UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

RITA DE CÁSSIA BATISTA DA SILVA

É A MOEDA QUE DIZ, NÃO É A GENTE QUE QUER NÃO: CONHECIMENTOS PROBABILÍSTICOS DE CRIANÇAS EM SITUAÇÕES DE JOGOS

RECIFE

2016

RITA DE CÁSSIA BATISTA DA SILVA

É A MOEDA QUE DIZ, NÃO É A GENTE QUE QUER NÃO: CONHECIMENTOS PROBABILÍSTICOS DE CRIANÇAS EM SITUAÇÕES DE JOGOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª. Drª. Rute Borba

RECIFE

2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S586e Silva, Rita de Cássia Batista da.
É a moeda que diz, não é a gente que quer não: conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos / Rita de Cássia Batista da Silva. – 2016.
135 f. ; 30 cm.
Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.
Inclui Referências e Apêndices.

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Probabilidade. 3. Jogos de probabilidade (Matemática). 4. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2016-23)

RITA DE CÁSSIA BATISTA DA SILVA

É A MOEDA QUE DIZ, NÃO É A GENTE QUE QUER NÃO: CONHECIMENTOS PROBABILÍSTICOS DE CRIANÇAS EM SITUAÇÕES DE JOGOS

Aprovado em 03/03/2016

COMISSÃO EXAMINADORA

____
1º Examinador / Presidente
Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____
2º Examinador / Interno
Profª. Drª. Gilda Lisbôa Guimarães
Universidade Federal de Pernambuco

____
3º Examinador / Externo
Prof. Dr. Lori Viali
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Obrigada, muito especial:

A Ele que possibilita todas as coisas.

À minha amada família que me incentiva e acredita em meu potencial, julgando sempre que sou melhor do que realmente sou: minha mãe e irmãs, meus sogros, meu “Amorzão” e minhas filhas: Suellen e Stella.

Às minhas amigas e primeiras incentivadoras: Zélia Pires e Luciana Santos – a culpa é de vocês! (me empurrem pro doutorado também!).

À minha adorada, capaz e purpurinada orientadora, Rute Borba que resgata de cada um o que há de melhor. Exemplo de profissional e ser humano.

Ao meu grupo de estudo Geração, com as contribuições sem tamanho de todas as meninas mais animadas e intelectualmente disciplinadas do Edumatec.

À minha turma querida, especialmente às HIPERLINDAS (você também tá incluído, André!) que fizeram desses dois anos um palco para ampliarmos as amizades e aprendermos uns com os outros.

A todos os professores do Edumatec, em especial aos da linha de Processos que nos ‘descascaram’ nos seminários para nos ensinar a sermos pesquisadores de verdade.

À minha banca, Gildinha e Lori, cujas críticas conduziram para o aprimoramento de meu estudo.

Aos meus amigos do Salesiano, do Saturnino e do NAEC (Cabo) que compreenderam minhas ausências de corpo e de mente (HD cheio...).

Às escolas parceiras do Cabo de Santo Agostinho, diretoras e professoras que permitiram a participação das crianças para tornarem possível este estudo.

Às lindas, espertas e inteligentes crianças que brincaram, jogaram, se divertiram e responderam aos questionamentos que deram corpo à pesquisa.

Como tenho muito a agradecer, vou parafrasear Maria Bethânia que nos diz:

Chegar para agradecer e louvar
Louvar o ventre que me gerou,
O orixá que me tomou,
E a mão da doçura de Oxum que consagrou.
Louvar a água de minha terra
O chão que me sustenta, o palco, o massapê,
A beira do abismo,
O punhal do susto de cada dia.
Agradecer as nuvens que logo são chuva,
Sereniza os sentidos
E ensina a vida a reviver.

Agradecer os amigos que fiz
E que mantém a coragem de gostar de mim, apesar de mim...
Agradecer a alegria das crianças,
As borboletas que brincam em meus quintais, reais ou não.
Agradecer a cada folha, a toda raiz, as pedras majestosas
E as pequeninas como eu, em Aruanda.
Agradecer o Sol que raia o dia,
A Lua que como o menino Deus espraia luz
E vira os meus sonhos de pernas pro ar.
Agradecer as marés altas
E também aquelas que levam para outros costados todos os males.
Agradecer a tudo que canta no ar,
Dentro do mato sobre o mar,
As vozes que soam de cordas tênues e partem cristais.
Agradecer os senhores que acolhem e aplaudem esse milagre.
Agradecer,
Ter o que agradecer.
Louvar e abraçar!

RESUMO

A partir da apreciação do relatório *Children's understanding of probability*, produzido por Bryant e Nunes (2012), surgiu o desenho inicial do presente estudo. Para os referidos autores, a probabilidade é um conceito complexo que envolve o desenvolvimento de quatro exigências cognitivas: compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade; formar e categorizar o espaço amostral; comparar e quantificar probabilidades; e entender correlações. No estudo, optou-se por investigar as três primeiras exigências apontadas por Bryant e Nunes (2012), objetivando analisar, em situações de jogos, conhecimentos de estudantes acerca da probabilidade, em particular no que se refere à aleatoriedade, ao espaço amostral e à comparação de probabilidades. Para o estudo, foram selecionados dois jogos: Travessia do Rio (BRASIL, 2014) e uma adaptação do jogo Passeios Aleatórios da Mônica (CAZORLA; KATAOKA; NAGAMIME, 2011), aqui denominado Passeios Aleatórios da Rute. No aporte teórico considerou-se o letramento probabilístico de Gal (2004, 2012) e os significados da probabilidade propostos por Batanero e Diaz (2007), entre outros. Em relação a jogos, considerou-se, principalmente, os autores Kishimoto (1994), Grando (2000) e Muniz (2010). Foram realizadas entrevistas do tipo clínica com 36 crianças do 1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental. Os resultados apontaram que o significado intuitivo da probabilidade foi evidenciado pelas crianças, que trouxeram à tona uma linguagem natural, baseada em crenças e opiniões. Relacionaram a aleatoriedade à sorte ou ao azar, justificando as respostas a partir de parâmetros particulares e demonstraram melhor compreensão em eventos pouco prováveis e impossíveis. As crianças mais velhas tiveram um desempenho melhor que as mais novas, apesar de também evidenciarem dificuldades. Foram observadas fragilidades na compreensão de eventos independentes, em que as crianças cometeram o erro de recência positiva ou de recência negativa. Em relação ao espaço amostral, a maior dificuldade observada foi a falta de percepção de que eventos, tais como 3 + 5 e 5 + 3, são possibilidades distintas. Poucas crianças refletiram, conscientemente, sobre o espaço amostral para estabelecer a comparação de probabilidades. As justificativas se apoiaram, especialmente, na recente experiência do jogo. Percebeu-se que o uso de jogos possibilitou que as noções intuitivas emergissem com naturalidade, mas que se faz necessário haver instrução, a qual pode também incluir esse recurso, para construção de conhecimentos probabilísticos mais coerentes.

Palavras-chave: Probabilidade. Crianças. Anos iniciais. Jogos.

ABSTRACT

From the appreciation of the research report Children's understanding of probability, produced by Bryant and Nunes (2012), the initial design of the present study arose. For these authors, probability is a complex concept that involves the development of four cognitive demands: understanding the nature and consequences of randomness; forming and categorizing sample space; comparing and quantifying probabilities; and understanding correlations. In the study, choice was made to investigate the first three requirements identified by Bryant and Nunes (2012), aiming to analyze, in game situations, students' knowledge about probability, in particular with respect to randomness, sample space, and comparison of probabilities. For the study, two games were selected: Crossing the River (BRASIL, 2014) and an adaptation of the game Mônica's Random Walks (CAZORLA; KATAOKA; NAGAMIME, 2011), which here is called Ruth's Random Walks. The theoretical framework considered Gal's probabilistic literacy (2004, 2012) and the meanings of probability proposed by Batanero and Diaz (2007), among others. Regarding games, were considered the authors Kishimoto (1994), Grando (2000) and Muniz (2010). Clinical interviews were performed with 36 children from 1st, 3rd, and 5th grade of Elementary School. The results showed that the intuitive meaning of probability was evidenced by the children, who brought natural language based on beliefs and opinions. Randomness was related to good luck or to bad luck, justifying the answers from particular parameters and demonstrating better understanding in unlikely and impossible events Older children also performed better than younger, although also evidencing difficulties. Weakness in the understanding of independent events was noticed, where children made the mistake of positive recency or negative recency. Regarding sample space, the major difficulty was the lack of conscience that events, such as 3 + 5 and 5 + 3, are distinct possibilities. Few children consciously reflected on the sample space to establish a comparison of probabilities. The justifications relied especially on recent experience of the game. The use of games, enabled intuitive notions to emerge naturally, but it is necessary to provide instruction, including the use of this resource, to construct more consistent probabilistic knowledge.

Keywords: Probability. Children. Early years. Games.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A partir da apreciação do relatório *Children's understanding of probability – A literature* review[1], produzido por Peter Bryant e Terezinha Nunes para a Nuffield Foundation em 2012, surgiu o desenho inicial do presente estudo. O relatório faz um levantamento de pesquisas realizadas referentes ao pensamento probabilístico de crianças. A probabilidade tem sido tópico do currículo de anos iniciais de escolarização e discutir resultados de pesquisa no tema pode trazer impacto no ensino de probabilidade no Ensino Fundamental, bem como indicar possíveis pesquisas futuras na temática.

Objetiva-se, assim, investigar conhecimentos probabilísticos de crianças, considerando algumas lacunas apontadas nas pesquisas levantadas por Bryant e Nunes (2012). Acredita-se que é importante investigar conhecimentos intuitivos que podem ser base de desenvolvimento do pensamento probabilístico necessário ao enfrentamento do cotidiano, tanto de crianças quanto de adultos. O referido relatório não mergulha apenas nas pesquisas realizadas, ele também aponta aspectos da probabilidade que precisam ainda ser explorados e pesquisadas. Desse modo, esta revisão da literatura funciona como um farol que informa o lado luminoso do que já se tem e desobstrui a visão turva do que ainda falta investigar em estudos futuros a respeito de como as crianças pensam e de como aprendem probabilidade.

Para Bryant e Nunes (2012), a probabilidade é um conceito muito complexo que envolve o desenvolvimento de quatro exigências cognitivas necessárias à sua compreensão. Segundo esses autores, as exigências cognitivas da probabilidade são:

> 1- Compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade, bem como seu uso cotidiano;
> 2- Formar e categorizar espaços amostrais, necessários não só para o cálculo de probabilidade, como essencial à compreensão da natureza da probabilidade;
> 3- Comparar e quantificar probabilidades;
> 4- Entender correlações (relações entre eventos), o que implica o entendimento das três exigências anteriores.

As exigências intelectuais de cada uma dessas etapas são diferentes umas das outras, no entanto, elas se encontram inter-relacionadas. Para o entendimento de

---
[1] http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf

diversas situações probabilística é necessário, portanto, coordenar a compreensão da aleatoriedade, levantar os possíveis eventos ou sequencias de eventos (espaço amostral) e realizar a comparação ou a quantificação de probabilidades, bem como relacionar os eventos entre si.

Bryant e Nunes (2012) defendem que as três primeiras exigências são os passos básicos que se deve levar em conta para encontrar a solução de qualquer problema de probabilidade e a quarta exigência (entender correlações) às vezes é necessária. No primeiro passo, precisa-se reconhecer que o problema é sobre resultados que são incertos porque há elementos aleatórios envolvidos; no segundo passo, necessita-se trabalhar com os possíveis eventos que compõem o espaço amostral; e, no terceiro passo, é necessário calcular probabilidades, que são quantidades baseadas em proporções e podem ser expressas em decimais, frações ou razões. A quarta exigência, que nem sempre é necessária, exige o olhar aos três passos anteriores.

A *aleatoriedade*[2] é uma parte comum e importante na vida das pessoas, mas, mesmo assim, muitos adultos têm uma compreensão superficial sobre o conceito e crianças e jovens têm ainda mais dificuldades. Bryant e Nunes (2012) apontam que a aleatoriedade é a marca registrada de qualquer problema de probabilidade e que a mesma é projetada para trabalhar com a incerteza, sendo essa uma condição para garantir a equidade, a justiça em situações nas quais essa se faz necessária, como por exemplo, no lançamento de uma moeda para escolha de quem inicia com a bola num jogo de futebol. A aleatoriedade é, então, concebida como uma condição incerta, uma possibilidade ao acaso de ocorrer determinado evento. Relaciona-se com a imprevisibilidade, pois embora seja possível listar todas as possibilidades de ocorrência de um evento, não se sabe ao certo qual será o resultado. Em oposição, nas situações não aleatórias, ou seja, determinísticas, as consequências causais são diretas e facilmente definíveis como, por exemplo, apertar um interruptor e, em consequência, acender-se uma luz.

Viali (2008) defende que problemas de probabilidade dizem respeito a um conjunto de eventos incertos que ocorrem de forma aleatória, assim “a probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o ‘acaso’ representa um papel preponderante” (VIALI, 2008

---

[2] No texto, aleatoriedade e acaso são citados como sinônimos.

p.143), sendo o 'acaso' visto como um conjunto de forças, não determinadas ou controladas, que exercem papel prevalecente na ocorrência dos resultados de um experimento.

Diante do exposto, constatamos a importância da compreensão da aleatoriedade para a formação do pensamento probabilístico, que parece ser uma plataforma imprescindível para o entendimento da probabilidade. Assim, Bryant e Nunes (2012) sugerem mais estudos sobre as diferenças individuais das crianças acerca do raciocínio sobre a aleatoriedade, mais especificamente o porquê de algumas crianças melhorarem a sua percepção ao longo do tempo e outras não. Sugerem, ainda, mais estudos que atentem para a reação das crianças frente à aleatoriedade em jogos, bem como investigar sobre quão bem as crianças discriminam contextos em que a aleatoriedade é a maneira mais eficaz para se garantir a justiça.

Considerando o *espaço amostral*, segunda exigência cognitiva para compreensão da probabilidade, Bryant e Nunes (2012) defendem, apoiados em análises de pesquisas, que grande parte dos erros cometidos por crianças e também adultos acerca da probabilidade não teriam acontecido se houvesse uma compreensão profunda do espaço amostral. Logo, conhecer e entender o espaço amostral é parte essencial para encontrar a solução de situações de probabilidade, uma vez que o cálculo é baseado na análise do espaço amostral do problema. Assim, um bom caminho para resolução de muitos problemas de probabilidade é, de fato, conhecer o *espaço amostral* que pode ser visto como a listagem de todas as possibilidades de ocorrência de todos os possíveis eventos, como, por exemplo, as faces *cara* e *coroa* no lançamento de uma moeda.

Para Bryant e Nunes (2012) a importância do espaço amostral tem sido negligenciada em pesquisas sobre a compreensão de crianças e de como ensiná-las. Sugerem, assim, estudos que investiguem como alunos conseguem (ou não) determinar espaços amostrais em eventos aleatórios. Os autores fazem um mapeamento de algumas pesquisas que tratam do assunto em conexão com o papel do raciocínio combinatório, no caso dos estudos de Piaget e Inhelder (1995), problemas de produto cartesiano realizado por Lynn (1991) e possibilidades nas pesquisas de Shtulman e Carey (2007) e Shtulman (2009). Concluíram que nenhum destes estudos fez conexão dos resultados com a compreensão das crianças sobre o acaso e que também não há nenhuma pesquisa direta sobre como as crianças começam a imaginar todas as possibilidades de um espaço amostral particular ou quais as dificuldades que elas têm para fazer uma lista exaustiva e nem como se pode ajudá-las nesse processo. Os autores consideram essa questão uma lacuna real nos estudos referentes à probabilidade.

O raciocínio combinatório é parte fundamental do aprendizado das crianças sobre probabilidade, concordam Bryant e Nunes (2012), citando os estudos de Piaget e Inhelder (1975). O Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco (Geração)[3] tem se debruçado em investigar como estudantes de diferentes níveis de ensino realizam o levantamento de possibilidades em situações combinatórias. Pessoa e Borba (2009, 2010), apesar de não versarem especificamente sobre a probabilidade, exploram e relatam dificuldades que as crianças e jovens possuem em levantarem sistematicamente todas as possibilidades de uma de situação combinatória, ou seja, o levantamento dos elementos de um evento que faz parte de um espaço amostral. Pessoa e Borba (2010) discutem a importância de se desenvolver nos alunos da educação básica o raciocínio combinatório, como uma forma de pensamento que auxilia no aprendizado matemático. O estudo de Pessoa e Borba (2009) busca analisar os desempenhos e as estratégias de alunos de anos iniciais do Ensino Fundamental na resolução de problemas combinatórios e as autoras constataram que a maior parte dos alunos tem dificuldade em esgotar todas as possibilidades que o problema apresenta, sendo que os alunos dos dois primeiros anos de escolarização (antigas 1ª e 2ª séries) são menos bem-sucedidos que os demais na enumeração de todos os casos possíveis e sugerem que a escola deve discutir o esgotamento de possibilidades em seu trabalho de raciocínio combinatório, ou seja, o levantamento – direto ou indireto — de todos os possíveis casos, em outras palavras, do espaço amostral.

No que concerne à terceira exigência cognitiva, a *quantificação e comparação de probabilidades*, Bryant e Nunes (2012) alertam que a maior parte dos problemas de probabilidade repousa sobre o cálculo de uma proporção ou mais, no entanto, o raciocínio proporcional, em geral, é difícil para as crianças e, na esfera da probabilidade, esta dificuldade é mais acentuada quando há a necessidade de comparar duas ou mais probabilidades diferentes. Entretanto, há algumas situações

[3] http://geracaoufpe.blogspot.com.br/

que podem ser resolvidas com base nas relações simples como ‘mais’ e ‘menos’ a partir da análise das possibilidades de formação dos eventos, por exemplo.

A probabilidade é uma quantidade proporcional, ou seja, uma *quantidade intensiva*. No contexto da matemática escolar as *quantidades extensivas* como massa, altura, distância ou número de objetos de um conjunto são as mais utilizadas pelas crianças e essas quantidades obedecem às leis aditivas simples, como, por exemplo, se for adicionado um quilograma de maçãs a uma sacola de compras, aumenta a massa de seu conteúdo em um quilograma. No caso das *quantidades intensivas*, a relação estabelecida é outra. Por exemplo, se a temperatura da água é de 20ºC e adiciono mais um litro de água com a mesma temperatura, a quantidade de água aumentará (quantidade extensiva), mas a temperatura (quantidade intensiva) permanecerá a mesma (BRYANT e NUNES, 2012).

Como quantidade intensiva, o cálculo da probabilidade de um evento deve ser baseado em todas as quantidades do espaço amostral e não apenas na quantidade de eventos que desejamos prever. Assim, para calcular a probabilidade de se retirar uma bola vermelha de uma urna que contém bolas vermelhas, azuis e brancas, é preciso pensar na proporção de bolas vermelhas sobre o total de bolas da urna. Na situação descrita, há a exigência da proporcionalidade e, sendo uma quantidade de natureza mais complexa, o raciocínio proporcional tem sido um gargalo na compreensão da quantificação e comparação de probabilidades.

Bryant e Nunes (2012) apontam que embora alguns estudos sugiram que os alunos tendem a melhorar os cálculos proporcionais de probabilidade à medida que envelhecem, não há nenhuma evidência de que todos acabarão se tornando capazes de raciocinar proporcionalmente sobre probabilidades quando se tornarem mais velhos. É preciso, portanto, investigar mais o que pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento proporcional e, consequentemente, o avanço do pensamento probabilístico.

As correlações, que são associações entre variáveis, existem em muitas situações tanto no mundo das ciências, como da vida cotidiana. Quando dois eventos acontecem juntos, sua incidência pode ser uma ocorrência aleatória ou o resultado de uma verdadeira relação. Por exemplo, existe uma relação entre a quantidade de comida ingerida por uma pessoa e a sua massa, mas a associação entre essas duas variáveis não é perfeita, pois o efeito varia de pessoa para pessoa. Apesar da imperfeição e da falta de precisão dos resultados dessa relação, tais dados permitem a médicos e nutricionistas avaliar o risco de obesidade, por exemplo. Assim, entre a certeza de determinados eventos e a completa incerteza de eventos aleatórios, encontra-se um mundo imperfeito repleto de importantes associações, que são as correlações (BRYANT E NUNES, 2012).

Sinteticamente, em seu relatório, Bryant e Nunes (2012) constataram que

> A maioria das pesquisas sobre crianças e probabilidades assume a forma de estudos transversais, em que crianças de diferentes idades são vistas por um curto período de tempo e são dadas tarefas que testam sua compreensão apenas em <u>um dos quatro aspectos da probabilidade descritos acima</u>. Este tipo de estudo nos diz sobre o que as crianças compreendem, e o que é difícil para elas em determinadas idades, mas não explica a razão pela qual, como geralmente acontece, as crianças mais velhas fazem melhor do que as mais jovens, e isso <u>não nos dá nenhuma informação sobre as conexões entre os quatro aspectos diferentes de aprender sobre probabilidade</u> (BRYANT e NUNES, 2012, p.13 [tradução nossa] [grifos nossos].

Diante de interrogações, de incompletudes de informações e de lacunas consideráveis apresentadas no documento elaborado por Bryant e Nunes (2012), e, ainda, com base nas sugestões apresentadas no relatório, optou-se por uma pesquisa que considerasse as três primeiras exigências cognitivas no trato da probabilidade: a *compreensão da aleatoriedade*, a *formação do espaço amostral* e a *comparação de probabilidades*. Neste estudo, considerou-se os aspectos mais intuitivos e menos formais da probabilidade, possíveis de serem desenvolvidos por crianças em início de escolarização. Por intermédio de jogos, buscou-se investigar contextos em que a aleatoriedade, o espaço amostral e a comparação de probabilidades pudessem ser identificados e apontados por crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Almejou-se uma investigação que observasse o desenvolvimento das crianças, mas, por se tratar de uma pesquisa de mestrado, o tempo não tornou possível a realização de um trabalho longitudinal que permitisse observar o desenvolvimento dos mesmos participantes ao longo de um espaço de tempo. Assim, optou-se em verificar o conhecimento probabilístico de crianças de anos escolares diferenciados, com participantes do 1º, 3º e 5º anos, para estabelecer uma comparação entre grupos de idades/anos distintos. Coloca-se, assim, como objetivos os que seguem.

Objetivo Geral

Analisar, em situações de jogos, conhecimentos de crianças acerca da probabilidade, em particular no que se refere à aleatoriedade, ao espaço amostral e à comparação de probabilidades.

Objetivos específicos

- Investigar se e como crianças percebem a presença da aleatoriedade em situação de jogos.

- Examinar, em crianças, a capacidade e a forma de levantar espaços amostrais em situação de jogos.

- Verificar se crianças relacionam, em situação de jogos, a comparação de probabilidades aos elementos dos eventos do espaço amostral.

- Averiguar a existência (ou não) de uma conexão entre a compreensão das crianças no que tange à aleatoriedade, à formação do espaço amostral e à comparação de probabilidades.

- Estabelecer comparações entre as compreensões das crianças de diferentes anos/idades acerca da aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades.

A seguir, no Capítulo 2 será explicitado no referencial teórico a importância da probabilidade, como também a relevância dos jogos para a aquisição, ampliação e solidificação de conceitos matemáticos. Em seções posteriores, apresenta-se no Capítulo 3, a revisão da literatura, apontando estudos anteriores que deram suporte e que contribuíram para esta pesquisa; no Capítulo 4 será detalhado o método e no Capítulo 5 serão apontados as análises e resultados do estudo. Finalmente, no Capítulo 6 serão elencadas as considerações finais acerca da pesquisa e os possíveis encaminhamentos para estudos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico deste estudo está assentado especialmente em torno do tema central *probabilidade,* com suporte de diversos teóricos como Gal (2004, 2012), Batanero e Diaz (2007), Lopes (2008) e Viali (2008), entre outros, e, naturalmente, Bryant e Nunes (2012), bem como de documentos oficiais, como Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997) e Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). Aspectos referentes à importância do pensamento probabilístico serão apresentados e discutidos nessa seção.

Outro foco em discussão que referencia este trabalho são os *jogos*, com aporte teórico de Kishimoto (1994), Grando (2000), Macedo, Petty e Passos (2000), Muniz (2010) e Cordeiro e Silva (2014). Na seção dedicada a essa discussão será ressaltado o uso de jogos como recurso para o aprendizado da Matemática.

2.1 Um olhar sobre a probabilidade

A probabilidade tem suscitado discussões acerca de sua importância, em especial em situações contextuais do mundo real em que há a necessidade de julgamentos, escolhas, análises, conclusões e tomadas de decisão. Por esta razão, diversos autores, estudiosos e teóricos enfatizam a relevância do ensino da probabilidade desde cedo, nas escolas.

De acordo com Viali (2008), os trabalhos envolvendo Estatística e Probabilidade são bem tímidos, em comparação aos realizados em outras áreas da Matemática. Em relação à probabilidade, em particular, o autor destaca que “traçar um panorama do desenvolvimento da probabilidade, é uma tarefa complexa, pois além do material ser escasso, quando ele existe, invariavelmente aparece junto com a estatística” (VIALI, 2008, p.143). É fato que há relações estreitas entre a Estatística e a Probabilidade e que é importante que esses laços sejam observados sob a ótica das duas, no entanto, há particularidades no seio da Probabilidade que precisam ser estudadas e aprofundadas, para que a Probabilidade não pareça apenas coadjuvante nas questões estatísticas.

Para Gal (2004), a probabilidade se configura como uma parte da Estatística e da Matemática que são áreas de conhecimento importantes para se aprender, sendo um direito próprio e essencial na educação moderna; serve de base para assuntos mais avançados, como amostragem e como base para inferência estatística; e é fundamental para ajudar a preparar os alunos para a vida, uma vez que ocorrências aleatórias permeiam nosso cotidiano. Este autor alerta que o mundo real não deve ser o único fator que influencie o planejamento curricular ou as práticas do professor, frente ao desafio de ensinar conteúdos probabilísticos, no entanto, esta deve ser uma das partes importantes.

Corroborando com este pensamento, Lopes (2008), defende que a competência relacionada à Estatística e probabilidade permite aos alunos uma sólida base para desenvolverem estudos futuros em áreas científicas, como Biologia e Ciências Sociais, e considera que no “mundo em rápida mudança como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões” (LOPES, 2008; p.60). A autora completa, afirmando que não basta ao cidadão compreender as porcentagens presentes em índices estatísticos, é imprescindível saber analisar/relacionar criticamente os dados, questionando, inclusive a sua veracidade.

Para Lopes, Teodoro e Rezende (2010), atualmente a teoria da probabilidade[4] possui aplicações relevantes nos mais diversos ramos da atividade humana, como na Economia, na Política e na Medicina, entre outros. Nessa ótica, a teoria da probabilidade é vista como fundamento matemático que garante a validade dos procedimentos da inferência estatística.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) especificam, no campo denominado Tratamento da Informação, em relação à probabilidade que

> a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções do acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1997, p. 55, 1998, p.52).

[4] A teoria da probabilidade será tratada adiante, ao se descrever os diferentes significados da probabilidade sintetizados por Batanero e Diaz (2007).

Em Pernambuco, os Parâmetros para a Educação Básica (PERNAMBUCO, 2012), indicam para os anos iniciais do Ensino Fundamental, o desenvolvimento de trabalhos envolvendo a ideia intuitiva de chance de ocorrência de um evento, a partir da análise de possibilidades, como preparação para a compreensão da probabilidade e, para os anos finais, orientam que o trabalho com probabilidade deva apoiar-se em situações experimentais e simulações, como suporte para posterior determinação da probabilidade de um evento.

Noções a respeito da probabilidade, incertezas e riscos aparecem no dia a dia das pessoas e em todas as esferas da vida nas quais há a necessidade de interpretar, reagir ou lidar com situações envolvendo elementos probabilísticos de diferentes níveis de previsibilidade ou imprevisibilidade, sendo necessário, muitas vezes, a realização de estimativas de certos eventos, independente do conhecimento formal em probabilidade que o indivíduo possua.

Gal (2004) enfatiza que

> Probabilidade não é uma característica tangível de eventos, mas sim, uma percepção que se expressa através de uma notação matemática formal ou de meios informais, de possibilidades ou probabilidade de ocorrência de eventos. Tais percepções dependem da interação entre fatores que operam nas situações externas e nas pessoas que enfrentam essas situações. (GAL, 2004; p. 44-45)

As razões para a aprendizagem da probabilidade dizem respeito a interesses de *ordem interna*, que trata do próprio conhecimento probabilístico, como tópico matemático, objetivando que os alunos aprendam a estrutura e conteúdo da disciplina, e que sejam capazes de compreender e aplicar conceitos abstratos, provas, fórmulas, objetos visuais, lógica, ferramentas e métodos, ou seja, que o aluno pense como um matemático (GAL, 2004, 2012); e os interesses de *ordem externa* que se baseiam na crença de que os aspectos que são externos à estrutura da probabilidade são relevantes, como as situações de natureza probabilísticas vivenciadas no mundo real. “Em um nível mais geral, a *visão externa* refere-se à necessidade de assegurar que as escolas permitam que todos os alunos desenvolvam as habilidades para a vida e competências requeridas pelos adultos no século 21” (GAL, 2012; p.2). Tais interesses não são mutuamente exclusivos. Ambos têm seus méritos e devem influenciar nosso pensamento a respeito da probabilidade e de seu ensino.

Acerca do conceito de probabilidade, Batanero e Diaz (2007) apontam cinco importantes componentes que se inter-relacionam no significado do conceito. São eles:

1- *O domínio de problemas a partir do qual o conceito emergiu* – muitos problemas relacionados a jogos de azar foram utilizados para desenvolver as primeiras ideias sobre conceitos de probabilidade.
2- *As representações do conceito* – para resolver os problemas são necessárias representações simbólicas, já que os conceitos são entidades abstratas.
3- *Procedimentos e algoritmos* – há uma variedade de ferramentas matemáticas para ajudar a resolver problemas de probabilidade, incluindo combinatória, álgebra e geometria; tabelas de distribuição, calculadoras e computadores auxiliam o processo para lidar e resolver os problemas, diminuindo o fosso entre a compreensão e a competência técnica para resolvê-los.
4- *As definições do conceito* – incluem propriedades e relações com outros conceitos, como as diferentes definições de probabilidade, entre outros.
5- *Argumentos e provas de validação* – há confirmação experimental facilitada pela simulação de frequências, em computadores e internet, que desempenha um papel importante na compreensão dos alunos; e a irrefutável prova matemática.

Assim, as autoras (BATANERO e DIAZ, 2007) apontam que conceitos aparentemente simples como a probabilidade, possuem uma natureza multifacetada. Daí a necessidade de considerar os diferentes significados envolvidos na organização da instrução, bem como as diferenças nos níveis de abstração e dificuldades presentes em cada um dos cinco componentes descritos acima.

2.2 Letramento probabilístico

Os conceitos de *alfabetização, letramento* e *literacia* se interpelam, se complementam e por vezes, se distanciam. Ody e Viali (2013) realizaram uma revisão bibliográfica, objetivando buscar as interfaces apontadas por diversos autores para que pudessem dispor de uma base conceitual que favorecesse a compreensão da *literacia* na Estatística e na Probabilidade.

Como resultados, Ody e Viali (2013) apontaram que *alfabetização* e *letramento* remetem a conceitos que envolvem a formação cidadã das pessoas. Ser alfabetizado vai além do conhecimento da língua materna, envolve também a linguagem numérica, a alfabetização numérica e o sentido que se dá aos números ao se lidar com eles. Para os autores, "uma pessoa alfabetizada é aquela que sabe ler e escrever, o que não significa que a mesma saiba associar essa prática ao contexto no qual está inserida" (ODY e VIALI, 2013, p.7). Assim sendo, o letramento diz respeito ao uso da leitura e da escrita nas práticas sociais, através do uso de instrumentos mediadores para decodificar, dar sentido às informações e sustentação à tomada de decisões.

Ao tratar da *literacia*, os autores defendem que a mesma

> implica o domínio e uso de competências adquiridas na leitura, na escrita (e no cálculo) e nas atividades cotidianas, ensinando e aprendendo com as interpretações extraídas das informações. Preocupa-se com o vínculo das habilidades e competências com as funções que a leitura e a escrita desempenham na capacidade de processar, perceber, interpretar e analisar. O objetivo é promover aprendizagens significantes para a formação de um sujeito cidadão. (ODY e VIALI, 2013, p.7).

Gal (2004), considera que, para a apropriação do literacia probabilística, são indispensáveis alguns *conhecimentos* (elementos cognitivos) e *disposições* (elementos disposicionais) que os alunos precisam desenvolver para serem considerados alfabetizados em questões probabilísticas no mundo real. Assim, o pensamento e o comportamento das pessoas em situações probabilísticas são afetados por várias bases de conhecimentos e disposições. O letramento probabilístico prescreve a capacidade das pessoas acerca de um comportamento orientado para uma meta, sugerindo um amplo conjunto não apenas de conhecimentos factuais e habilidades formais, como também crenças, atitudes e hábitos da mente e uma perspectiva crítica.

Nessa ótica, os *elementos disposicionais* envolvem crenças, atitudes e hábitos de mente, enquanto os *elementos cognitivos* abraçam cinco bases de conhecimentos: conhecimento dos grandes tópicos/temas, cálculos probabilísticos, linguagem, contextos e perguntas (questões) críticas. Os elementos disposicionais desempenham um importante papel na forma como as pessoas pensam sobre a informação probabilística ou agem em situações que envolvem a oportunidade e a incerteza, em contextos do mundo real e em sala de aula.

Os *elementos cognitivos* interagem entre si de forma complexa durante o comportamento real no processo de aprendizagem. Um ou dois elementos apenas não garantem o desenvolvimento do letramento probabilístico do aluno, cinco pontos são importantes, defende Gal (2004):

1- *Grandes tópicos/temas* da probabilidade – se faz necessária a familiaridade e compreensão de bases fundamentais do conhecimento probabilístico, como: aleatoriedade, independência de eventos e variação. As noções de aleatoriedade, independência e variação precisam ser entendidas não apenas particularmente em seu sentido uno, mas também como bloco de construção mais amplo para a compreensão de um quarto tema: previsibilidade e (in)certeza. A previsibilidade de um evento, nesse sentido, depende das hipóteses sobre os processos que influenciam a ocorrência de um evento e da qualidade das informações que são usadas para apoiar as estimativas de probabilidade. As noções de segurança são incorporadas a conceitos como *margem de erro* e *significância* que exigem familiaridade com as grandes ideias ou temas: aleatoriedade, independência de eventos, variação e certeza.
2- *Calcular/comunicar probabilidades* – para gerar estimativas sobre probabilidade de eventos e poder comunicar tais dados, é imprescindível a familiarização com maneiras distintas de encontrar/calcular probabilidades. Fora das ciências, as probabilidades não são calculadas e, sim, estimadas ou julgadas e normalmente informações de várias fontes são utilizadas, incluindo informação não probabilística que será integrada a um processo complexo de julgamento e decisão que envolve o nível de confiança (certeza) e a relação com a noção e entendimento de provas. Importante saber que existem muitas formas de estimar probabilidades, mas a tradução das questões envolvendo as nuances apresentadas não são simples e exige planejamento para o trato em sala de aula.
3- *Linguagem* – os alunos devem compreender a “linguagem do acaso”, ou seja, as variadas formas de representar e comunicar possibilidades e probabilidades. Necessária, portanto, a familiarização com termos, frases e conceitos relacionados com construções abstratas relevantes à compreensão da probabilidade: variabilidade, aleatoriedade, independência, (im)previsibilidade, (in)segurança, acaso, risco – que nem sempre possuem definições claras.

Expressões e palavras usadas no contexto externo à probabilidade, no dia a dia, podem ter uma carga semântica implícita inteiramente diferente do proposto no cerne de uma questão probabilística. As probabilidades podem também ser expressas através de termos: “muito provável”, “certamente”, “impossível”, “com certeza”, “boa chance”, expressões que podem traduzir uma situação probabilística. Os alunos devem ter a oportunidade de descrever oralmente e por escrito o seu pensamento e compreensão sobre probabilidades.

4- *Contexto* – o conhecimento de contexto está associado ao *conhecimento de mundo*, que envolve os grandes tópicos, o cálculo de probabilidades e também a linguagem. No entanto, esse conhecimento introduz expectativas específicas: o impacto da aleatoriedade em diferentes eventos e processos e as situações, nas quais noções comuns de acaso e probabilidade chegam à vida de uma pessoa, ou seja, o entendimento que a aleatoriedade afeta eventos e processos do mundo real, possibilitando alguma previsão. O contexto é pedagogicamente importante, pois ajuda a explicar porque há necessidade de aprender sobre probabilidade e incerteza em diferentes circunstâncias da vida. Diversos contextos socialmente significativos são apontados para ilustrar a importância da aleatoriedade, variação, probabilidade e risco: o mundo físico e natural, processos tecnológicos, comportamento humano, medicina e saúde pública, justiça e crime, finanças e negócios, pesquisas e estatística, previsão pública e política, jogos de azar e apostas e decisões pessoais, dentre outros.

5- *Questões críticas* – os leitores e ouvintes não podem considerar declarações probabilísticas veiculadas pelos meios de comunicação como verdades absolutas sem serem capazes de fazer uma série de questionamentos críticos acerca da informação. Todos os alunos devem desenvolver a capacidade consciente de questionar a finalidade do escritor, a objetividade e o raciocínio utilizados. É, portanto, necessária a familiaridade com elementos metodológicos que afetam a qualidade dos resultados e os vieses que podem ocorrer em relatórios e interpretação de dados estatísticos.

Assim sendo, “as pessoas precisam de alfabetização probabilística para lidar com a ampla gama de situações do mundo real que envolvem interpretação ou geração de mensagens probabilísticas, bem como a tomada de decisão” (GAL, 2004; p.50). No entanto, os detalhes sobre o conhecimento e disposições que podem compreender a alfabetização probabilística têm recebido pouca atenção nas discussões sobre alfabetização, numeração e letramento estatístico, aponta o autor.

2.2.1 Significados da Probabilidade

O conceito de probabilidade recebeu ao longo da sua história, diferentes interpretações. Batanero e Diaz (2007) sintetizam os diferentes significados da probabilidade, baseadas nas ideias de Batanero, Henry e Parzysz (2005), destacando: *o intuitivo, o clássico, o frequentista, o subjetivo, o de propensão, o lógico e o axiomático*. Evidencia-se a seguir os quatro primeiros significados por terem maior proximidade com esta pesquisa.

1- *Significado intuitivo* – ideias intuitivas relacionadas à possibilidade e à probabilidade aparecem desde muito cedo em crianças e se ampliam mesmo em adultos sem educação formal. Expressões qualitativas como “provável”, “improvável”, “impossível” são usadas para expressar graus de crença na ocorrência de eventos aleatórios. Essas ideias intuitivas e naturais são muito imprecisas, e as pessoas precisam atribuir valores aos eventos incertos como forma de comparar as suas probabilidades e assim aplicar a matemática para o vasto mundo de incertezas. A probabilidade teve um caráter dual desde seu surgimento: de um lado as regras estocásticas[5] e de outro as crenças como uma questão pessoal e com parâmetros particulares.

2- *Significado clássico* – Laplace sugeriu que a teoria do acaso consistia na redução de todos os eventos de mesma natureza a um certo número igualmente de casos possíveis, definindo que a probabilidade é uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de casos possíveis, considerando que todas as possibilidades tenham a mesma chance de ocorrência, ou seja, que haja a equiprobabilidade. Essa definição baseou-se numa interpretação subjetiva, associada com a necessidade de avaliar a equiprobabilidade de resultados diferentes. Nesta concepção, não há

[5] Estocástica é o termo utilizado para tratar a probabilidade integrada à estatística (LOPES, 2008)

realização de experimentação, como na probabilidade frequentista. Ela se caracteriza por uma abordagem a *priori.*

3- *Significado frequentista* – parte de um processo de experimentação (probabilidade *a posteriori*). Na abordagem frequentista, a probabilidade é definida como um número para o qual a frequência relativa tende à estabilização. Resulta da expressão aproximada na frequência relativa de eventos resultantes de longas sequências de ensaios aleatórios, realizados em condições idênticas. Assim sendo, a abordagem frequentista não fornece o valor exato da probabilidade de um evento, aponta uma tendência. Não pode haver, no entanto, uma interpretação da probabilidade frequentista para um evento que ocorre apenas uma vez, nas mesmas condições. São necessários sucessivos ensaios, em condições idênticas, para estabelecer a probabilidade do evento, ou melhor, a tendência dessa probabilidade. Diz-se que quanto maior o número de experimentações, mais a probabilidade frequentista se aproxima da clássica.

4- *Significado subjetivo* – probabilidade considerando graus de crença, com base em julgamento pessoal e informações sobre experiências relacionadas a um certo resultado. Considera-se que a possibilidade de um evento está sempre relacionada a um sistema de conhecimentos que podem ser diferentes de pessoa para pessoa. A dificuldade com a probabilidade subjetiva repousa no fato de parecer impossível derivar expressões matemáticas para crenças pessoais. Embora a escola Bayesiana tenha atribuído probabilidades a eventos incertos e fenômenos não aleatórios, permanece a controvérsia sobre o status científico dos resultados que dependem de julgamentos que variam com o observador.

O Quadro 1 sintetiza os diversos elementos importantes na compreensão dos distintos significados atribuídos à probabilidade, tais como: i) campos dos problemas; ii) algoritmos e procedimentos; iii) elementos linguísticos; iv) definições e propriedades; v) concepções relacionadas. Tais elementos são fundamentados a partir das ideias propostas por Batanero, Henry e Parzysz (2005), sob a ótica, aqui apresentada e sintetizada por Batanero e Diaz (2007).

Quadro 1: Elementos que caracterizam os diferentes significados da Probabilidade

SIGNIFICADO DA PROBABILIDADE	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS E PROCEDIMENTOS	ELEMENTOS LINGUÍSTICOS	DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES	ALGUMAS CONCEPÇÕES RELACIONADAS
Intuitivo	- Sorteios -Adivinhações	-Manipulação de geradores de acaso: dados, cartas, urnas...	-Linguagem natural	-Opinião imprevisível, crença	-Sorte -Destino
Clássico	- Cálculo de esperança ou riscos em jogos de azar	-Combinatória -Proporções -Análises a priori da estrutura do experimento.	-Triângulo aritmético -Listagem de eventos -Fórmulas Combinatórias	-Quociente de casos favoráveis e possíveis -Equiprobabilidade de eventos simples	-Esperança -Regularidade -Independência
Frequentista	- Estimativa de parâmetros em populações	-Registro de dados estatísticos e *posteriori* -Ajuste de curvas matemáticas -Análise matemática -Simulação	-Tabelas e gráficos estatísticos -Curvas de densidade -Tabelas de números aleatórios -Tabelas de distribuições	-Limite de frequências relativas -Caráter objetivo baseado na evidência empírica	-Frequência relativa -Universo -Variável aleatória -Distribuição de Probabilidade
Propensão	-Situações incluindo casos isolados	-Análise *a priori* e experimental		-Disposição física ou tendência -Caráter objetivo -Aplicável para casos isolados - Relação com experimentos condicionais	-Propensão -Probabilidade de tendência causal -Frequências virtuais
Lógico	- Ampliação das inferências	-Análise *a priori* sobre as possibilidades -Lógica proposicional Lógica indutiva	-Linguagem formal -Probabilidade condicional	-Objetivação do grau de crença -Relação entre declarações -Possibilidades de dados com diferentes pesos -Generalização de implicações -Passível de revisão	- Evidência -Hipótese -Grau de implicação
Subjetivo	- Melhora do conhecimento sobre eventos incertos, incluindo não repetidos.	-Teorema de Bayes -Atribuição subjetiva de probabilidades	- Expressão da probabilidade condicional	-Caráter Subjetivo -Verificação com experiência	-Probabilidade condicional -Distribuições a *priori* e a *posteriori*
Axiomático	- Quantificação da incerteza de resultados em experimentos aleatórios abstratos.	-Teoria dos conjuntos -Álgebra dos conjuntos -Teoria da Medida	- Símbolos dos conjuntos	- Função medida	-Espaço amostral -Espaço de Probabilidades -Conjunto de Borel

Fonte: Batanero e Diaz (2007)

Os diferentes significados de probabilidade apontados no Quadro 1 devem ser progressivamente levados em conta, iniciando com ideias intuitivas do acaso e da probabilidade, uma vez que a compreensão é um processo de construção contínua em que os alunos adquirem e relacionam os diferentes elementos do significado do conceito (Batanero e Diaz, 2007).

Um outro enfoque envolvendo a probabilidade é também observado na literatura e denomina-se *probabilidade geométrica*, que, segundo Bittar e Abe (2013), envolve conceitos de geometria como comprimento, área e volume, sendo o espaço amostral constituído por conjuntos contínuos. Neste enfoque, explora-se a probabilidade a partir de conceitos geométricos prévios. Na Probabilidade Geométrica, trabalha-se com razões entre medidas de mesma natureza. Estas medidas são figuras geométricas.

Gal (2004) traz uma importante contribuição acerca das situações matemáticas relevantes para a alfabetização probabilística. Há três tipos de situações que devem ser observadas, no processo de instrução, a fim de que se possa alfabetizar probabilisticamente um indivíduo.

1- Situações computacionais – exigência de contagem, quantificação, computação, manipulação de números, quantidades, itens ou elementos visuais.
2- Situações interpretativas – interpretação que as pessoas fazem das mensagens que envolvem questões quantitativas, mas que não requerem a manipulação direta de números ou quantidades. Opinião, julgamento em termos de razoabilidade ou da qualidade dos argumentos apresentados.
3- Situações de tomada de decisão – exigem que as pessoas determinem um curso de ação, considerando objetivos conflitantes, restrições ou incertezas. Possui um componente subjetivo maior, dependem dos pressupostos das pessoas sobre as tendências futuras, preferências, sistemas de valores e julgamento de probabilidades.

O autor alerta, apontando alguns estudos, que o uso da probabilidade no mundo real, no cotidiano, não exige cálculos probabilísticos:

> “Ao refletir ainda mais sobre a necessidade de alfabetização probabilística como parte do desenvolvimento de numeracia global, é importante notar que as exigências profissionais raramente envolvem conhecimentos de cálculos de probabilidade. Opiniões de centenas de empregadores nos EUA (Packer, 1997) mostraram que o conhecimento estatístico chave necessário se houver, em contextos de trabalho inclui a familiaridade com gráficos e tabelas, a compreensão de variação, ou familiaridade com algumas estatísticas descritivas. Assim, pode-se especular que, para a maioria dos adultos, o conhecimento da probabilidade é de relevância principalmente para funcionamento em reinos pessoais, comunitárias e sociais, onde as situações exigem interpretação dos enunciados probabilísticos, geração de juízos de probabilidade, ou a tomada de decisões.” (GAL, 2004; p.48-49) (Tradução nossa)

O conhecimento da probabilidade auxilia no desenvolvimento matemático das pessoas, logo, desde cedo, as crianças deveriam ser incentivadas na escola a desenvolverem noções e intuições probabilísticas. Carvalho e Fernandes (2005) citam alguns estudos que, entre outras resultados, apontam que as novas atitudes intuitivas apenas se podem desenvolver num ambiente de envolvimento pessoal do aprendiz numa atividade prática, sendo necessário uma estratégia de ensino alicerçada em diferentes perspectivas do conceito de probabilidade, na utilização de objetos aleatórios concretos, na exploração de analogias, em representações facilitadoras da contagem, na organização de sistemas de tarefas, em aspectos lógicos e no desenvolvimento de uma interação intensa dos alunos entre si e entre os alunos e o professor.

Nessa ótica, acredita-se que os jogos podem servir de ponte entre a criança e o conhecimento probabilístico, uma vez que se configuram em atividades práticas, podem utilizar objetos aleatórios concretos (como dados e moedas), possuem aspectos práticos, contemplam representações que possibilitam contagem, além de permitirem a interação não apenas entre professor e aluno, bem como entre seus pares, aluno-aluno.

2.3 Os jogos e o conhecimento matemático

Na perspectiva apresentada neste texto, “os jogos devem ser encarados como situações-problema a partir das quais podem ser tratados conceitos e relações matemáticas relevantes para o ensino básico" (PERNAMBUCO, 2012, p.35). Assim sendo, a denominação *jogos matemáticos* engloba situações-problema de vários tipos, como jogos que envolvem disputa entre duas pessoas ou entre pares (xadrez, dama, jogo da velha), jogos com tabuleiro, quebra-cabeças, Tangram, poliminós, desafios e enigmas, paradoxos formulados em linguagem do cotidiano e que, requeiram raciocínio lógico para serem desvendados. (PERNAMBUCO, 2012).

Para que um problema seja considerado um jogo matemático, é necessário que seja acessível ao maior número de pessoas; que o enunciado ou a proposta se configure num desafio para quem o lê ou joga, seja intrigante e surpreendente; e que a solução (o jogo) possa divertir, distrair, defende Muniz (2010), citando Critton (1997). Para o autor, os jogos matemáticos não são apenas brinquedos de crianças, são matéria de trabalho mesmo, são atividades matemáticas. No entanto, o que caracteriza o jogo matemático é exatamente seu aspecto lúdico em que devem ser garantidos os seguintes pontos: i) sua aparência deve ser divertida, humorística e pode imitar a realidade; ii) sua característica deve ser curiosa, inabitual, estranha e surpresa; iii) deve ser desafiador (CRITTON, 1997, apud MUNIZ, 2010).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois são atrativos e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e de busca de soluções, além de propiciar a simulação de situações que exigem soluções imediatas, estimulam o planejamento de ações e promovem uma atitude positiva perante os erros. As atividades exploradas por meio de jogos permitem ao professor avaliar e analisar os alunos sob diversos aspectos, entre eles a compreensão, a facilidade de construir estratégias e a possibilidade de descrição, quando é necessário comunicar os procedimentos e a estratégia utilizada.

Kishomoto (1994), em seus estudos, resgatou de pesquisadores do Laboratório de Pesquisa do Jogo e Brinquedo, da Universidade Paris-Norei, que o termo jogo aponta três níveis de diferenciação: 1- o resultado de um sistema linguístico que funciona dentro de um contexto social; 2 - um sistema de regras e 3 - um objeto.

Enquanto sistema linguístico, a autora defende que existe um funcionamento pragmático da linguagem da qual resulta uma série de fatos e atitudes que atribuem significado aos vocábulos a partir de analogias e reafirma que “toda denominação pressupõe um quadro sociocultural transmitido pela linguagem e aplicado ao real” (KISHOMOTO, 1994, P.108). Já considerando o sistema de regras envolvido no jogo, a supracitada autora diz que qualquer jogo possui uma estrutura sequencial que especifica sua modalidade, ocorrendo a superposição com a situação lúdica. Em relação ao jogo enquanto objeto, faz menção aos materiais do quais são feitos os jogos, afirmando que o manuseio e a exploração dos mesmos diferencia significados dados por culturas distintas, pelas regras e objetos que caracterizam o jogo.

Macedo, Petty e Passos (2000) julgam os jogos como um valioso instrumento psicopedagógico, desde que sejam oferecidos à criança num contexto com o acompanhamento de um observador para análise sobre o que está acontecendo. Defendem a ideia de que jogar favorece e enriquece o processo de aprendizagem, pois conduz o sujeito a refletir, a fazer previsões e inter-relacionar objetos e eventos, como também contribui no sentido de fornecer informações acerca do pensamento infantil, o que é fundamental para o profissional que pretende auxiliar na superação das eventuais dificuldades.

É imprescindível inserir as crianças em jogos e atividades que possibilitam um percurso que vai da imaginação à abstração, através de processos de levantamento de hipóteses e testagem de conjecturas, reflexão, análise, síntese e criação de estratégias variadas de resolução dos problemas em jogo, concorda Grando (2000). Para a autora, em relação ao comportamento de crianças em situações de jogos ou brincadeiras, “percebe-se o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas (GRANDO, 2000; p.20).

Ampliando o pensamento de Grando (2000), o caderno de jogos do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (BRASIL, 2014), explicita que além dos conceitos, os jogos possibilitam o desenvolvimento da capacidade de organização, análise, reflexão e argumentação e de uma gama de atitudes como por exemplo, aprender a ganhar e a lidar com a perda, trabalhar em equipe, respeitar regras, etc. Além disso, o jogo pode propiciar a construção de conhecimentos novos, aprofundar o que já foi visto ou revisar conceitos, desde que haja uma intencionalidade pedagógica, caracterizada por uma metodologia que favoreça a aprendizagem. (BRASIL, 2014).

O jogo como proposta pedagógica não é uma tarefa simples, pois requer planejamento, acompanhamento e avaliação. Não pode ser visto como um mero passatempo que é dado aos alunos como forma de lazer ou para ocupar um tempo ocioso na sala de aula. Há uma intencionalidade pedagógica e uma objetividade envolvidas na atividade para torná-la, de fato, suporte para o desenvolvimento e ampliação de conceitos lógico-matemáticos. Nessa ótica,

> A complexidade de alguns jogos, mesmo aqueles mais comuns, requer, de um lado, clareza sobre os vários conceitos matemáticos envolvidos e, de outro, um planejamento do momento e da maneira adequados para sua utilização no processo de ensino e aprendizagem, para que seja garantida a riqueza conceitual, o prazer em participar da atividade e a conquista da autoconfiança (PERNAMBUCO, 2012; P.38).

Macedo, Petty e Passos (2000) defendem que num contexto de jogos, a participação ativa do sujeito sobre seu saber é valorizada por pelo menos duas razões: uma delas é a possibilidade da relação positiva da criança com a aquisição do conhecimento, aprender é visto como algo interessante e desafiador e, consequentemente, “por meio de atividades com jogos, as crianças vão ganhando autoconfiança, são incentivadas a questionar e corrigir suas ações, analisar e comparar pontos de vista, organizar e cuidar dos materiais utilizados” (MACEDO, PETTY, PASSOS, 2000; p.24). A outra razão diz respeito à valorização do sujeito na construção de seu próprio saber e a possibilidade de desenvolver seu raciocínio.

Quanto à importância do acompanhamento das atividades que envolvem jogos e das consequências de uma proposta consistente com objetividade e clareza, é possível destacar que

> Quando a criança joga e é acompanhada por um profissional que propõe análises de sua ação, descobre a importância da antecipação, do planejamento e do pensar antes de agir. Por sentir-se desafiada a vencer, aprende a persistir, aprimora-se e melhora seu desempenho, não apenas como uma solicitação externa, mas principalmente como um desejo próprio de auto-superação. Essas atitudes exercem uma grande influência no desenvolvimento geral da criança: aprende a construir e vai criando formas de investigação de suas produções ou daquilo que é produzido pelos seus adversários. (MACEDO, PETTY, PASSOS, 2000; p.25)

O jogo visto sob seu caráter naturalmente competitivo, torna-se uma ferramenta capaz de gerar situações-problema provocadoras, conduzindo o sujeito a coordenar diferentes pontos de vista, estabelecer várias relações, resolver conflitos e estabelecer uma ordem, induzindo-o a perfeiçoar-se operatoriamente, considerando todos esses aspectos, defende Grando (2000), pontuando, ainda, que em situações de brincadeira e/ou jogo, é possível observar se a criança desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas.

Nesta perspectiva, concorda-se que

> Jogar favorece a aquisição de conhecimento, pois o sujeito aprende por si próprio (como age e pensa), sobre o próprio jogo (o que o caracteriza, como vencer), sobre as relações sociais relativas ao jogar (tais como competir e cooperar), e, também sobre conteúdos (semelhantes a certos temas trabalhados no contexto escolar) (MACEDO, PETTY, PASSOS, 2000; p.23).

O jogo e a instrução escolar representam o mesmo papel no que se diz respeito ao desenvolvimento das habilidades e conhecimentos, segundo Cordeiro e Silva (2012). Os autores defendem que o jogo passa pelo caminho das regras, ideias, estratégias, previsões, execução e análise de possibilidades e que seu uso deve ser incentivado na escola, principalmente no ensino da Matemática. O jogo propicia o desenvolvimento de habilidades de outra natureza, quais sejam o sujeito poder conhecer-se, estabelecer o limite de sua competência como jogador e avaliar o que tem que ser melhorado, aprender a perder e trabalhar estratégias para que não seja derrotado na próxima vez (CORDEIRO E SILVA, 2014).

Grando (2000) contribui com seu pensamento acerca do jogo de regras, quando alerta que:

> o jogo de regras possibilita à criança a construção de relações quantitativas ou lógicas, que se caracterizam pela aprendizagem em raciocinar e demonstrar, questionar o como e o porquê dos erros e acertos. Neste sentido, o jogo de regras trabalha com a dedução, o que implica numa formulação lógica, baseada em um raciocínio hipotético-dedutivo, capaz de levar as crianças a formulações do tipo: teste de regularidades e variações, controle das condições favoráveis, observação das partidas e registro, análise dos riscos e possibilidades de cada jogada, pesquisar, problematizar sobre o jogo, produzindo conhecimento. (GRANDO, 2000; P.16)

Sinteticamente, os Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012), confirmando boa parte do que foi exposto até aqui, afirmam que os jogos são experiências pedagogicamente relevantes nas aulas de Matemática, em função de seu caráter lúdico, importante no desenvolvimento integral dos estudantes; das ideias e relações matemáticas presentes neles; da busca por estratégias para vitória ou para solucionar o desafio que inclui uma variedade de questões de lógica e Matemática, possibilitando a exploração do jogo em diversos níveis; da integração propiciada entre diversas áreas da Matemática como Aritmética, Álgebra, Geometria, Combinatória etc; da compatibilidade com a metodologia da resolução de problemas; do aspecto interativo propiciado pela vivência, pois os estudantes não são meros observadores. Já os PCN consideram que "o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um 'fazer sem obrigação externa e imposta', embora demande exigências, normas e controle". (BRASIL, 1998; p. 47).

Acredita-se que em situações de jogos as crianças podem evidenciar conhecimentos e fragilidades acerca de determinados conceitos e o professor pode perceber quais aspectos desses conceitos envolvidos são efetivamente compreendidos pelas crianças e quais aspectos ainda precisam ser desenvolvidos.

A seguir, no Capítulo 3, serão abordadas pesquisas que apresentam similitudes com este estudo, por meio de uma revisão da literatura que contemplou trabalhos envolvendo crianças, adolescentes e adultos oriundos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e também professores desses níveis de ensino.

3 REVISÃO DA LITERATURA

Resgatou-se nesta revisão, pesquisas e estudos que apresentaram semelhanças com este trabalho no que diz respeito ao tema abordado: probabilidade. Dentre elas, destaca-se as pesquisas que tratam de conhecimentos probabilísticos cujos participantes são crianças, a exemplo dos estudos de Piaget e Inhelder (1975), apontados no relatório de Bryant e Nunes (2012), de Spinillo (1995), Carvalho (2005) e Nóbrega e Spinillo (2015). Em função da escassez de estudos com foco probabilístico com o público infantil, optou-se por resgatar também pesquisas envolvendo adolescentes do Ensino Fundamental e Médio na modalidade regular, com as pesquisas de Santos (2010), Ferreira (2011) e de Ody (2013) e de adultos na modalidade da Educação de Jovens e Adultos (EJA) no nível Médio, com a pesquisa de Batista e Francisco (2015), objetivando verificar se há aproximações ou distanciamentos entre estes e os que envolvem os participantes desta pesquisa: crianças do 1º, 3º e 5º anos. Buscou-se, ainda, estudos envolvendo professores, pois acredita-se que é importante ter um referencial acerca das compreensões, percepções e conhecimentos dos profissionais que lidam diretamente com os estudantes e, consequentemente, intervêm no processo de construção do pensamento probabilístico dos mesmos. Os estudos envolvendo professores explorados aqui são de Oliveira (2003), Oliveira (2006), Viali e Cury (2009), Santana (2011), Campos e Pietropaolo (2013) e Bernabeu, Torres, García e Batanero (2015).

3.1 Estudos envolvendo crianças

Para ilustrar os estudos de Piaget e Inhelder (1975), trazemos uma das pesquisas que versa sobre a aleatoriedade, na qual os autores usaram um disco com um ponteiro no centro, dividido em fatias do mesmo tamanho com cores diferentes, como uma pizza colorida. No início do experimento o ponteiro parava aleatoriamente e depois de várias rodadas, um imã foi colocado numa das fatias, de forma tal que um resultado se sobressaísse sobre os demais. Os pesquisadores constataram que crianças com menos de sete anos não perceberam a diferença, enquanto as mais velhas ficaram surpresas e procuraram uma explicação para as sequências não aleatórias. As conclusões de que as crianças mais novas não fazem a distinção entre eventos aleatórios e não-aleatórios foi absorvido com restrição por Bryant e Nunes (2012), pois sugerem que não se pode ter certeza desse fato, uma vez que os resultados tendenciosos poderiam, sim, acontecer mesmo aleatoriamente e não se tem certeza se as crianças sabiam disso, ou não.

Spinillo (1995) realizou um estudo procurando explorar as noções de crianças acerca de conceitos considerados restritos ao que se julga pensamento operacional formal, como no caso da probabilidade. Para tal, a autora considerou três aspectos acerca das tarefas de probabilidade: a natureza do paradigma experimental, as quantidades usadas e as relações envolvidas. Sua pesquisa contou com 60 crianças de 5, 6, 7 e 8 anos da rede privada de ensino. A tarefa consistia em construir um dado arranjo com fichas, de forma a ter: muita chance, pouca chance, mesma chance, certeza ou nenhuma chance. Como resultado, a pesquisadora constatou um alto índice de acertos, especialmente para os alunos mais velhos (7 e 8 anos), sugerindo que as crianças têm noções de construir arranjos com determinados índices de probabilidade. Spinillo (1995) alega que o sucesso dos resultados das crianças se deu, possivelmente, pela característica da tarefa: o uso de estimativas no lugar de quantificações numéricas exatas e o fato da tarefa requerer fazer algo ao invés de julgar o que já está feito.

Carvalho (2005) realizou um estudo objetivando analisar a constituição do conceito científico de probabilidade em alunos da 4ª série do Ensino Fundamental (atual 5º ano), a partir dos conceitos cotidianos por eles desenvolvidos. No seu estudo, foi realizado um pré-teste, uma intervenção e um pós-teste com 23 alunos. Foram selecionados como atributos de referência os conceitos de: eventos certos, eventos impossíveis, comparação de probabilidades, eventos independentes, eventos equiprováveis e quantificação de probabilidades. Segundo a autora, no pré-teste todos os alunos foram capazes de prever eventos certos e impossíveis, mesmo que não conseguissem explicitá-los, e cerca de um terço soube comparar as possibilidades, mas apresentavam limitação nas justificativas. No pós-teste, todos os alunos identificaram eventos certos e impossíveis, com a respectiva justificativa, bem como a comparação de possibilidades. Em relação ao domínio dos conceitos de eventos independentes e iguais, no pré-teste nenhum aluno demonstrou possuir esses conceitos construídos. Já no pós-teste, 52,17% dos alunos foram capazes de identificar e justificar a ocorrência dos eventos independentes, enquanto apenas 34,78% alcançaram o domínio do conceito de eventos equiprováveis. Considerando a quantificação das probabilidades, no pré-teste não houve resultados favoráveis. Em contrapartida, no pós-teste 78,29% dos entrevistados revelaram o entendimento do conceito. Por fim, a pesquisadora aponta que o estudo mostra a necessidade do professor propor situações-problema que envolvam conceitos probabilísticos de forma inter-relacionada, inclusive com outros conteúdos matemáticos. A autora enfatiza que para as crianças serem capazes de aprender conceitos que envolvem a probabilidade, no entanto, se faz necessário que elas vivenciem situações provocadoras e socioculturalmente significativas para que possam exercitar suas "funções mentais, como a atenção, a percepção, a memória voluntária, (...) de forma inter-relacionada, inclusive com outros conteúdos matemáticos, com sua vivência, com os temas transversais e com outras disciplinas (CARVALHO, 2005, P.74).

Recentemente, Nóbrega e Spinillo (2015) realizaram uma pesquisa com 180 crianças do último ano da Educação Infantil (Infantil III) ao 5º ano do Ensino Fundamental, objetivando investigar as noções de *possível*, *impossível e certeza* em situações envolvendo probabilidade e combinatória. Foram realizadas entrevistas individuais cujas perguntas versavam sobre conhecimentos matemáticos envolvendo possibilidade, impossibilidade e certeza, no âmbito da probabilidade, e de possibilidade e impossibilidade, no que concerne à combinatória. Em relação à probabilidade, os resultados apontaram que houve uma evolução de compreensão dos conceitos abordados em conformidade com os anos de escolaridade até o 3º ano, ou seja, o desempenho do 1º ano foi melhor que o do Infantil III, enquanto do 2º ano foi melhor que o 1º e o do 3º melhor que o do 2º. A partir do 3º ano em diante não se constatou melhora significativa no desempenho das crianças. Em relação à combinatória não se constatou melhora significativa de desempenho em nenhum dos grupos comparados. Sinteticamente, as autoras observaram que crianças com cinco anos já são capazes de pensar sobre o *possível*, quer seja em relação à probabilidade ou à combinatória, e que estudantes a partir do 3º ano do Ensino Fundamental já demonstram entendimento de princípios fundamentais de probabilidade. Em combinatória, há indícios de um ‘freio’ no desenvolvimento do conceito, pois as crianças em anos posteriores não apresentaram melhora significativa em seus desempenhos em relação aos anos anteriores.

Os estudos em destaque, bem como os apresentados por Piaget e Inhelder (1975), através do olhar de Bryant e Nunes (2012), permitem ampliar nossa visão acerca do pensamento probabilístico infantil e de como a probabilidade é um tema que necessita ainda de mais estudos para identificar as fragilidades conceituais e a forma como esse conhecimento efetivamente é apreendido pelas crianças.

3.2 Estudos envolvendo adolescentes e adultos

Santos (2010) investigou em alunos do 7º ano de uma escola pública as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico que os alunos poderiam apresentar em um contexto de resolução de problemas mediado pelo processo de comunicação a partir de uma sequência de 18 atividades, tendo como metodologia a resolução de problemas numa perspectiva investigativa. Foram realizadas análises dos registros orais e escritos dos alunos em que se evidenciou equívocos quanto aos significados das palavras possibilidade e probabilidade, constando-se que esses entraves podem se configurar em dificuldades para o processo de ensino e aprendizagem. Foi observado que a promoção de atividades relacionadas à linguagem estocástica possibilitou que os alunos criassem um repertório apropriado ao pensamento probabilístico, o que facilitou a compreensão e a argumentação dos mesmos. A pesquisa apontou ainda que a metodologia de resolução de problemas, mediada pelo processo de comunicação oral e escrita favoreceu o desenvolvimento do pensamento probabilísticos dos participantes do estudo e que os alunos apresentaram maior desenvoltura nas justificativas e compreensão dos aspectos probabilísticos quando se utilizavam da linguagem oral.

Em seu estudo, Ferreira (2011) objetivou investigar a aprendizagem de conceitos probabilísticos de alunos do 3º ano do Ensino Médio utilizando os “Passeios

Aleatórios da Carlinha" nos ambientes papel & lápis e computacional[6] sob a perspectiva do letramento probabilístico de Gal e do construcionismo de Papert. Os resultados dessa pesquisa apontaram avanços tanto no que se refere ao conceito de probabilidade como na ampliação da autonomia dos alunos na construção do conhecimento. O *software* R utilizado proporcionou reflexões diferentes das usualmente desenvolvidas no ambiente papel & lápis, uma vez que possibilitou o trabalho com um número maior de simulações, bem como a discussão do conceito de não equiprobabilidade. O autor pontuou positivamente a possibilidade de confronto entre a probabilidade frequentista e a teórica, potencializada pelo experimento, utilizando o software.

Ody (2013) realizou um trabalho de investigação com alunos do Ensino Médio, buscando analisar e identificar as habilidades e competências em literacia estatística e probabilística que os estudantes possuíam. O trabalho, que envolveu 444 participantes, constatou que o nível de interpretação dos alunos é limitado, estando os mesmos situados no segundo nível de compreensão de informações estocásticas, denominado "ler entre os dados", que consiste na interlocução do aluno com a informação, em que ocorre a interpretação, a assimilação e a associação com alguns conhecimentos prévios de Matemática. Foi observado a dificuldade dos estudantes em reconhecer os conceitos de chance, possibilidade, probabilidade, certeza e previsão, bem como não compreenderam a presença da aleatoriedade em situações cotidianas, a partir de algumas situações propostas no estudo. O grupo de alunos concluintes apresentou, em relação aos alunos ingressantes, melhor ideia de comparação, cálculos simples envolvendo porcentagem, a compreensão de média e raciocínio estocástico básico no Tratamento da Informação e da incerteza. No entanto, de uma forma geral, os estudantes não apresentaram o desenvolvimento das habilidades e competências propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, necessitando participar do processo de aprendizagem de conteúdos estocásticos.

Os estudos de Batista e Francisco (2015) analisaram a compreensão de alunos da EJA do nível médio em relação a noções probabilísticas que envolveram a

[6] Adaptação virtual do jogo Passeios Aleatórios da Mônica, disponível no Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico para a Educação Básica AVALE (http://avale.iat.educacao.ba.gov.br/)

comparação de probabilidade, chance igual e diferente e análise de evento certo, impossível, pouco ou muito provável. A pesquisa foi realizada com 32 alunos que responderam a um questionário e a um teste. Os dados foram alimentados e analisados por meio do software Statistical Package for the Social Science (SPSS). No questionário, a maioria dos alunos informou que nunca tinha tido aula de probabilidade ou não lembravam. Em relação à análise de evento certo, impossível, pouco ou muito provável, os alunos apresentaram desempenho melhor do que nas demais questões. Nesta questão, eles apenas analisaram situações como “uma pessoa ganhar na Megasena” ou “retirar uma bola vermelha de um saco que só tem bolas vermelhas” ou “sair o número 5 no lançamento de um dado” e depois assinalaram que tipo de evento correspondia à cada situação. Ainda assim, os pesquisadores observaram que estudantes têm dificuldade em perceber a sutil diferença entre evento altamente improvável e evento impossível. Em relação às demais questões, o desempenho dos alunos apresentou-se mais fragilizado, observado especialmente, na análise qualitativa a partir das justificativas apresentadas pelos estudantes. Foi constatado que os alunos não utilizaram o raciocínio proporcional para comparar probabilidades. Quase sempre as justificativas apresentadas diziam respeito à quantidade absoluta de bolas, por exemplo, e não à proporção das bolas em cada conjunto analisado.

O trabalho de Ferreira (2011) tem estreita relação com o presente estudo, especialmente por tratar dos Passeios Aleatórios da Carlinha, um dos jogos que foi adaptado para essa dissertação, o de Santos (2010), o de Ody (2013) e o de Batista e Francisco (2015) possibilitam um olhar sobre avanços e dificuldades de um público num nível de escolaridade mais elevado.

3.3 Pesquisas envolvendo professores

Em sua tese, Oliveira (2003) desenvolveu uma pesquisa objetivando conhecer os saberes docentes que foram mobilizados por professoras envolvidas com o estudo de noções elementares pertinentes à probabilidade. O trabalho foi realizado em parceria com duas professoras da rede pública que ministravam aulas de Matemática para alunos com média de idade entre 7 e 10 anos. Foram desenvolvidos quatro tipos de atividades: uma sessão de estudo envolvendo discussões conceituais de probabilidade, planejamento e execução de atividades para sala de aula, reuniões para avaliação dos trabalhos desenvolvidos e um questionário. A análise da produção de informações da pesquisa considerou dois eixos teóricos: saberes docentes e intuição probabilística. Entre os resultados obtidos na pesquisa, o autor destaca que, o processo de experimentação favoreceu que as professoras-parceiras assimilassem o princípio da não-reversibilidade[7], considerando que a constituição de sucessos na forma de sequências não-padronizadas é proveniente da irregularidade dos resultados. Na exploração e análise dos resultados obtidos nos lançamentos de dois dados simultaneamente, foi possível estudar as leis de adição e multiplicação de probabilidades; o conceito de sucesso; a noção de probabilidade condicional; o uso de tabelas de dupla entrada; a importância de considerarmos que as adições 2+5 e 5+2, por exemplo, indicam resultados diferentes do experimento. O pesquisador enfatiza que durante o percurso da pesquisa foi vivenciado um processo de aprender e de saber-fazer por meio de uma parceria que mostrou ser possível flexibilizar um currículo escolar, incorporando reflexões sobre o que podemos fazer para proporcionar uma formação de qualidade para os alunos.

Os pesquisadores Viali e Cury (2009) realizaram um estudo envolvendo 43 professores de Matemática em processo de formação continuada (especialização e mestrado em Educação Matemática) a partir de um teste com cinco questões de probabilidade. Os autores realizaram análise de erros inspirada na análise do conteúdo defendida por Bardin (1979) entre outros. Para os autores “o objeto de interesse são as respostas incorretas, para compreender as dificuldades que os professores de Matemática têm ao lidar com a aleatoriedade” (VIALI e CURY, 2009, p.377). Os conceitos envolvidos nas questões versavam sobre a ideia de evento aleatório, eventos simples e compostos, espaço amostral, definição clássica e axiomática da probabilidade, além das regras de cálculo da soma de eventos mutuamente excludentes e

[7] Também denominado de irreversibilidade, é característica atribuída a toda experimentação em probabilidade em que cada resultado obtido no experimento é único e não pode ser reconstituído (OLIVEIRA, 2003).

teorema da multiplicação para o cálculo de produtos de eventos dependentes e independentes. No recorte apresentado, os pesquisadores realizaram análise de erros cometidas por 21 professores em relação a uma das cinco questões disponibilizadas no teste. Os resultados do estudo apontaram que 42% da amostra investigada nem tentou resolver a questão, sendo impossível qualquer tipo de análise. Dos que tentaram e erraram, poucos deixaram registros que permitissem análise aprofundada do tipo de equívoco cometido. Por falta de dados, não foi possível identificar formas sistemáticas de erros, nem concepções errôneas da probabilidade. A constatação final é de que os professores que já estão no exercício do magistério não conseguem resolver questões sobre um conhecimento que deveriam ter e ensinar aos alunos.

Santana (2011) em seu estudo realizado com professores do Ensino Fundamental que objetivou analisar as concepções e conhecimentos dos mesmos sobre probabilidade, fez uso de questões de livros didáticos previamente selecionadas por Santana e Borba (2010). Entre os resultados da pesquisa, a autora aponta que os professores exploram pouco a probabilidade, possivelmente em função da formação inicial fragilizada no que diz respeito ao tema, razão pela qual eles não se sentem preparados para o ensino de probabilidade. É possível, portanto, que esse aspecto tenha forte influência sobre as concepções de probabilidade de tais professores. A pesquisa apontou, ainda, que nos anos iniciais se associa a probabilidade à técnica de contagem e que não se associa a probabilidade à porcentagem, bem como não há concepção padronizada sobre o assunto. Em relação às noções probabilísticas, foi observado que os professores apresentam dificuldades na própria compreensão do conceito de probabilidade e que nomenclaturas como fenômeno aleatório, espaço amostral, acaso e evento, necessárias na formalização do conceito de probabilidade não foram evidenciadas pelos professores entrevistados. A pesquisadora enfatiza que há uma complexidade em compreender as noções probabilísticas, reforçando a necessidade de pesquisas acadêmicas relacionadas ao ensino de probabilidade e suas noções básicas.

Campos e Pietropaolo (2013) realizaram uma pesquisa com 27 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir de um grupo colaborativo cujo objetivo era identificar as concepções e práticas dos professores a respeito do processo de ensino e aprendizagem de noções relativas à probabilidade. Para o estudo, os pesquisadores tomaram como base as categorias de conhecimentos necessários ao professor de Matemática estabelecidos por Ball, Thames e Phelps (2008) em relação ao conhecimento do conteúdo (comum e especializado); conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do ensino. O conhecimento dos professores não pode estar restrito unicamente àquilo que eles vão ensinar, defendem Campos e Pietrapaolo (2013), alegando que os educadores deveriam saber, por exemplo, que o conceito de probabilidade pode ser definido de diferentes maneiras, diferenciar evento aleatório de não aleatório e discriminar espaço amostral. Os resultados apontaram que a imagem conceitual dos professores acerca da probabilidade era constituída como um campo de problemas para aplicação da razão como um dos significados da fração. Desconheciam as definições geométrica e frequentista da probabilidade. A noção de espaço amostral não constava no repertório de conhecimento específico e alguns docentes não tinham o domínio do princípio multiplicativo. A aleatoriedade foi relacionada aos jogos de azar. Assim, para os pesquisadores “os nossos sujeitos de pesquisa ainda não tinham os conhecimentos necessários para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais” (CAMPOS e PIETRAPAOLO, 2013, p. 79).

Recentemente, Bernabeu, Torres, Garcia e Batanero (2015) apresentaram um estudo que buscou avaliar alguns elementos do conhecimento matemático comum e especializado e do conhecimento do conteúdo[8] e dos alunos sobre a probabilidade elementar de professores do ensino primário em formação. O conhecimento comum do conteúdo foi avaliado através de três problemas e contou com a participação de 157 professores, dos quais 81 compuseram o grupo que fez parte do trabalho acerca de dois componentes dos conhecimentos matemáticos para o ensino: o conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e os alunos. Os resultados referentes ao conhecimento comum da probabilidade, apontaram um pobre conhecimento

[8] Em conformidade com o marco proposto por Hill, Ball e Schilling (2008), denominado de Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), bem como em Ball, Thames e Phelps, 2008.

inicial da probabilidade por parte dos futuros professores, dos quais uma limitada amostra foi capaz de formar duas urnas com a mesma probabilidade de retirada de uma bola (com quantidade distintas de bolas em duas cores diferentes), usando o raciocínio proporcional, e apenas metade conseguiu converter um jogo não equiprovável em equiprovável. No entanto, os resultados foram melhores quando os participantes analisaram respostas de alunos fictícios. Os autores atribuem o fato à aprendizagem adquirida pelos professores em formação, a partir das atividades anteriormente vivenciadas na mesma pesquisa. No que diz respeito ao conhecimento do conteúdo e dos estudantes, os resultados são melhores, especialmente acerca da capacidade de justificação de respostas erradas. Em relação ao conhecimento do conteúdo especializado, os resultados apresentados pelos professores-estudantes foram deficitários com dificuldades em identificar objetos matemáticos em uma tarefa. Os pesquisadores apontam que é importante buscar caminhos alternativos para desenvolver as competências que se apresentaram fragilizadas.

Os estudos envolvendo professores, relatados aqui, deixam clara a fragilidade do conhecimento dos mesmos sobre conceitos e noções relativos à probabilidade. Assim sendo, concorda-se com Campos e Pietropaolo (2013) que defendem a necessidade de promover nos cursos de formação, tanto inicial como continuada, discussões relevantes de noções concernentes ao tema, pontuando as dificuldades dos estudantes no início da construção do conhecimento probabilístico, bem como a importância de seus estudos nas diversas etapas escolares.

Nos estudos analisados envolvendo crianças, estudantes do Ensino Médio e professores, observou-se que diversos focos foram pesquisados envolvendo a probabilidade. No entanto, nenhum deles, como apontado por Bryant e Nunes (2012) se debruçou simultaneamente sobre as exigências cognitivas defendidas pelos autores citados. Assim, o presente estudo pretende aproximar o olhar sobre a compreensão probabilística de crianças com foco tanto na aleatoriedade, quanto no espaço amostral, bem como na comparação de probabilidades e pretende averiguar se há relações na compreensão de tais conceitos, refletindo sobre o que pensam e como pensam crianças do início do Ensino Fundamental de idades/anos distintos.

A seguir, no Capítulo 4, será descrito o percurso metodológico que deu corpo à pesquisa em consonância com objetivos traçados para este estudo.

4 MÉTODO

Na pesquisa, optou-se por investigar sobre as três primeiras exigências cognitivas da probabilidade apontadas por Bryant e Nunes (2012), quais sejam: compreensão da aleatoriedade, formação do espaço amostral e comparação de probabilidades – buscando verificar a existência de conexões entre as exigências cognitivas na compreensão da probabilidade por parte de crianças em situação de jogos**.**

Os participantes da pesquisa eram estudantes do 1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental da rede pública de ensino. Essa opção, por três grupos distintos dos anos iniciais se justifica porque desejava-se observar a compreensão da probabilidade em distintas idades/escolarização das crianças. Em geral, os grupos estudados, especialmente os estudantes do 1º e 3º anos não têm experienciado nenhum trabalho sistematizado referente à probabilidade, mas podem possuir compreensões baseadas em sua lógica própria, suas crenças e suas intuições, em conformidade com sua faixa etária. As crianças do 1º ano iniciam o ciclo de alfabetização, enquanto as do 3º ano fecham o ciclo. Julgamos relevante estudar estes dois grupos: o de estudantes que inicia formalmente a escolarização no Ensino Fundamental e o que encerra o ciclo, para verificar se há diferença de compreensão entre eles, bem como entre estes (1º e 3º) e o grupo de alunos do 5º ano que conclui a etapa referente aos anos iniciais.

É importante pontuar que foi explorado nesta pesquisa, especialmente o significado intuitivo da probabilidade (BATANERO E DIAZ, 2007), uma vez que desejava-se analisar as compreensões intuitivas de crianças que provavelmente ainda não tiveram acesso à instrução formal (escolar) sobre o tema. Em conformidade com as respostas apresentadas pelos participantes do estudo, verificou-se se outros significados da probabilidade foram contemplados pelas crianças.

As orientações presentes nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012) sugerem o desenvolvimento do trabalho envolvendo a ideia intuitiva de probabilidade a partir do quarto ano, pois acredita-se que nesse momento, o estudante deve compreender as possibilidades de ocorrência de um evento (chance), o que, mais tarde, levará ao conceito de probabilidade. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) dentro do campo Tratamento da Informação a orientação é para exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de "sorte", a partir do segundo ciclo, ou seja, das antigas 3ª e 4ª séries, hoje, 4º e 5º anos. No entanto, há alegações presentes em diversos estudos apresentados por Bryant e Nunes (2012) que crianças e até bebês possuem noções intuitivas acerca de elementos probabilísticos e que as intuições acerca de conhecimentos relativos à probabilidade vão se ampliando com o amadurecimento da pessoa. Essa é a razão pela qual escolheu-se trabalhar com os três grupos de escolarização distintos (1º, 3º e 5º anos), uma vez que se gostaria de analisar as compreensões probabilísticas apresentadas pelos diferentes grupos, observando possíveis evoluções e traçando um paralelo entre eles.

Como sugerido por Bryant e Nunes (2012), há carência de estudos que analisem os procedimentos das crianças acerca da aleatoriedade em jogos, razão pela qual optou-se por desenvolver esta proposta a partir de jogos e/ou atividades lúdicas. Consideramos, assim, neste trabalho, os jogos como "situações-problema a partir das quais podem ser tratados conceitos e relações matemáticas relevantes para o ensino básico" (PERNAMBUCO, 2012, p.35).

Como o objetivo era investigar e analisar a compreensão das crianças acerca da probabilidade, foi utilizado, como procedimento metodológico, entrevista do tipo clínica, baseada no Método Clínico Piagetiano, cujo teste tem como finalidade "compreender como o sujeito pensa, como analisa situações, como resolve problemas, como responde às contra-sugestões do examinador" (CARRAHER, 1998, p.7). O método possibilita, ainda, uma mobilidade maior ao pesquisador, uma vez que as situações propostas não são padronizadas, permitindo uma condução personalizada de acordo com cada sujeito e com os objetivos da pesquisa. A flexibilidade e a possibilidade de motivação dos sujeitos é, ainda, uma característica do método, que o torna eficaz para a pesquisa.

Na busca por jogos e questões que dessem suporte a esta pesquisa, localizou-se o caderno de Jogos na Alfabetização Matemática do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) (BRASIL, 2014) que lista dentro do campo denominado Educação Estatística dois direitos de aprendizagens voltados à Probabilidade:

1- Reconhecer, na vivência, situações determinísticas e probabilísticas;

2- Identificar maior ou menor chance de um evento ocorrer.

Na proposta de usos de jogos na Alfabetização Matemática do PNAIC, há dois pressupostos fundamentais que serviram de norte para a escolha dos jogos utilizados na pesquisa: 1) o papel do lúdico, a brincadeira e 2) a necessidade de aproximação ao universo infantil, respeitando o modo de pensar e a lógica própria utilizada pelas crianças na construção dos conceitos.

Assim, foram considerados os pressupostos da Alfabetização Matemática destacados pelo PNAIC (BRASIL, 2014) para buscar os jogos que se adequariam aos propósitos do estudo. Inicialmente, foi realizado um piloto com quatro jogos, dos quais três foram selecionados do Caderno de Jogos do PNAIC: *Travessia do Rio*, *Pintando o Sete* e *Cara ou Coroa* e o outro jogo, adaptado de Cazorla e Santana (2006), foi aqui intitulado *Passeios Aleatórios da Rute*.

Após análise realizada a partir do estudo piloto, foram selecionados dois jogos para contemplar o estudo definitivo: Travessia do Rio (Figura1) e Passeios Aleatórios da Rute (Figura 3). Verificou-se que os outros jogos contemplavam basicamente as mesmas noções intuitivas que os selecionados para o estudo final. Assim, julgou-se desnecessário envolver as crianças em um número elevado de atividades, optando-se por um jogo com dados (Travessia do Rio) e um com moedas (Passeios Aleatórios da Rute).

Os jogos, as questões norteadoras da entrevista, bem como as instruções dadas às crianças para realização das atividades propostas, encontram-se nos Apêndices 1 e 2 deste documento.

Jogo Travessia do Rio (Ver APÊNDICE 1)

O jogo Travessia do Rio (Figura1) foi retirado do caderno de Jogos na Alfabetização Matemática e destinado à formação de professores do primeiro ciclo dos anos iniciais do Pacto Nacional para Alfabetização na Idade Certa (PNAIC).

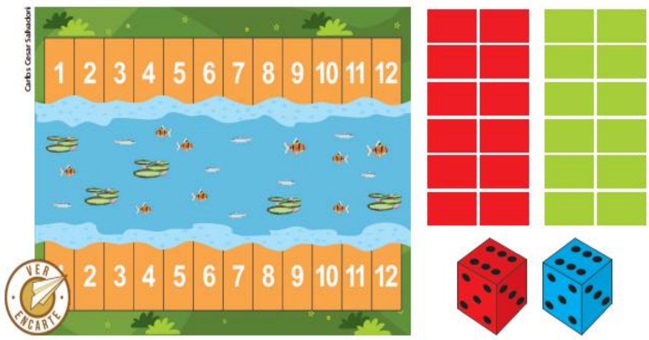


Figura 1 - Jogo Travessia do Rio (BRASIL, 2014, P.40)

Aprendizagem proposta: Resolver adições; analisar possibilidades de soma resultando em 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 no lançamento de dois dados.

Material: 1 tabuleiro (Figura 1); 12 fichas verdes e 12 vermelhas; 2 dados.

Regra: Cada jogador coloca suas fichas nas casas de uma das margens do rio, podendo pôr mais de uma ficha na mesma casa, deixando as outras vazias, se desejar. Alternadamente, os jogadores lançam os dados e calculam a soma obtida. Se a soma corresponder a uma das casas onde estejam suas fichas, passa-se uma delas para o outro lado do rio. Ganha quem primeiro conseguir passar todas as fichas para o outro lado.

Passeios Aleatórios da Rute (Ver APÊNDICE 2)

Adaptou-se a atividade denominada “Passeios Aleatórios da Carlinha” para adequação aos objetivos da pesquisa. A proposta é uma versão digital de “Os Passeios Aleatórios da Mônica” que foi adaptada para o ambiente virtual e desenvolvida no Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico (AVALE) da Universidade Estadual de Santa Cruz, com orientação de Cazorla, Kataoka, Nagamine (2011). Nesta versão, que faz analogia à turma da Mônica, as personagens são: Carlinha (Mônica), Luiz (Horácio), Felipe (Cebolinha), Fernanda (Magali), Alex (Cascão) e Paula (Bidu). A proposta apresentada por Cazorla, Kataoka, Nagamine (2011) envolve o ambiente papel e lápis para a Turma da Mônica e o ambiente virtual do AVALE com a Turma da Carlinha. Destinada ao Ensino Fundamental e Médio, tem como objetivos: trabalhar as noções elementares da teoria de probabilidades: eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples; construir tabelas simples e gráficos de barras;

discutir as diferenças entre experimento determinístico e aleatório; estimar probabilidades por meio da frequência relativa; calcular a probabilidade teórica a partir da árvore de possibilidades e analisar padrões observados e esperados.

A atividade denominada "Os Passeios Aleatórios da Mônica", segundo Nagamine, Henriques, Utsumi e Carzola (2011), foi proposta inicialmente por Fernandez e Fernandez (1999), em um estudo sobre a distribuição binomial no Ensino Superior, e, posteriormente, adaptada por Cazorla e Santana (2006) para o ensino de probabilidade na Educação Básica.

Na atividade, a Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões, conforme ilustra a Figura 2. Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que a sorte escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara, andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa, um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa de um amigo. Questiona-se: Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?

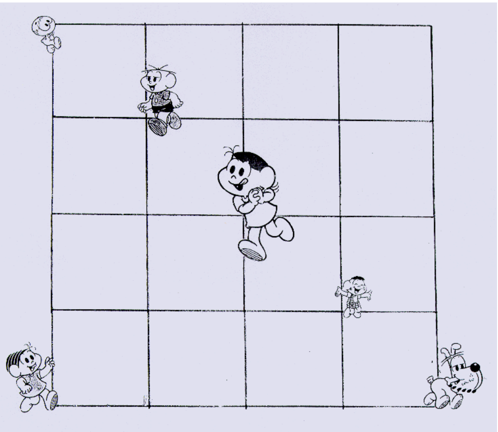


Figura 2: Passeios Aleatórios da Mônica (NAGAMINE, HENRIQUES, UTSUMI E CAZORLA, 2011)

Em função da faixa etária dos participantes desta pesquisa, entre 6 e 11 anos, foi necessário fazer algumas adequações para a imagem proposta no jogo, se parecer um pouco mais com uma cidade e seus quarteirões, como observado na Figura 3.

Na adaptação adotada neste estudo, as linhas tornaram-se “ruas” e os quarteirões foram preenchidos por casas, lojas, praças e escolas, simulando uma cidade, visando facilitar a compreensão das crianças mais novas sobre a questão geográfica da atividade. As personagens foram substituídas por Rute e sua turma: Tati, Pablo, Ana, Gabriel e Rui. Como as personagens não são conhecidas do público em geral, colocou-se os nomes de cada uma na imagem para identificá-las. A história contada para as crianças no início do jogo foi a seguinte: *Rute pretende visitar os amigos e para tal, ela criou um jogo. Quando ela sai de casa, lança uma moeda: se sair ‘cara’ ela anda um quarteirão para direita (em frente, sentido leste) esse sair ‘coroa’ ela anda um quarteirão para cima (sentido norte). Em cada esquina de quarteirão ela para e lança a moeda novamente. Ela sempre consegue chegar na casa de um amigo após lançar a moeda quatro vezes. Rute só não sabe qual amigo será contemplado com sua visita.*

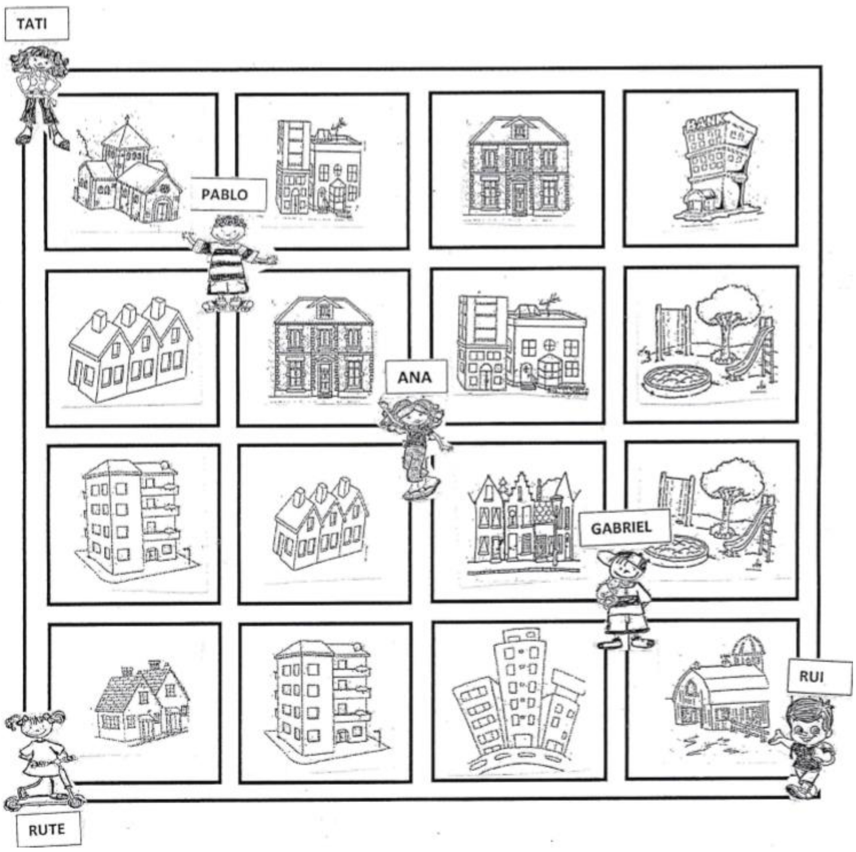


Figura 3 - Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

O estudo foi realizado em duas escolas públicas municipais do Cabo de Santo Agostinho entre junho e agosto de 2015 e envolveu 36 crianças. Em cada uma das duas escolas foram entrevistadas 18 crianças, sendo seis do 1º ano, seis do 3º e seis do 5º ano. Cada criança participou dos dois jogos e respondeu às perguntas norteadoras (Quadros 3 e 4) envolvendo cada jogo, na mesma ordem. Metade das crianças iniciou as atividades respondendo as questões referentes ao jogo Travessia do Rio e a outra metade iniciaram com o jogo PAR.

Cada uma das crianças envolvidas na pesquisa participou de apenas uma sessão individual com duração entre 50 minutos e 1h20min.Os alunos foram identificados aqui com códigos conforme registro no Quadro 2, para que possam ser preservadas suas identidades e também possam facilitar a compreensão do leitor.

Quadro 2: Discriminação dos estudantes pesquisados por ano e escola

Entrevistados	**ESCOLA ALFA – A**			**ESCOLA BETA - B**		
	1º	**3º**	**5º**	**1º**	**3º**	**5º**
Estudante 1	A1.1	A3.1	A5.1	B1.1	B3.1	B5.1
Estudante 2	A1.2	A3.2	A5.2	B1.2	B3.2	B5.2
Estudante 3	A1.3	A3.3	A5.3	B1.3	B3.3	B5.3
Estudante 4	A1.4	A3.4	A5.4	B1.4	B3.4	B5.4
Estudante 5	A1.5	A3.5	A5.5	B1.5	B3.5	B5.5
Estudante 6	A1.6	A3.6	A5.6	B1.6	B3.6	B5.6

Fonte: Autoria própria (2015)

Os participantes foram assim identificados:

- Aluno A – pertencente a escola A, aqui denominada de Escola Alfa.
- Aluno B – pertencente a escola B, aqui chamada de Escola Beta.
- A primeira numeração se refere ao ano que o aluno estuda. Ex.: A1 (aluno da Escola Alfa do 1º ano); B5 (aluno da Escola Beta do 5º ano)
- A segunda numeração se relaciona à ordem da realização das entrevistas nas respectivas escolas. Ex.: A3.4 (Aluno da Escola Alfa do 3º ano, entrevistado nº 4).

Foram efetuadas entrevistas semiestruturadas do tipo clínica com oito perguntas norteadoras (Quadro 3 e Quadro 4), objetivando avaliar a compreensão do pensamento das crianças sobre os conhecimentos probabilísticos, em situações de jogos, especialmente no que se refere à aleatoriedade, ao espaço amostral e comparação de probabilidades.

No roteiro da entrevista, realizou-se um pareamento nas perguntas dos dois jogos de forma tal que, em cada um deles, fosse possível investigar os mesmos aspectos, a saber: *aleatoriedade* com foco em eventos aleatórios, eventos equiprováveis e independência de eventos; *espaço amostral* com exploração do levantamento de possibilidades, evento impossível e evento pouco provável; e *comparação de probabilidades* que envolveu perguntas que discutiam chance[9] igual e chance diferente de ocorrência de um evento. Assim, na ordem das perguntas de cada jogo, considerou-se o foco a seguir:

1- Chance igual – comparar eventos que têm a mesma probabilidade de ocorrência, com a possibilidade do aluno justificar a resposta utilizando como argumento o 'tamanho' do espaço amostral.
2- Evento impossível – constatar a impossibilidade de ocorrência de um evento, podendo o aluno justificar mediante ausência de elemento no espaço amostral.
3- Chance diferente – comparar eventos que têm probabilidades diferentes de ocorrência, sendo possível o aluno levantar os espaços amostrais e compará-los.
4- Evento pouco provável – analisar evento com pouca probabilidade de ocorrência, com possibilidade de considerar a quantidade pequena de elementos do espaço amostral.
5- Levantamento de possibilidades – elencar as possibilidades de ocorrência de um evento, a partir do incentivo para realização de uma lista exaustiva com todos os elementos do evento que compõe o espaço amostral.
6- Independência de eventos – constatar a independência de eventos, havendo possibilidade do aluno justificar que cada nova jogada não tem relação com a jogada anterior, considerando a aleatoriedade.

[9] No texto, chance e probabilidade são mencionados como sinônimos.

7- Equiprobabilidade – perceber eventos equiprováveis, com possibilidade de justificativa considerando que a chance de sair 6 no dado ou cara na moeda, por exemplo, é a mesma para qualquer pessoa, para qualquer dado não viciado ou qualquer moeda honesta.
8- Eventos aleatórios – perceber eventos aleatórios e equiprováveis, sendo possível a justificativa de que os eventos têm a mesma chance de ocorrer e que não se sabe qual resultado sairá no lançamento de uma moeda ou de um dado.

No Quadro 3 pode-se observar os questionamentos feitos no jogo *Travessia do Rio*, bem como o foco probabilístico envolvido em cada questão

Quadro 3: Discriminação das questões do jogo Travessia do Rio

FOCO	QUESTÃO ORDEM DAS PERGUNTAS	PERGUNTAS NORTEADORAS
COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES	**1-Chance igual**	Pedro apostou todas as fichas no 2 e João todas no 12. Quem tem mais chance de ganhar? Por quê?
ESPAÇO AMOSTRAL	**2-Evento impossível**	João colocou todas as suas fichas no 1. Ele conseguirá ganhar o jogo? Por quê?
COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES	**3-Chance diferente**	Quem tem mais chance de ganhar o jogo: uma pessoa que apostou todas as fichas no 7 ou quem apostou todas no 11? Por quê?
ESPAÇO AMOSTRAL	**4- Evento Pouco provável**	Pedro apostou todas as fichas no 3. Ele tem muita, pouca ou nenhuma chance de ganhar o jogo? Por quê?
ESPAÇO AMOSTRAL	**5-Levantamento de possibilidades**	João apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair nos dados para dar 8?
ALEATORIEDADE	**6-Independência de eventos**	André jogou o dado uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 de novo?
ALEATORIEDADE	**7-Equiprobabilida-de**	Se você jogar com o dado vermelho e eu com o dado azul quem terá mais chance de tirar o 6: eu ou você? Por quê?
ALEATORIEDADE	**8- Evento aleatório**	Se eu jogar um dado, é mais fácil sair qual dos números? Por quê?

Fonte: Autoria própria (2015)

O Quadro 4 mostra as perguntas utilizadas como norte para a realização da entrevista e seus respectivos focos probabilísticos referentes ao jogo *Passeios Aleatórios da Rute* (PAR).

Quadro 4: Discriminação das questões do jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

FOCO	QUESTÃO – ORDEM DAS PERGUNTAS	PERGUNTAS NORTEADORAS
COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES	**1-Chance igual**	Há mais caminhos para Rute encontrar com Pablo ou Gabriel? Por quê?
COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES	**2-Evento impossível**	É possível Rute chegar a Rui sem sair uma cara? Por quê?
COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES	**3-Chance diferente**	Todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados? Por quê?
ESPAÇO AMOSTRAL	**4- Evento pouco provável**	Considerando os lançamentos das moedas, há muita, pouca ou nenhuma chance de Rute chegar a Tati?
ESPAÇO AMOSTRAL	**5-Levantamento de possibilidades**	Quais os caminhos possíveis para Rute chegar a Ana? Liste considerando os lados da moeda.
ALEATORIEDADE	**6-Independência de eventos**	Paulo jogou a moeda e saiu cara, jogou novamente e saiu cara, jogou outra vez e saiu cara mais uma vez. Se ele jogar novamente vai sair cara de novo? Por quê?
ALEATORIEDADE	**7-Equiprobabilida-de**	Se eu lançar uma moeda primeiro e você lançar depois, quem tem a maior chance de tirar cara: eu ou você? Por quê?
ALEATORIEDADE	**8-Evento aleatório**	Quando eu jogo uma moeda é mais fácil sair cara ou coroa? Por quê?

Fonte: Autoria própria (2015)

As entrevistas foram audiogravadas em equipamento smartphone e cada aluno participou da atividade individualmente, na escola, em seu horário de aula. Inicialmente eles receberam a orientação sobre as regras de cada jogo e tiveram a oportunidade de jogar, para se familiarizarem tanto com o jogo e suas regras quanto com os dados (vermelho, azul e branco) e moedas (de um real e de cinquenta centavos) antes de serem questionados sobre os pontos em discussão na entrevista semiestruturada. Como citado anteriormente, cada aluno participou dos dois jogos: um envolvendo dado – Travessia do Rio e outro com moedas - PAR. A ordem dos jogos foi alternada. Assim, seis alunos de cada ano iniciaram com um jogo e os outros seis com o outro jogo. As perguntas seguiram a ordem apresentada nos Quadros 3 e 4. No entanto, é bom enfatizar, que por se tratar de uma entrevista do tipo clínica, as perguntas iniciais serviram de suporte para argumentações, questionamentos e confrontações posteriores, estabelecidas pela pesquisadora, a fim de que se pudesse resgatar do aluno não o que ele respondeu inicialmente, mas o que ele apresentou com maior clareza. Buscou-se, assim, “as respostas mais características do sujeito, aquelas que o sujeito dá com maior convicção e não com maior rapidez” (CARRAHER, 1998, p. 17-18).

A seguir, no Capítulo 5, serão apresentadas as análises do estudo envolvendo as crianças do 1º, 3º e 5º anos, nos dois jogos, bem como os resultados obtidos considerando os objetivos estabelecidos, apoiados nos teóricos apontados para esta pesquisa e em estudos anteriores.

5 ANÁLISES E RESULTADOS

Nas análises apresentadas, optou-se por focar o olhar sobre os blocos de questões que envolveram cada uma das exigências cognitivas em estudo. Assim, para analisar a compreensão das crianças acerca da aleatoriedade, foram discutidos os resultados das reflexões dos participantes sobre *independência de eventos, evento equiprovável e evento aleatório*, considerando o jogo Travessia do Rio e o jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR). Foram consideradas as perguntas norteadoras relativas ao *levantamento de possibilidades, evento impossível e evento pouco provável* para realizar discussões acerca do espaço amostral nos dois jogos. E, por fim, foram resgatadas das questões concernentes a *eventos com pouca e muita chance* de ocorrer para analisar o entendimento dos estudantes sobre a comparação de probabilidades, tanto no jogo com dados (Travessia do Rio), quanto no jogo com moeda (PAR).

5.1 Aleatoriedade

Para analisar a compreensão das crianças acerca da *aleatoriedade*, tomou-se como apoio três perguntas norteadoras, que envolveram *independência de eventos, eventos equiprováveis e eventos aleatórios*, nos dois jogos: Travessia do Rio e Passeios Aleatórios da Rute. Foi feita a opção por analisar as respostas considerando os jogos separadamente, uma vez que, cada um traz reflexões específicas com uso de instrumentos diferentes: dados e moedas.

5.1.1 Independência de eventos no jogo Travessia do Rio

Bryant e Nunes (2012) defendem que “a independência de eventos é um aspecto essencial e fundamental de sequências aleatórias” (BRYANT E NUNES, 2012, p. 21). Para os autores, se, por exemplo, os cinco primeiros resultados de um evento tornam possível para uma pessoa prever o que vai acontecer com o sexto resultado, melhor do que seria prever o primeiro, então, a sequência não é aleatória.

No jogo Travessia do Rio, para questionar o entendimento dos alunos sobre independência de eventos, utilizou-se a seguinte questão norteadora: *André jogou o dado uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 de novo? Por quê?*

Sabe-se que a probabilidade de sair novamente o 5 continua a mesma da primeira jogada: 1 em 6, ou seja, menos de 17%. Os lançamentos são possibilidades independentes, mas nem todas as crianças perceberam isso, como se pode observar na Tabela 1. Nela, estão registradas as quantidades de crianças, por ano escolar, que responderam: 'Sim' (vai sair 5 novamente), 'Não' (não vai sair 5 novamente) e 'Qualquer um' (pode cair ou não cair 5). Entende-se que os alunos que informaram que poderia sair *qualquer um* dos números e não apenas o 5, apresentaram compreensão, mesmo que intuitiva, tanto da independência de eventos, como também da aleatoriedade.

Tabela 1: Síntese da quantidade de respostas dos alunos, por ano, sobre independência de eventos no jogo Travessia do Rio

	André jogou o dado uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 de novo?		
Ano	**Sim**	**Não**	**Qualquer um**
1º	7	4	1
3º	4	6	2
5º	3	6	3

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Um pouco mais da metade dos alunos do 1º ano acreditou que sairia o 5 mais uma vez, alegando, por exemplo, que *"porque só caía no 5"* (A1.2), "*porque caiu o 5 um bocado de vez*" (A1.3), "*porque ele jogou um montão de vezes*" (B1.1). A tendência, assim, das crianças mais novas foi julgar que se o 5 saiu três vezes, novamente sairá 5 na quarta vez.

Dos estudantes que não acreditaram que ia cair o 5, apresentaram os argumentos: "*porque vai dar 1 ou então o 6"* (A1.1), "*se ele jogar outra vez fica no 2"* (A1.4), "*ele jogou direto 5, aí eu acho que vai ser outro número*" (B1.5), "*porque ele tentou muitas vezes e agora vai mudar*" (B1.6). Essas crianças acreditavam na impossibilidade de sair, em sequência, um mesmo número repetidas vezes. Claramente atrelavam o resultado recente de um lançamento aos seus antecessores, desconsiderando a independência de eventos.

No 1º ano, a criança A1.5 fez uma importante reflexão que difere da opinião dos demais colegas, apontando para um indício de compreensão sobre a independência de eventos. O diálogo a seguir entre a entrevistadora e A1.5, mostra essa compreensão:

Pesquisadora: *André tava brincando com um dadinho. Ele jogou pra cima uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5. Tu achas que se ele jogar de novo vai cair o 5 novamente?*

A1.5: Não sei.

Pesquisadora: Mas tu achas que vai cair, que pode cair, que pode cair qualquer um...o que é que tu achas?

A1.5: Eu acho que vai cair qualquer um.

Pesquisadora: Por que tu achas isso?

A1.5: Porque tem que jogar o negócio (dado) e tem que ter sorte para parar no 5.

No 3º ano, apesar de alguns alunos se posicionarem sobre sair o 5 ou não, eles abriram uma porta para a possibilidade de sair outros números, como exemplo, o Auno A3.1 que disse "*ele jogou tanto e deu tanto o número 5 que eu acho que vai dar de novo*". Quando confrontado pela pesquisadora sobre a possibilidade de sair outro número, ele completou: "*pode sair outro, mas acho que vai sair 5 a quinta vez, se Deus quiser. Vai ser falta de sorte não sair 5*".

Já A3.2 usou o mesmo argumento, para se posicionar contrariamente: "*pode sair o 5 ou pode sair qualquer um. Mas acho que vai bater outro número, porque ele bateu três vezes no 5 agora vai dar sorte e vai cair qualquer um*".

B3.2 se apoiou na experiência vivenciada no jogo e disse que não sabia se ia sair 5 ou outro número, mas considerou que não ia sair "*porque é difícil acertar muitas vezes. Quando eu tava jogando acertei duas vezes no 6, quando joguei de novo, caiu 4"*. Já B3.1 ficou incrédula e afirmou: "*acho que não. Como é que uma pessoa joga e sai tudo isso num bingo? Eu nunca vi jogar e sair assim não.*

Ele vai errar". Acredita-se que B3.1 quando se referia a um *bingo*, queria dizer um jogo com dados, pois, de fato, num bingo não seria possível sair um mesmo número repetidas vezes. *Já A3.3 diz* "*acho que vai cair o 5. Ou pode cair no 4 ou no 6. Pode cair qualquer um...*". Percebe-se que A3.3, assim como A3.2 apresentam incerteza, que é um importante elemento para a compreensão de eventos aleatórios. Mesmo julgando equivocadamente que talvez um número tenha mais chance de sair, estas crianças nitidamente apresentam dúvidas em seus discursos que poderiam ser sanadas com intervenção.

No 5º ano, o aluno A5.1 trouxe elementos para uma importante reflexão, ao comparar as probabilidades de sair o 5 com as de sair os outros números do dado. Ele disse inicialmente que se ele jogasse de qualquer jeito não caia o 5, associando o resultado do lançamento a uma forma específica de jogar o dado. Posteriormente foi confrontado pela pesquisadora sobre a possibilidade de sair os outros números e ele respondeu: *"pode cair o 5, mas tem pouca chance. Os outros (1, 2, 3, 4 e 6) estão em maior quantidade. Todos eles contra o 5 são maiores*". Há um paradoxo nas percepções apresentada pelo aluno: se de um lado ele rejeitou a aleatoriedade ao dizer que 'tem um jeito' de jogar e sair o 5, por outro lado ele aparentou compreensão sobre a não equiprobabilidade da questão: as chances de sair de 5 em relação às chances de sair os demais números.

Entende-se que alunos como A5.1 precisam ser estimulados a verem além de suas crenças, além de suas percepções iniciais para poderem ampliar a compreensão sobre questões probabilísticas.

Já o aluno A5.3 acreditou que não cairia o 5, mas compreendeu que pode cair tanto o 5 como os outros números, quando defendeu que: "*pode bater o 5 muitas vezes, mas uma pode dar o 4, 2... Ele jogou muitas vezes e dessa vez pode estar confiante que vai dar o 5 de novo, mas não vai. Poder pode, mas não vai dar*".

O aluno A5.6 foi categórico: "*as chances são mínimas porque ninguém sabe qual é o que vai cair. (...). Não vai dar o 5 ou vai dar o 5, vai dar o 4, o 3, qualquer um*". Percebe-se uma discreta melhora no desempenho dos alunos do 5º ano em relação ao do 3º ano no que concerne não apenas à independência de eventos, bem como à aleatoriedade.

Muitas crianças de todas as turmas atribuíram à sorte (ou a falta dela) o resultado do lançamento dos dados, como por exemplo: A1.5 “*tem que ter sorte para parar no 5*”, “*se der sorte sai, se não, não sai”* (A3.4), “*ele jogou tantas vezes e dá o 5, dá o 5, aí vai dar de novo, se ele tiver sorte”* (B5.6).

Bryant e Nunes (2012) discutem a questão da independência de eventos e defendem que é comum as crianças e até os adultos cometerem o erro de *recência positiva* por acreditarem que os recentes resultados de um evento irão se repetir ou de *recência negativa* quando julgam que, ao contrário, resultados do evento que aconteceram algumas vezes, não voltarão a acontecer, ou terão menos chance de ocorrer.

Nesta perspectiva, observa-se que mais da metade das crianças do 1º ano cometeram o erro de *recência positiva*, enquanto metade das do 3º, e também do 5º ano, cometeram o de *recência negativa*. Neste contexto específico, do jogo Travessia do Rio (com dados), observou-se que os resultados confirmaram o apontado por Bryant e Nunes (2012) que afirmam que em pesquisas recentes (CHIESI E PRIMI, 2009) as crianças mais novas costumam, de fato, cometerem o erro de *recência positiva*, enquanto as mais velhas, adolescentes e adultos optam pelo *efeito de recência negativa.* Para esses estudiosos, o erro de *recência positiva* parece diminuir à medida que as crianças crescem, enquanto o de *recência negativa* aumenta. Tal fato não foi evidenciado no jogo PAR como explicitado a seguir.

5.1.2 Independência de eventos no jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

Foi proposto às crianças a seguinte situação: *Paulo jogou a moeda e saiu cara, jogou novamente e saiu cara, jogou outra vez e saiu cara mais uma vez. Se ele jogar novamente vai sair cara de novo? Por quê?* para verificar o entendimento das mesmas sobre a independência de eventos no jogo PAR.

A probabilidade de sair cara, nesse novo possível lançamento ou em qualquer outro, continua a mesma, 1 em 2, ou seja, 50%. A Tabela 2 mostra a quantidade de alunos que julgaram que sairia cara, coroa ou qualquer uma das faces (cara ou coroa).

Tabela 2: Síntese da quantidade de respostas dos alunos, por ano, sobre independência de eventos no jogo PAR

	Paulo jogou a moeda e saiu cara, jogou novamente e saiu cara, jogou outra vez e saiu cara mais uma vez. Se ele jogar novamente vai sair cara de novo?		
Ano	**Sim, cara**	**Não, coroa**	**Qualquer uma**
1º	7	5	0
3º	6	6	0
5º	5	4	3

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Os argumentos apresentados pelos alunos do 1º ano, são basicamente os mesmos, para justificar que vai sair cara ou que vai sair coroa. B1.1 achou que vai continuar saindo cara "*porque ele jogou 5 vezes e caiu cara*", enquanto B1.3 achou que vai sair coroa e informou que "*ele jogou muita vez, muita vez e saiu cara, cara, cara, cara e agora vai sair coroa"*. Algumas crianças responderam sim ou não, mas não conseguiram justificar. Mais uma vez, observa-se que a maioria das crianças do 1º ano continuaram cometendo o erro de *recência positiva,* no PAR, como cometeram no Travessia do Rio.

No 3º ano, alguns alunos associaram a probabilidade de ocorrência do evento à sorte, como A3.2 que disse *"foi sorte de sair tanta cara" e A3.3 sentenciou: "se der sorte pode cair*". No entanto, foi observado que tanto A3.2 quanto A3.3 não são determinantes na crença de que sairá a face cara. Eles consideraram que sim, se Paulo tiver sorte, mas não tiveram certeza. E, segundo Bryant e Nunes (2012), a incerteza sobre o próximo evento é devido à forma aleatória com que acontecem todos os eventos, pois não existe um padrão discernível, nem ordem definida, ocorrem sem a certeza do que vai suceder.

Esta mesma incerteza pode também ser observada no argumento apresentado por A3.1 que disse que "*se ele jogou e saiu cara três vezes é possível que vá sair cara a quarta vez*". A expressão "é possível" utilizada por ele dá a entender a discreta percepção da incerteza. Gal (2004), considera a *linguagem* como um dos elementos cognitivos para o desenvolvimento do letramento probabilístico, apontando que é importante que o aluno descreva oralmente ou por escrito o seu pensamento e compreensão probabilística e que é necessária a familiarização com termos e expressões relevantes à probabilidade.

Outra criança que não descartou a possibilidade de sair uma ou outra face da moeda, apesar de defender que não sairá a cara novamente foi o aluno B3.1, dizendo: *"ele jogou tudo de uma vez e foi cara, cara, cara, não será possível que ele vai ser tudinho como cara. Não vai ser tudinho não. Só se ele tem muita chance e sorte".* Com a expressão "*só se ele tem muita chance e sorte*", B3.1 abriu as portas para uma possibilidade diferente da que ele acreditava.

O aluno B3.3 associou a pergunta a uma semelhante que feita no jogo Travessia do Rio e disse: *"não. Essa é a mesma do dado, só que com moeda. Porque já saiu um bocado de vez*".

No 3º ano, metade das crianças acreditou que sairia cara e a outra metade julgou o contrário, enquanto no 1º ano, a maioria, ou seja, mais de 58% achou que o evento iria se repetir.

No 5º ano, três crianças julgaram que poderia ocorrer qualquer um dos eventos: cara ou coroa. A5.1 respondeu à pergunta com o seguinte discurso: "*poder, pode (dar cara), porque as expectativas são as mesmas. Porque na moeda tem uma vez cara e uma vez coroa, não tem duas vezes cara e uma vez coroa. É a mesma chance*". A explicação de A5.1 abraçou uma compreensão ainda maior do que estava sendo proposto; envolveu aleatoriedade (porque ele achou que poderia sair qualquer face) e equiprobabilidade (porque ele deixou claro que as duas faces teriam as mesmas chances) e, bem como, a independência de eventos (quando não atrelou o evento subsequente aos anteriores).

A5.6 disse: "*pode ser que sim, pode ser que não. Por causa da sorte. É a sorte e o azar"*, enquanto A5.5 informou que "*pode cair qualquer um*", mas se ele tiver jogando o jogo não pode qualquer um: sai coroa, senão ele não chega no amigo dele. Para A5.5 se o lançamento da moeda não estiver vinculado ao jogo PAR, poderá sair qualquer uma das faces, mas se for no jogo, não. Ele considerou, portanto, que o jogo influencia o resultado.

A5.3 recorreu à recente experiência no jogo para justificar a resposta de que não sairia cara novamente, replicando: “*porque quando eu tava jogando batia cara, coroa, cara, coroa. Pode ser diferente. Tudo não é igual não*”. A 5.2, assim como A5.4 consideraram que tem um jeito de jogar para sair um lado ou o outro da moeda.

Alguns alunos do 5º ano também atribuíram o resultado à sorte. No entanto, constata-se que os argumentos apresentados são mais consistentes que os do 1º ano e também do 3º e podem possibilitar muitas intervenções para um aprendizado da independência de eventos.

No jogo PAR foi observado que a maioria das crianças do 1º ano cometeram o erro de *recência positiva*, tal qual no jogo Travessia do Rio, enquanto houve um equilíbrio entre os alunos do 3º ano: metade cometeram o erro *de recência positiva* e a outra metade, o de *recência negativa*. No 5º ano, três crianças julgaram corretamente a situação, demonstrando algum entendimento sobre independência de eventos, apesar de não aparecer explicitamente em seus discursos que um evento não teria conexão com o outro. Talvez eles tenham pensado só em termos de equiprobabilidade, ou seja, qualquer face ou lado do dado teria as mesmas chances de sair, como explicitado por A5.1 quando disse: “as expectativas são as mesmas”.

Diferentemente do jogo Travessia do Rio, no PAR, mais alunos do 5º ano cometeram o erro de *recência positiva (5 estudantes)* do que *negativa (4 estudantes),* contrariando estudos de Chiesi e Primi (2009) citados por Bryant e Nunes (2012) que apontaram que crianças mais velhas tendem a cometer mais o erro de *recência negativa*. Imagina-se que as diferentes situações de jogos apresentadas às crianças, nesta pesquisa, podem ter influenciado nos resultados que se apresentaram distintos no jogo Travessia do Rio em comparação com o jogo PAR, como foi observado em outras situações probabilísticas deste mesmo estudo. Constatou-se uma gradação em relação à quantidade de alunos que cometeram a recência positiva no PAR: 7 do 1º ano (crianças com 6 anos), 6 do 3º ano (8 anos de idade) e 5 do 5º ano (10 anos).

Constata-se, de uma forma geral, que os participantes desta pesquisa não têm uma compreensão adequada sobre independência de eventos, apesar de alguns alunos do 5º ano demonstrarem algumas noções que precisariam de intervenção para que fossem solidificadas. Em sua pesquisa, Carvalho (2005) verificou no pré-teste, que nenhuma criança da 4ª série (atual 5º ano) possuía domínio sobre o conceito de independência de eventos e que após a intervenção, 52,17% dos participantes passaram a identificar e justificar adequadamente eventos independentes. Os estudos citados por Bryant e Nunes (2012) apontam que parece não haver melhora na compreensão da independência de eventos com o passar do tempo, apenas uma migração do tipo de erro cometido (*recência positiva para negativa*) por crianças mais novas e mais velhas, como também por adultos. Tais fatos levam a especular que a escola não tem contribuído para construção deste importante elemento da probabilidade. Para os autores, compreender a independência de eventos sucessivos em uma sequência aleatória é uma parte fundamental do aprendizado sobre aleatoriedade, portanto, é imprescindível o papel da escola no sentido de garantir a compreensão da independência de eventos pelos estudantes.

5.1.3 Eventos equiprováveis no jogo Travessia do Rio

Se você jogar com o dado vermelho e eu com o dado azul quem terá mais chance de tirar o 6: eu ou você? Por quê? Foi feita tal pergunta às crianças para analisar suas compreensões sobre a equiprobabilidade. Qualquer uma das pessoas citadas na questão tem igual chance de tirar 6 nos dados, ou seja, a probabilidade é de 1 em 6.

A Tabela 3 informa as respostas dos alunos sobre a questão que envolve equiprobabilidade. Muitos informaram que ambos ganhariam, ou seja, qualquer uma das pessoas envolvidas teria a mesma chance de ganhar.

Tabela 3: Síntese das respostas dos alunos sobre equiprobabilidade no jogo Travessia do Rio (por ano)

	Se você jogar com o dado vermelho e eu com o dado azul quem terá mais chance de tirar o 6: eu ou você?			
Ano	**Eu**	**Você**	**Os dois**	**Não sabe / Não respondeu**
1º	5	3	2	2
3º	4	2	6	0
5º	3	4	5	0

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

No 1º ano, dois alunos não responderam, informaram que não sabiam. Dois julgaram que ambos podiam tirar: A1.1 não soube argumentar e B1.5 disse *"é tudo a mesma coisa*".

Cerca de 42% dos alunos do 1º ano acreditaram que eles próprios teriam mais chance, alegando que "*porque eu sou o mais inteligente da minha sala*" (A1.3), "*porque se eu jogar o 1 cai o 6*" (A1.4), "*porque a senhora vai parar aqui (5) e eu vou parar aqui (6)*" (B1.1), "*parece que é eu. Lá em casa tem um jogo desse e eu joguei o 'coisa' pra cima e só saía 6, 6, 6..."* (B1.3), "*na verdade, eu sempre ganho o 6*" (B1.4).

As crianças do 1º ano que consideraram que a pesquisadora teria mais chance, justificaram "*porque tu é adulta*" (A1.2), "*porque a senhora é grande, sabe mais*" (B1.2) e B1.6 não soube explicar.

Observou-se que quase todas as crianças do 1º ano não atentaram para a equiprobabilidade, usaram parâmetros particulares, próprio do significado intuitivo da probabilidade (BATANERO E DIAZ, 2007), julgando haver um elemento externo que influenciava os resultados do lançamento do dado: a inteligência, a experiência, a crença num resultado, o fato de ser adulta, grande ou saber mais. Dessa forma, não perceberam também a aleatoriedade.

No 3º ano, os alunos que consideraram que ambos teriam a mesma chance (50% dos entrevistados), nem sempre responderam a partir do primeiro questionamento da pesquisadora. Alguns alunos mudaram de opinião durante a entrevista. Responderam inicialmente de uma forma e, depois de alguns questionamentos, mudaram suas respostas. A3.1 disse inicialmente "*o seu. Sei lá. Não sei como explicar*" depois mudou de ideia e disse "*eu, porque assim, depende da sorte, né? Só Deus sabe*". Observou-se que "alguns sujeitos podem mesmo ter a necessidade de examinar algumas alternativas diferentes antes de encontrarem a resposta que julgam mais apropriada" (CARRAHER, 1998, p.18). A3.4 informou que são iguais "*porque é a mesma função, o dado*". A3.6 disse "*não sei. Acho que é a mesma chance*". B3.3 informou "*as duas. O meu também pode parar 6 também*". As crianças do 3º ano apresentaram maior número de respostas corretas e compreensões mais coerentes sobre o tema, logo os questionamentos da pesquisadora permitiram reflexão e avanço por parte de alguns alunos.

As crianças do 5º ano que consideraram que ambos teriam a mesma chance, alegaram que "*ninguém tem mais chance. Mesma chance, porque nós dois temos um seis*", enfatizou corretamente A5.1. Quando A5.6 disse que os dois têm a mesma chance "*porque você não pode roubar. Nem eu nem você*", parece que ele, de fato, acreditou na equiprobabilidade, pois considerou que, nas condições apresentadas, para uma pessoa ter mais chance seria necessário haver 'roubo', desonestidade. Já A5.4 não apresentou uma justificativa consistente e disse apenas "*eu acho que tem a mesma chance*", enquanto A5.5 alegou que as chances eram iguais porque ambos iam jogar o dado na mesma hora e B5.2 não soube explicar.

Dos alunos que defenderam que as chances seriam maiores da pesquisadora, apresentaram como argumento: "*porque você tem mais habilidade do que eu. Eu não sou bom em jogar dado não. Tem a ver com a habilidade da mão, com sorte*" (A5.3), "*a senhora já sabe o jeito*" (B5.2), "*você pode ter mais sorte e tirar o número maior*" (B5.4). Dos três alunos que consideraram que eles próprios teriam mais chance, alegaram que tinham mais sorte (B5,6), que o outro poderia tirar outro número que não fosse o 6 (B5.5). Um deles não apresentou justificativa (B5.3).

Observou-se que, em relação aos eventos equiprováveis, algumas crianças apresentaram dificuldade em concebê-las, umas apresentam crenças ou intuições baseadas em suas experiências anteriores ou durante a vivência da entrevista ou do jogo, mas nem sempre essas intuições são coerentes, portanto, como defendido por diversos autores, inclusive por Bryant e Nunes (2012), é necessário instrução para que as intuições se ampliam, se reconstruam, se dissolvam ou se remodelem e passem a fazer parte do rol de conhecimentos necessários à compreensão da probabilidade. Mais uma vez, constatou-se que os alunos mais velhos, do 3º e 5º anos apresentaram avanços na compreensão da equiprobabilidade em relação às crianças do 1º ano.

5.1.4 Eventos equiprováveis no jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

Perguntou-se aos alunos: *Se eu lançar uma moeda primeiro e você lançar depois, quem tem a maior chance de tirar cara: eu ou você? Por quê?*, buscando analisar o entendimento dos mesmos acerca de eventos equiprováveis.

Observa-se na Tabela 4 que, no total, 12 alunos julgaram corretamente que ambas as pessoas envolvidas na situação teriam a mesma chance de tirar cara no lançamento de uma moeda, resultado semelhante ao obtido no jogo Travessia do Rio no lançamento de um dado.

Tabela 4: Síntese das respostas dos alunos sobre equiprobabilidade no jogo PAR (por ano)

	Se eu lançar uma moeda primeiro e você lançar depois, quem tem a maior chance de tirar cara: eu ou você?			
Ano	**Eu**	**Você**	**Os dois**	**Não sabe / Não respondeu**
1º	7	1	3	1
3º	2	5	5	0
5º	4	4	4	0

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

A maioria dos alunos do 1º ano acreditou que eles próprios teriam mais chance que o outro de tirar cara no lançamento de uma moeda, argumentando "*porque ainda sou criança e preciso estudar. No adulto só sai coroa"* (A1.2), "*porque todo mundo fica me perguntando como é lá na minha sala para fazer as tarefas*" (A1.3), "*porque se eu botar coroa aqui e jogar pra cima, vira cara"* (A1.4), "*porque quando eu jogo cai em cara"* (B1.1), "*eu joguei só cara, só cara, só cara*" (B1.3). Claramente, as crianças do 1º ano se basearam em experiências anteriores, em suas intuições, em suas crenças para justificar suas escolhas.

Percebeu-se nos discursos das crianças o *significado intuitivo da probabilidade* cujas definições se ancoram em opiniões e crenças a partir da linguagem natural e se relacionam com algumas concepções que se traduzem em sorte ou destino (BATANERO E DIAZ, 2007). Tal situação foi largamente observada nas falas das crianças de todos os anos, nos dois jogos.

Os alunos do 1º ano que disseram que ambos teriam a mesma chance de ganhar, não souberam justificar a resposta e só informaram que as chances eram iguais depois que a pesquisadora levantou esta possibilidade ao realizar novas indagações como, por exemplo: *você acha que eu tenho mais chance ou você ou é tudo igual?* As crianças do 1º ano não conseguiram perceber que o evento era equiprovável. Eles inicialmente diziam que não sabiam responder e, após insistência da pesquisadora, eles escolhiam uma resposta, mas não refletiam sobre as justificativas que dariam suporte ao que foi respondido.

Das crianças do 3º ano que acreditaram que elas próprias teriam mais chance, B3.1 justificou dizendo "*eu vou ganhar esse jogo*". Em contrapartida, A3.1 disse que a pesquisadora teria mais chance "*porque isso aí já é sorte. Um adulto me disse que quanto mais a pessoa cresce, mais sorte vai ganhando*" e A3.5 enfatizou "*porque a senhora tem mais sorte*" e B3.6 sentenciou "*porque você sabe".*

Constatou-se como a qualidade das respostas dos alunos do 3º ano se ampliou em relação aos do 1º ano, especialmente quando justificaram a escolha de que ambos têm chances iguais de tirar cara. A3.4 *disse "qualquer um, porque a sorte dá de vez em quando*"; B3.3 defendeu que "*pode ser eu ou tu. Eu já disse, tia, é a moeda que diz, não é a gente que quer não*"; B3.4 alegou "*eu acho que é a mesma coisa porque eu não sei quem vai tirar cara ou coroa*" e B3.5 disse "*eu não sei. Se jogar pode cair as duas moedas caras".*

Já no 5º ano as crianças que julgaram ter mais chance, consideraram a vivência recente no jogo ou experiências anteriores, pois alegaram que "*sai muitas vezes esse cara*" (A5.2), "*quando eu jogo pode sair cara*" (A5.3), "*porque sempre quando eu jogo dá mais cara que coroa*" (B5.4). As que disseram que a pesquisadora teria mais chance, apresentaram as seguintes justificativas: "*pode ser o jeito que a senhora joga ou por sorte*" (B5.2), "*porque tem vez que só para em cara*" (B5.3), "*se você jogar, gira e cai cara*" (B5.5) e *"porque quando eu jogo não sai muita cara não, sai coroa*" (B5.6).

Nas justificativas apresentadas pelos alunos do 5º ano para a escolha das chances iguais, A5.1 defendeu que "*as expectativas são as mesmas*" e argumentou "*numa moeda tem cara, na outra tem cara. Numa moeda tem coroa,* *na outra moeda tem coroa*”, provando que nas condições apresentadas não há como alguém ter mais possibilidade de tirar cara. A argumentação apresentada por A5.1 é bem elaborada e mostra a compreensão que o mesmo tem sobre a aleatoriedade, por meio da comparação dos eventos equiprováveis.

Já A5.4 acreditou que “*jogando da mesma maneira sempre vai sair o mesmo*”. A5.6 alegou que “*depende do giro da moeda. As chances são iguais porque os dois podem tirar ou não podem tirar*”. B5.2 disse “*eu tenho meu modo de jogar a moeda e a senhora tem o seu”.*

Considerando o lançamento da moeda, não foi observado grande diferença da compreensão apresentada pelos alunos do 3º ano em comparação com os alunos do 5º ano. Os alunos apresentaram argumentos semelhantes, embora as justificativas de A5.1 sejam qualitativamente superiores em termos de compreensão da aleatoriedade, pois ele pontuou a razão pela qual ambos têm a mesma chance de tirar cara: “*cada uma das moedas tem uma cara e uma coroa*”.

Em ambos os jogos, os resultados se assemelharam. As crianças do 1º ano apresentaram justificativas mais inconsistentes, inclusive, com ausência de argumentação. Fizeram escolhas mais relacionadas a si próprias na comparação com o outro: tenho mais chance de tirar o 6 ou tenho mais chance de tirar a cara. Seria necessário, acredita-se, mais sessões de jogos, perguntas e reflexões para, não apenas as crianças do 1º ano, como também as do 3º e 5º anos melhorarem a compreensão acerca da aleatoriedade, expressa na comparação de eventos equiprováveis.

5.1.5 Eventos aleatórios no jogo Travessia do Rio

Utilizou-se a pergunta norteadora *Se eu jogar um dado, é mais fácil sair qual dos números? Por quê?* para avaliar a compreensão das crianças sobre eventos aleatórios, e também sobre a equiprobabilidade presente no lançamento de um dado honesto. Sabe-se que qualquer um dos seis números do dado têm a mesma chance de sair, ou seja, a probabilidade é de 1 em 6.

Os alunos responderam à questão apontando um número específico que teria mais chance de sair no lançamento de um dado. Alguns consideraram que alguns números, mas não todos, teriam mais probabilidade de sair e outros julgaram que qualquer número poderia sair, como apontado na Tabela 5.

Tabela 5: Síntese das respostas dos alunos sobre a equiprobabilidade no lançamento de um dado (por ano)

	Se eu jogar um dado, é mais fácil sair qual dos números?		
Ano	**Um número específico**	**Mais de um número**	**Qualquer número**
1º	10	1	1
3º	8	2	2
5	8	4	0

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Curiosamente, nenhuma criança do 5º ano julgou que as chances eram iguais para qualquer um dos números. Acertaram apenas um aluno do 1º ano, A1.5 que disse "*tudo igual, pode cair qualquer um*" e duas crianças do 3º ano: A3.5 que afirmou *"a mesma coisa, qualquer um pode cair. Não pode impedir de cair*" e B3.4 que informou "qualquer um, porque jogando ele roda lá em cima e, se cair, vira qualquer número".

Mais de 80% das crianças do 1º ano acreditaram que é mais fácil cair um número específico, entre eles o 1 "*porque é menor*" "*porque é fácil*", "*porque cai o 1", o 5 "porque quando joguei saiu o 5*", "*porque o menino do jogo jogou e caiu 5*" *e o 6 "porque o 6 é mais*", "*porque jogo direto e fica saindo o 6*". Uma criança disse que seria mais fácil sair dois números – o 5 ou o 6 – mas não soube justificar.

Tanto no 3º, como no 5º ano, os alunos que julgaram que seria mais fácil sair um determinado número do dado, totalizam mais de 66%. No 3º ano, a maioria dos que escolheram apenas um número, optaram pelo 6, alegando "*um dia meu amigo tava jogando isso e só caía 6"*, "*esse é o mais forte, o mais alto que tem, é ele", "ele é o número mais alto*". O aluno A3.2 abriu uma fresta para compreensão da aleatoriedade, apesar de se equivocar na resposta, ao argumentar: "*o 6. Quando joga o dado pode cair ele (o 6) ou qualquer um, mas eu acho que cai o 6*". Já A3.3 julgou que alguns números podem cair mais facilmente que outros ao afirmar: *"um 6, um 3, um 5, um 4*", mas por fim ele opina por um deles ao completar: "*O 4 porque ele cai tão fácil assim*".

No 5º ano, A5.1, A5.2, B5.1, B5.2 e B5.5 consideraram que há chances diferentes dependendo das pessoas, das situações ou dos locais: "*o 5, porque quando tô jogando com meu irmão sai mais o 5 para mim*", disse A5.1, alegando, no entanto, que se fosse a pesquisadora a lançar o dado, a chance maior seria de sair o 6. Já A5.2 disse que o 2 seria mais fácil sair se ela jogasse o dado, contudo se fosse a pesquisadora seria 4. B51 disse que seria 4 para ele e 5 para a pesquisadora. B5.2 informou que seria mais fácil sair o 1 se ele jogasse na casa dele, mas se ele jogasse fora da casa teriam mais chance o 4 e o 2. B5.5 defendeu que cai mais o 2 se a pessoa jogar o dado girando e se não girar cai o 1.

A5.3 disse que não é *adivinhador* para saber qual número vai sair, mas considerou que o 4 tem mais facilidade porque saía muito 4 quando ele estava jogando. Apesar de não compreender plenamente o conceito, a expressão "adivinhador", utilizada por essa criança, pode ser um caminho para reflexão sobre a aleatoriedade.

A5.6 achou que o 3 teria mais chance porque está no meio, enquanto A5.5 disse "*toda vez que eu jogo tem que sair o 5, o 3 ou o 4, mas eu não sei porquê*". Respostas semelhantes foram apresentadas por A5.4 e B5.6.

As compreensões apresentadas por alguns alunos do 3º e 5º anos em situações anteriores não se confirmaram nesta situação específica. Parece haver situações em que as crianças percebem a aleatoriedade e em outras, não.

Para ampliar a compreensão da aleatoriedade como parte da compreensão para a probabilidade, concorda-se com Carvalho e Fernandes (2005) que defendem que para o desenvolvimento de novas atitudes intuitivas é necessário o envolvimento pessoal do aprendiz numa atividade prática com objetos aleatórios concretos e com intensa interação dos alunos entre si e com o professor. Assim, julga-se que o jogo Travessia do Rio pode ser um instrumento que possibilite a ampliação da compreensão do pensamento probabilístico das crianças, especialmente porque o trabalho com dados, durante o jogo, permite que os estudantes percebam ou reflitam sobre, por exemplo, eventos aleatórios a partir da orientação e acompanhamento do professor.

5.1.6 Eventos aleatórios no jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

Aproveitando o jogo PAR, foi solicitado às crianças que respondessem a seguinte indagação: *Quando eu jogo uma moeda é mais fácil sair cara ou coroa? Por quê?* Naturalmente, numa moeda não viciada, as chances de sair cara é a mesma de sair coroa, ou seja, 50%.

A Tabela 6 apresenta a síntese das respostas das crianças, considerando a escolha dos alunos referente à face *cara*, à face *coroa* ou a qualquer uma das faces.

Tabela 6: Síntese das respostas dos alunos sobre a equiprobabilidade no lançamento de uma moeda (por ano)

	Quando eu jogo uma moeda é mais fácil sair cara ou coroa?			
Ano	**Cara**	**Coroa**	**Qualquer face**	**Não sabe / Não respondeu**
1º	6	2	3	1
3º	6	5	1	0
5º	4	2	6	0

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Dos alunos do 1º ano que informaram que sairia qualquer uma das faces, A1.1 disse que seria a mesma coisa, mas não apresentou justificativa. A1.2 informou inicialmente que sairia coroa porque coroa vai pra Tati, em seguida mudou e disse que podia ser *"qualquer coisa, porque sempre que joga a moeda sai qualquer coisa*". E A1.5 comentou "*porque se der cara, vai dar e se der coroa, sobe*". As duas últimas crianças mencionadas fazem referência ao jogo recentemente experienciado.

Metade dos alunos do 1º ano disseram que teria mais possibilidade de sair cara, alegando: "*porque quando eu joguei saiu um mói de vez cara e pouca vez coroa*" (A1.6), "*porque quando tava jogando só dava cara*" (B1.6), "*eu só jogo cara*" disse B1.3, mas acredita que se outra pessoa jogar terá mais chance de sair a coroa. As crianças apresentaram justificativas semelhantes tanto para cara quanto para coroa.

As crianças do 3º ano que julgaram que sairia cara justificaram suas escolhas informando que "*vai sair muita cara, eu acho (...) a cara é um pouquinho fraca e* *sai o fraco*” (B3.1), “*quando eu tava tentando com meu irmão saía cara” (B3.2), “para mim é cara, pras outras pessoas é coroa*” (B3.4).

As justificativas são basicamente as mesmas para os que escolheram coroa: “*sempre que eu tô jogando sai coroa*” (A3.1), “*é mais fácil de sair coroa*” (A3.2), *“porque eu já joguei cara e coroa e tirei só coroa*” (B3.4). A3.4 alega que o peso da moeda influencia e que ‘pesa’ mais o lado da coroa.

“*É a mesma coisa de jogar cara ou de jogar coroa*” informou A3.5, única criança do 3º ano a julgar a probabilidade igual de sair cara ou coroa no lançamento de uma moeda. No entanto, quando questionada sobre uma hipotética situação de sorteio de uma casa usando o lançamento de uma moeda, ela disse que não seria uma situação justa.

Metade dos alunos do 5º ano consideraram que as chances eram iguais de sair cara ou coroa. Este resultado é inteiramente diferente do que foi proposto no jogo Travessia do Rio em que nenhum aluno do 5º ano julgou equiprovável os resultados no lançamento de um dado e no lançamento de uma moeda, 50% dos alunos consideraram que ambos os lados teriam a mesma chance de cair. O que aponta para uma reflexão: os contextos, as situações são tão distintas que resultam em dados tão diferentes? Será que há influência do espaço amostral do dado (seis possibilidades) em comparação com o da moeda (duas possibilidades)? Conjectura-se que é possível que a recente experiência no jogo tenha influenciado a resposta das crianças, pois todas tiraram tanto cara como coroa diversas vezes enquanto jogavam, mas no dado foi difícil para algumas tirar determinados números. Talvez seja mais fácil para elas acreditarem que são equiprováveis os lados da moeda, pois só tem duas possibilidades que o do dado que tem seis. Se as crianças tivessem jogado mais vezes com os dados, talvez pudessem constatar que assim como as moedas, cada face do dado tem a mesma chance de sair. Atividades que contemplem a *probabilidade frequentista* com uso de simuladores, pode ser um caminho para ampliar a compreensão das crianças e minimizar o paradoxo apontado neste estudo. Ainda que, o julgamento da equiprobabilidade nesses casos, talvez repouse na análise do tamanho do espaço amostral (no caso da moeda, há duas possibilidades e, no caso do dado, há seis possibilidades), mas a confirmação de tal fato requer estudos mais apurados.

Os argumentos apresentados pelas crianças do 5º ano foram: "*São as mesmas expectativas, não tem mais coroa, nem tem mais cara: tem uma coroa e uma cara*" justificou com segurança A5.1, enquanto A5.6 disse "*eu joguei aqui e saiu mais cara. Pode sair cara ou coroa. Cada pessoa não sabe o que vai jogar. Pode sair cara, pode sair coroa*". B5.2 comentou; "*é a mesma coisa. Olha, tem minha irmã e ela tem a mesma possibilidade de meu primo jogar*". No entanto, B5.2 se contradisse ao afirmar que com ele é diferente, há chance maior de sair coroa "*porque eu tenho azar, quando eu jogo só cai coroa*". Semelhante pensamento teve A5.3 que disse "*cara, porque só cai cara mesmo, mas não é proibido cair qualquer um dos dois*". Já B5.6 argumentou: "*depende, se tiver do lado cara, sai coroa e se tiver do lado coroa, sai cara. Pode ser qualquer um*", vinculando a aleatoriedade a uma escolha anterior: se jogo de um lado, sai o outro. Algumas crianças responderam aos questionamentos sem muita convicção e, por vezes, apresentaram justificativas inconsistentes. Percebe-se que os estudantes estão em processo de entendimento sobre a aleatoriedade. Eles utilizaram suas intuições como base para responder e argumentar sobre o que está sendo proposto, no entanto, nem sempre essas intuições são coerentes, por isso a necessidade de instrução, de intervenção para conduzir o processo de entendimento sobre aleatoriedade.

Dos alunos do 5º ano que propuseram que a cara seria mais fácil de sair, A5.4 informou "*se a gente jogar da maneira certa vai sair cara*". A5.5 sentenciou: "*pra mim eu acho cara. Porque eu jogo assim, aí eu jogo e sai mais a posição da cara*". B5.3 disse, "*porque quase toda vez para em cara*", enquanto B5.5 disse "*porque ela cai girando e cai cara*".

As crianças B5.1 e B5.4 consideraram que a coroa teria mais chance de sair, justificando respectivamente que "*coroa porque tem mais chance. Depende do jeito que você jogar*" e "*coroa, sei lá...se for outra pessoa a chance é coroa*".

Há nitidamente uma relação que as crianças estabelecem da aleatoriedade com a sorte ou o azar nas justificativas de suas escolhas. Bryant e Nunes (2012) pontuam que essa ideia repousa no folclore de quem tem sorte ou azar, mas que em outros contextos podem estar associados a situações não aleatórias e tal fato é uma má base para realizar previsões sobre eventos aleatórios. As concepções das crianças que utilizam o significado intuitivo da probabilidade, segundo Batanero e Diaz (2007), consideram a sorte, o azar ou o destino como forma de justificativa de escolhas e argumentos de resultados, fato observado em muitos discursos apresentados pelos estudantes, tanto no jogo Travessia do Rio como no jogo PAR.

Os conceitos de aleatoriedade não estão solidificados e são muito intuitivos, na maioria das crianças pesquisadas. Mlodinow (2009) alerta para o fato de que eventos aleatórios muitas vezes se parecem com eventos não aleatórios e deve-se ter cuidado para não os confundir quando tratarmos da interpretação de questões humanas, pois foi preciso muitos séculos para os cientistas aprenderem a enxergar além da ordem aparente e reconhecerem a aleatoriedade oculta na natureza e na vida, defendendo que "a aleatoriedade é fundamentalmente uma codificação do bom senso (MLODINOW, 2009, p.16).

Foram constatados pequenos avanços na compreensão da aleatoriedade nas crianças mais velhas, em comparação com as mais novas, apesar de tal conceito não se apresentar consolidado em nenhum grupo pesquisado. Algumas crianças apresentavam compreensões mais coerentes que outras, embora houvesse oscilação quando eram confrontadas com outro jogo. Na verdade, o que se observou nas justificativas apresentadas pelas crianças é o quão mais preparadas elas estão para uma intervenção, ou seja, a plataforma intuitiva que elas consideram para demonstrar suas compreensões acerca da independência de eventos, da equiprobabilidade ou de eventos aleatórios são mais ou menos coerentes de acordo com a maturidade, com a idade.

Não significa dizer que as crianças menores não tenham condições de iniciar um processo de instrução formal para estabelecer as compreensões que servem de base para o pensamento probabilístico. Muito pelo contrário. Acredita-se sim, que por meio de jogos, as crianças do 1º ano são capazes de ampliar o entendimento sobre aleatoriedade, ou no mínimo, podem ser confrontadas com situações que colocam em cheque seu pensamento inicial, podendo lhes conduzir a uma nova organização mental, a partir da dúvida e ou do confronto propiciado pelo professor.

Há situações, contextos, que as crianças apresentam mais facilidade que em outros. Dos três focos tratados aqui e que envolvem a aleatoriedade, a independência de eventos foi a que apresentou um nível de compreensão mais equivocado, nos dois jogos. Observou-se que os estudantes envolvidos na pesquisa apresentaram maior entendimento acerca da equiprobabilidade e do evento aleatório no jogo PAR que envolve moeda que no jogo Travessia do Rio que é jogado com dados. De uma forma geral, apesar do 5º ano apresentar melhores resultados, especialmente nos discursos expostos nas justificativas, os participantes da pesquisa não têm um entendimento coerente sobre a aleatoriedade, mas apresentam indícios de compreensões que podem ser usados para o desenvolvimento de um trabalho de instrução escolar.

5.2 Espaço Amostral

Para avaliar a compreensão das crianças acerca do *espaço amostral,* utilizou-se em cada jogo, três perguntas norteadoras. Cada pergunta foi relacionada a um foco probabilístico que possibilitasse refletir direta ou indiretamente sobre o espaço amostral. Assim, discute-se, a seguir, os questionamentos que trataram de *levantamento de possibilidades*, *evento impossível* e *evento pouco provável* nos jogos Travessia do Rio e Passeios Aleatórios da Rute (PAR).

5.2.1 O levantamento de possibilidades no jogo Travessia do Rio

A partir do jogo *Travessia do Rio*, as crianças foram indagadas sobre como seria possível formar a soma 8 com dois dados, considerando a seguinte pergunta norteadora: *João apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair nos dados para dar 8?*

São cinco as possibilidades para formar 8 no lançamento de dois dados: 2 e 6, 6 e 2, 4 e 4, 3 e 5, 5 e 3. As crianças puderam usar os dados para observar, contar e responder sobre os elementos do evento soma 8 que compõe o espaço amostral em discussão e dispuseram de lápis e papel para efetuar os registros.

Observou-se que todos os alunos elencaram, ao menos, uma possibilidade de soma que resultasse em 8. Dos registros apresentados, 78% apontaram mais de uma possibilidade, como observado na Tabela 1.

Tabela 7: Síntese de quantidade de possibilidades de soma 8 no lançamento de dois dados, elencados por alunos (por ano)

	João apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair nos dados para dar 8?				
Ano	**1 possibilidade**	**2 possibilidades**	**3 possibilidades**	**4 possibilidades**	**5 possibilidades**
1º	5	1	4	1	1
2º	3	3	6	0	0
3º	0	4	8	0	0

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Como algumas crianças, especialmente as mais velhas, sabiam alguns fatos fundamentais da soma 8, elas não contaram nem observaram os dados, apenas resgataram da memória a informação e registraram as possibilidades. Diferentemente, outras crianças comunicaram verbalmente que era possível obter a soma 8 em dois dados, mas só encontraram os resultados manuseando e contando nos dados. Alguns poucos alunos apresentaram dificuldades, mesmo usando o suporte dos dados, e necessitaram do incentivo da pesquisadora para que tentassem. Essas crianças realizaram muitas tentativas e diversas contagens para encontrar e registrar o(s) resultado(s).

Em estudos de Pessoa e Borba (2009), envolvendo o raciocínio combinatório, foram constatadas dificuldades de crianças, especialmente as mais novas, em elencar todas as possibilidades de ocorrência de uma situação fato este, observado também no presente estudo.

Mesmo que algumas crianças tenham apresentado dificuldade em fazer uma lista exaustiva, ou em encontrar ao menos uma possibilidade de soma 8, todas confirmaram que era possível a ocorrência do evento supracitado e não se opuseram a tentar encontrar a resposta. A transcrição da conversa com a aluno B1.6 ilustra a dificuldade observada por algumas crianças, especialmente as mais novas:

Pesquisadora*: Como é que faz pra dar 8?*

B1.6*: É difícil.*

Pesquisadora*: Mas, tem um jeito de dar oito?*

B1.6: *Tem. (Mexe os dados e conta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)*

Pesquisadora: *- Nove é oito?*

B1.6*: - Não.* (Continua as contagens chegando ao resultado 2 e 6 e registra).

Pesquisadora: *Tem outro jeito de dar oito ou só tem esse jeito?*

B1.6: *Eu acho que tem outro jeito.*

Pesquisadora*: Você sabe qual é esse outro jeito?*

B1.6*: Não.*

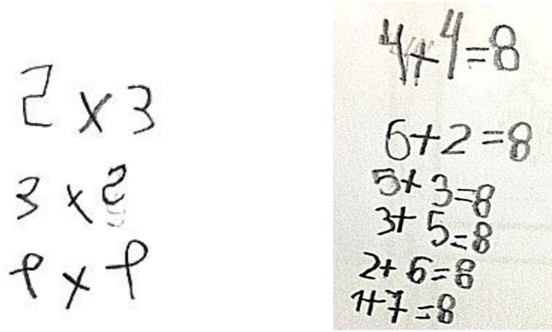
A conversa com a criança B1.6, que tem 6 anos e é do 1º ano, possibilitou uma reflexão de que os estudantes, mesmos os mais novos, possuem compreensões intuitivas de algumas possibilidades que compõem um determinado evento de um espaço amostral, e utilizam essa compreensão, ainda que não inteiramente coerente, como plataforma para suas respostas. Algumas dessas intuições evoluem naturalmente com o amadurecimento e crescimento da pessoa, outras não. Bryant e Nunes (2012) citam Fischbein (1987) para defender que as intuições primárias são fruto de experiências informais, que nem sempre são corretas, logo, podem conduzir a equívocos. Para a evolução das intuições primárias para as secundárias, que são intuições mais elaboradas, é imprescindível que haja instrução, intervenção; apenas o amadurecimento do aluno com o passar do tempo não é suficiente para garantir a ampliação dessas intuições (Bryant e Nunes, 2012). Assim, pode-se afirmar que a escola tem papel fundamental nesse processo.

Dos registros apresentados pelas crianças para compor o número 8, o mais frequente foi 4 e 4, representado de diversas formas, como apresentado a seguir nos registros de A1.2, B5.4, B5.2 e A3.4, respectivamente, nas Figuras 4a, 4b, 4c e 4d. Cerca de 92% dos alunos pesquisados indicaram como possibilidade de formação do evento soma 8, esse registro.

Figuras 4a, 4b, 4c e 4d: Registros de 4 e 4 como possibilidades de soma 8

Independente do tipo de representação escolhida, imagina-se que a opção pela possibilidade 4 e 4 talvez tenha relação com os trabalhos desenvolvidos na escola, de memorização de fatos fundamentais, ou com a facilidade de memorização de apenas um número que é duplicado. A maioria dos alunos que realizaram os registros sem o apoio dos dados, quase sempre iniciaram registrando esta possibilidade.

Constatou-se que apenas duas crianças de todo o grupo pesquisado sugeriram os registros 3 + 5 e 5 + 3, aparentemente como possibilidades distintas. Curiosamente, essas crianças eram do 1º ano, como se pode verificar nas escritas de A1.6 e B1.3, respectivamente, nas Figuras 5a e 5b.



Figuras 5a e 5b: Registro de possibilidade de soma 8 no lançamento de dois dados

É importante pontuar que a maioria das crianças de 6 anos (1º ano) respondiam à indagação proposta a partir do manuseio e contagem nos dados. Elas contavam os números nos dados e registravam. Aparentemente, não refletiam sobre os registros que, para as crianças mais velhas, pareciam "iguais". Outro fato que fortalece esta conclusão é que duas crianças do 1º ano (A1.4 e B1.2, respectivamente), repetiram as respostas: 5 + 3 e 5 + 3, observadas nas Figuras 6a e 6b, julgando que estavam escrevendo possibilidades distintas, pois apenas contaram nos dados e registraram sem refletir acerca dos outros eventos já listados.

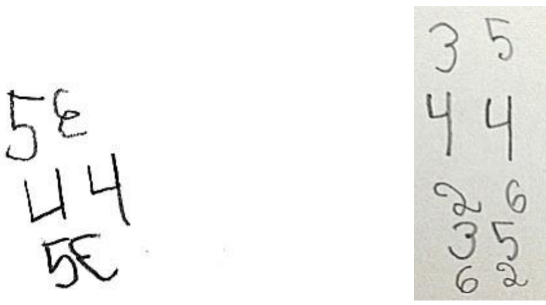


Figura 6a e 6b: Registro de possibilidades repetidas

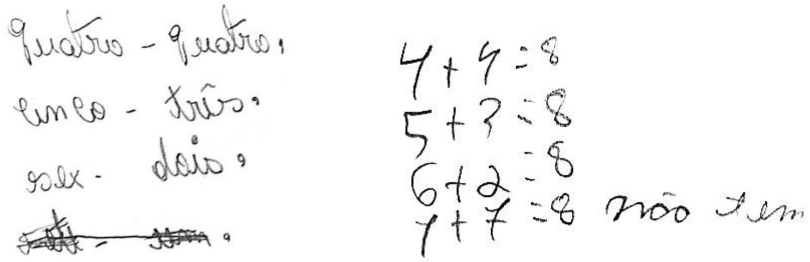
Em contrapartida, os alunos do 3º e 5º anos, equivocadamente chegaram à conclusão de que os registros envolvendo os mesmos números em ordem diferente correspondiam à mesma possibilidade, como 5 + 3 e 3 + 5. No momento de efetuar os registros, algumas crianças desses anos, oralmente, pontuavam possibilidades distintas como 2 + 6 e 6 + 2, mas ao observar os elementos registrados e constatar que havia um deles, descartavam essa nova possibilidade, julgando já tinham feito *"aquele jeito*". Diferentemente dos alunos do 1º ano, estes alunos mais velhos refletiam sobre os registros realizados.

Constatou-se que a percepção de possibilidades distintas dessa natureza, utilizando dados, não é simples para as crianças. Apesar de terem relativa facilidade em elencar algumas possibilidades, elas não conseguiram perceber a diferença dos elementos do evento 3 + 5 e 5 + 3 ou 2 + 6 e 6+ 2, mesmo quando utilizavam dados de cores diferentes. As crianças, que eram indagadas, diziam que "*era a mesma coisa*" ou "*esse eu já fiz*". O uso dos mesmos algarismos com o mesmo resultado se configurou como mesma possibilidade para essas crianças pesquisadas.

Apenas uma criança (B1.3) elencou todas as possibilidades de soma 8 no lançamento de dois dados, como constatado na Figura 5b. Entretanto, observou-se que quase 53% das crianças entrevistadas encontraram três possibilidades distintas de soma 8, o que para elas, se configurava em *todas* as possibilidades, uma vez que descartavam os elementos que apresentavam ordem diferente e mesmos números (como 2 + 6 e 6 + 2, por exemplo). Esta situação se reveste de significado, pois se de um lado, compreende-se a partir desse e de outros estudos, que as crianças apresentam dificuldades em fazer uma lista exaustiva das possibilidades de um determinado evento, por outro lado, percebe-se que elas conseguem enumerar elementos desse evento e o que, possivelmente, as impede de elencar todas as possibilidades é a falta de percepção sobre todos os elementos que compõem o evento de um espaço amostral. É possível também que elas não tenham percebido a importância de serem exaustivos quando elaboram uma lista de possibilidades (PESSOA e BORBA, 2009), bem como não tenham atentado para a relevância da sistematização no levantamento dessas possibilidades, a fim de não esquecer de registrar nenhum elemento do evento (soma 8).

Bryant e Nunes (2012) defendem que a análise do espaço amostral se inicia com uma procura exaustiva de todas as possibilidades que contemplem um determinado espaço amostral e que para tal, há duas exigências intelectuais: eliminar qualquer elemento impossível e listar todos os eventos possíveis.

Considerando a exigência concernente a *elementos impossíveis*, pode-se afirmar que a maioria dos alunos pesquisados, eliminaram (ou não pensaram) nesse tipo de evento. As crianças que elencaram a possibilidade 7 + 1, após reflexão, conseguiram perceber que era impossível, ou seja, não fazia parte dos elementos do evento que compunha o espaço amostral desejado (soma 8 no lançamento de dois dados). Uma criança (A3.1) verbalizou a intenção, mas não registrou, dizendo: “se tivesse 7 no dado, seria 7 + 1” e duas outras eliminaram o registro do evento impossível após reflexão proposta pela pesquisadora, como observado nas Figuras 7a e 7b referentes às crianças B5.4 e B5.6, respectivamente.



Figuras 7a e 7b: Registro de evento impossível (1 e 7) no lançamento de dois dados

Apenas o aluno do 1º ano (B1.3), parece não ter considerado a *possibilidade impossível.* Para ilustrar a situação, vê-se o diálogo com ele que já havia elencado os cinco modos distintos possíveis de possibilidade de soma 8 (ver Figura 5b), sem contar, apenas pensando e registrando:

Pesquisadora: - Tu achas que tem outro jeito? (de dar 8 na soma de dois dados)

B1.3: - Um mais seis. Não! Um mais sete.

Pesquisadora: - E tem sete no dadinho?

B1.3: - Não. Mas pode ser um mais sete mesmo! E então registrou 1 + 7 na folha.

O aluno B1.3 resolveu deixar registrado a soma 7 + 1 (impossível), mesmo após indagação da pesquisadora. Ao que parece, ele apenas considerou a soma 8 e não a soma 8 no lançamento de dois dados. Por outro lado, esse mesmo aluno foi o único do estudo com 36 crianças que conseguiu listar todas as possibilidades possíveis de soma 8 em dois dados.

Especificamente, como comentado anteriormente, a maior dificuldade das crianças em elencar todas as possibilidades de soma 8 no lançamento de dois dados foi a ausência de percepção de que a ordem, nesse caso, compõe uma possibilidade distinta, apesar de totalizar em resultados iguais. É pouco provável que apenas com o passar do tempo, os alunos percebam essa diferença, por isso é importante haver instrução no âmbito da escola que permita aos alunos perceber os elementos que compõem determinado evento de um espaço amostral, em sua totalidade. Há contextos em que a dificuldade relativa à ordem não é observada, como constatou-se nesse estudo no jogo Passeios Aleatórios da Rute que será tratado a seguir.

5.2.2 O levantamento de possibilidades no jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

No jogo PAR (Figura 3), para Rute visitar um dos amigos ela lança uma moeda para cima e se sair **cara** ela anda para direita (sentido leste) e se der **coroa** ela caminha para cima (sentido norte). As diferentes sequências do lançamento de quatro moedas determinarão o amigo que será visitado.

Entre as muitas perguntas norteadoras realizadas na entrevista do tipo clínica com as crianças, a que se discute no momento é a seguinte: *De quantos jeitos diferentes (caminhos diferentes) Rute pode chegar a Ana? Liste, considerando os lados da moeda (cara ou coroa).*

Há, ao todo, seis possibilidades de Rute chegar a Ana. São elas:

i) cara, cara, coroa, coroa
ii) cara, coroa, cara, coroa
iii) cara, coroa, coroa, cara
iv) coroa, coroa, cara, cara

v) coroa, cara, coroa, cara

vi) coroa, cara, cara, coroa

As crianças não apresentaram dificuldades em elencar caminhos possíveis para Rute chegar até a amiga Ana. Todos listaram, no mínimo, dois caminhos: eles traçavam o caminho escolhido (com o lápis ou com o dedo) no desenho e em seguida, iam convertendo em cara ou coroa. Mais de 91% escolheram como um dos caminhos a possibilidade: cara, cara, coroa, coroa. Parece que este caminho é o mais natural para as crianças, talvez pela posição em que a imagem que representa Rute se encontra, dando a entender que seguirá de patinete no sentido leste.

A Tabela 8 mostra a quantidade de caminhos (possibilidades) listados pelas crianças, considerando o ano.

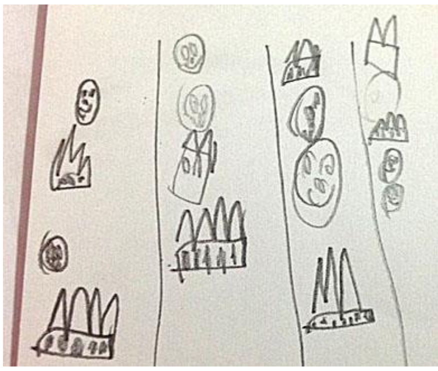
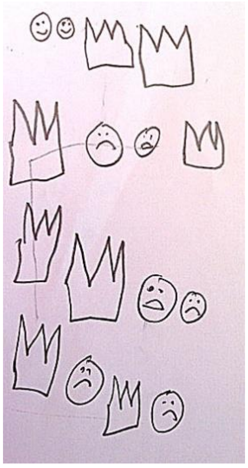
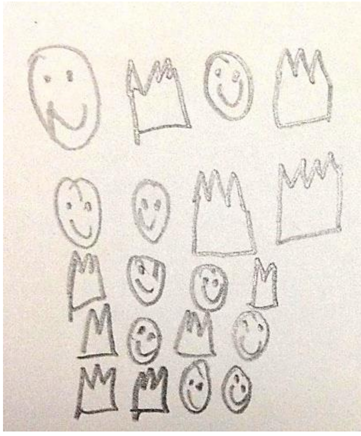
Tabela 8: Quantidade de possibilidades listadas pelas crianças no jogo PAR (por ano)

	De quantos jeitos diferentes (caminhos diferentes) Rute pode chegar a Ana?			
	2 possibilidades	**3 possibilidades**	**4 possibilidades**	**5 possibilidades**
1º ano	1	5	4	2
3º ano	1	5	3	3
5º ano	1	1	8	2

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Apesar de nenhuma criança listar as seis sequências possíveis, ao menos duas crianças de cada ano conseguiram elencar cinco possibilidades. Imaginava-se que, talvez, as crianças conseguissem perceber os seis caminhos possíveis para Rute chegar em Ana, desde que elas tivessem registrado cada um dos caminhos em um papel diferente ou tivessem usado diferentes cores de lápis para traçar os caminhos num único papel. Percebeu-se que depois de traçar alguns caminhos, elas se confundiam ou consideravam que já tinham escolhido este ou aquele caminho em função dos tracejados e registros já existentes na folha, desde o início do jogo.

As crianças do 5º ano tiveram desempenho melhor que as demais, no entanto, quase não houve diferença entre a performance das crianças do 3º ano, em relação às do 1º ano, muito embora, algumas do 1º não soubessem escrever e optassem pelo desenho, como mostram os registros de B1.3, B1.4 e B1.2, nas Figuras 8a, 8b e 8c, respectivamente.

Figuras 8a, 8b e 8c: Registros de possibilidades de sequências de duas caras e duas coroas por alunos do 1º ano

Diferentemente do caso dos dados, no Jogo Travessia do Rio, as crianças não descartavam os casos repetidos, com ordem diferente, mesmo porque todas as possibilidades tinham a mesma quantidade de caras e coroas, apenas em ordens diferentes. É possível que elas não tenham realizado o descarte por uma das razões: primeiro, elas escolhiam um caminho e depois traduziam este caminho em termos de cara ou coroa, não refletindo sobre repetições; segundo: o traçado no desenho formava caminhos diferentes; terceiro: elas poderiam supor que a cada esquina Rute jogaria a moeda e, como teria que jogar quatro vezes, fatalmente ia sair alguma face repetida. O fato é que mesmo percebendo que para se chegar a Ana era necessário tirar duas caras e duas coroas, em nenhum momento, nenhum aluno julgou que seria a mesma possibilidade, embora houvesse repetição das faces.

O diálogo com o aluno B1.3 mostra a percepção do mesmo em relação à quantidade de caras e coroas que são iguais, embora as possibilidades (caminhos) sejam diferentes. Essa descoberta, para ele é motivo de admiração.

Pesquisadora: *Só tem esse caminho pra chegar em Ana? Tem outro?*

B1.3: *Tem.*

Pesquisadora: *Mostra aí.* (Ele faz o caminho com o dedo). – *Como é esse caminho?*

B1.3: *Cara, cara, coroa, coroa.*

Pesquisadora: *Pronto: você vai desenhar aí.*

B1.3: *Duas caras e duas coroas.*

Pesquisadora: *Isso! Desenha aí.*

B1.3: Duas caras e duas coroas? De novo? (Indaga, porque que já tinha desenhado no primeiro registro duas caras e duas coroas).

Pesquisadora: *Sim (...). Tem outro jeito? Me diz...*

B1.3: *Coroa, cara, cara, coroa*

Pesquisadora: *Repetindo...*

B1.3: Duas caras e duas coroas de novo! Falou muito admirado.

Semelhante à percepção do aluno B1.3, uma outra criança do 3º ano (A3.1), faz o registro mostrado na Figura 9.

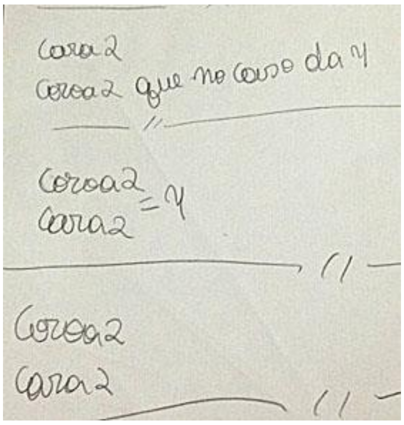


Figura 9: Registro de possibilidades de sequência com duas caras e duas coroas por A3.1

Em seu discurso, A3.1 informou os caminhos traçados: cara, cara, coroa, coroa / coroa, cara, coroa, cara / cara, coroa, cara, coroa, mas realiza um registro diferente: escreve cara e numera quantas vezes esta face apareceu no caminho proferido. Faz o mesmo com a coroa e totaliza: quatro! A partir do registro de A3.1, constatou-se que ela percebeu que nas sequências elencadas havia uma repetição de caras e coroas, mas ela não descartou nenhuma possibilidade, como ocorreu com algumas crianças no caso dos dados, julgando-se que, por exemplo, 3 + 5 e 5 + 3 corresponderia à mesma possibilidade.

Apesar dos alunos terem conseguido nas duas situações de jogos elencar ao menos uma possibilidade dos eventos solicitados, constatou-se que no contexto do Jogo Travessia do Rio os alunos tiveram mais dificuldade que no PAR. Acredita-se que a situação proposta no jogo PAR que conduz a um contexto mais “palpável” (caminhos que eram apontados no desenho) tenha sido um facilitador que não provocou a falsa ideia de que possibilidades com elementos repetidos em ordens diferentes fossem iguais, como ocorreu no caso dos dados.

Parece que, de fato, há alguns contextos em que a intuição em relação ao espaço amostral flui mais facilmente e em outros, não. Naturalmente essa condição intuitiva não é suficiente para dar conta da análise dos elementos do evento que compõem o espaço amostral. Como visto nas situações descritas neste estudo, apenas uma criança conseguiu elencar todas as possibilidades envolvidas nas situações propostas e em apenas um dos jogos (Travessia do Rio). A compreensão da extensão do espaço amostral é condição importante para a compreensão da probabilidade (Bryant e Nunes, 2012), e é papel da escola encontrar mecanismos para conduzir a instrução acerca do tema.

Defende-se que o uso de jogos pode provocar nos alunos reflexões que conduzam à compreensão de elementos que dão suporte ao pensamento probabilístico, incluindo, o espaço amostral. No entanto, as atividades pautadas nos jogos que têm como objetivo ampliar compreensões probabilísticas exigem do professor, além de planejamento que envolve a escolha dos jogos e as atividades norteadoras, conhecimentos mais aprofundados do assunto. Entretanto, o cenário atual não aparece muito promissor, como indicam estudos anteriores.

Campos e Pietrapaolo (2013) em seu estudo, constataram grande dificuldade na descrição e quantificação do espaço amostral e verificaram que o princípio multiplicativo não fazia parte do corpo de conhecimento dos docentes. Assim, esses professores não teriam os conhecimentos necessários para o ensino da probabilidade. Já Bernabeu et al (2015) verificaram um pobre conhecimento inicial de probabilidade por parte dos docentes. A pesquisa de Santana (2011) também reforça o frágil conhecimento dos professores em relação às noções probabilísticas. Segundo o estudo, os docentes apresentam dificuldades na compreensão dos conceitos probabilísticos e nomenclaturas, tais como fenômeno aleatório, espaço amostral, acaso e evento, os quais não foram evidenciados pelos professores na análise de situações probabilísticas.

Como posto anteriormente, as intuições primárias (FISCHBEIN, 1987, in BRYANT E NUNES, 2012) não são suficientes para darem conta da compreensão de todos os elementos que envolvem a probabilidade. Há a necessidade de intervenção, de instrução, para evolução dessas intuições iniciais para compreensões mais elaboradas, adequadas e coerentes. Apenas a maturidade e a passagem do tempo não são suficientes para a evolução das intuições iniciais. O estudo de Campos e Pietrapaolo (2013) ratifica essa questão, quando apresenta a fragilidade de compreensão dos professores sobre a probabilidade e torna ainda mais preocupante o cenário, a partir de suas conclusões que informam que

> A noção de espaço amostral, conceito cuja discussão pode favorecer a compreensão do cálculo de probabilidades, não constava no repertório de conhecimentos do conteúdo específico acumulados pelos professores, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos. Alguns dos docentes sequer tinham domínio do princípio multiplicativo (CAMPOS E PIETRAPAOLO, 2013, p.78).

Diversos estudos citados aqui, incluindo este, apontam a necessidade de intervenção escolar para ampliação da compreensão de exigências que dão suporte ao pensamento probabilístico. É fato que os alunos necessitam de instrução que, naturalmente, vem da escola, do professor. Entretanto, os professores também apresentam fragilidade de compreensão acerca do tema (CAMPOS E PIETRAPAOLO, 2013; VIALI E CURY, 2009; SANTANA, 2011; BERNABEU et al, 2015). Assim, lamentavelmente, o cenário atual tende a não ser modificado num curto período de tempo, exigindo ainda mais pesquisas, reflexões e, talvez, um posicionamento diferente da academia que parece não estar formando este professor com as competências específicas necessárias concernentes à probabilidade e, consequentemente, ao ensino desse conceito.

5.2.3 Evento impossível no jogo Travessia do Rio

João colocou todas as suas fichas no 1. Ele conseguirá ganhar o jogo? Por quê? Foi usada esta pergunta norteadora no jogo Travessia do Rio para verificar o entendimento das crianças sobre evento impossível, apresentado na Tabela 9. Sabe-se que no lançamento de dois dados é impossível obter a soma 1 e objetivava-se observar se as crianças possuíam essa compreensão.

Tabela 9: Síntese das respostas das crianças sobre evento impossível no jogo Travessia do Rio (por ano)

	João colocou todas as suas fichas no 1. Ele conseguirá ganhar o jogo?	
Ano	**Sim**	**Não**
1º	2	10
3º	1	11
5º	0	12

Fonte: Dados da Pesquisa (2015)

Quase 92% das crianças de todas as turmas informaram que João não conseguiria ganhar o jogo, nas condições apresentadas. Boa parte dos alunos que julgou o evento impossível usou justificativas coerentes, especialmente quando confrontadas pela pesquisadora a formar 1 com dois dados. No 1º ano, duas crianças consideraram o evento possível, no 3º ano apenas uma e no 5º ano, nenhuma.

No 1º ano, A1.6 justificou com clareza a impossibilidade de ocorrência do evento, dizendo: "*porque tem dois dados. Se tivesse um dava para acertar no 1*". Percepção semelhante teve B1.3 que afirmou: "*porque não tem 'nada' (se referindo ao 0 no dado) para ficar um. Tem como, se tivesse 0 no dado*".

No entanto, nem todas as crianças do 1º ano evidenciaram essa compreensão. A1.4 disse que João vai ganhar, mas a justificativa que apresentou indica a impossibilidade desse evento acontecer: "*só se der nenhum aqui*" disse apontando para um dos dados. Nem sempre os alunos do 1º ano aparentaram perceber que o evento era impossível, apesar de optarem pela resposta correta: A1.1 disse que *"não porque escolheu menos*"; A1.5 afirmou que "para mais em números além do 1", confundindo evento pouco provável com impossível; B1.1 argumentou que João não vai ganhar "*porque ele só botou no 1*", afirmando que ele pode passar (atravessar o rio), mas não vai ganhar. Algumas crianças mudaram o argumento quando a pesquisadora solicitou que eles formassem 1 com dois dados, como por exemplo B1.2. Veja-se o diálogo:

Pesquisadora: João apostou tudinho no 1. Tu achas que ele vai conseguir ganhar o jogo?

B1.2: Não.

Pesquisadora: Por quê?

B1.2: Por que ele foi no 1.

Pesquisadora: E quem tá no 1 não ganha não? Por quê?

B1.2: Não. No 1 é muito ruim, aí perde.

Pesquisadora: Como é que dá 1 nos dois dadinhos? Mostra aí. (Ele mostra 1 e 1 nos dados). *Aí vai dar quanto?*

B1.2: Dois!

Pesquisadora: Ele vai conseguir passar se ele está no 1?

B1.2: Não. Porque ele foi no 1 e aqui tem 2 (Explica, apontando para os resultados nos dados).

No 3º ano foram encontradas respostas semelhantes ao 1º ano, com justificativas inadequadas. A3.1 justificou a negativa, informando *que "é o número mais poucos dos números*", enquanto A3.3 disse que "*ele tá com pouco, com bem pouquinho*", dando a entender que ganha quem tiver mais e B3.1 comentou*: "não tem chance de ganhar porque colocou tudo num canto só. Imagine se não sair esse (1) ele vai perder. Tem que ter muita sorte. Ele era pra botar nesses números também (aponta os outros números do jogo)".* Apesar de B3.1 responder corretamente que João não vai ganhar o jogo, a justificativa apresentada por ele não se apoiou na impossibilidade de ocorrência do evento, mas, sim na pouca probabilidade do mesmo ocorrer, confundindo evento impossível com pouco provável, como apontado por Bryant e Nunes (2012), em pesquisas de Shtulman e Carey (2007) e Shtulman (2009), nas quais, apesar das crianças não apresentarem dificuldades em distinguir eventos impossíveis, há contextos em que confundem eventos altamente improváveis com eventos impossíveis. Nos estudos de Batista e Ferreira (2015), os adultos, alunos da EJA, também apresentaram tais dificuldades ao confundirem eventos com pouquíssima probabilidade de ocorrência com eventos impossíveis de ocorrer.

Em contrapartida, outros alunos justificaram corretamente, logo na primeira pergunta, como B3.4 que informou: "*porque são dois dados e ele jogou as fichas só no 1. Nos dois dados só dá 2, 6 e 10. Não dá 1 não*!" e B3.2 que foi categórico: "*porque é dois dados. Se cair 1 e 1 dá 2*".

O aluno A3.4 mudou o argumento, assim como B3.2. Veja-se o diálogo:

Pesquisadora: Vê bem, João apostou todas as fichinhas dele no 1. Tu achas que ele tem como ganhar?

B3.2: Não, porque o 1 não dá sorte não.

Pesquisadora: Tem como nos dois dados dar 1?

B3.2: Tem branco nesse? (Questiona se um dos dados tem um lado em branco).

Pesquisadora: Não tem. Não tem branco em dado. Nesse também não tem.

B3.2: Então ele não vai ganhar não, porque tem dois dados.

O diálogo com B3.2 mostra a importância na situação de jogo, não apenas do manuseio do material, como também da intervenção realizada pela pesquisadora para a mudança na argumentação apresentada inicialmente pelo aluno. Por isso, concorda-se com Grando (2000) que afirma que o jogo permite o levantamento de hipóteses, testagens de conjecturas, reflexão e análise, assim como possibilita ao aluno repensar situações, encontrar e reestruturar novas relações, desde que seja assistido e orientado adequadamente. O jogo não é apenas uma atividade lúdica, é uma proposta didático-pedagógica que requer planejamento, acompanhamento e avaliação.

A3.6 também mudou o argumento após a confrontação proposta pela pesquisadora, afirmando no final: "*se cair dois dados vai dar 2. Só com um dado ele pode ganhar o jogo*".

No 5º ano, 11 dos 12 alunos perceberam logo na primeira pergunta que o evento era impossível, justificando, quase sempre, que não era possível obter 1 no lançamento de dois dados. Para ilustrar, tem-se o comentário da criança B5.2 que assim que ouve a pergunta comenta: "*Ihhhh, lascou! Não tem como ganhar não, porque são dois dados. Aí se cair dois dados com 1 e 1 não vai dar* (para atravessar o rio)".

Apenas um aluno do 5º ano necessitou da intervenção da pesquisadora para refletir sobre a impossibilidade de ocorrência do evento.

Pode-se dizer que a situação específica envolvendo análise de evento impossível no jogo Travessia do Rio mostrou um desempenho melhor, tanto quantitativamente quanto qualitativamente, para os alunos do 5º ano. Muitos alunos do 1º ano, apesar de responderem corretamente à questão, não apresentaram justificativas consistentes e nem sempre conseguiam reelaborar sua linha de pensamento quando eram confrontados pela pesquisadora. Neste aspecto, o 3º ano teve melhor performance, pois quando confrontados, mudavam de resposta e apresentavam justificativas mais coerentes.

As crianças têm relativa facilidade para eliminar eventos impossíveis a partir da análise dos elementos que fazem parte de um determinado espaço amostral, havendo grande quantidade de evidências em diversos estudos que, crianças ainda muito jovens são boas em discriminar eventos impossíveis de eventos comuns, como no caso da pesquisa de Carvalho (2005) em que já no pré-teste os alunos foram capazes de prever eventos certos e eventos impossíveis. Entretanto, nem sempre é fácil para as crianças diferenciarem evento possível, mas altamente improvável, de evento completamente impossível (Bryant e Nunes, 2012).

5.2.4 Evento impossível no jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

Para explorar a ideia de *evento impossível*, foi utilizado no jogo PAR a seguinte pergunta norteadora*: É possível Rute chegar a Rui sem sair cara? Por quê?* Para visitar Rui é necessário sair quatro caras no lançamento das moedas. Logo, é impossível chegar em Rui se não sair cara.

A Tabela 10 a seguir indica os resultados das respostas apresentadas pelas crianças sobre o questionamento acerca do evento impossível no jogo Travessia do Rio.

Tabela 10: Síntese das respostas das crianças sobre evento impossível no jogo Travessia do Rio (por ano)

	É possível Rute chegar a Rui sem sair cara?	
Ano	**Sim**	**Não**
1º	2	10
3º	1	12
5º	0	12

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

De uma forma geral, os alunos de todos os anos não tiveram dificuldade em responder corretamente à questão. Apenas duas crianças do 1º ano e uma do 3º informaram inicialmente que seria possível chegar a Rui sem sair cara, mas após rápida intervenção da pesquisadora, eles alteraram a resposta e justificaram adequadamente.

Para exemplificar, cita-se alguns argumentos apresentados pelos alunos. No 1º ano, A1.3 disse que *"porque se não cair cara, cai coroa, aí ela chega em Tati"*; já no 3º ano, A3.1 justificou "*porque cara é pra andar pra direita e coroa é pra andar pra cima e se ela andar pra cima não vai dar pra visitar Rui"* e no 5º ano, B5.4 informou que "*tem que sair só cara pra chegar em Rui: quatro caras*".

Como citado anteriormente, para chegar em Rui teria que sair apenas *caras* na moeda. Tal fato pode ter facilitado as conclusões das crianças, pois bastava sair uma coroa para não ser possível atingir o objetivo. A resposta parece evidente para a pergunta norteadora que indagava se era possível chegar em Rui sem sair cara. Talvez, se tivesse sido feita pergunta semelhante, mas que exigisse um pouco mais de reflexão, como por exemplo, para chegar em Gabriel (três coroas e uma cara) ou Ana (duas caras e duas coroas), a resposta não fosse tão evidente e os resultados poderiam ser diferentes, pois haveria necessidade de uma análise mais apurada da situação.

Em sua pesquisa, Nóbrega e Spinillo (2015) constataram que mesmo crianças de 5 anos já são capazes de pensar sobre noções de possível, impossível e certeza, apesar de crianças maiores apresentarem melhor desempenho. Tal resultado se assemelha, em parte, ao que foi vislumbrado na presente pesquisa no que diz respeito a evento impossível. Constatou-se também que os alunos do 3º e 5º anos tiveram respostas mais coerentes, necessitando de pouca ou nenhuma intervenção da pesquisadora para justificar adequadamente suas escolhas, enquanto os alunos do 1º ano, quase sempre necessitaram do confronto da pesquisadora para refletir sobre suas respostas.

De uma forma geral, observou-se que nos contextos de jogos apresentados na presente pesquisa, as crianças identificaram eventos impossíveis e quase sempre apresentaram argumentos consistentes para as suas respostas, embora algumas necessitassem da intervenção da pesquisadora para observar a situação sobre uma nova perspectiva e, assim, ter a oportunidade de mudar a resposta ou utilizar outra argumentação. Constatou-se que, muitas vezes, as crianças, especialmente as mais novas, precisam ser estimuladas a perceberem elementos inicialmente imperceptíveis, como por exemplo quando elas foram desafiadas a formar 1 com dois dados e se deram conta de que não seria possível, algumas sugeriram que deveria ter zero no dado ou se poderia pintar de branco o ponto preto de um dos dados. Como essas soluções não eram possíveis, elas tiveram que mudar a resposta e justificaram adequadamente a impossibilidade de ocorrência do evento.

5.2.5 Evento pouco provável no jogo Travessia do Rio

Para avaliar a compreensão das crianças acerca de evento pouco provável, foi utilizado, no jogo Travessia do Rio, a seguinte pergunta: *Pedro apostou todas as fichas no 3. Ele tem muita, pouca ou nenhuma chance de ganhar o jogo? Por quê?* Há apenas duas possibilidades de formação 3 no lançamento de dois dados: 2 + 1 e 1 + 2. Assim, esse evento é pouco provável em comparação com o 7 que tem seis possibilidades, por exemplo. Imagina-se que as crianças talvez pudessem refletir sobre os elementos desses eventos distintos para justificar as suas respostas.

De acordo com a Tabela 11 a maioria dos alunos informaram, de fato, que o evento era pouco provável, com resultados semelhantes e quantitativos melhores para o 3º e 5º anos.

Tabela 11: Síntese da quantidade de respostas dos alunos em relação a um evento pouco provável (por ano).

	Pedro apostou todas as fichas no 3. Ele tem muita, pouca ou nenhuma chance de ganhar o jogo?		
Ano	**Muita chance**	**Pouca chance**	**Nenhuma chance**
1º	3	6	3
3º	0	9	3
5º	3	8	1

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Os alunos do 1º ano que informaram equivocadamente que teria *muita chance* justificaram que "*está mais perto*" (A1.3), "*se ele bater 2 e 1 fica 3*" (A1.4) e "*porque 3 tá no terceiro lugar*" (B1.2). Embora errasse a resposta, observou-se que a criança A1.4 relacionou o evento com as possibilidades do dado, enquanto os demais fizeram outro tipo de associação. Já as crianças que informaram que não haveria *nenhuma chance*, disseram "*porque tá jogando com outra pessoa*" (A1.2) e "*porque ele tem dois dados"* (B1.5).

Para justificar a resposta correta relativa a *pouca chance,* exemplifica-se com o aluno A1.5 que disse "*porque não para muito no 3*", B1.4 que afirma "*só tem três chances e quando vai passar por 2 ou 1, ele num instante perde*" e B1.3 "*tem pouquinha porque eu joguei muito, muito e não deu nenhum (3*)". Tanto A1.5 como B1.3 consideraram a experiência recente no jogo para fundamentar suas justificativas. As respostas destes alunos dão margem para uma intervenção, seja por meio de perguntas reflexivas, seja por um tempo maior no jogo para que as conclusões se aproximem coerentemente da resposta correta.

No 3º ano, 75% dos alunos informaram que haveria *pouca chance* para ocorrência do evento. Das explicações apresentadas pontua-se a de A3.1 que foi enfático: "*pouquíssima chance, porque é muito difícil sair todas no 3*", ou seja, o aluno julgou que pode sair o 3, mas que para sair 12 vezes (a quantidade de fichas do jogo) o 3 vai ser muito difícil. Entende-se que a análise do aluno vai além do proposto que seria verificar apenas as chances de ocorrência do 3 no lançamento de dois dados e A3.1 relacionou com as chances mínimas de sair “todas as 12 vezes” o número 3. O aluno B3.2 disse *“se cair em 2 e 1 aí ele tem chance*” e B3.1 defendeu que tem pouca chance, assim: “*vai perder. Se ele botasse nesses aqui (aponta para os números maiores que 3) ele ganhava*”.

Observou-se que algumas justificativas dos alunos do 3º ano como *“porque tá com muito pouco*” (A3.3), “*porque o número é baixo*” (A3.4), “*porque 3 é muito menos”* (A3.6), se assemelhavam às das crianças do 1º ano: “*porque o 3 é pouquinho*” (B1.1), “*porque ele escolheu 3 e é pouco*” (A1.1).

Curiosamente, houve 3 alunos do 5º ano, mesmo número do 1º ano, que julgaram que haveria *muita chance*, apresentando as seguintes justificativas: *“se bater um aqui e dois aqui fica 3”* (A5.3), “*porque sempre para no 3*” (B5.3); “*quando joga pode bater no 3*” (B5.5). Observa-se que B5.5 confundiu evento possível com evento provável, por isso julgou que o evento (soma 3 no lançamento de dois dados) tem muita chance de sair, apenas porque é possível sair. A única criança que afirmou que João não teria *nenhuma chance,* alegou que “se fosse só um dado ela poderia ganhar” (B5.2), julgando que não seria possível sair 3 no lançamento de dois dados, confundindo evento pouco provável com evento impossível.

Os quase 67% que informaram que Pedro teria *pouca chance*, usaram argumentos coerentes como “*fica difícil cair 2 em um (dado) e 1 no outro*” (A5.1), “*porque o 3 cai poucas vezes*” (A5.2), “*porque ninguém sabe o que vai cair, pode sair um nove (4 + 5); as chances são mínimas*” (A5.6), “*pra sair o número 3, tem que ter o número 2 e juntar com o número 1. É difícil*” (A5.5), “*eu não acho que vai cair 1 e 2. Vai cair pouco*” (B5.1), “*porque o dado cai muitos números e não tem muita chance de cair 2 e 1”* (B5.4).

Observou-se que a maioria dos alunos de todos os anos de escolaridade pesquisados (aproximadamente 64%) opinaram que o evento era pouco provável. Os argumentos apresentados pelos alunos mais velhos, especialmente do 5º ano, quase sempre comprovaram esta compreensão. No entanto, as crianças do 1º e também do 3º ano nem sempre apresentaram justificativas coerentes, embora tenham respondido corretamente à pergunta feita. Alguns deles justificaram a resposta usando as expressões que remetem ao tamanho ou posição do número: tem mais, é menor, é pouco, é mais perto. Poucos alunos do 1º ano demonstraram compreensão da situação, resgatando as possibilidades de cada evento e comparando-as com outros eventos. Mesmo assim, alguns apresentaram argumentos mais coerentes que os demais, estabelecendo comparação implícita com os demais eventos “porque não para muito no 3” (A1.5) ou relacionando com o evento de formação 3 no lançamento de dois dados “se ele bater 2 e 1 fica 3 “ (A1.4).

A questão envolvendo *evento pouco provável* trouxe não apenas reflexões sobre o espaço amostral, bem como sobre a *comparação de probabilidades*, terceira exigência cognitiva estabelecida por Bryant e Nunes (2012) que será discutida posteriormente com maior profundidade a partir de outras perguntas norteadoras. Imaginava-se que as justificativas dos alunos se assentariam especialmente na reflexão sobre as possibilidades de formação dos eventos, a partir da comparação dos elementos de um evento com os demais, mesmo que implicitamente. Observou-se raramente este fato, apenas algumas comparações de probabilidades implícitas em algumas falas, como por exemplo: “porque o 3 sai poucas vezes” (A5.2), “porque não para muito no 3” (A1.5), porque ninguém sabe o que vai cair, pode sair um nove (4 e 5)” (A5.6).

5.2.6 Evento pouco provável no jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

Perguntou-se às crianças: *Considerando os lançamentos das moedas, há muita, pouca ou nenhuma chance de Rute chegar a Tati? Por quê?* com a intenção de fazê-las refletir sobre um evento pouco provável. Para chegar a Tati seriam necessários sair quatro coroas e a probabilidade de acontecer era de 1 em 16, logo era um evento pouco provável em comparação às possibilidades de visita aos amigos Pablo, Ana e Gabriel. Assim, como na análise anterior referente ao jogo Travessia do Rio, imaginava-se que as crianças poderiam usar os elementos do evento do espaço amostral para estabelecer uma comparação entre os eventos, na justificativa de suas respostas.

A Tabela 12 apresentada a seguir mostra os resultados das respostas das crianças sobre a pergunta norteadora que trata de evento pouco provável no jogo PAR.

Tabela 12: Síntese das respostas das crianças sobre evento pouco provável no jogo PAR

	Considerando os lançamentos das moedas, há muita, pouca ou nenhuma chance de Rute chegar a Tati?			
Ano	**Muita chance**	**Pouca chance**	**Nenhuma chance**	**Não respondeu**
1º	7	4	1	0
3º	6	5	0	1
5º	3	7	0	2

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Mais da metade das crianças do 1º ano julgaram o evento muito provável, ou seja, consideraram que haveria muita chance de Rute visitar a amiga Tati. Utilizaram como alguns argumentos a relação com o lado da moeda: *"se ela jogar a moeda muitas vezes e sair coroa, ela chega em Tati*" (A1.2), "*porque coroa é bom*" (B1.2 (A1.2) ou argumentos que se relacionam com o percurso: "*porque é só ir assim (faz o percurso com o dedo)"* (A1.3), "*porque é bem perto*" (B1.1), "*porque tá um pouco perto"* (B1.6).

Os alunos que disseram que teria *pouca chance* para visitar Tati, justificaram que "*pra subir é uma subida e a subida é muito longe*" (A1.6), associando a ida no sentido Norte do desenho como ladeira ou subida. A criança B1.3 usou a recente experiência no jogo para justificar informando que "*eu só cheguei uma vez (em Tati)".*

A relação perto-longe, muito-pouco, mais-menos, maior-menor esteve muito presente nas justificativas apresentadas pelas crianças do 1º ano para a maioria dos questionamentos feitos a elas. Muitas vezes elas dissociaram a ligação estreita entre as faces dos dados ou os lados da moeda com a pergunta que estava sendo posta e respondiam considerando unicamente o número envolvido, especialmente seu valor absoluto no caso do jogo Travessia do Rio ou o desenho do percurso no caso do PAR. Em geral, as crianças são mais bem sucedidas quando é possível resolver problemas com base em uma relação "mais-menos" do que quando necessitam utilizar algum raciocínio proporcional, afirmam Bryant e Nunes (2012), citando Spinillo e Bryant (1991, 1999). Assim, a análise da quantidade de vezes que poderia acontecer o evento, em comparação aos demais eventos, foi pouco evidenciado pelos alunos do 1º ano.

As crianças do 3º ano que julgaram que haveria *pouca chance* de chegar em Tati, apresentaram como justificativas argumentos quase sempre adequados, centrados nas possibilidades de sair as faces da moeda: *"ela pode ir pro outro lado se cair cara"* (A3.4), "*porque tem que ser só coroa* (4 vezes)" (A3.6), "*cai mais cara e pra chegar em Tati tem que cair mais coroa*" (B3.2), "*tem vez que vai pra cara e tem vez que vai pra coroa"* (B3.3), "*tem poucas vezes que vai sair coroa; se for cara não vai, não pode. Só coroa*" (B3.4).

Dos alunos que afirmaram haver *muita chance,* A3.2 *alegou "porque se só der coroa ela vai subir*", A3.3 disse: "*porque é rápido, é só subir e chega*" e B3.1 pontua: "*porque se sair só muita coroa, aí ela vai chegar aqui e pronto*".

Semelhante aos alunos do 3º ano, os do 5º também argumentaram utilizando as possibilidades, ou não, de sair coroa na moeda. Para ilustrar, A5.1 disse que "*o caminho é para cima e tem que tirar sempre coroa*", A5.6 disse "*porque tem que só cair coroa*" e B5.6 comentou: *"não é fácil dar só coroa, pode dar cara, pode dar coroa*".

Alguns alunos do 5º ano que informaram que haveria *muita chance*, julgaram que "*a moeda sai muitas vezes para cima (coroa*)" disse A5.2, considerando sua experiência recente ou "*se der quatro coroas, chega nela*", informou B5.4, relacionando, equivocadamente, que se o evento é possível de acontecer, também é muito provável que aconteça.

Uma vez mais o 5º ano apresentou resultados melhores e argumentos mais coerentes para justificar suas escolhas. Embora o 3º ano tenha tido um desempenho próximo do 1º ano, as justificativas apresentadas pelas crianças apontam maior maturidade e compreensão mais apurada acerca da distinção entre muita, pouca e nenhuma chance, considerando as possibilidades de ocorrência do evento com análise do espaço amostral.

Percebeu-se que, de uma forma geral, os alunos obtiveram melhores resultados no jogo Travessia do Rio com aproximadamente 64% de acerto, enquanto no PAR obtiveram cerca de 44%. Em contrapartida, nos discursos dos alunos, a reflexão sobre os elementos de eventos que fazem parte do espaço amostral foi mais evidenciada no PAR que no Travessia do Rio. Entende-se que, apesar do pareamento das atividades, um jogo pode ser mais complexo que o outro para as crianças. Apesar das justificativas nem sempre traduzirem a compreensão adequada do que estava sendo proposto, uma vez mais, constatou-se que há contextos em que as percepções iniciais acerca de alguma exigência concernente ao raciocínio probabilístico são mais precisas e coerentes e, outras não.

5.3 Comparações de probabilidade

Para analisar a compreensão das crianças acerca da comparação de probabilidades, trabalhou-se com duas perguntas norteadoras que focavam *chances iguais* de ocorrência de um evento e *chances diferentes.* A partir de cada um dos jogos explorados, as crianças foram indagadas com o intuito de que comparassem dois eventos e escolhessem qual teria maior, igual ou menor probabilidade de acontecer. Para as situações apresentadas, não seria necessário que as crianças calculassem a probabilidade (clássica) de cada evento e as comparassem. Por exemplo, no Jogo Travessia do Rio ao perguntar quem teria mais chance de ganhar, quem apostasse no 6 ou quem apostasse no 11, as crianças poderiam analisar os elementos que compõem cada evento: para dar 6 no lançamento de dois dados, tem-se 1 + 5, 5 + 1, 4 + 2, 2 + 4 e 3 + 3, ou seja, se teria cinco possibilidades e para dar 11, apenas duas possibilidades: 5 + 6 e 6 + 5. Imaginava-se, então, que as crianças poderiam utilizar como base para julgar as situações, as possibilidades distintas de cada evento do espaço amostral envolvido nos contextos de jogos em termos de relação mais / menos, pois de acordo Bryant e Nunes (2012) diversos estudos mostram que as crianças são mais bem-sucedidas, (não exatamente em probabilidade) quando podem resolver problemas com base nessa relação (mais/menos).

Nas questões propostas nos dois jogos, bastava que as crianças analisassem os casos favoráveis e não a relação desses com os casos possíveis (relação parte-todo), uma vez que, segundo Spinillo (1995) este tipo de relação proporcional é mais difícil de ser compreendido pelas crianças.

5.3.1 Chance igual no jogo Travessia do Rio

Para estabelecer comparação de probabilidades, perguntou-se às crianças em relação ao jogo Travessia do Rio*: "Pedro apostou todas as fichas no 2 e João todas no 12. Quem tem mais chance de ganhar? Por quê?"*

Nesta situação, as chances de Pedro e de João são iguais, pois só há uma possibilidade de soma 12 (6 + 6) e uma de soma 2 (1 + 1), no lançamento de dois dados. A Tabela 13 aponta as escolhas das crianças: Pedro para quem optou pelo 2 e João para quem escolheu o 12.

Tabela 13: Síntese de respostas das crianças (por ano) acerca da comparação de chance igual no jogo Travessia do Rio

	"Pedro apostou todas as fichas no 2 e João todas no 12. Quem tem mais chance de ganhar?		
Ano	**Pedro**	**João**	**Os dois**
1º	6	5	1
3º	4	8	1
5º	7	4	1

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Apenas uma criança de cada ano julgou que os dois (Pedro e João) teriam a mesma chance. Talvez se a pergunta norteadora considerasse a possibilidade dos dois terem a mesma chance, as crianças fossem conduzidas a também pensar e refletir sobre esta possibilidade. No entanto, apresenta-se a seguir as análises dos resultados foram obtidas com a pergunta tal qual especificada acima.

No 1º ano, B1.3 julgou que seriam *os dois*, ou *nenhum dos dois.* Apesar de dizer que não sabia explicar, afirmou: "*sai mais todos os números*". Parece que ou ela acreditava que saem poucas vezes os resultados 6 + 6 ou 1 + 1 nos dados e mais vezes as outras somas ou considerava que pode sair qualquer um dos números, sem distinção.

Das crianças do 1º ano, 50% optaram por Pedro (ou o número 2), justificando que ele está em 2º lugar ou que é mais difícil sair o 12 ou que o 2 está mais perto de ganhar ou baseando-se na recente experiência que resultou mais no 2. As demais crianças que escolheram João, apontaram como justificativa que o 12 é mais, logo ele iria ganhar.

Observou-se que quase todos os alunos do 1º ano utilizaram como suporte para as justificativas de suas respostas a análise do número 2 ou 12 em relação a seu valor absoluto, ordinário ou de ‘proximidade’ com a vitória ou ainda consideraram a recente experiência no jogo. Eles não compreenderam que a base de análise não seria o número em si, e sim a maior, menor ou igual possibilidade de conseguir 2 ou 12 no lançamento de dois dados. Na verdade, quase todas as crianças de 6 anos dissociaram o que estava sendo questionado com o jogo, especificamente, qual seja, o lançamento dos dois dados.

Mais de 58% dos 12 alunos do 3º ano disseram que João teria mais chance de ganhar, justificando: “*porque são dois dados, jogando 6 e 6 dá 12*”, “*o 12 é bem maior que o 2”*, “*porque ele tem mais*”, “*se cair dois, tem que cair um e um e é difícil; se cair 6 e 6 dá 12 que é mais fácil de ganhar*”, “*porque cada um pode ter sua sorte, não é?”, “se fosse com um dado era Pedro, mas como é com dois, é João*”. Este último argumento apresentado, aponta uma interessante compreensão desta criança do 3º ano ao julgar que no lançamento de um dado é mais fácil sair um número menor (o 2) e no lançamento de dois dados sai com mais facilidade o número maior (o 12), ou seja ela faz uma relação da quantidade de dados com o valor absoluto do número.

Observa-se que algumas justificativas dos alunos do 3º ano fazem referência aos elementos do espaço amostral e, embora eles não tenham refletido adequadamente sobre a formação de cada um dos dois eventos (o 2 e o 12) para estabelecer a comparação de probabilidades, há um indicativo de que possam ampliar essa compreensão. Algumas crianças chegaram a refletir sobre a formação de cada número individualmente: ora o 2, ora o 12, mas não chegaram a comparar os dois espaços amostrais, ou seja, não perceberam que tanto o 2 quanto o 12 teriam as mesmas chances de sair no lançamento de dois dados.

Algumas crianças do 3º ano afirmaram que Pedro teria mais chance, alegando que o 2 cai muitas vezes ou não apresentaram justificativa. Após algumas perguntas e reflexões, A3.5 respondeu que “*todos dois*” têm as mesmas chances de ganhar e mostrou nos dados que se parar em 1 e 1, Pedro passa (atravessa o Rio) e se parar em 6 e 6, João passa. Essa não foi a conclusão inicial de A3.5. Ela foi questionada pela pesquisadora, assim como foram questionadas as outras crianças, como seria a composição do 12 e também do 2 no lançamento de dois dados e, após essa reflexão, a aluna mudou a resposta. Nitidamente, ela aprendeu com o jogo, e, a partir das indagações, seu pensamento foi reorientado e ela optou pela resposta correta.

No 5º ano, a maioria das crianças apontaram que Pedro teria mais chance, apresentando como exemplo de justificativas: "*porque o 2 bate mais rápido*", "*as chances são mínimas, mas vai dar o 2 porque sempre cai o número menor quando jogo*", "*porque para chegar no 12 tem que balançar muito os dados*". *Os que optaram por João informaram que "sai mais 6 nos dados", "tem como dar 12 com 6 e 6 e não tem como dar 2", "porque vai cair mais no 12", "o dado pode cair mais número porque são dois dados; se fosse um dado teria mais chance Pedro", "12 é mais fácil porque é dois 6*". A relação entre o número de dados e o valor absoluto dos números é novamente apontada aqui, semelhante ao argumento apresentado por uma criança do 3º ano, anteriormente citada.

O aluno A5.4 disse que João teria mais chance pois não teria como sair o 2 no lançamento de dois dados. Depois, ao refletir sobre outra pergunta relativa ao jogo, ele se depara com 1 e 1 nos dados, é confrontado pela pesquisadora e muda a resposta. A seguir, um fragmento do diálogo.

Pesquisadora: *E se ele escolher o 1?* (Questiona porque ele havia afirmado que pode cair qualquer número do jogo porque "tudo depende do dado")

A5.4*: Não*

Pesquisadora: *E se ele escolher o 2?*

A5.4: *Pode ter.*

Pesquisadora: *Mas tu disseste ainda agora que o 2 não podia. Lembra?*

A5.4: *Eu não vi o número. Eu 'se' esqueci*.

(...)

Pesquisadora: *Voltando pra pergunta anterior, quem tem mais chance? Ou têm a mesma chance?*

A5.4: *Tem chance igual. Porque pode ser somado pela conta do dado* (se referindo que era possível dar 12 e também 2 ao contar nos dois dados).

No exemplo apontado no diálogo acima, observou-se que o jogo permitiu a confrontação das ideias e percepções iniciais de A5.4 e, assim como a criança do 3º ano (A3.5). A alteração de resposta de A5.4 se deu, especialmente, a partir da percepção de seu ‘erro’ ao afirmar ‘eu se esqueci’, bem como, em função de reflexões propostas pela pesquisadora.

Observou-se que, independente do ano de escolaridade, poucas crianças conseguiram comparar as probabilidades envolvidas na situação, considerando a análise dos espaços amostrais. Quase sempre as conclusões apresentavam um caráter de comparação do número (12 e 2), seja por ordem “*ele está em 2º lugar*”, pelo valor absoluto “*ele tem muito mais*”, ou pela possível facilidade para cair nos dados “*se sair 6 e 6 dá 12, que é mais fácil*”. Algumas crianças refletiram sobre a possibilidade de se formar o 2 ou 12, baseando-se em suas experiências vivenciadas naquele momento do jogo e outras ainda consideravam suas crenças pessoais “*as chances são mínimas, mas vai dar o 2 porque sempre cai o número menor quando jogo*”.

O aluno B3.2 expõe nitidamente as possibilidades envolvidas na situação e até as compara, mas se pauta no que julga mais fácil, possivelmente baseando-se no que vivenciou recentemente no jogo “*se cair dois, tem que cair 1 e 1 e é difícil; se cair 6 e 6 dá 12 que é mais fácil*”. A equiprobabilidade não é percebida pelo aluno, embora ele tenha listado corretamente os elementos dos dois eventos envolvidos na situação e que possuem iguais probabilidades de acontecer.

Acredita-se que o jogo permite que as crianças reflitam sobre as escolhas e hipóteses iniciais e reformulem suas compreensões quando são confrontadas. Algumas crianças conseguiram reorganizar seu pensamento e mudaram as conclusões quando foram questionadas, outras não. Considera-se que para estas crianças seria necessário um tempo maior e mais estímulos, que não foi o caso do estudo em questão, o qual não possuía intenção de, necessariamente, levar as crianças a aprendizagens. Imagina-se que o jogo vivenciado com a interação de outras crianças, o que não foi o caso desta pesquisa, possa desencadear distintas formas de pensar e de repensar noções probabilísticas dos participantes, uma vez que o estabelecimento de relação de jogo com seus pares suscita, quase sempre, discussões, dúvidas e entraves que podem ser geradores de aprendizagens.

Como citado anteriormente, há crianças, mesmo as mais novas, que têm algumas ideias sobre probabilidade, mas que nem sempre são adequadas (FISCHBEIN, 1987 apud BRYANT E NUNES, 2012). No entanto, essas ideias iniciais que são intuitivas, podem proporcionar uma plataforma para a aprendizagem adequada de conceitos. Assim, se faz mister, compreender e conhecer essas ideias mais primitivas para realizar instrução eficaz, no sentido de desenvolver ou ampliar as aprendizagens dessas crianças.

5.3.2 Chance igual no jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

Para analisar os conhecimentos das crianças acerca da comparação de eventos com chance igual, utilizando como apoio o jogo PAR, perguntou-se às crianças: *Há mais caminhos para Rute encontrar Pablo ou Gabriel? Por quê?.*

Para encontrar Gabriel é necessário que Rute tire no lançamento das moedas três caras e uma coroa, em qualquer ordem, como, por exemplo, *cara, coroa, cara, cara* e, para chegar em Pablo, são necessárias três coroas e uma cara, como na sequência: *coroa, coroa, coroa, cara*. Para cada um dos amigos, Rute tem quatro caminhos distintos, ou seja, as chances de visitar Gabriel é a mesma de visitar Pablo. Cada amigo tem 4 chances em 16 (4/16) de ser visitado pela amiga Rute.

Esperava-se que os alunos atentassem para a quantidade de caminhos possíveis (possibilidades) para Rute chegar a Gabriel e a Pablo e, assim, concluíssem que ambos possuem a mesma chance de serem visitados. A Tabela 14 mostra as escolhas feitas pelas crianças, na qual observa-se que a maioria julgou que Gabriel teria mais chance de ser visitado (aproximadamente 56%).

Tabela 14: Síntese de respostas das crianças (por ano) acerca da comparação de chance igual no jogo PAR

	Há mais caminhos para Rute encontrar Pablo ou Gabriel?		
Ano	**Pablo**	**Gabriel**	**Os dois**
1º ano	4	8	0
3º ano	1	6	5
5º ano	3	6	3

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Julga-se que a posição de Gabriel no desenho motivou as escolhas. No desenho, Rute está num patinete voltada para o lado em que Gabriel se encontra e Pablo está ‘acima’ dela. Pode ter parecido natural para as crianças que seria mais fácil chegar em Gabriel do que em Pablo, a partir da análise do desenho. Já foi apontado aqui que as crianças, às vezes, se dissociam do jogo e de suas regras e respondem ao que está sendo indagado, baseando-se em outros parâmetros, outros elementos.

Os alunos do 1º ano responderam à indagação, quase sempre, considerando a análise da distância *“é mais perto”, “é mais longe*”. Consideravam também a recente experiência vivenciada no jogo: *“porque chegou mais vezes nesse quando joguei”*. Houve crianças que traçaram alguns caminhos com o dedo ou com o lápis e, embora tenham justificado erradamente, sinalizaram compreensões que poderiam ser usadas para explorar os espaços amostrais, como no exemplo de B1.3 que informou: *“porque ela chega duas vezes aqui e uma aqui”.*

Metade das crianças do 3º ano afirmaram que Gabriel tinha mais chance de ser visitado que Pablo. Apesar das respostas equivocadas, a qualidade das justificativas apresentadas pelos alunos apontaram para uma noção mais coerente acerca da análise dos espaços amostrais na comparação de probabilidades. Para ilustrar, cita-se o diálogo com A3.5 que mostrou dois modos de chegar em Pablo e três formas de chegar em Gabriel.

Pesquisadora: E em Pablo? (Os caminhos de chegar em Pablo)

A3.5: Tem esse assim e esse assim (mostra dois jeitos)

Pesquisadora: E pra chegar em Gabriel?

A3.5: Tem esse assim, esse assim ou esse assim (mostra três caminhos)

Pesquisadora: Então, tem mais chance de chegar em Pablo ou Gabriel?

A3.5: Em Gabriel! (falou com convicção).

Mesmo errando a resposta, A3.5, por meio da intervenção da pesquisadora, estabeleceu uma comparação entre os caminhos de se chegar a Gabriel e também a Pablo. Acredita-se que com mais tempo de jogo, com registros, indagações e questionamentos, alunos como A3.5 podem avançar na compreensão referente ao tema em discussão.

A criança A3.3 do 3º ano disse: *"É a mesma coisa. Se for coroa vai ser "praqui" e se for cara vai ser pra cá".* Acredita-se que ela tenha considerado apenas o primeiro lançamento da moeda (cara ou coroa) e é provável que tenha relacionado a coroa como um possível caminho que leva a Pablo, enquanto a cara como uma possibilidade de chegar a Gabriel (como ponto de partida do jogo). O aluno B3.1 disse que Gabriel tem mais chance porque sai mais cara no lançamento das moedas e com a cara Rute vem "*mais pra cá*" afirmou, apontando o caminho que leva a Gabriel.

Dos alunos do 3º ano que informaram que tanto Pablo quanto Gabriel teriam a mesma chance, justificaram "*ele parou quatro vezes em Pablo e em Gabriel também*" (A3.1); "*é a mesma coisa, segue o mesmo caminho*" (A3.4); "*é igual, é a moeda que diz"* (B3.3); "*todos os dois são mais perto, é a mesma coisa, são mais rápido para chegar*" (B3.4). Pode-se dizer que o aluno A3.1 apresentou uma justificativa coerente e uma resposta correta, pois ele não apenas comparou os espaços amostrais como também acertou a quantidade de caminhos para se chegar em cada um (quatro caminhos). As crianças A3.4, B3.3 e B3.4 acertam a resposta, mas as justificativas não apontam a compreensão da comparação de probabilidades a partir da análise dos elementos dos eventos do espaço amostral. Elas utilizam outros elementos para sustentar suas escolhas.

Metade dos alunos do 5º ano julgaram que havia mais chance de chegar em Gabriel, utilizando mais fortemente argumentos que se sustentavam na recente experiência do jogo: "*porque sempre sai cara*" (A5.2*), "porque bateu em Gabriel mais vezes quando joguei"* (B5.1), "*porque quando eu joguei aqui deu três vezes em Gabriel e duas em Pablo*" (B5.2), "*sei lá... porque sempre vem pra cá, né? Sempre dá cara*" (B5.4).

O aluno A5.4 respondeu que Gabriel teria mais chance, no entanto, quando vai justificar a resposta fazendo percursos, é confrontado pela pesquisadora e percebeu que as chances são iguais. O diálogo, que segue, aponta a mudança de resposta.

Pesquisadora: Tu achas que tem mais caminhos pra Rute encontrar Pablo ou Gabriel?

A5.4: Gabriel.

Pesquisadora: Por que tu achas que é Gabriel?

A5.4: Porque ela vem aqui, aqui, aqui e aqui. E ela veio aqui, aqui, aqui e aqui (aponta no desenho dois caminhos possíveis).

Pesquisadora: E Pablo?

A5.4: Ela vem aqui, aqui, aqui e aqui (mostra um jeito)

Pesquisadora: Então, tu achas que ela tem mais caminhos de chegar em Pablo ou Gabriel?

A5.4: Gabri... (fica pensativo olhando o jogo e não conclui o que iria dizer).

Pesquisadora: Acha ou é a mesma quantidade de caminhos? Mais pra Pablo, mais pra Gabriel ou é a mesma coisa?

A5.4: É a mesma coisa.

Pesquisadora: Por quê?

A5.4: Porque aqui tem três casinhas e aqui tem três. Aqui é só ele virar pra esquina e aqui também.

No diálogo, verifica-se que A5.4 pensa inicialmente nos caminhos chegando a uma conclusão, depois reavalia e percebe que a 'geografia' do lugar é semelhante, tanto para Rute chegar a Pablo quanto para chegar a Gabriel e, por fim, conclui que é a mesma coisa, as chances são iguais.

O aluno A5.1 respondeu que "*as expectativas são as mesmas porque tem quatro caminhos*". Ele percebeu rapidamente todas as possibilidades de caminhos para chegar, tanto em Pablo quanto em Gabriel, não havendo necessidade de intervenção da pesquisadora. O mesmo ocorreu com A5.6 que justificou: "*é a mesma coisa. Ela vem reto e dá a curva e esse aqui também, ela dá a curva e vem reto"*. A5.6 usa a 'geografia' do lugar considerando o 'formato do percurso' que faz e não a quantidade de caminhos, é como se ele avaliasse a distância analisando e associando as particularidades (uma longa reta e uma curva). Apesar do aluno não estabelecer a comparação dos espaços amostrais considerando os caminhos, ele utilizou outros parâmetros que possibilitaram a resposta correta. Talvez essa análise da 'geografia' seja uma indicação indireta das possibilidades de se chegar aos amigos de Rute. No entanto, não se pode afirmar que ele (A5.6) apresenta compreensões relativas à comparação de probabilidades. Acredita-se que seriam necessárias intervenções mais focadas no tema para perceber, resgatar e ampliar essas possíveis compreensões.

A maioria das crianças realizou a comparação de probabilidades sem considerar a análise das possibilidades de formação do evento que compõem o espaço amostral. Muitas recorreram ora ao tamanho do número (2 ou 12) no jogo Travessia do Rio, ora à suposta distância entre as personagens no jogo PAR, assim algumas justificativas eram incoerentes, apesar da resposta certa. No entanto, observa-se que há alguns indícios que apontam a uma compreensão inicial acerca da comparação de probabilidades a partir da análise desses eventos do espaço amostral. Tais indícios são insuficientes para construir a ampliação do entendimento do assunto, sem intervenção da escola ou com apenas algumas rodadas do jogo.

Observou-se que as crianças tiveram mais facilidade e realizaram reflexões mais próximas da análise dos elementos dos eventos (espaço amostral) na comparação de probabilidades no jogo PAR do que na Travessia do Rio. Acredita-se que a análise de percursos no desenho, com possibilidade de rabiscar ou realizar o caminho com o dedo, foi mais simples e concreto para as crianças. Todas as respostas, ou seja, os caminhos, estavam à vista dos olhos, bastava observar o percurso e traçá-lo. Já na Travessia do Rio, as possibilidades não eram palpáveis, não eram tão óbvias para os alunos e não se apresentavam ao mesmo tempo. Por exemplo, a criança não tinha à sua frente, no mesmo instante, uma informação concreta e observável de que para compor 12 nos dados seria necessário 6 + 6 e para compor 2, precisaria de 1 + 1.

Muitas respostas, em todos os anos de escolaridade, consideraram as recentes experiências vivenciadas. Tal fato leva a crer que se os jogos forem explorados profundamente com tempo, discussões, reflexões e retomadas, as crianças poderão reelaborar sua forma de pensar, construindo um aprendizado probabilístico a partir das experiências em atividades orientadas.

5.3.3 Chance diferente no jogo Travessia do Rio

Para analisar as compreensões das crianças sobre a comparação de probabilidades com chances diferentes, utilizou-se no jogo Travessia do Rio a seguinte pergunta norteadora: *Quem tem mais chance de ganhar o jogo: uma* *pessoa que apostou todas as fichas no 7 ou quem apostou todas no 11? Por quê?*

No lançamento de dois dados há seis modos de formar 7 (1 + 6, 6 + 1, 2 + 5, 5 + 2, 3 + 4 e 4 + 3) e apenas dois modos de formar 11 (5 + 6 e 5 + 6), logo há 6 chances em 36 de sair 7, contra 2 chances em 36 de cair 11. Como citado anteriormente, havia expectativa que as crianças fariam alguma menção ou relação com o número de possibilidades dos eventos do espaço amostral para justificar suas escolhas, estabelecendo a relação mais/menos. A Tabela 15 menciona os resultados apresentados pelas crianças sobre qual número teria mais chance de sair no lançamento de dois dados: o 7 ou o 11.

Tabela 15: Síntese de respostas das crianças (por ano) acerca da comparação de chance diferente no jogo Travessia do Rio

	Quem tem mais chance de ganhar o jogo: uma pessoa que apostou todas as fichas no 7 ou quem apostou todas no 11?		
Ano	**7**	**11**	**Os dois**
1º	8	4	0
3º	4	7	1
5º	7	4	1

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

As crianças do 1º ano optaram corretamente, em sua maioria, pelo 7, no entanto as justificativas se relacionam pouco com a análise dos elementos dos eventos, como por exemplo: “*porque tá mais perto de ganhar*” (A1.2), *“no 7 porque tá mais perto do 6*” (A1.6), “*fica no sétimo lugar*” (B1.2), “*porque se ele escolheu 7 ele tem 7 vidas*” (B1.4). As que optaram pelo 11, informaram que “*escolheu mais, é muito dinheiro”* (A1.1), “*11 é mais do que o 7*” (B1.1).

Apenas dois alunos do 1º ano fizeram menção às possibilidades de formação dos números envolvidos na situação, embora não tenham claramente feito uma comparação de probabilidades. A1.4 disse que o 7 tem mais chance pois “*se bater 5 e 2 fica 7*” e A1.5 afirma que “*para mais no 11 e 6 + 5 dá 11*”.

O aluno B1.6 pode ter relacionado sua resposta com as experiências vivenciadas no jogo e, de alguma forma, refletido sobre o espaço amostral, quando afirmou que *“é difícil colocar no 11 e fácil colocar no 7”*.

No 3º ano, mais de 58% dos alunos informou equivocadamente que o 11 teria mais chance de sair, usando como argumento principal o valor absoluto do 11: *“porque é o maior número, é quase o maior de todos, tirando o 12*” (A3.1), “*porque tem mais e esse aqui (o 7) tem menos*” (A3.3), “*é mais número*” (A3.4), “*porque o 11 é muito mais e o 7 é muito menos*” (A3.6), “*o 11 é o mais crescente que tem aqui”* (B3.1).

Dos alunos que optaram pelo 7, B3.2 deixou muito clara a comparação utilizando os componentes dos eventos. Inicialmente ele disse que o 7 “*é um número menor e o 11 foi difícil de eu acertar*” e completou, dizendo que para dar 11 sai 5 e 6 e para dar 7 sai 5 e 2, 6 e 1 e 4 e 3, e reafirma que o 7 “*é fácil de acertar*”. Já B3.3 disse que o 7 tem mais chance de sair, mas que não sabe ainda o porquê, uma vez que “*não para muito no 11, é muito difícil parar*”.

As justificativas de B3.3 se assemelham com as do supracitado B1.6 do 1º ano, que apontam a dificuldade de sair o 11, em contrapartida com uma maior facilidade de cair o 7. Acredita-se que, com a continuidade do jogo e intervenções reflexivas, se pudesse clarear a compreensão desses alunos, que, possivelmente, pautaram suas respostas a partir da vivência recente no jogo.

Uma criança (B3.4) informou que nenhum teria chance de ganhar (quem apostou no 7 ou quem apostou no 11) porque eles apostaram todas as fichas no mesmo número. Tal comentário faz acreditar que B3.4 julgue a impossibilidade de sair doze vezes (número de fichas do jogo) o 11 ou doze vezes o 7. Tal reflexão aponta para outro elemento da probabilidade que envolve o espaço amostral: evento impossível. Aparentemente, ela não julga o evento (resultado 7 ou resultado 11) como impossível e sim, a quantidade de vezes que esses eventos teriam que ocorrer (12 vezes). Nóbrega e Spinillo (2015) apontaram em seus estudos que crianças com cinco anos já são capazes de pensar sobre o possível de um modo geral. No entanto, conforme estudos de Shtulman e Carey (2007) e Shtulman (2009) apontados por Bryant e Nunes (2012), há uma linha tênue na compreensão entre eventos possíveis, mas improváveis e eventos impossíveis.

Segundo estes estudiosos, apesar das crianças facilmente eliminarem eventos impossíveis, nem sempre é fácil para elas discriminarem e compararem eventos possíveis, mas altamente improváveis, de eventos completamente impossíveis.

Alguns alunos do 5º ano se apoiaram na vivência recente do jogo para justificar a escolha 7: “*porque caía sempre 7 quando eu jogava*” (B5.1), “*o 7 cai mais, quando eu tava jogando aqui só tava caindo o 7*” (A5.1). Outros fizeram algumas relações com, ao menos, uma das possibilidades de formação do 7 no lançamento de dois dados, como por exemplo o aluno A5.2: “*o 7, porque sai muitas vezes, o dado gira e sai muitas vezes, tipo sai um 3 e um 4*”. Parece que a continuidade do jogo poderia ampliar a compreensão das crianças acerca do porquê sai mais o 7 e menos o 11.

A criança B5.4 informou que o 7 tem mais chance, justificando com segurança e estabelecendo a comparação, quando disse: *“(...) foi uma resenha pra cair o 11 aqui. O 7 é mais fácil de cair o número em dois dados, porque pode cair 4, 3. Aí o 11 não tem muita chance porque não cai muito os números. O 7 pode cair 5 e 2, 6 e 1*”. Apesar de não elencar a formação do 11 em sua fala, B5.4 analisa adequadamente o porquê do 11 ter menos chance.

O aluno A5.4 julgou que os dois (7 e 11) têm a mesma chance de ganhar, usando como argumento, que é traduzido aqui, como uma compreensão de que ambos os eventos são possíveis de acontecer e são aleatórios, quando disse: “*ele poderia colocar o 7 que pode ser somado pelos dados e até o 11. Tudo depende do dado, da posição que vai cair*”.

Observa-se que apesar de, numericamente, o 1º ano ter tido respostas certas superiores aos do 3º e do 5º anos, as análises qualitativas das justificativas apontam para uma maior fragilidade na compreensão da comparação de probabilidades que nos demais anos. De fato, as noções apresentadas pelos alunos mais velhos (do 3º e 5º anos) são mais coerentes e apresentam uma base mais consistentes para possíveis intervenções.

Os alunos do 5º ano apresentaram um número de justificativas mais adequadas para argumentar as escolhas e trouxeram outros elementos probabilísticos para reflexão, como a aleatoriedade. O 3º ano trouxe, também, a relação entre evento possível, mas pouco provável, e evento impossível.

5.3.4 Chance diferente no jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR)

No jogo PAR perguntou-se às crianças: *todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados? Por quê?* com a intenção de verificar a compreensão das mesmas sobre eventos com chances diferentes de acontecer.

Para Rute visitar qualquer um dos amigos ela lança uma moeda quatro vezes e a sequência de cara e coroa é quem determina qual amigo será visitado. Há 16 possibilidades de lançamento de uma moeda quatro vezes. Para chegar em Tati é necessário que saia na moeda uma sequência de quatro coroas, enquanto para visitar Rui é necessário que saia quatro caras. Em ambos os casos há 1 possibilidade em 16. Já para visitar Gabriel é preciso 3 caras e 1 coroa em qualquer sequência, como *cara, cara, cara, coroa; cara, cara, coroa, cara; cara, coroa, cara, cara* ou ainda *coroa, cara, cara, cara.* Semelhante a Pablo, há 4 possibilidades em 16 de se chegar a Gabriel. O amigo que tem mais chance de ser visitado é Ana sendo necessário que saia uma sequência, em qualquer ordem, de duas caras e duas coroas. Assim, Ana tem 6 chances em 16 de ser visitada.

Havia a suposição que as crianças pensariam sobre a quantidade de possibilidades, de caminhos para Rute chegar em cada um dos amigos, e não exatamente sobre as possibilidades em termos de organização sequencial de caras e coroas. Considerou-se, ainda, que a pergunta não remetia exatamente ao amigo que tem mais chance de ser visitado e, sim, à comparação de pelo menos dois amigos que tenham chances distintas. A Tabela 16, apresentada a seguir, mostra o julgamento das crianças acerca do questionamento sobre chances diferentes.

Tabela 16: Síntese de respostas das crianças (por ano) acerca da comparação de chance diferente no jogo PAR.

	Todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados?	
Ano	**SIM**	**NÃO**
1º	4	8
3º	6	6
5º	7	5

Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Nenhuma criança do 1º ano fez referência aos lados da moeda. A maioria dos alunos que informaram que as chances eram diferentes, justificou a diferença de chance em termos de distância ou do formato do percurso: *" Rui tem mais chance porque tem que ir direto"* (A1.3*), "esse tem mais chance porque é mais perto (Pablo e Gabriel) e é muito longe e ruim pra chegar nessa (Ana)"* (A1.6), "*alguns têm mais chance: Gabriel e Ana porque é mais pertinho. E esse daqui também (Rui) porque é mais pertinho, é só seguir direto"* (B1.1), "*alguns têm mais chance: Tati, porque num instante ela chega aqui"* (B1.4), "*tem mais chance do que o outro: Gabriel e Ana porque é mais perto"* (B1.6).

Os que julgaram que as chances eram iguais, não apresentaram argumentos muito consistentes. Duas crianças não souberam informar uma justificativa, enquanto A1.2 disse que teriam a mesma chance "*porque são amigos*" e A1.4 traçou no desenho um caminho para Rute chegar em cada um deles. Acredita-se que crianças como A1.4 pensam mais em termos de *possível* do que *provável,* ou seja, consideram que existe um caminho para chegar em cada um dos amigos de Rute, julgam que é possível visitar cada um deles, mas não avaliam se há mais chances de chegar em um ou outro, considerando e comparando a quantidade de caminhos (espaços amostrais).

No 3º ano, A3.1 também relacionou a justificativa com as possíveis dificuldades do percurso, informando que "*Rui e Tati têm mais chance de ser visitados porque Rui é mais perto e Tati é mais perto. Mesmo o caminho tendo a mesma quantidade, o caminho é mais complicado* (para chegar nos demais)". Semelhantemente ao 1º ano, outros alunos do 3º também relacionam com a facilidade de chegada ou com a proximidade: A3.5 disse que "*Tati tem mais chance porque chega mais rápido"*, A3.6 informou que *"tem um que tem mais chance que vai subindo direto (Tati)"* e B3.6 disse que "*Rui porque tá mais perto*".

As crianças que disseram que as chances eram as mesmas apresentaram as seguintes justificativas: "*tudo vai ser igual*", disse A3.2, indicando um percurso (com o dedo) para cada um dos amigos, o mesmo ocorreu com B3.1. Eles associaram a possibilidade de ocorrência do evento acontecer com chance igual. Já A3.4 apresentou a mesma justificativa que A3.2 e B3.1, mas informou verbalmente os percursos: *"Tati vai pra cima, Pablo vai pra cima e pro lado, Rui vai pro lado, Gabriel vai pro lado e pra cima*."

O aluno B3.4 foi o único do 3º ano que fez referência aos lados da moeda para justificar sua resposta: *“Todos têm a mesma chance (...). Tô pensando, por causa que pode tirar cara ou coroa”.* Embora B3.4 não tenha explicitado claramente os caminhos, relacionando-os às faces da moeda, ele fez menção a tal fato que poderia servir de trampolim para discussões e reflexões mais aprofundadas, pois como aponta Spinillo (1995)

> situações diferentes podem gerar quadros distintos quanto às habilidades cognitivas das crianças. Há situações que podem favorecer o surgimento de noções iniciais que não emergem em outras situações. (SPINILLO, 1995, p. 66)

A maioria dos alunos do 5º ano acreditaram que todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados. Mesmo apresentando uma resposta equivocada, algumas justificativas consideraram não apenas a quantidade de percursos e, sim, a relação com o lançamento das moedas e as sequências apresentadas. A5.1 defendeu que “*todos têm, porque todos têm quatro caminhos*”, associando os caminhos aos quatro quarteirões que são necessários percorrer para chegar em cada um dos amigos, ou seja, à moeda que será lançada quatro vezes. A5.5 disse “*cada um tá no mesmo bairro, cada um tem igual alinhamento*”, B5.4 julgou que “*a seta pode ir pra cima (coroa) ou pros lados (cara)”.*

Dos alunos que disseram que as chances eram diferentes, temos como exemplo de argumento: “*aí é diferente, o joguinho funciona com uma moeda girando para ver onde sai. Aí tem vez que não sai alguns coleguinhas dela. Só apenas poucos colegas ela pode visitar: Pablo, Ana e Gabriel são os mais visitados*” (A5.4), “*chances diferentes: esse aqui vem reto, esse aqui já tem traço, esse aqui mais longo: cada um vai dificultando, fácil, difícil”* (B5.6).

Percebeu-se uma gradação na qualidade das justificativas apresentadas pelas crianças. Os alunos do 1º ano não conseguiram relacionar os percursos ao lançamento das moedas, nem comparavam as quantidades de percurso distintos, apenas consideravam, especialmente, o que era mais longe ou perto. No 3º ano, apesar dos alunos também usarem a relação perto-longe, houve um discreto avanço nos argumentos, apresentando inclusão dos lados da moeda e comparação de percursos, na justificativa. No 5º ano, percebe-se mais nitidamente a argumentação, envolvendo a relação com os lados da moeda e também com a comparação dos distintos percursos, apesar da maioria julgar, equivocadamente, que as chances eram iguais.

De um modo geral, constatou-se que, poucas crianças refletiram conscientemente sobre os elementos dos eventos que fazem parte do espaço amostral para estabelecer a comparação de probabilidades. As percepções são intuitivas e fundamentadas, especialmente, na recente experiência do jogo. Imagina-se que os jogos como intervenção pedagógica podem contribuir para uma maior compreensão acerca de muito elementos que envolvem a probabilidade, incluindo a comparação de probabilidades.

Percebeu-se que, com o pouco tempo de acesso ao jogo, as crianças apresentaram discursos que permitem acreditar que as intuições que elas trazem sobre probabilidade, aliadas ao desenvolvimento do jogo, intervenção e reflexão podem ampliar o entendimento primário para compreensões mais elaboradas de alguns elementos probabilísticos. Batanero (2005) relaciona o significado intuitivo da probabilidade com os jogos de azar, comentando que as primeiras ideias intuitivas dos jogos de azar são comuns em todas as civilizações primitivas e que surgem tanto em crianças como em pessoas que nunca estudaram probabilidade, usando frases e expressões coloquiais para expressar os sucessos incertos e expressar seus graus de crenças, como foi largamente observado no presente estudo.

Apesar dos jogos apresentarem comparações distintas: no Travessia do Rio exigia-se a comparação entre dois resultados da soma de dois dados (7 e 11) e no PAR a comparação dos possíveis percursos para chegar à casa dos cinco amigos de Rute, é possível utilizar qualquer um dos dois jogos objetivando o resgate intuitivo das crianças concernente à comparação de probabilidades, a partir da análise dos eventos do espaço amostral, como forma de desencadear reflexões que levem a construção de um pensamento probabilístico mais elaborado.

Foi possível constatar que a compreensão das crianças apresenta uma gradação entre os anos de escolaridade: o 1º ano apresenta justificativas menos coerentes que o 3º. O mesmo acontece com o 3º em relação ao 5º. Entretanto, diferença entre esses dois grupos não foi tão acentuada. O estudo de Carvalho

(2005) feitos com alunos do 5º ano apontou, já no pré-teste, que um terço deles conseguiu comparar as possibilidades, com limitações nas justificativas, mas após a intervenção houve avanço considerável nessa e em outras questões probabilísticas.

Entende-se que os jogos aqui apresentados podem servir de apoio para o desenvolvimento de um trabalho que busque ampliar as compreensões das crianças acerca da comparação de probabilidades, desde que haja acompanhamento para o estabelecimento de intervenções adequadas que permitam a reflexão e o confronto dos alunos com as noções iniciais apresentadas. Assim, concorda-se com Carvalho (2005) que acredita que as crianças são capazes de aprender conceitos que envolvem probabilidade desde que sejam usadas situações provocadoras que exercitem suas funções mentais, como atenção, percepção, memória. Nesta ótica, considera-se os jogos como instrumentos que podem auxiliar no processo de ampliação da compreensão de elementos probabilísticos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebeu-se que o significado intuitivo da probabilidade (BATANERO E DIAZ, 2007) foi evidenciado pelas crianças, especialmente porque o procedimento adotado foi a manipulação de geradores de acaso, no caso, dados e moedas em situações de jogos, que trouxeram à tona uma linguagem natural, baseada em crenças e opiniões, conforme apresentado por Batanero e Diaz (2007).

As atividades envolvendo os jogos descritos aqui podem possibilitar o desenvolvimento da alfabetização probabilística (Gal, 2004), especialmente porque contemplam e permitem discussão de elementos cognitivos (grandes tópicos – aleatoriedade, independência de eventos, incerteza, cálculo de probabilidades, linguagem e contexto), bem como de alguns componentes disposicionais como crenças e atitudes.

De uma forma geral, as crianças apresentaram compreensão intuitiva e nem sempre coerente das exigências cognitivas exploradas neste estudo que buscou contemplar a aleatoriedade, o espaço amostral e a comparação de probabilidades. As crianças mais velhas apresentaram maior compreensão dos elementos probabilísticos estudados que as crianças mais novas, especialmente através dos discursos proferidos nas justificativas que, quase sempre, eram mais consistentes. Algumas aprenderam a partir da experiência com o jogo, mesmo não sendo o objetivo central deste estudo; outras reorganizaram o pensamento em função das intervenções e indagações propostas pela pesquisadora. Tal fato se configurou também como mecanismo de intervenção que resultou em aprendizagem.

No tocante à *aleatoriedade*, observamos avanços de compreensão nas crianças mais velhas em comparação com as mais novas, apesar do conceito não estar consolidado em nenhum grupo pesquisado, como era de se esperar. Constatamos que as crianças relacionaram a aleatoriedade à sorte ou ao azar, concepções características do significado intuitivo da probabilidade de acordo com Batanero e Diaz (2007). Os participantes da pesquisa não apresentaram compreensão adequada sobre a *independência de eventos* e costumaram cometer o erro de *recência negativa,* quando julgaram que um resultado de um evento não voltaria a acontecer, em função de sua frequência anterior, ou o erro de *recência positiva*, por acreditarem que o resultado voltaria a se repetir, uma vez que já havia ocorrido várias vezes, anteriormente. Acerca de *eventos equiprováveis*, especialmente as crianças do 1º ano, utilizaram parâmetros particulares para justificar suas escolhas, julgando que elementos externos como a inteligência, a experiência, a idade, o jeito de jogar, a crença num determinado resultado, influenciasse os resultados obtidos no lançamento de moedas ou dados, por exemplo. Foi observado que os resultados e interpretações realizados pelas crianças tiveram maior número de acertos com justificativas mais coerentes no jogo PAR que no jogo Travessia do Rio. Situações distintas, mesmo que tenha como foco o mesmo objeto de estudo, podem mobilizar conhecimentos e reflexões diferentes e, consequentemente resultados não semelhantes. Conjectura-se que a facilidade de ver os caminhos e poder registrar percursos no jogo PAR, bem como o uso da moeda que é um objeto do uso comum dos alunos, além de ter como espaço amostral apenas dois eventos (cara e coroa), enquanto o dado tem seis (1, 2, 3, 4, 5 e 6) podem ter sido aspectos facilitadores na exploração e compreensão de alguns elementos probabilísticos aqui trabalhados.

No que concerne ao *espaço amostral,* contatou-se que mesmo que as crianças tenham tido dificuldade para fazer uma lista exaustiva, confirmando estudos de Pessoa e Borba (2009), elas não se opuseram em registrar ao menos uma possibilidade do jogo Travessia do Rio e duas no jogo PAR. Para formação do 8 no lançamento de dois dados, 53% das crianças elencaram três possibilidades das cinco possíveis, o que para a maioria se configurava em *todos* os resultados, pois eles descartavam eventos como 5 + 3 se já tivessem registrado 3 + 5. Esta foi uma dificuldade real apontada no estudo: a incompreensão de que a ordem, neste caso, resulta em uma possibilidade diferente. No jogo PAR, apesar dos alunos não terem elencado os seis resultados possíveis para o lançamento de quatro moedas, (sendo duas caras e duas coroas em qualquer ordem), traduzidos num percurso, eles não tiveram dificuldades em registrar ao menos 2 possibilidades, 42% listaram 4 possibilidades, 31% escreveram 3 possibilidades e 19%, 5 possibilidades.

Quanto à questão envolvendo *evento impossível,* a maioria das crianças não apresentou dificuldade em identificá-lo nos dois jogos e, apresentaram, quase sempre argumentos coerentes para justificar suas respostas, embora alguns tenham necessitado da intervenção da pesquisadora. Observamos que as crianças do 1º ano foram as que apresentaram compreensão mais fragilizada em seus discursos. Outros estudos abordados aqui (SPINILLO ,1995; CARVALHO, 2005; NÓBREGA E SPINILLO, 2015) apontaram a mesma tendência de que mesmo crianças muito novas conseguem eliminar eventos impossíveis ao analisar um espaço amostral ou são capazes de pensar sobre possível, impossível e certeza.

Verificou-se que a maioria dos alunos de todos os anos de escolaridade opinaram corretamente sobre *evento pouco provável*, com argumentos bem consistentes apresentados pelas crianças do 5º ano. No entanto, os estudantes do 3º, e especialmente do 1º, nem sempre apresentaram justificativas que traduzissem uma compreensão adequada do tema. Muitas vezes, as crianças menores dissociaram a ligação entre as faces do dado ou os lados da moeda com a situação proposta, para pensar unicamente no número absoluto envolvido na questão (Travessia do Rio) ou na geografia do percurso ou posição dos colegas (PAR). Algumas crianças do 1º ano e também do 3º ano utilizaram como base de argumentação as relações: perto-longe, muito-pouco, mais-menos, maior-menor.

De uma forma geral, as crianças apresentaram reflexões mais coerentes acerca do espaço amostral no jogo PAR do que no jogo Travessia do Rio. Entende-se que há contextos em que as percepções iniciais concernentes a algum elemento que contempla o pensamento probabilístico são mais pertinentes que em outros. Não significa dizer que o jogo Travessia do Rio não possa ser usado como mecanismo mobilizador-motivador do conhecimento probabilístico. Acredita-se, sim, que ambos os jogos são interessantes de serem revisitados ou adaptados para fins de aprendizagem probabilística com alunos, desde os primeiros anos de escolaridade do Ensino Fundamental. Pode-se, inclusive, trabalhar com atividades e jogos mais complexos para desafiar as crianças e estimular discussões que podem ser geradoras de aprendizagens.

Em relação à *comparação de probabilidades*, poucas crianças conseguiram comparar as probabilidades envolvidas na situação, considerando os elementos dos eventos que compõem o espaço amostral. No entanto, muitas apontaram indícios de compreensão que necessitaria intervenção adequada para solidificação da aprendizagem. No jogo Travessia do Rio, houve uma tendência dos alunos compararem os números considerando o valor absoluto ou a ordem, desprezando o foco da proposta: a análise das possibilidades de formação desses eventos no lançamento de dois dados. Curiosamente, as crianças apresentaram mais facilidade e argumentos mais consistentes na comparação do 7 com o 11 (chance diferente) do que na comparação do 2 com o 12 (chance igual). Acredita-se que a experiência recente no jogo permitiu que os alunos percebessem mais nitidamente que o 7 saía mais que o 11, conforme argumentos apresentados por eles. No jogo PAR, algumas crianças realizaram a comparação, relacionando a chance igual ou diferente à suposta distância ou à possível dificuldade do trajeto. As crianças apresentaram no jogo PAR reflexões mais consistentes de comparação de probabilidades a partir dos elementos dos eventos envolvidos no espaço amostral que no jogo Travessia do Rio. A possibilidade de riscar, tracejar, contornar um caminho no desenho pode ter facilitado estas compreensões, o que leva a concluir que há situações que desencadeiam compreensões mais facilmente que outras.

As atividades propostas neste estudo, a partir dos jogos Travessia do Rio e Passeios Aleatórios da Rute – PAR, possibilitou duas considerações importantes: a primeira diz respeito ao uso desses instrumentos para o desenvolvimento do pensamento probabilístico e a segunda reforça uma preocupação com a responsabilidade da escola no processo de formação do pensamento probabilístico das crianças.

Assim, tratando da primeira consideração, julga-se que tais jogos se configuram em facilitadores e motivadores da aprendizagem de noções probabilísticas. O que se deseja não é que as crianças façam cálculos de probabilidade, mas que reflitam sobre eventos aleatórios, espaço amostral, independência de eventos, equiprobabilidade entre outros. E esses elementos probabilísticos podem ser discutidos de uma forma lúdica por meio desses jogos, desde que façam parte de atividades programadas, acompanhadas e avaliadas. A probabilidade frequentista, por meio de simuladores, pode se aliar aos jogos para servir de suporte para os alunos perceberem, por exemplo, que vai sair mais o 7 que o 11 no lançamento de dois dados ou que no lançamento de quatro moedas a probabilidade de chegar em Ana é maior que nos demais colegas de Rute, no jogo PAR.

Apesar das crianças não apresentarem conhecimentos consolidados sobre os temas probabilísticos discutidos neste estudo, percebe-se nitidamente que as noções intuitivas emergem com naturalidade e podem servir de trampolim para construção de conhecimentos coerentes, desde que haja instrução formal para isso. É imprescindível que haja intervenção escolar para ampliação das noções iniciais que nem sempre são corretas. Pode-se afirmar que mesmo as crianças mais novas, de 6 anos, apresentam potencial para iniciar o aprendizado, de forma lúdica, de conhecimentos que tratam da ampliação do pensamento probabilístico. Como mencionado antes e observado em outras pesquisas aqui descritas, as crianças mais velhas apresentam compreensões mais coerentes sobre questões probabilísticas, no entanto essa evolução não garante que elas se tornem adultas alfabetizadas probabilisticamente.

A segunda consideração serve como alerta sobre o ensino nos anos iniciais de questões concernentes à probabilidade. Os autores aqui citados (BRYANT E NUNES, 2012; VIALI E CURY, 2009; BATANERO E DIAZ, 2007; SPINILLO, 1995, entre outros) e os documentos oficiais defendem a introdução de conteúdos próprios da probabilidade já nos anos iniciais de escolarização. No entanto, as pesquisas de Santana (2011), Oliveira (2003), Bernabeu et al (2015) e Campos e Pietropaolo (2013) apontam a fragilidade de conhecimento probabilístico dos professores. Dessa forma, conhecer e pesquisar o que os alunos sabem, como pensam e de que forma podem aprender surtirá pouco efeito se não houver educadores capazes de conduzir o processo de ensino e aprendizagem probabilística nas escolas.

Não esteve clara a relação entre as três exigências cognitivas discutidas no estudo: *aleatoriedade*, *espaço amostral* e *comparação de probabilidades*, envolvendo jogos. Nem sempre as crianças notaram que comparações de probabilidades podem se basear em levantamentos de elementos de eventos que compõem espaços amostrais e esses, por sua vez, possuem base na aleatoriedade, assim não haveria como prever o que exatamente ocorreria, mas haveria como levantar o que seria possível ocorrer. Um volume muito grande de dados foi mobilizado pelos alunos a partir de seus discursos, obtidos nas entrevistas. Constataram-se proximidades e distanciamentos, similitudes e diferenças, de um mesmo foco probabilístico, considerando cada um dos jogos. Acredita-se que mais pesquisas com este olhar, possam elucidar esta questão, por ora sem resposta mais clara. Pretende-se, portanto, com os dados coletados nesta pesquisa, realizar um estudo transversal com alguns participantes com o intento de buscar respostas que deem suporte às indagações que não foram possíveis sanar com a análise apresentada até então. Julga-se importante um estudo mais aprofundado, com intervenção, para ampliar a compreensão de que possibilidades como 6 + 2 e 2 + 6 (soma 8 no lançamento de dois dados) são ensaios distintos. O uso de jogos aliado à probabilidade frequentista com uso de recursos tecnológicos pode ser um bom caminho para uma intervenção que busque analisar espaços amostrais e comparar probabilidades.

Por fim, o presente estudo possibilita reafirmar a capacidade das crianças em aprender noções probabilísticas, desde que sejam devidamente estimuladas para tal. Observou-se que as compreensões iniciais partem de percepções intuitivas que as crianças, mesmo sem instrução formal, trazem consigo. Assim, julga-se gratificante gerir aprendizagens concernentes ao raciocínio probabilístico em crianças como A3.3, que mesmo sem intervenção, sabiamente afirma:

EU JÁ DISSE TIA, É A MOEDA QUE DIZ, NÃO É A GENTE QUE QUER NÃO!

7 REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise do conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BATANERO, C. DIAZ, C. **Meaning and understanding of mathematics. The case probability**. In JP.Van Bendengen y K. François (Eds); Philosophical Dimmensions in Matehematics Education (p. 107-128). New York: Spinger, 2007.

BATISTA, Rita. BORBA, Rute. **Conhecimento probabilístico de crianças: uma análise considerando o jogo Travessia do Rio**. IASE 2015 Satellite Conference. Anais. Rio de Janeiro, 2015. Disponível em http://iase-web.org/documents/papers/sat2015/IASE2015%20Satellite%2064_BATISTA.pdf .Acessado em 28.12.2015.

BATANERO, C., HENRY, M., and PARZYSZ, B. (2005). **The nature of chance and probability**. In G. A. Jones (Ed.) Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (15- 37). New York: Springer. Bellhouse, D. R. (2000).

BERNABEU, Carmen Batanero. TORRES, Emilse Gómez. GARCIA, José Miguel Contreras. BATANERO, Carmen Díaz **Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratório**. Práxis Educativa, Ponta Grossa, v. 10, n. 1, p. 11-34, jan./jun. 2015

BITTAR, M. ABE, T. S. **O ensino de probabilidade: a articulação entre as visões clássica, frequentista e geométrica**. In COUTINHO, C.Q. (orgs). Discussões sobre a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica. Campinas: Mercado das Letras, 2013 (p.99-120).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v.3. Brasília: MEC, 1997

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Jogos na Alfabetização Matemática. Ministério da Educação. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014.

BRYANT, Peter. NUNES, Terezinha. **Children's understanding of probability**: a literature review. Nuffield Foundation. 2012, 86p. Disponível em http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acessado em 22.09.2014.

CAMPOS, Tânia Maria M. PIETROPAOLO, Ruy Cesar. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais.** In BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira (Orgs). Processos de Ensino e aprendizagem em Educação Matemática. Recife: Ed. Universitária UFPE, 2013.

CARNAP, R. **Logical foundations of probability**. Chicago: University of Chicago Press, 1950.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método Clínico usando os exames de Piaget**. 5. Ed. São Paulo: Cortez, 1998

CARVALHO, Rosália Policarpo Fagundes. **A formação de conceitos probabilísticos em crianças de 4ª série do ensino fundamental**. Dissertação. Universidade Católica de Brasília, 2005.

CARVALHO, Carolina. FERNANDES, José Antônio. **Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da Psicologia.** Quadrante- Revista de Investigação em Educação Matemática. Vol. XIV, Nº 2, jul. dez. 2005, p. 71-88.

CAZORLA, I. M. KATAOKA, V. Y. NAGAMINE, C. M. L. **Os passeios aleatórios da Carlinha.** A estatística vai à escola. Coleção UESC. Projeto: Avale - Ambiente Virtual de apoio ao Letramento Estatístico. Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz, 2011. Disponível em http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos/download/1621.pdf. Acessado em 28.09.2014.

CAZORLA, I. e SANTANA, E. Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2006.

CORDEIRO, J. M. SILVA, V. N. **A importância dos jogos para a aprendizagem matemática**. Revista Científica Eletrônica de Ciências Sociais Aplicadas da EDUVALE. Ano V, Número 05, nov. 2012. Jaciara/MT. Disponível em http://www.eduvalesl.edu.br/site/edicao/edicao-79.pdf acessada em 26.10.2014.

CRITON, M. **Les jeaux mathématiques**. Paris: PUF, 1997.

FERREIRA, R. S. **Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista**. 2011. 155f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 20111.

FINETTI, de B. **La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives.** Annales de l'Institute Henri Poincaré, 7, p.1-68,1937.

GAFFURI, Stefane Layana. **Ensino e aprendizagem de probabilidade através da metodologia de resolução de problemas.** Santa Maria, 2012

GAL, Iddo. **Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. International Statistical Review**, 70(1), 1-25, 2002 a.

GAL, Iddo. **Dispositional aspects of coping with interpretive numeracy tasks. Literacy and Numeracy Studies**, 11(2), 47-61. 2002 b.

GAL, Iddo. **Towards 'probability literacy' for all citizens**. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers, 2004

GAL, Iddo. **Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula**. 12th International Congress on Mathematical Education Program Name XX-YY-zz (pp. abcde-fghij) 8 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea, 2012

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento e o uso de jogos na sala de aula.** Tese. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, SP: 2000.

JUNQUEIRA, Ana Lucia N. CAMPOS, Maria Lucia T. WATABE, Leika**. Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica**: o jogo da roleta. CIAEM. Recife, 2011. Disponível em http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/1296.pdf. Acessado em 20.09.2014.

KEYNES, J. M. **A treatise on probability**. New York: Macmillan, 1921.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. (1994). **O jogo e a educação infantil: jogo, brinquedo e brincadeira.** PERSPECTIVA. Florianópolis, UFSC/CED, NUP, n. 22, p. 105-128. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/10745/10260. Acessado em 06.03.2015.

LOPES, C. E. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação de professores**. Cad. Cedes. Campinas, vol.28, n.74, p.57-73, jan./abr. 2008.

LOPES, J. M. TEODORO, J.V. REZENDE, J.C. **O ensino de probabilidade por meio de um jogo e da resolução de problemas**. In LOPES, C.E. COUTINHO, C.Q.S. ALMOULOUD, S. A (orgs). Estudos e reflexões em Educação Estatística. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2010 p. 135-156.

MACEDO, L. PETTY, A. L. S. PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema**. Porto Alegre: artes Médicas, 2000.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado**: como o acaso determina nossas vidas. Tradução Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

MOREIRA, Marco A. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta área**. Revista Investigação em Ensino de CiênciasV7(1); pp 729,2002

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

NAGAMINE, Camila Macedo Lima. HENRIQUES, Afonso. UTSUMI, Miriam Cardoso. CARZOLA, Irene Maurício. **Análise Praxeológica dos Passeios Aleatórios da Mônica**. Boletim de Educação Matemática, vol. 24, núm. 39, agosto, 2011, p. 451-472. Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Disponível em http://www.redalyc.org/pdf/2912/291222099007.pdf

NÓBREGA, Giselda Magalhães Moreno. SPINILLO, Alina Galvão. **A concepção do possível em crianças aplicadas a situações de probabilidade e combinatória**. In: Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4º, 2015, Ilhéus, Bahia, Brasil, p.2216-2223.

ODY, Magnus Cesar, VIALI, Lori. **Alfabetização, letramento e literacia: da aquisição e das habilidades de leitura, de escrita e de cálculo, à utilização de suas competências na estatística e na probabilidade**. VII CIBEM (Congresso Ibero Americano de Educação Matemática). Montevidéu, Uruguai. De 16 a 21 de setembro de 2013.

ODY, Magnus Cesar. **Literacia estatística e probabilística no ensino médio**. Dissertação. Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Faculdade de Física, PUCRS, Porto Alegre, 2013.

OLIVEIRA, Paulo César. **O processo de aprender noções de probabilidade e suas relações no cotidiano das séries iniciais do ensino fundamental**: uma história de parceria. Tese. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, SP, 2003.

OLIVEIRA, Paulo Iorque Freitas. **A estatística e a probabilidade nos livros didáticos de matemática do ensino médio**. Dissertação. Universidade Católica do Rio Grande do Sul, RS, 2006.

PEIRCE, C. S. **Notes on the doctrine of chances**. In Collected papers of C. S. Peirce .Vol 2. P. 404-414. Havard University Press, 1932.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco**: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Secretaria de Educação. UNDIME:PE, 2012, 145 p.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **Quem Dança com Quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp – v.17, n.31 – jan./jun. – 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **O Desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica**. Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n.1. 2010

PIAGET, J. and INHELDER, B. ***The Origin of the Idea of Chance in Children***. London: Routledge and Kegan Paul, 1975.

POPPER, K. R. **The propensity interpretation of the calculus of probability and the quantum theory**. In S. Körner (Ed.) Observation and interpretation The Colston Papers. Vol. 9, p. 65-70. University of Bristol, 1957.

POPPER, K. R. **The propensity Interpretation of probability**. British Journal of the Philosophy of Science, 10, p. 25-42, 1959.

PORTANOVA, Ruth (org). **Um currículo da matemática em movimento**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005.
RAMSEY, F. P. (1926). **Truth and probability**. In F. P. Ramsey (1931), The Foundations of Mathematics and other Logical Essays VII, p.156-198, Edited by R.B. Braithwaite, London: Kegan, Paul, Trench, Trubner and Co, 1926.

SANTANA, Michaelle Renata Moraes de. **O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SANTANA, Michaelle e BORBA, Rute. **Como a Probabilidade tem sido abordada nos livros didáticos de Matemática de anos iniciais de escolarização**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10. 2010, Salvador. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.

SANTOS, Jaqueline. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental**. 2010. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2010

SHTULMAN, A. **The development of possibility judgments within and across domains**. Cognitive Development, 2009.

SHTULMAN, A., and Carey, S. **Impossible or improbable? How children reason about the possibility of extraordinary claims**. Child Development, **(2007).**

SPINILLO, Alina Galvão. **Noções iniciais das crianças sobre probabilidade**. Temas em Psicologia. Abr 1995, vol.3, no.1, p.47-68.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lúcia Moro. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

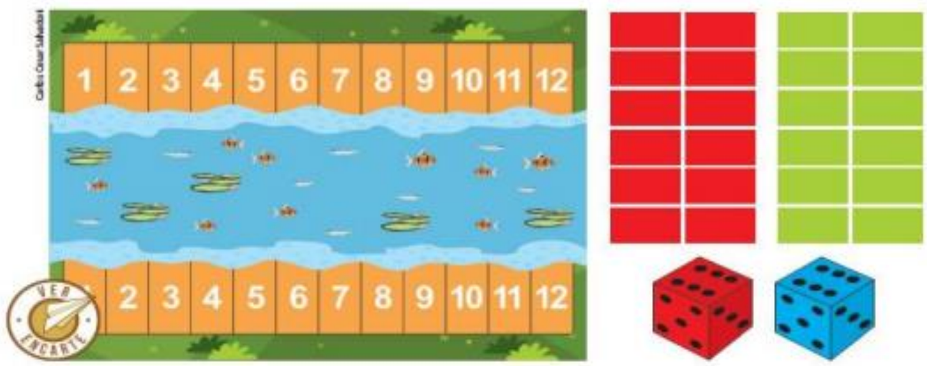
VIALI, L**. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade**. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 8, p. 85-97, 2008.

VIALI, Lori, CURY, Helena Noronha. **Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada**. Educ. Matem. Pesq. São Paulo, v.11, n.2, pp.373-391, 2009.

8 APÊNDICES

APÊNDICE 1 - JOGO COM DADO: JOGO TRAVESSIA DO RIO

- **Jogo da Travessia do Rio** (Brasil, 2014, p. 40-41)



Explicam-se as regras. Joga-se com as crianças para a familiarização e compreensão das regras. Oferecer lápis e papel e incentivar o registro.

1- Pedro apostou todas as fichas no 2 e João todas no 12. Quem tem mais chance de ganhar? Por quê? (Análise de chance igual. Justificativa considerando os elementos dos eventos - espaço amostral)

2- João colocou todas as suas fichas no 1. Ele conseguirá ganhar o jogo? Por quê? (Evento impossível)

3- Quem tem mais chance de ganhar o jogo: uma pessoa que apostou todas as fichas no 7 ou quem apostou todas no 11? Por quê? (Análise de eventos mais prováveis – chance diferente. Justificativa aponta para as possibilidades de formação do evento - conhecimento do espaço amostral ou parte dele).

4- Pedro apostou todas as fichas no 3. Ele tem muita, pouca ou nenhuma chance de ganhar o jogo? Por quê? (Evento pouco provável. Reflexão sobre os elementos que compõem o evento espaço amostral).

5- João apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair nos dados para dar 8? (Levantamento de possibilidades)

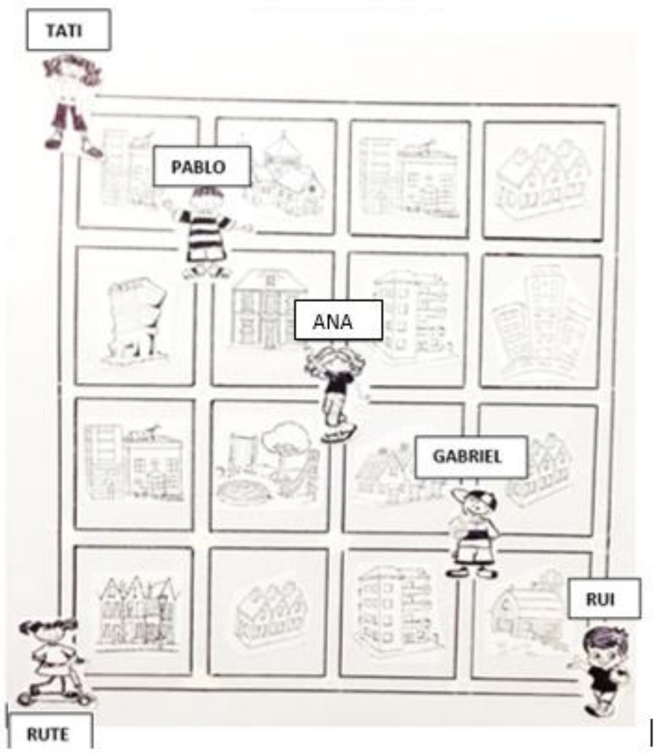
6- André jogou o dado uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 de novo? (Independência de eventos)

7- Se você jogar com o dado vermelho e eu com o dado azul quem você acha que terá mais chance de tirar o 6: eu ou você? Por quê? (Eventos equiprováveis)

8- Se eu jogar um dado, é mais fácil sair qual dos números? Por quê? (Aleatoriedade)

APÊNDICE 2 - JOGO DE MOEDA 2: PASSEIOS ALEATÓRIOS DA RUTE

(Adaptado dos Passeios Aleatórios da Mônica – PAM)



Explicam-se as regras. Joga-se com as crianças para a familiarização e compreensão das regras. Oferecer lápis e papel e incentivar o registro.

Rute vai visitar um de seus amigos. Ela resolveu que só vai decidir o caminho que deverá tomar de acordo com um jogo que criou. Ao sair de sua casa ela lança uma moeda e: se sair cara ela anda para direita um quarteirão; se sair coroa ela anda para cima um quarteirão. Ela percebeu que ao lançar a moeda quatro vezes ela sempre visita um amigo.

1- Há mais caminhos para Rita de encontrar com Pablo ou Gabriel? Por quê? (Chance igual. Uso dos elementos do evento – espaço amostral - na justificativa)

2- Você acha que seria possível chegar a Rui sem sair uma cara? Por quê? (Evento impossível)

3- Você acha que todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados? Por quê? (Chances diferentes)

4- Considerando os lançamentos das moedas, há muita, pouca ou nenhuma chance de Rute chegar a Tati? (Evento pouco provável)

5- Quais os caminhos possíveis para Rute chegar a Ana? Liste considerando os lados das moedas (Levantamento de possibilidades)

6- Paulo jogou a moeda e saiu cara, jogou novamente e saiu cara, jogou outra vez e saiu cara mais uma vez. Se ele jogar novamente vai sair cara de novo? Por quê? (Independência de eventos)

7- Se eu lançar uma moeda primeiro e você lançar depois, quem tem a maior chance de tirar cara: eu ou você? Por quê? (Eventos equiprováveis)

8- Quando eu jogo uma moeda é mais fácil sair cara ou coroa? Por quê? (Aleatoriedade)