Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Contribuições à Teoria Multilinear de Operadores Absolutamente Somantes

Adriano Thiago Lopes Bernardino

2011

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Contribuições à Teoria Multilinear de Operadores Absolutamente Somantes

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Adriano Thiago Lopes Bernardino

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Outubro de 2011
Recife-PE

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Bernardino, Adriano Thiago Lopes
Contribuições à teoria multilinear de operadores absolutamente somantes / Adriano Thiago Lopes Bernardino - Recife: O Autor, 2011.
xiii p.

Orientador: Daniel Marinho Pellegrino.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CIn, Ciência da Computação, 2011.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Análise. 2. Análise funcional. I. Pellegrino, Daniel Marinho (orientador). II. Título.

515 CDD (22. ed.) MEI2012 – 110

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ____
Daniel Marinho Pellegrino, *UFPB*
Orientador

____
Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva, *UFCG*

____
Marcos Napoleão Rabelo, *UFPE*

____
Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, *UFPE*

____
Vinícius Vieira Fávaro, *UFU*

CONTRIBUIÇÕES À TEORIA MULTILINEAR DE OPERADORES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Por

Adriano Thiago Lopes Bernardino

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Outubro – 2011

Ao meu Pai
Pedro Bernardino

Agradecimentos

Bom, chegou novamente à parte difícil, tentar agradecer a todos que, de certo modo, ajudaram a terminar este trabalho.

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre estar comigo.

À Taty, minha esposa, antes de quaisquer outros, foi quem passou maior perrengue comigo durante este tempo e merece toda minha gratidão. Obrigado por me aturar, por compreender minha ausência, por me apoiar em minhas decisões, por me animar, por me incentivar, por deixar estes anos melhores... Obrigado por estar comigo. Repito as palavras de minha dissertação "sem ela pouco teria feito".

Painho e mainha, não sei nem o que escrever. Tudo em minha vida devo a vocês. Amo vocês.

Aos meus irmãos Mi, Alê, Ezinho, Gi e Nega:

Mi, minha irmã mais preocupada!

Alê, me ajudou em tudo que precisei.

Ezinho, sempre querendo que eu me divertisse. Agora vou ter tempo para o carnaval!!!

Gi, só coloquei seu nome porque é da família, porque vc não fez nada!

Nega, ... é a mulesta!!!

Aos meus sobrinhos Bi, Biel e Léu. Pense num abraço gostoso!

Aos meus cunhados Má e Dani por me tratarem sempre com muito carinho.

Ao Roja companheiro de cerveja quando a Taty não estava.

Aos colegas do doutorado em especial ao Alejo, ajudou muito quando eu estava estudando para o exame de qualificação. A musiquinha que você colocou antes do exame não adiantou muito, mas valeu a intenção. Joedson, amigo desde o mestrado, sempre me ajudando com a matemática e me dando sábios conselhos.

Agradeço ao professor Luiz Gonzaga, que me ajudou com as disciplinas quando passei no concurso, permitindo concluir as disciplinas do doutorado, pois a burocracia, que nunca vou entender, me impediu de ser afastado.

Aos professores Diogo Diniz, Marcos Rabelo, Pablo Braz, Vinícius Vieira, João Marcos e Geraldo Botelho por participarem da banca examinadora.

Também quero agradecer aos colegas de "buteco", sem as canas para relaxar seria mais complicado. Difícil resistir ao convite "bora beber?"!!!

Last but not least, agradeço profundamente ao professor Daniel Marinho Pellegrino, meu orientador. Depois de chamar várias vezes minha dissertação de tese, agora realmente é tese. Agradeço por ter aceitado me orientar a “distância”. Respondia meus e-mails quase que instantaneamente tirando minhas dúvidas, se não, dizia a quem recorrer para tirá-las; sei que dei muito trabalho. Repetindo novamente as palavras de minha dissertação ”Agradeço a enorme contribuição, sem a qual este trabalho não teria sido realizado”. Obrigado por me incentivar, por não me deixar desanimar. Queria ter mais tempo e que esse trabalho demorasse mais...vou sentir falta!

Resumo

Neste trabalho estudamos algumas extensões do conceito de operadores multilineares absolutamente somantes, generalizamos alguns resultados conhecidos e respondemos parcialmente alguns problemas abertos. Para a classe das aplicações absolutamente $(p; q; r)$-somantes, obtemos alguns resultados de coincidência e inclusão e mostramos que o ideal de polinômios absolutamente $(p; q; r)$-somantes não é corente, de acordo com a noção de ideais coerentes devida a D. Carando, V. Dimant e S. Muro. Para contornar esta falha, introduzimos o conceito de aplicações múltiplo $(p; q; r)$-somantes e mostramos que, com essa nova abordagem, o ideal de polinômios múltiplo $(p; q; r)$-somantes é coerente e compatível com o ideal de operadores lineares absolutamente $(p; q; r)$-somantes.
Palavras chave: Teorema da Composição de Pietsch, ideal de aplicações multilineares, ideal de polinômios, aplicações absolutamente somantes, aplicações múltiplo somantes, aplicações dominadas, tipo e cotipo de espaços de Banach, ideais coerentes, ideais compatíveis.

Abstract

In this work we investigate some extensions of the concept of absolutely summing operators, generalize some known results and provide partial answers to some open questions. For the class of absolutely $(p;q;r)$-summing mappings we obtain some inclusion and coincidence results and show that the ideal of absolutely $(p;q;r)$-summing polynomials is not coherent, according to the notion of coherent ideals due to D. Carando, V. Dimant and S. Muro. In order to bypass this deficiency, we introduce the concept of multiple $(p;q;r)$-summing multilinear and polynomial operators and show that, with this new approach, the ideal of multiple $(p;q;r)$-summing polynomials is coherent and compatible with the ideal of absolutely $(p;q;r)$-summing operators.
Key-Words: Pietsch Composition theorem, ideal of multilinear mappings, ideal of polynomials, absolutely summing mappings, multiple summing mappings, dominated mappings, cotype and type of Banach spaces, coherent ideals, compatible ideals.

Sumário

Introdução

O começo da teoria de ideais de operadores entre espaços de Banach tem certamente uma de suas origens nos trabalhos de A. Grothendieck, na década de 50. Talvez o resultado mais marcante de Grothendieck, nessa época, tenha sido o que ele chamou de Teorema Fundamental da Teoria Métrica dos Produtos Tensoriais Topológicos. Esse resultado foi reescrito, em linguagem matricial, por J. Lindenstraus e A. Pełczyński, na década de 60, em seu artigo [44], que também marcou um esforço bem sucedido em reescrever os resultados de Grothendieck em uma linguagem mais acessível e em mostrar a importância e aplicabilidade do conceito de operadores absolutamente somantes. A teoria dos operadores absolutamente somantes, como é conhecida hoje, é creditada a A. Pietsch [63] e B. Mitiagin e A. Pełczyński [51]. Além de sua importância para a teoria dos espaços de Banach, os operadores absolutamente somantes desempenham um papel vital na motivação do desenvolvimento de uma teoria multilinear de ideais de operadores.

Em 1983 Pietsch esboçou uma direção de pesquisa para a teoria das aplicações multilineares absolutamente somantes [61]. Desde então, tentando resgatar as propriedades dos operadores lineares absolutamente somantes, têm surgido várias generalizações no contexto multilinear e polinomial: aplicações múltiplo somantes, fortemente somantes, semi integrais, fortemente múltiplo somantes, etc.

No Capítulo 1 estudamos uma das primeiras extensões multilineares do conceito de operador absolutamente somante. O principal resultado talvez seja a última aplicação dos resultados do capítulo, que chamamos de um teorema do tipo Grothendieck.

No Capítulo 2, motivados por questões não resolvidas em um artigo recente de D. Popa [66], obtemos um teorema do tipo composição de Pietsch para aplicações multilineares e mostramos que a classe das aplicações multilineares gerada pelo método da composição também satisfaz um teorema do tipo Pietsch. Também estudamos o efeito do cotipo dos espaços de Banach em tais resultados.

O Capítulo 3 é um estudo sobre as aplicações multilineares absolutamente $(p;q;r)$-

somantes, introduzidas recentemente por D. Achour [1]. Obtemos alguns resultados de coincidência e observamos que o ideal dos polinômios absolutamente $(p; q; r)$-somantes não é coerente, segundo a definição de coerência e compatibilidade de D. Carando, V. Dimant e S. Muro [26]. Esta deficiência do ideal dos polinômios absolutamente $(p; q; r)$-somantes serve como motivação para o conceito introduzido no Capítulo 4.

No Capítulo 4 introduzimos o conceito de aplicações multilineares (e polinômios) múltiplo $(p; q; r)$-somantes e mostramos que o ideal dos polinômios múltiplo $(p; q; r)$-somantes é um ideal compatível e coerente, ao contrário do conceito estudado no capítulo anterior.

Notação e Terminologia

- Os símbolos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ representarão, respectivamente, os corpos dos números reais e complexos e $\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos inteiros positivos. O símbolo $\mathbb{K}$ denotará um dos corpos: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

- As letras maiúsculas $E, E_1, ..., E_n, G, G_1, ..., G_n, H$ e F representarão sempre espaços de Banach;

- O dual (topológico) de um espaço de Banach E será denotado por E^*;

- Usaremos o termo "operador"com o mesmo sentido de "função";

- Usaremos a norma do sup em espaços de funções, exceto menção em contrário;

- Usaremos a norma do máximo nos produtos cartesianos;

- O símbolo B_E denotará a bola unitária fechada $\{x \in E; \|x\| \leq 1\}$;

- A norma de um espaço de Banach (ou normado) E será denotado por $\|\cdot\|$; quando maior precisão for necessária, usaremos $\|\cdot\|_E$;

- Um operador linear u de E em F é dito de posto finito se a dimensão de $u(E)$ for finita;

- Se E for um conjunto e n um número natural, então E^n denotará o produto cartesiano de n cópias de E;

- $\mathbb{N}_m$ denotará o conjunto $\{1, ..., m\}$;

- $l_p(E; \mathbb{N}^n) = \left\{ (x_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n} \subset E, \text{ tal que } \left\| (x_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n} \right\|_p < \infty \right\}$;

- $l_p^w(E; \mathbb{N}^n) = \left\{ (x_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n} \subset E, \text{ tal que } \left\| (x_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n} \right\|_{w,p} < \infty \right\}$;

- Denotaremos por s^* o conjugado de s, isto é, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^*} = 1$;

Capítulo 1

Aplicações multilineares absolutamente somantes

1.1 Ideais de aplicações n-lineares e polinômios entre espaços de Banach

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos o conjunto das aplicações n-lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ ou $\mathcal{L}^n(E_1, ..., E_n; F)$; a classe de todas as aplicações n-lineares contínuas entre espaços de Banach será denotada por $\mathcal{L}^n$.

Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é dita de tipo finito se existem $m \in \mathbb{N}, \varphi_j^{(i)} \in E_i^*$ e $b_j \in F$ com $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$, tais que

$$T(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^{(1)}(x_1) \cdots \varphi_j^{(i)}(x_n)\, b_j.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P : E \to F$ é um polinômio homogêneo de grau n (ou polinômio n-homogêneo) se existir uma aplicação multilinear A de E^n em F tal que $P(x) = A(x, ..., x)$ para todo x em E. Quando $n = 0$ o polinômio n-homogêneo é uma função constante de E em F. A função $P : E \to F$ é um polinômio se P puder ser representado como uma soma $P = P_0 + \cdots + P_n$, onde para cada $i = 1, ..., n$, P_i é um polinômio i-homogêneo.

O espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{P}(^nE; F)$ ou $\mathcal{P}^n(^nE; F)$, e $\mathcal{P}(E; F)$ denotara o espaço dos polinômios contínuos de E em F. A classe de todos os polinômios n-homogêneos contínuos entre espaços de Banach será denotada por $\mathcal{P}^n$. Para um estudo mais detalhado de aplicações multilineares e polinômios, sugerimos [7, 37, 53].

Dizemos que um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$ é de tipo finito se existirem $\varphi_i \in E^*$ e $b_i \in F$, com $i = 1, ..., m$ tais que

$$P\left(x\right) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \left(x\right)^n b_i.$$

Se $P \in \mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$, é bem conhecido na teoria que existe uma única aplicação n-linear simétrica $\check{P} \in \mathcal{L}\left({}^nE;F\right)$ tal que

$$P\left(x\right) = \check{P}\left(x, ..., x\right) := \check{P}\left(x^n\right).$$

Se $a \in E$, definimos $P_{a^k} \in \mathcal{P}\left({}^{n-k}E;F\right)$ por

$$P_{a^k}\left(x\right) = \check{P}\left(\underbrace{a, ..., a}_{k\text{-vezes}}, \underbrace{x, ..., x}_{(n-k)\text{-vezes}}\right) := \check{P}\left(a^k, x^{n-k}\right).$$

Para $k = 1$, escrevemos P_a ao invés de P_{a^1}.

Se $P \in \mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$ e $\gamma \in E^*$, definimos $\gamma^k P \in \mathcal{P}\left({}^{n+k}E;F\right)$ por

$$\left(\gamma^k P\right)\left(x\right) = \gamma^k\left(x\right) P\left(x\right).$$

Para $k = 1$, escrevemos γP ao invés de $\gamma^1 P$.

A noção de ideal de aplicações multilineares entre espaços de Banach é devida a A. Pietsch [63].

A seguir relembramos conceitos que serão usados ao longo deste trabalho.

Definição 1.1.1 *Um* ideal de operadores $\mathcal{I}$ *é uma subclasse da classe dos operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach* E *e* F*, as componentes* $\mathcal{I}\left(E;F\right) = \mathcal{L}\left(E;F\right) \cap \mathcal{I}$ *satisfazem:*

(i) $\mathcal{I}\left(E;F\right)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}\left(E;F\right)$ *que contém os operadores de posto finito;*

(ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}\left(E;F\right), v \in \mathcal{I}\left(F;G\right)$ *e* $t \in \mathcal{L}\left(G;H\right)$*, então*

$$tvu \in \mathcal{I}\left(E;H\right).$$

Definição 1.1.2 *Um* ideal normado de operadores $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *é um ideal de operadores* $\mathcal{I}$ *munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0, \infty)$ *tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ *restrita a* $\mathcal{I}(E; F)$ *é uma norma para quaisquer espaços de Banach* E *e* F*;*

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1,$ *com* $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *dada por* $id_{\mathbb{K}}(x) = x$*;*

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{I}(F; G)$ *e* $t \in \mathcal{L}(G; H)$, *então*

$$\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|.$$

Quando $\mathcal{I}(E; F)$, com a norma acima, for completo para quaisquer espaços de Banach E e F, $\mathcal{I}$ é chamado de *ideal de Banach* (ideal completo) de operadores lineares.

Para detalhes da teoria de ideal de operadores sugerimos [29, 34, 62].

Definição 1.1.3 *Um* ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ *é uma subclasse da classe de todas aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e espaços de Banach* $E_1, ..., E_n$ *e* F*, as componentes* $\mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) \cap \mathcal{M}$ *satisfazem:*

(i) $\mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *que contém as aplicações* n*-lineares de tipo finito;*

(ii) A propriedade de ideal: se $A \in \mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ *para* $j = 1, ..., n$ *e* $t \in \mathcal{L}(F; H)$, *então*

$$tA(u_1, ..., u_n) \in \mathcal{M}(G_1, ..., G_n; H).$$

Para cada n fixo,

$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{E_1,...,E_n,F \text{ Banach}} \mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$$

é chamado de *ideal de aplicações* n*-lineares.*

Definição 1.1.4 *Um* ideal (quasi-) normado de aplicações multilineares $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *é um ideal de aplicações multilineares munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty)$, *tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ *restrita a* $\mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$ *é uma (quasi-) norma para quaisquer espaços de Banach* $E_1, ..., E_n$, F *e todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{M}} = 1$, *onde* $id_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ *é dada por* $id_{\mathbb{K}^n}(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdots x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) Se $M \in \mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$*,* $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ *para* $j = 1, ..., n$ *e* $t \in \mathcal{L}(F; H)$*, então*

$$\|tM(u_1, ..., u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \, \|M\|_{\mathcal{M}} \, \|u_1\| \cdots \|u_n\| .$$

De maneira análoga, se n for um inteiro positivo fixo, sob as condições acima, dizemos que $\mathcal{M}_n$ é um *ideal (quasi-) normado de aplicações n-lineares.*

Se as componentes $\mathcal{M}(E_1, ..., E_n; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, dizemos que $\mathcal{M}$ é um *ideal de Banach (quasi-Banach)* de aplicações multilineares. De modo análogo se procede para $\mathcal{M}_n$.

Definição 1.1.5 *Um* ideal de polinômios homogêneos*, ou simplesmente um* ideal de polinômios*, é uma subclasse* $\mathcal{Q}$ *da classe dos polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e quaisquer espaços de Banach* E *e* F*, as componentes* $\mathcal{Q}(^nE; F) = \mathcal{P}(^nE; F) \cap \mathcal{Q}$ *satisfazem:*

(i) $\mathcal{Q}(^nE; F)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{P}(^nE; F)$ *que contém os polinômios n-homogêneos de tipo finito;*

(ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G; E)$*,* $P \in \mathcal{Q}(^nE; F)$ *e* $t \in \mathcal{L}(F; H)$*, então*

$$tPu \in \mathcal{Q}(^nG; H) .$$

Para cada n fixo,

$$\mathcal{Q}_n = \bigcup_{E,F \text{ Banach}} \mathcal{Q}(^nE; F)$$

é chamado de *ideal de polinômios n-homogêneos.*

Definição 1.1.6 *Um* ideal (quasi-) normado de polinômios $\left(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}\right)$ *é um ideal de polinômios munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \longrightarrow [0, \infty)$*, tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ *restrita a* $\mathcal{Q}(^nE; F)$ *é uma (quasi-) norma para quaisquer espaços de Banach* E *e* F *e todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{Q}} = 1$*, onde* $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ *é dada por* $id_{\mathbb{K}}(x) = x^n$*;*

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(G, E)$*,* $P \in \mathcal{Q}(^nE; F)$*, e* $t \in \mathcal{L}(F; H)$*, então*

$$\|tPu\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \, \|P\|_{\mathcal{Q}} \, \|u\|^n .$$

Se as componentes $\mathcal{Q}(^nE; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, dizemos que $\mathcal{Q}$ é um *ideal de Banach (quasi-Banach)* de polinômios. De modo análogo se procede para $\mathcal{Q}_n$.

Observação 1.1.7 *Se $\mathcal{M}$ é um ideal (quasi-) normado de aplicações multilineares, a classe*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \left\{ P \in \mathcal{P}^n; \check{P} \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

com $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}$, é um ideal (quasi-) normado de polinômios, chamado de ideal de polinômios gerado pelo ideal $\mathcal{M}$. Se $\mathcal{M}$ é (quasi-) Banach, então $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é (quasi-) Banach (veja [13, pag 46]).

As noções de ideal *cud* (closed under differentiation) e *csm* (closed for scalar multiplication) foram introduzidas em [16] com a intenção de identificar ideais de polinômios que preservassem uma certa harmonia entre os diversos níveis de homogeneidade:

Definição 1.1.8 *Seja $\mathcal{Q}$ um ideal de polinômios. Dados $n \in \mathbb{N}, E$ e F,*

(i) $\mathcal{Q}$ *é* fechado sob a diferenciação *(cud) para n, E e F se $\hat{d}P\,(a) \in \mathcal{Q}\,(E; F)$ para todo $a \in E$ e $P \in \mathcal{Q}\,(^nE; F)$, onde $\hat{d}P$ é a diferencial do polinômio P no ponto a.*

(ii) $\mathcal{Q}$ *é* fechado para multiplicação por escalar *(csm) para n, E e F se $\varphi P \in \mathcal{Q}\,(^{n+1}E; F)$ para todo $\varphi \in E^*$ e $P \in \mathcal{Q}\,(^nE; F)$.*

As seguintes definições (ideal cud e ideal csm) são versões naturais da definição anterior para aplicações multilineares:

Definição 1.1.9 (Ideal cud) *Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é* fechado sob a diferenciação *(cud) se, para quaisquer $n \in \mathbb{N}, E_1, ..., E_n, F$ e $T \in \mathcal{M}\,(E_1, ..., E_n; F)$, os operadores lineares obtidos fixando $n-1$ vetores $a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_n$ pertencem a $\mathcal{M}\,(E_j; F)$, para todo $j = 1, ..., n$.*

Definição 1.1.10 (Ideal csm) *Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é* fechado para multiplicação por escalar *(csm) se, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, espaços de Banach $E_1, ..., E_n, E_{n+1}, F$, operadores multilineares $T \in \mathcal{M}\,(E_1, ..., E_n; F)$ e $\varphi \in E_{n+1}^*$ a aplicação φT dada por*

$$(\varphi T)\,(x_1, ..., x_{n+1}) = T(x_1, ..., x_n)\varphi(x_{n+1})$$

pertence a $\mathcal{M}\,(E_1, ..., E_n, E_{n+1}; F)$.

Na mesma linha das definições de ideais cud e csm, as noções de ideais compatíveis e sequências coerentes de ideais foram introduzidas por D. Carando, V. Dimant e S.

Muro [26], com a mesma preocupação de identificar ideais que tenham harmonia entre os diferentes níveis e ainda que tenham uma forte relação com um dado ideal de operadores (através da noção de compatibilidade):

Definição 1.1.11 (Ideal compatível de polinômios) *Seja $\mathcal{U}$ um ideal normado de operadores lineares. O ideal normado de polinômios n-homogêneos $\mathcal{U}_n$ é* compatível *com $\mathcal{U}$ se existirem constantes positivas A e B tais que, para quaisquer espaços de Banach E e F, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) Para cada $P \in \mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right)$ e $a \in E, P_{a^{n-1}}$ pertence a $\mathcal{U}\left(E;F\right)$ e

$$\left\|P_{a^{n-1}}\right\|_{\mathcal{U}} \leq A\left\|P\right\|_{\mathcal{U}_n}\left\|a\right\|^{n-1};$$

(ii) Para cada $u \in \mathcal{U}\left(E;F\right)$ e $\gamma \in E^*, \gamma^{n-1}u$ pertence a $\mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right)$ e

$$\left\|\gamma^{n-1}u\right\|_{\mathcal{U}_n} \leq B\left\|\gamma\right\|^{n-1}\left\|u\right\|_{\mathcal{U}}.$$

Definição 1.1.12 (Sequência coerente de ideais de polinômios) *Considere a sequência $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^K$ (onde K pode ser infinito) tal que, para cada n, $\mathcal{U}_n$ é um ideal de polinômios n-homogêneos. A sequência $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^K$ é uma sequência coerente de ideais de polinômios se existirem constantes positivas C e D tais que, para quaisquer espaços de Banach E e F, as seguintes condições são satisfeitas para $n = 1,...,K-1$:*

(i) Para cada $P \in \mathcal{U}_{n+1}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e $a \in E, P_a$ pertence a $\mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right)$ e

$$\left\|P_a\right\|_{\mathcal{U}_n} \leq C\left\|P\right\|_{\mathcal{U}_{n+1}}\left\|a\right\|;$$

(ii) Para cada $P \in \mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right)$ e $\gamma \in E^*, \gamma P$ pertence a $\mathcal{U}_{n+1}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e

$$\left\|\gamma P\right\|_{\mathcal{U}_{n+1}} \leq D\left\|\gamma\right\|\left\|P\right\|_{\mathcal{U}_n}.$$

Observação 1.1.13 *Como observado em [26], note que se $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^K$ é uma sequência coerente, então para cada $n = 1,...,K$, o ideal de polinômios $\mathcal{U}_n$ é compatível com $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$ com constantes $A \leq C^{n-1}$ e $B \leq D^{n-1}$.*

1.2 Operadores absolutamente somantes

O ideal dos operadores absolutamente somantes tem um papel importante na teoria de ideais de operadores e teoria dos espaços de Banach (veja [2, 35, 29, 68, 72]). O conceito de operadores absolutamente somantes é devido a A. Pietsch [61] e B. Mitiagin e A. Pełczyński [51], tendo como inspiração trabalhos de A. Grothendieck da década de 50.

Definição 1.2.1 *Sejam $0 < p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é* fortemente p-somável *se*

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço formado pelas sequências em E que são fortemente p-somáveis será denotado por $l_p(E)$. $\|\cdot\|_p$ define uma norma em $l_p(E)$ se $1 < p < \infty$ e uma quasi-norma se $0 < p < 1$. É fácil ver que $\left(l_p(E), \|\cdot\|_p\right)$ é completo.

Quando $E = \mathbb{K}$, escrevemos apenas l_p ao invés de $l_p(\mathbb{K})$.

Definição 1.2.2 *Sejam $0 < p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é* fracamente p-somável *se*

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço formado pelas sequências em E que são fracamente p-somáveis será denotado por $l_p^w(E)$. $\|\cdot\|_{w,p}$ define uma norma em $l_p^w(E)$ se $1 < p < \infty$ e uma quasi-norma se $0 < p < 1$. $\left(l_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p}\right)$ é completo (veja [35]).

Definição 1.2.3 *Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$. Um operador linear $u : E \to F$ é* absolutamente $(p;q)$-somante *se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$.*

O espaço vetorial dos operadores absolutamente $(p;q)$-somantes de E em F será denotado por $\mathcal{L}_{as(p;q)}(E;F)$; quando $p = q$ escreveremos $\mathcal{L}_{as,p}(E;F)$ ao invés de $\mathcal{L}_{as(p;p)}(E;F)$. Os teoremas abaixo têm um papel central na teoria (veja [35, 44]):

Teorema 1.2.4 (Grothendieck) *Todo operador linear contínuo $u : l_1 \to l_2$ é absolutamente somante.*

Teorema 1.2.5 (Lindenstrauss-Pełczyński) *Se E e F são espaços de Banach de dimensão infinita, E tem base de Schauder incondicional e $\mathcal{L}_{as,1}(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$, então $E = l_1$ e F é um espaço de Hilbert.*

Teorema 1.2.6 (Dominação de Pietsch) *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $u : E \to F$ *um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então* u *é absolutamente* p*-somante se, e somente se, existirem uma constante* C *e uma medida de probabilidade de Borel* μ *de* B_{E^*}*, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in E$.

Teorema 1.2.7 (Teorema da Composição de Pietsch) *Se* $p, q \in (1, \infty)$ *e* $r \in [1, \infty)$ *são tais que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$*, então*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}_{as,p} \subset \mathcal{L}_{as,r}.$$

1.3 Aplicações multilineares absolutamente somantes

A próxima definição é devida a R. Alencar e M.C. Matos [3], mas aparentemente já havia sido esboçada por A. Pietsch anos antes.

Definição 1.3.1 (Alencar-Matos) *Sejam* $0 < p, q_1, ..., q_n \leq \infty$*, com*

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}. \tag{1.1}$$

Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é* absolutamente $(p; q_1, ..., q_n)$-somante *se*

$$\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right) \right)_{j=1}^{\infty} \in l_p(F)$$

sempre que $\left(x_j^{(i)} \right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w(E_i)$ *para todo* $i = 1, ..., n$.

Denotaremos por $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ (ou $\mathcal{L}^n_{as(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$) o espaço vetorial formado por tais aplicações. Quando $q_1 = \cdots = q_n = q$ escreveremos às vezes $\mathcal{L}_{as(p;q)}(E_1, ..., E_n; F)$ para denotar $\mathcal{L}_{as(p;q,...,q)}(E_1, ..., E_n; F)$ e, se $q_1 = \cdots = q_n = p$, escreveremos algumas vezes apenas $\mathcal{L}_{as,p}(E_1, ..., E_n; F)$ ao invés de $\mathcal{L}_{as(p;p)}(E_1, ..., E_n; F)$.

A seguinte caracterização por desigualdades e o Teorema de Inclusão são bastante úteis (para detalhes veja [46] e [48]) :

Teorema 1.3.2 *Se* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$, *então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) T *é absolutamente* $(p; q_1, ..., q_n)$*-somante;*

(ii) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q_i} \tag{1.2}$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w (E_i)$, $i = 1, ..., n;$

(iii) *Existe uma constante* $D > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left\| T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq D \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m} \right\|_{w,q_i} \tag{1.3}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m.$

O ínfimo dos C *tais que a desigualdade (1.2) é válida (ou o ínfimo dos* D *tais que a desigualdade (1.3) é válida) define uma norma (p-norma se* $0 < p < 1$*) em* $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ *e será denotada por* $\|\cdot\|_{as(p;q_1,...,q_n)}$.

Se $\frac{1}{p} > \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}$ a única aplicação absolutamente $(p; q_1, ..., q_n)$-somante é a aplicação nula. Apesar desse fato ser conhecido por especialistas no assunto, não encontramos sua demonstração na literatura e, por isso, faremos os detalhes. Seja $T \in \mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ não nula. Note que

$$p < \frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}.$$

De fato,

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}{q_1 \cdots q_n}.$$

Tome $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{\frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}} - l_p$ e $x_i \in E_i, i = 1, ..., n$ tais que $T(x_1, ..., x_n) \neq 0$. Como T é absolutamente $(p; q_1, ..., q_n)$-somante e $\left(\lambda_j^{\left(\frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}\right)\frac{1}{q_i}} x_i\right)_{j=1}^{\infty} \in$

$l_{q_i}^{w}(E_i), i = 1, ..., n$, temos:

$$\left(T \left(\lambda_j^{\left(\frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}\right)\frac{1}{q_1}} x_1, ..., \lambda_j^{\left(\frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}\right)\frac{1}{q_n}} x_n \right) \right)_{j=1}^{\infty} \in l_p(F).$$

Usando a multilinearidade de T, obtemos

$$\begin{aligned} & T \left(\lambda_j^{\left(\frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}\right)\frac{1}{q_1}} x_1, ..., \lambda_j^{\left(\frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}\right)\frac{1}{q_n}} x_n \right) \\ & = \lambda_j^{\left(\frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}\right)\left(\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}\right)} T(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Segue que

$$\lambda_j = \lambda_j^{\left(\frac{q_1 \cdots q_n}{q_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 \cdots q_{n-1}}\right)\left(\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}\right)} \in l_p.$$

contradizendo o fato de que $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \notin l_p$.

Teorema 1.3.3 (Teorema de inclusão) *Sejam* $1 \leq p \leq \tilde{p} < \infty, 1 \leq q_i \leq \tilde{q}_i < \infty$ *tais que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} \right) - \frac{1}{p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tilde{q}_i} \right) - \frac{1}{\tilde{p}}.$$

Então

$$\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n)}^{n}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(\tilde{p};\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_n)}^{n}(E_1, ..., E_n; F)$$

e

$$\|\cdot\|_{as(\tilde{p};\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_n)} \leq \|\cdot\|_{as(p;q_1,...,q_n)}.$$

No caso particular $n = 1$, temos a definição clássica de operadores lineares absolutamente somantes. Outro resultado, bastante conhecido da teoria multilinear, é o Teorema de Defant-Voigt (veja [3]):

Teorema 1.3.4 (Teorema de Defant-Voigt) *Para quaisquer espaços de Banach* $E_1, ..., E_n$, *os espaços* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K})$ *e* $\mathcal{L}_{as(1;1,...,1)}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K})$ *são isometricamente isomorfos.*

O ideal das aplicações absolutamente somantes tem algumas poucas propriedades semelhantes às propriedades do ideal de operadores original mas, sob certo sentido, se afasta das características do ideal dos operadores lineares absolutamente somantes. A tabela abaixo ilustra algumas propriedades satisfeitas e não satisfeitas pelo multi-ideal:

PROPRIEDADES	
Teorema de Grothendieck	Sim
Teorema de Lindenstrauss–Pełczyński	Não
Teorema de Inclusão ($p \leq q \Rightarrow \mathcal{I}_p \subset \mathcal{I}_q$)	Não
Ideal cud	Não
Ideal csm	Sim

1.4 Resultados de inclusão: uma abordagem via interpolação complexa

Começamos a presente seção relembrando os conceitos de tipo e cotipo de espaços de Banach.

Um espaço de Banach E tem *cotipo* $s \in [2, \infty)$ se existir uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

para qualquer escolha de um número finito de vetores $x_1, ..., x_m$ em E. As funções r_j acima são as funções de Rademacher (veja apêndice A). Quando $q = \infty$, em vez de $\left(\sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^s\right)^{\frac{1}{s}}$ escrevemos $\max_{j \leq m} \|x_j\|$ na desigualdade acima. Um espaço de Banach E tem *tipo* $s \in [1, 2]$ se existir uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

para qualquer escolha de um número finito de vetores $x_1, ..., x_m$ em E.

Conexões entre cotipo e aplicações multilineares absolutamente somantes começaram a ser investigadas em [11] e, posteriormente, vários autores se interessaram pelo tema (por exemplo, [15, 24, 32, 50, 55, 56, 64, 65] e, para um panorama geral citamos [57]).

O próximo resultado é bastante simples e pode ser encontrado em [35]:

Proposição 1.4.1 *Se E tem cotipo finito s, então $id_E : E \to E$ é absolutamente $(s,1)$-somante.*

É interessante mencionar que a recíproca desse resultado é válida se, e somente se, $s > 2$. Esse resultado, devido a M. Talagrand (veja [71]), ao contrário da Proposição 1.4.1, é bastante delicado.

O conceito de cotipo está intimamente relacionado com teoremas chamados de "resultados de coincidência". Por exemplo, da Proposição 1.4.1 pode-se concluir que

$$\mathcal{L}\left(E;E\right) = \mathcal{L}_{as(s,1)}\left(E;E\right) \tag{1.4}$$

quando E tem cotipo s. Igualdades como (1.4) são chamadas de "resultados de coincidência".

A seguir apresentamos outros exemplos de resultados de coincidência.

O seguinte resultado é devido a Dubinski, Pełczyński e Rosenthal [38]:

Teorema 1.4.2 *Seja F um espaço de Banach com cotipo 2 e K um espaço de Hausdorff compacto. Então*

$$\mathcal{L}_{as,2}\left(C\left(K\right);F\right) = \mathcal{L}(C\left(K\right);F).$$

O resultado de coincidência abaixo é essencialmente devido a B. Maurey, e aparece em [35]:

Teorema 1.4.3 *Seja F um espaço de Banach com cotipo q, com $2 < q < \infty$ e K um espaço de Hausdorff compacto. Então*

$$\mathcal{L}_{as(q,2)}\left(C\left(K\right);F\right) = \mathcal{L}(C\left(K\right);F).$$

Resultados do tipo $\mathcal{L}_{as,(p_1;q_1)}\left(E;F\right) = \mathcal{L}_{as,(p_2;q_2)}\left(E;F\right)$ também são chamados de resultados de coincidência. Ainda em [35, Corollary 11.16] podemos encontrar outro resultado devido a B. Maurey:

Teorema 1.4.4 *Sejam E e F espaços de Banach.*

(a) Se E tem cotipo 2, então

$$\mathcal{L}_{as,2}(E;F) = \mathcal{L}_{as,1}(E;F).$$

(b) Se E tem cotipo $2 < q < \infty$, então

$$\mathcal{L}_{as,r}(E;F) = \mathcal{L}_{as,1}(E;F)$$

para todo $1 < r < q^*$.

(c) Se E e F têm cotipo 2, então

$$\mathcal{L}_{as,r}(E;F) = \mathcal{L}_{as,1}(E;F)$$

para todo $1 < r < \infty$.

O seguinte resultado aparece em [43, Theorem 3 e Remark 2] e [65, Corollary 4.6]. É interessante perceber que as inclusões são no sentido contrário ao que ocorre no Teorema de Inclusão para o caso linear $n = 1$:

Teorema 1.4.5 (Teorema de Inclusão) *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços de Banach com cotipo s e $n \geq 2$ um inteiro positivo.*

(i) Se $s = 2$, então

$$\mathcal{L}_{as,q}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,p}(E_1, ..., E_n; F) \tag{1.5}$$

sempre que $1 \leq p \leq q \leq 2$;

(ii) Se $s > 2$, então

$$\mathcal{L}_{as,q}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,p}(E_1, ..., E_n; F) \tag{1.6}$$

sempre que $1 \leq p \leq q < s^*$.

A seguinte proposição (resultado do tipo sanduíche) pode ser encontrada em [15]:

Proposição 1.4.6 *Sejam $1 \leq p_1, ..., p_n, p, q_1, ..., q_n, q \leq \infty$ tais que $1/t \leq \sum_{j=1}^{n} 1/t_j$ para $t \in \{p, q\}$. Seja $0 < \theta < 1$ e defina*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q} \text{ e } \frac{1}{r_j} = \frac{1-\theta}{p_j} + \frac{\theta}{q_j}$$

para todo $j = 1, ..., n$. *Se*

$$T \in \mathcal{L}_{as(p;p_1,...,p_n)}(E_1, ..., E_n; F) \cap \mathcal{L}_{as(q;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$$

então

$$T \in \mathcal{L}_{as(r;r_1,...,r_n)}(E_1, ..., E_n; F),$$

onde, para cada $j = 1, ..., n$, *uma das seguintes condições é satisfeita:*

(*i*) E_j *é um* $\mathcal{L}_\infty$*-espaço;*

(*ii*) E_j *tem cotipo* 2 *e* $1 \leq p_j, q_j \leq 2$;

(*iii*) E_j *tem cotipo* $s_j > 2$ *finito e* $1 \leq p_j, q_j < s_j^*$;

(*iv*) $p_j = q_j = r_j$.

O próximo resultado (que enunciamos na forma de lema), será útil adiante e aparece, sem demonstração, em [56, Theorem 3.1]. Para tornar o texto mais autosuficiente, apresentaremos sua demonstração:

Lema 1.4.7 *Seja* $s > 0$. *Suponha que* E_j *tenha cotipo* $s_j, j = 1, ..., n$, *e que pelo menos um dos* s_j *seja finito. Se*

$$\frac{1}{s} \leq \frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_n},$$

então

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(s;b_1,...,b_n)}(E_1, ..., E_n; F)$$

para

$$b_j = 1 \text{ se } s_j < \infty \text{ e } b_j = \infty \text{ se } s_j = \infty.$$

Demonstração: Sejam $j_1, ..., j_k \in \{1, ..., n\}, k \leq n$ tais que $s_{j_1}, ..., s_{j_k}$ são finitos e $s_j = \infty$ se $j \neq j_1, ..., j_k$.

Se $\left(x_i^{(j_l)}\right)_{i=1}^{\infty} \in l_1^w(E_{j_l})$ e $(x_i^{(j)})_{i=1}^{\infty} \in l_\infty(E_j), j \neq j_l, l = 1, ..., k$, usando a Desigualdade de Hölder Generalizada, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|T(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)})\right\|^s\right)^{\frac{1}{s}} &\leq \|T\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|x_i^{(1)}\right\|\cdots\left\|x_i^{(n)}\right\|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq C\|T\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(j_1)}\right\|^{s_{j_1}}\right)^{1/s_{j_1}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|x_i^{(j_k)}\right\|\right)^{s_{j_k}}\right)^{1/s_{j_k}}\end{aligned}$$

onde C é tal que

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq j_1,\ldots,j_n}}^{n} \left\| x_i^{(j)} \right\| \leq C$$

para todo i. Como E_j tem cotipo s_j, para $j_1, ..., j_k$, temos, pela Proposição 1.4.1,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| T(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}) \right\|^s \right)^{\frac{1}{s}} &\leq C \left\| T \right\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| x_i^{(j_1)} \right\|^{s_{j_1}} \right)^{1/s_{j_1}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\| x_i^{(j_k)} \right\| \right)^{s_{j_k}} \right)^{1/s_{j_k}} \\ &= C \left\| T \right\| \prod_{t=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| id_{E_{j_t}} \left(x_i^{(j_t)} \right) \right\|^{s_{j_t}} \right)^{1/s_{j_t}} < \infty\end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

A partir dos resultados anteriores podemos demonstrar o primeiro resultado de nossa tese. Embora tenha um enunciado relativamente complicado, o Corolário 1.4.9 e o Exemplo 1.4.10 ilustram sua utilidade:

Proposição 1.4.8 *Sejam k, n números naturais, $n \geq 2$ e $E_1, ..., E_n, F$ espaços de Banach arbitrários. Se E_j tem cotipo $s_j \geq 2$ finito para $j = 1, ..., k$, então*

$$\mathcal{L}_{as(p;p_1,\ldots,p_k,q,\ldots,q)} (E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(r;r_1,\ldots,r_k,q,\ldots,q)} (E_1, ..., E_n; F)$$

para quaisquer $(q, \theta) \in [1, \infty) \times (0, 1)$,

$$\begin{aligned} &1 \leq p_j \leq 2 \text{ (quando } s_j = 2\text{)}, \\ &1 \leq p_j < s_j^* \text{ (quando } s_j > 2\text{)} \end{aligned}$$

e $s \in (0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &\leq \frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_k}, \\ \frac{1}{r} &= \frac{1-\theta}{s} + \frac{\theta}{p}, \\ \frac{1}{r_j} &= \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p_j}, \end{aligned}$$

para $j = 1, ..., k$.

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}_{as(p;p_1,...,p_k,q,...,q)}(E_1,...,E_n;F)$. Pelo lema anterior,

$$\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{as(s;1,...,1,\infty,...,\infty)}(E_1,...,E_n;F),$$

onde 1 é repetido k vezes. Logo, *a fortiori*,

$$\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F) = \mathcal{L}_{as(s;1,...,1,q,...,q)}(E_1,...,E_n;F).$$

Assim,

$$T \in \mathcal{L}_{as(s;1,...,1,q,...,q)}(E_1,...,E_n;F) \cap \mathcal{L}_{as(p;p_1,...,p_k,q,...,q)}(E_1,...,E_n;F).$$

Pela Proposição 1.4.6 temos

$$T \in \mathcal{L}_{as(r;r_1,...,r_k,q,...,q)}(E_1,...,E_n;F).$$

■

Corolário 1.4.9 *Sejam k, n números naturais, $n \geq k \geq 2, E_1,...,E_n, F$ espaços de Banach arbitrários e $q \in [1,\infty)$. Se E_j tem cotipo $s_j \geq 2$ finito, $j = 1,...,k$ e $1 \leq 1/s_1 + \cdots + 1/s_k$, então*

$$\mathcal{L}_{as(p;p_1,...,p_k,q,...,q)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{as(r;r_1,...,r_k,q,...,q)}(E_1,...,E_n;F), \tag{1.7}$$

onde $p_j = p$ e $r_j = r$ para $j = 1,...,k$, para todo r tal que

$$1 \leq r < p < \min s_j^* \text{ se } s_j \neq 2 \text{ para algum } j = 1,...,k,$$
$$1 \leq r < p \leq 2 \text{ se } s_j = 2 \text{ para todo } j = 1,...,k.$$

Em particular,

$$\mathcal{L}_{as(p;p)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{as(r;r)}(E_1,...,E_n;F)$$

para todo r tal que

$$1 \leq r < p < \min s_j^* \text{ se } s_j \neq 2 \text{ para algum } j = 1,...,k,$$
$$1 \leq r < p \leq 2 \text{ se } s_j = 2 \text{ para todo } j = 1,...,k.$$

Demonstração: Como $1 \leq 1/s_1 + \cdots + 1/s_k$, podemos usar $s = 1$ na proposição anterior. Como $p = p_i$ e $r = r_i$ para todo $i = 1, ..., k$ e $s = 1$, obtemos (1.7). De fato, para qualquer $1 \leq r < p$ existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p}$$

e como $p = p_i$ e $r = r_i$, o mesmo $\theta \in (0,1)$ satisfaz

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p_i}.$$

Em particular, escolhendo $q = p$, como $r < p$ temos

$$\mathcal{L}_{as(p;p)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(r;r,...,r,p,...,p)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(r;r)}(E_1, ..., E_n; F).$$

$\blacksquare$

Exemplo 1.4.10 *Sejam $E_4, ..., E_n, F$ espaços de Banach arbitrários. Então*

$$\mathcal{L}_{as(p;p,p,p,q,...,q)}(l_3, l_3, l_3, E_4, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(r;r,r,r,q,...,q)}(l_3, l_3, l_3, E_4, ..., E_n; F)$$

para todo $q \in [1, \infty)$ e $1 \leq r < p < 3^*$. Em particular,

$$\mathcal{L}_{as,p}(l_3, l_3, l_3, E_4, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,r}(l_3, l_3, l_3, E_4, ..., E_n; F)$$

para todo $1 \leq r < p < 3^*$.

O exemplo acima ilustra como a Proposição 1.4.8 leva a resultados melhores que o Teorema 1.4.5 pois, neste último teorema, todos os espaços envolvidos no domínio devem ter um cotipo adequado, enquanto na Proposição 1.4.8 isso não é necessário. Na próxima seção abordaremos um problema relacionado aos resultados anteriores.

Observação 1.4.11 *Os resultados da presente seção foram aceitos para publicação na revista Cubo:*

- *A. Thiago Bernardino, Remarks on cotype and absolutely summing multilinear operators, a aparecer na revista Cubo.*

1.5 Resultados de inclusão: uma nova abordagem

A partir dos resultados da seção anterior, o seguinte problema parece ser natural:

Problema 1.5.1 *Dados $1 \leq p \leq q < \infty$ e um inteiro positivo $n \geq 2$, qual seria a melhor constante $\alpha := \alpha_{p,q,n} > 0$ tal que, sob as mesmas hipóteses (1.5) e (1.6), tenhamos*

$$\mathcal{L}^n_{as(q;q,...,q)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{as(\alpha;p,...,p)}(E_1, ..., E_n; F)? \tag{1.8}$$

Nesta direção, estendemos os Teoremas 1.4.5 e a Proposição 1.4.8, mostrando que

$$\alpha \leq \frac{qp}{n\,(q-p)+p}$$

e, em certo sentido, esta constante é ótima pois para este valor de α obtemos uma igualdade em (1.8).

Teorema 1.5.2 *Sejam $k \leq n$ e $n \geq 2$. Se E_i tem cotipo $s_i \geq 2, i = 1, ..., k$ e*

$$1 \leq p \leq q < \min_{1 \leq i \leq k} s_i^* \text{ se } s_i > 2 \text{ para algum } i = 1, ..., k$$

ou

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ se } s_i = 2 \text{ para todo } i = 1, ..., k,$$

então

$$\mathcal{L}_{as(s;q,...,q,t,...,t)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(\frac{sqp}{sk(q-p)+qp};p,...,p,t,...,t)}(E_1, ..., E_n; F),$$

para quaisquer espaços de Banach $E_{k+1}, ..., E_n, F$ e $s, t \geq 1$ (aqui q e p são repetidos k vezes). Em particular,

$$\mathcal{L}_{as(s;q,...,q)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(\frac{sqp}{sk(q-p)+qp};p,...,p)}(E_1, ..., E_n; F).$$

Demonstração: Como E_i tem cotipo $s_i \geq 2, i = 1, ..., k$, então, de [8] (o caso $p = 1$ pode, também, ser encontrado em [5, Proposition 6]) temos

$$l_p^w(E_i) = l_{qp/(q-p)} l_q^w(E_i)$$

para todo $i = 1, ..., k$ com

$$1 \leq p \leq q < \min_{1\leq i\leq k} s_i^* \text{ se } s_i > 2 \text{ para algum } i = 1, ..., k$$

ou

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ se } s_i = 2 \text{ para todo } i = 1, ..., k.$$

Sejam $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E_i), i = 1, ..., k$ e $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in l_t^w(E_i)$ para $i = k+1, ..., n$. Assim

$$x_j^{(i)} = \alpha_j^{(i)} y_j^{(i)},$$

com $\left(\alpha_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{qp/(q-p)}$ e $\left(y_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w\left(E_i\right)$, para todo j e $i = 1, ..., k$.

Se $T \in \mathcal{L}_{as(s;q,...,q,t,...,t)}(E_1, ..., E_n; F)$, como

$$\frac{1}{s} + \frac{k\left(q-p\right)}{qp} = \frac{sk\left(q-p\right)+qp}{sqp},$$

então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\|^{\frac{sqp}{sk(q-p)+qp}}\right)^{\frac{sk(q-p)+qp}{sqp}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left|\alpha_j^{(1)} \cdots \alpha_j^{(k)}\right| \left\|T\left(y_j^{(1)}, ..., y_j^{(k)}, x_j^{(k+1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\|\right)^{\frac{sqp}{sk(q-p)+qp}}\right)^{\frac{sk(q-p)+qp}{sqp}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T\left(y_j^{(1)}, ..., y_j^{(k)}, x_j^{(k+1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\|^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\alpha_j^{(1)} \cdots \alpha_j^{(k)}\right|^{\frac{qp}{k(q-p)}}\right)^{k\left(\frac{q-p}{qp}\right)} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T\left(y_j^{(1)}, ..., y_j^{(k)}, x_j^{(k+1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\|^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\alpha_j^{(i)}\right|^{\frac{qp}{(q-p)}}\right)^{\frac{q-p}{qp}} < \infty
\end{aligned}$$

e concluímos que

$$\mathcal{L}_{as(s;q,...,q,t,...,t)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(\frac{sqp}{sk(q-p)+qp};p,...,p,t,...,t)}(E_1, ..., E_n; F).$$

A outra inclusão é consequência do Teorema de inclusão para operadores multilineares absolutamente somantes (Teorema 1.3.3). ■

Um resultado similar, *mutatis mutandis*, é válido para $E_{j_1}, ..., E_{j_k}, \{j_1, ..., j_k\} \subset \{1, ..., n\}$ (ao invés de, necessariamente, $E_1, ..., E_k$) com cotipo $s_{j_i} \geq 2, i = 1, ..., k$.

Observação 1.5.3 *Note que, para quaisquer $q, p \geq 1$ com $q \geq p$ temos*

$$\frac{sqp}{sk\,(q-p)+qp} \leq s$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, mostrando que o Teorema 1.5.2 melhora o Teorema 1.4.5.

O seguinte corolário imediato é uma generalização ótima do Teorema 1.4.5 (no sentido de termos uma igualdade ao invés de uma inclusão):

Corolário 1.5.4 *Seja $k \leq n$, com $n \geq 2$. Se E_i tem cotipo $s_i \geq 2, i = 1, ..., k$ e*

$$1 \leq p \leq q < \min_{1 \leq i \leq k} s_i^* \text{ se } s_i > 2 \text{ para algum } i = 1, ..., k$$

ou

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ se } s_i = 2 \text{ para todo } i = 1, ..., k,$$

então

$$\mathcal{L}_{as(q;q,...,q,t,...,t)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(\frac{qp}{k(q-p)+p};p,...,p,t,...,t)}(E_1, ..., E_n; F),$$

para quaisquer espaços de Banach $E_{k+1}, ..., E_n, F$ e todo $t \geq 1$ (aqui q e p são repetidos k vezes). Em particular,

$$\mathcal{L}_{as(q;q,...,q)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(\frac{qp}{k(q-p)+p};p,...,p)}(E_1, ..., E_n; F)$$

e

$$\alpha \leq \frac{qp}{k\,(q-p)+p}.$$

Observação 1.5.5 *Como*

$$\frac{qp}{k\,(q-p)+p} \leq p,$$

é claro que

$$\mathcal{L}_{as,q}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,p}(E_1, ..., E_n; F)$$

nas hipóteses do corolário anterior.

Observação 1.5.6 *O resultado acima foi independentemente provado em [8]. Um caso particular do resultado acima também foi recentemente provado, de forma independente, em [67].*

1.6 Um novo teorema do tipo Grothendieck

A seguinte definição foi introduzida por M.C. Matos [49] e D. Pérez-García [58], de forma independente:

Definição 1.6.1 *Sejam* $0 < p, q_1, ..., q_n \leq \infty$, *com* $q_i \leq p$ *para todo* $i = 1, ..., n$. *Uma aplicação* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é* múltiplo $(p; q_1, ..., q_n)$-somante *se existir* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\| T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(i)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q_i} \tag{1.9}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_j^{(i)} \in E_i, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m.$

Denotaremos por $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ (ou $\mathcal{L}^n_{mas(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$) o espaço vetorial destas aplicações; quando $q_1 = \cdots = q_n = q$ escreveremos $\mathcal{L}_{mas(p;q)}(E_1, ..., E_n; F)$ ao invés de $\mathcal{L}_{mas(p;q,...,q)}(E_1, ..., E_n; F)$ e, se $p = q$, às vezes escrevemos apenas $\mathcal{L}_{mas,p}(E_1, ..., E_n; F)$. O ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade (1.9) define uma norma em $\mathcal{L}^n_{mas(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ que será denotada por $\|\cdot\|_{mas(p;q_1,...,q_n)}$. Quando $n = 1$ recaímos na teoria clássica de operadores lineares absolutamente somantes.

Para detalhes dessa teoria sugerimos [10, 49] e, para recentes desenvolvimentos e aplicações relacionadas à teoria multilinear e polinomial, sugerimos [4, 6, 9, 30, 31, 33, 45, 48, 57] e suas referências.

O Teorema de Grothendieck para operadores lineares absolutamente somantes (Teorema 1.2.4) afirma que todo operador linear contínuo de l_1 em l_2 é absolutamente $(1; 1)$-somante (e portanto $(p; p)$-somante para todo $p \geq 1$). No caso multilinear, D. Pérez-García, na sua tese de doutorado [58] (veja também [10] e [19] para demonstrações diferentes), demonstrou que todo operador n-linear de $l_1 \times \cdots \times l_1$ em l_2 é múltiplo $(1; 1, ..., 1)$-somante (e também, múltiplo $(p; p, ..., p)$-somante para todo $1 \leq p \leq 2$). Este resultado pode ser considerado como uma versão multilinear do Teorema de Grothendieck.

Para $1 \leq q_1, ..., q_n \leq p < \infty$, a inclusão

$$\mathcal{L}^n_{mas(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{as(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$$

é óbvia. Assim, o seguinte resultado de coincidência é consequência imediata da versão multilinear do Teorema de Grothendieck:

Proposição 1.6.2 *Para todo inteiro positivo n,*

$$\mathcal{L}^n_{as(1;1,...,1)}(l_1,...,l_1;l_2) = \mathcal{L}(l_1,...,l_1;l_2).$$

No entanto, como l_1 tem cotipo 2, é fácil demonstrar que o resultado acima pode ser melhorado. De fato, temos o seguinte melhoramento (veja [11, 56]):

Proposição 1.6.3 *Para todo inteiro positivo $n \geq 2$,*

$$\mathcal{L}^n_{as\left(\frac{2}{n};1,...,1\right)}(l_1,...,l_1;l_2) = \mathcal{L}(l_1,...,l_1;l_2). \tag{1.10}$$

O seguinte problema parece bastante natural:

- Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, qual a melhor constante $g_n > 0$ tal que

$$\mathcal{L}^n_{as(g_n;1,...,1)}(l_1,...,l_1;l_2) = \mathcal{L}(l_1,...,l_1;l_2)?$$

Para $n = 1$, em (1.10), obtemos

$$\mathcal{L}_{as(2;1)}(l_1;l_2) = \mathcal{L}(l_1;l_2),$$

que não é surpreendente, devido ao Teorema de Grothendieck. Então, em certo sentido, parece razoável que a estimativa $g_n \leq \frac{2}{n}$ para $n \geq 2$ (obtida em (1.10)) provavelmente não seja ótima; esperamos uma estimativa para g_n que, no caso $n = 1$, recupere o Teorema de Grothendieck. Veremos adiante que realmente isso é possível.

Do Corolário 1.5.4 sabemos que

$$\mathcal{L}^n_{as(2;2,...,2)}(l_1,...,l_1;l_2) = \mathcal{L}^n_{as(\frac{2}{n+1};1,...,1)}(l_1,...,l_1;l_2)$$

para todo $n \geq 2$. Mas, como

$$\mathcal{L}(l_1,...,l_1;l_2) = \mathcal{L}^n_{mas(2;2,...,2)}(l_1,...,l_1;l_2) \subset \mathcal{L}^n_{as(2;2,...,2)}(l_1,...,l_1;l_2),$$

facilmente temos

$$\mathcal{L}^n_{as(\frac{2}{n+1};1,...,1)}(l_1,...,l_1;l_2) = \mathcal{L}(l_1,...,l_1;l_2)$$

para todo $n \geq 2$. Então obtemos uma melhor estimativa para g_n :

Teorema 1.6.4 *Se $n \geq 2$, então*

$$g_n \leq \frac{2}{n+1}.$$

Note que, nesse caso, quando $n = 1$, temos $g_n \leq 1$ e, obviamente a constante 1 é uma estimativa ótima. Assim, conjecturamos que $\frac{2}{n+1}$ seja também a estimativa ótima para g_n, para todo $n \geq 2$.

Observação 1.6.5 *O Teorema 1.6.4 foi aceito para publicação na revista Quaestiones Mathematicae:*

- A.T. Bernardino, On cotype and a Grothendieck-type theorem for absolutely summing multilinear operators, a aparecer em Quaest. Math.

Capítulo 2

Versões multilineares do Teorema da Composição de Pietsch

Além dos operadores multilineares absolutamente somantes, estudados no capítulo anterior, o ideal dos operadores lineares absolutamente p-somantes tem várias generalizações para multi-ideais: operadores multilineares p-dominados ([11, 28, 47, 59]), operadores multilineares fortemente p-somantes ([36]), operadores multilineares fortemente múltiplo p-somantes ([18]), operadores multilineares múltiplo p-somantes ([49, 60]), operadores multilineares absolutamente p-somantes pelo método da linearização ([12]), operadores multilineares p-semi-integrais ([25]) e a composição de ideais gerada pelo ideal dos operadores lineares absolutamente p-somantes ([20]), dentre outras.

Cada uma dessas classes tem suas próprias propriedades e compartilha parte da essência do conceito dos operadores lineares absolutamente p-somantes. Uma das características interessantes é que nenhuma destas classes compartilha todas as propriedades que poderiam ser esperadas do ideal dos operadores absolutamente p-somantes. Para um levantamento recente sobre esse assunto consulte [57].

2.1 Aplicações multilineares p-dominadas e o método da composição

Sejam $1 \leq q_1, ..., q_n < \infty$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}.$$

Uma aplicação n-linear $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ ($T \in \mathcal{L}^n_{d,(q;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$) é dita $(q_1, ..., q_n)$-dominada se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left\|T(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)})\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{i=1}^{n} \sup_{\varphi \in B_{E_k^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi(x_j^{(i)})\right|^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}}, \tag{2.1}$$

qualquer que seja a escolha do inteiro positivo m e $x_j^{(i)} \in E_i$, $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$.

Essa definição é devida a Pietsch para o caso em que F é o corpo dos escalares. Em seguida, a situação mais geral foi explorada em [3, 69]. É bem conhecido que $T \in \mathcal{L}^n_{d,(q;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$ se, e somente se, $\left(T(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)})\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(F)$ sempre que $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_i}^w(E_i), i = 1, ..., n$. O termo q-dominada, cunhado por M.C. Matos, é motivado por um teorema de dominação do tipo Pietsch (veja [21, 23, 41, 46, 58]):

Teorema 2.1.1 (Teorema da Dominação de Pietsch) *Uma aplicação multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é $(q_1, ..., q_n)$-dominada se, e somente se, existem medidas regulares de probabilidade μ_i em $B_{E_i^*}$, $i = 1, ..., n$, e uma constante $C > 0$ tais que*

$$\left\|T(x^{(1)}, ..., x^{(n)})\right\| \leq C \left(\int_{B_{E_1^*}} \left|\varphi(x^{(1)})\right|^{q_1} d\mu_1\right)^{\frac{1}{q_1}} \cdots \left(\int_{B_{E_n^*}} \left|\varphi(x^{(n)})\right|^{q_n} d\mu_n\right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Exploraremos o caso particular em que $q_1 = \cdots = q_n = p \geq 1$ e $q = \frac{p}{n}$ e, nesse caso, usaremos a notação $\mathcal{L}^n_{d,p}$. O ínfimo dos C que satisfazem a desigualdade acima é uma norma para o espaço das aplicações p-dominadas (p-norma se $p < n$) e, com essa norma (quasi-norma), $\mathcal{L}^n_{d,p}$ é um ideal de Banach (quasi-Banach se $p < n$).

O seguinte resultado de inclusão é imediato do teorema anterior:

Corolário 2.1.2 *Se $1 \leq p \leq q < \infty$, então $\mathcal{L}^n_{d,p} \subset \mathcal{L}^n_{d,q}$ para todo n.*

Em geral, há poucos resultados de coincidência para o ideal $\mathcal{L}^n_{d,p}$. Um desses poucos resultados é a seguinte consequência do Teorema de Grothendieck (veja [11, 57]):

Teorema 2.1.3 $\mathcal{L}_{d,2}({}^2c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}({}^2c_0; \mathbb{K})$.

O resultado abaixo, demonstrado em [42], reforça a escassez de resultados de coincidência para as aplicações p-dominadas:

Teorema 2.1.4 (Jarchow, Palazuelos, Pérez-García e Villanueva, 2007) *Para todo $n \geq 3, p \in [1, \infty)$ e quaisquer espaços de Banach de dimensão infinita E, existe $T \in \mathcal{L}(^nE; \mathbb{K})$ que não é p-dominada.*

No caso polinomial, uma versão similar a esse resultado aparece em [17, 22].

É interessante mencionar que as aplicações multilineares p-dominadas coincidem com ideal gerado pelo método da fatoração para o ideal de operadores absolutamente p-somantes:

Teorema 2.1.5 (Pietsch) *$T \in \mathcal{L}_{d,p}^n(E_1, ..., E_n; F)$ se, e somente se, existem G_j e $u_j \in \mathcal{L}_{as,p}(E_j; G_j)$, $j = 1, ..., n$, e $B \in \mathcal{L}^n(G_1, ..., G_n; F)$ tais que*

$$T = B\left(u_1, ..., u_n\right).$$

Um método parecido com o método da fatoração é o método da composição. Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, considere a classe

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^n := \{u \circ A : A \in \mathcal{L}^n \text{ e } u \in \mathcal{I}\},$$

onde $\mathcal{L}^n$ denota a classe de todas as aplicações n-lineares contínuas entre espaços de Banach. Assim, para espaços de Banach $E_1, ..., E_n, F, G$, um operador n-linear $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ pertence a $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^n(E_1, ..., E_n; F)$ se, e somente se, existem espaços de Banach G, e aplicações $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; G)$ e $v \in \mathcal{I}(G; F)$ de modo que

$$T(x_1, ..., x_n) = v\left(A(x_1, ..., x_n)\right).$$

É conhecido que $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^n$ é um ideal de aplicações n-lineares (para detalhes veja [20]). O caso $\mathcal{I} = \mathcal{L}_{as,1}$ foi investigado em [20], onde foi demonstrado que esta classe tem várias características importantes do ideal linear, tal como um teorema de Dvoretzky-Rogers, um teorema do tipo Grothendieck e um teorema do tipo Lindenstrauss-Pełczyński.

2.2 O teorema da composição de Pietsch: uma versão multilinear

Um resultado importante da teoria linear dos operadores absolutamente somantes é o Teorema da composição de Pietsch (já mencionado anteriormente):

Teorema 2.2.1 (Pietsch) *Se $p, q \in (1, \infty)$ e $r \in [1, \infty)$ são tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, então*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}_{as,p} \subset \mathcal{L}_{as,r}. \tag{2.2}$$

Recentemente, D. Popa [66] investigou este resultado no contexto multilinear. A primeira questão enfrentada em [66] foi escolher qual seria a classe natural de aplicações n-lineares absolutamente p-somantes $\mathcal{I}_p^n$ para a qual um resultado análogo valeria. Mais precisamente, o seguinte problema foi a motivação de [66] (veja [66, Seção 1]):

Problema 2.2.2 *Se $p, q \in (1, \infty)$ e $r \in [1, \infty)$ são tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, será que a inclusão*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{I}_p^n \subset \mathcal{I}_r^n \tag{2.3}$$

é sempre válida para todo número natural n e alguma extensão natural n-linear $(\mathcal{I}_s^n)_{s=1}^{\infty}$ de $(\mathcal{L}_{as,s})_{s=1}^{\infty}$?

Em [66] o autor mostrou que a inclusão (2.3) está longe de ser verdadeira para a classe das aplicações n-lineares dominadas, i.e., quando $\mathcal{I}_p^n = \mathcal{L}_{d,p}^n$ e $\mathcal{I}_r^n = \mathcal{L}_{d,r}^n$. Assim, o autor optou por investigar o caso em que $\mathcal{I}_p^n = \mathcal{L}_{d,p}^n$ e $\mathcal{I}_r^n = \mathcal{L}_{as,r}^n$, i.e., a seguinte questão foi considerada:

Problema 2.2.3 *Sejam $p, q \in (1, \infty)$ e $r \in [1, \infty)$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Para quais números naturais n a inclusão*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}_{d,p}^n \subset \mathcal{L}_{as,r}^n$$

é verdadeira?

Os resultados principais de [66] (Teorema 4 e Corolário 19) respondem a questão anterior para todo inteiro positivo n e $r \in [1, 2]$:

Teorema 2.2.4 (D. Popa, 2010) *Sejam $p, q \in (1, \infty)$ e $r \in [1, 2]$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Então*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}_{d,p}^n \subset \mathcal{L}_{as,r}^n \tag{2.4}$$

para todo número natural n.

O caso $r \in (2, \infty)$ não foi resolvido em [66]:

Problema 2.2.5 *Sejam $p, q \in (1, \infty)$ e $r \in (2, \infty)$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Para quais números naturais n a inclusão*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}^n_{d,p} \subset \mathcal{L}^n_{as,r} \tag{2.5}$$

é verdadeira?

Acreditamos que considerando diferentes classes (operadores n-lineares p-dominados e multilineares absolutamente r-somantes), o Problema 2.2.3 se afasta da sua motivação original (2.2), embora não deixe de ser um problema matematicamente interessante.

Vale a pena ressaltar que a classe $\mathcal{L}^n_{as,r}$ (embora tenha sido muito explorada por vários autores e por nós no Capítulo 1) não é, sob certo sentido, considerada uma extensão adequada de $\mathcal{L}_{as,r}$, já que várias propriedades de $\mathcal{L}_{as,r}$ são descaracterizadas em $\mathcal{L}^n_{as,r}$ (este tipo de falha desta classe - e sua versão polinomial - foi discutida em alguns trabalhos recentes (veja, por exemplo, [65, página 167] e [26, 27, 57])). Usando a terminologia de [26] podemos dizer que o ideal dos polinômios n-homogêneos absolutamente r-somantes (associado a $\mathcal{L}^n_{as,r}$) não é compatível com o ideal dos operadores lineares $\mathcal{L}_{as,r}$.

O caso $r = 1$ no Teorema 2.2.4 ([66, Theorem 4]) merece uma atenção especial. Ao contrário do que acontece na teoria linear ($n = 1$), para $n \geq 2$, em muitos casos, i.e., para vários espaços de Banach $E_1, ..., E_n, F$, o espaço $\mathcal{L}^n_{as,1}(E_1, ..., E_n; F)$ coincide com o espaço dos operadores multilineares contínuos $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ e o Teorema 2.2.4 (com $r = 1$) se torna trivial. Por exemplo:

- Para quaisquer espaços de Banach $E_1, ..., E_n$ o Teorema de Defant-Voigt (Teorema 1.3.4) garante que

$$\mathcal{L}^n_{as,1}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}). \tag{2.6}$$

- Se cada E_j é um espaço de Banach com cotipo q_j para todo j e $1 \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n}$, então

$$\mathcal{L}^n_{as,1}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) \tag{2.7}$$

para qualquer espaço de Banach F. Esse resultado foi originalmente provado por G. Botelho [11] e é um caso particular do Lema 1.4.7.

Veremos que o ideal de composição gerado pelos operadores multilineares absolutamente p-somantes é precisamente a classe que responde totalmente o Problema 2.2.2.

A solução para o Problema 2.2.2 é uma simples consequência do Teorema da Composição de Pietsch para operadores lineares absolutamente somantes:

Proposição 2.2.6 *Se $p, q \in (1, \infty)$ e $r \in [1, \infty)$ são tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, então*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{C}^n_{\mathcal{L}_{as,p}} \subset \mathcal{C}^n_{\mathcal{L}_{as,r}}$$

para todo número natural n.

Demonstração: Sejam $u \in \mathcal{L}_{as,q}(F; H)$ e $T \in \mathcal{C}^n_{\mathcal{L}_{as,p}}(E_1, ..., E_n; F)$. Então existem $v \in \mathcal{L}_{as,p}(G; F)$ e $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; G)$ tais que

$$T = v \circ A.$$

Do Teorema da Composição de Pietsch, segue que

$$u \circ v \in \mathcal{L}_{as,r}(G; H)$$

e, portanto,

$$u \circ T = u \circ (v \circ A) = (u \circ v) \circ A \in \mathcal{C}^n_{\mathcal{L}_{as,r}}(E_1, ..., E_n; H).$$

■

Observação 2.2.7 *Vale ressaltar que a versão polinomial do multi-ideal $(\mathcal{C}^n_{\mathcal{I}})_{n=1}^{\infty}$ (a qual denotamos por $(\mathcal{CP}^n_{\mathcal{I}})_{n=1}^{\infty}$) também resolve a versão polinomial para o Problema 2.2.2. Mais ainda, o ideal de polinômios $(\mathcal{CP}^n_{\mathcal{I}})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência coerente e compatível com $\mathcal{I}$ (veja [26]), reforçando que o método da composição é um método adequado de generalizar o ideal dos operadores lineares absolutamente somantes.*

Veremos ainda, a seguir, que podemos facilmente obter respostas parciais para o Problema 2.2.5. Mais precisamente, mostraremos, em particular, que a inclusão (2.5) é verdadeira sempre que $n \geq \frac{p}{r}$.

É fácil ver que

$$\frac{p}{n} \leq r \leq p \Rightarrow \mathcal{L}^n_{d,p} \subset \mathcal{L}^n_{as,r}. \tag{2.8}$$

Assim, temos:

Proposição 2.2.8 *Sejam $p, q, r \in (1, \infty)$ tais que $r \leq p$. Então, a inclusão*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}_{d,p}^{n} \subset \mathcal{L}_{as,r}^{n} \tag{2.9}$$

é válida para todo $n \geq \frac{p}{r}$.

Demonstração: Se $u \in \mathcal{L}_{as,q}(F; H)$ e $T \in \mathcal{L}_{d,p}^{n}(E_1, ..., E_n; F)$, então

$$u \circ T \in \mathcal{L}_{d,p}^{n}(E_1, ..., E_n; F)$$

e, portanto, $u \circ T \in \mathcal{L}_{as,r}^{n}(E_1, ..., E_n; H)$. ■

Assim, *a fortiori*, temos uma resposta parcial para o Problema 2.2.5 (note que não necessitamos da hipótese $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$):

Corolário 2.2.9 *Sejam $p, q, r \in (1, \infty)$ tais que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Então, a inclusão*

$$\mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}_{d,p}^{n} \subset \mathcal{L}_{as,r}^{n} \tag{2.10}$$

é válida para todo $n \geq \frac{p}{r}$.

Note que a Proposição 2.2.8, embora não resolva totalmente a questão proposta por D. Popa, tem a vantagem de não exigir que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$:

$$\left[\begin{array}{c}\text{Proposição 2.2.8:}\\ \mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}_{d,p}^{n} \subset \mathcal{L}_{as,r}^{n} \text{ para } r, p, q \in (1, \infty) \text{ com } n \geq \frac{p}{r} \text{ e } r \leq p\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{Teorema 2.2.4:}\\ \mathcal{L}_{as,q} \circ \mathcal{L}_{d,p}^{n} \subset \mathcal{L}_{as,r}^{n} \text{ para } r \in (1, 2),\ p, q \in (1, \infty) \text{ com } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ e } n \geq 1\end{array}\right]$$

2.3 Resultados envolvendo cotipo

Como comentado na Seção 2.1, o ideal das aplicações multilineares p-dominadas é considerado, sob o ponto de vista de resultados de coincidência, um ideal pequeno. Assim, abordaremos, explorando cotipo, resultados mais fortes do que o que foi proposto no Problema 2.2.3. Mais precisamente, investigaremos resultados do tipo

$$\mathcal{L}_{as(t;l)} \circ \bigcup_{p\geq 1} \mathcal{L}_{d,p}^{n} \subset \mathcal{L}_{as(r;s)}^{n}$$

para $t, l, r, s \in [1, \infty)$. Em outras palavras, para espaços de Banach fixos $E_1, ..., E_n, F, G$ com certas propriedades, e parâmetros t, l, r, s, será que se tem

$$\mathcal{L}_{as(t;l)}(F;G) \circ \bigcup_{p\geq 1} \mathcal{L}_{d,p}^{n}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(r;s)}^{n}(E_1, ..., E_n; G)?$$

O seguinte resultado será útil para os nossos propósitos:

Teorema 2.3.1 (Floret, Matos (1995) e Pérez-García (2002)) *Se $E_1, ..., E_n$ são espaços de Banach, então*

$$\bigcup_{p\geq 1} \mathcal{L}_{d,p}^{n}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}_{as(1;2,...,2)}^{n}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}).$$

O resultado acima é devido a K. Floret e M.C. Matos [40] para o caso complexo e devido a D. Pérez-García [58] para o caso geral.

O próximo resultado é uma aplicação do teorema anterior:

Proposição 2.3.2 *Se $E_1, ..., E_n, F$ e G são espaços de Banach, então*

$$\mathcal{L}_{as(s;1)}(F;G) \circ \bigcup_{p\geq 1} \mathcal{L}_{d,p}^{n}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(s;2,...,2)}^{n}(E_1, ..., E_n; G).$$

para todo $s \geq 1$.

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}_{as(s;1)}(F;G)$ e $R \in \bigcup_{p\geq 1} \mathcal{L}_{d,p}^{n}(E_1, ..., E_n; F)$. Considere $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in l_2^w(E_i)$, para todo $i = 1, ..., n$. Se $\varphi \in F^*$, pelo Teorema 2.3.1, temos

$$\varphi \circ R \in \bigcup_{p\geq 1} \mathcal{L}_{d,p}^{n}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}_{as(1;2,...,2)}^{n}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}).$$

Portanto

$$\left(\varphi\left(R(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)})\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_1.$$

Concluímos que $\left(R(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)})\right)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(F)$ e assim

$$\left(T\left(R(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)})\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_s(G),$$

pois $T \in \mathcal{L}_{as(s;1)}(F;G)$. ■

Quando $E_1 = \cdots = E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços temos um resultado mais forte.

Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\lambda > 1$. Dizemos que um espaço de Banach E é um *$\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espaço* se todo subspaço de dimesão finita F de E está contido em um subspaço de dimensão finita G de E e existe um isomorfismo $u : G \to l_p^{\dim G}$ com $\|u\| \, \|u^{-1}\| < \lambda$. O espaço E é dito um *$\mathcal{L}_p$-espaço* se for um *$\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espaço* para algum $\lambda > 1$.

Proposição 2.3.3 *Se F, G são espaços de Banach e $E_1 = \cdots = E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços, então*

$$\mathcal{L}_{as(s;r)}(F;G) \circ \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{as(s;2r,...,2r)}(E_1, ..., E_n; G)$$

para todo $s \geq r \geq 1$.

Demonstração: Sejam $T \in \mathcal{L}_{as(s;r)}(F;G)$ e $R \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$. Considere $(x_j^{(k)})_{j=1}^\infty \in l_{2r}^w(E_k)$ para todo $k = 1, ..., n$. Se $\varphi \in F^*$ temos, de [15, Teorema 3.15],

$$\varphi \circ R \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}^n_{as(r;2r,...,2r)}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}).$$

Portanto

$$\left(\varphi\left(R(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)})\right)\right)_{j=1}^\infty \in l_r$$

e assim $\left(R(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)})\right)_{j=1}^\infty \in l_r^w(F)$. Como $T \in \mathcal{L}_{(s;r)}(F, G)$, concluímos que

$$\left(T\left(R(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)})\right)\right)_{j=1}^\infty \in l_s(G).$$

■

O seguinte resultado pode ser encontrado em [60, Theorem 3.10]:

Proposição 2.3.4 (Pérez-García e Villanueva, 2003) *Se F tem cotipo s finito, então*

$$\bigcup\nolimits_{p\geq 1} \mathcal{L}^n_{d,p}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{mas(s;2,...,2)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{as(s;2,...,2)}(E_1, ..., E_n; F)$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1, ..., E_n$.

Em particular, o resultado anterior mostra que

$$\mathcal{L}(F;G) \circ \bigcup\nolimits_{p\geq 1} \mathcal{L}^n_{d,p}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{as(s;2,...,2)}(E_1, ..., E_n; G)$$

para F com cotipo s finito e quaisquer espaços de Banach $E_1, ..., E_n, G$.

Nossa atenção será voltada para o caso $s = 2$ da Proposição 2.3.4. É bem conhecido que se $E_1, ..., E_n$ e F têm cotipo 2, então

$$\mathcal{L}^n_{mas,2}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}^n_{mas,r}(E_1, ..., E_n; F) \tag{2.11}$$

para todo $1 \leq r \leq 2$. Portanto, segue imediatamente o seguinte resultado:

Corolário 2.3.5 *Se $E_1, ..., E_n$ e F têm cotipo 2, então*

$$\mathcal{L}_{as,q}(F; G) \circ \bigcup_{p \geq 1} \mathcal{L}^n_{d,p}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{mas,r}(E_1, ..., E_n; G)$$

para todo $q \in [1, \infty), 1 \leq r \leq 2$ e todo espaço de Banach G.

Demonstração: Segue da Proposição 2.3.4 e de (2.11). ■

Sob as hipóteses da Proposição 2.3.4, em geral, $\mathcal{L}^n_{as,1}(E_1, ..., E_n; G)$ não está contido em $\mathcal{L}^n_{as,2}(E_1, ..., E_n; G)$. Com efeito, a aplicação $T : l_2 \times l_2 \to l_1$ dada por

$$T(x, y) = (x_j y_j)_{j=1}^{\infty}$$

pertence a $\mathcal{L}^2_{as,1}(l_2, l_2; l_1)$ mas não pertence a $\mathcal{L}^2_{as,2}(l_2, l_2; l_1)$. O Teorema 1.5.2, em particular, afirma que se algum E_j tem cotipo 2, então

$$\mathcal{L}^n_{as(2;2,2,...,2)}(E_1, ..., E_n; G) \subset \mathcal{L}^n_{as(p;p,p,...,p)}(E_1, ..., E_n; G)$$

para todo $1 \leq p \leq 2$. Assim, temos:

Corolário 2.3.6 *Se E_j tem cotipo 2 para algum j e F tem cotipo 2, então*

$$\mathcal{L}_{as,q}(F; G) \circ \bigcup_{p \geq 1} \mathcal{L}^n_{d,p}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{as,r}(E_1, ..., E_n; G)$$

para todo $q \in [1, \infty)$, todo $r \in [1, 2]$ e quaisquer espaços de Banach $E_1, ..., E_{j-1}, E_{j+1}, ..., E_n, G$.

Demonstração: Da Proposição 2.3.4, temos

$$\mathcal{L}_{as,q}(F; G) \circ \bigcup_{p \geq 1} \mathcal{L}^n_{d,p}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}^n_{as,2}(E_1, ..., E_n; G).$$

Como $\mathcal{L}^n_{as,2}(E_1, ..., E_n; G) \subset \mathcal{L}^n_{as,r}(E_1, ..., E_n; G)$ o resultado segue. ■

Portanto o Corolário 2.3.6 é mais forte do que o Teorema 2.2.4 no caso especial quando E_j tem cotipo 2 para algum j e F tem cotipo 2.

Agora exploraremos algumas consequências da Proposição 2.3.2. Usando a Proposição 2.3.2 (com $s = 1$) e o Teorema 1.4.4 obtemos:

Corolário 2.3.7 *Se F e G tem cotipo 2, então*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{as,q}(F;G) \circ \bigcup\nolimits_{p\geq 1} \mathcal{L}^n_{d,p}(E_1,...,E_n;F) &\subset \mathcal{L}^n_{as(1;2,...,2)}(E_1,...,E_n;G)\\ &\subset \mathcal{L}^n_{as(2;2,...,2)}(E_1,...,E_n;G)\end{aligned}$$

para todo $q \in (1,\infty)$ e quaisquer espaços de Banach $E_1,...,E_n$.

Corolário 2.3.8 *Se F tem cotipo $2 < s < \infty$, então*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{as,q}(F;G) \circ \bigcup\nolimits_{p\geq 1} \mathcal{L}^n_{d,p}(E_1,...,E_n;F) &\subset \mathcal{L}^n_{as(1;2,...,2)}(E_1,...,E_n;G)\\ &\subset \mathcal{L}^n_{as(2;2,...,2)}(E_1,...,E_n;G)\end{aligned}$$

para todo $1 < q < s^*$ e quaisquer espaços de Banach $E_1,...,E_n,G$.

Capítulo 3

Aplicações multilineares absolutamente $(p; q_1, \ldots, q_n; r)$-somantes

A seguinte definição, devida a Pietsch [62, Definition 17.1.1] é uma extensão (ainda no contexto linear) do conceito de operadores absolutamente somantes:

Definição 3.0.1 *Sejam* $0 < p, q, r \leq \infty$ *tais que*

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r}. \tag{3.1}$$

Um operador linear $u \in \mathcal{L}(E; F)$ *é dito* $(p; q; r)$-somante *se existir uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi_j (u (x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^{m} \right\|_{w,q} \left\| (\varphi_j)_{j=1}^{m} \right\|_{w,r} \tag{3.2}$$

para todo inteiro positivo m*, quaisquer* $x_1, ..., x_m$ *em* E *e* $\varphi_1, ..., \varphi_m$ *em* F^**.*

Quando $r = \infty$, voltamos ao caso clássico dos operadores absolutamente $(p; q)$-somantes. Isso será demonstrado, já para um contexto mais amplo, na próxima seção.

O espaço vetorial formado pelos operadores lineares contínuos de E em F que são absolutamente $(p; q; r)$-somantes será denotado por $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}(E; F)$. A menor das constantes C que satisfazem a desigualdade (3.2) define uma norma em $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}(E; F)$ se $p \geq 1$ (p-norma se $0 < p < 1$) e será denotada por $\|\cdot\|_{as(p;q;r)}$.

Quando $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ tem-se $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}(E;F) = \{0\}$ (veja [35, pg. 196]) e, por esse motivo, assumimos na definição anterior $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Na próxima seção demonstraremos esse resultado num contexto mais geral.

O seguinte resultado de inclusão pode ser encontrado com sua demonstração em [62, Proposition 17.1.4]:

Proposição 3.0.2 *Se $s_1 \leq s_2$ para todo $s \in \{p, q, r\}$ e*

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{p_2},$$

então

$$\mathcal{L}_{as(p_1;q_1;r_1)} \subset \mathcal{L}_{as(p_2;q_2;r_2)}.$$

Há pelo menos duas maneiras bastante naturais de se generalizar a classe dos operadores lineares $(p; q; r)$-somantes para o contexto multilinear e polinomial. Neste capítulo e no próximo exploraremos tais alternativas.

3.1 Aplicações multilineares $(p; q_1, ..., q_n; r)$-somantes

Seguindo a sequência histórica do aparecimento das generalizações multilineares absolutamente somantes, neste capítulo exploraremos a generalização natural, onde a soma é feita em um único índice. Esta abordagem foi introduzida por D. Achour [1] e segue a essência da Definição 1.3.1:

Definição 3.1.1 (D. Achour, 2011) *Sejam $0 < p, q_1, ..., q_n, r \leq \infty$ com*

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{r}.$$

Uma função $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é absolutamente $(p; q_1, \ldots, q_n; r)$-somante *se existir $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left| \varphi_j \left(T \left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)} \right) \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\| (\varphi_j)_{j=1}^m \right\|_{w,r} \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(i)} \right)_{j=1}^m \right\|_{w,q_i} \tag{3.3}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in F^*$ e $x_j^{(i)} \in E_i, i = 1, ...n$ e $j = 1, ..., m$.

Denotaremos por $\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ o espaço vetorial das aplicações $(p;q_1,\ldots,q_n;r)$-somantes. Quando $q_1 = \cdots = q_n = q$ escrevemos apenas $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ ao invés de $\mathcal{L}_{as(p;q,\ldots,q;r)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. A menor das constantes C que satisfazem a desigualdade (3.3) define uma norma em $\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ se $p \geq 1$ (p-norma se $0 < p < 1$) e será denotada por $\|\cdot\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)}$.

Se $\frac{1}{p} > \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{r}$ e T for absolutamente $(p;q_1,\ldots,q_n;r)$-somante então $T = 0$. Com efeito, seja T não nula e absolutamente $(p;q_1,\ldots,q_n;r)$-somante e suponha que $q = q_1 = \cdots = q_n$ (o caso geral é feito de modo análogo). Note que

$$p < \frac{qr}{q+nr}.$$

De fato,

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{q+nr}{qr}.$$

Sejam $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{\frac{qr}{q+nr}} - l_p$ e $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n, \varphi \in F$ tais que $\varphi\left(T\left(x_1, ..., x_n\right)\right) \neq 0$. Como T é $(p;q_1,\ldots,q_n;r)$-somante, temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\varphi\left(T\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)\right| \left(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left|\varphi\left(T\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)\right| \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{n}{q}\right)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)\frac{1}{r}} \varphi\left(T\left(\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)\frac{1}{q}} x_1, \ldots, \lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)\frac{1}{q}} x_n\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)} \left\| \left(\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)\frac{1}{r}} \varphi\right)_{j=1}^{m} \right\|_{w,r} \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)\frac{1}{q}} x_i\right)_{j=1}^{m} \right\|_{w,q} \\
&\overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)} \|\varphi\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)\frac{1}{r}}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)\frac{1}{q}}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)} \|\varphi\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)}\right|\right)^{\frac{1}{r}} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)}\right|\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)} \|\varphi\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)}\right|\right)^{\frac{1}{r}+\frac{n}{q}}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$\begin{aligned}
&|\varphi\left(T\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)|\left(\sum_{j=1}^{m}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\|\varphi\|\|x_1\|\cdots\|x_n\|\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j^{\left(\frac{qr}{q+nr}\right)}\right|\right)^{\frac{1}{r}+\frac{n}{q}}.
\end{aligned}$$

Fazendo $m\to\infty$, como $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\in l_{\frac{qr}{q+nr}}$, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

contradizendo o fato de que $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\notin l_p$.

O próximo resultado, embora bastante simples, ilustra a hierarquia de tamanho das classes $\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}$ e $\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)}$:

Proposição 3.1.2 *Sejam n um número inteiro positivo e $0<p,q_1,...,q_n,r\leq\infty$. Então*

$$\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right)\subset\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\left(E_1,...,E_n;F\right)$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1,...,E_n,F$. Além disso,

$$\|\cdot\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\leq\|\cdot\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}. \tag{3.4}$$

Demonstração: Sejam $\varphi_1,...,\varphi_m\in F^*$ e $x_1^{(i)},...,x_m^{(i)}\in E_i$, com $i\in\{1,...,n\}$. Se $T\in\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right)$, então

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\|\varphi_j\|\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right\|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r}\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r}\|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_k},
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 3.1.3 *Se $r = \infty$, então*

$$\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F) = \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n;\infty)}(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Além disso

$$\|\cdot\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;\infty)} = \|\cdot\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n)} .$$

Demonstração: Pelo resultado anterior já sabemos que

$$\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n;\infty)}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

e

$$\|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;\infty)} \leq \|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n)} .$$

Para provar a outra inclusão, considere $T \in \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n;\infty)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m} \left\|T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \sup_{\varphi_j \in B_{F^*}} \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi_j \in B_{F^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;\infty)} \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_1} \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_n},
\end{aligned}$$

para quaisquer $m \in \mathbb{N}, \varphi_j \in F^*$ e $x_j^{(i)} \in l_{q_i}^{w}(E_i), i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$. Assim T é absolutamente $(p; q_1, \ldots, q_n)$-somante e

$$\|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n)} \leq \|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n;\infty)} .$$

■

A próxima proposição é uma generalização natural do Teorema de Inclusão 1.3.3 (veja [1]). Faremos uma demonstração alternativa:

Proposição 3.1.4 (Achour, 2011) *Sejam*

$$\begin{cases} 1 \le p \le \tilde{p} \le \infty, \\ 1 \le q_i \le \tilde{q}_i \le \infty \\ 1 \le r \le \tilde{r} \le \infty \end{cases}$$

tais que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} \right) + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tilde{q}_i} \right) + \frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{p}}. \tag{3.5}$$

Então

$$\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n;r)} \subset \mathcal{L}_{as(\tilde{p};\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_n;\tilde{r})}$$

e

$$\|\cdot\|_{as(\tilde{p};\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_n;\tilde{r})} \le \|\cdot\|_{as(p;q_1,...,q_n;r)}. \tag{3.6}$$

Demonstração: Sejam $T \in \mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1, ..., E_n; F)$, $m \in \mathbb{N}$, $x_j^{(i)} \in E_i$ e $\varphi_j \in F^*$, com $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$. Para cada $i = 1,...,n$, sejam

$$\frac{1}{p_i} = \frac{1}{q_i} - \frac{1}{\tilde{q}_i}, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}}, \tag{3.8}$$

$$k = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}} - \frac{1}{r_0}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}}. \tag{3.9}$$

Defina ainda, para cada $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$,

$$\lambda_j = \left| \varphi_j \left(T \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right) \right) \right|^{\frac{\tilde{p}}{r_0}}, \tag{3.10}$$

$$\lambda_j^{(i)} = \left| \varphi_j \left(T \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right) \right) \right|^{\frac{k\tilde{p}}{p_i}}. \tag{3.11}$$

Por (3.5), (3.7), (3.8) e (3.9), temos $k \ge 1$. Com efeito,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \overset{(3.7)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{\tilde{q}_i} \right) \overset{(3.5)}{\le} \frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}} \overset{(3.8)}{=} \frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}} - \frac{1}{r_0},$$

e, de (3.9), temos $k \geq 1$. Por (3.10) e (3.11), temos

$$\begin{aligned}\left(\lambda_j \lambda_j^{(1)} \cdots \lambda_j^{(n)}\right)^p &= \left(\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}\left(\frac{1}{r_0}+k\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\right)}\right)^p \\ &= \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}-p}.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.12)\\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}-p}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\lambda_j \lambda_j^{(1)} \cdots \lambda_j^{(n)}\right)^p \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left|\lambda_j \varphi_j\left(T\left(\lambda_j^{(1)}x_j^{(1)},...,\lambda_j^{(n)}x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Como $T \in \mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$, de (3.12) segue que

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.13)\\ &\leq \|T\|_{as(p;q_1,...,q_n;r)} \left\|(\lambda_j\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r} \prod_{i=1}^n \left\|\left(\lambda_j^{(i)}x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i}.\end{aligned}$$

De (3.7), a Desigualdade de Hölder garante que

$$\begin{aligned}\left\|\left(\lambda_j^{(i)}x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i} &= \sup_{\phi_i \in E_i^*}\left(\sum_{j=1}^m \left|\phi_i\left(\lambda_j^{(i)}x_j^{(i)}\right)\right|^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}} \qquad (3.14)\\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \left|\lambda_j^{(i)}\right|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} \sup_{\phi_i \in E_i^*}\left(\sum_{j=1}^m \left|\phi_i\left(x_j^{(i)}\right)\right|^{\tilde{q}_i}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}_i}} \\ &= \left\|\left(\lambda_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{p_i}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,\tilde{q}_i}.\end{aligned}$$

De modo análogo, de (3.8) temos

$$\left\|(\lambda_j \varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r} \leq \left\|(\lambda_j)_{j=1}^m\right\|_{r_0} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,\tilde{r}}. \tag{3.15}$$

De (3.11), temos

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n \left\|\left(\lambda_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{p_i} &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{k\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{p_i}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{k\tilde{p}}\right)^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{k\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{r_0}\right)} \\
&= \left\|\left(\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)_{j=1}^m\right\|_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{r_0}} \\
&\overset{(k\geq 1)}{\leq} \left\|\left(\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)_{j=1}^m\right\|_1^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{r_0}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{r_0}},
\end{aligned}$$

e, de (3.10), segue que

$$\begin{aligned}
&\left\|(\lambda_j)_{j=1}^m\right\|_{r_0} \prod_{i=1}^n \left\|\left(\lambda_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{p_i} \qquad (3.16)\\
&\leq \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{r_0}} \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\tilde{p}}-\frac{1}{r_0}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\tilde{p}}}.
\end{aligned}$$

Logo, de (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16), obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|T\|_{as(p;q_1,...,q_n;r)}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\tilde{p}}}\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,\tilde{r}}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,\tilde{q}_i}.$$

E, finalmente, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}}\leq \|T\|_{as(p;q_1,...,q_n;r)}\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,\tilde{r}}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,\tilde{q}_i},$$

comprovando que $T\in\mathcal{L}_{as(\tilde{p};\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_n;\tilde{r})}\left(E_1,...,E_n;F\right)$ com a desigualdade das normas (3.6).
■

3.2 Caracterização por desigualdades

O resultado a seguir mostra que as aplicações $(p;q_1,...,q_n;r)$-somantes, assim como as $(p;q_1,...,q_n)$-somantes, são bem caracterizadas por desigualdades:

Teorema 3.2.1 *Seja $T\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$. São equivalentes:*

(i) $T\in\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,\ldots,E_n;F)$;

(ii) Para todo $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\in l_r^w\left(F^*\right)$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_{q_i}^w\left(E_i\right), i=1,...,n,$ tem-se

$$\left(\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty}\in l_p\left(\mathbb{K}\right);$$

(iii) Existe $C\geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i}$$

sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\in l_r^w\left(F^*\right)$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_{q_i}^w\left(E_i\right), i=1,...n.$

Demonstração: As implicações $(iii)\Rightarrow(i)$ e $(iii)\Rightarrow(ii)$ são triviais. A implicação $(i)\Rightarrow(iii)$ também é simples.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Defina a aplicação $(n+1)$-linear

$$\Phi(T) : l_{q_1}^w(E_1) \times \cdots \times l_{q_n}^w(E_n) \times l_r^w(F^*) \longrightarrow l_p$$

por

$$\Phi(T)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}, (\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Vamos mostrar que $\Phi(T)$ é contínua.

Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência em $l_{q_1}^w(E_1) \times \cdots \times l_{q_n}^w(E_n) \times l_r^w(F^*)$ convergindo para

$$x = \left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}, (\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right) \in l_{q_1}^w(E_1) \times \cdots \times l_{q_n}^w(E_n) \times l_r^w(F^*)$$

e tal que

$$\lim_{m\to\infty} \Phi(T)(x_m) = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p.$$

Para cada m natural, escrevemos

$$(x_m) = \left(\left(x_{m,j}^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_{m,j}^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}, (\varphi_{m,j})_{j=1}^{\infty}\right) \in l_{q_1}^w(E_1) \times \cdots \times l_{q_n}^w(E_n) \times l_r^w(F^*).$$

Logo

$$\lim_{m\to\infty} \left(\varphi_{m,j}\left(T\left(x_{m,j}^{(1)}, ..., x_{m,j}^{(n)}\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty} = (z_j)_{j=1}^{\infty} \text{ em } l_p$$

e, portanto,

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{m,j}\left(T\left(x_{m,j}^{(1)}, ..., x_{m,j}^{(n)}\right)\right) = z_j \text{ em } \mathbb{K}, \tag{3.17}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Note ainda que

$$\varphi_{m,j} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_j \text{ em } F^*,$$

e

$$x_{m,j}^{(i)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_j^{(i)} \text{ em } E_i, \tag{3.18}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $i = 1, ..., n$. Assim,

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{m,j}\left(T\left(x_{m,j}^{(1)}, ..., x_{m,j}^{(n)}\right)\right) = \varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right) \tag{3.19}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. De fato, como T é contínua, de (3.18) temos

$$T\left(x_{m,j}^{(1)}, ..., x_{m,j}^{(n)}\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)$$

e daí

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi_{m,j}\left(T\left(x_{m,j}^{(1)}, ..., x_{m,j}^{(n)}\right)\right) - \varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right| \\
&= \left|\varphi_{m,j}\left(T\left(x_{m,j}^{(1)}, ..., x_{m,j}^{(n)}\right)\right) - \varphi_{m,j}\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right. \\
&\left.+\varphi_{m,j}\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right) - \varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right| \\
&\leq \left\|\varphi_{m,j}\right\| \left\|T\left(x_{m,j}^{(1)}, ..., x_{m,j}^{(n)}\right) - T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\| + \left\|\varphi_{m,j} - \varphi_j\right\| \left\|T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\|.
\end{aligned}$$

De (3.17) e (3.19) segue que

$$\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right) = z_j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \Phi(T)\left(\left(x_{m,j}^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_{m,j}^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\varphi_{m,j}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\varphi_{m,j}\left(T\left(x_{m,j}^{(1)}, ..., x_{m,j}^{(n)}\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \left(z_j\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \left(\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \Phi(T)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}, \left(\varphi_j\right)_{j=1}^{\infty}\right).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Gráfico Fechado para aplicações multilineares (veja [39]), segue que $\Phi(T)$ é contínua.

Portanto, para $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w(F^*)$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w(E_i)\,, i = 1, ..., n$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},\dots,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left\|\left(\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},\dots,x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \\ &= \left\|\Phi(T)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p \\ &\leq \|\Phi(T)\|\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

■

Observação 3.2.2 *A aplicação Φ definida na demonstração acima preserva norma. De fato,*

$$\begin{aligned}\|\Phi(T)\| &= \sup_{\substack{\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in B_{l_{q_i}^w(E_i)} \\ (\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{l_r^w(F^*)}}}\left\|\Phi(T)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\| \\ &= \sup_{\substack{\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in B_{l_{q_i}^w(E_i)} \\ (\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{l_r^w(F^*)}}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},\dots,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\|_{as(p;q_1,\dots,q_n;r)}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

De (3.20) e (3.21) segue que Φ preserva norma.

3.3 Uma generalização do Teorema de Defant-Voigt

Recordemos que o Teorema de Defant-Voigt, enunciado no Capítulo 1, afirma que

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as(1;1)}(E_1,\dots,E_n;\mathbb{K}).$$

Uma generalização do Teorema de Defant-Voigt aparece em [18, Theorem 3.1]. O resultado abaixo é uma extensão natural de [18, Theorem 3.1]. A demonstração é inteiramente análoga à demonstração de [18, Theorem 3.1], mas mesmo assim faremos os detalhes.

Teorema 3.3.1 *Seja* $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *e suponha que existam* $1 \leq k < n$ *e* $C > 0$ *tais que as aplicações* s*-lineares (onde* $s = n - k$*)*

$$A_{x_1 \ldots x_k}(x_{k+1}, \ldots, x_n) := A(x_1, \ldots, x_n)$$

sejam absolutamente $(p; q_1, \ldots, q_s; r)$*-somantes para quaisquer* $x_1 \in E_1, \ldots, x_k \in E_k$ *e, além disso,*

$$\|A_{x_1 \ldots x_k}\|_{as(p;q_1,\ldots,q_s;r)} \leq C\|A\|\|x_1\| \ldots \|x_k\|.$$

Então A *é absolutamente* $(p; \underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ coordenadas}}, q_1, \ldots, q_s; r)$*-somante e*

$$\|A\|_{as(p;1,\ldots,1,q_1,\ldots,q_s;r)} \leq C\|A\|.$$

Demonstração: Sejam $m \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{gathered} x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)} \in E_1 \\ \vdots \\ x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)} \in E_n. \end{gathered}$$

Pelo Lema 5.1.2 do Apêndice, existem números reais não-negativos $b_1, \ldots, b_m$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^q = 1,$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left\| \left(\left| \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) \right| \right)_{j=1}^{m} \right\|_p && (3.22) \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j \left| \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) \right|. \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right), && (3.23) \end{aligned}$$

onde

$$\varphi_j \left(A \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) = e^{i\theta_j} \left| \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) \right|.$$

Sejam r_j as funções de Rademacher em $[0,1]$. Notemos que a função

$$\Psi : [0,1]^k \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\begin{aligned}&\Psi(t_1,...,t_k) = \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{k} r_j(t_l) \right) b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j \left(A \left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) x_1^{(j_1)}, \ldots, \sum_{j_r=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right)\end{aligned}$$

possui apenas um número finito de descontinuidades; portanto é integrável com respeito à medida de Lebesgue λ em $I = [0,1]^k$. Usando o Teorema de Fubini e a multilinearidade de A, temos

$$\begin{aligned}&\int_I \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{k} r_j(t_l) \right) b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j \left(A \left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) x_1^{(j_1)}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) d\lambda \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\sum_{j,j_1,\ldots,j_r=1}^{m} b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j_1)}, \ldots, x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) \prod_{l=1}^{k} r_j(t_l) r_{j_l}(t_l) \right) dt_1 ... dt_k \\ &= \sum_{j,j_1,\ldots,j_k=1}^{m} \left[b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j_1)}, \ldots, x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) \prod_{l=1}^{k} \left(\int_0^1 r_j(t_l) r_{j_l}(t_l) dt_l \right) \right] \\ &:= (*)\end{aligned}$$

Por (5.2) do Apêndice, sabemos que

$$\int_0^1 r_j(t) r_i(t) dt = \delta_{ji};$$

Logo

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_k=1}^{m} b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j_1)}, \ldots, x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right) \delta_{jj_1} \ldots \delta_{jj_k} \qquad (3.24) \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j \left(A \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_k^{(j)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)} \right) \right).\end{aligned}$$

Definindo, para cada $l = 1, ..., k$,

$$z_l = \sum_{j=1}^{m} r_j(t_l) x_l^{(j)},$$

obtemos, de (3.22) e (3.24),

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(A\left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j\left(A\left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right) \\
&= \int_I \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{k} r_j(t_l)\right) b_j e^{-i\theta_j} \varphi_j\left(A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) x_1^{(j_1)}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right) d\lambda \\
&\leq \int_I \left|\sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{l=1}^{k} r_j(t_l)\right) b_j \varphi_j\left(A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) x_1^{(j_1)}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right)\right| d\lambda \\
&\leq \int_I \sum_{j=1}^{m} \left(b_j \left|\varphi_j\left(A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) x_1^{(j_1)}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right)\right|\right) d\lambda \\
&\leq \sup_{\substack{|t_l|\leq 1 \\ l=1,\ldots,k}} \|(b_j)\|_q \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) x_1^{(j_1)}, \ldots, \sum_{j_1=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right)\right|^p\right)^{1/p} \\
&= \sup_{\substack{|t_l|\leq 1 \\ l=1,\ldots,k}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(A\left(\sum_{j_1=1}^{m} r_{j_1}(t_1) x_1^{(j_1)}, \ldots, \sum_{j_1=1}^{m} r_{j_k}(t_k) x_k^{(j_k)}, x_{k+1}^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right)\right|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \sup_{|t_l|\leq 1, l=1,\ldots,k} \|A_{z_1 \ldots z_k}\|_{as(p;q_1,\ldots,q_s;r)} \left\|\left(x_{k+1}^{(j)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_1} \cdots \left\|\left(x_n^{(j)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_s} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r} \\
&\leq \sup_{|t_l|\leq 1, l=1,\ldots,k} C\|A\| \|z_1\| \ldots \|z_k\| \left\|\left(x_{k+1}^{(j)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_1} \cdots \left\|\left(x_n^{(j)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_s} \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r} \\
&\overset{\text{Lema 5.1.4}}{\leq} C\|A\| \left(\prod_{l=1}^{k} \left\|\left(x_l^{(j)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,1}\right) \left(\prod_{l=k+1}^{n} \left\|\left(x_l^{(j)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_l}\right) \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.3.2 *Se* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F) = \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(E_1, ..., E_m; F)$ *então*

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_m,1,\ldots,1;r)}(E_1, ..., E_n; F)$$

para quaisquer espaços de Banach $E_{m+1}, ..., E_n$. Em particular, para $p \geq 1$ e espaços de Banach $E_1, ..., E_n$, temos

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as(p;p,1,...,1;r)}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}). \tag{3.25}$$

Demonstração: É claro que

$$id : \mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m;r)}(E_1, ..., E_m; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$$

é contínua e, por hipótese, é bijetiva. Segue do Teorema da Aplicação Aberta que existe $C > 0$ tal que

$$\|T\|_{as(p;q_1,...,q_m;r)} \leq C \|T\|.$$

E, do teorema anterior, temos

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m,1,...,1;r)}(E_1, ..., E_n; F).$$

■

Como $\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m;\infty)}(E_1, ..., E_m; F) = \mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_m)}(E_1, ..., E_m; F)$, temos, de (3.25):

Corolário 3.3.3 *Se $E_1, ..., E_n$ são espaços de Banach, então*

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as(p;p,1,...,1)}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K})$$

para todo $p \geq 1$.

Observação 3.3.4 *Quando $p = 1$ no corolário anterior obtemos o Teorema de Defant-Voigt.*

3.4 Outras relações com os operadores multilineares absolutamente somantes

Nesta seção vamos comparar, através de resultados de inclusão, a classe definida na seção anterior com a classe das aplicações multilineares absolutamente somantes (como fizemos na Proposição 3.1.2). Os resultados são bastante simples e o objetivo é apenas destacar como se comportam as classes de acordo com a variação dos parâmetros e com certas propriedades dos espaços de Banach envolvidos, ajudando a criar alguma intuição sobre o "tamanho" das classes.

O próximo resultado relaciona as classes quando se tem alguma informação sobre o tipo do espaço de Banach F :

Proposição 3.4.1 *Seja F um espaço de Banach com tipo p^*. Então*

$$\mathcal{L}_{as(q;q_1,...,q_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right) \subset \mathcal{L}_{as(s;q_1,...,q_n;1)}\left(E_1,...,E_n;F\right)$$

com

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Demonstração:

Sejam $T \in \mathcal{L}_{as(q;q_1,...,q_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right), \left(\varphi_j\right)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w\left(F^*\right), \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w\left(E_i\right)$. Como F^* tem cotipo p (veja [35, Propositiono 11.10]) temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left\|\varphi_j\right\|\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right\|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|id_{F^*}\left(\varphi_j\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.4.2 *Se F é um espaço de Banach com tipo 2, então*

$$\mathcal{L}_{as(2;q_1,...,q_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right) \subset \mathcal{L}_{as(1;q_1,...,q_n;1)}\left(E_1,...,E_n;F\right).$$

Em particular,

$$\mathcal{L}_{as(2;1)}\left(E_1,...,E_n;F\right) \subset \mathcal{L}_{as(1;1;1)}\left(E_1,...,E_n;F\right).$$

Quando F é o corpo dos escalares, temos:

Proposição 3.4.3 *Sejam n um número natural e*

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}.$$

Então

$$\mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n)}\left(E_1,...,E_n;\mathbb{K}\right) \subset \mathcal{L}_{as(t;q_1,...,q_n;r)}\left(E_1,...,E_n;\mathbb{K}\right)$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1,...,E_n$.

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}_{as(p;q_1,...,q_n)}\left(E_1,...,E_n;\mathbb{K}\right)$. Assim

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^t\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\|\varphi_j\|\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right\|\right)^t\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\|_{(p;q_1,...,q_n)}\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_r\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i} \\
&= \|T\|_{(p;q_1,...,q_n)}\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i},
\end{aligned}$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}, (\varphi_j)_{j=1}^m \in l_r^w\left(\mathbb{K}^*\right)$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m \in l_{q_i}^w\left(E_i\right) i = 1,...,n$. Portanto $T \in \mathcal{L}_{as(t;q_1,...,q_n;r)}\left(E_1,...,E_n;\mathbb{K}\right)$. ■

3.5 Resultados de coincidência e inclusão

Como consequência da Proposição 3.1.2 e do Teorema de Defant-Voigt, temos:

Proposição 3.5.1 *Se $E_1,...,E_n$ são espaços de Banach, então*

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as(1;1;r)}(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K})$$

para todo $r > 0$.

Quando $r = 1$, como

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 1,$$

a Proposição 3.4.3 nos garante que

$$\mathcal{L}_{as(1;1)}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}_{as\left(\frac{1}{2};1;1\right)}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$$

e portanto temos:

Proposição 3.5.2 *Se $E_1, ..., E_n$ são espaços de Banach $E_1, ..., E_n$, então*

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as\left(\frac{1}{2};1;1\right)}\left(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}\right).$$

Usando a Proposição 3.1.2 e o teorema do tipo Grothendieck para aplicações multilineares (veja Seção 1.6) temos facilmente o seguinte resultado:

Corolário 3.5.3 *Se $T \in \mathcal{L}\left(l_1, ..., l_1; l_2\right)$ então T é absolutamente $\left(\frac{2}{n+1}; 1, ..., 1; r\right)$-somante para todo $r > 0$.*

Em particular, quando $r = 1$ no corolário anterior, temos:

Corolário 3.5.4 *Se $T \in \mathcal{L}\left(l_1, ..., l_1; l_2\right)$ então T é absolutamente $\left(\frac{2}{n+1}; 1, ..., 1; 1\right)$-somante.*

Usando a Proposição 3.4.1 temos um resultado mais forte que o Corolário 3.5.4:

Teorema 3.5.5 *Se $T \in \mathcal{L}\left(l_1, ..., l_1; l_2\right)$ então T é absolutamente $\left(\frac{2}{n+2}; 1, ..., 1; 1\right)$-somante.*

Demonstração: Como l_2 tem tipo 2 e

$$\frac{1}{\frac{2}{n+2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{2}{n+1}},$$

da Proposição 3.4.1 temos

$$\mathcal{L}_{as\left(\frac{2}{n+1};1,...,1\right)}\left(l_1, ..., l_1; l_2\right) \subset \mathcal{L}_{as\left(\frac{2}{n+2};1,...,1;1\right)}\left(l_1, ..., l_1; l_2\right)$$

e o resultado segue pelo Teorema 1.6.4. ■

Explorando o cotipo de E_i temos os seguintes resultados:

Proposição 3.5.6 *Sejam $s, r > 0$ e E_j espaços de Banach com cotipo s_j para todo $j = 1, ..., n$, e pelo menos um dos s_j é finito. Se*

$$\frac{1}{s} \leq \frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_n},$$

então

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; F\right) = \mathcal{L}_{as(s;b_1,...,b_n;r)}\left(E_1, ..., E_n; F\right)$$

para

$$b_j = 1 \text{ se } s_j < \infty \text{ e } b_j = \infty \text{ se } s_j = \infty.$$

Demonstração: Pelo Lema 1.4.7 temos

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; F\right) = \mathcal{L}_{as(s;b_1,...,b_n)}\left(E_1, ..., E_n; F\right).$$

e, pela Proposição 3.1.2, sabemos que

$$\mathcal{L}_{as(s;b_1,...,b_n)}\left(E_1, ..., E_n; F\right) \subset \mathcal{L}_{as(s;b_1,...,b_n;r)}\left(E_1, ..., E_n; F\right).$$

Logo, segue o resultado. ■

O próximo resultado é uma variação do Teorema 1.5.2:

Teorema 3.5.7 *Sejam $k \leq n$ e $r > 0$. Se E_i tem cotipo $s_i \geq 2, i = 1, ..., k$ e*

$$1 \leq p \leq q < \min_{1 \leq i \leq k} s_i^* \text{ se } s_i > 2 \text{ para algum } i = 1, ..., k$$

ou

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ se } s_i = 2 \text{ para todo } i = 1, ..., k,$$

então

$$\mathcal{L}_{as(s;q,...,q,t,...,t;r)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(\frac{sqp}{sk(q-p)+qp};p,...,p,t,...,t;r)}(E_1, ..., E_n; F),$$

para quaisquer espaços de Banach $E_{k+1}, ..., E_n, F$ e $s, t \geq 1$ (aqui q e p são repetidos k vezes). Em particular,

$$\mathcal{L}_{as(s;q,...,q;r)}(E_1, ..., E_n; F) = \mathcal{L}_{as(\frac{sqp}{sk(q-p)+qp};p,...,p;r)}(E_1, ..., E_n; F).$$

Demonstração: Como E_i tem cotipo $s_i \geq 2, i = 1, ..., k$, então, de [8] temos

$$l_p^w(E_i) = l_{qp/(q-p)} l_q^w(E_i)$$

para todo $i = 1, ..., k$ com

$$1 \leq p \leq q < \min_{1 \leq i \leq k} s_i^* \text{ se } s_i > 2 \text{ para algum } i = 1, ..., k$$

ou

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ se } s_i = 2 \text{ para todo } i = 1, ..., k.$$

Sejam $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E_i), i = 1, ..., k$, $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w(F^*)$ e $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in l_t^w(E_i)$ para $i = k+1, ..., n$. Assim

$$x_j^{(i)} = \alpha_j^{(i)} y_j^{(i)},$$

com $\left(\alpha_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{qp/(q-p)}$ e $\left(y_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E_i)$, para todo j e $i = 1, ..., k$.

Se $T \in \mathcal{L}_{as(s;q,...,q,t,...,t;r)}(E_1, ..., E_n; F)$, como

$$\frac{1}{s} + \frac{k(q-p)}{qp} = \frac{sk(q-p) + qp}{sqp},$$

então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{\frac{sqp}{sk(q-p)+qp}}\right)^{\frac{sk(q-p)+qp}{sqp}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left|\alpha_j^{(1)} \cdots \alpha_j^{(k)}\right| \left|\varphi_j\left(T\left(y_j^{(1)}, ..., y_j^{(k)}, x_j^{(k+1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|\right)^{\frac{sqp}{sk(q-p)+qp}}\right)^{\frac{sk(q-p)+qp}{sqp}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi_j\left(T\left(y_j^{(1)}, ..., y_j^{(k)}, x_j^{(k+1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\alpha_j^{(1)} \cdots \alpha_j^{(k)}\right|^{\frac{qp}{k(q-p)}}\right)^{k\left(\frac{q-p}{qp}\right)} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi_j\left(T\left(y_j^{(1)}, ..., y_j^{(k)}, x_j^{(k+1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right|^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\alpha_j^{(i)}\right|^{\frac{qp}{(q-p)}}\right)^{\frac{q-p}{qp}} < \infty
\end{aligned}$$

e concluímos que

$$\mathcal{L}_{as(s;q,...,q,t,...,t;r)}(E_1, ..., E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as\left(\frac{sqp}{sk(q-p)+qp};p,...,p,t,...,t;r\right)}(E_1, ..., E_n; F).$$

A outra inclusão é consequência da Proposição 3.1.4. ■

Observação 3.5.8 *Como*

$$\frac{qp}{k(q-p)+p} \leq p,$$

é claro que

$$\mathcal{L}_{as(q;q;r)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{as(p;p;r)}(E_1,...,E_n;F)$$

nas hipóteses do teorema anterior.

3.6 Polinômios absolutamente $(p;q;r)$-somantes

Relembremos o conceito de polinômios (p,q)-somante introduzido em [3]:

Definição 3.6.1 *Sejam $p,q>0, n\in\mathbb{N}$ e E,F espaços de Banach. Um polinômio n-homogêneo contínuo $P:E\to F$ é absolutamente (p,q)-somante, (ou (p,q)-somante) se*

$$(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p(E)$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$.

A seguir exploramos a versão polinomial da Definição 3.1.1:

Definição 3.6.2 *Sejam $p,q,r>0$. Um polinômio $P\in\mathcal{P}(^nE;F)$ é* absolutamente $(p;q;r)$-somante *se existir $C\geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi_j(P(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r}\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q}^n \tag{3.26}$$

para todo $m\in\mathbb{N}, x_j\in E$ e $\varphi_j\in F^*, j=1,...,m$.

Para evitar o caso trivial, sempre estará implícito que

$$\frac{1}{p}\leq\frac{n}{q}+\frac{1}{r}.$$

A justificativa é similar à do caso multilinear.

Denotaremos por $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}(^nE;F)$ (ou $\mathcal{P}^n_{as(p;q;r)}(^nE;F)$) o espaço vetorial formado por tais polinômios. A menor das constantes que satisfazem a desigualdade (3.26) define uma norma em $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}(^{n}E;F)$ se $p \geq 1$ (p-norma se $0 < p < 1$) e será denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}$.

Vamos verificar que a menor das constantes que satisfazem a desigualdade (3.26) define uma norma em $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}(^{n}E;F)$ se $p \geq 1$. É claro que $\|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{P}_{as(p;q;r)}(^{n}E;F)$ e que

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} = 0 \Leftrightarrow P = 0.$$

A desigualdade triangular também se verifica facilmente. De fato, para $P, Q \in \mathcal{P}_{as(p;q;r)}(^{n}E;F)$ e quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$ e $\varphi_j \in F^{*}$, $j = 1, ..., m$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(\left(P+Q\right)\left(x_j\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(\left(P\right)\left(x_j\right)\right) + \varphi_j\left(\left(Q\right)\left(x_j\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(\left(P\right)\left(x_j\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(\left(Q\right)\left(x_j\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} + \|Q\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}\right) \left\|\left(\varphi_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r} \left\|\left(x_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}^{n}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\|P+Q\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \leq \|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} + \|Q\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}.$$

Se $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(\lambda P(x_j)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= |\lambda| \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(P(x_j)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\lambda| \, \|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \left\|\left(\varphi_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r} \left\|\left(x_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}^{n}.\end{aligned}$$

Assim

$$\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \leq |\lambda| \, \|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}. \tag{3.27}$$

De

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_j\left(\lambda P(x_j)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \left\|\left(\varphi_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r} \left\|\left(x_j\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}^{n},$$

temos

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi_j\left(P(x_j)\right)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r}\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q}^n.$$

Logo

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \tag{3.28}$$

e, de (3.27) e (3.28), segue que

$$\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} = |\lambda|\,\|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}.$$

Assim como no Corolário 3.1.3, temos um resultado similar para polinômios:

Proposição 3.6.3 $\mathcal{P}_{as(p;q;\infty)}\left({}^nE;F\right) = \mathcal{P}_{as(p;q)}\left({}^nE;F\right).$

Demonstração: Sejam $\varphi_1,...,\varphi_m \in F^*$ e $x_1,...,x_m \in E$ e m um inteiro positivo. Se $P \in \mathcal{P}_{as(p;q)}\left({}^nE;F\right)$, então

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi_j\left(Px_j\right)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\|\varphi_j\|\,\|P\left(x_j\right)\|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|P\left(x_j\right)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Logo $P \in \mathcal{P}_{as(p;q;\infty)}\left({}^nE;F\right)$.

Agora, seja $P \in \mathcal{P}_{as(p;q;\infty)}({}^nE;F)$. Então

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m}\|P\left(x_j\right)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{m}\sup_{\varphi_j\in B_{F^*}}|\varphi_j\left(P\left(x_j\right)\right)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \sup_{\varphi_1,...,\varphi_m\in B_{F^*}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi_j\left(P\left(x_j\right)\right)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \|P\|_{as(p;q;\infty)}\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q}^n,\end{aligned}$$

para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $x_1,...,x_m \in E$. Assim P é absolutamente $(p;q)$-somante. ■

O próximo resultado relaciona $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}\left({}^nE;F\right)$ com $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}\left({}^nE;F\right)$:

Proposição 3.6.4 *$P \in \mathcal{P}\left({}^{n}E;F\right)$ é absolutamente $(p;q;r)$-somante se, e somente se, $\check{P}$ pertence a $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$. Temos ainda que*

$$\left\|\check{P}\right\|_{as(p;q;r)} \leq \frac{n^n}{n!}\left\|P\right\|_{as(p;q;r)}.$$

Demonstração: Claro que se $\check{P}$ é absolutamente $(p;q;r)$-somante então P é absolutamente $(p;q;r)$-somante, pois

$$\varphi\left(P\left(x\right)\right) = \varphi\left(\check{P}\left(x,...,x\right)\right)$$

para qualquer $\varphi \in F^*$ e $x \in E$.

Reciprocamente, suponha que P é absolutamente $(p;q;r)$-somante. Sejam $\varphi_j \in F^*$ e $x_j^{(i)} \in E, i = 1,...,n, j = 1,...,m$. Pela Fórmula da Polarização, para cada j, obtemos

$$\check{P}\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1...\varepsilon_n P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{(n)}\right).$$

Assim,

$$\varphi_j\left(\check{P}\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1...\varepsilon_n \varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right).$$

Note que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(\check{P}\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p \\
&= \left(\frac{1}{n!2^n}\right)^p\sum_{j=1}^{m}\left|\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1...\varepsilon_n\varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p \\
&\leq \left(\frac{1}{n!2^n}\right)^p\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left|\varepsilon_1\right|...\left|\varepsilon_n\right|\left|\varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right)\right|\right)^p \\
&= \left(\frac{1}{n!2^n}\right)^p\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left|\varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right)\right|\right)^p.
\end{aligned}$$

Como P é absolutamente $(p;q;r)$-somante, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(\check{P}\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{1/p}\\
&\leq \frac{1}{n!2^n}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left|\varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)}+\cdots+\varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right)\right|\right)^p\right)^{1/p}\\
&= \frac{1}{n!2^n}\left\|\left(\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left|\varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)}+\cdots+\varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right)\right|\right)_{j=1}^{m}\right\|_p\\
&= \frac{1}{n!2^n}\left\|\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left(\left|\varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)}+\cdots+\varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right)\right|\right)_{j=1}^{m}\right\|_p\\
&\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left\|\left(\left|\varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)}+\cdots+\varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right)\right|\right)_{j=1}^{m}\right\|_p\\
&= \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)}+\cdots+\varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\|P\|_{as(p;q;r)}\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r}\left\|\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)}+\cdots+\varepsilon_n x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}^{n}\\
&\leq \frac{1}{n!2^n}\|P\|_{as(p;q;r)}\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left(\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}+\cdots+\left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}\right)^n.
\end{aligned}$$

Então, se $\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}\leq 1$ para todo i e $\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r}\leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_j\left(\check{P}\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{1/p} \qquad (3.29)\\
&\leq \frac{1}{n!2^n}\|P\|_{as(p;q;r)}\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\left(\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}+\cdots+\left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}\right)^n\\
&\leq \frac{1}{n!2^n}\|P\|_{as(p;q;r)}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}n^n\\
&= \frac{n^n}{n!}\|P\|_{as(p;q;r)}.
\end{aligned}$$

Logo, se $\varphi_j \in F^*$ e $x_j^{(i)} \in E, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$, de (3.29) temos

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\varphi_j}{\|(\varphi_k)_{k=1}^m\|_{w,r}} \left(\check{P} \left(\frac{x_j^{(1)}}{\left\| \left(x_k^{(1)}\right)_{k=1}^m \right\|_{w,q}}, ..., \frac{x_j^{(n)}}{\left\| \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^m \right\|_{w,q}} \right) \right) \right|^p \right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{n^n}{n!} \|P\|_{as(p;q;r)}.$$

Portanto

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left| \varphi_j \left(\check{P} \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right) \right) \right|^p \right)^{1/p}$$
$$= \left\| (\varphi_j)_{j=1}^m \right\|_{w,r} \prod_{k=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^m \right\|_{w,q} \times$$
$$\times \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\varphi_j}{\|(\varphi_k)_{k=1}^m\|_{w,r}} \left(\check{P} \left(\frac{x_j^{(1)}}{\left\| \left(x_k^{(1)}\right)_{k=1}^m \right\|_{w,q}}, ..., \frac{x_j^{(n)}}{\left\| \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^m \right\|_{w,q}} \right) \right) \right|^p \right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{n^n}{n!} \|P\|_{as(p;q;r)} \left\| (\varphi_j)_{j=1}^m \right\|_{w,r} \prod_{k=1}^{m} \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^m \right\|_{w,q}.$$

Logo $\check{P}$ é absolutamente $(p;q;r)$-somante e

$$\left\| \check{P} \right\|_{as(p;q;r)} \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|_{as(p;q;r)}.$$

■

Como se podia esperar, $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}$ é um ideal de polinômios:

Proposição 3.6.5 *$\mathcal{P}_{as(p;q;r)}$ é um ideal de polinômios.*

Demonstração: Se P é um polinômio de tipo finito, então $\check{P}$ é de tipo finito. Logo $\check{P} \in \mathcal{L}_{as(p;q;r)}$ e, pela proposição anterior, $P \in \mathcal{P}_{as(p;q;r)}$. As outras propriedades também são facilmente verificadas. ■

A seguir mostramos que o ideal $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}$ têm caracterizações similares às do caso multilinear:

Teorema 3.6.6 *Para $P \in \mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$ são equivalentes:*

(i) $P \in \mathcal{P}_{as(p;q;r)}\left({}^nE;F\right);$

(ii) Para todo $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w(F^*)$ *e* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$ *tem-se*

$$(\varphi_j(P(x_j)))_{j=1}^{\infty} \in l_p(\mathbb{K});$$

(iii) Existe $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(P(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w;r} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^{n} \tag{3.30}$$

sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w(F^*)$ *e* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$.

Demonstração: As implicações $(iii) \Rightarrow (i)$, $(iii) \Rightarrow (ii)$ e $(i) \Rightarrow (iii)$ são simples.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se $(\varphi_j(P(x_j)))_{j=1}^{\infty} \in l_p(\mathbb{K})$ para todo $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w(F^*)$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(E)$, pela Proposição 3.6.4 e pelo Teorema 3.2.1, temos

$$\left(\varphi_j\left(\check{P}\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p(\mathbb{K}).$$

Então, a aplicação

$$\Phi\left(\check{P}\right) : l_q^w(E) \times \cdots \times l_q^w(E) \times l_r^w(F^*) \longrightarrow l_p$$

dada por

$$\Phi\left(\check{P}\right)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}, (\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\varphi_j\left(\check{P}\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty} \tag{3.31}$$

é contínua (veja demonstração do Teorema 3.2.1). Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(P(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left\|(\varphi_j(P(x_j)))_{j=1}^{\infty}\right\|_p \qquad (3.32)\\
&= \left\|\left(\varphi_j\left(\check{P}(x_j, ..., x_j)\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \\
&= \left\|\Phi\left(\check{P}\right)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}, ..., (x_j)_{j=1}^{\infty}, (\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p \\
&\leq \left\|\Phi\left(\check{P}\right)\right\| \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,r} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^{n}.
\end{aligned}$$

■

Observação 3.6.7 *Note que de (3.32) temos*

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \leq \left\|\Phi\left(\check{P}\right)\right\|.$$

Proposição 3.6.8 *$\mathcal{P}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$ é completo com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}$ se $p \geq 1$ (quasi-Banach se $0 < p < 1$).*

Demonstração: Seja $(P_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$ e considere a aplicação usada na demonstração do teorema anterior

$$\begin{aligned} &\Phi : \mathcal{L}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(l_q^w(E),...,l_q^w(E),l_r^w(F^*);l_p\right) \\ &T \longrightarrow \Phi(T). \end{aligned}$$

Como $P_m \in \mathcal{P}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$ para todo m, pela Proposição 3.6.4, $\check{P}_m \in \mathcal{L}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$ e

$$\left\|\check{P}_m\right\|_{as(p;q;r)} \leq \frac{n^n}{n!}\|P_m\|_{as(p;q;r)}.$$

Segue que $\left(\check{P}_m\right)_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$ e, como Φ é um isomorfismo, $\left(\Phi\left(\check{P}_m\right)\right)_{m=1}^{\infty}$ também é de Cauchy em $\mathcal{L}\left(l_q^w(E),...,l_q^w(E),l_r^w(F^*);l_p\right)$. Portanto $\left(\Phi\left(\check{P}_m\right)\right)_{m=1}^{\infty}$ é convergente em $\mathcal{L}\left(l_q^w(E),...,l_q^w(E),l_r^w(F^*);l_p\right)$, digamos que

$$\Phi\left(\check{P}_m\right) \to S \in \mathcal{L}\left(l_q^w(E),...,l_q^w(E),l_r^w(F^*);l_p\right). \tag{3.33}$$

Defina a seguinte projeção

$$\begin{aligned} \pi_k : l_p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (z_j)_{j=1}^{\infty} &\longrightarrow z_k. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} \pi_k\left(\Phi\left(\check{P}_m\right)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right) \\ &= \pi_k\left(S\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right), \end{aligned} \tag{3.34}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Note que $\left(\check{P}_m\right)_{m=1}^{\infty}$ é convergente em $\mathcal{L}\left({}^{n}E;F\right)$, pois por ser sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$ é também sequência de Cauchy em $\mathcal{L}\left({}^{n}E;F\right)$. Logo, existe

$T\in\mathcal{L}\left({}^{n}E;F\right)$ tal que $\check{P}_m\to T$. Assim,

$$\varphi_j\left(\check{P}_m\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\longrightarrow\varphi_j\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Como

$$\pi_k\left(\Phi\left(\check{P}_m\right)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},\left(\varphi_j\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)=\varphi_k\left(\check{P}_m\left(x_k^{(1)},...,x_k^{(n)}\right)\right),\quad(3.35)$$

para todo $k\in\mathbb{N}$, fazendo $m\to\infty$, de (3.35) temos

$$\lim_{m\to\infty}\pi_k\left(\Phi\left(\check{P}_m\right)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},\left(\varphi_j\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)=\varphi_k\left(T\left(x_k^{(1)},...,x_k^{(n)}\right)\right).\quad(3.36)$$

para todo $k\in\mathbb{N}$. De (3.34) e (3.36) temos

$$\pi_k\left(S\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},\left(\varphi_j\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)=\varphi_k\left(T\left(x_k^{(1)},...,x_k^{(n)}\right)\right)$$

para todo k. Logo

$$\left(\varphi_k\left(T\left(x_k^{(1)},...,x_k^{(n)}\right)\right)\right)_{k=1}^{\infty}=S\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},\left(\varphi_j\right)_{j=1}^{\infty}\right)$$

e portanto

$$\left(\varphi_k\left(T\left(x_k^{(1)},...,x_k^{(n)}\right)\right)\right)_{k=1}^{\infty}\in l_p.$$

Assim concluímos que $T\in\mathcal{L}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$ e

$$\Phi\left(T\right)=S.$$

De (3.33) temos então

$$\Phi\left(\check{P}_m\right)\to\Phi\left(T\right)$$

em $\mathcal{L}\left(l_q^w\left(E\right),...,l_q^w\left(E\right),l_r^w(F^*);l_p\right)$. Logo

$$\begin{aligned}&\left\|\check{P}_m-T\right\|_{as(p;q;r)}\overset{\text{Observação 3.2.2}}{=}\left\|\Phi\left(\check{P}_m-T\right)\right\|\\&=\left\|\Phi\left(\check{P}_m\right)-\Phi\left(T\right)\right\|\to 0\end{aligned}$$

e portanto $\check{P}_m\to T\in\mathcal{L}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$ e, finalmente, $P_m\to\hat{T}\in\mathcal{P}_{as(p;q;r)}\left({}^{n}E;F\right)$. ■

Proposição 3.6.9 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e*

$$id_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : x \longrightarrow x^n.$$

Então

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} = 1.$$

Demonstração: Note que

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \geq \|id_{\mathbb{K}^n}\| = 1.$$

Basta mostrar que $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \leq 1$. Se $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w(\mathbb{K}^*)$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(\mathbb{K})$, então

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(id_{\mathbb{K}^n}(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi_j\left(x_j^n\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^n\right|^{\frac{q}{n}}\right)^{\frac{n}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q\right)^{\frac{n}{q}} \\
&= \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_r \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q^n \\
&= \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,r} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^n.
\end{aligned}$$

Logo

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} = 1.$$

■

A seguir, na Proposição 3.6.12, mostraremos que $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}$ é um ideal completo de polinômios.

Lema 3.6.10 *([54, Lemma 2.1])Seja $1 \leq p < \infty$ e $(\varphi_j)_{j=1}^{m} \in l_r^w(F^*)$. Então*

$$\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r} = \sup_{\psi \in B_{F^{**}}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\psi(\varphi_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \sup_{y \in B_F} \left\|(\varphi_j(y))_{j=1}^{m}\right\|_r.$$

Observação 3.6.11 *Sejam $t \in \mathcal{L}(F;H)$ e $\varphi_j \in H^*, j = 1,...,m$. Do lema anterior temos*

$$\begin{aligned}\left\|(\varphi_j \circ t)_{j=1}^m\right\|_{w,r} &= \sup_{y\in B_F}\left\|(\varphi_j(t(y)))_{j=1}^m\right\|_r \\ &= \|t\| \sup_{y\in B_F}\left\|\left(\varphi_j\left(\frac{t(y)}{\|t\|}\right)\right)_{j=1}^m\right\|_r \\ &\leq \|t\| \sup_{h\in B_H}\left\|(\varphi_j(h))_{j=1}^m\right\|_r \\ &= \|t\|\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r}.\end{aligned}$$

Proposição 3.6.12 *$\mathcal{P}_{as(p;q;r)}$ é um ideal completo de polinômios.*

Demonstração: Temos que mostrar apenas que $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}$ satisfaz a propriedade de ideal e a desigualdade da Definição 1.1.6.

Sejam $u \in \mathcal{L}(G;E), P \in \mathcal{P}_{as(p;q;r)}(^nE;F)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Assim

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^m |\varphi_j(t\circ P\circ u(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.37)\\ &= \left(\sum_{j=1}^m |(\varphi_j\circ t)(P\circ u(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}\left\|(\varphi_j\circ t)_{j=1}^m\right\|_{w,r}\left\|(u(x_j))_{j=1}^m\right\|_{w,q}^n \\ &\leq \|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}\|u\|^n\left\|(\varphi_j\circ t)_{j=1}^m\right\|_{w,r}\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q}^n \\ &\overset{\text{Observação 3.6.11}}{\leq} \|t\|\,\|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}\|u\|^n\left\|(\varphi_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r}\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q}^n.\end{aligned}$$

Segue que $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}$ satisfaz a propriedade de ideal e, de (3.37), temos

$$\|t\circ P\circ u\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}} \leq \|t\|\,\|P\|_{\mathcal{P}_{as(p;q;r)}}\|u\|^n.$$

Portanto $\mathcal{P}_{as(p;q;r)}$ é um ideal completo de polinômios. ∎

3.7 Coerência e compatibilidade

Como $\mathcal{P}^n_{as(p;q;\infty)} = \mathcal{P}^n_{as(p;q)}$ e $\mathcal{P}^n_{as(p;q)}$ não é compatível (veja [26]) com o ideal dos operadores absolutamente somantes (pelo menos para $p = q = 1$), segue que, em geral, $\mathcal{P}^n_{as(p;q;\infty)}$ não é um ideal compatível com o ideal dos operadores lineares $(p;q;\infty)$-somantes. Além disso, como em geral $\left(\mathcal{P}^n_{as(p;q)}\right)_{n=1}^{\infty}$ não é um tipo de holomorfia (veja [57]), o mesmo ocorrerá para $\left(\mathcal{P}^n_{as(p;q;r)}\right)_{n=1}^{\infty}$, pelo menos para $r = \infty$. Essas são deficiências desse ideal que serão superadas com a definição do próximo capítulo. Mais precisamente, a definição apresentada no próximo capítulo irá gerar sequências coerentes de ideais de polinômios, e compatíveis com o ideal $\mathcal{L}_{as(p;q;r)}$, segundo as definições de [26].

Capítulo 4

Aplicações multilineares múltiplo $(p; q_1, ..., q_n; r)$-somantes

4.1 Aplicações multilineares múltiplo $(p; q_1, ..., q_n; r)$-somantes

Definição 4.1.1 *Sejam $n \in \mathbb{N}, p, r, q_1, ..., q_n \geq 1$ e $E_1, ..., E_n, F$ espaços de Banach. Uma aplicação multilinear contínua $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é* múltiplo absolutamente $(p; q_1, ..., q_n; r)$-somante *(ou, simplesmente,* múltiplo $(p; q_1, ..., q_n; r)$-somante*) se existir $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,...,j_n} \left(T \left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.1}$$
$$\leq C \left\| (\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^m \right\|_{w,r} \left\| \left(x_{j_1}^{(1)} \right)_{j_1=1}^m \right\|_{w,q_1} \cdots \left\| \left(x_{j_n}^{(n)} \right)_{j_n=1}^m \right\|_{w,q_n}$$

para todo $m \in \mathbb{N}, \varphi_{j_1,...,j_n} \in F^*$ e $x_j^{(i)} \in E_i, i = 1, ..., n, j_i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., m$.

Não é difícil demonstrar que a classe de todas as aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que são múltiplo $(p; q_1, ..., q_n; r)$-somantes é um subespaço de $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$. De fato, sejam T_1 e T_2 aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em

F múltiplo $(p;q_1,...,q_n;r)$-somantes e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então existem $C_1 \geq 0$ e $C_2 \geq 0$ tais que

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_1\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2}$$
$$\leq C_1\left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{m}\right\|_{w,r}\left\|\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{m}\right\|_{w,q_1}\cdots\left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{m}\right\|_{w,q_n}$$

e

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_2\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.3}$$
$$\leq C_2\left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{m}\right\|_{w,r}\left\|\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{m}\right\|_{w,q_1}\cdots\left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{m}\right\|_{w,q_n}$$

para todo $m \in \mathbb{N}, \varphi_{j_1,...,j_n} \in F^*$ e $x_j^{(i)} \in E_i, i = 1,...,n, j_i = 1,...,m$ e $j = 1,...,m$. Assim,

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_1+\alpha T_2\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_1\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\left|\alpha\right|\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_2\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\overset{(4.2)\text{ e }(4.3)}{\leq}\left(C_1+\left|\alpha\right|C_2\right)\left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{m}\right\|_{w,r}\left\|\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{m}\right\|_{w,q_1}\cdots\left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{m}\right\|_{w,q_n}$$

para todo $m \in \mathbb{N}, \varphi_{j_1,...,j_n} \in F^*$ e $x_j^{(i)} \in E_i, i = 1,...,n, j_i = 1,...,m$ e $j = 1,...,m$. Portanto $T_1 + \alpha T_2$ é múltiplo $(p;q_1,...,q_n;r)$-somante.

O espaço vetorial formado pelas aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que são múltiplo $(p;q_1,...,q_n;r)$-somantes será denotado por $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$ (ou $\mathcal{L}^n_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$). Quando $q_1 = \cdots = q_n = q$, escrevemos $\mathcal{L}_{mas(p;q;r)}(E_1,...,E_n;F)$. A menor das constantes C que satisfazem a desigualdade (4.1) define uma norma em $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$ e denotaremos por $\|\cdot\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}$.

É interessante perceber que a definição acima engloba o conceito de aplicações múltiplo somantes, como mostram as próximas proposições:

Proposição 4.1.2 *Seja n um número natural. Então para quaisquer espaços de Banach $E_1,...,E_n,F$ tem-se*

$$\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;\infty)}\left(E_1,...,E_n;F\right)\subset\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right).$$

Demonstração: Seja $T\in\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;\infty)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\sup_{\varphi\in B_{F^*}}\left|\varphi\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\sup_{\varphi\in B_{F^*}}\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\varphi\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n,\infty)}\left\|\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{m}\right\|_{w,q_1}\cdots\left\|\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{m}\right\|_{w,q_n},
\end{aligned}$$

para quaisquer $m\in\mathbb{N}$, e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\in l_{q_i}^{w}\left(E_i\right),i=1,...,n$. Portanto T é múltiplo $(p;q_1,\ldots,q_n)$-somante. ■

De modo análogo ao que observamos no capítulo anterior, há um resultado de inclusão natural, envolvendo as classes das aplicações multilineares múltiplo $(p;q_1,...,q_n)$-somantes e as múltiplo $(p;q_1,...,q_n;r)$-somantes:

Proposição 4.1.3 *Seja n um número natural. Então para quaisquer espaços de Banach $E_1,...,E_n,F$ tem-se*

$$\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n)}\left(E_1,...,E_n;F\right)\subset\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\left(E_1,...,E_n;F\right)$$

e

$$\|\cdot\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\leq\|\cdot\|_{mas(p;q_1,...,q_n)}$$

para todo $r\geq1$.

Demonstração: Sejam $m\in\mathbb{N},\varphi_{j_1,...,j_n}\in F^*$ e $x_j^{(i)}\in E_i,i=1,...,n$ e $j=1,...,m$. Se

$T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; F)$, então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left| \varphi_{j_1,...,j_n} \left(T \left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)} \right) \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left(\|\varphi_{j_1,...,j_n}\| \left\| T \left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)} \right) \right\| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\| (\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}_m} \right\|_\infty \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\| T \left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\| (\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}_m} \right\|_{w,r} \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\| T \left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\| (\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}_m} \right\|_{w,r} \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n)} \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_{j_i}^{(i)} \right)_{j_i=1}^{m} \right\|_{w,q_k}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)} \leq \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n)}.$$

■

A próxima proposição é importante para mostrar que se $\frac{1}{p} > \frac{1}{q_i} + \frac{1}{r}$ para algum i, então $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1, ..., E_n; F) = \{0\}$.

Proposição 4.1.4 *Se $T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1, ..., E_n; F)$, então para qualquer $a \in E_1$, a aplicação*

$$T_a : E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$$
$$T_a(x_2, ..., x_n) = T(a, x_2, ..., x_n)$$

é múltiplo $(p; q_2, ..., q_n; r)$-somante e

$$\|T_a\|_{mas(p;q_2,...,q_n;r)} \leq \|a\| \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}.$$

Demonstração: Sejam $\left(x_j^{(i)} \right)_{j=1}^{m} \in l_{q_i}^w(E_i), \varphi_{j_2...j_n} \in F^*$ para $j_i = 1, ..., m$ e

$i = 2, ..., n$. Considere ainda $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^m = (a, 0, ...)$ e

$$\varphi_{j_1,...,j_n} = \begin{cases} \varphi_{j_2...j_n}, \text{ se } j_1 = 1 \\ 0, \text{ se } j_1 \neq 1. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_2,...,j_n=1}^m \left|\varphi_{j_2...j_n}\left(T_a\left(x_{j_2}^{(2)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j_2,...,j_n=1}^m \left|\varphi_{j_2...j_n}\left(T\left(a, x_{j_2}^{(2)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^m \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)} \left\|\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}_m}\right\|_{w,r} \prod_{i=1}^n \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i} \\
&= \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)} \|a\| \left\|\left(\varphi_{j_2,...,j_n}\right)_{j_2,...,j_n \in \mathbb{N}_m}\right\|_{w,r} \prod_{i=2}^n \left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 4.1.5 *Se $T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1, ..., E_n; F)$ então, para qualquer $a_k \in E_k$, com $k = 1, ..., n-1$, a aplicação*

$$T_{a_1...a_{n-1}} : E_n \longrightarrow F$$
$$T_{a_1...a_{n-1}}(x_n) = T(a_1, ..., a_{n-1}, x_n)$$

é absolutamente $(p; q_n; r)$-somante e

$$\left\|T_{a_1...a_{n-1}}\right\|_{as(p;q_n;r)} \leq \|a_1\| ... \|a_{n-1}\| \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}.$$

Observação 4.1.6 *Se $\frac{1}{p} > \frac{1}{q_i} + \frac{1}{r}$ para algum i, então*

$$\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1, ..., E_n; F) = \{0\}.$$

De fato, se, por exemplo, $T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$*, com*

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{q_n} + \frac{1}{r},$$

pelo resultado acima, temos

$$T_{a_1,...,a_{n-1}} \in \mathcal{L}_{as(p;q_n;r)}(E_n;F)$$

para todo $a_1 \in E_1,...,a_{n-1} \in E_{n-1}$*. Segue que* $T_{a_1,...,a_{n-1}} = 0$ *e portanto* $T = 0$*. Assim, para evitar trivialidades, neste capítulo sempre vamos supor* $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_i} + \frac{1}{r}$ *para todo* i*.*

4.2 Caracterizações por desigualdades

Como acontece com as outras classes estudadas nesse trabalho, para a classe $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$ também há uma caracterização por desigualdades:

Teorema 4.2.1 *Seja* $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$*. São equivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$*;*

(ii) Existe $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_1}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i} \tag{4.4}$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w(E_i)$*,* $i = 1,...,n$ *e* $\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} \in l_r^w(F^*,\mathbb{N}^n)$*;*

(iii) Para quaisquer $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w(E_i)$*,* $i = 1,...,n$ *e* $\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} \in l_r^w(F^*,\mathbb{N}^n)$ *tem-se*

$$\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} \in l_p(\mathbb{K},\mathbb{N}^n).$$

O ínfimo das constantes C *que satisfazem a desigualdade (4.4) define uma norma em* $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$ *e será denotada por* $\|\cdot\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}$*.*

Demonstração: As implicações $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(ii) \Rightarrow (i)$ são triviais.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Defina

$$\Phi(T) : l_{q_1}^w(E_1) \times \cdots \times l_{q_n}^w(E_n) \times l_r^w(F^*, \mathbb{N}^n) \to l_p(\mathbb{N}^n)$$

por

$$\Phi(T)\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, (\varphi_j)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}.$$

Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência em $l_{q_1}^w(E_1) \times \cdots \times l_{q_n}^w(E_n) \times l_r^w(F^*, \mathbb{N}^n)$ com

$$x_m \to x \in l_{q_1}^w(E_1) \times \cdots \times l_{q_n}^w(E_n) \times l_r^w(F^*, \mathbb{N}^n) \tag{4.5}$$

e

$$\lim_{m\to\infty} \Phi(T)(x_m) = (z_j)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} \in l_p(\mathbb{N}^n).$$

Escreveremos

$$x = \left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, (\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right)$$

e, para cada m natural, denotaremos

$$x_m = \left(\left(x_{m,j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{m,j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, \left(\varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right). \tag{4.6}$$

Logo

$$\begin{aligned}
(z_j)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} &= \lim_{m\to\infty} \Phi(T)(x_m) \\
&= \lim_{m\to\infty} \Phi(T)\left(\left(x_{m,j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{m,j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, \left(\varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)}\left(T\left(x_{m,j_1}^{(1)}, ..., x_{m,j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

e assim

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)}\left(T\left(x_{m,j_1}^{(1)}, ..., x_{m,j_n}^{(n)}\right)\right) = z_{j_1,...,j_n} \tag{4.8}$$

para todo $j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$.

De (4.5) e (4.6) segue que

$$\left(x_{m,j}^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \overset{m\to\infty}{\to} \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \text{ em } l_{q_i}^w(E_i)$$

para todo $i = 1, ..., n$ e

$$\left(\varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)}\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}} \overset{m\to\infty}{\to} \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}} \text{ em } l_r^w \left(F^*\right).$$

Daí

$$x_{m,j}^{(i)} \overset{m\to\infty}{\to} x_j^{(i)} \text{ em } E_i \tag{4.9}$$

para todo $j \in \mathbb{N}, i = 1, ..., n$ e

$$\varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)} \overset{m\to\infty}{\to} \varphi_{j_1,...,j_n} \text{ em } F^* \tag{4.10}$$

para todo $j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$. Como T é contínua, de (4.9), temos

$$\lim_{m\to\infty} T\left(x_{m,j_1}^{(1)}, ..., x_{m,j_n}^{(n)}\right) = T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right) \tag{4.11}$$

e de (4.10) e (4.11)

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)} \left(T\left(x_{m,j_1}^{(1)}, ..., x_{m,j_n}^{(n)}\right)\right) = \varphi_{j_1,...,j_n} \left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right) \tag{4.12}$$

para todo $j_1, ..., j_n \in \mathbb{N}$.

Assim

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \Phi\left(T\right)\left(x_m\right) &= \lim_{m\to\infty} \Phi\left(T\right)\left(\left(x_{m,j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{m,j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, \left(\varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)}\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\varphi_{j_1,...,j_n}^{(m)} \left(T\left(x_{m,j_1}^{(1)}, ..., x_{m,j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}} \\
&\overset{(4.7)}{=} \left(z_j\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}} \\
&\overset{(4.8) \text{ e } (4.12)}{=} \left(\varphi_{j_1,...,j_n} T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}} \\
&= \Phi\left(T\right)\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}}\right) \\
&= \Phi\left(T\right)\left(x\right),
\end{aligned}$$

e portanto $\Phi\left(T\right)$ tem gráfico fechado. Logo, pelo Teorema do Gráfico Fechado para aplicações multilineares, $\Phi\left(T\right)$ é contínua.

Logo

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&=\left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{p} \\
&=\left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},...,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty},\left(\varphi_{j}\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right)\right\|_{p} \\
&\leq\left\|\Phi\left(T\right)\right\|\left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_{j}^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i}
\end{aligned}\tag{4.13}$$

sempre que $\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\in l_r^w\left(F^*,\mathbb{N}^n\right)$ e $\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty}\in l_{q_i}^w\left(E_i\right)$ para todo $i=1,...,n$.

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi\left(T\right)\right\| &= \sup_{\substack{\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i}\leq 1\\ \left\|\left(\varphi_j\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,r}\leq 1}}\left\|\Phi\left(T\right)\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},...,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty},\left(\varphi_{j}\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right)\right\|_{p} \\
&= \sup_{\substack{\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i}\leq 1\\ \left\|\left(\varphi_j\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,r}\leq 1}}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\substack{\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i}\leq 1\\ \left\|\left(\varphi_j\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,r}\leq 1}}\left\|T\right\|_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_{j}^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i}
\end{aligned}\tag{4.14}$$

Segue de (4.13) e de (4.14) que

$$\left\|T\right\|_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)}=\left\|\Phi\left(T\right)\right\|.\tag{4.15}$$

Para se provar que $\left\|T\right\|_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)}$ é uma norma, basta notar que a aplicação

$$\Phi:\mathcal{L}_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\left(E_1,...,E_n;F\right)\longrightarrow\mathcal{L}\left(l_{q_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times l_{q_n}^w\left(E_n\right)\times l_r^w\left(F^*,\mathbb{N}^n\right);l_p\left(\mathbb{N}^n\right)\right)$$

é linear, injetiva e preserva a norma.

De fato, sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}
&\Phi(T_1+\lambda T_2)\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right)\\
&=\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\left((T_1+\lambda T_2)\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\\
&=\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_1\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)+\lambda T_2\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\\
&=\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_1\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}+\lambda\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T_2\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right)\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Assim, Φ é linear. De (4.15) segue que Φ preserva norma e, consequentemente, é injetiva.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sejam $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^{w}(E_i), i = 1,...,n$ e $(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} \in l_r^w(F^*,\mathbb{N}^n)$. Então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\sup_m\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\sup_m\left[C\sup_{\phi\in B_{F^{**}}}\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}|\phi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^r\right)^{\frac{1}{r}}\prod_{i=1}^{n}\left(\left(\sup_{\phi\in B_{E^*}}\sum_{j=1}^{m}\left|\phi\left(x_j^{(i)}\right)\right|^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}}\right)\right]\\
&\leq C\left(\sup_m\sup_{\phi\in B_{F^{**}}}\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}|\phi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(\sup_m\sup_{\phi\in B_{E^*}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\phi\left(x_j^{(i)}\right)\right|^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}}\right)\\
&=C\sup_{\phi\in B_{F^{**}}}\sup_m\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}|\phi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^r\right)^{\frac{1}{r}}\prod_{i=1}^{n}\left(\sup_{\phi\in B_{E^*}}\sup_m\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\phi\left(x_j^{(i)}\right)\right|^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}}\right)\\
&=C\sup_{\phi\in B_{F^{**}}}\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}|\phi(\varphi_{j_1,...,j_n})|^r\right)^{\frac{1}{r}}\prod_{i=1}^{n}\left(\sup_{\phi\in B_{E^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\phi\left(x_j^{(i)}\right)\right|^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}}\right)\\
&=C\left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i}.
\end{aligned}$$

■

4.3 Relação com as aplicações múltiplo $(p; q_1, ..., q_n)$-somantes

Em [49, Proposição 2.8] o seguinte resultado é demonstrado:

Teorema 4.3.1 *Se* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F), u_i \in \mathcal{L}_{as(p_i;q_i)}(G_i; E_i), i = 1, ..., n,$ *então* $T \circ (u_1, ..., u_n)$ *é múltiplo* $(p; q_1, ..., q_n)$*-somante e*

$$\|T \circ (u_1, ..., u_n)\|_{mas(p;q_1,...,q_n)} \leq \|T\| \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{as(p;q_i)},$$

com $p \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i\}$.

Uma combinação do resultado anterior com a Proposição 4.1.3 garante o seguinte resultado:

Corolário 4.3.2 *Sejam* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *e* $u_i \in \mathcal{L}_{as(p_i;q_i)}(G_i; E_i)$, *para todo* $i = 1, ..., n$. *Então* $T \circ (u_1, ..., u_n)$ *é múltiplo* $(p; q_1, ..., q_n; r)$*-somante, com* $p \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i\}$ *e* $r \geq 1$.

O próximo resultado é o análogo da Proposição 3.4.3 em nosso novo contexto:

Proposição 4.3.3 *Seja n um número natural. Então para quaisquer espaços de Banach* $E_1, ..., E_n$ *tem-se*

$$\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n)}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}_{mas(t;q_1,...,q_n;r)}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K})$$

para

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}.$$

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$. Assim

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{j_1...j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^t\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\left(\|\varphi_{j_1,...,j_n}\|\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|\right)^t\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\|\varphi_{j_1,...,j_n}\|^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{j_i}^{(1)},...,x_{j_i}^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n)}\left\|\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_r\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i} \\
&= \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n)}\left\|\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i},
\end{aligned}$$

para quaisquer $\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}} \in l_r^w(\mathbb{K}^*,\mathbb{N}^n)$ e $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w(E_i)\, i = 1,...,n$. Portanto $T \in \mathcal{L}_{mas(t;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;\mathbb{K})$. ■

Assim como no capítulo anterior, no contexto das aplicações múltiplo $(p;q_1,...,q_n;r)$-somantes também há resultados relacionados ao tipo do espaço F:

Proposição 4.3.4 *Seja F um espaço de Banach de tipo p^*. Então*

$$\mathcal{L}_{mas(q;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{mas(s;q_1,...,q_n;1)}(E_1,...,E_n;F)$$

onde

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}_{mas(q;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F)$. Se $\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}}^{\infty} \in$

$l_1^w(F^*, \mathbb{N})$, $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w(E_i)$, como F^* tem cotipo p, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left(\left\|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\right\|\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|id_{F^*}\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

∎

Corolário 4.3.5 *Se F tem tipo 2, então*

$$\mathcal{L}_{mas(2;q_1,\ldots,q_n)}(E_1,\ldots,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{mas(1;q_1,\ldots,q_n;1)}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

Em particular,

$$\mathcal{L}_{mas(2;1)}(E_1,\ldots,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{mas(1;1;1)}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

4.4 Resultados de coincidência

Em suas teses de doutorado, ambas defendidas em 2003, de forma independente, D. Pérez-García [58, Teorema 5.2] e M.L.V. Souza [70, Teorema 1.7.3] demonstraram que

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;l_2) = \mathcal{L}_{mas(2;1)}(E_1,\ldots,E_n;l_2) \tag{4.16}$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1,\ldots,E_n$. Mais precisamente, Pérez-García e M.L.V. Souza mostraram que

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F) = \mathcal{L}_{mas(q;1)}(E_1,\ldots,E_n;F)$$

sempre que F tem cotipo finito q.

De (4.16) e da Proposição 4.1.3 temos o seguinte resultado de coincidência:

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; l_2\right) = \mathcal{L}_{mas(2;1;r)}\left(E_1, ..., E_n; l_2\right) \tag{4.17}$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1, ..., E_n$ e todo $r \geq 1$.

Quando $r = 1$, temos um resultado melhor que (4.17):

Teorema 4.4.1 *Se* $T \in \mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; l_2\right)$, *então* T *é múltiplo* $(1; 1; 1)$*-somante.*

Demonstração: Como l_2 tem tipo 2 e

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

do Teorema 4.3.4 obtemos

$$\mathcal{L}_{mas(2;1)}\left(E_1, ..., E_n; l_2\right) \subset \mathcal{L}_{mas(1;1;1)}\left(E_1, ..., E_n; l_2\right). \tag{4.18}$$

Segue de (4.16) e (4.18) que

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; l_2\right) = \mathcal{L}_{mas(1;1;1)}\left(E_1, ..., E_n; l_2\right).$$

■

4.5 Relações com o Teorema de Bohnenblust–Hille

O Teorema de Bohnenblust–Hille [9] garante que

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{N} \left|U(e_{i_1}, ..., e_{i_n})\right|^{\frac{2n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} \leq C_n \left\|U\right\| \tag{4.19}$$

para toda forma n-linear $U : l_\infty^N \times \cdots \times l_\infty^N \longrightarrow \mathbb{C}$ e para qualquer inteiro positivo N, onde C_n é uma constante que depende apenas de n. D. Pérez-García [58, Teorema 5.5] mostrou que o Teorema de Bohnenblust–Hille é equivalente à coincidência

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{mas\left(\frac{2n}{n+1};1\right)}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right). \tag{4.20}$$

Em 2009, G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino [14, Theorem 2.3] mostraram que, ao substituir $\frac{2n}{n+1}$ por 2, o seguinte resultado de coincidência é válido:

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{mas(2;q_k)}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right)$$

sempre que $E_1, ..., E_n$ tem cotipo 2, com $2^{k-1} < n < 2^k$ e

$$q_0 = 2,$$
$$q_{k+1} = \frac{2q_k}{1+q_k}$$

para todo $k > 0$.

Usando a Proposição 4.1.3, segue imediatamente de (4.20) que, para todo $r \geq 1$, tem-se

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{mas\left(\frac{2n}{n+1};1;r\right)}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right) \tag{4.21}$$

e

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{mas(2;q_k;r)}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right) \tag{4.22}$$

sempre que $E_1, ..., E_n$ tem cotipo 2, com $2^{k-1} < n < 2^k$ e

$$q_0 = 2,$$
$$q_{k+1} = \frac{2q_k}{1+q_k}$$

para todo $k > 0$.

Da Proposição 4.3.3, como

$$\frac{1}{\frac{2n}{3n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{2n}{n+1}}$$

e

$$\frac{1}{\frac{2q_k}{2+q_k}} = \frac{1}{q_k} + \frac{1}{2}$$

obtemos, para $r = 1$,

$$\mathcal{L}_{mas\left(\frac{2n}{n+1};1\right)}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right) \subset \mathcal{L}_{mas\left(\frac{2n}{3n+1};1;1\right)}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right)$$

e, para $r = q_k$,

$$\mathcal{L}_{mas(2;q_k)}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right) \subset \mathcal{L}_{mas\left(\frac{2q_k}{2+q_k};q_k;q_k\right)}\left(E_1, ..., E_n; \mathbb{K}\right).$$

Temos então os seguintes resultados mais fortes que (4.21) e (4.22) no caso em que $r=1$ e $r=q_k$, respectivamente.

Proposição 4.5.1 *Se $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n;\mathbb{K})$ então T é múltiplo $\left(\frac{2n}{3n+1};1;1\right)$-somante.*

Proposição 4.5.2 *Se $E_1,...,E_n$ tem cotipo 2, com $2^{k-1}<n<2^k$ e*

$$\begin{aligned} q_0 &= 2,\\ q_{k+1} &= \frac{2q_k}{1+q_k} \end{aligned}$$

para todo $k>0$, então

$$\mathcal{L}_{mas\left(\frac{2q_k}{2+q_k};q_k;q_k\right)}(E_1,...,E_n;\mathbb{K})=\mathcal{L}(E_1,...,E_n;\mathbb{K}).$$

4.6 O ideal das aplicações múltiplo $(p;q_1,...,q_n;r)$-somantes

Da Proposição 4.1.3 podemos concluir facilmente que se $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ é de tipo finito, então T é múltiplo $(p;q_1,...,q_n;r)$-somante. Note ainda que se $T\in\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$, então

$$\|T\|\leq\|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ 1\leq i\leq n}}\|T(x_1,...,x_n)\|\\ &= \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ 1\leq i\leq n}}\left(\sup_{\varphi\in B_{F^*}}\|\varphi(T(x_1,...,x_n))\|\right)\\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ 1\leq i\leq n}}\sup_{\varphi\in B_{F^*}}\Big(\|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\|(x_1,0,0,..)\|_{w,q_1}\cdots\\ &\cdots\|(x_n,0,0,...)\|_{w,q_n}\|(\varphi,0,0,...)\|_{w,r}\Big)\\ &= \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}. \end{aligned}$$

Para efeito de referência futura, destacaremos a observação acima:

Observação 4.6.1 *Se* $T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1, ..., E_n; F)$, *então*

$$\|T\| \leq \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}. \tag{4.23}$$

Note ainda que

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)} = 1.$$

Com efeito, sabemos da Proposição 4.1.3 que

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)} \leq \|id_{\mathbb{K}^n}\|_{mas(p;q_1,...,q_n)}. \tag{4.24}$$

Mas, como $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n)}$ é um multi-ideal, temos

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{mas(p;q_1,...,q_n)} = 1. \tag{4.25}$$

Logo, de (4.25) e (4.24) temos que

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)} \leq 1$$

e, por outro lado, de (4.23) temos a desigualdade contrária. Assim,

$$\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)} = 1.$$

Usando as observações anteriores não fica difícil provar que $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}$ é um ideal normado de aplicações multilineares.

Proposição 4.6.2 $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}$ *é um ideal normado de aplicações multilineares.*

Demonstração: Sejam $u_i \in \mathcal{L}(G_i; E_i), i = 1, ..., n, T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1, ..., E_n; F)$

e $t\in\mathcal{L}(F;H)$. Então, se $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m \in G_i, \varphi_{j_1,...,j_n}\in H^*, j_i=1,...,m$ e $i=1,...,n$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^m \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(t\circ T\circ(u_1,...,u_n)\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^m \left|(\varphi_{j_1,...,j_n}\circ t)\left(T(u_1,...,u_n)\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^m \left|(\varphi_{j_1,...,j_n}\circ t)\left(T\left(u_1\left(x_{j_1}^{(1)}\right),...,u_n\left(x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\,\|(\varphi_{j_1,...,j_n}\circ t)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}_m}\|_{w,r}\prod_{i=1}^n\left\|\left(u_i\left(x_j^{(i)}\right)\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i}\\
&\leq \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\,\|u_1\|\cdots\|u_n\|\,\|(\varphi_{j_1,...,j_n}\circ t)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}_m}\|_{w,r}\prod_{i=1}^n\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i}\\
&\overset{\text{Observação 3.6.11}}{\leq} \|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\,\|t\|\left\|\left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n\in\mathbb{N}_m}\right\|_{w,r}\left(\prod_{i=1}^n\|u_i\|_{w,r}\right)\left(\prod_{i=1}^n\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q_i}\right)
\end{aligned}$$

Logo

$$t\circ T\circ(u_1,...,u_n)\in\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(G_1,...,G_n;H)$$

e

$$\|t\circ T\circ(u_1,...,u_n)\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\leq\|T\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\,\|t\|\,\|u_1\|\cdots\|u_n\|.$$

■

Teorema 4.6.3 $\left(\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)},\|\cdot\|_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\right)$ *é um ideal de Banach.*

Demonstração: Seja $(T_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)$. Pela Observação 4.6.1, $(T_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$. Assim, existe $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ tal que $\lim_{j\to\infty}T_j=T$ na norma do sup.

Considere a função Φ definida na demonstração do Teorema 4.2.1:

$$\Phi:\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}(E_1,...,E_n;F)\to\mathcal{L}\left(l_{q_1}^w(E_1),...,l_{q_n}^w(E_n),l_r^w(F^*,\mathbb{N}^n);l_p(\mathbb{K},\mathbb{N}^n)\right).$$

Como Φ é linear, injetiva e preserva a norma, e como o espaço

$$\mathcal{L}\left(l_{q_1}^w(E_1),...,l_{q_n}^w(E_n),l_r^w(F^*,\mathbb{N}^n);l_p(\mathbb{K},\mathbb{N}^n)\right)$$

é completo, segue que

$$\Phi\left(T_j\right) \longrightarrow S \tag{4.26}$$

na norma do sup, com

$$S \in \mathcal{L}\left(l_{q_1}^w\left(E_1\right), ..., l_{q_n}^w\left(E_n\right), l_r^w\left(F^*, \mathbb{N}^n\right); l_p\left(\mathbb{K}, \mathbb{N}^n\right)\right).$$

Agora, para quaisquer $k_1, ..., k_n$, considere as projeções

$$\begin{aligned} P_{k_1,...,k_n} &: l_p\left(\mathbb{K}; \mathbb{N}^n\right) \rightarrow \mathbb{K} \\ \left(z_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} &\rightarrow z_{k_1,...,k_n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\lim_{j\to\infty} P_{k_1,...,k_n}\left(\Phi\left(T_j\right)\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\right)\right) \\ &= P_{k_1,...,k_n}\left(S\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\right)\right) \end{aligned}$$

para quaisquer $k_1, ..., k_n$. Como $T_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} T$ na norma do sup, temos

$$\varphi_{k_1,...,k_n}\left(T_j\left(x_{k_1}^{(1)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)\right) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_{k_1,...,k_n}\left(T\left(x_{k_1}^{(1)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)\right) \tag{4.27}$$

para quaisquer $k_1, ..., k_n$. Como

$$\begin{aligned} &P_{k_1,...,k_n}\left(\Phi\left(T_j\right)\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}\right), \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\right) \\ &= \varphi_{k_1,...,k_n}\left(T_j\left(x_{k_1}^{(1)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)\right), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} &\lim_{j\to\infty} P_{k_1,...,k_n}\left(\Phi\left(T_j\right)\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty}, \left(\varphi_{j_1,...,j_n}\right)_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\right)\right) \\ &= \lim_{j\to\infty} \varphi_{k_1,...,k_n}\left(T_j\left(x_{k_1}^{(1)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)\right) \\ &\overset{(4.27)}{=} \varphi_{k_1,...,k_n}\left(T\left(x_{k_1}^{(1)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)\right) \end{aligned}$$

para quaisquer $k_1,...,k_n$. Logo

$$P_{k_1,...,k_n}\left(S\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},...,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty},(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\right)\right)=\varphi_{k_1,...,k_n}\left(T\left(x_{k_1}^{(1)},...,x_{k_n}^{(n)}\right)\right)$$

para quaisquer $k_1,...,k_n$, e portanto

$$\begin{aligned}&\left(\varphi_{k_1,...,k_n}\left(T\left(x_{k_1}^{(1)},...,x_{k_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{k_1,...,k_n=1}^{\infty}\\&=S\left(\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{\infty},...,\left(x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_n=1}^{\infty},(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n=1}^{\infty}\right)\in l_p\left(\mathbb{K},\mathbb{N}^n\right).\end{aligned}\tag{4.28}$$

Assim

$$\left(\varphi_{k_1,...,k_n}\left(T\left(x_{k_1}^{(1)},...,x_{k_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{k_1,...,k_n=1}^{\infty}\in l_p\left(\mathbb{K},\mathbb{N}^n\right)$$

e segue que

$$T\in\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\left(E_1,...,E_n;F\right).\tag{4.29}$$

Logo, de (4.28) e (4.29) temos

$$\Phi\left(T\right)=S.$$

Concluímos, de (4.26), que $\left(\Phi\left(T_j\right)\right)_{j=1}^{\infty}$ converge para $\Phi\left(T\right)$ na norma do sup e, consequentemente, T_j converge para $T\in\mathcal{L}_{mas(p;q_1,...,q_n;r)}\left(E_1,...,E_n;F\right)$. ■

4.7 Polinômios múltiplo $(p;q;r)$-somantes

Na presente seção mostraremos, como mencionamos anteriormente, que a noção de polinômios múltiplo $(p;q;r)$-somantes é coerente e compatível com o ideal de operadores $(p;q)$-somantes.

Pela Observação 1.1.7, a classe

$$\mathcal{P}_{mas(p;q;r)}^{n}=\left\{P\in\mathcal{P}^n;\check{P}\in\mathcal{L}_{mas(p;q;r)}^{n}\right\},$$

onde a norma é dada por

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{mas(p;q;r)}^{n}}=\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)},$$

é um ideal de polinômios gerado pelo ideal $\mathcal{L}_{mas(p;q;r)}^{n}$.

Proposição 4.7.1 *$\left(\mathcal{P}_{mas(p;q;r)}^{n},\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{mas(p;q;r)}^{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente.*

Demonstração: Se $P \in \mathcal{P}^n_{mas(p;q;r)}\left({}^nE;F\right)$ e $a \in E$, então $\check{P} \in \mathcal{L}^n_{mas(p;q;r)}\left(E,...,E;F\right)$ e, pela Proposição 4.1.4, $\check{P}_a \in \mathcal{L}^{n-1}_{mas(p;q;r)}\left({}^{n-1}E;F\right)$. Assim $P_a \in \mathcal{P}^{n-1}_{mas(p;q;r)}\left({}^{n-1}E;F\right)$ com

$$\left\|P_a\right\|_{\mathcal{P}^{n-1}_{mas(p;q;r)}} \leq \left\|a\right\| \left\|P\right\|_{\mathcal{P}^{n}_{mas(p;q;r)}}.$$

Seja $\gamma \in E^*$. Note que

$$\begin{aligned}
(\gamma P)^{\vee}\left(x_1,...,x_{n+1}\right) &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in S_{n+1}}\gamma\left(x_{\sigma(k)}\right)P\left(x_{\sigma(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{\sigma(n+1)}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[\gamma\left(x_{\sigma(1)}\right)\sum_{\sigma\in S_n}P\left(x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(n+1)}\right)+\cdots\right.\\
&\left.\cdots+\gamma\left(x_{\sigma(n+1)}\right)\sum_{\sigma\in S_n}P\left(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}\right)\right]\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[\gamma\left(x_1\right)n!\check{P}\left(x_2,...,x_{n+1}\right)+\cdots+\gamma\left(x_{n+1}\right)n!\check{P}\left(x_1,...,x_n\right)\right]\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\gamma\left(x_k\right)\check{P}\left(x_1,\overset{[k]}{\dots},x_{n+1}\right),
\end{aligned}$$

onde $\overset{[k]}{\dots}$ significa que a k-ésima coordenada não esta envolvida e S_n é o conjunto de todas as permutações de $\{1,...,n\}$.

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $x_j^{(k)} \in E$, com $j = 1,....,m$ e $k = 1,...,n$ e sejam ainda $\varphi_{j_1,...,j_{n+1}} \in F^*$ com $j_1,...,j_{n+1} = 1,....,m$. Usando a desigualdade triangular e a desigualdade de

Minkowski, temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left((\gamma P)^{\vee}\left(x_{j_1}^{(1)},\dots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.30)\\
&=\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\gamma\left(x_{j_k}^{(k)}\right)\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\gamma\left(x_{j_k}^{(k)}\right)\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{n+1}\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\gamma\left(x_{j_k}^{(k)}\right)\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\frac{1}{n+1}\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{n+1}\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\gamma\left(x_{j_k}^{(k)}\right)\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{1}{n+1}\left\|\left(\sum_{k=1}^{n+1}\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\gamma\left(x_{j_k}^{(k)}\right)\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|\right)_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\right\|_p\\
&=\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=1}^{n+1}\left(\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\gamma\left(x_{j_k}^{(k)}\right)\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|\right)_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\right\|_p\\
&\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\left\|\left(\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\gamma\left(x_{j_k}^{(k)}\right)\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|\right)_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\right\|_p\\
&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1\dots j_{n+1}}\left(\gamma\left(x_{j_k}^{(k)}\right)\check{P}\left(x_{j_1}^{(1)},\overset{[k]}{\dots},x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{1}{n+1}\left[\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1\dots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\dots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\cdots\right.\\
&\left.\cdots+\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1\dots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)x_{j_1}^{(1)},\dots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].
\end{aligned}
$$

Logo

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left((\gamma P)^{\vee}\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.31}$$
$$\leq \frac{1}{n+1}\left[\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Note que cada um dos $n+1$ termos da soma em (4.31) pode ser escrito sob a forma

$$\left(\sum_{j_2=1}^{m^2}\sum_{j_3,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\widetilde{\varphi}_{j_2\ldots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(z_{j_2}^{(2)},\ldots,z_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para certas escolhas de $\widetilde{\varphi}_{j_2\ldots j_{n+1}}$ e $z_{j_k}^{(k)}$, com $k=2,\ldots,n+1$.

Com efeito, para o termo

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

tome

$$\begin{aligned}
z_{j_2}^{(2)} &= \gamma\left(x_1^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)} \text{ para todo } j_2=1,\ldots.,m,\\
z_{m+j_2}^{(2)} &= \gamma\left(x_2^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)} \text{ para todo } j_2=1,\ldots.,m,\\
&\vdots\\
z_{(m-1)m+j_2}^{(2)} &= \gamma\left(x_m^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)} \text{ para todo } j_2=1,\ldots.,m,\\
z_{j_i}^{(i)} &= x_{j_i}^{(i)}, \text{ para todo } j_i=1,\ldots,m, i=3,\ldots,n+1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{j_2,\dots,j_{n+1}} &= \varphi_{1j_2\dots j_{n+1}} \text{ para todo } j_2 = 1, \dots, m, \\
\widetilde{\varphi}_{m+j_2,\dots,j_{n+1}} &= \varphi_{2j_2\dots j_{n+1}} \text{ para todo } j_2 = 1, \dots, m, \\
&\vdots \\
\widetilde{\varphi}_{(m-1)m+j_2,\dots,j_{n+1}} &= \varphi_{mj_2\dots j_{n+1}} \text{ para todo } j_2 = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\dots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j_2=1}^{m^2}\sum_{j_3,\dots,j_{n+1}=1}^{m} \left|\widetilde{\varphi}_{j_2\dots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(z_{j_2}^{(2)},\dots,z_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

De fato,

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{1j_2\ldots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p+\right.$$

$$+\sum_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{2j_2\ldots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{2}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p+\cdots$$

$$\left.\cdots+\sum_{j_2\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{mj_2\ldots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{m}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\widetilde{\varphi}_{j_2,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(z_{j_2}^{(2)},z_{j_3}^{(3)},\ldots,z_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p+\right.$$

$$+\sum_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\widetilde{\varphi}_{m+j_2,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(z_{m+j_2}^{(2)},z_{j_3}^{(3)},\ldots,z_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p+\cdots$$

$$\left.\cdots+\sum_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\widetilde{\varphi}_{(m-1)m+j_2,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(z_{(m-1)m+j_2}^{(2)},z_{j_3}^{(3)},\ldots,z_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{j_2=1}^{m^2}\sum_{j_3,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\widetilde{\varphi}_{j_2\ldots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(z_{j_2}^{(2)},\ldots,z_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\sum_{j_2,\ldots,j_{n+1}=1}^{m^2,m,\ldots,m}\left|\widetilde{\varphi}_{j_2\ldots j_{n+1}}\left(\check{P}\left(z_{j_2}^{(2)},\ldots,z_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\left\|\left(\widetilde{\varphi}_{j_2\ldots j_{n+1}}\right)_{j_2,\ldots,j_{n+1}}^{m^2,m,\ldots,m}\right\|_{w,r}\left\|\left(z_{j_2}^{(2)}\right)_{j_2=1}^{m^2}\right\|_{w,q}\prod_{i=3}^{n+1}\left\|\left(z_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{m}\right\|_{w,q}\\
&=\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}\in\mathbb{N}_m^n}\right\|_{w,r}\left\|\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_1,j_2=1}^{m}\right\|_{w,q}\prod_{i=3}^{n+1}\left\|\left(x_{j}^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_1,j_2=1}^{m}\right\|_{w,q}&=\sup_{\varphi}\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left|\varphi\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\sup_{\varphi}\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left(\left|\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)\right|\left|\varphi\left(x_{j_2}^{(2)}\right)\right|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq\left\|\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)\right)_{j_1=1}^{m}\right\|_{\infty}\sup_{\varphi}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\left|\varphi\left(x_{j_2}^{(2)}\right)\right|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\left\|\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)\right)_{j_1=1}^{m}\right\|_{\infty}\left\|\left(x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_2=1}^{m}\right\|_{w,q}\\
&\leq\left\|\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)\right)_{j_1=1}^{m}\right\|_{q}\left\|\left(x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_2=1}^{m}\right\|_{w,q}\\
&\leq\|\gamma\|\left\|\left(x_{j_1}^{(1)}\right)_{j_1=1}^{m}\right\|_{w,q}\left\|\left(x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_2=1}^{m}\right\|_{w,q},
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_1}^{(1)}\right)x_{j_2}^{(2)},\ldots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\|\gamma\|\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\ldots,j_{n+1}\in\mathbb{N}_m}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_{j}^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Usando a mesma ideia acima para os outros n termos de (4.31), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_2}^{(2)}\right)x_{j_1}^{(1)},x_{j_3}^{(3)}\dots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \|\gamma\|\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\left\|\left(\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\dots,j_{n+1}\in\mathbb{N}_m}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q},
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left(\check{P}\left(\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)x_{j_1}^{(1)},x_{j_2}^{(2)}\dots,x_{j_n}^{n}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \|\gamma\|\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\left\|\left(\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\dots,j_{n+1}\in\mathbb{N}_m}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Logo, de (4.30),

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=1}^{m}\left|\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\left((\gamma P)^{\vee}\left(x_{j_1}^{(1)},\dots,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{1}{n+1}\left[\|\gamma\|\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\left\|\left(\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\dots,j_{n+1}\in\mathbb{N}_m}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q}+\cdots\right.\\
&\left.\cdots+\|\gamma\|\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\left\|\left(\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\dots,j_{n+1}\in\mathbb{N}_m}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q}\right]\\
&= \|\gamma\|\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\left\|\left(\varphi_{j_1,\dots,j_{n+1}}\right)_{j_1,\dots,j_{n+1}\in\mathbb{N}_m}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Portanto γP é múltiplo $(p;q;r)$-somante e

$$\begin{aligned}
\|\gamma P\|_{\mathcal{P}^{n+1}_{mas(p;q;r)}} &= \left\|(\gamma P)^{\vee}\right\|_{mas(p;q;r)}\\
&\leq \|\gamma\|\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)}\\
&= \|\gamma\|\,\|P\|_{\mathcal{P}^{n}_{mas(p;q;r)}}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 4.7.2 *O ideal de polinômios* $\left(\mathcal{P}^n_{mas(p;q;r)}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}^n_{mas(p;q;r)}}\right)$ *é compatível com o ideal dos operadores lineares absolutamente* $(p;q;r)$*-somantes.*

Demonstração: Segue da Observação 1.1.13. ∎

Capítulo 5

Apêndice

5.1 A: Funções de Rademacher

Os resultados deste apêndice foram essencialmente inspirados em um resumo do assunto contido em [52]. As funções de Rademacher são definidas por

$$\begin{array}{rcl} r_n: \ [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N} \\ r_n(t) & := & sign\left(\sin 2^n \pi t\right) \end{array} \tag{5.1}$$

Se dividirmos o intervalo $[0,1]$ em 2^n sub-intervalos $I_k = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$, com $k = 1, \ldots, 2^n$, então $[0,1]$ será formado pela união de todos os I_k e os seus extremos. Da definição das r_n podemos perceber que as funções de Rademacher assumirão, alternadamente, os valores 1 e -1 à medida que t percorre o intervalo $[0,1]$. Na fronteira dos intervalos I_k as funções de Rademacher assumem o valor zero.

Um fato interessante é que as funções de Rademacher possuem a propriedade de ortogonalidade, isto é,

$$\int_0^1 r_j(t)\, r_k(t)\, dt = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ se } j = k \\ 0, \text{ se } j \neq k \end{cases}. \tag{5.2}$$

Assim, $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência ortonormal de $L_2[0,1]$.

Lema 5.1.1 *Se $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, então*

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| = \sup_{|\zeta_j|=1} \left| \sum_{j=1}^{n} \zeta_j y_j \right| = \sup_{|\zeta_j|\leq 1} \left| \sum_{j=1}^{n} \zeta_j y_j \right|$$

Demonstração: Se $|\zeta_j| \leq 1$, da desigualdade triangular, temos

$$\left|\sum_{j=1}^{n} y_j \zeta_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j \zeta_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j|,$$

e assim

$$\sup_{\zeta_j} \left|\sum_{j=1}^{n} y_j \zeta_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j|. \tag{5.3}$$

Agora, seja θ_j o argumento de y_j e $\zeta_j = e^{-i\theta_j}, j = 1, ..., n$. Então

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| = \sum_{j=1}^{n} y_j e^{-i\theta_j} = \sum_{j=1}^{n} y_j \zeta_j.$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| \leq \sup_{\zeta_j} \left|\sum_{j=1}^{n} y_j \zeta_j\right|. \tag{5.4}$$

onde $|\zeta_j| = \left|e^{-i\theta_j}\right| = 1$.

De (5.3) e (5.4), segue que

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| \leq \sup_{|\zeta_j|=1} \left|\sum_{j=1}^{n} \zeta_j y_j\right| \leq \sup_{|\zeta_j|\leq 1} \left|\sum_{j=1}^{n} \zeta_j y_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j|.$$

■

Lema 5.1.2 *Seja $1 \leq p < \infty$. Se $(y_j)_{j=1}^{m} \in l_p^m(\mathbb{R})$ com $y_j \geq 0$, para todo $j = 1, \ldots, m$, então existem $b_1, \ldots, b_m$ reais não-negativos com $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j^{p^*} = 1$ e*

$$\left\|(y_j)_{j=1}^{m}\right\|_p = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j. \tag{5.5}$$

Demonstração: Por Hahn-Banach, temos

$$\left\|(y_j)_{j=1}^{m}\right\|_p = \sup_{\varphi \in B_{(l_p^m(\mathbb{R}))'}} \left|\varphi\left((y_j)_{j=1}^{m}\right)\right|. \tag{5.6}$$

Como $\left(l_p^m(\mathbb{R})\right)^*$ e $l_{p^*}^m(\mathbb{R})$ são isométricos, existe $\varphi = (c_1, \ldots, c_m) \in l_{p^*}^m(\mathbb{R})$ tal que

$$\varphi\left((y_j)_{j=1}^m\right) = \sum_{j=1}^m c_j y_j. \tag{5.7}$$

Ainda por Hahn-Banach, temos que o supremo em (5.6) é atingido. Assim, de (5.7), segue que existe $\varphi_0 = \left(c_1^{(0)}, \ldots, c_m^{(0)}\right) \in B_{l_{p^*}^m(\mathbb{R})}$ tal que

$$\sup_{\varphi \in B_{(l_p^m(\mathbb{R}))'}} \left|\varphi\left((y_j)_{j=1}^m\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^m c_j^{(0)} y_j\right|.$$

Como, por hipótese, $y_j \geq 0$ para todo $j = 1, ..., m$, esse supremo será atingido quando $c_j^{(0)} \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$ ou $c_j^{(0)} \leq 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Portanto

$$\left\|(y_j)_{j=1}^m\right\|_p = \left|\sum_{j=1}^m c_j^{(0)} y_j\right| = \sum_{j=1}^m \left|c_j^{(0)}\right| y_j. \tag{5.8}$$

Tomando $b_j = \left|c_j^{(0)}\right|$ para todo $j = 1, ..., m$, temos o desejado. ■

Lema 5.1.3 *Sejam E um espaço de Banach e $x_1, \ldots, x_m \in E$. Então*

$$\sup_{|\varepsilon_j| \leq 1} \left\|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j x_j\right\| = \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,1} = \sup_{|\varepsilon_j| = 1} \left\|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j x_j\right\|.$$

Demonstração: Uma consequência do Teorema de Hahn-Banach garante que

$$\left\|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j x_j\right\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j x_j\right)\right|.$$

Pelo Lema 5.1.1, segue que

$$\begin{aligned}\sup_{|\varepsilon_j|=1}\left\|\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j x_j\right\| &= \sup_{|\varepsilon_j|=1}\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j x_j\right)\right| \\ &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\sup_{|\varepsilon_j|=1}\left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j x_j\right)\right| \\ &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\sup_{|\varepsilon_j|=1}\left|\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j \varphi\left(x_j\right)\right| \\ &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi\left(x_j\right)\right| \\ &= \left\|(x_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,1}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

A outra igualdade é demonstrada de maneira similar. ■

Lema 5.1.4 *Sejam E um espaço de Banach, (r_j) as funções de Rademacher e $x_1,\ldots,x_m\in E$. Então*

$$\sup_{|t|\leq 1}\left\|\sum_{j=1}^{m}r_j(t)x_j\right\| \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,1}.$$

Demonstração: O resultado segue do lema anterior e da desigualdade

$$\sup_{|t|\leq 1}\left\|\sum_{j=1}^{m}r_j(t)x_j\right\| \leq \sup_{|\varepsilon_j|\leq 1}\left\|\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j x_j\right\|.$$

■

5.2 B: Desigualdade de Hölder Generalizada

A Desigualdader de Hölder Generalizada é bem conhecida, mas, como o caso mais usado é quando $s>1$, provaremos o caso em que $s>0$:

Teorema 5.2.1 (Desigualdade de Hölder Generalizada)
Seja $(E,\|\cdot\|)$ um espaço normado sobre $\mathbb{K}$. Se $m\in\mathbb{N}$ e $x_j,y_j\in E, j=1,...,m,$

então

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\|x_j\|\,\|y_j\|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{m}\|y_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para $s,p,q \in (0,+\infty)$, *tais que* $\frac{1}{s}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

Demonstração: *De*

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

temos que

$$1=\frac{1}{p/s}+\frac{1}{q/s}$$

com $\frac{p}{s},\frac{q}{s} \in (1,+\infty)$.*A desigualdade de Hölder nos dá*

$$\sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^s\|y_j\|^s \leq \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\|x_j\|^s\right)^{\frac{p}{s}}\right)^{\frac{s}{p}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\|y_j\|^s\right)^{\frac{q}{s}}\right)^{\frac{s}{q}}$$

e o resultado segue. ■

Referências Bibliográficas

[1] D. Achour, Multilinear extensions of absolutely $(p;q;r)$-summing operators, a aparecer em Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, DOI: 10.1007/s12215-011-0054-2.

[2] F. Albiac e N. Kalton, Topics in Banach Space Theory, Springer-Verlag, 2005.

[3] R. Alencar e M. C. Matos, Some classes of multilinear mappings between Banach spaces, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático 12, Universidad Complutense Madrid (1989), 1-34.

[4] R. Aron e J. Globevnik, Analytic Functions on c_0, Revista Matemática Universidaded Complutense de Madrid **2** (1989), 27-33.

[5] J. L. Arregui e O. Blasco, (q,p)-summing sequences, Journal of Mathematical Analysis and Applications **274** (2002), 812-827.

[6] G. Badea, On nuclear and multiple summing bilinear operators, Quaestiones Mathematicae **33** (2010), 253-261.

[7] A. T. Bernardino, Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[8] O. Blasco, G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, Lifting summability properties for multilinear mappings, preprint.

[9] H.F. Bohnenblust e E. Hille, On the absolute convergence of Dirichlet series, Annals of Mathematics (2) **32** (1931), 600-622.

[10] F. Bombal, D. Pérez-García and I. Villanueva, Multilinear extensions of Grothendieck's Theorem, Quarterly Journal of Mathematics **55** (2004), 441-450.

[11] G. Botelho, Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials, Proceedings of the Royal Irish Academy Section A **97** (1997), 145-153.

[12] G. Botelho, Ideals of polynomials generated by weakly compact operators, Note di Matematica **25** (2005/2006), 69-102.

[13] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, Holomorphy types and ideals of multilinear mappings, Studia Mathematica **177** (2006), 43-65.

[14] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, Inclusions and coincidences for multiple summing multilinear mappings, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 991-1000.

[15] G. Botelho, C. Michels e D. Pellegrino, Complex interpolation and summability properties of multilinear operators, Revista Matemática Complutense **23** (2010), 139-161.

[16] G. Botelho e D. Pellegrino, Two new properties of ideals of polynomials and applications, Indagationes Mathematicae **16** (2005), 157-169.

[17] G. Botelho e D. Pellegrino, Scalar-valued dominated polynomials on Banach spaces, Proceedings of the American Mathematical Society **134** (2006), 1743-1751.

[18] G. Botelho e D. Pellegrino, Coincidence situations for absolutely summing non-linear mappings, Portugaliae Mathematica **64** (2007), 175-191.

[19] G. Botelho e D. Pellegrino, When every multilinear mapping is multiple summing, Mathematische Nachrichten **282** (2009), 1414-1422.

[20] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials, Publications of the Research Institute of Mathematical Sciences **43** (2007), 1139–1155.

[21] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, A nonlinear Pietsch Domination Theorem, Monatshefte für Mathematik **158** (2009), 247-257.

[22] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, Dominated polynomials on infinite-dimensional spaces, Proceedings of the American Mathematical Society **138** (2010), 209-216.

[23] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, A unified Pietsch Domination Theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications **365** (2010), 269-276.

[24] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, Cotype and absolutely summing linear operators, Mathematische Zeitschrift **267** (2011), 1-7.

[25] E. Çalışkan e D. M. Pellegrino, On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators, Rocky Mountain Journal of Mathematics **37** (2007), 1137-1154.

[26] D. Carando, V. Dimant e S. Muro, Coherent sequences of polinomial ideals on Banach spaces, Mathematische Nachrichten **282** (2009), 1111-1133.

[27] D. Carando, V. Dimant e S. Muro, Every Banach ideal of polynomials is compatible with an operator ideal, a aparecer em Monatshefte für Mathematik, DOI: 10.1007/s00605-010-0255-3.

[28] R. Cilia e J. Gutiérrez, Dominated, diagonal polynomials on l_p spaces, Archiv der Mathematik **84** (2005), 421-431.

[29] A. Defant e K. Floret, Tensor norms and operator ideals, North-Holland, 1993.

[30] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdà, M. Ounaïes e K. Seip, The Bohnenblust–Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive, Annals of Mathematics (2) **174** (2011), 485–497.

[31] A. Defant, D. García, M. Maestre e D. Pérez-García, Bohr's strip for vector valued Dirichlet series, Mathematische Annalen **342** (2008), 533-555.

[32] A. Defant, D. Popa e U. Schwarting, Coordenatewise multiple summing operators on Banach spaces, Journal of Functional Analysis **259** (2010), 220-242.

[33] A. Defant e P. Sevilla-Peris, A new multilinear insight on Littlewood's 4/3-inequality, Journal of Functional Analysis **256** (2009), 1642–1664.

[34] J. Diestel, H. Jarchow e A. Pietsch, Operator Ideals, in Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, 437-496, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[35] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, 1995.

[36] V. Dimant, Strongly p-summing multilinear operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications **278** (2003), 182-193.

[37] S. Dineen, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer-Verlag, London, 1999.

[38] E. Dubinsky, A. Pełczyński e H. P. Rosenthal, On Banach spaces X for which $\Pi_2(L_\infty, X) = B(L_\infty, X)$, Studia Mathematica **44** (1972), 617-648.

[39] C. Fernandez, The closed graph theorem for multilinear mappings, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **19** (1996), 407–408.

[40] K. Floret e M.C. Matos, Applications of a Khinchine inequality to holomorphic mappings, Mathematische Nachrichten **176** (1995), 65-72.

[41] S. Geiss, Ideale multilinearer Abbildungen, Diplomarbeit, 1985.

[42] H. Jarchow, C. Palazuelos, D. Pérez-García e I. Villanueva, Hahn-Banach extensions of multilinear forms and summability, Journal of Mathematical Analysis and Applications **336** (2007), 1161–1177.

[43] H. Junek, M.C. Matos e D. Pellegrino, Inclusion theorems for absolutely summing holomorphic mappings, Proceedings of the American Mathematical Society **136** (2008), 3983-3991.

[44] J. Lindenstraus e A. Pełczyński, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Mathematica **29** (1968), 275-324.

[45] J. Littlewood, On bounded bilinear forms in an infinite number of variables, Quarterly Journal of Mathematics **2** (1930), 167-171.

[46] M.C. Matos, On multilinear mappings of nuclear type, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid **6** (1993), 61-81.

[47] M.C. Matos, Absolutely summing holomorphic mappings, Anais da Academia Brasileira de Ciências **68** (1996), 1-13.

[48] M.C. Matos, Nonlinear absolutely summing mappings, Mathematische Nachrichten **258** (2003), 71-89.

[49] M.C. Matos, Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mapping, Collectania Mathematica **54** (2003), 111-136.

[50] Y. Meléndez e A. Tonge, Polynomials and the Pietsch Domination Theorem, Proceedings of the Royal Irish Academy Section A **99** (1999), 195-212.

[51] B. Mitiagin e A. Pełczyński, Nuclear operators and approximative dimensions, Proceedings International Congress of Mathematics, Moscow, 1966.

[52] M.A.G. Monteiro, Estimativas para aplicações multilineares entre espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2009.

[53] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland Mathematics Studies 120, North-Holland, 1986.

[54] X. Mujica, $\tau\,(p;q)$-summing mapping and the domination theorem, Portugaliae Mathematica **65** (2008), 211-226.

[55] D. Pellegrino, Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in L_p spaces, Studia Mathematica **157** (2003), 121-131.

[56] D. Pellegrino, Cotype and nonlinear absolutely summing mappings, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy **105A** (2005), 75-91.

[57] D. Pellegrino e J. Santos, Absolutely summing operators: a panorama, a aparecer em Quaestiones Mathematicae.

[58] D. Pérez-García, Operadores multilineales absolutamente sumantes, Tese de Doutorado, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[59] D. Pérez-García, Comparing different classes of absolutely summing multilinear operators, Archiv der Mathematik **85** (2005), 258-267.

[60] D. Pérez-García e I. Villanueva, Multiple summing operators on Banach spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications **285** (2003), 86-96.

[61] A. Pietsch, Absolut p–summierende Abbildungen in normieten Raumen, Studia Mathematica **27** (1967), 333 – 353.

[62] A. Pietsch, Operator Ideals, Deutscher Verlag der Wiss, 1978 and North Holland, Amsterdam, 1980.

[63] A. Pietsch, Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Teubner-texte Math. 67 (Teubner, Leipzig, 1983) pp. 185-199.

[64] D. Popa, Reverse inclusions for multiple summing operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications **350** (2009), 360-368.

[65] D. Popa, Multilinear variants of Maurey and Pietsch theorems and applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications **368** (2010), 157–168.

[66] D. Popa, Multilinear variants of Pietsch's composition theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications **370** (2010), 415-430.

[67] D. Popa, A new distinguishing feature for summing, versus dominated and multiple summing operators, Archiv der Mathematik **96** (2011), 455–462.

[68] R. Ryan, Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2002.

[69] B. Schneider, On absolutely p-summing and related multilinear mappings, Brandenburgische Landeshochschule Wissenschaftliche Zeitschrift **35** (1991), 105-117.

[70] M.L.V. Souza, Aplicações multilineares completamente absolutamente somantes, Tese de Doutorado, Unicamp, 2003.

[71] M. Talagrand, Cotype and $(q, 1)$-summing norms in Banach spaces, Inventiones Mathematicae **110** (1992), 545-556.

[72] P. Wojtaszczyk, Banach spaces for analysts, Cambridge University Press, 1991.