



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Leila Brunet de Sá Beserra

**Análise Hidromecânica do Fraturamento Hidráulico via Elementos Finitos com
Descontinuidades Fortes Incorporadas**

Recife – PE

2015

Leila Brunet de Sá Beserra

**Análise Hidromecânica do Fraturamento Hidráulico via Elementos Finitos com
Descontinuidades Fortes Incorporadas**

Tese submetida ao corpo docente do programa de pós-graduação em engenharia civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte integrante dos requisitos necessários à obtenção do título de doutor em Engenharia Civil.

Área de concentração: Geotecnia

Orientador interno: Leonardo José do Nascimento Guimarães

Orientado externo: Osvaldo Luís Manzoli

Recife – PE

2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Valdicêa Alves, CRB-4 / 1260

B554a Beserra, Leila Brunet de Sá.

Análise hidromecânica do fraturamento hidráulico via elementos finitos com descontinuidades fortes incorporadas / Leila Brunet de Sá Beserra. 2015.

159 folhas, Il. e Tabs.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães.

Orientador Externo: Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação Engenharia Civil, 2015.

Inclui Referências.

1. Engenharia Civil. 2. Fraturamento hidráulico. 3. Elementos finitos. 4. Descontinuidades fortes. 5. Fluxo em meios fraturados. I. Guimarães, Leonardo José do Nascimento. (Orientador). II. Manzoli, Osvaldo Luís.

III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2016-181



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Tese de Doutorado

**ANÁLISE HIDROMECAÂNICA DO FRATURAMENTO HIDRÁULICO VIA
ELEMENTOS FINITOS COM DESCONTINUIDADES FORTES INCORPORADAS**

defendida por

Leila Brunet de Sá Beserra

Considera a candidata APROVADA

Recife, 31 de agosto de 2015

Orientadores:

Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães - UFPE
(orientador interno)

Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli - UNESP
(orientador externo)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães - UFPE
(orientador interno)

Dr.^a Flávia de Oliveira Lima Falcão - Petrobras
(examinadora externa)

Prof. Dr. Eurípedes do Amaral Vargas Junior – PUC-Rio
(examinador externo)

Prof.^a Dr.^a Márcio Arab Murad – LNCC
(examinador externo)

Prof. Dr. Ivaldo Dário da Silva Pontes Filho – UFPE
(examinador interno)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram para o desenvolvimento desta tese. Em especial, agradeço a colaboração, o apoio e os ensinamentos de meus orientadores Leonardo Guimarães e Osvaldo Manzoli.

Agradeço também a todos os amigos que encontrei ao longo do doutorado: Julliana, Rafael, Inaldo, Jonathan, Nayra, Débora, Manuel, Leonardo Cabral, Rose e, em especial, Marcela, que compartilhou comigo a casa e toda a jornada do doutorado.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação, desde a escola até a pós-graduação, em especial aos professores, Bernardo Horowitz, Igor Gomes, Ivaldo Pontes e Lícia Mouta.

Agradeço ao CNPq e a Fundação CMG, pelos auxílios financeiros concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Agradeço a Petrobras, por ter me proporcionado o contato com o tema de fraturamento hidráulico e a Equión Energía, pela oportunidade de estudar o tema de fechamento das fraturas e por permitir publicar as análises realizadas neste tema.

RESUMO

O fraturamento hidráulico é uma técnica amplamente utilizada pela engenharia de petróleo principalmente para aumentar o índice de produtividade ou injetividade dos poços. Essa técnica consiste na injeção de um fluido penetrante na formação, sob uma pressão suficientemente alta para causar a ruptura da rocha, iniciando assim uma fratura que se converte em um canal de alta permeabilidade e facilita o escoamento de hidrocarbonetos. A técnica de fraturamento hidráulico tem sido responsável pela viabilização econômica de muitos campos petrolíferos em todo o mundo e a compreensão dos mecanismos que determinam o fraturamento, bem como a busca de métodos que permitam prever a geometria da fratura induzida e também determinar a pressão de injeção de fluidos necessária para que o fraturamento ocorra, são de fundamental importância para estabelecer um melhor projeto de exploração desses campos. O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma nova metodologia para simular numericamente, de maneira robusta, estável e eficiente, o problema de fraturamento hidráulico em formações rochosas de baixa permeabilidade pelo método dos elementos finitos, usando a aproximação contínua de descontinuidades fortes. Além de propor uma formulação que incorpora o efeito de descontinuidades permeáveis ou impermeáveis no problema de fluxo em meios porosos. A técnica de descontinuidades fortes incorporadas se mostrou eficiente, em relação ao custo computacional, para simular o fraturamento, uma vez que permite discretizar o domínio do problema com malhas relativamente grosseiras e, ainda assim, capturar, adequadamente, o efeito de uma descontinuidade de espessura muito menor do que o tamanho dos elementos da malha. A metodologia desenvolvida neste trabalho foi capaz de simular adequadamente o problema de fraturamento hidráulico em meios contínuos ou em formações rochosas com fraturas naturais preexistentes. E os resultados obtidos contribuem para o melhor entendimento do mecanismo de fraturamento em formações rochosas e a influência dos vários fatores envolvidos no processo.

Palavras chave: Fraturamento hidráulico. Elementos finitos. Descontinuidades fortes. Fluxo em meios fraturados.

ABSTRACT

Hydraulic fracturing is a widely used technique in the petroleum engineering for the generation of a high conductivity channel in the rock formation, increasing the productivity or injectivity index of wells. This technique consists of injecting a fracturing fluid in the rock formation, under a high enough pressure to induce the rock failure. Once started, the fracture is converted into a high permeability channel for the flow of hydrocarbons. The hydraulic fracturing has been in charge of the economic feasibility of many oil fields around the world and understanding the mechanism that determine the fracturing as well as the search for methods to predict the geometry of the induced fracture and also determine the fluid pressure required for the fracturing to occur, are crucial to establish a better exploitation design for these oil fields. The main purpose of this work is to develop a new methodology to numerically simulate, in a robust, stable and efficient way, the hydraulic fracturing problem in low permeability rock formations using the strong discontinuity approach. In addition, it also proposes a formulation that embeds the effect of a permeable or impermeable discontinuity for the fluid flow into the finite element. The technique of embedded strong discontinuities has been proved to be an efficient manner to simulate the fracturing problem, since it allows to discretize the problem domain with relatively coarse meshes and capture, properly, the effect of a discontinuity much thinner than the size of the element. The methodology developed in this work was able to properly simulate the hydraulic fracturing problem in a continuous media or in reservoirs crossed by natural fractures. The results obtained have contributed to a better understanding of the fracturing mechanism in rocks and the influence of the numerous involved factors.

Keywords: Hydraulic fracturing. Finite elements. Strong discontinuity approach. Fluid flow in fractured media

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas do fraturamento hidráulico em reservatórios não convencionais.....	16
Figura 2 - Mapa das bacias com reservas avaliadas de óleo e gás de folhelho, em maio de 2013	17
Figura 3 - Contaminação de aquíferos por atividade do fraturamento hidráulico.....	18
Figura 4 - Fraturas na escala do poro em um arenito.....	19
Figura 5- Domínio do problema de equilíbrio	27
Figura 6 - Sólido com uma descontinuidade	32
Figura 7 - Decomposição do campo de deslocamentos: (a) elemento indeformado; (b) elemento deformado; (c) deformação da parte contínua; (d) movimento relativo devido à descontinuidade.....	33
Figura 8 - Superfície de falha incorporada no elemento.....	45
Figura 9 - Problema de valores de contorno tipo hidráulico.....	46
Figura 10 - Distribuição e isolinhas do campo escalar.	46
Figura 11 - a) Representação do tensor de tensões mostrando a direção da maior tensão de tração Vetores de fluxo do campo; b) Vetores de fluxo do campo de pseudo pressão.....	47
Figura 12 - Seção transversal: (a) material intacto, (b) material degradado	49
Figura 13 - Elemento unidimensional submetido a um carregamento uniaxial F	50
Figura 14 - Curva tensão-deformação, evolução da variável de dano.....	53
Figura 15 - Curva tensão-deformação para diferentes comportamentos pós-ruptura.....	54
Figura 16 - Projeção do vetor de tensões na direção normal ao elemento com descontinuidade embebida.	56
Figura 17 - Algoritmo IMPL-EX de integração de tensões para o modelo de dano à tração. 60	
Figura 18 - Curva da evolução da variável q em função de r	61
Figura 19 - Ensaio de compressão diametral.....	63
Figura 20 – (a) Geometria e condições de contorno do problema, (b) malha de elementos finitos utilizada na simulação.	64
Figura 21- Evolução da variável de dano.	65

Figura 22 - Curva carga-deslocamento para o ensaio brasileiro	65
Figura 23 - Geometria e condições de contorno do problema.....	66
Figura 24 - Malha de elementos finitos.	67
Figura 25 - Isolinhas do campo escalar θ	67
Figura 26 - Evolução da variável de dano com a malha deformada (fator de escala x200)..	68
Figura 27 - Evolução do campo θ , cujo gradiente define a direção de propagação da fratura.	68
Figura 28 - Posição das fissuras obtidas experimentalmente e numericamente.....	69
Figura 29 - Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em viga de concreto. .	69
Figura 30 - Malha de elementos finitos.	70
Figura 31 - Campo escalar θ	70
Figura 32 - Evolução da variável de dano com a malha deformada (fator de escala x200)..	71
Figura 33 - Evolução do campo θ , cujo gradiente define a direção de propagação da fratura.	71
Figura 34 – Trajetórias de descontinuidadeobtidas.	72
Figura 35 - Elemento finito cortado por uma banda de baixa permeabilidade: (a) e (b) elemento triangular; (c) elemento tetraédrico.	75
Figura 36 - Decomposição do campo de pressões no elemento.....	76
Figura 37- Geometria e condições de contorno do problema.....	81
Figura 38 - Malha de elementos finitos e distribuição de pressão obtida na simulação, barreira com inclinação de 30°. (a) MEF convencional, (b) Malha grossa com barreira incorporada (c) malha fina com barreira incorporada.....	82
Figura 39 - Curva da distribuição de pressão ao longo da amostra.....	83
Figura 40 - Geometria e condições de contorno de problema.....	84
Figura 41 - Malha de elementos finitos utilizada na simulação, (a) Técnica de descontinuidade incorporada e (b) MEF convencional.....	84
Figura 42 - Malha de elementos finitos e distribuição de pressão obtida na simulação, para diferentes valores de permeabilidade da banda. (a) Malha de MEF convencional, (b) Malha com barreira incorporada.....	85
Figura 43 - Curva de permeabilidade da descontinuidade versus vazão de fluido.	86

Figura 44 - (a) elemento com fratura embebida (b) decomposição do vetor de fluxo na direção da descontinuidade.	87
Figura 45 - Modelo do ensaio de fluxo na fratura horizontal.....	89
Figura 46 - Malha de elementos finitos indicando a posição da fratura incorporada.....	90
Figura 47 - (a) Representação em cruz do tensor de permeabilidade e (b) vetores de fluxo.	90
Figura 48- Posição da fratura incorporada.	91
Figura 49 - (a) Representação em cruz do tensor de permeabilidade e (b) vetores de fluxo.	91
Figura 50 - Malha de elementos finitos adotada na abordagem convencional (a) fratura horizontal e (b) fratura inclinada.....	92
Figura 51 - Pressão atuante na fratura e no meio contínuo.....	96
Figura 52 - Interpolação da pressão nos elementos com fraturas incorporadas.....	97
Figura 53- Fratura vertical em torno de um poço vertical.	103
Figura 54 - Comportamento da pressão durante o teste de microfraturamento.....	105
Figura 55 - Seção horizontal de um poço vertical sob a ação das tensões in situ.	106
Figura 56 - Geometria e condições de contorno do ensaio de microfraturamento.....	107
Figura 57 - Malha de elementos finitos utilizada na simulação.....	108
Figura 58 - Curva da pressão medida no poço no ensaio de microfraturamento.....	109
Figura 59 - Curva da variação do tamanho do passo de tempo na análise, segundo o algoritmo de controle do passo de tempo.	110
Figura 60 - Distribuição da tensão principal menor (σ_x) em dois instantes da simulação.	111
Figura 61 - Evolução da variável de dano durante a propagação da fratura.....	112
Figura 62 - Campo de deslocamento na direção x.....	112
Figura 63 – Salto do campo de deslocamentos na direção normal à fratura com a malha deformada (x5000).....	114
Figura 64 - Distribuição da componente k_y do tensor de permeabilidade.	114
Figura 65 - Rede de fraturas induzidas e cenários de interação com fraturas naturais.	116
Figura 66 - Geometria e condições de contorno do problema simulado.....	118

Figura 67 - Malha de elementos finitos utilizada.	120
Figura 68 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de tensões isotrópico. (a) tempo de simulação: 2.000s; (b) tempo de simulação: 10.000s.....	121
Figura 69 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de anisotropia de tensões 1:2. (a) tempo de simulação: 2.000s; (b) tempo de simulação: 10.000s.....	121
Figura 70 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de anisotropia de tensões 1:3. (a) tempo de simulação: 2.000s; (b) tempo de simulação: 10.000s.....	122
Figura 71 - Variável de dano em malha deformada (100x) para os diferentes cenários de tensões.....	123
Figura 72 - Distribuição do campo de permeabilidade após fraturamento hidráulico para os diferentes cenários de tensões.	124
Figura 73 - Malha de elementos finitos adotada na simulação.....	125
Figura 74 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de tensões isotrópico. (a) tempo de simulação: 4.000s; (b) tempo de simulação: 100.000s.....	126
Figura 75 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de anisotropia de tensões 1:2. (a) tempo de simulação: 4.000s; (b) tempo de simulação: 100.000s.....	126
Figura 76 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de anisotropia de tensões 1:3. (a) tempo de simulação: 4.000s; (b) tempo de simulação: 100.000s.....	127
Figura 77 - Variável de dano em malha deformada (100x) para os diferentes cenários de tensões.....	128
Figura 78 - Distribuição do campo de permeabilidade após fraturamento hidráulico para os diferentes cenários de tensões.	129
Figura 79 - Possíveis direções que a descontinuidade pode assumir dentro do elemento, segundo o algoritmo simplificado de construção da trajetória da fratura.	131
Figura 80 - Malha de elementos finitos e condições de contorno do problema.	131
Figura 81 - Distribuição da pressão de fluido para o estado inicial de tensões isotrópicas.	133
Figura 82 - Variável de dano com destaque nas regiões onde a rocha intacta foi fraturada.	133
Figura 83 - (a) Abertura das fraturas (salto no campo de deslocamentos), (b) Campo de permeabilidade final.....	134

Figura 84 - Distribuição da pressão de fluido para o cenário de anisotropia nas tensões iniciais (1:1,5).	135
Figura 85 - Variável de dano com destaque nas regiões onde a rocha intacta foi fraturada.	135
Figura 86 - (a) Salto no campo de deslocamentos na direção normal à descontinuidade (abertura da fratura); (b) Campo de permeabilidade final.....	136
Figura 87 - Curva tensão normal versus fechamento para o modelo constitutivo de Barton-Bandis.....	139
Figura 88- (a) Rede de fraturas e malha de elementos finitos, (b) linha de referência da medida de densidade P10.	142
Figura 89 - Estado de tensões atuante no reservatório.....	142
Figura 90 - (a) Estado de tensões da análise numérica, (b) malha de elementos finito utilizada e (c) visualização dos nós da malha.	143
Figura 91 - Evolução da pressão de fluido para diferentes pontos da malha na direção y.	144
Figura 92 - Evolução da pressão de fluido para diferentes pontos da malha na direção x.	145
Figura 93 – Evolução da pressão de fluido para diferentes pontos da malha na direção –z.	145
Figura 94 - Distribuição da pressão de fluido no (a) início da simulação e (b) final da simulação.	146
Figura 95 - Distribuição da permeabilidade no (a) início da simulação e (b) final da simulação.	147
Figura 96- (a) Vetores de deslocamento, (b) detalhe dos vetores na região próxima ao poço.	148
Figura 97- (a) Vetores fluxo, (b) detalhe dos vetores de fluxo na região próxima ao poço.	148
Figura 98 - Produção acumulada de fluido para diferentes valores de módulo de rigidez de Barton-Bandis.....	149

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Resumo das equações constitutivas do modelo de dano à tração	58
Tabela 2 - Parâmetros adotados para o material.	64
Tabela 3 - Parâmetros adotados para o material.	66
Tabela 4 - Parâmetros adotados para o concreto.	70
Tabela 5 - Propriedades do fluido.	74
Tabela 6- Vazões finais obtidas nas simulações.....	83
Tabela 7 - Vazões finais obtidas nas simulações.....	92
Tabela 8 – Tamanho da malha e tempo de CPU das diferentes simulações.....	92
Tabela 9 – Propriedades mecânicas e hidráulicas do problema.....	107
Tabela 10 - Propriedades mecânicas e hidráulicas do problema.	119
Tabela 11 - Propriedades dos materiais.....	132
Tabela 12 - Propriedades mecânicas e hidráulicas do problema.	143

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO E OBJETIVOS	15
1.1.	Contexto e Motivação	15
1.1.1.	Fraturamento Hidráulico na Engenharia de Petróleo	16
1.1.2.	Simulação Numérica do Fraturamento Hidráulico	20
1.2.	Objetivo Geral do Trabalho.....	23
1.2.1.	Objetivos Específicos	24
2.	ELEMENTOS FINITOS COM DESCONTINUIDADES INCORPORADAS.	26
2.1.	Método dos Elementos Finitos (MEF) para o Problema Mecânico.....	27
2.2.	Elementos Finitos Com Descontinuidades Fortes.....	32
2.2.1.	Decomposição do Campo de Deslocamentos	33
2.2.2.	Campo de Deformações	34
2.2.3.	Consistência Cinemática	37
2.2.4.	Campo de Tensões	38
2.2.5.	Condição de Continuidade de Tensões	38
2.2.6.	Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez do Elemento	40
2.2.7.	Matriz Tangente de Descontinuidades Fortes.....	42
2.3.	Algoritmo Global de Construção da Trajetória de Descontinuidade	43
3.	MODELO CONSTITUTIVO MECÂNICO.....	48
3.1.	Conceitos Básicos do Modelo de Dano	48
3.2.	Modelo Constitutivo de Dano à tração	55
3.2.1.	Algoritmo de Integração Implícito-Explícito (IMPL-EX).....	58
3.2.2.	Algoritmo de Controle do Passo de Tempo.....	61
3.3.	Exemplos de Aplicação.....	62
3.3.1.	Ensaio Brasileiro.....	63
3.3.2.	Painel com Dois Entalhes	66
3.3.3.	Ensaio de Flexão em Viga de Concreto com Entalhe	69
4	FLUXO EM MEIOS POROSOS COM DESCONTINUIDADES	73

4.1	Equações Básicas do Problema de Fluxo.....	73
4.2	Descontinuidades Fortes no Campo de Pressão	74
4.2.1	Decomposição do Campo de Pressão.....	74
4.2.2	Gradiente de Pressão.....	77
4.2.3	Continuidade do Fluxo de Darcy.....	79
4.2.4	Exemplos de Aplicação.....	81
4.3	Elementos Finitos com Fratura Incorporada.	86
4.3.1	Exemplos de Aplicação.....	89
5	PROBLEMA ACOPLADO HIDROMECAÂNICO.....	94
5.1	Princípio das Tensões Efetivas.....	94
5.2	Alternativas para a Aproximação da Pressão Média no Elemento.....	95
5.3	Relação entre Permeabilidade e Abertura da Fratura	98
5.4	Fluxo Monofásico em Meios Porosos Deformáveis.....	99
5.4.1	Equação da Conservação de Massa para a Fase Sólida.....	99
5.4.2	Equação da Conservação de Massa para o Fluido.....	101
5.5	Caso de Validação: Ensaio de Microfraturamento	103
5.6	Fraturamento Hidráulico em Meios Naturalmente Fraturados.....	116
5.6.1	Exemplo de Aplicação: Famílias de Fraturas Iguamente Espaçadas.....	117
5.6.2	Exemplo de Aplicação: Fraturas Aleatórias.....	130
6	PROBLEMA DO FECHAMENTO DE FRATURAS.....	138
6.1	Modelo Constitutivo para o Fechamento de Fraturas.....	138
6.2	Incorporação das Fraturas Naturais na Malha de Elementos Finitos	140
6.3	Caso de Aplicação: Produção em Reservatório Naturalmente Fraturado.....	141
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	150
7.1	Conclusões.....	150
7.2	Sugestões para Futuros Trabalho.....	151
	REFERÊNCIAS	152

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

1.1. Contexto e Motivação

Um dos objetivos da Engenharia de Petróleo é o desenvolvimento e aplicação de técnicas capazes de aumentar a produção de um campo de petróleo. Dentre estas técnicas está o fraturamento hidráulico, que consiste na injeção de um fluido penetrante na formação, sob uma pressão suficientemente alta para causar a ruptura da rocha, iniciando assim uma fratura que se converte em um canal de alta permeabilidade e facilita o escoamento dos hidrocarbonetos [1].

A técnica de fraturamento tem sido responsável pela viabilização econômica de muitos campos petrolíferos em todo o mundo. A tecnologia de fraturamento hidráulico tem apresentado um desenvolvimento bastante significativo nos últimos anos e a compreensão dos mecanismos que determinam o fraturamento, bem como a busca de métodos que permitam prever a geometria da fratura induzida e também determinar a pressão de injeção de fluidos necessária para que o fraturamento ocorra, são de fundamental importância para estabelecer um melhor projeto de exploração desses campos de petróleo [2].

Uma técnica que permite simular o fraturamento do meio poroso, na modelagem numérica via elementos finitos, são as descontinuidades fortes incorporadas. A aproximação de descontinuidades incorporadas tem sido aceita como uma técnica eficiente para a simulação da propagação de trincas em estruturas de concreto, fazendo-se desnecessário o uso de elementos de interface ou a necessidade de remalhar repetidas vezes a geometria, como requerem os métodos de fraturas discretas. Esta técnica é coerente com os princípios da mecânica do contínuo, além de diminuir os custos computacionais e simplificar a discretização do meio fraturado.

A principal contribuição deste trabalho é desenvolver uma nova metodologia para simular numericamente, de maneira robusta, estável e eficiente, o problema de fraturamento hidráulico em formações rochosas de baixa permeabilidade. Levando em conta a natureza fortemente acoplada do problema, onde o fluxo de fluidos e as deformações do meio poroso se influenciam mutuamente.

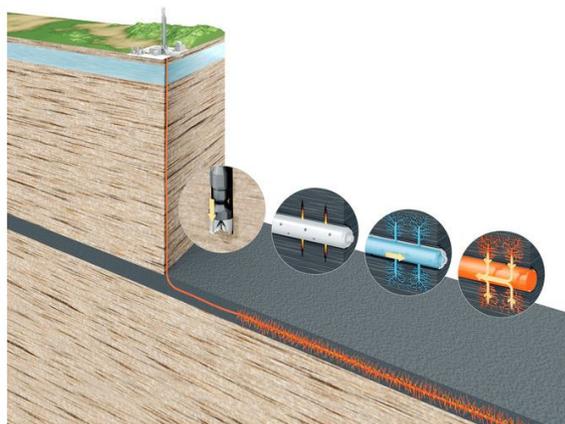
1.1.1. Fraturamento Hidráulico na Engenharia de Petróleo

As operações de fraturamento hidráulico são, de maneira geral, utilizadas para aumentar o índice de produtividade e injetividade dos poços e conectar fraturas naturais. Existem, entretanto, muitas outras aplicações, como por exemplo: aumentar o escoamento de óleo/gás em reservatórios de baixa permeabilidade; conectar fraturas naturais da formação com o poço; diminuir a queda de pressão ao redor do poço para minimizar a produção de sedimentos e aumentar a área da formação em contato com o poço [3].

O fraturamento hidráulico é uma operação de estimulação de rochas reservatórios. As etapas do fraturamento estão ilustradas na Figura 1, primeiramente é injetado um fluido de fraturamento na formação, sob uma pressão suficientemente alta para causar a ruptura da rocha por tração, iniciando a fratura. Esta fratura propaga-se, à medida que o fluido de fraturamento continua sendo injetado. Associado ao fluido fraturante pode ser introduzido um material granular de sustentação (propante) de tal modo que, uma vez encerrada a injeção, a fratura se fecha sobre este agente, conservando, assim, um canal de alta permeabilidade [1].

A combinação de técnicas de perfuração horizontal e fraturamento hidráulico vêm possibilitando, nos últimos anos, a extração de hidrocarbonetos em reservatórios não convencionais, que são reservatórios com baixíssima permeabilidade, onde a rede de fraturas é o único caminho possível para o escoamento de fluidos [4].

Figura 1 - Etapas do fraturamento hidráulico em reservatórios não convencionais

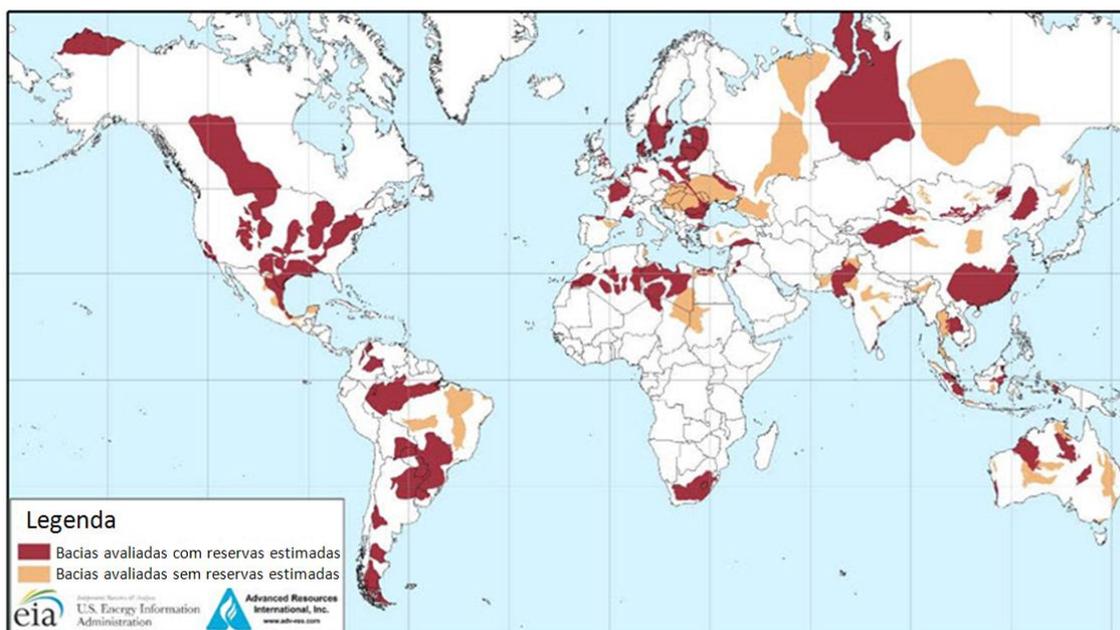


Fonte: Adaptado de [5]

Esses reservatórios vêm se tornando, em um curto espaço de tempo, uma importante parcela da matriz energética no cenário mundial. A Figura 2 mostra um levantamento da agência americana *U.S. Energy Information Administration* das reservas em reservatório não convencionais no mundo inteiro. No Brasil, o potencial do gás natural não convencional está estimado em cerca de 208 trilhões de pés cúbicos (TCF) considerando somente as bacias do Pareci (Mato Grosso), Parnaíba (Maranhão, Piauí e Tocantins) e Recôncavo (Bahia) [6].

Os principais exemplos de reservatórios não convencionais são: *shale gas* (gás de folhelho), *tight gas* e *coalbed methane* (CBM). Os reservatórios de gás de folhelho são rochas sedimentares argilosas e os de *tight gas* são geralmente arenitos ou rochas calcárias de muito baixa permeabilidade. CBM são camadas de carvão mineral onde o metano adsorvido é produzido em um processo conhecido como gasificação. A principal característica desses reservatórios é a permeabilidade muito baixa da matriz, que deve ser aumentada por meio de uma rede de fraturas artificiais para possibilitar extração de hidrocarbonetos [7].

Figura 2 - Mapa das bacias com reservas avaliadas de óleo e gás de folhelho, em maio de 2013

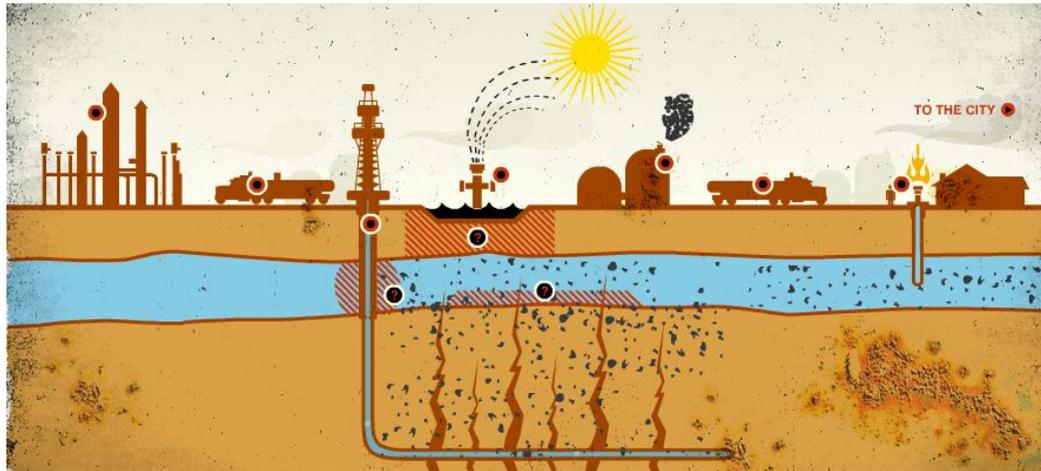


Fonte: Adaptado de [8]

O risco de contaminação de aquíferos é um cenário que a indústria do fraturamento hidráulico precisa lidar frequentemente quando desenvolve seus

projetos, pois a propagação de fraturas de maneira descontrolada pode comprometer a integridade das rochas adjacentes ao reservatório e contaminar os aquíferos [9], como ilustra a Figura 3.

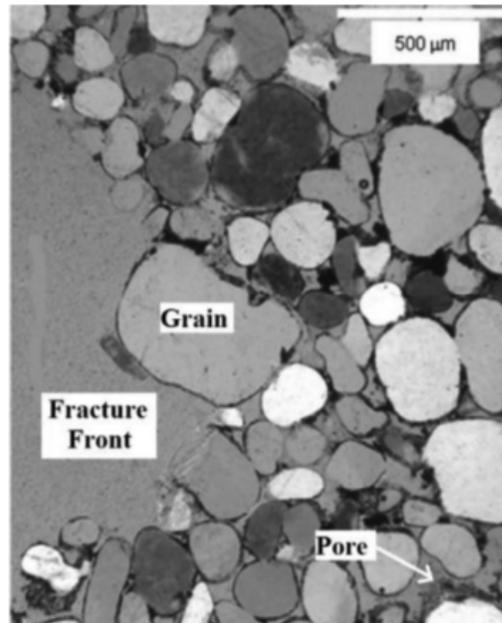
Figura 3 - Contaminação de aquíferos por atividade do fraturamento hidráulico



Fonte: [5]

Espera-se que as fraturas hidráulicas sempre se propagem perpendicularmente à direção da menor tensão principal, pois esta é a direção que define o menor trabalho realizado [10]. Porém, devido à complexidade dos reservatórios não convencionais, prever a formação e propagação das fraturas hidráulicas configura uma tarefa desafiadora. O estado de tensões *in situ*, as propriedades mecânicas da rocha e as heterogeneidades do meio, como fraturas naturais pré-existentes e planos de fraqueza da rocha, podem determinar a trajetória de propagação das fraturas hidráulicas [11] [12]. A Figura 4 mostra como a variação das propriedades do meio, como a permeabilidade e a porosidade, podem ser de grandes proporções dependendo da região a ser observada [13] [14].

Figura 4 - Fraturas na escala do poro em um arenito



Fonte: [13].

Complicações adicionais a essa tarefa já desafiadora podem ser consideradas se forem observadas as reais condições em que as fraturas hidráulicas ocorrem, como por exemplo, a presença de camadas de diferentes tipos de rocha, a mudança de magnitude ou orientação das tensões *in situ* (devido ao próprio fraturamento), a perda de fluido de fraturamento para a formação (*leak off*), os efeitos térmicos, o transporte de material de sustentação [15] e o fechamento das fraturas devido à interrupção da injeção [16] [17]. Além disso, a posição do canhoneio do poço estabelece o início da fratura, podendo influenciar sua geometria final [18].

Outro desafio dos reservatórios não convencionais são as fraturas naturais. A ocorrência de fraturas naturais na formação torna o problema de fraturamento hidráulico muito mais complexo que em meios contínuos, inicialmente sem fraturas. Em ambos os casos, a propagação da fratura ocorre em função do estado de tensões atuante no meio, porém, em meios fraturados, as fraturas pré-existent alteram esse estado de tensões.

Enquanto o fraturamento de um meio homogêneo ocorre por ruptura à tração (modo I), nos meios fraturados, os modos de cisalhamento (II e III) e a dilatância do material também contribuem para a abertura das fraturas e a efetividade da

operação de fraturamento hidráulico [19]. Além disso, uma fratura em desenvolvimento, ao encontrar com uma fratura pré-existente, pode cruzá-la ou penetrar na fratura natural [20].

1.1.2. Simulação Numérica do Fraturamento Hidráulico

Mesmo em abordagens simplificadas, a modelagem computacional do problema de fraturamento hidráulico é complexa, pois ela deve contemplar um acoplamento de pelo menos três processos: (i) a deformação mecânica induzida pela pressão de fluido na superfície da fratura; (ii) o fluxo de fluido dentro da fratura; e (iii) a propagação da fratura [16].

Frequentemente, a deformação da rocha é tratada pela teoria da elasticidade linear, que determina a relação entre a abertura da fratura e a pressão de fluido enquanto o fluxo é tratado por uma lei que relaciona a velocidade do fluido, a abertura da fratura e o gradiente de pressão. O critério estabelecido para a propagação da fratura, por sua vez, é dado pela teoria da mecânica da fratura, que estabelece que a propagação de uma fissura ocorre quando a energia disponível para o aumento da fissura é suficiente para superar a resistência do material [21]. Um termo adicional que leva em conta a infiltração do fluido injetado na formação rochosa também pode ser considerado [22].

Grandes esforços têm sido feitos, desde a década de 1950, na procura de metodologias que abordem o problema de fraturamento hidráulico [23]. Harrison *et al.* [24] propuseram inicialmente um modelo teórico simplificado, que foi seguido pela inovação de alguns modelos assintóticos, que incluem: o modelo PK [25], modelo PKN [26], modelo KGD [27] e os modelos pseudo-3D (P3D) [28]. Devido às simplificações assumidas por estes modelos (fraturas com altura constante), eles apresentam algumas limitações de aplicações [29].

O processo de fraturamento da rocha também pode ser simulado através de diferentes aproximações numéricas, que tentam descrever a formação e propagação de descontinuidades em meios originalmente contínuos. Apesar de ser fonte de muitas pesquisas nos últimos anos, o adequado tratamento desse tipo de problema ainda representa um desafio do ponto de vista teórico e numérico, posto que exige modelos constitutivos que descrevam apropriadamente os fenômenos dissipativos

envolvidos no processo de deterioração do material até a formação da descontinuidade.

Nesse contexto, o método dos elementos finitos (MEF) tem se mostrado uma ferramenta importante na simulação do problema de fraturamento hidráulico. Os elementos finitos são, provavelmente, o método numérico mais utilizado atualmente para problemas de engenharia. Uma das razões é a sua flexibilidade em lidar com materiais heterogêneos e não lineares, conta ainda com uma vasta disponibilidade de códigos computacionais comerciais verificados e amigáveis [30].

Uma técnica, baseada em elementos finitos, muito utilizada na simulação de fraturamento consiste em inserir elementos de interface com espessura nula (*zero-thickness element*) para representar a descontinuidade. Nessa técnica a propagação da fratura é regida por uma lei coesiva [31], que relaciona diretamente as tensões com os deslocamentos.

O modelo de zona coesiva presume a existência de uma zona de processo de fratura que é tratada por uma lei de separação de tensões. Desta maneira o modelo evita a singularidade, que ocorre no campo de tensões na ponta da trinca, presente na mecânica da fratura clássica. Além disso, o modelo de zona coesiva pode ser facilmente implementado em elementos finitos convencionais. Assim, os elementos finitos com zona coesiva oferecem uma aproximação efetiva para modelagem do comportamento do fraturamento hidráulico através da simulação explícita do processo de fratura [32] e do tratamento da permeabilidade do meio como uma função da abertura da fratura [33].

Ainda que o modelo de zona coesiva tenha um potencial especial na modelagem dos mecanismos de danos micro estruturais inerentes ao fraturamento hidráulico, como por exemplo, o início da formação da fratura em um poço [32], a posição da fratura é pré-definida pelos elementos coesivos presentes na malha e o método pode não ser capaz de prever corretamente a trajetória da fratura em situações muito complexas, como quando ocorre a reorientação do estado de tensões [34]. Pode-se suplantam esta limitação adotando técnicas de reconstrução adaptativa de malhas.

Outro modo de simular o fraturamento é implementar o modelo constitutivo contínuo de dano em elementos finitos tradicionais, onde a fratura é representada por um elemento contínuo com resistência à tração reduzida ao mínimo, e a permeabilidade dos elementos fraturados pode ser relacionada com o estado de

tensão-deformação. Ou ainda, uma variável escalar de dano, relacionada às deformações pode ser usada para representar o dano isotrópico no meio contínuo e o fechamento, da fratura pode ser simulado fazendo a rocha recuperar o módulo de elasticidade inicial. Este método pode simular fraturas de geometria não plana, entretanto, os elementos devem ser muito pequenos para prever precisamente a trajetória e forma da fratura hidráulica. Neste caso, a adoção de técnicas de malhas adaptativas se apresenta como uma alternativa para aumentar a acurácia e diminuir os custos computacionais deste tipo de modelagem [35] [36] [37].

Uma técnica que também permite simular o fraturamento do meio poroso, na modelagem numérica via elementos finitos, é a aproximação contínua de descontinuidades fortes (ACDF) [38]. Nessa técnica, em contraste com os modelos coesivos discretos, o comportamento não linear do material na interface descontínua é descrito por uma relação constitutiva do tipo contínuo entre tensões e deformações.

Essa aproximação, na qual é introduzido o efeito de uma banda muito estreita de localização de deformações no interior dos elementos finitos existentes, tem sido aceita como uma técnica eficiente para a simulação de fraturas em materiais *quasi*-frágeis, como o concreto [39]. Torna-se desnecessário o uso de elementos de interface ou a reconstrução da malha repetidas vezes, como requerem os métodos de fraturas discretas. A técnica é coerente com os princípios da mecânica do contínuo, além de diminuir os custos computacionais e simplificar a discretização do meio fraturado.

Para representar a propagação da descontinuidade, ao invés de empregar técnicas de reconstrução adaptativa de malhas, essa aproximação requer um esquema de construção da trajetória de descontinuidade.

Essa forma de representar o fraturamento através de bandas estreitas incorporadas faz com que essa técnica seja apropriada para ser estendida, com certa simplicidade, para representar fenômenos hidromecânicos presentes no processo de fraturamento hidráulico [40], [41]. Isso se deve ao fato de que a ACDF mantém os conceitos de tensões e deformações, da mecânica do contínuo, também para representar campos cinemáticos descontínuos.

Da mesma forma, os campos de pressões e de fluxo do problema hidráulico também podem ser mantidos para descrever os efeitos hidráulicos nas fraturas formadas.

Outros métodos que têm sido comumente usados na simulação do fraturamento hidráulico incluem o método dos elementos finitos enriquecidos (XFEM) e a rede de fraturas discretas (DFN).

No XFEM, os elementos finitos são enriquecidos por meio de funções adicionais baseadas nas soluções analíticas ou assintóticas do problema. Esse enriquecimento é realizado pela introdução de graus de liberdade extras nos nós que cercam a descontinuidade [42] [43]. O problema de fluxo de fluido também pode ser incorporado nesse método, o campo de pressões é enriquecido de maneira semelhante ao campo de deslocamentos, porém com diferentes funções de enriquecimento [44].

O método DFN é um modelo discreto que considera o fluxo de fluidos e o transporte em um meio fraturado através de um sistema de fraturas conectadas. Neste modelo a permeabilidade da matriz é normalmente desprezada, assumindo que todo o fluxo ocorre na rede de fraturas. Este método é muito atrativo para a simulação de fluxo em meios fraturados de baixa permeabilidade da matriz, como é o caso dos folhelhos, e tem sido largamente utilizado em problemas da engenharia de petróleo e de energia geotérmica [45].

1.2. Objetivo Geral do Trabalho

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma nova metodologia para simular numericamente, de maneira robusta, estável e eficiente, o problema de fraturamento hidráulico em formações rochosas de baixa permeabilidade pelo método dos elementos finitos, usando a aproximação contínua de descontinuidades fortes (ACDF). Além de propor uma formulação que incorpora o efeito de descontinuidades permeáveis ou impermeáveis no problema de fluxo em meios porosos.

Além da complexidade e da elevada não linearidade do problema mecânico em si, o fraturamento hidráulico é também um problema acoplado, onde o fluxo de fluidos e a deformação do meio poroso se influenciam mutuamente. Portanto, do ponto de vista da simulação numérica do fenômeno, dentre os desafios a serem superados neste trabalho estão a correta adoção de modelos constitutivos para o fluxo e a deformação da rocha e da descontinuidade, bem como a incorporação

destes comportamentos complexos em uma formulação de elementos finitos capaz de resolver problemas de contorno.

1.2.1. Objetivos Específicos

- Implementar a técnica de aproximação contínua de descontinuidades fortes para o problema mecânico. Essa técnica tem se mostrado uma maneira eficiente, em relação ao custo computacional, para a simulação da propagação de trincas em estruturas de concreto e foi adaptada para o problema de fraturamento hidráulico.
- Implementar um algoritmo de construção da trajetória de descontinuidade, que identifique corretamente o caminho de propagação da fratura.
- Eleger modelos constitutivos que representem adequadamente o comportamento mecânico do meio, especialmente a abertura de fraturas por esforços de tração. A ruptura por tração é o principal mecanismo de abertura das fraturas induzida pela injeção de fluidos. Nesse contexto, o modelo de dano, onde as propriedades elásticas do material são degradadas ao se atingir sua resistência à tração, será adotado.
- Implementar o algoritmo de integração de tensões IMPLEX, com um controle automático do passo de tempo, para garantir a robustez e a convergência do modelo.
- Considerar o acoplamento hidromecânico, que adiciona na formulação do problema a equação de fluxo de fluidos, leis constitutivas para o fluxo (lei de Darcy) e leis que estabelecem a interação entre os problemas mecânico e hidráulico (princípio das tensões efetivas, lei de evolução da permeabilidade). Além disso, aborda a pressão de fluido como uma nova incógnita do problema.
- Incorporar famílias de fraturas preexistentes na malha de elementos finitos. Os reservatórios não convencionais são, em geral, formações intensamente fraturadas, onde podem ser identificadas várias famílias de fraturas naturais. Numa modelagem realista do fraturamento hidráulico desse tipo de reservatório, essas famílias de fraturas devem ser

introduzidas como descontinuidades preexistentes no domínio do problema.

- Desenvolver e implementar a formulação proposta no código *in-house* de elementos finitos CODE_BRIGTH (*COupled DEformation BRIne Gas and Heat Transport*) [46] [47] [48], contribuindo, assim, para o seu aprimoramento e tornando-o apto a simular o problema de fraturamento hidráulico em formações rochosas submetidas à injeção de fluidos.
- Simular, com o código numérico resultante, problemas acoplados hidromecânicos de abertura e propagação de fraturas em meios porosos, inicialmente contínuos ou com fraturas preexistentes.
- Auxiliar o melhor entendimento do mecanismo de fraturamento e a influência dos vários fatores envolvidos no processo.
- Simular o problema de fechamento de fraturas durante a produção de fluidos em reservatórios naturalmente fraturados, utilizando o modelo constitutivo de Barton-Bandis.

2. ELEMENTOS FINITOS COM DESCONTINUIDADES INCORPORADAS.

Uma técnica que tem sido desenvolvida nos últimos anos para representar o processo de formação de fraturas é a Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) ([49] [50] [51] [52] [53] entre outros), que introduz uma cinemática especial, capaz de representar o processo de degradação do material, passando pela fase de localização de deformações em bandas estreitas (descontinuidade no campo de deformações, ou descontinuidade fraca), associadas à zona de processamento da fratura, até o caso limite de degradação completa, correspondente à formação da descontinuidade no campo de deslocamentos (descontinuidade forte).

Uma maneira de implementar essa aproximação corresponde à introdução dos efeitos de um banda muito estreita de localização de deformações no interior dos elementos finitos existentes. Essa técnica permite a representação dos efeitos de uma descontinuidade no interior do elemento finito, proporcionando grandes vantagens quanto ao custo computacional para esse tipo de modelagem, uma vez que elimina a necessidade de utilizar malhas excessivamente discretizadas, de remalhar diversas vezes a geometria do problema ou ainda de utilizar elementos de interface discretos.

Assim, a malha de elementos finitos pode ser criada sem levar em conta a posição e a escala correspondente à largura das bandas de localização, que geralmente correspondem a dimensões muito menores do que as dimensões dos problemas. Isso representa uma redução do esforço computacional.

Esse procedimento, que será descrito em detalhes neste capítulo, distingue o campo cinemático associado à parte contínua do elemento e o relacionado com o movimento de corpo rígido, decorrente da descontinuidade do campo de deslocamentos. Além disso, impõe-se o equilíbrio entre a parte contínua e a interface de descontinuidade, através da condição de continuidade de tensões ao longo da superfície de descontinuidade.

A implementação desta técnica no CODE_BRIGHT tem sido bastante conveniente e pode ser feita de maneira não intrusiva no código. Isso se deu ao fato de que o salto (descontinuidade) no campo de deslocamentos pode ser aproximado como deformações inelásticas equivalentes, que podem ser calculadas no módulo

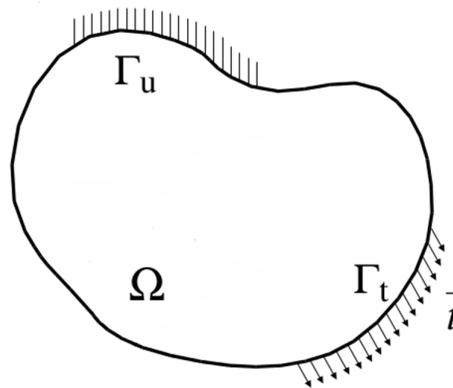
constitutivo do programa em elementos finitos, dentro do procedimento de integração de tensões nos elementos.

2.1. Método dos Elementos Finitos (MEF) para o Problema Mecânico

Nesta seção será apresentado um resumo geral da aplicação do método dos elementos finitos para problemas *quasi*-estáticos da mecânica dos sólidos, com o objetivo de revisar as principais técnicas adotadas em MEF para solucionar problemas de valores de contorno. Mais detalhes sobre estas técnicas estão disponíveis em [54], [55], [56] e [57].

Seja um sólido de domínio Ω e contorno Γ , como mostra a Figura 5, e sendo o contorno Γ separado em duas partes, Γ_u onde são impostos deslocamentos, e Γ_t que está sujeito a uma tensão prescrita. As equações básicas que regem o problema de equilíbrio são apresentadas a seguir.

Figura 5- Domínio do problema de equilíbrio



Fonte: Adaptado de [50]

A equação de equilíbrio é dada por:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e \mathbf{b} as forças de corpo do material. As condições de contorno são dadas por:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^* & \text{em } \Gamma_u \\ \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{t}^* & \text{em } \Gamma_t \end{cases} \quad (2)$$

onde \mathbf{n}_Γ é o vetor normal ao contorno Γ e \mathbf{u}^* e \mathbf{t}^* são valores prescritos de deslocamentos e cargas nas partes do contorno Γ_u e Γ_t , respectivamente. A relação entre deformação e deslocamento é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} \quad (3)$$

onde ∇^S é o gradiente simétrico. A relação constitutiva é:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4)$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}$ representa o comportamento constitutivo do material, que é função das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Para descrever as equações que serão apresentadas a seguir é conveniente introduzir a notação matricial, onde, para o caso bidimensional e de deformação plana, os tensores de tensões e deformações são escritos, respectivamente, como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

desta maneira, a forma variacional da equação de equilíbrio, empregando o princípio dos trabalhos virtuais, pode ser escrita como:

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{D}\delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_{\text{trabalho virtual interno}} = \underbrace{\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma}_{\text{trabalho virtual externo}} \quad (7)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ é a variação de deslocamento virtual admissível ($\delta \mathbf{u} = 0$ em Γ_u) e D é um operador diferencial que corresponde ao gradiente simétrico (∇^S), definido por:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

De acordo com a aproximação por elementos finitos, pode-se interpolar o campo de deslocamentos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= N\mathbf{d} \\ \delta \mathbf{u} &= N\delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (9)$$

onde N é a matriz das funções de forma associadas ao nós dos elementos e \mathbf{d} é o vetor dos deslocamentos nodais.

As deformações são dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= D\mathbf{u} = \underbrace{D(N\mathbf{d})}_{\mathbf{B}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\mathbf{d} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta \mathbf{d}$$

onde \mathbf{B} é a matriz, que relaciona deformações e deslocamentos, convencional de elementos finitos. Substituindo as aproximações das equações (9) e (10) na forma variacional da equação (7), tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \\ \nabla \delta \mathbf{u} & \\ \delta \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_u \end{aligned} \quad (11)$$

pode-se então escrever os vetores de força externa e interna que atuam no sólido como:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_{\mathbf{F}_{int}} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma}_{\mathbf{F}_{ext}} \quad (12)$$

Para uma malha de elementos finitos, os vetores de força são obtidos da seguinte maneira:

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{F}_{int_e} \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{F}_{ext_e} \quad (14)$$

onde \mathbf{A} é o operador de montagem de elementos finitos, que implica que cada componente da força global associada a um nó global específico é obtida como a soma das contribuições dos vetores de força de todos os elementos que compartilham o mesmo nó global [57]. Esses vetores de forças internas e externas no elementos são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{F}_{int_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_{ext_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega_e + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_e \quad (16)$$

Um exemplo simples de aplicação do MEF é considerar o domínio elástico linear e isotrópico, onde o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é uma função linear do campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (17)$$

sendo \mathbf{C} a constitutiva do material, que para deformação plana, pode ser escrito como:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e ν é o coeficiente de Poisson.

Substituindo a equação (17) em (15), o vetor das forças internas do elemento pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}_{\text{int}_e} = \underbrace{\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} d\Omega_e}_{\mathbf{K}_e} \underbrace{\mathbf{d}_e}_{\text{desloc. nodais}} \quad (19)$$

onde \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez do elemento e \mathbf{d}_e é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento.

O vetor global das forças internas é dado, então, por:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (20)$$

onde:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{K}_e \quad (21)$$

A partir da equação (20) pode-se montar o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (22)$$

com a solução:

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (23)$$

Para o caso não linear, a solução da equação (12) pode ser obtida pelo método iterativo de Newton-Raphson. Um exemplo desse tipo de solução será

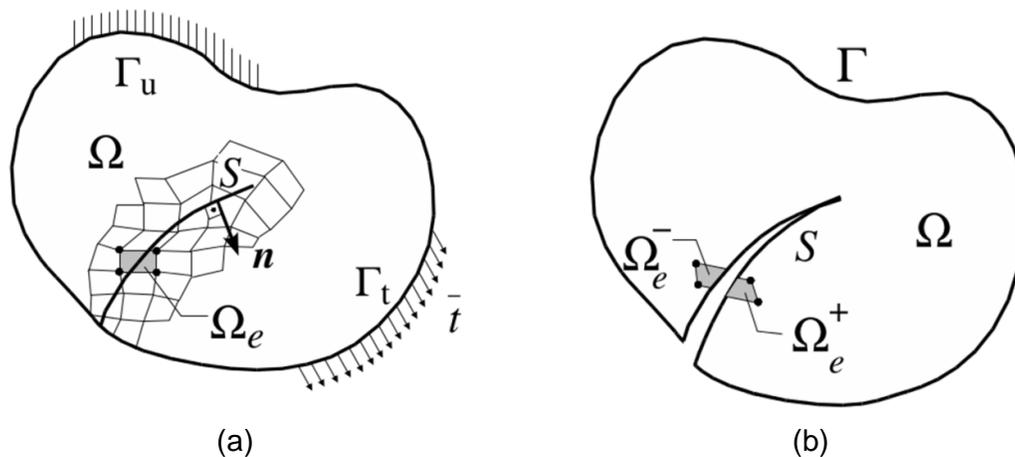
apresentado na seção a seguir, uma vez que a técnica de descontinuidades fortes incorporadas introduz uma não linearidade ao problema.

2.2. Elementos Finitos Com Descontinuidades Fortes

A formulação de elementos finitos com descontinuidades incorporadas requer a consideração adequada de aspectos relacionados às consistências cinemática e estática. O enriquecimento cinemático deve refletir a posição dos deslocamentos relativos (abertura e deslizamento) da interface. Além disso, a continuidade de tensões deve ser corretamente imposta para garantir o equilíbrio entre as forças de superfície na interface e o campo de tensões na parte contínua circundante [51].

Considere-se um sólido de domínio Ω e contorno Γ contendo uma interface de descontinuidade S (Figura 6). A Figura 6(a) ilustra a discretização de Ω por elementos finitos na região da descontinuidade e a Figura 6(b) mostra o domínio Ω deformado, onde o elemento sombreado é dividido em duas partes, Ω_e^- e Ω_e^+ , pela descontinuidade.

Figura 6 - Sólido com uma descontinuidade



Fonte: [50].

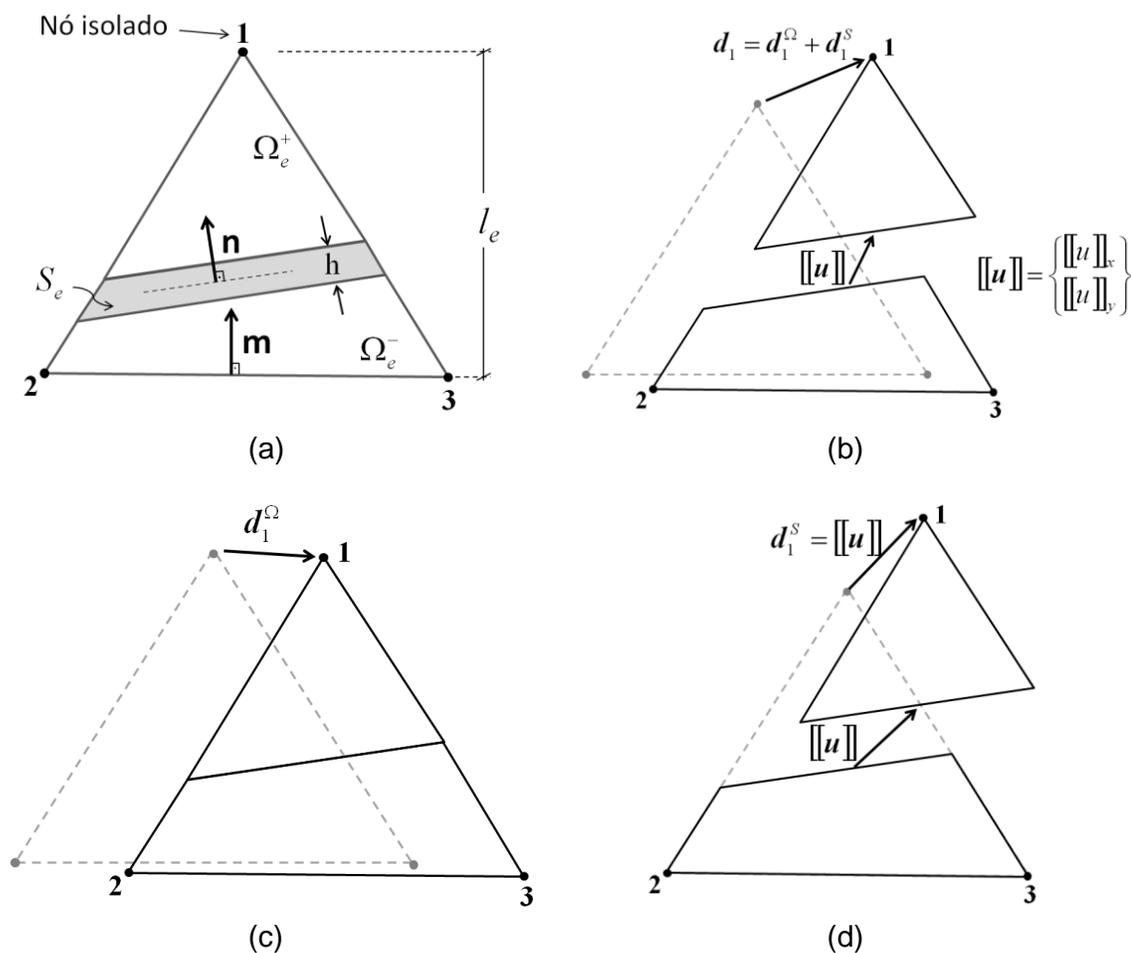
As equações do MEF padrão (sem descontinuidade) são usadas para representar a parte contínua. O comportamento da interface de descontinuidade pode ser descrito por uma equação constitutiva que relaciona diretamente tensões e deslocamentos (modelo discreto) ou por um modelo constitutivo do tipo contínuo,

que relaciona tensões e deformações, de acordo com a aproximação contínua de descontinuidades fortes [51], [58].

2.2.1. Decomposição do Campo de Deslocamentos

A Figura 7 mostra um elemento finito triangular de três nós, de domínio Ω_e , comprimento l_e , com uma banda de localização de deformações, S_e , de largura h , que divide o elemento em duas partes, Ω_e^- e Ω_e^+ , isolando o nó 1 dos nós 2 e 3. Por questão de simplificação, a formulação de descontinuidades fortes incorporadas será apresentada a seguir limitando-se ao estudo do domínio desse elemento.

Figura 7 - Decomposição do campo de deslocamentos: (a) elemento indeformado; (b) elemento deformado; (c) deformação da parte contínua; (d) movimento relativo devido à descontinuidade.



Fonte: Adaptado de [50]

O campo de deslocamento, \mathbf{u} , dentro do elemento pode ser decomposto em uma componente, \mathbf{u}_Ω , associada com a deformação do meio contínuo (Figura 7c) e uma componente, \mathbf{u}_S , relacionada ao movimento de corpo rígido entre as duas partes do elemento (Figura 7d) .

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Omega + \mathbf{u}_S \quad (24)$$

Se o movimento relativo da interface for considerado uniforme dentro do elemento, a componente de corpo rígido pode ser expressa como:

$$\mathbf{u}_S = H_{S_e} [[\mathbf{u}]] \quad (25)$$

onde,

$$[[\mathbf{u}]] = \left\{ \begin{array}{l} [[u]]_x \\ [[u]]_y \end{array} \right\} \quad (26)$$

é o vetor que contém as componentes do salto de deslocamentos na interface, e H_{S_e} é a função *Heaviside*, uma função descontínua definida em Ω_e como:

$$H_{S_e} = \begin{cases} 1 & \text{em } \Omega_e^+ \\ 0 & \text{em } \Omega_e^- \end{cases} \quad (27)$$

2.2.2. Campo de Deformações

i) Deformação na parte contínua

A aproximação contínua do campo de deslocamentos pode ser obtida usando a matriz de funções de forma convencionais do método dos elementos finitos, segundo a equação (10),

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = \mathbf{B}\mathbf{d}_\Omega = \mathbf{B}(\mathbf{d} - \mathbf{d}_S) \quad (28)$$

onde \mathbf{d}_Ω é o vetor de deslocamentos nodais associado à parte contínua e \mathbf{d}_S é o vetor relacionado ao movimento de corpo rígido, que pode ser escrito como:

$$\mathbf{d}_S = \mathbf{P}[[\mathbf{u}]] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [[\mathbf{u}]] \quad (29)$$

sendo \mathbf{P} uma matriz de projeção, de maneira que o produto de \mathbf{P} pelo salto de deslocamentos ($[[\mathbf{u}]]$) seja igual ao próprio salto no nó isolado e zero nos demais nós, como mostra a Figura 7(d). Dessa maneira, para o caso do elemento triângulo de três nós, \mathbf{P} pode ser escrito como na equação (29).

A equação (28) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{d}}_{\text{deformação total}} - \mathbf{B}\mathbf{P}[[\mathbf{u}]] \quad (30)$$

onde $\mathbf{B}\mathbf{d}$ está associado à deformação regular do elemento e $\mathbf{B}\mathbf{P}$ pode ser escrito como o gradiente da função de forma do nó isolado.

Seja \mathbf{n} um vetor unitário normal a S na direção de Ω_e^+ e \mathbf{m} um vetor unitário normal à base do elemento na direção do nó isolado, como ilustrado na Figura 7(a). Pode-se montar as matrizes \mathbf{N}_n e \mathbf{M} com as componentes \mathbf{n} e \mathbf{m} , respectivamente, da seguinte maneira.

$$\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \\ m_y & m_x \end{bmatrix} \quad (32)$$

Considerando o elemento de três nós com funções de forma lineares (Figura 7a), o gradiente da função de forma do nó isolado pode ser escrito como:

$$\nabla N_1 = \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \quad (33)$$

onde l_e é o tamanho característico do elemento, que, nesse caso, corresponde à distância entre o nó isolado e o lado oposto do elemento. A equação (30) finalmente toma a seguinte forma.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} [[\mathbf{u}]] \quad (34)$$

ii) Deformação na descontinuidade

A partir do campo de deslocamentos descontínuos (24) e (25), obtêm-se o campo de deformações na banda de localização:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_S &= \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega + \mathbf{D}(H_{S_e} [[\mathbf{u}]]) \\ &= \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} [[\mathbf{u}]]}_{\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega} + \delta_{S_e} N_n [[\mathbf{u}]] \end{aligned} \quad (35)$$

onde δ_{S_e} representa a distribuição delta de *Dirac* em S_e que decorre do cálculo do gradiente material da função *Heaviside*. Para efeito de análise computacional, δ_{S_e} é substituída pela seguinte aproximação [59] e [49]:

$$\delta_{S_e}(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } x \in S_e \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (36)$$

de maneira que, quando h (espessura da banda de localização) tende a zero, essa aproximação se transforma na distribuição delta de *Dirac*. O parâmetro h pode ser considerado como a largura de uma banda muito estreita contendo S , sobre a qual a descontinuidade de deslocamentos é regularizada [60].

Finalmente o campo de deformações na banda de localização pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M}[[\mathbf{u}]] + \frac{1}{h} \mathbf{N}_n[[\mathbf{u}]] \quad (37)$$

2.2.3. Consistência Cinemática

Segundo Manzoli [51], o conceito associado à substituição de uma descontinuidade de deslocamento por deformações inelásticas equivalentes é similar ao encontrado nas aproximações de fissuras distribuídas convencionais. A diferença básica é que, ao invés de simplesmente distribuir a descontinuidade de deslocamento sobre a área do elemento, a deformação inelástica provém da aproximação contínua do campo de deslocamentos associado ao movimento de corpo rígido produzido pela descontinuidade.

Para que o campo de deformações inelásticas equivalente seja consistente, ele deve garantir uma total relaxação das tensões da parte contínua do elemento se o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{d} , for unicamente devido ao movimento de corpo rígido causado pela descontinuidade, da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = 0 \quad \text{se } \mathbf{d} = \mathbf{d}_S (= \mathbf{P}[[\mathbf{u}]]) \quad (38)$$

2.2.4. Campo de Tensões

Ao considerar o contínuo como elástico linear e isotrópico, o campo de tensões correspondentes pode ser obtido pela relação constitutiva da equação (17):

$$\begin{aligned}\sigma_{\Omega} &= \mathbf{C}\varepsilon_{\Omega} \\ \sigma_{\Omega} &= \mathbf{C}(\varepsilon - \varepsilon_s)\end{aligned}\tag{39}$$

sendo \mathbf{C} a matriz das constantes elásticas do material.

Na relação constitutiva, equação (39), a componente de movimento relativo não contribui para as tensões da parte contínua, ou seja, nenhuma deformação é introduzida na parte contínua do elemento pelo salto de deslocamento. A aproximação contínua do movimento de corpo rígido pode ser, dessa maneira, interpretada como uma deformação inelástica contínua equivalente, que relaxa as tensões na parte contínua do elemento [51]. Com essa interpretação, o procedimento de incorporação de descontinuidades em formulações convencionais de elementos finitos pode ser realizado de uma maneira simples e direta.

O campo de tensões na banda de localização pode ser obtido através da seguinte relação:

$$\sigma_s = \Sigma(\varepsilon_s)\tag{40}$$

onde Σ representa uma lei constitutiva inelástica do tipo contínuo, relacionando as tensões com as deformações do material.

2.2.5. Condição de Continuidade de Tensões

Uma vez que os saltos no campo de deslocamentos correspondem a graus de liberdade adicionais do problema, um conjunto de equações adicionais deve complementar as equações de equilíbrio. Essas novas equações provêm do acoplamento entre o contínuo e a interface, através da seguinte equação de continuidade de tensões:

$$\mathbf{t}_\Omega - \mathbf{t}_S = 0 \quad \text{em } S \quad (41)$$

onde \mathbf{t}_Ω é o vetor de tensões calculado a partir do estado de tensão da parte contínua adjacente à interface e \mathbf{t}_S é o vetor de tensões na própria interface.

Nesta formulação, impõe-se a condição de continuidade das tensões sobre a tensão média em todo o domínio do elemento, independente da posição da descontinuidade. O acoplamento entre a parte contínua e a interface de descontinuidade é imposto através da condição de continuidade de tensões ao longo da superfície de descontinuidade. Essa condição de continuidade é considerada como uma equação de governo adicional do problema de valores de contorno. Sua forma fraca consiste na imposição da continuidade das tensões em um ponto de colocação discreto, situado na interface de descontinuidade [51].

Quando a aproximação contínua de descontinuidades fortes é adotada, o campo de deformações totais, $\boldsymbol{\varepsilon}$, no interior da interface de descontinuidade pode ser calculado. A continuidade das tensões na interface do elemento é dada por:

$$N_n^T (\boldsymbol{\sigma}_\Omega - \boldsymbol{\sigma}_S) = 0 \quad (42)$$

Substituindo as equações (39) e (40) na condição de equilíbrio (42), tem-se:

$$N_n^T (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_S)) = 0 \quad (43)$$

Substituindo as equações (34) e (37) em (43), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$N_n^T \left[\mathbf{C} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} [[\mathbf{u}]] \right) \right] - \boldsymbol{\Sigma} \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} + \frac{1}{h} N_n [[\mathbf{u}]] \right] = 0 \quad (44)$$

que deve ser resolvido pelo método iterativo de Newton-Raphson.

Considerando as matrizes N e M segundo as equações (31) e (32) têm-se a formulação não simétrica que satisfaz propriamente as condições de consistência cinemática e de continuidade de tensões. Esse tipo de formulação garante maior estabilidade numérica e melhor taxa de convergência, mas apresenta o custo de

resolver uma matriz tangente constitutiva não simétrica. Por outro lado, pode-se fazer $N=M$ e obter assim uma formulação simétrica, que não cumpre propriamente a condição de continuidade e pode apresentar problemas de travamento de tensões (*stress locking*) [61] [52].

2.2.6. Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez do Elemento

O vetor de forças internas do elemento é dado por:

$$\mathbf{F}_{\text{int}_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e \stackrel{h \rightarrow 0}{\cong} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_\Omega d\Omega_e \quad (45)$$

e a Matriz de rigidez do elemento, pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}_e}}{\partial \mathbf{d}_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\Omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{operador tangente}} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (46)$$

As deformações na banda de localização podem ser ilimitadas (tendem ao infinito quando $h \rightarrow 0$), mas a tensão no elemento é limitada pelo modelo constitutivo adotado (superfície de escoamento). Portanto a integral de um valor limitado em uma região (área) que tende a zero é muito pequena, dessa maneira a integração das tensões no elemento despreza a banda de localização e só leva em conta a deformação regular, para obter a tensão regular (parte contínua).

O quadro 1 apresenta um esquema de solução para obtenção dos vetores de forças internas e matriz de rigidez dos elementos.

Quadro 1 Esquema de obtenção de F_{int_e} e K_e em um processo de solução incremental iterativo.

<ul style="list-style-type: none"> • Dados: $d_e^{(n,i)}$ • Calcular: $F_{int_e}^{(n,i)}$ e $K_e^{(n,i)}$ • Sendo: $\begin{cases} n \rightarrow \text{passo de tempo} \\ i \rightarrow \text{iteração} \end{cases}$
<p>1) Calcular a deformação total</p> $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n,i)} = \mathbf{B}d^{(n,i)}$
<p>2) Calcular a tensão na parte contínua a partir de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n,i)}$</p> <p>2.1) Obter $[[\mathbf{u}]]^{(n,i)}$ mediante a equação (44), através do método iterativo de Newton-Raphson</p> <p>2.2) Obter a deformação da parte contínua</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega}^{(n,i)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(n,i)} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M}[[\mathbf{u}]]^{(n,i)}$ <p>2.3) Obter a tensão da parte contínua</p> $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega}^{(n,i)} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega}^{(n,i)}$ <p>2.4) Obter o operador tangente:</p> $\mathbf{C}_{tg} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\Omega}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$
<p>3) Calcular $F_{int_e}^{(n,i)}$ mediante a equação (45).</p>
<p>4) Calcular $K_e^{(n,i)}$, mediante a equação (46).</p>

A Solução da equação não linear (44), através do método iterativo de Newton-Raphson, pode ser obtida da seguinte maneira:

$$j = j + 1 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)_j = \mathbf{N}_n^T \left(\mathbf{C} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^{(n,i)} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_j^{(n,i)} \right] - \boldsymbol{\Sigma} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^{(n,i)} + \left(\frac{1}{h} \mathbf{N}_n - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \right) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_j^{(n,i)} \right] \right) = 0 \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{j+1} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_j - \left[\frac{\partial \mathbf{R}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)_j}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_j} \right]^{-1} \mathbf{R}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_j) \end{array} \right. \quad (47)$$

onde:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)_j}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_j} = \mathbf{N}_n^T \left(-\mathbf{C} \frac{1}{l_e} \mathbf{M} - \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}}_{\text{operador tangente}} \left(\frac{1}{h} \mathbf{N}_n - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \right) \right) \quad (48)$$

2.2.7. Matriz Tangente de Descontinuidades Fortes

O operador tangente de descontinuidades fortes, do modelo constitutivo equivalente é dado por:

$$\mathbf{C}_{tg} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\Omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (49)$$

considerando as equações (34) e (39), tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma}_\Omega = \mathbf{C} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) \quad (50)$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\Omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\Omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \frac{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (51)$$

onde:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\Omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega} = \mathbf{C} \quad (52)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{I} \quad (53)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega}{\partial [\![\mathbf{u}]\!]} = \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \quad (54)$$

e

$$\frac{\partial [\![\mathbf{u}]\!] }{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial [\![\mathbf{u}]\!] } \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (55)$$

Substituindo (52), (53), (54) e (55) em (51), tem-se que:

$$\mathbf{C}_{ig} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\Omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial [\![\mathbf{u}]\!] } \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (56)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial [\![\mathbf{u}]\!] } &= \mathbf{N}_n^T \left(-\mathbf{C} \frac{1}{l_e} \mathbf{M} - \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \left(\frac{1}{h} \mathbf{N}_n - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \right) \right) \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{N}_n^T \left(\mathbf{C} - \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

2.3. Algoritmo Global de Construção da Trajetória de Descontinuidade

Uma etapa importante na modelagem com descontinuidades fortes é a identificação do caminho por onde a descontinuidade se propaga. Neste sentido diversos algoritmos foram propostos com o objetivo de traçar o caminho de propagação da descontinuidade [39] [62] e [63].

Um algoritmo global de construção da trajetória de descontinuidade conforme apresentado em [64], [65], [66] e [67], será descrito a seguir. A ideia principal da

técnica é definir um campo vetorial, onde as iso-superfícies deste campo determinem a trajetória da descontinuidade e o gradiente deste campo seja calculado em função do estado de tensões do problema mecânico.

A partir do campo de tensões do problema, com base no critério de falha, é possível estabelecer um campo vetorial das direções normais às superfícies de falha existentes ou potenciais. Assim, para cada ponto material \mathbf{x} do domínio analisado, Ω , o critério de falha proporciona um vetor normal à superfície de falha $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = (n_x \ n_y \ n_z)^T$. Esse vetor pode variar com o tempo t da análise, em função de suas tensões locais, até que essas alcancem o critério de falha. A partir desse instante, a superfície de falha no ponto se consolida, mantendo sua orientação fixa durante o resto da análise.

A ideia básica é encontrar um campo escalar $\theta(\mathbf{x}, t)$ cujas superfícies de isovalores (curvas de nível) sejam as superfícies de falha. Assim as normais às essas superfícies de isovalores devem coincidir com os vetores normais à descontinuidade, \mathbf{n} .

Sejam \mathbf{s} e \mathbf{t} vetores normais a \mathbf{n} e normais entre si Figura 8(c). O gradiente do campo escalar, $\nabla\theta = \mathbf{n}$ pode ser posto da seguinte forma,

$$\mathbf{s} \cdot \nabla\theta = 0 \quad (58)$$

$$\mathbf{t} \cdot \nabla\theta = 0 \quad (59)$$

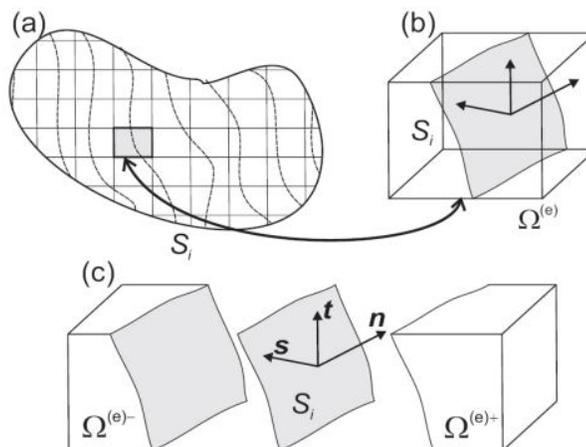
ou, de maneira mais condensada como:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\theta = 0 \quad (60)$$

onde

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \quad (61)$$

Figura 8 - Superfície de falha incorporada no elemento.



Fonte: Blanco [64].

É possível fazer uma analogia da equação (60) com uma equação de fluxo de Darcy e a matriz \mathbf{K} , equação (61), podendo ser tratada com um tensor do tipo de permeabilidade. Desta maneira pode ser implementado um problema pseudo hidráulico, onde os vetores de fluxo definem a direção da descontinuidade e o tensor de pseudo permeabilidades é calculado em função do estado de tensões do material.

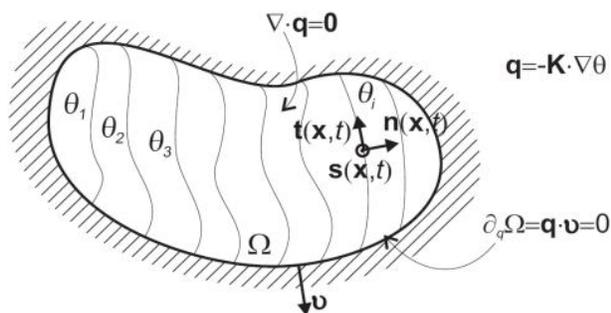
A solução numérica do campo de pseudopressões, θ , pode ser encontrada empregando-se a aproximação de elementos finitos tradicional. Para resolver este problema é preciso complementá-lo com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_\Gamma &= 0 \quad \text{em } \Gamma_q \\ \theta &= \bar{\theta} \quad \text{em } \Gamma_\theta \end{aligned} \quad (62)$$

onde \mathbf{n}_Γ é o vetor normal ao contorno do sólido $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_\theta$, e $\bar{\theta}$ representa os valores prescritos de θ no contorno.

A Figura 9 ilustra o problema de valores de contorno do tipo hidráulico, cuja incógnita é o campo escalar $\theta(\mathbf{x}, t)$.

Figura 9 - Problema de valores de contorno tipo hidráulico.



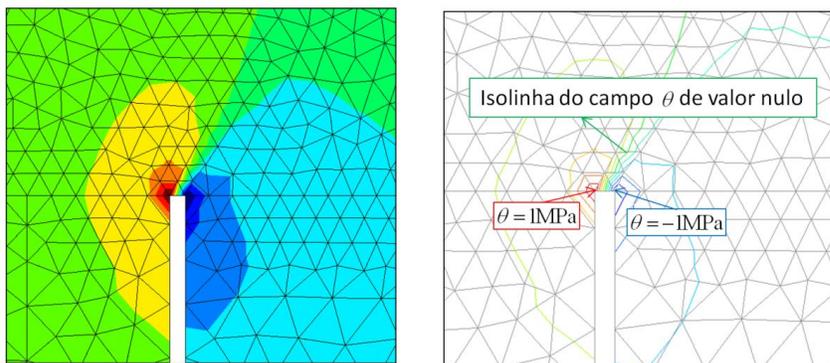
Fonte: Blanco [64].

Uma vez conhecido o campo escalar de *pseudo* pressões, θ , as superfícies de falha são construídas a partir dos elementos que alcançam o critério de falha, de acordo com o modelo constitutivo escolhido para representar o comportamento do material.

Esse algoritmo de construção de trajetória foi adaptado e implementado de maneira simplificada no CODE_BRIGHT, sendo tratado como um problema do tipo de fluxo de fluidos e resolvido de maneira desacoplada.

O campo escalar $\theta(\mathbf{x}, t)$ do problema é considerado como um campo do tipo pressão e a isolinha deste campo com valor nulo define a trajetória da descontinuidade, portanto, em uma análise são impostas como condições de contorno valores de θ que variam de -1 a 1 MPa de maneira que a isolinha nula exista no domínio, como ilustra a Figura 10.

Figura 10 - Distribuição e isolinhas do campo escalar.



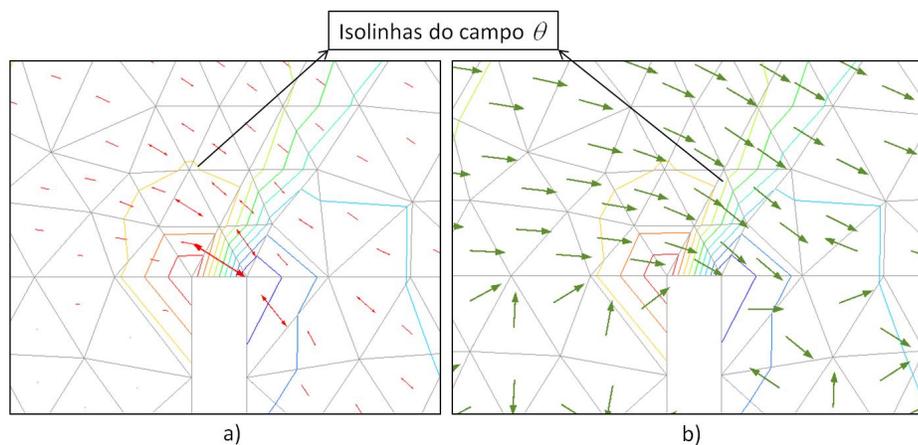
Fonte: a autora

Uma vez determinado o campo de pressões θ , calcula-se o fluxo tipo Darcy deste campo, de acordo com a equação (60), que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{q}_{crack} = -\mathbf{K}\nabla\theta \quad (63)$$

Estes vetores de fluxo determinam as normais à superfície de descontinuidade, como mostra a Figura 11, sendo \mathbf{K} obtido pela equação (61) e o gradiente do campo, $\nabla\theta$, calculado em função do estado de tensão do problema (Figura 11b), assumindo que a trajetória de propagação da fratura se dá na direção da máxima tensão de tração.

Figura 11 - Representação do tensor de tensões mostrando a direção da maior tensão de tração (a) Vetores de fluxo do campo; (b) Vetores de fluxo do campo de pseudopressão



Fonte: a autora

3. MODELO CONSTITUTIVO MECÂNICO

Modelos constitutivos são formulações matemáticas capazes de descrever o comportamento macroscópico de um meio ideal. Esses modelos resultam da aplicação de hipóteses simplificadoras sobre o comportamento do meio real. Portanto a seleção do modelo constitutivo a ser utilizado deve estar relacionada ao problema que se pretende resolver, uma vez que não seria trivial obter uma formulação única que permita alcançar a solução geral para o comportamento do material [68]. Neste capítulo será apresentado um modelo constitutivo adequado para representar o comportamento da fratura em meios contínuos.

3.1. Conceitos Básicos do Modelo de Dano

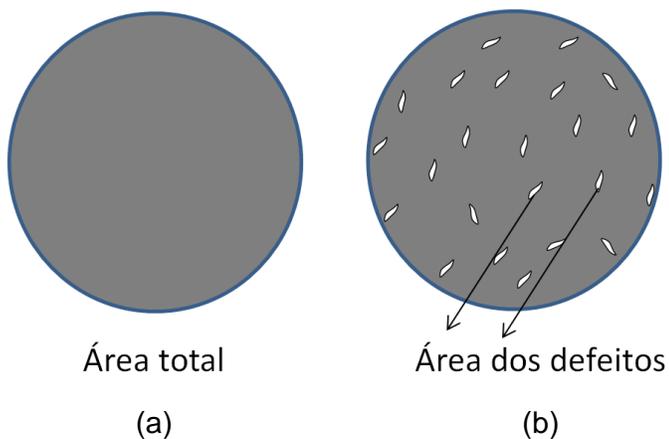
Na família de modelos constitutivos baseados na mecânica do dano contínuo, propostos por Simó & Ju [69], o dano se entende como uma degradação da rigidez do material. A mecânica do dano contínuo é baseada em processos termodinâmicos irreversíveis e foi formulada para descrever o mecanismo prévio à formação da macro fratura. O modelo supõe que a degradação do material é resultado do crescimento e interconexão das microfissuras existentes. Neste modelo foi introduzido o conceito de tensão efetiva de dano para descrever o comportamento do meio danificado.

A degradação do material é modelada representada por uma variável escalar, chamada variável de dano, d , definida como:

$$d = \frac{A_D}{A} \tag{64}$$

onde A é a área total de uma seção transversal e A_D é a área dos defeitos, como mostra a Figura 12.

Figura 12 - Seção transversal: (a) material intacto, (b) material degradado



Fonte: a autora

A área que efetivamente resiste aos esforços aplicados é chamada de área efetiva e definida como:

$$\bar{A} = A - A_d \quad (65)$$

e a variável de dano pode ser escrita como:

$$d = 1 - \frac{\bar{A}}{A} \quad (66)$$

sendo:

$$0 \leq d \leq 1 \begin{cases} d = 0 & \text{material intacto} & \rightarrow A_d = 0 \\ d = 1 & \text{material degradado} & \rightarrow A_d = A \end{cases} \quad (67)$$

Considerando um elemento unidimensional submetido a um carregamento uniaxial, como mostra a Figura 13, pode-se definir uma tensão aparente (nominal) σ associada à área total da seção transversal e uma tensão efetiva de dano, $\bar{\sigma}$, relacionada à área efetiva definida na equação (65) da seguinte maneira:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (68)$$

e

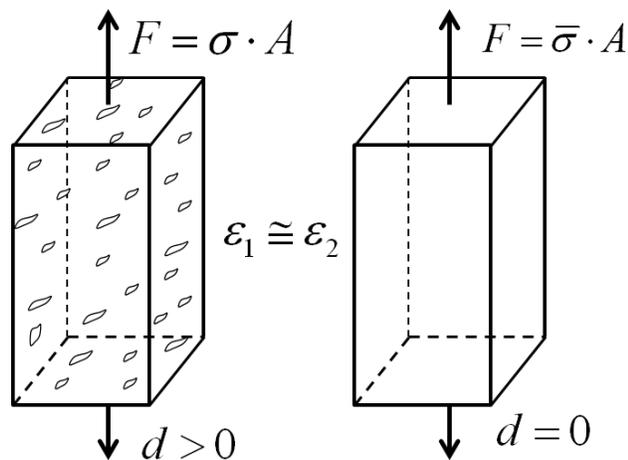
$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}} \quad (69)$$

Pode-se então deduzir a seguinte relação:

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{A}}{A} = 1 - d \rightarrow \sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (70)$$

onde, para o material intacto ($d=0$) a tensão nominal é igual à tensão efetiva e, quando o material se aproxima da degradação total ($d \approx 1$), a tensão nominal tende a zero.

Figura 13 - Elemento unidimensional submetido a um carregamento uniaxial F



Fonte: adaptado de [70].

Segundo o conceito de equivalência de deformações, proposto por [70], a deformação associada a um estado danificado submetido a uma tensão nominal é equivalente à deformação associada ao estado não danificado submetido a uma

tensão efetiva, como mostra a Figura 13. Essas deformações podem ser definidas como:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_D} \quad (71)$$

e

$$\varepsilon_2 = \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad (72)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material intacto e E_D é o módulo de elasticidade do material degradado. Igualando as duas deformações dadas pelas equações (71) e (72), pode-se deduzir que:

$$\frac{\sigma}{E_D} = \frac{\bar{\sigma}}{E} \rightarrow E_D = E \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \rightarrow E_D = (1-d)E \quad (73)$$

Chega-se, finalmente, à relação constitutiva total:

$$\begin{aligned} \sigma = E_D \varepsilon &\rightarrow \sigma = (1-d) \underbrace{E \varepsilon}_{\bar{\sigma}} \\ &\sigma = (1-d) \bar{\sigma} \end{aligned} \quad (74)$$

onde

$$\bar{\sigma} = E \varepsilon \quad (75)$$

é a tensão efetiva, sempre elástica linear.

Outro conceito importante que precisa ser definido para o modelo de dano é o critério de degradação do material. Este critério define o domínio elástico, região no espaço das tensões onde o comportamento do material é elástico linear, que elástico pode ser estabelecido pela seguinte função:

$$\phi(\sigma) = \tau(\sigma) - q \leq 0 \quad (76)$$

onde $\tau(\sigma)$ é uma tensão equivalente que define a forma do domínio elástico e q é uma variável interna do modelo que define o tamanho do domínio elástico. Pode-se escrever o critério de degradação no espaço das tensões efetiva da seguinte forma:

$$\frac{\phi(\sigma)}{1-d} = \frac{\tau(\sigma)}{1-d} - \frac{q}{1-d} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \phi(\bar{\sigma}) = \tau(\bar{\sigma}) - r \leq 0 \quad (77)$$

onde

$$r = \frac{q}{1-d} \quad (78)$$

e r é uma variável interna que define o tamanho do domínio elástico no espaço das tensões efetivas. A variável de dano pode ser escrita em função das variáveis internas q e r , da seguinte maneira:

$$d = 1 - \frac{q}{r} \quad (79)$$

Pode-se definir, para o modelo de dano, as condições de carregamento e descarregamento de Kuhn-Tucker da seguinte maneira:

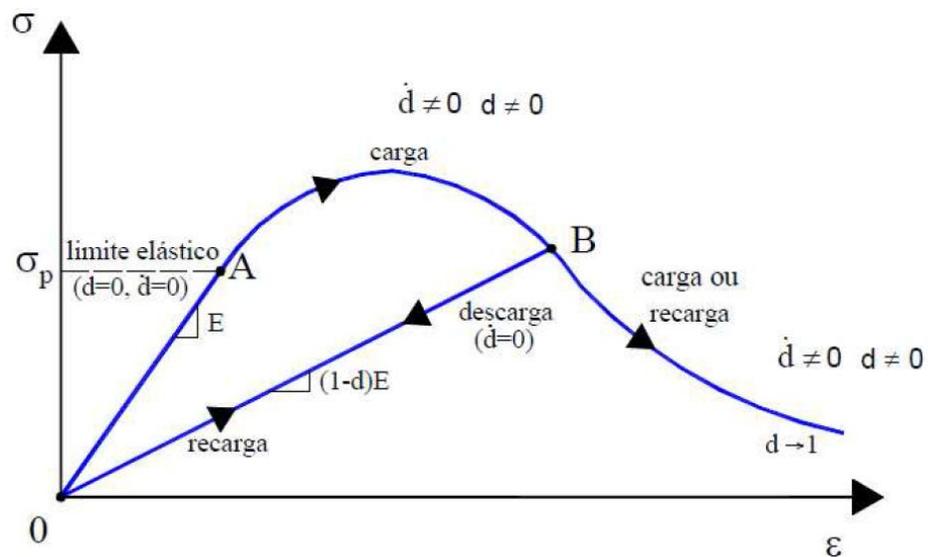
$$\begin{aligned} \dot{d} &\geq 0 \\ \phi(\bar{\sigma}) &\leq 0 \\ \dot{d}\phi(\bar{\sigma}) &= 0 \quad \rightarrow \quad \text{condição de consistência} \end{aligned} \quad (80)$$

onde,

$$\begin{aligned}
 &\text{Se } \phi(\bar{\sigma}) < 0 \rightarrow \dot{d} = 0 \rightarrow \text{regime elástico} \\
 &\text{Se } \phi(\bar{\sigma}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{\tau}(\bar{\sigma}) < 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{d} = 0 \\ \dot{r} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{descarregamento elástico} \\ \dot{\tau}(\bar{\sigma}) > 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{d} > 0 \\ \dot{r} = \dot{\tau} > 0 \end{cases} \rightarrow \text{carregamento ou recarregamento} \end{cases} \quad (81)
 \end{aligned}$$

A Figura 14 ilustra as etapas de carregamento e descarregamento do material. O trecho \overline{OA} é o domínio elástico, onde a variável de dano, d , não evolui. No trecho \overline{AB} ocorre a degradação do material sob carregamento (processo irreversível) e a variável de dano evolui. Já os trechos \overline{BO} e \overline{OB} correspondem aos processos elásticos de descarregamento e recarregamento respectivamente, onde também não há evolução da variável de dano.

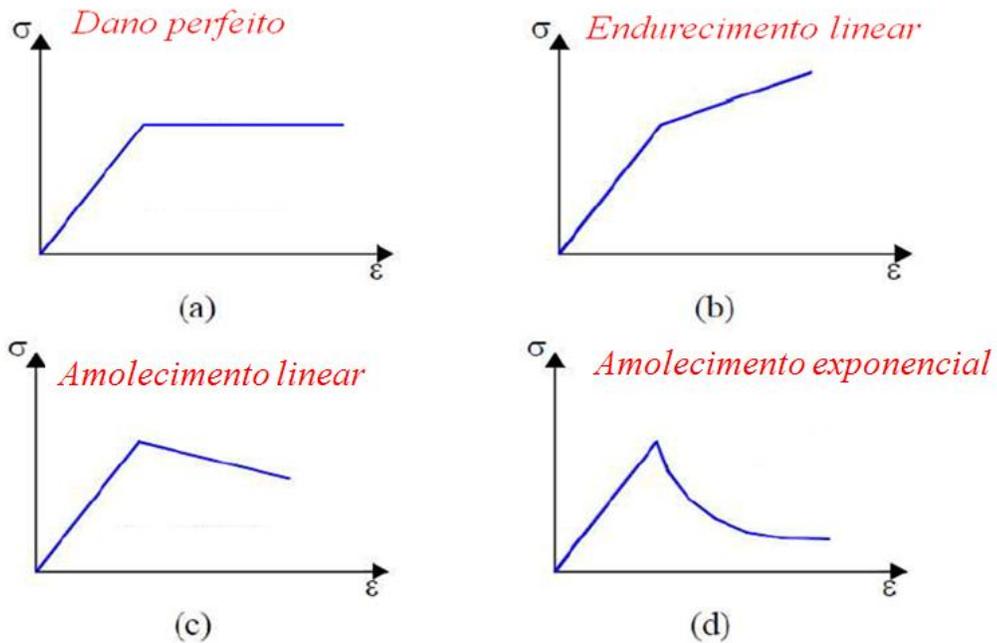
Figura 14 - Curva tensão-deformação, evolução da variável de dano.



Fonte: adaptado de [71].

Os materiais podem se comportar de maneira muito distinta após o limite de elasticidade. Definir o comportamento pós-ruptura do material é uma etapa importante na modelagem dos problemas de fratura. A Figura 15 mostra diferentes tipos de comportamento pós-ruptura.

Figura 15 - Curva tensão-deformação para diferentes comportamentos pós-ruptura



Fonte: adaptado de [71].

Para o modelo de dano, as leis de endurecimento ou amolecimento do material podem ser escritas em função das variáveis internas q e r , da seguinte maneira, para o caso de endurecimento ou amolecimento linear (Figura 15 (b) e (c)):

$$q(r) = q_0 + H(r - q_0) \quad (82)$$

onde os valores iniciais $q_0 = r_0$ e H é um parâmetro de endurecimento ou amolecimento que vale:

$$\begin{cases} H > 0 & \rightarrow \text{endurecimento} \\ H < 0 & \rightarrow \text{amolecimento} \end{cases} \quad (83)$$

Para o caso de amolecimento exponencial

$$q(r) = q_0 e^{A\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} \quad (84)$$

onde A é um parâmetro de amolecimento exponencial.

3.2. Modelo Constitutivo de Dano à tração

Oliver et al. [72] introduziram um modelo de dano que trata de maneira diferente o material quando submetido a um estado de tração ou a um estado de compressão. A formulação descrita a seguir foi apresentada em [73] e trata o material como tendo comportamento elástico quando em estado compressivo e permite que o material apenas se degrade em estados de tração, depois de atingido o critério de degradação.

A tensão efetiva de dano é dada por:

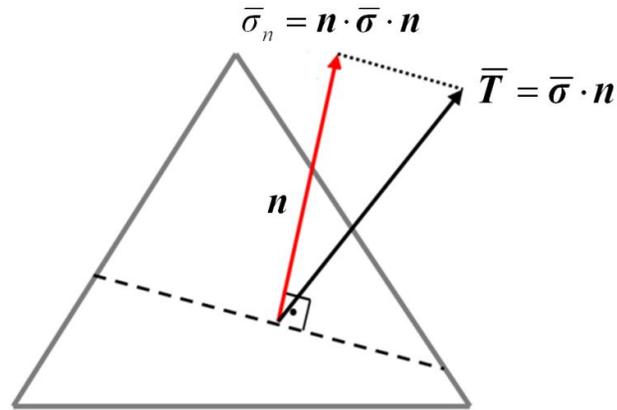
$$\bar{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (85)$$

onde \mathbf{C} é o tensor constitutivo elástico. A lei constitutiva para este modelo pode ser expressa como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = (1-d)\bar{\boldsymbol{\sigma}} & \text{se } \bar{\sigma}_n > 0 & \text{estado de tração} \\ \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} & \text{se } \bar{\sigma}_n \leq 0 & \text{estado de compressão} \end{cases} \quad (86)$$

onde $\bar{\sigma}_n$ é a componente normal do vetor de tensões $\bar{\mathbf{T}}$, que, por sua vez, é a projeção do tensor de tensões na direção normal à superfície da descontinuidade que atravessa o elemento, como mostra a Figura 16.

Figura 16 - Projeção do vetor de tensões na direção normal ao elemento com descontinuidade embebida.



Fonte: a autora

O critério de dano, que define o domínio elástico, é dado da seguinte maneira:

$$\phi = \bar{\tau}(\bar{\sigma}) - q(r) \leq 0 \quad (87)$$

onde $\bar{\tau}$ é a tensão equivalente que define o tamanho do domínio elástico. Para este modelo a tensão equivalente é a componente normal $\bar{\sigma}_n$. O critério de dano (ou critério de degradação) pode então ser expresso da seguinte forma:

$$\bar{\tau}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_n \quad (88)$$

$$\phi = \bar{\sigma}_n - q(r) \leq 0 \quad (89)$$

O critério de dano também pode ser descrito no espaço das tensões efetivas, utilizando a equação (78), da seguinte forma:

$$\bar{\phi} = \bar{\sigma}_n - r \leq 0 \quad (90)$$

e a lei de evolução da variável de dano pode ser expressa como:

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (91)$$

A variável r controla o tamanho do domínio elástico no espaço das tensões efetivas. A lei de evolução da variável r é dada por:

$$r = \text{Max}[\bar{\sigma}_n, r_0] \quad (92)$$

De acordo com a equação (92), o valor de r assume o valor máximo que a tensão efetiva de tração atinge durante o processo de carregamento, iniciando de um valor inicial r_0 , igual à resistência à tração do material.

A evolução da variável do tipo tensão, q , pode ser expressa por uma lei de amolecimento exponencial, da seguinte forma:

$$q(r) = f_t e^{\frac{f_t^2}{G_f E} h \left(1 - \frac{r}{f_t}\right)} \quad (93)$$

onde E é o módulo de elasticidade, f_t é a resistência à tração, G_f é a energia de fratura do material e h é a espessura da banda de localização das deformações.

A consideração da energia de fratura e da banda de deformação na lei de amolecimento do modelo constitutivo tem como objetivo resolver o problema da dependência do tamanho dos elementos finitos na resposta obtida. Uma vez que a energia total consumida no interior da banda de localização deve ser a mesma, independente do tamanho dos elementos [74]. No contexto da mecânica da fratura, a região de localização de deformações corresponde à zona de processo de fraturamento e a energia consumida corresponde à energia de fratura [51]. A Tabela 1 resume as equações constitutivas do modelo de dano à tração.

Tabela 1- Resumo das equações constitutivas do modelo de dano à tração

Relação Constitutiva	$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma}, \text{ se } \bar{\sigma}_n > 0$ $\sigma = \bar{\sigma}, \text{ se } \bar{\sigma}_n \leq 0$
Tensões efetivas	$\bar{\sigma} = \mathbf{C} : \varepsilon$
Tensão equivalente	$\bar{\tau}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_n$
Critério de dano	$\phi = \bar{\tau} - q(r) \leq 0$
Evolução da variável r	$r = \text{Max}[\bar{\sigma}_n, f_t]$
Evolução da variável de dano	$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r}$
Lei de amolecimento	$q(r) = f_t \cdot e^{\frac{f_t^2}{G_f E} h \left(1 - \frac{r}{f_t}\right)}$

3.2.1. Algoritmo de Integração Implícito-Explícito (IMPL-EX)

Na simulação de problemas muito complexos, com forte acoplamento hidromecânico e com descontinuidades fortes incorporadas, os algoritmos totalmente implícitos, que apresentam uma alta não linearidade, podem ser de difícil convergência. Nesse contexto, Oliver *et al.* [75] propuseram um algoritmo de integração de tensões, a nível de pontos de Gauss, bastante robusto que é uma simplificação do algoritmo implícito, com uma projeção explícita da variável de dano. O objetivo é diminuir a não linearidade do algoritmo de integração.

A principal característica deste tipo de integração é a garantia de convergência do modelo, mesmo que atrelada a uma violação na condição de consistência. Uma possível consequência dessa simplificação é a perda da precisão ou a ocorrência de oscilações nos resultados. Esses problemas podem ser minimizados com a adoção de incrementos de tempo menores.

Outra vantagem do método é o custo computacional, quando comparado ao método puramente implícito. Apesar de requerer incrementos de tempo pequenos, garante a convergência em cada passo de tempo com, no máximo, duas iterações. Esse benefício é ainda maior para problemas com muitos graus de liberdade. A

estabilidade e robustez propiciadas pelo método são fundamentais para a simulação de propagação de múltiplas fissuras em meios previamente fraturados.

O algoritmo IMPL-EX para o modelo de dano à tração trata da atualização da variável interna, r , que define o limite de degradação, e é utilizada para calcular a variável de dano atual. Dessa forma, o cálculo da variável de dano atual no passo de tempo atual ($j + 1$), é definido como:

$$d(\tilde{r}_{j+1}) = 1 - \frac{q(\tilde{r}_{j+1})}{\tilde{r}_{j+1}} \quad (94)$$

onde:

$$\tilde{r}_{j+1} = r_j + \Delta r_j \quad (95)$$

e,

$$\Delta r_j = r_j - r_{j-1} \quad (96)$$

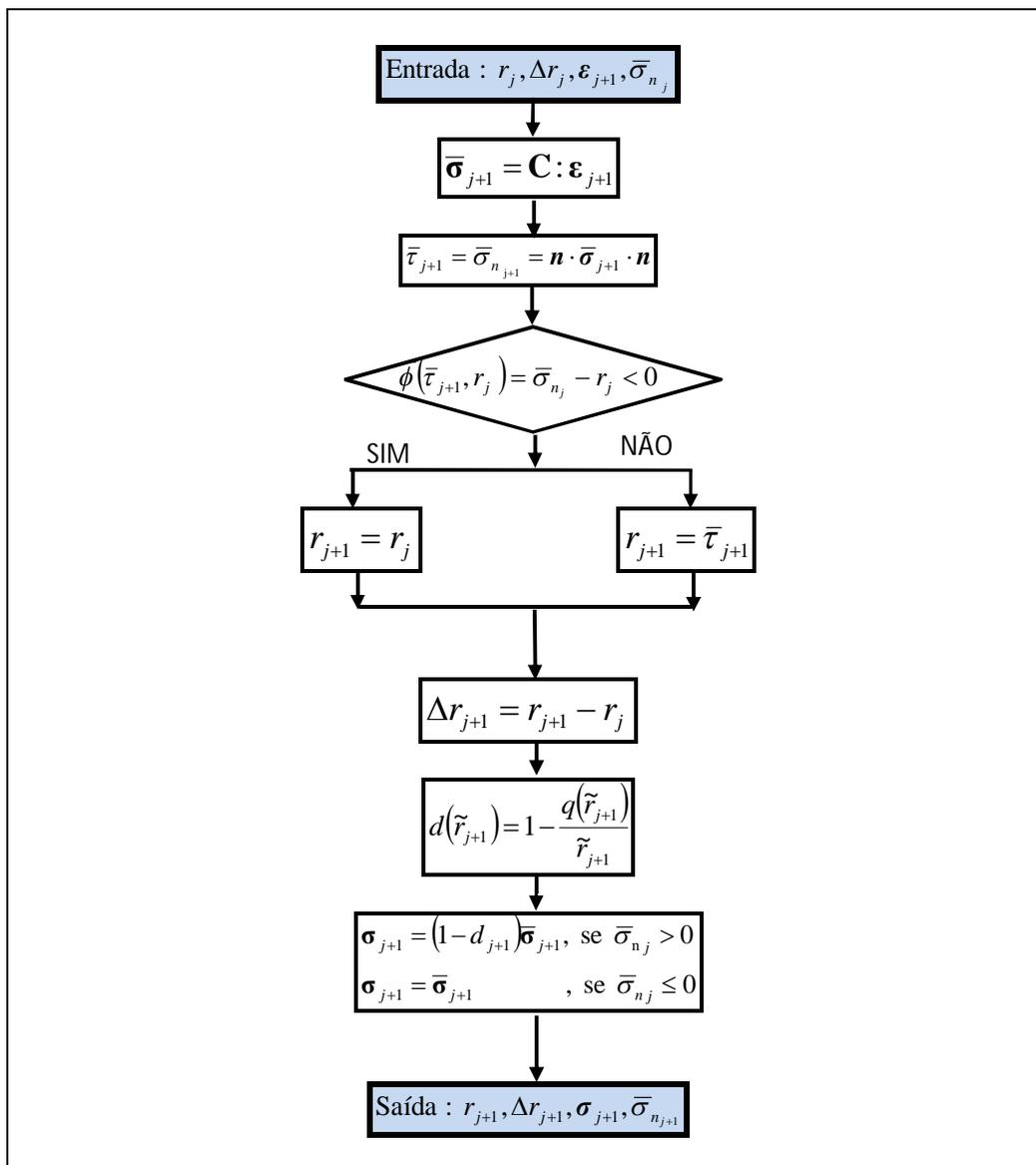
A variável \tilde{r}_{j+1} , utilizada para calcular a variável de dano, é uma aproximação da função r_{j+1} , baseada em seus valores calculados em passos de tempo anteriores. Sua utilização garante convergência na segunda iteração de cada passo de tempo, ao custo da necessidade de um estudo de convergência dos resultados. Dessa maneira, a variável de dano no passo atual torna-se constante durante as iterações de cada incremento de tempo.

A matriz constitutiva tangente, C_{tg} , para o modelo de dano proposto, considerando o uso do IMPL-EX, é então definida como:

$$\begin{aligned} C_{tg} &= \frac{\sigma_{j+1}}{\epsilon_{j+1}} = (1 - d)C, \text{ se } \bar{\sigma}_n > 0 \\ C_{tg} &= \frac{\sigma_{j+1}}{\epsilon_{j+1}} = C, \text{ se } \bar{\sigma}_n \leq 0 \end{aligned} \quad (97)$$

A Figura 17 apresenta o algoritmo de integração de tensões, para o modelo de dano à tração, como está implementado no código em elementos finitos CODE_BRIGHT.

Figura 17 - Algoritmo IMPL-EX de integração de tensões para o modelo de dano à tração



Fonte: adaptado de [76].

3.2.2. Algoritmo de Controle do Passo de Tempo

Uma vez que o algoritmo IMPL-EX permite a violação da condição de consistência, como mencionado anteriormente, os resultados podem perder precisão ou apresentar oscilações espúrias se utilizados incrementos de tempo muito grandes. Entretanto, a diminuição excessiva desses incrementos pode retardar a análise de maneira desnecessária. Para garantir a robustez do algoritmo e minimizar as oscilações, foi implementado um controle automático do passo de tempo que, com base na taxa de degradação do material do passo de tempo atual, calcula o tamanho do próximo passo de tempo.

A degradação do material é definida pela lei de endurecimento/amolecimento, $q(r)$. Assim, a taxa de degradação do material pode ser medida pela derivada dq/dr . Em um passo de tempo, há duas maneiras de se aproximar esta derivada (Figura 18), são elas:

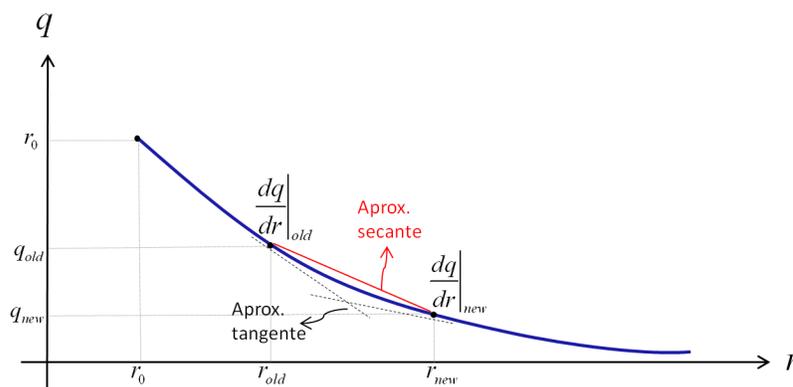
- (i) A aproximação tangente:

$$\left. \frac{dq}{dr} \right|_{tg} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{dq}{dr} \right|_{new} + \left. \frac{dq}{dr} \right|_{old} \right) \quad (98)$$

- (ii) A aproximação secante:

$$\left. \frac{dq}{dr} \right|_{sec} = \frac{q_{new} - q_{old}}{r_{new} - r_{old}} \quad (99)$$

Figura 18 - Curva da evolução da variável q em função de r .



Fonte: a autora

Assume-se que a diferença entre essas duas aproximações é o erro associado ao passo de tempo atual (Δt) e calcula-se um fator, que relaciona o erro com uma tolerância previamente informada.

$$Erro = \frac{\left. \frac{dq}{dr} \right|_{sec} - \left. \frac{dq}{dr} \right|_{tg}}{\left. \frac{dq}{dr} \right|_{tg}} \quad (100)$$

$$Fator = \sqrt[4]{\frac{Tol}{Erro}} \quad (101)$$

De acordo com a equação (101), quanto maior o erro, menor o fator calculado e o tamanho do próximo passo de tempo será reduzido, segundo a seguinte expressão:

$$\Delta t^{new} = \Delta t \cdot Fator \quad (102)$$

$$\text{Onde } \begin{cases} \text{Se Fator} > 1.4 \rightarrow \text{Fator} = 1.4 \\ \text{Se Fator} < 0.7 \rightarrow \text{Fator} = 0.7 \end{cases}$$

O tamanho do passo de tempo é também limitado entre Δt_{min} e Δt_{max} informados previamente.

3.3. Exemplos de Aplicação

Com o objetivo de validar a formulação apresentada, foram realizadas análises numéricas de problemas básicos da engenharia estrutural, que envolvem a formação de fratura, e seus resultados foram comparados com os relatados na literatura. Todas as análises são bidimensionais em estado de deformação plana e o modelo constitutivo adotado é o modelo de dano à tração com critério de falha segundo a equação (90). Além disso, é admitido que a fratura se propaga na direção de máxima tensão de tração.

3.3.1. Ensaio Brasileiro

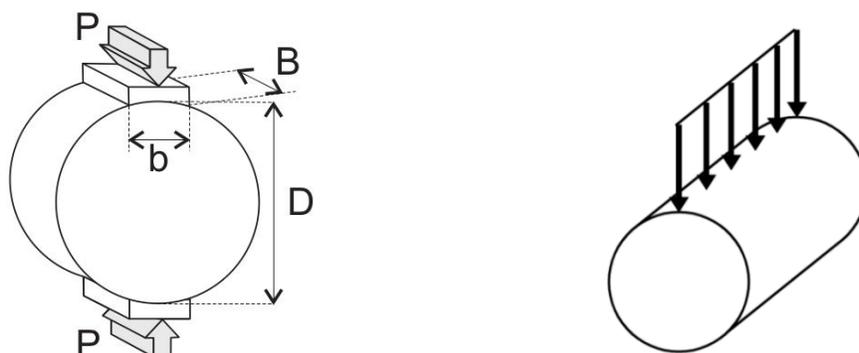
O ensaio de compressão diametral é frequentemente usado para obter, de maneira indireta, a resistência à tração do concreto, uma vez que os ensaios de tração direta são de difícil execução [77]. Neste ensaio um cilindro de concreto é disposto horizontalmente e submetido a um carregamento de compressão em sua lateral, como mostra a Figura 19.

A resistência à tração do material (f_t) pode ser calculada pela expressão [78]:

$$f_t = \frac{2P}{\pi DL} \quad (103)$$

onde P é a força máxima atingida durante o ensaio, D é o diâmetro e L é o comprimento do corpo de prova.

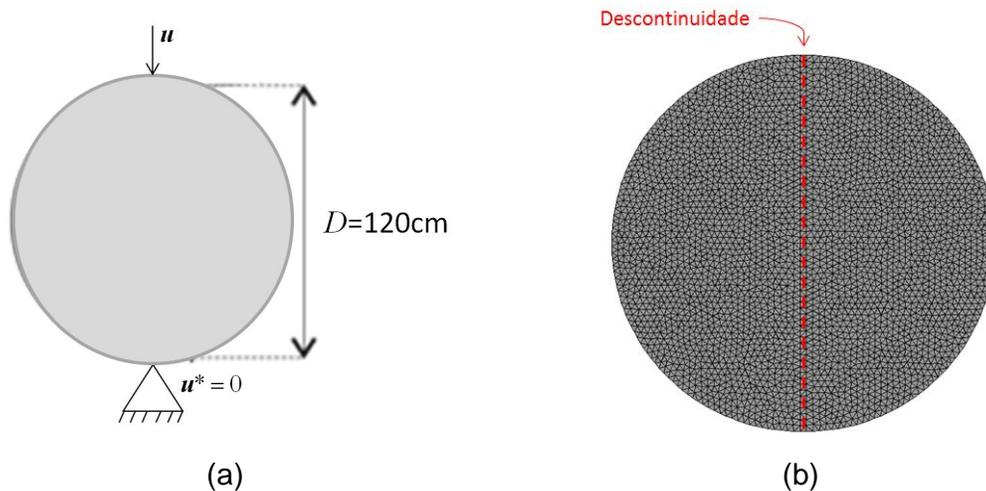
Figura 19 - Ensaio de compressão diametral.



Fonte: a autora

Na análise numérica realizada, uma vez conhecida a resistência à tração do material, foi possível verificar a carga de ruptura dada pela equação (103). A geometria e condições de contorno da simulação são mostradas na Figura 20(a). A malha utilizada na simulação, composta de 3166 nós e 6142 elementos, é apresentada na Figura 20(b), que também mostra a posição onde a superfície de descontinuidade foi imposta. Os parâmetros adotados para o material estão listados na Tabela 2.

Figura 20 – (a) Geometria e condições de contorno do problema, (b) malha de elementos finitos utilizada na simulação.



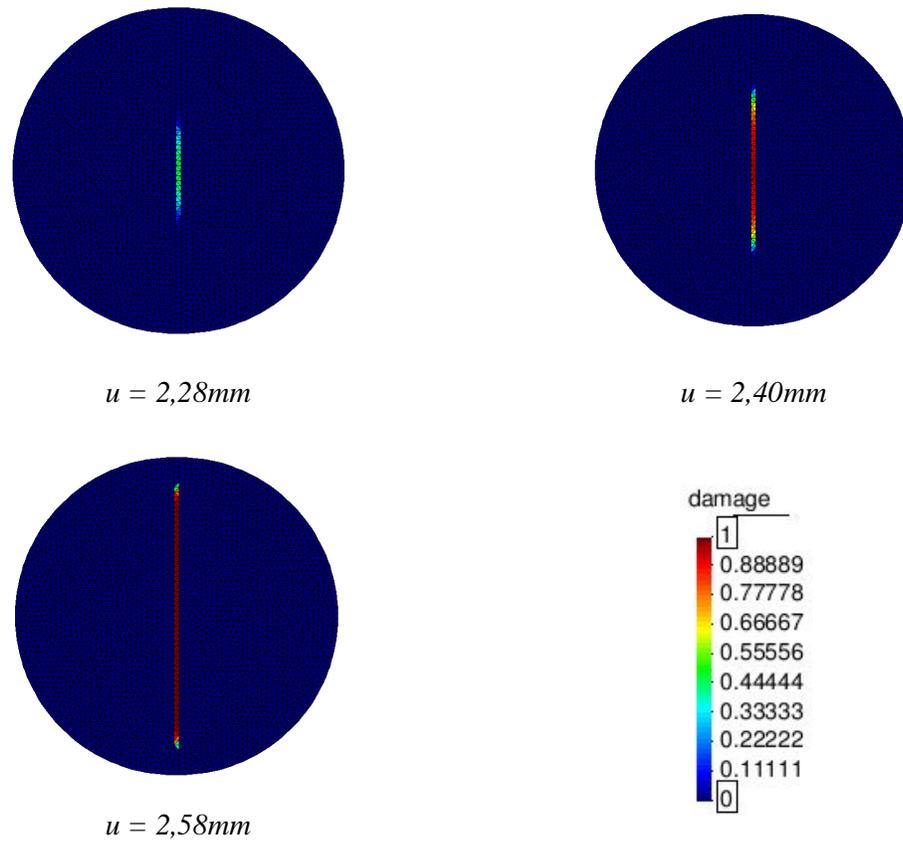
Fonte: a autora

Tabela 2 - Parâmetros adotados para o material.

Parâmetros	Valores
Energia de fratura (G_f)	100 N/m
Resistência à tração (f_t)	10 MPa
Módulo de elasticidade (E)	3.24×10^4 MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,20

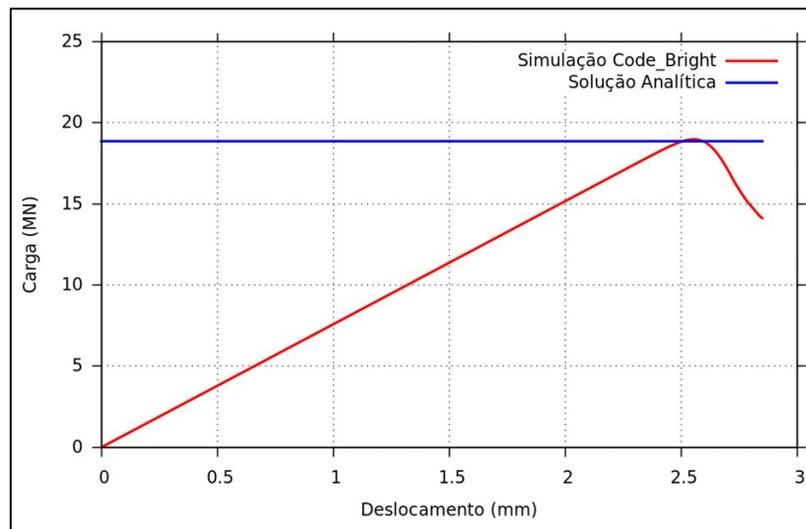
A Figura 21 mostra a evolução da variável de dano na simulação, descrevendo a formação da fratura mediante a perda da resistência do material na banda de localização da descontinuidade. A Figura 22 mostra a curva estrutural carga-deslocamento, onde é possível observar que a carga de ruptura foi corretamente calculada pela análise numérica, quando comparada à solução analítica.

Figura 21- Evolução da variável de dano.



Fonte: a autora

Figura 22 - Curva carga-deslocamento para o ensaio brasileiro

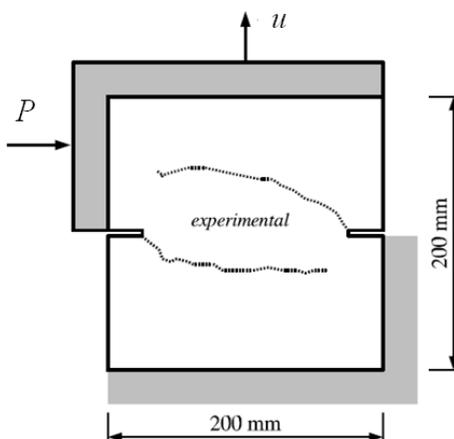


Fonte: a autora

3.3.2 Painel com Dois Entalhes

A seguinte análise numérica tenta reproduzir os resultados obtidos experimentalmente por Nooru-Mohamed [79] em painéis quadrados de concreto com dois entalhes laterais, como mostra a Figura 23. Nesse ensaio, o painel é submetido primeiramente a um carregamento horizontal, $P=10\text{ kN}$, e então a um deslocamento vertical, u , mantendo-se a carga horizontal constante. A geometria e as condições de contorno do ensaio estão esquematizadas na Figura 23 e os parâmetros do material estão listados na Tabela 3. Para a simulação numérica foi utilizada uma malha de elementos finitos com 1898 nós e 3620 elementos, apresentada na Figura 24.

Figura 23 - Geometria e condições de contorno do problema.

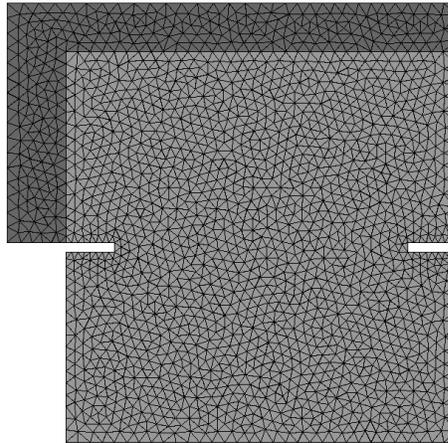


Fonte: [51].

Tabela 3 - Parâmetros adotados para o material.

Parâmetros	Valores
Energia de fratura (G_f)	100 N/m
Resistência à tração (f_t)	2,5 MPa
Módulo de elasticidade (E)	$3,2 \times 10^4$ MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,18

Figura 24 - Malha de elementos finitos.



Fonte: a autora

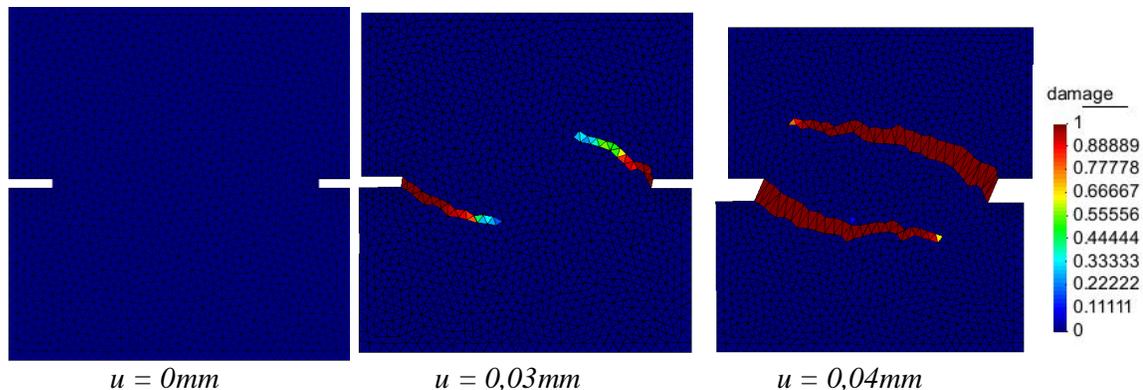
Nos ensaios originaram-se duas fraturas curvas independentes, cada fratura iniciando a partir dos entalhes, caracterizando um problema de múltiplas fissuras. Para resolver o problema da construção das trajetórias de discontinuidades, via algoritmo de global (seção 2.3.1), foram impostas condições de contorno para o campo θ de maneira que as isolinhas nulas deste campo ocorressem nos dois entalhes da placa, região onde seria possível a propagação de fraturas, como mostra a Figura 25.

Figura 25 - Isolinhas do campo escalar θ .

Fonte: a autora

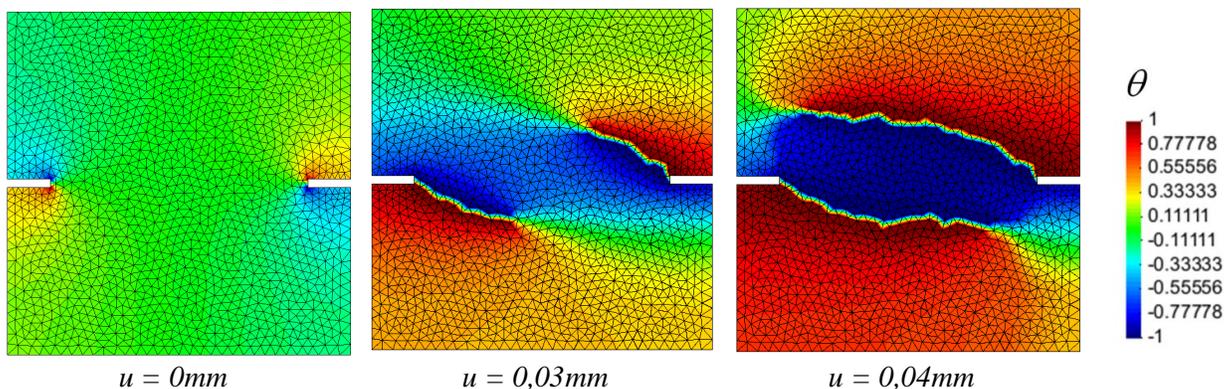
A Figura 26 mostra a evolução da variável de dano com a malha deformada. A situação de completa degradação do material (variável de dano $d = 1$) corresponde à formação da descontinuidade. Na Figura 27 pode ser observado o comportamento do campo θ durante o fraturamento.

Figura 26 - Evolução da variável de dano com a malha deformada (fator de escala x200).



Fonte: a autora

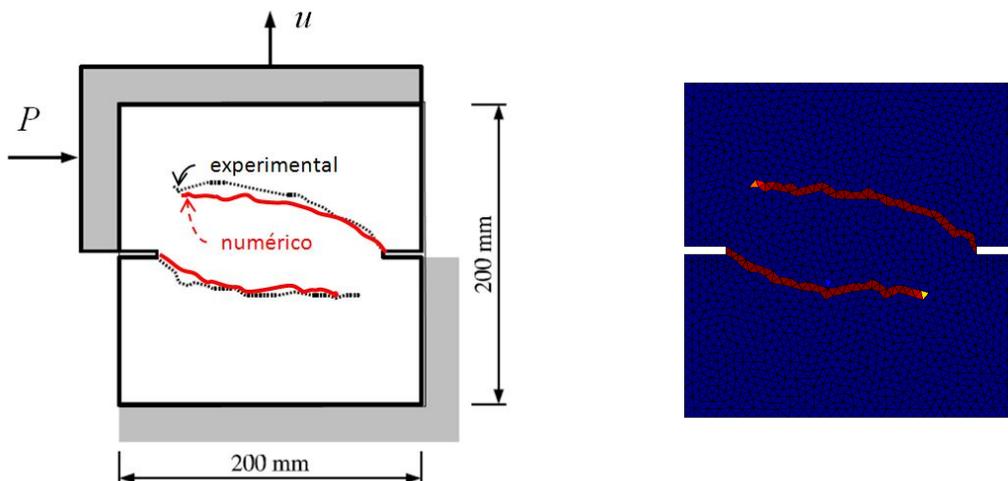
Figura 27 - Evolução do campo θ , cujo gradiente define a direção de propagação da fratura.



Fonte: a autora

A Figura 28 apresenta as trajetórias de descontinuidades obtidas pela simulação em comparação com as obtidas experimentalmente, onde é possível observar que o algoritmo global adotado foi capaz de traçar a trajetórias da fratura de maneira muito coerente em relação às fraturas experimentais.

Figura 28 - Posição das fissuras obtidas experimentalmente e numericamente.

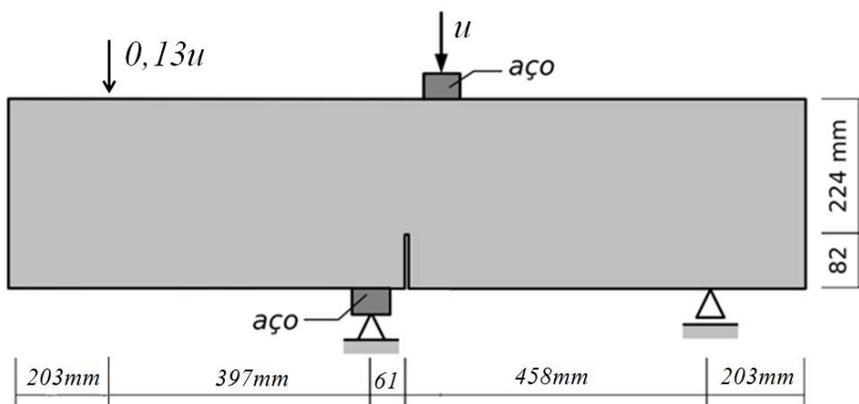


Fonte: a autora

3.3.3 Ensaio de Flexão em Viga de Concreto com Entalhe

Uma viga de concreto submetida à flexão foi simulada numericamente. Nessa análise, que foi baseada no modelo apresentado por Manzoli [51], uma viga de concreto é submetida a um deslocamento vertical conforme ilustrado na Figura 29, que também mostra a geometria e condições de contorno do problema. Os parâmetros adotados para a simulação estão listados na Tabela 4. Foi utilizada uma malha de elementos finitos com 4244 nós e 8288 elementos, mostrada na Figura 30.

Figura 29 - Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em viga de concreto.

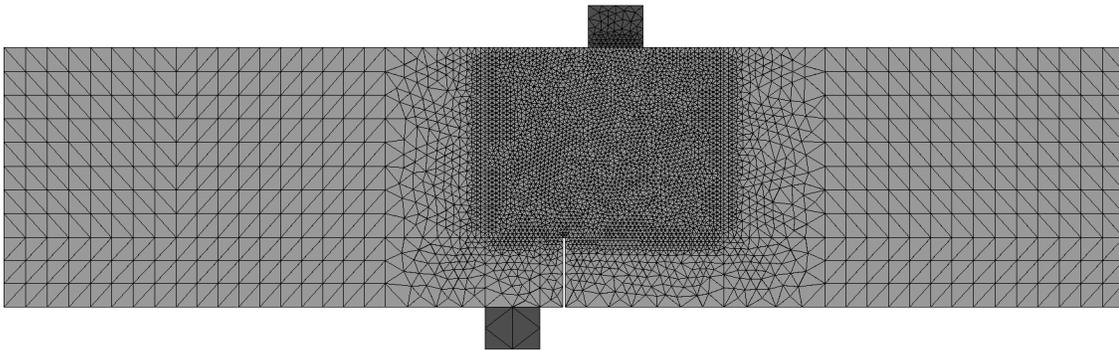


Fonte: adaptado de [51].

Tabela 4 - Parâmetros adotados para o concreto.

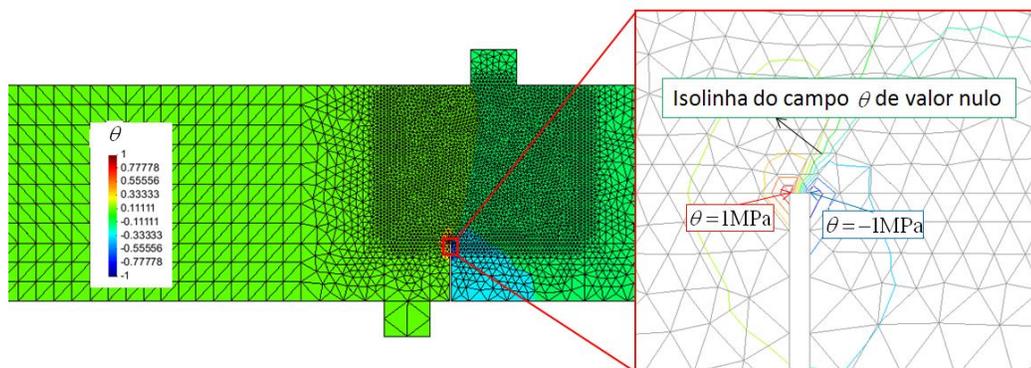
Parâmetros	Valores
Energia de fratura (G_f)	100 N/m
Resistência à tração (f_t)	2,8 MPa
Módulo de elasticidade (E)	$2,88 \times 10^4$ MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,18

Figura 30 - Malha de elementos finitos.



Fonte: a autora

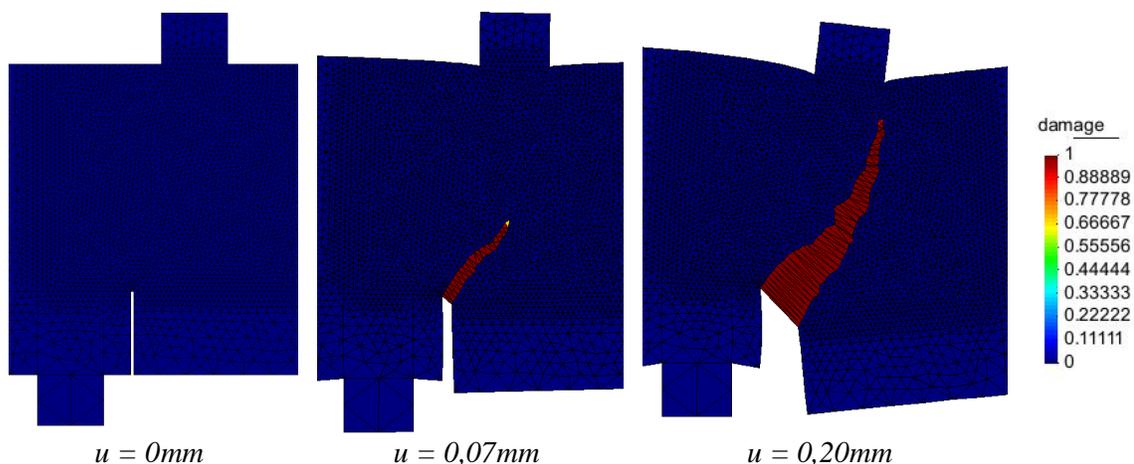
Para identificar a trajetória da propagação da fratura foi adotado o algoritmo global descrito na seção 2.3.1, as condições de contorno do campo θ são impostas de maneira que isolinha nula deste campo ocorra a partir do entalhe da viga, como mostra a Figura 31.

Figura 31 - Campo escalar θ .

Fonte: a autora

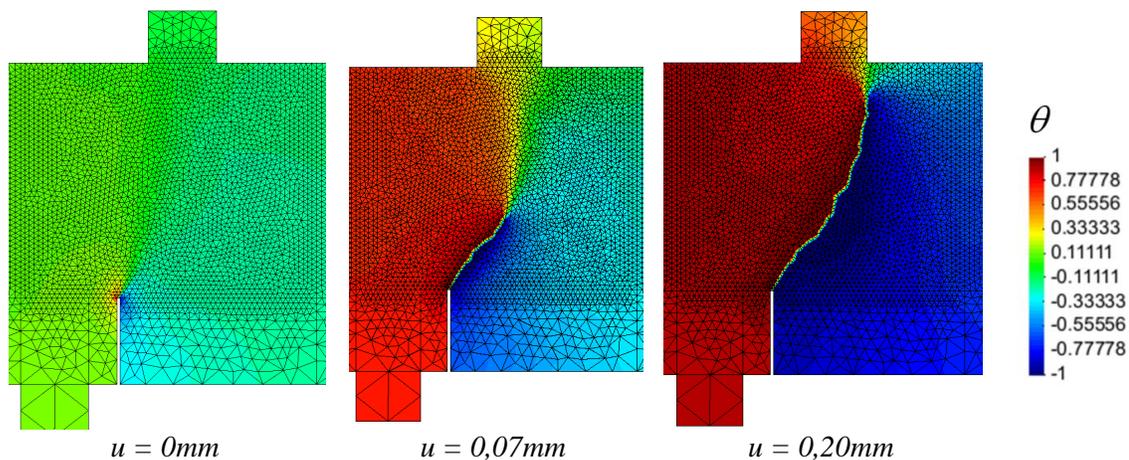
À medida que o deslocamento é aplicado o estado de tensões na viga se altera e, conseqüentemente, o gradiente do campo θ muda de direção. Esta direção, que define a posição da descontinuidade dentro do elemento, se torna fixa nos elementos que atingem o critério de falha. Portanto, a normal à descontinuidade de um elemento já danificado não se altera durante a análise. Isto pode ser observado nas Figuras 32 e 33 que mostram, respectivamente, a evolução da variável de dano com a malha deformada e o campo θ em diferentes instantes da simulação.

Figura 32 - Evolução da variável de dano com a malha deformada (fator de escala x200).



Fonte: a autora

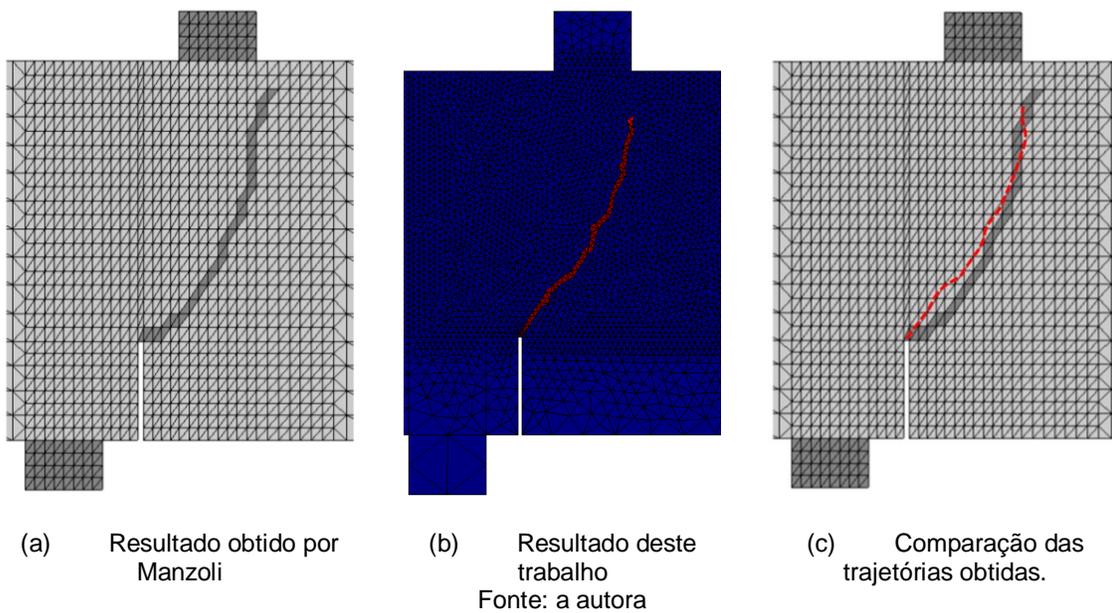
Figura 33 - Evolução do campo θ , cujo gradiente define a direção de propagação da fratura.



Fonte: a autora

A Figura 34 mostra a comparação entre as trajetórias de fratura obtidas pela análise do presente trabalho e por Manzoli [51]. Pode-se observar uma grande similaridade entre as trajetórias encontradas e concluir que o algoritmo implementado é capaz de identificar de maneira satisfatória o caminho de propagação da fratura.

Figura 34 – Comparação entre trajetórias de descontinuidade obtidas.



4 FLUXO EM MEIOS POROSOS COM DESCONTINUIDADES

Neste capítulo será apresentado à formulação para o problema de fluxo em meios porosos com descontinuidades de dois tipos. Primeiramente será tratado o problema de descontinuidades com permeabilidade menor do que o meio, como ocorre nos casos de reservatórios de petróleo compartimentados por falhas selantes. Depois será descrito o caso do fluxo em meios fraturados, situação onde a descontinuidade possui uma permeabilidade maior que a da rocha. Ao final serão apresentados alguns exemplo de aplicações.

4.1 Equações Básicas do Problema de Fluxo

O fluxo de fluido em um meio poroso é regido pela equação da continuidade e pela lei de Darcy [80]. Considerando o meio rígido, saturado e sem efeito gravitacional, o balanço de massas para a fase fluida é dado por:

$$\phi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q}) = 0 \quad (104)$$

onde ϕ é a porosidade do meio, ρ_f é a densidade do fluido e \mathbf{q} é o fluxo de Darcy, dado por:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \nabla p \quad (105)$$

onde ∇p é o gradiente da pressão de fluido e \mathbf{K} é o tensor de permeabilidade, que pode ser expresso como:

$$\mathbf{K} = \frac{k}{\mu} \quad (106)$$

onde μ é a viscosidade do fluido e k é a permeabilidade intrínseca do meio, que depende apenas da matriz sólida.

A densidade do fluido se relaciona com a pressão de acordo com a seguinte expressão:

$$\rho_f = \rho_{f_0} e^{\beta(p-p_0)} \quad (107)$$

onde, ρ_{f_0} é a densidade de referência, β é a compressibilidade do fluido, p é a pressão e p_0 é a pressão de referência. No presente trabalho são adotados os valores mostrados na Tabela 5 para estes parâmetros.

Tabela 5 - Propriedades do fluido.

Propriedades	Valores
Densidade de referência (ρ_{f_0})	1002,6 kg/m ³
Compressibilidade (β)	4,5x10 ⁻⁴ MPa ⁻¹
Pressão de referência (p_0)	0,1 MPa

4.2 Descontinuidades Fortes no Campo de Pressão

Em uma formação rochosa, a presença de uma barreira ao fluxo, como por exemplo, uma falha selante, que é uma região de baixa permeabilidade, impõe uma descontinuidade no campo de pressões. Nestes casos é possível observar o salto da pressão na região da descontinuidade. Para tratar esse campo de pressão descontínuo foi adotada uma abordagem similar à aproximação contínua de descontinuidades fortes, discutida no capítulo 2 deste trabalho.

Na literatura é possível encontrar trabalhos que abordam o problema de descontinuidade no campo de pressões. Khoei *et al.* [81] apresentam uma técnica, de elementos finitos enriquecidos (X-FEM) para a modelagem termo-hidromecânica de descontinuidades impermeáveis em meios porosos saturados. Larsson & Larsson [82] e Callari & Armero [83] propuseram técnicas que capturam o desenvolvimento de descontinuidades de pressão e de deslocamento com base no conceito de descontinuidades fortes regularizadas.

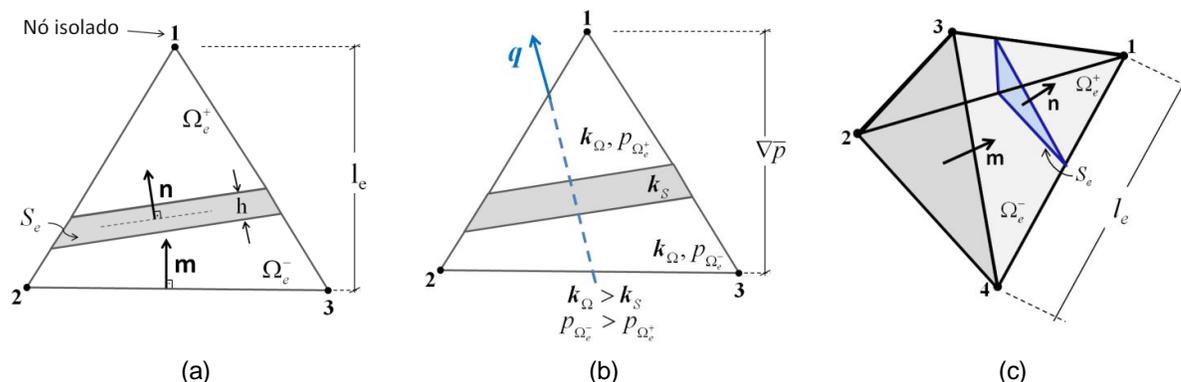
4.2.1 Decomposição do Campo de Pressão

Seja a situação em que ocorra a descontinuidade do campo de pressão, devido à presença de uma barreira de pequena espessura impermeável ao fluxo. O

campo de pressão pode ser decomposto em uma componente associada ao meio contínuo (p_Ω) e outra associada ao salto de pressão (p_S).

A Figura 35(a) mostra um elemento finito triangular, de domínio Ω_e , comprimento característico l_e , atravessado por uma banda de baixa permeabilidade, S_e , de largura h , que divide o elemento em duas partes, Ω_e^- e Ω_e^+ , isolando o nó 1 dos nós 2 e 3. A Figura 35(c) apresenta o elemento tetraédrico, que também contém uma superfície de descontinuidade. Para o caso do elemento tridimensional a descontinuidade pode cruzar o elemento de duas maneiras distintas, isolando apenas um nó, como representado na Figura 35 (c), ou isolando dois nós.

Figura 35 - Elemento finito cortado por uma banda de baixa permeabilidade: (a) e (b) elemento triangular; (c) elemento tetraédrico.



Fonte: a autora

Define-se uma função contínua, φ_S , como:

$$\varphi_S = \begin{cases} 1 & \text{nós isolados pela descontinuidade} \\ 0 & \text{demais nós do elemento} \end{cases} \quad (108)$$

e a função descontínua Heaviside sobre S_e :

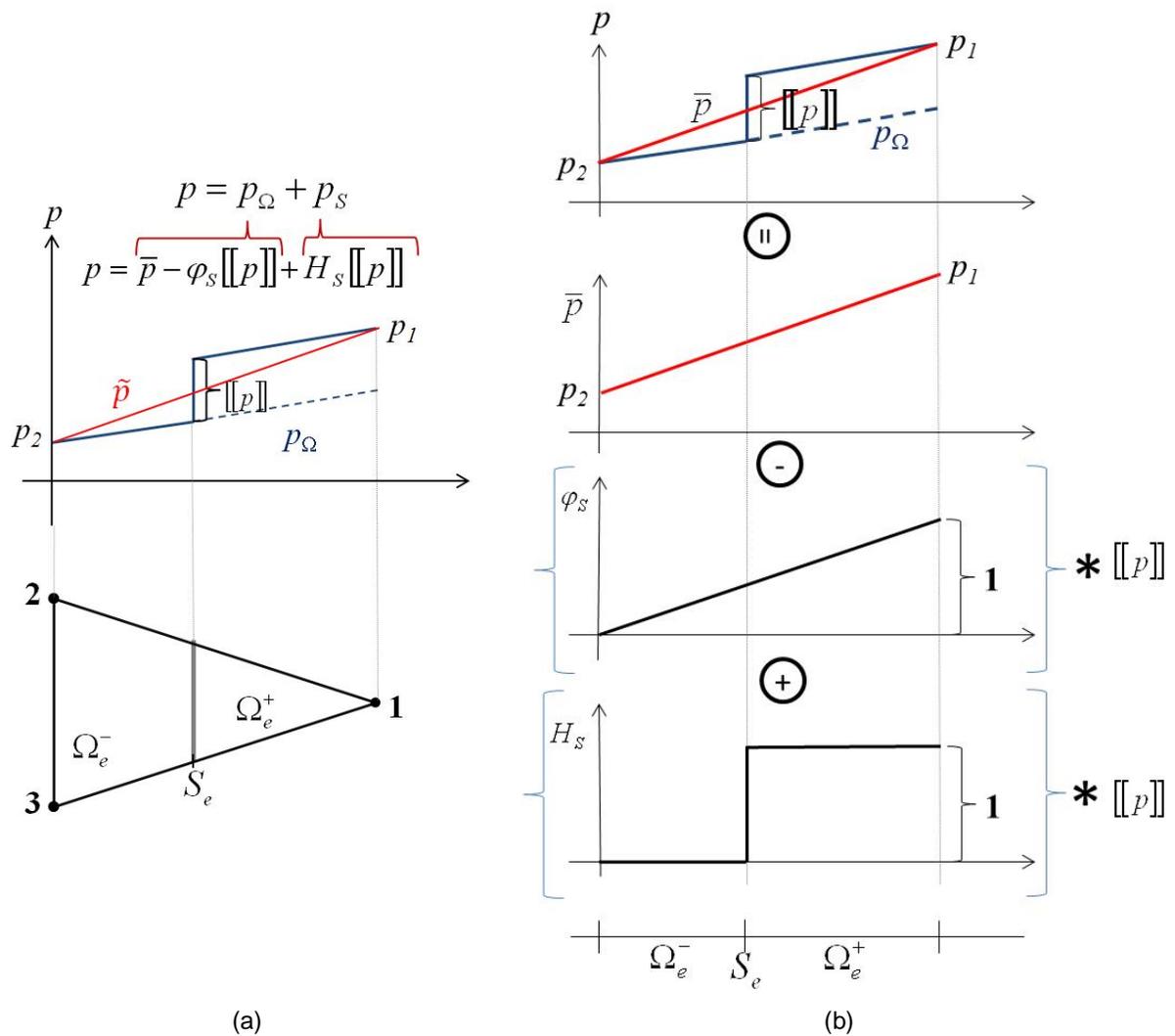
$$H_{S_e} = \begin{cases} 1 & \text{em } \Omega_e^+ \\ 0 & \text{em } \Omega_e^- \end{cases} \quad (109)$$

a Figura 36(b) apresenta a representação gráfica destas funções. A expressão para a decomposição do campo de pressão descontínuo é dada por:

$$p = \underbrace{\bar{p} - \varphi_s [[p]]}_{p_\Omega} + \underbrace{H_s [[p]]}_{p_s} \quad (110)$$

onde \bar{p} é a pressão média no elemento, obtida pela interpolação dos valores de pressão nos nós de cada elemento e $[[p]]$ é o salto no campo de pressões. A Figura 36 mostra uma representação gráfica da decomposição do campo de pressões dentro do elemento com uma descontinuidade incorporada.

Figura 36 - Decomposição do campo de pressões no elemento.



Fonte: a autora

4.2.2 Gradiente de Pressão

Assumindo que o salto de pressão é constante dentro de cada elemento ($\nabla[[p]] = 0$), o gradiente da pressão pode ser definido por:

$$\begin{aligned}\nabla p &= \nabla \bar{p} - \nabla \varphi_s [[p]] + \nabla (H_s [[p]]) \\ &= \nabla \bar{p} - \nabla \varphi_s [[p]] + \delta_s \mathbf{n} [[p]]\end{aligned}\quad (111)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal à descontinuidade, como mostra a Figura 35(a) e δ_s é a distribuição de *Dirac* em S_e que decorre do cálculo do gradiente material da função *Heaviside*. A distribuição de *Dirac* é regularizada sobre S_e e substituída pela seguinte aproximação [59]:

$$\delta_{S_e}(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } \mathbf{x} \in S_e \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}\quad (112)$$

O gradiente do campo de pressão pode ser avaliado na parte contínua e na descontinuidade separadamente, levando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\nabla p|_{\Omega} &= \nabla \bar{p} - \nabla \varphi_s [[p]] + \overset{=0 \text{ fora de } S}{\delta_s} \mathbf{n} [[p]] \\ &= \nabla \bar{p} - \nabla \varphi_s [[p]]\end{aligned}\quad (113)$$

para a parte contínua, e

$$\begin{aligned}\nabla p|_S &= \nabla \bar{p} - \nabla \varphi_s [[p]] + \delta_s \mathbf{n} [[p]] \\ &= \nabla \bar{p} - \nabla \varphi_s [[p]] + \frac{1}{h} \mathbf{n} [[p]]\end{aligned}\quad (114)$$

para a descontinuidade.

A função contínua φ_s pode ser substituída pela função de forma (N_I) do nó isolado, que cumpre as definições da equação (108). O gradiente da função de forma, como visto no capítulo 2, pode ser definido como:

$$\nabla N_1 = \frac{1}{l_e} \mathbf{M} \quad (115)$$

onde l_e é o tamanho característico do elemento e \mathbf{M} é a matriz que coleta as componentes do vetor \mathbf{m} da seguinte maneira:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \\ m_y & m_x \end{bmatrix} \quad (116)$$

sendo \mathbf{m} um vetor unitário normal à base do elemento na direção do nó isolado, como ilustrado na Figura 35(a). Para o caso do elemento tridimensional, em que a descontinuidade isolar dois nós, o gradiente da função φ_S será dado pelo gradiente da soma das funções de forma dos dois nós isolados.

Define-se também a matriz N_n , que coleta as componentes do vetor \mathbf{n} (normal à descontinuidade) da seguinte maneira:

$$N_n = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (117)$$

Considerando as definições das equações (115), (116) e (117) pode-se reescrever o gradiente do campo de pressão das equações (113) e (114), na forma matricial, da seguinte maneira:

$$\nabla p|_{\Omega} = \nabla \bar{p} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} [[p]] \quad (118)$$

para a parte contínua e:

$$\nabla p|_S = \nabla \bar{p} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} [[p]] + \frac{1}{h} N_n [[p]] \quad (119)$$

para a descontinuidade.

4.2.3 Continuidade do Fluxo de Darcy

Assumindo que a descontinuidade não armazena fluido, impõem-se o acoplamento entre a parte contínua e a descontinuidade através da condição de continuidade do fluxo de Darcy na interface de descontinuidade, da seguinte maneira:

$$\mathbf{N}_n^T (\mathbf{q}_\Omega - \mathbf{q}_S) = 0 \quad (120)$$

Considera-se que o meio contínuo tem uma permeabilidade \mathbf{K}_Ω maior que a permeabilidade na descontinuidade \mathbf{K}_S (Figura 35b). O fluxo na parte contínua e na descontinuidade pode ser dado pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$\mathbf{q}_\Omega = -\mathbf{K}_\Omega \nabla p|_\Omega = -\mathbf{K}_\Omega \left[\nabla \bar{p} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} [[p]] \right] \quad (121)$$

$$\mathbf{q}_S = -\mathbf{K}_S \nabla p|_S = -\mathbf{K}_S \left[\nabla \bar{p} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} + \frac{1}{h} \mathbf{N}_n [[p]] \right] \quad (122)$$

e, substituindo as equações (121) e (122) em (120), a condição de continuidade assume a forma:

$$\mathbf{N}_n^T \left[\left(\mathbf{K}_\Omega \left[\nabla \bar{p} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} [[p]] \right] \right) - \left(\mathbf{K}_S \left[\nabla \bar{p} - \frac{1}{l_e} \mathbf{M} [[p]] + \frac{1}{h} \mathbf{N}_n [[p]] \right] \right) \right] = 0 \quad (123)$$

Resolvendo a equação (123), o salto no campo de pressão pode ser explicitado como:

$$[[p]] = \frac{N_n^T (\mathbf{K}_S - \mathbf{K}_\Omega) \nabla \bar{p}}{N_n^T (\mathbf{K}_S - \mathbf{K}_\Omega) \frac{1}{l_e} \mathbf{M} - N_n^T \mathbf{K}_S \frac{1}{h} N_n} \quad (124)$$

A expressão (124) pode ser substituída em (121) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\Omega &= -\mathbf{K}_\Omega \left[\nabla \bar{p} - \frac{\frac{1}{l_e} \mathbf{M} N_n^T (\mathbf{K}_S - \mathbf{K}_\Omega) \nabla \bar{p}}{N_n^T (\mathbf{K}_S - \mathbf{K}_\Omega) \frac{1}{l_e} \mathbf{M} - N_n^T \mathbf{K}_S \frac{1}{h} N_n} \right] \\ &= -\mathbf{K}_\Omega \left[\mathbf{I} - \frac{\frac{1}{l_e} \mathbf{M} N_n^T (\mathbf{K}_S - \mathbf{K}_\Omega)}{N_n^T (\mathbf{K}_S - \mathbf{K}_\Omega) \frac{1}{l_e} \mathbf{M} - N_n^T \mathbf{K}_S \frac{1}{h} N_n} \right] \nabla \bar{p} \end{aligned} \quad (125)$$

Finalmente o fluxo de Darcy no meio contínuo pode ser definido em função de um tensor de permeabilidade efetiva, que introduz na formulação do fluxo o efeito de uma banda estreita com permeabilidade menor do que o meio circundante.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\Omega &= -\mathbf{K}_{ef} \nabla \bar{p} \\ \mathbf{K}_{ef} &= \mathbf{K}_\Omega \left[\mathbf{I} - \frac{\frac{1}{l_e} \mathbf{M} N_n^T (\mathbf{K}_S - \mathbf{K}_\Omega)}{N_n^T (\mathbf{K}_S - \mathbf{K}_\Omega) \frac{1}{l_e} \mathbf{M} - N_n^T \mathbf{K}_S \frac{1}{h} N_n} \right] \end{aligned} \quad (126)$$

A equação (126) resulta em um tensor de permeabilidade efetiva, em geral, não simétrico. No caso em que a direção da fratura está alinhada com a base do elemento, e as matrizes N_n e \mathbf{M} são iguais, e o tensor resultante é simétrico. Para evitar que ocorra a possível assimetria do tensor de permeabilidade efetiva, adotou-se nesse trabalho a formulação simétrica, onde $N_n = \mathbf{M}$.

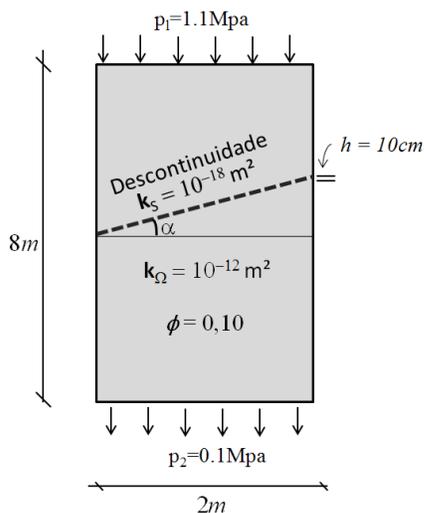
4.2.4 Exemplos de Aplicação

Com o objetivo de verificar a aplicação da técnica de descontinuidades incorporadas para o problema hidráulico, foram realizadas análises numéricas de problemas de fluxo em meio poroso permeável cortado por uma banda estreita impermeável. Nestas análises o fluido foi admitido como incompressível com densidade, ρ_f , igual a 1000 kg/m^3 e viscosidade, μ , igual a $1 \times 10^{-9} \text{ MPa}\cdot\text{s}$.

O primeiro problema simulado é uma análise bidimensional e sua geometria e condições de contorno podem ser vistas na Figura 37. Uma amostra de material permeável é submetida a um gradiente de pressão, $\Delta p = 1 \text{ MPa}$, e uma descontinuidade selante é colocada cruzando a amostra e compartimentando-a. A vazão de saída é medida quando a simulação atinge a fase estacionária.

Foram simulados vários cenários, com diferentes ângulos de inclinação da descontinuidade em relação ao eixo horizontal e usando duas malhas diferentes para cada cenário, uma malha grosseira (85 nós e 128 elementos) e outra mais refinada (301 nós e 520 elementos). As análises realizadas foram comparadas aos resultados obtidos com a simulação em MEF convencional (1199 nós e 2294 elementos) onde a descontinuidade precisa ser discretizada. As malha utilizadas são apresentadas na Figura 38.

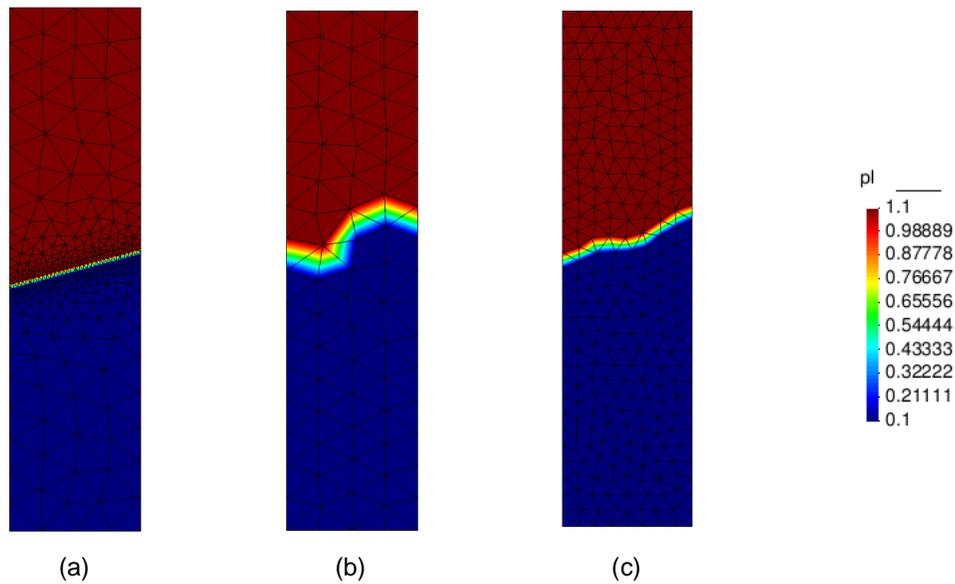
Figura 37- Geometria e condições de contorno do problema.



Fonte: a autora

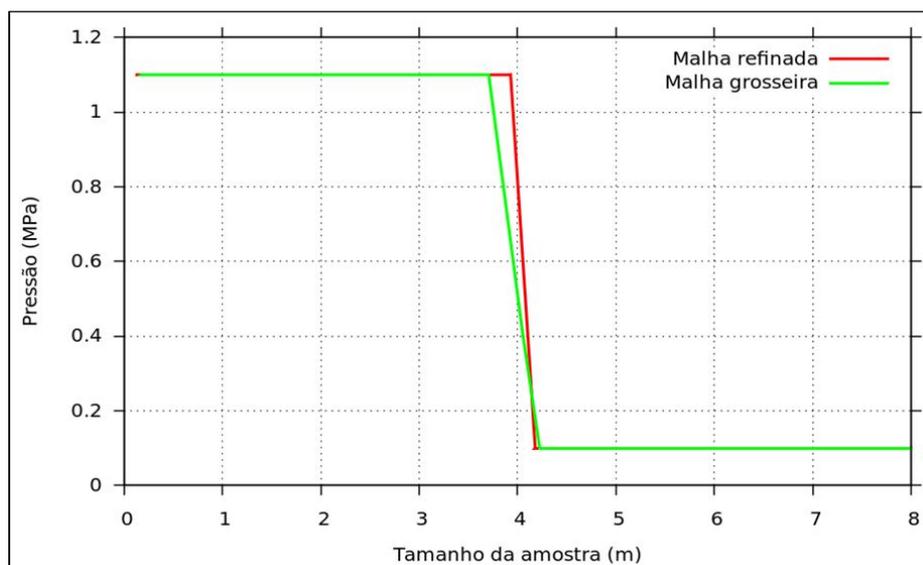
A Figura 38 também mostra a distribuição de pressão na amostra no final da simulação, é possível perceber que o campo de pressão está compartimentado pela descontinuidade. A Figura 39 mostra o salto no campo de pressão que ocorre devido à barreira incorporada, para o cenário de barreira horizontal, e pode-se concluir que a técnica de incorporação de descontinuidades no campo de pressões, apresentada neste capítulo, é capaz de reproduzir o comportamento descontínuo do fluxo em meios poroso com bandas estreitas de baixa permeabilidade.

Figura 38 - Malha de elementos finitos e distribuição de pressão obtida na simulação, barreira com inclinação de 30° . (a) MEF convencional, (b) Malha grossa com barreira incorporada (c) malha fina com barreira incorporada.



Fonte: a autora

Figura 39 - Curva da distribuição de pressão ao longo da amostra.



Fonte: a autora

A Tabela 6 resume os valores de vazão final medidas nas diferentes simulações e a diferença entre os valores obtidos com a abordagem de descontinuidades incorporadas e a abordagem convencional de elementos finitos, conclui-se que os resultados são muito semelhantes e que a técnica apresentada neste trabalho apresentou resultados bastante satisfatórios.

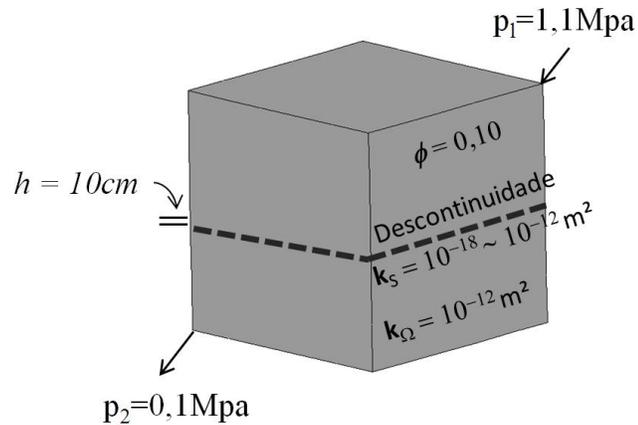
Tabela 6- Vazões finais obtidas nas simulações.

Ângulo α	Vazão (kg/s)			Erro % Malha grosseira	Erro % malha fina
	Malha convencional	Malha grossa	Malha fina		
0°	1,99E-05	1,99E-05	1,99E-05	0,0%	0,0%
15°	2,13E-05	2,11E-05	2,11E-05	0,9%	0,9%
45°	3,94E-05	3,95E-05	3,95E-05	0,4%	0,4%
60°	7,83E-05	8,00E-05	7,57E-05	2,2%	3,3%

Também foi realizada uma análise numérica tridimensional, com objetivo de verificar a implementação da técnica apresentada para problemas tridimensionais. Este problema consiste em um bloco com aresta de $1m$, com geometria e condições de contorno apresentadas na Figura 40. Neste ensaio a permeabilidade da descontinuidade foi variada entre os valores de $10^{-18}m^2$ e $10^{-12}m^2$. Os resultados

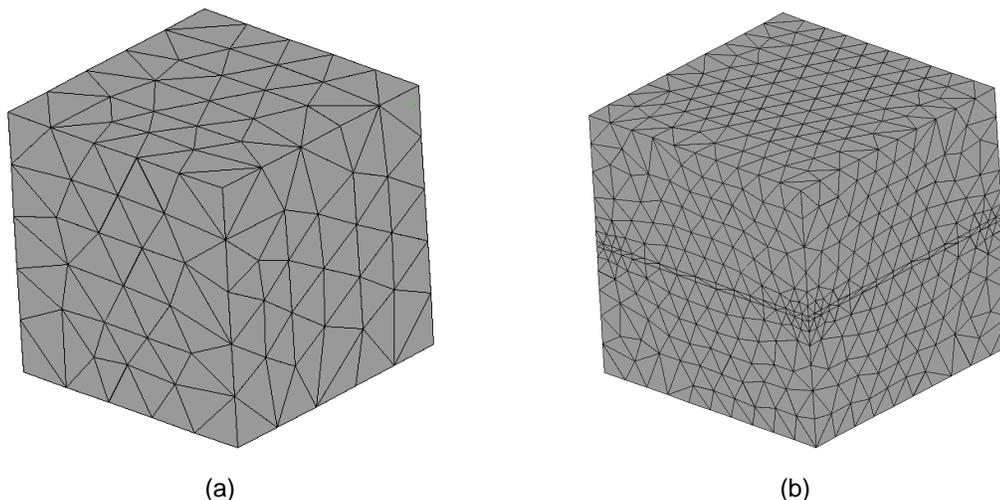
obtidos foram comparados com a modelagem do mesmo problema simulada pelo MEF convencional. A malha utilizada para a abordagem com descontinuidade incorporada (288 nós e 1149 elementos) e MEF convencional (2302 nós e 11082 elementos) estão mostradas na Figura 41.

Figura 40 - Geometria e condições de contorno de problema.



Fonte: a autora

Figura 41 - Malha de elementos finitos utilizada na simulação, (a) Técnica de descontinuidade incorporada e (b) MEF convencional.



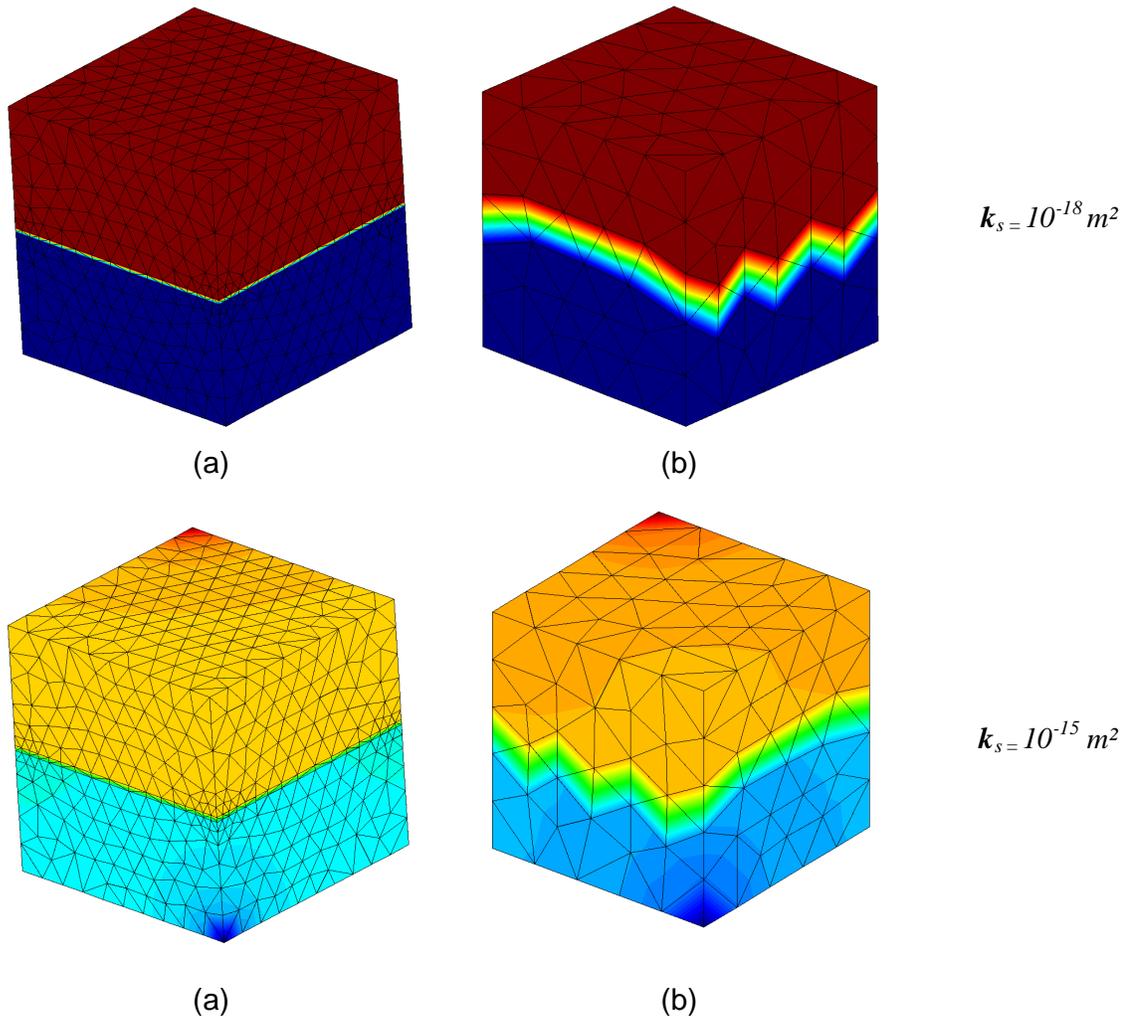
Fonte: a autora

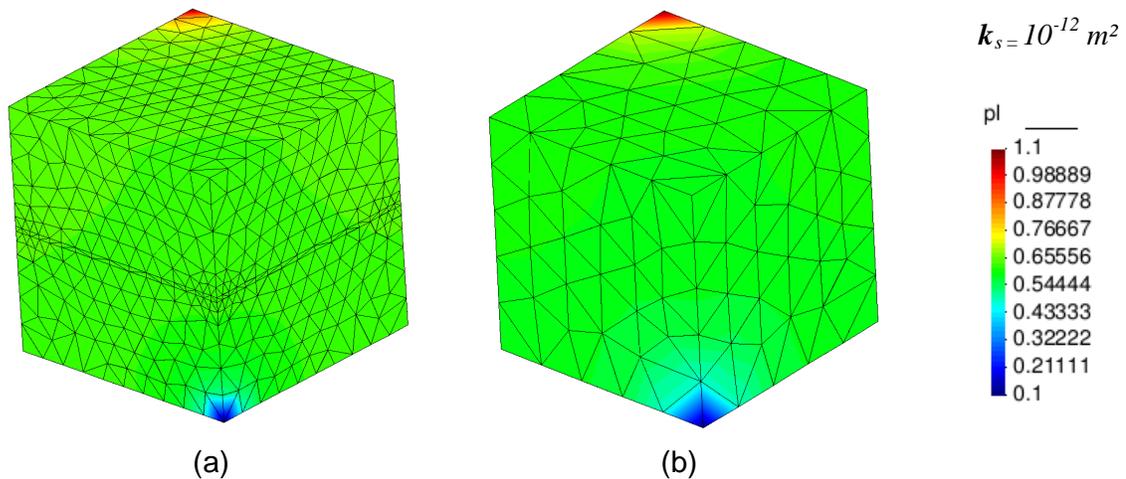
A Figura 42 apresenta a distribuição de pressão na amostra no final da simulação, para diferentes valores de permeabilidade da banda, e para as malhas de MEF convencional e MEF com descontinuidade incorporada. Estes resultados mostram que a técnica de descontinuidade incorporada consegue capturar o efeito

da menor permeabilidade da banda mesmo quando esta não represente uma barreira completamente selante.

A Figura 43 apresenta o gráfico de permeabilidade versus vazão de fluido para os diferentes valores de permeabilidade da descontinuidade, os resultados obtidos com a abordagem tradicional de elementos finitos e com a técnica de descontinuidade incorporada são idênticos e demonstra que a técnica apresentada neste trabalho está apta a simular problemas de fluxo, na presença de barreiras estreitas impermeáveis, corretamente.

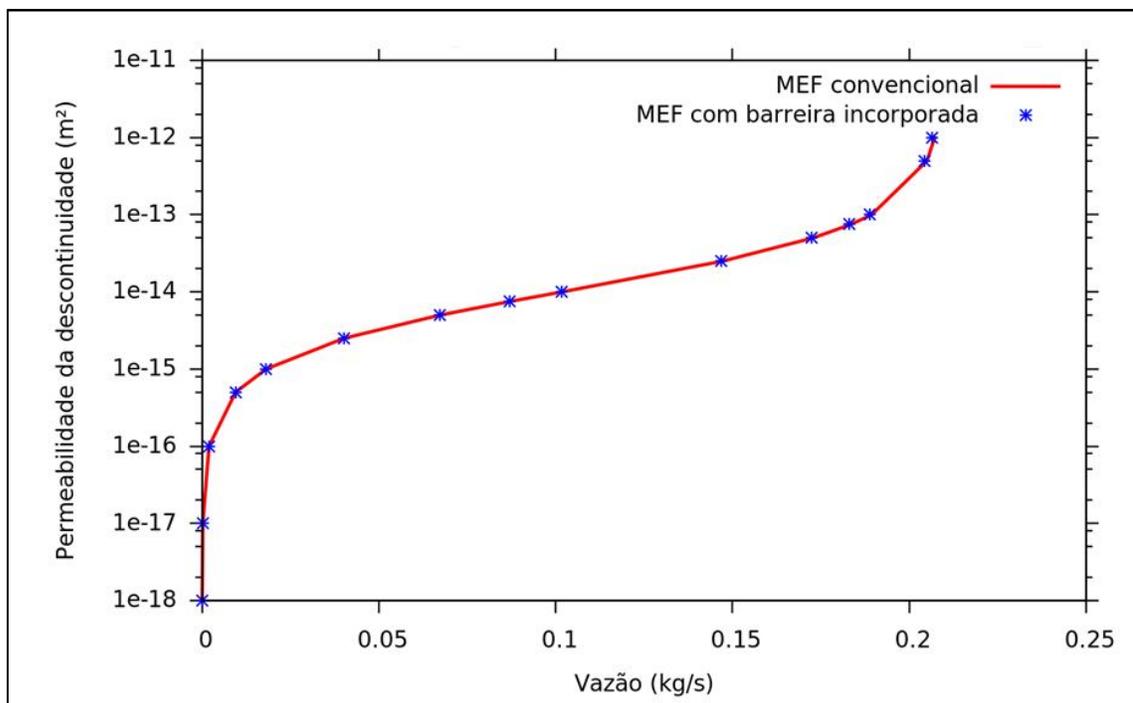
Figura 42 - Malha de elementos finitos e distribuições de pressão obtidas nas simulações, para diferentes valores de permeabilidade da banda. (a) Malha de MEF convencional, (b) Malha com barreira incorporada.





Fonte: a autora

Figura 43 - Curva de permeabilidade da descontinuidade *versus* vazão de fluido.



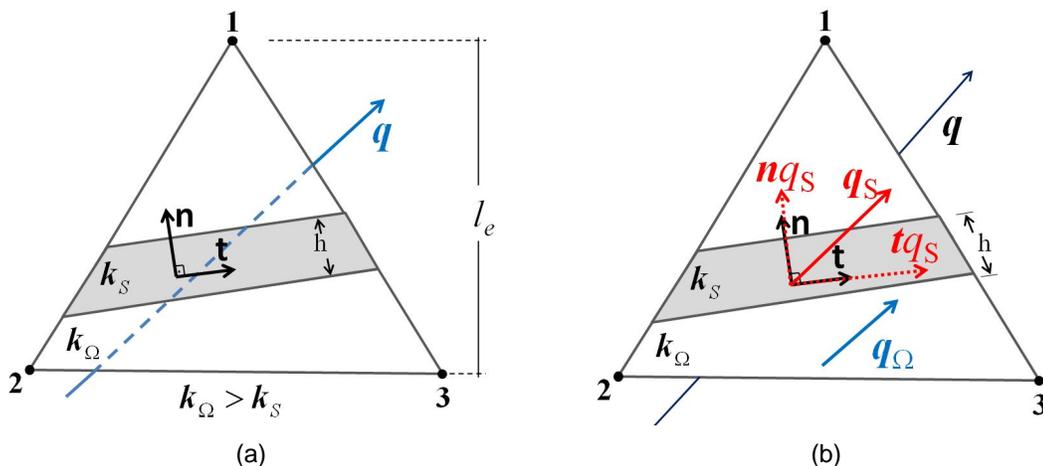
Fonte: a autora

4.3 Elementos Finitos com Fratura Incorporada.

Uma fratura em um meio poroso se converte em um caminho preferencial para o fluxo no sentido da descontinuidade, que pode ser interpretada como uma

anisotropia induzida, na direção da fratura, em todo o meio. A Figura 44 ilustra a situação das fraturas incorporadas nos elementos finitos. Para este caso, o tensor de permeabilidade do elemento se torna anisotrópico, com um valor de permeabilidade maior na direção da fratura.

Figura 44 - (a) Elemento com fratura embebida; (b) decomposição do vetor de fluxo na direção da descontinuidade.



Fonte: a autora

Considerando a decomposição do vetor de fluxo na fratura em uma componente normal e outra tangencial, como mostra a Figura 44(b), assume-se, como hipótese simplificadora, que não existe fluxo na interface entre a fratura e a parte contínua do elemento e que todo o fluxo na fratura ocorre na direção da mesma, portanto:

$$\begin{aligned} n \cdot q_s &= 0 \\ t \cdot q_s &= q_s \end{aligned} \quad (127)$$

O fluxo de Darcy na fratura (q_s) é unidimensional e dado por:

$$\begin{aligned} q_s &= -K_s \nabla p \\ \text{onde } K_s &= \frac{k_s}{\mu} \end{aligned} \quad (128)$$

Na aproximação de elementos finitos o fluxo na fratura ocorrerá em toda a espessura do elemento. Para garantir que a transmissividade do elemento na direção da fratura seja igual à transmissividade da fratura incorporada, a permeabilidade (K_s) deve ser multiplicada pelo fator geométrico h/l_e . Assim, a equação de fluxo pode ser escrita, na forma tensorial, da seguinte forma:

$$\mathbf{q}_s = -\frac{h}{l_e} K_s \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \nabla p \quad (129)$$

onde \mathbf{t} é o vetor que define a direção da descontinuidade, h é a espessura da descontinuidade incorporada e l_e é o tamanho característico do elemento.

O fluxo na parte contínua é dado por:

$$\mathbf{q}_\Omega = -\mathbf{K}_\Omega \nabla p \quad (130)$$

onde \mathbf{K}_Ω é o tensor de permeabilidade do meio contínuo. O fluxo no elemento corresponde à soma dos fluxos na fratura e na parte contínua:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}_\Omega + \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q} &= -\left(\mathbf{K}_\Omega + \frac{h}{l_e} K_s \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right) \cdot \nabla p \end{aligned} \quad (131)$$

Finalmente, pode-se calcular o fluxo no elemento, definindo-se também um tensor de permeabilidade efetiva que incorpora a anisotropia induzida pela presença da fratura, que é um canal preferencial ao fluxo.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\mathbf{K}_{ef} \nabla p \\ \mathbf{K}_{ef} &= \left(\mathbf{K}_\Omega + \frac{h}{l_e} K_s \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right) \end{aligned} \quad (132)$$

A permeabilidade intrínseca da fratura (k_s) pode ser determinada por diferentes modelos, que podem considerar as fraturas com paredes rugosas ou com

material de preenchimento. No próximo capítulo deste trabalho será adotada a lei de fluxo em placas paralelas para obter a permeabilidade da fratura.

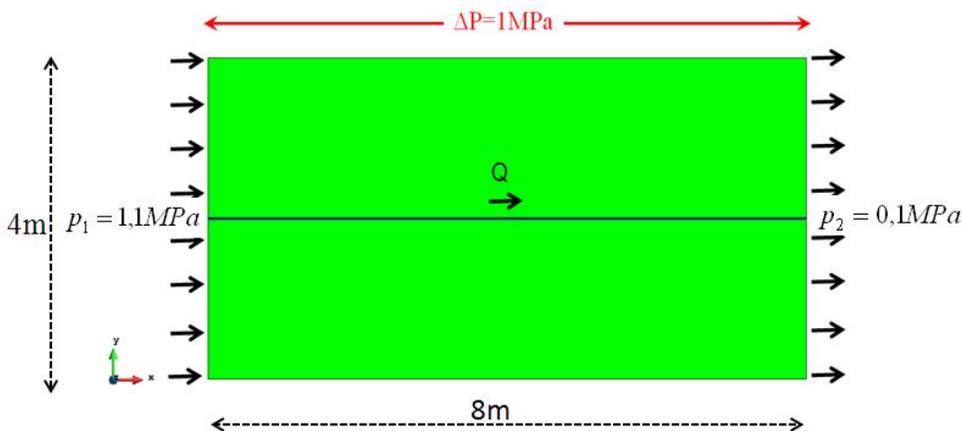
4.3.1 Exemplos de Aplicação

Com o objetivo de testar a formulação adotada para o fluxo em meios fraturados, foi realizada a simulação de um ensaio numérico em que um meio poroso possui uma descontinuidade no sentido longitudinal ao gradiente de pressão (∇p). Para representar esta situação foi criado um modelo de geometria retangular de tamanho $8m \times 4m$ com uma descontinuidade na direção horizontal, conforme ilustrado na Figura 45, onde também é possível observar as condições de contorno do problema. A permeabilidade intrínseca do meio (k_{Ω}) é igual a $10^{-25}m^2$, a permeabilidade da fratura (k_s) é $10^{-14} m^2$ e a espessura da descontinuidade (h) é $2 cm$. A solução para este ensaio, no regime estacionário, pode ser obtida pela expressão para fluxo em uma direção:

$$Q = \frac{-K_{ef} A}{\mu L} \nabla p \quad (133)$$

onde Q é a vazão, μ é a viscosidade ($\mu = 1 \times 10^{-9} MPa/s$), A é a área da seção ($A = 4 m \times 1 m$) e L é o comprimento da amostra ($L = 8 m$).

Figura 45 - Modelo do ensaio de fluxo na fratura horizontal.



Fonte: a autora

Para a simulação foi utilizada uma malha de elementos finitos com 199 nós e 344 elementos, mostrada na Figura 46. Esta figura também apresenta a posição da fratura que foi incorporada nos elementos.

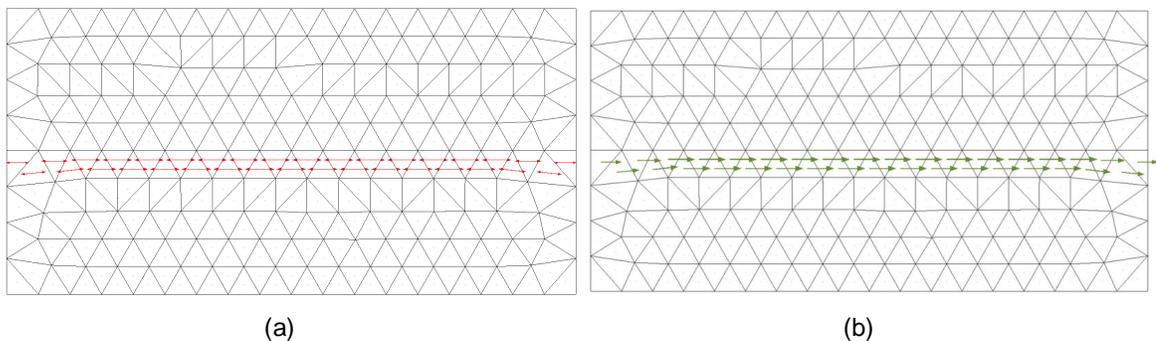
Figura 46 - Malha de elementos finitos indicando a posição da fratura incorporada.



Fonte: a autora

A Figura 47(a) apresenta a representação em cruz das direções principais do tensor de permeabilidade efetiva (K_{ef}). É possível perceber que a permeabilidade do elemento é enriquecida somente na direção da descontinuidade, que, por sua vez, se torna um caminho preferencial para o fluxo, como mostra a Figura 47(b).

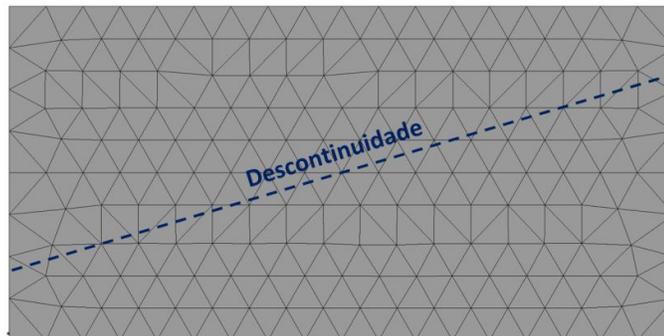
Figura 47 - (a) Representação em cruz do tensor de permeabilidade e (b) vetores de fluxo.



Fonte: a autora

Utilizando a mesma geometria e malha de elementos finitos foi realizada uma nova simulação onde a descontinuidade foi posicionada em uma direção inclinada em relação ao eixo horizontal. A Figura 48 mostra a posição onde a descontinuidade foi definida. Para este caso com fratura inclinada são adotados os mesmos parâmetros e condições iniciais do caso anterior.

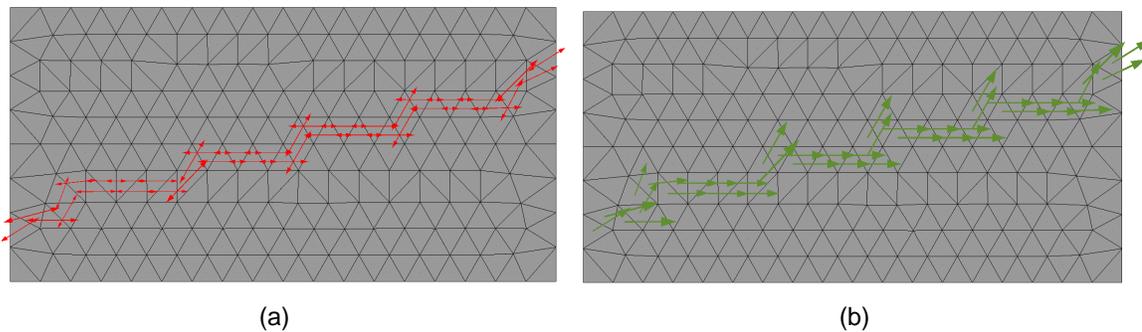
Figura 48- Posição da fratura incorporada.



Fonte: a autora

A Figura 49 (a) mostra a representação em cruz das direções principais do tensor de permeabilidade efetiva e a Figura 49 (b) mostra os vetores de fluxo que ocorrem na direção da descontinuidade.

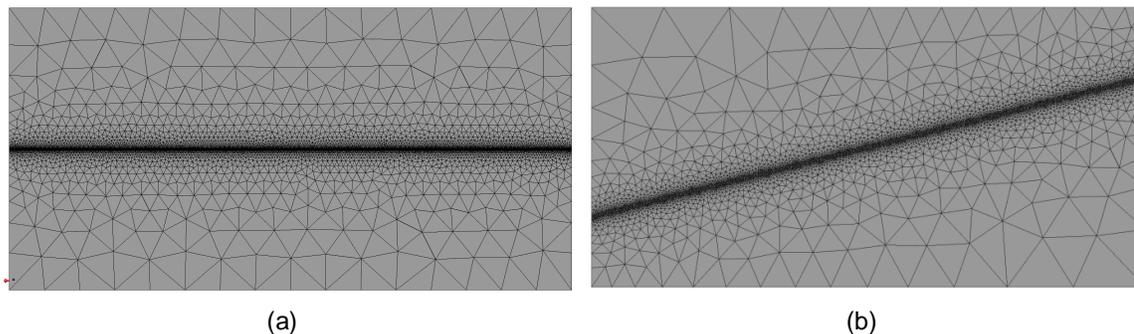
Figura 49 - (a) Representação em cruz do tensor de permeabilidade e (b) vetores de fluxo.



Fonte: a autora

Os dois ensaios apresentados até agora também foram analisados utilizando a abordagem convencional de elementos finitos, onde a fratura, com a mesma espessura da descontinuidade incorporada ($h=2 \text{ cm}$), foi discretizada utilizando elementos finitos convencionais. As malhas utilizadas nas simulações convencionais estão apresentadas na Figura 50.

Figura 50 - Malha de elementos finitos adotada na abordagem convencional (a) fratura horizontal e (b) fratura inclinada.



Fonte: a autora

A Tabela 7 resume os valores de vazões obtidas na fase estacionária de cada simulação e compara os resultados das análises numéricas utilizando a abordagem convencional e a técnica de fraturas incorporadas. Para o caso da fratura horizontal, as simulações também são comparadas com o valor previsto pela solução analítica do problema. A Tabela 8 lista o tempo de CPU gasto em cada simulação, bem como o tamanho das malhas utilizadas.

Tabela 7 - Vazões finais obtidas nas simulações.

	Fratura horizontal			Fratura Inclinada	
	Solução Analítica	MEF convencional	Malha com fratura embebida	MEF convencional	Malha com fratura embebida
Vazão Final - estacionário (kg/s)	$2,487 \times 10^{-05}$	$2,482 \times 10^{-05}$	$2,469 \times 10^{-05}$	$2,336 \times 10^{-05}$	$2,179 \times 10^{-05}$
Erro%		0,21%	0,72%		6,75%

Tabela 8 – Tamanho da malha e tempo de CPU das diferentes simulações.

	Fratura horizontal		Fratura Inclinada	
	MEF convencional	Malha com fratura embebida	MEF convencional	Malha com fratura embebida
Nós	9076	199	4357	199
Elementos	18054	344	8632	344
Tempo de CPU	182,811s	6,256s	136,633s	6,256s

Observados os erros calculados, pode-se concluir que os resultados obtidos com a técnica de incorporar fraturas são bastante satisfatórios. Além disso, a técnica de tratar as fraturas de maneira incorporada garante uma diminuição considerável do custo computacional, uma vez que permite simular o comportamento de regiões muito pequenas utilizando malhas grosseiras.

5 PROBLEMA ACOPLADO HIDROMECAÂNICO

O problema de fraturamento hidráulico, onde o mecanismo de propagação da fratura e o fluxo de fluidos no interior da fratura estão mutuamente relacionados, consiste em um problema acoplado hidromecânico, que pode ser representado por um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e resolvido por esquemas de solução numérica considerando os diferentes níveis de acoplamento.

Neste trabalho foi utilizado o programa de elementos finitos CODE_BRIGHT que resolve o problema de fluxo de fluidos em reservatórios de petróleo sensíveis ao estado de tensões de maneira acoplada. As equações do problema de fluxo são resolvidas em conjunto com a equação de equilíbrio do problema mecânico em um esquema totalmente acoplado, onde, a cada interação de Newton-Raphson, é solucionado um único sistema de equações, para toda a malha, em que as incógnitas são a pressão (problema hidráulico) e o deslocamento (problema mecânico).

A seguir estão descritas as principais equações que regem o problema de fluxo em meios deformáveis. Ao final do capítulo serão apresentados exemplos de validação e casos de aplicação.

5.1 Princípio das Tensões Efetivas

Como apresentado no capítulo 2, a equação de equilíbrio mecânico pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (134)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões totais e \mathbf{b} , o vetor de forças de corpo.

Terzaghi introduziu o conceito de tensões efetivas com o intuito de explicar a resposta de um meio poroso saturado quando submetido a solicitações externas. Ele observou experimentalmente que as deformações que ocorrem em meios saturados são dependentes de um estado de tensões efetivas atuante sobre o meio e definiu que as variações de movimento (deslocamento, deformações, variação volumétrica) no corpo são devidas exclusivamente a variações nas tensões efetivas.

Quando há uma sollicitação em termos de tensões totais (σ) e existe uma fase líquida na qual ocorre uma pressão de líquido p , e adota-se a convenção de sinais de positivo para tração e negativo para compressão, o tensor de tensões efetivas definido por Terzaghi é caracterizado pela seguinte relação:

$$\sigma' = \sigma + pI \quad (135)$$

onde σ representa o tensor de tensões totais, σ' , o tensor de tensões efetivas, p , a pressão exercida pelo fluido contido nos poros e I é o tensor unitário de segunda ordem.

O conceito de tensão efetiva foi generalizado por Biot para o caso onde a condição de incompressibilidade dos grãos não é satisfeita. A resposta mecânica dos solos e das rochas pode ser mais precisamente definida por uma tensão efetiva de acordo com a seguinte expressão:

$$\sigma' = \sigma + \alpha pI \quad (136)$$

onde, α é o coeficiente de Biot, que está relacionado à compressibilidade do meio da seguinte maneira:

$$\alpha = 1 - \frac{\kappa_T}{\kappa_S} \quad (137)$$

onde, κ_T e κ_S são, respectivamente, os módulos de rigidez volumétrica de meio poroso e dos grãos da rocha, respectivamente. A consideração da compressibilidade do meio é importante para a mecânica das rochas, porém para os solos, em geral, a rigidez do meio é muito menor que a dos grãos ($\kappa_T \ll \kappa_S$) e a expressão das tensões efetivas retoma à introduzida por Terzaghi ($\alpha=1$).

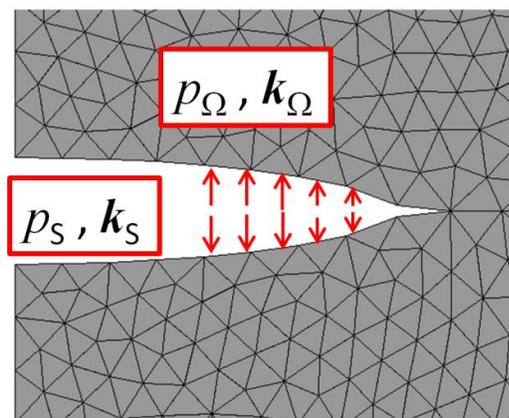
5.2 Alternativas para a Aproximação da Pressão Média no Elemento.

Como apresentado no capítulo 2, equação (42), a continuidade das tensões na interface entre a descontinuidade e a parte contínua do elemento é dada por:

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_\Omega - \boldsymbol{\sigma}_S) = 0 \quad (138)$$

Considerando o elemento com fratura incorporada, como se observa na Figura 51, existe uma pressão que atua dentro da fratura (p_s) que está relacionada à tensão na interface ($\boldsymbol{\sigma}_S$) e também uma pressão de fluido que atua na parte contínua do elemento (p_Ω) relacionada às tensões do contínuo ($\boldsymbol{\sigma}_\Omega$).

Figura 51 - Pressão atuante na fratura e no meio contínuo.



Fonte: a autora

No problema de meios fraturados, a pressão que ocorre no interior da fratura (p_s), devido à injeção de fluido no poço, é superior à pressão estática do meio (p_Ω). Essa diferença nos valores de pressão corresponde ao carregamento hidráulico que é responsável pela propagação da fratura na formação.

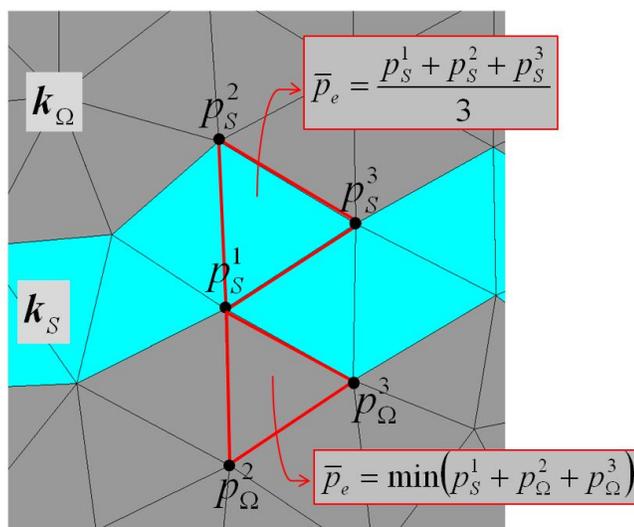
Neste trabalho foram investigadas diferentes maneiras de interpolar o campo de pressão para obter a pressão média no elemento. A maneira mais frequentemente utilizada, para o caso do elemento linear, é considerar a pressão no elemento como sendo a média dos valores de pressão calculados nos nós do elemento. Utilizando essa abordagem, é obtido um único valor de pressão para todo o elemento, tanto na parte contínua como na descontinuidade ($p_s = p_\Omega$).

O emprego da mesma ordem de interpolação para os problemas mecânico e hidráulico viola a condição de estabilidade de Babuska-Brezzi e a resposta do modelo pode apresentar oscilações. Uma maneira de contornar este problema é utilizar um elemento com ordem maior de interpolação (por exemplo, triângulo de seis nós) para resolver o problema mecânico.

Uma alternativa para o tratamento da pressão que atua nos elementos com fraturas incorporadas consiste em fazer que a pressão devido à fratura (p_s) seja dada pela média simples entre as pressões atuantes nos nós desse elemento e, para os elementos sem descontinuidades que compartilham nós com os elementos com fraturas, a pressão no elemento (p_e) é dada pela mínima pressão nodal, como mostra a Figura 52.

A pressão na parte contínua do elemento com fratura (p_Ω) é, então, considerada como sendo igual à pressão (p_e) calculada para os elementos adjacentes que não possuem descontinuidades incorporadas. As aproximações feitas para o cálculo da pressão no elemento também devem ser levadas em conta no Jacobiano do sistema global.

Figura 52 - Interpolação da pressão nos elementos com fraturas incorporadas.



Fonte: a autora

Além do tratamento dado ao campo de pressões na fratura e no contínuo, considera-se o coeficiente de Biot na fratura sempre igual a um ($\alpha_s=1$). Assim, as tensões efetivas (equação (136)) na parte contínua do elemento e na superfície de descontinuidade podem ser definidas como:

$$\begin{aligned}\sigma'_\Omega &= \sigma_\Omega + \alpha p_\Omega \mathbf{I} \\ \sigma'_s &= \sigma_s + p_s \mathbf{I}\end{aligned}\tag{139}$$

A condição de continuidade de tensões entre contínuo e interface de descontinuidade, equação (138), pode ser escrita termos de tensões efetivas, da seguinte forma:

$$n \cdot (\boldsymbol{\sigma}'_{\Omega} + \alpha p_{\Omega} \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}'_S - p_S \mathbf{I}) = 0 \quad (140)$$

As relações constitutivas para a descontinuidade e para a parte contínua, equações (39) e (40), podem ser reescritas em termos de tensões efetivas. Considerando que o modelo constitutivo de dano, apresentado no capítulo 3 deste trabalho, descreve o comportamento inelástico da interface, as relações constitutivas tensão-deformação assumem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'_{\Omega} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega} \\ \boldsymbol{\sigma}'_S = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_S \end{cases} \quad (141)$$

onde \mathbf{C} é a matriz das constantes elásticas do material e d é a variável de dano.

5.3 Relação entre Permeabilidade e Abertura da Fratura

A permeabilidade de um meio fraturado pode ser obtida, a partir da solução da equação de Navier Stokes para o fluxo em uma única fissura de abertura constante h , limitada por dois planos paralelos, da seguinte maneira [84]:

$$k_s = \frac{h^2}{12} \quad (142)$$

Quando se resolve o problema de fraturamento de maneira acoplada, a abertura da fratura é calculada em função do salto do campo de deslocamentos proveniente da descontinuidade (incógnita do problema mecânico). Fazendo essa consideração, a equação (142), pode ser reescrita como:

$$h = [[\mathbf{u}]]_n$$

$$k_s = \frac{[[\mathbf{u}]]_n^2}{12} \quad (143)$$

onde $[[\mathbf{u}]]_n$ é a componente do salto do campo de deslocamentos projetado na direção normal à descontinuidade. Considerando que, nesse caso, a espessura da descontinuidade será correspondente à abertura da fratura, o fluxo para o elemento com descontinuidade incorporada, definido na equação (131), pode ser escrito como:

$$\mathbf{q} = - \left(\mathbf{K}_\Omega + \frac{1}{l_e} \frac{h^3}{12\mu} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right) \cdot \nabla p \quad (144)$$

5.4 Fluxo Monofásico em Meios Porosos Deformáveis

A simulação do comportamento de um reservatório é feita com base na conservação de massa das espécies contidas nele. No caso de considerar o acoplamento geomecânico, a rocha reservatório passa a ser deformável e a variação de sua porosidade é calculada a partir da equação de conservação de massa da fase sólida.

5.4.1 Equação da Conservação de Massa para a Fase Sólida

A variação da porosidade é definida a partir da equação de conservação de massa do sólido, em função da velocidade de deslocamento do sólido:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \phi)\rho_s] + \nabla \cdot [(1 - \phi)\rho_s \dot{\mathbf{u}}] = 0 \quad (145)$$

onde ρ_s é a densidade do sólido, que depende da compressibilidade da matriz, e ϕ é a porosidade do meio. Considerando a derivada material em relação à velocidade da matriz sólida:

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial t} = \frac{D(\bullet)}{Dt} - \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla(\bullet) \quad (146)$$

pode-se escrever a equação (145) como:

$$\frac{D(1-\phi)\rho_s}{Dt} - \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla[(1-\phi)\rho_s] + \nabla \cdot [(1-\phi)\rho_s \dot{\mathbf{u}}] = 0 \quad (147)$$

Expandindo o primeiro termo e usando a seguinte relação,

$$\nabla \cdot [(1-\phi)\rho_s \dot{\mathbf{u}}] = \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla[(1-\phi)\rho_s] + (1-\phi)\rho_s \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (148)$$

pode-se reescrever a equação (147) da seguinte forma:

$$(1-\phi) \frac{D\rho_s}{Dt} - \rho_s \frac{D\phi}{Dt} \underbrace{- \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla[(1-\phi)\rho_s] + \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla[(1-\phi)\rho_s]}_{\text{termos se cancelam}} + (1-\phi)\rho_s \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (149)$$

Cancelando os termos semelhantes e fazendo a seguinte relação:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = \dot{\epsilon}_v \quad (150)$$

onde $\dot{\epsilon}_v$ é a deformação volumétrica total do meio poroso, a equação (149) pode ser escrita como:

$$(1-\phi) \frac{D\rho_s}{Dt} - \rho_s \frac{D\phi}{Dt} + (1-\phi)\rho_s \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (151)$$

Se a fase sólida for considerada incompressível, então:

$$\begin{aligned} \rho_s &= cte \\ \frac{D\rho_s}{Dt} &= 0 \end{aligned} \quad (152)$$

Dividindo todos os termos da equação (151) por ρ_s , obtém-se a equação final para a variação da porosidade em função da deformação volumétrica do meio:

$$\frac{D\phi}{Dt} = (1 - \phi)\dot{\epsilon}_v \quad (153)$$

5.4.2 Equação da Conservação de Massa para o Fluido

Considerando o meio poroso saturado, a equação da conservação de massa da fase fluida é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_f) + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q} + \phi\rho_f \dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (154)$$

onde ρ_f é a densidade do fluido e \mathbf{q} é o fluxo de Darcy. Aplicando o conceito de derivada material, equação (146), pode-se reescrever a equação (154) da seguinte maneira:

$$\frac{D}{Dt}(\phi\rho_f) - \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla(\phi\rho_f) + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q} + \phi\rho_f \dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (155)$$

Os termos desta equação podem ser expandidos da seguinte forma:

$$\frac{D}{Dt}(\phi\rho_f) = \phi \frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \frac{D\phi}{Dt} \quad (156)$$

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla(\phi\rho_f) = \phi \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho_f + \rho_f \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi \quad (157)$$

$$\nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q} + \phi\rho_f \dot{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q}) + \phi \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho_f + \rho_f \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi + \phi\rho_f \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (158)$$

A forma expandida da equação (155) pode ser escrita como:

$$\phi \frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \frac{D}{Dt} \overbrace{-\phi \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho_f + \phi \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho_f}^{\text{termos se cancelam}} \overbrace{-\rho_f \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi + \rho_f \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi}^{\text{termos se cancelam}} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q}) + \phi \rho_f \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (159)$$

Cancelando os termos semelhantes e utilizando a relação dada pela equação (150), obtém-se a equação geral do problema de fluxo de fluidos em meios porosos deformáveis [85]:

$$\phi \frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \frac{D\phi}{Dt} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q}) + \phi \rho_f \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (160)$$

Substituindo a equação (153) em (160), obtém-se:

$$\phi \frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f (1 - \phi) \dot{\epsilon}_v + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q}) + \phi \rho_f \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (161)$$

Desta maneira, a equação que governa o fenômeno de fluxo considera um termo relacionado com a deformação do meio poroso ($\dot{\epsilon}_v$) da seguinte maneira:

$$\phi \frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \dot{\epsilon}_v + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q}) = 0 \quad (162)$$

No código de elementos finitos utilizado neste trabalho (CODE_BRIGTH) a equação de fluxo (162) é resolvida, em um esquema totalmente acoplado, simultaneamente com as equações do problema mecânico, no mesmo sistema, pelo método de Newton-Raphson. A porosidade do meio é atualizada explicitamente, a cada passo de tempo, mediante a equação (153).

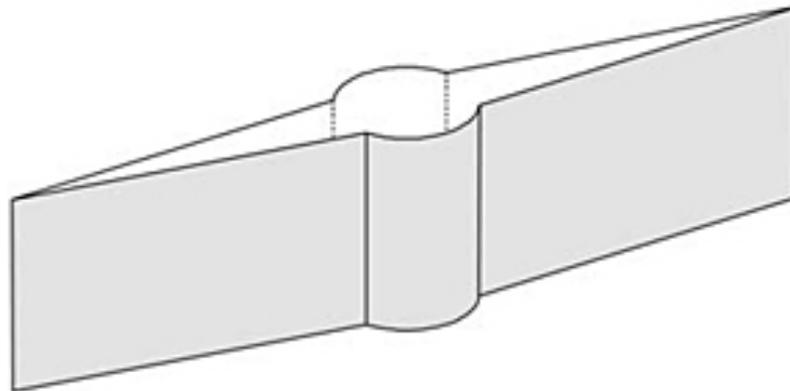
Para o caso dos elementos com fraturas incorporadas, a porosidade inclui o volume das fraturas e o volume de poros da rocha. E o fluxo de Darcy (q) é dado pela equação (144). Assim, a equação (162) pode ser escrita como:

$$\phi \frac{D\rho_f}{Dt} + \rho_f \dot{\epsilon}_v - \nabla \cdot \left(\rho_f \left[\left(\mathbf{K}_\Omega + \frac{1}{l_e} \frac{h^3}{12\mu} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right) \cdot \nabla p \right] \right) = 0 \quad (163)$$

5.5 Caso de Validação: Ensaio de Microfraturamento

O fraturamento hidráulico ocorre quando a pressão de fluido no interior dos poros excede a tensão principal menor mais a resistência à tração da rocha, resultando em uma ruptura por tração do material. Na indústria do petróleo, as fraturas hidráulicas são induzidas por meio da injeção de fluido no poço até que o estado de tensões da borda do poço seja de tração. Em cenários onde a tensão vertical é maior que as horizontais ($\sigma_v > \sigma_H > \sigma_h$), a fratura hidráulica induzida é vertical, e o plano da fratura é perpendicular à tensão principal horizontal menor [86] [87], como mostra a Figura 53. Nessa figura estão ilustradas as duas fraturas simétricas que ocorrem a partir de um poço (*open hole*) perpendicularmente à tensão principal menor.

Figura 53- Fratura vertical em torno de um poço vertical.



Fonte: [87]

O ensaio de absorção estendido (*extended leak off test*) é realizado para determinar a pressão de absorção da formação. As rochas ao redor do poço geralmente possuem fissuras, ou se tornam fissuradas durante a perfuração, e essas fissuras normalmente se encontram fechadas. Desta maneira, entende-se por

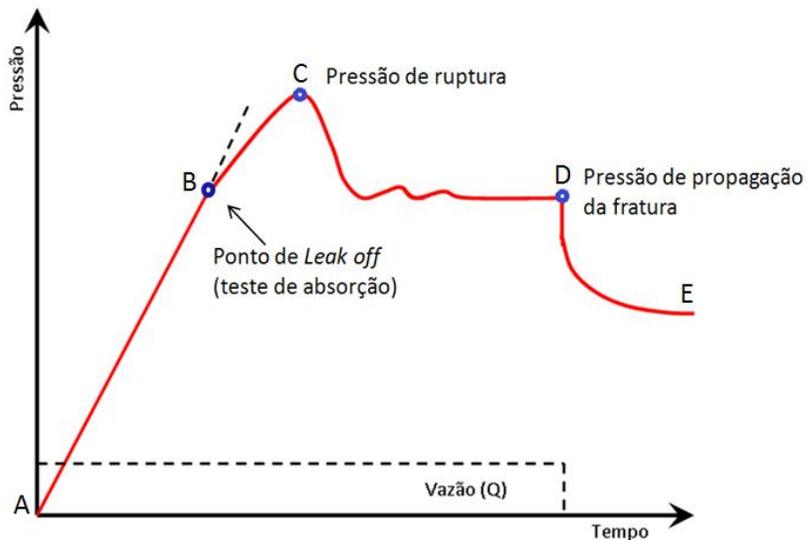
pressão de absorção o ponto em que as fraturas preexistentes nas rochas começam a abrir [88].

O ensaio de absorção é geralmente executado logo após o revestimento ser cimentado. Durante o ensaio, a pressão no poço é aumentada proporcionalmente ao volume de fluido de perfuração que é bombeado para dentro do poço. A pressão no poço é aumentada pelo bombeamento a uma vazão constante, descrevendo uma linha reta em um gráfico de pressão *versus* tempo, como mostra o trecho AB da Figura 54. O ponto onde a resposta da pressão começa a se desviar do comportamento linear é definido como o ponto de *leak off* (ponto de absorção), a partir do qual o bombeio é interrompido.

Os ensaios de absorção são muito utilizados na indústria do petróleo para determinar a pressão máxima ou peso da lama que pode ser aplicado ao poço durante as operações de perfuração. Pode-se estender este ensaio prosseguindo com a injeção do fluido de perfuração até que haja o primeiro decréscimo de pressão no poço, o que caracteriza que a pressão de ruptura da formação foi atingida. A pressão de ruptura (ou pressão de fratura) é definida como a pressão que inicia a fratura e a propaga rapidamente [88]. Essa pressão corresponde ao ponto máximo da curva da Figura 54 (ponto C).

O ensaio de microfraturamento (*minifrac*) consiste em continuar com a injeção no poço, mesmo após a pressão de ruptura ser atingida, propagando assim a fratura induzida. Nesta etapa a pressão se estabiliza em um patamar chamado de pressão de propagação da fratura (ponto D). Este ensaio é um fraturamento hidráulico de pequenas dimensões utilizado para obtenção da pressão de absorção, pressão de ruptura da formação, pressão de propagação e uma boa estimativa da tensão mínima *in situ* (ponto E) [89].

Figura 54 - Comportamento da pressão durante o teste de microfraturamento.



Fonte: adaptado de [88]

Considerando um poço vertical, submetido às tensões horizontais *in situ* máxima (σ_H) e mínima (σ_h), como mostra a Figura 55, e sendo f_t a resistência à tração da formação rochosa, a pressão de ruptura da rocha pode ser calculada, de acordo com a teoria da elasticidade [90], pela seguinte expressão:

$$p_b = 3\sigma_h - \sigma_H + f_t \quad (164)$$

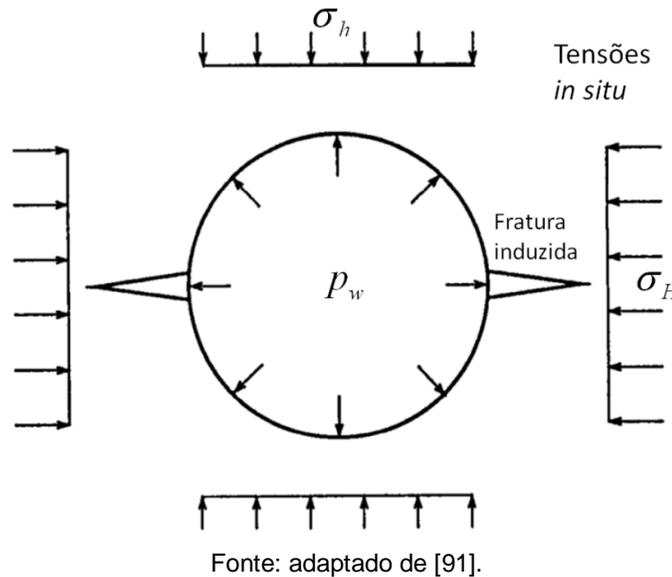
É importante perceber que a equação (164) é independente da geometria do poço e das constantes elásticas da rocha. Uma vez que os valores resistência à tração das rochas são baixos, conclui-se que para grandes profundidades (altas tensões *in situ*), a pressão de fratura é a pressão necessária para superar o estado de tensões compressivo em volta do poço [91].

Uma vez que a maioria das rochas reservatório são porosas e permeáveis em alguma medida, a diferença entre a pressão na fratura e a pressão hidrostática no reservatório pode provocar a penetração do fluido injetado no reservatório (*fluid leak off*), portanto os parâmetros da rocha (porosidade, deformabilidade) tem uma influência importante na pressão de fratura. Com base em estudos experimentais [92], a equação (164), desenvolvida para o caso de rochas impermeáveis, pode ser modificada da seguinte maneira:

$$p_b = 3\sigma_h - \sigma_H + f_t - \phi p_e \quad (165)$$

onde p_e é a pressão hidrostática do reservatório.

Figura 55 - Seção horizontal de um poço vertical sob a ação das tensões *in situ*.



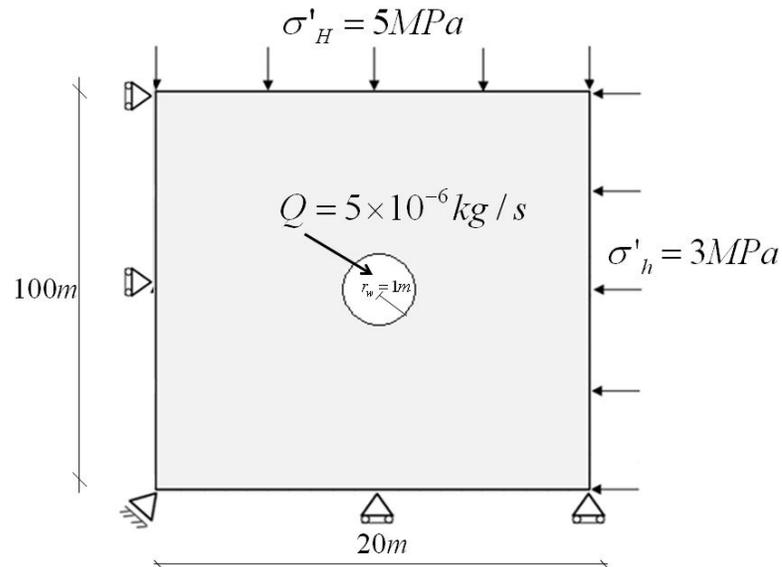
Com o objetivo de testar a formulação apresentada neste trabalho, foi simulado um ensaio de microfraturamento em uma formação rochosa impermeável e de baixa porosidade. Os resultados obtidos foram comparados com a solução analítica proposta. A análise numérica foi realizada em termos das tensões efetivas e a solução da equação (165) pode ser escrita como:

$$\Delta p_b = 3\sigma'_h - \sigma'_H + f_t \quad (166)$$

onde Δp_b é a variação de poropressão em relação a pressão estática do reservatório.

A geometria e as condições de contorno do ensaio são apresentadas na Figura 56, enquanto as propriedades, da rocha e do fluido, adotadas estão listadas na Tabela 9. Foi utilizada uma malha de elementos finitos com 10195 nós e 20272 elementos, apresentada na Figura 57. O domínio da malha é muito maior do que a região onde o fenômeno de fraturamento ocorre para evitar que algum efeito de borda interfira nos resultados obtidos.

Figura 56 - Geometria e condições de contorno do ensaio de microfraturamento.

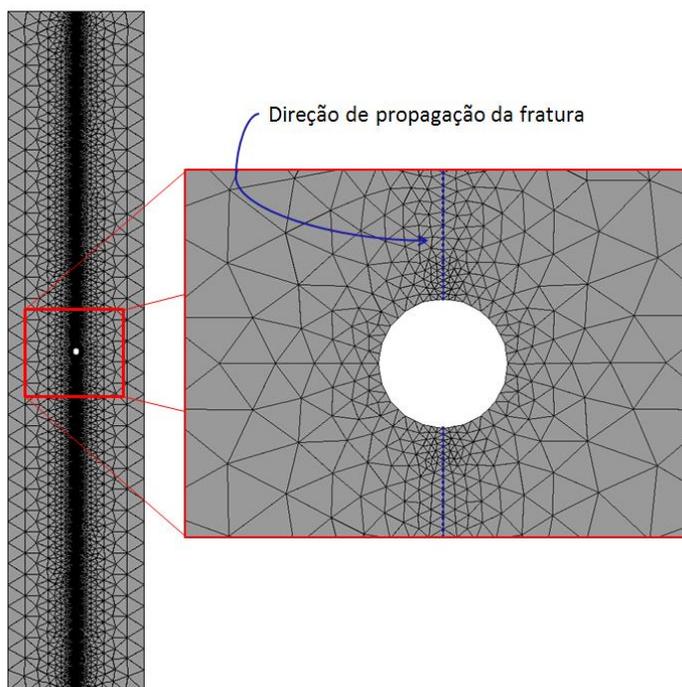


Fonte: a autora

Tabela 9 – Propriedades mecânicas e hidráulicas do problema.

Propriedades	Valores
Viscosidade do fluido (μ)	1×10^{-9} MPa/s
Permeabilidade intrínseca (k_{Ω})	10^{-22} m ²
Porosidade da rocha (ϕ)	0,01
Coefficiente de Biot (α)	1,00
Energia de fratura (G_f)	100 N/m
Resistência à tração (f_t)	1 MPa
Módulo de elasticidade (E)	1×10^5 MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,30

Figura 57 - Malha de elementos finitos utilizada na simulação.



Fonte: a autora

Nesta análise, a variação de pressão (em relação à pressão estática do reservatório), que ocorre no poço, provoca uma tensão de tração na borda do poço que suplanta o estado compressivo das tensões iniciais *in situ*. Quando este estado tensional ultrapassa a resistência à tração da rocha, a fratura se inicia. A fratura induzida hidraulicamente continua se propagando enquanto a injeção de fluido no poço for mantida. Desconsiderando a perda de fluido para a formação (*leak off*), a variação de pressão necessária para manter a propagação da fratura se equilibra com a tensão efetiva principal menor (σ_{ii}).

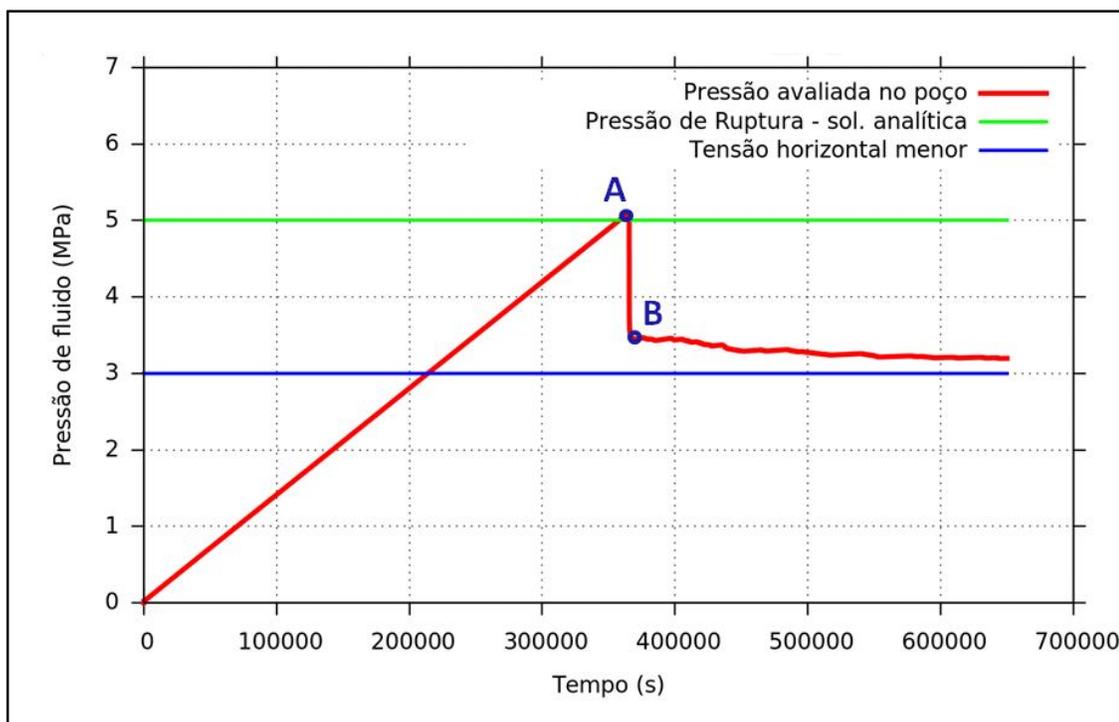
A Figura 58 apresenta o gráfico da pressão medida no poço durante o ensaio. Nesse gráfico pode-se observar que a pressão de ruptura obtida na análise numérica corresponde ao valor previsto pela solução da equação (166) e que a pressão de propagação se equilibra com o valor da tensão efetiva horizontal menor na fase pós-ruptura da análise.

Nesta análise foi utilizado o algoritmo de controle automático do passo de tempo que, com base na taxa de degradação do material no passo de tempo atual, calcula o tamanho do próximo passo de tempo (seção 3.2.2). Na Figura 59 é

apresentada a curva do tamanho do passo de tempo calculado pelo algoritmo de controle, sendo $\Delta t_{max}=100$, $\Delta t_{min}=0,01$ e a tolerância, $TOL=10^{-4}$.

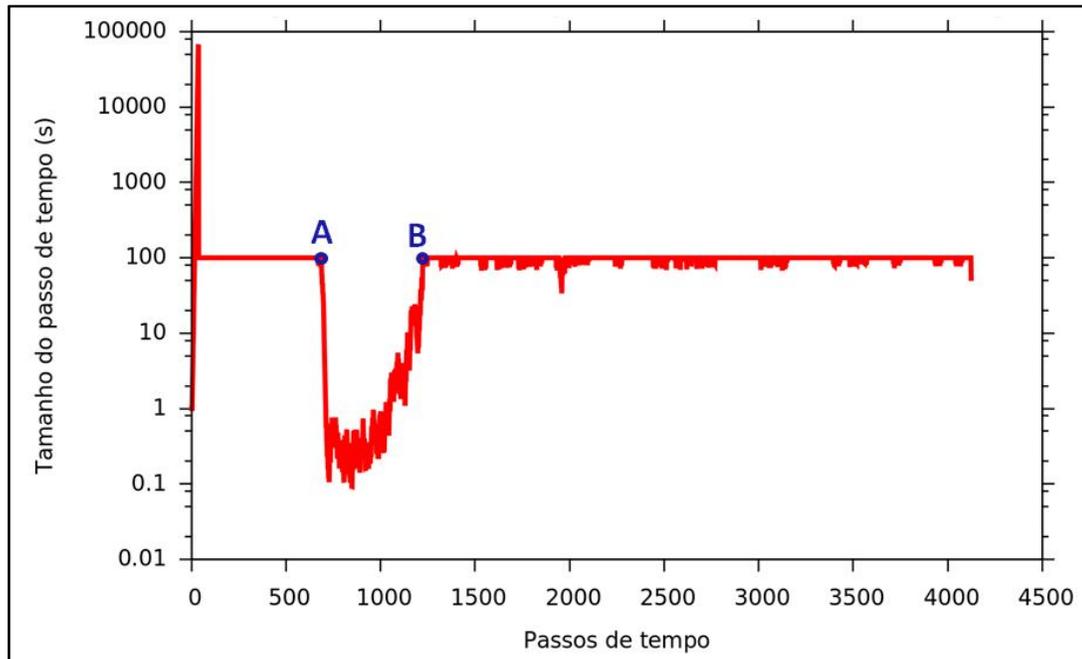
Os pontos A e B do gráfico da Figura 58 correspondem aos mesmos instantes dos pontos A e B da Figura 59. Observando as duas curvas pode-se perceber que quando a taxa de degradação do material varia bruscamente, o algoritmo de controle diminui consideravelmente o tamanho do passo de tempo. Essa redução do incremento temporal melhora a acurácia da análise, uma vez que garante que a violação na condição de consistência do modelo constitutivo, decorrente do algoritmo de integração de tensões IMPL-EX, será pequena.

Figura 58 - Curva da pressão medida no poço no ensaio de microfraturamento.



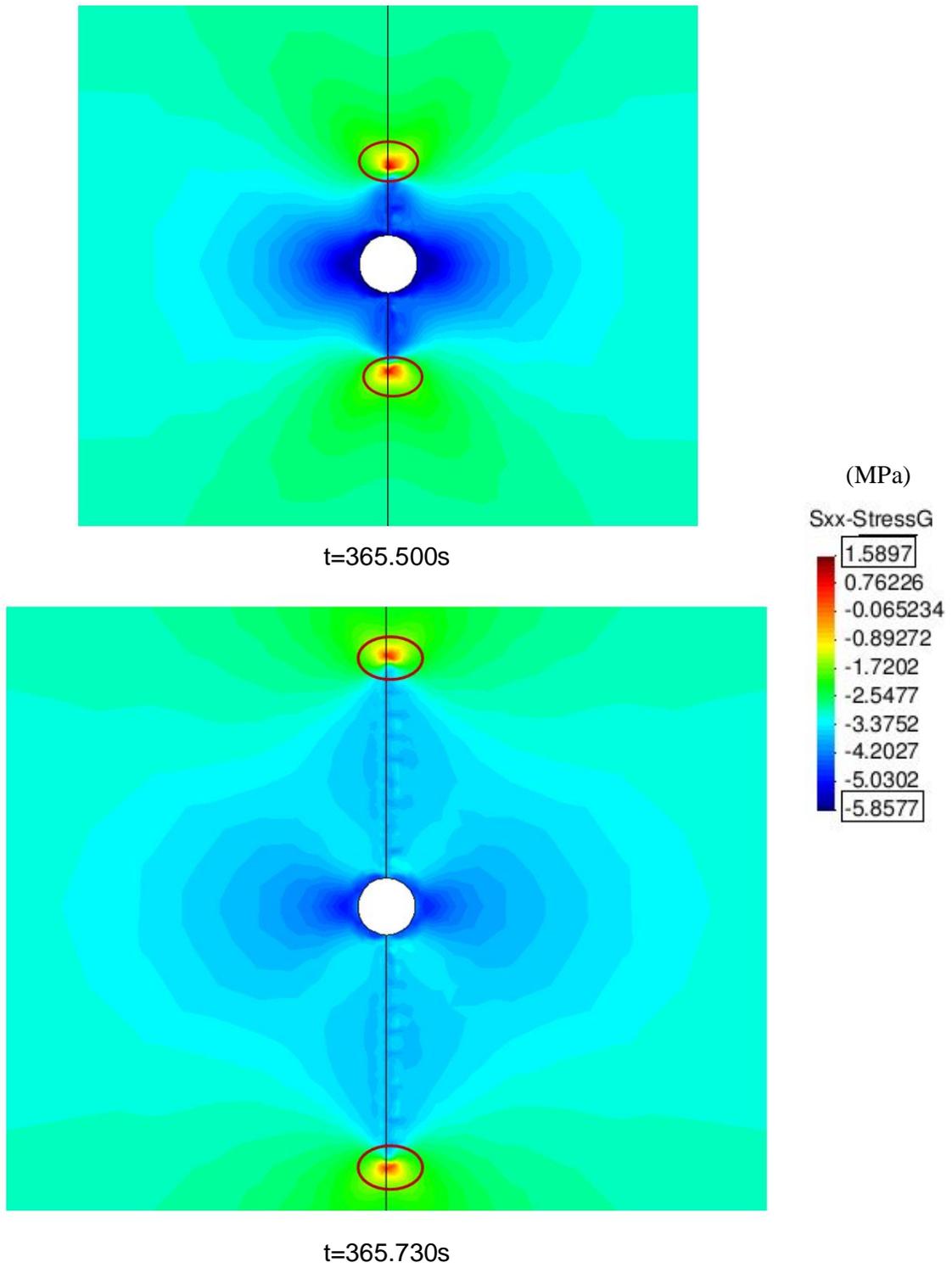
Fonte: a autora

Figura 59 - Curva da variação do tamanho do passo de tempo na análise, segundo o algoritmo de controle do passo de tempo.



Fonte: a autora

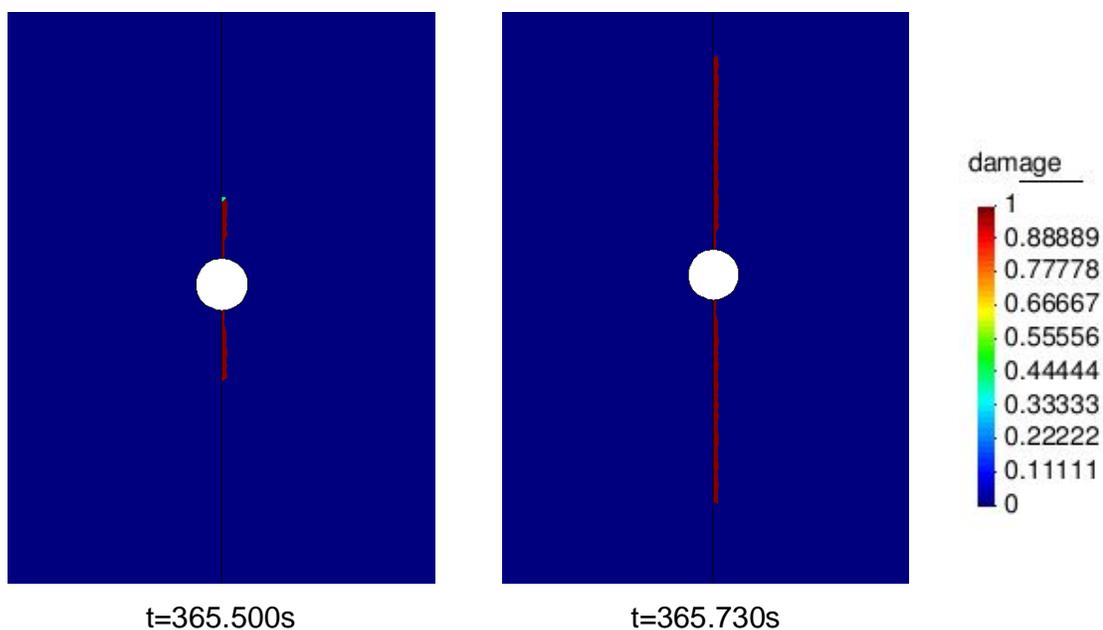
A Figura 60 mostra a distribuição dos valores da tensão principal menor, que para este exemplo é a componente σ_x , para dois instantes distintos da simulação. O gráfico é dado em termos de tensões totais e adota-se a convenção de valores positivos para tração e negativos para compressão. Em destaque na figura está a concentração de tensão de tração na ponta da fratura.

Figura 60 - Distribuição da tensão principal menor (σ_x) em dois instantes da simulação.

Fonte: a autora

Quando este estado de tração na ponta da fratura supera a resistência da rocha, o critério de ruptura é atingido e o material sofre degradação. Na Figura 61 apresenta-se a evolução da variável de dano, indicando os elementos que atingiram o critério de ruptura, para os mesmos instantes de tempo da figura anterior.

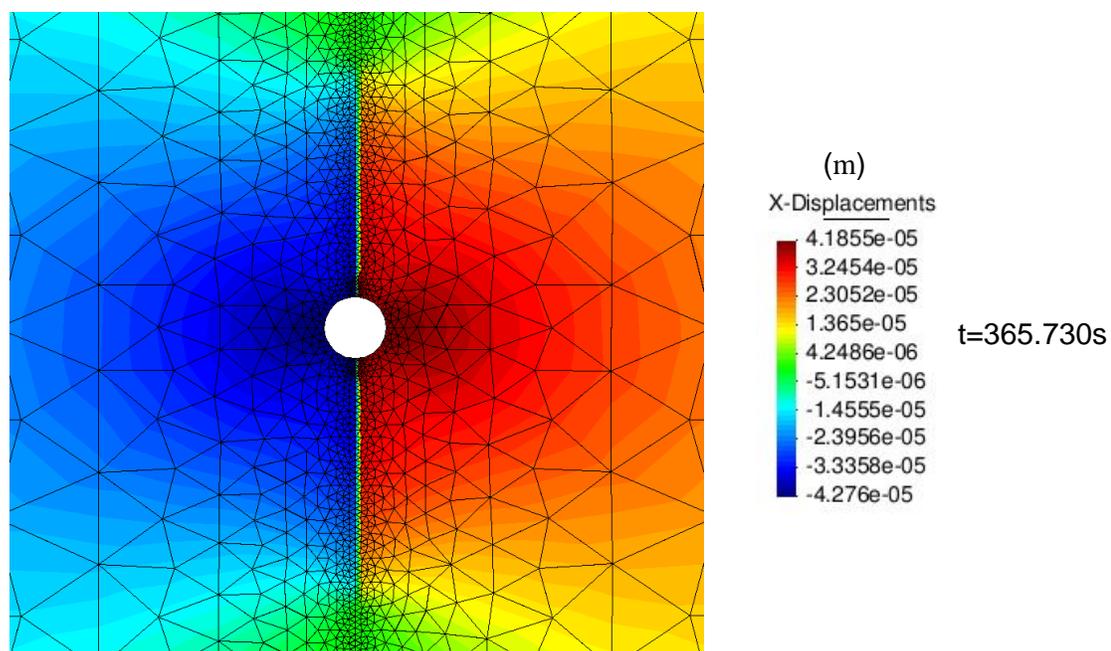
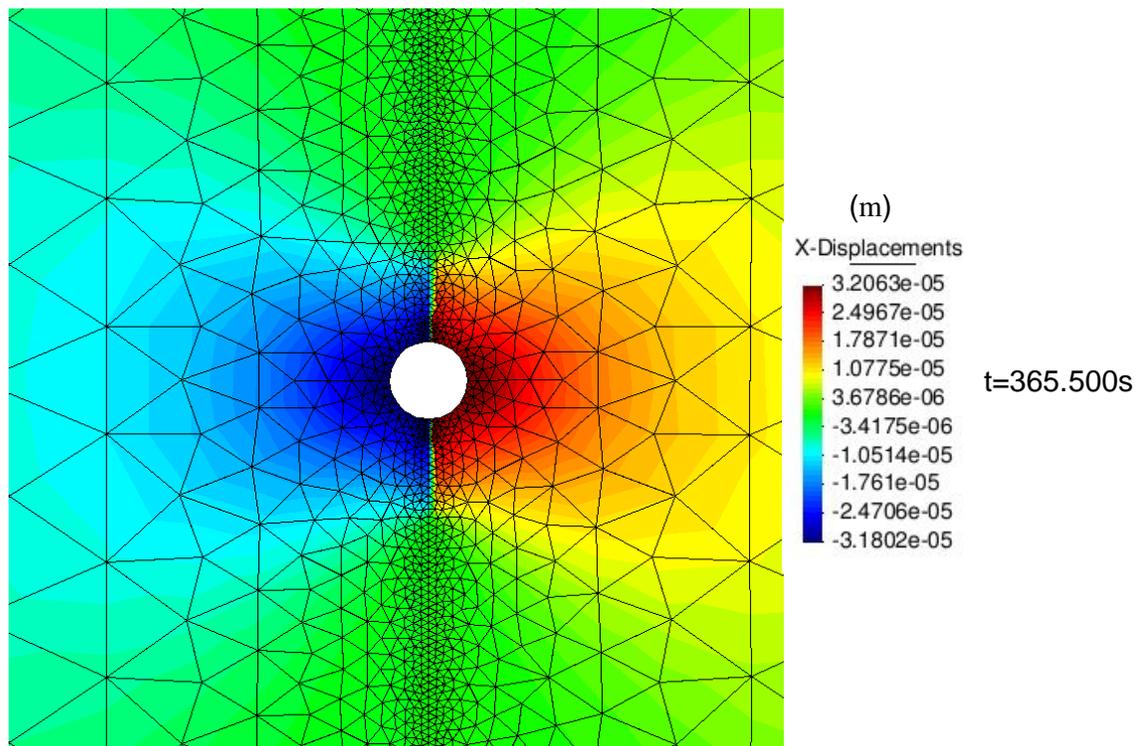
Figura 61 - Evolução da variável de dano durante a propagação da fratura.



Fonte: a autora

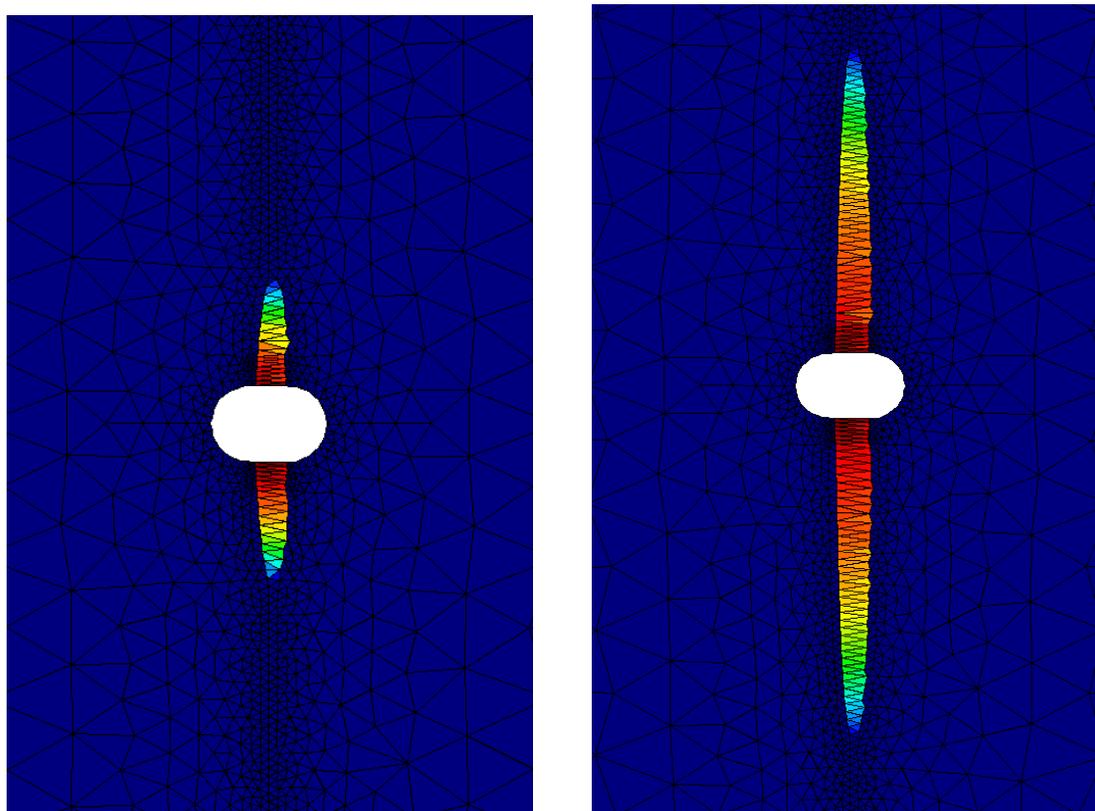
A Figura 62 mostra o campo de deslocamentos na direção horizontal. É possível observar a descontinuidade do campo de deslocamentos que ocorre devido à fratura. Esse salto no campo de deslocamentos, na direção normal à descontinuidade (horizontal), corresponde à abertura da fratura, que é mostrada na Figura 63, com a malha deformada na escala de 5000 vezes. A abertura da fratura implica em um aumento na permeabilidade do elemento na direção da descontinuidade, como pode ser visto na Figura 64.

Figura 62 - Campo de deslocamentos na direção x.

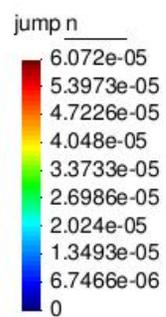


Fonte: a autora

Figura 63 – Salto do campo de deslocamentos na direção normal à fratura com a malha deformada (x5000).

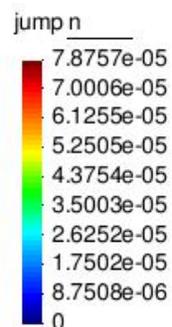


(m)



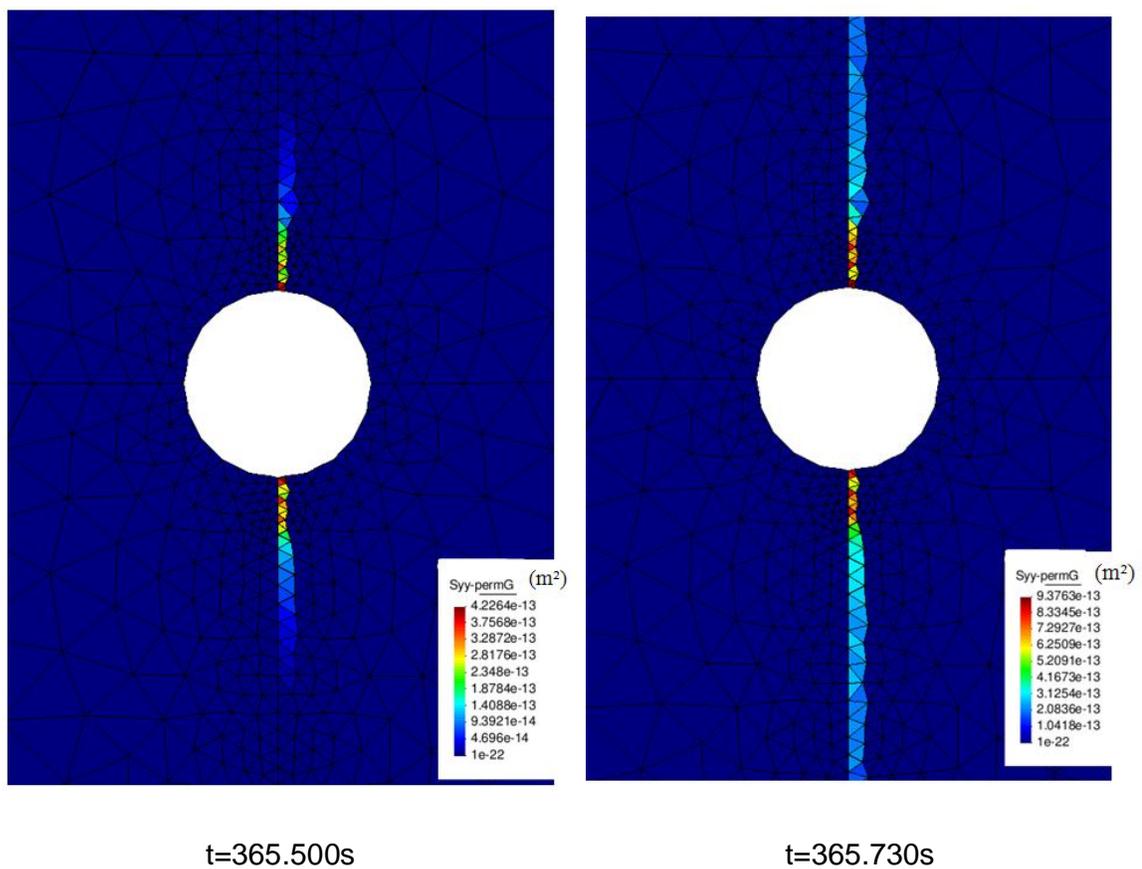
t=365.500s

(m)



t=365.730s

Fonte: a autora

Figura 64 - Distribuição da componente k_y do tensor de permeabilidade.

$t=365.500s$

$t=365.730s$

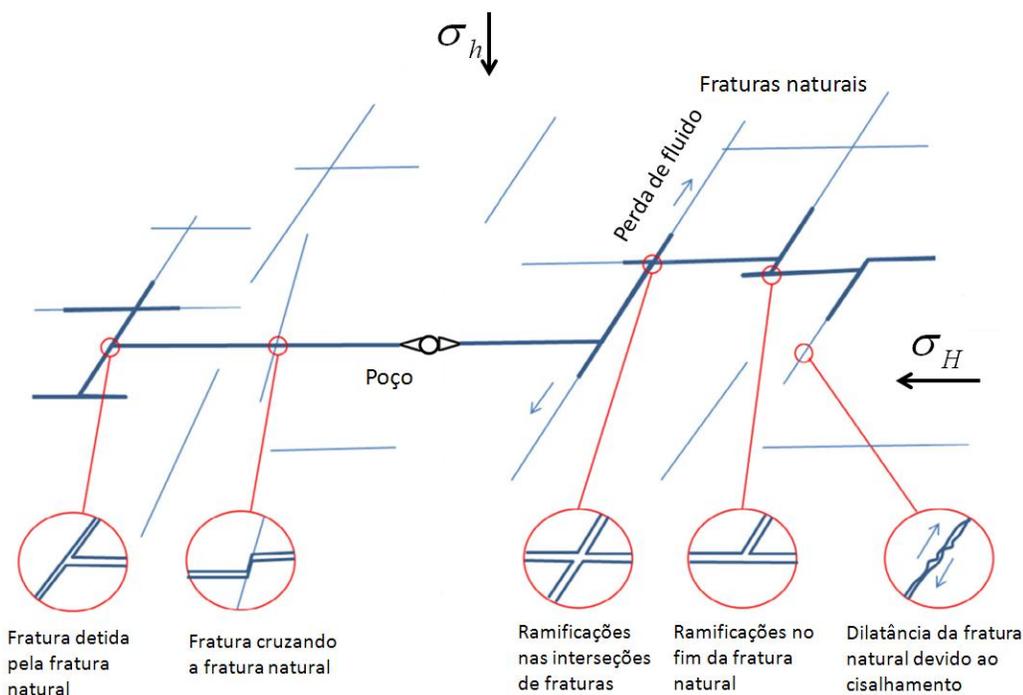
Fonte: a autora

5.6 Fraturamento Hidráulico em Meios Naturalmente Fraturados

O padrão da rede de fraturas resultante de uma operação de fraturamento hidráulico depende de vários fatores, entre eles, a resistência, deformabilidade e permeabilidade do maciço rochoso, a existência de fraturas naturais e o estado de tensões *in situ* ao qual o maciço está submetido.

Na propagação de fraturas hidráulicas em formações que contém fraturas naturais, ou planos de fraqueza relacionados à matriz rochosa, a interação entre a fratura hidráulica e as fraturas naturais pode provocar perda de fluido e dilatância, devido à tração ou ao cisalhamento, nas fraturas naturais e até mesmo ramificações, além de alteração na trajetória de propagação das fraturas [93]. A Figura 65 ilustra uma rede de fraturas hidráulicas criada devido a injeção de fluido acima da pressão de fratura em uma formação na presença de fraturas naturais

Figura 65 - Rede de fraturas induzidas e cenários de interação com fraturas naturais.



Fonte: adaptado de [93].

Portanto, a presença de fraturas naturais implica em uma dificuldade adicional para a modelagem do fraturamento, uma vez que podem interferir no fluxo de fluidos

no reservatório e na orientação da fratura induzida. Com objetivo de aplicar a formulação apresentada neste trabalho foram simulados problemas de fraturamento hidráulico em meio com fraturas naturais preexistentes. Os resultados obtidos serão apresentados a seguir.

Para a geração da rede de fraturas naturais, foi desenvolvido um programa em MATLAB© chamado INSERE_FRATURAS [94], que gera a rede de fraturas por diferentes critérios fornecidos pelo usuário e, posteriormente, cria uma base de dados para a malha de elementos finitos do modelo a ser simulado pelo CODE_BRIGHT. Para que isso fosse possível, foi criada no CODE_BRIGHT uma estrutura de dados que insere nos elementos finitos os planos de fraturas gerados pelo INSERE_FRATURAS. Esta base de dados identifica, para cada elemento finito, a fratura natural que passa por ele, sua direção e abertura inicial.

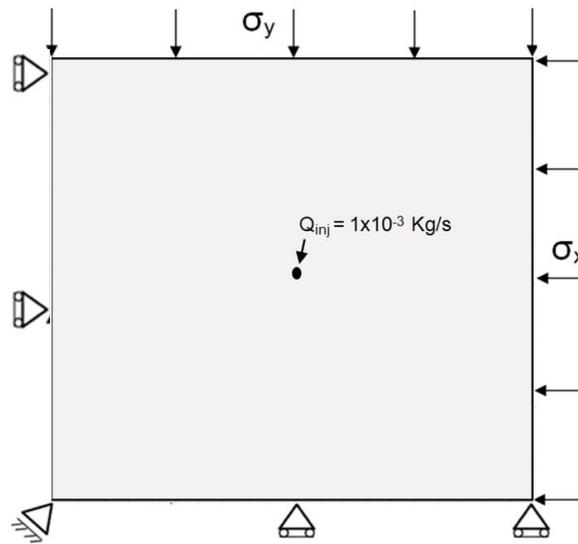
5.6.1 Exemplo de Aplicação: Famílias de Fraturas Igualmente Espaçadas

Foram simulados diferentes cenários sintéticos de meios com fraturas naturais preexistente, submetidos à operação de fraturamento hidráulico, de forma a avaliar a influência do estado de tensões *in situ* na orientação das fraturas induzidas e também na densidade da rede de fraturas formada.

Os exemplos simulados representam um maciço rochoso de dimensões 100 x 100 m, cortado por diferentes famílias de fraturas naturais. Uma injeção constante de fluido, com vazão de 1×10^{-3} kg/s, é aplicada no centro do maciço, que está submetido a um estado inicial de tensões (σ_x e σ_y). A Figura 66 apresenta a geometria e as condições de contorno do problema.

Nas análises apresentadas a seguir, considerou-se que não existe propagação de fraturas na rocha intacta, sendo que a evolução da degradação é restrita às zonas correspondentes às fraturas naturais, ocorrendo quando o estado de tensões efetivas alcança o critério de degradação do modelo constitutivo de dano. Assim, considera-se que o estímulo produzido pelo processo de injeção somente decorre da ativação e abertura das fraturas naturais pré-existent, aumentando a permeabilidade dessas zonas com reflexos na permeabilidade global da formação rochosa.

Figura 66 - Geometria e condições de contorno do problema simulado.



Fonte: a autora

Para avaliar o efeito da anisotropia de tensões *in situ* na orientação das fraturas induzidas, foram realizadas simulações considerando três cenários diferentes para o estado inicial de tensões:

- Cenário 1: $\sigma_x = 1\text{MPa}$ e $\sigma_y = 1\text{MPa}$
- Cenário 2: $\sigma_x = 1\text{MPa}$ e $\sigma_y = 2\text{MPa}$
- Cenário 3: $\sigma_x = 1\text{MPa}$ e $\sigma_y = 3\text{MPa}$

O contorno do domínio é impermeável e a pressão inicial é zero. Essa condição inicial representa o caso onde o estado de tensões *in situ* é dado em tensão efetiva. As propriedades mecânicas e hidráulicas adotadas para as análises numéricas dos diferentes cenários estão descritos na Tabela 10.

Tabela 10 - Propriedades mecânicas e hidráulicas do problema.

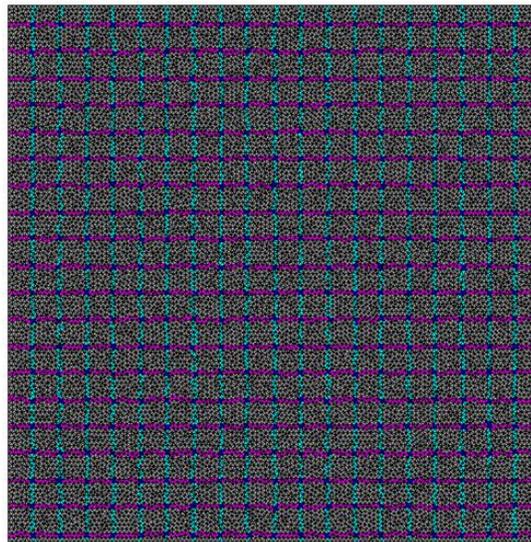
Propriedades	Valores
Viscosidade do fluido (μ)	1×10^{-9} MPa/s.
Permeabilidade intrínseca da rocha (k_0)	10^{-18} m ²
Abertura inicial da fratura (h)	0,001mm
Porosidade da rocha (ϕ)	0,10
Coefficiente de Biot (α)	1,00
Energia de fratura (G_f)	100 N/m
Resistência à tração da fratura (f_t)	0,1 MPa
Módulo de elasticidade (E)	2×10^4 MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,25

Além dos diferentes cenários de tensões iniciais, foram considerados também três diferentes conjuntos de famílias presentes na formação. Primeiramente foi considerado um meio cortado por duas famílias de fraturas, uma vertical e outra horizontal. O segundo caso apresenta duas famílias também, porém uma família é horizontal e a outra está inclinada 45° em relação à horizontal. Por fim, foi simulado um caso com três famílias de fraturas, uma família vertical, uma horizontal e outra inclinada a 45°. Todas as famílias são igualmente espaçadas.

Duas famílias de fraturas: horizontal e vertical

O primeiro exemplo apresentado é um modelo do tipo caixa de sapato, onde o maciço é cortado por duas famílias de fraturas contínuas, orientadas a 0° e 90° com espaçamento de cinco metros entre elas. A Figura 67 mostra a malha de elementos finitos, composta de 16.376 nós e 32.238 elementos, utilizada na simulação.

Figura 67 - Malha de elementos finitos utilizada.

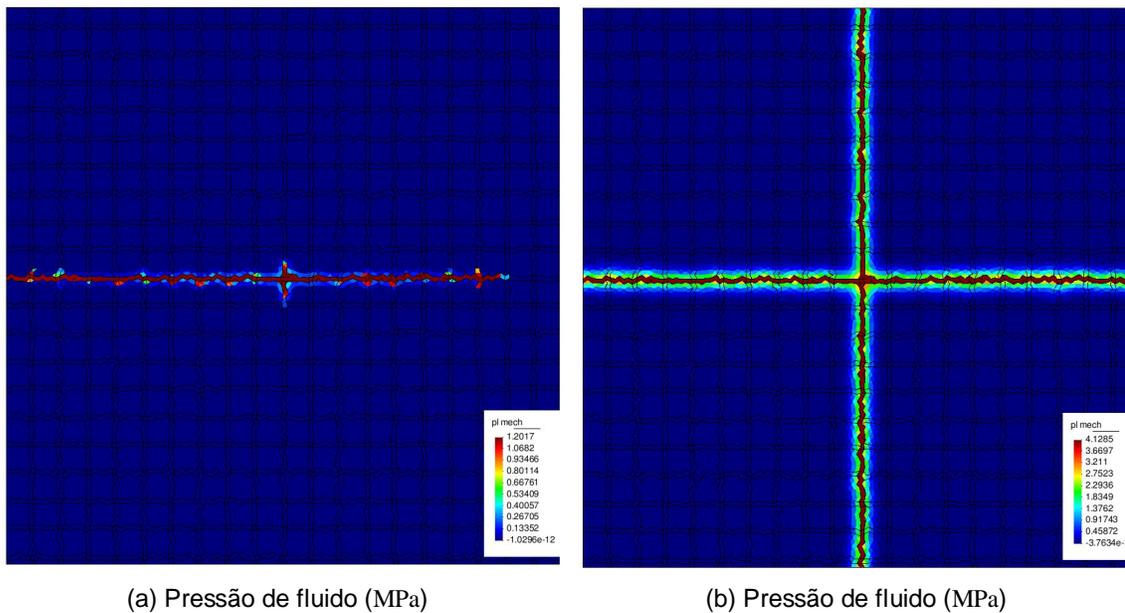


Fonte: a autora

A Figura 68 mostra a distribuição da pressão de fluido em dois instantes diferentes da simulação para o cenário de tensões iniciais isotrópicas. Para esse cenário ocorre inicialmente a abertura de uma única fratura horizontal e, em um segundo momento, uma única fratura vertical.

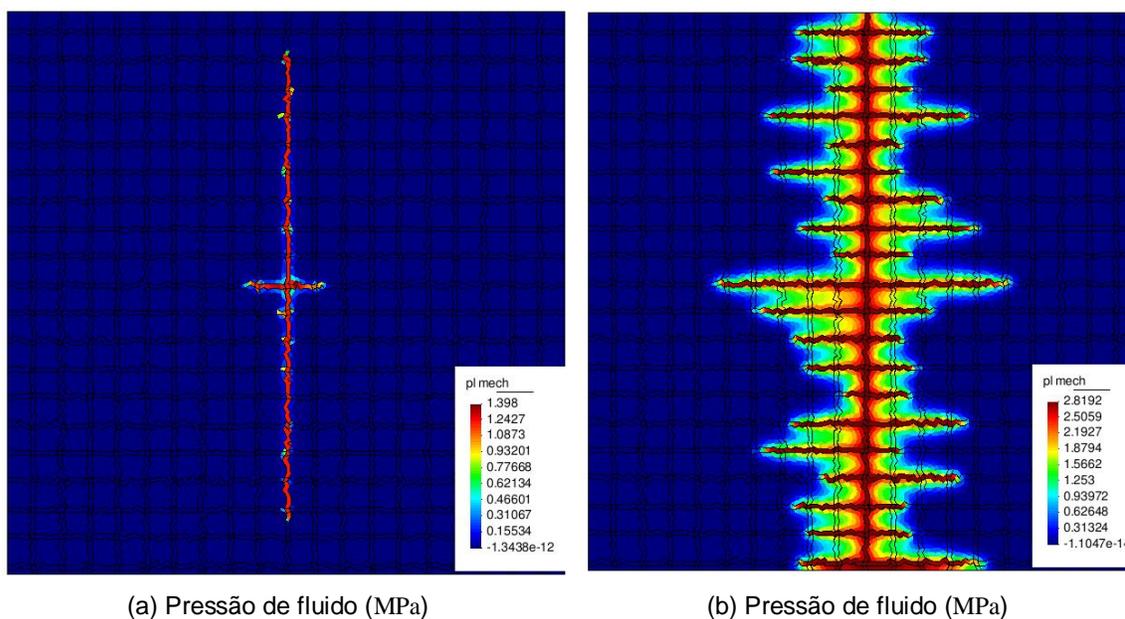
As Figuras 69 e 70 apresentam a distribuição de pressão para os cenários de anisotropia de tensões iniciais de 1:2 e 1:3, respectivamente. Para estes cenários, uma fratura principal vertical é aberta inicialmente e várias fraturas secundárias horizontais são pressurizadas durante a simulação. No cenário de menor anisotropia as fraturas secundárias se propagam de maneira mais distribuída. Nos dois casos, a fratura aberta inicialmente está na direção da tensão principal maior (σ_y). Quando esta fratura é completamente pressurizada ocorre uma reorientação do estado de tensões, resultando na propagação de fraturas perpendiculares à inicial.

Figura 68 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de tensões isotrópico. (a) tempo de simulação: 2.000s; (b) tempo de simulação: 10.000s.



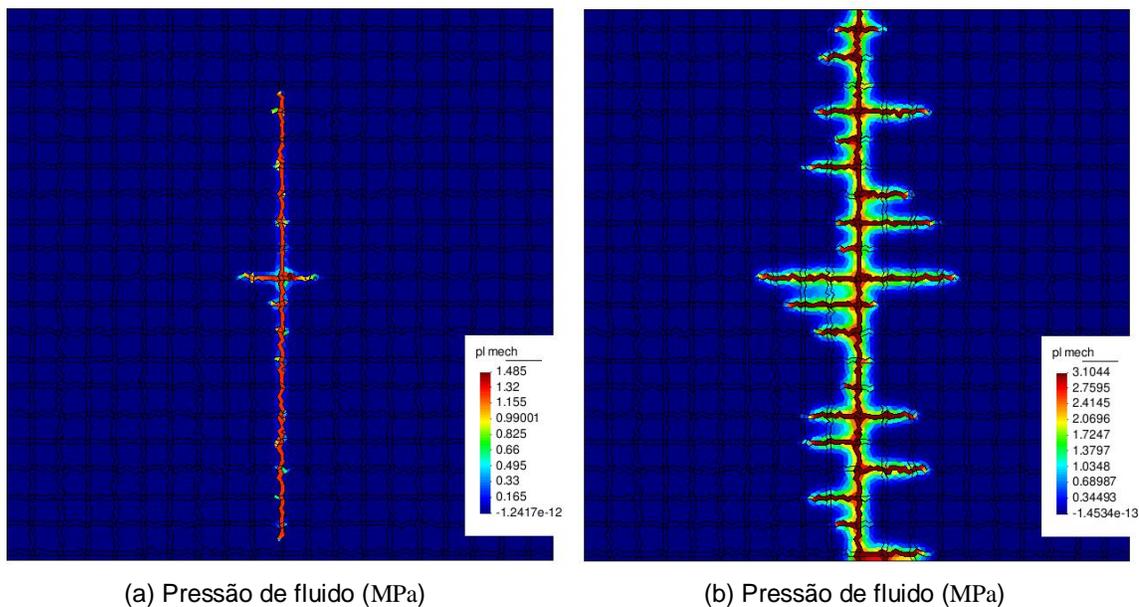
Fonte: a autora

Figura 69 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de anisotropia de tensões 1:2. (a) tempo de simulação: 2.000s; (b) tempo de simulação: 10.000s.



Fonte: a autora

Figura 70 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de anisotropia de tensões 1:3. (a) tempo de simulação: 2.000s; (b) tempo de simulação: 10.000s.



Fonte: a autora

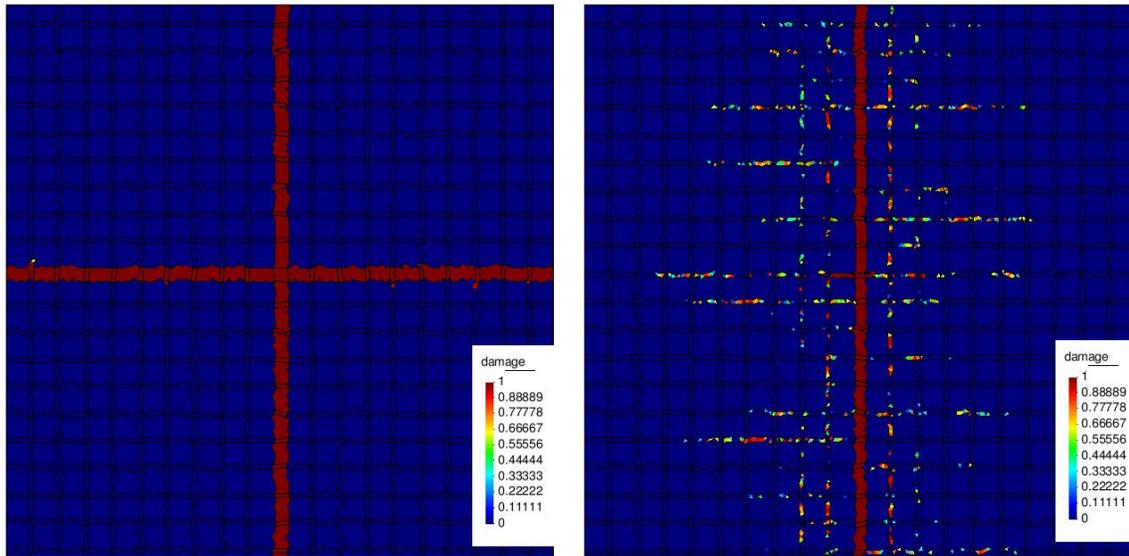
A Figura 71 mostra o valor da variável de dano, em uma malha deformada na escala de 100 vezes, no final da simulação ($t=10.000s$). A variável de dano indica os elementos que atingiram o critério de falha e tiveram suas propriedades elásticas degradadas, mostrando quais fraturas foram abertas pela operação de fraturamento hidráulico.

Essa abertura das fraturas reflete em um aumento na permeabilidade das mesmas, como pode ser visto na Figura 72 que apresenta a distribuição final do campo de permeabilidade após o fraturamento hidráulico.

Os valores de permeabilidade apresentados se referem à permeabilidade do elemento macro (permeabilidade efetiva), posto que a técnica utilizada incorpora a permeabilidade devido à fratura e enriquece a permeabilidade do elemento na direção da fratura, conforme formulação apresentada no capítulo 4.

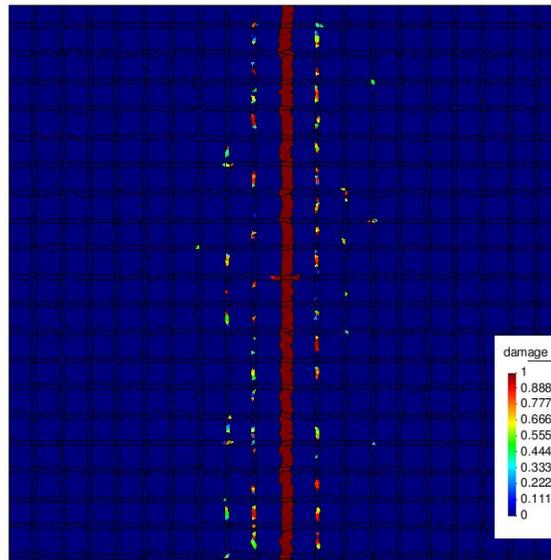
No cenário de tensões iniciais anisotrópica ocorre o aumento da permeabilidade em uma região no entorno da fratura principal, formando-se assim uma rede de fraturas conectadas que contribuem para um aumento global da permeabilidade do meio. Para o cenário de tensões iniciais isotrópicas, o aumento da permeabilidade ocorre apenas nas duas fraturas principais e não se observa a formação de uma rede de fraturas conectadas.

Figura 71 - Variável de dano em malha deformada (100x) para os diferentes cenários de tensões.



$\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 1 \text{ MPa}$

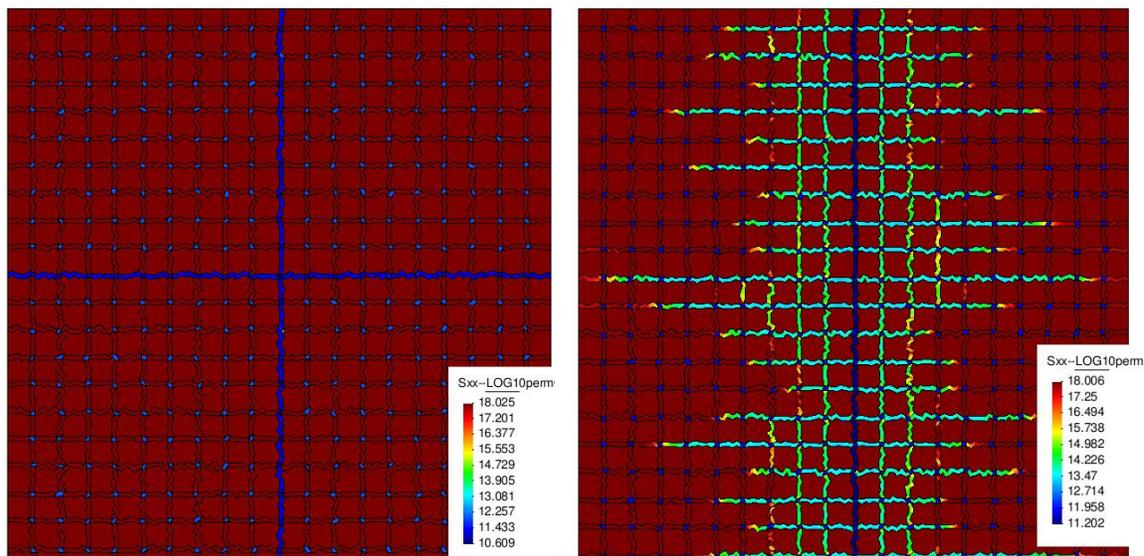
$\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 2 \text{ MPa}$



$\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 3 \text{ MPa}$

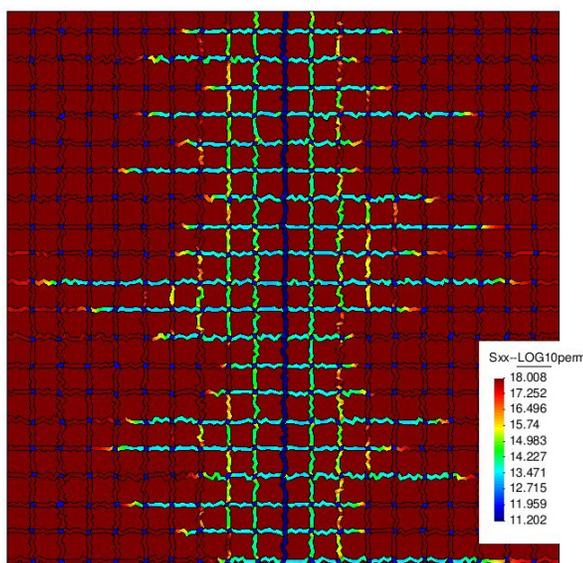
Fonte: a autora

Figura 72 - Distribuição do campo de permeabilidade após fraturamento hidráulico para os diferentes cenários de tensões.



$\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 1 \text{ MPa}$

$\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 2 \text{ MPa}$



Permeabilidade (m^2)

$\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 3 \text{ MPa}$

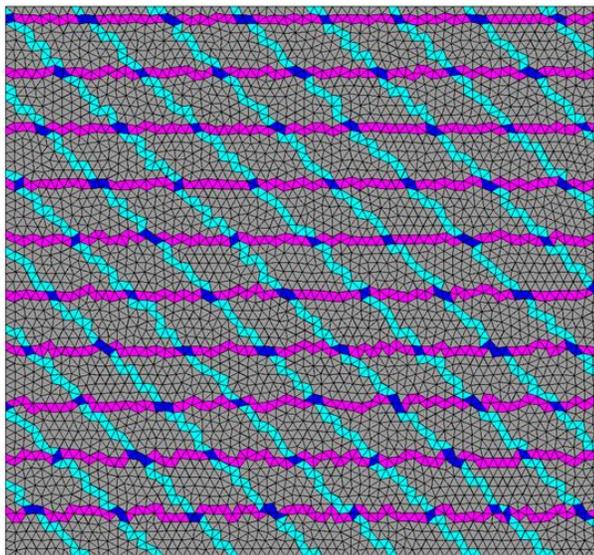
Fonte: a autora

Duas famílias de fraturas: horizontal e inclinada

Esta simulação representa o problema de um meio naturalmente fraturado, com duas famílias de fraturas, uma orientada a 0° e outra a 45° , cortando todo o

maciço. A Figura 73 apresenta a malha de elementos finitos utilizada, com 4017 nós e 7776 elementos. As fraturas estão igualmente espaçadas com 10m de distância entre elas.

Figura 73 - Malha de elementos finitos adotada na simulação.

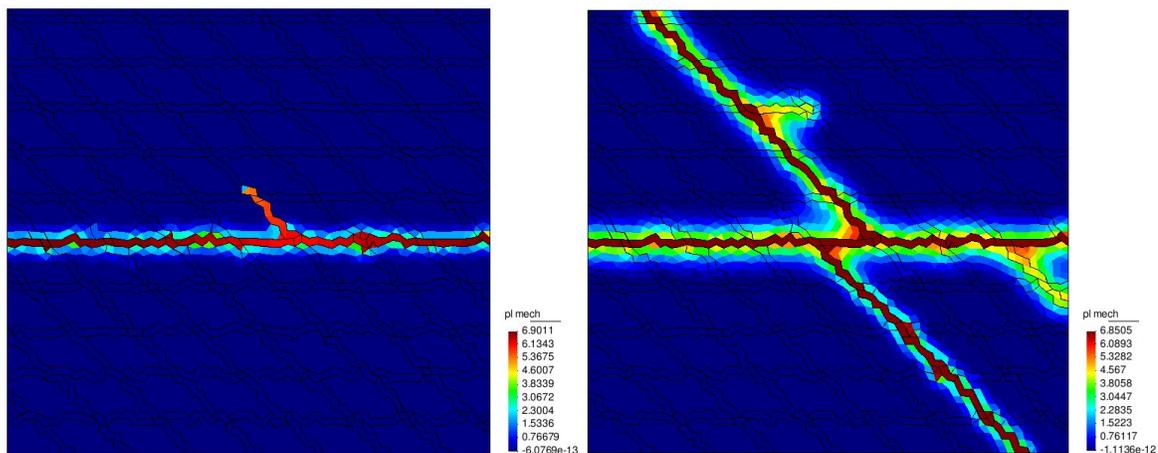


Fonte: a autora

As Figuras 74, 75 e 76 mostram a evolução da distribuição da pressão de fluido em dois instantes da simulação para os cenários de tensões iniciais isotrópicas, anisotropia 1:2 e anisotropia 1:3, respectivamente.

No cenário de tensões iniciais isotrópicas, uma fratura principal horizontal é pressurizada inicialmente e outra principal vertical em um segundo momento. Nesse cenário não ocorre a pressurização de fraturas secundárias. Para o estado inicial de tensões anisotrópico, uma fratura principal vertical (direção de menor confinamento) é aberta inicialmente e várias fraturas secundárias horizontais são abertas em um segundo momento da simulação.

Figura 74 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de tensões isotrópico. (a) tempo de simulação: 4.000s; (b) tempo de simulação: 100.000s.

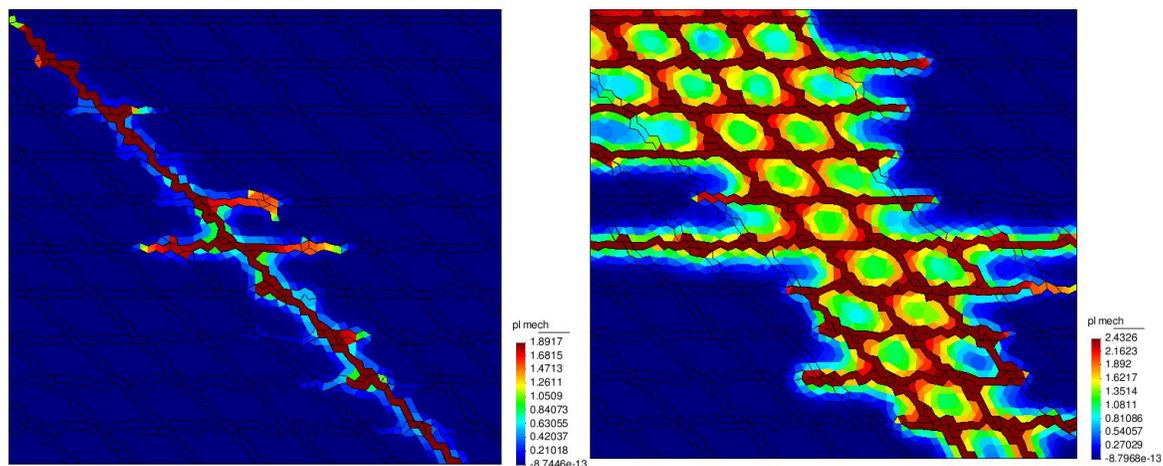


(a) Pressão de fluido (MPa)

(b) Pressão de fluido (MPa)

Fonte: a autora

Figura 75 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de anisotropia de tensões 1:2. (a) tempo de simulação: 4.000s; (b) tempo de simulação: 100.000s.

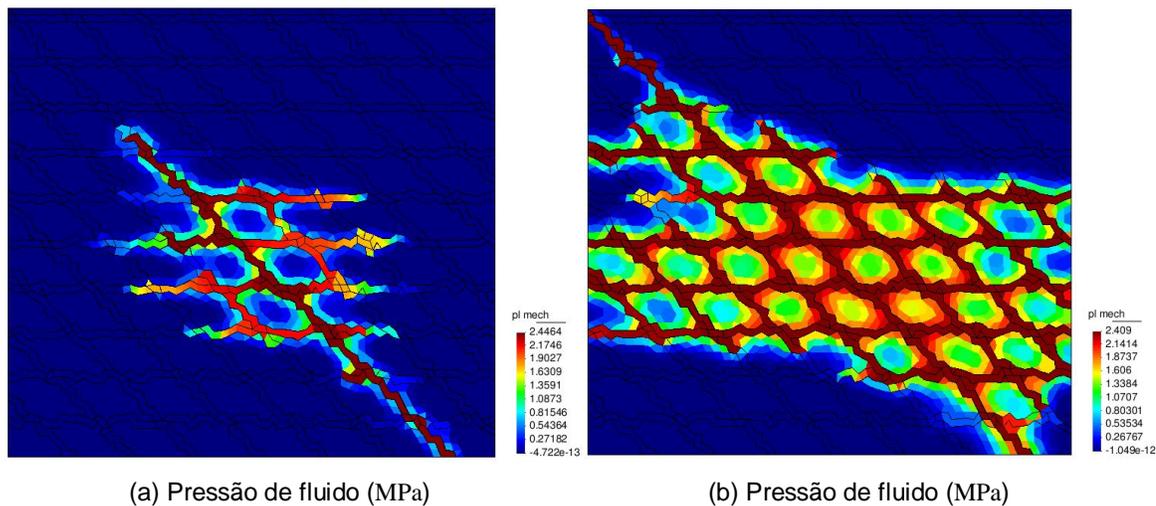


(a) Pressão de fluido (MPa)

(b) Pressão de fluido (MPa)

Fonte: a autora

Figura 76 - Distribuição da pressão de fluido para o estado de anisotropia de tensões 1:3. (a) tempo de simulação: 4.000s; (b) tempo de simulação: 100.000s.

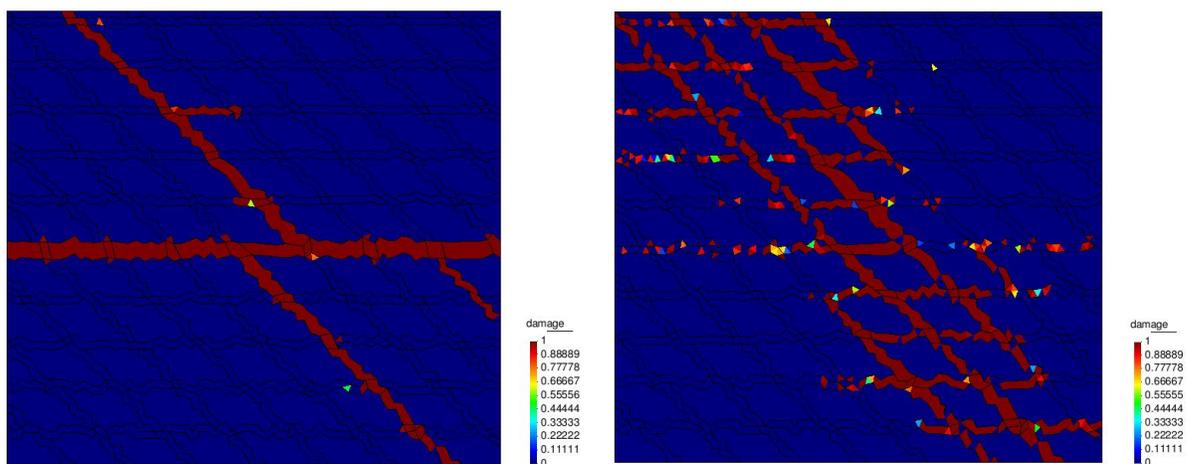
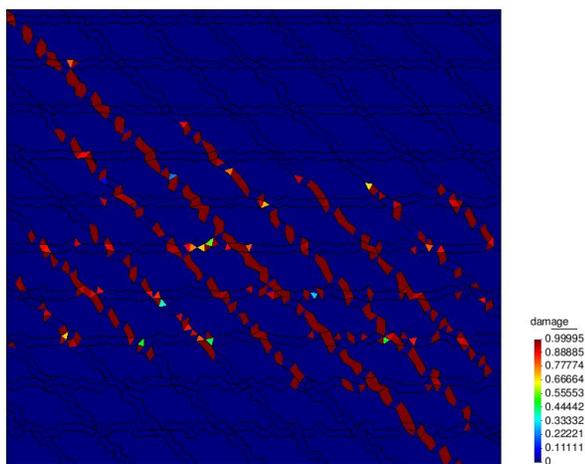


Fonte: a autora

A Figura 77 apresenta a variável de dano, em uma malha deformada ($\times 100$), indicando os elementos que foram danificados pelo procedimento de fraturamento hidráulico. E a Figura 78 apresenta a distribuição final do campo de permeabilidade após o fraturamento hidráulico.

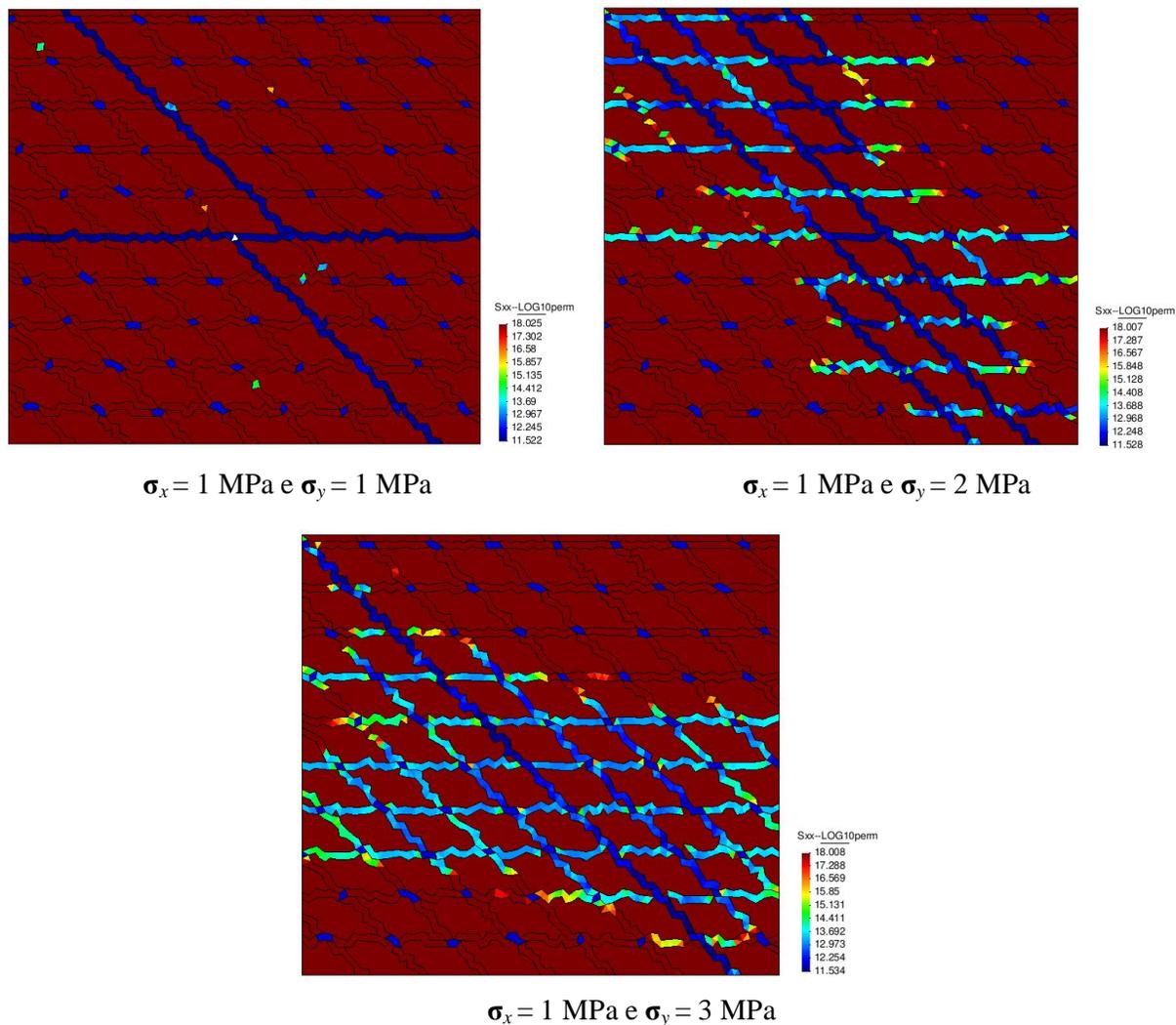
No cenário de tensões *in situ* isotrópicas, ocorre o aumento de permeabilidade apenas ao longo das fraturas principais abertas. Nos cenários de anisotropia de tensões pode-se observar o aumento da permeabilidade em uma região no entorno da fratura principal, uma vez que as fraturas conectadas à fratura principal também são abertas e contribuem para o aumento global da permeabilidade do meio.

Figura 77 - Variável de dano em malha deformada (100x) para os diferentes cenários de tensões.

 $\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 1 \text{ MPa}$ $\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 2 \text{ MPa}$  $\sigma_x = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_y = 3 \text{ MPa}$

Fonte: a autora

Figura 78 - Distribuição do campo de permeabilidade após fraturamento hidráulico para os diferentes cenários de tensões.



Fonte: a autora

Os resultados apresentados mostram a sensibilidade do fraturamento hidráulico em relação ao estado inicial de tensões. As técnicas numéricas e modelos constitutivos utilizados nas simulações foram capazes de prever a formação de uma rede de fraturas, que contribuem para um aumento global da permeabilidade do meio, quando o estado de tensões favorece a abertura de fraturas secundárias, além da fratura hidráulica principal.

5.6.2 Exemplo de Aplicação: Fraturas Aleatórias

Nesta análise numérica, o modelo simulado representa um maciço rochoso de dimensões 50 x 50 m, cortado por quatro famílias de fraturas naturais, que foram incorporadas à malha de elementos finitos. Este cenário de fraturas naturais foi gerado de maneira aleatória utilizando a ferramenta desenvolvida em MATLAB®, descrita anteriormente, onde os dados de entrada são: o número de famílias de fratura e o intervalo de variação dos valores de comprimento e abertura das fraturas e o espaçamento entre fraturas, para cada família.

Ao contrário do exemplo anterior, nesta análise pode ocorrer a propagação da fratura hidráulica pela rocha intacta, apesar da fratura induzida se difundir preferencialmente pelo caminho das fraturas naturais, devido à baixa resistência à tração e maior permeabilidade das mesmas. A ruptura e propagação da fratura pela rocha intacta pode acontecer, fazendo com que algumas fraturas se conectem a outras.

Para que a fratura se propague pela rocha intacta é necessário prever o caminho que a descontinuidade tomará. O algoritmo global de construção da trajetória de descontinuidade, apresentado no capítulo 2 deste trabalho, não é capaz de lidar com a propagação de múltiplas fraturas de maneira adequada. Por este motivo foi adotado um algoritmo simplificado de construção de trajetória.

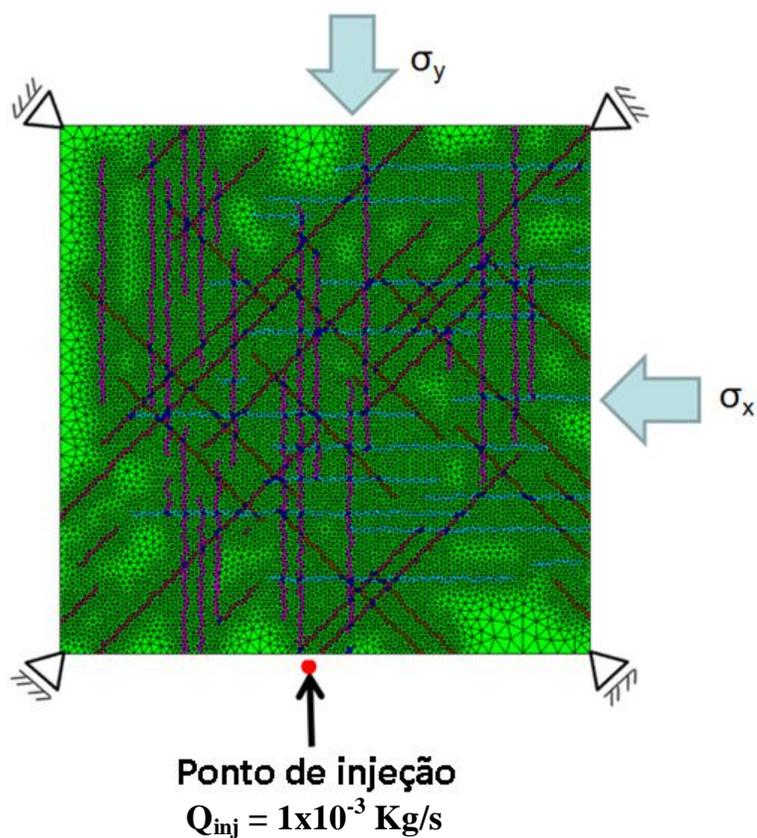
Neste algoritmo simplificado o critério de falha, dado pela equação (89) é verificado para todas as possíveis direções que a descontinuidade pode ter dentro do elemento. Para o elemento triangular, consideram-se três possíveis direções, como mostra a Figura 79. A direção na qual o critério de dano for atingido é então fixada para aquele elemento.

Figura 79 - Possíveis direções que a descontinuidade pode assumir dentro do elemento, segundo o algoritmo simplificado de construção da trajetória da fratura.



A Figura 80 apresenta a malha de elementos finitos utilizada na análise, composta de 14320 nós e 28295 elementos, e as condições de contorno do problema, bem como a posição das fraturas preexistentes.

Figura 80 - Malha de elementos finitos e condições de contorno do problema.



A Tabela 11 resume os parâmetros dos materiais adotados para a simulação. Nesse caso também foi avaliado o efeito do estado de tensão inicial na orientação e propagação das fraturas hidráulicas, sendo considerados os seguintes cenários:

- Cenário 1: $\sigma_x = 1$ MPa e $\sigma_y = 1$ MPa
- Cenário 2: $\sigma_x = 1$ MPa e $\sigma_y = 1,5$ MPa

Tabela 11 - Propriedades dos materiais.

Propriedades	Valores
Viscosidade do fluido (μ)	1×10^{-9} MPa/s.
Permeabilidade intrínseca da rocha (k_{α})	10^{-21} m ²
Abertura inicial da fratura (h)	0,015 mm
Porosidade da rocha (ϕ)	0,10
Coefficiente de Biot (α)	1,00
Energia de fratura (G_f)	100 N/m
Resistência à tração da rocha (f_t)	3 MPa
Resistência à tração da fratura (f_f)	0,1 MPa
Módulo de elasticidade (E)	1×10^5 Mpa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,30

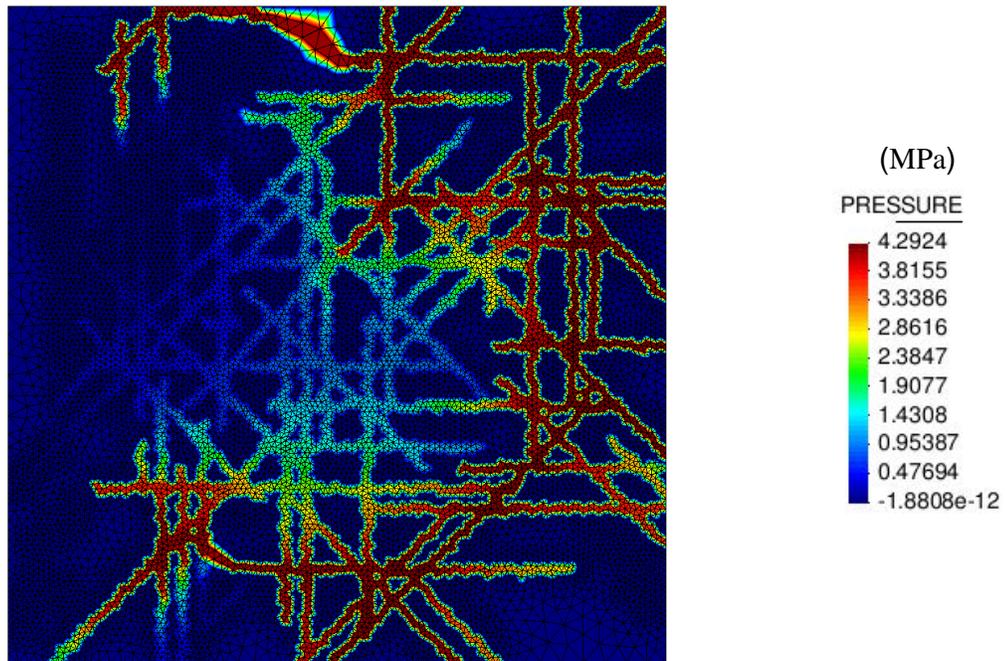
A Figura 81 mostra a pressão de líquido ao final da simulação. Neste cenário de tensões iniciais isotrópicas não existe uma direção preferencial para o fraturamento e as fraturas preexistentes são reativadas de maneira dispersa.

As fraturas preexistentes representam planos de fraqueza na formação rochosa e suas propriedades elásticas estão degradadas desde o início da análise (variável de dano, $d=1$). Na Figura 82 pode-se observar a variável de dano, com destaque para as regiões onde os elementos que não eram cruzados por fraturas naturais atingiram o critério de ruptura e sofreram degradação. Essa ruptura da matriz rochosa favorece a conexão das fraturas naturais, aumentando assim a densidade da rede de fraturas e a permeabilidade global do meio.

A Figura 83(a) mostra o salto do campo de deslocamento na direção normal à descontinuidade, que representa a abertura das fraturas. Essa abertura provoca um aumento na permeabilidade do meio fraturado, segundo a lei de evolução da

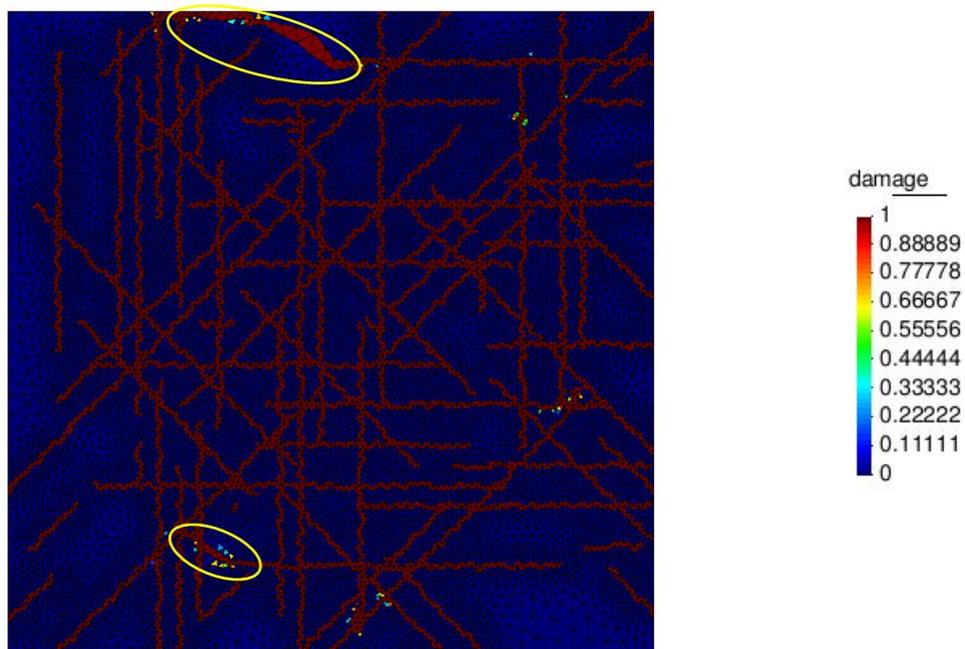
permeabilidade, equação (143). O campo de permeabilidade final, após o processo de fraturamento, pode ser visto na Figura 83(b).

Figura 81 - Distribuição da pressão de fluido para o estado inicial de tensões isotrópicas.



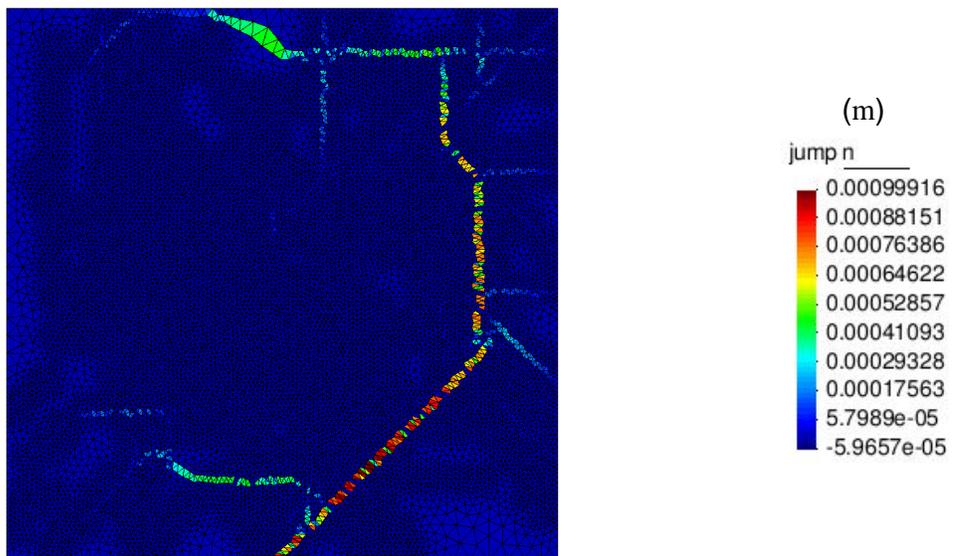
Fonte: a autora

Figura 82 - Variável de dano com destaque nas regiões onde a rocha intacta foi fraturada.

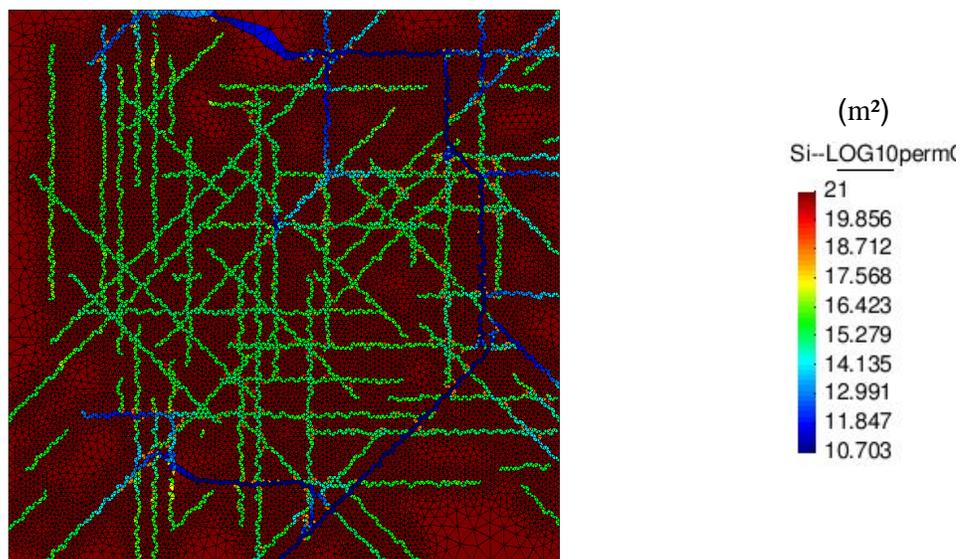


Fonte: a autora

Figura 83 - (a) Abertura das fraturas (salto no campo de deslocamentos) com a malha deformada (x200), (b) Campo de permeabilidade final.



(a)

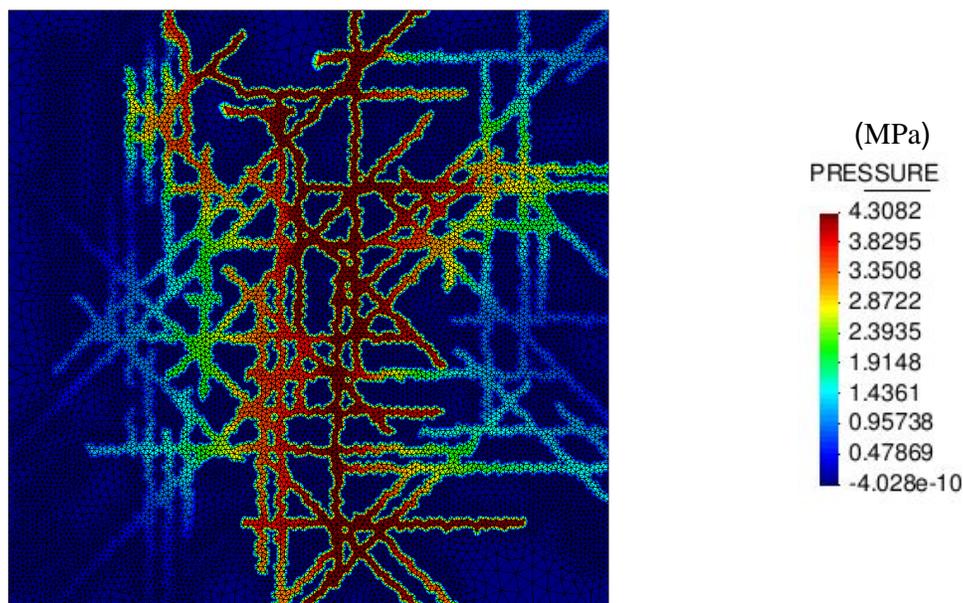


(b)

Fonte: a autora

No cenário onde as tensões iniciais são anisotrópicas (1:1,5), as fraturas se propagam preferencialmente na direção da tensão principal maior, que neste exemplo corresponde à direção vertical. Essa direção preferencial pode ser observada na Figura 84 que mostra a distribuição da pressão de fluido no final do processo de fraturamento hidráulico

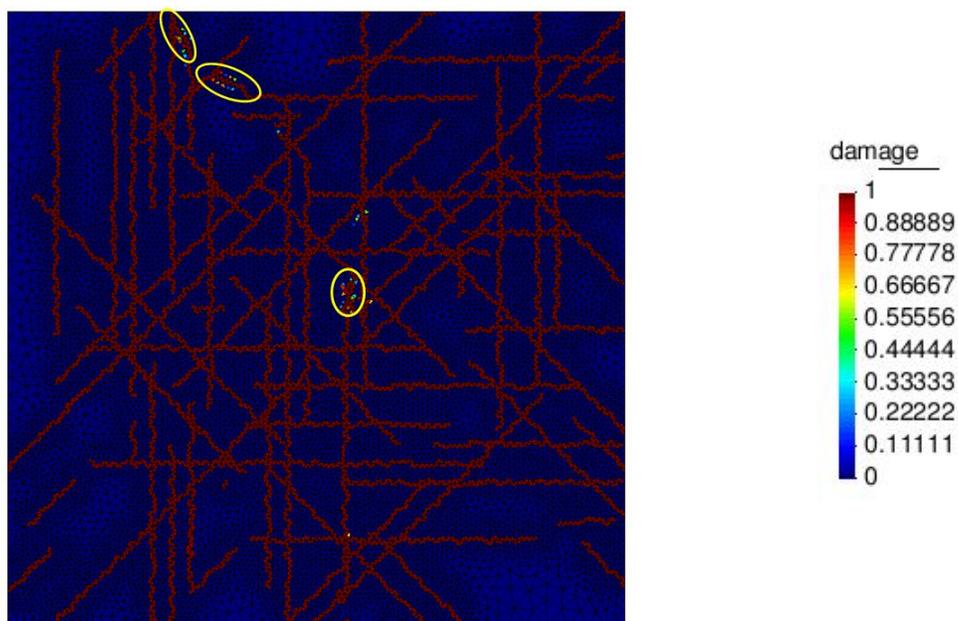
Figura 84 - Distribuição da pressão de fluido para o cenário de anisotropia nas tensões iniciais (1:1,5).



Fonte: a autora

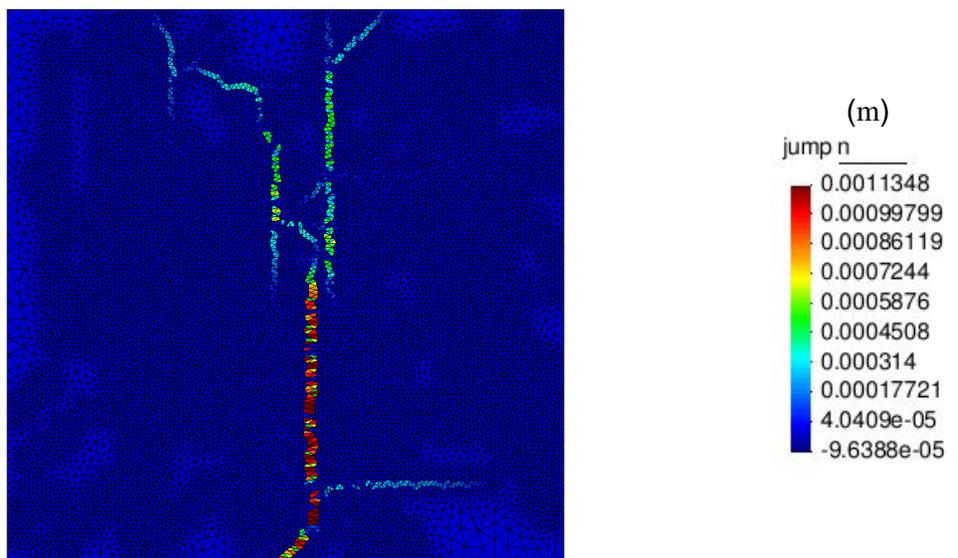
A Figura 85 apresenta a variável de dano, destacando as regiões onde a rocha intacta atingiu o critério de ruptura. A Figura 86(a) mostra a abertura das fraturas no final do fraturamento hidráulico e na Figura 86(b) pode-se observar o campo de permeabilidade global resultante desse processo.

Figura 85 - Variável de dano com destaque nas regiões onde a rocha intacta foi fraturada.

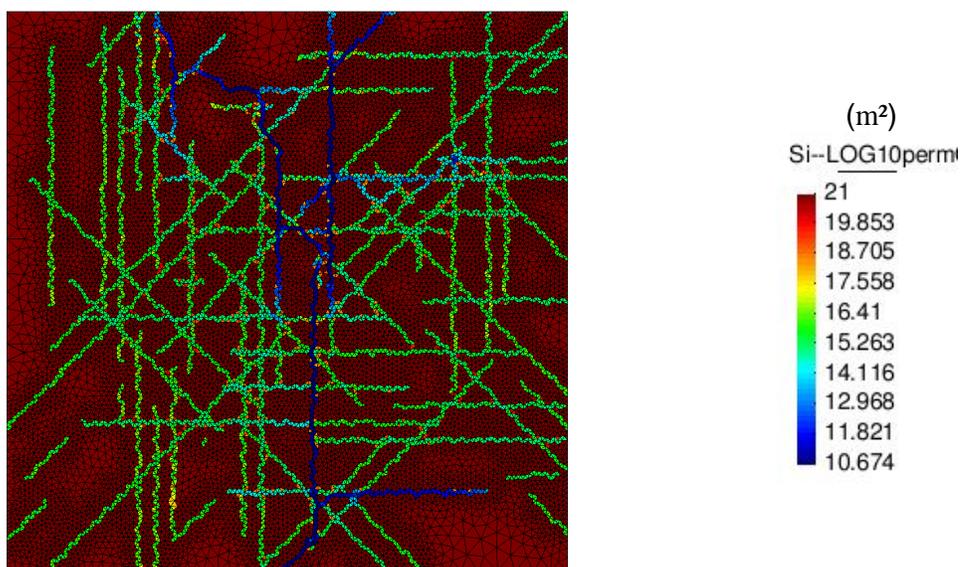


Fonte: a autora

Figura 86 - (a) Salto no campo de deslocamentos na direção normal à descontinuidade (abertura da fratura) com a malha deformada (x200); (b) Campo de permeabilidade final.



(a)



(b)

Fonte: a autora

Quando as tensões iniciais são isotrópicas, não existe uma direção preferencial para a abertura da fratura, e a propagação ocorre pelo caminho das primeiras fraturas naturais que são pressurizadas. Já no cenário de anisotropia de tensões uma fratura principal é aberta na direção da tensão principal maior e as

fraturas naturais que se conectam com a principal são também pressurizadas, aumentando a permeabilidade do meio no entorno da fratura principal.

Além disso, nos dois cenários, quando o estado de tensão na ponta da fratura supera a resistência à tração da rocha, ocorre a propagação da fratura pela rocha originalmente intacta, esse fenômeno contribui para a formação de uma rede, interligando fraturas que antes não se conectavam.

6 PROBLEMA DO FECHAMENTO DE FRATURAS

Nos reservatórios naturalmente fraturados, essas fraturas podem representar o principal caminho para o fluxo de fluidos. Desta forma a magnitude da permeabilidade das fraturas tem um papel fundamental na produtividade desse tipo de reservatório.

Entretanto, em reservatórios sensíveis ao estado de tensões, o decaimento da pressão estática devido à produção do reservatório pode acarretar o fechamento das fraturas em função do aumento da tensão confinante efetiva. Assim, a interação entre o fluxo de fluidos e a deformação do reservatório pode promover uma redução significativa da permeabilidade global da formação.

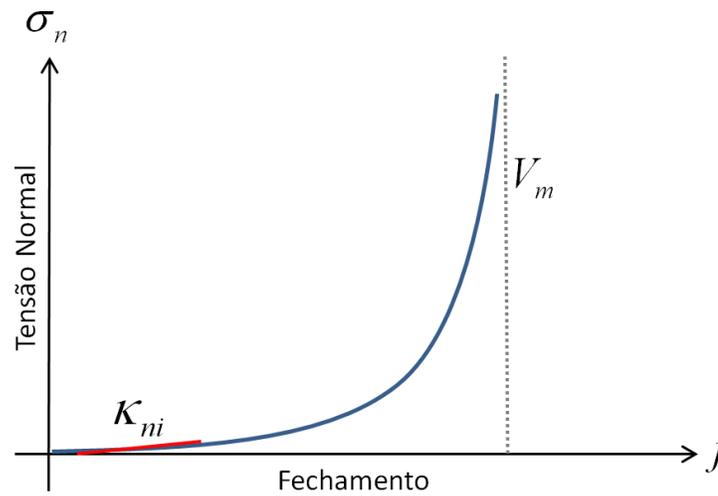
Em um reservatório fraturado, constituído por matriz e fratura, a deformabilidade da fratura pode ser maior do que a deformabilidade da matriz. O contraste entre estes valores depende de muitos fatores, como por exemplo, o grau de cimentação das fraturas, a orientação das fraturas, as tensões *in situ* e a pressão de poros no reservatório [95].

Deste modo, compreender as características hidráulicas da rede de fraturas como função da tensão confinante efetiva é fundamental para a concepção do plano de desenvolvimento do reservatório, além da previsibilidade do seu comportamento.

6.1 Modelo Constitutivo para o Fechamento de Fraturas

Nesse contexto, foi adotado o modelo hiperbólico de fechamento de fraturas proposto por [96] e [97] para representar o comportamento mecânico do meio fraturado. O modelo constitutivo de Barton-Bandis trata o fechamento das fraturas pré-existentes quando submetidas a tensões normais compressivas. É um modelo elástico não linear, com uma rigidez inicial de Barton-Bandis (κ_{ni}) e converge assintoticamente para o fechamento máximo da fratura (V_m), como mostra a Figura 87.

Figura 87 - Curva tensão normal versus fechamento para o modelo constitutivo de Barton-Bandis
(Relação de Goodman)



Fonte: a autora

Neste modelo, o fechamento das fraturas é dado por:

$$j = \frac{\sigma_n V_m}{\sigma_n - \kappa_{ni} V_m} \quad (167)$$

onde σ_n é a componente de tensão de compressão normal à fratura e V_m é o fechamento máximo da fratura.

A abertura hidráulica da fratura é dada por:

$$e = e_0 - j \quad (168)$$

onde e_0 é a abertura inicial, e a permeabilidade da fratura é dada em função de sua abertura pela seguinte relação:

$$k_f = \frac{e^2}{12} \quad (169)$$

6.2 Incorporação das Fraturas Naturais na Malha de Elementos Finitos

Para incorporar a rede de fraturas naturais na malha de elementos finitos, honrando o mapeamento geológico dessas fraturas, foi acrescentado um módulo geológico, desenvolvido no Laboratório de Métodos Computacionais e Geomecânica da UFPE (LMCG), ao programa em MATLAB®, INSERE_FRATURAS.

O objetivo desse módulo geológico é gerar campos com redes de fraturas discretas respeitando as principais características das famílias de fraturas, que são: mergulho, azimute, frequência P10 (densidade de fraturas), função distribuição de probabilidade (PDF) dos tamanhos de fraturas (lognormal, triangular, constante ou exponencial negativa) e relações entre o tamanho e as aberturas das fraturas.

As fraturas são geradas de maneira aleatória apenas com relação à posição onde são encontradas, porém seguindo os seguintes vieses de orientação espacial e de frequência [98]:

- Viés espacial: o programa criado aceita diferentes famílias de fraturas. Cada uma dessas famílias é caracterizada por uma orientação espacial definida pelo mergulho (ângulo das fraturas com relação ao plano horizontal) e azimute (ângulo que a fratura faz com relação ao Norte geográfico). Portanto, para cada uma das famílias de fraturas que se deseja gerar, é necessário que sejam fornecidas as respectivas orientações de mergulho e azimute;
- Viés de tamanho das fraturas: os tamanhos das fraturas podem ser gerados de maneira totalmente aleatória dentro da região de interesse, assim como utilizando PDFs com médias e desvios padrões dados. Vale ressaltar que uma vez dado os tamanhos das fraturas podemos encontrar as aberturas correspondentes a esses tamanhos a partir de correlações empíricas como as propostas por [99].
- Viés da frequência das fraturas (P10): na geração da rede de fraturas, o número de fraturas para cada uma das famílias existentes pode ser especificado em um determinado perfil linear localizado em algum ponto do campo. Desse modo podemos honrar as densidades P10 segundo o critério de obtenção dessas medidas;
- Relação empírica entre as aberturas e os tamanho das fraturas: o usuário pode determinar essa relação dentro do código. Caso não possua tal

informação a mesma pode ser determinada a partir de correlações lineares de PDFs do tipo lognormal, exponencial negativa e triangular.

Se o determinado reservatório tiver dados de perfis de poços com informações de fraturas, o programa INSERE_FRATURAS consegue identificar as principais possíveis famílias, bem como suas respectivas densidades P10. Para isso o gerador de fratura utiliza o método de clusterização K-MEANS.

Uma vez que essa rede de fraturas foi gerada pelo módulo geológico, a base de dados é lida pelo programa CODE_BRIGTH, que insere nos elementos finitos os planos de fraturas, identificando, para cada elemento, a fratura natural que passa por ele, sua direção e abertura inicial.

6.3 Caso de Aplicação: Produção em Reservatório Naturalmente Fraturado

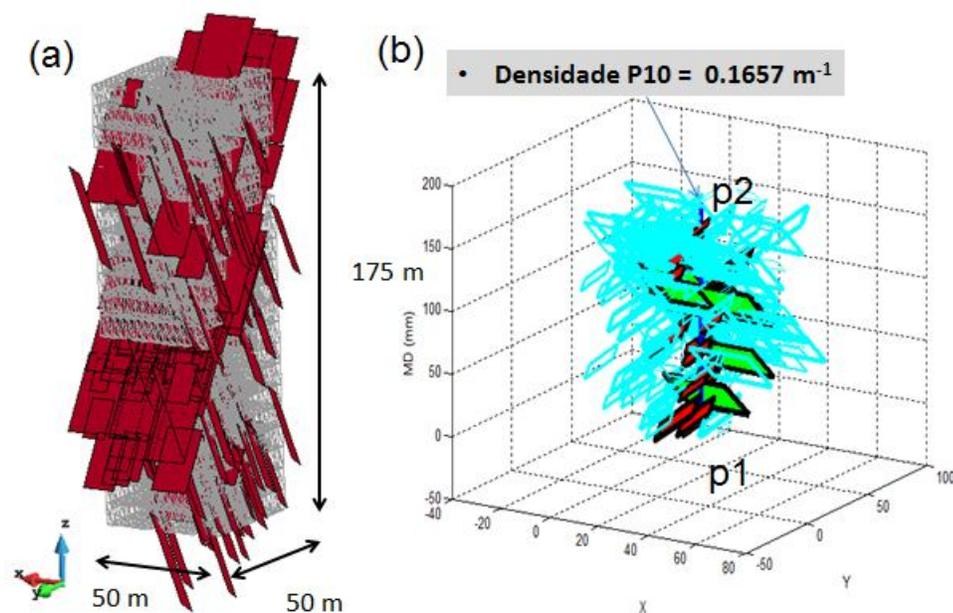
Um estudo sobre a redução repentina nas reservas de gás e nas taxas de produção do campo de *Bulo Bulo*, na Bolívia, como sendo decorrentes de efeitos geomecânicos de colapso/fechamento das fraturas, é apresentado por [100]. Neste trabalho, o autor aponta que o decréscimo da taxa de produção foi provocado por um aumento repentino das tensões efetivas na formação, causando o colapso das fraturas existentes e diminuindo a permeabilidade na região em torno dos poços de produção. Segundo [100], existem grandes reservas de hidrocarbonetos em reservatórios naturalmente fraturados sensíveis ao estado de tensões, não só na Bolívia, mas em toda a América Latina.

Neste trabalho, foi realizada a simulação do problema de fechamento de fraturas naturais por depleção do reservatório. O cenário analisado é representativo de um campo localizado na Colômbia. Esse estudo foi desenvolvido, no âmbito de um projeto de pesquisa realizado pelo Laboratório de Métodos Computacionais em Geomecânica (LMCG) da UFPE, com apoio da empresa *Equión Energía*.

A Figura 88 mostra a rede de fraturas obtida, de acordo com os atributos geológicos fornecidos, e incorporada à malha de elementos finitos. O reservatório simulado é cortado por, pelo menos, duas famílias de fraturas e está submetido a um estado de elevadas tensões confinantes. A formação se localiza em uma região de altas tensões tectônicas, onde a tensão vertical é a intermediária entre as

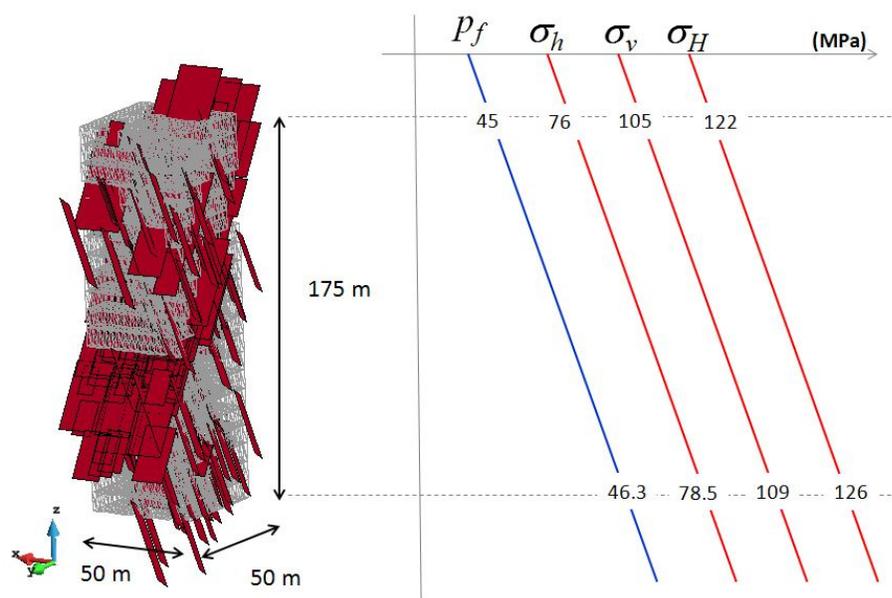
tensões horizontal maior e menor. A Figura 89 apresenta o estado de tensões atuante no reservatório estudado.

Figura 88- (a) Rede de fraturas e malha de elementos finitos, (b) linha de referência da medida de densidade P10.



Fonte: a autora

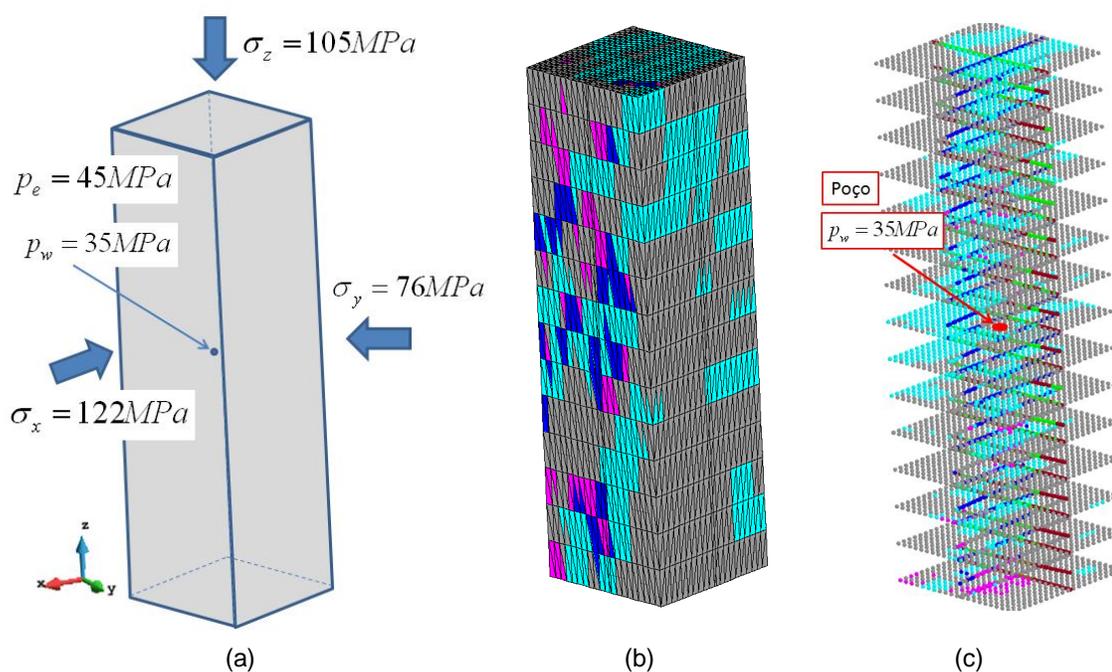
Figura 89 - Estado de tensões atuante no reservatório.



Fonte: a autora

A Figura 90(a) mostra um esquema da análise numérica realizada. São impostas restrições de deslocamento em todas as faces da geometria, e o estado de tensões inicial também é imposto. Em um nó no centro da malha, é aplicada uma pressão de fluido 10 MPa menor do que a pressão estática do reservatório. As propriedades mecânicas e hidráulicas adotadas nesta simulação estão listadas na Tabela 12.

Figura 90 - (a) Estado de tensões da análise numérica, (b) malha de elementos finitos utilizada e (c) visualização dos nós da malha.



Fonte: a autora

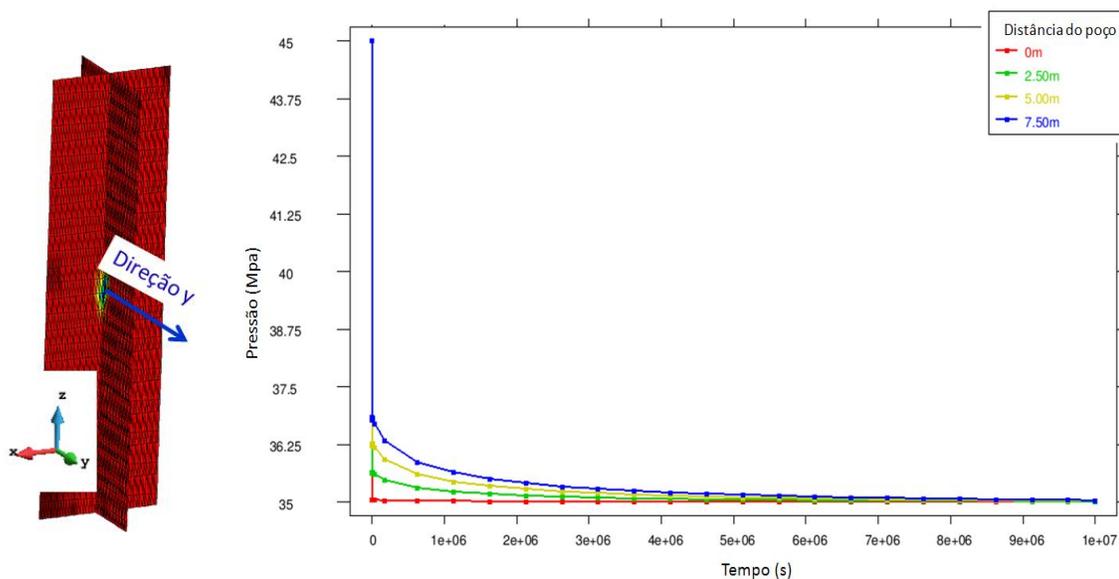
Tabela 12 - Propriedades mecânicas e hidráulicas do problema.

Propriedades	Valores
Viscosidade do fluido (μ)	1×10^{-9} MPa/s.
Permeabilidade intrínseca da rocha (k_{α})	4×10^{-22} m ²
Abertura inicial da fratura	1,0 mm
Porosidade da rocha (ϕ)	0,05
Coefficiente de Biot (α)	1,00
Módulo de elasticidade (E)	10 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,30
Rigidez inicial de Barton-Bandis (κ_{ii})	200 MPa

As Figuras 91, 92 e 93 apresentam a evolução da pressão nas direções y, x e z, respectivamente. A permeabilidade da matriz rochosa desse reservatório foi considerada praticamente nula, portanto, o fluxo ocorre principalmente pela rede de fraturas naturais. A despressurização do poço pode provocar o fechamento das fraturas e diminuir drasticamente a permeabilidade global da formação.

Nas curvas da Figura 91, observa-se que a pressão do poço se propaga rapidamente para os nós nas suas proximidades, o que indica que a permeabilidade, nesta direção, não foi diminuída. Entretanto, nas Figuras 92 e 93, a pressão do poço não se propaga tão rapidamente, o que pode indicar que as fraturas, nestas direções, sofreram colapso e a permeabilidade na proximidade do poço foi reduzida. Este efeito de anisotropia na permeabilidade da formação é, exclusivamente, devido à posição das fraturas naturais com relação aos eixos x, y e z.

Figura 91 - Evolução da pressão de fluido para diferentes pontos da malha na direção y.



Fonte: a autora

Figura 92 - Evolução da pressão de fluido para diferentes pontos da malha na direção x

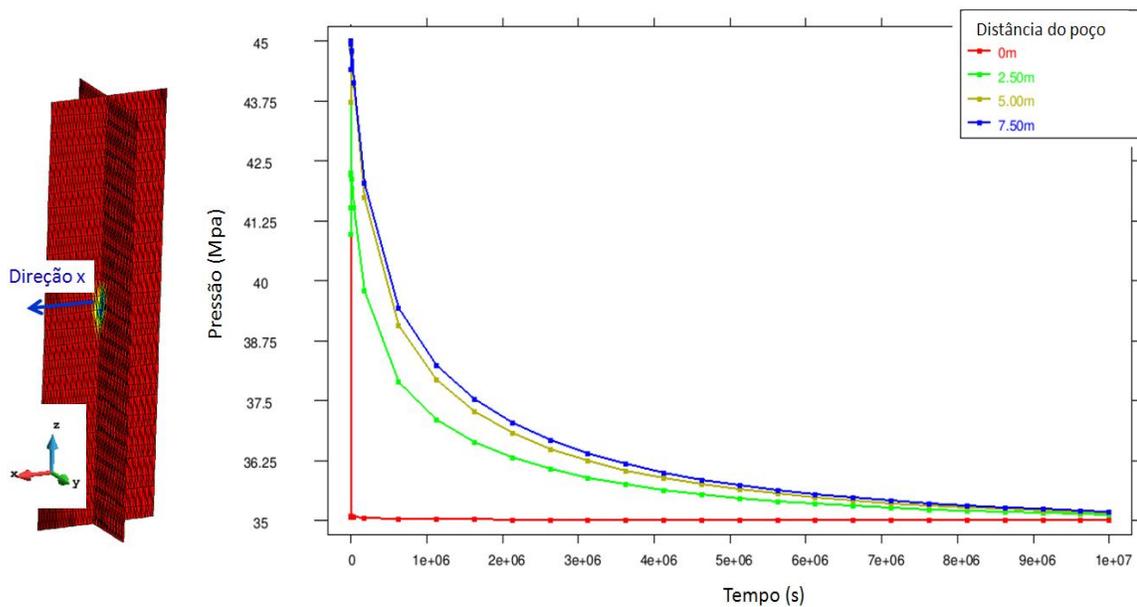
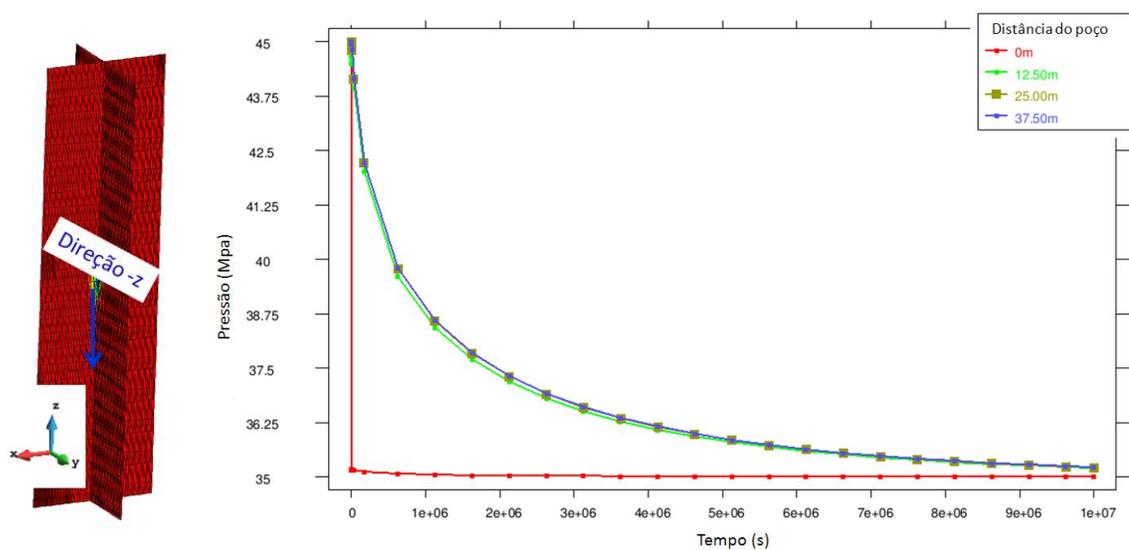
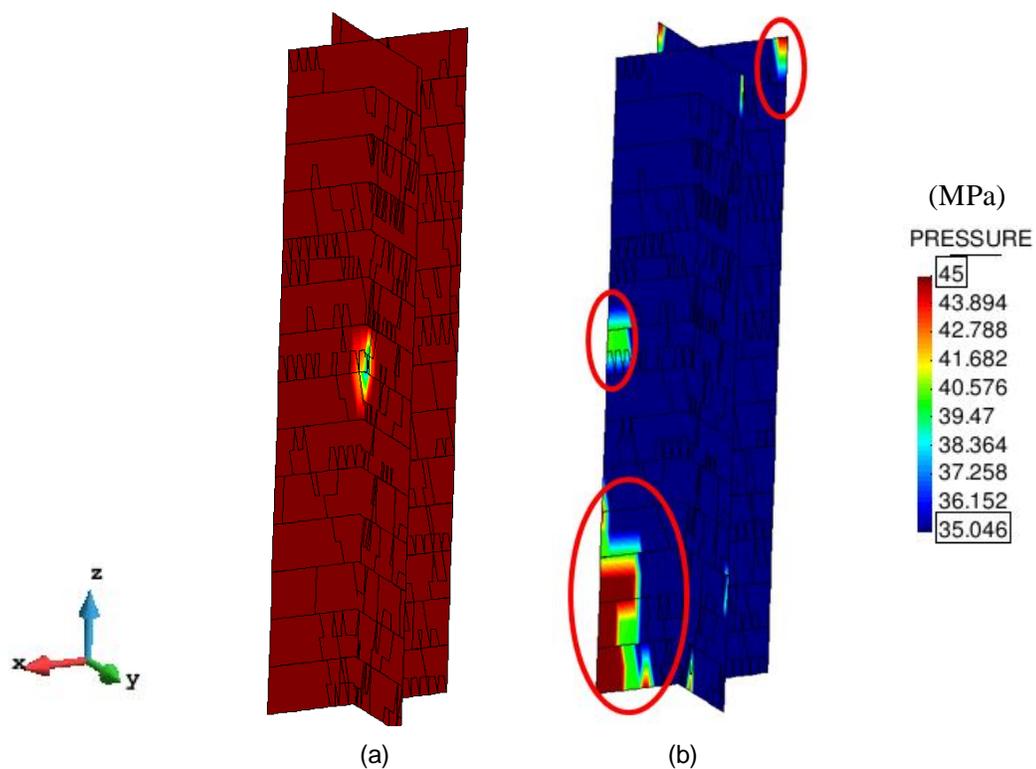


Figura 93 – Evolução da pressão de fluido para diferentes pontos da malha na direção -z.



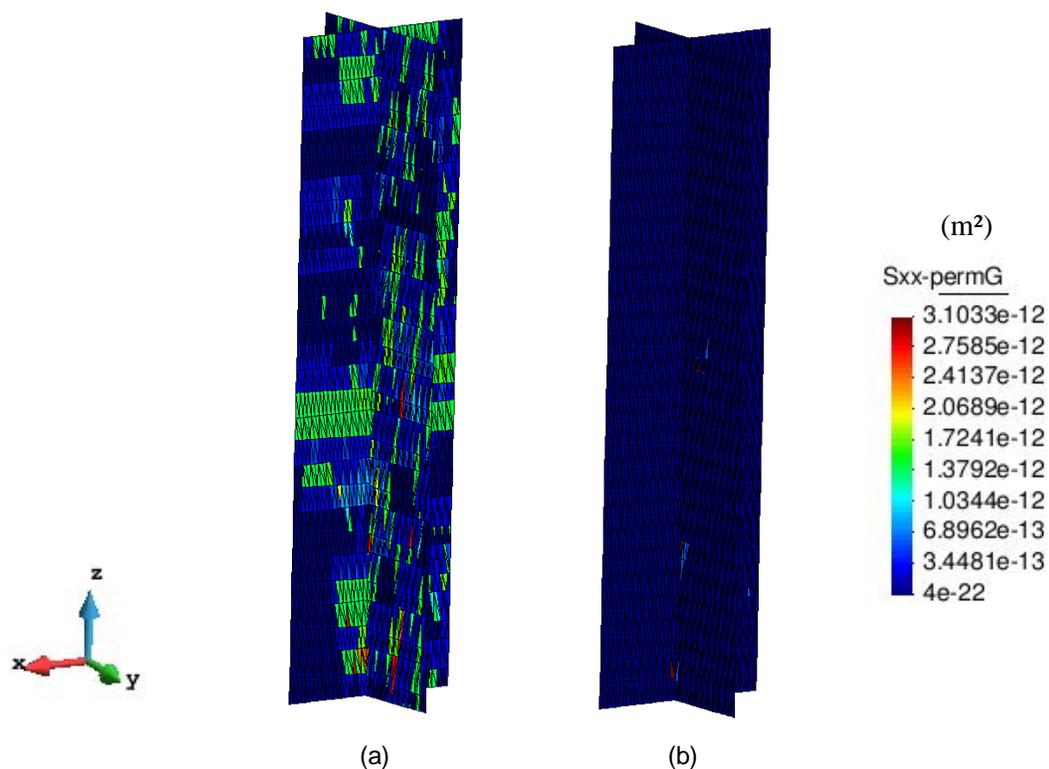
A Figura 94 apresenta a distribuição da pressão de fluido no reservatório nos instantes inicial e final da simulação. Na Figura 94(b) estão destacadas as regiões que não sofreram despressurização por não serem atingidas pelas fraturas. A queda na permeabilidade global da formação, devido ao fechamento das fraturas, pode ser observada na Figura 95 que apresenta a distribuição da permeabilidade para os instantes inicial e final da simulação.

Figura 94 - Distribuição da pressão de fluido no (a) início da simulação e (b) final da simulação.



Fonte: a autora

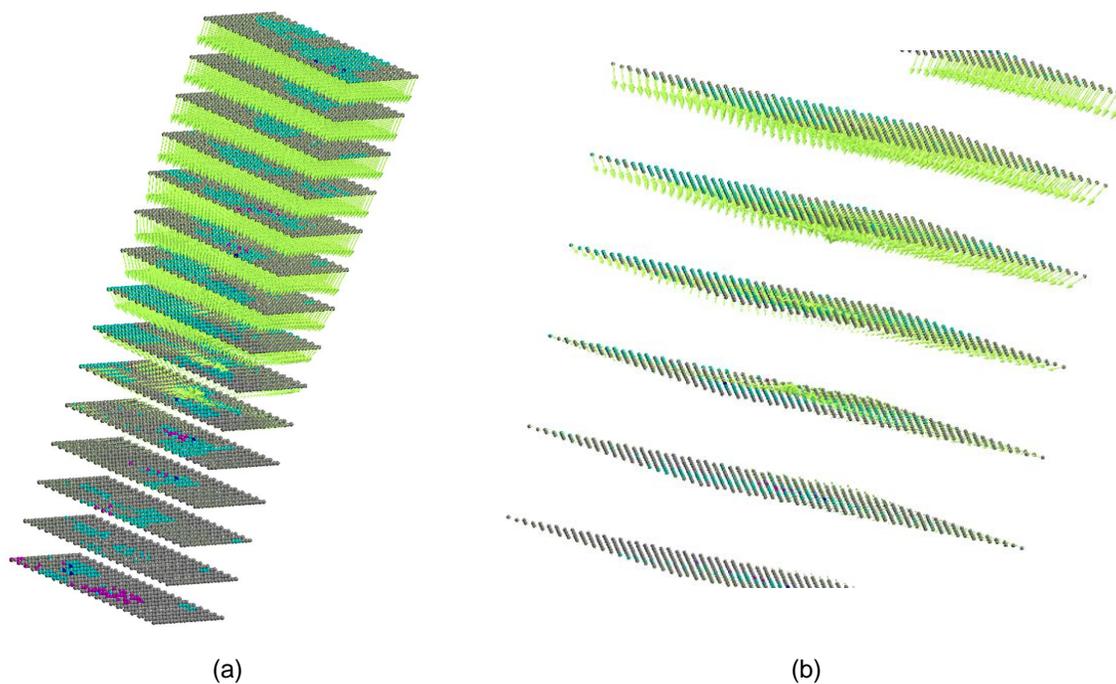
Figura 95 - Distribuição da permeabilidade no (a) início da simulação e (b) final da simulação.



Fonte: a autora

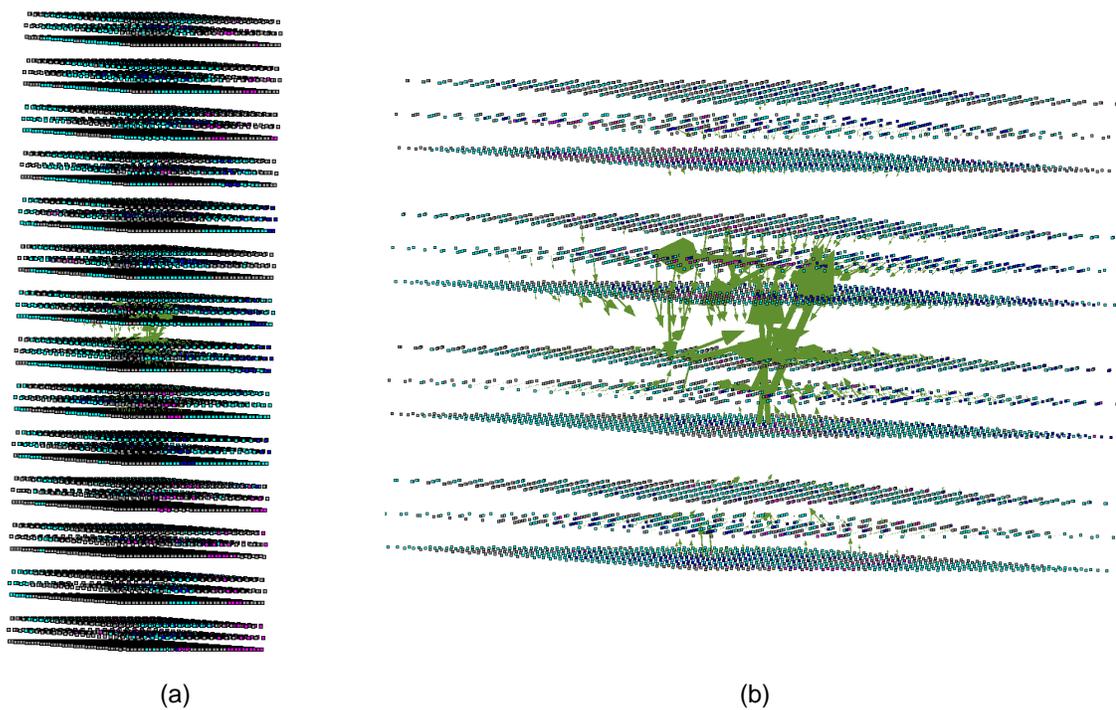
A Figura 96 apresenta os vetores de deslocamento no final da simulação. Conforme esperado, os vetores de deslocamento convergem em direção ao poço e há uma compactação do reservatório. A Figura 97 mostra os vetores de fluxo, que se dá de maneira não uniforme na malha, uma vez que ocorre principalmente através das fraturas.

Figura 96- (a) Vetores de deslocamento, (b) detalhe dos vetores na região próxima ao poço.



Fonte: a autora

Figura 97- (a) Vetores fluxo, (b) detalhe dos vetores de fluxo na região próxima ao poço.



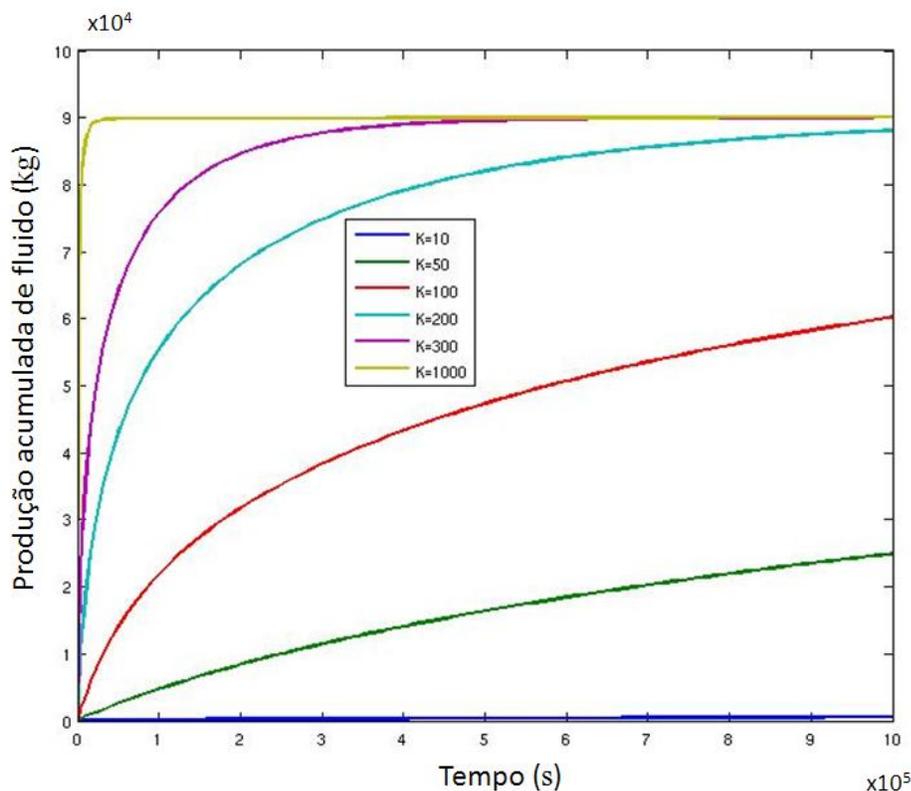
Fonte: a autora

Com o objetivo de analisar a sensibilidade ao parâmetro de rigidez inicial de Barton-Bandis (κ_{ni}) no modelo implementado, foram realizadas diversas análises, variando os valores desse parâmetro. A Figura 98 apresenta o gráfico da produção acumulada de fluido para diferentes valores de rigidez inicial de Barton-Bandis.

Quanto mais rígida a fratura, menor o fechamento e mais rápido ocorre a depleção. Por outro lado, quando a fratura é pouco rígida ocorre o fechamento e a região nas proximidades do poço é danificada, perdendo permeabilidade e impedindo a drenagem de fluido em direção ao poço

Ficou constatado também que o modelo de fechamento tem uma sensibilidade grande em relação ao parâmetro de rigidez (κ_{ni}). Portanto a modelagem precisa do problema de fechamento em reservatórios fraturados depende de uma melhor estimativa dos valores de rigidez de Barton-Bandis, que deve ser obtido experimentalmente para cada tipo de formação avaliada.

Figura 98 - Produção acumulada de fluido para diferentes valores de módulo de rigidez de Barton-Bandis.



7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

7.1 Conclusões

Neste trabalho foi proposta uma nova metodologia para simular numericamente o problema de fraturamento hidráulico em meios porosos de baixa permeabilidade de maneira robusta e eficiente. O objetivo era adotar a aproximação contínua de descontinuidades fortes incorporadas em elementos finitos para simular a formação e a propagação das fraturas e resolver o problema de maneira acoplada com a formulação de fluxo de fluido no interior de uma fratura.

A técnica de descontinuidades fortes incorporadas se mostrou eficiente, em relação ao custo computacional, para simular o fraturamento, uma vez que permite discretizar o domínio do problema com malhas relativamente grosseiras e, ainda assim, capturar, adequadamente, o efeito de uma descontinuidade de espessura muito menor do que o tamanho dos elementos da malha.

A metodologia desenvolvida neste trabalho foi capaz de simular adequadamente o problema de fraturamento hidráulico em meios contínuos ou em formações rochosas com fraturas naturais. Na simulação do ensaio de microfraturamento, o método reproduziu corretamente a curva esperada e obteve a resposta prevista pela solução analítica para a pressão de ruptura da rocha.

O modelo constitutivo de dano à tração, selecionado para representar o comportamento mecânico do meio poroso, se mostrou apropriado para a simulação da abertura de fraturas pelo mecanismo de ruptura à tração. Para garantir a convergência do código, foi implementado um algoritmo de integração de tensões implícito com projeção explícita da variável de dano (IMPL-EX). Além disso, um controle automático do passo de tempo foi implementado para garantir a robustez do algoritmo.

O algoritmo global de construção da trajetória de descontinuidade foi capaz de traçar o caminho das fraturas de maneira muito coerente em relação às fraturas observadas experimentalmente nos ensaios de vigas e painéis de concreto, porém para a simulação do fraturamento hidráulico em meios com fraturas preexistentes foi utilizado um algoritmo simplificado para traçar o caminho de propagação das fraturas.

O decaimento da pressão estática, durante a produção de reservatórios naturalmente fraturados, pode acarretar o fechamento dessas fraturas, em função do

aumento da tensão confinante efetiva. Nesse sentido, foi implementado o modelo constitutivo de Barton-Bandis, que é capaz de reproduzir, adequadamente, o comportamento do fechamento de fraturas submetidas a uma tensão normal compressiva.

As implementações realizadas neste trabalho, e os resultados obtidos, constituem uma importante ferramenta para o melhor entendimento do mecanismo de fraturamento hidráulico em formações rochosas e a influência dos vários fatores que estão envolvidos no processo.

7.2 Sugestões para Futuros Trabalho

- Validar o modelo proposto por este trabalho com relação à velocidade de propagação da fratura, comparando os resultados obtidos com a técnica apresenta e os provenientes de modelos clássicos de simulação de propagação de fraturas, bidimensionais (PKN e KGD) e tridimensionais (PL3D).
- Propor uma tratamento para o termo de *leak off*, que avalie a perda do fluido injetado para a formação.
- Implementar modelos de dupla-porosidade (DP) ou de dupla-porosidade e dupla-permeabilidade (DPDK) para tratar o fluxo nas fraturas. Nos modelos DP o fluido escoar somente pelo sistema de fraturas, o que representa idealmente os cenários de fraturas em meio impermeáveis. Já nos modelos DPDK o fluxo pode ocorrer tanto pelas fraturas quanto pela matriz, sendo este modelo mais adequado para cenários onde a formação tenha alguma permeabilidade [95].
- Implementar elementos de maior ordem de interpolação (triângulo de seis nós ou quadrilátero) para o problema mecânico, com o objetivo de cumprir com a condição de estabilidade de Babuska-Brezzi, para evitar, ou minimizar, as oscilações observadas nas análises hidromecânicas.

REFERÊNCIAS

- [1] FERNANDES, P. D. **Modelagem semi analítica pseudo tridimensional de propagação e fechamento de fraturas induzidas em rochas**. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.
- [2] ECONOMIDES, M. J.; OLIGNEY, R. E.; VALKÓ, . **Unified fracture design - bridging the gap between theory and practice**. New York: Orsa Press, 2001.
- [3] THE U.S. ENERGY INFORMATION ADMINISTRATION. **Evaluation of impacts to underground sources of drinking water by hydraulic fracturing of coalbed methane reservoirs**. Washington: USA Department of Energy, 2004.
- [4] API ENERGY. **American hydraulic fracturing: unlocking america's natural gas**. Texas: API Press. 2010.
- [5] GERTNER, J. The Lives They Lived: George Mitchell. **The new york times magazine**, New York, 21 dez 2013. Disponível em: <http://www.nytimes.com/news/the-lives-they-lived/2013/12/21/george-mitchell/?_r=0>. Acesso em: 10 ago. 2015
- [6] AGENCIA NACIONAL DE PETRÓLEO GÁS NATURAL E BIOCOMBUSTÍVEIS. **Reservas Brasileiras de gás convencional e potencial para gás não convencional**. Rio de Janeiro: AnP, 2012.
- [7] LANGE, T.; SAUTER, M.; HEITFELD, M. Hydraulic fracturing in unconventional gas reservoirs: risks in the geological system part 1. **Environmental Earth Sciences**, 70, n. Issue 8, p. 3839-3853, 2013.
- [8] THE U.S. ENERGY INFORMATION ADMINISTRATION. **World shale gas resources: an initial assessment of 14 regions outside the United States**. Washington: USA. Department of Energy, 2011.
- [9] RAHM, D. Regulating hydraulic fracturing in shale gas plays: The case of Texas. **Energy Policy**, 39, p. 2974-2981, 2011.
- [10] HUBBERT, M. K.; WILLIS D. G. Mechanics of hydraulic fracturing. **Transactions of Society of Petroleum Engineers of AIME**, 210, p. 153-168, 1972.
- [11] HAGSTRÖM, E. L.; ADAMS , J. M. Hydraulic Fracturing: Identifying and Managing the Risks. **Environmental Claims Journal**, 24, n. Issue 2, p. 93-115, 2012.
- [12] ZHANG A.; LIUA, H.; ZHANGC, J. Three-dimensional finite element simulation and parametric study for horizontal well hydraulic fracture. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, 72, p. 310-317, 2010.

- [13] HAIMSON, B.; KLAETSCH, A. Compaction bands and the formation of slot-shaped breakouts in St. Peter sandstone. **Geological Society London Special Publications**, 284, p. 89-105, 2007.
- [14] KISSINGER, A.; HELMIG, R.; EBIGBO, A.; CLASS, H. Hydraulic fracturing in unconventional gas reservoirs: risks in the geological system, part 2. **Environ. Earth Sci.**, 70, p. 3855-3873, 2013.
- [15] CACHAY, L. R. S. **Fluxo de partículas de sustentação em poços de petróleo estimulados por fraturamento hidráulico**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004.
- [16] ADACHI, J.; SIEBRITS, E.; PEIRCE, A.; DESROCHES, J. Computer simulation of hydraulic fractures. **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 44, p. 739-757, 2007.
- [17] RIBEIRO, P. M.; HORNE, R. N. Pressure and Temperature Transient Analysis: Hydraulic Fractured Well Application. In: SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2013, New Orleans. **Anais...**New Orleans: SPE, 2013.
- [18] MAHRER, K. D. A review and perspective on far-field hydraulic fracture geometry studies. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, 24, p. 13–28, 1999.
- [19] MULLEN, M.; PITCHER, J.; HINZ, D. Does the Presence of Natural Fractures Have an Impact on Production? A Case Study From the Middle Bakken Dolomite, North Dakota. **Society of Petroleum Engineers**, SPE 135319, 2010.
- [20] CHENG, W.; YAN, J.; MIAN, C.; TONG, X.; ZHANG, Y. . A criterion for a hydraulic fracture crossing a natural fracture in a 3D space and its field application. **Petroleum Explor. Dev.**, 41, p.1-6, 2014.
- [21] ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics fundamentals and applications**. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2005.
- [22] CARTER, et al. Simulating fully 3D hydraulic fracturing. **Model. Geomech.**, p. 525-557, 2000.
- [23] BAO, J. Q.; FATHI, E.; AMERI, S. A coupled finite element method for the numerical simulation of hydraulic fracturing with a condensation technique. **Engineering Fracture Mechanic**, 131, p. 269-281, 2014.
- [24] HARRISON E, KIERCHNICK, W.; McGUIRE, W. The mechanics of fracture induction and extension. **Petrol Trans AIME**, 63, p. 201-252, 1954.
- [25] PERKINS T, K. L. Widths of hydraulic fractures. **J Petrol Technol**, 13, p. 937-949, 1961.

- [26] NORDREN, R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture. **Society of Petroleum Engineers**, SPE 7834, p. 306-314, 1972.
- [27] GEERTSMA J.; KLERK, F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. **J Petrol Technol**, 21, p. 1571-1581, 1969.
- [28] ADVANI S.; LEE, T.; LEE, J. Three-dimensional modeling of hydraulic fractures in layered media: part I—finite element formulations. **J Energy Res Technol**, 112, p. 1-9, 1990.
- [29] ADACHI, J.; SIEBRITS, E.; PEIRCE, A.; DESROCHES, J. Computer simulation of hydraulic fractures. **Int J Rock Mech Min Sci**, 44, p. 739-757, 2007.
- [30] JING, L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering. **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 40, p. 283-353, 2003.
- [31] CARRIER, B.; GRANET, S. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model. **Engineering Fracture Mechanics**, 79, p. 312-328, 2012.
- [32] CHEN, Z. et al. Cohesive zone finite element-based modeling of hydraulic fractures. **Acta Mech. Solida**, p. 443-452, 2009.
- [33] PEIRCE, A.; DETOURNAY, E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 197, p. 2858-2885, 2008.
- [34] ZHANG, G.; LIU, H.; ZHANG, J.; WU, W.; WAN, X. Three-dimensional finite element simulation and parametric study for horizontal well hydraulic. **J. Petrol. Sci. Eng**, 72, p. 310-317, 2010.
- [35] WANGEN, M. Finite element modeling of hydraulic fracturing in 3D. **Comput. Geosci**, 17, n. 4, p. 647-659, 2013.
- [36] LI, L. C. et al. Numerical simulation of 3D hydraulic fracturing based on an improved flow-stress-damage model and a parallel FEM technique. **Rock Mech. Rock Eng.**, 45, p. 801-818, 2012.
- [37] OUYANG, S.; CAREY, G. F.; YEW, C. H. An adaptative finite element scheme for hydraulic fracturing with proppant transport. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 24, p. 645-670, 1997.
- [38] SIMO, J. et al. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independence inelastic solids. **Computational Mechanics**, 12, p. 277-296, 1993.

- [39] ZHANG, Y. et al. Strong discontinuity embedded approach with standard SOS formulation: Element formulation, energy-based crack-tracking strategy, and validations. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, 287, p. 335-366, 2015.
- [40] ARMERO, F.; CALLARI, . An analysis of strong discontinuities in a saturated poro-plastic solid. **Int. J. Numer. Methods Eng**, 46, p. 1673-1698, 1999.
- [41] CALLARI, C.; ARMERO, F. Strong discontinuities in partially saturated poroplastic solids. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, 199, p. 1513-1535, 2010.
- [42] WU, J.-Y.; LI, FENG-BO; XU, SHI-LANG. Extended embedded finite elements with continuous displacement jumps for the modeling of localized failure in solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2015.
- [43] SALIMZADEH, S.; KHALILI, N. A three-phase XFEM model for hydraulic fracturing with cohesive crack propagation. **Computers and Geotechnics**, 69, p. 82-92, 2015.
- [44] DE BORST, R.; RETHORE, J.; ABELLAN, M. A. A numerical approach for arbitrary cracks in a fluid-saturated medium. **Arch Appl Mech**, 75, p. 595-606, 2006.
- [45] WENG, X. Modeling of complex hydraulic fractures in naturally fractured formation. **Journal of Unconventional Oil and Gas Resources**, 9, p. 114-135, 2015.
- [46] OLIVELLA, S. et al. Numerical formulation for a Simulator (CODE_BRIGHT) for the coupled analysis of saline media. **Engineering Computations**, 13, p. 87-112, 1996.
- [47] OLIVELLA, S. et al. Nonisothermal multiphase flow of brine and gas through saline media. **Transport in Porous Media**, 15, p 271-293, 1994.
- [48] GUIMARÃES, L. J. N.; GENS, A.; OLIVELLA, S. Coupled Thermo-Hydro-Mechanical and Chemical Analysis of Expansive Clay Subjected to Heating and Hydration. **Transport in Porous Media**, 66, p.341—372, 2007.
- [49] OLIVER, J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. part 2: Numerical simulation. **International Journal Numerical Methods Engineering**, 39, n. 21, p. 3575-3623, 1993.
- [50] MANZOLI, O. L.; SHING, P. B. A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. **Computers & Structures**, 84, p. 742—757, 2006.

- [51] MANZOLI, O. L. **Contribuições à simulação numérica de descontinuidades fortes**. Tese de Livre Docência – Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, Bauru, 2008.
- [52] JIRÁSEK, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, 188, p. 307-330, 2000.
- [53] OLIVER, J. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. **Eng. Fracture Mech**, 69, 2002.
- [54] HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. New Jersey: Englewood Cliffs, 1987.
- [55] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method. Volume II: Solid Mechanics**, 5th. New York: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [56] POTTS, D. M.; ZDRAVKOVIC, L. **Finite element analysis in geotechnical engineering - Theory**. London: Thomas Telford Publishing, 1999.
- [57] SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational methods for plasticity - Theory and applications**. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- [58] SIMÓ, J. C.; OLIVER, J.; ARMERO, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-dependent inelastic solids. **Computational Mechanics**, 12, p. 277-296, 1993.
- [59] OLIVER, J.; CERVERA, M.; MANZOLI, O. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. **International Journal of Plasticity**, 15, p. 319-351, 1999.
- [60] LARSSON; RUNESSON. Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity. **J. Eng. Mech. ASCE**, 122, p.402-411, 1996.
- [61] JUÁREZ-LUNA, G.; AYALA, G. Improvement of some features of finite elements with embedded discontinuities. **Engineering Fracture Mechanics**, 2014.
- [62] OLIVER, J. et al. **On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics**. In: Fifth Congress on Computational Mechanics, 2012, Vienna. **Anais...Viena: V WCCM**, 2012.
- [63] JAGER, P.; STEINMANN, P.; KUHL, E. Modeling three-dimensional crack propagation - A comparison of crack path tracking strategies. **Int. J. Numer. Meth. Engrg**, 76, p.1328-1352, 2008.

- [64] BLANCO, S. **Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en medios tridimensionales mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo**. Tese de Doutorado - Universidad Politécnica da Cataluna, Barcelona, 2007.
- [65] OLIVER et al. Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 28, p. 609-632, 2004.
- [66] OLIVER, J.; HUESPE, A. E. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 193, p. 3195-3220, 2004.
- [67] MANZOLI, O. L. et al. A local-global scheme for tracking crack path in three-dimensional Solids. **Computers and Concrete**, 12, p. 261-283, 2013.
- [68] OLLER, S. **Fractura Mecánica Un enfoque global**. Barcelona: CIMNE, 2001.
- [69] SIMO; JU. Stress and strain based continuum damage models: I Formulation. **Int. J. Solids Struct**, 15, p. 821-840, 1987.
- [70] LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge: University Press, 1985.
- [71] RODRIGUES, E. A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis**. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, Bauru, 2011.
- [72] OLIVER, J. et al. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, 197, p. 332-348, 2008.
- [73] SÁNCHEZ, M.; MANZOLI, O. L.; GUIMARÃES, L. J. N. Modeling 3-D desiccation soil crack networks using a mesh fragmentation technique. **Computers and Geotechnics**, 62, 2014. 27-39.
- [74] OLIVER, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. **Int. Journ. Num. Meth. Engrg**, 28, 461-474, 1989.
- [75] OLIVER, J.; HUESPE, A. E.; CANTE, J. C. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, 197, p. 1865-1889, 2008.
- [76] SEIXAS, M. G. **Modelagem Hidro-mecânica do fraturamento hidráulico de rochas via Elementos Finitos com elementos especiais de interface**. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

- [77] INDRIYANTH, B. R.; NUROJI. Finite element modeling of concrete fracture in tension with the Brazilian splitting test on the case of plane-stress and plane-strain. **Procedia Engineering**, 95, p. 252-259, 2014.
- [78] ABNT. NBR 7222:1994 - Argamassa e concreto - Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos-de-prova cilíndricos - Método de ensaio. **Norma Brasileira**, 1994.
- [79] NOORU-MOHAMED, M. B. **Mixed-mode fracture of Concrete: an experimental approach**. Tese de Doutorado - Delft University of Technology, Delft, 1992.
- [80] BEAR. **Dynamics of fluids in porous media**. New York: Dover Publications, 1988.
- [81] KHOEI, A. R.; MOALLEMI, S.; HAGHIGHAT, E. Thermo-hydro-mechanical modeling of impermeable discontinuity in saturated porous media with X-FEM technique. **Engineering Fracture Mechanics**, 2012.
- [82] LARSSON, J.; LARSSON, R. Finite-element analysis of localization of deformation and fluid pressure in an elastoplastic porous medium. **International Journal of Solids and Structures**, 2000.
- [83] CALLARI, C.; ARMERO, F. Finite element methods for the analysis of strong discontinuities in coupled poro-plastic media. **Comput. Methods Appl. Mech Engrg.**, 191, p. 4371-4400, 2002.
- [84] Z. R. W. Fluid flow in rock fractures: From the navier-stokes equations to the cubic law. **Dynamic of Fluids in Fractured Rock**, 2000.
- [85] LEWIS, R. W.; SCHREFLER, B. A. **The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media**. 2nd ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2000.
- [86] ZOBACK, M. D. **Reservoir Geomechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [87] FJAER, E. et al. **Petroleum Related Rock Mechanics**. 2nd Edition. New York: Elsevier - Developments in Petroleum Science, 2008.
- [88] ROCHA, L. A. S.; AZEVEDO, C. T. **Projetos de Poços de Petróleo - Geopressões e Assentamento de Colunas de Revestimentos**. 2a. Edição, Rio de Janeiro: Interciência, 2009.
- [89] MURGAS, J. F. C. **Modelagem Numérica do Ensaio de Leak off em Poços de Petróleo**. Tese de Doutorado – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro. 2011.
- [90] TIMOSHENKO, S.; GOODIER, N. J. **Theory of Elasticity**. London: Mcgraw-Hill College, 1970.

- [91] YEW, C. H. **Mechanics of Hydraulic Fracturing**. Houston: Gulf Publishing Company, 1997.
- [92] SCHIMIDT, D. R.; ZOBACK, M. D. Poroelasticity Effects in Hydraulic Fracturing Tests -- A Proposed Breakdown Equation Employing a Modified Effective Stress Relation for Tensile Failure. **International Journal of Rock Mechanics, Mining Science & Geomechanics**, 26, p. 499-506, 1989.
- [93] WENG, X. Modeling of complex hydraulic fractures in naturally fractured formation. **Journal of Unconventional Oil and Gas Resources**, 9, p. 114-135, 2015.
- [94] GUIMARÃES, L. et al. **Caracterização, Modelagem Multiescala e Simulação Numérica de Reservatórios não Convencionais de Gás em Folhelhos**. Relatório Técnico – UFPE/LNCC/Petrobras SA, Rio de Janeiro, 2014.
- [95] LIMA, B. F. **Simulação de Reservatórios Naturalmente Fraturados**. Tese de Doutorado – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro. 2013.
- [96] BANDIS; LUMSDEN; BARTON. Fundamentals of rock joint deformation. **International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences & Geomechanics**, 20, 249-268, 1983.
- [97] BARTON; BANDIS; BAKHTAR. Strength, deformation and conductivity coupling of Rock Joints. **International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences & Geomechanics**, 22, p. 121-140, 1985,
- [98] SANTOS, R.; MIRANDA, T.; BARBOSA, J.; GOMES, I.; MATOS, G.; GALE, J.; NEWMAN, V.; GUIMARAES, L. Characterization of natural fracture systems: Analysis of uncertainty effects in linear scanline results. **AAPG Bulletin (Print)**, 99, p. 2203-2219, 2015.
- [99] GUDMUNDSSON, A. Geometry, formation, and development of tectonic fractures on the Reykjanes Peninsula, southwest Iceland. **Tectonophysics**, 139, 295–308, 1987.
- [100] NAVARRO, O. G. V. Closure of natural fractures caused by increased effective stress, a case study: Reservoir Robore III. In: SPE Latin America and Caribbean Petroleum Engineering Conference, 2012, Bulo Bulu. **Anais...Bulo Bulu**: SPE, 2012.