



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fania Danitza Caicedo Mateus

Efeitos de comensurabilidade na dinâmica de vórtices em supercondutores nanoestruturados

Recife

2015

Fania Danitza Caicedo Mateus

Efeitos de comensurabilidade na dinâmica de vórtices em supercondutores nanoestruturados

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física do Departamento de Física da Universidade
Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva (Orientador - DF-UFPE)

Recife

2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB 4-572

C133e Caicedo Mateus, Fania Danitza.
Efeitos de comensurabilidade na dinâmica de vórtices em supercondutores nanoestruturados / Fania Danitza Caicedo Mateus. – Recife: O Autor, 2015.
108 f.: fig., tab.

Orientador: Clécio Clemente de Souza Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2015.
Inclui referências.

1. Supercondutividade. 2. Nanociência. 3. Dinâmica molecular. I. Silva, Clécio Clemente de Souza (Orientador). II. Título.

537.623 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-50

FANIA DANITZA CAICEDO MATEUS

**EFEITOS DE COMENSURABILIDADE NA DINÂMICA DE VÓRTICES EM
SUPERCONDUTORES NANOESTRUTURADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Física.

Aprovada em: 30/06/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Clécio Clemente de Souza Silva
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Sérgio Galvão Coutinho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Antonio Rodrigues de Castro Romaguera
Examinador Externo
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Resumo

Recentes progressos na fabricação de nanoestruturas fornecem a possibilidade de produzir filmes finos que contenham defeitos artificiais como sítios de aprisionamento com tamanho, geometria e disposição espacial bem definidas. O estudo dessa introdução de um arranjo regular de defeitos em filmes finos supercondutores do tipo II tem sido ativamente desenvolvido desde o ponto de vista teórico e experimental, por um lado pela riqueza de comportamentos estáticos e dinâmicos que apresenta e, por outro, pela compreensão dos mecanismos para estabilizar e ancorar a rede de vórtices contra as forças motoras externas. Um dos fenômenos mais notáveis destes sistemas é chamado efeito *matching*, o qual ocorre quando o número de vórtices é um múltiplo inteiro do número dos centros de aprisionamento, sendo observados picos na corrente crítica (resposta estática) ou atenuações na mobilidade dos vórtices (resposta dinâmica) nos valores de campo onde esta condição é satisfeita. Nesses campos comensuráveis, os vórtices podem formar uma rede altamente ordenada onde as interações vórtice-vórtice que reduzem o ancoramento efetivo são minimizadas. Usando simulações de dinâmica molecular, analisamos as configurações dos vórtices e os efeitos de *pinning* artificial na dinâmica de vórtices em um filme fino supercondutor do tipo II, com uma distribuição periódica de centros de *pinning*. A dinâmica de vórtices e suas configurações estruturais, foram simuladas usando o algoritmo de dinâmica de Langevin. As interações entre vórtices foram modeladas dentro da aproximação de London com condições de contorno periódicas. Na parte inicial do estudo, calculamos as configurações de equilíbrio para a rede de vórtices, encontrando resultados similares aos estudados em trabalhos anteriores. Inclusive, observamos em nossas simulações que o número de saturação dos centros de ancoragem, i.e. o número máximo de vórtices aprisionados por cada centro, é função do campo externo. Tal resultado já havia sido previsto em cálculos realizados dentro do formalismo de Ginzburg-Landau. Aqui, mostramos que o efeito pode ser reproduzido mesmo no regime de London. Na segunda parte do trabalho analisamos a dinâmica quando uma força externa é aplicada na direção longitudinal em relação à simetria da rede de armadilhas. Mostramos que esse sistema exhibe efeitos de comensurabilidade dinâmica quando as configurações dos vórtices coincidem com a periodicidade do arranjo, através das curvas de magnetorresistência que

apresentam uma série de características nos diferentes campos de *matching*. Em certos valores de campo, as quedas na tensão estão ausentes devido às configurações particulares dos vórtices e à interação entre os vórtices intersticiais com os vórtices ocupando os centros de aprisionamento. Esse estudo revela que os tipos de comensurabilidades encontradas nesse problema dinâmico são, em geral, diferentes daqueles encontrados no problema estático. Portanto, a prática usual na literatura de se inferir sobre as configurações estáticas dos vórtices a partir de medidas de magnetorresistência deve ser revista.

Palavras chaves: Dinâmica de vórtices. Arranjo periódico de *pinning*s. Comensurabilidade. Propriedades de transporte. Efeito de *matching*.

Abstract

Recent progress in manufacturing of nanostructures provides the possibility to produce thin films containing artificial defects as *pinning* sites with well-defined size, geometry and spatial arrangement. The study of the introduction of a regular arrangement of defects in type II superconducting thin films has been actively developed from a theoretical and experimental point of view, on one side due to the richness of static and dynamic behaviors that it presents and, second, by understanding the mechanisms to stabilize and anchor the network of vortices against external driving forces. One of the most remarkable phenomena of these systems is called *matching* effect which occurs when the number of vortices is a multiple integer of the number of *pinning* centers, with peaks observed in the critical current (static response) or the attenuation of the vortices mobility (dynamic response) values in field where this condition is satisfied. These measurable fields, the vortices can form a highly ordered network where the vortex-vortex interactions that reduce the effective anchoring are minimized. Using molecular dynamics simulations, we analyzed the settings of the vortices and the effects of artificial *pinning* at the dynamics of vortices in a type II superconducting thin film with a periodic distribution of *pinning* centers. The dynamics of vortices and their structural configurations were simulated using the Langevin dynamics algorithm. The interactions between vortices were modeled using London's approach with periodic boundary conditions. In the early part of the study, we calculated the balance settings for the vortex network, finding results similar to those studied in previous works. In fact, we observed in our simulations that the number of saturation of the anchoring centers, i.e. the maximum number of vortices trapped by each center, is a function of the external field. This result had already been predicted in calculations performed within the Ginzburg-Landau formalism. Here, we show that the same effect can be reproduced at the London scheme. In the second part of the study, we analyzed the dynamics when an external force is applied in the longitudinal direction relative to the symmetry of the network of traps. We show that this system displays dynamic commensurability effects when the settings of the vortices coincide with the periodicity of the arrangement, through the magnetoresistance curves that have a number of features in the different fields of *matching*. Certain field values, it falls in tension are absent due to the particular configuration of vortices and the interaction between interstitial vortices with the vortices occupying the *pinning* centers. This study shows that

the types of measurability found in this dynamic problem are generally different from those found in the static problem. Therefore, the usual practice in the literature to infer the static settings of vortices from magnetoresistance measures should be reviewed.

Keywords: Vortex dynamics. Periodic arrangement of *pinnings*. Commensurability. Transport properties. Effect of *matching*.

Lista de Figuras

2-1	Propriedades críticas dos materiais supercondutores.	21
2-2	Na presença de um campo magnético externo, $H < H_c$, um supercondutor expulsa o fluxo magnético quando é resfriado abaixo de T_c , entanto, em um condutor perfeito, o fluxo permanece o mesmo.	22
2-3	Efeito do campo magnético sobre a energia livre de Gibbs nos estados normal e supercondutor [16].	25
2-4	Penetração do campo magnético através da superfície de um supercondutor. A magnitude de $\vec{B}$ atenua-se exponencialmente à medida que penetra no supercondutor. Essa atenuação ocorre na escala do comprimento de penetração λ [20].	30
2-5	Diferença da densidade de energia livre GL para (a) $T > T_c$, $\alpha > 0$ e (b) $T < T_c$, $\alpha < 0$. Os círculos cheios correspondem aos valores de equilíbrio termodinâmico [24].	34
2-6	Distribuição espacial do parâmetro de ordem e campo magnético na interface supercondutor e normal. A parte (a) corresponde à supercondutor tipo I enquanto a parte (b) corresponde à supercondutor tipo II.	40
2-7	Diagrama de fase H-T para os supercondutores tipo I (a) e tipo II (b).	44
2-8	Magnetização em função do campo aplicado para supercondutores do tipo I e tipo II.	45
3-1	Solução de Kleiner, Roth e Auther para a rede hexagonal [31].	49
3-2	Rede de Abrikosov em $NbSe_2$ observada através de Microscopia de Tunelamento com Varredura (STM) a 1.8K e um campo aplicado de 1T [34].	50
3-3	Estrutura de um único vórtice, mostrando a distribuição radial do campo local, as supercorrentes circulando e a densidade de elétrons supercondutores [37].	51
3-4	Interação repulsiva entre dois vórtices, devido às correntes de blindagem que são antiparalelas na região entre os vórtices.	54

3-5	Redes de vórtices quadrada e triangular. As linhas tracejadas demarcam as células unitárias básicas em cada caso.	55
3-6	Mudança na densidade da corrente crítica para duas temperaturas relativas (t) [66].	64
3-7	Dinâmica de vórtices quando H aumenta e diminui. (a) $H = 0.2H_1$, (b) $H = 0.5H_1$, (c) $H = 1.2H_1$, (d) $H = 2.5H_1$, (e) $H = 1.5H_1$, (f) $H = 0.9H_1$, (g) $H = 0.2H_1$ [35]. . .	65
3-8	Curva da resistência em função do campo magnético aplicado para um filme de Nb sobre um arranjo triangular de dots de Ni para diferentes valores da corrente [61]. .	66
3-9	Comparação da resistência normalizada R/R_n de um filme WGe com uma rede de <i>antidots</i> (símbolos abertos) e um filme de referência sem <i>antidots</i> (símbolos fechados) a diferentes temperaturas: $T = 4.710\text{K}$, quadrados; $T = 4.705\text{K}$, círculos e $T = 4.700\text{K}$, triângulos [68].	67
3-10	Simulação do comportamento da força de desancoramento dos vórtices localizados nos defeitos, em função da força de ancoragem, para a situação comensurável (pontos pretos) e a incomensurável (quadrados) [70].	68
3-11	Representação da seção transversal para os filmes de Pb com arranjos de <i>blind holes</i> e <i>antidots</i> [71].	69
4-1	Forma do potencial de <i>pinning</i> usado nas nossas simulações.	73
4-2	Caixa de simulação utilizada, onde são aplicadas condições de contorno periódicas para simular o sistema infinito.	74
4-3	Configurações estáticas dos vórtices que minimizam a energia livre do sistema, as quais foram obtidas desde o processo de <i>simulated annealing</i> para um arranjo quadrado de 12×12 de centros de <i>pinning</i> . A densidade de fluxo é $n = 1$ em (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d).	77
4-4	Configurações estáticas dos vórtices que minimizam a energia livre do sistema, as quais foram obtidas desde o processo de <i>simulated annealing</i> para um arranjo quadrado de centros de <i>pinning</i> . A densidade de fluxo é $n = 5$ em (e), 6(f), 7(g), 8 (h).	78
4-5	Gráficos de contorno de $ \Psi ^2$ (cor branca/preta, densidade baixa/alta) num filme supercondutor com centros de ancoragem para os campos de <i>matching</i> : $n = 1(a)$, $3/2$ (b), 2 (c), $5/2$ (d), 3 (e), 4 (f), $9/2$ (g) e 5 (h). [75]	80

4-6	Estados fundamentais dos vórtices obtidos através do <i>simulated annealing</i> para um arranjo quadrado de defeitos, mostrando um subconjunto $12\lambda \times 12\lambda$ de uma amostra de $36\lambda \times 36\lambda$. A densidade de fluxo é $n = 1$ (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 5 (e), 6 (f), 7 (g), 8 (h) e 9 (i) [69].	81
4-7	Micrografias de Lorentz e esquemas das configurações dos vórtices em um arranjo quadrado de defeitos artificiais nos campos de <i>matching</i> : (a) $n = 1/4$, (b) $n = 1/2$, (c) $n = 1$, (d) $n = 3/2$, (e) $n = 2$, (f) $n = 5/2$, (g) $n = 3$ e (h) $n = 4$ [35].	82
4-8	Força de ancoragem crítica F_p^c em escala logarítmica para $0 < n < 8$ com um arranjo quadrado de centros de ancoragem. Observa-se picos em $n = 1, 2, 3, 4$ e 6. Em adição aos efeitos <i>matching</i> que aparecem nos campos inteiros, efeitos de comensurabilidade podem ser vistos em campos fracionários ($n = 4.5, 7.5$). Porém, não acontecem picos no quinto nem sétimo valor em campo da nossa amostra.	84
4-9	Força de ancoragem crítica como uma função da densidade de vórtices num sistema com um arranjo de <i>pinning</i> quadrado para $nL_x = nL_y = 12$. O gráfico pequeno inserido na parte superior mostra a força de ancoragem crítica para um sistema com os sítios de aprisionamento num arranjo aleatorio [77].	85
4-10	Gráficos de velocidade V_x em função da força externa para $n = 2, 3, 4, 5$. Mostra-se sua interseção com os valores de corrente $I = 0.6$ e $I = 1.2$	87
4-11	Posições aleatórias dos vórtices para uma força motriz $F_x = 1.1$. A densidade de fluxo é $n = 1, 2$	89
4-12	Curvas $V(H)$ para diferentes valores da força motriz, $F_x = 0.8$ (triângulo), $F_x = 1.1$ (quadrado) e $F_x = 1.4$ (círculo). Os símbolos abertos (fechados) correspondem à varredura da corrente (campo).	90
4-13	Curvas $V(H)$ para valores da força motriz, $F_x = 0.6$ (vermelho), 0.8 (azul), 1.0 (magenta), 1.2 (verde) e 1.4 (preto).	92
4-14	Densidade de vórtices acumulada no tempo para $F_x = 1.1$. A densidade de fluxo é $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$	94
4-15	Número de vórtices na região dos canais de ancoragem em função do campo.	96
4-16	Contribuição para a voltagem devida aos vórtices se movendo ao longo dos defeitos (símbolos fechados) e ao longo das regiões intersticiais (símbolos abertos).	97

Lista de Nomenclaturas

Simbolo	Término
$H_c(T)$	Campo crítico termodinâmico que define a transição Supercondutor/Normal nos supercondutores tipo I.
$H_{c1}(T)$	Campo crítico inferior à temperatura T. Define a intensidade mínima do campo magnético que permite a nucleação de vórtices em um supercondutor tipo II.
$H_{c2}(T)$	Campo crítico superior à temperatura T. Define a intensidade mínima do campo magnético capaz de destruir a supercondutividade no interior de um supercondutor tipo II. Sendo $H_{c2}(T) > H_{c1}(T)$.
T_c	Temperatura crítica que define a transição Supercondutor/Normal.
J_c	Densidade de corrente crítica que define a transição Supercondutor/Normal.
B	Indução magnética dentro do supercondutor.
$H_a(T)$	Campo magnético aplicado no supercondutor.
$g_s(T, 0)$	Energia livre de Gibbs por unidade de volume para uma amostra no estado supercondutor na ausência de campo magnético a uma temperatura T.
$g_s(T, H)$	Energia livre de Gibbs por unidade de volume para uma amostra no estado supercondutor na presença de campo magnético a uma temperatura T.
$g_n(T, 0)$	Energia livre de Gibbs por unidade de volume para uma amostra no estado normal na ausência de campo magnético a uma temperatura T.
$g_n(T, H)$	Energia livre de Gibbs por unidade de volume para uma amostra no estado normal na presença de campo magnético a uma temperatura T.

Lista de Nomenclaturas

μ_0	Unidade de campo magnético utilizada para descrever o campo do dipolo na vizinhança de vórtices.
n_s^*	Densidade da fração de elétrons livres no supercondutor com comportamento supercondutor, também chamados superelétrons.
n_n	Densidade da fração de elétrons livres no supercondutor com comportamento normal.
n	Densidade total de elétrons livres no supercondutor, dada por $n = n_n + n_s^*$.
J_s	Densidade de corrente associada aos superelétrons.
λ_L	Comprimento de penetração de London.
$H_{ct}(T)$	Campo crítico termodinâmico, no caso dos supercondutores tipo I é idêntico a H_c . E para supercondutores tipo II, pode ser definido através da equação 2-38
n_s	Número de saturação, número máximo de quanta de fluxo que pode ser preso no interior de um defeito isolado.
r_p	Raio efetivo do centro de ancoragem.
F_p^c	Força de ancoragem crítica dos vórtices.
F_p	Força de ancoragem dos vórtices.
F_{vv}	Força de interação vórtice-vórtice.
F_{vp}	Força de interação entre um vórtice e um centro de ancoragem.
F_L	Força de Lorentz induzida pela supercorrente.
F_M	Força de Magnus.
Γ_T	Força estocástica resultante das flutuações térmicas no sistema.
η	Coefficiente de viscosidade.
U_{vv}	Potencial de interação vórtice-vórtice.
U_p	Potencial sentido pelos vórtices devido aos centros de ancoragem artificiais.

Lista de Nomenclaturas

D	Difusividade do vórtice.
h	Passo do tempo na discretização.
F_i	Força sobre o vórtice i .
u_i	Vetor com componentes de variáveis estocásticas gaussianas independentes.
N_v	Número de vórtices no sistema.
N_p	Número de centros de aprisionamento no sistema.
H_1	Valor do campo magnético no qual o número de vórtices é o mesmo que o número de centros de ancoragem.
a_p	Período da rede de centros de ancoragem.
Δ_F	Variação da força aplicada na rede de vórtices.
ΔN_v	Incremento do número de vórtices no sistema.
L	Tamanho da rede de vórtices.

Sumário

1	Introdução	16
2	Conceitos Teóricos da Supercondutividade	19
2.1	Breve Histórico da Supercondutividade	19
2.2	Termodinâmica da Transição Supercondutora	24
2.3	Teoria Fenomenológica de London	26
2.3.1	Validade da Teoria de London	30
2.4	Teoria de Ginzburg-Landau (GL) para o Estado Supercondutor	31
2.4.1	Energia Livre GL na Ausência de Campo Magnético	33
2.4.2	Comprimento de Coerência	36
2.4.3	Energia Livre GL na Presença de Campo Magnético	37
2.4.4	As Equações de GL	38
2.4.5	Comprimento de Penetração e Parâmetro de GL	39
2.4.6	Validade da Teoria de GL	41
2.5	Quantização do Fluxo Magnético	42
2.6	Supercondutividade do Tipo I e Tipo II	43
3	Vórtices em Supercondutores	47
3.1	Estado Misto	47
3.1.1	Rede de Abrikosov	48
3.2	O Vórtice	49
3.2.1	Estrutura de um Vórtice Isolado	50
3.2.2	Energia de um Vórtice Isolado	52
3.2.3	Interações entre Linhas de Vórtices	53

3.2.4	Vórtices em Filmes Finos	56
3.3	Equação de Movimento de um Vórtice	57
3.4	Supercondutores Nanoestruturados	59
3.4.1	Natureza dos Centros de Ancoragem	59
3.4.2	Redes Periódicas de Centros de Ancoragem	61
3.4.3	Diversos Trabalhos na Área	63
4	Simulações da Dinâmica de Vórtices em Supercondutores Nanoestruturados	70
4.1	Configurações de Equilíbrio	70
4.1.1	Metodologia	71
4.1.2	Recozimento Simulado	75
4.1.3	Comparação com outros padrões já observados	79
4.2	Estabilidade das Configurações em Relação a uma Corrente Aplicada	83
4.3	Magnetotransporte	86
4.3.1	Metodologia	86
4.3.2	Comparação das Curvas de Magnetoresistência obtida pelos dois Métodos.	89
4.4	Análise detalhada das Curvas de Magnetoresistência	91
5	Conclusões	99
	Referências	102

1 Introdução

Um material supercondutor é aquele que apresenta, simultaneamente, duas propriedades: resistência zero à passagem de corrente elétrica e diamagnetismo perfeito, o qual permite-lhe ser um dos materiais mais importantes na investigação da física de estado sólido. No entanto, a existência da supercondutividade é restrita por três parâmetros principais: a temperatura crítica, a corrente crítica e o campo magnético crítico. Durante as últimas décadas, um grande esforço foi direcionado para um aprimoramento desses parâmetros críticos porque eles são prejudiciais nas aplicações tecnológicas dos supercondutores. Um avanço em particular, em relação à temperatura crítica foi a descoberta dos supercondutores de alta temperatura em 1986.

Praticamente, todos os supercondutores que possuem características potenciais para aplicação são do tipo II, que permitem a nucleação parcial do campo formando tubos de fluxo magnético quantizados, conhecidos como vórtices. Sabe-se que a corrente crítica não é uma propriedade intrínseca do supercondutor mas que é fortemente dependente da microestrutura do material e da presença de defeitos cristalinos, que atuam como centros aprisionadores de vórtices. Por sua parte, quando uma corrente elétrica acima do valor crítico é aplicada ao supercondutor, os vórtices apresentam um movimento viscoso causando dissipação de energia e destruindo localmente o estado supercondutor. Na última década, um grande número de estudos demonstraram que a maneira mais eficiente de evitar essa passagem ao estado resistivo é prevenir o movimento dos vórtices, mediante o ancoramento deles em poços de potencial mesoscópicos. Os efeitos da interação entre os vórtices e estes centros de aprisionamento têm sido amplamente investigados, revelando que a introdução dos centros artificiais de *pinning* aumenta a corrente crítica, que resulta de estabilizar e ancorar os arranjos de vórtices contra a força motriz externa. Esse conhecimento, majoritariamente obtido de modo empírico, também é acompanhado do desenvolvimento de modelos teóricos que visam

associar diferentes tipos de centros de ancoramento de vórtices com comportamentos da dinâmica dos vórtices.

A grosso modo, os centros de aprisionamento são defeitos no material, normalmente estruturais ou estequiométricos, que podem ser naturais ou artificiais. Nesse sentido, demonstrou-se que por meio do processo de micro e nanofabricação, isto é, através de arranjos artificiais de defeitos com tamanhos e separações comparáveis às escalas de comprimento relevantes de supercondutores, o diagrama de fase pode ser alterado significativamente. Muito esforço tem sido conduzido no campo de centros de *pinning* artificiais em filmes finos supercondutores, entre eles as imperfeições aleatórias decorrentes da exposição de uma amostra ao fluxo de nêutrons ou de íons pesados e os defeitos periódicos, como *antidots* (arranjos de buracos), *blind holes* e pontos magnéticos.

Filmes supercondutores contendo arranjos periódicos de buracos fornecem uma forma útil para estudar uma variedade de novos fenômenos dos vórtices tais como efeitos de *pinning* comensurável, domínios dos vórtices e o aparecimento de vórtices multi-quanta nos *antidots*. O efeito de comensurabilidade deve-se à relação entre as forças de aprisionamento e a interação repulsiva vórtice-vórtice elástica, o qual aparece como mínimos na dependência do campo magnético com a tensão, $V(H)$, ou como máximos na dependência do campo com a corrente crítica, $I_c(H)$, quando um número inteiro de quantum de fluxo é comensurável com a célula unitária do arranjo de buraco artificial em um filme supercondutor. Este efeito é normalmente interpretado como um resultado do melhoramento do *pinning*, pois os vórtices são mais difíceis de se mover em campos comensuráveis. Assim, quando ocorre um aprimoramento do ancoramento, uma alta corrente crítica (ou mínimos de resistência/voltagem) pode ser alcançado.

Nesta dissertação, estudamos as propriedades de equilíbrio e de transporte da rede de vórtices em um filme fino supercondutor com a presença de potenciais periódicos gerados por uma rede artificial de um tipo de centros de ancoragem. A dissertação está organizada da seguinte forma: No **Capítulo 2**, apresentam-se alguns dos conceitos fundamentais sobre a descoberta da supercondutividade, assim como as teorias desenvolvidas que visavam explicar este fenômeno e as propriedades do estado supercondutor. No **Capítulo 3**, é feita uma revisão do comportamento dos supercondutores que apresentam o estado de vórtices, assim como as características de um vórtice isolado. Algumas propriedades dos centros de ancoragem e vários estudos sobre *pinning* em supercondutores

também são discutidos. No **Capítulo 4**, estudamos o efeito de um arranjo periódico de *antidots* sobre um filme fino supercondutor com condições de contorno periódicas. O qual é feito com a resposta estática e dinâmica do sistema. No **Capítulo 5**, apresentamos as conclusões do trabalho feito.

2 Conceitos Teóricos da Supercondutividade

2.1 Breve Histórico da Supercondutividade

Neste capítulo, apresentamos uma introdução geral à supercondutividade. As propriedades dos materiais supercondutores, os estudos teóricos que foram desenvolvidos para entendê-los e as características dos Supercondutores tipo II, assunto necessário para entender a dinâmica de vórtices.

O descobrimento da supercondutividade deve-se a uma série de impressionantes descobertas experimentais, completamente inesperadas, que tiveram origem na corrida entre Heike Kamerlingh Onnes e Sir James Dewar (conhecida como “Corrida ao zero absoluto”), que se deu com o objetivo de atingir a temperatura mais baixa. Essa competição terminaria no dia 10 de Julho de 1908 no seu laboratório em Leiden, quando Onnes conseguiu liquefazer o hélio obtendo temperaturas de até 1.04K; tarefa nada simples de reproduzir, tão assim que pelos 15 anos seguintes a Universidade de Leiden era o único local no mundo onde o hélio líquido podia ser produzido. Por isso mesmo que ninguém ficou surpreso ao saber que o fenômeno da supercondutividade foi descoberto três anos depois, em Leiden (1911) [1].

Desde então, Onnes interessou-se por saber o que poderia acontecer com os elétrons de um metal ao ser esfriado. O estudante de Onnes, Gilles Holst e Master G. J. Flim, técnico encarregado, mediram a resistência de um capilar de mercúrio puro, diminuindo sua temperatura, observando que quando esta atingia os 4.2 K, a resistência elétrica DC caía abruptamente enquanto a corrente

fluía livremente pelo material. Foi assim como eles descobriram o estado supercondutor, definido pelo próprio Onnes um ano após [2] e uma de suas propriedades, a resistência nula abaixo de uma certa temperatura, denominada Temperatura Crítica (T_c). Os materiais com essa propriedade são chamados *supercondutores*. Este comportamento atípico de $R(T)$ foi interpretado como resultante de uma transição de fase a uma temperatura bem definida, T_c , de um estado metálico, com comportamento elétrico normal resistivo, para um estado supercondutor, com resistência elétrica nula.

Anos depois, em 1913¹ medidas conduzidas por Onnes provaram a supercondutividade do mercúrio e revelaram que o estado supercondutor não está somente limitado por T_c , mas também por um dado valor limite da densidade de corrente elétrica [3], chamada densidade de corrente crítica J_c , acima da qual o mercúrio tinha de novo um comportamento eletrônico normal.

Já em 1914, foi observado por Onnes que depois de um valor limite, o campo magnético externo leva o material de volta a suas características da temperatura ambiente, definindo assim o campo crítico H_c [4]. Estes três parâmetros irão determinar a permanência da supercondutividade (vide Figura 2-1).

Dois anos mais tarde, F. Silsbee demonstrou que quando a supercondutividade é destruída ao exceder um valor crítico da densidade de corrente, esta gera um campo crítico H_c no supercondutor [5]².

A condutividade perfeita não é a única característica curiosa dos materiais supercondutores. Vinte anos depois do descobrimento da supercondutividade, Walther Meissner e Robert Ochsenfeld encontraram que um supercondutor é mais que do que um condutor perfeito. Ele atua também como um material diamagnético perfeito [6, 7]. Quando uma amostra supercondutora é resfriada abaixo de T_c , na presença de um campo magnético fraco, a indução magnética em seu interior é nula, $\vec{B} = 0$ [8]. Este efeito conhecido como Efeito Meissner, é mantido até atingir o H_c , o qual separa o estado supercondutor e o estado normal por uma transição de fase. A propriedade do diamagnetismo perfeito não é uma consequência natural da condutividade perfeita, pois as

¹Ano no qual Onnes ganhou o prêmio Nobel em Física, pelas suas pesquisas nas propriedades da matéria em baixa temperatura, mas não pela descoberta da supercondutividade.

²Esta regra é aplicada a todos os supercondutores, exceto os filmes finos.

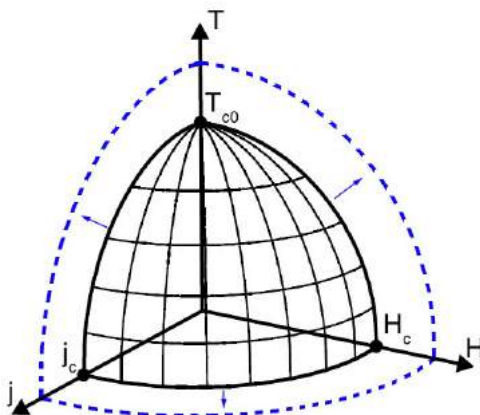


Figura 2-1: Propriedades críticas dos materiais supercondutores.

equações de Maxwell dizem que o campo magnético no interior de um condutor é independente do tempo, insinuando que se existe fluxo no interior da amostra acima de T_c , não vai ser detetada qualquer mudança em sua distribuição quando resfriado a uma temperatura inferior a T_c . Em outras palavras, se inicialmente não havia campo magnético, um condutor vira um diamagneto perfeito em baixas temperaturas, mas se temos campo magnético e baixamos a temperatura, o condutor irá permanecer com esse campo. Pelo contrário, o supercondutor sempre expulsa o campo magnético, independente da história magnética da amostra. Para que o supercondutor seja capaz de expelir o campo magnético em que se encontra imerso é necessário haver correntes elétricas superficiais em uma fina camada de material³, conhecidas como correntes de blindagem, que percorrem a superfície criando um campo magnético que anula o campo externo no interior do supercondutor. O mencionado anteriormente é ilustrado esquematicamente na Figura 2-2.

Além da condutividade e do diamagnetismo perfeito, também há a anomalia exibida pelo calor específico que caracteriza o estado supercondutor, aliás esta é a evidência experimental mais clara da ocorrência de um fenômeno de transição de fases em T_c .

Este comportamento dos materiais supercondutores, foi explicado com sucesso até o ano de 1950, com a teoria fenomenológica de Ginzburg e Landau baseada no trabalho de Gorter e Casimir. Mas nos anos anteriores, alguns modelos tiveram bastante renome como foi o dos irmãos Fritz e

³A espessura desta camada é determinada por um parâmetro dependente da temperatura, chamado comprimento de penetração λ .

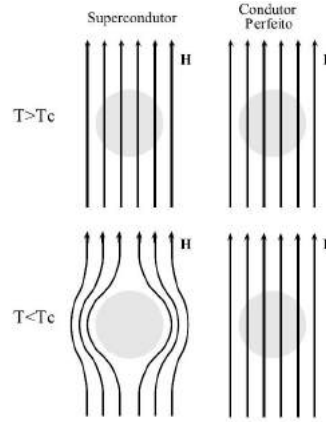


Figura 2-2: Na presença de um campo magnético externo, $H < H_c$, um supercondutor expulsa o fluxo magnético quando é resfriado abaixo de T_c , entanto, em um condutor perfeito, o fluxo permanece o mesmo.

Heinz London (1935), que desenvolveram a primeira teoria fenomenológica da supercondutividade [9], podendo descrever o comportamento da indução magnética e das correntes dentro do material, mesmo sem dar uma explicação das propriedades eletrodinâmicas da transição e da natureza dos portadores de carga. Neste mesmo ano, um grupo liderado por L.V Shubnikov em Kharkov, mostrou que monocristais de PbTl_2 exibiam dois campos críticos H_{c1} e H_{c2} . Assim o material apresentava propriedades distintas, uma vez que abaixo de H_{c1} o fluxo era expelido do interior do material, confirmando o encontrado por Meissner, porém acima deste campo e abaixo de H_{c2} o fluxo penetrava parcialmente, dando lugar a uma fase mista, que segundo seu parecer era instável. Agora, quando o campo externo atinge o valor de H_{c2} , o fluxo ocupa todo o material deixando seu comportamento supercondutor; deste modo, foram descobertos os supercondutores tipo II por Shubnikov, em honra a isso o novo estado físico que aparece nestes materiais é conhecido como Estado Misto ou estado de Shubnikov.

Prosseguindo no tempo, nos anos 50, Vitaly Ginzburg e Lev Landau [10] propuseram uma nova teoria fenomenológica, conhecida como Teoria de Ginzburg-Landau (GL), a qual explicava a maioria das propriedades macroscópicas dos supercondutores, mesmo sem dar explicação microscópica do mecanismo da supercondutividade. Para esse tempo, já se presumia que a supercondutividade era um fenômeno quântico. Assim, em 1956 Alexei Abrikosov observou que em certos limites as

previsões de GL eram violadas e conseguiu interpretar a instabilidade da fase onde coexistem o magnetismo e a supercondutividade. Logo, na região da fase mista em supercondutores tipo II, Abrikosov demonstrou teoricamente a entrada de campo magnético, a qual ocorre em forma de vórtices, isto é, em pacotes de fluxo magnético quantizados, os quais formam uma rede regular em um supercondutor homogêneo [11].

Finalmente, a abordagem microscópica quântica da supercondutividade chegou em 1957 com John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer [12], que formularam a chamada teoria BCS. Baseada na idéia de que o estado fundamental eletrônico é formado pela interação entre fônons e elétrons, e os portadores de carga são pares de elétrons com direções de spin e momentos opostos, que movem-se sem dissipação, chamados de pares de Cooper [13]. A teoria antevê que os pares de Cooper são os portadores da supercorrente, isto é, os elétrons se repelem por repulsão coulombiana no estado normal, enquanto no estado supercondutor eles se agregam em pares, pois é energeticamente mais favorável. Dessa forma, eles não dissipam energia ao movimentar-se no supercondutor. Estes pares de Cooper são formados pela interação atrativa dos elétrons mediada pela deformação da rede. Em 1986, J. G. Bednorz e K. A. Müller [14] descobriram os supercondutores de alta temperatura crítica no sistema *LaBaCuO*. Tempo depois, foi descoberto um composto do sistema Y-Ba-Cu-O à temperatura de 92 K. Embora a supercondutividade à temperatura ambiente não tem sido conseguida, os supercondutores são muito usados na atualidade e as pesquisas em supercondutividade tem se tornado um dos campos mais intensos em pesquisas físicas, principalmente no que diz respeito às aplicações tecnológicas. As aplicações atuais de supercondutores de alta temperatura incluem; dispositivos de blindagem magnética, sistemas de imagens médicas, dispositivos supercondutores de interferência quântica (em inglês, SQUIDS), sensores infravermelhos, dispositivos de processamento de sinais analógicos e dispositivos de microondas. Com o aumento da nossa compreensão das propriedades dos supercondutores surgiram aplicações mais práticas tais como; transmissão de energia, magnetos supercondutores em geradores, dispositivos de armazenamento de energia, aceleradores de partículas, transporte de veículos levitados, máquinas rotativas e separadores magnéticos.

A manifestação de efeitos quânticos em escala macroscópica, que está na essência do fenômeno, tem fascinado e desafiado ao longo de décadas a imaginação dos especialistas na área, muitos dos quais contribuíram com grandes avanços ao conhecimento científico. Muitas aplicações tecnológicas

dos supercondutores já foram concebidas e provavelmente outras tantas serão inventadas, e sendo superadas as dificuldades das baixas temperaturas, muitas delas se tornarão parte do dia a dia das pessoas.

2.2 Termodinâmica da Transição Supercondutora

Como dito acima, uma das principais características da supercondutividade é a perda da resistividade elétrica. Então como a condução elétrica existe graças às cargas que se movem ao longo do material, pode-se associar a transição supercondutora ao conjunto de elétrons. Assim, a supercondutividade deve-se manifestar sob a forma de um estado eletrônico mais ordenado. Esta passagem a um estado de menor entropia é graças à existência de interações entre elétrons, quando o material atinge a temperatura crítica. Logo, a temperatura crítica é uma variável termodinâmica determinante para a ocorrência da transição supercondutora. A outra variável é o campo magnético [15].

É possível obter alguma informação a respeito do campo crítico, considerando o efeito de um campo magnético sobre a energia livre de um supercondutor. O interesse em analisar a energia livre reside no fato de que, em qualquer sistema, o estado estável é aquele com a menor energia livre. Considerando a energia livre de Gibbs, pois inclui a contribuição magnética, pode-se comparar a diferença desta para o estado normal e supercondutor, quando submetidos a um mesmo campo magnético.

Considerando que uma amostra se torna supercondutora, quando resfriada abaixo da sua temperatura crítica, a energia livre do estado supercondutor deve ser menor que a energia livre do estado normal. Imaginando a amostra no estado supercondutor, a uma temperatura T , na ausência de campo e com uma energia livre de Gibbs por unidade de volume dada por $g_s(T, 0)$. Quando um campo magnético de intensidade H_a é aplicado paralelo ao eixo principal da amostra, a mesma adquire uma magnetização negativa, ou seja, internamente existirão correntes de blindagem que criarão o campo magnético no sentido contrário, a fim de anular exatamente o fluxo no seu interior. Nessa situação, a energia livre por unidade de volume é aumentada em $\mu_0 H_a^2 / 2$, que representa a quantidade de energia necessária para manter o campo fora do material, quando $H_a > H_c$, evitando

assim a destruição da supercondutividade. Então, a variação na energia livre do supercondutor será:

$$g_s(T, H) - g_s(T, 0) = \frac{\mu_0 H_a^2}{2} \quad (2-1)$$

O estado normal é não magnético. Portanto tem magnetização desprezível ante um campo magnético aplicado. Consequentemente, a aplicação de um campo magnético não varia a energia livre do estado normal, ou seja, $g_n(T, H) = \text{constante}$. A Figura 2-3 mostra o efeito do campo magnético sobre a energia livre de Gibbs [16]. Se o campo magnético for aumentado até H_c ,

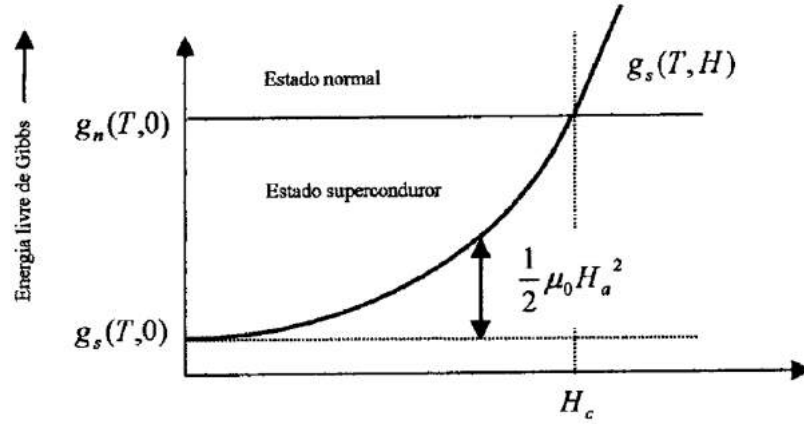


Figura 2-3: Efeito do campo magnético sobre a energia livre de Gibbs nos estados normal e supercondutor [16].

o material deixará de ser supercondutor e se tornará normal, isto é, a energia livre do estado supercondutor se tornará maior que a do estado normal,

$$g_s(T, H) > g_n(T, 0). \quad (2-2)$$

Logo, é energeticamente mais favorável ir para o estado normal que criar correntes de blindagem e pares de Cooper para manter o estado supercondutor. Usando a equação 2-1, temos

$$\begin{aligned} g_s(T, 0) + \frac{1}{2}\mu_0 H_a^2 &> g_n(T, 0) \\ \frac{1}{2}\mu_0 H_a^2 &> g_n(T, 0) - g_s(T, 0) \end{aligned} \quad (2-3)$$

Desta forma temos a expressão para o valor máximo de campo magnético que pode ser aplicado sobre a amostra, para que este permaneça no estado supercondutor,

$$H_c(T) = \left[\frac{2}{\mu_0} (g_n(T, 0) - g_s(T, 0)) \right]^{1/2} \quad (2-4)$$

Baseado em curvas da resistência em função do campo aplicado, Onnes encontrou que o comportamento do campo crítico $H_c(T)$ segundo a temperatura, é dado por uma lei parabólica,

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (2-5)$$

A variação da entropia na transição supercondutor-normal, é dada por:

$$\Delta S = \int dV \left(\frac{\partial g_n}{\partial T} - \frac{\partial g_s}{\partial T} \right) = \mu_0 H_c \frac{\partial H_c}{\partial T} \quad (2-6)$$

Substituindo na equação 2-5, temos

$$\Delta S = 2\mu_0 H_c^2(0) \left[\left(\frac{T}{T_c^2} - \frac{T^3}{T_c^4} \right) \right] \quad (2-7)$$

Como podemos ver, em $T = T_c$ e na ausência de campo, a variação da entropia é zero, é dizer, a entropia na transição é contínua, caracterizando uma transição de segunda ordem, o qual pode ser verificado através da descontinuidade do calor específico $C = T \frac{\partial S}{\partial T}$. Agora, na presença de um campo externo, a uma temperatura $T < T_c$, a transição ocorre quando $H_a = H_c(T)$ resultando em uma descontinuidade da entropia nesse ponto, o que caracteriza uma transição de primeira ordem.

2.3 Teoria Fenomenológica de London

Com o objetivo de formular um modelo capaz de contemplar as propriedades eletrodinâmicas específicas de um supercondutor, os irmãos Fritz e Heinz London, em 1935, propuseram uma teoria fenomenológica [9]. Sua teoria baseia-se num modelo de dois fluidos, o qual supõe que para $T < T_c$, todos os elétrons livres no material supercondutor podem ser divididos em dois grupos: uma fração dos elétrons comporta-se de forma normal, enquanto que os elétrons restantes exibem um comportamento anômalo, os quais são responsáveis pelas propriedades supercondutoras. Isto é, temos uma fração de superelétrons com densidade n_s^* e os restantes com densidade n_n .

A densidade de superelétrons n_s^* é zero quando T se eleva para T_c , ou seja, $n_s^*(T_c) = 0$ e se aproxima da densidade eletrônica total n quando T cai muito abaixo de T_c , e para $T = 0$ temos $n_s^*(0) = n$. O restante de elétrons $n - n_s$ permanecerá praticamente inerte [17].

Os superelétrons não são espalhados nem por impurezas nem por vibrações da rede, então não contribuem com a resistividade [18]. Logo, não estão sujeitos à lei de Ohm e portanto quando submetidos a um campo elétrico, são acelerados, sem dissipação.

Então, ao se aplicar um campo elétrico em um supercondutor, como nos superelétrons não há nenhuma força contrária ao deslocamento dos portadores de corrente, estes são acelerados com velocidade média v_s que de acordo com a segunda lei de Newton é dada por:

$$m^* \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt} \right) = e^* \vec{E} \quad (2-8)$$

Se há n_s superelétrons por unidade de volume, movendo-se com velocidade v_s , então podemos escrever a densidade de corrente associada a estas super-partículas como:

$$\vec{J}_s = n_s e^* \vec{v}_s \quad (2-9)$$

onde m^* , e^* e v_s são respectivamente a massa, a carga e a velocidade dos portadores de carga supercondutores. Aliás, com a teoria microscópica da supercondutividade sabemos que m^* e e^* são respectivamente, a massa e a carga de um par de Cooper, ou seja, $m^* = 2m$, $e^* = 2e$ e $n_s^* = \frac{n_s}{2}$, sendo m e e a massa e a carga do elétron.

Derivando a equação 2-9, temos:

$$\frac{d}{dt} \vec{J}_s = n_s^* e^* \frac{d}{dt} \vec{v}_s \quad (2-10)$$

Usando a equação 2-8 temos,

$$\frac{d}{dt} \vec{J}_s = \frac{n_s^* (e^*)^2}{m^*} \vec{E} \quad (2-11)$$

a qual é conhecida como a primeira equação de London, que descreve a condutividade perfeita, pois o menor campo elétrico é capaz de acelerar os superelétrons e não somente manter o movimento como prediz a lei de Ohm.

Aplicando o rotacional nos dois lados da equação 2-11,

$$\frac{d}{dt} (\nabla \times \vec{J}_s) = \frac{n_s^* (e^*)^2}{m^*} \nabla \times \vec{E} \quad (2-12)$$

e usando a lei de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2-13)$$

obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{J}_s + \frac{n_s^*(e^*)^2}{m^*}\vec{B}) = 0. \quad (2-14)$$

Com a lei de Ampère,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s \quad (2-15)$$

e a equação 2-14, obtém-se as condições que determinam os campos magnéticos e densidades de corrente num condutor perfeito. Estas condições são compatíveis com $\vec{B}$ arbitrário e independente do tempo, pois das equações 2-14 e 2-15 temos que,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \nabla \times \vec{B} + \frac{n_s^*\mu_0(e^*)^2}{m^*}\vec{B}) = 0 \quad (2-16)$$

Este resultado, não é satisfatório para descrever o efeito Meissner. Assim é necessário restringir as soluções da equação 2-14 [ou 2-16] somente àquelas em que a própria expressão seja nula, isto é, garantir a expulsão do fluxo magnético dentro do supercondutor,

$$\nabla \times \vec{J}_s + \frac{n_s^*\mu_0(e^*)^2}{m^*}\vec{B} = 0. \quad (2-17)$$

Obtém-se assim a segunda equação de London, a qual é a mais famosa da teoria de London, pois caracteriza a eletrodinâmica dos supercondutores, diferenciando-os dos condutores perfeitos.

Usando em 2-16 a igualdade, $\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{B})$, temos

$$\nabla^2 \vec{B} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{B}) - \frac{n_s^*\mu_0(e^*)^2}{m^*}\vec{B} = 0 \quad (2-18)$$

Como o divergente de $\vec{B}$ é nulo pela lei de Gauss, a equação 2-18 é simplificada como⁴,

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad (2-19)$$

⁴Uma derivação alternativa desta equação esta baseada na idéia que o movimento dos elétrons comporta-se coletivamente como um superfluido, um líquido sem viscosidade. Essa demonstração foi baseada no modelo de dois fluidos aplicado ao Hélio líquido, onde uma parte se comporta como um material sem viscosidade, e a outra como um material viscoso [19].

onde,

$$\lambda_L = \left(\frac{m^*}{n_s^* \mu_0 (e^*)^2} \right)^{1/2} \quad (2-20)$$

é o comprimento de penetração de London, o qual é um dos parâmetros característicos mais importantes do estado supercondutor, pois mede o quanto do campo magnético penetra no interior do material supercondutor. Podemos escrever o λ_L sem fazer referência aos pares de Cooper, substituindo os valores das grandezas com estrela, então $\frac{n_s^* (e^*)^2}{m^*} = \frac{n_s e^2}{m}$, o qual resulta em:

$$\lambda_L = \left(\frac{m^*}{n_s^* \mu_0 (e^*)^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{m}{n_s \mu_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (2-21)$$

Podemos resolver a equação 2-19, supondo que temos um supercondutor semi-infinito, tal que a região $x < 0$ é preenchida pelo vácuo e $x > 0$ é material supercondutor. Além disso, o campo magnético é aplicado paralelo à superfície da amostra, onde $\vec{B}$ aponta na direção z e a penetração ocorre na direção x , tendo assim um problema unidimensional, dado por:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B \quad (2-22)$$

A solução desta equação, para a componente x é:

$$B(x) = \begin{cases} B_0 & \text{se } x < 0 \\ B_0 e^{(-\frac{x}{\lambda})} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (2-23)$$

onde B_0 é o valor de indução magnética no exterior da amostra. Este resultado leva diretamente ao Efeito Meissner, pois a segunda equação de London (2-19) indica que o campo tende à zero no interior da amostra [18]. Aliás, esta equação mostra que a indução magnética decai exponencialmente na medida em que penetra no supercondutor.

A Figura 2-4 representa a equação 2-23, e mostra que o comprimento de penetração é uma medida da extensão em que a indução magnética penetra no supercondutor. Em temperaturas inferiores a T_c , observa-se experimentalmente que o comprimento λ_L tem valores que variam entre algumas dezenas e poucas centenas de nanômetros. Mas a teoria permite prever, segundo $\lambda_L \sim n_s^{-1/2}$, que o comprimento de penetração diverge para infinito quando T tende para T_c [20]. De fato, este comportamento é observado.

A partir da equação 2-17 e usando a lei de Ampère-Maxwell, obtemos que:

$$\nabla^2 \vec{J}_s + \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{J}_s = 0 \quad (2-24)$$

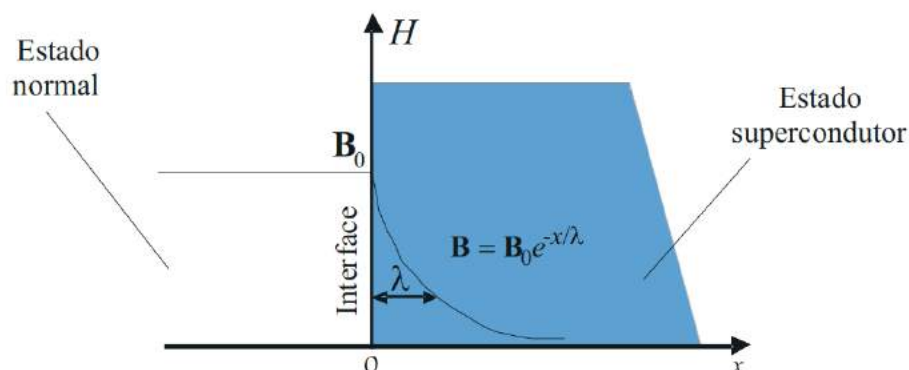


Figura 2-4: Penetração do campo magnético através da superfície de um supercondutor. A magnitude de $\vec{B}$ atenua-se exponencialmente à medida que penetra no supercondutor. Essa atenuação ocorre na escala do comprimento de penetração λ [20].

a qual permite afirmar que as correntes de blindagem também se limitam a uma fina camada superficial do supercondutor, cuja espessura é da ordem de λ_L . Esta corrente de super-elétrons vai ter comportamento do decaimento exponencial, mesmo que o campo magnético.

2.3.1 Validade da Teoria de London

A teoria de London, pode-se aplicar a sistemas supercondutores somente cumprindo as seguintes condições:

- O comprimento de penetração de London precisa ser muito maior do que o comprimento de coerência, $\lambda \gg \xi$.
- H é pequeno e pode ser tratado como uma perturbação, i.e., para campos muito menor que o segundo campo crítico H_{c2} podemos aplicar a teoria de London.
- A densidade de elétrons supercondutores é aproximadamente constante.

2.4 Teoria de Ginzburg-Landau (GL) para o Estado Supercondutor

A mais bem sucedida descrição macroscópica da supercondutividade foi introduzida pelos russos, Vitaly Ginzburg e Lev Landau em 1950. Esta descrição, que é chamada de teoria de Ginzburg-Landau [10], ou simplesmente teoria GL, deriva do estudo proposto por Landau para as transições de fase de segunda ordem. Landau foi o primeiro a perceber (1937) [21] que todas as transições de fase de segunda ordem quebram simetria espontaneamente, e a simetria do sistema no estado ordenado (abaixo do ponto crítico) é menor que a simetria do estado desordenado. Para descrever tal fenômeno, Landau se fundamentou na hipótese da existência de uma variável termodinâmica, chamada parâmetro de ordem, que caracteriza o estado ordenado de baixas temperaturas. O parâmetro tende a zero continuamente quando a temperatura se aproxima da temperatura crítica. Assim, Ginzburg e Landau, propuseram um parâmetro de ordem para o estado supercondutor de modo que a transição supercondutor-normal pudesse ser tratada como uma transição de fase, em analogia com os estados físicos da matéria. Mas, certamente que a supercondutividade é uma transição mais sutil, devido a que a transição ocorre no comportamento dos elétrons de condução do material. Trata-se de uma descrição do tipo campo médio que produz resultados muito bons para a transição supercondutora.

As transições de fase são normalmente entendidas como mudanças nas propriedades físicas de uma dada substância com a variação das condições externas⁵ a que está submetida. Com este raciocínio pode-se classificar o estado supercondutor como sendo uma transição de fase, onde o comportamento dos elétrons de condução do metal apresentam características distintas, acima e abaixo do ponto crítico onde ocorre a transição.

O aspecto central da teoria GL é o conceito de parâmetro de ordem supercondutor. Então, partimos da hipótese de que os supercondutores contêm uma densidade de superelétrons n_s e uma densidade de elétrons normais $n - n_s$, e que o comportamento dos superelétrons é descrito pelo parâmetro de ordem. Esta idéia tem origem na proposta da teoria de London que consiste em

⁵Estas condições são determinadas pelas chamadas variáveis termodinâmicas, como exemplo temos a temperatura, a pressão, o volume, o campo magnético, etc.

caracterizar o estado supercondutor como um estado quântico macroscópico, no qual a densidade de superelétrons (n_s), está associada ao comprimento de penetração (equação 2-20). Ginzburg e Landau generalizaram esta noção introduzindo um parâmetro de ordem complexo, $\Psi(\vec{r})$, que assume a seguinte forma:

$$\Psi(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|e^{i\varphi(\vec{r})} \quad (2-25)$$

tal que $|\Psi(\vec{r})|^2$ representa a densidade local de superelétrons, ou seja,

$$|\Psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r}) \quad (2-26)$$

Portanto, de acordo com a equação 2-20, $\Psi(\vec{r})$ deve decrescer continuamente a zero quando a temperatura se aproxima de T_c , onde λ_L se torna infinito. Então, acima da T_c a função de onda $\Psi(\vec{r})$ se anula e abaixo da T_c a função de onda $\Psi(\vec{r}) \neq 0$ [10], ou seja:

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 \quad \text{se} \quad T > T_c \\ \Psi &\neq 0 \quad \text{se} \quad T < T_c \end{aligned} \quad (2-27)$$

Da equação 2-27 podemos dizer que para uma $T > T_c$, estamos na fase desordenada, ao passo que para $T < T_c$ o material encontra-se na fase ordenada. Além disso, diferentemente da teoria de London, a densidade de superelétrons não é necessariamente homogênea na teoria de GL. Além de depender da posição e da temperatura, o parâmetro de ordem da transição, $\Psi(\vec{r})$ também deve variar segundo campos magnéticos aplicados.

Embora, $\Psi(\vec{r})$ deva ser tratado como um parâmetro de ordem, esta quantidade se apresenta, em certos aspectos, como uma “pseudo função de onda macroscópica” para os elétrons supercondutores. Os trabalhos de Gorkov⁶ [22] ajudaram para a interpretação desta pseudo função de onda quântica que descreve o centro de massa dos superelétrons num supercondutor. Como todos os pares de Cooper condensam no mesmo estado, de dimensão macroscópica, uma única função de onda é suficiente para descrevê-los em conjunto.

⁶Em 1959, demonstrou que, em certos limites de temperatura e campo magnético, as equações da teoria GL podem ser derivadas a partir da teoria BCS.

2.4.1 Energia Livre GL na Ausência de Campo Magnético

O conceito do parâmetro de ordem Ψ permitiu a Landau escrever a energia livre de qualquer sistema nas proximidades do ponto crítico sob a forma de uma expansão em série de potências de Ψ . Uma representação particular desta expansão não depende da natureza das forças que atuam no sistema nem do caráter da transição de fase em questão. Ela é completamente definida pela simetria do sistema e pelo número de componentes do parâmetro de ordem.

Próximo à transição de fase (como nas vizinhanças da T_c) Ψ é pequeno e tem variações suaves no espaço⁷, de modo que as variações de $\Psi(\vec{r})$ são determinadas pela minimização da energia livre de Helmholtz, cuja expressão é a versão supercondutora da expansão em série de potências do parâmetro de ordem da teoria de Landau para as transições de fase de segunda ordem. Assim, na ausência de campos magnéticos aplicados, a densidade de energia livre de Helmholtz f_s é dada por:

$$f_s(|\Psi(\vec{r})|, T) = f_n(T) + \alpha(T)|\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi(\vec{r})|^4 + \gamma|\nabla\Psi(\vec{r})|^2 \quad (2-28)$$

onde $f_n(T)$ refere-se ao estado normal e α , β , γ são parâmetros fenomenológicos. Na expansão deve-se excluir o termo proporcional a $|\Psi(\vec{r})|$, pois este impediria que o estado com parâmetro de ordem nulo, isto é a fase normal, seja um estado de equilíbrio. Com relação ao termo cúbico no módulo do parâmetro de ordem, este é relevante na descrição de transições de fase de primeira ordem, o que não é o caso da transição supercondutora. O termo proporcional a $|\nabla\Psi(\vec{r})|^2$ reflete o preço da energia livre causada pela variação espacial de $\Psi(\vec{r})$.

Vamos considerar o caso de um sistema homogêneo em que não há gradientes do parâmetro de ordem. Assim, a expressão para a densidade de energia livre se reduz a:

$$f_s(|\Psi(\vec{r})|, T) = f_n(T) + \alpha(T)|\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi(\vec{r})|^4 \quad (2-29)$$

O estado de equilíbrio do sistema será dado pela minimização da densidade de energia livre,

$$\frac{\partial f_s}{\partial |\Psi|} = 2\alpha|\Psi| + 2\beta|\Psi|^3 = 0 \quad (2-30)$$

⁷Nestas circunstâncias a expressão para a energia livre pode ser expandida numa série de potências pares do parâmetro de ordem $|\Psi(\vec{r})|^2$. De fato, o modelo expande somente em potências pares para garantir a simetria de inversão $\Psi \rightarrow -\Psi$ [23].

As soluções são:

$$|\Psi|^2 = 0 \quad e \quad |\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (2-31)$$

O tipo de solução procurada é aquela que fornece $\Psi = 0$ para $T > T_c$ e $\Psi \neq 0$ para $T < T_c$. Logo, $(-\alpha/\beta)$ deve ser positivo abaixo de T_c , nulo em $T = T_c$ e negativo (nao-físico) acima de T_c . Em regra, supõe-se que β é uma constante positiva. Portanto, é necessário que $\alpha(T)$ mude de sinal em T_c . Acima de T_c , α deve ser positivo para que o mínimo de f_s ocorra em $|\Psi|^2 = 0$, o que corresponde ao estado normal. Abaixo de T_c , α deve ser negativo para que uma solução com $|\Psi|^2 \neq 0$ privilegie a energia livre do estado supercondutor em relação ao estado normal. Com a expansão de $\alpha(T)$ em torno de T_c e conservando só o termo de mais baixa ordem, temos

$$\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c) \quad (2-32)$$

Então, na ausência de gradientes, a expansão 2-29 pode ser escrita como:

$$f_s - f_n = \alpha_0(T - T_c)|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 \quad (2-33)$$

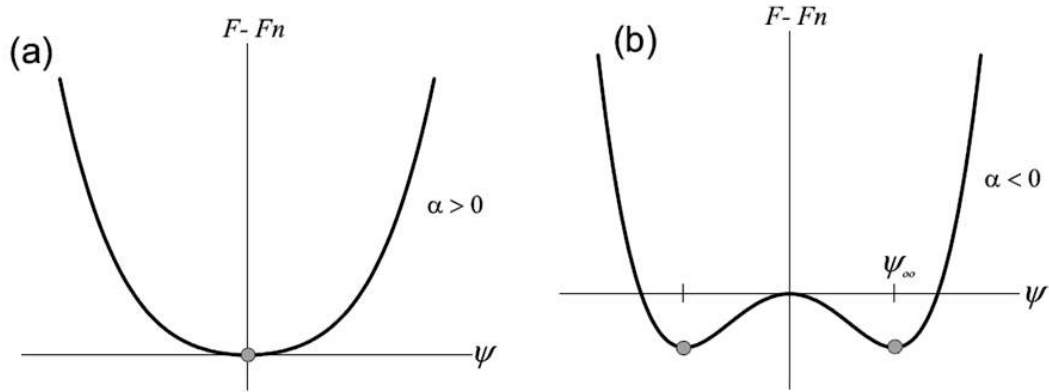


Figura 2-5: Diferença da densidade de energia livre GL para (a) $T > T_c$, $\alpha > 0$ e (b) $T < T_c$, $\alpha < 0$. Os círculos cheios correspondem aos valores de equilíbrio termodinâmico [24].

O comportamento de Δf acima e abaixo de T_c está na figura 2-5 [24]. Os estados de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= 0 \quad \text{para } T > T_c \\ |\Psi|^2 &= \Psi_0^2 = -\frac{\alpha_0}{\beta}(T - T_c) \quad \text{para } T < T_c \end{aligned} \quad (2-34)$$

As densidades de energia livre de equilíbrio serão:

$$\begin{aligned} f_s &= f_n \quad \text{para } T > T_c \\ f_s &= f_n - \frac{\alpha_0^2}{2\beta}(T - T_c)^2 \quad \text{para } T < T_c \end{aligned} \quad (2-35)$$

Mesmo sendo esta uma formulação simple da teoria, contém as características essenciais da transição supercondutora. Em particular, a partir da expressão para a energia livre é possível calcular a entropia, pois $S = -\partial f / \partial T$. Então, a diferença entre as densidades de entropia dos dois estados, é dada por:

$$S_s - S_n = -\frac{\alpha_0^2}{\beta}(T_c - T) \quad (2-36)$$

Isso mostra que é mais favorável para o sistema que ele permaneça no estado supercondutor quando abaixo de T_c , uma vez, que para $T < T_c$, o lado esquerdo da equação 2-36 permanece negativo, isto é, a existência de um parâmetro de ordem não nulo no estado supercondutor produz uma diminuição na entropia do sistema. Além disso, a ausência de uma divergência na entropia revela a não existência de calor latente, o que caracteriza esta transição como de segunda ordem. No entanto, o calor específico $c = T(\partial S / \partial T)$, apresenta uma descontinuidade em $T = T_c$,

$$[c_S - c_N]_{T=T_c} = \frac{\alpha_0^2}{\beta} T_c \quad (2-37)$$

A diferença entre as densidades de energia livre no estado normal e no estado supercondutor, permite estimar o campo crítico H_c , encontrando também a relação deste com os parâmetros α e β , já que na ausência de campos a energia livre de Gibbs é igual à energia livre de Helmholtz. Quando o campo atinge o seu valor crítico, a energia livre ganha pelo sistema através do processo eletrônico de condensação ao estado supercondutor estará exatamente compensada. Então, usando a equação 2-35 para $T < T_c$,

$$f_n - f_s = \frac{\alpha_0^2}{2\beta}(T - T_c)^2 = \frac{1}{2}\mu_0 H_{ct}^2 \quad (2-38)$$

onde H_{ct} expressa o campo crítico termodinâmico⁸.

⁸No caso dos supercondutores tipo I é idêntico a H_c . E para supercondutores tipo II, pode ser definido através da equação 2-38.

2.4.2 Comprimento de Coerência

Tendo em conta o tratamento acima descrito, mas agora considerando variações espaciais do parâmetro de ordem $\Psi(r)$, então é necessário considerar o termo proporcional a $|\nabla\Psi|^2$ na expressão para a densidade de energia livre. Assim como β , o coeficiente γ que acompanha este termo pode ser tomado como uma constante positiva, pois haverá um custo energético para mudar espacialmente o parâmetro de ordem. Ginzburg e Landau propuseram que⁹:

$$\gamma = \frac{\hbar^2}{2m^*} \quad (2-39)$$

lembrando que m^* é a massa dos superelétrons. Assim como foi feito no caso da equação 2-30, é possível ter a condição de estabilidade da teoria GL, a qual deriva da minimização da energia livre (equação 2-28), obtendo a equação:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = -\alpha\Psi \quad (2-40)$$

a qual lembra a equação de Schrödinger. Temos que esta última equação representa uma equação diferencial de segunda ordem não linear. Escrevendo a equação 2-40 como,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha}\nabla^2 + \frac{\beta}{\alpha}|\Psi|^2 + 1\right)\Psi = 0 \quad (2-41)$$

esta mostra que a quantidade $-\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha}$ possui a dimensão de um comprimento ao quadrado. Interpretando o significado físico deste comprimento, assumimos que o parâmetro de ordem pode ser escrito como $\Psi = \Psi_0 f$, onde $\Psi_0^2 = -\alpha/\beta$ e f é real. Considerando uma dimensão só, então a equação 2-41 torna-se

$$\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}\frac{d^2 f}{dx^2} - f^3 + f = 0 \quad (2-42)$$

a qual mostra que a escala natural para a variação de f é o comprimento

$$\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}\right)^2 = \xi(0)(1-t)^{-1/2} \quad (2-43)$$

Este comprimento característico é chamado de *comprimento de coerência GL*, onde $t = \frac{T}{T_c}$ é a temperatura reduzida, portanto $\xi(T)$ diverge em $T = T_c$ e constitui numa medida que caracteriza a variação espacial do parâmetro de ordem no interior do vórtice, isto é, fornece o valor do quanto

⁹A justificativa desta escolha foi feita por Gorkov, ao demonstrar a fundamentação da teoria GL a partir da teoria microscópica.

o parâmetro de ordem se estende até ir à zero (estado normal). Para entender isto melhor, temos a equação 2-42 que em termos de $\xi(T)$ toma a forma:

$$\xi^2(T) \frac{d^2 f}{dx^2} - f^3 + f = 0 \quad (2-44)$$

Supondo que $f(x) = 1 + \phi(x)$, onde $\phi(x) \ll 1$, obtemos uma forma linearizada da equação 2-44, então [6]

$$\xi^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - (1 + 3\phi + \dots) + (1 + \phi) = 0 \quad (2-45)$$

ou,

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{2\phi}{\xi^2} = 0 \quad (2-46)$$

cuja solução é

$$\phi(x) \sim e^{\pm \sqrt{2} \frac{x}{\xi}} \quad (2-47)$$

Esta solução mostra que uma pequena alteração no parâmetro de ordem decai num comprimento característico da ordem de $\xi(T)$, o qual fornece a escala típica de variação espacial do parâmetro de ordem.

Agora, relacionando o comprimento de coerência $\xi(T)$ ao comprimento de coerência de Pippard ξ_0 , obtemos a expressão para o limite limpo ($l_{el} \gg \xi_0$) e para o limite sujo ($l_{el} \ll \xi_0$), que são dados por [6],

$$\begin{aligned} \xi(T) &= 0.74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1-t}} \quad \text{para } l_{el} \gg \xi_0 \\ \xi(T) &= 0.855 \sqrt{\frac{\xi_0 l_{el}}{1-t}} \quad \text{para } l_{el} \ll \xi_0 \end{aligned} \quad (2-48)$$

onde l_{el} é o caminho livre médio elástico dos elétrons normais e ξ_0 é o comprimento de coerência de Pippard [25]. Estas relações são válidas somente para temperaturas próximas a T_c .

2.4.3 Energia Livre GL na Presença de Campo Magnético

Para encontrar a expressão de energia livre na presença de campo é necessário fazer as respectivas modificações na equação 2-28, onde a indução magnética $\vec{B}(\vec{r})$ deve ser considerada como a soma do campo aplicado com a densidade de fluxo induzida produzida pelas supercorrentes $\vec{J}_s$. Para garantir a invariância de calibre da energia de GL é necessária a seguinte substituição,

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \vec{A} \quad (2-49)$$

Assim, a densidade de energia livre de Helmholtz (equação 2-28), na presença de campo magnético, é expandida em potências pares do parâmetro de ordem,

$$f_s(|\Psi|, T, \vec{B}) = f_N(T) + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}) \quad (2-50)$$

onde $\Psi(\vec{r})$ e o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r})$ ¹⁰, são os campos que determinam a dinâmica do sistema. Analisando fisicamente cada termo do funcional de energia livre (2-50), podemos ver que o primeiro termo do lado direito corresponde à energia do estado normal. Os dois próximos termos correspondem à energia de condensação do estado supercondutor. O quarto termo é atribuído à variação da energia associada com mudanças espaciais do parâmetro de ordem e pode ser visto como $\vec{P}^2/2m^*$, sendo $\vec{P}$ o momento canônico invariante de calibre, e o último termo corresponde ao aumento na energia necessário para manter o fluxo fora do interior do supercondutor, isto é, assegurar o Efeito Meissner.

2.4.4 As Equações de GL

A primeira equação de GL na ausência de campo aplicado é dada pela expressão 2-41, a qual é obtida da minimização da energia livre em relação à variação do parâmetro de ordem. Agora, na presença de campo temos que a equação 2-41 é modificada aplicando-se a transformação dada em 2-49. Assim temos,

$$\alpha\Psi - \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla - e^*\vec{A})^2\Psi = 0 \quad (2-51)$$

que é a Primeira Equação GL, que descreve a variação de $\Psi(\vec{r})$ no interior de uma amostra supercondutora, quando é conhecido o potencial vetor $\vec{A}$. Esta equação, sem o termo não linear ($\beta|\Psi|^2\Psi$), é idêntica à equação de Schrödinger, para uma partícula de massa m^* e carga e^* imersa em um campo magnético, sendo $\Psi(\vec{r})$ sua função de onda e $-\alpha$ o autovalor de energia. Esta expressão deve ser suplementada com condições de contorno apropriadas para Ψ , as quais normalmente estão relacionadas ao valor ou mudança do parâmetro de ordem na superfície da amostra.

A segunda equação GL é obtida da minimização da energia livre 2-50, com relação às variações de $\vec{A}$ e fornece a densidade de supercorrente,

$$\vec{J}_s = e^* \frac{-i\hbar}{2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^{2*}}{m^*} |\Psi|^2 \vec{A} \quad (2-52)$$

¹⁰Dado por $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Esta equação fornece as correntes, ou seja a resposta diamagnética do supercondutor frente à aplicação do campo magnético e expressa uma resposta eletrodinâmica de natureza local, pois $\vec{J}_s(\vec{r})$ depende dos valores de Ψ , $\nabla\Psi$ e $\vec{A}$ no ponto $\vec{r}$. A equação 2-52 toma uma forma mais clara escrevendo o parâmetro de ordem como $\Psi(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|e^{i\varphi(\vec{r})}$, então:

$$\begin{aligned}\nabla\Psi &= \nabla(|\Psi|e^{i\varphi}) \\ \nabla\Psi &= i|\Psi|e^{i\varphi}\nabla(\varphi) + e^{i\varphi}\nabla|\Psi|\Psi^*\nabla\Psi = i|\Psi|^2\nabla\varphi + |\Psi|\nabla|\Psi|\end{aligned}\tag{2-53}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\nabla\Psi^* &= \nabla(|\Psi|e^{-i\varphi}) \\ \Psi\nabla\Psi^* &= -i|\Psi|^2\nabla\varphi + |\Psi|\nabla|\Psi|\end{aligned}\tag{2-54}$$

Substituindo na equação 2-52, temos:

$$\vec{J}_s = \frac{e^*}{m^*}|\Psi|^2(\hbar\nabla\varphi - e^*\vec{A}) \equiv e^*|\Psi|^2\vec{V}_s\tag{2-55}$$

onde

$$\vec{V}_s = \frac{1}{m^*}(\hbar\nabla\varphi - e^*\vec{A})\tag{2-56}$$

é a velocidade do superfluido¹¹. As equações 2-51 e 2-52 são as célebres equações de Ginzburg-Landau, que formam um sistema de duas equações diferenciais acopladas que devem ser resolvidas conjuntamente.

2.4.5 Comprimento de Penetração e Parâmetro de GL

Na seção 2.4.2 foi visto um comprimento característico dos supercondutores no contexto da teoria GL, o comprimento de coerência $\xi(T)$, o qual caracteriza a variação espacial do parâmetro de ordem. O outro, conhecido como *comprimento de penetração*, $\lambda(T)$, determina a variação espacial do campo magnético dentro do supercondutor (Figura 2-6).

Para obter uma expressão para este comprimento, vamos considerar campos magnéticos fracos

¹¹Na teoria GL, os superelétrons são tratados como um fluido quântico descrito pela pseudo função de onda.

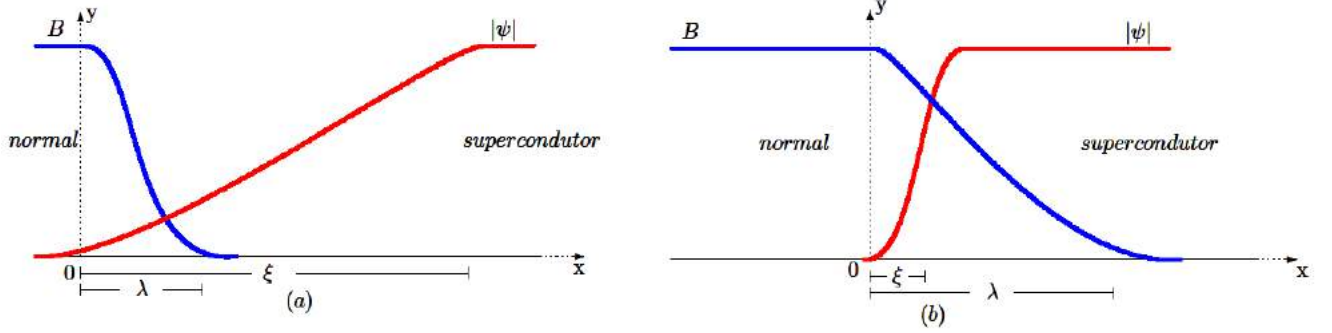


Figura 2-6: Distribuição espacial do parâmetro de ordem e campo magnético na interface supercondutor e normal. A parte (a) corresponde à supercondutor tipo I enquanto a parte (b) corresponde à supercondutor tipo II.

e baixas temperaturas, assim¹² $\Psi \approx \Psi_\infty = \text{constante}$, portanto a equação 2-52 toma a forma de:

$$\vec{J}_s = -\frac{e^{2*}}{m^*} |\Psi|^2 \vec{A} \quad (2-57)$$

Aplicando o rotacional a ambos lados da equação 2-57,

$$\nabla \times \vec{J}_s = \frac{e^{2*}}{m^*} |\Psi|^2 \nabla \times \vec{A} = \frac{e^{2*}}{m^*} |\Psi|^2 \vec{B} \quad (2-58)$$

Usando a relação $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$,

$$\nabla^2 \vec{B} = \lambda^{-2} \vec{B} \quad (2-59)$$

teremos o equivalente à equação de London 2-19, com λ como o comprimento de penetração dado por:

$$\lambda^2(T) = \frac{m^*}{\mu_0 |\Psi|^2 e^{2*}} = \frac{m^* \beta}{\mu_0 e^{2*} |\alpha|} \simeq \frac{\lambda^2(0)}{1-t} \quad (2-60)$$

$\lambda(0)$ coincide com o comprimento de penetração de London a $T = 0$, onde todos os elétrons são supercondutores. Vemos, assim como o λ está relacionado com a variação espacial do campo magnético e das supercorrentes na interface supercondutor-normal. Os resultados exatos para o comprimento de penetração nos limites limpo e sujo, são dados pelas seguintes expressões [6]:

$$\begin{aligned} \lambda(T) &= \frac{\lambda(0)}{\sqrt{2(1-t)}} \quad \text{para } l_{el} \gg \xi_0 \\ \lambda(T) &= 0.64 \lambda(0) \sqrt{\frac{\xi_0}{l_{el}(1-t)}} \quad \text{para } l_{el} \ll \xi_0 \end{aligned} \quad (2-61)$$

¹²Se consideramos um supercondutor homogêneo, espera-se que o parâmetro de ordem em pontos muito fundos no interior da amostra supercondutora seja praticamente constante.

O resultado nos limites sujos, mostra que se l_{el} decresce, $\lambda(T)$ aumenta, enquanto que $\xi(T)$ diminui, assim o supercondutor fica mais impuro. Em geral, para todas as temperaturas, os materiais impuros apresentam $\lambda(T) \gg \xi(T)$.

Existe um parâmetro adimensional, específico de cada material, chamado *parâmetro de GL*, κ , definido como:

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} \quad (2-62)$$

o qual descreve a relação entre a penetração do fluxo em um supercondutor e a coerência da sua supercondutividade. Como $\lambda(T)$ e $\xi(T)$ divergem basicamente na mesma forma em $T = T_c$, κ é considerado para efeitos práticos como um parâmetro constante em T.

2.4.6 Validade da Teoria de GL

A teoria GL, é uma ótima ferramenta para a compreensão do comportamento crítico. Uma das vantagens é que permite descrever as principais propriedades físicas do sistema perto da transição de fase sem ajuda de nenhum modelo microscópico. Além disso, ela é bastante robusta, uma vez que é fundamentada no conceito de parâmetro de ordem, que permite uma descrição qualitativa bastante satisfatória. Para verificar a validade da teoria de GL, deve ser levado em consideração que esta teoria é baseada na teoria de transição de segunda ordem de Landau. Desta forma, a energia livre pode ser expandida em potências pares de $|\Psi|$, pois próximo a T_c , a magnitude do parâmetro de ordem é pequena. No caso, foi assumido para os coeficientes da expansão que α pode ser positivo ou negativo. O valor positivo apresenta-se no estado normal. Enquanto a β , temos que é tomado como uma constante. Tais suposições não são aplicáveis de maneira geral, porém, Gorkov mostrou teoricamente que a expansão de Landau é válida para $T \approx T_c$, podendo obter as equações GL como um caso limite da teoria microscópica BCS.

Para que a teoria GL seja válida, é indispensável que Ψ seja uma função que varie suavemente no espaço sob distâncias da ordem de ξ_0 , onde $\xi(T) \gg \xi_0$. Da dependência do comprimento de coerência com a temperatura, temos a seguinte condição:

$$1 - t \ll 1 \quad (2-63)$$

A qual é satisfeita só no caso de temperaturas próximas à temperatura crítica T_c , isto é, $t \approx 1$. Uma segunda condição que tem que se cumprir no contexto da teoria GL, é que $\vec{A}$ e $\vec{H}$, sejam também funções com variações suaves no espaço para distâncias da ordem de ξ_0 , sendo necessário que $\lambda(T) \gg \xi_0$, portanto

$$1 - t \ll \left(\frac{\lambda(0)}{\xi_0} \right)^2 \quad (2-64)$$

que nos leva de novo à mesma condição de validade, sobre a temperatura do material, $T \approx T_c$.

Embora a teoria GL haja sido deduzida para ser válida somente perto da transição entre os estados supercondutor-normal ($t \approx 1$), também é aplicável em um grande intervalo de temperaturas [26]. Não obstante, De Gennes demonstrou que a teoria GL, é válida para qualquer temperatura na presença de campos magnéticos fortes [27]. Além disto, comparações entre as medidas da corrente crítica em filmes finos de alumínio com o previsto pelas teorias BCS e GL, tem mostrado que as duas teorias prevêem os mesmos resultados para temperaturas abaixo de $0.1 T_c$. Assim, a teoria GL tem uma validade maior que daquela para o qual foi formulada [6].

2.5 Quantização do Fluxo Magnético

Partindo dos conceitos da teoria GL, é possível demonstrar que o campo magnético é quantizado no interior de um supercondutor tipo II que esta no estado Misto. Essa quantização garante que o fluxo total no interior da amostra é sempre um múltiplo inteiro de *quanta* de fluxo magnético Φ_0 .

A condição da quantização pode ser facilmente derivada desde a segunda equação de GL, equação (2-52), substituindo o parâmetro de ordem complexo $\Psi(\vec{r})$, equação 2-25, onde a amplitude do parâmetro ($|\Psi(\vec{r})|$) não varia com a posição na amostra e a fase $\varphi(\vec{r})$ varia em múltiplos de 2π ao percorrer uma volta completa em um circuito fechado C ,

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{\nabla} \varphi \equiv \text{Mudança da fase de } \Psi \text{ numa volta} : \Delta\varphi \quad (2-65)$$

Como $\Psi(\vec{r})$ é uma pseudo-função de onda analítica e de único valor, portanto, $\Delta\varphi = n2\pi$, onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Com a primeira igualdade da equação 2-55, que pode ser escrita como

$$\vec{J}_s = \frac{2e\hbar}{m^*} |\Psi|^2 \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) - \frac{4e^2}{m^*} \vec{A} |\Psi|^2 \quad (2-66)$$

Usando $e^* = 2e$. Com o teorema de Stokes, temos:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi \quad (2-67)$$

onde S é uma superfície restrita ao caminho fechado C. A equação 2-67 mostra que a integral de linha do potencial vetor numa trajetória fechada C é igual ao fluxo magnético Φ através da área delimitada. A equação 2-66 também pode ser escrita da forma:

$$\vec{A} = \frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) - \frac{m^* \vec{J}_s}{4e^2 |\Psi|^2} \quad (2-68)$$

Logo a equação 2-67 fica:

$$\frac{\hbar}{2e} \oint_C \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{l} - \frac{m^*}{4e^2} \oint_C \frac{\vec{J}_s}{|\Psi|^2} \cdot d\vec{l} = \Phi \quad (2-69)$$

Para supercondutores macroscópicos, de dimensões muito maiores que o comprimento de penetração λ , podemos considerar $\vec{J}_s = 0$ e portanto, a segunda integral é nula. Por outro lado, a fase do parâmetro de ordem, deve se alterar uma quantidade igual a $2\pi n$, sendo $n = \text{inteiro}$, ao completar um ciclo ao longo do trajeto fechado, pois $\Psi(\vec{r})$ deve ser univocamente definido. Isto significa que:

$$\Phi = n\Phi_0 = n \frac{h}{2e} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2-70)$$

onde n é um número inteiro, conhecido como número quântico de fluxóide, o qual determina o número de quanta de fluxo Φ_0 que atravessa uma determinada área do material supercondutor, cujo valor em unidades SI é igual a $2,07 \times 10^{-15} T m^2$. A equação 2-70 mostra que o fluxo confinado no supercondutor é quantizado.

2.6 Supercondutividade do Tipo I e Tipo II

Os supercondutores podem ser agrupados de acordo com o valor do parâmetro de Ginzburg-Landau, κ , introduzido anteriormente. Isto é motivado pelo fato de que a energia da superfície, a qual é proporcional à diferença $(\xi - \lambda)$ de uma fronteira entre uma região normal e uma supercondutora pode ser positiva ou negativa. Grosso modo, se $\xi > \lambda$, a energia da superfície é positiva, classificando aos supercondutores como de *Tipo I*. Por outro lado, a condição $\xi < \lambda$ implica uma energia de fronteira entre a fase supercondutora-normal negativa, favorecendo a formação

de fronteiras supercondutoras-normais e a entrada de fluxo magnético em pequenos tubos de fluxo (vórtices). Os supercondutores que apresentam este comportamento são conhecidos como de *Tipo II* [28]. Numa estimativa mais rigorosa, Abrikosov mostrou que a passagem da energia de superfície de positiva a negativa ocorre em $\kappa = 1/\sqrt{2}$ [11]. Assim, $\kappa \leq 1/\sqrt{2}$, caracteriza os supercondutores do Tipo I, os quais se encontram no Estado Meissner para campos aplicados até o campo crítico termodinâmico $H_c(T)$. Neste estado diamagnético perfeito, todo o fluxo magnético é expelido desde o interior da amostra ($B = 0$). Acima deste $H_c(T)$, a supercondutividade não pode ser mantida e a amostra atinge o Estado Normal.

Para os Tipo II, temos $\kappa > 1/\sqrt{2}$, que permanecem no Estado Meissner para campos menores que o primeiro campo crítico H_{c1} . Para campos $H_a > H_{c1}$, as linhas de campo magnético (vórtices) penetram o supercondutor. Porém, ainda no estado de equilíbrio a penetração não é completa, sendo o fluxo magnético menor que no estado normal, ou seja, ainda existem correntes de blindagem na amostra. Este comportamento se mantém enquanto $H_{c1} < H_a < H_{c2}$, sendo H_{c2} maior que H_c ; essa região é conhecida como Estado Misto.

Na Figura 2-7, ilustramos os diagramas de fase para os dois supercondutores. Os quais mostram a diferença entre o supercondutor tipo I e tipo II em relação aos campos críticos, que são todos dependentes da temperatura.

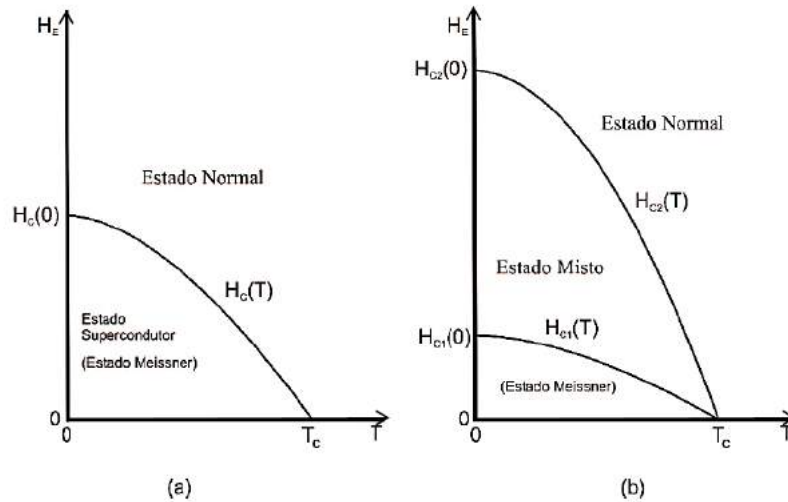


Figura 2-7: Diagrama de fase H-T para os supercondutores tipo I (a) e tipo II (b).

Uma quantidade física importante no estudo da supercondutividade é a magnetização, pois ela é mensurável. Aliás, graças a esta, podem ser facilmente identificadas as diferentes fases (Meissner, misto e normal). A magnetização é definida como $\vec{M} = (\vec{B} - \vec{H}_a)/4\pi$, onde $\vec{B}$ é uma média espacial do campo magnético local $\vec{B}$. Como já vimos, num supercondutor do tipo I, abaixo de $H_c(T)$, temos o estado Meissner e o campo é totalmente expelido da amostra, $\vec{B} = 0$ e $\vec{H}_a = -4\pi\vec{M}$. Acima de $H_c(T)$, o campo magnético penetra em todo o supercondutor, $\vec{B} = \vec{H}_a$ e $\vec{M} = 0$. Por outro lado, para supercondutores do tipo II temos que permanecem no estado Meissner até $H_{c1}(T)$ e temos de novo $\vec{H}_a = -4\pi\vec{M}$. Acima do primeiro campo crítico, no estado misto, $H_{c1} < H_a < H_{c2}$, ao invés de anular-se totalmente, a magnetização diminui à medida que o campo magnético aumenta, até chegar a zero no $H_{c2}(T)$. O comportamento da magnetização encontra-se na Figura 2-8

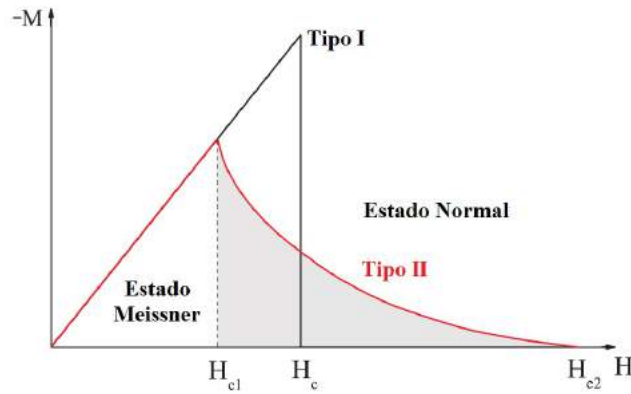


Figura 2-8: Magnetização em função do campo aplicado para supercondutores do tipo I e tipo II.

Em vários casos de amostras finitas, o estado Meissner não muda imediatamente ao estado Normal aparecendo um terceiro campo crítico $H_{c3}(T)$, isto devido a que quanto mais próximo de $H_{c2}(T)$ maior é a densidade de vórtices, assim quando H alcança o valor de $H_{c2}(T)$ os vórtices sobrepõem-se, fazendo com que a rede na qual os vórtices auto-organizam-se seja inteiramente destruída, porém restando só uma camada supercondutora remanescente na superfície, ficando num estado de Supercondutividade Superficial. O terceiro campo crítico aparece devido a uma condição de fronteira das equações GL com o campo paralelo à superfície; para supercondutores semi-infinitos é aproximadamente $H_{c3} = 1.69H_{c2}$ [7]. Em geral, o coeficiente para H_{c3} é dependente

da geometria¹³. A supercondutividade é totalmente destruída quando o campo H é maior que H_{c3} , onde a amostra fica toda no estado Normal [29].

¹³Por exemplo, para um filme fino em um campo paralelo temos, $H_{c3} = 2H_{c2}$.

3 Vórtices em Supercondutores

Os supercondutores tipo II, permitem a existência do estado misto ao estar sujeitos a um campo magnético suficientemente forte. Como resultado disso, temos a redução do diamagnetismo perfeito e a dissipação da energia, com o movimento viscoso dos vórtices na presença de uma corrente de transporte. Um modo eficaz para prevenir esta passagem mais rápida do material ao estado resistivo, é ancorar os fluxóides a poços de potencial usando a desordem presente no material.

Neste capítulo, são discutidos assuntos relacionados com o supercondutores tipo II, os fluxóides, a sua mobilidade e os mecanismos de aprisionamento artificiais; além de uma revisão dos trabalhos já feitos sobre o assunto.

3.1 Estado Misto

Motivado pelas medições do seu amigo Zavaritski [30], Abrikosov concentrou-se no caso em que κ é maior que $1/\sqrt{2}$. Como foi dito anteriormente, na teoria de GL, a energia da superfície de uma interface normal-supercondutor é negativa nesse caso. Após publicar o artigo onde propunha a existência dos supercondutores tipo II, Abrikosov, dedicou-se a estudar o comportamento magnético destes materiais no estado misto. Nessa fase, o comportamento da amostra em presença de campo magnético é caracterizado principalmente por dois campos críticos, $H_{c1}(T)$ e $H_{c2}(T)$. Nesse intervalo de campos, ocorre penetração parcial do fluxo magnético no material sem que suas propriedades supercondutoras sejam suprimidas.

A expulsão da indução magnética do interior de uma amostra supercondutora pelo Efeito

Meissner, tem um custo na energia. Num supercondutor tipo II, este custo energético torna-se excessivo quando H ultrapassa o valor H_{c1} . Porém no estado Misto, o sistema se organiza do modo que a amostra fica dividida em regiões normais e supercondutoras. As regiões normais são formadas por finos filamentos que atravessam a amostra e é através destes filamentos que passa o fluxo magnético, que é quantizado. Devido às propriedades diamagnéticas ocorre a formação de um vórtice de supercorrentes em torno de cada uma dessas linhas de campo, concentrando o fluxo no seu interior. Dessa forma existe uma interface entre a região normal e a supercondutora¹.

3.1.1 Rede de Abrikosov

O estudo detalhado das equações linearizadas GL levou a Abrikosov a encontrar que as linhas de fluxo arranjam-se em uma rede ordenada dentro do supercondutor, o qual irá favorecer a minimização de energia. Abrikosov encontrou que este arranjo periódico deveria ser quadrado, considerando um material ideal (sem defeitos), em que os vórtices entrariam e sairiam do supercondutor num processo reversível. Esse trabalho foi publicado [11] no mesmo ano em que apareceu a teoria microscópica de Bardeen, Cooper e Schrieffer. Talvez por isto e pela falta de dados experimentais para confirmar as suas previsões, a atenção para os materiais do tipo II e o estado de vórtices foi postergada até quase 5 anos depois. Em 1964, Kleiner et al. [31] demonstraram teoricamente que uma estrutura de vórtices com simetria triangular (onde cada vórtice está no centro de um hexágono) tem menos energia que a rede quadrada, tornando-a mais estável e a mais favorável dentre todas as possíveis soluções periódicas, como ilustra a Figura **3-1**.

Alguns anos depois, as experiências de Essmann e Trauble [32] (1967) sobre decoração magnética e microscopia eletrônica confirmaram essa predição. A rede hexagonal (também chamada rede triangular por alguns autores) ficou conhecida como *Rede de Abrikosov*, pelo grande valor de contribuição do trabalho de Abrikosov.

A decoração de Bitter [32,33], microscopia de tunelamento com varredura [34], microscopia de Lorentz [35] e microscopia de varredura por sonda Hall [36] são algumas técnicas experimentais que

¹Essa estrutura do Estado Misto é possível porque há um ganho energético para o sistema com a formação de interfaces entre regiões normais e supercondutoras.

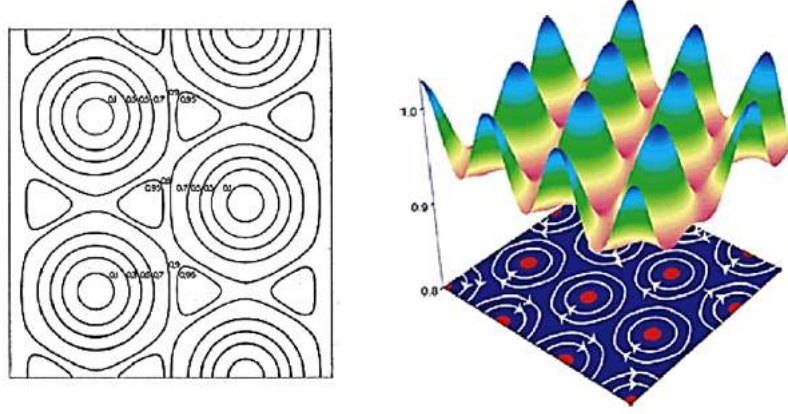


Figura **3-1**: Solução de Kleiner, Roth e Auther para a rede hexagonal [31].

permitem a visualização local da rede de vórtices (vide Figura **3-2**).

3.2 O Vórtice

Abrikosov obteve a quantização do fluxo em supercondutores tipo II com a minimização da energia livre de GL em $H \approx H_{c2}$. As linhas de $|\Psi_{GL}|^2$ constante, são também contornos de $|H| = cte$. Assim, as estruturas formadas pelo parâmetro de ordem em torno dos pontos de mínimo são os vórtices. O vórtice tem uma estrutura filamentar como um tubo cilíndrico. Cada um destes vórtices tem um núcleo normal de raio ξ onde a densidade de elétrons supercondutores n_s decresce monotonicamente anulando-se no centro. O campo magnético local tem valor máximo no centro do vórtice e decresce ao longo de uma distância λ devido às correntes de blindagem supercondutoras ao redor do núcleo. Tal estrutura é ilustrada na Figura **3-3** [37].

Se temos $H \ll H_{c2}$ e baixas velocidades dos vórtices, pode-se estudar o vórtice como uma partícula que interage atrativamente com diferentes defeitos da rede como são os *dots*, *dots magnéticos*, *antidots* e interage com outros vórtices repulsivamente.

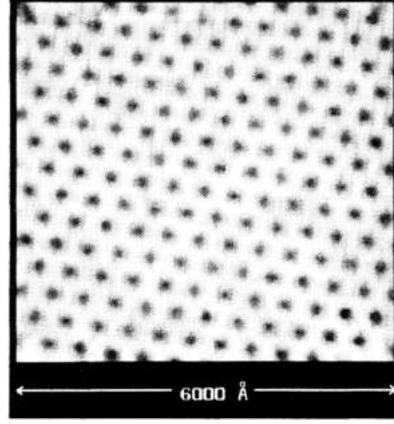


Figura 3-2: Rede de Abrikosov em $NbSe_2$ observada através de Microscopia de Tunelamento com Varredura (STM) a 1.8K e um campo aplicado de 1T [34].

3.2.1 Estrutura de um Vórtice Isolado

Normalmente o estudo de um vórtice em um supercondutor tipo II com um dado parâmetro de Ginzburg-Landau requer uma abordagem numérica das equações GL. Mas, no limite de supercondutores do tipo II, onde $\kappa \gg 1$, podem ser obtidos resultados analíticos. Nesse limite, $\lambda \gg \xi$, tendo a simplificação que ξ é pequeno, desta forma podemos considerar o parâmetro de ordem, $|\Psi(\vec{r})|^2$, constante por todo o material, exceto próximo ao núcleo do vórtice. Portanto na maior parte do vórtice o sistema pode ser descrito como um supercondutor de London [9], no qual o módulo do parâmetro de ordem não varia com a posição, $|\Psi(\vec{r})|^2 = \text{constante}$. Então só a fase é relevante na variação espacial de Ψ . Determinando como o campo magnético varia em torno de um vórtice, temos o rotacional da segunda equação GL, equação 2-55,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{J}_s &= \frac{e^* |\Psi|^2}{m^*} (\hbar \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi - e^* \vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{\mu_0\lambda^2} \vec{B} \end{aligned} \quad (3-1)$$

Suponhamos que temos só um vórtice na amostra, o qual é reto e paralelo ao eixo ortogonal z , localizado no ponto $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ no plano xy . Integrando a equação 3-1 no plano xy e usando o

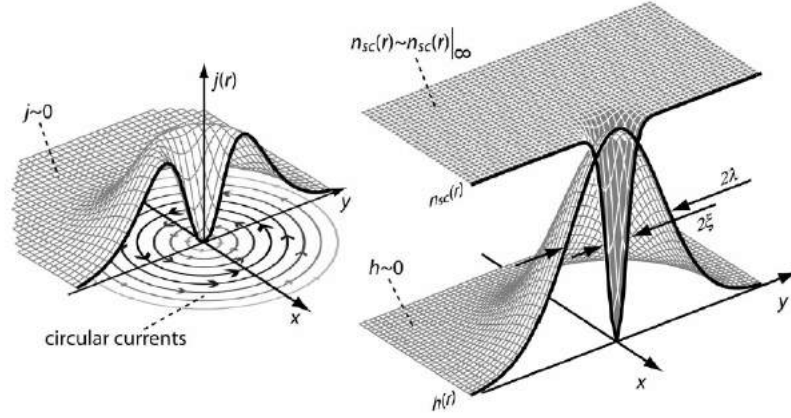


Figura **3-3**: Estrutura de um único vórtice, mostrando a distribuição radial do campo local, as supercorrentes circulando e a densidade de elétrons supercondutores [37].

teorema de Stokes, temos [38],

$$\begin{aligned}
 \int d^2r \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{J}_s &= \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2} \int d^2r \hat{\mathbf{n}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi) - \frac{1}{\mu_0\lambda^2} \int d^2r \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{B} \\
 &= \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2} \oint d\vec{l} \cdot \vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{\mu_0\lambda^2} \int d^2r \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{B} \\
 &= \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2} 2\pi n - \frac{1}{\mu_0\lambda^2} \int d^2r \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{B}
 \end{aligned} \tag{3-2}$$

onde n é o número de quanta de fluxo magnético carregado pelos vórtices. Dessa maneira, a *vorticidade* ou *função de fonte* $v(\vec{r}, \vec{r}_i)$ de um vórtice é definida como:

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{r}_i) = \hat{z}n\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{3-3}$$

Usando a relação $\mu_0\vec{J}_s = \vec{\nabla} \times \vec{B}$, a equação 3-1 fica como:

$$-\lambda^2\vec{\nabla}^2\vec{B} + \vec{B} = \Phi_0 v(\vec{r} - \vec{r}_i) = \hat{z}n\Phi_0\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{3-4}$$

A equação 3-4 corresponde à mesma equação de London com um termo de fonte devido a um vórtice localizado em $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$, que carrega n quanta de fluxo, com um núcleo de raio infinitesimal, que é representado pela função delta; portanto o lado direito desta equação representa adicionar um vórtice com vorticidade n dentro do supercondutor, onde $\hat{z}$ é um vetor unitário na direção do vórtice. Em outros termos, fora da região do núcleo normal (raio ξ), a segunda equação de GL, para a densidade de supercorrente, se reduz à equação de London². Assim, a teoria de

²Fora do núcleo, temos a segunda equação de London, a qual descreve estritamente um supercondutor no

London é uma boa aproximação do comportamento dos campos em um supercondutor do tipo II quando a presença de vórtices é inserida na forma de singularidades.

A solução dessa equação pode ser obtida tanto no espaço real como pelo método de transformadas de Fourier e é dada por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}_i|}{\lambda} \right) \hat{z} \quad (3-5)$$

onde K_0 é a função de Bessel do segundo tipo modificada de ordem zero. Essa solução exata dá uma expressão para o campo magnético local como função da distância radial r a partir do núcleo do vórtice. As formas limite da função K_0 para longas distâncias ($r \gg \lambda$) e curtas ($r \rightarrow 0$) são:

$$B(r) \rightarrow \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{\pi\lambda}{2r} \right)^{1/2} e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3-6)$$

$$B(r) \approx \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[\ln \frac{\lambda}{r} + 0.12 \right] \quad (\xi \ll r \ll \lambda)$$

Então, $B(r)$ diverge no núcleo do vórtice. Tal divergência se apresenta por não considerar o núcleo do vórtice, é dizer, supor que $\xi \rightarrow 0$ na teoria de London. Fisicamente, temos que a uma distância da ordem do raio do núcleo, ξ , $|\Psi| \rightarrow 0$. Portanto, a divergência logarítmica em 3-6 pode ser corrigida por um procedimento de truncagem em $r \sim \xi$. Isto permite calcular $B(r)$ próximo a ξ , assim a equação 3-5 descreve a estrutura do vórtice no limite de London para $r \gg \xi$ e $\lambda \gg \xi$.

3.2.2 Energia de um Vórtice Isolado

Na seção anterior, foi estudada a estrutura de uma linha de vórtice no limite quando $\lambda \gg \xi$, isto é o núcleo de raio ξ é muito pequeno e portanto sua contribuição à energia, neste caso, é negligenciada completamente. Assim, a energia da linha de vórtice é dada pelas contribuições da energia cinética associada com as supercorrentes e a energia associada com o campo magnético

limite de London em que não há penetração de fluxo magnético senão somente numa camada superficial da amostra. Então para descrever o fato de que o vórtice tem um núcleo normal, é necessária a equação 3-4.

gerado pelo vórtice. Integrando estas energias, temos:

$$E_v = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r>\xi} (\lambda^2 |\vec{\nabla} \times \vec{B}|^2 + \vec{B}^2) d\vec{r} \quad (3-7)$$

Usando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b}$, onde $\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{b}$, temos que a equação 3-7 toma a seguinte forma:

$$E_v = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r>\xi} [\lambda^2 \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}) + |\vec{B}|^2] d\vec{r} + \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \oint [\vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}] \cdot \hat{n} d^2r \quad (3-8)$$

Com a equação 3-4, a primeira integral é nula, já que não temos em conta o núcleo do vórtice. A segunda integral é resolvida tomando dois caminhos circulares, um de raio infinito e outro de raio igual a ξ , ambos centralizados no núcleo do vórtice. Usando que $\vec{B}(\vec{r}) = \hat{z}B(\vec{r})$, temos:

$$E_v = \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \left[B \frac{dB}{dr} 2\pi r \right]_{r=\epsilon} - \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \left[B \frac{dB}{dr} 2\pi r \right]_{r=\infty} \quad (3-9)$$

O segundo termo é zero, pois $B(r \rightarrow \infty) = 0$, enquanto que para o primeiro termo, usamos a aproximação assintótica da equação 3-6 para $\xi \ll r \ll \lambda$, portanto

$$E_v \sim \frac{n^2 \Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} \ln \kappa = \frac{\epsilon}{2} n^2 \ln \kappa \quad (3-10)$$

Observamos que E_v é uma função quadrática de vorticidade n , logo é muito mais favorável energeticamente ter dois vórtices cada um com um quanta de fluxo ($2\Phi_0^2$), que só um vórtice com 2 quanta de fluxo $(2\Phi_0)^2$, isto é, $E_v(2\Phi_0) > 2E_v(\Phi_0)$. O mesmo se obtém considerando a interação vórtice-vórtice, o qual será estudado na próxima seção.

3.2.3 Interações entre Linhas de Vórtices

Se aumentamos o campo magnético aplicado no supercondutor, entrarão mais vórtices, os quais passam a interagir entre si. É relativamente mais fácil tratar essa interação entre vórtices no limite quando $\kappa \gg 1$, nesse caso, o meio é linear, tal como mostra a equação 3-4. Considerando dois vórtices retilíneos paralelos, localizados nas posições $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ e $\vec{r}_j = (x_j, y_j)$, dirigidos ao longo do eixo $\hat{z}$, cada um com um quanta de fluxo. Por causa da distribuição local de correntes gerada por cada um dos vórtices, o vórtice i sente a presença do vórtice j . Assim, cada linha de fluxo magnético, sente uma força de Lorentz em razão da corrente do outro vórtice. Nesse caso,

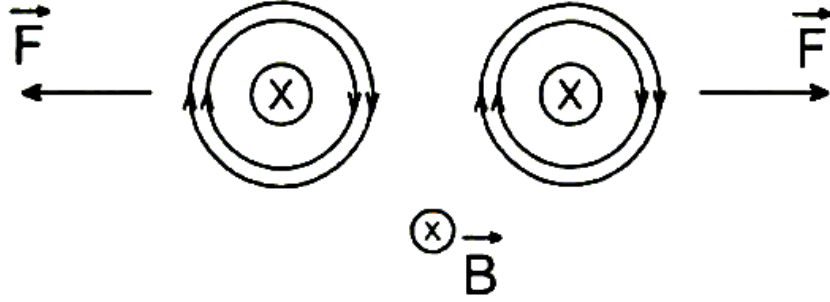


Figura 3-4: Interação repulsiva entre dois vórtices, devido às correntes de blindagem que são antiparalelas na região entre os vórtices.

a força de Lorentz por unidade de comprimento que sente o vórtice i , devido ao vórtice j , é dada por:

$$\vec{f}_L^i = \vec{J}_s^j(\vec{r}_i) \times (\Phi_0 \hat{z}) \quad (3-11)$$

Sendo a $\vec{J}_s^j(\vec{r}_i)$ a corrente do vórtice j na posição do vórtice i . Do mesmo jeito, temos a força no vórtice j , ao trocar os índices. Generalizando a última expressão para muitos vórtices presentes, temos que a força total sobre um dado vórtice é:

$$\vec{f} = \vec{J}_s \times (\Phi_0 \hat{z}) \quad (3-12)$$

onde J_s é a densidade de supercorrentes total, gerada por todos os outros vórtices, na posição do vórtice onde se calcula a força. Essa equação mostra que um vórtice numa posição dada, somente estará em equilíbrio se a corrente total gerada por todos os outros vórtices for nula nesta posição. Isto ocorre se os vórtices se arranjam, por exemplo, numa rede periódica.

Como a corrente gerada por um vórtice é $\vec{J}_s = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ e lembrando que $\vec{B} = B(r)\hat{z}$, temos que $\vec{J}_s = -(\partial B / \partial r)\hat{\phi}$. Usando a equação 3-5, a última expressão pode ser escrita como:

$$\vec{f}_L^i = -\Phi_0 \frac{\partial B^j(\vec{r}_i)}{\partial r_i} \hat{r}_{ij} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^3} K_1\left(\frac{r_{ij}}{\lambda}\right) \hat{r}_{ij} \quad (3-13)$$

onde $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ e $K_1(r)$ é a função de Bessel modificada de primeira ordem. Identificando a energia de interação entre dois vórtices, como $E_{vv}(r_{ij}) = \Phi_0 B(r_{ij})$ [7],

$$\vec{f}_L = -\frac{\partial}{\partial r_i} [\Phi_0 B^j(\vec{r}_i)] \hat{r}_{ij} = -\vec{\nabla} [\Phi_0 B^j(\vec{r}_i)] = -\vec{\nabla} [E_{vv}(r_{ij})] \quad (3-14)$$

Como entre os vórtices apresenta-se interação eletromagnética repulsiva, então a energia desta interação por unidade de comprimento entre dos vórtices i e j é da forma:

$$E_{vv}(r_{ij}) = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} K_0\left(\frac{r_{ij}}{\lambda}\right) \quad (3-15)$$

Portanto, para distâncias de $r_{ij} \gg \lambda$ a interação decai exponencialmente, enquanto que para pequenas distâncias varia logaritmicamente. Percebemos que a interação 3-15 é positiva e os vórtices se repelem uns aos outros. A energia total do sistema E , é a soma das energias individuais de cada um dos vórtices, (equação 3-10) mais a energia de interação entre os vórtices (equação 3-15),

$$E = \sum_{i=1}^n E_v + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j(\neq i)=1}^n E_{vv}(r_{ij}) \quad (3-16)$$

A interação repulsiva entre as linhas de fluxo resulta numa solução periódica para a distribuição dos vórtices, dando origem a um arranjo regular dos vórtices formando uma rede de linhas de fluxo, conhecida como a rede de vórtices de Abrikosov. Como foi dito antes, tem sido mostrado que um arranjo triangular é energeticamente a configuração de vórtices mais favorável, onde cada vórtice está rodeado de 6 outros vórtices (ver Figura 3-5), com uma distância entre vizinhos mais próximos dada por:

$$a_{\Delta} = 1.075 \left(\frac{\Phi_0}{B} \right)^{1/2} \quad (3-17)$$

A seguinte configuração mais próxima em energia consiste de um arranjo quadrado de vórtices,

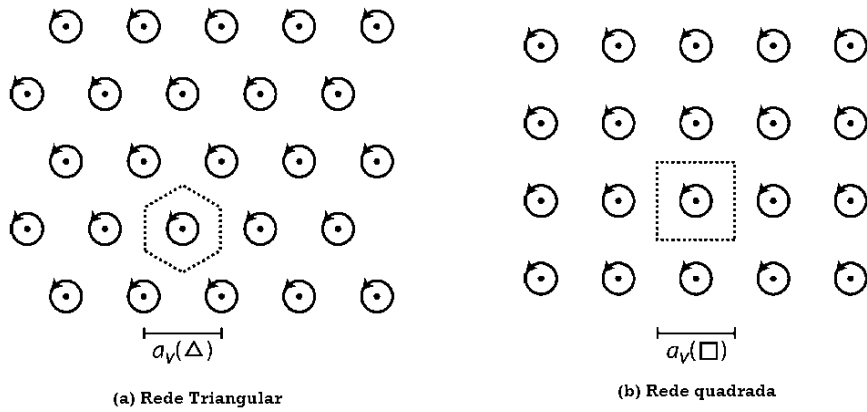


Figura 3-5: Redes de vórtices quadrada e triangular. As linhas tracejadas demarcam as células unitárias básicas em cada caso.

onde a distância entre os primeiros vizinhos é dada por:

$$a_{\square} = \left(\frac{\Phi_0}{B} \right)^{1/2} \quad (3-18)$$

Logo, para uma dada densidade de fluxo $a_{\Delta} > a_{\square}$ e levando em conta que os vórtices repelem-se mutuamente, é razoável que a configuração de vórtices com maior separação entre os primeiros vizinhos seja favorecida energeticamente.

3.2.4 Vórtices em Filmes Finos

A fabricação de amostras com dimensões cada vez menores, tornou-se possível graças ao surgimento da nanotecnologia. Desta maneira, implementou-se a microfabricação de supercondutores com dimensões da ordem do comprimento de penetração λ e o comprimento de coerência ξ . Amostras com essas dimensões são conhecidas como amostras mesoscópicas, as quais apresentam novas propriedades que dependem fortemente das condições de contorno e da geometria do material, isto é, o comportamento da supercondutividade nessa escala é diferente em relação a amostras macroscópicas.

Por isso, em filmes finos onde temos uma espessura $d \ll \lambda$ e na presença de um campo magnético externo perpendicular a seu comprimento, a rede de vórtices é quase bidimensional. Essa pequena espessura do filme tem consequências importantes para a estrutura do vórtice, a primeira é a definição do comprimento de penetração efetivo Λ_{eff} ,

$$\Lambda_{eff} = \frac{\lambda^2(T)}{d} \quad (3-19)$$

Sendo necessário definir o parâmetro de Ginzburg Landau efetivo,

$$\kappa^* = \frac{\Lambda}{\xi} = \frac{\lambda^2}{\xi} \frac{1}{d} = \kappa^2 \frac{\xi}{d} \quad (3-20)$$

o qual definirá o tipo de supercondutor na escala mesoscópica. Para um material tipo I, temos $\kappa^* < 1/\sqrt{2}$ e um tipo II temos $\kappa^* > 1/\sqrt{2}$. Aliás, em amostras mesoscópicas, a distinção entre supercondutor tipo I e tipo II é determinada não só por κ^* mas também pelas dimensões laterais do material ([39]). A rede de vórtices nestas geometrias diferem um pouco da rede de Abrikosov, pois

se tem uma competição entre a distribuição de vórtices triangular de Abrikosov e a distribuição dos vórtices que a própria geometria tenta impor [40].

Finalmente, a energia de repulsão entre dois vórtices decresce como $-\ln(r)$, similar à repulsão Coulomb entre duas linhas de cargas elétricas [7].

3.3 Equação de Movimento de um Vórtice

Anteriormente deduzimos a expressão da força de Lorentz que atua sobre um vórtice dado, a qual depende da densidade de corrente gerada pelos outros vórtices na posição do vórtice teste. Essa força de Lorentz, em princípio, pode ser gerada por qualquer fonte de corrente, isto é, quando uma densidade de corrente é aplicada a um supercondutor no estado misto, uma força de Lorentz entre a $\vec{J}$ e as linhas de fluxo magnético surge, colocando os vórtices em movimento,

$$\vec{f}_L = \vec{J}_T \times \vec{\Phi}_0 \quad (3-21)$$

onde a direção de $\vec{\Phi}$ coincide com a direção do campo aplicado e $\vec{J}_T$ é a densidade de corrente total na posição do vórtice, incluindo as correntes de transporte e de blindagem.

Considerando um cristal hospedeiro perfeito, isto é, um supercondutor homogêneo, livre de imperfeições ou defeitos, qualquer corrente que passe pelo núcleo do vórtice induzirá seu movimento. Então somando as forças individuais em 3-21, onde a rede como um todo fica sujeita a uma densidade de força de Lorentz,

$$\begin{aligned} \vec{f}_L &= \vec{J}_T \times N\vec{\Phi}_0 \\ &= \vec{J}_T \times B \end{aligned} \quad (3-22)$$

onde N é o número de vórtices por unidade de superfície. A força dada pela equação 3-21 faz com que a rede de vórtices se mova, porém sua ação tende a ser neutralizada pela força viscosa,

$$\vec{f}_\eta = -\eta\vec{v} \quad (3-23)$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da configuração de equilíbrio. Essa força viscosa se contrapõe ao movimento dos fluxóides, dando-lhes uma velocidade constante³.

³Sendo um problema clássico, com $\vec{v}$ como a velocidade terminal de um corpo na presença de uma força

A $\vec{f}_\eta$ surge da dissipação resultante da exclusão de supercondutividade em certas regiões, ou seja, os elétrons normais sofrem espalhamentos no interior do núcleo do vórtice. Logo, a equação de movimento de um vórtice sob a ação de uma corrente $\vec{J}_S$ é,

$$\eta \vec{v} = \vec{J} \times \Phi_0 \hat{z} \quad (3-24)$$

onde a rede de fluxóides move-se perpendicularmente à direção da corrente e do campo magnético; esse movimento dos vórtices induz um campo elétrico,

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} \quad (3-25)$$

este campo é medido como uma queda de tensão ao longo do sentido da corrente. Por conseguinte, o movimento do vórtice é dissipativo e leva a uma resistência não nula [6]. Fazendo o produto vetorial com $\Phi_0 \hat{z}$, a cada lado da equação 3-24, temos

$$\vec{E} = \rho_{ff} \vec{J}, \quad \rho_{ff} = \frac{B\Phi_0}{\eta} \quad (3-26)$$

onde ρ_{ff} é chamado de resistividade do flux flow, ou seja, a resistência ao movimento do vórtice⁴. Notando que a presença do campo elétrico, resulta em uma potência dissipada, a qual é dada por,

$$P_{diss} = \vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{E^2}{\rho_{ff}} = \eta v^2 \quad (3-27)$$

Como efeito, o material não apresenta mais a principal característica do estado supercondutor, a condutividade perfeita. Agora, é necessário descobrir como a dissipação realmente ocorre devido ao movimento do vórtice, embora a dedução do coeficiente de fricção η está ainda em discussão [41]. O η pode ser estimado através do análise dos distintos processos dissipativos que ocorrem dentro e nas imediações do núcleo dos vórtices. Em 1965, J. Bardeen e M. J. Stephen desenvolveram um modelo teórico para explicar como a dissipação ocorre no regime *flux flow* [42]. Eles se basearam numa descrição simples do vórtice, sugerida nos cálculos de C. Caroli *et al.* [43], onde o vórtice tem um núcleo normal, de raio igual a ξ , rodeado por supercorrentes. Assim, o modelo de Bardeen-Stephen permite estimar o coeficiente de dissipação facilmente, assumindo que a dissipação de energia devido ao movimento do vórtice ocorre por processos resistivos ordinários no núcleo. Aplicando as equações

que se opõe ao seu movimento, a qual é proporcional à velocidade.

⁴No caso da força dada pela equação 3-22, temos que o sistema de N vórtices movem-se com velocidade média $\vec{v}$, assim a $\rho_{ff} = n\Phi_0^2/\eta$, sendo $n = N/A$, com A sendo a área da amostra no plano normal ao vórtice.

de London fora deste cilindro é possível calcular o campo elétrico de um vórtice supondo que ele tenha uma determinada velocidade. Esse campo move os elétrons normais gerando dissipação por efeito Joule. Dessa maneira, encontraram duas contribuições para o processo de dissipação: correntes no interior do núcleo normal e correntes normais na região de transição fora do núcleo, resultando em um coeficiente de viscosidade dado por:

$$\eta \approx \frac{\Phi_0 B_{c2}}{\rho_n c^2} \quad (3-28)$$

onde ρ_n é a resistividade exercida pelo campo elétrico gerado pelo movimento dos vórtices e B_{c2} é o campo crítico superior. O modelo de Bardeen-Stephen é válido no limite sujo de um supercondutor, onde o caminho livre médio $l \ll \xi$, logo os processos dissipativos de espalhamento são dominantes⁵.

3.4 Supercondutores Nanoestruturados

3.4.1 Natureza dos Centros de Ancoragem

Para reduzir a resistência finita e consequentemente a dissipação nos supercondutores tipo II causada pelo movimento dos vórtices usa-se as vantagens que oferece o ancoramento ou aprisionamento dos vórtices, conseguindo uma maior força de *pinning* e uma maior densidade de corrente crítica, o qual é útil para aplicações práticas. Assim para impedir o movimento dissipativo dos vórtices é necessária uma força adicional, em supercondutores reais, esta força é conhecida como força de ancoragem⁶, que provém de qualquer heterogeneidade espacial ou defeitos do material como vacâncias de oxigênio, dopagens, planos de maclas, defeitos estruturais, microestruturais, colunares, entre outros. Nessas regiões, a supercondutividade é localmente enfraquecida ou até suprimida, causando variações na energia livre por unidade de comprimento da linha de vórtice, fazendo com que alguns locais sejam mais favoráveis energeticamente do que outros. Assim, tais inomogeneidades agem como centros de ancoragem de vórtices, dado que um vórtice ao passar por uma dessas regiões, ficará sujeito a um potencial atrativo, uma vez que sua fixação é energeticamente favorecida em locais onde o parâmetro de ordem é suprimido. Se este potencial for forte o

⁵A maior parte das amostras supercondutoras encontra-se neste limite.

⁶Em inglês, pinning *Force*

suficiente, para manter o vórtice ancorado, as correntes de transporte poderão percorrer o material sem dissipação e o supercondutor recuperará localmente sua propriedade de condutividade perfeita. Entretanto, se a força de ancoragem, for fraca comparada com a força de Lorentz, os vórtices sob influência desta, passam a mover-se pelo supercondutor com uma velocidade limitada pelo arraste viscoso, dissipando energia. Este movimento corresponde ao flux flow, o qual é mais efetivo a baixas temperaturas, onde os efeitos das flutuações térmicas não são muito importantes.

Para temperaturas não nulas e correntes intensas, haverá um movimento termicamente ativado, chamado *flux creep* (rastejamento de fluxo), no qual os vórtices têm uma velocidade menor que a do *flux flow*. Este movimento ocorre quando a corrente aplicada ao material é o suficientemente alta, e junto com as flutuações térmicas, causam deslocamentos dos vórtices⁷, que passam de um centro de ancoragem para outro, com uma taxa mensurável. Se não temos corrente elétrica fluindo no supercondutor, a probabilidade de um vórtice passar de um defeito para seu vizinho é igual para todas as direções. Pelo contrário, na presença de correntes de transporte, haverá uma força de arraste e portanto uma direção favorável para os deslocamentos. Logo, a força de ancoragem define a densidade de corrente crítica $\vec{J}_c$, acima da qual inicia-se o movimento das linhas de fluxo. Logo, se $\vec{J}$ atinge valores maiores do que seu valor crítico $\vec{J}_c$ a força de Lorentz excederá a força de ancoragem e os vórtices ficam livres para se mover.

Para melhorar a funcionalidade das propriedades supercondutoras, pode-se gerar centros de ancoragem artificialmente, uma técnica usada para isto é irradiação de íons pesados [44], porém, os defeitos fabricados com este procedimento são aleatoriamente distribuídos e têm diferentes energias de ancoragem [45], ocasionando um comportamento dinâmico não uniforme. Estes aspectos foram melhorados graças aos avanços na litografia e ao aperfeiçoamento da nano-fabricação, permitindo a implementação de redes artificiais periódicas de aprisionamento de vórtices em filmes supercondutores. Tais estruturas são tipicamente geradas como arranjos de buracos a nanoescala através do filme [46] ou bem como pontos magnéticos [47], com uma boa otimização do tamanho e arranjo. Dependendo da interação entre o vórtice e do centro de ancoragem, encontra-se que os dois principais mecanismos de aprisionamento são, ancoragem por núcleo e ancoragem magnética [48].

⁷Podem ser tanto globais, isto é todos ou a maioria dos vórtices movem-se ao mesmo tempo, como locais, onde só uma parte dos vórtices movem-se

A ancoragem por núcleo é a responsável da interação atrativa entre os vórtices e os centros de *pinning* na maioria dos defeitos pontuais e refere-se a uma variação local da T_c ou da κ nos centros de aprisionamento, assim se o vórtice está localizado sob um defeito, o volume não supercondutor é reduzido o que resulta em uma minimização da energia livre do sistema e portanto o vórtice é atraído à cavidade. A eficiência deste mecanismo de ancoragem é obtida quando o tamanho dos defeitos são da ordem de ξ ou λ .

A ancoragem magnética é devida à energia cinética das correntes de blindagem ao redor do defeito e à perturbação do campo magnético de um vórtice, isto é, à interação entre material supercondutor e não supercondutor paralelo ao campo magnético aplicado, o qual pode ser estudado assumindo a presença de um antivórtice imagem. Variações da espessura do filme podem conduzir a este tipo de ancoragem, logo os vórtices ficam ancorados em locais de menor espessura onde a energia é menor. A escala de comprimento típico para este tipo de *pinning* é da ordem de λ .

Os defeitos artificiais mais comuns em filmes finos são os defeitos de irradiação, os dots magnéticos e não magnéticos [49], os buracos completos (*antidots*) [46, 50–53] e os buracos incompletos (*blind holes*) [54], frequentemente o tamanho destes é maior do que ξ e ainda maior do que λ .

3.4.2 Redes Periódicas de Centros de Ancoragem

O rápido desenvolvimento de técnicas litográficas nas últimas décadas fez possível fabricar padrões de aprisionamento pré-definidos com tamanhos de até dezenas a centenas de nanômetros. Os tamanhos das estruturas são comparáveis a λ e ξ , o qual melhora a interação entre o defeito e o vórtice supercondutor, modificando assim a simetria da rede de vórtices. Quando estes sítios de ancoragem são organizados periodicamente, os efeitos *matching* surgem como consequência de estados de vórtices comensuráveis em um potencial de *pinning* periódico.

Os efeitos de comensurabilidade têm origem na interação entre os vórtices do material com uma rede de centros de ancoramento, como resultado dessa interação as configurações de vórtices estáveis reproduzem a simetria dos arranjos de ancoragem, assim as curvas de magnetização $M(H)$ e

de corrente crítica $J_c(H)$ apresentam uma melhoria local, na forma de saltos ou máximos periódicos, conhecidos como campos de *matching*, $H = nH_1$, os quais ocorrem em múltiplos inteiros do primeiro campo de *matching*⁸, o qual é definido como o campo onde a densidade de vórtices é igual à densidade de centros de ancoragem que formam a rede, isto é, a intensidade do campo na qual cada centro de ancoragem aprisiona um único quanta de fluxo,

$$H_1 = \frac{\Phi_0}{S} \quad (3-29)$$

sendo S a área da célula unitária da rede de ancoragem, onde n é o número de vórtices por defeito. Logo, nestes campos inteiros fica mais difícil mover um vórtice pois eles estão num mínimo de energia com uma simetria criada.

Estes efeitos de *matching* são tipicamente observados a temperaturas próximas à T_c . Isto pode ser atribuído à divergência de $\lambda(T)$ a uma temperatura próxima da temperatura crítica, o que conduz a uma interação vórtice-vórtice forte, ou bem pode ser porque os fatos de comensurabilidade devidos aos arranjos de ancoragem periódicos são progressivamente mascarados pelo ancoragem intrínseco a medida que a temperatura é diminuída.

Um arranjo artificial de sítios de aprisionamento, apresenta a propriedade intrínseca de ter um número máximo de quanta de fluxo que pode ser preso no interior de um defeito. Isto é chamado número de saturação n_s , o qual depende da razão entre o tamanho do centro de ancoragem e o comprimento de coerência. Mkrtchyan e Schmidt [55, 56] estimaram grosseiramente o número máximo possível de vórtices presos por um único defeito isolado, dado aproximadamente por:

$$n_s = \frac{r_p}{2\xi(T)} \quad (3-30)$$

onde r_p é o raio efetivo do centro de ancoragem. Deste modo, defeitos suficientemente grandes podem aprisionar mais de uma quanta de fluxo. Para arranjos regulares de centros de *pinning* o número de saturação torna-se

$$n_s = \left[\frac{r_p}{\xi(0)} \right]^2 \quad (3-31)$$

devido às interações entre os vórtices [57]. Quando $n_s = 1$, a rede de centros de ancoragem satura no campo de comensurabilidade H_1 . Agora, para campos $H > n_s H_1$, os vórtices que entram na

⁸Além, também múltiplos racionais do primeiro campo *matching* podem gerar uma mobilidade reduzida da rede de vórtices.

amostra já não vão se localizar nos sítios de aprisionamento, mas em vez disso, alguns vórtices vão ocupar posições intersticiais, entre os defeitos, e serão aprisionados pela gaiola magnética formada pelos vórtices ancorados nos defeitos [38]. Esses vórtices intersticiais são em geral, muito mais móveis do que os vórtices presos em sítios de ancoragem, resultando em uma diminuição da corrente crítica. No entanto, esta rede de vórtices composta pela mistura de vórtices intersticiais e vórtices ancorados pelos defeitos, ainda pode ser estável. Esta estabilidade é devida à forte repulsão entre os vórtices intersticiais e os vórtices dentro dos centros de ancoragem saturados.

Buzdin *et al.* encontrou que um *antidot* de raio r_a pode aprisionar pelo menos um quanta de fluxo [58]. Quando os centros de ancoragem são *blind holes*, podem-se ter aprisionados vários vórtices cada um com uma quanta de fluxo enquanto os *antidots* são o suficientemente grandes para aprisionar um único vórtice multiquanta [58, 59], com quanta de fluxo n menor que n_s . Se n excede o valor de n_s , os *antidots* agem como um centro de repulsão. Devido ao efeito de saturação, em uma rede com $n > n_s$ espera-se ter vórtices ancorados com $n_s \Phi_0$ nos *antidots* (aprisionamento forte) e $n - n_s$ vórtices com Φ_0 localizados nos interstícios (aprisionamento fraco) [60].

Uma vez que em um supercondutor homogêneo as redes triangulares e quadradas são as mais favoráveis espera-se que, os efeitos *matching* sejam mais pronunciados em arranjos de centros de aprisionamento com simetria triangular ou quadrada. O efeito de comensurabilidade tem sido estudado em diferentes geometrias, como triangular [61], retangular [62], kagomé [63], honeycomb [64], arranjos quase-periódicos [65], etc., mostrando diversas estruturas de *matching* como consequência da interação entre a rede de vórtices e as geometrias dos arranjos de aprisionamento.

3.4.3 Diversos Trabalhos na Área

A primeira observação da interação vórtices-centros artificiais de ancoragem encontra-se no artigo de Daldini et al. (1974) [66], no qual usou-se filmes finos de Al com sua espessura modulada unidimensional periodicamente, obtendo evidências claras de *matching*. Na Figura 3-6 vemos o efeito do casamento entre a rede de vórtices e a rede de centros de ancoragem situados periodicamente, através dos quatro saltos abruptos na densidade da corrente crítica, o qual corresponde aos valores do campo onde a distância entre os vórtices e os defeitos coincide.

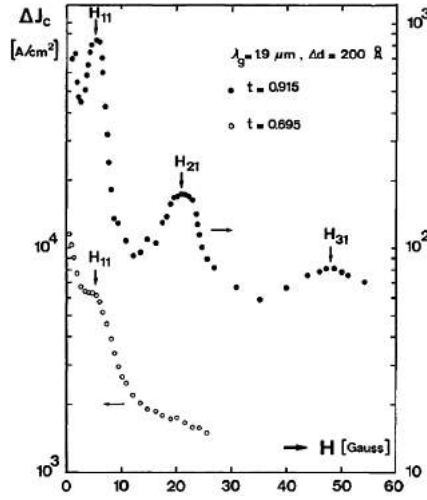


Figura 3-6: Mudança na densidade da corrente crítica para duas temperaturas relativas (t) [66].

Três anos depois, viria o trabalho de Hebard et al. [67] com outro tipo de centro de ancoragem, os buracos. O trabalho foi desenvolvido em um filme de Al com uma geometria triangular para a rede de centros de aprisionamento; neste artigo, pela primeira vez foi sugerido que o comportamento da densidade da corrente crítica em certos valores do campo magnético aplicado ($H > H_1$) era consequência da relação entre os vórtices ancorados e os vórtices localizados nos interstícios. Isto chamou a atenção e gerou um monte de estudos nesse assunto, levando a definir os *antidots* e a criar novas distribuições para os sítios de aprisionamento, como por exemplo redes de buracos quadradas as quais causam comportamentos distintos que as obtidas em simetrias triangulares sem defeitos.

Como já foi explanado na seção anterior, centros de aprisionamento naturais ou artificiais aprisionam as linhas de fluxo magnético, aumentando o valor da corrente crítica. Porém, estes picos na corrente diminuem rapidamente quando o valor de campo aplicado é muito distante dos valores de campo *matching*. Além disso, a altas temperaturas os efeitos de comensurabilidade ocorrem somente em um estreito intervalo de campos. Desse jeito, anomalias nas curvas de magnetização, resistência elétrica e corrente crítica segundo a temperatura e o campo aplicado surgem devido à competição entre as forças repulsivas dos vórtices e as forças atrativas entre os vórtices e os centros de aprisionamento.

K. Harada *et al.* (1996) [35] enxergaram a dinâmica de penetração dos vórtices nos campos *matching*, por meio da microscopia de Lorentz, num filme fino de Nb com 100 nm de espessura, sendo os centros de aprisionamento *antidots* arranjados em uma rede quadrada de $0.83 \mu\text{m}$ de lado e 30 nm de diâmetro. A Figura 3-7 mostra a dinâmica de penetração dos vórtices no filme, aumentando e diminuindo o campo magnético aplicado. Os vórtices penetram o filme por seu contorno, ocupando a primeira linha de *antidots*, quando todos os defeitos estão ocupados, os vórtices passam a ocupar as regiões intersticiais, portanto quando todas as posições estão cheias os vórtices se movem como linhas, sendo a mobilidade maior nos interstícios.

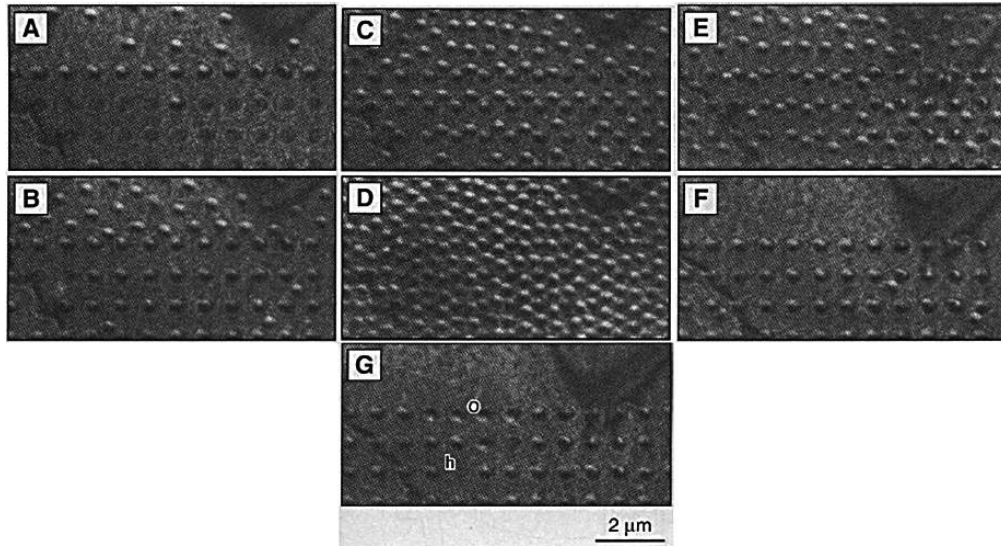


Figura 3-7: Dinâmica de vórtices quando H aumenta e diminui. (a) $H = 0.2H_1$, (b) $H = 0.5H_1$, (c) $H = 1.2H_1$, (d) $H = 2.5H_1$, (e) $H = 1.5H_1$, (f) $H = 0.9H_1$, (g) $H = 0.2H_1$ [35].

Além dos *antidots*, encontram-se outros tipos de centros de ancoragem para filmes finos, entre estes estão os *blind holes* e os pontos magnéticos. Sobre esses últimos, temos que o primeiro trabalho foi em 1997 por J. I. Martin [61]; estes estudos foram feitos em filmes finos de Nb sobre substratos de Si os quais por sua vez, estão sob pontos magnéticos de Fe, Ni ou Co.

O exemplo claro da comensurabilidade entre a rede de vórtices e o arranjo de centros de ancoragem para pontos magnéticos, pode ser observado na Figura 3-8, que corresponde a um filme supercondutor de Nb com 100 nm de espessura crescido sobre um arranjo triangular de dots de Ni,

que por sua vez tem uma espessura de 40 nm.

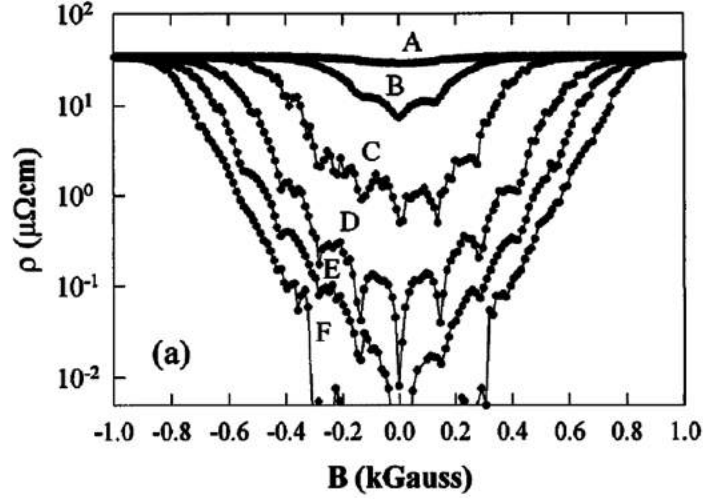


Figura 3-8: Curva da resistência em função do campo magnético aplicado para um filme de Nb sobre um arranjo triangular de dots de Ni para diferentes valores da corrente [61].

Esta imagem mostra curvas de $\rho(B)$ para diferentes valores de densidade de corrente que estão no intervalo de $J = 10^3 - 10^5 \text{ A/cm}^2$. A redução na dissipação, em valores bem definidos do campo magnético, apresentam-se somente para uma faixa limitada de correntes e temperaturas. Como resultado do efeito da comensurabilidade, a rede de vórtices move-se mais devagar e surgem mínimos na dissipação. Para valores altos de corrente, a resistividade é similar à do estado normal e fracamente dependente do campo. Quando a densidade de corrente é diminuída, aparece uma estrutura periódica, primeiro como dois pequenos picos, logo os mínimos tornam-se mais profundos e o efeito de *matching* pode ser observado para os valores mais altos de J .

Uma forma simples para obter informações sobre a mobilidade dos dois tipos de vórtices (os que encontram-se nos interstícios e nos *antidots*) é realizar medidas de magnetorresistência a baixo campo. Uma vez que o movimento de fluxo magnético conduz à dissipação, espera-se que com a presença dos centros de ancoragem esta seja reduzida devido ao aprisionamento das linhas de fluxo pelos *antidots* e, portanto, diminuir a queda de tensão através da amostra. Na Figura 3-9 tem-se uma comparação da resistência segundo o campo entre um filme com *antidots* e um filme

de referência sem *antidots* a três temperaturas diferentes próximas a $T_c = 4.725\text{K}$ e com uma densidade de corrente ac fixa de $41\text{A}/\text{cm}^2$ [68].

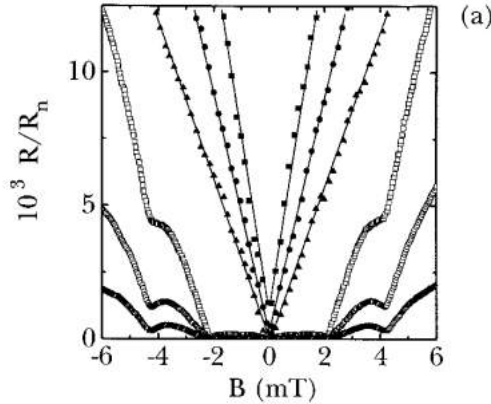


Figura 3-9: Comparação da resistência normalizada R/R_n de um filme WGe com uma rede de *antidots* (símbolos abertos) e um filme de referência sem *antidots* (símbolos fechados) a diferentes temperaturas: $T = 4.710\text{K}$, quadrados; $T = 4.705\text{K}$, círculos e $T = 4.700\text{K}$, triângulos [68].

Para o filme de referência, uma dependência do campo é medida com um declive o qual diverge próximo a T_c como $(T_c - T)^{-v}$ ($v \approx 1$). No caso do filme com uma rede de *antidots*, a resistência é fortemente suprimida quando o número de vórtices é menor do que os *antidots* disponíveis. A forte redução, com respeito ao filme sem defeitos, é devida à eficiência do aprisionamento dos vórtices pelo arranjo de *antidots*.

Entre os vários trabalhos teóricos, estão os feitos por Charles Reichhardt, onde analisou a existência do efeito *matching* em valores particulares de campo, para sistemas com centros de aprisionamento triangulares e quadrados. Assim, o balanceamento entre as forças vórtice-vórtice e vórtice-aprisionamento resulta em um conjunto de rede de vórtices de diferentes simetrias dependentes da densidade de linhas de fluxo, simetria da rede e dos centros de ancoragem [69]. Esses resultados já tinham uma base experimental, com resultados semelhantes, feitos dois anos atrás por Moshchalkov com microscopia de Lorentz.

No outro trabalho feito por Reichhardt e colaboradores [70], eles simularam numericamente os arranjos de centros de ancoragem com geometria triangular e quadrada, onde estudaram o com-

portamento da força necessária para densificar os vórtices aprisionados nos defeitos, em função da força de ancoramento que tem cada um desses. O estudo foi feito para duas situações, uma comensurável ($H = H_1$) e outra incomensurável ($H = 0.64H_1$), mostrando que a diferença da corrente crítica entre os campos comensurável e incomensurável cresce segundo a força de ancoragem diminui. Na Figura 3-10 enxerga-se a simulação do comportamento da força de desancoramento dos vórtices localizados nos defeitos, em função da força de ancoragem. Notemos que para o caso

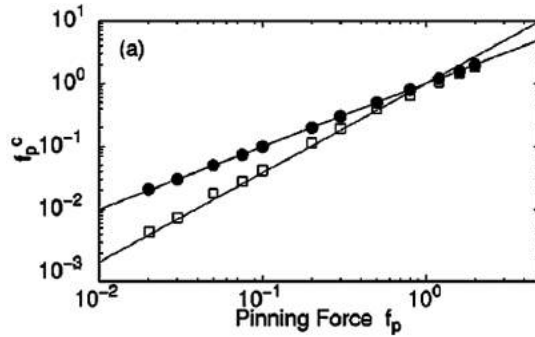


Figura 3-10: Simulação do comportamento da força de desancoramento dos vórtices localizados nos defeitos, em função da força de ancoragem, para a situação comensurável (pontos pretos) e a incomensurável (quadrados) [70].

comensurável a força de desancoramento decresce linearmente com a diminuição da força de ancoragem, enquanto que para o caso incomensurável, decresce mais rapidamente. Esse comportamento pode ser o responsável pelo aparecimento dos campos *matching* em temperaturas próximas a T_c , pois conforme a temperatura aumenta, os centros de aprisionamento enfraquecem.

No trabalho de Raedts *et al.* [71] encontra-se a comparação das propriedades do ancoramento das linhas de fluxo para filmes supercondutores de Pb com arranjos de *antidots* e arranjos de *blind holes* (ver Figura 3-11). As redes de defeitos de *blind holes*, são cavidades não totalmente perfuradas, logo estas cavidades possuem uma fina camada supercondutora em sua base, o qual permite aprisionar vários vórtices de uma quanta de fluxo e mantê-los separados [59]. Enquanto, os *antidots* são cavidades totalmente perfuradas, resultando no aprisionamento de vórtices gigantes ou multiquanta.

Eles estudaram a resposta dinâmica da rede de vórtices para os dois filmes por meio de medidas

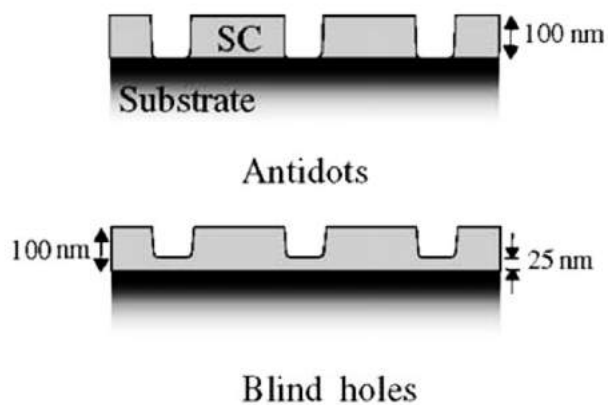


Figura 3-11: Representação da seção transversal para os filmes de Pb com arranjos de *blind holes* e *antidots* [71].

de magnetização ac, encontrando que o arranjo de *blind holes* tem um potencial de aprisionamento menos eficiente que os arranjos de *antidots*. Além disso, o maior número de fluxo de quanta ancorado por sítio de *pinning* é menor para os *blind holes*. Isto porque a força efetiva de aprisionamento nestes defeitos é menor que no caso de *antidots*. Concluindo, os *antidots* são centros de ancoragem mais eficientes que os *blind holes*.

4 Simulações da Dinâmica de Vórtices em Supercondutores Nanoestruturados

Neste capítulo, apresentamos os resultados de simulações de dinâmica molecular, examinando a dinâmica de vórtices num filme fino supercondutor com um arranjo quadrado de centros de ancoragem para várias densidades de vórtices incluindo densidades significativamente maiores que a densidade de defeitos. São mostradas as configurações de equilíbrio dos vórtices e estabilidade deles sob uma força motriz aplicada.

4.1 Configurações de Equilíbrio

A característica básica de um sítio de aprisionamento artificial (que denominaremos armadilha) é a barreira de energia efetiva que nele se cria. As linhas de fluxo quantizado ancoradas fortemente em uma armadilha podem formar uma barreira de energia impedindo a captura de novos vórtices. Assim, os vórtices adicionais são forçados a ocuparem as regiões intersticiais entre as armadilhas. Esses vórtices intersticiais podem ser parcialmente presos por irregularidades comuns da rede cristalina (*pinning material*) ou por uma forte repulsão devido às linhas de fluxo ancoradas nas armadilhas artificiais.

4.1.1 Metodologia

Nesta seção, estudaremos como os vórtices se distribuem nas armadilhas e regiões intersticiais à medida que variamos o campo externo. Modelamos o caso de um filme supercondutor bi-dimensional, localizado no plano $x - y$, na presença de um campo magnético aplicado na direção perpendicular ao plano do filme (i.e., $\vec{H} = H\hat{z}$) e uma corrente de transporte externa $\vec{J}$ na direção paralela ao filme supercondutor, ou seja, paralela ao plano $x - y$. Para esse caso, cada vórtice isolado possui um fluxo magnético $\vec{\Phi}$, onde $\vec{\Phi} = \Phi_0\hat{z}$.

No limite de London, o vórtice é considerado rígido, indeformável e que responde como um todo a excitações externas. A equação do movimento para um vórtice na posição $\vec{r}$ pode ser expressa por [72],

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{vv} + \vec{F}_{vp} + \vec{F}_L + \vec{F}_M + \vec{\Gamma}_T - \eta\vec{v} \quad (4-1)$$

Nesta equação m é a massa efetiva de um vórtice, a qual é desprezível em comparação com o arrasto viscoso, $\vec{F}_{vv}$ é a força de interação vórtice-vórtice, $\vec{F}_{vp}$ é a força de interação entre um vórtice e um centro de ancoragem, $\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{\Phi}_0$ é a força de Lorentz induzida pela supercorrente, $\vec{F}_M = \alpha\vec{\Phi}_0 \times \vec{r}$ é a chamada força de Magnus, sendo α o coeficiente de força de Magnus. Essa força é proveniente do movimento de um vórtice através do condensado supercondutor e resulta em um movimento dos vórtices na direção perpendicular à força de Lorentz, isto é, paralela à densidade de corrente. A maior parte das amostras supercondutoras, sejam filmes finos, cristais ou cerâmicas, apresentam uma concentração de impurezas e defeitos estruturais que as caracterizam como estando no chamado limite sujo, no qual o caminho livre médio dos elétrons é menor que o comprimento de coerência da amostra pura. Logo, exceto para supercondutores extremamente puros, a força Magnus torna-se desprezível em relação às outras forças atuantes no sistema. $\vec{\Gamma}_T$ representa uma força estocástica resultante das flutuações térmicas no sistema. Quando se estudam supercondutores com baixas temperaturas críticas a energia térmica é pequena, fazendo do deslocamento térmico um efeito menor. Finalmente, η é o coeficiente de viscosidade relacionado ao movimento dissipativo do núcleo do vórtice dentro do cristal supercondutor e é fixado igual à unidade neste trabalho.

A origem da força dissipativa (ou atrito viscoso), $\eta\vec{v}$, pode ser explicado pelo campo elétrico,

$\vec{E}$, originado do movimento dos vórtices. O coeficiente de dissipação η pode ser estimado pela análise dos distintos processos dissipativos que ocorrem dentro e ao redor do núcleo dos vórtices. O modelo de Bardeen-Stephen, discutido na seção 3.3, permite estimar η de forma simples (ver equação 3-28).

Para simular o comportamento dos vórtices em movimento num meio com centros de ancoragem, com o termo inercial desprezível o problema se reduz a resolver a equação de Bardeen-Stephen. Assim, a equação de movimento (4-1) de um vórtice na posição $\vec{r}_i$ torna-se:

$$\eta \vec{v}_i = \vec{F}_L - \vec{\nabla} E_i + \vec{\Gamma}_T(t) \quad (4-2)$$

com E_i dado por,

$$E_i = \sum_j U_{vv}(\vec{r}_{ij}) + U_p(\vec{r}_i) \quad (4-3)$$

onde U_{vv} representa a interação vórtice-vórtice da equação 4-1, a qual para altas densidades de vórtices pode ser aproximada por um potencial logarítmico:

$$U_{vv}(r) = -A_v \ln \left(\frac{r}{\Lambda} \right) \quad (4-4)$$

com $A_v = \Phi_0^2 / 2\pi\mu_0\Lambda$, no sistema CGS, onde Φ_0 é o quantum de fluxo. $U_p(\vec{r}_i)$, representa o potencial sentido pelo vórtice i na posição $\vec{r}_i$, devido aos centros de ancoragem artificiais introduzidos no sistema. Temos que $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ é a distância entre vórtices i, j . A função da temperatura $\vec{\Gamma}_T(t)$ tem o objetivo de acelerar a convergência para um estado de equilíbrio.

O uso das equações 4-1 e 4-2 está condicionando que o vórtice seja tratado como uma entidade rígida, o qual é uma excelente aproximação para filmes supercondutores com κ alto e espessura $d \ll \lambda$. Se o material não possui um alto valor de κ , outras contribuições e efeitos dinâmicos como *phase slips*, deformações do corpo do vórtice, têm que ser levados em conta¹.

Os centros de aprisionamento, neste trabalho, são modelados como um potencial periódico $U_p(x, y)$ numa célula de simulação de 12×12 armadilhas com condições de contorno periódicas. A

¹O modelo de dinâmica molecular e a aproximação de London não são válidas para densidades altas de vórtices, para vórtices com velocidades altas e para materiais onde a deformação de vórtices deve se levar em conta. Nesses casos, a teoria de Ginzburg-Landau dependente do tempo é aproximação mais apropriada.

ancoragem é modelada como poços atrativos de raio r_p sendo a_p o período da rede de centros de *pinning*, lembrando que os defeitos estão colocados numa rede quadrada,

$$U_p(x, y) = -U_0 \exp \left(- \frac{\sin^2[\pi x/a_p] + \sin^2[\pi y/a_p]}{2 \sin^2[\pi r_p/a_p]} \right) \quad (4-5)$$

A forma do potencial se assemelha a uma rede contínua de poços gaussianos quando $r_p \ll a_p$ e tem a vantagem de não apresentar descontinuidades. O potencial de interação entre os vórtices foi escolhido como sendo $U_0 = 1.5A_v$. Tal escolha fornece um número de saturação inicial n_s igual a 2, como será visto depois. A forma deste potencial pode ser vista na Figura (4-1).

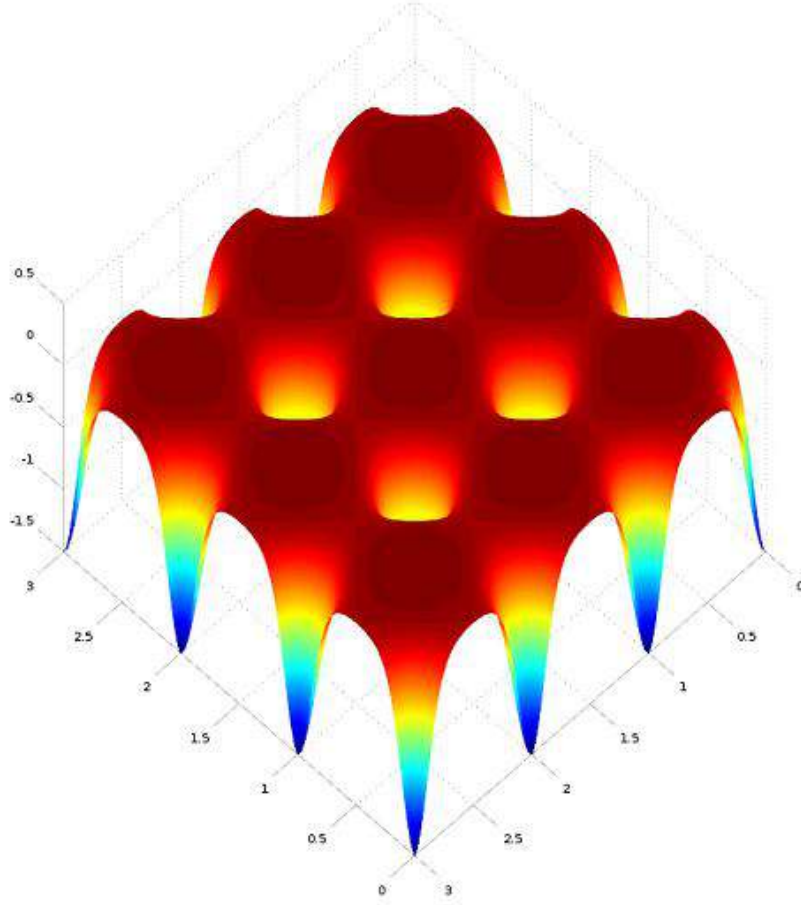


Figura 4-1: Forma do potencial de *pinning* usado nas nossas simulações.

Computacionalmente, a simulação consiste em integrar numericamente a equação de Langevin (4-2) para N vórtices. A integração é feita usando um algoritmo de diferenças finitas expresso pela

equação de recorrência [38]:

$$\vec{r}_i(t_{n+1}) = \vec{r}_i(t_n) + \frac{1}{\eta} \vec{F}_i h + \vec{u}_i(t_n) \sqrt{Dh} \quad (4-6)$$

onde temos que h é o passo do tempo na discretização, isto é,

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad (4-7)$$

e $D = 2k_B T / \eta$ é a difusividade do vórtice. h deve ser suficientemente pequeno para garantir a convergência das soluções. $\vec{F}_i$ é a força sobre o vórtice i , que leva em conta as interações vórtice-vórtice, vórtice-*pinning* e vórtice-corrente de transporte (força de Lorentz). As componentes do vetor $\vec{u}_i$ são variáveis estocásticas gaussianas independentes, de média zero e variância unitária.

Para simular um sistema de tamanho infinito através da técnica de dinâmica molecular, utilizamos uma região de simulação quadrada de dimensões de L_x por L_y , onde $L_x = L_y = 12a_p$, e condições de contorno periódicas (Figura 4-2). Consideramos N_v vórtices e N_p centros de aprisionamento, definindo $n = N_v/N_p = H/H_1$, onde H_1 é o campo no qual o número de vórtices é o mesmo que o número de centros de *pinning*.

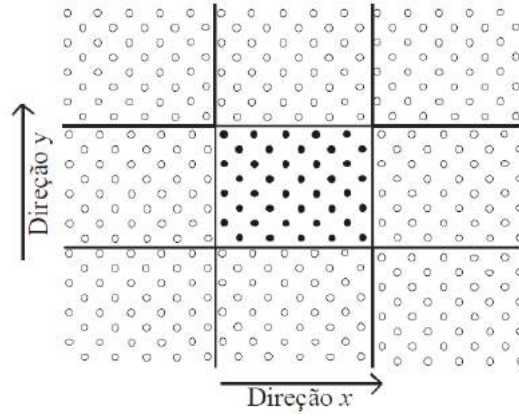


Figura 4-2: Caixa de simulação utilizada, onde são aplicadas condições de contorno periódicas para simular o sistema infinito.

Realizamos simulações para diferentes valores do raio das armadilhas, fixando $r_p = 0.12a_p$, observando que para valores maiores o espaçamento da rede de vórtices não é comensurável com o potencial periódico U_p dado pela equação 4-5.

Como a interação logarítmica entre vórtices é de longo alcance, a truncagem simples do potencial pode gerar em erros numéricos importantes. Fazendo uso das condições de contorno periódicas, é possível escrever o potencial de interação vórtice-vórtice como uma soma exata rapidamente convergente, válida em toda a célula de simulação, conhecida como série de Grønbech-Jensen [73],

$$U_{vv}(x_{ij}; y_{ij}) = \epsilon\pi(y_{ij})^2 - \frac{\epsilon}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\cosh 2\pi(y_{ij} + m) - \cos 2\pi(x_{ij})}{\cosh 2\pi m} \quad (4-8)$$

onde $x_{i,j} = x_i - x_j$ e $y_{i,j} = y_i - y_j$, sendo i e j dois vórtices dentro da célula de simulação. O valor exato do potencial resultante pode ser aproximado pela soma de apenas alguns termos da série, assim, na prática, substituímos a soma infinita por $\sum_{m=-M}^M$ com $M = 5$. Devido à rápida convergência da série, essa escolha permite uma estimativa rápida e bastante acurada (dentro da precisão da máquina) do potencial original.

4.1.2 Recozimento Simulado

As posições iniciais estáveis dos vórtices são obtidas usando um processo de recozimento simulado (conhecido pelo termo em inglês de *simulated annealing*). Cada simulação começa com uma configuração aleatória, onde a rede de vórtices encontra-se num estado fundido, a uma temperatura inicial alta² a qual é reduzida segundo a relação de recorrência:

$$T_n = 0.85T_{n-1}. \quad (4-9)$$

Após de 40 iterações chega-se ao valor de temperatura $T = 0.001767$, nesse valor a temperatura é zerada para verificar se o estado é estável. Isto tem efeito semelhante ao de experimentos de resfriamento sobre ação de campo, (*field-cooled*) da Referência [35]. O sucesso para a obtenção da configuração de equilíbrio correta depende da escolha adequada da taxa de variação da temperatura e do tamanho da vizinhança.

Estudamos 64 configurações estáveis iniciando com $N_v = 18$ vórtices na rede, levando a cabo uma variação de $\Delta N_v = 18$ o qual nos dá a opção de ter configurações inteiras e fracionárias.

²O processo de *annealing* se inicia a temperaturas altas, maiores que a temperatura de fusão da rede de vórtices correspondente, com uma distribuição de vórtices aleatória.

Nas Figuras 4-3 e 4-4, pode-se perceber as disposições inteiras para as linhas de vórtices (pontos vermelhos) ancoradas nas armadilhas (círculos azuis).

Para o primeiro campo de *matching* (a), todos os vórtices estão aprisionados nos sítios de *pinning* tal que todas as linhas de fluxo estão num arranjo quadrado e temos um vórtice por sítio de *pinning*. No segundo campo de *matching* (b) temos dois vórtices por armadilha embora nota-se que as orientações para as duas linhas de fluxo não apresentam periodicidade, tal fato é devido aos vórtices estar próximos um de outro e à pequena barreira de energia necessária para que um vórtice gire, comportando-se como um vórtice gigante com 2 *quanta* de fluxo, o qual induz uma corrente isotrópica sobre os outros vórtices.

No terceiro campo de *matching* (c) o número de vórtices nos defeitos é mantido em dois e os restantes ocupam as regiões intersticiais. Nesse valor do campo, os vórtices intersticiais formam uma rede quadrada perfeita. O quarto campo de *matching* (d) apresenta desordem apenas na orientação dos vórtices presos nas armadilhas, enquanto os vórtices nos interstícios exibem um ordenamento interessante traçando um losango intercalado nos dois sentidos, isto é temos pares de vórtices intersticiais alterando sua posição.

No quinto campo de *matching* (e) temos um ordenamento perfeito tanto dos vórtices ancorados como dos intersticiais. O número de vórtices nas armadilhas é uniforme com uma orientação definida. Por outro lado, os vórtices não ancorados formam uma rede hexagonal periódica. No sexto campo de *matching* (f) temos ordenamento apenas nos vórtices intersticiais, os quais formam pequenos losangos que intercalam sua orientação ao redor de cada armadilha, esta configuração não havia sido reportada em trabalhos anteriores.

No sétimo campo de *matching* (g), a configuração ainda mostra dois vórtices ancorados nas armadilhas e apresenta desordem na orientação tanto dos vórtices nos buracos como nas regiões intersticiais. Para o último campo de *matching* (h), o número de vórtices ancorados por armadilha aumenta para três, evidenciando a dependência do número de saturação com o valor do campo. Percebemos um ordenamento na orientação da maioria dos vórtices aprisionados, os quais arranjam-se num triângulo com a mesma orientação, e na maior parte das regiões intersticiais, nas quais os vórtices desenharam a estrutura que encontra-se plasmada na Figura 4-4.

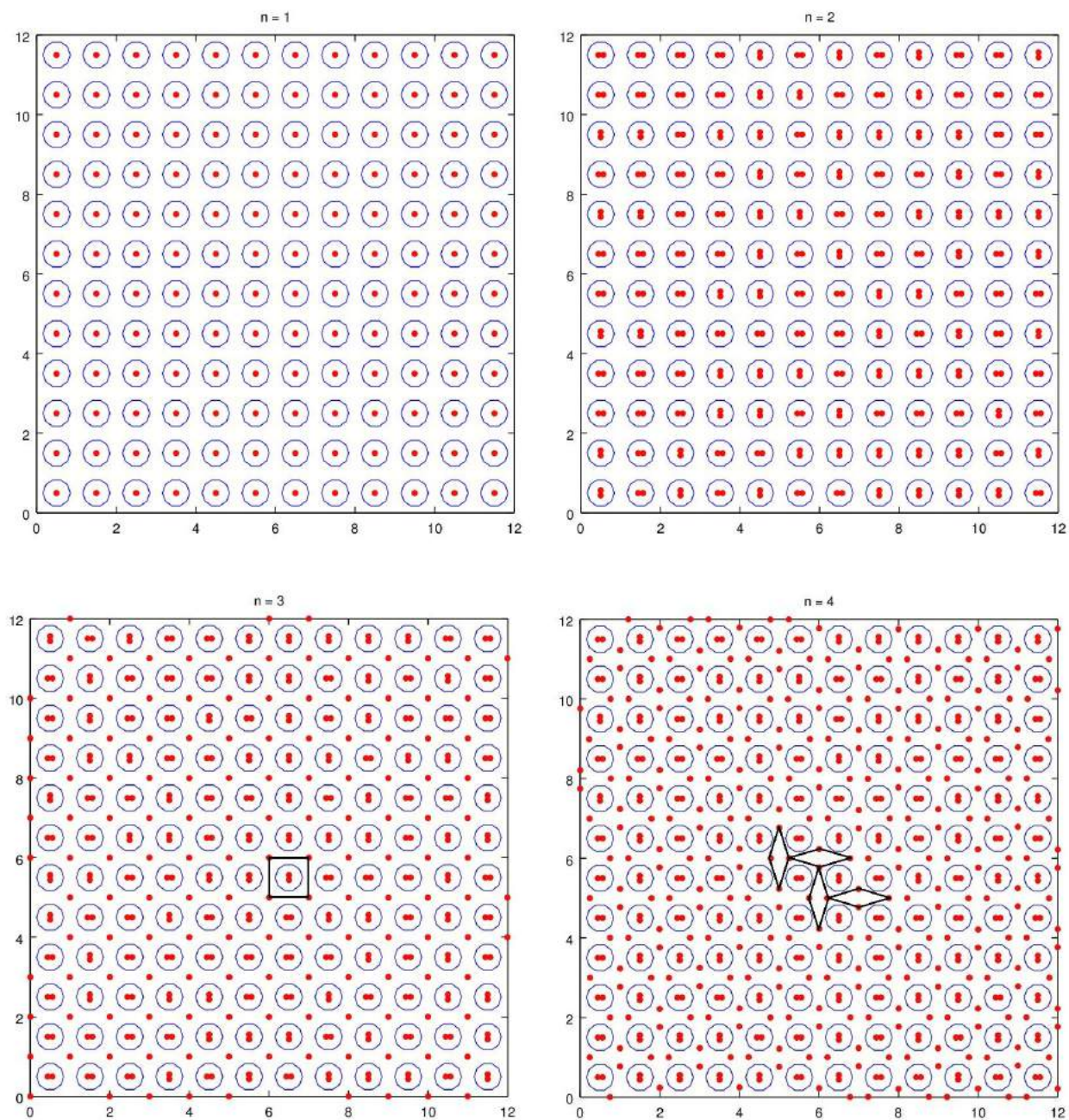


Figura 4-3: Configurações estáticas dos vórtices que minimizam a energia livre do sistema, as quais foram obtidas desde o processo de *simulated annealing* para um arranjo quadrado de 12×12 de centros de *pinning*. A densidade de fluxo é $n = 1$ em (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d).

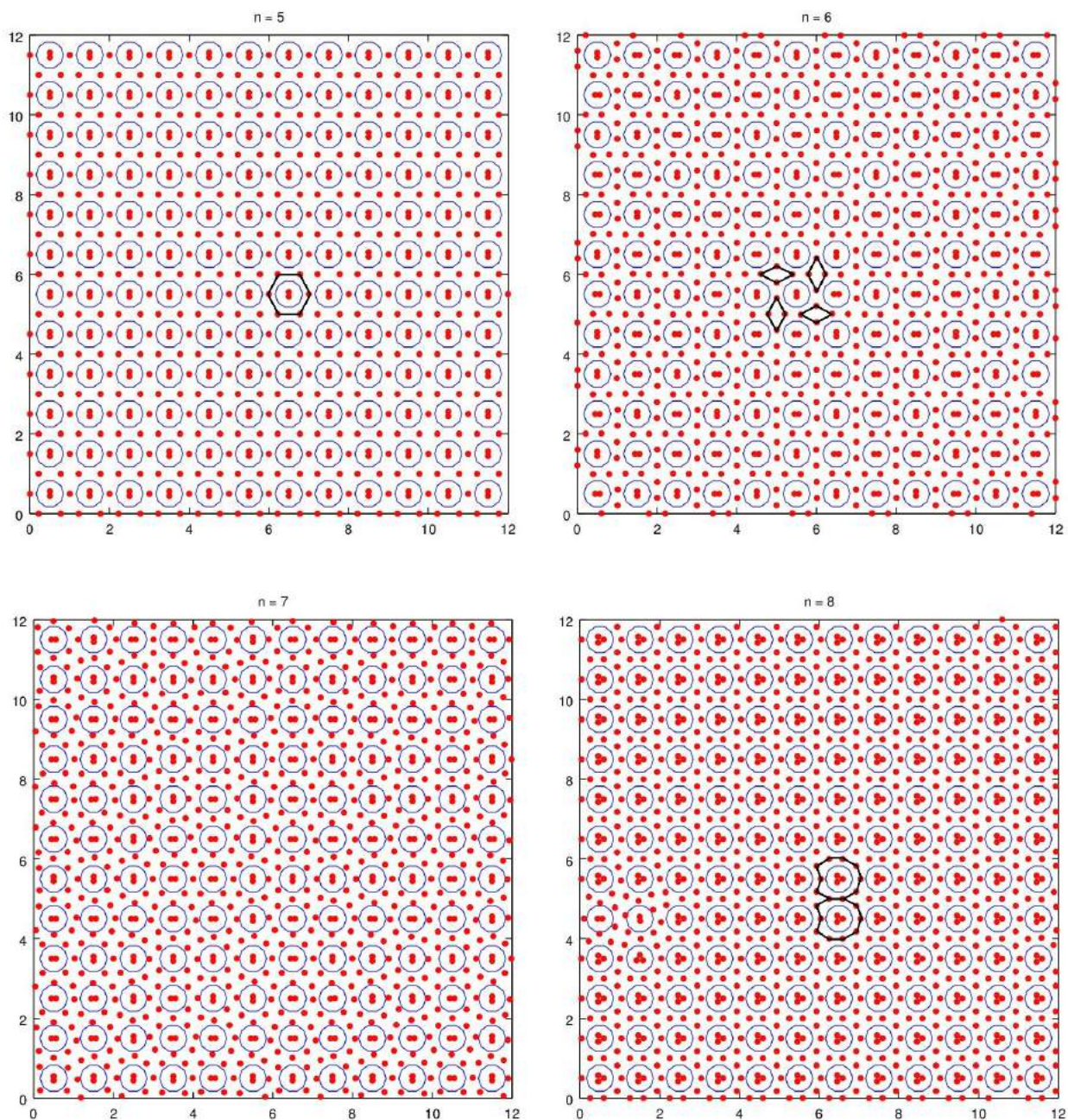


Figura 4-4: Configurações estáticas dos vórtices que minimizam a energia livre do sistema, as quais foram obtidas desde o processo de *simulated annealing* para um arranjo quadrado de centros de *pinning*. A densidade de fluxo é $n = 5$ em (e), 6(f), 7(g), 8 (h).

Recentemente, simulações computacionais das equações de Ginzburg-Landau revelaram que vórtices intersticiais exercem pressão sobre os centros de *pinning*. Embora os vórtices intersticiais apareçam em campos magnéticos baixos, a interação vórtice-vórtice aumenta nos campos mais altos fazendo com que mais vórtices sejam puxados dentro dos centros de ancoragem [74]. Nossas simulações realizadas, na aproximação de London, revelaram por primeira vez um efeito semelhante, onde foi encontrado o incremento do número de saturação no oitavo campo de *matching* para o valor de $n_s = 3$. Isso foi esquematizado por M. Baert et al. [75] no seu trabalho num filme fino de Pb/Ge com um arranjo quadrado de centros de ancoragem.

4.1.3 Comparação com outros padrões já observados

Nossos resultados estão em acordo com o encontrado experimentalmente no trabalho de Harada [35], no simulado computacionalmente na abordagem de GL por Berdiyrov [76] e por dinâmica molecular nos estudos feitos por Reichhardt [69].

As nossas estruturas para $n = 1, 3, 4, 5, 6$ correspondem exatamente ao encontrado por medidas experimentais e simulações computacionais realizadas por vários autores. Entre os resultados que se assemelham está o obtido por G. R. Berdiyrov et al. [76], os quais usando a teoria não linear de Ginzburg-Landau, estudaram as configurações de vórtices em filmes supercondutores contendo um arranjo quadrado de centros de ancoragem. Na Figura 4-5 exibimos os gráficos de contorno da densidade de pares de Cooper da rede de vórtices na presença de uma rede de centros de ancoragem com raio $R = \xi$ e uma distância entre cada buraco de $W = 8.0\xi$, para diferentes valores de campo de *matching*, obtidos na referência [76].

As configurações para a rede de vórtices obtidas por nossas simulações para os campos 1, 3 e 5 são similares aos contornos encontrados na referência [76] para $n = 1, 2$ e 4, respectivamente. A configuração obtida em $n = 5$ apresenta uma configuração distinta por de rotacionada 90° .

No seu trabalho, Reichhardt et al. [69], levou a cabo uma série de simulações usando dinâmica molecular para um arranjo de vórtices interagindo com uma rede quadrada de pequenos sítios de *pinning*. A figura 4-6 mostra os gráficos obtidos por esses autores para as posições dos vórtices

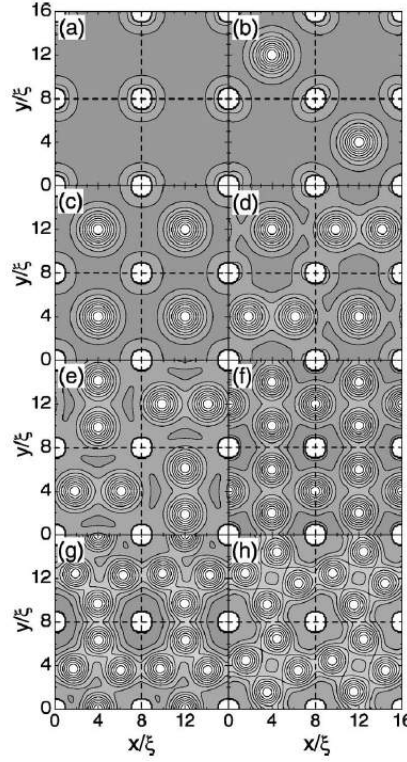


Figura 4-5: Gráficos de contorno de $|\Psi|^2$ (cor branca/preta, densidade baixa/alta) num filme supercondutor com centros de ancoragem para os campos de *matching*: $n = 1(a)$, $3/2$ (b), 2 (c), $5/2$ (d), 3 (e), 4 (f), $9/2$ (g) e 5 (h). [75]

desde o *simulated annealing*, com um $r_p = 0.35\lambda$ e $f_p/f_0 = 0.625$, onde $f_0 = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda^3}$.

As configurações para $n = 1, 3, 4, 5$ são semelhantes aos quatro primeiros campos de *matching* obtidos por [69]. Observa-se uma diferença para o quinto campo de *matching* obtido neste trabalho, onde a rede de vórtices está rotacionada por 90° . No trabalho de Reichhardt, o raio dos defeitos é o suficientemente pequeno como para aprisionar somente um vórtice, diferentemente ao nosso caso onde para altos valores de campo consegue-se reter até 3 vórtices, por centro de ancoragem.

K. Harada et al. [35] fez um estudo sobre o efeito de *matching* através da microscopia de Lorentz, obtendo uma observação direta do comportamento dos vórtices em um filme fino de Nióbio com um arranjo regular de defeitos artificiais. Na Figura 4-7 mostramos essas micrografias de Lorentz e as configurações dos vórtices obtidas. Os pontos vermelhos são os defeitos e os círculos azuis são

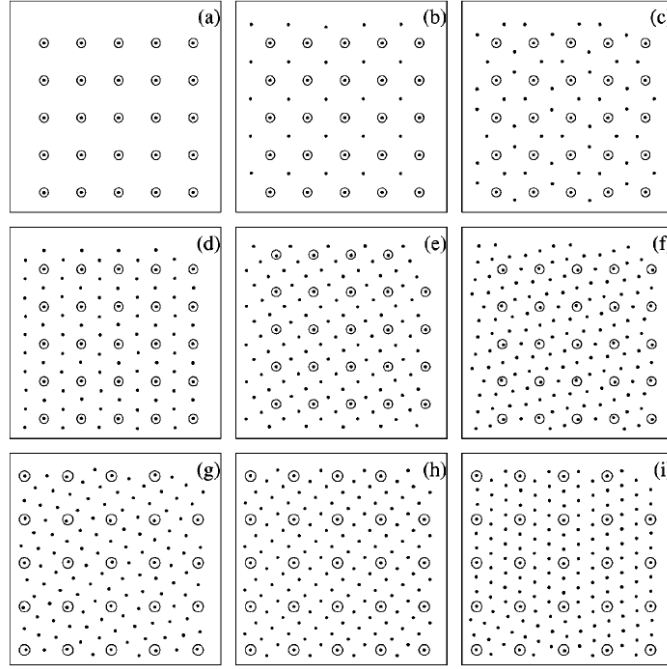


Figura 4-6: Estados fundamentais dos vórtices obtidos através do *simulated annealing* para um arranjo quadrado de defeitos, mostrando um subconjunto $12\lambda \times 12\lambda$ de uma amostra de $36\lambda \times 36\lambda$. A densidade de fluxo é $n = 1$ (a), 2 (b), 3 (c), 4 (d), 5 (e), 6 (f), 7 (g), 8 (h) e 9 (i) [69].

os vórtices. Os quadrados cinzas indicam as células unitárias da rede de vórtices em cada caso. As configurações para $n = 1, 3, 4, 5$ correspondem aos quatro primeiros campos de *matching* obtidos por [35].

Desta maneira as configurações dos vórtices são determinadas principalmente pela força de *pinning* de cada armadilha e pela interação vórtice-vórtice. Esta última é muito dependente da densidade de empacotamento dos vórtices, considerando que as expressões conhecidas não levam em conta a possível sobreposição dos núcleos dos vórtices.

Defeitos com raios pequenos prendem somente um único vórtice, enquanto os vórtices restantes ficam no espaço entre eles. Espera-se que para um raio maior as configurações de vórtices com vórtices multiquanta sejam energeticamente mais favoráveis [77].

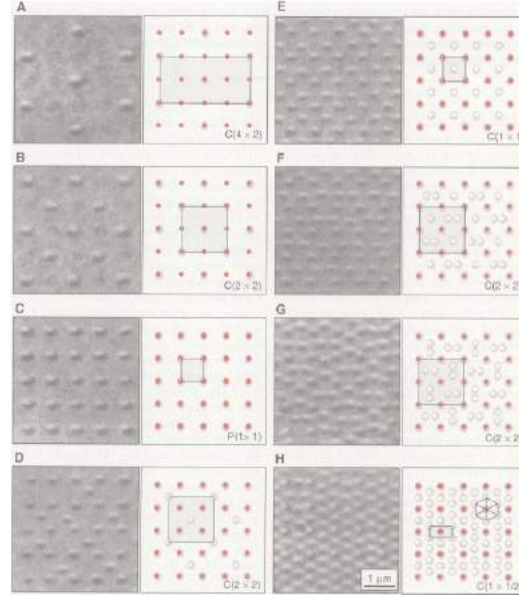


Figura 4-7: Micrografias de Lorentz e esquemas das configurações dos vórtices em um arranjo quadrado de defeitos artificiais nos campos de *matching*: (a) $n = 1/4$, (b) $n = 1/2$, (c) $n = 1$, (d) $n = 3/2$, (e) $n = 2$, (f) $n = 5/2$, (g) $n = 3$ e (h) $n = 4$ [35].

Neste trabalho o procedimento de recozimento foi feito para procurar estados de baixa energia, mas não garante que ele seja o estado fundamental do sistema. Um estudo mais aprofundado exigiria repetir o *annealing* várias vezes, em diferentes realizações da força estocástica e a partir dos vários estados estáveis saber qual é de menor energia. Esse estudo detalhado para obter o estado fundamental não foi levado a cabo pois demanda grande esforço computacional e não é o foco principal do trabalho, ainda assim, com um *annealing* rápido foram obtidas configurações similares às reportadas na literatura.

4.2 Estabilidade das Configurações em Relação a uma Corrente Aplicada

Partindo das configurações estáticas dos vórtices, estudadas na seção anterior, é determinada a força de ancoragem crítica por meio do aumento lento da força motora espacialmente uniforme, F_d , a qual corresponde à força de Lorentz quando uma corrente é aplicada no sistema. Neste trabalho, a força motriz está na direção x ao longo de um eixo de simetria do arranjo de *pinning* periódico. Cada simulação é iniciada com a força de transporte igual a zero, a qual é lentamente aumentada em passos de $\Delta F_x = 0.05$ até o máximo valor $F_x = 3$. A força de *pinning* é definida como a força na qual a velocidade do vórtice é maior que um valor limite ($V_x = 0.01$) para a qual considera-se ocorrer o desprendimento dos vórtices.

Para cada incremento da força motriz examinamos a média das velocidades na direção x , isto é,

$$V_x = \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} \vec{v}_i \cdot \hat{x} \quad (4-10)$$

onde N_v é o número total das linhas de fluxo no sistema.

Como foi discutido no Capítulo 2, a velocidade do vórtice é proporcional ao campo elétrico, $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$, e a força aplicada é proporcional à densidade de corrente $\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$. Logo, quando medimos $|\vec{E}| \times |\vec{J}|$, o qual é o mesmo que V vs I , estamos medindo indiretamente $\vec{v} \times \vec{F}$. Assim, a curva da força F_d versus a velocidade V_x , corresponde experimentalmente à curva de tensão-corrente $V(I)$. Portanto, em nossas simulações podemos estimar a tensão através do sistema calculando a velocidade dos vórtices em função do tempo.

Na Figura 4-8 mostramos a força de ancoragem crítica, F_p^c versus a densidade de vórtices para o nosso arranjo quadrado de armadilhas. A força crítica é análoga à força de ancoramento necessária para mover os vórtices através do sistema. Pode-se perceber os efeitos claros de *matching* em $n = 1, 2, 3, 4$ e 6 . Notam-se também efeitos de *submatching* que são identificados pelos picos menores de comensurabilidade nos campos fracionais 4.5 e 7.5 . Observa-se a ausência dessa característica marcante em campos de *matching* para $n = 5, 7$.

Como é esperado, o aprimoramento do *pinning* comensurável é observado no primeiro campo

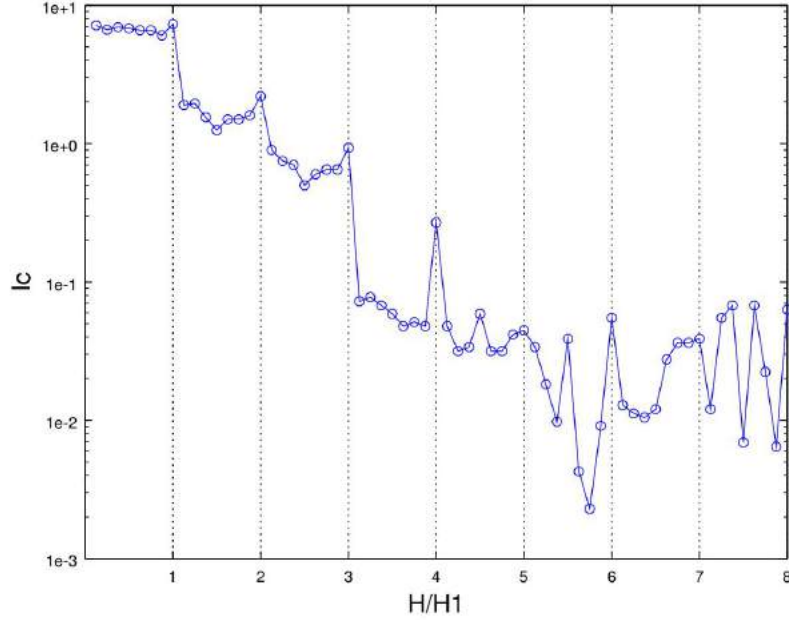


Figura 4-8: Força de ancoragem crítica F_p^c em escala logarítmica para $0 < n < 8$ com um arranjo quadrado de centros de ancoragem. Observa-se picos em $n = 1, 2, 3, 4$ e 6. Em adição aos efeitos *matching* que aparecem nos campos inteiros, efeitos de comensurabilidade podem ser vistos em campos fracionários ($n = 4.5, 7.5$). Porém, não acontecem picos no quinto nem sétimo valor em campo da nossa amostra.

de *matching*, quando cada defeito está preenchido por um quantum de fluxo. Isto se faz visível através do pico em $n = 1$. Para campos maiores que H_2 , a corrente decresce com o aumento do campo magnético devido ao surgimento dos vórtices intersticiais. Enxerga-se que quando o número de vórtices excede o número de defeitos, a força de *pinning* tende a diminuir devido ao aumento na intensidade das interações vórtice-vórtice em comparação com a energia de *pinning*.

Em nosso arranjo de centros de ancoramento encontramos efeitos *matching* mais pronunciados para campos baixos e inteiros, enquanto são reduzidos para valores altos de campo, embora apareçam pequenos picos nos valores fracionários de campo. Os últimos picos têm a mesma altura tanto em valores fracionários como inteiros, isso é um artefato devido à escolha de $\Delta F = 0.05$. Todos os picos sobressalentes no gráfico estão relacionados com o fenômeno que denominaremos

comensurabilidade estática, pois a curva de corrente crítica está relacionada com o regime estático, uma vez que os vórtices estão na iminência do movimento.

Resultados de simulações num supercondutor 2D com um arranjo quadrado de defeitos, mostraram a presença de fortes picos para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e pequenos picos para $n = 6, 8$. Nesse trabalho C. Reichhardt et al. [78] encontraram que para $n = 7$ não há evidência de algum pico, o qual é conhecido na literatura como *missing matching peak*, além disso encontraram picos nos campos de *matching* fracionais para $n = 1/2, 3/2, 5/2$ (ver Figura 4-9). Nesse trabalho, a ausência do pico foi atribuída ao arranjo desordenado dos vórtices, isto é dos vórtices intersticiais, os quais não possuem uma disposição quadrangular. Esse resultado ajusta-se à falta de pico na força de ancoragem crítica das nossas simulações, onde a rede mas desordenada corresponde a $n = 7$.

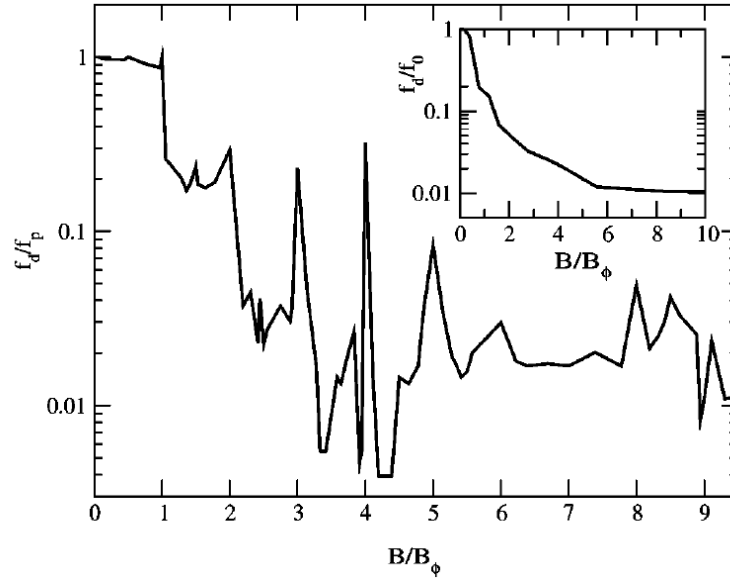


Figura 4-9: Força de ancoragem crítica como uma função da densidade de vórtices num sistema com um arranjo de *pinning* quadrado para $nL_x = nL_y = 12$. O gráfico pequeno inserido na parte superior mostra a força de ancoragem crítica para um sistema com os sítios de aprisionamento num arranjo aleatório [77].

Picos periódicos de *matching* na corrente e vários picos ausentes foram observados em medidas de magnetotransporte num filme fino de Nb, com um arranjo quadrado de centros circulares de aprisionamento para diferentes valores do diâmetro. R. Cao et al. [79] observaram que quanto

maior for o diâmetro dos centros de aprisionamento, maior é o índice dos campos de *matching* ausentes. Esse fenômeno foi estudado mediante simulações de dinâmica molecular e os autores concluíram que é causado pela interação entre os vórtices intersticiais e os vórtices que ocupam os centros de aprisionamento. Além perceberam que sem vórtices intersticiais a corrente apresenta saltos, quando entram na amostra nenhum efeito *matching* é observado, porém reaparece quando o número de vórtices localizados nas armadilhas aumenta deixando o número de vórtices intersticiais constante. Sendo assim, esperar-se-ia um aumento da F_p^c para $n = 8$, o qual não acontece devido às diferenças dos parâmetros da amostra.

4.3 Magnetotransporte

4.3.1 Metodologia

Nesta dissertação implementamos dois métodos para estudar a dinâmica das linhas de fluxo no filme supercondutor com o arranjo quadrado de centros de ancoragem, os quais detalhamos a seguir:

- *Magnetotransporte via varredura de corrente.*

Neste método, aos estados de equilíbrio iniciais da rede de vórtices obtidos por o *simulated annealing*, aplicamos uma força motriz que é incrementada, partindo de $F_x = 0$ até o valor máximo de $F_x = 3$, a passos regulares de $\Delta F_x = 0.05$ após um intervalo de tempo Δt . Esse intervalo da força assegura o desprendimento e a mobilidade dos vórtices em cada valor de campo magnético fixo, exceto para o primeiro valor de campo.

A escolha de h e Δt foi feita após testes de convergência da solução no estado estacionário. Encontramos que os valores ótimos, que estabelecem um compromisso entre baixo esforço computacional e acurácia dos valores médios calculados no regime estacionário, são $h = 0.01$ e $\Delta t = 1 \times 10^5$.

A curva de magnetorresistência é obtida anotando a interseção entre a curva $V_x \times F_x$ correspondente a certo valor escolhido de corrente. Por exemplo, na Figura 4-10 temos as curvas

da velocidade para 4 valores inteiros de campo e o cruzamento com dois valores da corrente.

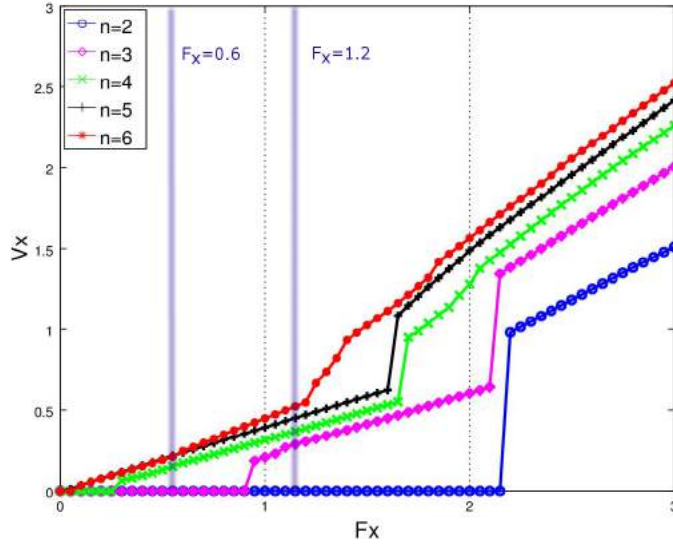


Figura 4-10: Gráficos de velocidade V_x em função da força externa para $n = 2, 3, 4, 5$. Mostra-se sua interseção com os valores de corrente $I = 0.6$ e $I = 1.2$.

- *Magnetotransporte via varredura direta do campo a corrente fixa.*

No segundo método, varia-se o valor de n para uma força externa fixa, partindo da situação em que se encontra o sistema para o valor anterior de n . Isso visa simular as medidas de magnetorresistência como são feitas normalmente nos experimentos, onde a tensão é medida a uma temperatura constante e um certo valor fixo da densidade de corrente, variando-se o campo magnético desde zero até um valor máximo.

Nossa simulação das medições de magnetorresistência considera o sistema com condições de fronteira periódicas e uma força externa ao longo do eixo principal x . Varia-se o valor de campo para uma força constante. Iniciando com zero vórtices adicionamos ao sistema, em posições aleatórias, Δn vórtices e executamos por um certo valor de passos de tempo a dinâmica molecular para atingir um estado estacionário. O processo é repetido até chegar no número de vórtices desejado.

Fizemos um estudo dos parâmetros ótimos para obter resultados mais confiáveis. Tais parâmetros são: incremento do número de vórtices, ΔN_v e tempo da simulação de dinâmica molecular para cada N_v (MDS, em inglês *Molecular Dynamic Step*), Δt .

Para esses testes as configurações iniciais foram obtidas sorteando-se aleatoriamente a posição de cada um dos vórtices a serem inseridos na célula de simulação, para logo aplicar uma força externa ao longo do eixo x , cujo valor foi fixado em $F_x = 1.1$. Conjuntamente foi mudado o intervalo de tempo entre valores consecutivos de campo, de forma a manter a taxa de varredura, $\Delta N_v / \Delta t$, constante. Dessa forma, o campo externo é incrementado, partindo de $H = 0$, a passos regulares ΔH após um intervalo de tempo Δt .

Os resultados dos testes de convergência física, mostraram que as soluções passam a convergir depois de um $\Delta t = 10.000$, a partir do qual os resultados são essencialmente os mesmos.

Observamos que mantendo constante a taxa de varredura, o tamanho da perturbação ΔN_v , não tem efeito significativo sobre a dinâmica. Assim, escolhemos o $\Delta N = 2$. Embora tenha-se visto uma discrepância nos testes, não foi encontrada nenhuma sistemática relativa a ela. Graças a este procedimento, foi escolhida a taxa de varredura do campo, garantindo a estabilização da configuração de vórtices após cada incremento de campo.

Escolhidos os parâmetros ótimos para a convergência numérica, foram feitas simulações de dinâmica molecular, incrementando o número de vórtices em $\Delta N_v = 2$ a cada $\Delta t = 10.000$. Naturalmente a introdução de ΔN_v vórtices a cada intervalo Δt introduz desordem no sistema. Logo, este método é fundamentalmente diferente do anterior, no qual toma-se como condição inicial para cada N_v uma configuração de baixa energia e, por tanto, mais ordenada. Por exemplo, as configurações no primeiro campo de *matching* exibe vacâncias em algumas armadilhas enquanto outras têm 2 quanta de fluxo coexistindo. Para $n = 2$ temos armadilhas ocupadas por um único vórtice enquanto outros tantos estão nas regiões intersticiais, como mostrado na Figura 4-11

Comparando com as configurações obtidas na situação de equilíbrio, observamos que embora a varredura do campo com uma corrente fixa seja o procedimento mais usado experimentalmente induz mais defeitos na rede de vórtices. Os quais estão relacionado à falta de termalização do sistema, que visa justamente evitar as distorções nas estruturas.

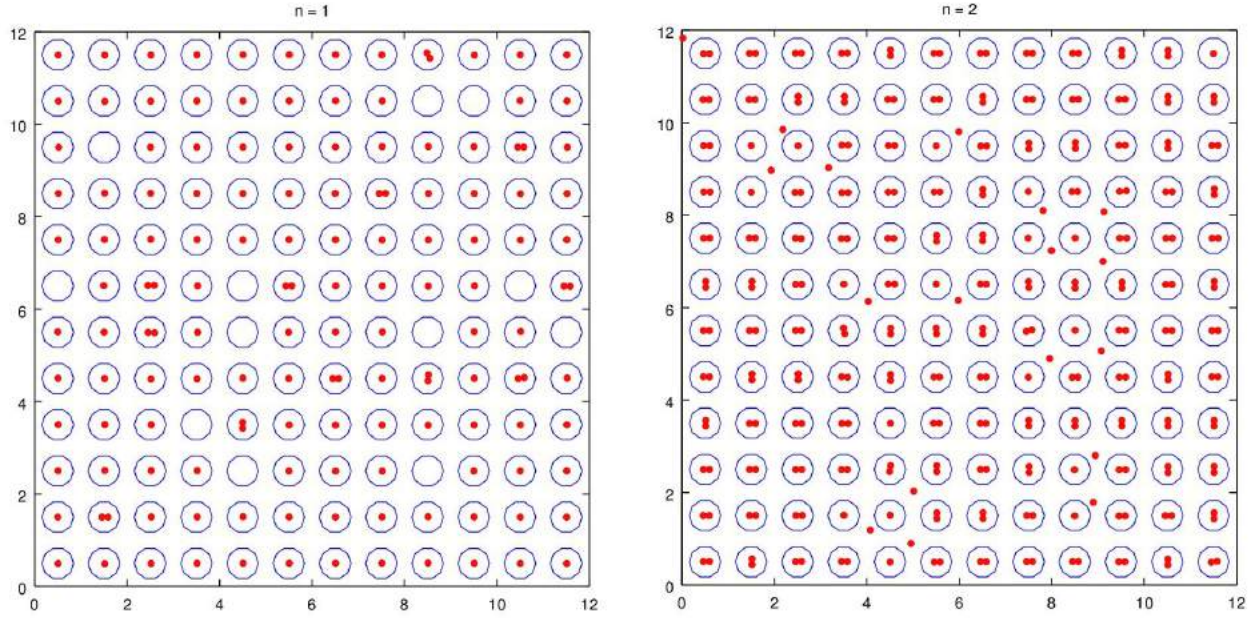


Figura 4-11: Posições aleatórias dos vórtices para uma força motriz $F_x = 1.1$. A densidade de fluxo é $n = 1, 2$.

4.3.2 Comparação das Curvas de Magnetoresistência obtida pelos dois Métodos.

Nas duas estratégias discutidas na seção anterior, é calculada a velocidade média total na direção de movimento x (equação 4-10), a qual é proporcional às medidas das quedas de tensão na amostra, que por sua vez está relacionada com o movimento dos vórtices. Nesse caso apresentamos, as curvas da tensão que é a grandeza que pode ser medida nos experimentos e portanto é normalmente reportada na literatura. A relação entre a velocidade e a tensão é dada pela expressão, $V = \frac{n\Phi_0}{a^2} L \times v_x$.

As curvas da tensão em função do campo magnético aplicado (normalizado ao primeiro campo de *matching* H_1) para 3 diferentes valores de força motriz obtidas pelos dois métodos, são mostradas na Figura 4-12.

Todas as curvas apresentam várias depressões na tensão, ilustrando os efeitos de comensura-

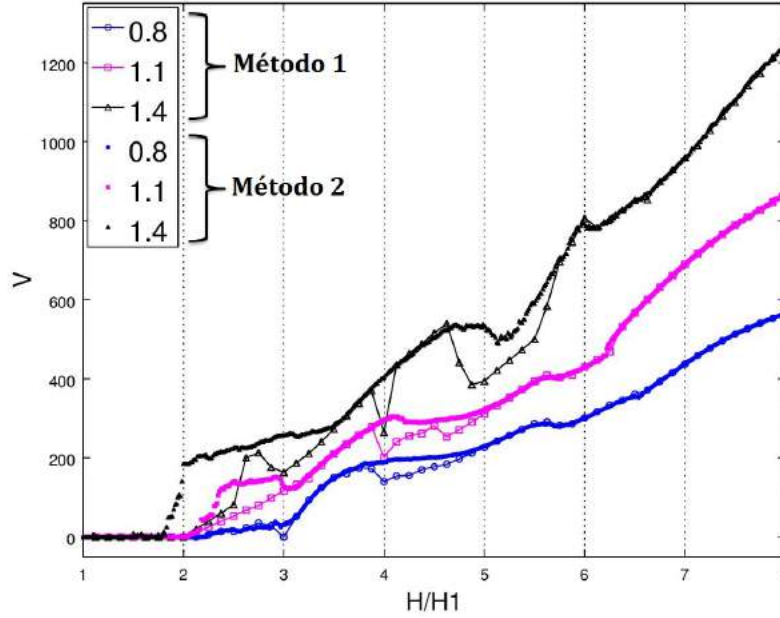


Figura 4-12: Curvas $V(H)$ para diferentes valores da força motriz, $F_x = 0.8$ (triângulo), $F_x = 1.1$ (quadrado) e $F_x = 1.4$ (círculo). Os símbolos abertos (fechados) correspondem à varredura da corrente (campo).

bilidade entre o arranjo de centros de ancoragem e a rede de vórtices. Notamos que para forças pequenas apresentam-se poucas diferenças. À medida que a força externa aumenta, essas discrepâncias são mais fortes, p. ex., observamos que para $F_x = 1.4$ as diminuições na tensão diferem em $n = 3, 4, 5$. A diferença na execução dos métodos aparece nas curvas através do primeiro valor de tensão maior de zero que corresponde ao início do movimento dos vórtices intersticiais, que não são capturados pelos defeitos. Percebemos a ausência de algumas quedas com a varredura da corrente, p. ex., em $n = 3, 5$ para $F_x = 1.1$. Mesmo assim, podemos observar como os vórtices diminuem sua velocidade em alguns campos de *matching*, isto confirma o efeito de ancoragem que os centros de aprisionamento oferecem.

Observa-se que para valores do campo acima de $n = 6$ o comportamento das curvas se ajusta perfeitamente para os dois métodos em todos os valores de força, onde o sistema entra num comportamento monotônico, tornando difícil distinguir as quedas próprias do sistema com *matching* de vórtices. Isso se deve à alta densidade de vórtices intersticiais que leva a uma menor efetividade

do potencial de ancoragem em interferir na dinâmica dos vórtices.

Os trabalhos feitos sobre o assunto têm encontrado que os vórtices inicialmente ocupam os sítios de ancoragem e, ao atingir sua saturação com um ou mais vórtices (vórtice gigante) por armadilha, eles localizam-se no interstício [55]. Sítios de ancoragem localizados em redes regulares exibem efeitos de *matching*, onde ocorre a comensurabilidade entre a rede de vórtices e a rede de armadilhas. Este casamento entre as duas redes proporciona máximos na corrente crítica e mínimos na magnetorresistência nos campos múltiplos de H_1 , embora tais sinais também têm sido observados em campos de *matching* fracionários. Nessa situação, a rede de vórtices sente mais o potencial de ancoragem, sendo mais difícil mover os vórtices. Não existe consenso se após a entrada de vórtices no interstício existe possibilidade de um vórtice voltar a cair no poço de potencial. Em parte isso é atribuído ao fato dos estudos serem realizados nos primeiros campos de *matching*, não se estendendo muito em campos maiores.

4.4 Análise detalhada das Curvas de Magnetorresistência

A varredura direta do campo, com a corrente fixa, oferece uma maneira de simular os experimentos para obter informação acerca dos processos de dissipação através das medidas de magnetorresistência. Além disso, esse método é computacionalmente bem mais rápido que o primeiro, permitindo a realização de um estudo mais detalhado. Logo, foi escolhido neste trabalho pra realizar uma análise detalhada da magnetorresistência.

Com diferentes valores da força aplicada, foram feitas simulações de dinâmica molecular onde as posições dos vórtices foram sorteadas aleatoriamente dentro da célula de simulação. Assim, para um $\Delta N_v = 2$ com $\Delta t = 10.000$ foram calculadas as posições dos vórtices e suas propriedades dinâmicas com os seguintes cinco valores de F_x : $F_x = 0.6 \ 0.8 \ 1.1 \ 1.2 \ 1.4$.

As curvas da tensão em função do campo, para os cinco valores da força motriz encontram-se na Figura 4-13.

Os valores menores de força apresentam comportamentos semelhantes, exibindo só uma leve

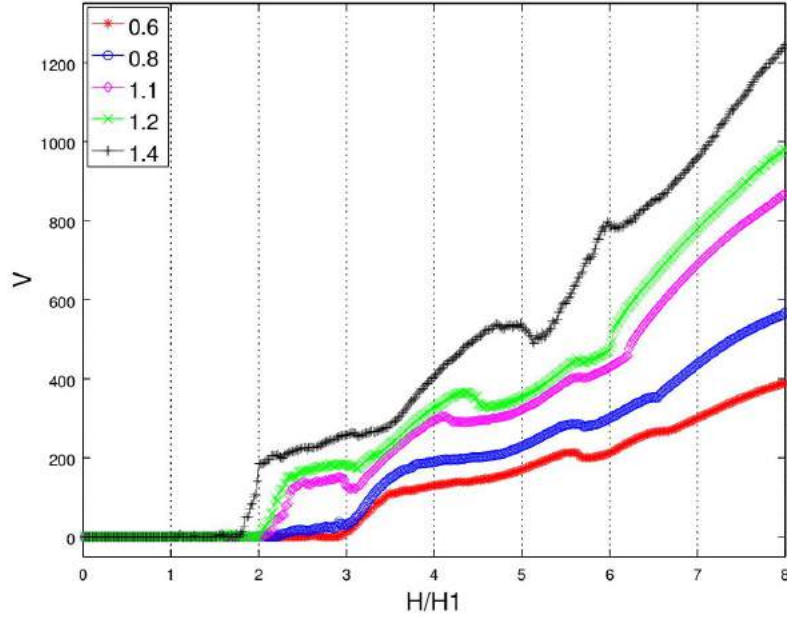


Figura 4-13: Curvas $V(H)$ para valores da força motriz, $F_x = 0.6$ (vermelho), 0.8 (azul), 1.0 (magenta), 1.2 (verde) e 1.4 (preto).

queda pouco antes de $n = 6$. Para valores de força maiores, as anomalias nas curvas tornam-se mais claras através de picos e quedas. O gráfico para a força mais alta exibe três sinais notáveis, ausência de efeito *matching* em $n = 4$, uma queda na tensão para o valor de $n = 5.25$ e um aumento para $n = 6$. Um comportamento semelhante foi observado nas curvas experimentais feitas por R. Cao et al. [79] nas curvas de corrente crítica num filme fino de Nb para vários diâmetros dos centros de *pinning* circulares organizados periodicamente. Para certas temperaturas os experimentos revelaram a ausência do pico na corrente crítica para um campo *matching* n , que toma os valores de $n = 3, 4, 5$. No seguinte valor de campo *matching*, $n + 1$, a corrente crítica exibe um pico com a mesma intensidade da queda anterior. Usando simulações de dinâmica molecular, encontraram que este fenômeno pode ser explicado pela interação entre os vórtices intersticiais e os multi-vórtices que ocupam os defeitos. Note-se que estamos comparando regimes diferentes, pois aquela referência estudou o regime estático enquanto nós investigamos o regime dinâmico. Interessante ver que a falta de efeitos *matching* pode ser visualizado tanto do ponto estático como dinâmico.

Tabela 4-1: Quedas ($\downarrow$) e saltos ($\uparrow$) da curva de magnetorresistência para $F_x = 1.1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Tensão	0	0	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	-	-

À medida que o campo aumenta ($n > 6.5$), um comportamento monotônico se faz predominante para todos os valores da força.

A fim de compreender o mecanismo dos fenômenos observados, nos concentramos num valor específico da força motriz, $F_x = 1.1$. Voltando para o gráfico 4-13, o comportamento da tensão nesse valor da força encontra-se resumido na Tabela 4-1. Para os primeiros campos, os vórtices estão ancorados, por isso que a tensão possui valores nulos. Ocorre uma mudança de comportamento de $n = 2$ para $n = 3$. É notável a queda da tensão nesse ponto ($n = 3$), sugerindo que os vórtices ficam presos pelo potencial de *pinning*. Evidencia-se um comportamento contrário em $n = 4$, onde ocorre um salto na tensão, oposto ao “*missing matching peak*” para $F_x = 1.4$. Além disso, o quinto e sexto campos de *matching*, se não inexistentes, são muito discretos com descidas leves na tensão. Um pequeno aumento na tensão aparece entre eles, no valor de $n = 5.5$.

Após destacarmos os pontos principais da curva de magnetorresistência, vamos estudar o comportamento dinâmico dos vórtices, através do seu movimento durante a aplicação da corrente. Para isto, na Figura 4-14 mostramos a densidade de vórtices acumulada no tempo para o arranjo quadrado de centros de ancoragem no valor da força motriz $F_x = 1.1$. Essa figura indica as partes da amostra por onde o vórtice se movimenta. A corrente está aplicada de tal forma que o vórtice se movimenta horizontalmente da esquerda para a direita. A cor branca indica os lugares por onde nenhum dos vórtices passou, enquanto as escala de cores de amarelo a vermelho indica a densidade com que os vórtices passaram, sendo o vermelho a cor que indica a maior densidade de vórtices em trânsito amostra. Os pontos azuis representam os vórtices e os círculos dessa cor representam as armadilhas.

É possível diferenciar dois tipos de dinâmica em duas regiões da amostra, (i) a região das armadilhas ligadas horizontalmente, que chamaremos *canais de ancoragem* e (ii) a região intersticial entre os canais de ancoragem vizinhos, que chamaremos *canais intersticiais*. A dinâmica nos



Figura 4-14: Densidade de vórtices acumulada no tempo para $F_x = 1.1$. A densidade de fluxo é $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

canais de ancoragem inclui vórtices que estejam localizados entre centros de ancoragem vizinhos horizontais. Nessas duas regiões os vórtices movem-se de forma distinta.

A partir dessa figura podemos dizer que:

- Ocorre tráfego efetivo somente nos canais intersticiais para os campos de *matching* $n = 3, 5$ e 6. Para os casos $n = 3$ e $n = 5$, esse transporte é predominantemente numa dimensão. Isto é conhecido como movimento filamentar. Um movimento mais difuso e forte nos canais intersticiais se produz para o sexto campo de *matching*. Observamos um pequeno movimento vertical nos canais de ancoragem, que corresponde à oscilação que sofre o vórtice pela interação com outros vórtices.
- Um comportamento distinto aparece em $n = 4$, onde o deslocamento nos canais intersticiais é mais difuso que nos casos $n = 3, 5$. Mas a diferença principal, está no movimento horizontal dos vórtices na maioria dos canais de ancoragem envolvendo os vórtices que estão localizados nos centros de ancoragem. Esse valor de campo corresponde ao salto na tensão, visto na Figura 4-13.
- Para $n = 7, 8$ o movimento é desordenado, com vórtices passando de uma região para outra, mostrando que o potencial de *pinning* exerce pouco efeito sobre a dinâmica.

A figura 4-15 mostra o número de vórtices nos canais de ancoragem em função do campo, para as cinco forças motrizes.

Existe uma distribuição comensurada entre os vórtices no canal de ancoragem e os vórtices no interstício para o primeiro, segundo, quinto e sexto campo de *matching*, p. ex., em $n = 6$ para $F_x = 1.1$ encontramos uma distribuição de 3 vórtices no canal e portanto 3 no interstício.

Por outro lado, como indicado pela seta preta, o quarto campo de *matching* é fracamente comensurável, valor onde a tensão aumenta. Observando a distribuição dos vórtices para a força $F_x = 1.4$, notamos que apresenta incomensurabilidade para $n = 3, 4$ e $n = 6$. Esses valores de campo correspondem às quedas ausentes e saltos na tensão, respectivamente.

A voltagem em função do campo nas duas regiões da amostra, canal de ancoragem e canal

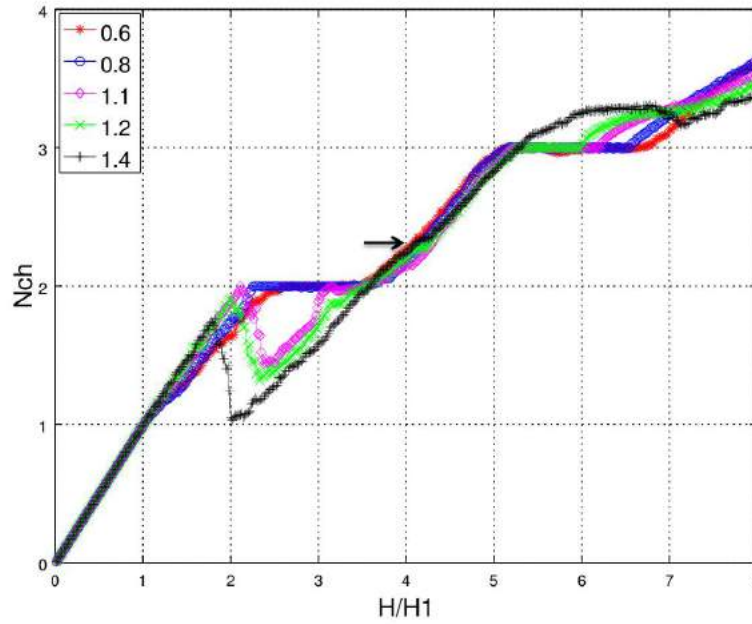


Figura 4-15: Número de vórtices na região dos canais de ancoragem em função do campo.

intersticial, encontra-se na Figura 4-16 para três valores da força.

A partir desses gráficos é possível ver a influência que tem o movimento dos vórtices na região dos canais de ancoragem, sobre as curvas de magnetorresistência, à medida que aumenta a força motriz. Voltando à figura 4-13, verificamos que para o menor valor da força, a tensão nos canais intersticiais se ajusta bem à curva $V(H)$. Todos os canais começam a dominar desde $F_x = 1.1$, onde o aumento para $n = 4$ é devido ao movimento nessa região. Embora ainda a região intersticial reproduz os outros dois sinais. Já para maior valor de força, o interstício perde sua importância e o movimento dos vórtices nos canais de ancoragem traça exatamente a queda e aumento da tensão.

Relacionando com os gráficos da densidade para $F_x = 1.1$, as quedas na tensão aparecem se o movimento horizontal na região dos canais de ancoragem é nulo. O aumento na curva está relacionado à velocidade dos vórtices. De $n = 3$ para $n = 4$ os vórtices ganham mais velocidade devido ao fato que um terceiro vórtice fica retido em alguns canais de ancoragem, originando incomensurabilidade entre a rede de armadilhas e vórtices assinalada pela seta preta na Figura 4-15. Note como a perturbação no sistema, mediante novos vórtices na amostra, modifica a dinâmica

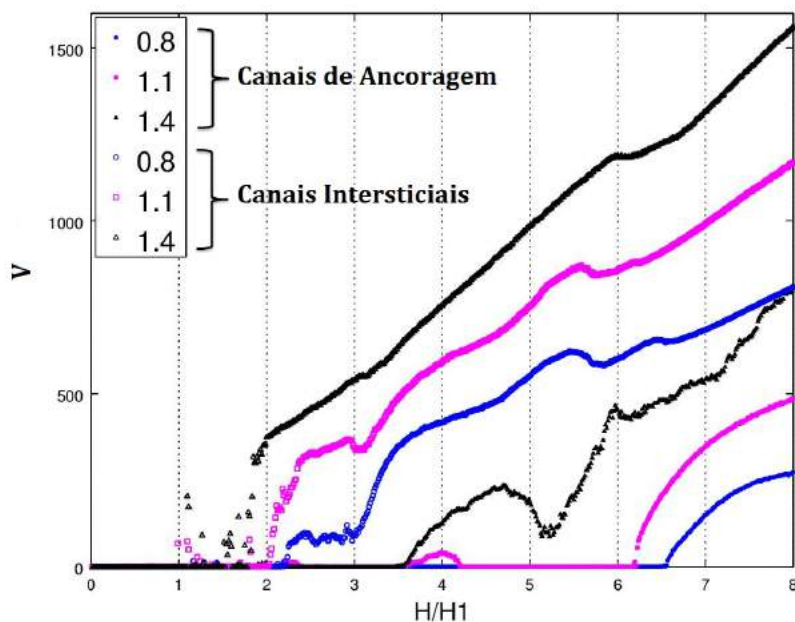


Figura 4-16: Contribuição para a tensão devido aos vórtices se movendo ao longo dos defeitos (símbolos fechados) e ao longo das regiões intersticiais (símbolos abertos).

anterior dele.

Com relação ao fenômeno encontrado, nosso sistema apresenta ausência de efeito *matching*, além de aumento da tensão em função do campo. Esse comportamento foi observado estar relacionado com o movimento dos vórtices na região dos canais de ancoragem, devido à migração de um vórtice intersticial neles, que por sua vez apresenta conexão com os resultados da comensurabilidade nas duas regiões da amostra. Esta observação de máximos e mínimos está intimamente relacionada à dinâmica de vórtices nos canais e esta, por sua vez, é influenciada pela comensurabilidade entre cadeias de vórtices e cadeias de defeitos.

De maneira geral, temos que a corrente crítica é obtida perturbando o estado de equilíbrio da rede de vórtices, até a iminência do movimento, a qual se encontra na influência do *pinning* estático. Enquanto que a magnetorresistência está sempre longe do equilíbrio, pois a rede de vórtices já tem um movimento estabelecido, ainda assim esse movimento é afetado pelo potencial de ancoragem

efetivo. Em nossos resultados, tal diferença é observada através da comensurabilidade, uma vez que nas simulações do comportamento estático apresenta-se comensurabilidade entre as duas redes enquanto na dinâmica observamos comensurabilidade entre cadeias.

Recentemente, vários trabalhos têm mostrado a ausência do efeito *matching*, através das medidas estáticas (corrente crítica e magnetização), a qual foi atribuída ao início da entrada de vórtices intersticiais, que penetram somente no interstício para $H \geq H_{ns}$ e ao efeito gaiola que sentem. Alguns desses estudos foram feitos por V. V. Moshchalkov et al. [80], Baert et al. [75], Metlushko et al. [51], M. Kemmler [81], Horng [82], Berdiyrov et al. [76], R. Cao [79].

Por sua vez, medidas de susceptibilidade AC, têm mostrado um aumento significativo na dissipação, interpretada como o começo da presença de vórtices intersticiais na amostra, os quais produzem uma redução na força de ancoragem juntamente com um aumento na mobilidade média dos vórtices [83].

5 Conclusões

Realizamos uma série de simulações de dinâmica molecular para estudar a ancoragem de vórtices e sua dinâmica em um filme fino supercondutor com uma rede quadrada de armadilhas artificiais. Usamos um algoritmo de dinâmica de Langevin para simular a penetração e evolução dinâmica de vórtices. Os vórtices dentro da amostra supercondutora, no limite de London, são considerados como partículas pontuais clássicas que podem interagir com armadilhas introduzidas através de potenciais, e podem interagir também entre si repulsivamente. Essas nanoestruturas de aprisionamento são capazes de capturar vórtices, restringindo seu movimento ao ficar presos nelas, o que aumenta consideravelmente a corrente crítica.

Foram observadas características nos campos de *matching* ($H = nH_1$, onde n é um inteiro ou fracionário e H_1 é a densidade de fluxo magnético correspondente a um vórtice por célula unitária) tanto nas curvas estáticas, aumento na corrente crítica, como nas curvas da dinâmica, atenuação na mobilidade dos vórtices. Essa última foi estudada através de medidas de magnetorresistência, simulando a voltagem provocada por efeito resistivo decorrente do movimento dos vórtices. Desenvolvemos dois métodos para estudar as propriedades de magnetotransporte, variando parâmetros relevantes no sistema, (i) Corrente aplicada, (ii) Campo aplicado.

Na análise via varredura da corrente com campo fixo, foram obtidas várias configurações da rede de vórtices, através de um processo de recozimento simulado-*simulated annealing*. Observamos estruturas de alta simetria para todos os valores inteiros dos campos de *matching*, com exceção de $n = 7$, onde nenhuma ordem estrutural foi observada. Para altas densidades, os resultados mostram que os vórtices intersticiais podem forçar as novas linhas de fluxo, adicionadas por um incremento no campo, para dentro das armadilhas. Isto é, o número de saturação não é determi-

nado somente pelo tamanho dos defeitos como comumente se acredita, senão também pelo campo aplicado. Pronunciados efeitos de comensurabilidade foram observados pela presença de uma maior força de ancoragem crítica em $n = 1, 2, 3, 4$ e caso contrário de $n = 5, 7$ que apresentam o *missing matching peak* como é conhecido na literatura. Acredita-se que a ausência do pico em $n = 7$ é devido ao arranjo desordenado dos vórtices gerado pela interação entre os vórtices intersticiais e os vórtices gigantes que ocupam os centros de aprisionamento, em acordo com o encontrado por C. Reichhardt [78]. Efeitos de *matching* fracionados acontecem em $n = 4.5, 7.25, 7.75$, o qual ocorre devido à formação de um estado ordenado dos vórtices.

A taxa de varredura do campo foi escolhida cuidadosamente, para garantir a estabilização da configuração de vórtices após cada incremento de campo, através de um estudo detalhado dos parâmetros ΔN_v , Δt , encontrando que, a partir de um valor de $\Delta N_v = 2$ e $\Delta t = 10.000$, o tamanho da perturbação não influi mais na dinâmica sendo os resultados essencialmente os mesmos. Com isto foi possível comparar a resposta magnetorresistiva do sistema para os dois estudos já mencionados, encontrando uma comensurabilidade geral do sistema, embora se apreciem diferenças na queda da tensão, relacionadas à execução de cada método.

As simulações de magnetotransporte varrendo o campo com uma força motora fixa, visavam replicar a relação voltagem-corrente acessível experimentalmente. Encontramos com que esse método induz mais defeitos na rede de vórtices, mediante vacâncias e uma pequena fração de vórtices intersticiais sem formar alguma disposição regular. A dinâmica de vórtices, foi estudada para cinco valores de força motora, onde o campo magnético externo é lentamente varrido de zero até um valor máximo. Foram observados os sinais característicos do efeito de *matching*, gerados quando a densidade de vórtices é comensurável com a área da célula unitária. Padrões interessantes foram vistos na curva de magnetorresistência, como ausência de picos de *matching*, comportamento monotônico para campos altos, quedas leves e saltos repentinos na tensão. Para esclarecer tais fatos, foi feita uma análise da densidade de vórtices para um valor da corrente, considerando a rede de vórtices como composta de duas regiões: uma região das armadilhas vizinhas horizontalmente e outra região intersticial entre armadilhas vizinhas verticalmente, denominadas canais de ancoragem e canais intersticiais, respectivamente. Os vórtices intersticiais podem propagar-se nas regiões entre os vórtices *pinados*, notando uma zona de depleção ao redor dos vórtices *pinados* na qual os intersticiais não entram devido à repulsão desde as armadilhas.

Examinando o número de vórtices que se encontram nos canais de ancoragem para cada valor de campo e a contribuição que oferece cada região à tensão, pode-se inferir que os saltos mais pronunciados na curva de magnetorresistência devem-se à dinâmica que sofrem os vórtices nos canais de ancoragem quando um novo vórtice migra para essa região, produzindo uma incomensurabilidade entre a cadeia de vórtices e a respectiva cadeia de armadilhas. Essa contribuição se faz mais importante à medida que a força motora aumenta. As quedas nas curvas foram atribuídas, em sua grande maioria, à diminuição da mobilidade dos vórtices intersticiais quando casam perfeitamente com os centros de aprisionamento.

É mostrado que a dinâmica de vórtices na presença de uma rede periódica de defeitos apresenta efeitos de comensurabilidade diferentes daqueles que ocorrem na situação estática, devido a que se tem uma interação efetiva dos vórtices em movimento com um potencial de ancoragem dependente do tempo.

Referências

- [1] Goodstein, D.; Goodstein, J. **Richard Feynman and the History of Superconductivity.** *Physics in Perspective.*, 2:30–47, 2000.
- [2] Onnes, H. K. **The Resistance of Pure Mercury at Helium Temperatures.** *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden.*, 12:120, 1911.
- [3] Onnes, H. K. *Leiden Comm.*, 133a, 1913.
- [4] Onnes, H. K. *Leiden Comm.*, 139f, 1914.
- [5] Silsbee, F. D. **A Note on Electrical Conduction in Metals at Low Temperatures.** *Journal*, 6:597–602, 1916.
- [6] M. Tinkham. Dover, 1996.
- [7] P. De Gennes. *Superconductivity Of Metals and Alloys.* Perseus Books, 1999.
- [8] Meissner, W.; Ochsenfeld, W. *Naturwissenschaft.*, 21(787), 1933.
- [9] London, F.; London, H. **The Electromagnetic Equations of the Supraconductor.** *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*;, 149(866):71, 1935.
- [10] Ginzburg, Vitaly L.; Landau, L. *Zhurnal Eksperimentalnoi I Teoreticheskoi Fiziki.*, 20(1064), 1950.

-
- [11] Abrikosov., Alexei A. **Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group.** *Soviet Physics - Journal of Experimental and Theoretical Physics, JETP.*, 5(1174), 1957.
- [12] Bardeen, J.; Cooper, L. N.; Schrieffer, J. R. **Theory of Superconductivity.** *Physical Review.*, 108(5):1175, 1957.
- [13] Cooper, León N. **Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas.** *Physical Review.*, 104(4):1189, 1956.
- [14] Bednorz, J. G.; Muller, K. A.;. *Zeitschrift fur Physik B.*, 64(189):1189, 1986.
- [15] Ostermann, Fernanda; Mendonça Ferreira, Letícia; Holanda Cavalcanti, Cláudio J. **Tópicos de Física Contemporânea no Ensino Médio.** *Revista Brasileira de Ensino de Física.*, 20(3):270–288, 1998.
- [16] E. H. Rose-Innes, A. C. ; Rhoderick. *Introduction to Superconductivity.* Oxford: Pergamon Press, 1988.
- [17] London, F.; London, H. *Physica*2., 341, 1935.
- [18] N. W.; David N. Ashcroft. *Mermin. Solid State Physics.* Brooks/Cole, 1976.
- [19] F. London. *Superfluids: Macroscopic Theory of Superconductivity.* Dover Publications, 1961.
- [20] A. Mourachkine. *Room-Temperature Superconductivity.* Cambridge International Science Publishing, Cambridge., 2004.
- [21] E. M. Landau, L. D.; Lifshitz. *Statistical Physics.* V. 1, Pergamon., 1980.
- [22] Gorkov L. P. Microscopic Derivation of the Ginzburg-Landau Equations in the Theory of Superconductivity. *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.*, 36(1918), 1959. [*Soy. Phys. IETP.* 9, 1364 (1959)].
- [23] H. B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics.* Wiley., 1985.

-
- [24] Skocpol, W. J.; Tinkham, M. Fluctuations Near Superconducting Phase Transitions. *Reports on Progress in Physics, Bristol.*, 38(9):1049–1097, Sept 1975.
- [25] A. B. Pippard. An Experimental and Theoretical Study of the Relation Between Magnetic Field and Current in a Superconductor. *Proc. Roy. Soc. (London).*, A216(1127), 1953.
- [26] Barba Ortega, José José. *Configuração de Vórtices e Efeitos de Interface em Supercondutores Mesoscópicos*. PhD. Thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2007.
- [27] Saint-James, D.; De Gennes, P. G. Onset of Superconductivity in Decreasing Fields. *Phys. Lett.*, 308(7), 1963.
- [28] Raedts, Sophie. *Vortex Dynamics in Type-II Superconductors with a Periodic Pinning Array*. PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven., 2004.
- [29] Van Gelder, A. P. Nucleation of Superconductivity Near H_{c3} . *Physical Review Letters.*, 20(25):1435, 1968.
- [30] Abrikosov, A. A. *Physics Today.*, page 56, Janeiro 1973.
- [31] Kleiner, W. H.; Roth, L. M.; Autler, S. H. *Phys. Rev.*, 133:A1226, 1964.
- [32] Essmann, U.; Träuble, U. The Direct Observation of Individual Flux Lines in Type II Superconductors. *Phys. Letters.*, 24A:526–527, 1967.
- [33] Fasano, Y.; Menghini, M. Magnetic-Decoration Imaging of Structural Transitions Induced in Vortex Matter. *Superconductor Science and Technology.*, 21(023001), 2008.
- [34] Hess, H. F.; Robinson, R. B.; Dynes, R. C.; Valles, J. M.; Waszczak, J. V. Scanning-Tunneling-Microscope Observation of the Abrikosov Flux Lattice and the Density of States Near and Inside a Fluxoid. *Phys. Rev. Lett.*, 62:214–216, 1989.
- [35] Harada, K.; Kamimura, O.; Kasai, H.; Matsuda, T.; Tonomura, A.; Moshchalkov, V. V. Direct Observation of Vortex Dynamics in Superconducting Films with Regular Arrays of Defects.

- Science.*, 274:1167–1170, 1996.
- [36] Kramer, R. B. G.; Silhanek, A. V.; Gillijns, W.; Moshchalkov, V. V. Imaging the Statics and Dynamics of Superconducting Vortices and Antivortices Induced by Magnetic Microdisks. *Phys. Rev.*, X 1(021004), 2011.
- [37] Joachim Moshchalkov, Victor V.; Fritzsche, editor. *Nanostructured Superconductors*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [38] Clécio Clemente De Souza Silva. *Propriedades de Equilíbrio e de Transporte da Matéria de Vórtices em Supercondutores Nanoestruturados*. PhD Thesis, Universidade Federal de Pernambuco., 2003.
- [39] Schweigert, V. A.; Peeters, F. M.; Singha Deo, P. Vortex Phase Diagram for Mesoscopic Superconducting Disks. *Phys. Rev. Lett.*, 81(13):2783–2786, Sep 1998.
- [40] Baelus, B. J.; Peeters, F. M. *Phys. Rev. B.*, 65, 2002.
- [41] Blatter, G.; Feigel'man, M. V.; Geshkenbein, V. B.; Larkin, A. I.; Vinokur, V. M. Vortices in High-temperature Superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 66:1125–1388, 1994.
- [42] Bardeen, J.; Stephen, M. Theory of the Motion of Vortices in Superconductors. *Phys. Rev.*, 140(1197A), 1965.
- [43] Caroli, C.; De Gennes, P. G.; Matricon, J. *Phys. Lett.*, 9(307), 1964.
- [44] Silhanek, A.; Civale, L.; Candia, L.; Nieva, G.; Pasquini, G.; Lanza, H. *Phys. Rev. B.*, 59(13620), 1999.
- [45] Niebieskikwait, D.; Silhanek, A. V.; Civale, L.; Nieva, G.; Levy, P.; Krusin-Elbaum, L. *Phys. Rev. B.*, 63(144504), 2001.
- [46] Baert, M.; Metlushko, V. V.; Jonckheere, R.; Moshchalkov, V. V.; Bruynseraede, Y. Composite Flux-Line Lattices Stabilized in Superconducting Films by a Regular Array of Artificial

- Defects. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3269–3272, 1995.
- [47] Van Bael, M. J.; Bekaert, J.; Temst, K.; Van Look, L.; Moshchalkov, V. V.; Bruynseraede, Y. ; Howells, G. D.; Grigorenko, A. N.; Bending, S. J.; Borgh, G.
- [48] D. Cyrot, M.; Pavuna. *Introduction to Superconductivity*. World Scientific, Singapore, 1992.
- [49] González, M. P.; Hollmann, E.; Wördenweber, R. *J. Appl. Phys.*, 102(063904), 2007.
- [50] Wördenweber, R.; Dymashevski, P.; Misko, V. R. *Physica Rev. B.*, 69(184504), 2004.
- [51] Metlushko, V. V.; Baert, M.; Jonckheere, R.; Moshchalkov, V.V.; Bruynserade, Y. *Solid State Commun.*, 91(331), 1994.
- [52] Moshchalkov, V. V.; Baert, M.; Rosseel, E.; Metlushko, V. V.; Van Bael, M.J.; Bruynserade, Y. *Physica C.*, 282(379), 1997.
- [53] Van Look, L.; Rosseel, E.; Van Bael, M. J.; Temst, K.; Moshchalkov, V. V.; Bruynseraede, Y. *Phys. Rev. B.*, 60(R6998), 1999.
- [54] Bezryadin, A.; Pannetier, B. *J. Low Temp. Phys.*, 98(251), 1995.
- [55] Mkrtchyan, G. S.; Shmidt, V. V. *Sov. Phys. JETP.*, 34(195), 1972.
- [56] Nordborg, H.; Vinokur, V. M. *Phys. Rev. B.*, 62(12408), 2000.
- [57] Doria, M.; De Andrade, S. C.; Sardella, E. *Physica C.*, 1199:341–348, 2000.
- [58] Buzdin, A; Feinberg, D. Electromagnetic Pinning of Vortices by Non-Superconducting Defects and their Influence on Screening. *Physica C.*, 303:303–311., 1996.
- [59] Bezryadin, A.; Ovchinnikov, Y. N.; Pannetier, B. *Phys. Rev. B.*, 53(8553), 1996.
- [60] Khalfin, I. B.; Shapiro, B. Y. Relaxation of Magnetic Flux in a Superconductor with a System of Columnar Defects. *Physica C.*, 207(027002):359–365, 1993.

-
- [61] Martin, J. I.; Velez, M.; Nogues, J.; Schuller, I. K. Flux Pinning in a Superconductor by an Array of Submicrometer Magnetic Dots. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1929–1932, 1997.
- [62] Martin, J. I.; Velez, M.; Hoffmann, A.; Schuller, I. K.; Vicent, J. L. Artificially Induced Reconfiguration of the Vortex Lattice by Arrays of Magnetic Dots. *Phys. Rev. Lett.*, 83:1022–1025, 1999.
- [63] Laguna, M. F.; Balseiro, C. A.; Domínguez, D.; Nori, F. Vortex Structure and Dynamics in Kagomé and Triangular Pinning Potentials. *Phys. Rev. B.*, 64(104505), 2001.
- [64] Wu, T. C.; Wang, J. C.; Horng, L.; Wu, J. C.; Yang, T. J. Temperature Dependence of Vortex Configuration by Honeycomb Hole Arrays in a Superconducting Nb Film. *Journal of Applied Physics.*, 97(10B102), 2005.
- [65] Villegas, J. E.; Montero, M. I.; Li, C. P.; Schuller, I. K. Correlation Length of Quasiperiodic Vortex Lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 97(027002), 2006.
- [66] Daldini, O.; Martinoli, P.; Olsen, J. L.; Berner, G. Vortex-line Pinning by Thickness Modulation of Superconducting Films. *Phys. Rev. Lett.*, 32(218), 1974.
- [67] Hebard, A. F.; Fiory, A. T.; Somekh, S. Critical Currents in Al Films with a Triangular Lattice of 1 micron Holes. *IEEE Transactions on Magnetics.*, 13:589–592, 1977.
- [68] Rosseel, E.; Van Bael, M.; Baert, M.; Jonckheere, R.; Moshchalkov, V.V.; Bruynserade, Y. *Physica Rev. B.*, 53(R2983), 1996.
- [69] Reichhardt, C.; Groth, J.; Olson, C. J.; Field, S. B.; Nori, F. Spatiotemporal Dynamics and Plastic Flow of Vortices in Superconductors with Periodic Arrays of Pinning Sites. *Phys. Rev. B.*, 54:16108–16115, 1997.
- [70] Reichhardt, C.; Zimányi, G. T.; Scalettar, T.; Hoffmann, A.; Schuller, I. K. *Phys. Rev. B.*, 64(014501), 2001.
- [71] Raedts, S.; Silhanek, A. V.; Van Bael, M. J.; Jonckheere, R.; Moshchalkov, V. V. Flux Pinning

- Properties of Holes and Blind Holes Arranged Periodically in a Superconductor. *Physica C*, 404:298–301, 2004.
- [72] Brandt, E. H. Computer Simulation of Flux Pinning in Type-II Superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1599–1602, May 1983.
- [73] M. Gronbech-Jensen. *Comput. Phys. Commun.*, 119(115), 1999.
- [74] Latimer, M. L., Berdiyorov, G. R., Xiao, Z. L., Kwok, W. K., Peeters, F. M. *Phys. Rev. B*, 85(012505), 2012.
- [75] Baert, M.; Metlushko, V. V.; Jonckheere, R.; Moshchalkov, V. V.; Bruynseraede, Y. Flux Phases and Quantized Pinning Force in Superconductor with a Periodic Lattice of Pinning Centers. *Europhysics Letters*., 13:157–162, 1995.
- [76] Berdiyorov, G. R.; Milošević, M. V.; Peeters, F. M. *Phys. Rev. B*, 74(174512), 2006.
- [77] Karapetrov, G.; Fedor, J.; Iavarone, M.; Rosenmann, D.; Kwok, W. K. *Phys. Rev. Lett.*, 95(167002), 2005.
- [78] Reichhardt, C.; Zimányi, G. T. *Phys. Rev. B*, 64(014501), 2001.
- [79] Cao, R.; Horng, Lance; Wu, T. C.; Lin, J. C.; Wu, J. C.; Yang, T. J.; Koláček, J. *Journal of Applied Physics*., 109(083920), 2011.
- [80] Moshchalkov, V. V.; Baert, M.; Metlushko, V. V.; Rosseel, E.; Van Bael, M. J.; Temst, K.; Jonckheere, R.; Bruynseraede, Y. *Phys. Rev. B*, 54(7385), 1996.
- [81] Kemmler, M.; Gürlich, C.; Sterck, A.; Pöhler, H.; Neuhaus, M.; Siegel, M.; Kleiner, R.; Koelle, D. *Phys. Rev. Lett.*, 97(147003), 2006.
- [82] Horng, Lance; Yang, T. J.; Cao, R.; Wu, T. C.; Lin, J. C.; Wu, J. C.
- [83] Silhanek, A. V.; Raedts, S.; Moshchalkov, V. V. *Physica C*, 404(345), 2004.