi\cos\eta}, \ \frac{Ce\eta}{\pi} \right\},$$

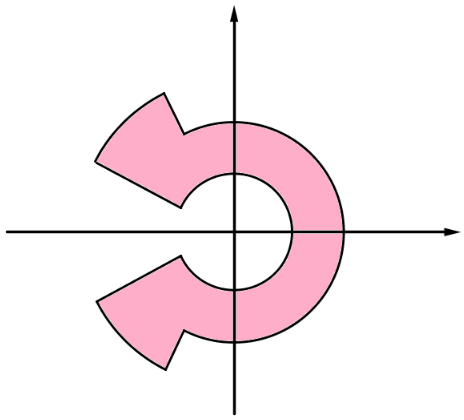
temos

$$\|S(t)\psi\|_{L^q(\Omega)} \leq N\|\psi\|_{L^q(\Omega)}.$$

Assim, $S(t) : L^q(\Omega) \to L^q(\Omega)$ está bem definido e $S(t) \in \mathcal{L}(L^q(\Omega))$, para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, note que a representação integral (10) é independente de $r > 0$ e $\eta \in (\frac{\pi}{2}, \eta_0)$. De fato, consideremos $r, r' \in (0, \infty)$, $\eta, \eta' \in (\frac{\pi}{2}, \eta_0)$ e a integral (10) sobre os caminhos $Ha(r,\eta)$ e $Ha(r',\eta')$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\eta' > \eta$ e $r > r'$. Seja D a região entre as curvas $Ha(r,\eta)$ e $Ha(r',\eta')$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, definamos $D_n := D \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$(Figura 3). Pelo Teorema integral de Cauchy, temos que

Figura 3: Região D_n



Fonte: produzido pela própria autora

$$\int_{\partial D_n} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\ d\lambda = 0.$$

Sejam R_1 e R_2 dois arcos contidos em $\{z \in \mathbb{C} : |z| = n\}$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{R_1} e^{\lambda t} \quad (\lambda+\gamma)^{\alpha}\lambda^{-1}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\ d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \\
&\qquad = \left\| \int_{\eta}^{\eta'} e^{tne^{is}}(ne^{is}+\gamma)^{\alpha}(ne^{is})^{-1}\left((ne^{is}+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1} n\ ie^{is}\ ds \right\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega))} \\
&\qquad \leq C\int_{\eta}^{\eta'} e^{tn\cos s}\ ds \\
&\qquad \leq Ce^{tnL}(\eta'-\eta),
\end{aligned}$$

onde $L = \sup_{s\in[\eta,\eta']} \cos s < 0$.

Assim, a integral acima vai para zero, quando $n \to \infty$. De maneira análoga, mostra-se que a integral sobre o arco R_2 vai para zero também. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{Ha(r',\eta')} & e^{\lambda t}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\lambda^{-1} \quad ((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta)^{-1}\, d\lambda \\ &= \int_{Ha(r,\eta)} e^{\lambda t}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\lambda^{-1}\, ((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta)^{-1}\, d\lambda.\end{aligned}$$

□

Mostraremos, em seguida, que a família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, satisfaz a condição (iii) da Definição (1.5).

Proposição 2.3. *Para todo* $\psi \in D(\Delta)$ *e* $t > 0$, *temos*

$$S(t)\psi = \psi + \int_0^t g(t-s)\Delta S(s)\psi \ ds.$$

Demonstração. Note que para, $Re(\mu) > 0$, temos

$$\begin{aligned}\hat{S}(\mu) &= \int_0^{\infty} e^{-\mu t} S(t)\ dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\mu t}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\ d\lambda\right)\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\left(\int_0^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)t}\ dt\right)\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\ d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}(\mu-\lambda)^{-1}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\ d\lambda \\ &= \mu^{-1}(\mu+\gamma)^{\alpha}\left((\mu+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\hat{S}(\mu) = \mu^{-1}(\mu+\gamma)^{\alpha}\left((\mu+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow ((\mu+\gamma)^{\alpha}-\Delta)\hat{S}(\mu) = \mu^{-1}(\mu+\gamma)^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (\mu+\gamma)^{\alpha}\hat{S}(\mu) - \Delta\hat{S}(\mu) = \mu^{-1}(\mu+\gamma)^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \hat{S}(\mu) - (\mu+\gamma)^{-\alpha}\Delta\hat{S}(\mu) = \mu^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{S}(\mu) = \mu^{-1} + (\mu+\gamma)^{-\alpha}\Delta\hat{S}(\mu).$$

Aplicando a inversa da Transformada de Laplace, obtemos:

$$S(t) = I + \int_0^t g(t-s)\Delta S(s)\ ds,$$

E, consequentemente,

$$S(t)\psi = \psi + \int_0^t g(t-s)\Delta S(s)\psi\ ds,$$

para todo $\psi \in D(\Delta)$ e $t > 0$. □

O próximo resultado garante a continuidade forte da família $S(t)$ com respeito ao parâmetro $\alpha \in (0,1)$.

Proposição 2.4. *A família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre $L^q(\Omega)$.*

Demonstração. Note que, para cada $\psi \in D(\Delta)$,

$$\begin{aligned}
S(t)\psi - \psi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\psi\ d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}\psi\ d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\left[\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1} - \lambda^{-1}\right]\psi\ d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\left[\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha} - \lambda^{-1}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)\right]\psi\ d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\Delta\psi\ d\lambda.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\|S(t)\psi - \psi\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{C}{2\pi}\int_{Ha} e^{Re(\lambda t)}|\lambda|^{-1}|(\lambda+\gamma)|^{-\alpha}\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ |d\lambda|.$$

Fixando $t > 0$, novamente, e tomando $r = t^{-1}$, temos

• Sobre Ha_1

$$\frac{C}{2\pi}\int_{Ha_1} e^{Re(\lambda t)} \quad |\lambda|^{-1}|(\lambda+\gamma)|^{-\alpha}\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ |d\lambda|$$

$$\leq \frac{C\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}s^{-1}|se^{i\eta}+\gamma|^{-\alpha}\ ds$$

$$\leq \frac{C\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\,t}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}|s\ i\sin(\eta)|^{-\alpha}\ ds$$

$$\leq \frac{C\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\,t^{\alpha+1}(\sin(\eta))^{-\alpha}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}\ ds$$

$$\leq \frac{C\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\,t^{\alpha+1}(\sin(\eta))^{-\alpha}}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\left.\frac{e^{st\cos(\eta)}}{t\cos(\eta)}\right|_{\frac{1}{t}}^{b}$$

$$\leq -\frac{C\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\,t^{\alpha}(\sin(\eta))^{-\alpha}e^{\cos(\eta)}}{2\pi\cos(\eta)}.$$

• Sobre Ha_2

É suficiente considerarmos o caso $t<\frac{1}{\gamma}$. Sendo assim,

$$\frac{C}{2\pi}\int_{Ha_2} e^{Re(\lambda t)} \quad |\lambda|^{-1}|(\lambda+\gamma)|^{-\alpha}\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ |d\lambda|$$

$$\leq \frac{C\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} e^{rt\cos(s)}r^{-1}|re^{is}+\gamma|^{-\alpha}r\ ds$$

$$\leq \frac{C\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos(s)}|r-\gamma|^{-\alpha}\ ds$$

$$\leq \frac{C|r-\gamma|^{-\alpha}\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} e\ ds$$

$$\leq \frac{C|r-\gamma|^{-\alpha}\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ e\ 2\eta}{2\pi}$$

$$\leq \frac{C|1-\gamma t|^{-\alpha}\,\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ e\ \eta\ t^{\alpha}}{\pi}.$$

- Sobre Ha_3

  Procedemos da mesma forma que em Ha_1.

  Assim, fazendo $t \to 0^+$, vemos que $\|S(t)\psi - \psi\|_{L^q(\Omega)} \to 0$.

Consideremos agora $u(t) = S(t)\psi$, para $t > 0$ e $\psi \in D(\Delta)$. Pela proposição (2.3), sabemos que

$$u(t) = \int_0^t g(t-r)\Delta u(r)\ dr + \psi,\ \ t > 0.$$

Seja $s \in (0, t]$, então

$$||u(t) - u(s)||_{L^q(\Omega)} = \left\| \int_0^t g(t-r)\Delta u(r)\ dr - \int_0^s g(s-r)\Delta u(r)\ dr \right\|_{L^q(\Omega)}$$

$$\leq \left\| \int_s^t g(t-r)\Delta u(r)\ dr \right\|_{L^q(\Omega)} + \left\| \int_0^s (g(t-r) - g(s-r))\Delta u(r)\ dr \right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Analisaremos cada parcela separadamente. Observe que:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_s^t g(t-r)\Delta u(r)\ dr \right\|_{L^q(\Omega)} &\leq \int_s^t g(t-r)||\Delta S(r)\psi||_{L^q(\Omega)}\ dr \\
&\leq \int_s^t g(t-r)\ ||S(r)\Delta\psi||_{L^q(\Omega)}\ dr \\
&\leq N||\Delta\psi||_{L^q(\Omega)} \int_s^t g(t-r)\ dr \\
&\leq N||\Delta\psi||_{L^q(\Omega)} \int_0^{t-s} g(r)\ dr \\
&\leq \frac{N||\Delta\psi||_{L^q(\Omega)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-s} r^{\alpha-1}e^{-\gamma r}\ dr \\
&\leq \frac{N||\Delta\psi||_{L^q(\Omega)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-s} r^{\alpha-1}\ dr \\
&\leq \frac{N||\Delta\psi||_{L^q(\Omega)}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{b\to 0} \frac{r^\alpha}{\alpha}\Bigg|_b^{t-s}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{N||\Delta\psi||_{L^q(\Omega)}}{\Gamma(\alpha+1)} \lim_{b\to 0}[(t-s)^\alpha - b^\alpha]$$

$$\leq \frac{N||\Delta\psi||_{L^q(\Omega)}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-s)^\alpha$$

e

$$\left\| \int_0^s (g(t-r) \quad -g(s-r))\Delta u(r)\ dr \right\|_{L^q(\Omega)} \leq \int_0^s |(g(t-r)-g(s-r))|\ \|\Delta S(r)\psi\|_{L^q(\Omega)} dr$$

$$\leq \int_0^s |(g(t-r)-g(s-r))|\ \|S(r)\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ dr$$

$$\leq N\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \int_0^s (g(s-r)-g(t-r))\ dr$$

$$\leq N\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \int_0^s \left(\frac{(s-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(s-r)}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(t-r)}}{\Gamma(\alpha)} \right) dr$$

$$\leq N\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \int_0^s \left(\frac{(s-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(s-r)}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(t-s)}e^{-\gamma(s-r)}}{\Gamma(\alpha)} \right) dr$$

$$\leq N\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \int_0^s e^{-\gamma(s-r)} \left(\frac{(s-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(t-s)}}{\Gamma(\alpha)} \right) dr$$

$$\leq N\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \int_0^s \left(\frac{(s-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(t-s)}}{\Gamma(\alpha)} \right) dr$$

$$\leq N\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \left(\int_0^s \frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ dr - e^{-\gamma(t-s)} \int_{t-s}^t \frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ dr \right)$$

$$\leq N\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \left(\lim_{b\to 0} \frac{r^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\bigg|_b^s - e^{-\gamma(t-s)} \frac{r^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\bigg|_{t-s}^t \right)$$

$$\leq N\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \left(\lim_{b\to 0} \frac{(s^\alpha - b^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} - e^{-\gamma(t-s)} \frac{(t^\alpha - (t-s)^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right).$$

Fazendo $s \to t^-$, vemos que $||u(t)-u(s)||_{L^q(\Omega)} \to 0$. Analogamente, mostra-se o caso $s > t$. Isso mostra a continuidade forte de $S(t)$, para $t > 0$. $\square$

É fácil ver que a condição (ii) da Definição (1.5) é satisfeita. Por isto e pelas Proposições (2.2), (2.3) e (2.4), podemos concluir que $S(t) : L^q(\Omega) \to L^q(\Omega)$, com $t \geq 0$, é uma Família Resolvente para (6).

Os próximos resultados dizem respeito à dependência contínua de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ com relação à α e à γ. E, para facilitar a escrita, adotaremos as seguintes terminologias:

$$S_{\alpha_i}(t)\psi := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha_i}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha_i}-\Delta\right)^{-1}\psi\, d\lambda$$

e

$$S_{\gamma_i}(t)\psi := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma_i)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma_i)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\psi\, d\lambda.$$

Proposição 2.5. *Sejam $\alpha_n, \alpha_0 \in (0,1]$, com $n = 1, 2, \cdots$, tais que $\alpha_n \to \alpha_0$ quando $n \to \infty$. Então para todo $\psi \in L^q(\Omega)$ e $t \geq 0$,*

$$S_{\alpha_n}(t)\psi \to S_{\alpha_0}(t)\psi, \quad \textit{quando} \;\; n \to \infty.$$

Além disso, essa convergência é uniforme para t em intervalos limitados.

Demonstração. Podemos escolher um (único) caminho Ha para o qual os operadores S_{α_0} e S_{α_n} estejam bem definidos. Sendo $\psi \in L^q(\Omega)$, então

$$S_{\alpha_n}(t)\psi - S_{\alpha_0}(t)\psi =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha_n}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha_n}-\Delta\right)^{-1}\psi - \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha_0}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha_0}-\Delta\right)^{-1}\psi]\, d\lambda,$$

para todo $t \geq 0$. Como o Operador Laplaciano é setorial,

$$\begin{aligned}\|\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha_n}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha_n}-\Delta\right)^{-1}\psi - \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha_0}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha_0}-\Delta\right)^{-1}\psi\|_{L^q(\Omega)}& \\ \leq C(|\lambda|^{-1}+|\lambda|^{-1})\|\psi\|_{L^q(\Omega)}& \\ = 2C|\lambda|^{-1}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}.&\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $\lambda \in \rho(\Delta)$ fixado

$$|e^{\lambda t}|\|\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha_n}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha_n}-\Delta\right)^{-1}\psi - \lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^{\alpha_0}\left((\lambda+\gamma)^{\alpha_0}-\Delta\right)^{-1}\psi\|_{L^q(\Omega)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$, uniformemente para t em intervalos limitados, pois, pela identidade do resolvente, temos que

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\gamma)^{\alpha_n}((\lambda+\gamma)^{\alpha_n}-\Delta)^{-1}-(\lambda+\gamma)^{\alpha_0}((\lambda+\gamma)^{\alpha_0}-\Delta)^{-1}\\
&\quad=((\lambda+\gamma)^{\alpha_n}-(\lambda+\gamma)^{\alpha_0})((\lambda+\gamma)^{\alpha_0}-\Delta)^{-1}+(\lambda+\gamma)^{\alpha_n}((\lambda+\gamma)^{\alpha_0}-(\lambda+\gamma)^{\alpha_n})\\
&\qquad\times((\lambda+\gamma)^{\alpha_n}-\Delta)^{-1}((\lambda+\gamma)^{\alpha_0}-\Delta)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, a demonstração está concluída. □

Proposição 2.6. *Sejam $\gamma_n, \gamma_0 \in (0,\infty)$, com $n = 1, 2, \cdots$, tais que $\gamma_n \to \gamma_0$ quando $n \to \infty$. Então para todo $\psi \in L^q(\Omega)$ e $t \geq 0$,*

$$S_{\gamma_n}(t)\psi \to S_{\gamma_0}(t)\psi, \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

Além disso, essa convergência é uniforme para t em intervalos limitados.

Demonstração. Podemos escolher um (único) caminho Ha para o qual os operadores S_{γ_0} e S_{γ_n} estejam bem definidos. Sendo $\psi \in L^q(\Omega)$, então

$$
\begin{aligned}
&S_{\gamma_n}(t)\psi - S_{\gamma_0}(t)\psi =\\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^{-1}(\lambda+\gamma_n)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma_n)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\psi-\lambda^{-1}(\lambda+\gamma_0)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma_0)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\psi]\,d\lambda,
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$. Note que, para λ fixado e $t > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\|\lambda^{-1}(\lambda+\gamma_n)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma_n)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\psi-\lambda^{-1}(\lambda+\gamma_0)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma_0)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\psi\|_{L^q(\Omega)}\\
\leq C(|\lambda|^{-1}+|\lambda|^{-1})\|\psi\|_{L^q(\Omega)}\\
=2C|\lambda|^{-1}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}
$$

e

$$|e^{\lambda t}|\|\lambda^{-1}(\lambda+\gamma_n)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma_n)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\psi-\lambda^{-1}(\lambda+\gamma_0)^{\alpha}\left((\lambda+\gamma_0)^{\alpha}-\Delta\right)^{-1}\psi\|_{L^q(\Omega)}\to 0,$$

quando $n \to \infty$, uniformemente para t em intervalos limitados, pois, pela Identidade do

Resolvente, temos que

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\gamma_n)^\alpha((\lambda+\gamma_n)^\alpha-\Delta)^{-1}-(\lambda+\gamma_0)^\alpha((\lambda+\gamma_0)^\alpha-\Delta)^{-1}\\
&\quad=((\lambda+\gamma_n)^\alpha-(\lambda+\gamma_0)^\alpha)((\lambda+\gamma_0)^\alpha-\Delta)^{-1}+(\lambda+\gamma_n)^\alpha((\lambda+\gamma_0)^\alpha-(\lambda+\gamma_n)^\alpha)\\
&\qquad\times((\lambda+\gamma_n)^\alpha-\Delta)^{-1}((\lambda+\gamma_0)^\alpha-\Delta)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos a demonstração. □

Agora estamos interessados em estudar o comportamento da família S(t) nos Espaços de Potências Fracionárias associados ao Operador Laplaciano.

Observação 2.7. *Utilizaremos os seguintes mergulhos (37):*

$$
\begin{aligned}
&H^{l_1}_{p_1}(\Omega)\hookrightarrow H^{l_2}_{p_2}(\Omega),\ \frac{l_1}{n}-\frac{1}{p_1}\geq\frac{l_2}{n}-\frac{1}{p_2},\ 1<p_1\leq p_2<\infty,\\
&H^{l}_{p}(\Omega)\hookrightarrow C^{\eta}(\bar{\Omega}),\ l-\frac{n}{p}>\eta>0,
\end{aligned}
$$

onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave e os espaços $H^l_p(\Omega)$ são os Espaços de Potenciais de Bessel (58), também chamados Espaços de Lebesgue, e são definidos por:

$$
H^s_p(\mathbb{R}^n):=\{-(I+\Delta)^{-\frac{s}{2}}f:\ f\in L^p(\mathbb{R}^n)\}=D((-(I+\Delta)^{\frac{s}{2}})).
$$

Com a norma

$$
\|\cdot\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}:=\|(-(I+\Delta)^{\frac{s}{2}})\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
$$

temos que $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.

Se $\Omega\subsetneq\mathbb{R}^n$ é um domínio suave, definimos o espaço $H^s_p(\Omega)$ como o conjunto formado por todas as restrições à Ω de funções em $H^s_p(\mathbb{R}^n)$.

Sabe-se (59) que o Operador Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet em um domínio Ω, suave e limitado, pode ser visto como um operador ilimitado em $E^0_q=L^q(\Omega)$, para $1<q<\infty$, com domínio $E^1_q:=W^{2,q}(\Omega)\cap W^{1,q}_0(\Omega)$ e que a escala de

Potências Fracionárias $\{E_q^\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ associada a $-\Delta$ verifica

$$E_q^\beta \hookrightarrow H_q^{2\beta}(\Omega),\ \beta\geq 0,\ 1<q<\infty,$$

$$E_q^{-\beta} \hookrightarrow (E_{q'}^\beta)',\ \beta\geq 0,\ 1<q<\infty,\ q'=\frac{q}{q-1}.$$

Observação 2.8. *O Espaço de Potencial de Bessel definido na Observação (2.7) é, inicialmente, diferente do Espaço de Potências Fracionárias associado ao operador $-\Delta$.*

De fato,

$$D((-\Delta)^\beta)=\{g:(-\Delta)^{-\beta}f=g,\ \textit{para alguma } f\in L^q(\Omega)\},$$

com a norma $\|g\|_\beta=\|(-\Delta)^\beta g\|_{L^q(\Omega)}$. Enquanto que, se $g\in H_q^\beta(\Omega)$ temos

$$\|g\|_{H_q^\beta(\Omega)}=\inf_{\substack{f\in H_q^\beta(\mathbb{R}^n)\\ f|_\Omega=g}}\|f\|_{H_q^\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

Todavia, segundo Triebel (60), esses Espaços coincidem e pode-se mostrar que suas normas são equivalentes.

Utilizando a Observação (2.7), temos que

$$E_q^\beta \hookrightarrow L^r(\Omega),\ r\leq\frac{nq}{n-2q\beta},\ 0\leq\beta\leq\frac{n}{2q},$$

$$E_q^0=L^q(\Omega),$$

$$E_q^\beta \hookleftarrow L^r(\Omega),\ r\geq\frac{n}{n-2q\beta},\ -\frac{n}{2q'}\leq\beta\leq 0.$$

A próxima afirmação, cuja demonstração segue da Desigualdade do Momento, será muito útil para estimar a família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em Espaços de Potência Fracionária.

Afirmação:(Ver (48)) Sejam A um operador setorial de ângulo $\eta_0\in(\frac{\pi}{2},\pi),\ \beta\in[0,1]$ e $\lambda\in\Sigma_{\eta_0}$, então existe uma constante $\tilde{C}>0$ tal que

$$\|(\lambda-A)^{-1}x\|_\beta\leq\tilde{C}|\lambda|^{\beta-1}\|x\|_{L^q(\Omega)}.$$

Proposição 2.9. *Sejam $\alpha\in(0,1],\ 0\leq\beta<1$. Então, existe uma constante $M>0$ tal que*

$$\|S(t)\psi\|_\beta\leq M\|\psi\|_{L^q(\Omega)}t^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta},$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Note que, fixando $t > 0$ e fazendo $r = t^{-1}$, temos

$$\begin{aligned}
\|S(t)\psi\|_\beta &= \|(-\Delta)^\beta S(t)\psi\|_{L^q(\Omega)} \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha(-\Delta)^\beta \left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1}\psi \; d\lambda \right\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{Ha} |e^{\lambda t}| \; |\lambda|^{-1}|(\lambda+\gamma)|^\alpha \left\|(-\Delta)^\beta((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta)^{-1}\psi\right\|_{L^q(\Omega)} \; |d\lambda| \\
&\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{Ha} |e^{\lambda t}| \; |\lambda|^{-1}|(\lambda+\gamma)^\alpha||(\lambda+\gamma)^\alpha|^{\beta-1} \; |d\lambda| \\
&\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{Ha} |e^{\lambda t}| \; |\lambda|^{-1}|\lambda+\gamma|^{\alpha\beta} \; |d\lambda|.
\end{aligned}$$

Assim,

- Sobre Ha_1

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{Ha_1} |e^{\lambda t}| \; |\lambda|^{-1}|\lambda+\gamma|^{\alpha\beta} \; |d\lambda| \leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}s^{-1}|se^{i\eta}+\gamma|^{\alpha\beta} \; ds \\
&\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}s^{-1}(s+\gamma)^{\alpha\beta} \; ds \\
&\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}t}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos\eta}(s+\gamma)^{\alpha\beta} \; ds \\
&\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}t}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} e^{(s-\gamma)t\cos\eta}s^{\alpha\beta} \; ds \\
&\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}te^{-\gamma t\cos\eta}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} e^{st\cos\eta}s^{\alpha\beta} \; ds \\
&\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}te^{-\gamma t\cos\eta}}{2\pi}\left[\lim_{b\to\infty} \left.\frac{s^{\alpha\beta}e^{st\cos\eta}}{t\cos\eta}\right|_{\frac{1}{t}+\gamma}^{b} - \int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} \frac{e^{st\cos\eta}}{t\cos\eta}\alpha\beta s^{\alpha\beta-1} \; ds\right]
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)} t e^{-\gamma t\cos\eta}}{2\pi}\left[-\frac{(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta} e^{\gamma t\cos\eta}}{t\cos\eta} - \frac{\alpha\beta}{t\cos\eta}\int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} e^{st\cos\eta} s^{\alpha\beta-1}\ ds\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)} t e^{-\gamma t\cos\eta}}{2\pi}\left[-\frac{(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta} e^{\gamma t\cos\eta}}{t\cos\eta} - \frac{\alpha\beta}{t\cos\eta}\int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} e^{st\cos\eta} s^{\alpha\beta-1}\ ds\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)} t e^{-\gamma t\cos\eta}}{2\pi}\left[-\frac{(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta} e^{\gamma t\cos\eta}}{t\cos\eta} - \frac{\alpha\beta}{t\cos\eta}\int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} e^{st\cos\eta} \left(\frac{1}{t}+\gamma\right)^{\alpha\beta-1}\ ds\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)} e^{-\gamma t\cos\eta}}{2\pi}\left[-\frac{(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta} e^{\gamma t\cos\eta}}{\cos\eta} - \frac{\alpha\beta(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta-1}}{\cos\eta}\int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} e^{st\cos\eta}\ ds\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)} e^{-\gamma t\cos\eta}}{2\pi}\left[-\frac{(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta} e^{\gamma t\cos\eta}}{\cos\eta} - \lim_{b\to\infty}\frac{\alpha\beta(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta-1}}{\cos\eta}\left.\frac{e^{st\cos\eta}}{t\cos\eta}\right|_{\frac{1}{t}+\gamma}^{b}\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)} e^{-\gamma t\cos\eta}}{2\pi}\left[-\frac{(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta} e^{\gamma t\cos\eta}}{\cos\eta} + \frac{\alpha\beta(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta-1}}{t\cos^2\eta} e^{\cos\eta} e^{\gamma t\cos\eta}\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\left[-\frac{(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta}}{\cos\eta} + \frac{\alpha\beta(\frac{1}{t}+\gamma)^{\alpha\beta-1}}{t\cos^2\eta} e^{\cos\eta}\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\left[-\frac{t^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta}}{\cos\eta} + \frac{\alpha\beta t^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta-1} e^{\cos\eta}}{\cos^2\eta}\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\left[-\frac{t^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta}}{\cos\eta} + \frac{\alpha\beta t^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta} e^{\cos\eta}}{\cos^2\eta}\right]$$

$$= \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\left[-\frac{e^{\cos\eta}}{\cos\eta} + \frac{\alpha\beta e^{\cos\eta}}{\cos^2\eta}\right] t^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}.$$

- Sobre Ha_2

$$\frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{Ha_2}\frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|}|\lambda+\gamma|^{\alpha\beta}\ |d\lambda| \leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{e^{rt\cos s}}{r}|re^{is}+\gamma|^{\alpha\beta} r\ ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos s}(r+\gamma)^{\alpha\beta}\ ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\left(\tfrac{1}{t}+\gamma\right)^{\alpha\beta}\int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos s}\,ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\left(\tfrac{1}{t}+\gamma\right)^{\alpha\beta}\int_{-\eta}^{\eta} e\,ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\left(\tfrac{1}{t}+\gamma\right)^{\alpha\beta} e2\eta$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\psi\|_{L^q(\Omega)}}{\pi}t^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}e\eta.$$

- Sobre Ha_3

O procedimento é semelhante ao feito em Ha_1.

Tomando
$$M=\max\left\{\frac{\tilde{C}}{2\pi}\left(-\frac{e^{\cos\eta}}{\cos\eta}+\frac{\alpha\beta e^{\cos\eta}}{\cos^2\eta}\right),\ \frac{\tilde{C}e\eta}{\pi}\right\},$$
temos que
$$\|S(t)\psi\|_\beta \leq M\|\psi\|_{L^q(\Omega)}t^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}.$$

□

Observação 2.10. *É interessante notar que quando $\gamma=0$, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é a Família de Mittag-Leffler e para $\alpha=1$ temos o Semigrupo do Calor.*

Observação 2.11. Se $0\leq\theta<\beta\leq 1$, então

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E^\beta,E^{1+\theta})}\leq Mt^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)}.$$

Além disso, se $u_0\in E^1$, temos que

$$\|t^{\alpha\theta}S(t)u_0\|_{E^{1+\theta}}\to 0,\ \text{quando } t\to 0^+.$$

Demonstração. De fato, para $0\leq\theta<\beta\leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}\|S(t)\psi\|_{E^{1+\theta}} &= \|(-\Delta)^{1+\theta}S(t)\psi\|_{E^0}\\ &= \|(-\Delta)^{1+\theta-\beta}S(t)(-\Delta)^{\beta}\psi\|_{E^0}\\ &\leq Mt^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)}\|\psi\|_{E^\beta}.\end{aligned}$$

Assim, $t^{\alpha\theta}\|S(t)\psi\|_{E^{1+\theta}} \leq M(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|\psi\|_{E^1}$. E, consequentemente,

$$\|t^{\alpha\theta}S(t)\|_{\mathcal{L}(E^1,E^{1+\theta})} \leq M(1+\gamma t)^{\alpha\theta}.$$

Seja $u_0 \in E^1$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\psi \in E^{1+\theta}$ tal que

$$(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|\psi - u_0\|_{E^1} < \frac{\epsilon}{2M}$$

e $\delta = \left(\dfrac{\epsilon}{2N\|x\|_{E^{1+\theta}}}\right)^{\frac{1}{\alpha\theta}}$. Portanto, se $0 \leq t \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
\|t^{\alpha\theta}S(t)u_0\|_{E^{1+\theta}} &\leq \|t^{\alpha\theta}S(t)(u_0-\psi)\|_{E^{1+\theta}} + \|t^{\alpha\theta}S(t)\psi\|_{E^{1+\theta}} \\
&\leq M(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u_0-\psi\|_{E^1} + Nt^{\alpha\theta}\|\psi\|_{E^{1+\theta}} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.12. *Se $\alpha \in (0,1]$ e $\beta \in [0,1)$, então a família de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre o espaço $(D((-\Delta)^\beta), \|\cdot\|_\beta)$.*

Demonstração. Inicialmente mostraremos o caso $s = 0$.

Para $\psi \in D(\Delta)$, temos

$$\begin{aligned}
\|S(t)\psi - \psi\|_\beta &= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1}\psi\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}\psi\, d\lambda \right\|_\beta \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\left[\lambda^{-1}(\lambda+\gamma)^\alpha\left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1} - \lambda^{-1}\right]\psi\, d\lambda \right\|_\beta \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}\left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1}\left[(\lambda+\gamma)^\alpha - \left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)\right]\psi\, d\lambda \right\|_\beta \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{-1}\left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1}\Delta\psi\, d\lambda \right\|_\beta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{Ha} |e^{\lambda t}|\, |\lambda|^{-1}\|(-\Delta)^\beta\left((\lambda+\gamma)^\alpha - \Delta\right)^{-1}\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\, |d\lambda|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\tilde{C}}{2\pi}\int_{Ha} |e^{\lambda t}|\ |\lambda|^{-1}|\lambda+\gamma|^{\alpha(\beta-1)}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ |d\lambda|.$$

• Sobre Ha_1

$$\frac{\tilde{C}}{2\pi}\int_{Ha_1} |e^{\lambda t}|\ |\lambda|^{-1}|\lambda+\gamma|^{\alpha(\beta-1)}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ |d\lambda|$$

$$\leq \frac{\tilde{C}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}s^{-1}|se^{i\eta}+\gamma|^{\alpha(\beta-1)}\ ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}t\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}(s+\gamma)^{\alpha\beta}|se^{i\eta}+\gamma|^{-\alpha}\ ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}t\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}(s+\gamma)^{\alpha\beta}|si\sin(\eta)|^{-\alpha}\ ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}t^{\alpha+1}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi(\sin(\eta))^{\alpha}}\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}(s+\gamma)^{\alpha\beta}\ ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}t^{\alpha+1}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}e^{-\gamma t\cos(\eta)}}{2\pi(\sin(\eta))^{\alpha}}\int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}s^{\alpha\beta}\ ds$$

$$\leq \frac{\tilde{C}t^{\alpha+1}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}e^{-\gamma t\cos(\eta)}}{2\pi(\sin(\eta))^{\alpha}}\left[\lim_{b\to\infty} s^{\alpha\beta}\frac{e^{st\cos(\eta)}}{t\cos(\eta)}\bigg|_{\frac{1}{t}+\gamma}^{b} - \frac{\alpha\beta}{t\cos(\eta)}\int_{\frac{1}{t}+\gamma}^{\infty} e^{st\cos(\eta)}s^{\alpha\beta-1}\ ds\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}t^{\alpha+1}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}e^{-\gamma t\cos(\eta)}}{2\pi(\sin(\eta))^{\alpha}}\left[-\frac{\left(\frac{1}{t}+\gamma\right)^{\alpha\beta}e^{\cos(\eta)+\gamma t\cos(\eta)}}{t\cos(\eta)} - \frac{\left(\frac{1}{t}+\gamma\right)^{\alpha\beta-1}\alpha\beta}{t\cos(\eta)}\lim_{b\to\infty}\frac{e^{st\cos(\eta)}}{t\cos(\eta)}\bigg|_{\frac{1}{t}+\gamma}^{b}\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}t^{\alpha+1}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}e^{-\gamma t\cos(\eta)}}{2\pi(\sin(\eta))^{\alpha}}\left[-\frac{e^{\cos(\eta)+\gamma t\cos(\eta)}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}}{t^{\alpha\beta+1}\cos(\eta)} + \frac{(1+\gamma t)^{\alpha\beta-1}\alpha\beta e^{\cos(\eta)+\gamma t\cos(\eta)}}{t^{\alpha\beta+1}\cos^2(\eta)}\right]$$

$$\leq \frac{\tilde{C}t^{\alpha-\alpha\beta}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}e^{\cos(\eta)}}{2\pi(\sin(\eta))^{\alpha}}\left[-\frac{(1+\gamma t)^{\alpha\beta}}{\cos(\eta)} + \frac{(1+\gamma t)^{\alpha\beta-1}\alpha\beta}{\cos^2(\eta)}\right].$$

• Sobre Ha_2

Basta analisarmos o caso $t < \dfrac{1}{\gamma}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{C}}{2\pi}\int_{Ha_2} |e^{\lambda t}|\ |\lambda|^{-1}|\lambda+\gamma|^{\alpha(\beta-1)} \quad & \|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}\ |d\lambda| \\
& \leq \frac{\tilde{C}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} e^{rt\cos(s)}r^{-1}|re^{is}+\gamma|^{\alpha(\beta-1)}r\ ds \\
& \leq \frac{\tilde{C}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos(s)}(r+\gamma)^{\alpha\beta}|re^{is}+\gamma|^{-\alpha}\ ds \\
& \leq \frac{\tilde{C}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(r+\gamma)^{\alpha\beta}}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos(s)}|r-\gamma|^{-\alpha}\ ds \\
& \leq \frac{\tilde{C}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}t^{-\alpha\beta}e(r-\gamma)^{-\alpha}}{2\pi}2\eta \\
& \leq \frac{\tilde{C}\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}t^{\alpha-\alpha\beta}e(1-\gamma t)^{-\alpha}\eta}{\pi}.
\end{aligned}$$

- Sobre Ha_3

O procedimento é idêntico ao de Ha_1.

Fazendo $t \to 0^+$, vemos que $\|S(t)\psi-\psi\|_\beta \to 0$.

Consideremos agora $s \in (0,t],\ \psi \in D(\Delta)$ e $u(t) = S(t)\psi$.

$$\begin{aligned}
||u(t)-u(s)||_\beta &= \left\|\int_0^t g(t-r)\Delta u(r)\ dr - \int_0^s g(s-r)\Delta u(r)\ dr\right\|_\beta \\
&\leq \left\|\int_s^t g(t-r)\Delta u(r)\ dr\right\|_\beta + \left\|\int_0^s (g(t-r)-g(s-r))\Delta u(r)\ dr\right\|_\beta.
\end{aligned}$$

Estimaremos cada parcela separadamente. Observe que:

$$\begin{aligned}
\left\|\int_s^t g(t-r)\Delta u(r)\ dr\right\|_\beta &\leq \int_s^t g(t-r)||\Delta S(r)\psi||_\beta\ dr \\
&\leq \int_s^t g(t-r)||S(r)\Delta\psi||_\beta\ dr
\end{aligned}$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \int_s^t g(t-r) r^{-\alpha\beta}(1+\gamma r)^{\alpha\beta}\ dr$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} s^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta} \int_s^t g(t-r)\ dr$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} s^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta} \int_0^{t-s} g(r)\ dr$$

$$\leq \frac{M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} s^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-s} r^{\alpha-1}e^{-\gamma r}\ dr$$

$$\leq \frac{M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} s^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-s} r^{\alpha-1}\ dr$$

$$\leq \frac{M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} s^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{b\to 0} \left.\frac{r^\alpha}{\alpha}\right|_b^{t-s}$$

$$\leq \frac{M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} s^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{b\to 0}[(t-s)^\alpha - b^\alpha]$$

$$\leq \frac{M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} s^{-\alpha\beta}(1+\gamma t)^{\alpha\beta}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-s)^\alpha,$$

e

$$\left\|\int_0^s (g(t-r)-g(s-r))\Delta u(r)\ dr\right\|_\beta \leq \int_0^s |(g(t-r)-g(s-r))|\ \|\Delta S(r)\psi\|_\beta\ dr$$

$$\leq \int_0^s |(g(t-r)-g(s-r))|\ \|S(r)\Delta\psi\|_\beta\ dr$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)} \int_0^s (g(s-r)-g(t-r)) r^{-\alpha\beta}(1+\gamma r)^{\alpha\beta}\ dr$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma s)^{\alpha\beta} \int_0^s \left(\frac{(s-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(s-r)}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(t-r)}}{\Gamma(\alpha)}\right) r^{-\alpha\beta}\ dr$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma s)^{\alpha\beta} \int_0^s \left(\frac{(s-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(s-r)}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(t-s)}e^{-\gamma(s-r)}}{\Gamma(\alpha)}\right) r^{-\alpha\beta}\ dr$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma s)^{\alpha\beta}\int_0^s e^{-\gamma(s-r)}\left(\frac{(s-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(t-s)}}{\Gamma(\alpha)}\right)r^{-\alpha\beta}\,dr$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma s)^{\alpha\beta}\int_0^s \left(\frac{(s-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-r)^{\alpha-1}e^{-\gamma(t-s)}}{\Gamma(\alpha)}\right)r^{-\alpha\beta}\,dr$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma s)^{\alpha\beta}\left(\int_0^s \frac{(s-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}r^{-\alpha\beta}\,dr - e^{-\gamma(t-s)}\int_0^s \frac{(t-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}r^{-\alpha\beta}\,dr\right)$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma s)^{\alpha\beta}\left(s^{\alpha-1}\int_0^s \frac{(1-\frac{r}{s})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}r^{-\alpha\beta}\,dr\right.$$

$$\left.-\,e^{-\gamma(t-s)}t^{\alpha-1}\int_0^s \frac{(1-\frac{r}{t})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}r^{-\alpha\beta}\,dr\right)$$

$$\leq M\|\Delta\psi\|_{L^q(\Omega)}(1+\gamma s)^{\alpha\beta}\left(s^{\alpha-\alpha\beta}\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}r^{-\alpha\beta}\,dr\right.$$

$$\left.-\,e^{-\gamma(t-s)}t^{\alpha-\alpha\beta}\int_0^{\frac{s}{t}} \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}r^{-\alpha\beta}\,dr\right).$$

Fazendo $s \to t^-$, vemos que $||u(t)-u(s)||_\beta \to 0$. Analogamente, mostra-se o caso $s > t$. Isso mostra a continuidade forte de $S(t)$ em escala de Potências Fracionárias associadas ao Operador Laplaciano, para $t > 0$. $\square$

3 Condições locais

3.1 Introdução

Como motivações para o estudo deste Capítulo, podemos citar o artigo de Brezis e Cazenave (61), no qual eles abordam a existência local para o Problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{p-1}u, & \text{em } (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = 0, & \text{em } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $p > 1$ e $u_0 \in L^q(\Omega)$. E também temos os trabalhos de Cuevas e Lizama (4) e de Prüss e colaboradores (5), onde no primeiro eles estudam soluções quase automórficas para equações integrais e o último trabalha com equações não isotérmicas do tipo Cahn- Hilliard, ambos com núcleo fracionário do mesmo tipo que trabalhamos. Além desses, em (3), Cuevas e Lizama estudam soluções $S-$assintoticamente $\omega-$periódicas para equações integrais de Volterra.

3.2 Existência da solução

Consideraremos o Problema (5) com dado inicial $u_0 \in L^q(\Omega)$.

Seja $(-\Delta)_\beta$ a realização de $-\Delta$ em E_q^β. Então,

$$(-\Delta)_\beta : D((-\Delta)_\beta) = E_q^{\beta+1} \subset E_q^\beta \to E_q^\beta$$

é uma isometria de $E_q^{\beta+1}$ em E_q^β (62) e um operador setorial.

Como queremos analisar a existência de solução em $L^q(\Omega)$, denotaremos $X_q^\beta := E_q^{\beta-1}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Observe que os Espaços de Potências Fracionárias associados à

$$(-\Delta)_q := (-\Delta)_{-1} : X_q^1 \subset X_q^0 \to X_q^0$$

satisfazem (63)

$$\begin{aligned} &X_q^\beta \hookrightarrow L^r(\Omega),\ r \leq \frac{nq}{n+2q-2q\beta},\ 1 \leq \beta \leq \frac{2q+n}{2q}, \\ &X_q^1 = L^q(\Omega), \\ &X_q^\beta \hookleftarrow L^r(\Omega),\ r \geq \frac{nq}{n+2q-2q\beta},\ \frac{2q'-n}{2q'} < \beta \leq 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Utilizaremos a seguinte Definição de solução para o Problema (5).

Definição 3.1. Seja $\tau > 0$. Então

i) $u : [0,\tau] \to L^q(\Omega)$ é chamada solução branda do Problema (5) em $[0,\tau]$, se $u \in C([0,\tau]; L^q(\Omega))$ e para todo $t \in [0,\tau]$,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))\ ds + \int_0^t S(t-s)h(s)\ ds,$$

onde $f(u(s)) = |u(s)|^{\rho-1}u(s)$.

ii) $u : [0,\tau) \to L^q(\Omega)$ é chamada solução branda do Problema (5) em $[0,\tau)$, se para qualquer $\tau' \in [0,\tau)$, u for uma solução branda para (5) em $[0,\tau']$.

Observação 3.2. *A não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(u) = |u|^{\rho-1}u$, induz uma aplicação de X^1 em X^β satisfazendo as seguintes desigualdades:*

$$\|f(u) - f(v)\|_{X_q^\beta} \leq c\|u-v\|_{X_q^1}(\|u\|_{X_q^1}^{\rho-1} + \|v\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1)$$

e

$$\|f(u)\|_{X_q^\beta} \leq c(\|u\|_{X_q^1}^{\rho} + 1),$$

para algum $c > 0$, com $\max\{1 - \frac{n}{2q'}, 0\} < \beta < 1$ e $1 < \rho \leq 1 + \frac{2}{n}(q - \beta q)$.

Demonstração. De fato, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u-v|(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1} + 1).$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^r(\Omega)} \leq c\|u-v\|_{L^{\rho r}(\Omega)}(\|u\|_{L^{\rho r}(\Omega)}^{\rho-1} + \|v\|_{L^{\rho r}(\Omega)}^{\rho-1} + 1). \tag{12}$$

Assim, f aplica $L^r(\Omega)$ em $L^{\rho r}(\Omega)$.

Como $\max\{1-\frac{n}{2q'},0\}<\beta<1$, utilizando (11) temos que

$$L^{\frac{nq}{n+2q-2\beta q}}(\Omega)\hookrightarrow X_q^\beta. \tag{13}$$

Além disso, de $1<\rho\leq 1+\frac{2}{n}(q-\beta q)$, concluímos que $\dfrac{\rho nq}{n+2q-2\beta q}\leq q$, logo

$$L^{\frac{\rho nq}{n+2q-2\beta q}}(\Omega)\hookleftarrow L^q(\Omega). \tag{14}$$

Tomando $u,v\in X_q^1=L^q(\Omega)$ e utilizando (12), (13) e (14), obtemos

$$\begin{aligned}
\|f(u)-f(v)\|_{X_q^\beta} &\leq c\|f(u)-f(v)\|_{L^{\frac{nq}{n+2q-2\beta q}}(\Omega)}\\
&\leq c\|u-v\|_{L^{\frac{\rho nq}{n+2q-2\beta q}}(\Omega)}(\|u\|^{\rho-1}_{L^{\frac{\rho nq}{n+2q-2\beta q}}(\Omega)}+\|v\|^{\rho-1}_{L^{\frac{\rho nq}{n+2q-2\beta q}}(\Omega)}+1)\\
&\leq c\|u-v\|_{X_q^1}(\|u\|^{\rho-1}_{X_q^1}+\|v\|^{\rho-1}_{X_q^1}+1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|f(u)\|_{X_q^\beta} &\leq c\|f(u)\|_{L^{\frac{nq}{n+2q-2\beta q}}(\Omega)}\\
&\leq c\|u\|^{\rho}_{L^{\frac{\rho nq}{n+2q-2\beta q}}(\Omega)}\\
&\leq c\|u\|^{\rho}_{X_q^1}\\
&\leq c(\|u\|^{\rho}_{X_q^1}+1).
\end{aligned}$$

□

Agora estamos prontos para demonstrar o resultado principal desta seção.

Teorema 3.3. *Sejam* $\alpha\in(0,1)$, $\max\{1-\frac{n}{2q'},0\}<\beta<1$, $1<\rho\leq 1+\frac{2}{n}(q-\beta q)$, $u_0\in X_q^1$ *e* $h:(0,\infty)\to X_q^1$ *uma função contínua tal que* $\|h(s)\|_{X_q^1}\leq ks^\varphi$, *para algum* $k>0$ *e* $\varphi>-1$. *Então, existe uma constante* $\tau_0>0$ *e uma única solução branda* $u\in C([0,\tau_0];X_q^1)$ *do Problema (5). Além disso, para todo* $0<\theta<\beta$

$$u\in C((0,\tau_0];X_q^{1+\theta})$$

e

$$\|t^{\alpha\theta}u(t)\|_{X_q^{1+\theta}} \to 0, \text{ quando } t \to 0^+.$$

Demonstração. Seja $\mu > 0$ tal que $\|u_0\|_{X_q^1} < \dfrac{\mu}{2}$ e consideremos $\tau_0 > 0$ de tal forma que, para todo $t \in (0, \tau_0]$,

$$\bullet \|S(t)u_0\|_{X_q^1} \leq \frac{\mu}{2},$$

$$\bullet Nk\frac{t^{\varphi+1}}{\varphi+1} < \frac{\mu}{4},$$

$$\bullet M(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}c(R+1)\frac{t^{-\alpha(1-\beta)+1}}{1-\alpha(1-\beta)} < \min\left\{\frac{\mu}{4}, \frac{1}{4}\right\},$$

onde $R = \max\{\mu^\rho, 2\mu^{\rho-1}\}$.

Observe que podemos tomar $\|S(t)u_0\|_{X_q^1} \leq \dfrac{\mu}{2}$, pela continuidade forte de $S(t)$.

Consideremos o conjunto

$$K(\tau_0) = \{u \in C([0,\tau_0]; X_q^1) : \sup_{0\leq s\leq \tau_0} \|u(s)\|_{X_q^1} \leq \mu\}.$$

Definiremos sobre $K(\tau_0)$ o operador

$$Tu(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))\ ds + \int_0^t S(t-s)h(s)\ ds$$

e mostraremos que $K(\tau_0)$ é $T-$invariante.

Sejam $t' \in (0, \tau_0]$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, t']$ com $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t'$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|Tu(t_n) - Tu(t')\|_{X_q^1} &\leq \|(S(t_n) - S(t'))u_0\|_{X_q^1} \\
&+ \int_0^{t_n} \|(S(t_n - s) - S(t' - s))f(u(s))\|_{X_q^1}\ ds \\
&+ \int_{t_n}^{t'} \|S(t' - s)f(u(s))\|_{X_q^1}\ ds \\
&+ \int_0^{t_n} \|(S(t_n - s) - S(t' - s))h(s)\|_{X_q^1}\ ds \\
&+ \int_{t_n}^{t'} \|S(t' - s)h(s)\|_{X_q^1}\ ds \\
&:= J_1(n) + J_2(n) + J_3(n) + J_4(n) + J_5(n).
\end{aligned}$$

Analisaremos cada parcela $J_i(n)$, onde $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

- $J_1(n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em X_q^1.
- $\|(S(t_n - s) - S(t' - s))f(u(s))\|_{X_q^1} \to 0$, quando $n \to \infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em X_q^1. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(S(t_n - s) - S(t' - s)) \quad & f(u(s))\|_{X_q^1} \\
& \leq M(t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta} \\
& + M(t' - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t' - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta} \\
& \leq Mc(t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha(1-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \\
& + Mc(t' - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t' - s))^{\alpha(1-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho + 1),
\end{aligned}$$

cujo último termo da desigualdade anterior é integrável em s sobre o intervalo $(0, t_n)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $J_2(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

- Para $J_3(n)$:

$$\begin{aligned}
J_3(n) \quad &= \int_{t_n}^{t'} \|S(t' - s)f(u(s))\|_{X_q^1} \, ds \\
&\leq M \int_{t_n}^{t'} (t' - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t' - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta} \, ds \\
&\leq Mc(1 + \gamma(t' - t_n))^{\alpha(1-\beta)} \int_{t_n}^{t'} (t' - s)^{-\alpha(1-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \, ds \\
&\leq Mc(1 + \gamma(t' - t_n))^{\alpha(1-\beta)}(\mu^\rho + 1) \int_{t_n}^{t'} (t' - s)^{-\alpha(1-\beta)} \, ds \\
&\leq Mc(1 + \gamma(t' - t_n))^{\alpha(1-\beta)}(\mu^\rho + 1) \left(-\frac{(t' - s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1 - \alpha(1 - \beta)} \right) \Bigg|_{t_n}^{t'} \\
&\leq Mc(1 + \gamma(t' - t_n))^{\alpha(1-\beta)}(\mu^\rho + 1) \frac{(t' - t_n)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1 - \alpha(1 - \beta)} \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

• Observe que

$$\|(S(t_n - s) - S(t' - s))h(s)\|_{X_q^1} \leq 2Nks^{\varphi},$$

a qual é integrável em s sobre $(0, t_n)$. Utilizando o mesmo argumento de $J_2(n)$, temos que $J_4(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $J_5(n)$:

$$\begin{aligned} J_5(n) &= \int_{t_n}^{t'} \|S(t' - s)h(s)\|_{X_q^1}\, ds \\ &\leq N \int_{t_n}^{t'} \|h(s)\|_{X_q^1}\, ds \\ &\leq N \int_{t_n}^{t'} ks^{\varphi}\, ds \\ &\leq Nk \frac{s^{\varphi+1}}{\varphi+1}\Bigg|_{t_n}^{t'} \\ &\leq Nk \left(\frac{(t')^{\varphi+1}}{\varphi+1} - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi+1} \right) \\ &\to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|Tu(t_n) - Tu(t')\|_{X_q^1} = 0.$$

De forma análoga, mostra-se o caso $t' \in [0, \tau_0)$ e $t_n \to (t')^+$. E, consequentemente, $Tu \in C([0, \tau_0]; X_q^1)$.

Suponhamos agora que $u \in K(\tau_0)$ e seja $t \in [0, \tau_0]$. Assim,

$$\|Tu(t)\|_{X_q^1} \leq \|S(t)u_0\|_{X_q^1} + \int_0^t \|S(t-s)f(u(s))\|_{X_q^1}\, ds + \int_0^t \|S(t-s)h(s)\|_{X_q^1}\, ds$$

$$\leq \frac{\mu}{2} + M \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds + Nk \int_0^t s^{\varphi}\, ds$$

$$\leq \frac{\mu}{2} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} (\|u(s)\|_{X_q^1}^{\rho} + 1)\, ds + Nk \frac{s^{\varphi+1}}{\varphi+1}\Bigg|_0^t$$

$$\leq \frac{\mu}{2} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(\mu^{\rho} + 1) \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\, ds + Nk \frac{t^{\varphi+1}}{\varphi+1}$$

$$\leq \frac{\mu}{2} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(\mu^\rho + 1)\left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_0^t + \frac{\mu}{4}$$

$$\leq \frac{\mu}{2} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(\mu^\rho + 1)\frac{t^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} + \frac{\mu}{4}$$

$$\leq \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{4} = \mu.$$

Afirmação: T é uma contração sobre $K(\tau_0)$.

De fato, se $u, v \in K(\tau_0)$, temos que

$$\|Tu(t) - Tv(t)\|_{X_q^1} \leq \left\|\int_0^t S(t-s)(f(u(s)) - f(v(s)))\ ds\right\|_{X_q^1}$$

$$\leq M\int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(u(s)) - f(v(s))\|_{X_q^\beta}\ ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\|u(s)-v(s)\|_{X_q^1}\left(\|u(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1\right)\ ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(2\mu^{\rho-1}+1)\sup_{t\in[0,\tau_0]}\|u(t)-v(t)\|_{X_q^1}\int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(2\mu^{\rho-1}+1)\sup_{t\in[0,\tau_0]}\|u(t)-v(t)\|_{X_q^1}\left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_0^t$$

$$\leq Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(2\mu^{\rho-1}+1)\sup_{t\in[0,\tau_0]}\|u(t)-v(t)\|_{X_q^1}\frac{t^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

$$\leq \frac{1}{4}\sup_{t\in[0,\tau_0]}\|u(t)-v(t)\|_{X_q^1}.$$

Logo, T é uma contração sobre $K(\tau_0)$ e assim, possui um único ponto fixo $u \in K(\tau_0)$.

Para provar a unicidade da solução em $C([0,\tau_0]; X_q^1)$, seja $v \in C([0,\tau_0]; X_q^1)$ outra solução branda do Problema (5). Então, para todo $t \in [0, \tau_0]$,

$$\|u(t) - v(t)\|_{X_q^1} \leq \left\| \int_0^t S(t-s)(f(u(s)) - f(v(s)))\, ds \right\|_{X_q^1}$$

$$\leq M \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(u(s)) - f(v(s))\|_{X_q^\beta}\, ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|u(s) - v(s)\|_{X_q^1} \left(\|u(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1 \right) ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau_0]} (\|u(t)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + \|v(t)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1) \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|u(s) - v(s)\|_{X_q^1} ds$$

$$\leq Mc \sup_{t\in[0,\tau_0]} \left[(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)} (\|u(t)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + \|v(t)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1) \right]$$

$$\times \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|u(s) - v(s)\|_{X_q^1}\, ds.$$

Pelo Lema de Gronwall Singular $\|u(t) - v(t)\|_{X_q^1} = 0$, para todo $t \in [0, \tau_0]$. Logo, temos a unicidade da solução branda em $C([0, \tau_0]; X_q^1)$.

Consideremos agora $0 < \theta < \beta$. Para todo $t \in (0, \tau_0]$,

$$\|u(t)\|_{X_q^{1+\theta}} \leq \|S(t)u_0\|_{X_q^{1+\theta}} + \int_0^t \|S(t-s)f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds + \int_0^t \|S(t-s)h(s)\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds$$

$$\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta} \|u_0\|_{X_q^1} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)} (\|u(s)\|_{X_q^1}^{\rho} + 1)\, ds$$

$$+\ Mk(1+\gamma t)^{\alpha\theta} \int_0^t (t-s)^{-\alpha\theta} s^{\varphi}\, ds$$

$$\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta} \|u_0\|_{X_q^1} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau_0]} (\|u(t)\|_{X_q^1}^{\rho} + 1)$$

$$\times \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}\, ds + \ Mkt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha\theta} s^{\varphi}\, ds$$

$$\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u_0\|_{X_q^1} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau_0]}(\|u(t)\|_{X_q^1}^{\rho}+1)$$

$$\times\left(\frac{-(t-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)+1}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)}\right)\Bigg|_0^t + \ Mkt^{-\alpha\theta+\varphi+1}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\int_0^1 (1-s)^{-\alpha\theta}s^{\varphi}\ ds$$

$$\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u_0\|_{X_q^1} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau_0]}(\|u(t)\|_{X_q^1}^{\rho}+1)\frac{t^{-\alpha(1+\theta-\beta)+1}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)}$$

$$+\ Mkt^{-\alpha\theta+\varphi+1}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}B(1-\alpha\theta,\varphi+1).$$

Logo, $u:(0,\tau_0]\to X_q^{1+\theta}$ está bem definida.

Note, pela estimativa acima, que para $t>0$,

$$\begin{aligned} t^{\alpha\theta}\|u(t)\|_{X_q^{1+\theta}} &\leq t^{\alpha\theta}\|S(t)u_0\|_{X_q^{1+\theta}} + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau_0]}(\|u(t)\|_{X_q^1}^{\rho}+1) \\ &\quad \times\frac{t^{-\alpha(1-\beta)+1}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)} + \ Mkt^{\varphi+1}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}B(1-\alpha\theta,\varphi+1) \\ &\to 0, \end{aligned}$$

quando $t\to 0^+$.

Afirmação: $u\in C((0,\tau_0];X_q^{1+\theta})$.

Seja $t'\in(0,\tau_0]$ e consideremos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,t']$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t'$. Então

$$\begin{aligned} \|u(t_n)-u(t')\|_{X_q^{1+\theta}} &\leq \|(S(t_n)-S(t'))u_0\|_{X_q^{1+\theta}} \\ &\quad + \int_0^{t_n}\|(S(t_n-s)-S(t'-s))f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\ ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t'}\|S(t'-s)f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\ ds \\ &\quad + \int_0^{t_n}\|(S(t_n-s)-S(t'-s))h(s)\|_{X_q^{1+\theta}}\ ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t'}\|S(t'-s)h(s)\|_{X_q^{1+\theta}}\ ds \\ &:= J_1(n)+J_2(n)+J_3(n)+J_4(n)+J_5(n). \end{aligned}$$

Analisaremos cada parcela $J_i(n)$, onde $i=1,2,3,4,5$.

- $J_1(n)\to 0$ quando $n\to\infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $X_q^{1+\theta}$.

• $\|(S(t_n - s) - S(t' - s))f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}} \to 0$ quando $n \to \infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $X_q^{1+\theta}$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
&\|(S(t_n - s) - S(t' - s))f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}} \\
&\leq M(t_n - s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t_n - s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^{\beta}} \\
&+ M(t' - s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t' - s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^{\beta}} \\
&\leq Mc(t_n - s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t_n - s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}(\|u(s)\|^{\rho}_{X_q^1} + 1) \\
&+ Mc(t' - s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t' - s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}(\|u(s)\|^{\rho}_{X_q^1} + 1),
\end{aligned}
$$

cujo último termo da desigualdade anterior é integrável em s sobre o intervalo $(0, t_n)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $J_2(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $J_3(n)$:

$$
\begin{aligned}
J_3(n) &= \int_{t_n}^{t'} \|S(t' - s)f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds \\
&\leq M\int_{t_n}^{t'} (t' - s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t' - s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^{\beta}}\, ds \\
&\leq Mc(1+\gamma(t' - t_n))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\int_{t_n}^{t'} (t' - s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(\|u(s)\|^{\rho}_{X_q^1} + 1)\, ds \\
&\leq Mc(1+\gamma(t' - t_n))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau_0]}(\|u(t)\|^{\rho}_{X_q^1} + 1)\int_{t_n}^{t'} (t' - s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}\, ds \\
&\leq Mc(1+\gamma(t' - t_n))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau_0]}(\|u(t)\|^{\rho}_{X_q^1} + 1)\left(-\frac{(t' - s)^{1-\alpha(1+\theta-\beta)}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)}\right)\Bigg|_{t_n}^{t'} \\
&\leq Mc(1+\gamma(t' - t_n))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau_0]}(\|u(t)\|^{\rho}_{X_q^1} + 1)\frac{(t' - t_n)^{1-\alpha(1+\theta-\beta)}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)} \\
&\to 0,
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$.

• Observe que

$$
\begin{aligned}
\|(S(t_n - s) - S(t' - s))h(s)\|_{X_q^{1+\theta}} &\leq M(t_n - s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t_n - s))^{\alpha\theta}\|h(s)\|_{X_q^1} \\
&+ M(t' - s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t' - s))^{\alpha\theta}\|h(s)\|_{X_q^1}
\end{aligned}
$$

$$\leq Mk(t_n - s)^{-\alpha\theta}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha\theta} s^{\varphi}$$

$$+ Mk(t' - s)^{-\alpha\theta}(1 + \gamma(t' - s))^{\alpha\theta} s^{\varphi},$$

a qual é integrável em s sobre $(0, t_n)$. Utilizando o mesmo argumento de $J_2(n)$, temos que $J_4(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $J_5(n)$:

$$\begin{aligned}
J_5(n) &= \int_{t_n}^{t'} \|S(t'-s)h(s)\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds \\
&\leq M \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t'-s))^{\alpha\theta}\|h(s)\|_{X_q^1} \\
&\leq Mk(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha\theta} \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha\theta} s^{\varphi}\, ds \\
&\leq Mk(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha\theta} (t')^{-\alpha\theta} \int_{t_n}^{t'} \left(1 - \frac{s}{t'}\right)^{-\alpha\theta} s^{\varphi}\, ds \\
&\leq Mk(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha\theta} (t')^{-\alpha\theta+\varphi+1} \int_{\frac{t_n}{t'}}^{1} (1-s)^{-\alpha\theta} s^{\varphi}\, ds \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|u(t_n) - u(t')\|_{X_q^{1+\theta}} = 0.$$

De forma análoga, mostra-se o caso $t' \in (0, \tau_0)$ e $t_n \to (t')^+$. E, consequentemente, $u \in C((0, \tau_0]; X_q^{1+\theta})$.

□

3.2.1 Continuação da Solução

O próximo passo é mostrar que a solução branda do Problema (5) tem uma única continuação para um intervalo maior de existência.

Definição 3.4. Sejam $u : [0, \tau] \to X_q^1$ uma solução branda do Problema (5) e $T > 0$. Dizemos que $v : [0, \tau + T] \to X_q^1$ é uma continuação de u em $[0, \tau + T]$, se v é outra solução branda do Problema (5).

Teorema 3.5. *Sob as mesmas condições do Teorema (3.3), sejam* $\tau_0 > 0$ *e* $u : [0, \tau_0] \to X_q^1$ *a solução branda do Problema (5). Então, existe* $T > 0$ *e uma única continuação* u^* *de* u *em* $[0, \tau_0 + T]$.

Demonstração. Para $\mu > 0$ fixado, consideremos $T > 0$ tal que para todo $t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$,

$$\bullet \|S(t)u_0 - S(\tau_0)u_0\|_{X_q^1} \leq \frac{\mu}{5},$$

$$\bullet \left\| \int_0^{\tau_0} (S(t-s) - S(\tau_0 - s))f(u(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \leq \frac{\mu}{5},$$

$$\bullet \left\| \int_0^{\tau_0} (S(t-s) - S(\tau_0 - s))h(s)\ ds \right\|_{X_q^1} \leq \frac{\mu}{5},$$

$$\bullet M(1 + \gamma(t - \tau_0))^{\alpha(1-\beta)} \tfrac{(t-\tau_0)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \Big[c\mu((\mu + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1} + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1)$$

$$+ \|f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta} \Big] \leq \frac{\mu}{5},$$

$$\bullet Nk \left(\frac{t^{\varphi+1} - \tau_0^{\varphi+1}}{\varphi + 1} \right) \leq \frac{\mu}{5}.$$

Seja K o conjunto de todas as funções $w \in C([0, \tau_0 + T]; X_q^1)$ tais que $w(t) = u(t)$ para todo $t \in [0, \tau_0]$ e

$$\|w(t) - u(\tau_0)\|_{X_q^1} \leq \mu, \text{ para todo } t \in [\tau_0, \tau_0 + T].$$

Defina o operador Λ sobre K por

$$\Lambda w(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(w(s))\ ds + \int_0^t S(t-s)h(s)\ ds.$$

Afirmação: Λ está bem definido.

De fato, se $w \in K$, então para todo $t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$,

$$\|\Lambda w(t) - u(\tau_0)\|_{X_q^1} \leq \|S(t)u_0 - S(\tau_0)u_0\|_{X_q^1} + \left\| \int_0^{\tau_0} (S(t-s) - S(\tau_0 - s))f(w(s))\ ds \right\|_{X_q^1}$$

$$+ \left\| \int_0^{\tau_0} (S(t-s) - S(\tau_0 - s))h(s)\ ds \right\|_{X_q^1} + \left\| \int_{\tau_0}^t S(t-s)f(w(s))\ ds \right\|_{X_q^1}$$

$$+ \left\| \int_{\tau_0}^t S(t-s)h(s)\ ds \right\|_{X_q^1}$$

$$\leq \frac{\mu}{5} + \frac{\mu}{5} + \frac{\mu}{5} + M \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(w(s))\|_{X_q^\beta}\ ds + Nk \int_{\tau_0}^t s^\varphi\ ds$$

$$\leq \frac{3\mu}{5} + M(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)} \left[\int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|f(w(s)) - f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta}\ ds \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta}\ ds \right] + Nk \frac{s^{\varphi+1}}{\varphi+1} \bigg|_{\tau_0}^t$$

$$\leq \frac{3\mu}{5} + M(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)} \left[\int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|f(w(s)) - f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta}\ ds \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta}\ ds \right] + Nk \frac{(t^{\varphi+1} - \tau_0^{\varphi+1})}{\varphi+1}$$

$$\leq \frac{3\mu}{5} + M(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)} \left[c \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|w(s) - u(\tau_0)\|_{X_q^1} (\|w(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} \right.$$

$$\left. + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1)\ ds + \|f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta} \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds \right] + \frac{\mu}{5}$$

$$\leq \frac{4\mu}{5} + M(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)} \left[c\mu \int_{\tau_0}^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \Bigg((\|w(s) - u(\tau_0)\|_{X_q^1} \right.$$

$$\left. + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1} + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1 \Bigg)\ ds + \|f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta} \left(\frac{-(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \right) \bigg|_{\tau_0}^t \right]$$

$$\leq \frac{4\mu}{5} + M(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)} \left[c\mu \Bigg((\mu + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1} + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1 \Bigg) \right.$$

$$\times \int_{\tau_0}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds + \|f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta} \frac{(t-\tau_0)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\Bigg]$$

$$\leq \frac{4\mu}{5} + M(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)} \Bigg[c\mu \Bigg((\mu + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1} + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1 \Bigg)$$

$$\times \left(\frac{-(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \right) \Bigg|_{\tau_0}^{t} + \|f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta} \frac{(t-\tau_0)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\Bigg]$$

$$\leq \frac{4\mu}{5} + M(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)} \Bigg[c\mu \Bigg((\mu + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1} + \|u(\tau_0)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1 \Bigg)$$

$$\times \frac{(t-\tau_0)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} + \|f(u(\tau_0))\|_{X_q^\beta} \frac{(t-\tau_0)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\Bigg]$$

$$\leq \frac{4\mu}{5} + \frac{\mu}{5} = \mu.$$

Afirmação: $\Lambda w \in C([0, \tau_0 + T]; X_q^1)$.

Seja $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + T)$ e consideremos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\tau, \tau_0 + T]$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \tau$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\Lambda w(t_n) - \Lambda w(\tau)\|_{X_q^1} &\leq \|S(t_n)u_0 - S(\tau)u_0\|_{X_1} \\
&+ \left\| \int_0^{\tau} (S(t_n-s) - S(\tau-s)) f(w(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&+ \left\| \int_0^{\tau} (S(t_n-s) - S(\tau-s)) h(s)\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&+ \left\| \int_{\tau}^{t_n} S(t_n-s) f(w(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&+ \left\| \int_{\tau}^{t_n} S(t_n-s) h(s)\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&:= J_1(n) + J_2(n) + J_3(n) + J_4(n) + J_5(n).
\end{aligned}$$

Analisaremos cada parcela $J_i(n)$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

- $J_1(n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pois $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua sobre X_q^1.
- Para $J_2(n)$, observe que

$$
\begin{aligned}
\|(S(t_n - s) - & S(\tau - s))f(w(s))\|_{X_q^1} \\
& \leq M(t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(w(s))\|_{X_q^\beta} \\
& + M(\tau - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(\tau - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(w(s))\|_{X_q^\beta} \\
& \leq Mc(t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha(1-\beta)}(\|w(s)\|^\rho_{X_q^1} + 1) \\
& + Mc(\tau - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(\tau - s))^{\alpha(1-\beta)}(\|w(s)\|^\rho_{X_q^1} + 1) \\
& \leq Mc(t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha(1-\beta)} \sup_{s\in[0,\tau]}(\|w(s)\|^\rho_{X_q^1} + 1) \\
& + Mc(\tau - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(\tau - s))^{\alpha(1-\beta)} \sup_{s\in[0,\tau]}(\|w(s)\|^\rho_{X_q^1} + 1).
\end{aligned}
$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada e pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X_q^1, temos que $J_2(n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

- Para $J_3(n)$, note que

$$\|(S(t_n - s) - S(\tau - s))h(s)\|_{X_q^1} \leq 2Nks^\varphi.$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada e pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X_q^1, temos que $J_3(n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

- Para $J_4(n)$

$$
\begin{aligned}
J_4(n) & \leq M \int_\tau^{t_n} (t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(w(s))\|_{X_q^\beta}\, ds \\
& \leq Mc(1 + \gamma(t_n - \tau))^{\alpha(1-\beta)} \int_\tau^{t_n} (t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(\|w(s)\|^\rho_{X_q^1} + 1)\, ds
\end{aligned}
$$

$$\leq Mc(1+\gamma(t_n-\tau))^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau_0+T]} (\|w(t)\|^{\rho}_{X^1_q}+1)\int_{\tau}^{t_n}(t_n-s)^{-\alpha(1-\beta)}\, ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma(t_n-\tau))^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau_0+T]} (\|w(t)\|^{\rho}_{X^1_q}+1)\left(\frac{-(t_n-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_{\tau}^{t_n}$$

$$\leq Mc(1+\gamma(t_n-\tau))^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau_0+T]} (\|w(t)\|^{\rho}_{X^1_q}+1)\frac{(t_n-\tau)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

$$\to 0,$$

quando $n\to\infty$.

- Para $J_5(n)$,

$$\begin{aligned} J_5(n) &\leq Nk\int_{\tau}^{t_n} s^{\varphi}\, ds \\ &\leq Nk\frac{s^{\varphi+1}}{\varphi+1}\Bigg|_{\tau}^{t_n} \\ &\leq Nk\frac{(t_n^{\varphi+1}-\tau_n^{\varphi+1})}{\varphi+1} \\ &\to 0, \end{aligned}$$

quando $n\to\infty$.

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Lambda w(t_n)-\Lambda w(\tau)\|_{X^1_q}=0$.

De modo similar, mostra-se o caso $\tau\in(\tau_0,\tau_0+T]$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset[\tau_0,\tau]$. E, consequentemente, $\Lambda w\in K$, se $w\in K$.

Em seguida, mostraremos que Λ é uma contração.

Se $v,w\in K$, então

$$\|\Lambda v(t)-\Lambda w(t)\|_{X^1_q}=0,\ \text{quando } t\in[0,\tau_0]$$

e

$$\|\Lambda v(t)-\Lambda w(t)\|_{X^1_q}\leq\int_{\tau_0}^{t}\|S(t-s)(f(v(s))-f(w(s)))\|_{X^1_q}\, ds$$

$$\leq M\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(v(s))-f(w(s))\|_{X^{\beta}_q}\, ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)}\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\|v(s)-w(s)\|_{X_q^1}$$

$$\times\Big(\|v(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1}+\|w(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1}+1\Big)\ ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau_0+T]}\|v(t)-w(t)\|_{X_q^1}\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\alpha(1-\beta)}$$

$$\times\Big((\|v(s)-u(\tau_0)\|_{X_q^1}+\|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1}+(\|w(s)-u(\tau_0)\|_{X_q^1}+\|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1}+1\Big)\ ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau_0+T]}\|v(t)-w(t)\|_{X_q^1}[2(\mu+\|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1}+1]$$

$$\times\int_{\tau_0}^{t}(t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau_0+T]}\|v(t)-w(t)\|_{X_q^1}[2(\mu+\|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1}+1]$$

$$\times\left(\frac{-(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_{\tau_0}^{t}$$

$$\leq Mc(1+\gamma(t-\tau_0))^{\alpha(1-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau_0+T]}\|v(t)-w(t)\|_{X_q^1}[2(\mu+\|u(\tau_0)\|_{X_q^1})^{\rho-1}+1]$$

$$\times\frac{(t-\tau_0)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

$$\leq\frac{2}{5}\sup_{t\in[0,\tau_0+T]}\|v(t)-w(t)\|_{X_q^1}.$$

Dessa forma, Λ é uma contração sobre K e, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, Λ tem um único ponto fixo sobre K, o qual é uma continuação da solução branda em $[0,\tau_0+T]$.

Para mostrar a unicidade, suponha que $v,\ w\in C([0,\tau_0+T];X_q^1)$ são continuações da solução em $[0,\tau_0+T]$. Note que $w(t)=v(t)$, para todo $t\in[0,\tau_0]$.

Se $t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$, temos

$$\|w(t) - v(t)\|_{X_q^1} \leq \int_0^t \|S(t-s)(f(w(s)) - f(v(s)))\|_{X_q^1}\, ds$$

$$\leq M \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(w(s)) - f(v(s))\|_{X_q^\beta}\, ds$$

$$\leq Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\|w(s) - v(s)\|_{X_q^1} \left(\|w(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1\right)\, ds$$

$$\leq Mc \sup_{t\in[\tau_0,\tau_0+T]} (1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(\|w(t)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + \|v(t)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1)$$

$$\times \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\|w(s) - v(s)\|_{X_q^1}\, ds.$$

Assim, pelo Lema de Gronwall Singular, temos que $\|w(t) - v(t)\|_{X_q^1} = 0$, para todo $t \in [\tau_0, \tau_0 + T]$. □

3.2.2 Alternativa de Blow-up

O resultado a seguir diz respeito à existência global ou explosão da solução branda em tempo finito.

Teorema 3.6. *Sejam as mesmas condições do Teorema (3.3). Se u é a solução branda do Problema (5) com um tempo maximal $\tau_{max} < +\infty$, então*

$$\lim_{t\to\tau_{max}^-} \sup \|u(t)\|_{X_q^1} = \infty.$$

Demonstração. Suponhamos que existe $R > 0$ tal que $\|u(t)\|_{X_q^1} \leq R$, para todo $t \in [0, \tau_{max})$. Consideremos $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $t_j \to \tau_{max}^-$ quando $j \to \infty$. Dado $\epsilon > 0$ tome $N \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n, m \geq N$,

$$\bullet \|S(t_n)u_0 - S(t_m)u_0\|_{X_q^1} \leq \frac{\epsilon}{5},$$

$$\bullet \left\|\int_0^{t_n} (S(t_n - s) - S(\tau_{max} - s))f(u(s))\, ds\right\|_{X_q^1} \leq \frac{\epsilon}{10},$$

$$\bullet \left\| \int_0^{t_n} (S(\tau_{max} - s) - S(t_m - s)) f(u(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \leq \frac{\epsilon}{10},$$

$$\bullet \left\| \int_0^{t_n} (S(t_n - s) - S(\tau_{max} - s)) h(s)\ ds \right\|_{X_q^1} \leq \frac{\epsilon}{10},$$

$$\bullet \left\| \int_0^{t_n} (S(\tau_{max} - s) - S(t_m - s)) h(s)\ ds \right\|_{X_q^1} \leq \frac{\epsilon}{10},$$

$$\bullet Nk \frac{(t_m^{\varphi+1} - t_n^{\varphi+1})}{\varphi + 1} \leq \frac{\epsilon}{5},$$

$$\bullet Mc(1 + \gamma(t_m - t_n))^{\alpha(1-\beta)}(R^\rho + 1)\frac{(t_m - t_n)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1 - \alpha(1-\beta)} \leq \frac{\epsilon}{5}.$$

Supomos, sem perda de generalidade, $t_n < t_m$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|u(t_n) - u(t_m)\|_{X_q^1} &\leq \|S(t_n)u_0 - S(t_m)u_0\|_{X_q^1} \\
&+ \left\| \int_0^{t_n} (S(t_n - s) - S(t_m - s)) f(u(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&+ \left\| \int_0^{t_n} (S(t_n - s) - S(t_m - s)) h(s)\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&+ \left\| \int_{t_n}^{t_m} S(t_m - s) f(u(s))\ ds \right\|_{X_q^1} + \left\| \int_{t_n}^{t_m} S(t_m - s) f(u(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&\leq \frac{\epsilon}{5} + \left\| \int_0^{t_n} (S(t_n - s) - S(\tau_{max} - s)) f(u(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&\quad + \left\| \int_0^{t_n} (S(\tau_{max} - s) - S(t_m - s)) f(u(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&\quad + \left\| \int_0^{t_n} (S(t_n - s) - S(\tau_{max} - s)) h(s)\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&\quad + \left\| \int_0^{t_n} (S(\tau_{max} - s) - S(t_m - s)) h(s)\ ds \right\|_{X_q^1}
\end{aligned}$$

$$+ M \int_{t_n}^{t_m} (t_m - s)^{-\alpha(1-\beta)} (1 + \gamma(t_m - s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(u(s))\|_{X_q^\beta} \, ds + Nk \int_{t_n}^{t_m} s^\varphi \, ds$$

$$\leq \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{10} + \frac{\epsilon}{10} + \frac{\epsilon}{10} + \frac{\epsilon}{10}$$

$$+ Mc(1 + \gamma(t_m - t_n))^{\alpha(1-\beta)} \int_{t_n}^{t_m} (t_m - s)^{-\alpha(1-\beta)} (\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \, ds + Nk \frac{s^{\varphi+1}}{\varphi + 1}\Bigg|_{t_n}^{t_m}$$

$$\leq \frac{6\epsilon}{10} + Mc(1 + \gamma(t_m - t_n))^{\alpha(1-\beta)} (\|R\|_{X_q^1}^\rho + 1) \int_{t_n}^{t_m} (t_m - s)^{-\alpha(1-\beta)} \, ds$$

$$+ Nk \frac{(t_m^{\varphi+1} - t_n^{\varphi+1})}{\varphi + 1}$$

$$\leq \frac{6\epsilon}{10} + \frac{\epsilon}{5} + Mc(1 + \gamma(t_m - t_n))^{\alpha(1-\beta)} (\|R\|_{X_q^1}^\rho + 1) \left(\frac{-(t_m - s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1 - \alpha(1 - \beta)} \right) \Bigg|_{t_n}^{t_m}$$

$$\leq \frac{8\epsilon}{10} + Mc(1 + \gamma(t_m - t_n))^{\alpha(1-\beta)} (\|R\|_{X_q^1}^\rho + 1) \frac{(t_m - t_n)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1 - \alpha(1 - \beta)}$$

$$\leq \frac{8\epsilon}{10} + \frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

Portanto, $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset X_q^1$ é uma sequência de Cauchy e assim, existe $\tilde{u} \in X_q^1$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} u(t_n) = \tilde{u}$. Logo, podemos estender u sobre $[0, \tau_{max}]$, obtendo a equação

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t - s) f(u(s)) \, ds + \int_0^t S(t - s) h(s) \, ds,$$

para todo $t \in [0, \tau_{max}]$. Mas, pelo Teorema (3.5), podemos estender a solução para um intervalo maior e isto gera uma contradição. $\square$

Assim, pelos Teoremas (3.3), (3.5) e (3.6), podemos concluir o próximo resultado.

Corolário 3.7. *Sejam as mesmas condições do Teorema (3.3). Então, existe uma constante $\tau_{max} > 0$ e uma única solução branda $u \in C([0, \tau_{max}); X_q^1)$ da equação (6). Se $\tau_{max} < +\infty$, então*

$$\lim_{t \to \tau_{max}^-} \sup \|u(t)\|_{X_q^1} = \infty.$$

Além disso, $u \in C((0,\tau]; X_q^{1+\theta})$*, para todo* $0 < \theta < \beta$ *e todo* $\tau < \tau_{max}$*. E por fim,*

$$t^{\alpha\theta}\|u(t)\|_{X_q^{1+\theta}} \to 0, \text{ quando } t \to 0,$$

para todo $0 < \theta < \beta$*.*

4 Condições não locais

4.1 Introdução

O estudo de equações de evolução com condições iniciais não locais iniciou-se nos anos 80 com aplicações em elasticidade e viscoelasticidade em materiais com memória. O que se faz quando se trabalha com condições deste tipo é incorporar mais informações, pois as condições iniciais são trocadas por condições dependentes do estado. Sendo assim, mais precisa para medidas físicas do que as condições clássicas. Para maiores detalhes, recomendamos (64).

4.1.1 Uma família de equações de Volterra com condições não locais

Inspirados em (18), estudaremos o mesmo Problema do Capítulo 2, porém trocando a condição inicial local por uma condição não local:

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_0^t dg(s)\Delta u(t-s,x) + |u|^{\rho-1}u + h(t), & \text{em } (0,\infty)\times\Omega \\ u(t,x) = 0, & \text{em } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i(x)u(T_i,x), & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{15}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $T_i \in (0,\infty)$, são números reais fixados, $\beta_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,\tilde{k}$, são funções contínuas e h satisfazendo condições definidas posteriormente.

Note que o Problema (15) pode ser visto como a seguinte equação integral

$$u(t) = j(u) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\, ds + \int_0^t f(u(s))\, ds + \int_0^t h(s)\, ds,\ t \geq 0, \tag{16}$$

onde Δ é o Operador Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet em Ω, $f(u(s)) = |u(s)|^{\rho-1}u(s)$ e $j(u) = u_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i(x)u(T_i)$.

De forma análoga ao que foi feito no Capítulo 2, definimos solução branda para o Problema (15).

Definição 4.1. Seja $\tau > 0$. Uma função $u : [0,\tau] \to X_q^1$ é chamada solução branda local para o Problema (15) em $[0,\tau]$, se $u \in C([0,\tau];X_q^1)$ e para todo $t \in [0,\tau]$,

$$u(t) = S(t)u_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t)u(T_i) + \int_0^t S(t-s)f(u(s))\ ds + \int_0^t S(t-s)h(s)\ ds.$$

Teorema 4.2. *Sejam $\alpha \in (0,1)$, $\tau \in (0,\infty)$, tal que $T_i \leq \tau < \infty$, $i = 1,\dots,\tilde{k}$, $u_0 \in X_q^1$, $h : (0,\infty) \to X_q^1$ uma função contínua tal que $\|h(s)\|_{X_q^1} \leq ks^{\varphi}$, para algum $k > 0$, $\varphi > -1$ e $\beta_i : \Omega \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Se $c > 0$ e $\|\beta_i\|_\infty$ são suficientemente pequenos, então o Problema (15), tem no mínimo uma solução branda $u \in C([0,\tau];X_q^1)$. Se u é uma solução branda, então para todo $t > 0$ e $0 < \theta < \beta$,*

$$u \in C((0,\tau];X_q^{1+\theta})$$

e

$$\|t^{\alpha\theta}u(t)\|_{X_q^{1+\theta}} \to 0, \ \text{quando } t \to 0^+.$$

Além disso, se $n \geq q$, então o conjunto

$$\{u(t) : 0 < t \leq \tau\} \subset X_q^1$$

é compacto.

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que

$$\|u_0\|_{X_q^1} < \frac{r}{4N}.$$

Consideremos B_r o espaço

$$B_r = \{v \in C([0,\tau];X_q^1) / \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|v(s)\|_{X_q^1} \leq r\}.$$

Definiremos sobre B_r o operador

$$Tu(t) = S(t)j(u) + \int_0^t S(t-s)f(u(s))\ ds + \int_0^t S(t-s)h(s)\ ds,$$

onde $j(u) = u_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i u(T_i)$.

Mostraremos que B_r é $T-$invariante. Para isto, sejam $t' \in (0,\tau]$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,t']$, com $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t'$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|Tu(t_n) - Tu(t')\|_{X_q^1} &\leq \|(S(t_n) - S(t'))j(u)\|_{X_q^1} \\
&+ \int_0^{t_n} \|(S(t_n - s) - S(t' - s))f(u(s))\|_{X_q^1}\, ds \\
&+ \int_{t_n}^{t'} \|S(t' - s)f(u(s))\|_{X_q^1}\, ds \\
&+ \int_0^{t_n} \|(S(t_n - s) - S(t' - s))h(s)\|_{X_q^1}\, ds \\
&+ \int_{t_n}^{t'} \|S(t' - s)h(s)\|_{X_q^1}\, ds \\
&:= J_1(n) + J_2(n) + J_3(n) + J_4(n) + J_5(n).
\end{aligned}$$

Analisaremos cada parcela $J_i(n)$, onde $i = 1,2,3,4,5$.

- $J_1(n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em X_q^1.
- $\|(S(t_n - s) - S(t' - s))f(u(s))\|_{X_q^1} \to 0$, quando $n \to \infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em X_q^1. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(S(t_n - s) - S(t' - s)) \quad & f(u(s))\|_{X_q^1} \\
&\leq M(t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta} \\
&+ M(t' - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t' - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta} \\
&\leq Mc(t_n - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t_n - s))^{\alpha(1-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \\
&+ Mc(t' - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t' - s))^{\alpha(1-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho + 1),
\end{aligned}$$

cujo último termo da desigualdade anterior é integrável em s sobre o intervalo $(0, t_n)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $J_2(n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

- Para $J_3(n)$:

$$\begin{aligned}
J_3(n) &= \int_{t_n}^{t'} \|S(t' - s)f(u(s))\|_{X_q^1}\, ds \\
&\leq M \int_{t_n}^{t'} (t' - s)^{-\alpha(1-\beta)}(1 + \gamma(t' - s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Mc(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha(1-\beta)} \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha(1-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^{\rho}+1)\ ds \\
&\leq Mc(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha(1-\beta)}(r^{\rho}+1) \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds \\
&\leq Mc(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha(1-\beta)}(r^{\rho}+1) \left(-\frac{(t'-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_{t_n}^{t'} \\
&\leq Mc(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha(1-\beta)}(r^{\rho}+1) \frac{(t'-t_n)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \\
&\to 0,
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$.

• Observe que

$$
\|(S(t_n-s)-S(t'-s))h(s)\|_{X_q^1} \quad \leq 2Nks^{\varphi},
$$

a qual é integrável em s sobre $(0, t_n)$. Utilizando o mesmo argumento de $J_2(n)$, temos que $J_4(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $J_5(n)$:

$$
\begin{aligned}
J_5(n) \quad &= \int_{t_n}^{t'} \|S(t'-s)h(s)\|_{X_q^1}\ ds \\
&\leq N \int_{t_n}^{t'} \|h(s)\|_{X_q^1}\ ds \\
&\leq N \int_{t_n}^{t'} ks^{\varphi}\ ds \\
&\leq Nk\frac{s^{\varphi+1}}{\varphi+1}\Bigg|_{t_n}^{t'} \\
&\leq Nk\left(\frac{(t')^{\varphi+1}}{\varphi+1} - \frac{t_n^{\varphi+1}}{\varphi+1}\right) \\
&\to 0,
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$.

Portanto,

$$
\lim_{n\to\infty} \|Tu(t_n) - Tu(t')\|_{X_q^1} = 0.
$$

De forma análoga, mostra-se o caso $t' \in [0,\tau)$ e $t_n \to (t')^+$. E, consequentemente, $Tu \in C([0,\tau]; X_q^1)$.

Suponhamos agora que $u \in B_r$ e seja $t \in [0,\tau]$. Assim,

$$\|Tu(t)\|_{X_q^1} \leq \|S(t)j(u)\|_{X_q^1} + \int_0^t \|S(t-s)f(u(s))\|_{X_q^1}\, ds + \int_0^t \|S(t-s)h(s)\|_{X_q^1}\, ds$$

$$\leq \|S(t)u_0\|_{X_q^1} + \left\| \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t) u(T_i) \right\|_{X_q^1}$$

$$+ M \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds + Nk \int_0^t s^{\varphi}\, ds$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \|u(T_i)\|_{X_q^1}$$

$$+ Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^{\rho} + 1)\, ds + Nk \left.\frac{s^{\varphi+1}}{\varphi+1}\right|_0^t$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + Nr \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(r^\rho + 1) \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\, ds + Nk \frac{t^{\varphi+1}}{\varphi+1}$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + Nr \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(r^\rho + 1) \left.\left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \right)\right|_0^t$$

$$+ Nk \frac{t^{\varphi+1}}{\varphi+1}$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + Nr \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(r^\rho + 1) \frac{t^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} + Nk \frac{t^{\varphi+1}}{\varphi+1}$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + Nr \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty + Mc(1+\gamma \tau)^{\alpha(1-\beta)}(r^\rho + 1) \frac{\tau^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} + Nk \frac{\tau^{\varphi+1}}{\varphi+1}$$

$$\leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = r,$$

se

$$\bullet \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty < \frac{1}{4N},$$

$$\bullet\ 0 < c < \frac{1-\alpha(1-\beta)}{4M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)}\tau^{1-\alpha(1-\beta)}} \cdot \frac{r}{(r^\rho+1)},$$

$$\bullet\ Nk\frac{\tau^{\varphi+1}}{\varphi+1} < \frac{r}{4}.$$

Logo, $T(B_r) \subset B_r$.

Afirmação: Se $c > 0$ é suficientemente pequeno, o operador T é uma contração sobre B_r.

De fato, se $u, v \in B_r$, temos que

$$\|Tu(t) - Tv(t)\|_{X_q^1} \leq \left\| \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t)(u(T_i) - v(T_i)) \right\|_{X_q^1}$$

$$+ \int_0^t \|S(t-s)(f(u(s)) - f(v(s)))\|_{X_q^1}\, ds$$

$$\leq N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - v(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ M \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(u(s)) - f(v(s))\|_{X_q^\beta}\, ds$$

$$\leq N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - v(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|u(s) - v(s)\|_{X_q^1} \left(\|u(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + \|v(s)\|_{X_q^1}^{\rho-1} + 1 \right) ds$$

$$\leq N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - v(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(2r^{\rho-1}+1) \sup_{t\in[0,\tau_0]} \|u(t) - v(t)\|_{X_q^1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\, ds$$

$$\leq N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - v(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ \ Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(2r^{\rho-1}+1) \sup_{t\in[0,\tau_0]} \|u(t)-v(t)\|_{X_q^1} \left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \right) \Bigg|_0^t$$

$$\leq N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - v(t)\|_{X_q^1} + \ Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)}(2\mu^{\rho-1}+1)$$

$$\times \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)-v(t)\|_{X_q^1} \frac{t^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

$$\leq \left[N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty + Mc(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)}(2r^{\rho-1}+1) \frac{\tau^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \right] \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)-v(t)\|_{X_q^1}$$

$$\leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)-v(t)\|_{X_q^1}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)-v(t)\|_{X_q^1},$$

desde que

$$0 < c < \frac{1-\alpha(1-\beta)}{4M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)}\tau^{1-\alpha(1-\beta)}} \cdot \frac{1}{(2r^{\rho-1}+1)}.$$

Logo, T é uma $\frac{1}{2}-$contração.

Portanto, se considerarmos β_i como anteriormente e

$$0 < c < \frac{1-\alpha(1-\beta)}{4M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)}\tau^{1-\alpha(1-\beta)}} L(r),$$

onde

$$L(r) = \min\left\{ \frac{r}{r^\rho + 1}, \ \frac{1}{2^{\rho-1}+1} \right\},$$

segue, pelo Teorema do Ponto fixo de Banach, que T tem um ponto fixo u em B_r, o qual é uma solução branda para o Problema (15).

Consideremos agora $u \in C([0,\tau]; X_q^1)$ uma solução branda do Problema (15) e

$0 < \theta < \beta$. Para todo $t \in (0, \tau]$,

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{X_q^{1+\theta}} &\leq \|S(t)u_0\|_{X_q^{1+\theta}} + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \|S(t)u(T_i)\|_{X_q^{1+\theta}} \\
&\quad + \int_0^t \|S(t-s)f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds \\
&\quad + \int_0^t \|S(t-s)h(s)\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds \\
&\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u_0\|_{X_q^1} + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty M t^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u(T_i)\|_{X_q^1} \\
&\quad + M\int_0^t (t-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds \\
&\quad + M\int_0^t (t-s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t-s))^{\alpha\theta}\|h(s)\|_{X_q^1}\, ds \\
&\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u_0\|_{X_q^1} + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty M t^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u(T_i)\|_{X_q^1} \\
&\quad + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho + 1)\, ds \\
&\quad + Mk(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\int_0^t (t-s)^{-\alpha\theta}s^\varphi\, ds \\
&\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u_0\|_{X_q^1} + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty M t^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u(T_i)\|_{X_q^1} \\
&\quad + Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)}\sup_{t\in[0,\tau]}(\|u(t)\|_{X_q^1}^\rho + 1)\int_0^t (t-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}\, ds \\
&\quad + Mkt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\int_0^t \left(1-\frac{s}{t}\right)^{-\alpha\theta}s^\varphi\, ds
\end{aligned}
$$

$$\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u_0\|_{X_q^1} + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u(T_i)\|_{X_q^1}$$

$$+ Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \left(\frac{-(t-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)+1}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)} \right) \Bigg|_0^t$$

$$+ Mkt^{-\alpha\theta+\varphi+1}(1+\gamma t)^{\alpha\theta} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha\theta} s^\varphi \, ds$$

$$\leq Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u_0\|_{X_q^1} + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty Mt^{-\alpha\theta}(1+\gamma t)^{\alpha\theta}\|u(T_i)\|_{X_q^1}$$

$$+ Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \frac{t^{-\alpha(1+\theta-\beta)+1}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)}$$

$$+ Mkt^{-\alpha\theta+\varphi+1}(1+\gamma t)^{\alpha\theta} B(1-\alpha\theta, \varphi+1).$$

Logo, $u : (0,\tau] \to X_q^{1+\theta}$ está bem definida. Note que, pela estimativa acima, para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
t^{\alpha\theta}\|u(t)\|_{X_q^{1+\theta}} &\leq t^{\alpha\theta}\|S(t)u_0\|_{X_q^{1+\theta}} + t^{\alpha\theta}\sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \|S(t)u(T_i)\|_{X_q^{1+\theta}} \\
&+ Mc(1+\gamma t)^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \frac{t^{-\alpha(1+\theta-\beta)+1}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)} \\
&+ Mkt^{\varphi+1}(1+\gamma t)^{\alpha\theta} B(1-\alpha\theta, \varphi+1) \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

quando $t \to 0^+$.

Afirmação: $u \in C((0,\tau]; X_q^{1+\theta})$.

Seja $t' \in (0,\tau]$ e consideremos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,t']$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t'$. Então

$$\|u(t_n) - u(t')\|_{X_q^{1+\theta}} \leq \|(S(t_n) - S(t'))u_0\|_{X_q^{1+\theta}} + \left\| \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i (S(t_n) - S(t'))u(T_i) \right\|_{X_q^{1+\theta}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^{t_n} \|(S(t_n-s)-S(t'-s))f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds\\
&+\int_{t_n}^{t'} \|S(t'-s)f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds\\
&+\int_0^{t_n} \|(S(t_n-s)-S(t'-s))h(s)\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds\\
&+\int_{t_n}^{t'} \|S(t'-s)h(s)\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds\\
&:= J_1(n)+J_2(n)+J_3(n)+J_4(n)+J_5(n)+J_6(n).
\end{aligned}
$$

Analisaremos cada parcela $J_i(n)$, onde $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

• $J_1(n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $X_q^{1+\theta}$.

• $J_2(n) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \|(S(t_n)-S(t'))u(T_i)\|_{X_q^{1+\theta}}$.

Logo, $J_2(n) \to 0$ quando $n \to \infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $X_q^{1+\theta}$.

• $\|(S(t_n-s)-S(t'-s))f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}} \to 0$, quando $n \to \infty$, pela continuidade forte de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $X_q^{1+\theta}$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
&\|(S(t_n-s)-S(t'-s))f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\\
&\leq M(t_n-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t_n-s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta}\\
&+ M(t'-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t'-s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta}\\
&\leq Mc(t_n-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t_n-s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho+1)\\
&+ Mc(t'-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)}(1+\gamma(t'-s))^{\alpha(1+\theta-\beta)}(\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho+1),
\end{aligned}
$$

cujo último termo da desigualdade anterior é integrável em s sobre o intervalo $(0, t_n)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $J_3(n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

• Para $J_4(n)$:

$$
J_4(n) \;=\; \int_{t_n}^{t'} \|S(t'-s)f(u(s))\|_{X_q^{1+\theta}}\, ds
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)} (1+\gamma(t'-s))^{\alpha(1+\theta-\beta)} \|f(u(s))\|_{X_q^\beta} \, ds \\
&\leq Mc(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha(1-\beta)} \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha(1-\beta)} (\|u(s)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \, ds \\
&\leq Mc(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha(1+\theta-\beta)} \, ds \\
&\leq Mc(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \left(-\frac{(t'-s)^{1-\alpha(1+\theta-\beta)}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)} \right) \Bigg|_{t_n}^{t'} \\
&\leq Mc(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha(1+\theta-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|_{X_q^1}^\rho + 1) \frac{(t'-t_n)^{1-\alpha(1+\theta-\beta)}}{1-\alpha(1+\theta-\beta)} \\
&\to 0,
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$.

• Observe que

$$
\begin{aligned}
\|(S(t_n-s) - S(t'-s))h(s)\|_{X_q^{1+\theta}} &\leq M(t_n-s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t_n-s))^{\alpha\theta}\|h(s)\|_{X_q^1} \\
&+ M(t'-s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t'-s))^{\alpha\theta}\|h(s)\|_{X_q^1} \\
&\leq Mk(t_n-s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t_n-s))^{\alpha\theta}s^\varphi \\
&+ Mk(t'-s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t'-s))^{\alpha\theta}s^\varphi,
\end{aligned}
$$

a qual é integrável em s sobre $(0, t_n)$. Utilizando o mesmo argumento de $J_3(n)$, temos que $J_5(n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

• Para $J_6(n)$:

$$
\begin{aligned}
J_6(n) &= \int_{t_n}^{t'} \|S(t'-s)h(s)\|_{X_q^{1+\theta}} \, ds \\
&\leq M \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha\theta}(1+\gamma(t'-s))^{\alpha\theta}\|h(s)\|_{X_q^1} \\
&\leq Mk(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha\theta} \int_{t_n}^{t'} (t'-s)^{-\alpha\theta} s^\varphi \, ds
\end{aligned}
$$

$$\leq Mk(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha\theta}(t')^{-\alpha\theta}\int_{t_n}^{t'}\left(1-\frac{s}{t'}\right)^{-\alpha\theta}s^{\varphi}\,ds$$

$$\leq Mk(1+\gamma(t'-t_n))^{\alpha\theta}(t')^{-\alpha\theta+\varphi+1}\int_{\frac{t_n}{t'}}^{1}(1-s)^{-\alpha\theta}s^{\varphi}\,ds$$

$$\to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\|u(t_n)-u(t')\|_{X_q^{1+\theta}}=0.$$

De forma análoga, mostra-se o caso $t' \in (0,\tau)$ e $t_n \to (t')^+$. E, consequentemente, $u \in C((0,\tau];X_q^{1+\theta})$.

Para finalizar a demonstração, consideremos $\alpha' \in (1,\beta+1)$ e $0<\tau_0<\tau$. Para todo $t \in [\tau_0,\tau]$,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{X_q^{\alpha'}} &\leq \|S(t)u_0\|_{X_q^{\alpha'}} + \left\|S(t)\sum_{i=1}^{\tilde{k}}\beta_i u(T_i)\right\|_{X_q^{\alpha'}} + \int_0^t \|S(t-s)f(u(s))\|_{X_q^{\alpha'}}ds \\
&\quad + \int_0^t \|S(t-s)h(s)\|_{X_q^{\alpha'}}ds \\
&\leq Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)}\|u_0\|_{X_q^1} \\
&\quad + Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)}\sum_{i=1}^{\tilde{k}}\|\beta_i\|_\infty\|u(T_i)\|_{X_q^1} \\
&\quad + M\int_0^t (t-s)^{-\alpha(\alpha'-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(\alpha'-\beta)}\|f(u(s))\|_{X_q^\beta}\,ds \\
&\quad + M\int_0^t (t-s)^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(\alpha'-1)}\|h(s)\|_{X_q^1}\,ds \\
&\leq Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)}\|u_0\|_{X_q^1} \\
&\quad + Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)}\sum_{i=1}^{\tilde{k}}\|\beta_i\|_\infty\|u(T_i)\|_{X_q^1}
\end{aligned}$$

$$+ \, Mc(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(\alpha'-\beta)} (\|u(s)\|^{\rho}_{X^1_q} + 1) \; ds$$

$$+ \, Mk(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(\alpha'-1)} s^{\varphi} \; ds$$

$$\leq Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} \|u_0\|_{X^1_q}$$

$$+ \, Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_{\infty} \|u(T_i)\|_{X^1_q}$$

$$+ \, Mc(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|^{\rho}_{X^1_q} + 1) \int_0^t (t-s)^{-\alpha(\alpha'-\beta)} \; ds$$

$$+ \, Mk(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} t^{-\alpha(\alpha'-1)} \int_0^t \left(1-\frac{s}{t}\right)^{-\alpha(\alpha'-1)} s^{\varphi} \; ds$$

$$\leq Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} \|u_0\|_{X^1_q} + Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_{\infty} \|u(T_i)\|_{X^1_q}$$

$$+ \, Mc(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|^{\rho}_{X^1_q} + 1) \left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha(\alpha'-\beta)}}{1-\alpha(\alpha'-\beta)}\right)\Bigg|_0^t$$

$$+ \, Mk(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} t^{-\alpha(\alpha'-1)+1+\varphi} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha(\alpha'-1)} s^{\varphi} \; ds$$

$$\leq Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} \|u_0\|_{X^1_q} + Mt^{-\alpha(\alpha'-1)}(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_{\infty} \|u(T_i)\|_{X^1_q}$$

$$+ \, Mc(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} (\|u(t)\|^{\rho}_{X^1_q} + 1) \frac{t^{1-\alpha(\alpha'-\beta)}}{1-\alpha(\alpha'-\beta)}$$

$$+ \, Mk(1+\gamma t)^{\alpha(\alpha'-1)} t^{-\alpha(\alpha'-1)+1+\varphi} B(1-\alpha(\alpha'-1), \varphi+1).$$

Isso prova que $\{u(t) : t \in [\tau_0, \tau]\}$ é um conjunto limitado de $X^{\alpha'}_q$. Como $n \geq q$, temos, pelo Teorema (1.3) de Rellich-Kondrachov, que $X^{\alpha'}_q \hookrightarrow X^1_q$ é uma inclusão compacta. Portanto, segue o resultado. $\square$

4.2 Propriedades Topológicas do Conjunto Solução

Motivados por (52), (35) e (65), estudaremos, nesta seção, as propriedades topológicas do conjunto solução do seguinte Problema:

$$\begin{cases} u_t = \displaystyle\int_0^t dg(s)\Delta u(t-s,x) + f(t,u), & \text{em } (0,\infty)\times\Omega \\ u(t,x) = 0, & \text{em } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i(x)u(T_i,x), & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{17}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $T_i \in (0,\infty)$, são números reais fixados, $\beta_i : \Omega \to \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,\tilde{k}$, são funções contínuas e f sob condições definidas posteriormente.

Observação 4.3. *Como vimos na subseção anterior, não temos a unicidade da solução branda em $L^q(\Omega)$ para o Problema (15), pois a técnica do Lema de Gronwall Singular não pode ser aplicada, devido ao modo pelo qual definimos o operador T. Sendo assim, modificamos o termo não linear, afim de analisar os ganhos obtidos com essa modificação.*

O termo não linear em (17) é definido de $(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e induz uma aplicação $f : [0,\tau]\times X_q^1 \to X_q^\beta$ satisfazendo as seguintes condições.

$(H1)$ Seja $f : [0,\tau]\times X_q^1 \to X_q^\beta$.

(i) A função $f(t,\cdot) : X_q^1 \to X_q^\beta$ é contínua para quase todo $t \in [0,\tau]$ e a função $f(\cdot,\psi) : [0,\tau] \to X_q^\beta$ é fortemente mensurável para todo $\psi \in X_q^1$.

(ii) Existem $m \in C([0,\tau];[0,\infty))$ e uma função não decrescente $\omega : [0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que $\|f(t,\psi)\|_{X_q^\beta} \leq m(t)\ \omega(\|\psi\|_{X_q^1})$, para todo $(t,\psi) \in [0,\tau]\times X_q^1$.

$(H2)$ Para todo $t \in [0,\tau]$ e $r > 0$, o conjunto $\{f(s,\psi) : s \in [0,t], \|\psi\|_{X_q^1} \leq r\}$ é relativamente compacto em X_q^β.

Consideremos, por exemplo, a função $f(t,\psi) = m(t)h(\psi)$, onde $m : [0,\tau]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são contínuas e existem constantes $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$, satisfazendo

$$|h(\psi)| \leq b_1|\psi| + b_2.$$

Motivados pelas definições de soluções brandas apresentadas anteriormente, definimos solução branda para o Problema (17).

Definição 4.4. Seja $\tau > 0$. Então

i) $u : [0,\tau] \to X_q^1$ é chamada solução branda do Problema (17) em $[0,\tau]$, quando $u \in C([0,\tau]; X_q^1)$ e para todo $t \in [0,\tau]$,

$$u(t) = S(t)u_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t)u(T_i) + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\, ds.$$

ii) $u : [0,\tau) \to X_q^1$ é chamada solução branda do Problema (17) em $[0,\tau)$, se para qualquer $\tau' \in [0,\tau), u$ for uma solução branda para (17) em $[0,\tau']$.

Para facilitar a notação, denotaremos

$$\|\beta\|_\infty := \sup_{i\in\{1,2,\ldots,\tilde{k}\}} \|\beta_i\|_\infty.$$

Teorema 4.5. *Se as hipóteses* $(H1)$ *e* $(H2)$ *são satisfeitas,*

$$N\tilde{k}\|\beta\|_\infty < 1$$

e

$$\frac{M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)}\tau^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t) \liminf_{r\to\infty} \frac{\omega(r)}{r} < 1,$$

então o Problema (17) tem uma solução branda. Além disso, se

$$N\tilde{k}\|\beta\|_\infty + M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)} \frac{\tau^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t) \limsup_{\xi\to\infty} \frac{\omega(\xi)}{\xi} < 1,$$

então o conjunto S*, formado por todas as soluções brandas de (17), é compacto em* $C([0,\tau]; X_q^1)$.

Demonstração. Seja $U = \{u : u \in C([0,\tau]; X_q^1)\}$, munido da norma

$$\|u\|_U = \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}.$$

Defina $\Gamma : U \to U$ por:

$$\Gamma u(t) = S(t)j(u) + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\, ds,$$

onde $j(u) = u_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i u(T_i)$.

Afirmação: $\Gamma(U) \subset U$.

Note que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t+h) - \Gamma u(t)\|_{X_q^1} &\leq \|(S(t+h) - S(t))j(u)\|_{X_q^1} \\
&+ \int_0^t \|(S(t+h-s) - S(t-s))f(s,u(s))\|_{X_q^1}\, ds \\
&+ \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)f(s,u(s))\|_{X_q^1}\, ds \\
&:= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Analisaremos cada parcela separadamente.

- $J_1 \to 0$, quando $h \to 0^+$, pois $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua em X_q^1.
- Note que

$$\begin{aligned}
\|(S(t+h-s) \quad &- S(t-s))f(s,u(s))\|_{X_q^1} \\
&\leq M(t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t+h-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,u(s))\|_{X_q^\beta} \\
&\quad + M(t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,u(s))\|_{X_q^\beta} \\
&\leq M(t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t+h-s))^{\alpha(1-\beta)} m(s)\ \omega(\|u(s)\|_{X_q^1}) \\
&\quad + M(t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} m(s)\ \omega(\|u(s)\|_{X_q^1}).
\end{aligned}$$

Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua em X_q^1, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e obter $J_2 \to 0$ quando $h \to 0^+$.

- Para J_3 temos

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq M \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t+h-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds \\
&\leq M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)} \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)} m(s)\ \omega(\|u(s)\|_{X_q^1})\, ds \\
&\leq M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)}\ \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right) \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)} m(s)\, ds
\end{aligned}$$

$$\le M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right) \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds$$

$$\le M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right) \left(-\frac{(t+h-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_t^{t+h}$$

$$\le M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right) \frac{h^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

$$\to 0$$

quando $h \to 0^+$.

Logo, $\|\Gamma u(t+h) - \Gamma u(t)\|_{X_q^1} \to 0$ quando $h \to 0^+$. Isto conclui a prova da afirmação.

Consideremos $B_r := B_r(0, U)$ como sendo a bola fechada em U com centro 0 e raio $r > 0$.

Mostraremos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r) \subset B_r$.

Suponhamos o contrário, isto é, para todo $r > 0$, existem $u^r \in B_r$ e $t^r \in [0,\tau]$ tal que

$$r \ < \|\Gamma u^r(t^r)\|_{X_q^1}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u^r(t^r)\|_{X_q^1} &\le \left\| S(t^r)u_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t^r) u^r(T_i) \right\|_{X_q^1} + \int_0^{t^r} \|S(t^r-s) f(s, u^r(s))\|_{X_q^1}\ ds \\
&\le N\|u_0\|_{X_q^1} + N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^r(t)\|_{X_q^1} \\
&\quad + M \int_0^{t^r} (t^r-s)^{-\alpha(1-\beta)} (1+\gamma(t^r-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(s,u^r(s))\|_{X_q^\beta}\ ds \\
&\le N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^r(t)\|_{X_q^1} \\
&\quad + M(1+\gamma t^r)^{\alpha(1-\beta)} \int_0^{t^r} (t^r-s)^{-\alpha(1-\beta)} m(s)\ \omega(\|u^r(s)\|_{X_q^1})\ ds
\end{aligned}$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^r(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ M(1+\gamma t^r)^{\alpha(1-\beta)}\ \omega(r) \sup_{t\in[0,\tau]} m(t) \int_0^{t^r} (t^r - s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^r(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ M(1+\gamma \tau)^{\alpha(1-\beta)}\ \omega(r) \sup_{t\in[0,\tau]} m(t) \left(- \frac{(t^r - s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \right) \Bigg|_0^{t^r}$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^r(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ M(1+\gamma \tau)^{\alpha(1-\beta)}\ \omega(r) \sup_{t\in[0,\tau]} m(t) \frac{(t^r)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^r(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ M(1+\gamma \tau)^{\alpha(1-\beta)}\ \omega(r) \sup_{t\in[0,\tau]} m(t) \frac{\tau^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}.$$

Isto implica

$$1 \ \leq \left(N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^r(t)\|_{X_q^1} \right) r^{-1}$$

$$+ \frac{M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)}\tau^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\frac{\omega(r)}{r},$$

o que contraria nossa hipótese.

Dessa forma, seja $r > 0$, tal que $\Gamma(B_r) \subset B_r$. Para provarmos que Γ é um operador condensante, consideremos a decomposição à seguir

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2,$$

onde

$$\Gamma_1 u(t) = S(t)j(u)$$

e

$$\Gamma_2 u(t) = \int_0^t S(t-s) f(s, u(s))\, ds,$$

para todo $t \in [0, \tau]$.

Afirmação: Γ_1 é uma contração em B_r.

De fato, dados $u, v \in B_r$,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1 u(t) - \Gamma_1 v(t)\|_{X_q^1} &\leq \left\| \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t)(u(T_i) - v(T_i)) \right\|_{X_q^1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty N \|u(T_i) - v(T_i)\|_{X_q^1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty N \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - v(t)\|_{X_q^1} \\
&\leq N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t) - v(t)\|_{X_q^1}.
\end{aligned}$$

Isto conclui a afirmação.

Afirmação: Γ é um operador contínuo.

Sejam $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ e $u \in U$ tal que $u_n \to u$ em U, quando $n \to \infty$.

Observe que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u_n(t) &- \Gamma u(t)\|_{X_q^1} \leq \left\| \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t)(u_n(T_i) - u(T_i)) \right\|_{X_q^1} \\
&+ \int_0^t \|S(t-s)(f(s, u_n(s)) - f(s, u(s)))\|_{X_q^1}\, ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty N \|u_n(T_i) - u(T_i)\|_{X_q^1} \\
&+ M \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} (1 + \gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty N \sup_{t\in[0,\tau]} \|u_n(t) - u(t)\|_{X_q^1} \\
&+ M(1 + \gamma t)^{\alpha(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds.
\end{aligned}$$

Como $u_n \to u$, temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq m_1$,

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|u_n(t) - u(t)\|_{X_q^1} < \frac{\epsilon}{2N\tilde{k}\|\beta\|_\infty}.$$

Além disso, pela hipótese $(H1)$, temos que, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq m_2$, então

$$\|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\|_{X_q^\beta} < \frac{\epsilon(1-\alpha(1-\beta))}{2\tau^{1-\alpha(1-\beta)}M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)}}.$$

Logo, tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, se $n \geq m$ obtemos

$$\|\Gamma u_n(t) - \Gamma u(t)\|_{X_q^1} < \epsilon.$$

Portanto, Γ é contínuo.

Afirmação: $\Gamma_2(B_r)$ é equicontínuo em $[0,\tau]$.

Sejam $0 < \epsilon < t < \tau$ e $0 < \delta < \epsilon$ tal que

$$\|S(t+h)z - S(t)z\|_{X_q^1} \leq \epsilon,$$

para todo $h \in (0,\delta)$ e $z \in \{f(s,\psi) : s \in [0,t], \|\psi\|_{X_q^1} \leq r\}$. Sob essas condições, para $u \in B_r$, obtemos

$$\|\Gamma_2 u(t+h) - \Gamma_2 u(t)\|_{X_q^1} \leq \int_0^t \|(S(t+h-s) - S(t-s))f(s,u(s))\|_{X_q^1}\, ds$$

$$+ \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)f(s,u(s))\|_{X_q^1}\, ds$$

$$\leq \epsilon t + M\int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t+h-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds$$

$$\leq \epsilon\tau + M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)}\int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)}m(s)\ \omega(\|u(s)\|_{X_q^1})\, ds$$

$$\leq \epsilon\tau + M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)}\ \omega(r)\sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)}\, ds$$

$$\leq \epsilon\tau + M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)}\ \omega(r)\sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\left(-\frac{(t+h-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_t^{t+h}$$

$$\leq \epsilon\tau + M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)}\ \omega(r) \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\frac{h^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}.$$

Isto mostra que o conjunto $\Gamma_2(B_r)$ é equicontínuo à direita em $t \in (0,\tau)$. De forma análoga, mostra-se a equicontinuidade à esquerda em $t \in (0,\tau]$ e a equicontinuidade à direita de zero. Portanto, $\Gamma_2(B_r)$ é equicontínuo em $[0,\tau]$.

Afirmação: $\Gamma_2(B_r)(t)$ é relativamente compacto em X^1_q.

O caso $t = 0$ é óbvio. Sejam $u \in B_r$ e $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < t \leq \tau$. Dessa forma,

$$\Gamma_2 u(t) = \int_0^{t-\epsilon} S(t-s)f(s,u(s))\ ds + \int_{t-\epsilon}^{t} S(t-s)f(s,u(s))\ ds \in\ (t-\epsilon)\bar{co}(K) + C_\epsilon, \tag{18}$$

com

$$K = \{S(t-\theta)f(\theta,\psi) : \theta \in [0, t-\epsilon],\ \|\psi\|_{X^1_q} \leq r\}$$

e

$$C_\epsilon = \left\{ \int_{t-\epsilon}^{t} S(t-s)f(s,u(s))\ ds;\ u \in B_r \right\}.$$

Sejam $u, v \in B_r$, então

$$\left\| \int_{t-\epsilon}^{t} S(t-s)\quad f(s,u(s))\ ds - \int_{t-\epsilon}^{t} S(t-s)f(s,v(s))\ ds \right\|_{X^1_q}$$

$$\leq M\int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,u(s))\|_{X^\beta_q}\ ds$$

$$+\ M\int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,v(s))\|_{X^\beta_q}\ ds$$

$$\leq M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)}\int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}m(s)\ \omega(\|u(s)\|_{X^1_q})\ ds$$

$$+\ M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)}\int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}m(s)\ \omega(\|v(s)\|_{X^1_q})\ ds$$

$$\leq 2M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(r)\int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds$$

$$\leq 2M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(r) \left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \right) \Bigg|_{t-\epsilon}^{t}$$

$$\leq 2M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(r) \frac{\epsilon^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}.$$

Assim,

$$\operatorname{diam} C_\epsilon \leq 2M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(r) \frac{\epsilon^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}.$$

Aplicando a medida de não compacidade de Kuratowski ou de Hausdorff em (18), temos que Γ_2 é relativamente compacto em X_q^1.

Portanto, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, Γ_2 é completamente contínuo. E, consequentemente, o Problema (17) tem uma solução branda.

Falta mostrar que o conjunto S é limitado. Para isto, suponha o contrário, isto é, que exista uma sequência $u^j \in S$ tal que $\|u^j\| \geq j \geq 1$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|u^j(t)\|_{X_q^1} &\leq \|S(t)u_0\|_{X_q^1} + \left\| \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t) u^j(T_i) \right\|_{X_q^1} + \int_0^t \|S(t-s) f(s,u^j(s))\|_{X_q^1}\, ds \\
&\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \|u^j(T_i)\|_{X_q^1} \\
&\quad + M \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} (1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(s,u^j(s))\|_{X_q^\beta}\, ds \\
&\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1} \\
&\quad + M(1+\gamma t)^{\alpha(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} m(s)\ \omega(\|u^j(s)\|_{X_q^1})\, ds \\
&\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}
\end{aligned}$$

$$+ M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}) \int_0^t (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\, ds$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}) \left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_0^t$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}) \frac{t^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

$$\leq N\|u_0\|_{X_q^1} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty \sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}$$

$$+ M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}) \frac{\tau^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}.$$

Logo,

$$1 \ \leq \frac{N\|u_0\|_{X_q^1}}{\sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}} + N\tilde{k}\|\beta\|_\infty$$

$$+ \frac{M(1+\gamma\tau)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1})}{\sup_{t\in[0,\tau]} \|u^j(t)\|_{X_q^1}} \cdot \frac{\tau^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)},$$

o que contraria nossa hipótese. Portanto, S é um conjunto limitado. Como Γ é completamente contínuo e $\Gamma(S) = S$, temos que S é compacto em $C([0,\tau]; X_q^1)$. □

Já mostramos no Teorema (4.5) que o conjunto S, formado pelas soluções brandas de (17), é não vazio e compacto. Queremos obter mais informações sobre este conjunto. Para isto, consideremos as seguintes hipóteses:

$(H1)'$ A função $f : [0,\tau] \times X_q^1 \to X_q^\beta$ satisfaz as seguintes condições:

(i) A função $f(t,\cdot) : X_q^1 \to X_q^\beta$ é contínua para quase todo $t \in [0,\tau]$ e a função $f(\cdot,\psi) : [0,\tau] \to X_q^\beta$ é fortemente mensurável para todo $\psi \in X_q^1$.

(ii) Existem $m \in C([0,\tau]; [0,\infty))$ e uma função contínua, limitada e não decrescente $\omega :$

$[0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que $\|f(t,\psi)\|_{X_q^\beta} \leq m(t)\,\omega(\|\psi\|_{X_q^1})$, para todo $(t,\psi) \in [0,\tau]\times X_q^1$.

$(H2)'$ Para todo $t \in [0,\tau]$, o conjunto $\{f(s,\psi) : s \in [0,t], \psi \in X_q^1\}$ é relativamente compacto em X_q^β.

Para um exemplo de função satisfazendo as hipóteses $(H1')$ e $(H2')$, consideremos o exemplo dado anteriormente com a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo limitada.

Teorema 4.6. *Se as hipóteses $(H1)'$ e $(H2)'$ são satisfeitas, então o conjunto S, formado por todas as soluções brandas de (17), é um $R_\delta-$conjunto.*

Demonstração. Consideremos o operador $\Gamma : C([0,\tau];X_q^1) \to C([0,\tau];X_q^1)$, como na demonstração anterior, definido por:

$$\Gamma u(t) = S(t)u_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t)u(T_i) + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,ds.$$

De forma análoga à demonstração do teorema anterior, pode-se mostrar que Γ está bem definido e é contínuo.

Afirmação: Γ satisfaz as condições do Lema (1.21).

Seja W uma vizinhança aberta de 0 em X_q^1. Então, existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset W$. Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ com $0 < t_1 < t_2 < \tau$ e consideremos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|\Gamma u(t_1) - \Gamma u(t_2)\|_{X_q^1} &\leq \|(S(t_1)-S(t_2))u_0\|_{X_q^1} + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \|\beta_i\|_\infty \|(S(t_1)-S(t_2))u(T_i)\|_{X_q^1} \\ &+ \int_0^{t_1} \|(S(t_1-s)-S(t_2-s))f(s,u(s))\|_{X_q^1}\,ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \|S(t_2-s)f(s,u(s))\|_{X_q^1}\,ds.\end{aligned}$$

Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínuo em X_q^1, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\|(S(t_1)-S(t_2))u_0\|_{X_q^1} \leq \frac{r}{4}, \text{ sempre que } |t_1 - t_2| < \delta_1$$

e

$$\|(S(t_1)-S(t_2))u(T_i)\|_{X_q^1} \leq \frac{r}{4\|\beta\|_\infty \tilde{k}}, \text{ sempre que } |t_1 - t_2| < \delta_2.$$

Além disso, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \|S(t_2-s)f(s,u(s))\|_{X_q^1}\, ds$$

$$\leq M \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t_2-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,u(s))\|_{X_q^\beta}\, ds$$

$$\leq M(1+\gamma(t_2-t_1))^{\alpha(1-\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-\alpha(1-\beta)}\; m(s)\; \omega\left(\|u(s)\|_{X_q^1}\right)\, ds$$

$$\leq M(1+\gamma(t_2-t_1))^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\; \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right) \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-\alpha(1-\beta)}\, ds$$

$$\leq M(1+\gamma(t_2-t_1))^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\; \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right) \left(-\frac{(t_2-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

$$\leq M(1+\gamma(t_2-t_1))^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\; \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right) \frac{(t_2-t_1)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

$$< \frac{r}{4},$$

sempre que $|t_1 - t_2| < \delta_3$.

Como

$$\begin{aligned}
\|(S(t_1-s) - S(t_2-s)) \quad & f(s,u(s))\|_{X_q^1} \\
& \leq M(t_1-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t_1-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,u(s))\|_{X_q^\beta} \\
& \quad + M(t_2-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t_2-s))^{\alpha(1-\beta)}\|f(s,u(s))\|_{X_q^\beta} \\
& \leq M(t_1-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t_1-s))^{\alpha(1-\beta)} m(s)\; \omega\left(\|u(s)\|_{X_q^1}\right) \\
& \quad + M(t_2-s)^{-\alpha(1-\beta)}(1+\gamma(t_2-s))^{\alpha(1-\beta)} m(s)\; \omega\left(\|u(s)\|_{X_q^1}\right)
\end{aligned}$$

e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínuo em X_q^1, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que existe $\delta_4 > 0$ tal que

$$\int_0^{t_1} \|(S(t_1-s) - S(t_2-s))f(s,u(s))\|_{X_q^1}\, ds < \frac{r}{4}, \text{ sempre que } |t_1 - t_2| < \delta_4.$$

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, temos que

$$\|\Gamma u(t_1) - \Gamma u(t_2)\|_{X_q^1} < r, \text{ sempre que } |t_1 - t_2| < \delta.$$

Logo, $\Gamma u(t_1) - \Gamma u(t_2) \in W$.

As condições (ii) e (iii) do Lema (1.21) são claramente satisfeitas. Assim, existe uma sequência $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $I - \Gamma_n$ é um homeomorfismo de $C([0,\tau];X_q^1)$ em $C([0,\tau];X_q^1)$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n u = \Gamma u$ uniformemente em $u \in C([0,\tau];X_q^1)$.

Definindo o operador $T : C([0,\tau];X_q^1) \to C([0,\tau];X_q^1)$ por

$$Tu = u - \Gamma u,$$

a condição (ii) do Teorema (1.20) é verificada, considerando $T_n u = u - \Gamma_n u$.

Afirmação: T é próprio em $0 \in C([0,\tau];X_q^1)$.

Consideremos Z um conjunto compacto de $C([0,\tau];X_q^1)$ e sejam

$$U = T^{-1}(Z) \text{ e } V = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U.$$

Mostraremos que V é um conjunto relativamente compacto.

Como $u = Tu + \Gamma u$, para todo $u \in C([0,\tau];X_q^1)$, tem-se

$$V(t) \subset TV(t) + \Gamma V(t) \subset Z(t) + \Gamma V(t)$$

e por Z ser compacto, aplicando a medida de não compacidade, obtemos

$$\alpha(V(t)) \leq \alpha(\Gamma V(t)),\ t \in [0,\tau]. \tag{19}$$

Sendo assim, basta mostrar que $\Gamma V(t)$ é relativamente compacto, para cada $t \in [0,\tau]$.

Para $t = 0$, temos que $\Gamma V(0) = j(u)$, o qual é compacto. Para $0 < t \leq \tau$, tomemos $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < t$.

Para cada $u_n \in V$, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma u_n(t) &= S(t)u_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t) u_n(T_i) + \int_0^{t-\epsilon} S(t-s) f(s, u_n(s))\ ds \\
&+ \int_{t-\epsilon}^{t} S(t-s) f(s, u_n(s))\ ds \\
&\in \{S(t)u_0\} + \left\{ \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i S(t) u_n(T_i) \right\} + (t-\epsilon)\bar{co}(K) + C_\epsilon,
\end{aligned}$$

onde

$$K = \{S(t-\theta) f(\theta, \psi) :\ \theta \in [-0, t-\epsilon],\ \psi \in X_q^1\}$$

e

$$diam\ C_\epsilon \leq 2M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(\tilde{N}) \frac{\epsilon^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}$$

com

$$\tilde{N} = \max\left\{ \sup_{t\in[0,\tau]} \|u_n(t)\|_{X_q^1},\ \sup_{t\in[0,\tau]} \|u_{n'}(t)\|_{X_q^1} \right\}.$$

De fato , se $u_n, u_{n'} \in V$, temos

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{t-\epsilon}^{t} S(t-s) \quad f(s, u_n(s))\ ds - \int_{t-\epsilon}^{t} S(t-s) f(s, u_{n'}(s))\ ds \right\|_{X_q^1} \\
&\leq M \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} (1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(s, u_n(s))\|_{X_q^\beta}\ ds \\
&+ M \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} (1+\gamma(t-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(s, u_{n'}(s))\|_{X_q^\beta}\ ds \\
&\leq M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} m(s)\ \omega(\|u_n(s)\|_{X_q^1})\ ds \\
&+ M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)} m(s)\ \omega(\|u_{n'}(s)\|_{X_q^1})\ ds \\
&\leq M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\ \omega(\tilde{N}) \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\ ds
\end{aligned}$$

$$+ \; M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\; \omega(\tilde{N}) \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{-\alpha(1-\beta)}\; ds$$

$$\leq 2M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\; \omega(\tilde{N}) \left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)} \right) \Bigg|_{t-\epsilon}^{t}$$

$$\leq 2M(1+\gamma\epsilon)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\; \omega(\tilde{N}) \frac{\epsilon^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}.$$

Como ϵ é arbitrário, podemos concluir que $\Gamma V(t)$ é totalmente limitado e, assim, relativamente compacto em X_q^1, para todo $t \in [0,\tau]$.

Afirmação: Γ é equicontínuo em V.

Note que

$$\Gamma u_n(t+h) - \Gamma u_n(t) = (S(t+h) - S(t))u_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \beta_i (S(t+h) - S(t)) u_n(T_i)$$

$$+ \int_0^t (S(t+h-s) - S(t-s)) f(s, u_n(s))\; ds + \int_t^{t+h} S(t+h-s) f(s,u_n(s))\; ds.$$

Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é fortemente contínua em X_q^1, existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ tais que

$$\|(S(t+h) - S(t))u_0\|_{X_q^1} < \frac{\epsilon}{4}, \text{ sempre que } h \in (0,\delta_1),$$

$$\|(S(t+h) - S(t))u_n(T_i)\|_{X_q^1} < \frac{\epsilon}{4\|\beta\|_\infty \tilde{k}}, \text{ sempre que } h \in (0,\delta_2)$$

e

$$\|(S(t+h-s) - S(t-s)) f(s,u_n(s))\|_{X_q^1} < \frac{\epsilon}{4t}, \text{ sempre que } h \in (0,\delta_3).$$

Além disso,

$$\int_t^{t+h} \|S(t+h-s) f(s,u_n(s))\|_{X_q^1}\; ds$$

$$\leq M \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)} (1+\gamma(t+h-s))^{\alpha(1-\beta)} \|f(s,u_n(s))\|_{X_q^\beta}\; ds$$

$$\leq M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)} \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha(1-\beta)}\; m(s)\; \omega\left(\|u_n(s)\|_{X_q^1} \right)\; ds$$

$$\leq M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\, \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right)\left(-\frac{(t+h-s)^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}\right)\Bigg|_t^{t+h}$$

$$\leq M(1+\gamma h)^{\alpha(1-\beta)} \sup_{t\in[0,\tau]} m(t)\, \omega\left(\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\|_{X_q^1}\right)\frac{h^{1-\alpha(1-\beta)}}{1-\alpha(1-\beta)}.$$

Logo, existe $\delta_4 > 0$ tal que

$$\int_t^{t+h} \|S(t+h-s)f(s,u_n(s))\|_{X_q^1}\, ds < \frac{\epsilon}{4}, \text{ sempre que } h \in (0,\delta_4).$$

Dessa forma, $\|\Gamma u_n(t+h) - \Gamma u_n(t)\|_{X_q^1} < \epsilon$, sempre que $0 < h < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, com δ independente de $u_n \in V$. E, consequentemente, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, concluímos que ΓV é um conjunto relativamente compacto. Por (19), temos que V é relativamente compacto. Assim, U é relativamente compacto e T é próprio em 0. Pelo Teorema (1.20), $T^{-1}(0)$ é um $R_\delta-$conjunto. Como $T^{-1}(0)$ coincide com S, segue que o conjunto solução da equação (17) é um $R_\delta-$conjunto. □

Isso mostra que a menos de homotopia, a solução do problema (17) é única.

Referências

1 PRÜSS, J. *Evolutionary Integral Equations and Applications, Vol. 87*. Basel: Birkhäuser, 1993. Monographs in Mathematics.

2 PRÜSS, J. Maximal Regularity of Linear Vector-valued Parabolic Volterra Equations. *J. of Integral Equations and Applications*, v. 3, n. 1, p. 63–83, 1991.

3 CUEVAS, C.; LIZAMA, C. s-asymptotically ω-periodic Solutions for Semilinear Volterra Equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, v. 33, p. 1628–1636, 2010.

4 CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Almost Automorphic Solutions to Integral Equations on the Line. *Semigroup Forum*, v. 79, p. 461–472, 2009.

5 PRÜSS, J.; VERGARA, V.; ZACHER, R. Well-posedness and Long-time Behaviour for the Non-isothermal Cahn-Hilliard Equation with Memory. *J. Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 26, p. 625–647, 2009.

6 FITZGIBBON, W. E. Semilinear Integrodifferential Equations in Banach Space*. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applicatons*, v. 4, n. 4, p. 745–760, 1979.

7 KEYANTUO, V.; LIZAMA, C. Hölder Continuous Solutions for Integro-differential Equations and Maximal Regularity. *J. Differential Equations*, v. 230, p. 634–660, 2006.

8 LANG, C. L.; CHANG, J. C. Local Existence for Nonlinear Volterra Integrodifferential Equations with Infinite Delay. *Nonlinear Analysis*, v. 68, p. 2943–2956, 2007.

9 LONDEN, S. O. An Existence Result on a Volterra Equation in a Banach Space. *Transactions of the American Math. Soc.*, v. 235, p. 285–304, 1978.

10 LUNARDI, A. Regular Solutions for Time Dependent Abstract Integrodifferential Equations with Singular Kernel. *J. of Math. Analysis and Applications*, v. 130, p. 1–21, 1988.

11 MAININI, E.; MOLA, G. Exponential and Polynomial Decay for First Order Linear Volterra Evolution Equations. *J. Quart. Appl. Math.*, v. 67, p. 93–111, 2009.

12 PRÜSS, J. On Linear Volterra Equations of Parabolic Type in Banach Spaces. *Transactions of the American Math. Soc.*, v. 301, n. 2, p. 691–721, 1987.

13 PRÜSS, J. Decay Properties for the Solutions of a Partial Differential Equation with Memory. *Arch. Math.*, v. 92, p. 158–173, 2009.

14 PRÜSS, J.; SIMONETT, G.; ZACHER, R. On the Qualitative Behaviour of Incompressible Two-phase Flows with Phase Transitions: The Case of Equal Densities. *Interfaces and Free Boundaries*, v. 15, p. 405–428, 2013.

15 SOUPLET, P. Monotonicity of Solutions and Blow-up for Semilinear Parabolic Equations with Nonlinear Memory. *Zeit. für ang. Math. und Phys.*, v. 55, p. 28–31, 2004.

16 BYSZEWSKI, L. Theorems about the Existence and Uniqueness of Solutions of a Semilinear Evolution Nonlocal Cauchy Problem. *J. Math. Anal. and Appl.*, v. 162, p. 494–505, 1991.

17 DENG, K. Exponential Decay of Solutions of Semilinear Parabolic Equations with Nonlocal Initial Conditions. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, v. 179, p. 630–637, 1993.

18 ANDRADE, B. de; CUEVAS, C.; SOTO, H. On Fractional Heat Equations with Non-Local Initial Conditions. *Proceedings of The Edinburgh Mathematical Society*, v. 59, p. 65–76, 2016.

19 AIZICOVICI, S.; LEE, H. Nonlinear Nonlocal Cauchy Problems in Banach Spaces. *Applied Mathematics Letters*, v. 18, p. 401–407, 2005.

20 BALACHANDRAN, K.; ILAMARAN, S. Existence and Uniqueness of Mild and Strong Solutions of a Semilinear Evolution Equation with Nonlocal Condition. *Indian J. Pure Appl. Math.*, v. 25, n. 4, p. 411–418, 1994.

21 BENCHOHRA, M. Existence of Solutions of Nonlinear Differential Equations with Nonlocal Conditions. *J. Math. Analysis and Applications*, v. 252, p. 477–483, 2000.

22 BYSZEWSKI, L. Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlocal Problems for Hyperbolic Equation $u_{xt} = f(x, t, u, u_x)$,. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, v. 3, n. 3, p. 163–168, 1990.

23 BYSZEWSKI, L. Applications of Properties of the Right-hand Sides of Evolution Equations to an Investigation of Nonlocal Evolution Problems. *Nonlinear Analysis*, v. 33, p. 413–426, 1998.

24 CAO, J. Existence of Mild Solutions for Nonlocal Semilinear Fractional Evolution Equations. *Fractional Differential Calculus*, v. 4, n. 1, p. 55–72, 2014.

25 CARDINALI, T.; RUBBIONI, P. Impulsive Mild Solutions for Semilinear Differential Inclusions with Nonlocal Conditions in Banach Spaces. *Nonlinear Analysis*, v. 75, p. 871–879, 2012.

26 CHABROWSKI, J. On Non-local Problems for Parabolic Equations. *Nagoya Math. J.*, v. 93, p. 109–131, 1984.

27 CHEN, P.; LI, Y.; ZHANG, X. Existence and Uniqueness of Positive Mild Solutions for Nonlocal Evolution Equations. *Positivity*, v. 19, p. 927–939, 2015.

28 DHAGE, B. C.; DHAGE, S. B.; NTOUYAS, S. K. Existence and Approximate Solutions for Fractional Differential Equations with Nonlocal Conditions. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, v. 7, n. 1, p. 24–35, 2016.

29 FU, X.; GAO, Y.; ZHANG, Y. Existence of Solutions for Neutral Integrodifferential Equations with Nonlocal Conditions. *Taiwanese J. of Mathematics*, v. 16, n. 5, p. 1879–1909, 2012.

30 JACKSON, D. Existence and Uniqueness of Solutions to Semilinear Nonlocal Parabolic Equations. *J. Math. Analysis and Applications*, v. 172, p. 256–265, 1993.

31 KOLODZIEJ, K. Existence and Uniqueness of Solutions of a Semilinear Functional-differential Evolution Nonlocal Cauchy Problem. *J. Applied Math. and Stochastic Anal*, v. 13, n. 2, p. 171–179, 2000.

32 LIANG, J.; LIU, J.; XIAO, T. Nonlocal Cauchy Problems Governed by Compact Operator Families. *Nonlinear Analysis*, v. 57, p. 183–189, 2004.

33 LIANG, J.; XIAO, T. Semilinear Integrodifferential Equations with Nonlocal Initial Conditions. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 47, p. 863–875, 2004.

34 MALAR, K. Existence of Mild Solutions for Nonlocal Integro-differential Equations with Measure of Noncompactness. *International J. of Math. and Scientific Computing*, v. 1, n. 1, p. 86–91, 2011.

35 NTOUYAS, S. K.; TSAMATOS, P. C. Global Existence for Semilinear Evolution Equations with nonlocal conditions. *J. of Math. Analysis and Applications*, v. 210, p. 679–687, 1997.

36 OLSZOWY, L. Existence of Mild Solutions for Semilinear Nonlocal Cauchy Problems in Separable Banach Spaces. *Journal for Analysis and its Applications*, v. 32, p. 215–232, 2013.

37 ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975. (Pure and Applied Mathemathics).

38 CARVALHO, A. N. *Análise I*. São Carlos: [s.n.], 2007. Notas de Aula.

39 CARVALHO, A. N. *Análise II*. São Carlos: [s.n.], 2007. Notas de Aula.

40 CARVALHO, A. N. *Análise Funcional II*. São Carlos: [s.n.], 2012. Notas de Aula.

41 ENGEL, K.-J.; NAGEL, R. *A Short Course on Operator Semigroups*. United States of America: Springer, 2005.

42 KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.

43 MAINARDI, F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. London: Imperial College Press, 2010.

44 PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1983.

45 YAGI, A. *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*. New York: Springer Monographs in Mathematics, 2010.

46 YOSIDA, K. *Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1978.

47 SCHNAUBELT, R. *Spectral Theory*. Karlsruhe: [s.n.], 2015. Lecture Notes.

48 HENRY, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlim: Springer-Verlag, 1981. Lecture Notes in Mathematics, 840.

49 HERNÁNDEZ, E. *Teoria de Semigrupos e Aplicações a Equações Funcionais Impulsivas*. São Carlos: [s.n.], 2003. Notas de Aula.

50 LORENZI, L. et al. *Analytic Semigroups and Reaction-Diffusion Problems*. [S.l.: s.n.], 2005. Internet Seminar 2004-2005.

51 JR, R. M. *Nonlinear Operator and Differential Equations in Banach Spaces*. New York: A Wiley-Interscience Publication: John Wiley e Sons, 1976.

52 GÓRNIEWICZ, L. Topological Structure of Solution Sets: Current Results. *Arch. Math.*, v. 36, n. 5, p. 343–382, 2000.

53 SZUFLA, S. Sets of Fixed Points of Nonlinear Mappings in Function Space. *Funk. Ekv.*, v. 22, p. 121–126, 1979.

54 GÓRNIEWICZ, L. *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*. Dordrecht: Springer, 1999. Vol.4 , Second edition.

55 APPELL, J. Measures of Noncompactness, Condensing Operators and Fixed Points: an Application-Oriented Survey. *Fixed Point Theory*, v. 6, n. 2, p. 157–229, 2005.

56 BANAS, J.; MARTINON, A. Note on Measures of Noncompactness in Banach Sequence Spaces. *Extracta Mathematicae*, v. 5, n. 2, p. 83–85, 1990.

57 MALKOWSKY, E. Measures of Noncompactness and Some Applications. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, v. 1, n. 1, p. 2–19, 2013.

58 AMANN, H. Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems. *Schmeisser/Triebel: Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Teubner Texte zur Mathematik*, v. 133, p. 9–126, 1993.

59 ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N. Abstract Parabolic Problems with Critical Nonlinearities and Applications to Navier-Stokes and Heat Equations. *Transactions American Math. Society*, v. 352, p. 285–310, 1999.

60 TRIEBEL, H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, 1978.

61 BREZIS, H.; CAZENAVE, T. A Nonlinear Heat Equation with Singular Initial Data. *J. Anal. Math*, v. 68, p. 277–304, 1996.

62 AMANN, H. On Abstract Parabolic Fundamental Solutions. *J. Math. Soc. Japan*, v. 39, n. 1, p. 93–116, 1987.

63 ARRIETA, J. M.; CARVALHO, A. N.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A. Parabolic Problems with Nonlinear Boundary Conditions and Critical Nonlinearities. *J. of Differential Equations*, v. 156, p. 376–406, 1999.

64 MCKIBBEN, M. *Discovering Evolution Equations with Applications*. New York: Deterministic Models, Chapman and Hall/CRC Appl. Math. and Nonlinear Sci. Ser., 2011. Vol. I.

65 SIRACUSA, G. *Sobre Equações Integro-diferenciais com Retardo Dependendo do Estado e Equações Semilineares Hiperbólicas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.