ências
ndiceAForma alternadas em $\mathbb{C}^N$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Juscelino Grigório Lopes

Finitude Genérica de Classes de Equilíbrios Relativos no Problema de Quatro Corpos

RECIFE

2016

Juscelino Grigório Lopes

Finitude Genérica de Classes de Equilíbrios Relativos no Problema de Quatro Corpos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. **EDUARDO SHIRLIPPE GÓES LEANDRO**

RECIFE
2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

L864f Lopes, Juscelino Grigório
Finitude genérica de classes de equilíbrios relativos no problema de quatro copos / Juscelino Grigório Lopes. – 2016.
83 f.

Orientador: Eduardo Shirlippe Góes Leandro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, Recife, 2016.

Inclui referências e apêndices.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Geometria Algébrica. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Góes (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2016-099

JUSCELINO GRIGÓRIO LOPES

FINITUDE GENÉRICA DE CLASSES DE EQUILÍBRIOS RELATIVOS NO PROBLEMA DE QUATRO CORPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 26/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Aron Simis (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alain Albouy (Examinador Externo)
Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela paz que me concede a cada dia nessa jornada.

Aos meus pais e meus irmãos por todo amor e apoio incondicionais.

Ao meu orientador Eduardo Leandro pela paciência e confiança em meu trabalho.

Aos professores e colegas da UFPE pelos ensinamentos e companheirismo.

Aos membros da banca pela gentileza de participar da avaliação desse trabalho.

Ao CNPQ pela bolsa de estudos.

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos o conjunto de equilíbrios relativos não-colineares do problema de quatro corpos no plano complexo. Veremos que esse conjunto é uma subvariedade estratificada maximal de certa variedade algébrica real e provaremos a unicidade do vetor massa normalizado associado a cada ponto dessa subvariedade. Por meio de transformações de regularização, reduziremos a teoria de bifurcações de equilíbrios relativos ao estudo de uma correspondência algébrica entre variedades reais. Através dos teoremas de finitude para variedades algébricas reais, provaremos que existe uma cota para o número de classes de equilíbrios relativos não-colineares válida para todas as massas positivas no complementar de um subconjunto algébrico próprio no espaço das massas.

Palavras-chave: Equilíbrio Relativo. Finitude de Classes. Correspondência Algébrica. Conjunto de Bifurcações.

ABSTRACT

In this work, we study the set of non-collinear relative equilibria in the four-body problem in the complex plane. We will see that this set is a maximal stratified submanifold in a real algebraic variety and prove the uniqueness of the normalized vector mass associated with each point of this submanifold. By means of regularization transformations, we reduce the bifurcation theory to the study of an algebraic correspondence between real varieties. Through the theorems of finiteness for real algebraic varieties, we prove that there is an upper bound for the number of affine classes of non-collinear relative equilibria which holds for all positive masses in the complement of a proper, algebraic subset of all masses.

Keywords: Relative Equilibria. Finiteness of Classes. Algebraic Correspondence. Bifurcation Set.

SUMÁRIO

1 Introdução **8**

2 Equilíbrios Relativos do Problema de N Corpos no Plano Complexo **13**

2.1 O Problema de N Corpos em $\mathbb{C}$ 13

2.2 Caracterização de Equilíbrios Relativos via Matrizes Antissimétricas 18

3 O Conjunto de Equilíbrios Relativos Não-Colineares e Aplicação Massa **25**

3.1 O Conjunto de Equilíbrios Relativos Não-Colineares 25

3.2 Unicidade do Vetor Massa 32

3.3 O Espaço Quociente de $\mathscr{R}$ via Ação do Grupo $\mathbb{C}^{\times}$ 35

3.4 A Estrutura do Conjunto de Equilíbrios Relativos Não-colineares 39

4 Regularização de Singularidades e Teoremas de Finitude **54**

4.1 Regularização de Singularidades 54

4.2 Teoremas de Finitude 59

Referências **67**

Apêndices **69**

Apêndice A **69**

Apêndice B **78**

1 Introdução

Historicamente, as soluções de equilíbrios relativos do problema de N corpos foram tema de pesquisa de muitos matemáticos devido à suas propriedades peculiares. Entre eles, grandes matemáticos como Euler(1767) e Lagrange(1772). Estes matemáticos, foram os responsáveis pela demonstração da finitude de classes de equilíbrios relativos no problema de 3 corpos e também forneceram a classificação dessas classes.

Para $N = 2$ só existe uma configuração de equilíbrios relativos e a mesma é colinear. Agora, quando $N = 3$, existem apenas 5 classes de equivalência afim de equilíbrios relativos para qualquer escolha de $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^3$ (SIEGEL;MOSER, 1971). Duas dessas configurações consistem na disposição dos pontos ao longo dos vértices de um triângulo equilátero, correspondendo ao arranjo dos pontos nos sentidos horário ou no anti-horário. Esse tipo de configuração foi encontrada por Lagrange(1772) . As outras três configurações são colineares e cada uma delas provém de uma das três disposições possíveis de três pontos ao longo de uma mesma reta a menos de reflexão. Os equilíbrios relativos colineares foram descobertos por Euler(1767). Nesse caso, a distância entre os pontos nessas cinco configurações é determinada pelo vetor massa positivo m. Para $N \geq 4$ não existem configurações que são equilíbrios relativos para massas arbitrárias (WINTNER, 1941).

Através da exploração de simetrias para reduzir o número de variáveis, muitas soluções especiais tem sido encontradas. Moulton provou a existência de um único equilíbrio relativo colinear para cada uma das $\frac{N!}{2}$ permutações não-equivalentes pelo grupo afim de N pontos ao longo de uma reta, para qualquer escolha da massa m (MOULTON, 1910). Esse resultado é uma generalização do obtido por Euler para $N = 3$. A existência de pelo menos um equilíbrio relativo para cada ordenamento foi por Lehmann-Filhe (1891).

A disposição dos pontos nos vértices de um polígono regular é um equilíbrio relativo no caso de N massas iguais, e somente nesse caso (WINTNER, 1941; PERKO;WALTER, 1984). Além disso, configurações mais intrigantes envolvendo polígonos regulares encaixados tem se mostrado equilíbrios relativos quando as massas em cada vértice do mesmo polígono são iguais (LONGLEY, 1907) .

Outras formas de abordar esse problema têm sido utilizadas ao longo do tempo. Uma delas é via Teoria de Morse, que tem sido aplicada com o intuito de obter cotas inferiores para o número de classes afins de equilíbrios relativos válidos para massas arbitrárias (SMALE, 1971;PACELLA, 1972 ;PALMORE, 1975).

Essa teoria pode ser empregada porque a equação (1.7) pode ser interpretada como uma equação para pontos críticos da função potencial $U(z)$ sujeita à seguinte condição sobre o momento de inércia da posição inicial:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j |z_j - c|^2 = 1 \tag{1.1}$$

onde, a constante Λ desempenha o papel de um multiplicador de Lagrange.

Seja $(A_1(\mathbb{C}), \circ)$ o grupo de todas as transformações afins $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $T(w) = aw + b$, onde $a \in \mathbb{C}^\times$ e $b \in \mathbb{C}$, munido com a operação de composição. Esse grupo é chamado de *grupo afim*.

Neste contexto, através da ação do grupo afim $A_1(\mathbb{C})$, passamos a uma variedade quociente da variedade (1) e aplicamos Teoria de Morse para provar a existência de equilíbrios relativos não-colineares para todo N natural e para todo $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^N$. Além disso, note que essa variedade quociente não é compacta visto que tivemos que extrair o conjunto colisão Δ de $\mathbb{C}^N$. Desse modo, um fato importante provado por Shub em (SHUB,1971) mostra que para m positivo fixado podemos limitar o equilíbrio relativo associado longe de Δ, ou seja, existe uma vizinhança de cada ponto do conjunto colisão que não possui nenhum equilíbrio com massa m. Segue disso que, se os pontos críticos de $U(z)$ na variedade quociente são isolados, então deve existir apenas um número finito deles.

Como o problema não possui outras simetrias simples, isto é, propriedades geométricas que permitem a redução do número de variáveis, então é natural conjecturar, conforme feito por S. Smale (1971), que o número de equilíbrios é finito para todo m positivo, ou pelo menos para m fixo. A condição de isolamento é satisfeita para m positivo se a correspondente função U possui apenas pontos críticos não-degenerados, isto é, se U é uma função de Morse. Contudo, Palmore (1976) mostrou que isso não é sempre verdade. O conjunto de massas para o qual ele conseguiu dar exemplos de pontos críticos degenerados é de codimensão um no conjunto de todas as massas. Palmore também enunciou que o conjunto de massas que admite pontos críticos degenerados possui medida nula no conjunto de todas as massas.

Atualmente, o trabalho de Smale (1971) recebe um destaque especial nesse sentido visto que o mesmo conjecturou a finitude genérica das classes de equilíbrios relativos no problema de N corpos para massas positivas arbitrárias. A partir daí, vários matemáticos contemporâneos passaram a atacar o problema e a busca por demonstrações de finitude de classes se intensificou. Albouy(1996) provou a finitude e forneceu a classificação para as classes de equilíbrios no problema de 4 corpos no plano com massas iguais. Hampton e Moeckel(2006) provaram a finitude de classes de equilíbrios para $N = 4$ através do método desenvolvido por Bernstein e algumas ferramentas de Álgebra Computacional . Albouy e Kaloshin (2012) demonstraram a finitude de classes de equilíbrios para $N = 4$ sem o uso do computador . Embora esses resultados tenham sido muito importantes, o problema de finitude geral para $N \geq 5$ ainda segue em aberto.

Muitos dos trabalhos descritos acima tratam do problema de determinar para cada massa positiva m fixada os equilíbrios relativos correspondentes. Outra abordagem do problema consiste em perguntar quais vetores posição $z \in \mathbb{C}^N \smallsetminus \Delta$ são equilíbrios relativos para alguma massa positiva m, e então, dado um tal equilíbrio determinar as massas corrrespondentes. O estudo por meio dessa perspectiva foi iniciado por Dziobek (1900), por MacMillan e Bartky (1932) no caso $N = 4$ e por Williams (1938) no caso $N = 5$. Dentre os resultados obtidos por eles, existem caracterizações elegantes do conjunto de equilíbrios relativos não-colineares e teoremas de unicidade para os vetores massa correspondentes.

Nessa dissertação, baseada no artigo "Relative equilibria in the four body problem"de Moeckel (1985), estudaremos minuciosamente a finitude de classes de equilíbrios relativos no problema de quatro corpos no plano complexo.

No capítulo 1, vamos estudar as soluções de equilíbrio relativo do problema de N corpos no plano complexo. Nesse sentido, exibiremos equações explícitas que caraterizam o equilíbrio relativo para todo N. Além disso, veremos os principais resultados da literatura sobre essas soluções. Por fim, transformaremos essas equações para equilíbrios através de procedimentos algébricos e exibiremos equações equivalentes no espaço das matrizes antissimétricas para o caso em que $N = 4$.

No capítulo 2, veremos que o conjunto de equilíbrios relativos não-colineares para $N = 4$ é aberto no conjunto solução de certas equações explícitas e veremos que o vetor massa positivo associado a cada ponto desse conjunto é único no espaço das massas normalizadas (teoremas 2.5 e 2.6). A partir disso, aplicaremos esses resultados para estudar a teoria de bifurcações de equilíbrios relativos no problema de quatro corpos.

Neste contexto, analisaremos as equações para o conjunto de equililíbrios relativos não-colineares. Veremos que essas equações são independentes e que esse conjunto é uma variedade analítica real (teorema 2.11). O teorema de unicidade do vetor massa fornecerá uma aplicação da variedade de equilíbrios relativos no espaço normalizado de vetores massa, que provaremos ser analítica real e própria (teorema 2.9). A teoria de bifurcações de equilíbrios relativos será posteriomente reduzida ao estudo dessa aplicação.

No capítulo 3, usaremos transformações similares às descobertas por Levi-Civita (1920) para eliminar as singularidades causadas por colisões duplas. Aplicaremos essas tranformações nas equações para equilíbrios e veremos que a aplicação descrita acima será substituída por uma aplicação polinomial entre variedades algébricas reais. Isso nos permitirá utilizar as técnicas da Geometria Algébrica livremente.

Os principais resultados obtidos podem ser descritos como teoremas de finitude. Mostraremos que o conjunto de equilíbrios relativos não-colineares possui um número finito de componentes conexas (teorema 3.8). Essas componentes correspondem às componentes conexas do diagrama de bifurcações do problema. Além disso, como o espaço dos vetores massa positivos, $(\mathbb{R}_+^\times)^4$, não é compacto, fixaremos $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^4$ e estudaremos os equilíbrios relativos correspondentes. Nesse sentido, provaremos que existe uma cota para o número de componentes conexas desse conjunto de equilíbrios relativos que é independente de m (teorema 3.10). Em particular, isso mostra que para todo m fixado existe apenas um número finito de classes de equilíbrios relativos e que esse número não excede essa cota fixa.

O principal resultado do capítulo 3 diz respeito ao conjunto de bifurcações de equilíbrios relativos (teorema 3.16). Este conjunto é o complemento do conjunto de massas que admitem apenas classes de equilíbrios relativos não-colineares. Além disso, o conjunto de bifurcações está contido em um subconjunto algébrico real próprio de $(\mathbb{R}_+^\times)^4$, ou seja, um conjunto de zeros de polinômios nas massas. Por fim, mostramos também que esse conjunto possui medida nula. Seu complementar é aberto e denso, e possui medida completa. Nesse complemento, a cota fixa fornecida pelo teorema 3.10 é válida.

2 Equilíbrios Relativos do Problema de N Corpos no Plano Complexo

Neste capítulo, definiremos o problema de N corpos no plano complexo por meio das equações de Newton e descrevemos detalhadamente seus elementos, com ênfase nas soluções de equilíbrio relativo dessas equações. Em seguida, caracterizaremos tais soluções por meio de uma equação explícita e, por fim, vamos obter equações equivalentes no espaço da matrizes complexas antissimétricas.

2.1 O Problema de N Corpos em $\mathbb{C}$

O problema newtoniano de N corpos consiste no movimento de N partículas pontuais sob a influência de suas forças mútuas de atração gravitacional. Nesta dissertação, vamos considerar o caso em que todas as partículas se movem em um plano real que identificaremos com $\mathbb{C}$. O vetor posição $z \in \mathbb{C}^N$ é o vetor $(z_1, ..., z_N)$, onde $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ é a posição da $j-$ésima partícula. O vetor massa $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^N$ é $(m_1, ..., m_N)$, onde m_j é a massa da $j-$ésima partícula. Em notação complexa, as leis de Newton para o problema são:

$$m_j \ddot{z}_j = 2\frac{\partial U}{\partial \overline{z}_j} \tag{2.1}$$

onde

$$U = \sum_{1 \le k < j \le N} \frac{m_k m_j}{|z_k - z_j|} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \overline{z}_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Neste contexto, devemos impor que $z \notin \Delta$, onde $\Delta = \{w \in \mathbb{C}^N : w_k = w_j$ para algum $k \neq j\}$ é chamado de conjunto de colisão, a fim de garantir a boa-definição da função potencial U.

Agora, vamos reescrever a equação (1.1) a fim de obter uma expressão mais facilmente manipulável. Primeiro, note que

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial U}{\partial \overline{z}_j} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\left(\sum_{1\leq k<j\leq N}^{N} m_k m_j [(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2]^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k m_j (z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Desse modo, as equações de Newton em (1.1) tornam-se

$$\ddot{z}_j = \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k (z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3}. \tag{2.3}$$

Seja $(A_1(\mathbb{C}), \circ)$ o grupo de todas as transformações afins $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $T(w) = aw + b$, onde $a \in \mathbb{C}^\times$ e $b \in \mathbb{C}$, munido com a operação de composição. Esse grupo é chamado de *grupo afim*.

$A_1(\mathbb{C})$ age componente a componente em $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ e as leis de Newton são invariantes, a menos de escala, por esta ação. Com efeito, aplicando $T \in A_1(\mathbb{C})$ em um ponto $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ que satisfaz as equações de Newton, temos que $T(z_j) = az_j + b \Rightarrow z_j = \dfrac{T(z_j) - b}{a}$ para todo $1 \leq j \leq N$. Agora vamos substituir esta expressão de z_j em (1.3). Daí, as equações de Newton com vetor massa positivo m, tornam-se

$$\ddot{T}(z_j) = |a|^3 \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k (T(z_k) - T(z_j))}{|T(z_k) - T(z_j)|^3}.$$

Desse modo, devemos eliminar a constante $|a|^3$, e podemos fazer isso multiplicando cada componente do vetor massa m por $|a|^{-3}$. Assim, concluímos que a imagem das componentes de z através de T satisfaz as equações de Newton com vetor massa $|a|^{-3}m$.

Definição 2.1. Para $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$, a classe de equivalência de vetores posição pela ação do grupo afim $[z] = \{az + b \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta : a \in \mathbb{C}^\times, \quad b \in \mathbb{C}\}$ é chamada de *configuração* de z.

Numa mesma configuração, notemos que a forma da figura formada pelos pontos é constante, apenas seu tamanho e posição variam.

Definição 2.2. Um *movimento afim* de N pontos é uma curva $z(t)$ em $\mathbb{C}^N \setminus \Delta$ dada por

$$z_j(t) = a(t)z_j(0) + b(t); \quad a(t) \in \mathbb{C}^\times, b(t) \in \mathbb{C}.$$

Assim, durante um movimento afim, a configuração $[z(0)]$ é constante.

Definição 2.3. Um *equilíbrio relativo* do problema de N corpos com vetor massa positivo m é um vetor posição $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ com a propriedade: existe um movimento afim $z(t)$, com $z(0) = z$, que satisfaz as equações de Newton.

Observe que se z é um equilíbrio relativo, então todo vetor posição equivalente afim de z também é um equilíbrio relativo. De fato, sejam $z(t) \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ o movimento afim associado a um equilíbrio relativo z, com $z_j(t) = a(t)z_j + b(t)$ e $w = cz + d \in [z]$ arbitrário. Então, como $z = \dfrac{w-d}{c}$ vemos que $w_j(t) = \dfrac{a(t)}{c}w_j + \left(b(t) - \dfrac{ba(t)}{c}\right)$ é o movimento afim associado a w. Desse modo, é natural falarmos em configurações de equilíbrios relativos.

Agora, vamos caracterizar, por meio de equações explícitas, os equilíbrios relativos através do mesmo procedimento utilizado por Siegel e Moser (1971). Para isso, observemos que a função potencial U possui a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \overline{z}_j} &= \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k m_j (z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, através dessa propriedade de U, as leis de Newton aplicadas a um movimento afim $z_j(t) = a(t)z_j + b(t)$ nos fornecem

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{z}_j(t) \\ &= \ddot{a}(t)\sum_{j=1}^{N} m_j z_j + \ddot{b}(t)\sum_{j=1}^{N} m_j. \end{aligned}$$

Agora, sejam $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$, a massa total das N partículas e $c = M^{-1}\sum_{j=1}^{N} m_j z_j$, o centro de massa do vetor posição inicial. Então, a equação acima torna-se:

$$\ddot{b} = -c\ddot{a}. \tag{2.4}$$

Consequentemente, como $\ddot{z}_j(t) = \ddot{a}(t)z_j + \ddot{b}(t)$, temos

$$\ddot{z}_j(t) = \ddot{a}(t)(z_j - c). \tag{2.5}$$

Se substituirmos (1.5) nas equações de Newton em (1.3), obteremos:

$$\ddot{a}(t)(z_j - c) = \frac{a(t)}{|a(t)|^3} \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k(z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3}.$$

Dessa equação, segue que $\dfrac{|a(t)|^3\ddot{a}(t)}{a(t)}$ é independente do tempo e, portanto, constante. Seja Λ o valor dessa constante. Assim, temos

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda a}{|a|^3} \tag{2.6}$$

e

$$\Lambda(z_j - c) = \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k(z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3}. \tag{2.7}$$

A equação (1.7) é uma condição necessária e suficiente para que um vetor posição $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ seja um equilíbrio relativo, enquanto as equações (1.4) e (1.6) determinam o movimento afim correspondente.

Agora, seja $V = -\dfrac{\Lambda}{|a|}$ e façamos $a = u + iv$, onde u, v são funções reais. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial V}{\partial \overline{a}} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\Lambda(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \Lambda(u+iv)(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\Lambda a}{|a|^3} \\ &= \ddot{a}. \end{aligned}$$

Assim, a equação (1.6) assume a forma

$$\ddot{a} = 2\frac{\partial V}{\partial \overline{a}}. \tag{2.8}$$

A equação (1.8) é simplesmente o problema de Kepler em notação complexa.

Consequentemente, os possíveis movimentos $a(t)$ descrevem seções cônicas com um foco na origem obedecendo as leis de Kepler.

O movimento afim resultante $z(t) = a(t)z_j + b(t)$ pode ser descrito como segue. Primeiro, note que o centro de massa $c(t) = M^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j z_j(t)$ das N particulas se move uniformemente ao longo de alguma reta em $\mathbb{C}$. De fato, calculando a segunda derivada de $c(t)$ em relação a t, temos

$$\begin{aligned} \ddot{c}(t) &= M^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{z}_j(t) \\ &= M^{-1} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \overline{z}_j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue disso que

$$c(t) = K_1 t + K_0, \quad \text{com} \quad K_0, K_1 \in \mathbb{C}.$$

Além disso, o movimento de cada partícula em relação ao centro de massa é dado por

$$\begin{aligned} R_j(t) &= z_j(t) - c(t) \\ &= a(t)z_j + b(t) - M^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j (a(t)z_j + b(t)) \\ &= a(t)z_j - a(t)M^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j z_j + b(t) - b(t)M^{-1} \sum_{j=1}^{N} m_j \\ &= a(t)z_j - a(t)c + b(t) - b(t)M^{-1}M \\ &= a(t)(z_j - c). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \ddot{R}_j(t) &= \ddot{a}(t)(z_j - c) \\ &= \ddot{z}_j(t). \end{aligned}$$

Portanto, o movimento de cada partícula em relação ao centro de massa é uma seção cônica e obedece as leis de Kepler. Desse modo, todas as N seções cônicas são semelhantes e a posição $z(t)$ das N partículas é sempre similar ao vetor posição inicial z. Como um caso particular, temos as soluções circulares do problema de Kepler. Então, se z é um equilíbrio relativo, um possível movimento afim pode ser descrito como o conjunto de partículas em rotação uniforme em torno do centro de massa.

Exemplo 2.4. *Quando $N = 2$, todos os vetores posição $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ são equivalentes pela ação de $A_1(\mathbb{C})$. De fato, sejam $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ arbitrários, o sistema de equações*

$$\begin{cases} az_1 + b = w_1 \\ az_2 + b = w_2 \end{cases}$$

nas variáveis a e b tem solução única dada por $a = \dfrac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \neq 0$ e $b = \dfrac{w_1 z_2 - w_2 z_1}{z_2 - z_1}$. Desse modo, a aplicação $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(x) = ax+b$ é tal que $T(z_i) = w_i$ com $i = 1, 2$ e como $a \neq 0$, temos $T \in A_1(\mathbb{C})$. Portanto, todo $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ é um equilíbrio relativo visto que existem equilíbrios relativos colineares e a equação (1.7) é automaticamente satisfeita nesse caso. Assim, para $N = 2$, temos apenas uma classe de equivalência afim de equilíbrios relativos. Além disso, a discussão feita anteriormente é apenas a redução do problema de 2 corpos ao problema de Kepler.

2.2 Caracterização de Equilíbrios Relativos via Matrizes Antissimétricas

Na seção 1.1, vimos que $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ é um equilíbrio relativo para algum vetor massa $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^N$ fixado se, e somente se, existe algum $\Lambda \in \mathbb{R}$ tal que a equação (1.7) é válida. Desse modo, de agora em diante, vamos dizer que z é um equilíbrio relativo se (1.7) é satisfeita para algum Λ e para algum m nessas condições.

Nosso objetivo consiste em caracterizar o conjunto de todos os equilíbrios relativos do problema de N corpos em $\mathbb{C}$. Nesse sentido, já sabemos que esse conjunto é invariante atráves da ação do grupo afim e, algumas vezes, é mais conveniente considerar o conjunto de todas as configurações (classes de equivalência afim) cujos representantes são equilíbrios relativos. Estas classes serão chamadas de configurações de equilíbrios relativos.

Para realizar a caracterização a que nos propomos é necessário transformar a equação (1.7) de modo que o vetor massa $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^N$ apareça da maneira mais simples possível. Para este fim, vamos definir, conforme feito em (MACMILLAN; BARTKY, 1932),

$$\lambda = M^{-1}\Lambda, \tag{2.9}$$

onde $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ e recordar que $c = M^{-1} \sum_{k=1}^{N} m_k z_k$. Desse modo, de (1.7) segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \Lambda(z_j - c) - \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k(z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3} \\
&= M\lambda(z_j - M^{-1}\sum_{k=1}^{N} m_k z_k) - \sum_{k=1,k\neq j}^{N} m_k(z_k - z_j)|z_k - z_j|^{-3} \\
&= \lambda(\sum_{k=1}^{N} m_k z_j - \sum_{k=1}^{N} m_k z_k) + \sum_{k=1,k\neq j}^{N} m_k(z_j - z_k)|z_j - z_k|^{-3} \\
&= \lambda \sum_{k=1,k\neq j}^{N} m_k(z_j - z_k) + \sum_{k=1,k\neq j}^{N} m_k(z_j - z_k)|z_j - z_k|^{-3} \\
&= \sum_{k=1,k\neq j}^{N} m_k(z_j - z_k)(|z_j - z_k|^{-3} + \lambda).
\end{aligned}$$

Agora, definindo $S_{jk} = |z_j - z_k|^{-3} + \lambda$ e $A_{jk} = S_{jk}(z_j - z_k)$, a igualdade acima torna-se

$$\sum_{k=1,k\neq j}^{N} m_k A_{jk} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & \cdots & A_{2N} \\ A_{31} & A_{32} & 0 & \cdots & A_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim, seja A a matriz complexa $N \times N$ acima, concluímos que (1.7) é um sistema linear e homogêneo. Vamos reescrever (1.7) como

$$Am = 0, \tag{2.10}$$

onde as entradas de A são dadas por

$$A_{jk} = S_{jk}(z_j - z_k), \quad S_{jk} = |z_j - z_k|^{-3} + \lambda. \tag{2.11}$$

Notemos que, a matriz A é antissimétrica ($A = -A^t$) pois $S_{jk} = S_{kj}$, logo, $A_{jk} = -A_{kj}$, mas não é anti-hermitiana ($A \neq -\overline{A^t}$) e m pertence ao núcleo de A.

O fato da matriz A ser antissimétrica motiva-nos estudar a teoria das matrizes antissimétricas.

Uma matriz A antissimétrica $N \times N$ define uma 2−forma alternada $\omega : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ pela fórmula $\omega(u,v) = u^t A v$, onde identificamos $\mathbb{C}^N$ com $\mathbb{R}^{2N}$.

Definição 2.5. Uma 2−forma ω é *degenerada* se existe algum vetor $u \in \mathbb{C}^N$ não-nulo tal que o produto interior $u \lrcorner\, \omega = 0$, isto é, $\omega(u,v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{C}^N$. Uma 2−forma ω é *decomponível* se pode ser escrita como o produto exterior de duas 1−formas: $\omega = \alpha \wedge \beta$.

A próxima proposição resume um pouco da teoria.

Proposição 2.6. *Uma 2−forma alternada em $\mathbb{C}^N$ é decomponível se, e somente se, $\omega \wedge \omega = 0$. Se N for ímpar, toda 2−forma alternada é degenerada. Se N for par e $N = 2n$, então ω é degenerada se e somente se a N−forma $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \quad vezes} = 0$.* [1]

Corolário 2.7. *Uma 2−forma alternada ω em $\mathbb{C}^4$ é degenerada se e somente se é decomponível se e somente se $\omega \wedge \omega = 0$.*

Demonstração. Basta aplicar a proposição 1.6 para $N = 4$. □

Agora, suponha que $N = 2n$. Sejam $\beta = \{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^{2n}$ e $\beta^* = \{e_1^*, \ldots, e_{2n}^*\}$ a base dual de $(\mathbb{C}^{2n})^*$. Lembremos que uma forma volume é um gerador de $\bigwedge^{2n}(\mathbb{C}^{2n})^*$. Desse modo, toda forma volume é um múltiplo de $e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2n}^*$.

Definição 2.8. O *pfaffiano* de uma 2−forma alternada ω é o único número complexo $\mathrm{pf}(\omega)$ tal que

$$\frac{1}{n!}\omega^n = \mathrm{pf}(\omega) e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2n}^*.$$

Corolário 2.9. *ω é degenerada se e somente se* $\mathrm{pf}(\omega) = 0$.

Demonstração. Pela proposição 1.6, ω degenerada é equivalente a $\omega^n = 0$, que por sua vez é equivalente a $\mathrm{pf}(\omega) = 0$, já que $e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2n}^*$ é não-nulo. □

Retornando à matriz antissimétrica A, vimos que ω é degenerada se, e somente se, $\det(A) = 0$. Isso nos leva a suspeitar que existe uma conexão entre $\mathrm{pf}(\omega)$ e $\det(A)$.

Proposição 2.10. $\det(A) = [pf(\omega)]^2$.

[1] Para ver a demonstração dessa proposição, consulte o apêndice A

Demonstração. Para ver a demonstração dessa proposição, consulte-se o apêndice A □

No caso de uma matriz 4×4 antissimétrica $A = (a_{ij})$ temos que a 2−forma alternada ω em $\mathbb{C}^4$ associada a A pode ser escrita como

$$\omega = a_{12}e_1^* \wedge e_2^* + a_{13}e_1^* \wedge e_3^* + a_{14}e_1^* \wedge e_4^* + a_{23}e_2^* \wedge e_3^* + a_{24}e_2^* \wedge e_4^* + a_{34}e_3^* \wedge e_4^*.$$

Desse modo, pelas propriedades distributiva e anti-comutativa do produto exterior (LIMA, 2005), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega \wedge \omega &= \frac{1}{2}(2a_{12}a_{34} + 2a_{14}a_{23} - 2a_{13}a_{24})e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* \\ &= (a_{12}a_{34} + a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24})e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^*. \end{aligned}$$

Dessa igualdade, obtemos

$$pf(\omega) = a_{12}a_{34} + a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} \tag{2.12}$$

e

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_{12}^2a_{34}^2 + a_{13}^2a_{24}^2 + a_{14}^2a_{23}^2 + 2a_{12}a_{14}a_{23}a_{34} - 2a_{13}a_{14}a_{23}a_{24} - 2a_{12}a_{13}a_{24}a_{34} \\ &= [pf(\omega)]^2. \end{aligned}$$

Agora, vamos reformular as equações para equilíbrios relativos como equações no espaço das matrizes antissimétricas.

Para qualquer vetor posição $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ vamos associar uma 2−forma decomponível

$$\sigma = z^* \wedge 1^*, \tag{2.13}$$

onde $z^* = \sum_{j=1}^{N} z_j e_j^*$ e $1^* = \sum_{j=1}^{N} e_j^*$. Em termos de matrizes, z^* e 1^* são representados, respectivamente, pelas seguintes matrizes linha $1 \times N$:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\sum_{k=1}^{N} z_k e_k^*\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{N} e_j^*\right) \\ &= \sum_{1 \le k < j \le N} (z_k - z_j) e_k^* \wedge e_j^*. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Daí, segue que σ é representada pela matriz antissimétrica $N \times N$ com entradas $\sigma_{kj} = z_k - z_j$.

A próxima proposição caracteriza todas as 2−formas alternadas decomponíveis que provém de algum $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ por meio da construção do parágrafo anterior.

Proposição 2.11. *Uma 2−forma alternada σ, representada por uma matriz antissimétrica (σ_{ij}), é da forma $\sigma = z^* \wedge 1^*$ se, e somente se, $\sigma \wedge 1^* = 0$, ou, equivalentemente, se as "equações cocíclicas"$\sigma_{ik} = \sigma_{ij} + \sigma_{jk}$ são válidas para todo i, j, k.*

Demonstração. Suponha que $\sigma = z^* \wedge 1^*$, para algum $z^* = \sum_{j=1}^{N} z_j e_j^*$ e $1^* = \sum_{j=1}^{N} e_j^*$. Desse modo, temos que $\sigma \wedge 1^* = z^* \wedge 1^* \wedge 1^* = 0$. Reciprocamente, seja σ uma 2−forma representada por uma matriz antissimétrica (σ_{ij}) e tamanho $N \times N$ tal que $\sigma \wedge 1^* = 0$. Desse modo, escrevendo $\sigma = \sum_{1 \le i < k \le N}^{N} \sigma_{ik} e_i^* \wedge e_k^*$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma \wedge 1^* \\ &= \left(\sum_{1 \le i < k \le N}^{N} \sigma_{ik} e_i^* \wedge e_k^*\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{N} e_j^*\right) \\ &= \sum_{1 \le i < j < k \le N}^{N} (\sigma_{ij} + \sigma_{jk} - \sigma_{ik}) e_i^* \wedge e_j^* \wedge e_k^* \end{aligned}$$

e, dessa igualdade, concluímos que $\sigma_{ik} = \sigma_{ij} + \sigma_{jk}$ para todo $1 \le i < j < k \le N$ e, por antissimetria da matriz de σ, para todo $1 \le i, j, k \le N$. Agora, como cada σ_{ij} é um número complexo fixo, podemos escolher $z = (z_1, z_2, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ tal que $\sigma_{ij} = z_i - z_j$, onde $1 \le i, j \le N$ (note que não há unicidade na escolha de z) e, como σ é da forma dada em (1.14), concluímos que $\sigma = z^* \wedge 1^*$, como queríamos. □

A proposição 1.11 motiva a necessidade de quantificarmos o número de equações cocíclicas independentes. Nesse sentido, primeiro observemos que o espaço das 2−formas alternadas sobre $\mathbb{C}^N$ é isomorfo ao espaço das matrizes complexas antissimétricas $N \times N$, que, por sua vez, é isomorfo a $\mathbb{C}^{N(N-1)/2}$.

Agora, consideremos a aplicação $h : \mathbb{C}^N \to \bigwedge^2 \mathbb{C}^N$ dada por $h(z) = z^* \wedge 1^*$. Note que para $z, w \in \mathbb{C}^N$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $h(\alpha z + w) = (\alpha z + w)^* \wedge 1^* = (\alpha z^* + w^*) \wedge 1^* = \alpha z^* \wedge 1^* + w^* \wedge 1^* = \alpha h(z) + h(w)$, isto é, h é uma transformação linear. Além disso, $h(z) = 0$ se, e somente se, $z_1 = z_2 = ... = z_N$, por (1.14). Desse modo, o núcleo de h tem dimensão igual a um (gerado por 1) e , pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, concluímos que a dimensão da imagem de h é igual a $N - 1$. Além disso, segue da proposição 1.11 que σ pertence a imagem de h se e somente se $(\sigma_{12}, \sigma_{13}, ..., \sigma_{1N}, \sigma_{23}, \sigma_{24}, \sigma_{2N}, ..., \sigma_{N-1N})$ é solução das equações cocíclicas. Desse modo, apenas $\frac{N(N-1)}{2} - (N-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$ das $\binom{N}{3}$ equações cocíclicas são independentes.

Para $N = 4$, em particular, o espaço das 2−formas alternadas sobre $\mathbb{C}^4$ possui dimensão igual a 6 e 3 das 4 equações cocíclicas são independentes.

Proposição 2.12. *Uma 2−forma alternada $\sigma : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ é da forma $z^* \wedge 1^*$ para algum $z \in \mathbb{C}^4$ se, e somente se,*

$$(C) \qquad \sigma_{13} = \sigma_{12} + \sigma_{23}, \qquad \sigma_{14} = \sigma_{12} + \sigma_{24}, \qquad \sigma_{14} = \sigma_{13} + \sigma_{34}.$$

Demonstração. É uma consequência imediata da proposição 1.11 e do número de equações cocíclicas independentes quando $N = 4$. □

Seja Δ o conjunto das 2−formas sobre $\mathbb{C}^N$ com $\sigma_{ij} = 0$ para algum $i \neq j$. Se $\sigma \in \mathbb{C}^{N(N-1)/2} \setminus \Delta$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então podemos definir $S_{ij} = |\sigma_{ij}|^{-3} + \lambda$ para $i \neq j$ e uma outra 2−forma alternada, $\omega(\sigma, \lambda)$, com $\omega_{ij} = S_{ij}\sigma_{ij}$. Desse modo, se $\sigma = z^* \wedge 1^*$, com $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$, então por (1.10), z é um equilíbrio relativo se, e somente se, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e para algum vetor real positivo $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^4$, temos $m \lrcorner\, \omega(\sigma, \lambda) = 0$. Podemos resumir isso no seguinte resultado:

Proposição 2.13. *Sejam $z \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ e $\sigma = z^* \wedge 1^* \in \mathbb{C}^{N(N-1)/2} \setminus \Delta$. Então z é um equilíbrio relativo se, e somente se, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e para algum $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^4$, temos*

$$(D) \qquad m \lrcorner\, \omega(\sigma, \lambda) = 0.$$

As proposições 1.12 e 1.13 podem ser combinadas para estabelecer todo o problema de equilíbrios relativos em $\mathbb{C}^{N(N-1)/2}$.

Proposição 2.14. *Um vetor* $\sigma \in \mathbb{C}^{N(N-1)/2} \setminus \Delta$ *corresponde a um equilíbrio relativo se, e somente se, as equações* (C) *e* (D) *são satisfeitas para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e para algum vetor* $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^4$.

A partir de (C) e (D) podemos exibir duas equações que são particularmente úteis no caso em que $N = 4$. Primeiro, observe que como σ satisfaz (C), então é decomponível. Pelo corolário 1.7 , σ é degenerada e, pelo corolário 1.9, $\mathrm{pf}(\sigma) = \sigma_{12}\sigma_{34} + \sigma_{14}\sigma_{23} - \sigma_{13}\sigma_{24} = 0$. Além disso, como ω satisfaz (D) então, por definição, é degenerada e, pelo corolário 1.9, temos $\mathrm{pf}(\omega)= \omega_{12}\omega_{34} + \omega_{14}\omega_{23} - \omega_{13}\omega_{24} = S_{12}S_{34}\sigma_{12}\sigma_{34} + S_{14}S_{23}\sigma_{14}\sigma_{23} - S_{13}S_{24}\sigma_{13}\sigma_{24} = 0$. Essas considerações podem ser resumidas no seguinte resultado:

Proposição 2.15. *Suponhamos que* $N = 4$ *e que* (C) *e* (D) *sejam válidas. Então*

$$(P1) \qquad \sigma_{12}\sigma_{34} + \sigma_{14}\sigma_{23} - \sigma_{13}\sigma_{24} = 0$$

$$(P2) \qquad S_{12}S_{34}\sigma_{12}\sigma_{34} + S_{14}S_{23}\sigma_{14}\sigma_{23} - S_{13}S_{24}\sigma_{13}\sigma_{24} = 0.$$

Para $N = 4$, o resultado de Moulton para equilíbrios relativos colineares descrito na seção (1.2) nos diz que temos $\frac{4!}{2} = 12$ configurações de equilíbrios relativos colineares. Desse modo, nosso objetivo a partir de agora será estudar a finitude do conjunto de equilíbrios relativos não-colineares. Para essa finalidade, veremos no próximo capítulo que as equações (C), (D) e a proposição 1.15 desempenham um papel fundamental.

3 O Conjunto de Equilíbrios Relativos Não-Colineares e Aplicação Massa

Neste capítulo, vamos explorar as equações $(P1)$ e $(P2)$, obtidas na proposição 1.15, juntamente com as equações (C) e (D) das proposições 1.12 e 1.13, para caracterizar o conjunto de equilíbrios relativos não-colineares do problema de 4 corpos no plano complexo. Neste contexto, provaremos a unicidade do vetor massa associado a cada ponto desse conjunto no espaço das massas normalizadas.

Mostraremos ainda que o conjunto de equilíbrios relativos não-colineares é uma variedade analítica real, e definiremos uma aplicação dessa variedade no espaço das massas normalizadas. Veremos que tal aplicação é analítica real e, por meio da ação do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^{\times}$ no conjunto de equilíbrios relativos não-colineares, mostraremos que essa aplicação induz uma outra aplicação definida do espaço das configurações de equilíbrios relativos não-colineares no espaço das massas normalizadas. Por fim, provaremos que o espaço das configurações de equilíbrios relativos não-colineares é uma variedade analítica real e que a aplicação induzida definida nessa variedade é analítica, real e própria.

3.1 O Conjunto de Equilíbrios Relativos Não-Colineares

Inicialmente, observamos que no espaço das matrizes antissimétricas é mais conveniente considerarmos o conjunto de pares $(z, \lambda) \in (\mathbb{C}^4 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}$ tais que z é um equilíbrio relativo para λ e para algum $m \in (\mathbb{R}_+^{\times})^4$ ou, equivalentemente, os pares

$(\sigma,\lambda) \in (\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R}$ tais que (C) e (D) sejam válidas para algum $m \in (\mathbb{R}_+^{\times})^4$. Agora, vamos relaxar as restrições sobre $z \in \mathbb{C}^4 \smallsetminus \Delta$ para permitir qualquer vetor real m no conjunto solução da equação (D).

Proposição 3.1. *O conjunto de pares* $(\sigma,\lambda) \in (\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R}$ *tais que* $\sigma = z^* \wedge 1^*$ *para algum vetor posição não-colinear* $z \in \mathbb{C}^4 \smallsetminus \Delta$ *e* (D) *é válida para algum vetor não-nulo* m *(não necessariamente positivo) é precisamente o conjunto solução das equações analíticas reais* (C) *e*

(MB) $\quad S_{12}S_{34} = S_{13}S_{24} = S_{14}S_{23}.$

Para provarmos a proposição 2.1, vamos precisar de dois lemas.

Lema 3.2. *Se* $\sigma = z^* \wedge 1^*$ *e* z_1, z_2, z_3, z_4 *são colineares, então* (MB) *não é válida.*

Demonstração. Suponhamos que os pontos z_1, z_2, z_3, z_4 estejam em uma reta na ordem $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ e fixemos $|z_2 - z_1| = x, |z_3 - z_2| = y$ e $|z_4 - z_3| = z$. Desse modo, fazendo $S_{ij} = |z_i - z_j|^{-3} + \lambda$ e substituindo nas equações (MB), temos:

$$(x^{-3}+\lambda)(z^{-3}+\lambda) = ((x+y)^{-3}+\lambda)((y+z)^{-3}+\lambda) = ((x+y+z)^{-3}+\lambda)(y^{-3}+\lambda).$$

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que essas equações não admitem solução positiva. Agora, isolando λ na primeira equação, temos:

$$x^{-3}z^{-3} + \lambda(x^{-3}+z^{-3}) + \lambda^2 = (x+y)^{-3}(y+z)^{-3} + \lambda((x+y)^{-3}+(y+z)^{-3}) + \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{(x+y)^{-3}(y+z)^{-3} - x^{-3}z^{-3}}{x^{-3}+z^{-3}-(x+y)^{-3}-(y+z)^{-3}}.$$

Fazendo o mesmo na segunda equação, temos:

$$(x+y)^{-3}(y+z)^{-3} + \lambda((x+y)^{-3}+(y+z)^{-3}) = (x+y+z)^{-3}y^{-3} + \lambda((x+y+z)^{-3}+y^{-3}) \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{(x+y)^{-3}(y+z)^{-3} - y^{-3}(x+y+z)^{-3}}{y^{-3}+(x+y+z)^{-3}-(x+y)^{-3}-(y+z)^{-3}}.$$

Como essas duas expressões de λ são homogêneas, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x+y+z=1$. Assim, fazendo $y = 1-x-z$, igualando as duas expressões para λ e multiplicando ambos os membros dessa igualdade por -1, obtemos:

$$(*) \qquad \frac{x^{-3}z^{-3} - (1-z)^{-3}(1-x)^{-3}}{x^{-3}+z^{-3}-(1-z)^{-3}-(1-x)^{-3}} = \frac{(1-x-z)^{-3} - (1-z)^{-3}(1-x)^{-3}}{1+(1-x-z)^{-3}-(1-z)^{-3}-(1-x)^{-3}}.$$

Vamos mostrar, em $(*)$, que o lado esquerdo é estritamente maior que 1 e que o lado direito é estritamente menor que 1 para finalizar a demonstração.

Como $x + y + z = 1$ temos $x < 1 - z$ e $z < 1 - x$. Desse modo, $x^3 < (1 - z)^3$ e $z^3 < (1 - x)^3$ o que implica $x^3z^3 < (1 - z)^3(1 - x)^3 \Rightarrow x^{-3}z^{-3} > (1 - z)^{-3}(1 - x)^{-3} \Leftrightarrow x^{-3}z^{-3} - (1 - z)^{-3}(1 - x)^{-3} > 0$. Analogamente, temos $x^{-3} > (1 - z)^{-3}$ e $z^{-3} > (1 - x)^{-3}$ o que implica $x^{-3} + z^{-3} > (1 - z)^{-3} + (1 - x)^{-3} \Leftrightarrow x^{-3} + z^{-3} - (1 - z)^{-3} + (1 - x)^{-3} > 0$. Assim, o numerador e o denominador no lado esquerdo em (*) são positivos. Além disso, como $x^{-3} - 1 > (1 - z)^{-3} - 1$ e $z^{-3} - 1 > (1 - x)^{-3} - 1$ temos

$$\begin{aligned}(x^{-3} - 1)(z^{-3} - 1) &> ((1 - z)^{-3} - 1)((1 - x)^{-3} - 1) \Leftrightarrow x^{-3}z^{-3} - x^{-3} - z^{-3} + 1\\ &> (1 - x)^{-3}(1 - z)^{-3} - (1 - z)^{-3} - (1 - x)^{-3} + 1 \Leftrightarrow x^{-3}z^{-3} - (1 - x)^{-3}(1 - z)^{-3}\\ &> x^{-3} + z^{-3} - (1 - z)^{-3} - (1 - x)^{-3}.\end{aligned}$$

Isso mostra que o lado esquerdo de $(*)$ é estritamente maior que 1.

Por fim, como $(1 - x)(1 - z) = xz + 1 - x - z > 1 - x - z$ temos que $(1 - x - z)^{-3} > (1-x)^{-3}(1-z)^{-3} \Leftrightarrow (1-x-z)^{-3}-(1-x)^{-3}(1-z)^{-3} > 0$. Analogamente, como $1-x > 1-x-z$ temos $(1-x-z)^{-3} > (1-x)^{-3}$ e, consequentemente, $1+(1-x-z)^{-3} > (1-z)^{-3}+(1-x)^{-3} \Leftrightarrow 1 + (1 - x - z)^{-3} - (1 - z)^{-3} - (1 - x)^{-3} > 0$. Assim, o numerador e o denominador do lado direito de $(*)$ também são positivos. Além disso, temos

$$((1 - x)^{-3} - 1)((1 - z)^{-3} - 1) > 0 \Leftrightarrow 1 - (1 - x)^{-3} - (1 - z)^{-3} > -(1 - x)^{-3}(1 - z)^{-3}$$

Adicionando $(1 - x - z)^{-3}$ nos dois lados da desigualdade acima obtemos:

$$1 + (1 - x - z)^{-3} - (1 - x)^{-3} - (1 - z)^{-3} > (1 - x - z)^{-3} - (1 - x)^{-3}(1 - z)^{-3}.$$

Isso mostra que o lado direito de $(*)$ é estritamente menor que 1. $\square$

Lema 3.3. *Se (C) e (D) são válidas para algum vetor real m não-nulo, então ou as equações (MB) são válidas ou z_1, z_2, z_3, z_4 são colineares.*

Demonstração. Como (C) e (D) são válidas, ambas as 2−formas σ e ω são degeneradas. Daí, pela proposição 1.15, as equações $(P1)$ e $(P2)$ são válidas. Suponhamos que os números complexos $\sigma_{13}\sigma_{24}, \sigma_{12}\sigma_{34}$ e $\sigma_{14}\sigma_{23}$ não sejam proporcionais sobre $\mathbb{R}$. Então $(P1)$ e $(P2)$ representam relações de dependência não-triviais com coeficientes reais entre esses números. Portanto, os coeficientes em $(P2)$ são proporcionais aos respectivos coeficientes em $(P1)$. Essas relações de proporcionalidade são exatamente as equações (MB).

Agora, suponhamos que os números complexos $\sigma_{13}\sigma_{24}, \sigma_{12}\sigma_{34}$ e $\sigma_{14}\sigma_{23}$ sejam proporcionais sobre $\mathbb{R}$. Desse modo, a razão cruzada $\dfrac{\sigma_{13}\sigma_{24}}{\sigma_{14}\sigma_{23}} = \left(\dfrac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}\right) \cdot \left(\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right)$ é um número real, o que é equivalente a dizer que os pontos z_1, z_2, z_3, z_4 pertencem a uma reta ou a uma circunferência.

É fácil ver que se uma das equações (MB) é válida o mesmo acontece com a outra. De fato, suponhamos que $S_{14}S_{23} = S_{12}S_{34}$. Substituindo essa igualdade em $(P2)$, obtemos a equação $S_{13}S_{24}\sigma_{13}\sigma_{24} - S_{12}S_{34}(\sigma_{12}\sigma_{34} + \sigma_{14}\sigma_{23}) = 0$. Contudo, por $(P1)$, temos que $\sigma_{12}\sigma_{34} + \sigma_{14}\sigma_{23} = \sigma_{13}\sigma_{24}$. Substituindo isso na relação anterior, obtemos $(S_{13}S_{24} - S_{12}S_{34})\sigma_{13}\sigma_{24} = 0$. Mas, como $\sigma_{13}\sigma_{24} \neq 0$ pois $\sigma \in \mathbb{C}^6 \setminus \Delta$, concluímos que $S_{13}S_{24} = S_{12}S_{34}$. O caso em que $S_{13}S_{24} = S_{12}S_{34}$ e queremos mostrar que $S_{14}S_{23} = S_{12}S_{34}$ é inteiramente análogo ao anterior.

A seguir, vamos supor que as equações (MB) não sejam válidas e vamos mostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 são colineares.

Primeiro, observamos que é impossível construir um quadrilátero com todas as seis distâncias entre os vértices iguais. Consequentemente, pelo menos um dos valores $\omega_{ij} = S_{ij}\sigma_{ij}$ é diferente de zero. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\omega_{12} = S_{12}\sigma_{12} \neq 0$. Então, também temos $\omega_{21} = S_{21}\sigma_{21} = -S_{12}\sigma_{12} \neq 0$ e daí segue que a matriz de ω,

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \omega_{24} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 & \omega_{34} \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 0 \end{bmatrix},$$

possui posto pelo menos igual a 2. Agora, vamos determinar a dimensão do núcleo de ω. Com efeito, seja $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in N(\omega)$ então, por definição, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \omega_{24} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 & \omega_{34} \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isolando x_2 e x_1 na primeira e segunda equações, respectivamente, obtemos:

$$x_1 = \frac{\omega_{23}x_3 + \omega_{24}x_4}{\omega_{12}} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{\omega_{13}x_3 + \omega_{14}x_4}{\omega_{12}}.$$

Substituindo x_1 e x_2 na terceira e quarta equações, e utilizando o fato de que

$$pf(\omega) = \omega_{14}\omega_{23} + \omega_{12}\omega_{24} - \omega_{13}\omega_{24} = 0,$$

pois ω é degenerada, concluímos que x_3 e x_4 são variáveis independentes. Logo,

$$N(\omega) = \left\{ x_3 \left(\frac{\omega_{23}}{\omega_{12}}, -\frac{\omega_{13}}{\omega_{12}}, 1, 0 \right) + x_4 \left(\frac{\omega_{24}}{\omega_{12}}, -\frac{\omega_{14}}{\omega_{12}}, 0, 1 \right) : x_3, x_4 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Escolhendo $x_3 = 0$, $x_4 = -\omega_{12}$ temos que $(-\omega_{24}, \omega_{14}, 0, -\omega_{12}) \in N(\omega)$ e escolhendo $x_3 = \omega_{12}$, $x_4 = 0$ temos que $(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12}, 0) \in N(\omega)$. Além disso, como esses dois vetores formam um conjunto linearmente independente, formam um base para o núcleo de ω.

Agora, seja $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \cap N(\omega)$ arbitrário. Então, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que

$$\alpha(-\omega_{24}, \omega_{14}, 0, -\omega_{12}) + \beta(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12}, 0) \quad = \quad (a,b,c,d).$$

Daí, $\alpha = -\frac{d}{|\omega_{12}|^2}\overline{\omega}_{12}$ e $\beta = \frac{c}{|\omega_{12}|^2}\overline{\omega}_{12}$. Desse modo, podemos escrever $\alpha = r\overline{\omega}_{12}$ e $\beta = s\overline{\omega}_{12}$, onde $r = -\frac{d}{|\omega_{12}|^2}, s = \frac{c}{|\omega_{12}|^2} \in \mathbb{R}$. Consequentemente, qualquer vetor real no núcleo deve assumir a forma

$$r\overline{\omega}_{12}(-\omega_{24}, \omega_{14}, 0, -\omega_{12}) + s\overline{\omega}_{12}(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12}, 0) =$$

$$(-r\overline{\omega}_{12}\omega_{24} + s\overline{\omega}_{12}\omega_{23}, \quad r\overline{\omega}_{12}\omega_{14} - s\overline{\omega}_{12}\omega_{13}, \quad s|\omega_{12}|^2, -r|\omega_{12}|^2),$$

onde $r, s \in \mathbb{R}$. A fim de que os vetores dessa forma sejam reais para algum r e s não-triviais devemos ter $-r\overline{\omega}_{12}\omega_{24} + s\overline{\omega}_{12}\omega_{23}, r\overline{\omega}_{12}\omega_{14} - s\overline{\omega}_{12}\omega_{13} \in \mathbb{R}$, o que equivale a afirmar que

$$\begin{aligned} Im(-r\overline{\omega}_{12}\omega_{24} + s\overline{\omega}_{12}\omega_{23}) &= -r \cdot Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24}) + s \cdot Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Im(r\overline{\omega}_{12}\omega_{14} - s\overline{\omega}_{12}\omega_{13}) &= r \cdot Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{14}) - s \cdot Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{13}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para isso, é necessário e suficiente que o sistema linear

$$\begin{bmatrix} -Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24}) & Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23}) \\ Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{14}) & -Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{13}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

possua infinitas soluções, ou seja, que

$$\begin{vmatrix} -Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24}) & Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23}) \\ Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{14}) & -Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{13}) \end{vmatrix} = 0.$$

Assim, devemos ter $Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24}) \cdot Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{13}) = Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23}) \cdot Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{14})$. Mas, fazendo $\omega_{ij} = S_{ij}\sigma_{ij}$ na expressão anterior, concluímos que para que os vetores do núcleo sejam reais para r e s não-triviais, é necessário e suficiente que

$$S_{13}S_{24} \cdot Im(\overline{\sigma}_{12}\sigma_{13}) \cdot Im(\overline{\sigma}_{12}\sigma_{24}) = S_{14}S_{23} \cdot Im(\overline{\sigma}_{12}\sigma_{14}) \cdot Im(\overline{\sigma}_{12}\sigma_{23}). \tag{3.2}$$

Fazendo $\sigma_{ij} = z_i - z_j$ e $z_j = x_j + i \cdot y_j$ temos que $Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{13}) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_1 - x_3) = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3) = Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{23})$ e $Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{14}) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_4) - (y_1 - y_2)(x_1 - x_4) = (x_1 - x_2)(y_2 - y_4) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_4) = Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{24})$. Como $S_{13}S_{24} \neq S_{14}S_{23}$ por hipótese, então devemos ter $Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{13}) = Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{23}) = 0$ ou $Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{14}) = Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{24}) = 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{13}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Daí, segue que z_1, z_2, z_3 são colineares. Mas, como sabemos que z_4 pertence ao lugar geométrico determinado por z_1, z_2, z_3, concluímos que os 4 pontos são colineares. □

Agora, vamos proceder à prova da proposição 2.1.

Demonstração. Suponhamos que (C) e (D) sejam válidas para algum vetor real m não-nulo e que $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ não seja colinear. Então, pelo lema 2.2, as equações (MB) são válidas.

Reciprocamente, suponhamos que as equações (C) e (MB) sejam válidas. Pela proposição 1.12, segue das equações (C) que $\sigma = z^* \wedge 1^*$ para algum $z \in \mathbb{C}^4$ e, como σ é decomponível temos $pf(\sigma) = \sigma_{12}\sigma_{34} + \sigma_{14}\sigma_{23} - \sigma_{13}\sigma_{24} = 0$, ou seja, a equação $(P1)$ é válida. Agora, como as equações (MB) são válidas, pelo lema 2.2, z não pode ser colinear. A equação $(P1)$ juntamente com as equações (MB) imediatamente geram a equação $(P2)$. Consequentemente, ω é decomponível e degenerada, ou seja, existe algum vetor m não-nulo (real ou complexo) no núcleo de ω.

Agora, basta mostrar que m é real. Do mesmo modo que fizemos na demonstração do lema 2.3, supomos que $\omega_{12} = -\omega_{21} \neq 0$ e construimos uma base para o núcleo de ω. Ainda na demonstração do lema 2.3, vimos que a condição para que um vetor real esteja no núcleo de ω é precisamente (2.2). Contudo, agora temos $S_{13}S_{24} = S_{14}S_{23}$. Além disso, sabemos que $Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{13}) = Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{23})$ e $Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{14}) = Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{24})$. Desse modo, a condição (2.2) é válida e, portanto, m é um vetor real não-nulo.

□

Definição 3.4. Vamos denotar por $\mathscr{R}$ o conjunto de todos os pares $(\sigma, \lambda) \in (\mathbb{C}^6 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}$ que provém de um equilíbrio relativo não-colinear.

A única condição necessária na proposição 2.1 para garantir que σ provém de um equilíbrio relativo é a positividade do vetor m. Impondo tal condição, obtemos:

Teorema 3.5. *$\mathscr{R}$ é um subconjunto aberto do conjunto solução das equações (C) e (MB). Além disso, sua fronteira $\partial\mathscr{R}$ está contida no conjunto onde (D) é válida para algum vetor real m com pelo menos uma das entradas nulas.*

Demonstração. Primeiro, observe que os pontos de $\mathscr{R}$ satisfazem as equações (C) e (D), visto que cada um deles provém de um equilíbrio relativo não-colinear. Pela proposição 2.1, $\mathscr{R}$ é um subconjunto do conjunto solução das equações (C) e (MB).

Seja $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$ arbitrário. Desse modo, temos $\sigma = z^* \wedge 1^*$, onde z é um equilíbrio relativo não-colinear e $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^4$ tal que $m \lrcorner \omega(\sigma, \lambda) = 0$. Além disso, como $\sigma_{ij} = z_i - z_j$, $\omega_{ij} = S_{ij}\sigma_{ij} = (|z_i - z_j|^{-3} + \lambda)(z_i - z_j)$ e λ depende continuamente de z[1], segue que σ e ω

[1]Este fato será provado mais adiante

dependem continuamente de z.

Neste contexto, como z é não-colinear, podemos tomar uma vizinhança V de z formada apenas por pontos não-colineares. Pela continuidade de σ em V, podemos tomar uma vizinhança U de (σ, λ) formada por pontos que provém de vetores posição não-colineares. Agora, seja U_1 uma vizinhaça de (σ, λ) contida na interseção de U com o conjunto solução de (C) e (MB). Aplicando ω em U_1, obtemos uma vizinhança W de m formada apenas por vetores massa positivos. Assim, U_1 é uma vizinhança de (σ, λ) formada apenas por pontos que provém de um equilíbrio relativo não-colinear. Assim, (σ, λ) é ponto interior de $\mathscr{R}$. Logo, esse conjunto é um subconjunto aberto do conjunto solução das equações (C) e (MB).

Por fim, seja $(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) \in \partial\mathscr{R}$ arbitrário. Pela proposição 2.1, esse ponto satisfaz as equações (C) e (MB). Além disso, (D) é válida para algum $\widetilde{m}$ não-nulo. Agora, se $\widetilde{m}$ fosse positivo, então $(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda})$ seria um ponto de $\mathscr{R}$. Assim, $\widetilde{m}$ possui pelo menos uma entrada nula. Portanto, $\partial\mathscr{R}$ está contido no conjunto onde (D) é válida para algum vetor real com pelo menos uma coordenada nula. □

3.2 Unicidade do Vetor Massa

Já sabemos, pelo teorema 2.5, que $\mathscr{R}$ é um subconjunto de um certa variedade analítica real em $(\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R}$ (o conjunto-solução das equações (C) e (MB)). Contudo, antes de estudar a estrutura de $\mathscr{R}$ mais profundamente, vamos provar outro resultado importante de MacMillan e Bartky a respeito da unicidade do vetor massa.

Teorema 3.6. *Seja $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$. Então o vetor massa m real é único a menos de um múltiplo constante.*

Demonstração. Primeiro, observamos que os vetores reais do núcleo de ω formam um subespaço real conforme descrito na demonstração do lema 2.3. Como o vetor massa real m pertence a esse subespaço, é suficiente mostrar que o mesmo possui dimensão igual a 1 para concluir a demonstração.

Para isso, vamos permitir qualquer par ordenado (σ, λ) no conjunto solução das equações (C) e (MB). Desse modo, suponhamos que a dimensão do subespaço real contido no núcleo de ω seja maximal, isto é, igual a 2, pois vimos no lema 2.3 que o posto de ω é igual a 2 . Para utilizar a mesma descrição de $N(\omega)$ obtida no lema 2.3, assumiremos que $\omega_{12} = S_{12}\sigma_{12} \neq 0$. Dessa forma, como o subespaço formado por vetores reais é bidimensional, temos

$$Im(\overline{\omega_{12}}\omega_{24}) = Im(\overline{\omega_{12}}\omega_{23}) = Im(\overline{\omega_{12}}\omega_{14}) = Im(\overline{\omega_{12}}\omega_{13}) = 0. \tag{3.3}$$

Agora, simplificando a primeira equação de (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= Im(\overline{\omega_{12}}\omega_{24}) \\ &= Im(\overline{S_{12}\sigma_{12}}S_{24}\sigma_{24}) \\ &= S_{12}S_{24}Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{24}), \end{aligned}$$

ou seja, $S_{24} = 0$ ou $Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{24}) = 0$ ($\overline{\sigma_{12}}\sigma_{24} \in \mathbb{R}$). Fazendo o mesmo com as outras três equações de (2.3), obtemos as seguintes dicotomias adicionais: $S_{23} = 0$ ou $\overline{\sigma_{12}}\sigma_{23} \in \mathbb{R}$, $S_{14} = 0$ ou $\overline{\sigma_{12}}\sigma_{14} \in \mathbb{R}$, $S_{13} = 0$ ou $\overline{\sigma_{12}}\sigma_{13} \in \mathbb{R}$.

Na dicotomia da primeira equação de (2.3), vamos supor que $S_{24} \neq 0$. Dessa forma, temos $\overline{\sigma_{12}}\sigma_{24} \in \mathbb{R}$. Contudo, fazendo $\sigma_{ij} = z_i - z_j$ e $z_j = x_j + i \cdot y_j$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{24}) \\ &= (x_1 - x_2)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_2) \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

isto é, z_1, z_2 e z_4 são colineares. Consequentemente, as distâncias de z_3 aos outros pontos não são todas iguais. Segue disso que pelo menos um dos valores S_{i3}, onde $i = 1, 2, 4$, é diferente de zero. Além disso, S_{34} não pode ser o único igual a zero, pois teríamos $S_{13}S_{24} = S_{14}S_{23} = 0$ e $S_{12}S_{34} \neq 0$, o que contradiz as equações (MB).

A partir das outras dicotomias, concluímos que pelo menos um entre $\overline{\sigma_{12}}\sigma_{13}$ e $\overline{\sigma_{12}}\sigma_{23}$ é real, caso contrário teríamos $S_{13} = S_{23} = 0$, o que implica $S_{34} = 0$ pelas equações (MB), o que é uma contradição. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{13}) \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 0 &= Im(\overline{\sigma_{12}}\sigma_{23}) \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

o que equivale a dizer que z_1, z_2 e z_3 são colineares. Logo, z_1, z_2, z_3 e z_4 são colineares, o que é uma contradição com o lema 2.2, visto que as equações (MB) são válidas. Dessa forma, a suposição de que $S_{24} \neq 0$ é absurda.

A mesma conclusão acima pode ser obtida se tomarmos algum outro S_{ij}, ao invés de S_{24}, diferente de zero. Então, a única possiblidade de satisfazer as quatro dicotomias anteriores é $S_{13} = S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{34} = 0$. Mas, pelo lema 2.3, todo vetor real do núcleo de ω é da forma

$$(0, 0, s|\omega_{12}|^2, -r|\omega_{12}|^2),$$

onde $r, s \in \mathbb{R}$, o que contradiz a existência de um vetor massa positivo no núcleo de ω. Portanto, o subespaço dos vetores reais contidos no núcleo possui dimensão igual a 1. □

Agora, considere o espaço das massas normalizadas

$$\mathscr{M} = \{(m_1, m_2, m_3, m_4) \in (\mathbb{R}_+^\times)^4 : m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1\}.$$

Vamos definir a aplicação $\varphi : \mathscr{R} \to \mathscr{M}$ que leva cada par (σ, λ) que provém de um equilíbrio relativo não-colinear no vetor massa normalizado $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ correspondente. O Teorema 2.5 nos garante que φ está bem-definida porque a cada par ordenado $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$ está associado somente um vetor massa $m \in \mathscr{M}$. Neste contexto, é natural questionarmos a respeito das propriedades dessa aplicação.

Proposição 3.7. *A aplicação $\varphi : \mathscr{R} \to \mathscr{M}$ é contínua.*

Demonstração. Seja $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$ e $m = \varphi(\sigma, \lambda)$. Note que $\omega(\sigma, \lambda)$ é contínua, pois $\omega_{ij}(\sigma, \lambda) = (|\sigma_{ij}|^{-3} + \lambda)\sigma_{ij}$ é contínua em $\mathscr{R}$. Agora, como m é o único elemento de $\mathscr{M}$ que pertence ao núcleo de $\omega(\sigma, \lambda)$, segue que dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|m' \lrcorner \omega(\sigma, \lambda)| > \delta$ para $|m' - m| > \epsilon$. De fato, suponha que tal δ não exista, então considere a sequência $\{m_k\}$ cujos termos estão contidos num compacto $K \subset \mathscr{M}$ tal que $|m_k - m| > \epsilon$ e $|m_k \lrcorner \omega(\sigma, \lambda)| < \dfrac{1}{k}$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = m_0$, com $m_0 \in K$ e $|m_0 - m| \geq \epsilon$. Contudo, temos $\lim\limits_{k\to\infty} |m_k \lrcorner \omega(\sigma, \lambda)| = |m_0 \lrcorner \omega(\sigma, \lambda)| = 0$, ou seja, $m_0 = m$, o que é uma contradição.

Agora, vamos tomar $(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda})$ suficientemente próximo de (σ, λ). Então $|m' \lrcorner \omega(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda})| > \dfrac{\delta}{2}$ é válida para o mesmo m' anterior. Contudo, para $\tilde{m} = \varphi(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda})$ temos $\tilde{m} \lrcorner \omega(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) = 0$, consequentemente temos $|\tilde{m} - m| < \epsilon$. Portanto, φ é contínua. □

3.3 O Espaço Quociente de $\mathscr{R}$ via Ação do Grupo $\mathbb{C}^\times$

Considere a ação do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$ no conjunto $(\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R}$ definida por

$$c \cdot (\sigma, \lambda) = (c\sigma, |c|^{-3}\lambda),$$

onde $c \in \mathbb{C}^\times$ e $(\sigma, \lambda) \in (\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(c \cdot (\sigma, \lambda)) &= \omega_{ij}(c\sigma, |c|^{-3}\lambda) \\ &= (|c\sigma_{ij}|^{-3} + |c|^{-3}\lambda)c\sigma_{ij} \\ &= c|c|^{-3} \cdot \omega_{ij}(\sigma, \lambda). \end{aligned}$$

Desse modo, constatamos que essa ação multiplica $\omega(\sigma, \lambda)$ por $c|c|^{-3}$ e, consequentemente, não afeta o seu núcleo. Assim, se $m = \varphi(\sigma, \lambda)$ então $m = \varphi(c \cdot (\sigma, \lambda))$, ou seja, $\mathscr{R}$ é invariante através dessa ação.

A ação acima definida possui uma seção tranversal global $\{(\sigma, \lambda) \in (\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R} : \sigma_{12} = 1\}$. Além disso, podemos caracterizar os pares que são equivalentes da seguinte forma: $(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) \in [(\sigma, \lambda)]$ se existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tal que $(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) = (c\sigma, |c|^{-3}\lambda)$. Desse modo, o espaço quociente dessa ação, munido com a topologia quociente, pode ser identificado com o espaço $(\mathbb{C}P(5) \setminus \widetilde{\Delta}) \times \mathbb{Z}_3$, onde $\widetilde{\Delta}$ é o espaço quociente de Δ através da ação de $\mathbb{C}^{\times}$, ou com a seção transversal acima definida.

A restrição da ação de $\mathbb{C}^{\times}$ aos elementos de $\mathscr{R}$ origina o espaço quociente que chamaremos de $\tilde{\mathscr{R}}$. Neste contexto, a aplicação φ, anteriormente definida, induz uma aplicação $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathscr{R}} \to \mathscr{M}$ que leva a classe $[(\sigma, \lambda)]$ no vetor massa $m \in \mathscr{M}$ correspondente a imagem do representante dessa classe por φ, ou seja, $m = \varphi(\sigma, \lambda)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{R} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{M} \\
\widetilde{\mathscr{R}} \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\widetilde{\varphi}$ é contínua. De fato, seja $\pi : \mathscr{R} \to \widetilde{\mathscr{R}}$ a projeção usual $\pi(\sigma, \lambda) = [(\sigma, \lambda)]$ (observe o diagrama acima). Como o contradomínio de π está munido com a topologia quociente, então $U \subset \widetilde{\mathscr{R}}$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U) \subset \mathscr{R}$ é aberto. Desse modo, segue trivialmente que π é contínua. Agora, como $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ e φ é contínua pela proposição 2.6, vamos tomar $V \subset \mathscr{M}$ um aberto arbitrário e mostrar que sua pré-imagem por $\widetilde{\varphi}$ é um conjunto aberto em $\tilde{\mathscr{R}}$. Com efeito, pela continuidade de φ temos que $\varphi^{-1}(V)$ é aberto em $\mathscr{R}$. Mas, como $\varphi^{-1}(V) = \pi^{-1}(\widetilde{\varphi}^{-1}(V))$, então temos que $\varphi^{-1}(V)$ é aberto em $\widetilde{\mathscr{R}}$, ou seja, $\tilde{\varphi}$ é contínua.

Definição 3.8. Sejam X e Y espaços topológicos quaisquer. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita *própria* se K compacto em Y implica $f^{-1}(K)$ compacto em X.

Veremos no próximo capítulo que a teoria das bifurcações dos equilíbrios relativos do problema de 4 corpos em $\mathbb{C}$ (que identificaremos com o $\mathbb{R}^2$) será reduzida ao estudo dos pontos críticos de $\widetilde{\varphi}$. Nesse estudo, o resultado a seguir desempenha um papel de destaque.

Teorema 3.9. *$\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathscr{R}} \to \mathscr{M}$ é uma aplicação contínua própria.*

Demonstração. Já vimos acima que $\widetilde{\varphi}$ é contínua. Para mostrar que essa aplicação é própria, vamos considerar um conjunto compacto $K \subset \mathscr{M}$ arbitrário. Pela continuidade de $\widetilde{\varphi}$, temos que $\widetilde{\varphi}^{-1}(K)$ é fechado em $(\mathbb{C}P(5) \setminus \widetilde{\Delta}) \times \mathbb{Z}_3$.

Para finalizar a demonstração, vamos mostrar que $\widetilde{\varphi}^{-1}(K)$ está contido em algum subconjunto compacto de $(\mathbb{C}P(5) \setminus \widetilde{\Delta}) \times \mathbb{Z}_3$. Para isso, faremos uso da identificação de $(\mathbb{C}P(5) \setminus \tilde{\Delta}) \times \mathbb{Z}_3$ com a seção transversal global $\{(\sigma, \lambda) \in (\mathbb{C}^6 \setminus \Delta) \times \mathbb{R} : \sigma_{12} = 1\}$. Primeiro, devemos ver que $\sigma = (\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{23}, \sigma_{24}, \sigma_{34})$ está limitado longe de Δ. Com efeito, um resultado de Shub para o problema de N corpos mostra que se m está fixado e o comprimento do vetor posição z está normalizado, o equilíbrio relativo pode ser limitado longe de Δ (SHUB, 1971). Segue disso que para $\tilde{m} = \varphi(\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) \in K$, existe $\delta_{\tilde{m}} > 0$ tal que $|\tilde{\sigma}_{ij}| > \tilde{\delta}_{\tilde{m}}$ pois $\sigma_{ij} = z_i - z_j$ para todo i, j natural. Consequentemente, existe $\delta > 0$ tal que para todo $m = \varphi(\sigma, \lambda) \in K$ temos $|\sigma_{ij}| > \delta$. Com efeito, suponha que tal δ não exista, então podemos tomar uma sequência $\{m_n\}$ em K, com $m_n = \varphi(\sigma_n, \lambda_n)$ tal que $\delta_{m_n} = \dfrac{1}{n}$. Daí, tomando uma subsequência, se necessário, temos que $m_n \to m \in K$ e $\delta_{m_n} \to \delta_m = 0$, o que é uma contradição.

Em suma, esse resultado nos dá uma vizinhança de Δ onde as singularidades da função potencial não variam continuamente com as massas. Como vimos acima, podemos estender imediatamente esse resultado para o conjunto compacto K de vetores massa e quando traduzimos isso em termos de σ, concluímos que σ está limitado longe de Δ.

Finalmente, vamos obter uma cota para λ fazendo uso da equação (1.7). Multiplicando essa equação por $m_j\overline{(z_j - c)}$ e somando para $j = 1, ..., N$, temos

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \overline{(z_j - c)} \Lambda (z_j - c) = \sum_{j=1}^{N} m_j \overline{(z_j - c)} \left(\sum_{k=1, k \neq j}^{N} \frac{m_k (z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3} \right).$$

Agora, simplificando o lado esquerdo dessa igualdade, temos $\sum_{j=1}^{N} m_j \overline{(z_j - c)} \Lambda (z_j - c) =$

$\Lambda \sum\limits_{j=1}^{N} m_j|z_j - c|^2$. Assim, reescrevendo o lado esquerdo e simplificando o lado direito, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda \sum_{j=1}^{N} m_j|z_j - c|^2 &= \sum_{j=1}^{N} m_j\overline{(z_j - c)}\left(\sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k(z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} m_j(\overline{z_j} - \overline{c})\left(\sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{m_k(z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3}\right) \\
&= m_1(\overline{z_1} - \overline{c})\left[\frac{m_2(z_2 - z_1)}{|z_2 - z_1|^3} + \frac{m_3(z_3 - z_1)}{|z_3 - z_1|^3} + \ldots + \frac{m_N(z_N - z_1)}{|z_N - z_1|^3}\right] + \\
&\quad m_2(\overline{z_2} - \overline{c})\left[\frac{m_1(z_1 - z_2)}{|z_1 - z_2|^3} + \frac{m_3(z_3 - z_2)}{|z_3 - z_2|^3} + \ldots + \frac{m_N(z_N - z_2)}{|z_N - z_2|^3}\right] + \ldots + \\
&\quad m_N(\overline{z_N} - \overline{c})\left[\frac{m_1(z_1 - z_N)}{|z_1 - z_N|^3} + \frac{m_2(z_2 - z_N)}{|z_2 - z_N|^3} + \ldots + \frac{m_{N-1}(z_{N-1} - z_N)}{|z_{N-1} - z_N|^3}\right] \\
&= \sum_{1\leq k<j\leq N}\left[m_j(\overline{z_j} - \overline{c})\frac{m_k(z_k - z_j)}{|z_k - z_j|^3} + m_k(\overline{z_k} - \overline{c})\frac{m_j(z_j - z_k)}{|z_j - z_k|^3}\right] \\
&= -\sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j (z_k - z_j)\overline{(z_k - z_j)}}{|z_k - z_j|^3} \\
&= -\sum_{1\leq k<j\leq N} \frac{m_k m_j}{|z_k - z_j|} \\
&= -U(z).
\end{aligned}$$

Desse modo, a igualdade anterior torna-se

$$\Lambda \sum_{j=1}^{N} m_j|z_j - c|^2 = -U(z).$$

Agora, como $\Lambda = M^{-1}\lambda$ e $M = 1$, a expressão anterior nos fornece

$$\lambda = -U(z)\left(\sum_{j=1}^{N} m_j|z_j - c|^2\right)^{-1}.$$

A primeira informação importante sobre essa fórmula explícita é que $\lambda < 0$ em $\mathscr{R}$. Além disso, para $\sigma \in (\mathbb{C}P(5) \smallsetminus \Delta)$ com $\sigma_{12} = 1$, o mesmo resultado de Shub usado acima fornece cotas inferiores positivas para o denominador da função potencial $U(z)$. Todas as partículas então, não podem estar suficientemente próximas de c, caso contrário estariam suficientemente próximas de Δ. Assim, temos cotas inferiores positivas para $\sum\limits_{j=1}^{N} m_j|z_j - c|^2$ quando N varia nos naturais. Logo λ é limitado em $\varphi^{-1}(K)$. Portanto, como $\varphi^{-1}(K)$ é fechado e está contido em um conjunto compacto, então é compacto. Isso completa a demonstração. □

MacMillan e Bartky(1932) também mostraram que para $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$, λ é unicamente determinado por σ, exceto no caso em que σ representa a seguinte configuração: três partículas formando um triângulo equilátero com a quarta partícula no centro. Então, exceto nesse caso, a configuração determina a razão entre as massas de forma única.

3.4 A Estrutura do Conjunto de Equilíbrios Relativos Não-colineares

Para nos aprofundarmos na caracterização dos equilíbrios relativos não-colineares desejamos obter informações a respeito da estrutura de $\mathscr{R}$. Vimos no teorema 2.5 que $\mathscr{R}$ é um subconjunto aberto do conjunto solução das equações (C) e (MB). Desse modo, os pontos desse conjunto podem ser descritos através de 8 restrições analíticas reais em um espaço com dimensão real igual a 13, a saber $(\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R}$.

Em termos das partes real e imaginária de cada $\sigma_{kj} = x_{kj} + iy_{kj}$ e de $\lambda \in \mathbb{R}$, para cada $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$ temos 6 restrições que provém das equações cocíclicas (C) e outras 2 restrições que provém das equações (MB). Por meio dessas restrições, podemos definir em $(\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R}$ as seguintes aplicações reais:

$$
\begin{aligned}
f_1(\sigma,\lambda) &= x_{12} + x_{23} - x_{13}, & f_2(\sigma,\lambda) &= y_{12} + y_{23} - y_{13},\\
f_3(\sigma,\lambda) &= x_{12} + x_{24} - x_{14}, & f_4(\sigma,\lambda) &= y_{12} + y_{24} - y_{14},\\
f_5(\sigma,\lambda) &= x_{13} + x_{34} - x_{12}, & f_6(\sigma,\lambda) &= y_{13} + y_{34} - y_{12},\\
F(\sigma,\lambda) &= S_{13}S_{24} - S_{12}S_{34}, & G(\sigma,\lambda) &= S_{13}S_{24} - S_{14}S_{23}.
\end{aligned}
$$

Agora, considere o seguinte sistema de equações homogêneas definidas em $(\mathbb{C}^6 \smallsetminus \Delta) \times \mathbb{R}$:

$$
\begin{cases}
f_i(\sigma,\lambda) = 0\\
F(\sigma,\lambda) = 0\\
G(\sigma,\lambda) = 0
\end{cases},
$$

onde $i = 1, ..., 6$. Já vimos no teorema 2.5 que as equações desse sistema são independentes em todo ponto de $\mathscr{R}$. De forma geral, tais equações são independentes em todo ponto

$(\sigma, \lambda) \in (\mathbb{C}^6 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}$ onde a seguinte matriz jacobiana 8×13 possui posto maximal:

$$A = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_3 \\ \nabla f_4 \\ \nabla f_5 \\ \nabla f_6 \\ \nabla F \\ \nabla G \end{bmatrix}.$$

Agora, como

$$\nabla f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{12}}, \frac{\partial f_i}{\partial y_{12}}, \frac{\partial f_i}{\partial x_{13}}, \frac{\partial f_i}{\partial y_{13}}, \frac{\partial f_i}{\partial x_{14}}, \frac{\partial f_i}{\partial y_{14}}, \frac{\partial f_i}{\partial x_{23}}, \frac{\partial f_i}{\partial y_{23}}, \frac{\partial f_i}{\partial x_{24}}, \frac{\partial f_i}{\partial y_{24}}, \frac{\partial f_i}{\partial x_{34}}, \frac{\partial f_i}{\partial y_{34}}, \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \right),$$

podemos calcular as entradas das linhas de 1 a 6 facilmente e, assim, a matriz A acima torna-se:

$$A = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & I & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ I & 0 & -I & 0 & I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & I & -I & 0 & 0 & I & \vdots & 0 \\ A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{23} & A_{24} & A_{34} & \vdots & A_{\lambda} \end{bmatrix},$$

onde as entradas da última coluna são matrizes 2×1 e todas as demais são matrizes 2×2, com I representando a matriz identidade,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{ij}} & \frac{\partial F}{\partial y_{ij}} \\ \\ \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} & \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \\ \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} \end{bmatrix}.$$

Lema 3.10. *Seja* (σ, λ) *um ponto do conjunto solução das equações* (C) *e* (MB) *onde* A *não possui posto maximal. Então*

$$S_{12}S_{34} = S_{13}S_{24} = S_{14}S_{23} = 0.$$

Demonstração. Primeiro vamos escalonar a matriz A por operações elementares em suas linhas. Seja L_i a i–ésima linha da matriz A. Trocando L_7 por $L_7 - \frac{\partial F}{\partial x_{23}} \cdot L_1 - \frac{\partial F}{\partial y_{23}} \cdot L_2 - \frac{\partial F}{\partial x_{24}} \cdot L_3 - \frac{\partial F}{\partial y_{24}} \cdot L_4 - \frac{\partial F}{\partial x_{34}} \cdot L_5 - \frac{\partial F}{\partial y_{34}} \cdot L_6$ e L_8 por $L_8 - \frac{\partial G}{\partial x_{23}} \cdot L_1 - \frac{\partial G}{\partial y_{23}} \cdot L_2 - \frac{\partial G}{\partial x_{24}} \cdot L_3 - \frac{\partial G}{\partial y_{24}} \cdot L_4 - \frac{\partial G}{\partial x_{34}} \cdot L_5 - \frac{\partial G}{\partial y_{34}} \cdot L_6$ reduzimos a matriz A à seguinte matriz:

$$B = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & I & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ I & 0 & -I & 0 & I & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & I & -I & 0 & 0 & I & \vdots & 0 \\ A_{12} - A_{23} - A_{24} & A_{13} + A_{23} - A_{34} & A_{14} + A_{24} + A_{34} & 0 & 0 & 0 & \vdots & A_\lambda \end{bmatrix}.$$

Claramente, a matriz B tem posto pelo menos igual a 6, visto que as linhas de 1 a 6 são linearmente independentes. Desse modo, para que essa matriz tenha posto igual a 8, a matriz

$$C = \begin{bmatrix} A_{12} - A_{23} - A_{24} & A_{13} + A_{23} - A_{34} & A_{14} + A_{24} + A_{34} & 0 & 0 & 0 & \vdots & A_\lambda \end{bmatrix}$$

deve ter posto igual a 2.

Por simplicidade de notação, vamos substituir A_{ij} pelo vetor complexo

$$2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{ij}} \\ \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{ij}} + i \frac{\partial F}{\partial y_{ij}} \\ \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} + i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} \end{bmatrix}.$$

Contudo, por hipótese, a matriz A não possui posto maximal. Isso significa que as duas linhas da matriz C são linearmente dependentes e, consequentemente, proporcionais. Desse fato, podemos extrair três relações de proporcionalidade :

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{12}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \right) = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{12}} - \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \right), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{13}} + \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{34}} \right) = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{13}} + \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{34}} \right), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{14}} + \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{24}} + \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{34}} \right) = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{14}} + \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{23}} + \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{34}} \right), \tag{3.6}$$

comparando a 1ª, 2ª e 3ª colunas, respectivamente, com a 13ª coluna da matriz C.

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{jk}}{\partial \overline{\sigma}_{jk}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{jk}} + i\frac{\partial}{\partial y_{jk}}\right)\left((x_{jk}^2 + y_{jk}^2)^{\frac{-3}{2}} + \lambda\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[-3x_{jk}(x_{jk}^2 + y_{jk}^2)^{\frac{-5}{2}} + i(-3)y_{jk}(x_{jk}^2 + y_{jk}^2)^{\frac{-5}{2}}\right] \\
&= \left(\frac{-3}{2}\right)\cdot\frac{x_{jk} + iy_{jk}}{(x_{jk}^2 + y_{jk}^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \left(\frac{-3}{2}\right)\cdot\frac{\sigma_{jk}}{|\sigma_{jk}|^5}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

e que $\dfrac{\partial S_{jk}}{\partial \lambda} = 1$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(S_{13}S_{24} - S_{12}S_{34}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(|\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{12}\sigma_{34}|^{-3} + \lambda(|\sigma_{13}|^{-3} + |\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{12}|^{-3} - |\sigma_{34}|^{-3})\right) \\
&= |\sigma_{13}|^{-3} + |\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{12}|^{-3} - |\sigma_{34}|^{-3}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(S_{13}S_{24} - S_{14}S_{23}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(|\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{14}\sigma_{23}|^{-3} + \lambda(|\sigma_{13}|^{-3} + |\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{14}|^{-3} - |\sigma_{23}|^{-3})\right) \\
&= |\sigma_{13}|^{-3} + |\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{14}|^{-3} - |\sigma_{23}|^{-3}
\end{aligned}$$

e como o par (σ, λ) é solução das equações (MB), temos $F = G = 0$. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
0 &= |\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{12}\sigma_{34}|^{-3} + \lambda(|\sigma_{13}|^{-3} + |\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{12}|^{-3} - |\sigma_{34}|^{-3}) \\
&= |\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{12}\sigma_{34}|^{-3} + \lambda\frac{\partial F}{\partial \lambda},
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$-\lambda\frac{\partial F}{\partial \lambda} = |\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{12}\sigma_{34}|^{-3} \qquad (3.8)$$

e

$$\begin{aligned}0 &= |\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{14}\sigma_{23}|^{-3} + \lambda(|\sigma_{13}|^{-3} + |\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{14}|^{-3} - |\sigma_{23}|^{-3}) \\ &= |\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{14}\sigma_{23}|^{-3} + \lambda\frac{\partial G}{\partial \lambda},\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$-\lambda\frac{\partial G}{\partial \lambda} = |\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-3} - |\sigma_{14}\sigma_{23}|^{-3}. \tag{3.9}$$

Para reescrever as equações (2.4), (2.5) e (2.6), vamos simplificar as expressões entre parentêses nessas equações usando (2.7). Desse modo, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{12}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{24}} &= -S_{34}\frac{\partial S_{12}}{\partial \overline{\sigma}_{12}} - S_{13}\frac{\partial S_{24}}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \\ &= -S_{34}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{12}}{|\sigma_{12}|^5} - S_{13}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{24}}{|\sigma_{24}|^5} \\ &= \frac{3}{2}\left(S_{34}|\sigma_{12}|^{-5}\sigma_{12} + S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\sigma_{24}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{12}} - \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{24}} &= S_{14}\frac{\partial S_{23}}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - S_{13}\frac{\partial S_{24}}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \\ &= S_{14}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{23}}{|\sigma_{23}|^5} - S_{13}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{24}}{|\sigma_{24}|^5} \\ &= \frac{3}{2}\left(-S_{14}|\sigma_{23}|^{-5}\sigma_{23} + S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\sigma_{24}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{13}} + \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{34}} &= S_{24}\frac{\partial S_{13}}{\partial \overline{\sigma}_{13}} + S_{12}\frac{\partial S_{34}}{\partial \overline{\sigma}_{34}} \\ &= S_{24}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{13}}{|\sigma_{13}|^5} + S_{12}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{34}}{|\sigma_{34}|^5} \\ &= \frac{3}{2}\left(-S_{24}|\sigma_{13}|^{-5}\sigma_{13} - S_{12}|\sigma_{34}|^{-5}\sigma_{34}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{13}} + \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{23}} - \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{34}} &= S_{24}\frac{\partial S_{13}}{\partial \overline{\sigma}_{13}} - S_{14}\frac{\partial S_{23}}{\partial \overline{\sigma}_{23}} \\
&= S_{24}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{13}}{|\sigma_{13}|^5} - S_{14}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{23}}{|\sigma_{23}|^5} \\
&= \frac{3}{2}\left(-S_{24}|\sigma_{13}|^{-5}\sigma_{13} + S_{14}|\sigma_{23}|^{-5}\sigma_{23}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{14}} + \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{24}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{34}} &= S_{13}\frac{\partial S_{24}}{\partial \overline{\sigma}_{24}} - S_{12}\frac{\partial S_{34}}{\partial \overline{\sigma}_{34}} \\
&= S_{13}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{24}}{|\sigma_{24}|^5} - S_{12}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{34}}{|\sigma_{34}|^5} \\
&= \frac{3}{2}\left(-S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\sigma_{24} + S_{12}|\sigma_{34}|^{-5}\sigma_{34}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{14}} + \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{24}} - \frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{34}} &= -S_{23}\frac{\partial S_{14}}{\partial \overline{\sigma}_{14}} + S_{13}\frac{\partial S_{24}}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \\
&= -S_{23}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{14}}{|\sigma_{14}|^5} + S_{13}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma_{24}}{|\sigma_{24}|^5} \\
&= \frac{3}{2}\left(S_{23}|\sigma_{14}|^{-5}\sigma_{14} - S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\sigma_{24}\right).
\end{aligned}$$

Segue dessas igualdades que $(2.4), (2.5)$ e (2.6) tornam-se, respectivamente:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(-S_{14}|\sigma_{23}|^{-5}\sigma_{23} + S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\sigma_{24}\right) = \frac{\partial G}{\partial \lambda}\left(S_{34}|\sigma_{12}|^{-5}\sigma_{12} + S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\sigma_{24}\right), \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(-S_{24}|\sigma_{13}|^{-5}\sigma_{13} + S_{14}|\sigma_{23}|^{-5}\sigma_{23}\right) = \frac{\partial G}{\partial \lambda}\left(-S_{24}|\sigma_{13}|^{-5}\sigma_{13} - S_{12}|\sigma_{34}|^{-5}\sigma_{34}\right), \tag{3.11}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(S_{23}|\sigma_{14}|^{-5}\sigma_{14} - S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\sigma_{24}\right) = \frac{\partial G}{\partial \lambda}\left(-S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\sigma_{24} + S_{12}|\sigma_{34}|^{-5}\sigma_{34}\right). \tag{3.12}$$

Por hipótese, o par (σ, λ) satisfaz as equações (C) e, através delas, podemos expressar σ_{12}, σ_{13} e σ_{23} em função de σ_{14}, σ_{24} e σ_{34} da seguinte forma: $\sigma_{12} = \sigma_{14} - \sigma_{24}$, $\sigma_{13} = \sigma_{14} - \sigma_{34}$ e

$\sigma_{23} = \sigma_{24} - \sigma_{34}$. Usando essas expressões em (2.10), (2.11) e (2.12), obtemos, nessa ordem:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} S_{34}|\sigma_{12}|^{-5}\right)\sigma_{14} + \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} S_{13}|\sigma_{24}|^{-5} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} S_{34}|\sigma_{12}|^{-5} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{14}|\sigma_{23}|^{-5} - \frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\right)\sigma_{24} + \left(-\frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{14}|\sigma_{23}|^{-5}\right)\sigma_{34} = 0, \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{24}|\sigma_{13}|^{-5} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} S_{24}|\sigma_{13}|^{-5}\right)\sigma_{14} + \left(-\frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{14}|\sigma_{23}|^{-5}\right)\sigma_{24} + \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} S_{24}|\sigma_{13}|^{-5} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} S_{12}|\sigma_{34}|^{-5} - \frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{24}|\sigma_{13}|^{-5} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{14}|\sigma_{23}|^{-5}\right)\sigma_{34} = 0, \tag{3.14}$$

e

$$\left(-\frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{23}|\sigma_{14}|^{-5}\right)\sigma_{14} + \left(-\frac{\partial G}{\partial \lambda} S_{13}|\sigma_{24}|^{-5} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} S_{13}|\sigma_{24}|^{-5}\right)\sigma_{24} + \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} S_{12}|\sigma_{34}|^{-5}\right)\sigma_{34} = 0. \tag{3.15}$$

As equações (2.13), (2.14) e (2.15) representam relações de dependência entre os números complexos σ_{14}, σ_{24} e σ_{34}, com coeficientes reais. Pelo lema 2.2, z_1, z_2, z_3 e z_4 não podem ser colineares pois o par (σ, λ) satisfaz as equações (MB). Segue disso, que σ_{14}, σ_{24} e σ_{34} não podem ser proporcionais sobre $\mathbb{R}$, caso contrário teríamos $Im(\sigma_{14}\overline{\sigma}_{24}) = Im(\sigma_{34}\overline{\sigma}_{24}) = 0$, o que equivale a dizer que z_1, z_2, z_3 e z_4 são colineares [2], o que é absurdo. Consequentemente, os coeficientes nessas três relações de dependência são proporcionais.

Agora, comparando os coeficientes de σ_{14} e σ_{34} nas equações (2.13) e (2.15), obtemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{S_{14}S_{23}}{|\sigma_{14}\sigma_{23}|^5} = \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{S_{12}S_{34}}{|\sigma_{12}\sigma_{34}|^5}.$$

Analogamente, comparando os coeficientes de σ_{14} e σ_{24} nas equações (2.14) e (2.15), obtemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{S_{13}S_{24}}{|\sigma_{13}\sigma_{24}|^5} = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{S_{14}S_{23}}{|\sigma_{14}\sigma_{23}|^5}.$$

Juntando essas duas relações, temos uma condição simples válida sempre que A não

[2] A demonstração desse fato é análoga à feita no último parágrafo do lema 2.3.

possuir posto maximal:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{S_{14}S_{23}}{|\sigma_{14}\sigma_{23}|^5} = \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{S_{12}S_{34}}{|\sigma_{12}\sigma_{34}|^5} = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{S_{13}S_{24}}{|\sigma_{13}\sigma_{24}|^5}. \tag{3.16}$$

Para completar a demonstração, vamos assumir que $S_{12}S_{34} = S_{13}S_{24} = S_{14}S_{23} \neq 0$ e então estudar as soluções das equações (2.16).

Sejam $r = |\sigma_{12}\sigma_{34}|^{-1}$, $s = |\sigma_{13}\sigma_{24}|^{-1}$ e $t = |\sigma_{14}\sigma_{23}|^{-1}$ números reais positivos. De (2.8) e (2.9), temos $\lambda\frac{\partial F}{\partial \lambda} = r^3 - s^3$ e $\lambda\frac{\partial G}{\partial \lambda} = t^3 - s^3$. Desse modo, temos $\lambda^2\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2 = (r^3 - t^3)^2$, $\lambda^2\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)^2 = (r^3 - s^3)^2$ e $\lambda^2\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2 = (t^3 - s^3)^2$. Multiplicando (2.16) por λ^2 e eliminando os S's , obtemos

$$(s^3 - r^3)^2 t^5 = (t^3 - s^3)^2 r^5 = (t^3 - r^3)^2 s^5. \tag{3.17}$$

Uma solução positiva óbvia de (2.17) é $r = s = t$. Afirmamos que essa é a única solução positiva dessas equações. De fato, sem perda de generalidade, vamos assumir que $r \leq s \leq t$. Então $0 \leq t^3 - s^3 \leq t^3 - r^3$ e $r^5 \leq s^5$. Desse modo, a segunda equação de (2.17) é verdadeira se, e somente se $r = s$. Contudo, se $r = s$ então a primeira equação de (2.17) nos fornece $t = s$. Logo, $r = s = t$ é a única solução. Dessa forma, $r = s = t$ é uma condição necessária para um ponto (σ, λ) no qual A não tenha posto maximal.

Agora, a fim de obtermos uma contradição, afirmamos que quando A possui posto maximal temos $r = s = t$. Com efeito, suponha que $|\sigma_{12}\sigma_{34}| = |\sigma_{13}\sigma_{24}| = |\sigma_{14}\sigma_{23}|$. Das equações (MB), temos

$$|\sigma_{12}|^{-3} + |\sigma_{34}|^{-3} = |\sigma_{14}|^{-3} + |\sigma_{23}|^{-3} = |\sigma_{13}|^{-3} + |\sigma_{24}|^{-3}.$$

Contudo, essas equações podem ser escritas como

$$\frac{|\sigma_{12}|^3 + |\sigma_{34}|^3}{|\sigma_{12}\sigma_{34}|^3} = \frac{|\sigma_{14}|^3 + |\sigma_{23}|^3}{|\sigma_{14}\sigma_{23}|^3} = \frac{|\sigma_{13}|^3 + |\sigma_{24}|^3}{|\sigma_{13}\sigma_{24}|^3},$$

ou, equivalentemente,

$$|\sigma_{12}|^3 + |\sigma_{34}|^3 = |\sigma_{14}|^3 + |\sigma_{23}|^3 = |\sigma_{13}|^3 + |\sigma_{24}|^3. \tag{3.18}$$

Primeiro note que $|\sigma_{12}| = \dfrac{|\sigma_{14}||\sigma_{23}|}{|\sigma_{34}|}$. Substituindo isso na primeira equação em (2.18) e simplificando-a, obtemos

$$|\sigma_{34}|^3|(|\sigma_{34}|^3| - |\sigma_{14}|^3|) = |\sigma_{23}|^3|(|\sigma_{34}|^3| - |\sigma_{14}|^3|,$$

ou seja,

$$|\sigma_{34}| = |\sigma_{14}| \quad \text{ou} \quad |\sigma_{34}| = |\sigma_{23}|.$$

Desse modo, concluímos que os comprimentos $|\sigma_{12}|, |\sigma_{34}|$ são iguais aos comprimentos $|\sigma_{14}|, |\sigma_{23}|$ em alguma ordem. Analogamente, como $|\sigma_{12}| = \dfrac{|\sigma_{13}||\sigma_{24}|}{|\sigma_{34}|}$ Substituimos esse valor na segunda equação em (2.18) e obtemos $|\sigma_{34}| = |\sigma_{13}|$ ou $|\sigma_{34}| = |\sigma_{24}|$. Assim, concluímos que os comprimentos $|\sigma_{12}|, |\sigma_{34}|$ são iguais aos comprimentos $|\sigma_{13}|, |\sigma_{24}|$ em alguma ordem. Portanto, três dessas partículas formam um triângulo equilátero com a quarta partícula equidistante às demais, ou seja, localizada no centro do triângulo.

Todos os vetores posição dessa forma são equivalentes afim, então podemos tomar (assumindo que z_4 está no centro) $z_4 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nesse caso, temos $|\sigma_{12}| = |\sigma_{13}| = |\sigma_{23}| = \sqrt{3}$, o que implica $S_{12} = S_{13} = S_{14} = 3^{-\frac{3}{2}} + \lambda$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_{24}} + i\frac{\partial F}{\partial y_{24}} &= 2\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \\
&= 2S_{13}\frac{\partial S_{24}}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \\
&= (3^{-\frac{3}{2}} + \lambda)\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right),
\end{aligned}$$

que implica

$$\frac{\partial F}{\partial x_{24}} = \frac{3}{2}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y_{24}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_{34}} + i\frac{\partial F}{\partial y_{34}} &= 2\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{34}} \\
&= -2S_{12}\frac{\partial S_{34}}{\partial \overline{\sigma}_{34}} \\
&= (3^{-\frac{3}{2}} + \lambda)\left(-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right),
\end{aligned}$$

que implica

$$\frac{\partial F}{\partial x_{24}} = -\frac{3}{2}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y_{24}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_{14}} + i\frac{\partial F}{\partial y_{14}} &= 2\frac{\partial F}{\partial \overline{\sigma}_{14}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

que implica

$$\frac{\partial F}{\partial x_{14}} = \frac{\partial F}{\partial y_{14}} = 0.$$

Consequentemente, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_{14}} + \frac{\partial F}{\partial x_{24}} + \frac{\partial F}{\partial x_{34}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y_{14}} + \frac{\partial F}{\partial y_{24}} + \frac{\partial F}{\partial y_{34}} = -3\sqrt{3}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda).$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_{14}} + i\frac{\partial G}{\partial y_{14}} &= 2\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{14}} \\ &= -2S_{23}\frac{\partial S_{14}}{\partial \overline{\sigma}_{14}} \\ &= 3(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda), \end{aligned}$$

que implica

$$\frac{\partial G}{\partial x_{14}} = 3(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial y_{14}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_{24}} + i\frac{\partial G}{\partial y_{24}} &= 2\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \\ &= 2S_{13}\frac{\partial S_{24}}{\partial \overline{\sigma}_{24}} \\ &= (3^{-\frac{3}{2}} + \lambda)\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right), \end{aligned}$$

que implica

$$\frac{\partial G}{\partial x_{24}} = \frac{3}{2}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial y_{24}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda)$$

e

$$\frac{\partial G}{\partial x_{34}} + i\frac{\partial G}{\partial y_{34}} = 2\frac{\partial G}{\partial \overline{\sigma}_{34}} = 0,$$

que implica

$$\frac{\partial G}{\partial x_{34}} = \frac{\partial G}{\partial y_{34}} = 0.$$

Consequentemente, temos

$$\frac{\partial G}{\partial x_{14}} + \frac{\partial G}{\partial x_{24}} + \frac{\partial G}{\partial x_{34}} = \frac{9}{2}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial y_{14}} + \frac{\partial G}{\partial y_{24}} + \frac{\partial G}{\partial y_{34}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}(3^{-\frac{3}{2}} + \lambda).$$

Assim, obtemos

$$A_{14} + A_{24} + A_{34} = (3^{-\frac{3}{2}} + \lambda)\begin{bmatrix} 0 & -3\sqrt{3} \\ \frac{9}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Como assumimos que $S_{12}S_{34} = S_{13}S_{24} = S_{14}S_{23} \neq 0$, a matriz C possui posto 2 e as matrizes A e B possuem posto igual a 8. Isso completa a demonstração. □

Vamos utilizar o lema 2.10 a seguir para descrever o conjunto de todos os equilíbrios relativos não-colineares do problema de 4 corpos no plano complexo.

Teorema 3.11. *$\mathscr{R}$ é uma subvariedade analítica real de $(\mathbb{C}^6 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}$ com dimensão igual a 5.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathscr{R}$ possui dimensão igual a 5, é suficiente provar que todos os pontos $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$ são tais que a matriz A possui posto maximal. Pelo lema 2.10, é suficiente mostrar que se $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$ então os produtos $S_{12}S_{34}, S_{13}S_{24}$ e $S_{14}S_{23}$ são diferentes de zero. Suponhamos o contrário, por exemplo, que $S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0$. Vamos caracterizar o núcleo de ω. Seja $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in N(\omega)$, então temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{23} & \omega_{24} \\ 0 & -\omega_{23} & 0 & \omega_{34} \\ 0 & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente temos $x_2 = \dfrac{\omega_{34}}{\omega_{23}}x_4$ e $x_3 = -\dfrac{\omega_{24}}{\omega_{23}}x_4$ e $N(\omega) = \{x_1(1,0,0,0) +$

$x_4\left(0,\frac{\omega_{34}}{\omega_{23}},-\frac{\omega_{24}}{\omega_{23}},1\right) : x_1, x_4 \in \mathbb{C}\}$. Fazendo $x_1 = 1$, $x_4 = 0$ e $x_1 = 0$, $x_4 = \omega_{23}$ obtemos, respectivamente, $(1,0,0,0),(0,\omega_{34},-\omega_{24},\omega_{23}) \in N(\omega)$ e concluímos que o núcleo de ω é gerado, em $\mathbb{C}$, por esses dois vetores. Daí segue que os vetores reais no núcleo de ω são da forma $(r,0,0,0)$, onde $r \in \mathbb{R}$, e, pelo teorema 2.6, $(\sigma,\lambda) \notin \mathscr{R}$, o que é uma contradição. Agora, suponha que $S_{23} = S_{24} = S_{34} = 0$. Então, qualquer vetor $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in N(\omega)$ satisfaz $x_1 = 0$ e, novamente pelo teorema 2.6, concluímos que $(\sigma,\lambda) \notin \mathscr{R}$ pois o vetor massa a ele associado não é positivo, o que é uma contradição.

Por fim, se supusermos que $S_{12} = S_{13} = S_{23} = 0$, ou $S_{12} = S_{24} = S_{14} = 0$, ou $S_{34} = S_{13} = S_{23} = 0$ podemos fazer uma permutação de índices e obteremos um comportamento análogo ao de $S_{23} = S_{24} = S_{34} = 0$ e, analogamente, se supusermos $S_{12} = S_{24} = S_{23} = 0$, ou $S_{34} = S_{24} = S_{14} = 0$, ou $S_{34} = S_{13} = S_{23} = 0$ podemos efetuar uma permutação de índices e obteremos um comportamento análogo ao de $S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0$. Portanto, $S_{12}S_{34} = S_{13}S_{24} = S_{14}S_{23} \neq 0$ e $\mathscr{R}$ possui dimensão igual a $13 - 8 = 5$. □

A partir do teorema 2.11, podemos obter mais informações sobre $\widetilde{\widetilde{\mathscr{R}}}$.

Definição 3.12. Um *grupo de Lie* G é uma variedade diferenciável que possui uma estrutura de grupo $(G,.)$ tal que as funções $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto x.y = xy$ e $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ são diferenciáveis.

Note que o conjunto $\mathbb{C}^{\times}$ com a operação usual de multiplicação é um grupo de Lie.

Definição 3.13. Uma ação de um grupo G em uma variedade M é dita *própria* quando a aplicação $\rho : G \times M \to M \times M$ dada por $\rho(g,m) \mapsto (m, g.m)$ é própria.

Definição 3.14. O *grupo de isotropia* de $p \in M$ é o conjunto $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$. Dizemos que a ação de G em M é *livre* se para qualquer $p \in M$, o grupo de isotropia de p é composto apenas pela identidade $e \in G$.

Considere a ação do grupo $\mathbb{C}^{\times}$ definida no início da seção 2.3 restrita à variedade $\mathscr{R}$. Claramente, essa ação é livre visto que apenas $1 \in \mathbb{C}^{\times}$ pertence ao grupo de isotropia de um par $(\sigma,\lambda) \in \mathscr{R}$ arbitrário. Além disso, a aplicação $\phi : (\mathbb{C}^{\times}) \times \mathscr{R} \to \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ dada por $\phi(c,(\sigma,\lambda)) = ((\sigma,\lambda),(c\sigma,|c|^{-3}\lambda))$ é própria. De fato, sejam $K \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ compacto e π_i as projeções canônicas aplicadas em $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$, com $i = 1,2$. Então, pela continuidade de π_i temos que $\pi_i(K) = K_i$ é compacto em $\mathscr{R}$. Assim, como ϕ é contínua, temos que $\phi^{-1}(K)$ é fechado em $(\mathbb{C}^{\times}) \times \mathscr{R}$. Por fim, como os K_i são limitados, $\phi^{-1}(K)$ é limitado.

Teorema 3.15. *$\widetilde{\mathscr{R}}$ é uma subvariedade analítica real de $(\mathbb{C}P(5) \setminus \widetilde{\Delta}) \times \mathbb{Z}_3$ com dimensão igual a* 3.

Demonstração. Como a ação de $\mathbb{C}^\times$ em $\mathscr{R}$ é livre e própria, então $\widetilde{\mathscr{R}}$ possui uma estrutura de variedade e a projeção canônica $\pi : \mathscr{R} \to \widetilde{\mathscr{R}}$ é uma submersão (MEINRENKEN, 2003). Neste contexto, como as dimensões de $\mathscr{R}$ e $\mathbb{C}^\times$ são iguais a 5 e 2, respectivamente, segue que $\widetilde{\mathscr{R}}$ possui dimensão igual a $5 - 2 = 3$. □

Com as estruturas de $\mathscr{R}$ e $\widetilde{\mathscr{R}}$ obtidas nos teoremas 2.11 e 2.15,respectivamente, é natural nos perguntarmos a respeito da analiticidade de φ e $\widetilde{\varphi}$. Antes disso, observamos ainda que o contradomínio dessas duas aplicações, $\mathscr{M}$, é uma variedade analítica real de dimensão 3.

Proposição 3.16. *φ e $\widetilde{\varphi}$ são aplicações analíticas reais.*

Demonstração. Primeiro como $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$, é suficiente mostrar que φ é uma aplicação analítica real. Agora, sabemos que $m = \varphi(\sigma, \lambda)$ é o vetor real normalizado no núcleo de $\omega(\sigma, \lambda)$. Como $\omega_{ij} = (|\sigma_{ij}|^{-3} + \lambda)\sigma_{ij}$, as entradas de ω são funções analíticas reais de σ e λ. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\omega_{12} \neq 0$, conforme fizemos na demonstração do lema 2.3. Neste contexto, o núcleo de ω é gerado por $(-\omega_{24}, \omega_{14}, 0, -\omega_{12})$ e $(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12}, 0)$. Esses dois vetores são também funções analíticas reais de (σ, λ). Além disso, os vetores reais no núcleo são da forma

$$r\overline{\omega_{12}}(-\omega_{24}, \omega_{14}, 0, -\omega_{12}) + s\overline{\omega_{12}}(\omega_{23}, -\omega_{13}, \omega_{12}, 0),$$

onde o vetor real (r, s) satisfaz

$$\begin{bmatrix} -Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24}) & Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23}) \\ Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{14}) & -Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{13}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $(\sigma, \lambda) \in \mathscr{R}$ arbitrário. Então as linhas da matriz dos coeficientes acima são automaticamente proporcionais e esse sistema matricial possui infinitas soluções. Uma dessas soluções é dada por

$$\begin{aligned} r &= Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23}) \\ &= S_{12}S_{23}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s &= Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24}) \\ &= S_{12}S_{24}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\sigma_{jk} = z_j - z_k$ e $z_j = x_j + i \cdot y_j$. De fato, temos

$$\begin{aligned} -Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24})r + Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23})s &= -Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24})Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23}) + Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23})Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e como

$$Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{14}) = S_{12}S_{14}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

e

$$Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{13}) = S_{12}S_{13}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

segue que

$$\begin{aligned} Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{14})r - Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{13})s &= S_{12}^2 S_{14} S_{23} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \\ &- S_{12}^2 S_{13} S_{24} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $S_{14}S_{23} = S_{13}S_{24}$ já que (σ, λ) satisfaz as equações (MB). Desse modo, escolhendo $r = Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{23})$ e $s = Im(\overline{\omega}_{12}\omega_{24})$, temos que os coeficientes na expansão de um vetor real do núcleo, $r\overline{\omega_{12}} = S_{12}^2 S_{23} \overline{\sigma}_{12} Im(\overline{\sigma}_{12}\sigma_{23})$ e $s\overline{\omega}_{12} = S_{12}^2 S_{24} \overline{\sigma}_{12} Im(\overline{\sigma}_{12}\sigma_{24})$, são funções analíticas reais de (σ, λ) quando esse par varia em $\mathscr{R}$. Por fim, podemos normalizar esse vetor real dividindo pela soma de suas entradas. Como essa soma é diferente de zero em $\mathscr{R}$, concluímos que φ é uma aplicação analítica real. $\square$

4 Regularização de Singularidades e Teoremas de Finitude

Neste capítulo, mostraremos que o conjunto solução das equações (C) e (MB) é uma variedade algébrica real projetiva. Em seguida, utilizaremos as técnicas da Geometria Algébrica e os teoremas de Whitney do apêndice B para mostrar que o número de componentes conexas de $\mathscr{R}$ é finito. Além disso, provaremos que o conjunto de equilíbrios relativos com massa $m \in \mathscr{M}$ fixa possui um número finito de componentes conexas e que o número dessas componentes em cada conjunto desse tipo é majorado por uma cota k que independe do vetor massa. Finalmente, mostraremos que o conjunto de bifurcações de equilíbrios relativos do problema de 4 corpos está contido em um subconjunto algébrico próprio do espaço das massas normalizadas, e que fora desse subconjunto cada vetor massa admite no máximo k classes de equilíbrios relativos.

4.1 Regularização de Singularidades

Vimos, no teorema 2.5 , que $\mathscr{R}$, o conjunto dos pares (σ, λ) que provêm de um equilíbrio relativo não-colinear, é um subconjunto aberto de uma variedade analítica real em $(\mathbb{C}^6 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}$. Essa variedade, que denotaremos por V, é o conjunto solução das equações (C) e (MB). Para obter os resultados mais profundos subsequentes, precisaremos conhecer a estrutura de V. Nesse sentido, o passo mais importante é a regularização de V.

Inicialmente, vamos mostrar que usando uma transformação proveniente das regularizações de colisões duplas de Levi-Civita (1920), podemos substituir V por uma variedade algébrica e, posteriormente, por uma variedade algébrica projetiva.

Primeiro, recordemos que $S_{ij} = |\sigma_{ij}|^{-3} + \lambda$. Dessa forma, as equações (MB) podem ser escritas como:

$$(|\sigma_{12}|^{-3} + \lambda)(|\sigma_{34}|^{-3} + \lambda) = (|\sigma_{13}|^{-3} + \lambda)(|\sigma_{24}|^{-3} + \lambda), \tag{4.1}$$

e

$$(|\sigma_{12}|^{-3} + \lambda)(|\sigma_{34}|^{-3} + \lambda) = (|\sigma_{14}|^{-3} + \lambda)(|\sigma_{23}|^{-3} + \lambda). \tag{4.2}$$

Agora, multiplicando a equação (3.1) por $|\sigma_{12}\sigma_{34}\sigma_{13}\sigma_{24}|^3$ e a equação (3.2) por $|\sigma_{12}\sigma_{34}\sigma_{14}\sigma_{23}|^3$ obtemos, respectivamente:

$$|\sigma_{13}\sigma_{24}|^3(1 + \lambda|\sigma_{12}|^3)(1 + \lambda|\sigma_{34}|^3) = |\sigma_{12}\sigma_{34}|^3(1 + \lambda|\sigma_{13}|^3)(1 + \lambda|\sigma_{24}|^3) \tag{4.3}$$

e

$$|\sigma_{14}\sigma_{23}|^3(1 + \lambda|\sigma_{12}|^3)(1 + \lambda|\sigma_{34}|^3) = |\sigma_{12}\sigma_{34}|^3(1 + \lambda|\sigma_{14}|^3)(1 + \lambda|\sigma_{23}|^3). \tag{4.4}$$

Daqui pra frente, vamos chamar as equações (3.3) e (3.4) de equações (NMB).

Seja $W = \{(\sigma, \lambda) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : (C)$ e (NMB) são satisfeitas $\}$. Claramente, temos que

$$V = W \cap ((\mathbb{C}^6 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}).$$

Salientamos ainda que W está definido por equações que não são analíticas em Δ.

Vamos introduzir a aplicação quadrática $S : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ que leva $\tau = (\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{14}, \tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{34})$ em $\sigma = (\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{23}, \sigma_{24}, \sigma_{34})$ de modo que $\sigma_{ij} = \tau_{ij}^2$, onde $1 \le i < j \le 4$. Dessa definição, segue imediatamente que $S(\Delta) = \Delta$, $S^{-1}(\Delta) = \Delta$ e que S é suave.

Definição 4.1. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Dizemos que f é uma *aplicação de recobrimento* se é aberta, sobrejetiva e localmente um homeomorfismo entre X e Y.

A restrição de S ao conjunto $\mathbb{C}^6 \setminus \Delta$ é uma aplicação de recobrimento na qual cada ponto na imagem possui 64 pré-imagens. Com efeito, claramente essa restrição é uma aplicação sobrejetora, pois para $\sigma \in \mathbb{C}^6 \setminus \Delta$, podemos escolher $\tau \in \mathbb{C}^6 \setminus \Delta$ tal que $\tau_{ij} = \sqrt{\sigma_{ij}}$, e aberta, visto que suas funções-coordenadas são abertas. Além disso, para σ na imagem dessa restrição, a equação $\sigma_{ij} = \tau_{ij}^2$ apresenta duas soluções e, assim, $S^{-1}(\sigma)$ assume $2^6 = 64$ valores. Além disso, localmente, essa aplicação é injetiva. Desse modo, essa restrição é um homeomorfismo local, visto que a inversa local $S^{-1}(\sigma) = \tau$, com $\tau_{ij} = \sqrt{\sigma_{ij}}$, é contínua. Segue disso, que essa restrição é uma aplicação aberta.

Através de S, podemos definir uma aplicação suave $T : \mathbb{C}^6 \times (\mathbb{R}^\times) \to \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R}_-$ dada por $T(\tau, \alpha) = (S(\tau), -\alpha^{-6})$. Neste contexto, seja $(\tau, \alpha) \in \mathbb{C}^6 \times (\mathbb{R}^\times)$ tal que $T(\tau, \alpha) \in W$. Isto equivale a dizer que o par $(S(\tau), -\alpha^{-6})$ satisfaz as equações (C) e (NMB). Substituindo em (C), obtemos:

$$(C') \qquad \tau_{13}^2 = \tau_{12}^2 + \tau_{23}^2, \quad \tau_{14}^2 = \tau_{12}^2 + \tau_{24}^2, \quad \tau_{14}^2 = \tau_{13}^2 + \tau_{34}^2.$$

Agora, substituindo em (NMB) e multiplicando em seguida por α^{12}, obtemos:

$$|\tau_{13}\tau_{24}|^6(\alpha^6 - |\tau_{12}|^6)(\alpha^6 - |\tau_{34}|^6) = |\tau_{12}\tau_{34}|^6(\alpha^6 - |\tau_{13}|^6)(\alpha^6 - |\tau_{24}|^6)$$

(NMB')

$$|\tau_{14}\tau_{23}|^6(\alpha^6 - |\tau_{12}|^6)(\alpha^6 - |\tau_{34}|^6) = |\tau_{12}\tau_{34}|^6(\alpha^6 - |\tau_{14}|^6)(\alpha^6 - |\tau_{23}|^6).$$

Agora, fazendo $\tau_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$, com $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} |\tau_{jk}|^6 &= (\sqrt{a_{jk}^2 + b_{jk}^2})^6 \\ &= a_{jk}^6 + 3a_{jk}^4 b_{jk}^2 + 3a_{jk}^2 b_{jk}^4 + b_{jk}^6 \end{aligned}$$

e $|\tau_{ij}|^2 = a_{jk}^2 + b_{jk}^2$, ou seja, $|\tau_{ij}|^2$ e $|\tau_{ij}|^6$ são funções polinomiais homogêneas das partes real e imaginária de τ_{ij} de graus 2 e 6, nessa ordem. Consequentemente, ambos os conjuntos de equações (C') e (NMB') são compostos por equações polinomiais homogêneas, de graus 2 e 18, respectivamente.

Seja $W' = \{(\tau, \alpha) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : (C') \text{ e } (NMB') \text{ são satisfeitas}\}$. Claramente, temos que

$$W' \cap \{(\tau, \alpha) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : \alpha \neq 0\} = T^{-1}(W \cap \{(\sigma, \lambda) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : \lambda < 0\}).$$

De fato, tome $(\tau,\beta) \in T^{-1}(W \cap \{(\sigma,\lambda) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : \lambda < 0\})$ arbitrário. Então $T(\tau,\beta) = (S(\tau), -\beta^{-6}) \in W \cap \{(\sigma,\lambda) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : \lambda < 0\}$. Daí segue que $\tau \in \mathbb{C}^6$ e $\beta \neq 0$. Logo, $(\tau,\beta) \in W' \cap \{(\tau,\alpha) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : \alpha \neq 0\}$. Reciprocamente, seja $(\tilde{\tau},\tilde{\beta}) \in W' \cap \{(\tau,\alpha) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : \alpha \neq 0\}$ arbitrário. Desse modo, $T(\tilde{\tau},\tilde{\beta}) = (S(\tilde{\tau}), -\tilde{\beta}^{-6}) \in W \cap \{(\sigma,\lambda) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : \lambda < 0\}$, o que equivale a $(\tilde{\tau},\tilde{\beta}) \in T^{-1}(W \cap \{(\sigma,\lambda) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R} : \lambda < 0\})$. Além disso, como vimos na demonstração do teorema 2.8 que $\lambda < 0$ em $\mathscr{R}$, $T^{-1}(\mathscr{R})$ é um subconjunto aberto de W', visto que T é contínua e $\mathscr{R}$ é um subconjunto aberto de V.

Definição 4.2. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P(n)$ é o conjunto de todas as $(n+1)-$uplas $(a_1,...,a_{n+1}) \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ módulo a relação de equivalência dada por

$$(a_1,...,a_{n+1}) \sim (ta_1,...,ta_{n+1}), \qquad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Uma $(n+1)-$upla $(a_1,...,a_{n+1}) \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ define um ponto $P \in \mathbb{C}P(n)$ e dizemos que $a_1,...,a_{n+1}$ são as coordenadas homogêneas de P. Em $\mathbb{C}P(m) \times \mathbb{C}P(n)$, os conjuntos algébricos (também conhecidos como variedades bi-projetivas) são, por definição, $V(f_1,...,f_m,f_{m+1},...,f_{m+n})$, $f_i \in \mathbb{C}[X_1,...,X_{m+1},Y_1,...,Y_{n+1}]$, onde os f_i, com $i = 1,...,m+n$, são separadamente homogêneos nas variáveis X_k e Y_j, com $k = 1,...,m+1$ e $j = 1,...,n+1$, isto é,

$$f_i = \sum_{a_1+...+a_{m+1}=d, b_1+...+b_{n+1}=e} (coef.) X_1^{a_1}...X_{m+1}^{a_{m+1}} Y_1^{b_1}...Y_{n+1}^{b_{n+1}}.$$

Vamos mostrar que a aplicação $\varphi \circ T : T^{-1}(\mathscr{R}) \to \mathscr{M}$ possui propriedades algébricas interessantes. Para fazer isso, introduziremos uma equação análoga a (D) no espaço (τ,α). A cada $(\tau,\alpha) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R}$, associaremos uma matriz ω' cujas entradas são definidas por:

$$\omega'_{ij} = \chi(\alpha^6 |\tau_{ij}|^{-6} - 1)\tau_{ij}^2,$$

onde $\chi = |\tau_{12}\tau_{13}\tau_{14}\tau_{23}\tau_{24}\tau_{34}|^6$. Note que ω'_{ij} é um polinômio homogêneo em treze variáveis de grau 38. Além disso, ω' pode ser visto como um $2-$tensor simétrico visto que sua matriz na base canônica de $(\mathbb{C}^6)^*$ é simétrica.

Proposição 4.3. *Sejam* $(\tau,\alpha) \in \mathbb{C}^6 \times \mathbb{R}$ *que satisfaz* $\alpha\chi \neq 0$ *e* $(\sigma,\lambda) = T(\tau,\alpha)$. *Então* (D) *é válida para* $m = \varphi(\sigma.\lambda)$ *se, e somente se,* (D') *é válida, onde*

$$(D') \qquad m \lrcorner \omega'(\tau,\alpha) = 0.$$

Demonstração. Suponha que (D) seja válida. Equivalentemente, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \omega_{24} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 & \omega_{34} \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $\omega_{ij} = (|\sigma_{ij}|^{-3} + \lambda)\sigma_{ij}$ e $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$. Agora, como $(\sigma, \lambda) = T(\tau, \alpha)$, temos $\omega_{ij} = (|\tau_{ij}|^{-6} - \alpha^{-6})\tau_{ij}^2$. Além disso, $\alpha\chi \neq 0$ implica que $\alpha^6\chi \neq 0$. Multiplicando ω_{ij} por $\alpha^6\chi$, obtemos $\alpha^6\chi\omega_{ij} = \chi(\alpha^6|\tau_{ij}|^{-6} - 1)\tau_{ij}^2 = \omega'_{ij}$. Portanto, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega'_{12} & \omega'_{13} & \omega'_{14} \\ \omega'_{12} & 0 & \omega'_{23} & \omega'_{24} \\ \omega'_{13} & \omega'_{23} & 0 & \omega'_{34} \\ \omega'_{14} & \omega'_{24} & \omega'_{34} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou equivalentemente, (D') é válida. Por fim, como o raciocínio anterior é reversível, segue o resultado. $\square$

Definição 4.4. Uma *correspondência algébrica* entre $\mathbb{R}P(m)$ e $\mathbb{R}P(n)$ é um subconjunto algébrico $Z \subset \mathbb{R}P(m) \times \mathbb{R}P(n)$.

Neste contexto, Z é dado em coordenadas homogêneas por $(x_1, ..., x_{m+1}; y_1, ..., y_{n+1})$ por equações polinomiais que são separadamente homogêneas em $(x_1, ..., x_{m+1})$ e em $(y_1, ..., y_{n+1})$. Esse conceito generaliza o gráfico de uma função polinomial de $X = \prod_1(Z)$ em $Y = \prod_2(Z)$, onde $\prod_1$ e $\prod_2$ são as projeções de $\mathbb{R}P(m) \times \mathbb{R}P(n)$ em seus fatores. Em geral, Z não é o gráfico de nenhuma aplicação.

Proposição 4.5. *O conjunto $Z = \{(\tau, \lambda, m) : (C'), (D')$ e (NMB') são satisfeitas$\}$ é uma correspondência algébrica em $\mathbb{R}P(12) \times \mathbb{R}P(3)$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que as equações polinomiais que caracterizam Z são homogêneas. Vimos anteriormente que as equações em (C') e (NMB') são homogêneas de grau 2 e 18, respectivamente. Além disso, sabemos que cada entrada da matriz ω' é um polinômio homogêneo de grau 38 em treze variáveis (τ, λ) e que a equação (D') é também homogênea de grau 1 em relação às variáveis $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$. Logo, a equação (D') é homogênea de grau 39 em relação às variáveis (τ, λ, m). $\square$

Suponha que $(\tau, \alpha) \in T^{-1}(\mathscr{R}) \subset W'$. Então $(\tau, \alpha, m) \in Z$ se, e somente se, $m = \varphi \circ T(\tau, \alpha)$, pela proposição 3.4. Assim, se Γ é o gráfico de $\varphi \circ T$, temos

$$\Gamma = Z \cap \textstyle\prod_1^{-1}(T^{-1}(\mathscr{R})),$$

onde $\prod_1 : \mathbb{R}P(12) \times \mathbb{R}P(3) \to \mathbb{R}P(12)$ é a projeção canônica. No próximo teorema, seja

$$Z_0 = \{(\tau, \alpha, m) : m_i = 0 \text{ para algum } \quad i \quad \text{ou} \quad \alpha = 0 \text{ ou } \quad \tau_{ij} = 0 \text{ para algum } \quad i, j\}.$$

Desse modo, Z_0 é um subconjunto de Z e, portanto, é um conjunto algébrico. Além disso, esse conjunto contém Δ.

Proposição 4.6. Γ *é um subconjunto aberto e fechado de* $Z \smallsetminus Z_0$*, o conjunto diferença de duas variedades algébricas.*

Demonstração. Em Γ temos que $m_i > 0$, $\alpha \neq 0$ e $\tau_{ij} \neq 0$. Assim, $\Gamma \subset Z \smallsetminus Z_0$. Como $\prod_1(Z) \subset W'$ e $T^{-1}(\mathscr{R})$ é aberto em W', temos $Z \subset \prod_1^{-1}(W')$ e $\prod_1^{-1}(T^{-1}(\mathscr{R}))$ é aberto em $\prod_1^{-1}(W')$, então $\Gamma = \prod_1^{-1}(T^{-1}(\mathscr{R}) \cap Z$ é aberto em Z e daí também é aberto em $Z \smallsetminus Z_0$.

Para provar que Γ é fechado, vamos tomar um ponto arbitrário $(\overline{\tau}, \overline{\alpha}, \overline{m}) \in \overline{\Gamma} \cap (Z \smallsetminus Z_0)$. Queremos mostrar que esse ponto pertence a Γ. Como $(\overline{\tau}, \overline{\alpha}, \overline{m}) \notin Z_0$ temos que $\overline{\alpha} \neq 0$, $\overline{\tau}_{ij} \neq 0$ e $\overline{m_i} \neq 0$. Como $m_i > 0$ em Γ e $\overline{m_i} \neq 0$, temos $\overline{m_i} > 0$. Desse modo, $(\overline{\tau}, \overline{\alpha}, \overline{m})$ satisfaz as equações (C'),(NMB') e (D'). Já vimos que sob estas condições, a equação (D') implica a equação (D) para $(\overline{\sigma}, \overline{\lambda}) = T(\overline{\tau}, \overline{\alpha})$ (proposição 3.4). Além disso, como (C') e (NMB') são válidas para $(\overline{\tau}, \overline{\alpha})$, temos que (C) e (MB) são válidas para $(\overline{\sigma}, \overline{\lambda})$. Por definição, $\mathscr{R}$ é o conjunto dos pares (σ, λ) tais que (C), (MB) e (D) são válidas para algum vetor $m \in (\mathbb{R}_+^\times)^4$. Assim, $(\overline{\sigma}, \overline{\lambda}) \in \mathscr{R}$ e, consequentemente, $(\overline{\tau}, \overline{\alpha}, \overline{m}) \in \prod_1^{-1}(T^{-1}(\mathscr{R})) \cap Z = \Gamma$. $\square$

4.2 Teoremas de Finitude

Inicialmente, vamos utilizar alguns resultados de Geometria Algébrica do Apêndice B para conhecer um pouco melhor as componentes conexas do conjunto $\mathscr{R}$.

Primeiro, note que, pelo teorema $B.8$, um conjunto que é a diferença entre duas variedades algébricas reais possui um número finito de componentes conexas. Desse modo, aplicando esse resultado podemos concluir que $Z \setminus Z_0$ possui um número finito de componentes conexas e, pela proposição 3.7, $\Gamma \subset Z \setminus Z_0$ também possui um número finito de componentes conexas.

Agora, combinando o teorema 2.11 e o teorema B.8, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.7. *$\mathscr{R}$ possui um número finito de componentes conexas.*

Demonstração. Seja $\prod_1 : \mathbb{R}P(12) \times \mathbb{R}P(3) \to \mathbb{R}P(12)$ a projeção canônica. Então, temos $\prod_1(\Gamma) = \prod_1(\prod_1^{-1}(T^{-1}(\mathscr{R})) \cap Z) = T^{-1}(\mathscr{R})$. Assim, pela proposição 3.7 e pelo Teorema B.8, $T^{-1}(\mathscr{R})$ possui um número finito de componentes conexas, visto que a continuidade de $\prod_1$ respeita as componentes conexas de Γ. Como T é contínua, $\mathscr{R}$ também possui um número finito de componentes conexas. □

Por outro lado, o teorema B.6 afirma que toda variedade algébrica é uma união finita de subvariedades estratificadas. Cada conjunto nessa união é localmente conexo por caminhos e, assim, as componentes conexas e as componentes conexas por caminhos nesses conjuntos coincidem. Consequentemente, podemos reformular o teorema 3.8 da seguinte maneira: dizemos que dois equilíbrios relativos são equivalentes se, através de uma mudança das massas, pudermos encontrar um caminho contínuo de equilíbrios relativos conectando-os; então existe um número finito de classes de equivalência.

Vamos discutir a teoria das bifurcações de equilíbrios relativos. Isso nos remete ao estudo da restrição da projeção $\prod_2 : \mathbb{R}P(12) \times \mathbb{R}P(3) \to \mathbb{R}P(3)$ a Γ, o gráfico de $\varphi \circ T$. Neste contexto, queremos conhecer como as fibras $\prod_2^{-1}(m)$ mudam quando o vetor massa varia.

Lema 4.8. *Seja X um conjunto algébrico qualquer em $\mathbb{R}P(12) \times \mathbb{R}P(3)$. Então $\Gamma \cap X$ é aberto e fechado em $(Z \cap X) \setminus (Z_0 \cap X)$, e assim possui um número finito de componentes conexas.*

Demonstração. Como a interseção finita de conjuntos algébricos também é um conjunto algébrico, segue que $Z \cap X$ e $Z_0 \cap X$ são conjuntos algébricos. Agora, aplicando a proposição 3.7, concluímos que $\Gamma \cap X$ é aberto e fechado em $(Z \cap X) \setminus (Z_0 \cap X)$, e pelo teorema B.8, concluímos que $\Gamma \cap X$ possui um número finito de componentes conexas, pois $(Z \cap X) \setminus (Z_0 \cap X)$ possui um número finito de componentes conexas. □

Teorema 4.9. *Seja $m \in \mathscr{M}$ fixo. Então, o conjunto de equilíbrios relativos do problema de 4 corpos com vetor massa m possui um número finito de componentes conexas. Esse número de componentes é majorado por uma cota que não depende de m.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}P(12) \times \mathbb{R}P(3)$ o conjunto algébrico definido fixando em $\mathbb{R}P(3)$ o vetor massa m dado. Então $Z \cap X$ é algébrico e assim possui um número finito de componentes conexas pelo teorema B.7. Além dissso, um resultado de Milnor(1964) garante que o número de componentes conexas é majorado por uma cota que depende apenas do grau das equações polinomiais que definem o conjunto e da dimensão do espaço ambiente (esta cota é $\le c(2c-1)^{d-1}$, onde c é o grau dos polinômios homogêneos e d a dimensão do espaço). Em particular, essa cota não depende de m. Uma componente conexa de equilíbrios relativos para m no espaço (σ, λ) aparece como uma componente conexa de $\varphi^{-1}(m)$ em $\mathscr{R}$. Em $T^{-1}(\mathscr{R})$, cada componente conexa possui no máximo 128 pré-imagens que são componentes de $T^{-1}(\mathscr{R}) \cap T^{-1}(\varphi^{-1}(m))$, visto que $(\sigma, \lambda) = T(\tau, \alpha)$ nos dá $\sigma = S(\tau)$ e $\lambda = -\alpha^6$, onde a primeira equação apresenta no máximo 64 soluções e a segunda no máximo 2.

Finalmente, no gráfico Γ cada componente conexa de equilíbrios relativos é representada por várias componentes de $\Gamma \cap X$. Vamos completar a demonstração mostrando que cada componente conexa de $\Gamma \cap X$ é uma componente conexa de $Z \cap X$. Agora, pelo lema 3.9, precisamos mostrar apenas que $\overline{\Gamma \cap X} \cap Z_0 = \varnothing$. Pelo resultado de Shub usado na prova do teorema 2.9, em $\Gamma \cap X$ podemos definir cotas inferiores positivas para $|\tau_{ij}|$ e $|\alpha|$, e m é constante. Portanto, para $(\overline{\tau}_{ij}, \overline{\alpha}, \overline{m}) \in \overline{\Gamma \cap X}$ arbitrário, temos $\overline{\tau}_{ij} \neq 0, \overline{\alpha} \neq 0$ e $\overline{m}_i > 0$ como queríamos. □

Os principais teoremas de bifurcação que vamos provar dependem das versões fortes do Teorema de Sard que são válidas para correspondências algébricas. Infelizmente, a literatura de Geometria Algébrica lida quase que exclusivamente com o caso de variedades algébricas complexas. Para compreender como essses resultados podem ser usados para variedades reais, devemos discutir a complexificação de variedades reais [1].

Definição 4.10. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade algébrica real. *O ideal de X, $I(X)$*, consiste de todos os polinômios reais que se anulam em X. O *posto de um ponto $x \in X$* é o número

[1]Para mais detalhes sobre complexificação de variedades reais, consultar o Apêndice B.

máximo dos polinômios $f \in I(X)$ cujos diferenciais $df(x)$ são linearmente independentes. O *posto de* X é o maior posto dos pontos de X.

Para uma variedade algébrica real $X \subset \mathbb{R}^n$, o teorema B.5 afirma que o conjunto de pontos com posto máximo é um subconjunto aberto de X e é uma subvariedade estratificada de $\mathbb{R}^n$ com dimensão $n-$(posto de X). Os pontos desse conjunto são chamados *pontos suaves* e os outros pontos de X são ditos *pontos singulares.* Particularmente, um ponto singular é suave em alguma subvariedade estratificada (posto constante)[2] de X visto que esse conjunto pode ser escrito como união finita de subvariedades estratificadas conforme o teorema B.6.

Se $Y \subset \mathbb{C}^n$ é uma variedade complexa, procedemos exatamente da mesma maneira descrita na definição 3.11, exceto em relação à independência linear dos diferenciais que agora significa independência em $\mathbb{C}$.

Dada uma variedade complexa Y, podemos formar $Y \cap \mathbb{R}^n$. Essa é uma variedade real, o conjunto de zeros de todas as partes reais de polinômios em $I(Y)$. Além disso, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade real, podemos obter uma variedade complexa $X^* \subset \mathbb{C}^n$ simplesmente enxergando todas as variáveis como sendo complexas. Desse modo, a proposição B.11 afirma que para qualquer variedade complexa $Y \supset X$, também temos $Y \supset X^*$, ou seja , X^* é a menor variedade complexa contendo a variedade X. Em particular, $(Y \cap \mathbb{R}^n)^* \subset Y$ para toda variedade complexa Y. Além disso, a proposição B.12 afirma que os postos de X e de X^* são os mesmos.

Definição 4.11. Seja $\pi : X \to X'$ uma aplicação polinomial entre variedades algébricas. Dizemos que $x \in X$ é *um ponto crítico de* π se x é suave em X, $\pi(x)$ é suave em X', mas $d\pi(x)$ não possui posto máximo. Neste contexto, dizemos ainda que $\pi(x)$ é *um valor crítico.*

No contexto da definição anterior, observe que um ponto singular de X não é um ponto crítico. Além disso, quando x e $\pi(x)$ são pontos suaves, esta definição é equivalente à usual para aplicações entre variedades.

Agora, quando X e X' são variedades algébricas complexas, temos uma versão forte do Teorema de Sard:

Teorema 4.12 (Teorema de Sard)**.** *Seja* $\pi : X \to X'$ *uma aplicação polinomial entre*

[2]Para mais detalhes sobre variedades estratificadas, consultar a Definição B.4.

variedades algébricas complexas. Então existe uma subvariedade própria de X' contendo todos os valores críticos de π [3].

Vamos usar essa versão para obter um resultado análogo para variedades algébricas reais.

Lema 4.13. *Seja $\prod : X \to X'$ uma aplicação polinomial entre variedades algébricas reais. Então existe uma subvariedade própria de X' que contém todos os valores críticos de $\prod$.*

Demonstração. Suponha que $X \subset \mathbb{R}^m$ e $X' \subset \mathbb{R}^n$. Complexificando estas variedades, obtemos $X^* \subset \mathbb{C}^m$ e $(X')^* \subset \mathbb{C}^n$. Agora, por definição, a aplicação $\prod$ é a restrição de uma aplicação polinomial $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e essa aplicação também pode ser complexificada. Seja $\prod^* : X^* \to X'^*$ a complexificação de $\prod$. Aplicando o teorema 3.13 para $\prod^*$, encontramos uma subvariedade complexa própria $Y \subset (X')^*$ que contém todos os valores críticos de $\prod^*$. Agora, $Y \cap \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade real própria de X'; caso contrário $X' = Y \cap \mathbb{R}^n$ e $(X')^* = (Y \cap \mathbb{R}^n)^* \subset Y$, o que é uma contradição, visto que Y é uma subvariedade própria de $(X')^*$. Para completar a demonstração, vamos mostrar que se $x \in X$ é um ponto crítico de $\prod^*$, também é um ponto crítico de $\prod$.

Primeiro, um ponto $x \in X$ é suave se, e somente se, também é suave visto como um ponto de X^*. De fato, se $x \in X$ é suave com posto $k \leq m$, então existem polinômios $f_1, ..., f_k \in I(X)$ tais que

$$\alpha_1 df_1(x) + ... + \alpha_k df_k(x) = 0 \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq k.$$

Agora, vamos considerar $x \in X^*$ e $f_1, ..., f_k \in I(X^*)$ de modo que

$$\beta_1 df_1(x) + ... + \beta_k df_k(x) = 0,$$

onde $\beta_j = a_j + ib_j \in \mathbb{C}$ arbitrários. Reescrevendo essa combinação linear em termos da parte real e imaginária dos β_j, temos que

$$[a_1 df_1(x) + ... + a_k df_k(x)] + i[b_1 df_1(x) + ... + b_k df_k(x)] = 0.$$

Mas, como os $df_i(x)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, temos que $a_j = b_j = 0$ para

[3] A demonstração desse resultado pode ser vista em (MUMFORD, 1976).

todo $1 \le j \le k$. Portanto, $\beta_j = 0$ para todo $1 \le j \le k$. Logo, $x \in X^*$ é suave com posto k. Reciprocamente, se $x \in X^*$ é suave, então imediatamente concluímos que $x \in X$ é suave visto que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Analogamente, temos o mesmo resultado para um ponto $x' \in X'$. Além disso, o posto de $d\pi(x)$ sobre $\mathbb{R}$ é igual ao posto sobre $\mathbb{C}$ de $d\pi^*(x)$ pois ambas as aplicações lineares são obtidas a partir da mesma matriz jacobiana $m \times n$ por restrição aos subespaços tangentes no ponto x, $T_x X \subset \mathbb{R}^m$ ou $T_x X^* \subset \mathbb{C}^m$, e esses subespaços são dados pelo mesmo conjunto de equações lineares reais com $posto_x(X) = posto_x(X^*)$, pela proposição B.12. Portanto, os pontos críticos de π e π^* em X coincidem. Consequentemente, os pontos críticos de $\prod$ e $\prod^*$ coincidem em X. Desse modo, concluímos que $Y \cap \mathbb{R}^n$ é a subvariedade própria de X' que contém todos os valores críticos de $\prod$. □

Proposição 4.14. *O conjunto dos valores críticos de $\varphi : \mathscr{R} \to \mathscr{M}$ está contido em um subconjunto algébrico próprio de $\mathscr{M}$. Em particular, o conjunto dos valores regulares é aberto e denso e possui medida total em $\mathscr{M}$.*

Demonstração. Inicialmente, lembre que $T : T^{-1}(\mathscr{R}) \to \mathscr{R}$ dada por $T(\tau, \alpha) = (S(\tau), -\alpha^{-6})$ é uma aplicação aberta sobrejetiva. Com efeito, já vimos que $S(\tau) = \tau^2$ é sobrejetiva e, claramente, a aplicação-coordenada $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}_-$ dada por $f(\alpha) = -\alpha^{-6}$ é sobrejetiva, daí segue a sobrejetividade de T. Ainda, como $\mathscr{R}$ é aberto, temos que os abertos do domínio de T são imagens inversas de abertos de $\mathscr{R}$. Desse modo, aplicando T em um aberto arbitrário do domínio obtemos um aberto de $\mathscr{R}$, provando assim que T é aberta. Além disso, note que T é localmente injetiva, visto que S e f são localmente injetivas, e é suave, com inversa local suave, já que S e f são aplicações suaves. Assim, concluímos que $T : T^{-1}(\mathscr{R}) \to \mathscr{R}$ é uma aplicação de recobrimento e, consequentemente, um difeomorfismo local.

Salientamos ainda que φ e $\varphi \circ T$ possuem os mesmos valores críticos pois, pela regra da cadeia, $d(\varphi \circ T)(x) = d\varphi(T(x)) \circ dT(x)$ e, localmente, $dT(x)$ é um isomorfismo, ou seja, $d(\varphi \circ T)(x)$ e $d\varphi(T(x))$ possuem o mesmo posto em $x \in T^{-1}(\mathscr{R})$.

Vimos que para $(\tau, \alpha) \in T^{-1}(\mathscr{R})$, temos $\Gamma = Z \cap \prod_1^{-1}(T^{-1}(\mathscr{R}))$. Daí, o gráfico Γ de $\varphi \circ T$ está contido na correspondência algébrica projetiva Z. Como Γ é o gráfico de uma aplicação suave então é uma variedade. Assim, todos os seus pontos possuem o mesmo posto. Daí, substituindo Z por alguma subvariedade contendo Γ conveniente se necessário, podemos assumir que todos os pontos de Γ são suaves.

Sem perda de generalidade, podemos supor que os pontos de Γ são suaves em Z. Desse modo, temos que a projeção $\prod_2 : Z \to \mathbb{R}P(3)$ é uma aplicação real entre variedades projetivas reais. Então, pelo lema 3.14, o conjunto de seus valores críticos está contido em algum subconjunto algébrico próprio $Y \subset \mathbb{R}P(3)$. Como Γ e $\mathbb{R}P(3)$ consistem apenas de pontos suaves, os valores críticos da restrição $\prod_2 : \Gamma \to \mathbb{R}P(3)$ vista como uma aplicação entre variedades projetivas permanecem em Y.

Finalmente, como os valores críticos de $\varphi \circ T$ são os mesmos de $\prod_2(\Gamma)$, concluímos que o conjunto dos valores críticos de $\varphi \circ T$ está contido em Y. Em particular, esse conjunto é fechado pois é um subconjunto algébrico e possui medida nula já que o volume de Y é nulo pois tal conjunto é uma subvariedade própria. Consequentemente, o conjunto de valores regulares de $\varphi \circ T$ é aberto e denso (pois qualquer ponto regular é limite de uma sequência de pontos regulares distintos) e tem medida total em $\mathscr{M}$. Isso finaliza a demonstração. $\square$

Como vimos anteriormente, $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$, onde π é a projeção de $\mathscr{R}$ sobre $\tilde{\mathscr{R}}$. Isto implica que o teorema 3.10 também pode ser aplicado para $\widetilde{\varphi}$. Agora, seja $[\sigma, \lambda)] \in \widetilde{\mathscr{R}}$ um ponto regular arbitrário. Então, como $\mathscr{M}$ é uma variedade com dimensão igual a 3, temos que $d\widetilde{\varphi}([\sigma, \lambda)])$ possui posto igual a 3. Consequentemente, como $\widetilde{\mathscr{R}}$ é uma variedade com dimensão 3 (teorema 2.15), concluímos que $\widetilde{\varphi}$ é um difeomorfismo local em x.

No teorema 2.9 vimos que $\tilde{\varphi}$ é uma aplicação própria. Desse modo, a pré-imagem de um valor regular é um conjunto finito. De fato, seja $m \in \mathscr{M}$ um valor regular de $\widetilde{\varphi}$. Então $\tilde{\varphi}^{-1}(m) = \{[(\sigma, \lambda)] \in \tilde{\mathscr{R}} : \tilde{\varphi}([(\sigma, \lambda)]) = m\}$ é um subconjunto compacto de $\mathscr{R}$ tal que $d\widetilde{\varphi}([(\sigma, \lambda)])$ possui posto 3. Como a $d\widetilde{\varphi}$ é um isomorfismo em cada ponto de $\widetilde{\varphi}^{-1}(m)$, segue que esse conjunto é discreto, pois $\widetilde{\varphi}$ é injetora em uma vizinhança de cada ponto desse conjunto pelo teorema da aplicação inversa. Consequentemente, alguma vizinhança de cada pré-imagem é mapeada difeomorficamente em $\mathscr{M}$.

Agora, vamos definir o conjunto de bifurcações, B, de um equilíbrio relativo do problema de 4 corpos. B é o complemento em $\mathscr{M}$ do conjunto de massas, m, com a seguinte propriedade: em alguma vizinhança $\mathscr{U}$ de m, cada massa admite o mesmo número finito, K, de configurações de equilíbrios relativos; os equilíbrios que correspondem às massas em $\mathscr{U}$ caem em exatamente K componentes conexas no espaço das configurações, cada uma das quais é continuamente parametrizada por $\mathscr{U}$.

Recordemos ainda que a cada ponto de $\widetilde{\mathscr{R}}$ está associada uma única configuração de equilíbrios relativos. A saber, cada ponto de $\widetilde{\mathscr{R}}$ é representado por uma par (σ, λ) em $\mathscr{R}$

que difere apenas pela ação de $\mathbb{C}^{\times}$. Então, a classe de equivalência afim do vetor posição z com $z^* \wedge 1^* = \sigma$ é unicamente e analiticamente determinada pelo ponto original. Em suma, podemos sintetizar a proposição 3.15 e as observações acima no resultado principal dessa dissertação:

Teorema 4.15. *O conjunto de bifurcações, B, de equilíbrios relativos do problema de 4 corpos está contido em um subconjunto algébrico próprio do espaço das massas normalizadas, $\mathscr{M}$. Existe um número inteiro positivo K tal que cada massa no complemento de B admite no máximo K classes de equivalência afim de equilíbrios relativos.*

Finalmente, através do resultado de Milnor utilizado no teorema 3.10 obtemos $K \leq 39(2 \cdot 39 - 1)^{15-1} = 39 \cdot 77^{14}$ visto que os polinômios envolvidos nas equações (D') possuem grau igual a 39 e o espaço dos $(\sigma, \lambda, m) \in Z$ possui dimensão igual a 15.

REFERÊNCIAS

ALBOUY, Alan. The symmetric central configurations of four equal masses in Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics, **Contemp. Math. 198, Amer. Math. Soc.**, v. 198, p. 131-135, 1996.

ALBOUY, Alan; KALOSHIN, Vadim. Finiteness of central configurations of five bodies in the plane. **Ann. Math.** v.176, p.535-588, 2012.

DZIOBEK, O. Über einen merkwürdigen Fall der Vielkörperproblems. **Astron. Nach.** v.152, p. 33-46, 1900.

EULER, Leonhard. De motu restilíneo trium corporum se mutuo attrahentium. **Novi. Comm. Acad. Svi. Imp. Petrop**, v.11, p.144-151, 1767.

HAMPTON, Marshall; MOECKEL, Richard. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. **Invent. Math.**, v.163, p.289-312, 2006.

LAGRANGE, Joseph L. **Ouvres Completes**, v. 6, p.272-292. 1772.

LEHMANN-FILHES, R. Über zwei fölle der vielkörpersproblem. **Astron. Nach.** v.127, 1891.

LEVI-CIVITA, T. Sur la regularisation du problem des trois corps. **Acta Math.**, v. 42, p. 99-144, 1920.

LIMA, Elon L. **Álgebra Exterior**. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

LONGLEY, W.R. Some particular solutions of the problem of n bodies. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v.13, p. 324-335, 1907.

MACMILLAN,W.D; BARTKY. R. Permanent configurations in the problem of four bodies. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v.34, p.838-875, 1932.

MEINRENKEN, E. **Group actions on manifolds**. [S.I.]: mein, 2003. Disponível em:< *http://www.math.toronto.edu/mein/teaching/LectureNotes/action.pdf* >. Acesso em: 2 ago. 2016

MILNOR, J. On the Betti numbers of real varieties. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 15. p.275-280, 1964.

MOECKEL, Richard. Relative equilibria in the four body problem. **Erg. Th. Dyn. Sys.**, v.5, p.417-435, 1985.

MOULTON, F.R . The straight line solutions of the problem of N bodies. **Ann. of Math.**, v.12, p.1-17, 1910.

MUNFORD, David. **Algebraic geometry and complex projective varieties**. 1 ed. Cambridge: ed. Harvard University, 1976.

PACELLA, F. Central Configurations of the N-body problem via the equivariant Morse theory. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**. v.97, p. 59-74, 1972.

PALMORE, J.I. Classifying relative equilibria, **I. Bull. Amer. Math. Soc.** v. 79, p.904-908, 1973; **II, Bull. amer, Math. Cos.** v.81, p. 489-491, 1975; **III, Letters in Math. Phisycs** , p.71-73, 1975.

PALMORE, J.I. Measure of degenerate relative equilibria, **I. Ann. Math.**, v.104,p.421-429, 1976.

PERKO, L.M. ; WALTER, E.L. Regular polygon solution of the N-body problem. **Amer. Math. Soc.** v. 94,p. 301-309, 1985.

SHUB, M. Diagonals and relative equilibria. **Lecture Notes in Math**, v. 197, p.199-201, 1971.

SIEGEL, C.L; MOSER,J.K. **Lectures on Celestial Mechamics**. New York: Ed. Springer Verlag, 1971.

SMALE, S. Problems on the nature or relative equilibria in celestial mechanics. **Lecture Notes in Math.** v. 197, 1971.

WHITNEY, H. Elementary structure of real algebraic varieties. **Ann. Math.**, v.66 , p. 545-556, 1957.

WILLIAMS, W.L. Permanent configurations in the problem of five bodies. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 44,p. 563-579, 1938.

WINITZKI, Sergei.**Linear Algebra via Exterior Products**.[S.I]: Llohan, 2010. disponível em:< http: //www.ime.unicamp.br/llohann/materialextra/linear.pdf> . Acesso em: 25 jan. 2016.

WINTNER, A. The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. **Princeton Math. series**, v. 5, 1941.

Apêndice A

Formas Alternadas em $\mathbb{C}^N$

Neste apêndice, vamos conhecer um pouco mais sobre formas alternadas em $\mathbb{C}^N$ com o objetivo de demonstrar as proposições 1.6 e 1.10 utilizadas nessa dissertação.

Formas decomponíveis e degeneradas em $\mathbb{C}^N$

Dada uma matriz antissimétrica $A \in M_N(\mathbb{C})$ podemos definir uma $2-$forma alternada $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})$[4] pondo $\omega(u,v) = u^t A v$, onde $\mathbb{C}$ é visto como um espaço vetorial real.

Definição A.1. Uma 2-forma alternada $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N; \mathbb{C})$ é *decomponível* se puder ser escrita como produto exterior de duas 1-formas:

$$\omega = \alpha \wedge \beta.$$

Agora, vamos caracterizar as 2-formas decomponíveis em $\mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N; \mathbb{C})$.

Proposição A.2. Uma 2-forma alternada $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N; \mathbb{C})$ é decomponível se e somente se $\omega \wedge \omega = 0 \in \mathcal{A}_4(\mathbb{C}^N; \mathbb{C})$.

Demonstração. Se $\omega = \alpha \wedge \beta$, onde α, β são 1-formas em $\mathbb{C}^N$. Então, temos

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= \alpha \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \beta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar a recíproca utilizando indução sobre N. Se $N = 0, 1$ temos $\mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N; \mathbb{C}) = 0$, então o primeiro caso não-trivial é $N = 2$. Nesse caso, *dim* $\mathcal{A}_2(\mathbb{C}^2; \mathbb{C}) = 1$ e

[4] $A_2(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})$ é a notação que utilizaremos para o espaço das 2-formas alternadas $\omega : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$.

$v_1^* \wedge v_2^*$ é não-nulo se $\{v_1, v_2\}$ for uma base de $\mathbb{C}^2$, assim qualquer $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^2;\mathbb{C})$ é múltiplo de $v_1 \wedge v_2$ e, portanto, é decomponível.

Vamos considerar o caso $N = 3$ separadamente. Dado $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^2;\mathbb{C})$, seja $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathcal{A}_3(\mathbb{C}^3;\mathbb{C})$ dada por

$$\phi(v) = \omega \wedge v^*.$$

Agora, sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^3$ e $a \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}
\phi(av_1 + v_2) &= \omega \wedge (av_1^* + v_2^*) \\
&= a(\omega \wedge v_1^*) + \omega \wedge v_2^* \\
&= a\phi(v_1) + \phi(v_2),
\end{aligned}$$

ou seja, ϕ é uma tranformação linear. Como $dim\ \mathcal{A}_3(\mathbb{C}^3;\mathbb{C}) = 1$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos $dim\ N(\phi) \geq 2$. Assim sejam $u_1, u_2 \in N(\phi)$ vetores linearmente independentes e vamos estender esse conjunto a uma base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{C}^3$. Dessa forma, podemos escrever

$$\omega = \lambda_1 u_2^* \wedge u_3^* + \lambda_2 u_1^* \wedge u_3^* + \lambda_3 u_1^* \wedge u_2^*.$$

Agora, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \phi(u_1) \\
&= (\lambda_1 u_2^* \wedge u_3^* + \lambda_2 u_1^* \wedge u_3^* + \lambda_3 u_1^* \wedge u_2^*) \wedge u_1^* \\
&= \lambda_1 u_2^* \wedge u_3^* \wedge u_1^* + \lambda_2 u_1^* \wedge u_3^* \wedge u_1^* + \lambda_3 u_1^* \wedge u_2^* \wedge u_1^* \\
&= \lambda_1 u_1^* \wedge u_2^* \wedge u_3^*,
\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_1 = 0$. Analogamente, como $\phi(u_2) = 0$ obtemos $\lambda_2 = 0$. Portanto, temos $\omega = \lambda_1 u_2^* \wedge u_3^*$, que é decomponível.

Agora, vamos assumir indutivamente que a proposição seja válida para todo natural $\leq N - 1$ e vamos mostrar que também vale para N. Usando uma base $\{v_1, ..., v_N\}$ de $\mathbb{C}^N$, escrevemos

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sum_{1 \le i < j \le N} a_{ij} v_i^* \wedge v_j^* \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N-1} a_{iN} v_i^* \right) \wedge v_N^* + \sum_{1 \le i < j \le N-1} a_{ij} v_i^* \wedge v_j^* \\
&= u^* \wedge v_N^* + \omega',
\end{aligned}
$$

onde $u \in U$, $\omega' \in \mathcal{A}_2(U;\mathbb{C})$ e U é o subespaço com dimensão $N-1$ gerado por $v_1, ..., v_{N-1}$. Agora, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega \wedge \omega \\
&= (u^* \wedge v_N^* + \omega') \wedge (u^* \wedge v_N^* + \omega') \\
&= u^* \wedge v_N^* \wedge u^* \wedge v_N^* + u^* \wedge v_N^* \wedge \omega' + \omega' \wedge u^* \wedge v_N^* + \omega' \wedge \omega' \\
&= 2u^* \wedge \omega' \wedge v_N^* + \omega' \wedge \omega'.
\end{aligned}
$$

Contudo, v_N não aparece na expansão de $u^* \wedge \omega'$ ou $\omega' \wedge \omega'$, então obtemos, separadamente,

$$u^* \wedge \omega' = 0 \quad \text{e} \quad \omega' \wedge \omega' = 0.$$

Por hipótese de indução, $\omega' \wedge \omega' = 0$ implica $\omega' = u_1^* \wedge u_2^*$, onde $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^N$ e, assim, a primeira equação torna-se

$$u^* \wedge u_1^* \wedge u_2^* = 0.$$

Segue disso que o conjunto $\{u, u_1, u_2\}$ é linearmente dependente, isto é, existem $\lambda, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que

$$\lambda u + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0.$$

Se $\lambda = 0$, então u_1 e u_2 são linearmente dependentes e temos $\omega' = u_1^* \wedge u_2^* = 0$. Isso significa que $\omega = u^* \wedge v_N^*$ e é, portanto, decomponível. Se $\lambda \neq 0$ podemos escrever $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, assim

$$\omega = \lambda_1 u_1^* \wedge v_N^* + \lambda_2 u_2^* \wedge v_N^* + u_1^* \wedge u_2^*$$

e esse é o caso $N = 3$ que é sempre decomponível como mostrado acima. Concluímos, nesse caso, que ω é decomponível. $\square$

Definição A.3. Uma 2-forma $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})$ é *degenerada* se existe algum vetor $u \in \mathbb{C}^N$ não-nulo tal que $\omega(u,v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{C}^N$, ou equivalentemente, ω é *não-degenerada* se a aplicação linear

$$\widetilde{\omega} : \mathbb{C}^N \to (\mathbb{C}^N)^*, \quad \widetilde{\omega}(v) = \omega_v : w \to \omega(v,w)$$

é um isomorfismo linear.

Vamos caracterizar as 2-forma degeneradas em $\mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N; \mathbb{C})$. **Lema A.4.** Seja ω uma 2-forma em $(\mathbb{C}^N)^*$, com $N = 2n$. Então, existe uma base $\{e_1^*, ..., e_{2k}^*, e_{2k+1}^*, ..., e_N^*\}$ de $(\mathbb{C}^N)^*$ tal que

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* + ... + e_{2k-1}^* \wedge e_{2k}^*.$$

Demonstração. Se $\omega = 0$, o lema vale trivialmente com $k = 0$. Agora, suponha $\omega \neq 0$. seja $\{f_1, ..., f_N\}$ uma base de $\mathbb{C}^N$ e $\{f_1^*, ..., f_N^*\}$ a base dual de $(\mathbb{C}^N)^*$. Então, podemos expressar ω como

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{ij} f_i^* \wedge f_j^*.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_{12} \neq 0$. Seja

$$e_1^* = \frac{1}{a_{12}} \widetilde{\omega}(f_1) = \frac{1}{a_{12}} \omega_{f_1} \quad \text{e} \quad e_2^* = \widetilde{\omega}(f_2) = \omega_{f_2}.$$

Assim, o conjunto $\{e_1^*, e_2^*, f_3^*, ..., f_N^*\}$ ainda é uma base para $(\mathbb{C}^N)^*$, e definindo $\overline{\omega} = \omega - e_1^* \wedge e_2^*$, temos

$$\overline{\omega}_{f_1} = \omega_{f_1} + (e_1^* \wedge e_2^*)_{f_1} = a_{12} e_1^* - a_{12} e_1^* = 0$$

$$\overline{\omega}_{f_2} = \omega_{f_2} + (e_1^* \wedge e_2^*)_{f_2} = e_2^* - e_2^* = 0.$$

Assim, podemos expressar $\overline{\omega}$ como $\overline{\omega} = \sum_{3 \leq i < j \leq N} b_{ij} f_i^* \wedge f_j^*$, daí

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* + \sum_{3 \leq i < j \leq N} b_{ij} f_i^* \wedge f_j^*.$$

Se $\overline{\omega} = 0$, então $\omega = e_1^* \wedge e_2^*$ e acabamos a demonstração. Se $\overline{\omega} \neq 0$, repetimos o procedimento acima com $\overline{\omega}$ no lugar de ω para encontrar e_3^* e e_4^* tais que

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* + \sum_{5 \leq i < j \leq N} c_{ij} f_i^* \wedge f_j^*.$$

Repetindo esse processo por no máximo n vezes, chegamos ao fim e obtemos a expressão desejada para ω. $\square$

Como consequência desse lema, temos:

Proposição A.5. Se $N = 2n$ então $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})$ é não-degenerada se, e somente se, existe uma base $\{e_1^*, ..., e_{2n}^*\}$ de $(\mathbb{C}^N)^*$ tal que

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* + ... + e_{2n-1}^* \wedge e_{2n}^*.$$

Demonstração. Escolha a base de $(\mathbb{C}^N)^*$, $e_1^*, ..., e_{2k}^*, e_{2k+1}^*, ..., e_N^*\}$, dual de alguma base de $\mathbb{C}^N$, como no lema acima. Se $2k < N$, então $\widetilde{\omega}(e_N) = 0$ em $(\mathbb{C}^N)^*$, logo $\widetilde{\omega}$ não é um isomorfismo. Se $2k = N$, então $\widetilde{\omega}$ leva a base $\{e_1, e_2, ..., e_{2n-1}, e_{2n}\}$ de $\mathbb{C}^N$ na base $\{e_2^*, -e_1^*, ..., e_{2n}^*, -e_{2n-1}^*\}$ de $(\mathbb{C}^N)^*$. Assim, $\widetilde{\omega}$ é um isomorfismo. Portanto, ω é não-degenerada. $\square$

Vale ressaltar ainda que se ω é uma 2-forma não-degenerada e $N = 2n$, então

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge ... \wedge \omega}_{n \quad vezes} = n! e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_{2n-1}^* \wedge e_{2n}^*$$

é uma N-forma não-nula. Assim, temos

Proposição A.6. Se $N = 2n$, então $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})$ é degenerada se, e somente se, $\omega^n = 0$.

A proposição anterior caracteriza as 2-formas degeneradas em $\mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})$ quando N é par. Para N ímpar, temos

Proposição A.7 Se N é ímpar, toda 2-forma $\omega \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^N, \mathbb{C})$ é degenerada.

Demonstração. Seja $A \in M_N(\mathbb{C})$ a matriz antissimétrica associada a ω em uma base fixada, ou seja, $\omega(u, v) = u^t A v$. Como A é antissimétrica, temos que $A = -A^t$. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} \det A &= \det(-A^t) \\ &= \det(-A) \\ &= (-1)^N \det A. \end{aligned}$$

Assim, como N é ímpar, obtemos $\det A = 0$. Logo, o posto da matriz A não é maximal, ou seja, existe $\mu \in \mathbb{C}^N$ não-nulo tal que $\omega(\mu, v) = 0$, para todo $v \in \mathbb{C}^N$. Portanto, ω é degenerada. □

Determinantes e Pfaffianos

Nessa seção, vamos considerar um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita par $N = 2n$, $\mathbb{K}$ corpo, munido com um produto interno $\langle , \rangle$.

Suponha que $\{v_1, ..., v_N\}$ é uma base de V, não necessariamente ortogonal. Para qualquer $x \in V$ podemos calcular as componentes de x na base $\{v_1, ..., v_N\}$ através da base dual $\{v_1^*, ..., v_N^*\}$ da seguinte forma

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i v_i, \quad x_i = v_i^*(x).$$

O produto interno em V fornece uma correspondência vetor-covetor. Daí, cada $v_i^* \in V^*$ possui um vetor correspondente $u_i \in V$. Dessa forma, obtemos um conjunto com N vetores $\{u_1, ..., u_N\}$. Pela definição dessa correspondência vetor-covetor, cada u_i é tal que

$$\langle u_i, x\rangle = v_i^*(x) = x_i, \quad \forall x \in V.$$

O conjunto $\{u_1, ..., u_N\}$ é uma base de V. Com efeito, note que

$$\langle u_i, v_j\rangle = v_i^*(v_j) = \delta_{ij}.$$

Precisamos mostrar que esse conjunto é linearmente independente. Suponha que temos uma combinação linear

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i = 0,$$

e tome o produto interno dessa combinação com o vetor v_j,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i, v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \delta_{ij} \\ &= \lambda_j. \end{aligned}$$

Assim, o conjunto de N vetores $\{u_1, ..., u_N\}$ é linearmente independente num espaço V

com dimensão N, daí tal conjunto é uma base.

A base $\{u_1, ..., u_N\}$ é denominada base recíproca para a base $\{v_1, ..., v_N\}$. A justificativa para essa denominação provém do fato de que o volume orientado do paralelepípedo gerado pela base $\{u_j\}$ é igual ao inverso do gerado pela base $\{v_j\}$. De fato, por definição, o volume do paralelepípedo orientado gerado pela base $\{u_j\}$ é

$$Vol\{u_j\} = \frac{u_1 \wedge ... \wedge v_N}{e_1 \wedge ... \wedge e_j},$$

onde $\{e_j\}$ é uma base ortonormal positivamente orientada de V. Agora, considere a transformação linear invertível definida por $M(e_j) = v_j$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
\det M &= \frac{M(e_1) \wedge ... \wedge M(e_N)}{e_1 \wedge ... \wedge e_N} \\
&= \frac{v_1 \wedge ... \wedge v_N}{e_1 \wedge ... \wedge e_N} \\
&= Vol\{v_j\}.
\end{aligned}$$

Considere a transposta M^t em relação ao produto interno de V. Note que

$$\begin{aligned}
\langle e_i, M^t(u_j)\rangle &= \langle M(e_i), u_j\rangle \\
&= \langle v_i, u_j\rangle \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Daí, como essa igualdade é verdadeira para todo $i, j = 1, ..., N$, segue que $M^t(u_j) = e_j$. Além disso, como $\det M^t = \det M$, temos

$$\begin{aligned}
e_1 \wedge ... \wedge e_N &= M^t(e_1) \wedge ... \wedge M^t(e_N) \\
&= (\det M) u_1 \wedge ... \wedge u_N.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
Vol\{u_j\} &= \frac{u_1 \wedge ... \wedge u_N}{e_1 \wedge ... \wedge e_N} \\
&= \frac{1}{\det M} \\
&= \frac{1}{Vol\{v_j\}}.
\end{aligned}$$

Definição A.8. O *pfaffiano* de uma 2-forma $\omega \in \mathcal{A}_2(V^N; V)$, com $N = 2n$, é o único escalar $pf(\omega) \in \mathbb{K}$ tal que

$$\frac{1}{n!}\omega^n = pf(\omega)e_1 \wedge ... \wedge e_{2n},$$

onde $\{e_j\}$ é uma base ortonormal de V.

Toda 2-forma $\omega \in \mathcal{A}_2(V^N, V)$ possui a ela associada uma matriz antissimétrica $A \in M_N(\mathbb{K})$ tal que $\omega(u,v) = u^t A v$. Nesse contexto, existe uma relação entre $pf(\omega)$ e $\det A$.

Proposição A.9. $\det A = [pf(\omega)]^2$.

Demonstração. Inicialmente, note que podemos escrever $\omega \in \mathcal{A}_2(V^N; V)$ como

$$\omega = v_1 \wedge v_2 + ... + v_{2k-1} \wedge v_{2k},$$

onde o conjunto de vetores $\{v_1, ..., v_{2k}\}$ é linearmente independente em V e $2k \leq N$[5].

Se $2k < N$, então temos que $\omega^n = 0$ pois existem $2k$ vetores diferentes no produto exterior, enquanto o número total de vetores da base de V^N é $N = 2n$, assim pelo menos um v_i se repete. Logo, ω é degenerada e temos $\det A = pf(\omega) = 0$.

Agora, se $2k = N$, então o conjunto $v_1, ..., v_N\}$ é uma base em V. Segue disso que

$$\begin{aligned} \frac{\omega^n}{n!} &= v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_N \\ &= pf(\omega)e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_N, \end{aligned}$$

onde $\{e_j\}$ é uma base ortonormal em V. Em outras palavras, $pf(\omega)$ é o volume orientado do paralelepípedo gerado por $\{v_j\}$, se assumirmos que $\{e_j\}$ gera o paralelepípedo com volume unitário. Daí, temos que $pf(\omega) \neq 0$.

Vamos denotar por $\{v_j^*\}$ a base dual da base $\{v_j\}$. Desse modo, fazendo a correspondência entre vetores e covetores definida no início dessa seção, podemos levar cada vetor da base $\{v_j^*\}$ no respectivo vetor da base recíproca $\{u_j\}$. Daí, aplicando o operador A nos elementos de $\{u_j\}$ e usando a propriedade de que $\langle v_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$, obtemos $A(u_1) = -v_2$, $A(u_2) = v_1$, ... , $A(u_{N-1}) = -v_N$, $A(u_N) = v_{N-1}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} A(u_1) \wedge ... \wedge A(u_N) &= (-v_2) \wedge v_1 \wedge ... \wedge (-v_N) \wedge v_{N-1} \\ &= v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_N. \end{aligned}$$

[5]O lema $A.4$ também é válido para espaços vetoriais de dimensão finita arbitrários

Assim, temos

$$\begin{aligned}\det A &= \frac{A(u_1) \wedge \ldots \wedge A(u_N)}{u_1 \wedge \ldots \wedge u_N} \\ &= \frac{v_1 \wedge \ldots \wedge v_N}{u_1 \wedge \ldots \wedge u_N} \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração, vamos calcular o volume gerado pela base $\{u_j\}$ para relacionarmos $u_1 \wedge \ldots \wedge u_N$ com $e_1 \wedge \ldots \wedge e_N$. sabemos que o volume gerado por $\{u_j\}$ é o inverso do volume gerado por $\{v_j\}$. Assim , temos $Vol\{u_j\} = \dfrac{1}{pf(\omega)}$. Por outro lado, temos $Vol\{u_j\} = \dfrac{u_1 \wedge \ldots \wedge u_N}{e_1 \wedge \ldots \wedge e_N}$. Assim,

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_N = pf(\omega)^{-1} e_1 \wedge \ldots \wedge e_N.$$

Juntando as expressões obtidas acima, obtemos

$$\begin{aligned}pf(\omega) &= Vol\{v_j\} \\ &= \frac{v_1 \wedge \ldots \wedge v_N}{e_1 \wedge \ldots \wedge e_N} \\ &= \frac{v_1 \wedge \ldots \wedge v_N}{u_1 \wedge \ldots \wedge u_N} \cdot \frac{u_1 \wedge \ldots \wedge u_N}{e_1 \wedge \ldots \wedge e_N} \\ &= (\det A) pf(\omega)^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto, $\det A = [pf(\omega)]^2$. □

Apêndice B

Estrutura das Variedades Algébricas Reais

Neste apêndice vamos apresentar alguns resultados importantes de H. Whitney sobre variedades algébricas reais utilizados nessa dissertação[6]

Definições Básicas

Uma variedade algébrica real (ou complexa) V é um conjunto de pontos no espaço real $\mathbb{R}^n$ (ou complexo $\mathbb{C}^n$) que são zeros comuns de um número finito de polinômios.

As definições a seguir são válidas tanto para variedades algébricas reais quanto para complexas.

Definição B.1. O *ideal polinomial* $I(Q)$ de um conjunto de pontos $Q \subset \mathbb{R}^n$ (ou $Q \subset \mathbb{C}^n$) é o conjunto de polinômios que se anulam em Q, ou seja, se $f, g \in I(Q)$, então $f + g \in I(Q)$ e $\phi f \in I(Q)$ para qualquer polinômio $\phi \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ (ou $\phi \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$).

Um conjunto S de polinômios define uma variedade algébrica $V(S)$ formada pelos zeros comuns dos polinômios de S. Por exemplo, se $S = xy - 1, x^2 - 1$ então $V(S) = (1,1), (-1,-1)$. Contudo, se $S = \{x^2 + 1\}$ então $V(S) = \varnothing$ vista como uma variedade real ou $V(S) = \{-i, i\}$ vista como uma variedade complexa. Além disso, S gera um ideal I, consistindo de todas as combinações lineares de elementos de S com coeficientes polinomiais e, claramente, temos $I \subset I(V(S))$.

Definição B.2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $p \in \mathbb{R}^n$. A *diferencial* de f no ponto p é o funcional linear $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cujo valor no vetor $v = (v_1, ..., v_n)$ é

[6]Para mais detalhes e demonstrações recomenda-se a referência (WHITNEY, 1957).

dado por

$$df(p)\cdot v = \lim_{t\to 0}\frac{f(p+tv)-f(p)}{t} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\cdot v_i.$$

Definição B.3. O *posto* $rnk_p(S)$ de um conjunto S de polinômios em um ponto p é o número máximo de diferenciais linearmente independentes $df_1(p),...,df_s(p)$, onde $f_i\in S$. O *posto* $rnk_p(Q)$ de um conjunto $Q\subset\mathbb{R}^n$ ($Q\subset\mathbb{C}^n$) em um ponto $p\in Q$ é $rnk_p(I(Q))$ e o posto $rnk(Q)$ de Q é o maior valor de $rnk_p(Q)$ para $p\in Q$.

Na definição anterior, se S é um ideal, o conjunto de todos os covetores $df(p)$, onde $f\in S$ forma um espaço vetorial (com as operações usuais) cuja dimensão é igual ao $rnk_p(S)$. Claramente, $rnk_p(S)$ é também o número máximo de diferenciais independentes de qualquer conjunto de funções que geram S pois S é um ideal finitamente gerado já que qualquer anel de polinômios em n variáveis é Noetheriano.

Definição B.4. Uma *variedade algébrica parcial* M é um conjunto de pontos associado com um número natural ρ, com a seguinte propriedade: tomando qualquer $p\in M$, existe um conjunto de polinômios $f_1,...,f_\rho$, de posto ρ em p, e uma vizinhança U de P, tal que $M\cap U$ é o conjunto de zeros em U desses f_i. O número $n-\rho$ é a dimensão da variedade parcial M.

Note que M não precisa ser fechada ou conexa e que qualquer subconjunto aberto de M é também uma variedade algébrica parcial. A variedade M é dita também *estratificada*, por defindção, visto que cada um de seus pontos possui posto constante igual a ρ.

Teoremas de Whitney

Agora, vamos apresentar os principais resultados de Whitney para variedades algébricas reais [7]

Teorema B.5. Sejam $V\subset\mathbb{R}^n$ uma variedade algébrica e M_1 o conjunto de pontos $p\in V$ onde o posto de V é maximal. Então, M_1 é uma variedade algébrica parcial de dimensão $n-rnk(V)$ e $V_1=V-M_1$ é vazio ou é uma subvariedade algébrica própria de V.

No mesmo contexto do teorema B.5, se $V_1\neq\varnothing$, podemos aplicar esse processo de decomposição novamente, o que nos fornece $V_1=M_2\cup V_2$, etc. A primeira parte do

[7] Para ver a demonstração desses resultados, consulte (WHITNEY, 1957).

próximo teorema é um consequência imediata do Teorema da Base de Hilbert.

Teorema B.6. O processo de decomosição chega ao fim após um número finito de passos, ou seja,

$$V = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_s, \tag{4.5}$$

onde cada M_i é uma variedade algébrica parcial em V e $M_i \cap M_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Além disso, temos

$$s \leq 2^n - 1. \tag{4.6}$$

Uma consequência imediata do teorema $B.6$ é que cada conjunto de pontos

$$V_i = M_{i+1} \cup ...M_s \tag{4.7}$$

é uma variedade algébrica, e daí é um conjunto fechado. Desse modo, dizemos que V pode ser expresso como uma coleção de variedades estratificadas.

Teorema B.7. Uma variedade algébrica real possui um número finito de componentes conexas.

Teorema B.8. Seja V' uma subvariedade de uma variedade real V. Então $V - V'$ possui um número finito de componentes conexas.

Como corolário imediato do teorema B.6, temos

Corolario B.9. Na expressão em (B.1) cada M_i possui um número finito de componentes conexas.

Para finalizar essa seção, vamos mostrar que, na decomposição dada no teorema B.5, V_1 é uma variedade algébrica se V_1 for não-vazio. Com efeito, dadas as funções polinomiais $f_1, ..., f_r$, seus diferenciais são independentes em $p \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se algum determinante jacobiano ,usando o sistema natural de coordenadas do $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial(f_1, ..., f_r)}{\partial(x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_r})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\lambda_1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\lambda_r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_{\lambda_1}} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{\lambda_r}} \end{pmatrix}$$

é $\neq 0$ em p. Seja $\rho = rnk(V)$. Por definição de M_1 e V_1, $I(V)$ possui posto ρ em todos os pontos de M_1, e possui posto $< \rho$ em todos os pontos de V_1, isto é, todos os determinantes jacobianos de elementos $f_1, ..., f_\rho \in I(V)$ são iguais a zero em todos os pontos de V_1, enquanto isso não é verdade para nenhum ponto de M_1. Seja S esse conjunto de determinantes jacobianos. Claramente, os elementos de S são polinômios. Agora, V_1 é simplesmente o conjunto de pontos onde todos os polinômios de $I(V)$ e todos os polinômios de S se anulam e, portanto, V_1 é uma variedade algébrica.

Complexificação de Variedades Algébricas Reais

Sejam $\Re x$ e $\mathcal{C}x$ a parte real e o complexo conjugado de um $x \in \mathbb{C}$, respectivamente. Agora, note que $\mathcal{C}\mathcal{C}x = x$, $\mathcal{C}(x+y) = \mathcal{C}x + \mathcal{C}y$, $\mathcal{C}(xy) = (\mathcal{C}x)(\mathcal{C}x)$, e $\mathcal{C}(ix) = -i\mathcal{C}x$ para todo $x, y \in \mathbb{C}$. Além disso, para $p = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, temos $\mathcal{C}p = (\mathcal{C}x_1, \cdots, \mathcal{C}x_n)$.

Para qualquer polinômio $f = \sum A_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n} \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, temos

$$\begin{aligned} f(\mathcal{C}(x_1, ..., x_n)) &= \sum A_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} (\mathcal{C}x_1)^{\lambda_1} \cdots (\mathcal{C}x_n))^{\lambda_n} \\ &= \sum A_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \mathcal{C}(x^{\lambda_1} \cdots x^{\lambda_n}) \\ &= \mathcal{C} \sum \mathcal{C}(A_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}) x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

A partir disso, definimos o operador $\Gamma : \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \to \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ por

$$\Gamma(f(p)) = \frac{1}{2}[f(p) + \mathcal{C}f(\mathcal{C}p)]. \tag{4.9}$$

Então, usando $B.(4)$, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(f(p)) &= \Gamma\left(\sum A_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum A_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} + \mathcal{C}\left(\mathcal{C} \sum \mathcal{C}(A_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}) x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}\right)\right] \\ &= \sum \Re(A_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}) x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

A igualdade em $(B.6)$ mostra que Γf é real, ou seja, assume valores reais em pontos com todas as entradas reais, e $\Gamma f = f$ se, e somente se, $f \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$. Além disso, temos ainda

$$\begin{aligned}\Gamma(f(p)) - i\Gamma(if(p)) &= \frac{1}{2}\left[f(p) + \mathcal{C}f(\mathcal{C}p)\right] - i\frac{1}{2}\left[if(p) + \mathcal{C}(if(\mathcal{C}p)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[f(p) + \mathcal{C}f(\mathcal{C}p) + (-i)if(p) + (-i)(-i)\mathcal{C}f(\mathcal{C}p)\right] \\ &= f(p). \qquad (4.11)\end{aligned}$$

Recordemos que o anel $R[x_1, ..., x_n]$ é um subanel de $C[x_1, ..., x_n]$.

Definição B.10 Para um conjunto de pontos $Q \subset \mathbb{C}^n$, seja $\mathcal{C}Q$ o conjunto de pontos $\mathcal{C}p$, com $p \in Q$. Dizemos que Q é *simétrico-real* se $\mathcal{C}Q = Q$.

Definição B.11. Sejam $V \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade algébrica complexa, $I(V)$ o ideal polinomial associado a V e $\{f_1, ..., f_s\}$ o conjunto gerador de $I(V)$, onde $p_j = p_{j1} + ip_{j2} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ $(j = 1, ..., s,\ f_{j1}, f_{j2} \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_2])$. A *parte real* de V, $\mathfrak{R}(V)$, é a variedade algébrica real definida pelos zeros reais comuns do conjunto de polinômios $\{f_{11}, f_{21}, ..., f_{s1}\}$.

Proposição B.12. Dada uma variedade algébrica real $V \subset \mathbb{R}^n$, existe uma única menor variedade algébrica complexa $V^* \subset \mathbb{C}^n$ contendo V. Além disso, V^* é real-simétrica, e V é a sua parte real. Se $I(V)$ e $I^*(V^*)$ são os ideais associados a V e V^*, respectivamente, então $I(V) \subset I^*(V^*)$ e $I(V)$ é o conjunto de polinômios reais em $I^*(V^*)$; $I(V)$ também consiste de todos os Γf com $f \in I^*(V^*)$, e $I^*(V^*)$ é o ideal complexo gerado por $I(V)$.

Demonstração. Inicialmente, notemos que os polinômios em $I(V)$ definem uma variedade complexa V^*, cuja parte real real é V. Agora, pela igualdade $(B.4)$ se $p \in V^*$ então $\mathcal{C}p \in V^*$. Assim, V^* é simétrico-real. Para mostrar que V^* é a menor variedade complexa contendo V, vamos mostrar que qualquer polinômio f que se anula em V também se anula em V^*. De fato, como $f = 0$ em V, Γf e $\Gamma(if)$ também são 0 em V e daí também o são em V^*. Portanto, pela igualdade $(B.7)$, $f = 0$ em V^*.

Por definição de V^*, $I(V) \subset I^*(V^*)$. Além disso, como $V \subset V^*$, então $I(V)$ contém todos os polinômios reais em $I^*(V^*)$, e daí é simplesmente esse conjunto de polinômios. Ainda, para qualquer $f \in I^*(V^*)$, $\Gamma f \in I(V) \subset I^*(V^*)$, pela igualdade $(B.6)$. Esse conjunto de polinômios Γf é o conjunto de polinômios reais em $I^*(V^*)$, e daí em $I(V)$. Finalmente, pela igualdade $(B.7)$, $I(V)$ gera $I^*(V^*)$. □

Agora, vamos usar a notação rnk^* para designar o posto de uma variedade complexa.

Proposição B.13. Com V e V^* como na proposição $B.12$, temos

$$rnk_p(V) = rnk_p^*(V^*), \quad p \in V.$$

Demonstração. Primeiro, notemos que $I(V)$ é um ideal de um anel Noetheriano. Desse modo, esse ideal é finitamente gerado. Assim, vamos supor que $rnk_p(V) = k$. Sejam $f_1, ..., f_k \in I(V)$ tais que $df_1, ..., df_k$ são independentes em um ponto $p \in V$. Agora, como $I(V)$ gera $I^*(V^*)$ pela proposição B.11, temos que $rnk_p^*(V^*) \geq k$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(\sum_{i=1}^{k} \phi_i(p) f_i(p))) &= \sum_{i=1}^{k} d(\phi_i(p) f_i(p)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} d\phi_i(p) f_i(p) + \sum_{i=1}^{k} \phi_i(p) df_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \phi_i(p) df_i(p), \end{aligned}$$

onde $\phi_i \in \mathbb{C}[X_1, ..., x_n]$. Portanto, $rnk_p^*(V^*) = k$. $\square$