



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

MONALISA CARDOSO SILVA

A COMBINATÓRIA: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental

Recife
2016

MONALISA CARDOSO SILVA

A COMBINATÓRIA: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Prof^a. Dr^a Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa.

Recife

2016

Catálogo na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S586c

Silva, Monalisa Cardoso.

A combinatória: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do ensino fundamental / Monalisa Cardoso Silva. – 2016.

201 f. ; 30 cm.

Orientadora: Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.

Inclui Referências.

1. Matemática (ensino fundamental) - Estudo e ensino.
2. Análise combinatória. 3. Livros didáticos. 4. UFPE - Pós-graduação.
I. Pessoa, Cristiane Azevedo dos Santos. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.)

UFPE (CE2016-28)

MONALISA CARDOSO SILVA

A COMBINATÓRIA: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 26/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a Rosinalda Aurora de Melo Teles (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^o. Dr. Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna (Examinador Externo)
Universidade Federal do Paraná

AGRADECIMENTOS

Mais uma etapa chega ao fim, mais um sonho que se realiza e além da alegria que transborda em meu coração, sinto uma imensa gratidão a todos que estiveram do meu lado e que fizeram do meu sonho a sua própria luta. Esta conquista eu devo a vocês.

A Deus, acima de tudo, agradeço pela sua bondade e misericórdia derramada sobre mim, me dando forças a cada dia para eu não desistir deste sonho. “*Querido Deus, te agradeço pelas bênçãos sem fim e pela alegria de viver em Tua presença (Salmo 21:6)*”. Toda honra e toda a glória seja dada a Ti.

À minha mãe Lucidalva, a quem dedico esta conquista, agradeço pela dedicação, pelo amor e por tudo que sou. Suas orações foram fundamentais para a realização deste sonho. A ela o meu amor incondicional.

À minha família, pelo incentivo e apoio, em especial às minhas irmãs Mônica e Márcia, sobrinhas Bruna e Bianca e tios Ernandes e Luciana.

À professora Cristiane Pessoa, que além de orientadora se mostrou amiga e esteve ao meu lado durante todo o meu período de formação acadêmica, me proporcionando oportunidades e me incentivando. Agradeço por me ensinar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional e humana.

Ao meu noivo Danillo Rafael, com amor, carinho, admiração e gratidão por seu companheirismo, paciência e compreensão nos meus momentos de ausência, estando ao meu lado e me apoiando nas horas difíceis, de desânimo e de cansaço.

Aos meus amigos de turma, em especial àquelas que compartilharam comigo além de momentos de estudos e aperreios, muitas risadas (muitas mesmo) e alegrias, Paula, Tati e Claudia. Porque em vocês encontrei verdadeiras amigas.

Ao grupo de estudos GREDAM e aos professores Rosinalda Teles e Carlos Vianna pelas discussões e contribuições no desenvolvimento da pesquisa.

Aos meus alunos, que me ensinaram muito mais do que imaginam, me proporcionando um grande crescimento profissional e humano, além de enorme satisfação com o trabalho realizado. É por eles que continuo a me apaixonar a cada dia mais pela Educação Matemática.

A todos aqueles que se fizeram presente e jamais deixaram de acreditar na minha vitória, o meu sincero obrigado.

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo analisar a abordagem da Combinatória em orientações curriculares de documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental e se há consonância entre as abordagens. A nossa fundamentação teórica discute sobre a importância de cada um destes elementos e sua relação com a Combinatória, além de nos apoiarmos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986) para análise dos livros. Para tal foram analisados os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997 e 1998) e Parâmetros Curriculares de Matemática para Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). Analisamos também pesquisas recentes publicadas em eventos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil no período de 2009 a 2013, as quais estudaram sobre sondagem de alunos e intervenções de ensino em Combinatória. O último elemento de análise foi o livro didático, na qual constaram coleções aprovados pelo PNLD 2013, dos anos iniciais e PNLD 2014, dos anos finais do Ensino Fundamental. Neste sentido, apresentamos a análise da abordagem da Combinatória em cada um destes elementos, confrontando-os de forma gradativa à medida que cada elemento é apresentado. A partir dos resultados foi possível perceber que os documentos oficiais tratam claramente do ensino deste conteúdo desde o período de alfabetização matemática, envolvendo os quatro significados do conceito (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação), nos quais devem estar relacionados com os campos de Números e Operações e Tratamento da Informação. Além disso, orientam que ao longo de todo o Ensino Fundamental sejam utilizadas diferentes estratégias de resolução, que irão levar ao uso do princípio fundamental da contagem nos anos finais, sem que haja a utilização de fórmulas. De forma semelhante, identificamos nos estudos recentes que desde cedo os alunos são capazes de resolver tais problemas, utilizando desenhos, listagem e árvores de possibilidades, por exemplo. Contudo, que precisam superar alguns obstáculos de resolução, relacionados à compreensão dos invariantes, elemento este que, segundo os estudos, precisam ser explicitados para os estudantes, por meio de um ensino sistemático, que vise também à organização das estratégias de resolução e o esgotamento de possibilidades. Desta forma, ao analisar os livros percebemos importantes relações da abordagem da Combinatória com os documentos e pesquisas, havendo, assim, consonância dos mesmos em vários dos aspectos analisados, tais como abordagem ao longo de todo o segmento do Ensino Fundamental, trabalho com os diferentes significados envolvidos no conceito, apoio nas variadas estratégias de resolução apresentadas por alunos e orientadas para o ensino, a sistematização da estratégia e o esgotamento de possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, superando o pensamento do provável para o possível. Contudo, a análise nos livros didáticos aponta a necessidade de maior atenção na abordagem da Combinatória nos anos iniciais, envolvendo todos os significados do conceito e relação com o Campo do Tratamento da Informação com a Probabilidade e a Estatística. Além de apresentar orientações mais concisas no manual do professor para o trabalho com este conteúdo.

Palavras-chave: Combinatória. Documentos oficiais. Pesquisa científica. Livro didático. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study aimed to analyze the approach of Combinatorics in curriculum guidelines of official documents in search engine results and teaching of elementary school books and if there is harmony between the approaches. Our theoretical framework discusses the importance of each of these elements and their relationship to Combinatorics, and rely upon the Theory of Conceptual Fields of Vergnaud (1986) for analysis of the books. For this purpose the analyzed National Curriculum Standards of Mathematics of the initial and final years of elementary school (BRAZIL, 1997 and 1998) and Mathematics Curriculum Standards for Basic Education of Pernambuco (Pernambuco, 2012). We also analyze recent research published in national and international events in Brazil in the 2009 to 2013 period, which studied on survey of students and teaching interventions in Combinatorics. The last element of analysis was the textbook, which consisted collections approved by PNLD 2013, the early years and PNLD 2014, the final years of elementary school. In this sense, we present the analysis of the combinatorial approach in each of these elements, confronting them gradually as each element is displayed. From the results it was observed that the official documents clearly address the teaching of this content from the period of mathematical literacy, involving the four concept meanings (Cartesian product, arrangement, combination and permutation), in which must be related to the fields of Numbers and Operations and Management of Information. In addition, guide you throughout elementary school are used different coping strategies, which will lead to the use of the fundamental principle of counting in the final years, without the use of formulas. Similarly, recent studies identify early students are able to solve such problems by using drawings, list and trees of possibilities, for example. However, they must overcome some resolution of obstacles related to the understanding of invariants, which element, according to the studies, need to be made for students through a systematic education, which also aims at the organization of solving strategies and depletion possibilities. Thus, when analyzing the books we see important relationships of the combinatorial approach to the documents and research, having thus keeping the same in several of the analyzed aspects such as approach throughout the primary school segment, working with different meanings involved in the concept, support in various resolution strategies presented by students-oriented teaching, systematization of the strategy and the exhaustion of possibilities for the development of logical thinking, surpassing thought likely to be. However, the analysis in textbooks points to the need for greater attention in addressing the Combinatorial in the early years, involving all the concept and meanings related to the treatment of the Field of Information to Probability and Statistics. In addition to presenting more concise guidance in the teacher's manual to work with this content.

Keywords: Combinatorial. Official documents. Scientific research. Textbook. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Legenda de cores com níveis de expectativas de aprendizagem	99
Figura 2	Alguns conteúdos do Bloco Números e Operações com os níveis desejáveis de aprendizagem por ano escolar.....	100
Figura 3	Problema de combinação na seção possibilidades da coleção 1A1.....	112
Figura 4	Ideias da multiplicação na coleção 1A1.....	113
Figura 5	Problema de combinação relacionada à Geometria na coleção 1A1.....	114
Figura 6	Problema de produto cartesiano na coleção 1A1.....	115
Figura 7	Revisão sobre as ideias da multiplicação na coleção 1A1..	115
Figura 8	Sequência de problemas de produto cartesiano ao trabalhar as ideias da multiplicação na coleção 1A1.....	118
Figura 9	Problema combinatório apresentado com um desenho na coleção 1A1.....	120
Figura 10	Problema combinatório resolvido por diferentes representações na coleção 1A1.....	121
Figura 11	Solicitação de operação numérica para resolução de problema combinatório na coleção 1A.....	122
Figura 12	Problema combinatório solicitando cada possibilidade e o total delas na coleção 1A1.....	124
Figura 13	Orientação ao professor sobre a ordem dos elementos nos problemas de combinação na coleção 1A1.....	125
Figura 14	Problema de produto cartesiano relacionado à construção de tabelas na coleção 2A1.....	128
Figura 15	Problema de produto cartesiano resolvido por desenho e multiplicação na coleção 2A1.....	129
Figura 16	Explicação sobre a ideia de Combinatória no glossário da coleção 2A1.....	130
Figura 17	Problema de produto cartesiano apresentado com uma tabela na coleção 2A1.....	133
Figura 18	Problema de produto cartesiano com sugestão de	

	resolução por diferentes representações.....	134
Figura 19	Apresentação de resposta ao professor de forma sistemática na coleção 2AI.....	135
Figura 20	Problema de produto cartesiano com solicitação de resposta de cada possibilidade e valor total na coleção 2AI.....	136
Figura 21	Problema combinatório relacionado à Probabilidade na coleção 3AI.....	140
Figura 22	Problemas que chamam atenção ao invariante de ordem na coleção 3AI.....	141
Figura 23	Problema de produto cartesiano solicitando o uso de material manipulável na coleção 3AI.....	144
Figura 24	Problema de permutação com proposta de sistematização na coleção 3AI.....	145
Figura 25	Resposta incorreta 1 para o professor na coleção 3AI.....	147
Figura 26	Resposta incorreta 2 para o professor na coleção 3AI.....	147
Figura 27	Orientação ao professor sobre a sistematização na coleção 3AI.....	148
Figura 28	Apresentação sobre as ideias da multiplicação na coleção 4AI.....	151
Figura 29	Problemas de combinação relacionados a atividades de adição na coleção 4AI.....	152
Figura 30	Problema de produto cartesiano na coleção 4AI.....	154
Figura 31	Problema de combinação solicitando apenas algumas das possibilidades na coleção 4AI.....	157
Figura 32	Problema de produto cartesiano relacionado à potenciação na coleção 1AF.....	161
Figura 33	Problema combinatório relacionado à Probabilidade na coleção 1AF.....	162
Figura 34	Problema de arranjo resolvido pela árvore de possibilidade e pelo princípio fundamental da contagem na coleção 1AF.....	164
Figura 35	Explicação com destaque para percepção do invariante de ordem no problema combinação na coleção 1AF.....	165

Figura 36	Problema de produto cartesiano resolvido por diferentes representações na coleção 1AF.....	168
Figura 37	Problema de permutação com proposta de sistematização na coleção 1AF.....	169
Figura 38	Questionamentos sobre a Combinatória na coleção 2AF...	173
Figura 39	Problema de combinação chamando atenção para o invariante de ordem na coleção 2AF.....	174
Figura 40	Conclusões sobre os problemas combinatórios na coleção 2AF.....	175
Figura 41	Problema combinatório relacionado à Probabilidade na coleção 2AF.....	176
Figura 42	Problema combinatório apresentado com uma árvore de possibilidades na coleção 2AF.....	179
Figura 43	Problema de permutação utilizando árvore de possibilidades e o princípio fundamental da contagem na coleção 2AF.....	180
Figura 44	Proposta de sistematização na coleção 2AF.....	181
Figura 45	Proposta de sistematização (continuação) na coleção 2AF.....	182
Figura 46	Proposta de percepção de regularidades para generalização na coleção 2AF.....	183
Figura 47	Problema com solicitação de cada possibilidade e do total na coleção 2AF.....	184

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 1Al.....	116
Tabela 2	Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 1Al.....	117
Tabela 3	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 1Al.....	119
Tabela 4	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro da coleção 1Al.....	120
Tabela 5	Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 2Al.....	130
Tabela 6	Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 2Al.....	131
Tabela 7	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 2Al.....	132
Tabela 8	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 2Al.....	133
Tabela 9	Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 3Al.....	141
Tabela 10	Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 3Al.....	142
Tabela 11	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro 3Al.....	143
Tabela 12	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 3Al.....	144
Tabela 13	Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 4Al.....	151

Tabela 14	Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 4AI.....	153
Tabela 15	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 4AI.....	155
Tabela 16	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 4AI.....	156
Tabela 17	Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 1AF.....	163
Tabela 18	Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 1AF.....	166
Tabela 19	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 1AF.....	167
Tabela 20	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 1AF.....	167
Tabela 21	Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 2AF.....	173
Tabela 22	Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 2AF.....	177
Tabela 23	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 2AF.....	178
Tabela 24	Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 2AF.....	179

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Coleções analisadas dos anos iniciais do Ensino Fundamental	88
Quadro 2	Coleções analisadas dos anos finais do Ensino Fundamental.....	89
Quadro 3	Síntese dos resultados de pesquisas em sondagem de alunos	109
Quadro 4	Síntese dos resultados de pesquisas em intervenções	110
Quadro 5	Síntese da coleção 1AI em relação aos documentos oficiais e as pesquisas.....	126
Quadro 6	Síntese da coleção 2AI em relação aos documentos oficiais e as pesquisas.....	138
Quadro 7	Síntese da coleção 3AI em relação aos documentos oficiais e as pesquisas.....	149
Quadro 8	Síntese da coleção 4AI em relação aos documentos oficiais e as pesquisas.....	159
Quadro 9	Síntese da coleção 1AF em relação aos documentos oficiais e as pesquisas.....	171
Quadro 10	Síntese da coleção 2AF em relação aos documentos oficiais e as pesquisas.....	186

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	17
2	A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS.....	26
2.1	A construção de conceitos em campos conceituais	27
2.2	A resolução de problemas: uma concepção interativa da formação dos conhecimentos	29
2.3	O desenvolvimento de conceitos em uma abordagem desenvolvimentista	30
3	A COMBINATÓRIA	33
3.1	Conceitos e definições	34
3.2	A Combinatória e a teoria dos campos conceituais	36
4	ORIENTAÇÕES CURRÍCULARES EM DOCUMENTOS OFICIAIS.....	40
4.1	A importância das orientações curriculares para o ensino	41
4.2	Orientações curriculares para o Ensino Fundamental.....	45
4.2.1	Os Parâmetros Curriculares Nacionais.....	46
4.2.2	Os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco.....	49
5	A PESQUISA CIENTÍFICA.....	52
5.1	As contribuições da pesquisa científica para o ensino.....	53
5.2	A pesquisa em Combinatória.....	55
6	O LIVRO DIDÁTICO.....	76
6.1	O Programa Nacional do Livro Didático	77
6.2	A importância do Livro Didático para o Ensino	79
6.3	O que as pesquisas apontam sobre o livro didático e a Combinatória	82
7	OBJETIVOS E MÉTODO.....	85
7.1	Objetivos.....	86
7.1.1	Objetivo Geral	86
7.1.2	Objetivos Específicos	86
7.2	Método.....	86
7.2.1	Procedimentos de coleta de dados	86
7.2.2	Categorias base das análises	89

8	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	91
8.1	As orientações para o ensino de Combinatória no Ensino Fundamental	92
8.1.1	Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática.....	93
8.1.1.1	Anos Iniciais do Ensino Fundamental.....	93
8.1.1.2	Anos Finais do Ensino Fundamental.....	94
8.1.2	Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco.....	98
8.2	A Combinatória em resultados de pesquisas científicas....	104
8.3	A Combinatória em livros didáticos do Ensino Fundamental.....	110
8.3.1	Livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.....	110
8.3.1.1	Coleção 1 dos anos iniciais do Ensino Fundamental (1AI).....	111
8.3.1.1.1	Abordagem da Combinatória na coleção 1AI.....	111
8.3.1.1.2	Significados combinatórios trabalhados nos livros da Coleção 1AI.....	117
8.3.1.1.3	Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 1AI.....	119
8.3.1.1.4	A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 1AI.....	122
8.3.1.1.5	Esgotamento de possibilidades na coleção 1AI.....	123
8.3.1.1.6	Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 1AI.....	124
8.3.1.1.7	Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 1AI.....	126
8.3.1.2	Coleção 2 dos anos iniciais do Ensino Fundamental (2AI).....	127
8.3.1.2.1	Abordagem da Combinatória na coleção 2AI.....	127
8.3.1.2.2	Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 2AI.....	131
8.3.1.2.3	Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 2AI.....	132
8.3.1.2.4	A sistematização como forma de organização da estratégia	

de resolução na coleção 2AI.....	135
8.3.1.2.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 2AI.....	136
8.3.1.2.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 2AI.....	137
8.3.1.2.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 2AI.....	137
8.3.1.3 Coleção 3 dos anos iniciais do Ensino Fundamental (3AI).....	138
8.3.1.3.1 Abordagem da Combinatória na coleção 3AI.....	138
8.3.1.3.2 Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 3AI.....	142
8.3.1.3.3 Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 3AI.....	143
8.3.1.3.4 A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 3AI.....	145
8.3.1.3.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 3AI.....	146
8.3.1.3.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 3AI.....	146
8.3.1.3.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 3AI.....	149
8.3.1.4 Coleção 4 dos anos iniciais do Ensino Fundamental (4AI).....	150
8.3.1.4.1 Abordagem da Combinatória na coleção 4AI.....	150
8.3.1.4.2 Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 4AI.....	153
8.3.1.4.3 Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 4AI.....	155
8.3.1.4.4 A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 4AI.....	156
8.3.1.4.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 4AI.....	157
8.3.1.4.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 4AI.....	
8.3.1.4.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 4AI.....	159

8.3.2	Livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.....	159
8.3.2.1	Coleção 1 dos anos finais do Ensino Fundamental (1AF)... ..	160
8.3.2.1.1	Abordagem da Combinatória na coleção 1AF.....	160
8.3.2.1.2	Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 1AF.....	165
8.3.2.1.3	Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 1AF.....	166
8.3.2.1.4	A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 1AF.....	169
8.3.2.1.5	Esgotamento de possibilidades na coleção 1AF.....	170
8.3.2.1.6	Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 1AF.....	170
8.3.2.1.7	Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 1AF.....	170
8.3.2.2	Coleção 2 dos anos finais do Ensino Fundamental (2AF).....	171
8.3.2.2.1	Abordagem da Combinatória na coleção 2AF.....	171
8.3.2.2.2	Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 2AF.....	177
8.3.2.2.3	Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 2AF.....	178
8.3.2.2.4	A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 2AF.....	181
8.3.2.2.5	Esgotamento de possibilidades na coleção 2AF.....	184
8.3.2.2.6	Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 2AF.....	185
8.3.2.2.7	Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 2AF.....	185
9	CONSIDERAÇÕES.....	187
	REFERÊNCIAS.....	193

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho de dissertação se insere no campo dos estudos em Educação Matemática, tendo como objetivo principal analisar a abordagem da Combinatória em orientações curriculares de documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental e se há consonância entre as abordagens. Nos últimos anos a Combinatória passou a se configurar como uma importante temática em pesquisas na área da Educação Matemática e esses estudos, de um modo geral, apresentam como resultado que alunos conseguem compreender e resolver problemas combinatórios desde os anos iniciais de escolarização. Os documentos oficiais vêm sugerindo o trabalho com a Combinatória na escola desde o início do Ensino Fundamental. Além disso, os livros didáticos dos anos iniciais e dos anos finais do Ensino Fundamental já trazem problemas combinatórios no corpo de suas atividades.

O raciocínio combinatório é uma forma de pensar que permite que se levantem possibilidades e sejam analisadas as combinações das mesmas, auxiliando na compreensão de conteúdos matemáticos e de outras áreas do conhecimento (PESSOA E BORBA, 2010). Portanto, é um tipo de pensamento que deve ser valorizado pela escola desde cedo, pois pode auxiliar os alunos no desenvolvimento do raciocínio lógico, assim como na resolução de diversos tipos de problemas relacionados ou não à Matemática. Segundo Pessoa (2014), este raciocínio desenvolve o pensamento hipotético-dedutivo, estimulando os alunos a pensarem no que é possível e não necessariamente no que é real.

Reconhecendo a importância do currículo para o ensino e as várias concepções que apresenta, acreditamos que o mesmo pretende uma organização para tornar a educação mais eficiente, na medida em que para sua construção são discutidos os elementos necessários para a organização do sistema escolar e seu ensino, sejam estes, os conhecimentos a serem estudados, os procedimentos de ensino ou as relações sociais construídas.

Buscando superar a estagnação vivenciada na educação na década de 1990, foram desenvolvidos documentos oficiais para a educação com orientações curriculares para o ensino, como forma de assegurar os direitos e deveres dos sujeitos envolvidos no processo educacional (MORAES e SANTANA, 2011). Estes documentos passaram um processo de construção de experiências e estudos, os quais contaram com a colaboração de vários educadores brasileiros. Além da lei maior que rege educação em nosso país, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação

(LDB 9394/96), outros documentos oficiais trazem orientações para a Educação Básica como um todo. Dentre alguns dos documentos que trazem orientações curriculares, temos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco e as Diretrizes Curriculares Nacionais. O primeiro, apesar de antigo, permanece em vigor, traz orientações para todos os níveis da Educação Básica e foi parte de um processo de mudança na educação brasileira, colocando em forma de documento curricular orientações para o ensino que se constituiu de pesquisas acadêmicas em suas respectivas áreas do conhecimento. O segundo documento traz orientações com especificidades de currículo para as escolas pernambucanas, tratando-se de um documento local para nortear o ensino escolar. Sabemos da discussão em torno da Base Nacional Curricular Comum, mas como no período da construção do presente estudo as discussões eram muito iminentes, este documento não entra nas análises do presente estudo.

Em relação à Combinatória, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) recomendam para o 1º e 2º ciclos “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos e permutações e, principalmente, o princípio fundamental da contagem” (p. 57) e para o 3º e 4º ciclos referindo-se aos problemas de contagem “o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação no cálculo de probabilidade” (BRASIL, 1998, p.52).

No que concerne às orientações para o trabalho com a Matemática no Ensino Médio, é indicado que a Combinatória tem um papel importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico, uma vez que esse mesmo raciocínio contribui para a operação e resolução de problemas no dia a dia. Os PCN apontam o papel importante do raciocínio combinatório, assim como de outros conteúdos, para a formação dos alunos do Ensino Médio:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será

importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio (BRASIL, 2000, p.44).

A Combinatória é um dos suportes para a aprendizagem de um outro conteúdo importante na área da Matemática. É a partir da compreensão inicial que se tem sobre fatorial e na escolha e ordenação dos elementos que se discute no ensino de problemas combinatórios que dão base e auxiliam na compreensão da Probabilidade. Esta íntima relação entre estes dois conteúdos podemos observar nos documentos oficiais que orientam seu ensino:

Estatística e Probabilidade lidam com dados e informações em conjuntos finitos e utilizam procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados. Por isso, a Contagem ou análise combinatória é apenas parte instrumental desse tema. A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2002, p.126)

Acreditamos, assim como Borba (2013), que

haverá possibilidade de um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório se ocorrer o trabalho com os variados problemas deste campo conceitual desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de representações simbólicas apropriadas que possibilitem uma gradual construção de procedimentos mais formais e compreensão das propriedades invariantes do conceito existente, até se chegar ao uso consciente das fórmulas de Análise Combinatória no Ensino Médio (p.6).

Ou seja, acreditamos no trabalho com este conhecimento desde o início da escolarização básica, em um processo de aprofundamento contínuo ao longo dos anos escolares, criando possibilidades ao aluno para que no Ensino Médio estes tenham melhor compreensão das fórmulas da Combinatória.

Percebemos que o ensino na Combinatória é visto e recomendado para um trabalho contínuo ao longo da Educação Básica. Entretanto, apesar de tais orientações encontradas nos PCN, de acordo com Pessoa e Borba (2009), na prática de ensino de sala de aula, a maioria dos problemas combinatórios (*arranjo, combinação e permutação*) são introduzidos formalmente apenas no 2º ano do Ensino Médio. O que se observa na realidade das aulas dos primeiros ciclos da

educação básica é um trabalho mais focado em problemas do tipo *produto cartesiano* de forma explícita.

Justificamos assim, a escolha por investigar o segmento do Ensino Fundamental no intuito de perceber como a Combinatória é abordada em documentos oficiais, em pesquisas científicas e em livros didáticos antes do seu ensino mais formalizado, o qual ocorre tradicionalmente no 2º ano do Ensino Médio. O estudo de Silva (2015) que analisou os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2012, acerca dos problemas combinatórios condicionais, também corrobora com esta afirmativa, nos trazendo dados sobre o trabalho com a Combinatória de forma geral neste ciclo de escolarização.

Como resultados, Silva (2015) aponta que nos livros de Matemática deste ciclo de escolarização a articulação entre os diversos saberes adquiridos durante toda a etapa estudantil dos alunos é mais efetiva. Entretanto, no que se refere ao processo de conceitualização deste conhecimento, em algumas das coleções analisadas, é tratado com certo grau de superficialidade, assim como a explicação sobre o que é a Combinatória. Com relação à abordagem do conteúdo, os problemas combinatórios são encontrados nos livros do Ensino Médio divididos em blocos, no qual quando se trata de um tipo de problema, após a definição do mesmo, todas as atividades que vêm na sequência dizem respeito a ele. Este fato, segundo o autor, “não ajuda no desenvolvimento da compreensão do conceito pelo aluno, já que os problemas propostos, não necessariamente se constituem como desafios para eles, pelo fato de saberem de antemão que fórmula aplicar, pois o tipo de problema está explícito” (SILVA, 2015, p. 139). Além de perceber a ênfase na aplicação de fórmulas, a única representação simbólica presente na descrição feita por todas as coleções como estratégia de resolução para os problemas combinatórios como um todo foi a árvore de possibilidades, ou seja, não variedade de sugestões de representações simbólicas para a resolução dos problemas. No que se refere ao manual do professor, uma parte das coleções não apresentava orientações para o trabalho com a Combinatória e em outra parte foram identificadas orientações referentes aos significados combinatórios, chamando a atenção dos invariantes para melhor compreensão do aluno no processo de aprendizagem.

Sabendo destes resultados nos livros do Ensino Médio e também do ensino formal da Combinatória neste ciclo de escolarização, buscamos investigar como se

dá a abordagem da Combinatória antes desta formalização, ao longo do Ensino Fundamental nos documentos oficiais, nas pesquisas científicas e nos livros didáticos de Matemática.

Estudo realizado por Barreto, Amaral e Borba (2007) há oito anos, buscando observar como são tratados os problemas de raciocínio combinatório em livros didáticos de 1ª a 4ª série (atuais 2º ao 5º anos da Educação Básica) e analisando se há a preocupação em abordar esse conteúdo levando em consideração as três dimensões de conceito propostas por Vergnaud (significados, invariantes e representações simbólicas), verificaram que nas cinco coleções de livros de Matemática analisadas, os significados mais encontrados foram a combinação e o produto cartesiano. Os pesquisadores perceberam uma variedade das representações simbólicas utilizadas, porém os autores dos livros didáticos analisados não trabalharam as propriedades invariantes da Combinatória, nem chamaram a atenção do professor sobre os diferentes significados envolvidos e as características destes.

Desta forma, foi evidenciado no estudo supracitado que, embora os livros didáticos destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental já tragam diferentes problemas de raciocínio combinatório, não apresentam a distinção desses tipos, constatando, assim, que há pouco trabalho sistemático com o raciocínio combinatório antes do 2º ano do Ensino Médio e que para um trabalho mais efetivo em sala de aula, os livros didáticos poderiam orientar melhor os professores sobre diferentes aspectos da Combinatória a serem considerados.

Segundo Vergnaud (1986), alguns conceitos levam um longo período para se desenvolverem por envolver diferentes aspectos. Consideramos que o raciocínio combinatório se insere entre estes. Desta forma, o quanto antes for introduzido aos alunos, mais consistente e significativa será a sua compreensão e aprendizado. Este conhecimento é importante para o raciocínio lógico matemático e para a relação com outras áreas do conhecimento, uma vez que a sua utilidade vai além da teoria e da sala de aula. Segundo Guirado e Cardoso (2007), seus métodos são aplicados em diversas áreas como no cálculo das probabilidades, em problemas de transporte, de confecção de horários, de elaboração de planos de produção, de programação linear, de estatística, de teoria da informação, de biologia molecular, de economia, de lógica, etc. Pessoa e Borba (2010) se aproximam ainda mais da realidade dos alunos apontando que os problemas de Combinatória podem ser explorados desde

cedo, pois expectativas de um acontecimento, regras de um jogo, escolha de vestimentas, combinações de sucos e sanduíches em uma lanchonete ou de sabores de um sorvete, são situações e contextos ricos que podem ser exploradas nos primeiros ciclos de escolaridade sobre Combinatória e Probabilidade.

Este adiamento do ensino sistematizado de problemas que envolvam o raciocínio combinatório desde os anos iniciais se reflete nas dificuldades demonstradas por alunos nos anos finais da escolarização básica, que pode ocorrer em serem meros aplicadores de fórmulas, uma vez que o trabalho com este conhecimento é feito em um curto período de tempo, de forma não sistematizada e algumas vezes insegura no que se refere ao conhecimento do conteúdo por parte dos professores.

Nesta discussão introdutória percebemos a presença marcante dos resultados de pesquisas para a constatação e inferência de práticas de ensino eficientes para o aprendizado da Combinatória, uma vez que através de estudos científicos, com métodos rigorosos, que descobrimos a realidade. Percebemos assim, as contribuições da pesquisa científica, em especial a educacional, para o ensino, assim como subsídios para a formação do profissional docente como forma de intervir na realidade e promover melhorias na qualidade da educação. É através dela que descobrimos práticas e abordagens bem sucedidas da Combinatória, assim como o que estudos de sondagens identificam que os alunos de diversos níveis de ensino demonstram saber sobre ela, para podermos intervir na realidade. Além disso, os resultados apresentados nas pesquisas científicas são, muitas vezes, tomados como base para a formulação das orientações de documentos oficiais, os currículos dos estados e municípios, assim como, os livros didáticos. Isto porque, apresentam descobertas e formas eficientes de ensino e aprendizagem que se tornam um referencial para a melhoria da qualidade da educação no país.

Além das orientações curriculares e dos resultados de pesquisas, o educador tem ainda em mãos o livro didático como suporte para sua prática. Segundo os PCN de Matemática, o uso dos recursos didáticos tem papel importante no processo de ensino e aprendizagem desta disciplina. Dentre os recursos disponíveis, o livro didático tem significativa relevância para este processo, tendo em vista o fornecimento de situações que orientam e ajudam professores e alunos na construção de conhecimentos e, assim também, com a Combinatória. Percebendo sua marcante presença nas salas de aulas, acreditamos que a análise deste

instrumento é uma forma de identificar como é sugerido que ocorra o ensino da Combinatória ao longo do Ensino Fundamental e se as orientações curriculares e os resultados de pesquisas se materializam no mesmo.

Diante das reflexões até aqui expostas, o presente estudo busca realizar análises que nos deem suporte para responder a algumas questões:

- Como ocorre, nos livros didáticos, o trabalho com a Combinatória no Ensino Fundamental?
- Quais as orientações em documentos oficiais para o ensino de Combinatória?
- O que resultados de pesquisas apontam sobre a Combinatória?
- As orientações curriculares de documentos oficiais e os resultados das pesquisas são contemplados nos livros didáticos?
- Quais os tipos de problemas combinatórios são trabalhados nos livros?
- Quais as diferentes representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades?
- Ocorre mudança/gradação de dificuldades na abordagem dos problemas combinatórios ao longo dos anos escolares?
- O manual do professor orienta o docente ao trabalho com a Combinatória?
- Qual a relação existente entre a abordagem da Combinatória em orientações curriculares para o ensino, em resultados de pesquisas e em atividades propostas em livros didáticos sobre tal conceito?

Para responder tais questões e em busca de um ensino de Matemática, em específico da Combinatória, de qualidade, visamos analisar a abordagem deste conhecimento em orientações curriculares de documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, buscando relacioná-los.

Na segunda seção do estudo tratamos da discussão a respeito do desenvolvimento conceitual, no qual discutimos a formação e o desenvolvimento de conceitos à luz da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud, tendo em vista o tripé que o teórico propõe: *significados*, *invariantes* e *representações simbólicas*. Além disso, o capítulo trata sobre a importância da resolução de problemas como uma concepção interativa da formação dos

conhecimentos e o desenvolvimento de conceitos em uma abordagem desenvolvimentista.

Na terceira seção apresentamos uma reflexão sobre alguns conceitos e definições da Combinatória apontados por estudiosos da área e a relação defendida no estudo deste conceito, visto através da Teoria dos Campos Conceituais.

Na quarta seção abordamos uma discussão sobre a importância dos documentos oficiais para o ensino, tendo em vista que os mesmos são a base para o ensino no nosso país, apresentando uma síntese de documentos curriculares que trazem orientações para a Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio).

Na quinta seção discutimos as principais contribuições da pesquisa científica para o ensino, apresentando algumas concepções sobre a mesma, sua contribuição para a formação do profissional em educação, nos sentido de melhoria da sua prática e o que apontam algumas pesquisas recentes sobre o ensino da Combinatória e o conhecimento de alunos sobre tal conteúdo.

Na sexta seção temos como foco o livro didático, desta forma apresentamos uma discussão sobre os programas e documentos oficiais que regem as avaliações e escolhas dos livros didáticos, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Guia Nacional do Livro Didático, assim como, tratamos da influência do livro didático para o ensino, sua importância no trabalho do professor e de pesquisas relacionadas a livros didáticos, especialmente sobre Combinatória.

Na sétima seção apresentamos os objetivos que mobilizam o presente estudo, assim como os procedimentos metodológicos adotados para o seu desenvolvimento.

Na oitava seção são apresentados os resultados e discussões que surgiram mediante os dados obtidos nos elementos de investigação.

Na nona seção, apresentamos as conclusões do presente estudo, a partir dos dados coletados e analisados e apontamos possíveis questões para estudos futuros.

2 A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

2. A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

Nesta sessão trataremos da discussão a respeito do desenvolvimento conceitual, no qual iremos discutir a formação e o desenvolvimento à luz da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud, na qual este autor defende a formação de conceitos através de um tripé construído por *significados*, *invariantes* e *representações simbólicas*. Abordaremos também a importância da resolução de problemas como uma concepção interativa da formação dos conhecimentos e o desenvolvimento de conceitos em uma abordagem desenvolvimentista.

2.1 A construção de conceitos em campos conceituais

Para Vergnaud (1986), os conceitos são desenvolvidos e inseridos em *campos conceituais*. Para ele, “um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (VERGNAUD, 1986, p. 84). Para compreender um campo conceitual é necessário a análise das situações que são envolvidas, os procedimentos de resolução que são utilizados pelos alunos, suas argumentações e as representações simbólicas utilizadas.

Esta interligação entre conceitos ajudará no desenvolvimento da capacidade de relacionar situações que possam parecer semelhantes, ou seja, um conceito não emerge apenas de um tipo de situação, sempre envolve vários conceitos. É desta forma que Vergnaud (1986) defende o desenvolvimento em *campos conceituais*, uma ampla interação entre um conjunto de conceitos e um conjunto de situações em que são utilizados tais conceitos.

Para este autor, em uma criança o desenvolvimento dos conhecimentos se faz através de campos conceituais diversos, podendo ser de ordem matemática, psíquica, econômica, lógica. Estes são campos conceituais independentes, mas que interagem entre si.

Vergnaud (1986) defende que todo conceito é constituído por um tripé de três conjuntos: as situações que dão *significado* ao conceito, os *invariantes* que são as relações e propriedades que se mantêm constantes nas diversas situações e as *representações* utilizadas para simbolizar o conceito. Este tripé (*significados*, *invariantes* e *representações simbólicas*) formam um conceito, estando interligados

a outros conceitos, uma vez que, como já afirmado, um conceito não é desenvolvido isoladamente. É importante que os professores tenham conhecimento destas dimensões que formam um conceito, para que possam propor situações que envolvam uma diversidade destes.

Com relação aos *significados*, é necessária a compreensão de que uma situação não representa todas as propriedades de um conceito, ou seja, para que o aluno compreenda todas as propriedades de um conceito é necessário que se faça referência à diversidade de classes de problemas que este conceito envolve.

Os *invariantes*, aqui tratados, dizem respeito aos *invariantes prescritivos*, ou seja, os *invariantes do conceito* (e não aos invariantes operatórios)¹ que são propriedades implícitas de um conceito e que não variam, permanecendo inalteradas independente da situação em que estiver inserida ou representação simbólica utilizada. Desta forma o professor precisa estar atento às singularidades de cada classe de problemas de um conceito e trabalhá-las com os alunos para que se tenha a compreensão das variedades de situações envolvidas no conceito, que vão influenciar na resolução.

As *representações simbólicas* são as formas utilizadas pelos alunos para representar seu pensamento, podendo ser através de um desenho, uma listagem, uma tabela, um cálculo e tantas outras formas de resolver um problema. É necessário que a escola propicie aos alunos o contado com as diferentes formas de resolução de um problema e esteja atenda às diversidades de estratégias apresentadas pelos mesmos, uma vez que poderão servir como base de um ensino mais próximo de suas formas de pensar.

Desta forma, a Teoria dos Campos Conceituais, apresenta importantes contribuições para o campo educacional, uma vez que pode funcionar como orientador dos docentes na sua prática de ensino ao abordar o trabalho com os conceitos, para que os alunos tenham avanços na compreensão.

No presente trabalho, esta teoria embasará o olhar sobre o livro didático, no sentido de observar se as dimensões do conceito estão presentes nos livros analisados.

¹ Segundo Vergnaud (1996, p. 201), os invariantes operatórios, cujas categorias principais são os *teoremas-em-ação* e os *conceitos-em-ação* “são a base conceitual implícita que permite obter informações e, a partir dela e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais pertinentes” e fazem parte do desenvolvimento das competências do sujeito. No presente estudo, trataremos apenas dos *invariantes do conceito*, os invariantes prescritivos.

2.2 A resolução de problemas: uma concepção interativa da formação dos conhecimentos

Por muito tempo, as escolas apresentavam o ensino de Matemática centrado na aprendizagem de conteúdos, no qual os alunos eram levados a memorizarem regras e fórmulas, que eram utilizadas de forma mecânica e não os levavam a uma reflexão do conhecimento apreendido. O resultado desta prática eram alunos desmotivados por não perceberem a aplicabilidade de tais informações e que logo em seguida, no próximo conteúdo estudado, esqueciam as regras memorizadas anteriormente.

Trata-se de uma forma tradicional de ensino, na qual “o saber matemático não se apresenta ao aluno como um sistema de conceitos, que lhe permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível” (BRASIL, 1997, p. 32).

Atualmente, vivenciamos uma nova perspectiva de aprendizagem de conceitos matemáticos, na qual os documentos oficiais, baseados em pesquisas acadêmicas, orientam a abordagem de situações-problema como ponto de partida para a aprendizagem de conhecimentos, uma vez que estas situações encorajem os alunos a pensar, ação essencial para a compreensão da Matemática. Um problema pode estar relacionado com qualquer situação escolar, ou não, conduzindo o aluno a necessidade de explorá-lo, descobrindo relações e desenvolver estratégias de resolução.

Sobre esta nova perspectiva do ensino de Matemática, o Guia de Livros Didáticos afirma que,

um primeiro princípio metodológico amplamente reconhecido como importante hoje é que o ensino e a aprendizagem da Matemática devem estar baseados na resolução de problemas. Um problema não é uma atividade de simples aplicação de técnicas e procedimentos já exemplificados. Ao contrário, é uma atividade em que o aluno é desafiado a mobilizar seus conhecimentos matemáticos, procurar apropriar-se de outros, sozinho ou com a ajuda de colegas e do professor, a fim de elaborar uma estratégia que o leve a uma solução da situação proposta (BRASIL, 2010a, p.17).

Na Matemática, o ensino através de problemas não se resolve pela definição e os erros dos alunos não poderão ser superados se os mesmos continuarem a se deparar com situações que eles não apreendem significado. Por isso é importante

que estejamos atentos aos contextos e conjunto de situações que poderão ajudá-los a ajustar seu pensamento e compreender os conceitos estudados.

Vergnaud (1986), a partir da Teoria dos Campos Conceituais, estabelece que a formação de conceitos deve ocorrer com base numa concepção interativa, na qual o saber na sua forma prática e teórica se constrói no momento em que nos deparamos com problemas a resolver. Segundo este teórico, no caso do conhecimento matemático, o processo de elaboração de relações por ele discutidas assume sentido ao fazer parte de estruturas mais amplas e complexas em momentos evolutivos posteriores (Vergnaud, 1990).

Para ele, a resolução de problemas é a fonte e o critério do saber operatório. Desta forma, se faz necessário que se ofereça uma diversidade de situações-problema para resolução, para que, assim, os alunos possam fazer reflexões, estabelecer relações, mobilizar estratégias, ampliar conceitos e construir novas aprendizagens.

Sendo assim, concordamos com Martins (2010) que

as situações-problema se apresentam como desafio a ser dominado, pois nessas se fazem presentes certo número de conceitos e cada um desses possui seus significados, relações e propriedades invariantes e formas de representação simbólica (p. 55).

Nesta perspectiva, é importante que rompamos com práticas de ensino com ênfase em memorização de fórmulas e regras, pois estes são procedimentos finais num processo de aprendizado de determinado conteúdo e o seu adiantamento implica na falta de reflexão e compreensão satisfatória do conceito estudado.

2.3 O desenvolvimento de conceitos em uma abordagem desenvolvimentista

Segundo Vergnaud (1986), “as concepções e as competências se desenvolvem em um longo período de tempo” (p.5), não apenas para as estruturas gerais do pensamento, assim como para conteúdos e conhecimentos. Este aspecto é importante de ser considerado, uma vez que alguns conteúdos são trabalhados apenas em um período da escolarização ou deixados, muitas vezes, para ser estudados de forma complexa no final da trajetória escolar. Por exemplo, como discutido anteriormente, podemos citar a Combinatória, que, na prática, tradicionalmente é deixada para ser ensinada no 2º ano do Ensino Médio, porém é

indicado por documentos oficiais e por pesquisas científicas que seu ensino seja realizado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, para que o aluno tenha contato com situações-problema que envolvam contagem e o ato de combinar elementos, aprenda diferentes formas de resolução e as características de cada tipo de problema combinatório.

Isto é indicado, uma vez que o sujeito terá um maior período para amadurecer a reflexão sobre este raciocínio, compreender desde situações mais simples até as mais complexas, suas propriedades e relações e assim chegar ao Ensino Médio com uma melhor e mais aprofundada compreensão deste conceito, respeitando cada momento de sua maturidade.

Vergnaud (1986) afirma que é importante reconhecer a variedade das classes dos problemas possíveis, analisar atentamente sua estrutura e as operações de pensamento necessárias para tratá-los. A descrição relativa aos problemas e aos procedimentos necessita de uma abordagem desenvolvimentista da aprendizagem matemática. Isso significa que não devemos considerar um conjunto limitado de problemas para a aprendizagem de um conceito, nem um período muito breve do desenvolvimento escolar.

Muitas vezes o tempo e o processo do desenvolvimento de determinado conhecimento são pouco valorizados pela escola. Percebe-se na prática de sala de aula que os professores resistem em retornar a assuntos trabalhados em momentos anteriores, sendo considerado como um conhecimento que já deveria ter sido adquirido. Entretanto, acreditamos na importância de se rever os conteúdos ao longo dos anos escolares, de forma a aprofundá-los, abordando com mais complexidade e com novos aspectos.

O Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2013a), apresenta-nos o bloco Tratamento da Informação, no qual estão incluídos conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória. Estes conhecimentos são cada vez mais relevantes e nos trazem questões relativas aos dados da realidade, que precisam ser coletados, organizados e apresentados, a partir de uma interpretação crítica dos alunos. Acreditamos que o desenvolvimento dessas competências pode ser realizado desde cedo, sequencialmente. A falta de sequência do conteúdo no decorrer dos anos desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio pode diminuir a compreensão e as abstrações matemáticas dos estudantes.

É nesta perspectiva que este estudo analisa a abordagem da Combinatória ao longo dos anos escolares do Ensino Fundamental, uma vez que este conteúdo é de fato tratado com ênfase apenas no 2º ano do Ensino Médio e as recomendações oficiais são que este trabalho ocorra desde os anos iniciais, em contínuo até o fim da Educação Básica, os resultados de pesquisas apontam compreensões dos alunos de diferentes níveis de escolarização e os livros didáticos trazem problemas combinatórios desde os anos iniciais.

3 A COMBINATÓRIA

3. A COMBINATÓRIA

Neste capítulo iremos discutir sobre alguns conceitos e definições da Combinatória apontados por estudiosos da área e a relação defendida no estudo desta temática, visto através da Teoria dos Campos Conceituais.

3.1 Conceitos e Definições

Merayo (2001) defende que a Análise Combinatória é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem ter que contá-los um a um. Trata-se de uma técnica que não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto. Dessa maneira, a contagem na Análise Combinatória não é vista unicamente como enumeração direta de elementos, mas como determinação de possibilidades sem necessariamente levantar todos os casos possíveis.

Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho, Fernandez (1991) afirmam que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Estes autores destacam dois tipos de problemas presentes na Análise Combinatória: demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições e contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Batanero, Godino e Nevarro-Pelayo (1997), definem a Combinatória como componente importante da matemática discreta, sendo assim, essencial para um bom desempenho da matemática escolar. Estes autores ainda apresentam a definição apresentada por Bernoulli, em 1713, considerando a Combinatória como a arte de enumerar todas as possibilidades em que um determinado número de objetos pode ser combinado de modo que não falte nenhum.

Na mesma perspectiva, Almeida e Ferreira (2009) defendem a Combinatória como um dos núcleos centrais da Matemática discreta, apontando ainda como parte importante para a compreensão da Probabilidade. Esta relação é importante uma vez que o aluno precisará compreender quantas são todas as possibilidades possíveis para calcular o evento solicitado nas situações de Probabilidade.

Rosa (2004) entende a Combinatória como o campo da Matemática que permite resolver situações nas quais é necessário “escolher e organizar” objetos de

um conjunto, ou seja, é a parte da Matemática no qual estudamos formas de contagem de agrupamentos de um conjunto ou mais.

Sobre o raciocínio combinatório Teixeira (2013) o descreve da seguinte forma,

Para os nossos propósitos, podemos dizer que raciocínio combinatório é um conjunto de ações cognitivas, não inatas ao sujeito, que permitam a ele encaminhar procedimentos de seleção, partição ou colocação, de objetos, pessoas, números ou letras, combinando-os adequadamente de modo que o resultado dessas ações tenha significado, obedeça a sistematizações e sua representação possa ser feita utilizando diferentes linguagens - língua materna (a primeira língua que se aprende, pode ser Libras ou de Sinais), verbal, matemática, gráfica ou na forma de tabelas – como meio de produzir, expressar e comunicar ideias, interpretando diferentes intenções e situações. (p. 5)

Desta forma, compreende-se que o raciocínio combinatório é concebido quando se trata do ato de combinar, associar, juntar ou compor elementos de um dado conjunto. São habilidades de um raciocínio desenvolvido antes mesmo de que seja preciso usar operações combinatórias mais formais para a resolução de tais problemas (SILVA e PESSOA, 2014).

Sendo assim, a Combinatória também é conhecida como a arte de contar, a qual é uma das primeiras aprendizagens matemáticas do sujeito, quando a criança conta ou enumera elementos (MORGADO, PITOMBEIRA DE CARVALHO, CARVALHO e FERNANDEZ, 1991). Também tem origem em jogos de azar, com cartas e lançamentos de dados, e vem se desenvolvendo e apresentando aplicabilidade em diversas áreas (GUIRADO E CARDOSO, 2007).

Para Lopes e Coutinho (2009), a importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório deve-se ao fato de ele modelar uma situação na qual há várias possibilidades de construção de agrupamentos e de caminhos, fornecendo um tipo específico de interpretação quando se devem levar em conta os resultados possíveis para cada um desses agrupamentos ou caminhos.

Conforme tais definições, concorda-se com Pessoa e Borba (2010), que defendem que a Combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias, como desenhos, listagens, árvore de possibilidades ou fórmulas, por exemplo, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação sem necessariamente ter que contá-los um a um.

Sendo assim, percebemos entre tais definições que a Combinatória possui um raciocínio essencial para a formação do pensamento formal e requisito importante para o raciocínio lógico. Além disso, possui aplicação em diversas áreas do conhecimento, matemático ou não, indo além da sala de aula.

3.2 A Combinatória e a Teoria dos Campos Conceituais

Para embasar este estudo nos apoiaremos na classificação dos problemas combinatórios feita em uma organização de Pessoa e Borba (2008) que se basearam na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986). Como já visto, essa Teoria considera que existem muitos fatores que influenciam na formação e desenvolvimento dos conceitos, que surgem a partir de problemas a resolver. Sendo assim, é necessário que se ofereçam situações diversas para a resolução de problemas, que no caso da Combinatória, seria o contato com todos os tipos de problemas.

Vergnaud (1986) defende que todo conceito é constituído por três dimensões: as situações que dão *significado* ao conceito, os *invariantes* (relações e propriedades) que se mantêm constantes nas diversas situações e as *representações* utilizadas para simbolizar o conceito.

Desta forma, Pessoa e Borba (2008) classificam os problemas que envolvem raciocínio combinatório, assumindo os seguintes significados: *produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*. Classificação esta que foi baseada em Merayo (2001) e classificações anteriores (Nunes e Bryant, 1997; Vergnaud, 1983 e 1991 e Brasil - PCN, 1997).

Estes problemas foram considerados como característicos do pensamento combinatório, contribuindo, dessa forma, para a reflexão teórica da necessidade de se considerar este conjunto de situações no ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Básico.

Baseando-se em Pessoa e Borba (2009), apresentamos os *significados* presentes na Combinatória (tipos de problemas), com seus exemplos e *invariantes* (relações e propriedades que se mantêm constantes).

Produto Cartesiano:

Ex: Bárbara vai viajar e levará em sua mala 4 blusas (verde, amarela, rosa e vermelha) e duas calças (preta e azul). Quantas combinações de roupas diferentes ela pode formar combinando cada calça com cada blusa?

Invariantes:

- Dado dois (*ou mais*) conjuntos distintos (com n e com p elementos), os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto.
- A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.

Permutação simples (sem repetição):

Ex: Calcule o número de anagramas da palavra VIDA.

Invariantes:

- Todos os n elementos do conjunto serão usados;
- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Arranjo simples (sem repetição):

Ex: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Invariantes:

- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$
- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Combinação simples (sem repetição):

Ex: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Invariantes:

- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$
- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Analisando a Combinatória com base no tripé estabelecido por Vergnaud, os *significados* se referem aos tipos de problemas envolvidos neste raciocínio. Acreditamos assim, que estes se fazem uma variável importante no processo de ensino, de resolução e de compreensão de um conceito, pois em cada um dos problemas combinatórios o aluno utilizará de relações lógicas diferentes. É por essa razão que, apostando no uso de significados variados dentro deste campo conceitual, para que o aluno perceba suas singularidades e mobilize relações condizentes com as lógicas de cada tipo de problema, o aluno poderá ter uma compreensão da Combinatória como um todo e do desenvolvimento pleno do conceito.

Os diferentes *invariantes* do conceito são elementos fundamentais para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado da Combinatória, interferindo assim na forma de compreensão por parte do aluno, em cada tipo de problema. Nas situações combinatórias, estes invariantes dizem respeito à escolha dos elementos que formarão os subconjuntos, se utilizarão todos ou parte deles em cada possibilidade, e à ordem em que os elementos estarão dispostos nestas possibilidades, se irá gerar uma nova possibilidade ou não. Ao combinar, por exemplo, três pessoas (Maria, João e Pedro) para entrar em um elevador que só cabem duas pessoas por vez, a possibilidade Maria e João é a mesma que João e Maria, pois a ordem não irá gerar novas possibilidades. Sendo assim, o aluno não poderá repeti-las. Porém, se for em uma competição em que terá primeiro e segundo colocados, a possibilidade Maria e João é diferente de João e Maria, pois Maria em primeiro lugar é diferente de Maria em segundo. Desta forma se o aluno consegue perceber estes invariantes, a interpretação de um problema pode ser uma e se ainda não há a percepção dos invariantes do conceito, a maneira de lidar com o

problema é outra. Um aluno que não consegue compreender a lógica que está por traz do que o problema pede, não consegue perceber relações implícitas no problema, podendo se utilizar de estratégias que não respondem ao que o problema solicita.

Os problemas podem ser resolvidos por meio de diferentes formas de *representação*: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras, como constatado em estudos de sondagens como os de Pessoa e Borba (2009) e Pessoa e Santos (2011). As diferentes formas de *representação simbólica* ocorrem tanto no que se refere às soluções apresentadas pelos alunos quanto na proposição da questão.

A forma de *representar* um problema nos dá indícios da maneira como o aluno o está interpretando e compreendendo a situação. Assim, além de ajudá-lo a compreender, o tipo de problema poderá também gerar formas diferentes de representação. Baseado nisso, é necessário que a escola esteja atenta à necessidade de diversificação das representações, para que o aluno possa pensar sobre um determinado conceito a partir de diferentes perspectivas.

Conforme exposto, acreditamos que os livros didáticos destinados ao ensino de Matemática devem apresentar os variados significados combinatórios nos problemas expostos; possibilidade do aluno perceber tais invariantes do conceito envolvidos, orientando o professor sobre este aspecto; apresentar e sugerir ao aluno o uso de variadas formas de representar o pensamento na resolução dos problemas; orientar a sistematização das estratégias de resolução e o esgotamento das possibilidades para a compreensão das situações combinatórias como um todo.

Ampliaremos mais a discussão sobre a Combinatória no Capítulo 4 no qual tratamos sobre estudos anteriores com os resultados de pesquisas recentes sobre a sondagem de conhecimentos de alunos e de processos de intervenções bem sucedidas no ensino e aprendizagem de tal conteúdo, uma vez que as pesquisas na área são também objeto de análise do presente estudo.

4 AS ORIENTAÇÕES CURRÍCULARES EM DOCUMENTOS OFICIAIS

4. AS ORIENTAÇÕES CURRÍCULARES EM DOCUMENTOS OFICIAIS

Considerada como objeto de ensino, a Combinatória está presente nas orientações curriculares de documentos oficiais. Sendo, de um modo geral, estes documentos a base para a materialização do ensino em nosso país, discorreremos neste capítulo sobre a importância dos documentos oficiais para o ensino e trazemos uma síntese de documentos curriculares que trazem orientações para a Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio). Analisaremos os seguintes documentos: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco. A escolha por estes documentos se deu por abranger todo o Ensino Fundamental. Além disto, os PCN, apesar de antigos, ainda estão em vigor e fizeram parte de um processo de mudança na educação brasileira no sentido de colocar em forma de documento curricular concepções, teorias, perspectivas e pressupostos que são fruto de pesquisas acadêmicas em suas respectivas áreas do conhecimento. Já os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco são novos e estão vigorando no nosso estado com orientações mais específicas à nossa região.

4.1 A importância das orientações curriculares para o ensino

Nem sempre a palavra currículo foi relacionada tão intimamente à educação. Ela era designada para referir-se a uma trajetória a ser percorrida ou um documento que organiza dados referentes a determinada pessoa, até ser a programação de ensino para nossos alunos. Desta forma, dentre a polissemia da palavra, o currículo é considerado em si como uma ação, um documento, uma programação, um curso.

A origem da palavra vem do latim – *curriculum* – significando corrida ou pista de corrida. É por isto que por muito tempo o currículo foi relacionado ao percurso que os estudantes deveriam seguir. Segundo Viegas-Neto (2002), é no final do século XVI e no início do século XVII que as palavras currículo e curso começaram a ser usadas para designar modos e recursos empregados para a organização das ações e representações espaço-temporais, no âmbito da educação escolarizada, ou seja, o currículo passa, no campo pedagógico, a associar-se intimamente à ideia de organização.

Mesmo encontrando seu espaço na educação, a palavra currículo não possui uma única concepção nesta área, derivando das diferentes formas que a educação é entendida historicamente, as influências que sofrem e os fatores, sociais, econômicos, históricos e culturais em que está inserida. Todas as concepções formuladas pretendem uma organização para tornar a educação mais eficiente, de acordo com o elemento que enfatiza.

Desta forma não podemos afirmar que existe uma concepção mais correta em detrimento de outra. Falar em currículo significar entrar na discussão sobre os elementos necessários para a organização do sistema escolar e seu ensino, sejam estes, os conhecimentos a serem estudados, os procedimentos de ensino ou as relações sociais construídas. O currículo é o conjunto de experiências escolares que acontecem na construção do conhecimento, em meio a relações sociais, num espaço físico e que contribuem para a construção de identidade dos educandos.

Em meio às discussões sobre currículo, a educação brasileira, antes de 1996, vivenciava um momento de estagnação. O país registrava um alto índice de analfabetismo, evasão escolar, além de boa parte da população estar abaixo da linha de pobreza (MORAES e SANTANA, 2011).

A lei maior que rege nosso sistema educacional é a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB — Lei nº 9394/96). Nela estão dispostos vários artigos e incisos de suma importância para a educação no nosso país, entre estes, o que concede a Educação Básica como um direito social e requisito fundamental para o desenvolvimento pleno da pessoa como indivíduo, cidadão e sujeito social, incluindo as etapas da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Além disto, esta lei determina sobre a formação docente na Educação Básica que deverá ser de nível superior, em curso de licenciatura, graduação plena em universidades e institutos superiores de educação.

Desta forma,

Essa LDB reforça a necessidade de se propiciar a todos a formação básica comum, o que pressupõe a formulação de um conjunto de diretrizes capaz de nortear os currículos e seus conteúdos mínimos, incumbência que, nos termos do art. 9º, inciso IV, é remetida para a União. Para dar conta desse amplo objetivo, a LDB consolida a organização curricular de modo a conferir uma maior flexibilidade no trato dos componentes curriculares, reafirmando desse modo o princípio da base nacional comum (Parâmetros Curriculares Nacionais), a ser complementada por uma parte diversificada em cada sistema de ensino e escola na prática, repetindo o art. 210 da Constituição Federal (BRASIL, 1997, p.14).

Além de ampliar para toda a Educação Básica, a fixação de conteúdos mínimos, foi a partir da LDB que ficou determinado que os estados e municípios organizassem diretrizes que orientassem os currículos na forma de garantir uma educação de qualidade e uma formação básica comum a todos, dando-se início à elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), um referencial orientador da prática docente na Educação Básica do país.

A LDB define, em síntese, que o currículo do Ensino Fundamental e Médio seja composto por estudos de língua portuguesa, matemática, do mundo físico e natural e da realidade social e política, enfatizando-se o conhecimento do Brasil, educação física e arte. O ensino de ao menos uma língua estrangeira se faz obrigatório a partir do 6º ano do Ensino Fundamental e o ensino religioso é facultativo.

Nos documentos relacionados à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, bem como nos PCN, deparamo-nos com leis e propostas, respectivamente, que foram formuladas visando ao bem comum do país, em especial da educação, que vem passando por transições que nos levam a adquirir conhecimento e visando um trabalho para a melhoria no processo do ensino e aprendizagem, sabendo pois que todos os brasileiros, independente de classe social, raça e religião têm direito à educação de qualidade e gratuita.

Assegurada pela Constituição Federal e pelo Estatuto da Criança e do Adolescente, a Educação Básica de qualidade é um direito de todo cidadão. Neste sentido foram criadas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica, documento este que estabelece a base nacional comum, responsável por orientar a organização, articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino brasileiras (BRASIL, 2013b).

Em decorrência das várias modificações no sistema de ensino, incluindo o Ensino Fundamental de nove anos e a obrigatoriedade do ensino gratuito dos quatro aos 17 anos de idade, em 2013 foi publicado uma Diretriz Curricular Nacional atualizada, levando em consideração a ampliação dos direitos à educação das crianças e adolescentes e também de todos aqueles que não tiveram oportunidade de estudar em idade regular.

Segundo estas diretrizes,

Um dos fundamentos do projeto de Nação que estamos construindo, a formação escolar é o alicerce indispensável e condição primeira para o exercício pleno da cidadania e o acesso aos direitos sociais, econômicos, civis e políticos. A educação deve proporcionar o desenvolvimento humano na sua plenitude, em condições de liberdade e dignidade, respeitando e valorizando as diferenças (BRASIL, 2013b, p. 4)

Ancorados nesta nova realidade e visando subsídios para a formulação de Novas Diretrizes Curriculares Nacionais, a Câmara da Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, em parceria com as entidades estaduais e municipais, professores e demais profissionais da educação, instituições de formação de professores, mantenedoras do ensino privado e de pesquisadores da área, promoveu uma série de estudos, debates e audiências públicas. Resultaram assim, em Novas Diretrizes Curriculares da Educação Básica, para que,

crianças, adolescentes, jovens e adultos que ainda não tiveram a oportunidade, possam se desenvolver plenamente, recebendo uma formação de qualidade correspondente à sua idade e nível de aprendizagem, respeitando suas diferentes condições sociais, culturais, emocionais, físicas e étnicas (BRASIL, 2013b, p. 4)

Diante disto e reconhecendo estas múltiplas condições em nosso país, além de Diretrizes Gerais para Educação Básica, abrangendo a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e Médio, também fazem parte deste documento diretrizes para a Educação no Campo, a Educação Indígena, a Quilombola, a Educação Especial, a Educação de Jovens e Adultos em Situação de Privação de Liberdade nos estabelecimentos penais e para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, assim como também para a Educação de Jovens e Adultos, a Educação Ambiental, a Educação em Direitos Humanos, a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro- Brasileira e Africana.

A perspectiva é de que essas diretrizes possam orientar e auxiliar as instituições de ensino e os sistemas educacionais na elaboração de suas políticas de gestão escolar e projetos político-pedagógicos, a fim de garantir o acesso, a permanência e o êxito dos estudantes tendo como base uma educação de qualidade e igualitária para uma sociedade mais justa. Este documento se difere dos Parâmetros Curriculares Nacionais e dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco por não apresentar orientações referentes a conteúdos a serem trabalhados, desta forma, não se constituindo parte da análise, mas nos ajudam a refletir sobre a

importância de diretrizes que orientem o sistema educacional como um todo, assegurando direitos e qualidade na educação.

Desta forma, os documentos curriculares, tais como os PCN, aparecem como suportes e orientações importantes a favor do crescimento e valorização dos trabalhos realizados nas escolas, almejando que os objetivos traçados possam ser alcançados com êxito, e assim a melhoria da qualidade da educação e a formação do cidadão e sujeito social, a favor do crescimento do nosso país.

Hoje o currículo se configura como um importante objeto de estudo, em um campo amplo de pesquisas e investigações. Contudo, se caracteriza pelas lutas e disputas por espaço e status. Este aspecto dificulta a seleção e organização do currículo, levando-se a questionamentos à estrutura do seu conteúdo a ser escolhido: conhecimentos, habilidades, atitudes, valores e competências. Devemos ainda levar em consideração que este processo se perfaz em meio a interesses que não passam apenas pelo campo pedagógico. Ele está imerso em influências e intenções políticas, econômicas, sociais e culturais, atrelado ainda a uma concepção de educação definida pelas partes envolvidas, que podem ainda apresentar divergências entre si.

É fato, ainda, que muitos educadores não corroboram com a ideia de um currículo unificado, apontando que desta forma os docentes perderiam sua autonomia no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, o que se pretende com a organização curricular comum é uma base que norteie este processo de ensino, uma vez que a forma de lidar com tais diretrizes serão múltiplas e diversificadas, de acordo com o espaço em que será desenvolvida. Este currículo comum é, ainda, construído em regime de colaboração com flexibilidade de execução, para a garantia da mobilização de conhecimentos nacional e globalmente relevantes, com saberes que respeitem a diversidade cultural.

4.2 Orientações curriculares para o Ensino Fundamental

Tendo visto a importância dos documentos oficiais para o ensino e a educação, discorreremos, a seguir, sobre os documentos que farão parte da análise deste estudo indicando suas origens e finalidades. A escolha destes documentos, e não outros, ocorreu, como afirmado acima, por abranger todo o Ensino Fundamental e por serem documentos oficiais importantes em âmbito nacional (PCN) e local (os

Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco) com propostas pedagógicas pertinentes ao currículo e ao trabalho docente.

4.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são documentos que orientam a prática docente em cada ciclo da Educação Básica, constituindo-se um referencial para a educação do país. Desta forma, temos, ainda, enquanto a Base Nacional Curricular Comum não entra oficialmente em vigor, ao nosso dispor o PCN para o 1º e 2º ciclo do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997), 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) e Ensino Médio (BRASIL, 2000; BRASIL, 2002).

Sendo assim, este documento tem a função de

orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual (BRASIL, 1997, p. 13).

Além disso, este documento se configura como uma proposta flexível, podendo ser colocada em prática em qualquer região do país, pois se constituiu de reflexões e discussões de diferentes membros da sociedade educacional em diferentes esferas. Desta forma, busca atingir as necessidades do sistema educacional procurando respeitar as diversidades culturais, regionais, étnicas, religiosas e políticas de uma sociedade ampla e ao mesmo tempo estratificada, buscando a educação formar cidadãos conscientes e atuantes, proporcionando ainda a igualdade de direitos e a democracia.

Seu processo de elaboração iniciou-se a partir do estudo de propostas curriculares de estados e municípios brasileiros, da análise realizada pela Fundação Carlos Chagas sobre os currículos oficiais e do contato com informações relativas a experiências de outros países. Fizeram parte da análise, ainda, elementos retirados do Plano Decenal de Educação, de pesquisas nacionais e internacionais, dados estatísticos sobre desempenho de alunos do Ensino Fundamental (pois até então só este nível era obrigatório), assim como relatos de experiências de sala de aula apresentados em eventos científicos e publicações. Após várias reformulações, ao

longo de discussões e avaliações por especialistas em educação e as referidas secretarias municipais e estaduais, o documento foi composto e instituído no país.

Além de possuir orientações para cada área do conhecimento, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Arte e Educação Física, os PCN do Ensino Fundamental (Brasil, 1997 e 1998) dispõem também de orientações referentes aos Temas Transversais: Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Meio Ambiente e Saúde e Trabalho e Consumo, este último apenas nos anos finais.

Os PCN do Ensino Fundamental (Brasil, 1997 e 1998) também indicam objetivos a serem alcançados pelos alunos, de forma que estes sejam capazes de: compreender a cidadania como participação social e política; posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais; conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal; conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações; perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente; desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades; conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida, utilizar as diferentes linguagens como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias; saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos; questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los utilizando o raciocínio lógico e a análise crítica.

O PCN do Ensino Médio leva em consideração a mudança ocorrida com este ciclo de ensino no Brasil, uma vez que a consolidação do Estado democrático, as novas tecnologias e as mudanças na produção de bens, serviços e conhecimentos exigem que a escola possibilite aos alunos integrarem-se ao mundo contemporâneo nas dimensões fundamentais da cidadania e do trabalho (BRASIL, 2000). Desta forma, em um trabalho conjunto com educadores de todo o país e seguindo os princípios da LDB, foi construído um novo perfil curricular apoiado em competências básicas para a inserção de jovens na vida adulta.

Estas novas orientações buscam desatrelar do ensino dos jovens elementos como a descontextualização, a mecanização e o acúmulo de informação, que não

atribuíam significado ao conhecimento escolar, incentivo ao raciocínio e a capacidade de aprender. Sendo assim, “estes Parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias” (BRASIL, 2000, p.4).

Levando em consideração a reforma curricular do Ensino Médio, os PCN deste ciclo dividem o conhecimento escolar em três áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. De acordo com este documento, estas áreas levam em consideração as relações dos sujeitos seja no campo técnico-científico, seja no âmbito do cotidiano da vida social, reunindo aqueles conhecimentos que compartilham objetos de estudo e, portanto, mais facilmente se comunicam, criando condições para que a prática escolar se desenvolva numa perspectiva de interdisciplinaridade (BRASIL, 2000).

Dois anos após a publicação deste documento foi publicado o PCN+ Ensino Médio com orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, abrangendo as três áreas do conhecimento, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Reconhecendo a extensa dimensão territorial do nosso país e a pluralidade cultural de nossos habitantes o PCN de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental apontam que,

Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania (BRASIL, 1998, p. 5).

Desta forma, este documento se apresenta como um referencial comum a todo o Brasil no sentido de oferecer aos alunos conhecimentos básicos para o exercício da cidadania, função esta da educação em qualquer espaço do país. Não são orientações estáticas, ou uma receita pronta, mas um apoio às discussões e ao desenvolvimento do projeto educativo das escolas e um instrumento para a reflexão sobre a prática pedagógica, o planejamento e seleção de materiais didáticos que

possam contribuir para a formação do profissional da educação e, assim, para a qualidade do ensino no país.

Isto acontece por se tratar de uma proposta flexível que abre espaço para decisões regionais e locais a respeito de currículo, já que são parâmetros e não imposições, não sendo assim um modelo homogêneo e impositivo, que se sobrepõem à diversidade sociocultural das diversas regiões do país, assim como da autonomia dos professores e comunidade escolar.

4.2.2 Os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco

A LDBEN determina, em seu art. 26, que “os currículos do Ensino Fundamental e Médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela”. Desta forma, além de parâmetros e diretrizes em âmbito nacional, estados do nosso país também apresentam orientações com características locais para o desenvolvimento da educação em respeito à diversidade cultural.

Os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) se configura como um documento resultante do trabalho de especialistas das diversas áreas do conhecimento, comunidade acadêmica, das secretarias municipais de educação, e, também, dos professores da rede pública através de debates sobre sugestões, metas e objetivos de ensino para cada componente curricular, sob a avaliação destes colaboradores.

O documento dispõe de um exemplar de concepções que traz uma introdução sobre a proposta dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco, seguido de um para cada disciplina: Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências, Química, Física, Biologia, Filosofia e Sociologia, Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Espanhola. As disciplinas que são lecionadas em todos os ciclos regulares estão no mesmo documento e em outro para a EJA.

As orientações curriculares contidas neste documento apresentam expectativas de aprendizagem para alunos de todas as etapas da Educação Básica, sendo o Ensino Fundamental (anos iniciais e finais) e Médio, incluindo a Educação de Jovens e Adultos (EJA). A opção por expectativas de aprendizagem adotada nos

Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco se baseou em três argumentos significativos de Almeida e Silva (2012).

O primeiro argumento trata da ressignificação da perspectiva de currículo ainda vigente, de uma lista de conteúdos, habilidades e competências. Neste sentido, tem-se uma mudança de foco no processo de ensino e aprendizagem que passa a preocupação com o ensino do professor, para a preocupação com a aprendizagem dos estudantes.

O segundo aborda a compreensão de currículo como percurso formativo que implica tempos necessários para aprendizagens significativas. Ou seja, na perspectiva destes parâmetros é levado em consideração à reorganização dos tempos e espaços escolares, em atendimento às diferenças dos estudantes, em busca da consolidação de aprendizagens significativas (PERNAMBUCO, 2012).

E por último o argumento de expectativas de aprendizagem como expectativas de direito à aprendizagem, em termos de “capital” cultural, científico, histórico, tecnológico, estético, moral (ALMEIDA e SILVA, 2012). Sendo assim, assegurar um preceito constitucional de educação como direito a todos e de qualidade, que no seu caráter mais concreto seria de aprendizagens significativas.

Desta forma, os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco apresentam diretrizes baseadas em expectativas de aprendizagem que irão auxiliar no planejamento e acompanhamento escolar dos professores para com os alunos no Estado, visando a contribuir para o fortalecimento da educação em Pernambuco, levando em consideração as constantes mudanças da sociedade tecnológica e as particularidades desta região. Ou seja,

Este projeto dá sequência ao processo de transformação que vem acontecendo na educação pernambucana, sem perder de vista o princípio norteador da política educacional do estado, a educação em direitos humanos, fundamental para a construção de uma sociedade com justiça social (PERNAMBUCO, 2012, p. 14).

Este documento tem por objetivo contribuir para a qualidade da educação do estado de Pernambuco, através do ensino, pautado na Educação de Direitos Humanos, fundamental para a construção de uma sociedade com justiça social e que propicie para os pernambucanos uma educação para a formação plena do cidadão no contato com os conhecimentos desenvolvidos na sociedade.

É por meio deste referencial que os professores poderão refletir e trilhar caminhos para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que terá clareza dos objetivos e metas a serem alcançadas em cada componente curricular e ano de ensino. Diante disto, os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco se configuram como um instrumento de reflexão para o trabalho docente e não uma receita pronta a ser executada. Para tal, os professores terão ao seu dispor cadernos específicos para cada componente curricular e com um caderno sobre as concepções teóricas que embasam o processo de ensino e aprendizagem da rede pública.

5 A PESQUISA CIENTÍFICA

5. A PESQUISA CIENTÍFICA

Neste capítulo iremos tratar sobre as contribuições da pesquisa científica, em especial a educacional, para o ensino. Apresentamos algumas concepções sobre a pesquisa, sua contribuição para a formação do profissional em educação como forma de intervir na realidade e promover melhorias na qualidade da educação e por fim algumas pesquisas recentes sobre o ensino da Combinatória e o conhecimento de alunos sobre tal conteúdo. Desta forma buscamos apresentar estudos de sondagem sobre o conhecimento de alunos da Educação Básica² sobre a Combinatória e intervenções de ensino bem sucedidas que nos apontam práticas e elementos importantes para o ensino deste conceito.

A escolha por pesquisas com alunos é que, a partir do que foi possível encontrar, têm-se como resultados, de um modo geral, que alunos compreendem problemas combinatórios mesmo antes de sua introdução formal na escola ou antes de um estudo mais sistematizado acerca da temática. Estes resultados se coadunam com o que os documentos oficiais defendem sobre trabalhar a Combinatória antes do Ensino Médio.

5.1 As contribuições da pesquisa científica para o ensino

A palavra pesquisa apresenta várias definições. Segundo Gatti (2002), “pesquisa é o ato pelo qual procuramos obter conhecimento sobre alguma coisa” (p. 9), neste sentido ela surge pela necessidade do ser humano de adquirir respostas advindas de inquietações, perguntas e dúvidas a respeito de algum tema ou problemática, buscando respaldo para pensamentos e afirmações. A pesquisa em sua particularidade pode se apresentar como pesquisa de mercado, pesquisa científica, pesquisa de opinião, etc. O tipo que nos interessa é a pesquisa científica.

Visando ao campo científico, Demo (1987) afirma que “pesquisa é a atividade científica pela qual descobrimos a realidade” (p. 23), referindo-se à realidade social, alvo de investigação das ciências humanas e sociais, assim como, as ciências sociais aplicadas.

² Mesmo o foco do estudo estando no Ensino Fundamental, optamos em apresentar os resultados de pesquisa também do Ensino Médio para termos uma melhor compreensão de como este conhecimento vem sendo desenvolvido ao longo de todo o período da escolarização básica.

Salomon (2001) apresenta sua concepção de pesquisa e as operações intelectuais envolvidas neste processo apontando que é "trabalho empreendido metodologicamente, quando surge um problema, para o qual se procura a solução adequada de natureza científica" (p. 152). Desta forma, pesquisa é a investigação de um problema, com base em construtos teóricos, através de um percurso metodológico, com resultados válidos. Ressaltamos ainda a provisoriedade do conhecimento científico que é passivo de constantes modificações, pois está aberto a novas investigações e constatações.

Marconi e Lakatos (2005, p. 80) que definem a pesquisa, ainda, como "uma sistematização de conhecimentos, um conjunto de proposições logicamente correlacionadas sobre o comportamento de certos fenômenos que se deseja estudar", pois é através da normatização de estudo que a pesquisa apresenta que trará contribuições na formação profissional nas mais diversas áreas de estudo.

Nos últimos anos, vivenciamos uma crescente expansão da pesquisa em educação no Brasil, que se refere tanto ao crescimento no número de pesquisas desenvolvidas em decorrência da pós-graduação no país, quanto no tocante às temáticas, referenciais teóricos e abordagens metodológicas utilizadas.

Os fenômenos educacionais estão situados entre as ciências humanas e sociais e desta forma, os estudos realizados nesta área não poderiam deixar de sofrer as influências das evoluções ocorridas nestas ciências. Inicialmente tais fenômenos atendiam a investigações em modelos das ciências físicas e naturais, ou seja, eram analisados de forma isolada, com a decomposição de variáveis. Entretanto, com a evolução das pesquisas na área foi percebido que poucos estudos educacionais poderiam ser tratados desta forma, pois, em educação, os fatos acontecem tão entrelaçados que fica difícil realizar o isolamento das variáveis envolvidas para apontar claramente quais são as responsáveis por determinado resultado (ABREU e ALMEIDA, 2009).

Com o passar dos anos a pesquisa científica vem adquirindo cada vez mais evidência e significância na formação acadêmica e profissional, tornando-se um dos eixos de ensino nas instituições educacionais de ensino superior. Desta forma, conhecimento e pesquisa estão imbricados no processo de formação, uma vez que adquirir conhecimento não se trata apenas de saber algo sobre um determinado objeto ou fenômeno, mas a capacidade de utilizá-lo e extrair todos os recursos que ele possa oferecer para a sociedade (AMARAL, 2010).

É através da pesquisa educacional que descobrimos formas de intervir na realidade e contribuir para a melhoria da qualidade da educação, seja no ensino ou na gestão de nossas escolas. A importância da pesquisa se dá porque é através dela que podemos diagnosticar aspectos como níveis de aprendizado e dificuldades apresentadas por alunos, recursos de ensino, a formação do profissional em educação e as políticas públicas e de gestão escolar.

Além de servir para a elaboração de documentos norteadores do ensino, como os citados no capítulo anterior, a pesquisa também se faz importante para a prática docente dos profissionais que atuam nas salas de aula do nosso país. Isso ocorre, uma vez que ela se apresenta como instrumento enriquecedor para o trabalho do professor, estando inserida nas atividades cotidianas do contexto escolar e refletindo assim no ensino e aprendizagem dos nossos alunos. Diante disto, os profissionais em educação a definem como princípio da formação docente, que possibilita a transformação dos saberes na busca de melhorias para a prática educacional (JUSTINO, 2011).

Justino (2011) apresenta ainda que o professor, ao realizar a pesquisa tem possibilidade de compreender o processo de construção do conhecimento, por meio de questionamento da sua própria prática. A imbricação entre formação e pesquisa melhora a capacitação profissional, contribui para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento de sua prática.

Desta forma, defendemos neste estudo a relevância das constatações de pesquisas sobre o ensino e conhecimento de alunos da Combinatória para analisarmos a relação destes resultados, com as orientações curriculares e em um dos recursos de ensino mais utilizados pelo professor em sala de aula, o livro didático.

5.2 A pesquisa em Combinatória

Objeto de estudo da Matemática, a Combinatória tem sido alvo de várias pesquisas nos últimos anos, visando investigar como este raciocínio se desenvolve, metodologias de ensino, recursos didáticos, entre outros elementos que envolvem sua aprendizagem. Sobre esta ascensão Silva e Pessoa (2015), investigando o estado da arte nesta área, aponta um número crescente de estudos publicados em eventos científicos sobre este conceito entre os anos de 2009 e 2013. Silva e

Pessoa (2015), ao comparar seus dados ao estudo de Borba, Rocha, Martins e Lima (2009), verificou que estas autoras encontraram 25 trabalhos sobre a temática em um período de nove anos e, no estudo mais recente, em apenas cinco anos (2009 a 2013), foram encontradas 43 produções.

Dentre as pesquisas encontradas por Silva e Pessoa (2015), foi identificado um quantitativo expressivo de estudos de sondagem sobre o conhecimento de Combinatória de alunos. Segundo a autora,

Os estudos de sondagem se apresentam como um importante instrumento para a melhoria da qualidade de ensino, pois é a partir das investigações sobre a compreensão dos alunos em relação a determinado conhecimento que se pode ter uma base de como transformar a realidade, e no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio combinatório não é diferente. Dentre os estudos investigados foi encontrado um número expressivo de pesquisas nesta categoria e que ainda se expressam qualitativamente por abranger os diferentes níveis de ensino, ou seja, por investigar o conhecimento de alunos ao longo de toda a Educação Básica, como recomendado em documentos oficiais, assim como, de futuros professores que irão ensinar Combinatória. (SILVA e PESSOA, 2015, p. 681).

O estudo também encontrou pesquisas que apresentam formas bem sucedidas de ensinar a Combinatória, estudos sobre conhecimento de professores e sobre recursos de ensino, além de relatos de experiências. Pôde-se concluir, na pesquisa de Silva e Pessoa (2015), que existe um número crescente de estudos que tratam especificamente deste campo, com maior ênfase nos estudos de sondagem, os quais, de um modo geral, evidenciam que os alunos são capazes de desenvolver o raciocínio combinatório desde cedo. As pesquisas revisadas apontaram a necessidade de propostas de formação continuada para suprir as dificuldades dos professores, de um preparo minucioso dos livros didáticos com orientação ao professor, a contribuição de softwares educativos para o ensino e a importância de metodologias baseadas nas estratégias apresentadas pelos alunos (SILVA e PESSOA, 2015).

Acreditando na pesquisa científica como forma de descobrir a realidade, como estudantes aprendem e lidam com conteúdos, como professores são formados e como são as suas práticas, a qualidade dos recursos, dentre outros, e, assim poder trazer contribuições para a melhoria da qualidade da educação, apresentaremos

alguns estudos recentes sobre o conhecimento de alunos, ensino e aprendizagem da Combinatória, que posteriormente serão base das análises deste estudo.

Realizando buscas em eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil no período de 2009 a 2013 relacionados à Educação Matemática, que tratem de sondagem de alunos sobre a Combinatória e intervenções de ensino, encontramos 12 pesquisas que abrangem todos os níveis da escolarização básica. Com relação às sondagens, este tipo de estudo busca identificar conhecimentos de alunos dos diferentes ciclos da Educação Básica, a fim de que se possa, a partir destes resultados, por exemplo, elaborar formas de intervenções de ensino mais próximas dos pensamentos dos alunos e assim avançar na construção do conhecimento de forma significativa para os educandos. Silva e Pessoa (2015) aponta em seu estudo que os estudos de sondagem sobre a Combinatória, apresentam o maior percentual de pesquisas publicadas recentemente sobre as investigações deste conceito. Dentre as pesquisas analisadas, nove são sondagens.

Nos anos iniciais de escolarização temos como referência o trabalho de Matias, Santos e Pessoa (2011) que investigaram o raciocínio combinatório de crianças da Educação Infantil. As autoras tiveram como objetivos específicos identificar estratégias utilizadas pelas crianças ao resolverem problemas de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação, analisar os invariantes de Combinatória percebidos por eles e investigar em quais significados de Combinatória estas crianças apresentam maior facilidade.

Sendo assim, os sujeitos da pesquisa foram alunos de duas escolas públicas, totalizando 21 alunos do Grupo V, na faixa etária de 5 a 6 anos de idade. Os dados foram coletados no final do ano letivo, através de entrevista clínica com cada participante, no qual cada aluno resolveu, individualmente, quatro questões de Combinatória, uma de cada tipo (produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação) acompanhado por uma das pesquisadoras. A pesquisadora lia o enunciado da questão e acompanhava todo o processo de resolução, anotando cada passo relacionado às estratégias e indagações do participante. As questões eram resolvidas pelas crianças através de fichas com imagens dos elementos das questões fornecidas pelas pesquisadoras que continham a quantidade a mais que as necessárias. O áudio das entrevistas foi gravado e transcrito e a análise dos dados foi feita a partir das entrevistas e das fichas dos alunos

A partir das análises, as autoras perceberam que, apesar da dificuldade em esgotar as possibilidades, as crianças na Educação Infantil possuem um raciocínio combinatório, podem encontrar combinações e saber a diferença entre elas. Foi observado que as crianças conseguem perceber alguns dos invariantes da Combinatória, acreditando que a utilização do material manipulativo - espaços nas fichas e o uso de figuras para colagem - contribuiu para que isto acontecesse. As crianças participantes tiveram maior facilidade de percepção nos problemas de produto cartesiano, seguido de arranjo, combinação e, por último, permutação.

Desta forma, através deste estudo foi possível concluir que este conhecimento pode ser trabalhado desde cedo, pois as crianças apresentam indícios de compreensão e percepção dos invariantes envolvidos que poderá auxiliar no desenvolvimento e solução de algumas situações, dentro e fora da escola, através de um trabalho sistemático da Combinatória, um conceito matemático que pode e deve ser expandido, tornando-o mais significativo às crianças (MATIAS, SANTOS e PESSOA, 2011).

Outro estudo realizado com alunos de anos iniciais, porém no final deste ciclo, é o de Pessoa e Santos (2011) que investigaram alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias. As autoras realizaram entrevistas individuais com vinte crianças de uma escola pública de Pernambuco, divididas em quatro grupos, cada grupo respondendo a um bloco de questões específico. Desta forma, buscaram analisar a compreensão dos alunos acerca da Combinatória, os tipos de respostas apresentados e a possibilidade de influência do tipo de problema e da grandeza numérica na resolução. O teste foi composto por dois problemas de cada tipo (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano) e em cada grupo foi organizado de forma diferente em função da grandeza numérica (números que levam a uma maior quantidade de possibilidades e números que levam a uma menor quantidade de possibilidades) e do grau de dificuldades dos tipos de problemas de acordo com o estudo de Pessoa e Borba (2009).

Através dos resultados as autoras apontaram para a importância da grandeza numérica na resolução dos problemas, ou seja, questões com números que levam a uma menor quantidade de possibilidades foram mais facilmente resolvidos do que problemas com números que levavam a uma maior quantidade de possibilidades. Com relação à capacidade de diferenciar cada uma das questões de acordo com os invariantes das mesmas, em sua maioria, os alunos percebem a importância da

ordem dos elementos em problemas do tipo “arranjo” ou “permutação”, mas não conseguem explicitar tal percepção quando são colocados diante de dois problemas, um com a ordem sendo importante e outro não (arranjo e combinação), por exemplo (PESSOA E SANTOS, 2011).

Com relação aos tipos de respostas, foi possível perceber que quando os alunos sistematizavam as possibilidades, obtinham maior êxito do que os alunos que não sistematizavam suas respostas. Desta forma, é importante o papel do professor como mediador deste processo de aprendizagem, ajudando o aluno a refletir sobre seus conhecimentos, pois muitas vezes, basta uma pergunta para que o estudante perceba um invariante ou alguma característica da questão para compreendê-la. As autoras defendem, por fim, o ensino sistemático da Combinatória em sala de aula desde os anos iniciais da escolarização básica, fazendo-se do uso das estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos.

Outra pesquisa desenvolvida visando à investigação de conhecimentos de alunos dos anos iniciais foi a de Silva e Spinillo (2011). As pesquisadoras investigaram como a explicitação de princípios que regem o raciocínio combinatório poderia auxiliar crianças na resolução de problemas de produto cartesiano. O estudo foi desenvolvido com quarenta crianças em idade entre sete e oito anos, resolvendo oito problemas de produto cartesiano em duas situações distintas: uma em que os princípios invariantes estão implícitos e outra em que estes princípios estão claramente mencionados. À metade dos participantes foi apresentada a primeira situação, seguida pela segunda situação e à outra metade foi feito o processo contrário. O objetivo foi comparar estes grupos a fim de observar se a ordem em que as situações foram apresentadas (implícito-explicito versus explicito-implícito) teve um efeito sobre a solução dos problemas pelas crianças em cada grupo.

Os resultados do estudo indicaram que, de modo geral, as crianças se saíram melhor na situação com os problemas explícitos do que na situação com os problemas implícitos. Ou seja, quando um problema explicita em seu enunciado os princípios básicos do raciocínio combinatório, as crianças são capazes de resolver os problemas corretamente através da adoção de estratégias adequadas. Segundo as autoras, a explicitação destes invariantes chama atenção da criança para propriedades específicas deste tipo de problema, como a difícil correspondência de um-para-muitos apresentada por crianças nesta faixa etária, cruciais para a resolução de problemas combinatórios. Além disso, uma vez apreendido estes

princípios básicos, as crianças são capazes de percebê-los em situações em que não estão explicitados.

Com relação às estratégias identificadas, foi percebido que mesmo ocorrendo erros e apresentando resposta incorreta, as crianças apresentavam a compreensão da correspondência um-para-muitos. As estratégias que levavam à resposta correta eram diversas, que iam desde a simples contagem das combinações estabelecidas para a adição repetida e até a utilização da multiplicação, que permite à criança gerar todas as combinações possíveis. O estudo aponta, por fim, que crianças podem resolver problemas de produto cartesiano desde cedo e que a explicitação das propriedades invariantes é importante para a compreensão e o sucesso na resolução deste problema combinatório.

Borba, Pontes, Silva e Martins (2013) buscaram evidências de que as etapas de escolha de elementos (como enunciado no princípio fundamental da contagem) poderiam influenciar a resolução de problemas combinatórios. Os participantes do estudo foram 41 alunos de 5º ano e 42 alunos de 7º ano de duas escolas públicas. Os mesmos resolveram oito problemas (dois de cada tipo: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação), dos quais metade das questões era com três etapas de escolha e a outra metade com quatro etapas.

Para a análise de desempenho por ano de ensino foram consideradas as repostas em categorias de erros (sem nenhuma evidência de raciocínio combinatório), acertos parciais (com três subcategorias - acerta uma possibilidade, mais de uma possibilidade ou mais da metade das possibilidades) e acertos totais. Neste sentido, pode-se observar no 5º ano que nenhum dos alunos apresentou a resposta correta aos problemas ou, ao menos, listou mais da metade das possibilidades. O índice de erros foi muito elevado, seguido pela apresentação de mais de uma possibilidade e por apenas uma possibilidade listada. Com relação à influência das etapas de escolha neste ano, o número de alunos do 5º ano que apresentou mais de uma possibilidade correta nos problemas de quatro etapas de escolha foi menor do que esse tipo de resposta para três etapas. O número de erros também foi maior para quatro etapas.

No 7º ano alguns alunos conseguiram apresentar respostas corretas e respostas com mais da metade das possibilidades listadas. As autoras ressaltam que o desempenho foi melhor quando eram três etapas de escolha. Com quatro etapas de escolha, tanto os alunos do 5º ano quanto os do 7º ano apresentaram um

menor total de respostas parcialmente corretas. Nos testes estatísticos realizados não foram observadas diferenças significativas entre os dois anos escolares em nenhum dos tipos de problema, tanto nos problemas de três etapas de escolha, quanto nos de quatro etapas. Dessa forma, apesar de aparentes diferenças entre os dois anos escolares, estatisticamente as diferenças não foram significativas. Os alunos do 5º ano apresentaram desempenho significativamente mais fraco em problemas de quatro etapas, comparado como os de três etapas, apenas em situações de permutação. Já os alunos de 7º ano apresentaram diferenças significativas em todos os tipos de problemas. Confirmou-se a hipótese de que dificuldades, em especial com permutações, podem estar fortemente relacionadas ao número de etapas de escolha das situações e essa variável deve ser levada em consideração quando do ensino da Combinatória. Na análise de desempenho por etapas de escolha no 5º ano o problema de produto cartesiano apresentou-se mais fácil tanto com três etapas como com quatro etapas. A permutação que em estudos anteriores sempre se apresentava como mais difícil só apresentou este resultado quando apresentava quatro etapas de escolha. Para a maioria dos tipos de problema (produto cartesiano, arranjo e permutação) resolver a situação quando a mesma envolvia três etapas de escolha foi mais fácil que resolver quando quatro etapas de escolha eram envolvidas. Contudo, estatisticamente só para a permutação a diferença foi significativa. Já no 7º ano a diferença de desempenho por etapas de escolha foi mais marcada, apresentando diferenças significativas em todos os tipos de problemas.

As autoras apresentam como considerações que as etapas de escolha de elementos constituem uma variável que tem influência na resolução de problemas de Combinatória. Constataram assim que, dificuldades, em especial com permutações, podem ter forte relação ao número de etapas de escolha das situações e essa variável deve ser levada em consideração quando do ensino da Combinatória.

Silva, Pontes e Teixeira (2013) investigaram o desempenho de estudantes do 3º ano do Ensino Médio na resolução de problemas de Análise Combinatória, verificando as respostas dos alunos por tipos de problema (produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação) e analisando o desempenho dos alunos em função das etapas de escolha quando são controladas em situações-problema que permitiram aos estudantes refletir sobre o Princípio Fundamental da Contagem. Para

tal foi aplicado um teste de sondagem com 37 alunos do 3ª ano do Ensino Médio, contendo oito problemas combinatórios, dois de cada tipo, que variavam estruturalmente entre quatro e cinco etapas de escolhas, propondo ao estudante assinalar a resposta considerada correta.

Diante dos resultados as autoras evidenciaram um percentual de 29,4% de acertos, considerado baixo, mesmo a combinatória sendo um conteúdo obrigatório neste ciclo (BRASIL, 1997), podem este desempenho ser justificado pelo pouco conhecimento do Princípio Fundamental da contagem. O melhor desempenho foi nas questões de produto cartesiano, 48,6% com quatro etapas de escolha e 67,7% com cinco etapas. Em contrapartida, os problemas de combinação e permutação (13,6% ambos) com quatro etapas de escolha apresentaram o desempenho mais baixo. Com relação apenas ao tipo de problema, produto cartesiano apresentou-se como mais fácil e combinação como mais difícil. De modo geral, os problemas que apresentavam cinco etapas de escolha apresentaram maior índice de acertos em relação aos com quatro etapas. Desta forma, o estudo aponta que os alunos obtiveram uma média de acerto abaixo de 30%, mesmo já estando no final da escolarização básica, levando-se a acreditar que os estudantes possuem ainda pouco conhecimento sobre a Combinatória. Mesmo obtendo um resultado melhor com cinco etapas de escolha, a diferença para quatro etapas foi apenas significativa nos problemas de produto cartesiano. Com relação ao tipo de resposta verificou-se uma grande quantidade de multiplicações incorretas (35,5 %). Através deste estudo foi possível verificar a influência que as etapas de escolha têm na resolução dos problemas de Combinatória.

Borba e Braz (2012) buscaram ampliar a análise dos desempenhos de alunos do Ensino Fundamental em problemas combinatórios, agora em relação aos condicionais. Desta forma, as autoras puderam observar o que é necessário na compreensão de problemas combinatórios condicionais e a partir de qual ano escolar grande parte de alunos se mostra preparado a pensar num tipo mais complexo de problema de Combinatória. Foi objetivo ainda, criar uma classificação de problemas combinatórios condicionais, tomando como referência aspectos cognitivos; verificar níveis de compreensão de problemas combinatórios condicionais entre alunos do 5º ano; observar e classificar estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios condicionais; e comparar os desempenhos e compreensões de alunos do 5º ano com alunos do 7º e 9º anos.

A classificação dos problemas teve como base livros didáticos da Educação Básica e o estudo de Homa (2011). Com relação aos livros, estes apresentavam classificações dos problemas condicionais baseados critérios essencialmente matemáticos. No estudo de Homa (2011) a categorização segue critérios didáticos, por levar em consideração além dos livros o julgamento de professores licenciados que classificam os problemas por nível de dificuldade. Foi possível, ainda, considerar critérios cognitivos na categorização, nos quais é levado em consideração as relações combinatórias que precisam ser percebidas pelos alunos ao resolverem os problemas. Sendo assim as influências de pensamento seriam de distintas relações, tais como a escolha de elementos isolados ou de subconjuntos de elementos; a explicitação (ou não) de elementos que devem pertencer às possibilidades levantadas; determinada ordem de elementos; posicionamento; e/ou proximidade dos mesmos. Foram encontradas 21 categorias de problemas condicionais, relacionadas neste estudo apenas aos problemas de arranjo.

Para verificar desempenho dos alunos, foram elaborados dois testes contendo metade dos exemplos de cada categoria em cada teste, que foram aplicados em turmas de 5º (18 alunos), 7º (19 alunos) e 9º anos (16 alunos) do Ensino Fundamental, pois se buscou verificar, além da aplicabilidade das questões, em que ano os alunos começam a apresentar maior compreensão de problemas combinatórios condicionais. Pôde-se observar estabelecimento de relação com as condições em todas as séries analisadas, porém não resultando obrigatoriamente no acerto da questão, havendo apenas 02 acertos completos no 5º ano, 04 acertos completos no 7º ano e 10 acertos completos no 9º ano. Contudo, o estabelecimento de relação com as condições nas demais questões mostra que, mesmo estando ainda no Ensino Fundamental, os alunos participantes já demonstram alguma compreensão de problemas combinatórios condicionais. Esse estabelecimento de compreensão das condições foi apresentado por várias representações, com ênfase maior na listagem. Constatou-se que a compreensão dos problemas combinatórios condicionais pode ser percebida desde o 5º ano, uma vez que estes, assim como os do 7º ano conseguiram estabelecer relação em 17 dos 21 tipos. Os do 9º conseguiram estabelecer relação em 14 dos 21 tipos. No 5º ano o problema com maior índice de compreensão (por sete alunos) foi do tipo mais de um elemento não explicitado fixo, enquanto no 7º ano seis alunos compreenderam melhor o problema do tipo elemento fixo em determinada posição. No 9º ano o problema do tipo pelo

menos um determinado elemento apresentou maior índice de compreensão (por cinco alunos). Com relação a maior dificuldade de compreensão observou-se quando as condições são conjuntas, ou seja, envolvem mais de uma das relações de escolha, ordenação, posição ou proximidade. Concluindo-se, assim, que quanto mais relações envolvidas na situação combinatória condicional, mais esforço cognitivo será necessário para o aluno. Desta forma, com os alunos do 5º ano já apresentando a compreensão de problemas combinatórios condicionais, indica-se que este conhecimento já pode ser trabalhado desde esta série de forma gradativa. Contudo, são necessários cuidados especiais em situações nas quais mais de uma relação condicional (de escolha, ordenação, posicionamento e proximidade) for levada em consideração. Quanto maior o número de relações, mais esforço cognitivo é requerido para o aluno. O trabalho com tais problemas é mais uma forma de auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório neste nível de escolarização.

Borba, Araújo e Braz (2013) investigaram com alunos do Ensino Médio a compreensão destes sobre problemas combinatórios condicionais. Segundo as autoras, além dos invariantes de ordem e escolha, presentes nos problemas de Combinatória, há outras relações que podem ser consideradas nos problemas condicionais, tais como a “explicitação (ou não) de determinados elementos que devem fazer parte das possibilidades válidas para a dada situação, posicionamentos, proximidades e/ou ordenações específicas que certos elementos devem apresentar” (p. 3).

Sendo assim, o estudo objetivou verificar a compreensão de problemas combinatórios condicionais, em particular em arranjos, entre alunos do Ensino Médio, anteriormente e posteriormente ao ensino em Análise Combinatória. Para tal, participaram do estudo 87 alunos, sendo 54 alunos do 1º ano do Ensino Médio e 33 do 3º ano. Os estudantes eram alunos de uma escola pública vinculada a uma instituição federal de ensino. Os alunos do 1º ano ainda não haviam trabalhado formalmente a Análise Combinatória e os alunos do 3º ano já haviam estudado este conteúdo em sala de aula. Divididos em dois grupos, os estudantes resolveram 11 problemas, metade dos 22 tipos de problemas combinatórios condicionais categorizados em estudo anterior (Borba e Braz, 2012), cada grupo.

Os resultados apontaram, como já esperado, que os alunos do 3º ano obtiveram melhor desempenho do que os alunos do 1º ano do Ensino Médio, uma

vez que no 3º ano os alunos já haviam recebido instrução quanto a este conteúdo e apresentavam também domínio sobre a fórmula e o princípio fundamental da contagem. Os alunos do 1º ano utilizaram também o princípio fundamental da contagem, porém outras formas de representação, tais como desenhos, listagem, árvores de possibilidades. Isto mostrou que mesmo não tendo o domínio formal deste tipo de problema condicional, os mesmos se esforçaram para respondê-los, sendo muito bem sucedidos em várias questões, utilizando-se de estratégias próprias de resolução. Dentre as dificuldades apresentadas pelos alunos, a relação condicional colocada em cada situação-problema apresentou-se mais complexa do que chegar ao número total de possibilidades. As autoras relatam que as relações que envolvem ter ao menos ou no máximo alguns elementos são das mais complexas, assim como outras relações referentes a posicionamento e/ou proximidade.

Conforme tais resultados, o estudo apontou para a necessidade de atentar às variadas situações de problemas condicionais no Ensino da Combinatória, uma vez que além dos invariantes de ordem e escolhas, nestes problemas podem aparecer outras variadas características que irão diferenciar no raciocínio de resolução. Ou seja, é preciso que se trabalhem as diversas situações envolvidas ao tratar dos problemas condicionais para que se possa identifica-las, refletir e devidamente tratá-las, a fim de possibilitar um amplo desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos.

Pessoa e Borba (2009) realizaram um estudo de sondagem sobre a Combinatória que abrangeu todos os ciclos da Educação Básica. A pesquisa apresenta dados do estudo de tese de Pessoa (2009) objetivando, por sua vez, analisar o desempenho de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio sobre problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Buscou-se defender a tese de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é um processo longo que se amplia a partir de experiências extraescolares e vivências escolares, relacionadas ou não à Combinatória, e que este desenvolvimento evidencia-se já nos anos iniciais de escolarização e que progressivamente vai se modificando no sentido de uma maior sistematização e formalização na compreensão dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

Em específico, as pesquisadoras buscaram observar o desempenho de alunos ao longo do período de escolaridade básica, lidando com as mesmas

questões de raciocínio combinatório, identificar estratégias desenvolvidas pelos alunos ao resolver os problemas, comparar desempenhos e estratégias ao longo dos anos de escolaridade. Desta forma, a análise teve como base a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), que aponta que os conceitos envolvem um conjunto de situações-problema, que lhes dão significado psicológico, um conjunto de invariantes, que são propriedades lógico-operatórias, as quais permitem generalização e transferência de aprendizagem e um conjunto de símbolos utilizados na representação do conceito. Estes elementos forma um tripé: significados, invariantes e representações simbólicas, que estão intimamente relacionados.

Foi objeto de análise a resolução de 412 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio de quatro escolas, sendo duas públicas e duas privadas. As resoluções eram de oito problemas, dois de cada significado da Combinatória (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação), no qual os alunos foram orientados a resolverem da maneira que acharem melhor. Os quatro primeiros problemas envolviam números que levavam a maior número de possibilidades na solução e os quatro últimos envolviam menos possibilidades, de modo que em cada tipo de problema o aluno entrava em contato com problemas de maiores e de menores possibilidades envolvidas.

Os resultados da análise apontaram que houve diferença significativa entre o desempenho dos alunos com relação aos níveis de ensino, no qual a cada nível de ensino mais avançado, mais elevado o resultado. Entretanto, os progressos maiores foram do Ensino Fundamental I para o Ensino Fundamental II, do que do Ensino Fundamental II para o Ensino Médio. Estes dados apontam, segundo as autoras, que a maturidade ou experiência escolar parece influenciar de forma direta no desenvolvimento do raciocínio combinatório, uma vez que nos anos finais do Ensino Fundamental os alunos melhoram significativamente mesmo sem instrução escolar específica. Embora os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental tenham obtido um percentual baixo de acertos, levando em consideração que foram analisados nesta fase apenas a resposta correta, nos acertos parciais eles apresentam várias estratégias de resolução e diferentes níveis de compreensão dos problemas combinatórios, apresentando dificuldade de esgotar todas as possibilidades estabelecidas. Por outro lado, esperava-se um total de acerto maior entre os alunos do Ensino Médio, entretanto, nem sempre ao utilizar a fórmula eles

faziam de maneira adequada. Isto aponta que mesmo após a instrução deste conteúdo eles apresentam dificuldades, que pode ser pelo ensino não ter sido de maneira adequada, permitindo que estes conhecessem as características de cada problema e assim o uso correto da estratégia de resolução. Com relação ao desempenho entre os quatro significados combinatórios, as autoras observaram diferença significativa na resolução entre os tipos de problemas. Os problemas mais fáceis foram os de produto cartesiano, seguidos dos de arranjo, de permutação e de combinação, este último com percentuais bastante baixos de acertos em todos os níveis, sendo a permutação o significado de mais difícil compreensão nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A dificuldade em resolver alguns destes problemas foi relacionada com os invariantes de ordem e escolha envolvidos, que em alguns casos exige uma sistematização mais rigorosa das possibilidades. Foram observadas variadas formas de representação simbólica, tais como desenhos, listagem, tabelas e diagrama, nos diferentes níveis de ensino. O uso da fórmula foi exclusivo dos alunos do Ensino Médio, uma vez que já haviam passado por seu ensino. Entretanto, mesmo conhecendo este procedimento formal, preferiam utilizar outras estratégias, demonstrando o reconhecimento dos invariantes dos problemas.

Contudo, o estudo permitiu perceber que o raciocínio combinatório se desenvolve por um longo período de tempo, por influencia de vários aspectos como experiências escolares ou extraescolares, relacionadas direta ou indiretamente com a Combinatória. A análise dos resultados evidenciou que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos do Ensino Médio são capazes de resolver problemas combinatórios e que, mesmo não chegando ao final da resolução, demonstram compreensão dos significados (tipos de problemas) e invariantes implícitos nos problemas. O nível de ensino e o significado dos problemas também influenciaram o desempenho dos alunos pesquisados. Sendo assim, é preciso atentar para o conhecimento que os alunos já demonstram ter, através das estratégias bem sucedidas demonstradas pelos mesmos, buscando formas de ampliar o raciocínio combinatório. Um caminho a ser traçado seria assim, considerar no ensino os variados significados, as distintas relações e propriedades e diversificadas representações simbólicas (Vergnaud, 1986) que formam as situações combinatórias para que estas sejam aproveitadas da melhor forma possível, no sentido de auxiliar os alunos no desenvolvimento desse raciocínio.

A partir dos dados deste estudo, as autoras posteriormente aprofundaram a análise, verificando as estratégias e tipos de respostas apresentadas pelos alunos (PESSOA e BORBA, 2012). Neste sentido, criaram uma categorização para cada tipo de estratégias, que variavam de resposta em branco, ou de ausência de raciocínio combinatório, até um nível mais elevado com resposta correta, com ou sem o uso de estratégia. Para as formas de representar estas respostas, também foi criada uma categorização, como a não explicitação de estratégia, desenho, listagem, árvore de possibilidades, multiplicação inadequada ou adequada, entre outras, até a percepção de regularidade e busca da generalização, como estratégia mais avançada.

Dentre os diversos tipos de repostas e estratégias apresentadas pelos alunos, foi possível perceber que nos alunos iniciais, mesmo os alunos ainda não tendo estudado formalmente a Combinatória, apresentam criativas formas de representação do seu pensamento, utilizando-as com lógica e coerência. Este dado também é observado com alunos que já receberam instrução formal deste conhecimento, contudo com estratégias mais elaboradas, devido, possivelmente pelo conhecimento construído e pela maturidade na resolução de problemas. Desta forma, as autoras apontam que o desenvolvimento do raciocínio combinatório sofre influencias, tanto do ensino, quanto da maturidade, assim como nas vivencias extraescolares. Contudo, mesmo os alunos dos diferentes níveis demonstrando compreender os enunciados dos problemas, a partir de estratégias válidas, foi identificado procedimentos que necessitam, ainda, de intervenções. O uso da listagem é frequente pelos alunos, e mesmo nem sempre chegando ao resultado correto, geralmente por não esgotar todas as possibilidades, esta estratégia apresenta-se como válida, uma vez que os alunos apresentam um pensamento coerente na enumeração dos casos. Desta forma, mesmo não acertando as questões, os alunos demonstram, desde os anos iniciais o desenvolvimento do raciocínio combinatório, precisando de intervenções para aprimorar suas estratégias, como por exemplo, a organização desta listagem, para concluir o total de possibilidades sem se confundir. Os acertos ocorreram, em sua maioria, com os problemas cuja grandeza numérica era pequena, uma vez que as estratégias que os alunos utilizaram ainda são bem longas e detalhadas. Isto ocorre, pois quem ainda não domina as fórmulas se utiliza da forma de resolução que melhor se encaixa nas suas possibilidades de resolver e compreender. Contudo, houve casos em que

mesmo com uma grandeza numérica maior e não conhecendo a fórmula, os alunos iniciavam uma listagem e percebiam uma regularidade nela, generalizando o resultado por meio de uma multiplicação. As fórmulas foram apenas utilizadas por alunos do Ensino Médio, e o princípio fundamental da contagem além de por estes alunos, por alguns do 9º ano, contudo, nem sempre de forma adequada.

Desta forma, o estudo apresenta que os alunos pesquisados se utilizam de distintas estratégias de resolução nos diferentes problemas, o que leva a refletir que eles percebem diferenças entre os significados e invariantes das situações apresentadas, uma vez que geralmente não utilizam a mesma estratégia em todos os problemas e vão adaptando ao que acreditam que pode servir como forma de resolução ao problema. Assim, a partir dos resultados obtidos, pode-se observar a riqueza de estratégias utilizadas pelos alunos, as quais nos dão pistas sobre suas formas de pensar, que podem servir para construir formas de intervenções para avançar no desenvolvimento deste raciocínio, como veremos em estudos de intervenções a seguir.

Além de estudos que investigaram o conhecimento de alunos sobre o raciocínio combinatório, pesquisas também foram realizadas com o intuito de investigar propostas de ensino que podem propiciar o desenvolvimento deste raciocínio e assim a melhor compreensão da Combinatória. Silva e Pessoa (2015) ao pesquisar o estado da arte em Combinatória em eventos científicos entre os anos de 2009 e 2013, evidenciaram na categoria denominada pela mesma de estudos de intervenções com alunos de diferentes níveis de ensino que, apesar de ter sido encontrados em menor frequência, apresentavam formas bem sucedidas de ensinar Combinatória. Os estudos tinham em comum a resolução de problemas como ponto de partida para a aprendizagem e em alguns tiveram como base o resultado de estudos anteriores de sondagem de conhecimento de alunos como base para as intervenções. Todas as pesquisas de intervenção analisadas por estas autoras constaram em sua metodologia de pré-teste, intervenção e pós-teste, obtendo resultados significativos para o desenvolvimento da Combinatória, apresentando-se assim como propostas eficientes para o seu ensino.

Pessoa e Santos (2012), baseadas em estratégias apresentadas por alunos em estudos anteriores, desenvolveram intervenções de ensino de Combinatória com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. As autoras tiveram como objetivo utilizar as estratégias bem sucedidas que mais se destacaram em estudos analisados: a

listagem de possibilidades, a explicitação dos invariantes de cada tipo de problema combinatório, a sistematização da listagem e a generalização, para a execução de intervenções que pudessem auxiliar as crianças na compreensão da Combinatória.

Foi feito um levantamento de estratégias bem sucedidas obtidas nos estudos de sondagem de Pessoa e Borba (2009) e Pessoa e Santos (2011), já citados, para a montagem das intervenções. Dentre os alunos de uma turma do 5º ano, 13 participaram de todas as etapas do processo: pré-teste, intervenção e pós-teste. Em todas as etapas foram apresentados aos alunos os quatro tipos de problemas combinatórios e nas intervenções estiveram esses divididos em duas sessões, na primeira foi trabalhado o produto cartesiano e a permutação e na segunda o arranjo e a combinação. Nas duas intervenções, o primeiro problema de cada um dos tipos resultava em um número menor de possibilidades (grandeza numérica até 10) e o segundo e o terceiro problema levavam a um número maior de possibilidades (grandeza numérica até 30).

Os problemas trabalhados nas intervenções eram colocados no quadro-negro e o primeiro de cada tipo resolvidos juntos com os alunos, destacando os invariantes dos mesmos. A listagem de possibilidades foi indicada como estratégia de resolução, destacando a sistematização como uma forma de organização que tornava a resolução mais fácil visto que a probabilidade de confundir os elementos seria menor. Nos problemas que exigiam um número maior de possibilidades, os alunos foram levados a perceber regularidades e generalizar o resultado, uma vez que não seria necessário listar todos. Após as intervenções os alunos realizaram um pós-teste que continha oito problemas combinatórios (dois de cada tipo), mesma quantidade do pré-teste, mas com questões diferentes.

Na análise quantitativa que constou da comparação entre os acertos totais entre o pré-teste e pós-teste, dos 13 alunos pesquisados, 10 avançaram no que se refere à quantidade de acertos totais. Apenas três alunos permaneceram com a mesma quantidade de acertos totais no pré-teste e no pós-teste. Foi possível perceber importantes avanços na aprendizagem de Combinatória, uma vez que este conhecimento foi trabalhado de forma sistemática, no qual os elementos trabalhados possibilitaram os alunos a resolverem com êxito os problemas, refletindo sobre as características existentes nestes tipos de problemas. Antes das intervenções ocorreram acertos totais apenas em problemas de produto cartesiano e combinação com menor número de possibilidades. Após o ensino sistemático houve acertos

totais em todos os tipos de problemas combinatórios, exceto no de permutação com número maior de possibilidades. Analisando de forma qualitativa, dentre os erros e acertos dos alunos foram encontradas uma diversidade de estratégias de resolução e tipos de respostas que auxilia-nos a refletir sobre como os alunos pensam em relação à Combinatória. De modo geral, no pré-teste a maior parte das respostas está em categorias que se referem a respostas incorretas ou incompletas, sem o estabelecimento de relação combinatória, o que indica que os alunos, em sua maioria, anteriormente às intervenções, apresentavam um pensamento combinatório ainda sem grande sistematização. No que diz respeito às repostas no pré-teste maior concentração das respostas nas categorias “Apenas resposta incorreta”, no qual ele apenas coloca a resposta sem explicitar a estratégia e “Resposta incorreta sem o estabelecimento de relação correta”, no qual apresenta a explicitação da estratégia. No que se refere aos resultados encontrados no pós-teste, foi perceptível a diminuição do percentual de respostas na categoria “Apenas resposta incorreta”, se em comparação com o pré-teste, e das respostas na categoria “Resposta incorreta sem relação correta”, indicando que os alunos começam a explicitar mais suas estratégias de resolução e estabelecer relações corretas com o que os problemas propõem. Os alunos também utilizam a sistematização como estratégia de organização das possibilidades e avançam na qualidade das respostas, mesmo que não esgotem todas. A generalização também foi utilizada pelos alunos, porém apenas nos problemas que exigiam um número maior de possibilidades, como se era esperado. Contudo, ao analisar a quantidade de acertos totais, os avanços nos tipos de respostas e estratégias utilizadas, e comparando pré-teste e o pós-teste dos alunos pesquisados, o estudo apontou que os resultados foram bastante satisfatórios. Através dos seus procedimentos de resolução, os alunos pesquisados, demonstraram compreensão dos pilares trabalhados durante as intervenções, resolvendo de forma bem sucedida os problemas propostos e, de certa forma, generalizar seus procedimentos. Mesmo aqueles que não chegaram a esgotar todas as possibilidades, apresentaram avanços referentes a compreensão da Combinatória, avançando no entendimento acerca da importância da explicitação da estratégia utilizada, da compreensão dos invariantes e das características implícitas de cada um dos seus significados.

Este estudo aponta a necessidade de um ensino sistemático de problemas combinatórios, desde os alunos iniciais, com ênfase na explicitação dos invariantes

de cada significado, nas possíveis estratégias que podem vir a facilitar as resoluções e na generalização para que os alunos obtenham maior compreensão acerca da Combinatória.

Pessoa e Silva (2012), por sua vez desenvolveu um estudo com turmas que estavam concluindo o Ensino Fundamental. A metodologia adotada foi a mesma citada no estudo acima, no qual desenvolveram o ensino de Combinatória com destaque para quatro pilares: a listagem de possibilidades como estratégia, a sistematização da listagem, o enfoque nas propriedades invariantes de cada significado do problema e a percepção de regularidade (generalização), envolvendo os quatro significados presentes neste conceito (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano).

A pesquisa foi realizada em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, composta por alunos com idades variando entre 14 e 16 anos, dos quais participaram da análise apenas os que fizeram parte dos quatro momentos do processo: pré-teste, duas sessões de intervenção e pós-teste, havendo então 16 participantes. O pré-teste e o pós-teste continham oito problemas de raciocínio combinatório, sendo dois de cada tipo (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano), no qual quatro dos problemas, um de cada tipo, levavam a resultados com menores possibilidades (até 10) e os outros quatro problemas levavam a resultados com maior número de possibilidades (até 30). Assim como no estudo citado acima, durante as intervenções os alunos eram levados a resolverem os problemas através da listagem de forma sistemática, com destaque para os diferentes invariantes que distinguem cada significado combinatório. Nos problemas com um número maior de possibilidades, os alunos foram levados a perceber regularidades em cada etapa da listagem, e assim generalizar o resultado, sem que fosse preciso listar todos. Cinco dias após a última intervenção o pós-teste foi aplicado, com problemas distintos do pré-teste, para que pudesse verificar a compreensão e os avanços dos alunos sobre a Combinatória.

Na análise dos dados obtidos verificou-se que no que diz respeito aos acertos totais, os alunos no pré-teste apresentaram um maior número de acertos nos problemas de produto cartesiano, seguido dos de combinação que levavam a números com menos possibilidades. Todavia, com relação aos outros tipos de problemas, ocorreu um quantitativo muito baixo de acertos. As autoras apontam semelhanças deste resultado com estudos que analisaram crianças em séries

iniciais, como o 5º ano. Além disso, no pré-teste a quantidade de acertos foi bastante inferior ao do pós-teste. Após as intervenções foram percebidos avanços importantes na quantidade de acertos, por tipo de problema e por aluno individualmente, com destaque para os problemas de permutação que apresentaram um quantitativo baixo de acerto no pré-teste, apresentando os maiores avanços nos problemas que levavam a resultados com menores e maiores possibilidades. Outro dado importante foi que individualmente, todos os alunos apresentaram melhor desempenho após as intervenções, seja no quantitativo de acertos ou na qualidade das estratégias. Apenas o problema de combinação com maior número de possibilidades continuou apresentando-se de difícil resolução para os alunos, uma vez que a generalização para este tipo de problema requer um maior nível de complexidade. Analisando de forma qualitativa as respostas e estratégias apresentadas pelos alunos, foi possível perceber um avanço importante na evolução da compreensão dos alunos. No pré-teste foi baixo um número de respostas em branco, indicando que mesmo não sabendo a resposta, os alunos tentavam responder de alguma forma. Além disso, foi identificado um quantitativo alto de apenas resposta incorreta, assim como de respostas incorretas sem apresentar a compreensão da relação combinatória, expressando a dificuldade que os alunos possuíam na compreensão deste conteúdo antes das intervenções. As respostas corretas sem apresentar estratégia concentraram-se nos problemas de produto cartesiano, no qual demonstrava o domínio dos alunos da resolução deste problema, através de uma multiplicação direta. No pós-teste os tipos de respostas mais frequentes apresentadas no pré-teste tiveram uma diminuição no percentual de utilização. Isto demonstrou que os alunos, após as intervenções, apresentaram respostas melhor elaboradas no que diz respeito à compreensão dos significados da Combinatória, assim como na qualidade das estratégias. A explicitação de estratégia com resposta correta se fez presente na resolução de boa parte dos alunos. Desta forma, foi possível perceber que ao utilizarem estratégia (desenho, listagem, entre outras) na resolução e sendo ela sistemática, os resultados entre os testes apresentaram avanços importantes. Com relação às estratégias encontradas no pré-teste, o maior índice de uso foi a não explicitação de estratégia e a listagem. Os alunos que não utilizaram estratégia foram, em sua maioria, aqueles que não se saíram bem na resolução dos problemas. A listagem de possibilidades desde cedo aparece como sendo uma estratégia utilizada pelos alunos, precisando apenas da

sistematização para que, de forma organizada, chegue-se ao resultado correto. A percepção das regularidades para a generalização da resposta não se apresenta clara, para a resolução dos problemas com grandezas maiores. No pós-teste, os alunos continuaram a resolver através da listagem, assim como apresentaram avanços importantes no uso de multiplicação adequada nos problemas de produto cartesiano. Entretanto, a não explicitação de estratégia pouco diminui em relação aos testes, demonstrando que talvez que os alunos ainda continuem utilizando o cálculo mental. Entretanto, no pós-teste eles apresentam maior número de acertos. Outro aspecto significativo foi a percepção das regularidades dos problemas e a chegada à generalização por alguns alunos. Esta compreensão é um passo muito importante, uma vez que nem todas as questões combinatórias serão possíveis de serem resolvidas através de uma listagem, mas esta compreensão através desta estratégia se faz necessário antes da introdução de fórmulas.

Sendo assim, o estudo evidenciou que o avanço no quantitativo geral de acertos e na amplitude por tipo de problemas, assim como nos tipos de respostas e estratégias apresentadas, reforçam a eficácia das intervenções, e a necessidade de um ensino sistemático da Combinatória, pois, durante as mesmas, ao se trabalhar as singularidades de cada problema, chamando-se a atenção para a listagem de possibilidades enquanto estratégia, para a sistematização da listagem, para os invariantes do significado de Combinatória do problema trabalhado e para a percepção de regularidade, mesmo não sendo o ano habitual em que este conceito é estudado, os alunos são capaz de aprender.

Pinheiro, Abar e Sá (2012), verificaram a utilização da metodologia da resolução de problemas como ponto de partida para a aprendizagem da Análise Combinatória, acreditando que por meio deste tipo de atividade os alunos estariam favoráveis a desenvolver tal raciocínio. O público alvo foi de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública, que resolveram a um pré-teste e posteriormente participaram de uma sequência didática com ênfase na resolução de problemas. A proposta de ensino se deu à luz da teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996) e da metodologia da resolução de problemas como ponto de partida, discutida por Sá (2005). Para identificar os resultados da proposta de ensino, os alunos resolveram um pós-teste contendo cinco problemas, quantidade esta a mesma do teste inicial.

A sequência didática foi realizada em cinco encontros, sendo com a duração de duas aulas cada. Os encontros seguiram a seguinte sequência: no primeiro buscou-se institucionalizar o princípio fundamental da contagem, no segundo foi feito o mesmo procedimento com a permutação e a ideia do fatorial, no terceiro tratou-se da diferença entre o arranjo e a combinação, no quarto encontro construiu-se com os alunos a fórmula do arranjo e no último a construção da fórmula da combinação. Os autores apontam que não tiveram nenhuma aula para resolver problemas que possibilitassem um aprimoramento nas habilidades que acreditaram terem sido desenvolvidas pelos alunos. O pré-teste e o pós-teste continham cinco problemas que envolviam as habilidades básicas de princípio fundamental da contagem, permutação simples, arranjo simples e combinação simples.

Os dados do pré-teste apontaram que os alunos em sua maioria não resolviam as questões, apresentando também poucos acertos. No pós-teste, com a aplicação do mesmo instrumento, foi bastante reduzido o número de questões deixadas em branco. O mesmo foi identificado no quantitativo de questões corretas que superaram os erros. Mesmo apresentando o resultado final incorreto na questão de combinação, os alunos demonstraram procedimentos corretos ao longo da resolução.

Entre os resultados obtidos, os autores destacaram a importância do uso do princípio fundamental da contagem para romper com o método tradicional de ensino, baseado em fórmulas. Foi possível também perceber o pouco desenvolvimento de habilidades para solucionar problemas de combinação simples. De modo geral, de acordo com os pesquisadores, a sequência didática pôde proporcionar possibilidades para o desenvolvimento das habilidades básicas da Combinatória no nível escolar.

Percebemos assim, que a pesquisa científica no campo educacional, referente à Combinatória, oferece-nos uma gama de elementos e importantes subsídios para a compreensão de como este conhecimento se desenvolve, além de apontar caminhos para o seu ensino de forma a propiciar aos alunos a construção do conceito com base nos resultados encontrados. É neste sentido que acreditamos que os resultados de pesquisas sejam um importante elemento a ser investigado neste estudo, a fim de que possamos identificar se estes construtos se fazem presentes nas propostas de ensino nos livros didáticos.

6 O LIVRO DIDÁTICO

6. O LIVRO DIDÁTICO

Neste tópico iremos discorrer sobre os programas e documentos oficiais que regem as avaliações e escolhas dos livros didáticos, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Guia Nacional do Livro Didático, assim como, iremos tratar da influência do livro didático para o ensino, sua importância no trabalho do professor e de pesquisas relacionadas a livros didáticos, especialmente sobre Combinatória.

6.1 O Programa Nacional do Livro Didático

O PNLD foi criado com o objetivo principal de auxiliar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da Educação Básica. Após a avaliação das obras, o Ministério da Educação (MEC) publica, a partir do ano de 1996, o Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 1996) com resenhas das coleções consideradas aprovadas. Nele, as coleções são analisadas baseando-se em critérios estabelecidos que propiciem as adequações de aspectos teórico-metodológicos, estrutura editorial e manual do professor. O guia é encaminhado às escolas, que escolhem, entre as coleções disponíveis, aquelas que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico.

De acordo com o portal do Ministério da Educação (MEC, 2010b):

O livro didático é um importante material de apoio ao processo de ensino e aprendizagem, pois contribui, ao mesmo tempo, para o trabalho do professor e para o estudo do aluno. Embora a prática pedagógica do professor envolva diversas dimensões, como sua pesquisa constante para o aprimoramento de seu trabalho em sala de aula, um livro didático com textos adequados, ilustrações pertinentes e informações atualizadas auxilia no planejamento de ensino. Para que suas possibilidades sejam aproveitadas ao máximo, o livro didático deve estar adequado às necessidades da escola, do aluno e do professor (MEC, 2010).

O programa é executado em ciclos trienais alternados, ou seja, a cada ano é feita a avaliação de um segmento de ensino da educação básica, sendo cada um destes realizados a cada três anos. Desta forma, a cada ano o MEC apresenta a avaliação e distribui livros para todos os alunos de um segmento, que pode ser: anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio. Além da educação regular, o PNLD também atende alunos da educação

especial, com obras em Braille de Matemática, Português, História, Geografia, Ciências e Dicionários.

Uma das funções do livro didático, apontadas no PNLD 2013 (BRASIL, 2012), é de que o mesmo leve para a sala de aula as propostas didáticas e pedagógicas orientadas nos documentos oficiais, assim como os resultados das pesquisas para o ensino de Matemática, adequando-se ao contexto da escola. Desta forma,

fazer a opção por um livro didático é uma tarefa de muita responsabilidade, pois nela se elege um interlocutor que irá dialogar com você e com seus alunos durante o ano letivo inteiro e que continuará presente em sua escola por três anos. Por isso, recomenda-se a leitura cuidadosa das resenhas, seguida de uma discussão com os colegas e com a equipe pedagógica de sua escola. Será necessário analisar as propostas de cada livro e decidir qual delas é a mais adequada às condições de trabalho de sala de aula e ao projeto político pedagógico da escola. (BRASIL, 2012, p. 11)

As coleções adotadas devem ser escolhidas por professores e equipe pedagógica de forma coletiva, no próprio ambiente escolar. As instituições de ensino têm o papel fundamental de promoção de discussões e análise do guia, a fim de que a escolha ocorra de forma consciente a proporcionar amplo desenvolvimento conceitual dos alunos.

Para que a escola faça uma boa escolha dos livros que serão adotados é importante que professores e equipe pedagógica conheçam bem o Guia do Programa Nacional do Livro Didático, de forma a analisarem com cautela as resenhas apresentadas, para que as coleções escolhidas sejam adequadas ao projeto político pedagógico da escola.

De acordo com Toni e Fecagna (2005), o professor é responsável pela escolha do livro didático que mais esteja de acordo com a proposta pedagógica da escola e com a realidade da mesma, bem como com a aprendizagem e com a formação de seus alunos.

Desta forma o PNLD aponta que,

um bom livro didático deve trazer para a escola informações e explicações sobre o conhecimento matemático que está em nosso cotidiano - um conhecimento que interfere e sofre interferências das práticas sociais do mundo atual e do passado. Este livro também deve conter uma proposta pedagógica que leve em conta o conhecimento prévio e o nível de escolaridade do aluno e que ofereça atividades que o incentivem a participar ativamente de sua aprendizagem e a interagir com seus colegas (BRASIL, 2006, p.8).

Carvalho (2011) destaca sobre o que vem orientando no Guia do PNLD (2011) que,

um dos aspectos fundamentais da Matemática é a diversidade de formas simbólicas presentes em seu corpo de conhecimentos. Linguagem natural, linguagem simbólica, desenhos, gráficos, tabelas, diagramas, ícones, entre outros, desempenham papel central, tanto na representação dos conceitos, relações e procedimentos, quanto na própria formação desses conceitos. No tocante ao Tratamento da Informação, o qual inclui estatística, probabilidade e combinatória, o guia discorre que são cada vez mais relevantes questões relativas a dados da realidade física ou social, que precisam ser coletados, selecionados, organizados, apresentados e interpretados criticamente. Fazer inferências com base em informações qualitativas ou dados numéricos e saber lidar com os conceitos de chance e de incerteza também são competências de grande utilidade que os livros didáticos devem explorar. Um conceito nunca é isolado, mas se integra a um conjunto de outros conceitos por meio de relações, das mais simples às mais complexas. (CARVALHO, 2011, p.62)

Percebemos assim, que a escolha do livro didático não é uma tarefa fácil, exigindo uma gama de critérios para que atenda as necessidades das escolas, alunos e professores, uma vez que o livro adotado permanecerá em uso por no mínimo três anos consecutivos.

Para uma melhor compreensão de como este recurso didático apresenta problemas matemáticos, especificamente os que envolvem problemas combinatórios, faz-se necessário conhecer como se dá a formação dos conceitos a partir de referenciais, como os da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud e discutida mais adiante.

6.2A Influência do Livro Didático para o Ensino

O livro didático é um dos recursos mais utilizados no processo de ensino e aprendizagem, sendo assim um dos mais importantes componentes do cotidiano das escolas em todos os níveis de ensino, desempenhando um papel de extrema relevância no sistema escolar. É principalmente com base neste instrumento que o professor norteia o seu trabalho, sendo por muitas vezes o seu único instrumento pedagógico.

Vários autores trazem a sua concepção sobre o livro didático. Segundo Molina (1988, p. 17), “um livro didático é uma obra escrita (ou organizada, como acontece tantas vezes), com o objetivo específico de ser utilizado em situações

didáticas”. Nesta visão, o livro didático parece ser visto como um material exclusivo para ser usado em sala de aula. Para Rojo (2005), “o conceito de livro didático proposto por Molina implica uma sala de aula regida basicamente pelo manual, pelo livro didático” (p.3). Esta concepção pode levar a uma compreensão do livro como um fim em si mesmo, e não um orientador e complemento ao trabalho do professor.

Oliveira, Guimarães e Bomeny (1984, p.11) ressaltam que, “o livro didático será entendido como material impresso, destinado ou adequado a ser utilizado no processo de aprendizagem ou formação”. Estes autores delimitem o campo de atuação do livro didático, atribuindo uma função educativa, no qual podemos incluir outros tipos de livros como os paradidáticos, fortemente presentes no ambiente escolar.

Dante (1996) aborda o livro didático como orientador do trabalho do professor em sala de aula no que diz respeito aos objetivos a serem alcançados, conteúdos principais a serem desenvolvidos, metodologias e estratégias a serem utilizadas para alcançar tais objetivos. Para ele trata-se de um recurso importante e norteador do preparo docente para o direcionamento das suas aulas.

Apesar de tais definições, concordamos com Martins (2010) que “a importância desse recurso não se restringe a um caráter apenas pedagógico, mas, também, a uma extensão mais ampla, pois possui aspectos políticos e culturais à medida que reproduz e representa valores de uma sociedade” (p.40).

Ainda sobre a importância deste recurso Guimarães, Gitirana, Cavalcanti e Marques (2008) afirmam que,

O livro didático se constitui em um importante recurso utilizado por professores na condução e/ou elaboração das abordagens de ensino, em parte pela ausência de outros materiais que orientem os professores sobre o quê e como ensinar, e em parte pela frequente dificuldade de acesso do aluno a outras fontes de estudo e pesquisa (p. 3).

Entretanto, o livro didático precisa ser visto como um recurso auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, e não como dominante nesse processo. O principal objetivo nas aulas de Matemática é alcançar uma educação com qualidade, o livro didático pode mostrar-se como instrumento eficiente, mas, cabe ao professor o papel de mediador insubstituível dentro do processo (BIEHL e BAYER, 2009, p. 7).

Enfatizamos ainda com o pensamento de Belfort (2003), apontando que o uso do livro didático é um tema mundialmente polêmico, já que o livro-texto é, muitas

vezes, uma fonte de estudo para o professor de Matemática, podendo ser o principal, senão o único material de apoio que o educador possui. Esta autora chama a atenção para o fato de que a maioria dos professores de Matemática usa livro-texto e que nenhum argumento os faz desistir do uso desse material.

Considerar o livro didático como instrumento dominante no processo de ensino pode causar limitações ao trabalho docente, no qual estes acabam por se tornarem escravos deste recurso, fazendo-o roteiro único no processo de ensino-aprendizagem. Sabemos ainda que os livros muitas vezes trazem consigo manutenção e difusão de preconceitos, ênfase a certos valores culturais em detrimento a outros e assim o fortalecimento das desigualdades.

As diretrizes do Programa Nacional do Livro Didático 2013 indicam que:

cabe à escola, em particular ao professor, a condução do processo de ensino e aprendizagem, assim como o acompanhamento do desenvolvimento dos alunos. O livro didático participa desse processo como um recurso auxiliar na condução do trabalho didático. Ele é mais um interlocutor que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, tal texto é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de se conseguir compreendê-lo mais eficazmente. (BRASIL, 2013a, p. 12).

Araujo (2013), analisando algumas funções complementares para o livro didático, apontada por outros autores, chega à conclusão que “a utilização do livro didático varia de acordo com o respectivo utilizador (aluno ou professor), a disciplina e o contexto em que o manual é elaborado” (p.50), ou seja, sua utilização irá depender das concepções de quem o utiliza, os conhecimentos abordados e a perspectiva de orientação sugerida no manual do professor.

Carvalho e Lima (2010) afirmam:

o livro didático traz para o processo de ensino-aprendizagem mais um personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado – no nosso caso a Matemática –; os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade. Estabelece-se, assim, uma teia de relações interligando quatro polos: um deles é formado pelo autor e o livro didático; o professor, o aluno e a Matemática compõem os outros três (p. 5).

Desta forma, e diante de variadas definições que se encontram e divergem sobre o livro didático e sua importância para o ensino, se faz importante o reconhecimento dos estudiosos da área que esse é um dos recursos didáticos mais utilizados em sala de aula, sendo assim imprescindível que o processo de escolha

por parte dos professores seja feito através de uma análise responsável e que possa atender objetivamente as particularidades do público e modalidade de ensino a qual está direcionado, estando ainda de acordo com a proposta pedagógica da escola.

Tendo-se o livro didático como um instrumento referencial com relação ao saber a ser ensinado e um condutor dos conteúdos e processos envolvidos na prática pedagógica do professor, faz-se necessário analisar como a Combinatória está organizada e estruturada nos livros didáticos, destinados às escolas brasileiras.

6.3 O que pesquisas apontam sobre o livro didático e a Combinatória

Barreto, Amaral e Borba (2007) analisaram como livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD 2007 abordavam o raciocínio combinatório. O estudo buscava verificar os tipos de problemas combinatórios apresentados nos livros, as formas de representações simbólicas apresentadas nos problemas e sugeridas pelos autores para o trabalho junto aos alunos, se existia proposta de compreensão das propriedades invariantes envolvidas nesses tipos de problemas e como são as orientações sobre este conceito no manual do professor.

Foi realizada uma seleção aleatória de cinco coleções dentre as aprovadas pelo PNLD e a análise foi feita à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Com relação aos significados (tipos de problemas) apresentados nos livros o de combinação apresentou o maior percentual (42,13%), seguido dos de produto cartesiano (35,32%), permutação (19,57%) e de arranjo (2,98%). Os autores constataram que os problemas de combinação apareciam em capítulos de estruturas aditivas, além do de estruturas multiplicativas, que poderia justificar o maior índice de problema e os de arranjo que apresentaram o menor percentual de aparição, podendo ser justificado pela complexidade que exige além da escolha dos elementos para os subconjuntos na ordenação destes.

Em relação ao manual do professor, foi constatado que os autores não apresentavam nenhuma orientação explícita para os professores sobre os diferentes problemas combinatórios.

Sobre as representações simbólicas presentes na apresentação dos problemas combinatórios e nas sugestões de resolução, foi percebida uma variedade ao longo das cinco coleções. As maiores frequências foram o desenho,

apenas enunciado e a tabela. Porém, nos manuais do professor foram encontrados baixos percentuais de apresentação e sugestões de representações simbólicas.

Com relação à abordagem dos quatro significados que envolvem o raciocínio combinatório, como nenhuma das coleções apresentou orientações ao professor sobre tais significados, também não foi abordada nenhuma das propriedades invariantes do conceito.

Sendo assim, neste estudo foi constatado que os significados da Combinatória se fazem presentes nas coleções de livros dos anos iniciais do Ensino Fundamental, sendo os mais presentes nas coleções os de combinação e produto cartesiano, que os livros apresentam em seus enunciados e sugerem uma diversidade de representações simbólicas para resolução, mas que não trazem nenhuma orientação ao professor no que diz respeito aos significados combinatórios e às características invariantes destes.

Assis e Magalhães (2012) buscaram fazer um estudo comparativo ao citado anteriormente, analisando desta vez coleções aprovadas pelo PNLD 2010. Examinou-se o tratamento dado pelos autores ao abordar o raciocínio combinatório levando em consideração duas dimensões conceituais propostas por Vergnaud (1986): significados e representações (apresentadas e sugeridas). As coleções selecionadas foram as mesmas do estudo em comparação.

Os dados encontrados evidenciam que nos livros das coleções analisadas há um aumento no quantitativo de problemas combinatórios conforme o ano de ensino avança. O problema de produto cartesiano foi o significado que apresentou maior frequência entre os tipos de problemas encontrados nos dois estudos, contrário à permutação que reuniu o menor número de problemas, não havendo diferença significativa entre a quantidade de significados combinatórios encontrados. Entretanto, foi constatado que houve uma diminuição no quantitativo geral dos problemas que envolvem raciocínio combinatório do estudo dos livros do PNLD de 2007 para os de 2010.

Dentre as representações simbólicas abordadas, o desenho se destacou quanto às apresentadas e questões com apenas o enunciado como sugeridas, assim como no estudo anterior. Contudo, não houve diferença significativa entre as representações simbólicas do estudo anterior e do atual.

Sendo assim, este estudo comparativo apresentou subsídios para avançar nas discussões sobre a abordagem do raciocínio combinatório nos livros didáticos

de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foi possível perceber aproximações e distanciamentos entre as coleções de livros didáticos, considerando o intervalo do PNLD de 2007 e 2010, possibilitando vislumbrar de maneira mais sistemática um fragmento de como o raciocínio combinatório está sendo apresentado nas escolas, oferecendo elementos que podem contribuir para a melhoria da qualidade da educação matemática oferecida no Brasil (ASSIS e MAGALHÃES, 2012).

Oliveira e Coutinho (2013) discutiram como o conteúdo de Combinatória é abordado nos livros didáticos de anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tal, foi feita uma análise de como o tema é abordado nos livros de Alfabetização Matemática e Matemática, a partir dos sumários e das resenhas de cada coleção aprovada no Programa Nacional do Livro Didático de 2013 (BRASIL, 2013a). As autoras também tomaram como base de análise orientações presentes nos PCN e alguns resultados de pesquisas na área de Educação Matemática, juntamente com pressupostos da Teoria da Transposição Didática.

Foi possível perceber, através das análises, que ocorre uma fragmentação em relação à abordagem do conteúdo de Combinatória ao longo dos livros nas coleções analisadas, que pode dificultar o aprofundamento do conhecimento dos alunos. Em seis, das vinte e quatro coleções aprovadas, o estudo do Guia não permitiu identificar menção aos conteúdos de Combinatória em nenhum dos volumes. Nos sumários dessas coleções, mesmo nos últimos anos (4º e 5º anos), foi percebido que o tratamento a esse conceito não é valorizado. Observou-se ainda que na maior parte das coleções, ele não é abordado no campo do Tratamento da Informação, mas sim como aplicação do princípio multiplicativo.

Podemos inferir, através dos resultados estudos citados, que a abordagem da Combinatória nos livros didáticos ainda precisa evoluir no que diz respeito às necessidades de aprendizagem do aluno e para o ensino do professor. Este campo de estudo merece atenção e necessidade que se investigue ao longo de toda a Educação Básica, uma vez que seu ensino ganha êxito no final do Ensino Médio.

Estes estudos nos dão subsídios para avançarmos nas discussões sobre a presença, a forma de abordagem e o desenvolvimento do conteúdo de Combinatória nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental.

7 OBJETIVOS E MÉTODO

7. OBJETIVOS E MÉTODO

Neste capítulo serão apresentados os objetivos que nortearam a pesquisa e os aspectos metodológicos utilizados para a realização do presente estudo. Apresentamos os procedimentos de coleta de dados, os documentos oficiais, as coleções, as fichas para coleta de dados que auxiliaram as análises e as categorias base das análises adotadas na pesquisa.

7.1 Objetivos

7.1.1 Objetivo Geral

Analisar a abordagem da Combinatória em orientações curriculares de documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental e se há consonância entre as abordagens.

7.1.2 Objetivos Específicos

- Analisar as orientações curriculares em documentos oficiais para o ensino de Combinatória.
- Analisar o que pesquisas recentes apontam sobre o conhecimento de alunos e o ensino de Combinatória.
- Analisar como os problemas combinatórios são trabalhados em livros didáticos.
- Relacionar os resultados encontrados nas orientações curriculares e nas pesquisas com a abordagem da Combinatória nos livros didáticos.

7.2 Método

7.2.1 Procedimentos de coleta de dados

Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo e quantitativo e do ponto de vista dos procedimentos de coleta de dados, caracteriza-se como uma pesquisa documental feita a partir da análise de materiais já publicados como é o caso dos

documentos oficiais e dos livros didáticos. Realizamos também uma pesquisa bibliográfica com estudos recentes sobre a Combinatória em revistas e eventos científicos, mapeando e discutindo produções acadêmicas, buscando responder aos aspectos destacados nesta pesquisa. Segundo Boccato (2006),

a pesquisa bibliográfica busca a resolução de um problema (hipótese) por meio de referenciais teóricos publicados, analisando e discutindo as várias contribuições científicas. Esse tipo de pesquisa trará subsídios para o conhecimento sobre o que foi pesquisado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto apresentado na literatura científica. Para tanto, é de suma importância que o pesquisador realize um planejamento sistemático do processo de pesquisa, compreendendo desde a definição temática, passando pela construção lógica do trabalho até a decisão da sua forma de comunicação e divulgação (p. 266).

Para o desenvolvimento do estudo, inicialmente foram selecionados documentos oficiais que continham orientações curriculares para todos os ciclos de ensino da Educação Básica. Assim, em nosso estudo, analisamos documentos curriculares: Parâmetros Curriculares Nacionais e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco. Além de estes documentos abrangerem os ciclos de ensino que são investigados no presente estudo, ambos estão em vigor e apesar dos PCN serem antigos, fizeram parte de um processo de mudança na educação brasileira, estruturando em forma de documento curricular concepções, teorias, perspectivas e pressupostos para um ensino e aprendizagem de qualidade nas escolas. Os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco, além disso, são recentes e estão vigorando no nosso estado com orientações mais específicas à nossa região.

A fim de identificar o que pesquisas recentes apontam sobre o conhecimento de alunos e o ensino da Combinatória, construímos o estado da arte sobre estudos de sondagem e intervenções com alunos da Educação Básica sobre a Combinatória. Os estudos foram retirados de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil no período de 2009 a 2013, sendo assim o ENEM (2010 e 2013), o SIPEM (2009 e 2012), o CIAEM (2011) e o SIPEMAT (2012), totalizando 12 pesquisas analisadas tendo como base os critérios citados.

Para analisar as atividades de Combinatória em livros didáticos foram selecionadas as coleções aprovadas pelos PNLD de 2013 e 2014 (BRASIL, 2012; 2013a). A seleção foi dada atendendo aos critérios de maior e menor adesão destas coleções no país, segundo informações do FNDE. O critério de escolha deu-se por

queremos olhar os dois extremos de utilização dos livros, tendo em vista, também, a numerosa quantidade de coleções aprovadas. Desta forma no PNLD 2013, dos anos iniciais foram selecionadas as duas coleções mais adotadas pelas escolas e as duas menos adotadas e no PNLD 2014 dos anos finais do Ensino Fundamental, a coleção mais adotada e a menos adotada. A escolha dos referidos PNLD se deu pelas últimas publicações, sendo assim as mais recentes ao período do desenvolvimento da pesquisa.

Foi feita a análise da avaliação publicada no Guia Nacional do Livro Didático de Matemática de cada obra (BRASIL, 2012 e 2013a), assim como foram analisados todos os volumes das coleções, tanto no livro do aluno quanto no manual do professor, sendo feito o levantamento das atividades, incluindo exemplos, exercícios a resolver, exercícios resolvidos e explicações teóricas, dentro e fora dos capítulos e/ou seções destinados à Combinatória e conteúdos e temas a ela relacionados. Entretanto, só foram tomadas para análise as atividades/questões compreendidas como situações-problemas, ou seja, que envolviam um contexto de desafio para os alunos resolverem, desconsiderando assim, atividades do tipo apenas aplicação de fórmulas, como calcule e/ou simplifique. Cada item foi analisado como uma unidade de análise, ou seja, havendo uma atividade com as questões *a*, *b* e *c*, cada item foi contabilizado e tomado separadamente para análise.

Com base em cada Guia de Livros Didáticos publicados, foram selecionadas as seguintes coleções e livros, conforme os Quadros 1 e 2:

Quadro1. Coleções analisadas dos anos iniciais do Ensino Fundamental

Anos Iniciais do Ensino Fundamental – PNLD 2013		
Coleção	Autor(es)	Editora
Ápis	Luiz Roberto Dante	Ática
Porta Aberta	Arnaldo Rodrigues, Junia La Scala e Marília Centurion	FTD
Ponto de partida	Maria Inez de C. Cerullo, Maria Tomie S. Sato e Regina Maria Chacur	Sarandi
Asas para Voar	Maria Helena S. de Souza e Walter Spinilli	Ática

Quadro 2. Coleções analisadas dos anos finais do Ensino Fundamental

Anos Finais do Ensino Fundamental – PNLD 2014		
Coleção	Autor(es)	Editora
Praticando Matemática	Miguel Asis Name, Maria José C. de V. Zampirolo	Brasil
Matemática – Imenes & Lellis	Luiz Márcio Imenes, Marcelo Cestari Terra Lellis	Moderna

Na análise as coleções foram denominadas de 1AI, 2AI, 3AI e 4AI, nos anos iniciais e 1AF e 2AF, nos anos finais do Ensino Fundamental.

Neste sentido, durante a apresentação dos resultados obtidos em cada um dos elementos investigados, iremos discutindo uma seção, fazendo relação com a anterior e aprofundando definitivamente na última seção, com a análise dos livros didáticos. Ou seja, confrontamos as orientações curriculares de documentos oficiais sobre o ensino de Combinatória, os resultados de pesquisas desenvolvidas sobre a aprendizagem de tal conceito e as atividades propostas em livros didáticos do Ensino Fundamental, de forma gradativa à medida que cada elemento é apresentado, a fim de identificar a abordagem da Combinatória em cada um deles e a relação existente entre os mesmos.

7.2.2 Categorias base da análise

A partir dos nossos objetivos, buscando analisar como se dá a abordagem da Combinatória em orientações curriculares de documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Fundamental e com base na fundamentação teórica que norteia o presente estudo, analisamos os dados coletados nos livros em categorias base das análises, as quais foram definidas a partir do que vimos nos documentos oficiais e nas pesquisas científicas, sendo essas as principais, uma vez que durante as análises vão surgindo novos elementos que são tomados à análise.

- Abordagem sobre a Combinatória na coleção: Buscamos analisar como ocorre, nos livros didáticos, o trabalho com a Combinatória no Ensino Fundamental, uma vez que documentos oficiais, tais como o PCN, orientam o

trabalho com este conceito desde os anos iniciais deste nível de ensino e as pesquisas científicas apontam que os alunos desde cedo são capazes de resolver tais problemas.

- Significados combinatórios trabalhados nos livros: Identificamos quais tipos de problemas combinatórios são explorados nos livros, uma vez que na base da nossa fundamentação teórica Vergnaud defende a utilização dos variados significados de um campo conceitual para a construção do conceito, assim como, documentos oficiais e pesquisas científicas.
- As diferentes representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades: Identificamos como o livro apresenta os problemas combinatórios e sugere que o aluno resolva, uma vez que a variedade de representações simbólicas também é estabelecida por Vergnaud como elemento importante para a mobilização de diferentes estratégias de resolução de problemas e assim auxilia na compreensão do conceito. Os documentos oficiais e as pesquisas científicas também tratam das estratégias de resolução como elemento importante neste nível de ensino, no qual o aluno ainda não deve aprender fórmulas.
- A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução: Identificamos em pesquisas realizadas que os alunos quando optam por enumerar as possibilidades, seja por listagem, árvore de possibilidades ou outra estratégia de resolução, organizem-nas de forma sistemática chegam ao resultado da questão com mais facilidade por não se perder no meio do caminho, assim como podem perceber regularidades e generalizar o resultado.
- Esgotamento de possibilidades: Analisamos se os problemas propostos solicitam e/ou orientam os alunos sobre o esgotamento das possibilidades, uma vez que se trata de uma das dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas combinatórios nos resultados de pesquisas na área.

8 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentamos neste capítulo a análise e discussão dos elementos investigados no estudo e dos dados obtidos no mapeamento dos materiais. No que se refere às orientações curriculares, às pesquisas e aos livros didáticos, foi feita uma descrição e análise destes elementos. Em relação ao primeiro elemento, apresentamos de que forma a Combinatória é orientada para ser trabalhada no Ensino Fundamental, além de apontar a abordagem que os documentos fazem deste conteúdo. Sobre o segundo elemento, apresentamos as principais contribuições da pesquisa científica para o ensino e aprendizagem da Combinatória, a partir dos resultados de estudos recentes na área. No terceiro elemento, seção referente aos livros didáticos, realizamos a descrição e análise deste recurso de ensino no que tange à proposta de abordagem do ensino de Combinatória, relacionando resultados descritos sobre as orientações curriculares e as pesquisas com resultados encontrados nos livros.

Neste sentido, descrevemos minuciosamente e ao mesmo tempo analisando gradativamente as orientações curriculares para o ensino da Combinatória nos PCN e nos Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco, ambos de Matemática, em cada etapa do Ensino Fundamental (anos iniciais e finais) e os resultados de pesquisas recentes publicadas em eventos científicos, nacionais e internacionais ocorridos no Brasil no período de 2009 a 2013, relacionados à Educação Matemática, apontando os conhecimentos combinatórios de alunos em estudos de sondagem e formas de intervenções para o ensino e desenvolvimento deste conteúdo. Nos livros didáticos apresentamos uma descrição e análise da abordagem da Combinatória a partir do mapeamento realizado neste recurso das atividades que apresentavam problemas combinatórios, para que assim possamos observar a consonância entre este material, as orientações curriculares e os resultados de pesquisa.

8.1 As orientações para o ensino de Combinatória no Ensino Fundamental

Analisaremos neste ponto do estudo o que orientações curriculares de documentos oficiais trazem para o ensino da Combinatória ao longo do Ensino Fundamental. Neste sentido, fizeram parte da análise os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos anos iniciais e dos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997; 1998) e os Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação

Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). No decorrer da descrição das orientações encontradas iremos confrontando-as e fazendo uma análise comparativa, a fim de apontarmos relações, consonâncias e divergências entre os documentos investigados.

8.1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática

8.1.1.1 Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Os PCN de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental tratam a Combinatória como um dos elementos que marcam as mudanças no ensino desta disciplina. Desta forma, destacam a importância de se trabalhar desde o Ensino Fundamental questões que envolvam tal conhecimento, assim como a estatística e a probabilidade, como forma de atender uma demanda de necessidade social (BRASIL, 1997).

Dentre os objetivos da Matemática para este ciclo, as orientações curriculares apontam ser necessário “fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático” (BRASIL, 1997, p.37), citando entre os conhecimentos a serem utilizados, o combinatório dentre os demais, aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico e probabilístico.

Os PCN orientam que a seleção de conteúdos a serem trabalhados com as crianças deve atender à necessidade de acrescentar aos conhecimentos gerais, conteúdos que atendam a uma demanda social e que permitam ao cidadão exercer habilidades de tratar informações do cotidiano, de forma a lidar com dados estatísticos e raciocinar com base no pensamento probabilístico e combinatório. Em relação à Combinatória, neste ciclo inicial de escolarização, “o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem” (BRASIL, 1997, p.40).

O ensino da Combinatória se faz presente nas orientações em alguns dos eixos do ensino da Matemática. Nos conteúdos conceituais e procedimentais em Tratamento da Informação tem-se como um dos objetivos a “identificação das

possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais” (p.62). No bloco de Números e Operações, ao trabalhar multiplicação e divisão, a ideia de Combinatória é relacionada a um dos tipos de problemas multiplicativos e também em situações de divisão. As orientações deste documento abordam a importância de propiciar as oportunidades para as crianças, do primeiro e segundo ciclos, interagirem com os diferentes significados das operações. É orientado, ainda, o uso de diferentes representações para a resolução, fazendo desenhos, diagramas de árvore, até esgotar as possibilidades, levando-as a reconhecer que um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes operações, assim como uma mesma operação pode estar associada a diferentes problemas. Um exemplo clássico de produto cartesiano, com a combinação de blusas e saias, ele traz a resolução por meio da listagem, do diagrama, da árvore de possibilidades e pela multiplicação, sendo nesta última representação chamando a atenção para o invariante de ordem, que neste contexto, não gera novas possibilidades na repetição dos casos, uma vez que combinar blusas com saias é o mesmo que combinar saias com blusas.

Desta forma, se orienta a trabalhar as características de cada tipo de problema multiplicativo, contudo ao tratar da ideia de combinatória, apresenta apenas como exemplo o produto cartesiano.

Em suma, o trabalho com este conhecimento é marcante ao se tratar do bloco Tratamento da Informação, abordando junto a ele a Estatística e a Probabilidade desde os anos iniciais, sendo uma nova característica do currículo de Matemática que, contudo, não pretende um trabalho a ser desenvolvido com base na definição de fórmulas, mas a construção de um conhecimento essencial para a vida social. Além disso, há um destaque para este conteúdo, a Combinatória, no bloco relacionado a Números e Operações, quando o coloca como um dos tipos de problemas multiplicativos, o que, provavelmente, aparecerá mais de forma mais explícita nos livros didáticos dos anos iniciais.

8.1.1.2 Anos Finais do Ensino Fundamental

Os PCN de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental ao tratar da seleção de conteúdos, apontam a importância de se ter um currículo de Matemática que abranja conhecimentos nos eixos de Números e Operações (Aritmética e

Álgebra), Espaço e Forma (Geometria) e Grandezas e Medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento), também conhecimentos referentes ao raciocínio combinatório. Isto porque, observa-se atualmente, uma necessidade de demanda social para que os cidadãos possam lidar com dados estatísticos, e as ideias probabilísticas e combinatórias.

No que diz respeito aos problemas de contagem (combinatórios), “o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades” (BRASIL, 1998, p.52). Desta forma, orienta-se o ensino dos diferentes tipos de problemas combinatório para que se possa desenvolver a compreensão deste raciocínio de ampla forma e posteriormente aplicá-lo à probabilidade.

De acordo com os PCN, a resolução de problemas de contagem, no Ensino Fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar elementos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Desta forma, ao se envolver com estes tipos de situações, este tipo de contagem será aperfeiçoada e será desenvolvido o raciocínio combinatório. É a partir deste raciocínio que o aluno poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, elementos importantes para a aprendizagem da Probabilidade e da Estatística.

Sendo assim, este trabalho deve iniciar por meio da familiarização com a contagem de agrupamentos de objetos, a partir da estratégia de listagem dos agrupamentos possíveis. Ou seja, neste ciclo, assim como nos anos iniciais, o aluno ainda fará uso de estratégias não formais para a resolução dos problemas. Em seguida, o aluno irá compreender, pela exploração dos problemas de contagem, o princípio multiplicativo. O documento aponta que “Tal princípio está quase sempre associado a situações do tipo: Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar? (BRASIL, 1998, p. 136).

A Combinatória também estaria associada ao desenvolvimento, pelo aluno, dos procedimentos de organização de dados em tabelas, gráficos e diagramas, assim como da classificação de eventos a partir de critérios. Ou seja, o envolvimento

com problemas combinatórios, leva o aluno a desenvolver habilidades e raciocínios que envolvem outros conhecimentos matemáticos e de outras áreas do conhecimento, reforçando a defesa pelo seu ensino desde as séries iniciais do Ensino Fundamental.

O documento apresenta separadamente o ensino, a aprendizagem, os objetivos, os conteúdos e os critérios de avaliação da Matemática para cada ciclo dos anos finais do Ensino Fundamental. Ao se tratar do 3º ciclo (6º e 7º ano), a Combinatória, aparece como objetivo a ser explorado em situações de aprendizagem que envolvam a resolução de problemas, no qual aparece como conteúdos e procedimentos a serem abordados no bloco Tratamento da Informação, incluindo problemas que envolvem o princípio multiplicativo. A orientação para a resolução é o uso de diferentes estratégias, como a construção de tabelas e esquemas. No que tange a avaliação deste ciclo, dentre os critérios é orientado que o aluno faça relação da Combinatória com a Probabilidade, uma vez que trata da resolução de problemas de contagem com a indicação das possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão, ou seja, a probabilidade. Desta forma, apresenta como critério avaliativo que o aluno deverá resolver problemas de contagem e indicar as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão, uma vez que,

por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem com quantidades que possibilitem obter o número de agrupamentos, utilizando procedimentos diversos, como a construção de diagrama de árvore, tabelas etc., sem o uso de fórmulas. Verifica, também, se o aluno é capaz de indicar a probabilidade de sucesso de um evento por meio de uma razão, construindo um espaço amostral em situações como o lançamento de dados, moedas, etc (BRASIL, 1998, p.77).

Para o 4º ciclo (8º e 9º ano), identificamos a Combinatória como conteúdo no qual, tendo em vista que os alunos já desenvolveram estratégias para resolver os problemas de contagem nos ciclos anteriores, apoiados em diversas formas de representações, é indicado que os problemas apresentem números um pouco maiores, de modo que os alunos percebam que o princípio multiplicativo é uma estratégia que auxilia a resolver mais facilmente muitos problemas. Desta forma, percebe-se um avanço na formalidade da resolução dos problemas combinatórios, passando gradativamente para a utilização da fórmula, no nível de ensino posterior. Este aspecto da representação ao resolver os problemas é reafirmado ao se tratar

dos conceitos e procedimentos para este ciclo, orientando “resolução de situações-problema de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas sem a aplicação de fórmulas” (BRASIL, 1998, p.87). O princípio multiplicativo citado no documento, também é conhecido como princípio fundamental da contagem, que se trata de uma estratégia que utiliza a multiplicação para resolução, sem que seja necessário listar todos os casos possíveis, no qual pretende-se perceber a quantidade de possibilidades para cada elemento em relação a posição dos mesmos nos problemas. Desta forma, é indispensável que os alunos produzam diversas representações para resolução dos problemas combinatórios, antes de se pretender que reconheçam a utilização de um cálculo multiplicativo. Contudo, se lhes forem apresentados apenas problemas com quantidades pequenas, como indicado para o início do trabalho com este conhecimento, não terão a necessidade de aplicar o princípio multiplicativo, pois o procedimento da contagem direta é suficiente para obter a solução.

Conforme tais orientações apresentadas sobre a Combinatória nos PCN ao longo do Ensino Fundamental, percebemos que tais documentos, ao tratarem de ciclos diferentes corroboram em vários aspectos, orientando o trabalho com tal conteúdo. Nestes documentos encontramos contribuições importantes para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, uma vez que pretende o seu ensino sistemático do primeiro ao último ciclo deste segmento. Este aspecto, se nos apoiarmos em Vergnaud (1986), seria uma abordagem desenvolvimentista, na qual o conceito se desenvolve em um longo período de tempo de forma gradativa, possibilitando uma construção ampla do aprendizado.

O desenvolvimento do conceito em sua totalidade também é visto no PCN quando em ambos os documentos (o dos anos iniciais e o dos anos finais do Ensino Fundamental) o ensino da Combinatória tem como objetivo levar o aluno a lidar com os diferentes tipos de problemas e não apenas de um tipo ou outro. Uma importante contribuição do documento, mesmo que pouco explícita, é a orientação ao professor sobre o invariante de ordem presente nos problemas combinatórios, que no documento dos anos iniciais é chamada a atenção nos problemas de produto cartesiano. Percebemos que esta discussão precisa ser ampliada, uma vez que principalmente os professores dos anos iniciais que não têm uma formação específica sobre o conteúdo e precisam estar conscientes das diferenças entre cada

tipo de situação combinatória, sendo esta uma das maiores dificuldades dos alunos ao resolver tais problemas.

Outra importante contribuição destes documentos se refere às estratégias de resolução dos problemas, no qual, ao longo deste segmento os alunos devem ter a oportunidade de lidar com os diferentes tipos de representações simbólicas, que se diferem do trabalho no Ensino Médio com a utilização de fórmulas, nível de ensino no qual os alunos irão se utilizar de estratégias não formais como listagem, diagramas, tabelas e árvores de possibilidades, e apenas no último ciclo iniciar a formalização da resolução, introduzindo o princípio fundamental da contagem.

Neste sentido, os PCN de Matemática do Ensino Fundamental abordam a Combinatória como conhecimento a ser desenvolvido ao longo de todos os ciclos, estado relacionados nos anos iniciais nos blocos de conteúdos de Tratamento da Informação e de Números e Operações, neste último quando trata das estruturas multiplicativas e gradativamente vai se associando à ideia de Probabilidade (relacionando com Tratamento da Informação), recebendo maior ênfase de relação com este outro conhecimento nos anos finais.

8.1.2 Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco

Os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco se apresentam como um documento recente, que traz orientações curriculares para o ensino no Estado. Ele se constitui de um documento único para cada disciplina, abrangendo todo o Ensino Fundamental e Médio. Nos Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) a Combinatória é citada como um dos conteúdos do bloco Tratamento da Informação, relacionada com a “Matemática do discreto, que lida com a combinatória e suas ferramentas teóricas para a contagem sistemática de conjuntos discretos e com outros campos de conhecimento envolvendo estruturas de tais conjuntos, a exemplo dos grafos” (p.31).

Antes de apresentar detalhadamente as expectativas de aprendizagem por ano de escolarização e por bloco de conteúdos, o documento apresenta um quadro

resumo das expectativas de aprendizagem para a Educação Básica³, indicando como essas expectativas progridem em função do avanço escolar. A Figura 1 apresenta uma legenda que ajuda a entender o sentido de cada uma das cores utilizadas nos quadros e posteriormente a Figura 2 onde a Combinatória foi identificada.

Figura 1. Legenda de cores com níveis de expectativas de aprendizagem

• a cor branca indica que a expectativa não precisa ser objeto de intervenção pedagógica naquela etapa de escolarização, pois será trabalhada posteriormente;
• a cor azul clara indica o(s) ano(s) no(s) qual(is) uma expectativa deve começar a ser abordada nas intervenções pedagógicas, mas sem preocupação com a formalização do conceito envolvido;
• a cor azul celeste indica o(s) ano(s) no(s) qual(is) uma expectativa deve ser abordada sistematicamente nas intervenções pedagógicas, iniciando-se o processo de formalização do conceito envolvido;
• a cor azul escura indica o(s) ano(s) no(s) qual(is) se espera que uma expectativa seja consolidada como condição para o prosseguimento, com sucesso, em etapas posteriores de escolarização.

Fonte: Pernambuco (2012, p. 45)

³ Apresentamos dados também do Ensino Médio, uma vez que se trata de um documento único para toda a Educação Básica.

Figura 2. Alguns conteúdos do Bloco Números e Operações com os níveis desejáveis de aprendizagem por ano escolar

NÚMEROS E OPERAÇÕES												
Expectativas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Reconhecimento e representação de números racionais na forma fracionária.												
Números pares e ímpares.												
Representação simbólica e cálculo mental de adições e subtrações.												
Representação simbólica e cálculo mental de multiplicações.												
Resolução de problemas de divisão por meio de cálculo mental.												
Reconhecimento e representação de números racionais na forma decimal.												
Associação de números naturais a pontos na reta numérica.												
Composição e decomposição de números racionais na representação decimal.												
Diferentes ideias de números racionais na representação fracionária.												
Representação simbólica e cálculo mental de divisões.												
Frações equivalentes.												
Porcentagem.												
Multiplicação e divisão por potências de dez.												
Características do sistema de numeração decimal.												
Associação de números racionais a pontos na reta numérica.												
Relação de ordem nos números racionais.												
Resolução de problemas com números racionais por meio de cálculo mental.												
Expressões aritméticas.												
Divisibilidade e critérios de divisibilidade.												
Potenciação.												
Radiciação.												
Adição e subtração de frações.												
Números inteiros.												
Relação de ordem nos números inteiros.												
Associação de números inteiros a pontos na reta numérica.												
Simétrico e valor absoluto.												
Resolução de problemas de adição e subtração de números inteiros.												
Fatoração de números naturais.												
MMC e MDC												
Números irracionais e reais.												
Multiplicação e divisão de números racionais.												
Números em notação científica.												
Propriedades das operações aritméticas.												
Problemas de combinatória.												
Conjuntos numéricos.												
Operações aritméticas por meio dos algoritmos formais.												

Fonte: Pernambuco (2012, p.48)

Apesar de relacionar a Combinatória com a Probabilidade e a Estatística, no bloco em que estes dois conteúdos são mencionados, não identificamos conhecimentos combinatórios explicitados. Foi possível identificar os problemas de combinatória como expectativas de aprendizagem a partir do 8º ano no bloco de

Números e Operações, que progridem em função do avanço do ano escolar. Interpretando a legenda, neste quadro geral de expectativas, até o 7º ano indica que a expectativa não precisa ser objeto de intervenção pedagógica nesta etapa de escolarização, pois será trabalhada posteriormente. Este aspecto apresenta divergências ao que encontramos no PCN e nos livros didáticos que já trazem problemas combinatórios relacionados às ideias de multiplicação ou em Tratamento da Informação. Segundo este quadro, seria a partir do 8º ano que os problemas combinatórios devem começar a ser abordados nas intervenções pedagógicas, mas sem preocupação com a formalização do conceito envolvido. Seria apenas a partir do 1º ano do Ensino Médio que se espera que uma expectativa seja consolidada como condição para o prosseguimento, com sucesso, em etapas posteriores de escolarização.

Estas orientações para o ensino de Combinatória como expectativas de aprendizagem, nos leva a refletir como em apenas de um ano escolar para outro haja a consolidação do aprendizado deste conceito, uma vez que pesquisas apresentam que este conteúdo pode e deve ser trabalhado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. O que percebemos dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco para a Educação Básica, ao menos nos quadros de expectativas de aprendizagem, é um retrocesso em relação ao que os PCN preconizam em relação à Combinatória.

Quando o documento faz menção às expectativas de aprendizagem de forma mais detalhada e por nível de ensino percebemos orientações para a Combinatória que não foram vistas no quadro geral, apresentando assim certa divergência de informações.

O bloco Estatística e Probabilidade apresenta a Combinatória afirmando que é uma oportunidade privilegiada de articulação desse bloco com o campo das operações numéricas é a exploração das ideias de Combinatória, a partir das quais o professor pode elaborar situações em que o estudante seja levado a realizar diferentes combinações de elementos, citando um exemplo de produto cartesiano: “por exemplo, situações em que se pergunte ao estudante, diante de duas calças e três camisas, de quantas maneiras diferentes ele pode combiná-las e quais são essas maneiras” (p.58). Contudo ao listar as expectativas de cada ano escolar dos anos iniciais do Ensino Fundamental, encontramos, quase que exclusivamente relacionadas, a leitura, interpretação e construção de gráficos, e apenas uma

expectativa relacionada a discutir a ideia intuitiva de chance de ocorrência de um resultado a partir da análise das possibilidades.

Em Números e Operações, de forma semelhante ao que ocorre nos PCN (BRASIL, 1997), encontramos que a multiplicação deve ser apresentada aos educandos se explorando os diferentes significados das operações fundamentais, nas quais são essenciais situações em que surjam a ideia de multiplicação comparativa, a noção de proporcionalidade, a contagem de configurações retangulares e a combinação de elementos de diferentes maneiras. No que tange aos procedimentos de resolução, deve-se valorizar as estratégias pessoais de cálculo escrito dos estudantes, sendo compreendidas pelo professor e confrontadas com as dos demais alunos. O documento orienta que a aquisição do algoritmo usual das quatro operações, deve iniciar-se apenas no 5º, ocorrendo em um longo processo para conclusão, a consolidar-se apenas na próxima etapa de escolarização. Esta orientação se faz importante para o ensino de problemas combinatórios, no qual, ao longo do Ensino Fundamental, os estudantes apresentam diferentes formas de resolver os problemas com estratégias lógicas e coerentes, no qual o uso da fórmula só se dará no final do ciclo de escolarização, no Ensino Médio.

Ao tratar das expectativas em cada ano deste nível de ensino no bloco Números e Operações, no 1º ano não encontramos menção à Combinatória e no 2º ano ao tratar da multiplicação cita que os alunos devem “resolver e elaborar problemas de multiplicação em linguagem verbal (com o suporte de imagens ou materiais de manipulação), envolvendo as ideias de adição de parcelas iguais e de elementos apresentados em disposição retangular” (p. 83) e no 3º ano acrescenta a ideia de proporcionalidade. Ou seja, exclui os problemas que envolvem a ideia de Combinatória como expectativa nestes anos. A ideia de Combinatória é vista como expectativa de aprendizagem apenas no 4º ano do Ensino Fundamental, que nos PCN além de ser indicado desde o primeiro ciclo, ainda trata de todos os tipos de problemas combinatórios. Contudo, estudos anteriores apontam que tais problemas já são presentes nos livros desde o 1º ano do Ensino Fundamental (Barreto, Amaral e Borba, 2007; Assis e Magalhães, 2012).

Nas expectativas de aprendizagem para os anos finais do Ensino Fundamental, analisando os blocos de conteúdos, em Estatística e Probabilidade a discussão inicial de fato só trata destes dois conteúdos de ensino. A Combinatória

se apresenta apenas ao tratar das expectativas para o 8º ano, no qual o documento afirma que o aluno deve “usar diferentes técnicas de contagem (diagrama de árvores, permutação, combinação e arranjo, sem uso de fórmulas) para determinar o número de resultados possíveis de um experimento” (p.100). As técnicas, dizem respeito aos diferentes tipos de problemas, citando os quatro significados da Combinatória, e enfatizando a não utilização de fórmula neste ciclo de ensino. Este aspecto corrobora com o mencionado nos PCN, ao orientar diferentes tipos estratégias de resolução sem a sua formalização, que será vista apenas no Ensino Médio. Nem no 9º ano foram encontradas expectativas, uma vez que no quadro geral, apresentado anteriormente na Figura 3, seria neste ciclo que deveria se iniciar o ensino sistemático deste conteúdo, o que demonstra contradições entre o exposto no quadro de expectativas por ano escolar e o que vem sendo detalhado posteriormente. Percebemos que este documento traz lista de conteúdos nos quadros que nem sempre está condizente com o que está discutido no seu texto.

Em Números e Operações o documento orienta para este nível atividades que explorem a representação e a contagem, em situações combinatórias que possibilitem o estudante à construção do conceito de princípio multiplicativo como recurso fundamental, mas não único, na resolução de diversos problemas. Por ano deste nível, encontramos apenas expectativas relacionadas à Combinatória também no 8º ano, no qual o aluno deve “resolver e elaborar problemas de contagem que envolvam o princípio multiplicativo, por meio de registros variados (diagrama de árvore, tabelas e esquemas), sem o uso de fórmulas” (p.118).

No Ensino Médio as expectativas que tangem este nível para a Combinatória são apenas encontradas no bloco Números e Operações, no qual as noções ligadas à Análise Combinatória devem ser exploradas por meio de diferentes representações, tais como árvores de possibilidades, tabelas, listagem de elementos etc. Devem ser valorizados contextos realísticos nas situações-problema abordadas, evitando a simples aplicação de fórmulas para a resolução. Desta forma, apresenta expectativas de aprendizagem para que no 1º, 2º e 3º ano os alunos devam resolver e elaborar problemas de contagem, envolvendo as ideias de permutação, combinação e arranjo, sendo que no 1º ano usando estratégias diversas, sem uso de fórmulas.

Ao analisamos os Parâmetros Curriculares de Matemática para Educação Básica de Pernambuco, fica nítido um retrocesso em alguns aspectos do ensino de

Combinatória vistos nos PCN. Apesar de ser um documento recente, o mesmo apresenta ainda uma contradição de informações que dificulta o entendimento de suas orientações, no qual o quadro geral de expectativas não corrobora com algumas explicações mais detalhadas sobre o mesmo.

Com relação à abordagem da Combinatória, mesmo este conteúdo estando sendo relacionado intimamente com a Probabilidade e a Estatística, não identificamos nenhuma expectativa de aprendizagem combinatória relacionada a este bloco de conteúdos, ou seja, é apenas em números e operações que encontramos orientações para o seu ensino. Ainda sobre a sua abordagem no Ensino Fundamental, o quadro geral de expectativas nos leva a compreender que o seu ensino se daria apenas no último ciclo, o que seria um retrocesso diante do que os PCN já trazem de contribuições e o que percebemos nos livros didáticos e em resultados de pesquisas de que alunos são capazes de desenvolver tal raciocínio desde cedo, como veremos mais adiante.

Os tipos de problemas combinatórios a serem trabalhados e as orientações sobre o ensino dos mesmos, também não estão presentes neste documento, mostrando uma fragilidade de suporte e orientação ao professor e ao desenvolvimento deste conhecimento no currículo dos alunos. As contribuições mais evidentes dizem respeito ao uso das diferentes estratégias de resolução não formais durante todo o período do Ensino Fundamental, iniciando a formalização com a compreensão do princípio fundamental da contagem, como visto também nos PCN. Sendo assim, os Parâmetros Curriculares de Matemática para Educação Básica de Pernambuco mesmo sendo um documento recente apresenta lacunas quanto às orientações para o trabalho com a Combinatória no Ensino Fundamental, diferentemente do que os PCN já trazem de contribuição outros elementos que trataremos a seguir.

8.2 A Combinatória em resultados de pesquisas científicas

Analisando as pesquisas científicas recentes relacionadas de forma direta com o ensino e aprendizagem da Combinatória, vários elementos surgiram nos fazendo refletir sobre como os estudantes desenvolvem e aprendem tal raciocínio, levando-nos a pensar sobre o trabalho com este conteúdo ao longo do Ensino Fundamental, assim como em toda a Educação Básica. Apresentamos, assim, a

análise dos principais resultados obtidos nas pesquisas já apresentadas em capítulo anterior, apontando as principais contribuições para o ensino e aprendizagem da Combinatória.

No que tange às sondagens realizadas com alunos ao longo da Educação Básica foi possível perceber desde cedo os estudantes são capazes de compreender e resolver problemas combinatórios. Muitas vezes as resoluções ainda não apresentam o resultado final correto, contudo as respostas dos alunos nos dão indícios da compreensão que os mesmos têm das lógicas implícitas nos problemas. Este aspecto pode ser evidenciado com crianças da Educação Infantil no estudo de Matias, Santos e Pessoa (2011) que mesmo em um nível de ensino em que as crianças têm o seu primeiro contato com a educação formal, os sujeitos pesquisados entre cinco e seis anos, apesar da dificuldade em esgotar as possibilidades, demonstraram um raciocínio combinatório, encontrando combinações e sabendo a diferença entre elas. É neste sentido que os PCN orientam o trabalho com a Combinatória desde os anos iniciais, pois através do ensino sistemático os alunos são capazes de ampliar este raciocínio e superar algumas dificuldades como a compreensão dos invariantes e o esgotamento das possibilidades.

Estas dificuldades são encontradas no estudo Pessoa e Santos (2011) investigando alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. As autoras apontam a interferência na ordem de grandeza do número de possibilidades neste nível, no qual questões com um menor número de possibilidades são resolvidas mais facilmente e também na dificuldade de explicitar as diferenças dos invariantes entre os tipos de problemas. Este último aspecto pode ser relacionado com a quase inexistente orientação nos documentos referentes às características de cada situação combinatória para o trabalho com os alunos. Desta forma, neste ciclo o importante é que os alunos possam estar em contato com os problemas combinatórios para o desenvolvimento deste raciocínio, sendo assim necessário atenção à grandeza numérica do resultado de possibilidades para não criar um obstáculo na aprendizagem do conteúdo pelo aluno.

Além disso, pesquisas apostam na explicitação dos invariantes dos problemas para a resolução de tais situações nos anos iniciais. Desta forma, Silva e Spinillo (2011) evidenciaram que quando um problema explicita em seu enunciado os princípios básicos do raciocínio combinatório, as crianças são capazes de resolvê-lo corretamente através da adoção de estratégias adequadas. Estes resultados

reforçam a ideia de que a explicitação das características dos problemas combinatórios é um dos principais elementos para a compreensão do conceito. Sendo assim, as autoras defendem o papel do professor como mediador deste processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório, trabalhando de forma a evidenciar os invariantes contidos nos problemas.

Outro dado importante sobre a compreensão combinatória de alunos dos anos iniciais, também encontrado no estudo de Pessoa e Santos (2011) e em Pessoa e Borba (2009 e 2012) é que quando as respostas dadas pelos alunos apresentavam uma sistematização das possibilidades, construindo-a de forma organizada, acontecia mais êxito do que quando não sistematizavam. Ou seja, é importante chamar a atenção do aluno para a organização da sua resposta de forma a não se perder durante o processo e resolução e encontrar todas as possibilidades possíveis.

As diferentes estratégias apresentadas pelos alunos que são bem sucedidas na resolução dos problemas também são uma grande contribuição dos estudos de sondagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental, no sentido de evidenciar que mesmo não tendo passado por um ensino sistemático da Combinatória, os alunos utilizam de representações próprias para explicitar a compreensão das situações. Os PCN e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco corroboram com este dado, orientando o uso de diferentes estratégias de resolução no ensino por meio de listagens, desenhos, tabelas, entre outras, sem que haja o ensino de fórmulas.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, as contribuições dos estudos de sondagem são em relação à quantidade de etapas de escolha na resolução de problemas combinatórios. Neste sentido, Borba, Pontes, Silva e Martins (2013) evidenciaram que quanto maior a quantidade de etapas de escolhas, maior a dificuldade dos alunos em resolverem tais problemas, constituindo-se assim, uma variável que tem influência na resolução de problemas de Combinatória.

Este elemento dos problemas combinatórios também deve ser levado em consideração no Ensino Médio, segundo Silva, Pontes e Teixeira (2013), no qual estudantes do 3º ano do Ensino Médio apresentavam a mesma dificuldade citada acima com os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Outro elemento a ser levado em consideração nesta fase final da escolarização básica são os problemas condicionais comumente trabalhados neste ciclo. Borba e Braz (2012) identificaram

que existem várias relações envolvidas neste tipo específico de problemas, que, no entanto, são percebidas por alunos desde o 5º ano. Contudo, deve se levar em consideração a quantidade de relações envolvidas nas situações, uma vez que, quanto mais relações envolvidas na situação combinatória condicional, mais esforço cognitivo será necessário para o aluno. Esta contribuição também foi identificada por Borba, Araújo e Braz (2013), investigando com alunos do Ensino Médio (1º e 3º ano) a compreensão destes sobre problemas combinatórios condicionais, apontado o princípio fundamental da contagem como uma estratégia válida para a compreensão e resolução de tais problemas. Segundo os PCN de Matemática dos anos finais (BRASIL, 1998) a aprendizagem deste tipo de estratégia de resolução é o primeiro passo para a formalização do conceito, no qual os alunos devem aprender no final do Ensino Fundamental, uma vez que já utilizou diversificadas estratégias não formais, para que posteriormente, no Ensino Médio, faça o uso consciente das fórmulas.

Em suma, os estudos de sondagem apontam que os alunos são capazes de resolver problemas combinatórios antes mesmo da introdução formal no ambiente escolar e da prática geralmente efetiva, no 2º ano do Ensino Médio, sendo assim também as orientações dos PCN de Matemática (BRASIL, 1997 e 1998) para o trabalho com tais problemas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, é importante trabalhar com os alunos os diferentes tipos de problemas combinatórios para que haja a construção do conceito, assim como a explicitação e compreensão dos princípios invariantes presentes em cada um deles. As estratégias de resolução apresentadas pelos alunos são importantes indícios para a compreensão de como o aluno pensa e desenvolve seu raciocínio, além de ser uma forma de ensinar ao longo do Ensino Fundamental, antes de serem introduzidas as fórmulas. Outros elementos também precisam ser considerados no ensino da Combinatória, tais como as etapas de escolha presentes nos problemas, uma vez que a quantidade de etapas pode dificultar a resolução, sendo a compreensão do problema o elemento principal deste processo de aprendizagem, além do trabalho com os problemas condicionais, que devem ser introduzidos levando em consideração aos invariantes presentes nesta especificidade de problemas, de forma gradual, podendo ser, antes mesmo do Ensino Médio.

As pesquisas em Combinatória também nos oferecem resultados de estudos de intervenções com alunos dos diferentes níveis da Educação Básica. Os estudos

de intervenção na área apontam a necessidade de romper com o método tradicional de ensino, baseado em fórmulas, havendo ainda, um consenso em todos os ciclos de ensino em utilizar a resolução de problemas como ponto de partida para a aprendizagem de Combinatória, mesmo no Ensino Médio como evidenciado por Pinheiro, Abar e Sá (2012). Esta perspectiva corrobora com a ideia atual do ensino da Matemática que propõe um ensino dinâmico, no qual as situações-problema se apresentam como um contexto desafiador para os alunos, promovendo a motivação e a mobilização de diversificadas estratégias de resolução. Sendo assim, devem ser valorizados contextos realísticos nas situações-problema abordadas, evitando a simples aplicação de fórmulas para a resolução (PERNAMBUCO, 2012).

As pesquisas de intervenção em Combinatória reforçam a importância da valorização dos conhecimentos prévios dos alunos para um ensino eficaz e aprendizagem significativa. Neste sentido, as estratégias bem sucedidas apresentadas por alunos em estudos anteriores são utilizadas para a elaboração de intervenções de ensino mais próximas da forma como os estudantes pensam sobre as situações combinatórias. Dois dos estudos em análise desenvolveram um método de ensino que valorizou resultados de estudos anteriores, que evidenciaram a estratégia da listagem como bem sucedida por estudantes desde os anos iniciais, além da sistematização desta estratégia como forma de encontrar com sucesso as possibilidades possíveis em cada situação proposta.

Sendo assim, Pessoa e Santos (2012) com alunos do 5º ano e Pessoa e Silva (2012) com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, trazem contribuições para o ensino da Combinatória ao evidenciar que esta perspectiva de ensino propiciou aos alunos compreensão dos pilares trabalhados durante as intervenções, resolvendo de forma bem sucedida os problemas propostos e, de certa forma, generalizar seus procedimentos.

Neste sentido, as intervenções sobre a Combinatória analisadas nos permitem perceber que quando ocorre um ensino sistemático sobre tal conceito, mesmo em séries iniciais, os alunos são capazes de desenvolver tal raciocínio e apresentar compreensão dos problemas. Os resultados apresentam que é importante se trabalhar com todos os tipos de problemas combinatórios, chamar a atenção para as características de cada tipo de problema e valorizar as estratégias apresentadas pelos alunos, para que quando for feito o uso da fórmula em níveis mais avançados da escolarização, seja feito de forma consciente.

Os Quadros 3 e 4, a seguir, apresentam uma síntese dos principais resultados obtidos nos estudos analisados.

Quadro 3. Síntese dos resultados de pesquisas em sondagem de alunos

Ano	Autores	Principais resultados
2009	Pessoa e Borba	Alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos do Ensino Médio são capazes de resolver problemas combinatórios, mesmo não chegando ao final da resolução, demonstram compreensão dos significados (tipos de problemas) e invariantes implícitos nos problemas. O nível de ensino e o significado dos problemas também influenciaram o desempenho dos alunos pesquisados.
2011	Matias, Santos e Pessoa	Crianças da Educação infantil, apesar da dificuldade em esgotar as possibilidades, demonstraram um raciocínio combinatório, encontrando combinações e sabendo a diferença entre elas.
2011	Pessoa e Santos	As autoras apontam a interferência na ordem de grandeza do número de possibilidades e também na dificuldade de explicitar as diferenças dos invariantes entre os tipos de problemas, além da importância da sistematização da estratégia no 5º ano do Ensino Fundamental.
2011	Silva e Spinillo	Quando um problema explicita em seu enunciado os princípios básicos do raciocínio combinatório, as crianças são capazes de resolvê-lo corretamente através da adoção de estratégias adequadas.
2012	Borba e Braz	Quanto maior o número de relações nos problemas condicionais, mais esforço cognitivo é requerido para o aluno.
2012	Pessoa e Borba	Os alunos pesquisados se utilizam de distintas estratégias de resolução nos diferentes problemas, percebendo diferenças entre os significados e invariantes das situações apresentadas, ao longo de toda a Educação Básica.
2013	Borba, Pontes e Martins	As etapas de escolha de elementos constituem uma variável que tem influência na resolução de problemas de Combinatória.
2013	Silva, Pontes e Teixeira	Foi possível verificar a influência que as etapas de escolha têm na resolução dos problemas de Combinatória.
2013	Borba, Araújo e Braz	É preciso que se trabalhem as diversas situações envolvidas ao tratar dos problemas condicionais para que se possa identificá-las, refletir e devidamente tratá-las.

Quadro 4. Síntese dos resultados de pesquisa em intervenções

Ano	Autores	Principais resultados
2012	Pessoa e Santos	Aponta a necessidade de um ensino sistemático de problemas combinatórios, desde os alunos iniciais, com ênfase na explicitação dos invariantes de cada significado, nas possíveis estratégias que podem vir a facilitar as resoluções e na generalização para que os alunos obtenham maior compreensão acerca da Combinatória.
2012	Pessoa e Silva	Avanço no quantitativo geral de acertos, assim como nos tipos de respostas e estratégias apresentadas, reforçando a eficácia das intervenções, e a necessidade de um ensino sistemático da Combinatória nos anos finais.
2012	Pinheiro, Abar e Sá	A importância da resolução de problemas do uso do princípio fundamental da contagem para romper com o método tradicional de ensino, baseado em fórmulas no Ensino Médio.

Em meio às pesquisas analisadas tanto no que se refere à sondagem de conhecimento de alunos, quanto no que tange aos processos de intervenções realizados, parece haver um consenso nos elementos importantes para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, corroborando ainda com orientações já presentes em documentos oficiais que orientam o currículo das escolas.

8.3 A Combinatória em livros didáticos do Ensino Fundamental

O livro didático se configura como um dos recursos mais presentes no processo de ensino e aprendizagem. Ele também é, por muitas vezes, o principal instrumento de trabalho e suporte do professor na realização do seu trabalho. Acreditando na importância e na valorização que este recurso didático se configura para o desenvolvimento da educação no país, apresentamos, a seguir, a análise de coleções do Ensino Fundamental aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático, no sentido de identificar a abordagem que as mesmas fazem da Combinatória, dialogando com a fundamentação teórica do estudo, e os dados apontados e já analisados nos documentos oficiais e resultados de pesquisas científicas para este conteúdo.

8.3.1 Livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental

Analizamos quatro coleções de livros didáticos destinadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental. As duas primeiras são as mais adotadas no país e as duas últimas são as menos adotadas, de acordo com dados do Ministério da Educação (MEC). Apresentamos assim, a abordagem que cada coleção faz da Combinatória ao longo dos livros, os significados combinatórios trabalhados, as representações simbólicas apresentadas junto aos enunciados dos problemas e as representações sugeridas para a resolução, se as coleções sugerem a sistematização das estratégias de resolução e pedem o esgotamento das possibilidades, relacionando assim com a análise feita nos documentos oficiais e os resultados de pesquisas.

8.3.1.1 Coleção 1 dos anos iniciais do Ensino Fundamental (1AI)

8.3.1.1.1 Abordagem da Combinatória na coleção 1AI

A Coleção 1AI, segundo dados do MEC, é a coleção de livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental mais adotada no país. De acordo com o Guia de Livro Didático de Alfabetização Matemática e Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2012), a coleção 1AI inicia a abordagem dos conteúdos com situações do cotidiano, valorizando a interação e a discussão entre os alunos. Nos livros de Matemática são apresentadas algumas situações-problema com as explicações dos procedimentos e, em seguida, propostas diversas de atividades. Entretanto, a avaliação do Guia aponta que, de maneira geral, na coleção, muitas das atividades propostas são diretivas, de simples aplicação de procedimentos. Este aspecto pode levar a dificuldade do desenvolvimento de estratégias próprias por parte dos estudantes e na comparação entre elas, assim como poucas atividades propiciam o desenvolvimento da capacidade investigativa (BRASIL, 2012).

O Guia aponta também que no que se refere ao trabalho com os campos de ensino na Matemática, a coleção prioriza o trabalho com Números e Operações e que em contrapartida, o campo do Tratamento da Informação é pouco presente, principalmente na Alfabetização Matemática e, em sua abordagem, há ênfase em atividades de preenchimentos e de localização de dados em gráficos e tabelas.

Encontramos ainda na avaliação do Guia que a coleção apresenta excesso de páginas, nas quais algumas são sobrecarregadas de textos e ilustrações, mas encontra-se também, uma grande variedade textual, com ilustrações de boa

qualidade. Além disso, afirma que os conteúdos são retomados e ampliados de maneira adequada, tanto em um mesmo volume quanto ao longo da coleção. Encontram-se, também, atividades com várias soluções, desafios, jogos, nas quais é solicitado o uso da calculadora, o cálculo mental e por estimativas, assim como o uso de materiais concretos (BRASIL, 2012).

Em relação à Combinatória, no Guia de Livro Didático de Alfabetização Matemática e Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2012) não é feita menção ao trabalho com este conteúdo, apenas é apresentado como conteúdo às ideias da multiplicação nos livros de 2º ao 4º ano, mas sem informar quais. Neste sentido, pela avaliação feita pelo documento, não está clara a abordagem da Combinatória na coleção, além de este conhecimento não está relacionado ao campo do Tratamento da Informação, contrariando o que foi visto nas orientações curriculares para este segmento de ensino (BRASIL, 1997).

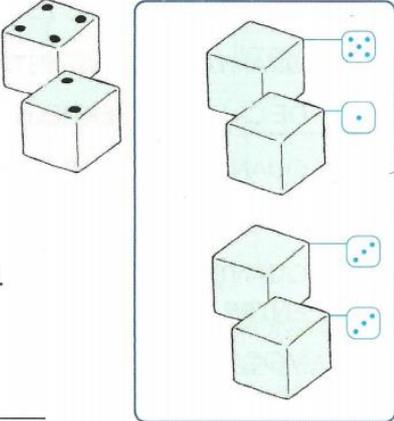
Analisando a Combinatória nos livros, foi possível identificar que a abordagem deste conhecimento é dada em todos os anos de ensino, contudo no 1º ano apenas em uma atividade. Tal abordagem se dá inicialmente em seções denominadas possibilidades, conforme a Figura 3, distribuídas ao longo de todos os livros da coleção, no decorrer de diversos conteúdos, relacionados ou não à Combinatória.

Figura 3. Problema de combinação na seção possibilidades da coleção

1AI

6 POSSIBILIDADE: O QUE QUER DIZER?
 VEJA UM EXEMPLO AO LADO.
 JOGUEI 2 DADOS IGUAIS E SAÍRAM 4 E 2.
 ESTA É UMA POSSIBILIDADE DE OBTER 6 PONTOS.
 DESENHE AO LADO OUTRAS DUAS
 POSSIBILIDADES PARA OBTER 6 PONTOS.
 AGORA, RESPONDA:
 HÁ OUTRAS POSSIBILIDADES?

Não.



Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 2º ano, p.15.

Do 2º ao 4º ano, a coleção 1AI aborda a Combinatória relacionada a uma das ideias da multiplicação (Figura 4). Este aspecto corrobora com as orientações

curriculares de Matemática dos PCN (Brasil, 1997) e nos Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco (2012) em apresentar a Combinatória como uma das diferentes formas de se pensar em multiplicação, uma vez que neste tipo de problema multiplicativo em específico, são mobilizados raciocínios e operações distintas aos comumente utilizados nos problemas mais gerais, como a multiplicação direta.

Figura 4. Ideias da multiplicação na coleção 1A1

Veja o Manual do Professor.

Objetivo

- Retomar as ideias associadas à multiplicação.

Ideias associadas à multiplicação

- Apresentar o algoritmo de multiplicação no qual um dos fatores tem um algarismo e o outro tem um ou mais algarismos.
- Apresentar o algoritmo de multiplicação no qual ambos os fatores têm mais de um algarismo.

Observe em cada cena da escola como podemos calcular o número solicitado.

Faça aos alunos que interpretem os três quadros.

- Resolver problemas envolvendo a multiplicação.

Quantos alunos estão trabalhando em equipe? **24**

4×6

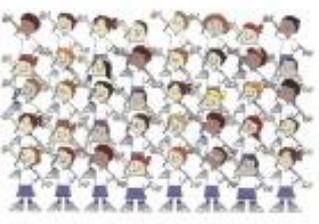
Aqui a ideia de multiplicação é juntar quantidades iguais: $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ ou $4 \times 6 = 24$.



Quantos alunos estão se apresentando na ginástica? **40**

5×8 ou **8×5**

Aqui há uma disposição retangular de alunos em 5 linhas e 8 colunas, totalizando 40 alunos ($5 \times 8 = 40$ ou $8 \times 5 = 40$).



3 tipos de camiseta.
2 tipos de calção.

Quantos uniformes diferentes? **6**

3×2 ou **2×3**

Aqui há uma combinação de possibilidades ao combinar 3 camisetas com 2 calções, totalizando 6 uniformes ($3 \times 2 = 6$ ou $2 \times 3 = 6$).



Nessas três situações temos as várias ideias associadas à multiplicação, que você já estudou nos anos anteriores.

Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 4º ano, p. 156.

Contudo, os PCN de Matemática (BRASIL, 1997) orientam que além dos problemas combinatórios estarem relacionados ao campo Números e Operações, estejam contemplados em Tratamento da Informação, uma vez que estariam

articulados com a Estatística e a Probabilidade, com a obtenção e organização das possibilidades e dando suporte para o cálculo de chance. Contudo, não percebemos esta articulação na coleção.

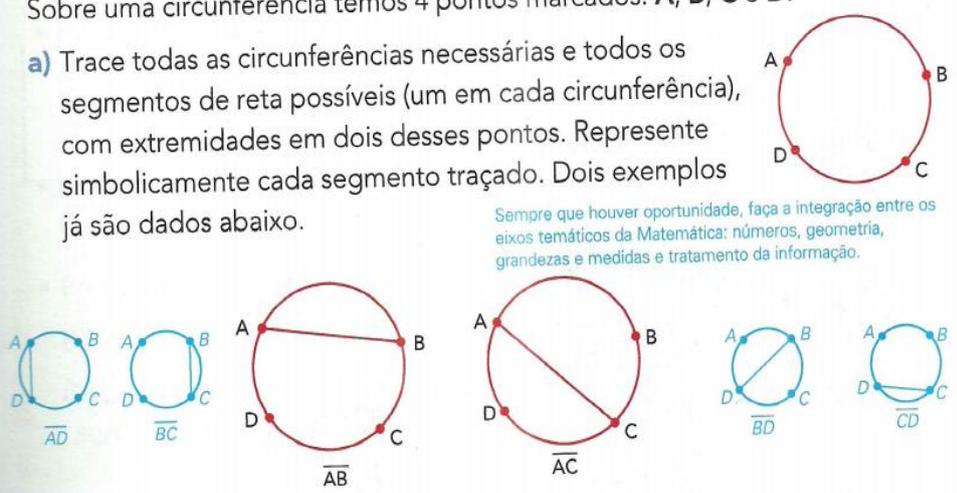
Foi possível identificar, ainda, no livro do 5º ano uma articulação da Combinatória também com o campo da Geometria, conforme a Figura 5.

Figura 5. Problema de combinação relacionada à Geometria na coleção 1AI

4 Possibilidades em geometria
Sobre uma circunferência temos 4 pontos marcados: **A, B, C e D**.

a) Trace todas as circunferências necessárias e todos os segmentos de reta possíveis (um em cada circunferência), com extremidades em dois desses pontos. Represente simbolicamente cada segmento traçado. Dois exemplos já são dados abaixo.

Sempre que houver oportunidade, faça a integração entre os eixos temáticos da Matemática: números, geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação.



b) Escreva quantos foram os segmentos traçados e trace todos os segmentos em uma mesma figura. $6 (3 + 2 + 1)$



Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 5º ano, p. 217.

Neste sentido, a coleção apresenta o trabalho com a Combinatória não exclusivamente em um capítulo de conteúdo, mas fazendo articulação com outros conhecimentos trabalhados ao longo dos livros, contudo sem fazer relação ao campo do Tratamento da Informação.

Durante o mapeamento das atividades foram encontrados, de maneira geral, problemas a resolver, pouco existindo assim, exemplos, exercícios respondidos e explicações ao longo das atividades. Contudo, ao tratar especificamente de problemas combinatórios nas estruturas multiplicativas, o livro propõe, de certa forma uma explicação nas questões solicitadas nas atividades, como na Figura 6.

Figura 6. Problema de produto cartesiano na coleção 1A1

3 Veja as roupas de Sérgio.
De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?
Ele tem 3 bermudas e 5 camisetas.
Para cada bermuda há 5 camisetas.
Para cada camiseta há 3 bermudas.
Total de possibilidades 3 × 5 = 15
ou 5 × 3 = 15

Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 3º ano, p. 122.

Este tipo de atividade faz o aluno refletir sobre um aspecto dos problemas combinatórios, no qual cada elemento poderá ser combinado com todos os outros. No caso do exemplo, por ser um produto cartesiano, cada elemento de um conjunto (bermudas) poderá ser combinado com os elementos do outro conjunto (camisetas). Levar o aluno a refletir sobre este aspecto se faz importante uma vez que muitas crianças, a princípio, ainda possuem apenas o raciocínio com a ideia de um para um, acreditando que um elemento só está relacionado com apenas um outro.

Além disso, ao final de cada capítulo a coleção faz um resgate dos conteúdos trabalhados e ao abordar as ideias da multiplicação, encontramos um exemplo de problema resolvido (Figura 7) e no glossário no final do livro ao tratar de alguns termos presentes nas atividades. Este tipo de exemplo reforça a ideia de se chamar atenção para os problemas combinatórios com características diferentes dos demais problemas multiplicativos.

Figura 7. Revisão sobre as ideias da multiplicação na coleção 1A1

O que estudamos

Vimos as ideias associadas à multiplicação e resolvemos problemas relacionados a essa operação.

- **Juntar quantidades iguais**
 $5 + 5 + 5 = 15$ ou $3 \times 5 = 15$
3 vezes
- **Disposição retangular**
Na caixa há 8 sabonetes.
2 linhas de 4 4 linhas de 2
 $2 \times 4 = 8$ $4 \times 2 = 8$
- **Combinando possibilidades**
Quantas duplas diferentes com um menino e uma menina podemos formar com Júlio, Aldo, Maria, Laura e Neide?
J-M A-M
J-L A-L
J-N A-N
2 meninos e 3 meninas: $2 \times 3 = 6$ duplas

Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 2º ano, p. 217.

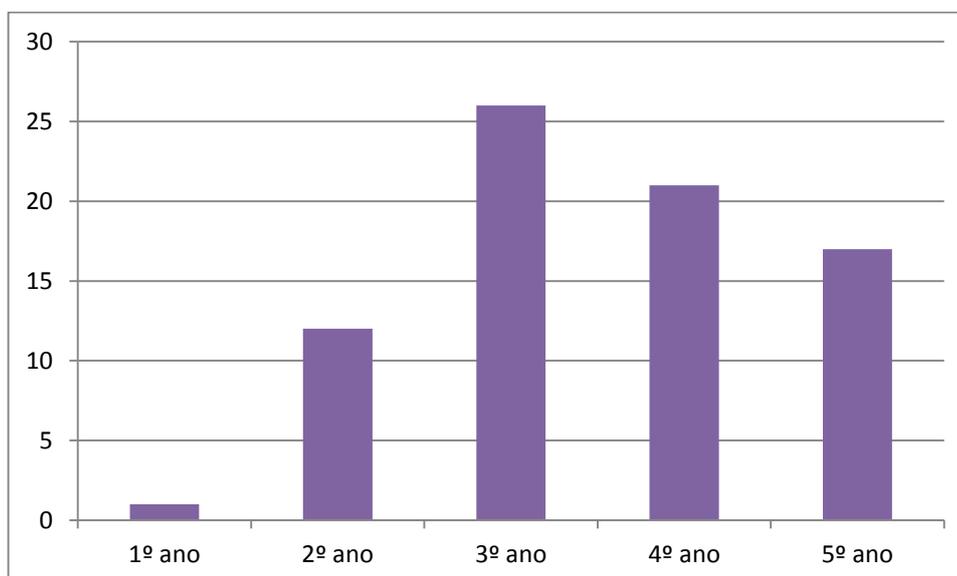
Com relação ao quantitativo de atividades combinatórias abordadas na obra, a coleção 1AI apresentou um total de 77 problemas ao longo dos livros, conforme a Tabela 1.

Tabela 1. Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 1AI:

Ciclo	Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios
Alfabetização Matemática	1º ano	01
	2º ano	12
	3º ano	26
Matemática	4º ano	21
	5º ano	17
Total		77

Tais dados nos levam a perceber que a ênfase maior encontra-se entre o período do fim da alfabetização matemática e o início do ciclo da Matemática conforme visualizamos melhor no Gráfico 1.

Gráfico 1. Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 1AI:



Contudo, há uma boa distribuição do quantitativo de atividade ao longo da coleção, exceto no 1º ano. Acreditamos que mesmo no período inicial do ciclo de alfabetização os alunos possam lidar com situações combinatórias. Documentos

oficiais orientam isto (BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012) e pesquisas apontam que crianças da Educação Infantil já apresentam indícios do raciocínio combinatório ao lidar com tais situações (MATIAS, SANTOS e PESSOA, 2011).

8.3.1.1.2 Significados combinatórios trabalhados nos livros da Coleção 1AI

Por meio do mapeamento das atividades de Combinatória na coleção 1AI, foi possível identificar a presença de todos os significados deste conceito. De acordo com Vergnaud (1986), o significado é um dos pilares do tripé para a formação do conceito. A Tabela 2, a seguir, nos mostra como tais significados estão distribuídos ao longo da coleção.

Tabela 2. Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 1AI

Ciclo	Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios por significado			
		Produto Cartesiano	Arranjo	Combinação	Permutação
Alfabetização matemática	1º ano	0	0	1	0
	2º ano	4	2	2	4
	3º ano	11	2	6	7
Matemática	4º ano	8	0	11	2
	5º ano	6	1	8	2
Total		29	5	28	17

A visão geral da coleção apresenta que todos os tipos de problemas estão presentes na obra, havendo maior quantitativo de produtos cartesianos, seguidos da combinação e da permutação. Os problemas de arranjo apresentam um quantitativo bem inferior aos demais significados combinatórios presentes nos livros. Os dados desta coleção referente aos significados mais presentes nos livros permanecem semelhantes a estudos anteriores (BARRETO, AMARAL e BORBA, 2007; ASSIS e MAGALHÃES, 2012). Pesquisas de sondagem apontam que alunos ainda apresentam dificuldade em diferenciar os invariantes de alguns problemas e o contato com as variadas situações propicia esta compreensão, somado ao trabalho do professor em explicitá-los (SILVA e SPINILLO, 2011). Com exceção do 1º ano, no qual é praticamente inexistente o trabalho com a Combinatória, analisando por ano escolar, há praticamente o trabalho com todos os significados combinatórios. De

acordo com os PCN de Matemática deste ciclo (BRASIL, 1997), é objetivo do ensino da Combinatória o aluno lidar com situações que envolvam arranjos, permutações, combinações e o princípio multiplicativo (produto cartesiano).

Contudo, mesmo a coleção apresentando todos os significados da Combinatória, ao fazer menção de forma direta aos problemas combinatórios, dentre uma das ideias da multiplicação, são trabalhados apenas problemas de produto cartesiano (Figura 8), os demais são encontrados em meio a outros conteúdos, em uma seção que o livro contempla chamada “possibilidades”.

Figura 8. Sequência de problemas de produto cartesiano ao trabalhar as ideias da multiplicação na coleção 1AI

2 Na gincana da escola, a equipe azul é formada por Raul, Lucas, Paulo, Maria, Carla e Ana. Quantas duplas com um menino e uma menina podem ser formadas nessa equipe? Indique a operação que permite chegar a essa resposta. Depois, indique as duplas para conferir.
9 duplas; $3 \times 3 = 9$; R-M, R-C, R-A, L-M, L-C, L-A, P-M, P-C, P-A.

3 Na gincana da atividade anterior, a equipe amarela é formada por 4 meninos e 2 meninas. Nesse caso, quantas duplas com um menino e uma menina podem ser formadas? *8 duplas ($2 \times 4 = 8$ ou $4 \times 2 = 8$)*

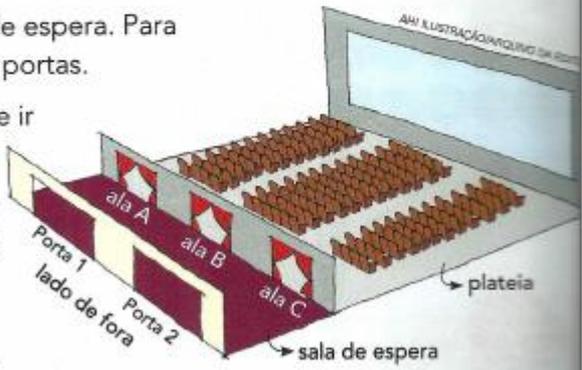
4 Sueli foi ao cinema com seu pai.
Havia 2 portas para chegar à sala de espera. Para ir dessa sala à plateia, havia mais 3 portas.

a) Quantas são as possibilidades de ir do lado de fora até a plateia? *6*

b) Que operação devemos efetuar para chegar ao valor do item a)? *$2 \times 3 = 6$*

c) Uma das possibilidades pode ser indicada por Porta 1-ala A. Copie essa e indique as demais possibilidades.

Porta 1-ala A, Porta 1-ala B, Porta 1-ala C, Porta 2-ala A, Porta 2-ala B e Porta 2-ala C.



Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 4º ano, p. 160.

Este aspecto reforça um equívoco clássico em se relacionar a Combinatória nos anos iniciais apenas a um tipo de problema, o que pesquisas evidenciam em dificuldades de alunos em solucionarem outras situações.

Em suma, a coleção 1AI apresenta variedade de significados combinatórios, conforme orientam os documentos oficiais, com destaque para os produtos

cartesianos e as combinações, porém precisa deixar claro que a ideia de Combinatória está associada a mais de um tipo de situação.

8.3.1.1.3 Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 1AI

Analisando como a coleção 1AI apresenta os problemas combinatórios identificamos que tais situações são abordadas em contextos de problemas a resolver, nos quais as atividades são apresentadas em sua maioria com um desenho que acompanha o enunciado. A Tabela 3, a seguir, nos apresenta como estão distribuídas as representações simbólicas apresentadas nas situações-problema.

Tabela 3. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 1AI

Ano Escolar/ livro	Tipos de representações simbólicas na apresentação das atividades				
	Apenas enunciado	Desenho	Tabela/ Quadro	Mais de uma*	Dinheiro
1º	0	0	0	0	1
2º	5	6	0	0	1
3º	3	14	2	0	6
4º	3	14	0	2	2
5º	1	9	0	7	0
Total	12	43	2	9	10

*Mais de uma: questões que apresentavam mais de uma representação junto ao enunciado do problema.

Apenas 15,5 % dos problemas identificados na coleção apresentavam apenas o enunciado da questão. A maioria trazia junto um desenho, cédulas de dinheiro, tabela ou quadro, ou até mais de uma representação, como um desenho e uma tabela juntos, por exemplo. Estas representações muitas vezes podem servir como um apoio ao pensamento do aluno para a resolução da atividade, ajudando-o a refletir sobre o que a situação pede e até o dando pista de como resolver, como na Figura 9.

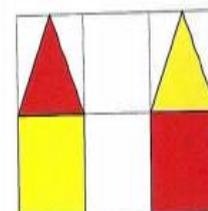
Figura 9. Problema combinatório apresentado com um desenho na coleção 1AI

10 POSSIBILIDADES E ESTIMATIVA

IVO DESENHOU E PINTOU CASINHAS COMO ESTA:



COM 2 LÁPIS DE COR (AMARELO E VERMELHO), IVO TINHA DUAS POSSIBILIDADES DE PINTÁ-LAS: A PAREDE DE UMA COR E O TELHADO DE OUTRA. FAÇA UMA ESTIMATIVA: COM 3 LÁPIS (AMARELO, VERMELHO E AZUL), IVO TERIA QUANTAS POSSIBILIDADES?



Resposta pessoal.

Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 2º ano, p.18.

No exemplo apresentado na Figura 9, a partir do desenho inicial das casinhas no qual é visível a troca de cores na formação das possibilidades, o aluno pode apoiar seu pensamento nesta estratégia e solucionar a questão utilizando as três cores indicadas. As representações simbólicas além de aparecerem junto aos enunciados das questões, também são sugeridas como forma de resolução em algumas atividades da coleção, conforme a Tabela 4.

Tabela 4. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro da coleção 1A1

Ano Escolar	Tipos de representações simbólicas sugeridas para a resolução das atividades								
	Sem sugestão	Desenho	Algoritmo	Listagem	Árvore de possibilidades	Tabela/Quadro	Calculo mental ou oral	Mais de uma*	Outra
1º	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2º	4	4	1	0	0	0	0	3	0
3º	13	1	4	5	0	0	0	2	1
4º	7	0	1	8	0	0	0	5	0
5º	6	2	0	4	1	2	0	2	0
Total	31	7	6	17	1	2	0	12	1

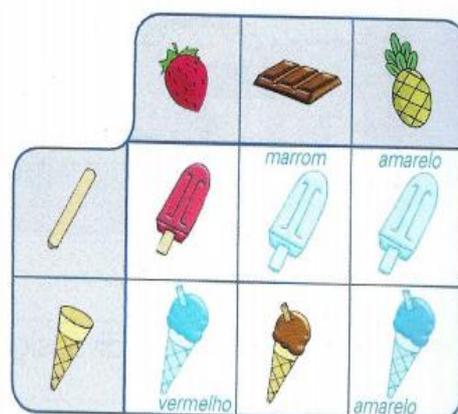
*Mais de uma: questões que sugeriam mais de uma forma de resolução.

Apesar de boa parte das questões deixarem à escolha dos alunos a forma de resolução, mais da metade dos problemas encontrados sugeriam de alguma forma

como o educando deveria solucionar os problemas. Além disso, várias questões, principalmente as que tratavam a Combinatória de forma direta levam o aluno a resolver um problema por diferentes formas representação, como exemplificado na Figura 10.

Figura 10. Problema combinatório resolvido por diferentes representações

- 2** Uma sorveteria tem 2 tipos de sorvete: palito e casquinha. E oferece 3 sabores: morango, chocolate e abacaxi. Complete a tabela desenhando os sorvetes. Quantas escolhas diferentes de sorvete você pode fazer? 6
- Podemos escrever:
- $$\underline{3} \times \underline{2} = \underline{6}$$
- ou $\underline{2} \times \underline{3} = \underline{6}$



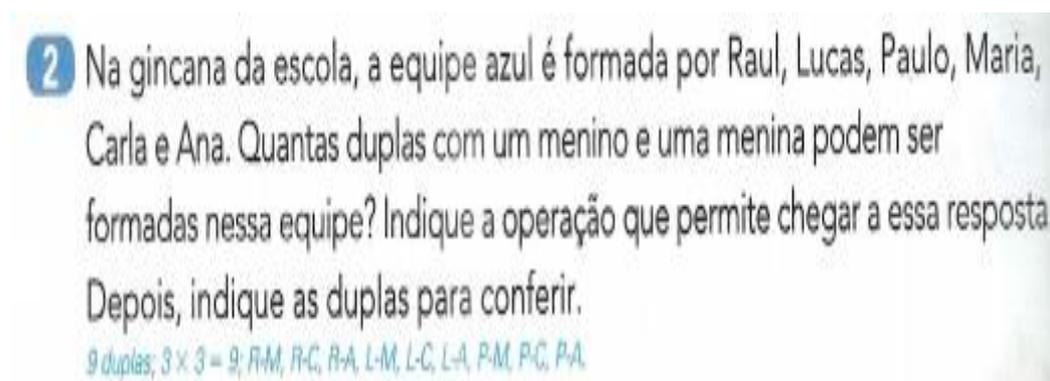
Úni-dúni-tê,
Salamê, minguê,
Um sorvete colorê,
O escolhido foi você!

Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 2º ano, p. 194.

Estas sugestões levam o aluno a mobilizar diferentes estratégias de resolução e pensar na Combinatória por diferentes representações, escolhendo posteriormente aquela que acreditar mais adequada à situação em questão. Nas orientações curriculares para o Ensino de Combinatória analisadas, encontramos que é importante proporcionar aos alunos a confrontação de diferentes estratégias de resolução em uma mesma atividade (BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012), assim como encontramos na coleção. Percebemos, ainda, que em nenhum momento o aluno é levado a lidar com fórmulas de resolução, e sim a se utilizar de estratégias não formais e depois compreender o uso do cálculo numérico, quando uma multiplicação direta de fato chega ao resultado dos problemas. A coleção ainda se utiliza da diversidade de representações para resolução, levando o aluno a

confrontar estratégias e refletir sobre as situações, além de construir um sentido para o cálculo numérico constantemente trabalhado nas situações, junto a outro tipo de representação não formal, conforme Figura 11.

Figura 11. Solicitação de operação numérica para resolução de problema combinatório na coleção 1A1



Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 4º ano, p. 160.

Este dado corrobora com o que os documentos oficiais analisados no estudo orientam sobre o uso de diferentes estratégias de resolução, para que apenas no Ensino Médio ele possa formalizar esta resolução aprendendo as fórmulas, e as pesquisas defendem como um elemento a ser valorizado no ensino e aprendizagem deste conteúdo. Contudo, é importante perceber que, como a coleção trata diretamente dos problemas combinatórios utilizando apenas o produto cartesiano e propõe a multiplicação como uma das estratégias de resolução, os alunos podem tentar utilizar da mesma forma com os outros tipos de problemas, que diferentemente do produto cartesiano, nem sempre são resolvidos com uma multiplicação direta.

8.3.1.1.4 A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 1A1

Analisando se a coleção propõe de alguma forma, nas atividades o uso da sistematização das estratégias de resolução como caminho para encontrar o resultado correto das possibilidades, como apontado em estudos anteriores por Pessoa e Santos (2011) com alunos do mesmo ciclo de ensino investigado, foi possível perceber que a coleção 1A1 não chama a atenção para este aspecto e

nenhuma das atividades. Contudo, ao apresentar a resposta ao professor, o autor, geralmente, apresenta-a de forma sistematizada por meio de uma listagem, usando ainda abreviações. Este aspecto pode ser percebido pelo docente durante a correção coletiva das atividades, contudo não está dito explicitamente. Neste sentido, acreditamos que sendo caracterizado como uma forma a melhorar a estratégia de resolução, fica a cargo do professor trabalhar esta sistematização com os alunos.

8.3.1.1.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 1A1

Encontrar o total de possibilidades propostas pelas situações-problema combinatórias é um dos obstáculos de resolução apresentados pelos alunos (PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SANTOS, 2011). Analisando se a coleção solicita o esgotamento de possibilidade ao tratar dos problemas combinatórios, identificamos que a forma de solicitar estas possibilidades varia. Algumas questões solicitam apenas algumas possibilidades e outras uma estimativa. Contudo, são poucas as atividades nesta perspectiva. No geral, as atividades solicitam o total de possibilidades em cada situação problemas. Além disso, algumas questões pedem apenas o total de possibilidades e outras solicitam que se listem quais possibilidades são. Esta segunda forma de solicitar a questão propõe que, de alguma forma, o aluno explicita uma estratégia, assim como sua forma de pensar sobre o problema. A coleção também apresenta questões que solicitam na mesma atividade as duas formas de resposta, o valor total e cada uma das possibilidades, conforme Figura 12.

Figura 12. Problema combinatório solicitando cada possibilidade e o total delas na coleção 1A1

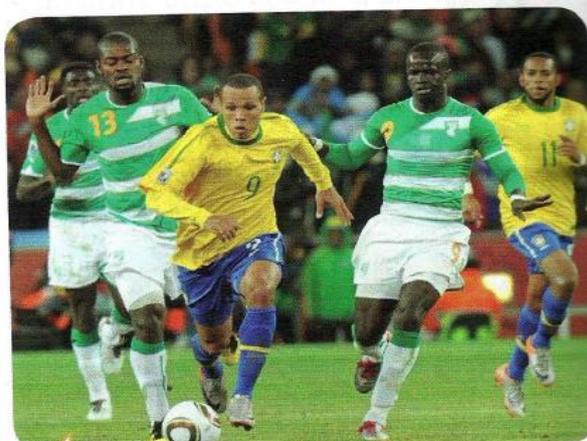
4 Números e possibilidades

Na Copa do Mundo de Futebol masculino de 2010, na África do Sul, um dos grupos da 1ª fase foi formado por Brasil, Coreia do Norte, Costa do Marfim e Portugal.

Nessa fase as quatro seleções se enfrentaram uma vez. Por exemplo, Brasil e Costa do Marfim foi um dos jogos.

Responda em seu caderno:

- a) Quais foram os jogos realizados nesse grupo? B e CN; CM e P; B e CM; CN e P; B e P; CN e CM.
- b) Quantos foram os jogos? 6



Jogo do Brasil contra Costa do Marfim, na Copa do Mundo da FIFA, em Johannesburgo, África do Sul, 20/06/2010.

Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 4º ano, p. 20.

Pensar no total de possibilidades é importante, pois é a ideia central do raciocínio combinatório, no qual o sujeito passa de um pensamento do que é provável para o pensamento do que é possível. Contudo, nem sempre é necessário saber quais são todas as possibilidades possíveis, uma vez que em situações com um maior número, torna-se inviável listar todas. Porém, neste ciclo inicial de escolarização, solicitar a listagem da resposta, proporciona ao aluno pensar no problema e explicitar seu pensamento. Os estudos de sondagem analisados apontam também que a listagem de possibilidades é uma das estratégias mais utilizadas pelas crianças, e que a mesma, muitas vezes, ocorre de forma bem sucedida.

8.3.1.1.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 1A1

Analisando as orientações presentes para o professor sobre o trabalho com a Combinatória, foi possível identificar que a coleção traz poucas informações para o docente. No manual do professor, ao tratar das atividades presentes em cada livro, são feitas explicações pontuais referindo-se apenas à explicitação do trabalho com o conteúdo na atividade. Não encontramos nenhuma orientação sobre os diferentes tipos de problemas combinatórios e quando chama atenção para o invariante de ordem em um problema, não deixa claro que em outras situações pode não servir o

mesmo pensamento. Contudo apresenta indícios da necessidade de se pensar nestas características (Figura 13).

Figura 13. Orientação ao professor sobre a ordem dos elementos nos problemas de combinação na coleção 1A1

Por exemplo: "Uma equipe de 5 alunos está reunida para fazer um trabalho da escola. Eles vão se cumprimentar com um aperto de mãos. Qual é o total de apertos de mãos?". Essa situação-problema permite explorar algumas estratégias: dramatizar (representando concretamente a situação com 5 alunos e contando os cumprimentos), elaborar diagramas, resolver geometricamente, elaborar uma tabela organizada ou utilizar o raciocínio combinatório.

Diagrama:



O primeiro cumprimenta 4, o segundo cumprimenta 3, o terceiro cumprimenta 2, o quarto cumprimenta 1. $(4 + 3 + 2 + 1 = 10)$

Geometricamente: colocar 5 alunos formando um pentágono e, à medida que eles vão se cumprimentando, traçam-se com giz no chão os cumprimentos, dando origem a um pentágono (5 lados) com suas 5 diagonais ($5 + 5 = 10$).

Tabela organizada:

A	B	C	D	E
B	C	D	E	
C	D	E		
D	E			
E				
(4)	(3)	(2)	(1)	



$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

Raciocínio combinatório:
Neste problema estamos combinando 5 alunos, 2 a 2. Lembrando que, quando **A** cumprimenta **B**, **B** já cumprimenta **A**, temos:

(A, B) (A, C) (A, D) (A, E)	(4)
(B, C) (B, D) (B, E)	(3)
(C, D) (C, E)	(2)
(D, E)	(1)

$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

Fonte: Ápis. Luiz Roberto Dante. Editora Ática, 2011, 5º ano, p. 18 (manual do professor)

A explicação chama atenção para a não repetição de casos com os mesmos elementos, uma vez que a ordem não gera novas possibilidades. No entanto, o mesmo não é aplicado a um problema de arranjo. Estudos de sondagem e intervenção apontam a necessidade deixar explícitos tais invariantes para os alunos (PESSOA e SANTOS, 2012; SILVA e SPINILLO, 2011), contudo o professor dos anos iniciais geralmente não tem uma formação específica sobre este conceito, e as orientações ao professor poderiam deixar claras estas características para todos os problemas, como apresentado na combinação. A Figura 13 também aponta sobre a sugestão de representações simbólicas para resolução e ao longo do livro também orienta ao professor situações em que ele possa apresentar as possibilidades de forma concreta, seja por dramatização ou pelo uso de material manipulável.

8.3.1.1.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 1A1

No Quadro 5, a seguir, apresentamos uma síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e o livro didático sobre a Combinatória.

Quadro 5. Síntese da coleção 1AI em relação aos documentos oficiais e as pesquisas

Categoria	Documentos oficiais	Resultados de pesquisas	Livro didático
Abordagem sobre a Combinatória: O trabalho com este conceito desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, relacionado à ideia de multiplicação (Números e Operações) e à probabilidade e estatística (Tratamento da Informação).	BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012.	PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SANTOS, 2011; SILVA e SPINILLO, 2011	Apresenta o trabalho com a Combinatória neste ciclo de ensino, exceto no 1º ano. Relaciona com uma das ideias da multiplicação e na sessão possibilidades, relacionando com outros conhecimentos, com ênfase aos Números e Operações, sem relacionar com Tratamento da Informação.
Significados combinatórios trabalhados nos livros: tipos de problemas combinatórios são explorados nos livros.	BRASIL, 1997.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SANTOS, 2011 e 2012.	Apresenta todos os significados da Combinatória e esta diversidade de tipos de problemas quase que se faz em todos os livros. Baixa frequência de problemas de arranjo.
As diferentes representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades.	BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009 e 2012	Diferentes representações, na apresentação das atividades com predominância de desenhos e como sugestões na maioria.
A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução.		PESSOA e SANTOS, 2011; PESSOA e SANTOS, 2012.	Não apresenta indícios de sistematização.
Esgotamento de possibilidades.		PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SANTOS, 2011 e 2012.	Solicita o esgotamento de possibilidades, muitas vezes pedindo a listagem delas.

8.3.1.2 Coleção 2 dos anos iniciais do Ensino Fundamental (2AI)

8.3.1.2.1 Abordagem da Combinatória na coleção 2AI

Segundo dados do MEC, a coleção 2AI é a segunda coleção de livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental mais adotada no país. De acordo com o Guia de Livro Didático de Alfabetização Matemática e Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (Brasil, 2012), as atividades são ponto de partida para o desenvolvimento dos conteúdos e, a partir delas, são feitas as sistematizações dos conceitos. Além disso, que são feitas conexões entre as áreas do conhecimento, que de modo geral, contribuem para a atribuição de significado aos conhecimentos matemáticos. O Guia aponta que os alunos têm um papel ativo na aprendizagem, no qual são frequentemente convidados a interagir com seus colegas. Muitas atividades visam incentivar o desenvolvimento da compreensão, da análise, da formulação de hipóteses e da argumentação (BRASIL, 2012).

Com relação à distribuição dos conteúdos, o Guia aponta que a obra dá mais atenção ao campo dos Números e Operações, com unidades muito extensas. Contudo, se articula bem com os demais campos da Matemática, no qual Geometria, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação são intercalados com o estudo dos Números e Operações, muitas vezes, em um mesmo capítulo. Aponta ainda que é feito um resgate dos conhecimentos já trabalhados ao longo da coleção, contudo, em geral, não há indicações de que tais conteúdos já foram trabalhados e estão sendo resgatados e aprofundados para novas aprendizagens. Ao longo da coleção é proposta a interação dos alunos por meio do trabalho em grupo e em duplas. Há diversidade de materiais concretos sugeridos, em especial, cédulas e moedas, além de jogos e brincadeiras, que contribuem para um desenvolvimento significativo dos conceitos trabalhados (BRASIL, 2012).

Analisando a Combinatória na avaliação apresentada no Guia, não encontramos de forma explícita, contudo a coleção contempla a ideias da multiplicação em todos os livros, assim como o trabalho com chance que está articulado, além de com as estruturas multiplicativas, com os demais conteúdos abordados no livro, por ser uma seção contemplada pela obra.

Ao analisar a coleção e as atividades que contemplam o desenvolvimento do raciocínio combinatório, percebemos que o conteúdo está presente em todos os livros. Todavia, no 1º ano foi identificada apenas uma atividade, apontando para o

professor que este trabalho será aprofundado nos anos seguintes (Figura 14). A Combinatória é abordada na coleção, de fato, no campo dos Números e Operação, ao se trabalhar as ideias da multiplicação, como apontado pelo Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2012). Contudo, mesmo a coleção apresentando um trabalho marcante da Probabilidade, na seção denominada chance, não percebemos a articulação destes conteúdos, proposta esta orientada pelos PCN dos anos iniciais (BRASIL, 1997). A Combinatória no campo do Tratamento da Informação está mais relacionada à atividades de Estatística, com a leitura e construção de tabelas, conforme a Figura 14.

Figura 14. Problema de produto cartesiano relacionado à construção de tabelas na coleção 2A1

LENDO E CONSTRUINDO TABELAS

Esta é uma atividade inicial para trabalhar a ideia da combinatória na multiplicação.

Sérgio está na sorveteria, mas não sabe o que escolher. Sabor maracujá, chocolate ou morango? Casquinha ou copinho?

Termine de pintar os sorvetes na tabela.

Quantas escolhas diferentes de sorvete Sérgio pode fazer? **6 escolhas.**

Leve o aluno a perceber que ao todo são 6 possibilidades de escolher um tipo de sorvete (casquinha ou copinho) de um sabor (maracujá, chocolate ou morango). A ideia **combinatória** na multiplicação, apresentada aqui, será retomada e sistematizada nos outros volumes desta coleção.

110

Fonte: Porta Aberta. Marília Centurion, Júnia La Scala, Arnaldo Rodrigues. Editora FNT, 2011, 1º ano, p. 110.

Ao abordar a Combinatória como uma das ideias da multiplicação, os autores sempre iniciam com um problema a resolver, levantando questionamentos e solicitando que o aluno pense e registre as possibilidades, geralmente por uma estratégia não formal, como material manipulável ou a pintura de desenhos, passando posteriormente para um cálculo que represente a solução. A Figura 15 apresenta um exemplo, no qual se inicia a resolução por meio da pintura de desenhos das saias e blusas, para posteriormente utilizar a multiplicação.

Figura 15. Problema de produto cartesiano resolvido por desenho e multiplicação na coleção 2AI

A ideia combinatória Explora-se aqui a ideia combinatória da multiplicação. Para que os alunos descubram o total de possibilidades, sugerimos que pintem as blusas e as saias, mostrando quais são as combinações possíveis.

1 Adriana está em dúvida sobre a cor da blusa e da saia que vai vestir. Veja ao lado as blusas e as saias que ela pode escolher.

a. Pinte para mostrar as diferentes formas de combinar as 2 blusas com as 2 saias.

blusa azul e saia azul; blusa azul e saia vermelha; blusa vermelha e saia vermelha; blusa vermelha e saia azul.

b. Quantas são as cores:

- das blusas? 2
- das saias? 2

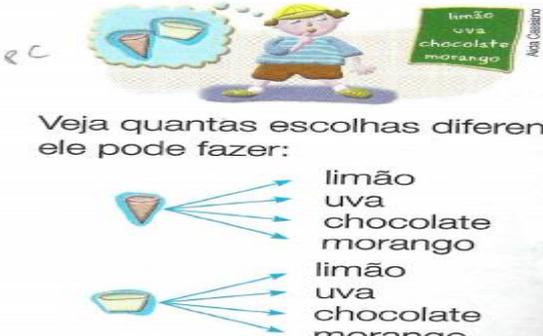
c. Qual é o total de combinações possíveis? $2 \times 2 = 4$; 4 combinações.

Fonte: Porta Aberta. Marília Centurion, Júnia La Scala, Arnaldo Rodrigues. Editora FNT, 2011, 3º ano, p. 147.

Neste sentido, a obra não apresenta uma conceitualização da Combinatória, mas, a partir de um problema a resolver, busca construir a ideia do pensamento combinatório com o aluno. Ou seja, a partir de situações-problema o aluno é levado a refletir sobre aspectos próprios dos problemas. Sendo assim, a coleção apresenta apenas exercícios a resolver, com explicação sobre o assunto no glossário ao final de cada livro (Figura 16).

Figura 16. Explicação sobre a ideia de Combinatória no glossário da coleção 2AI

◆ a ideia **combinatória**
Samuel pode escolher entre 4 sabores de sorvete e 2 tipos de casquinha.



Veja quantas escolhas diferentes ele pode fazer:

- limão
- uva
- chocolate
- morango

- limão
- uva
- chocolate
- morango

$2 \times 4 = 8$ escolhas diferentes

Fonte: Porta Aberta. Marília Centurion, Júnia La Scala, Arnaldo Rodrigues. Editora FNT, 2011, 2º ano, p. 236.

O mapeamento das atividades nos levou a identificar um quantitativo de 39 problemas de Combinatória ao longo da coleção, conforme a Tabela 5 que aponta como estes problemas estão distribuídos.

Tabela 5. Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 2AI

Ciclo	Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios
Alfabetização Matemática	1º ano	02
	2º ano	10
	3º ano	09
Matemática	4º ano	10
	5º ano	08
Total		39

Percebe-se um equilíbrio no quantitativo de problemas por ano escolar, exceto no 1º ano. Contudo, são poucas atividades para que se possa contemplar um trabalho sistemático com a Combinatória neste ciclo, no qual acreditamos que a Combinatória poderia ser explorada em mais atividades também relacionadas ao campo Tratamento da Informação, conforme as orientações curriculares, uma vez que a coleção tem ênfase na Probabilidade. No geral, a quantidade de problemas na coleção é praticamente a metade apresentada na coleção anterior (1AI).

8.3.1.2.2 Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 2AI

Analisando os significados da Combinatória presentes na coleção, a Tabela 6 nos mostra que todos os tipos de problemas são encontrados, contudo com ênfase nos produtos cartesianos. Poucas são as atividades que exploram o arranjo, a permutação e a combinação.

Tabela 6. Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 2AI

Ciclo	Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios por significado			
		Produto Cartesiano	Arranjo	Combinação	Permutação
Alfabetização matemática	1º ano	1	0	0	0
	2º ano	8	0	1	1
	3º ano	6	1	2	0
Matemática	4º ano	6	2	0	2
	5º ano	7	0	0	1
Total		29	3	3	4

Ao tratar diretamente sobre os problemas combinatórios, de modo geral, a coleção relaciona apenas a um tipo de problema, como também evidenciado na coleção 1AI. O trabalho quase que exclusivo com produto cartesiano é também identificado em estudos de sondagem nos quais os alunos têm mais facilidade em resolver tais situações. Contudo, ao se depararem com outros significados combinatórios, apresentam muita dificuldade em resolvê-los. Vergnaud (1986) aponta que a construção do conceito se dá a partir da compreensão dos significados que o mesmo envolve, ou seja, com a variedade de situações referentes ao conceito (tipos de problemas) e com a Combinatória não é diferente.

Esta ênfase no produto cartesiano dificulta ainda a percepção das propriedades invariantes que distinguem os problemas combinatórios e é preciso que os alunos as percebam desde cedo para que nos próximos ciclos desenvolvam melhor situações mais complexas, como as condicionais, que envolvem outros invariantes, conforme encontrado no estudo de Borba e Braz (2012).

Neste sentido, o trabalho com ênfase no produto cartesiano não corrobora também com as orientações curriculares, no qual o objetivo do trabalho com a Combinatória é “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem” (BRASIL, 1997, p.40).

8.3.1.2.3 Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 2AI

Analisando as representações simbólicas apresentadas e sugeridas ao longo da coleção, podemos perceber que a obra contempla este aspecto do tripé para a construção do conceito (Verghnaud, 1986) em seus livros. Com relação às representações utilizadas para apresentar as atividades, a coleção traz a maioria dos problemas combinatórios com um desenho, uma tabela ou mais de uma representação, conforme a Tabela 7.

Tabela 7. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 2AI

Ano Escolar/ livro	Tipos de representações simbólicas na apresentação das atividades			
	Apenas enunciado	Desenho	Tabela/ Quadro	Mais de uma*
1º	0	0	1	0
2º	0	7	2	1
3º	2	6	1	0
4º	4	3	1	2
5º	0	5	1	2
Total	6	21	5	7

*Mais de uma: questões que apresentavam mais de uma representação junto ao enunciado do problema.

As atividades apresentam várias ilustrações que servem como apoio ao pensamento do aluno e ajudam a refletir sobre as questões. A Figura 17, abaixo nos apresenta um exemplo da tabela como representação junto ao enunciado da questão, no qual o aluno precisa interpretá-la para compreender as combinações possíveis de roupas. Além de mobilizar o raciocínio combinatório, o mesmo estará lidando com um eixo atual do ensino da Matemática, a partir da leitura e interpretação de dados, como orientam os documentos oficiais desta área do conhecimento (BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012).

Figura 17. Problema de produto cartesiano apresentado com uma tabela na coleção 2AI

LENDO E CONSTRUINDO TABELAS

A ideia da combinatória na multiplicação é explorada na interpretação desta tabela.

Daniela tem uma coleção de roupas para bonecas. Veja na tabela as diferentes combinações que ela pode fazer com 4 peças de cada tipo.

a. Quantas combinações diferentes foi possível montar? $4 \times 4 = 16$; 16 combinações diferentes.

b. Se Daniela tivesse 12 opções de camisas e 12 opções de calças, quantas combinações diferentes ela poderia fazer? $12 \times 12 = 144$; 144 combinações diferentes.

Fonte: Porta Aberta. Marília Centurion, Júnia La Scala, Arnaldo Rodrigues. Editora FNT, 2011, 5º ano, p. 80.

As representações simbólicas também são variadas nas sugestões de resolução das atividades. A Tabela 8, a seguir, apresenta os diferentes tipos de estratégias que a coleção sugere ao aluno para resolver as situações-problema, proporcionando, assim, que o pensamento combinatório seja mobilizado por diferentes formas de resolução.

Tabela 8. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 2AI

Ano Escolar	Tipos de representações simbólicas sugeridas para a resolução das atividades								
	Sem sugestão	Desenho	Listagem	Árvore de possibilidades	Tabela/Quadro	Calculo mental ou oral	Mais de uma*	Material Manipulável	Diagrama
1º	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2º	3	3	0	0	0	0	2	1	1
3º	3	2	2	0	1	0	1	0	0
4º	4	0	3	0	0	0	3	0	0
5º	6	2	0	0	0	0	0	0	0
Total	17	8	5	0	1	0	6	1	1

*Mais de uma: questões que sugeriam mais de uma forma de resolução.

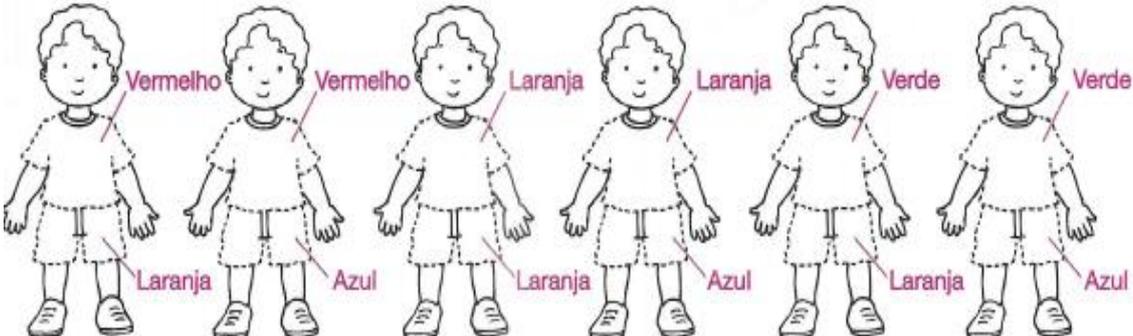
Ao tratar diretamente dos problemas combinatórios, a coleção propõe que o aluno resolva um mesmo problema por mais de uma representação, levando-o até o uso da multiplicação, conforme a Figura 18.

Figura 18. Problema de produto cartesiano com sugestão de resolução por diferentes representações

2 O time de Tiago pode escolher entre 3 cores de camiseta e 2 cores de calção para compor o uniforme do time.



a. Pinte para mostrar os diferentes uniformes que podem ser formados.



b. Quantas são as cores: Combinar camisetas com calções é o mesmo que combinar calções com camisetas e isso pode ser expresso por $3 \times 2 = 2 \times 3$.

- das camisetas? 3 cores.
- dos calções? 2 cores.

c. Quantos uniformes diferentes podem ser formados? $3 \times 2 = 6$; 6 uniformes.

Fonte: Porta Aberta. Marília Centurion, Júnia La Scala, Arnaldo Rodrigues. Editora FNT, 2011, 3º ano, p. 147

A Figura 18 também aponta uma estratégia de resolução muito presente na coleção que é a pintura e o desenho das possibilidades. Desta forma, a partir de uma atividade prazerosa para os alunos neste ciclo, os mesmos podem solucionar situações combinatórias visualizando as combinações realizadas de uma forma bem próxima do real através do desenho e da pintura. Esta estratégia foi utilizada com frequência por alunos no mesmo ano de escolarização no estudo de Pessoa e Borba (2009) ao sondar o conhecimento dos alunos sobre a Combinatória.

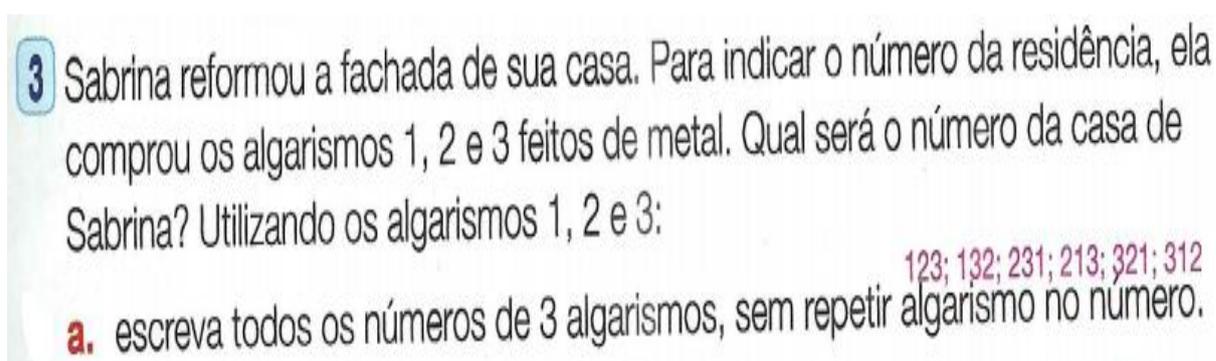
A coleção valoriza o uso de diferentes representações simbólicas tanto na apresentação das atividades quanto como sugestão de resolução. Este aspecto está também presente nas orientações dos PCN (BRASIL, 1997) no qual é orientado o uso de diferentes representações para a resolução, fazendo desenhos, diagramas

de árvore, até esgotar as possibilidades, levando-as a reconhecer que um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes operações, assim como uma mesma operação pode estar associada a diferentes problemas.

8.3.1.2.4 A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 2AI

O uso das estratégias não formais tais como o desenho, as tabelas ou quadros e a listagem, é bastante presente na resolução dos problemas combinatórios. Contudo, ao analisar se tais sugestões propõem a sistematização das estratégias como forma de resolução, não foi possível identificar este aspecto na coleção de forma explícita para o aluno. As situações-problema não chamavam a atenção para a organização das possibilidades, como vimos no estudo de intervenção de Pessoa e Santos (2012), auxiliando no esgotamento das possibilidades. Porém, ao apresentar a resposta ao professor, o autor, geralmente, apresenta-a de forma sistematizada por meio de uma listagem, conforme Figura 19. Este aspecto pode ser percebido pelo docente durante a correção coletiva das atividades, contudo não está dito explicitamente.

Figura 19. Apresentação de resposta ao professor de forma sistemática na coleção 2AI



Fonte: Porta Aberta. Marília Centurion, Júnia La Scala, Arnaldo Rodrigues. Editora FNT, 2011, 4º ano, p. 147.

8.3.1.2.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 2AI

Analisando como a coleção propõe as respostas dos problemas, identificamos que no ciclo de alfabetização matemática geralmente é solicitado além do valor das possibilidades, o registro das mesmas, conforme a Figura 20.

Figura 20. Problema de produto cartesiano com solicitação de resposta de cada possibilidade e valor total na coleção 2AI

4 Márcia tem duas calças, uma azul e uma verde, e três camisetas, uma rosa, uma amarela e uma vermelha.



a. Pinte para mostrar de quantas maneiras diferentes ela pode se vestir.



b. Márcia pode se vestir de 6 maneiras diferentes.

Fonte: Porta Aberta. Marília Centurion, Júnia La Scala, Arnaldo Rodrigues. Editora FNT, 2011, 2º ano, p. 203.

Este tipo de atividade propõe que aos alunos iniciem o pensamento por meio do registro de todas as possibilidades, para depois pensar no total. Este fato se deve

ao momento inicial do trabalho combinatório para a mobilização do raciocínio através da visualização das possibilidades, uma vez que não se tem aprendido um cálculo numérico. No 4º e 5º ano são mais frequentes situações que solicitem apenas quantas são as possibilidades, o que não significa não ter que encontrá-las para resolver os problemas. Contudo, a coleção leva os alunos a esgotarem todas as possibilidades das questões, investindo em situação que questionam sobre o total de casos a serem combinados, promovendo um pensamento que vai além do provável, pensando-se em todas as possibilidades possíveis.

8.3.1.2.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 2A1

Analisando as orientações presentes na coleção sobre o ensino da Combinatória, não encontramos indicações no manual do professor. Contudo, ao longo das atividades o livro apresenta orientações que só o livro do docente possui indicando que as atividades abordam a ideia de Combinatória e com sugestões de representações para apresentar aos alunos. Com relação ao trabalho com os diversos tipos de problemas combinatórios e os invariantes que os distinguem, a obra não faz menção a estes aspectos. Neste sentido, não orienta o professor sobre os diferentes tipos de problemas que envolve a Combinatória, nem as características dos problemas para auxiliá-lo nas aulas e até para ampliar as atividades propostas. Seria interessante a orientação sobre tais invariantes, uma vez que nas atividades não os encontramos de forma explícita e segundo os estudos de Silva e Spinillo (2011) e Pessoa e Santos (2012), quando tais invariantes estão apresentados de forma clara aos estudantes a compreensão e a resolução são melhor desenvolvidas.

8.3.1.2.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 2A1

No Quadro 6, a seguir, apresentamos uma síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e o livro didático sobre a Combinatória.

Quadro 6. Síntese da coleção 2AI em relação aos documentos oficiais e as pesquisas

Categoria	Documentos oficiais	Resultados de pesquisas	Livro didático
Abordagem sobre a Combinatória: O trabalho com este conceito desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.	BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012.	PESSOAS e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011.	Aborda a Combinatória em todos os livros, relacionando as ideias da multiplicação e à estatística.
Significados combinatórios trabalhados nos livros: tipos de problemas combinatórios são explorados nos livros.	BRASIL, 1997.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009.	Apresenta todos os tipos de problemas, contudo se concentram mais em produtos cartesianos e não apresenta variedade de problemas por ano escolar.
As diferentes representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades.	BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009.	Apresenta a maioria dos problemas com um desenho junto aos enunciados e sugere a resolução por desenhos, listagens tabelas, etc.
A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução.		PESSOA e SANTOS, 2011; PESSOA e SANTOS, 2012.	Não apresenta indícios de proposta de sistematização para o aluno.
Esgotamento de possibilidades.		PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SANTOS, 2011 e 2012.	Solicita o esgotamento de possibilidades na maioria das atividades.

8.3.1.3 Coleção 3 dos anos iniciais do Ensino Fundamental (3AI)

8.3.1.3.1 Abordagem da Combinatória na coleção 3AI

A coleção 3AI, segundo dados do MEC, é a coleção de livro didático menos adotada no país. A avaliação realizada pelo Guia do Livro Didático de Alfabetização Matemática e Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2012) aponta que a obra aborda uma metodologia que valoriza a resolução de problemas e as ligações da Matemática escolar com o cotidiano da criança. A este aspecto podemos relacionar com o que Vergnaud (1986) chama de uma concepção interativa de aprendizagem, quando o aluno se depara com problemas a resolver.

Além disso, o Guia destaca o trabalho com os jogos, que favorece a participação e a socialização dos alunos e estimula a verificação e a comparação de procedimentos, o uso e o registro de ideias e estratégias próprias de resolução dos problemas, semelhante ao orientado nos PCN. Contudo, aponta que os conhecimentos abordados não são satisfatoriamente sistematizados.

Com relação à distribuição dos conteúdos o Guia aponta que, no geral, a obra apresenta o estudo dos Números e Operações em quantidade adequada. Contudo, critica que no ciclo de alfabetização matemática há pouca articulação entre os demais campos abordados, além de a obra em si dar pouca atenção ao campo do Tratamento da Informação, no qual se valorizam, particularmente, a leitura e a interpretação de informações em gráficos de colunas, bem como a coleta e registro de dados.

Analisando a abordagem da Combinatória no Guia, foi possível identificar a presença deste conteúdo a partir do livro do 2º ano, relacionado às ideias da multiplicação e ao campo do Tratamento da Informação envolvendo conteúdos de Estatística e Probabilidade, como sugerem os documentos oficiais para este ciclo (BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012).

Tais dados são de fato presentes nos livros, contudo a abordagem é apresentada de forma diferente em cada livro da coleção. Nem sempre a Combinatória está relacionada às ideias da multiplicação, pois em alguns livros não é contemplada no estudo das estruturas multiplicativas, aparecendo em um capítulo à parte, relacionados com problemas de contagem (3º e 4º ano). Contudo, a coleção propõe a abordagem deste conteúdo junto Estatística e a Probabilidade, ao trabalhar a ideia de chance, conforme a Figura 21.

6 A professora de Educação Física vai sortear um menino e uma menina para ajudar na montagem dos obstáculos da corrida.

Peça aos alunos que montem a árvore de possibilidades antes de responder às questões.

a) Quantas opções a professora tem para escolher um menino? E para escolher uma menina? *3 opções; 3 opções*

b) Para cada menino que a professora escolher, quantas opções ela tem para escolher a menina? *3 opções*

c) Qual é o número total de opções que a professora tem para escolher um menino e uma menina? *9 opções ($3 \times 3 = 9$)*

d) Qual é a probabilidade de serem escolhidos Raul e Maria? *$\frac{1}{9}$ (Raul e Maria formam um dos 9 pares possíveis.)*



Lia Maria Raul

Gil Carol Pedro

ILUSTRAÇÕES: BAMBILLA ESTUDIO/ARQUIVO DA EDITORA

Raul – Lia; Raul – Maria; Raul – Carol; Gil – Lia; Gil – Maria; Gil – Carol; Pedro – Lia; Pedro – Maria; Pedro – Carol.

Fonte: Asas para Voar. Maria Helena Souza e Walter Spinelli. Editora Ática, 2011, 5º ano, p. 261.

O trabalho com a Combinatória é um fio condutor para a compreensão de situações probabilísticas, no qual o aluno terá a compreensão do espaço amostral ao encontrar as possibilidades existentes em determinado caso e a partir disso calcular a probabilidade solicitada. Este tipo de abordagem é recomendada nos PCN de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997) e que de forma contínua é aprofundada nos ciclos seguintes.

Com relação ao quantitativo de atividades combinatórias presentes na coleção e como tais problemas estão distribuídos nos livros, a Tabela 9, a seguir no apresenta estes dados.

Tabela 9: Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 3AI

Ciclo	Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios
Alfabetização Matemática	1º ano	0
	2º ano	20
	3º ano	15
Matemática	4º ano	25
	5º ano	16
Total		76

Mesmo a coleção 3AI sendo a menos adotada no país, o quantitativo total de problemas presentes na coleção é bastante semelhante à coleção 1AI, a mais adotada, segundo dados do MEC. Neste sentido, a coleção apresenta uma quantidade expressiva de problemas combinatórios, bem distribuídos nos livros do 2º ao 5º ano.

Dentre o quantitativo de atividades, foram encontrados, em sua maioria, problemas a resolver, apresentando exemplos resolvidos apenas no glossário ao final dos livros. Além disso, a coleção, geralmente, propõe o início do trabalho com a Combinatória por meio de uma situação explicativa, ilustrada com figuras e diálogos, apontando muitas vezes para os invariantes do problema em questão, conforme a Figura 22.

Figura 22. Problemas que chamam atenção ao invariante de ordem na coleção 3AI

E se eu me sentar na cadeira número 2, que número vocês vão escolher?

Número 1	Número 2	Número 3
Vinícius	Maria	Lia
Lia	Maria	Vinícius

Se Maria decidir se sentar na cadeira número 2, Vinícius poderá escolher a cadeira número 1 ou a número 3. Lia vai se sentar na cadeira que sobrar. Nesse caso também há duas ordens possíveis de estabelecer: Vinícius, Maria e Lia ou Lia, Maria e Vinícius.

1 De quantas maneiras as crianças podem se sentar nessas cadeiras? Escreva todas as possibilidades no caderno.

6 (Maria, Vinícius, Lia; Maria, Lia, Vinícius; Vinícius, Lia, Maria; Vinícius, Maria, Lia; Lia, Vinícius, Maria; Maria, Maria, Vinícius)

Fonte: Asas para Voar. Maria Helena Souza e Walter Spinelli. Editora Ática, 2011, 5º ano, p. 257.

Este tipo de proposta, além de não trazer uma conceitualização direta do conteúdo, proporciona o aluno a pensar sobre as características do problema e

visualizar nas imagens e tabelas como as possibilidades são geradas. Neste exemplo em específico, são tratadas situações referentes à ordem, com problemas de permutação, no qual a explicitação do invariante possibilita ao aluno uma melhor resolução das possibilidades, conforme visto nos resultados do estudo de Silva e Spinillo (2011) ao comprar alunos resolvendo problemas com os invariantes explícitos ou não.

8.3.1.3.2 Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 3AI

Analisando como os significados da Combinatória estão presentes na coleção, foi possível identificar todos os tipos de problemas na obra, conforme a Tabela 10.

Tabela 10. Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 3AI

Ciclo	Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios por significado			
		Produto Cartesiano	Arranjo	Combinação	Permutação
Alfabetização matemática	1º ano	0	0	0	0
	2º ano	13	1	4	2
	3º ano	6	1	5	3
Matemática	4º ano	11	2	5	7
	5º ano	11	0	1	4
Total		41	4	15	16

Os dados evidenciam que a obra apresenta um maior quantitativo de problemas de produto cartesiano, seguido da permutação e da combinação. Os problemas de arranjo mais uma vez são os menos presente nos livros, mesmo as orientações curriculares solicitando o trabalho com todos os tipos de problemas e as pesquisas científicas apontando a necessidade de se trabalhar com a variedade de problemas combinatórios para que se superem dificuldades na compreensão deste raciocínio.

Contudo, a coleção 3AI ao abordar a Combinatória de forma direta, de maneira geral, varia nos tipos de situações combinatórias nos problemas trabalhados, não tratando apenas do produto cartesiano, como visto nas outras coleções e como comumente é associado neste ciclo de ensino. Esta abordagem da

Combinatória é importante, pois proporciona o aluno a pensar neste raciocínio pelas diferentes situações existentes no conceito, que envolve pensar nos invariantes de cada uma destas situações. Este aspecto também se relaciona com o que Vergnaud (1986) apresenta como elemento para o desenvolvimento do conceito, a compreensão dos significados envolvidos nas situações.

8.3.1.3.3 Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 3AI

Analisando como a coleção apresenta as situações-problema de Combinatória, foi possível observar, a partir da Tabela 11, que a obra prioriza a apresentação das atividades com a utilização de um desenho como representação simbólica junto ao enunciado. A utilização deste desenho, por sua vez, pode auxiliar o pensamento do aluno na descoberta das possibilidades do problema.

Tabela 11. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro 3AI

Ano Escolar/ livro	Tipos de representações simbólicas na apresentação das atividades			
	Apenas enunciado	Desenho	Tabela/ Quadro	Mais de uma*
1º	0	0	0	0
2º	9	11	0	0
3º	4	11	0	0
4º	7	16	0	2
5º	2	12	0	2
Total	22	50	0	4

*Mais de uma: questões que apresentavam mais de uma representação junto ao enunciado do problema.

No que se refere às sugestões de estratégias de resolução presentes nos enunciados das questões, a Tabela 12 a seguir no apresenta como a coleção propõe que o aluno às resolva.

Tabela 12. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 3AI

Ano	Tipos de representações simbólicas sugeridas para a resolução das
-----	---

Escolar	atividades								
	Sem sugestão	Desenho	Algoritmo	Listagem	Árvore de possibilidades	Tabela/Quadro	Calculo mental ou oral	Mais de uma*	Material manipulável
1º	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2º	12	6	1	0	0	0	0	0	1
3º	8	2	1	3	0	0	0	0	1
4º	15	3	0	7	0	0	0	0	0
5º	10	0	0	2	2	0	0	2	0
Total	45	11	2	12	2	0	0	2	2

*Mais de uma: questões que sugeriam mais de uma forma de resolução.

É possível perceber que a maioria das questões não apresentam sugestão de resolução, deixando a critério do aluno escolher como resolver os problemas. Contudo, a coleção apresenta uma variedade de representações simbólicas nas demais atividades que sugere, por meio de listagem, desenhos, árvore de possibilidades e até apresentando material manipulável, como mostra a Figura 23.

Figura 23. Problema de produto cartesiano solicitando o uso de material manipulável na coleção 3AI

Combinando e contando

Atividades em dupla

- 
 Agora, vocês vão jogar *Monte o Zeca*.
 Nesse jogo, vocês poderão montar o Zeca de várias maneiras. Vejam uma delas ao lado.
- 
 Recortem as peças da página 29 do *Para recortar* e montem o Zeca de outras maneiras.

Quantos Zecas diferentes é possível montar? 9

Lembre os alunos de que eles devem considerar o Zeca montado no modelo para chegar à resposta.

- João vai pintar um suporte e uma estrela de gesso. Ele tem 3 potes de tinta de cores diferentes: azul, rosa e amarelo.



Fonte: Asas para Voar. Maria Helena Souza e Walter Spinelli. Editora Ática, 2011, 3º ano, p. 246.

Este tipo de atividade é propícia para a mobilização do pensamento combinatório nesta fase inicial em que o conteúdo é trabalhado com as crianças, no qual a visualização das possibilidades ao mover as peças de roupas apresenta de

maneira concreta a construção da solução do problema. Esta estratégia de resolução foi utilizada de forma semelhante por Matias, Santos e Pessoa (2011) ao sondarem os conhecimentos combinatórios de crianças na Educação Infantil. Utilizando o material manipulável, que se tratava de fichas com os desenhos dos elementos do problema, assim como no exemplo do livro, os alunos levantaram possibilidades das situações apresentadas, demonstrando compreendê-las.

8.3.1.3.4 A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 3AI

A coleção apresenta em várias de suas atividades a proposta de sistematização de solução, aperfeiçoando a estratégia de resolução, como na atividade da Figura 24.

Figura 24. Problema de permutação com proposta de sistematização na coleção 3AI

Combinando e contando

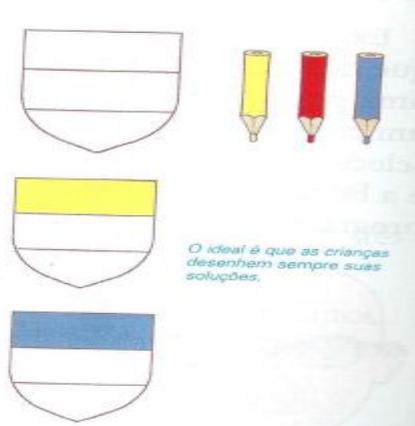
1 Vanderlei desenhou um distintivo para o time de futebol da sua rua. O distintivo é bem simples: tem três faixas. Vanderlei quer pintar cada faixa com uma cor diferente. Veja ao lado as cores que ele quer usar.

a) Se Vanderlei já pintou de amarelo a primeira faixa do distintivo, de quantas maneiras diferentes ele poderá terminar de pintá-lo? 2

b) E se a primeira faixa já estivesse pintada de azul, de quantas maneiras diferentes o distintivo poderia ser pintado? 2

c) Desenhe em seu caderno um distintivo igual a esse. Use três cores, uma em cada faixa, e pinte o seu distintivo do jeito que você mais gostar. *Desenho do aluno.*

d) De quantas maneiras diferentes Vanderlei poderá pintar o distintivo usando as três cores, uma em cada faixa? 6 (1ª faixa = 3 cores possíveis; 2ª faixa = 2 cores possíveis; 3ª faixa = 1 cor possível; $3 \times 2 \times 1 = 6$)



O ideal é que as crianças desenhem sempre suas soluções.

Fonte: Asas para Voar. Maria Helena Souza e Walter Spinelli. Editora Ática, 2011, 4º ano, p.

188.

Neste tipo de atividade o aluno é levado a organizar as possibilidades fixando um elemento e registrando todas as possibilidades com ele, para que assim não as registre repetidas ou se esqueça de alguma. Este tipo de estratégia é importante

como apontada nos estudos de sondagem de Pessoa e Borba (2009) e Pessoa e Santos (2011) nos quais os alunos ao sistematizarem a listagem obtinham maior sucesso, além disso, nas intervenções realizadas por Pessoa e Santos (2012) o uso da sistematização levava os alunos também a generalizarem respostas, principalmente quando o problema exigia um número maior de possibilidades. Por exemplo, na Figura 24 acima, percebendo-se que com o amarelo no topo são formadas duas bandeiras e com o azul no topo também duas, com o vermelho também serão formadas duas, encontrando um total de seis possibilidades de bandeiras.

8.3.1.3.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 3AI

As atividades propostas na coleção, ao questionar as possibilidades, variam em solicitar o quantitativo total ou o registro de cada uma das possibilidades, com predominância do segundo caso. Contudo, a coleção solicita que o aluno esgote as possibilidades de cada problema, não solicitando apenas alguns casos, mas todo o espaço amostral de cada situação combinatória. Desta forma, propõe que se pense nas situações possíveis contribuindo para esgotar as possibilidades dos problemas, ajudando a superar obstáculos apresentados em estudos de sondagem em se registra apenas alguns casos (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011).

8.3.1.3.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 3AI

Analisando as orientações ao professor na coleção, identificamos que a obra contempla informação sobre o trabalho com a Combinatória para o docente. As informações estão presentes ao longo das atividades, nas quais geralmente deixam claro que as atividades estarão tratando do raciocínio combinatório e orientando que o professor inicie o trabalho com experiências concretas por meio de materiais manipuláveis para auxiliar na contagem. Sobre as orientações para o professor nas atividades, chamamos atenção para um equívoco apresentado na resposta de duas questões (Figuras 25 e 26).

Figura 25. Resposta incorreta 1 para o professor na coleção 3AI

6 Para criar uma senha, preciso escolher uma letra e um número.

A B C D E 1 2 3

Quantas senhas diferentes eu posso formar? 15 senhas ($5 \times 3 = 15$)

Fonte: Asas para Voar. Maria Helena Souza e Walter Spinelli. Editora Ática, 2011, 5º ano, p. 34.

Figura 26. Resposta incorreta 2 para o professor na coleção 3A1

2 Rui precisa escolher uma letra e um algarismo para criar uma senha. Veja as letras e os algarismos que ele pode usar:

A	B	C	D	E
1	2	3	4	

Quantas senhas diferentes Rui poderá formar? 20 senhas ($5 \times 4 = 20$)

Fonte: Asas para Voar. Maria Helena Souza e Walter Spinelli. Editora Ática, 2011, 4º ano, p. 267.

As Figuras 25 e 26 acima apresentam um problema de produto cartesiano. Geralmente neste tipo de situação combinatória a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Contudo, no contexto em que o problema é apresentado, de senhas, o produto entre o quantitativo de cada conjunto (conjunto de letras e conjunto de números) deve ser multiplicado por dois, uma vez que a senha A1 é diferente da senha 1A, por exemplo, e sendo assim cada caso se repete duas vezes. Neste sentido, enfatizamos mais uma vez a importância de estarmos atentos aos invariantes dos problemas, pois uma simples multiplicação nem sempre corresponde ao total de possibilidades.

No manual do professor são contempladas várias orientações sobre o trabalho com a Combinatória. Foi possível identificar orientações esclarecedoras no

sentido de explicar o trabalho da Combinatória relacionada ao campo Tratamento da Informação junto aos problemas de Estatística e Probabilidade. Além disso, foram encontradas orientações que tratavam sobre erros frequentes dos alunos em dar respostas baseadas em suas preferências e não todas as possíveis, orientando o professor a ampliar esta ideia a partir do que os alunos já demonstram saber.

No manual do professor a coleção orienta o trabalho varias representações simbólicas, principalmente com o material concreto e manipulável. Além disso, chama atenção para a sistematização da resolução, conforme a Figura 27.

Figura 27. Orientação ao professor sobre a sistematização na coleção 3AI

Vamos combinar? (p. 225)

Uma das ideias da multiplicação é a combinatória, aplicada quando se tenta estabelecer os números das possíveis formas de agrupamento. Por exemplo: "Luís vai escolher a roupa para sair. Ele tem dois tipos de camisetas e três de calças. Quantas combinações ele pode fazer com as camisetas e as calças?"

O equívoco mais comum nessa situação é adicionar o número de calças com o de camisetas, não usando o princípio multiplicativo de contagens. Um procedimento que pode levar ao erro do resultado é fazer desenhos ou listagens desorganizadas das possíveis composições de vestimentas.

Supondo que uma camiseta é azul e a outra é branca, e uma calça é azul, outra bege e outra preta, pode-se organizar as possibilidades:

Camiseta	Calça
Branca	Azul
	Bege
	Preta
Azul	Azul
	Bege
	Preta

Isso significa que cada camiseta pode ser combinada com três calças; como são duas camisetas, o total de possibilidades é 2×3 ou 6 possibilidades.

Fonte: Asas para Voar. Maria Helena Souza e Walter Spinelli. Editora Ática, 2011, 2º ano, p. 99 MP.

Este tipo de orientação é importante, pois, como já vimos no estudo de intervenção (PESSOA e SANTOS, 2012), é importante o professor chamar atenção para essa estratégia a fim de auxiliar no esgotamento das possibilidades.

Com relação ao trabalho com os tipos de problemas combinatórios, não foi possível identificar na coleção orientações referentes aos significados da Combinatória nem sobre as características implícitas em tais problemas.

8.3.1.3.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 3AI

No Quadro 7, a seguir, apresentamos uma síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e o livro didático sobre a Combinatória.

Quadro 7. Síntese da coleção 3AI em relação aos documentos oficiais e as pesquisas

Categoria	Documentos oficiais	Resultados de pesquisas	Livro didático
Abordagem sobre a Combinatória: O trabalho com este conceito desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.	BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012.	PESSOAS e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011.	É abordado na coleção, com exceção do 1º ano, em problemas multiplicativos e relacionados ao campo Tratamento da Informação com a probabilidade e a Estatística.
Significados combinatórios trabalhados nos livros: tipos de problemas combinatórios são explorados nos livros.	BRASIL, 1997.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009.	Apresenta todos os tipos de problema, com predominância de produto cartesiano e poucos arranjos.
As diferentes representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades.	(BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009.	Apresenta a maioria dos problemas com um desenho e mesmo com maior índice de não sugestão, apresenta algumas estratégias como listagem, desenho e manipuláveis. No manual orienta o trabalho com várias representações.
A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução.		PESSOA e SANTOS, 2011; PESSOA e SANTOS, 2012.	Propõe a sistematização da estratégia em algumas atividades dos livros e no manual do professor.
Esgotamento de possibilidades.		PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SANTOS, 2011 e 2012.	Solicita o esgotamento de possibilidades na maioria das atividades.

8.3.1.4 Coleção 4 dos anos iniciais do Ensino Fundamental (4AI)

8.3.1.4.1 Abordagem da Combinatória na coleção 4AI

A coleção 4AI, de acordo com os dados do MEC, é a penúltima coleção na lista de mais adoção pelas escolas brasileiras. O Guia do Livro Didático de Alfabetização Matemática e Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2012) apresenta uma avaliação da coleção que aponta aspectos diferentes de abordagem nos ciclos de ensino. Segundo o Guia, no ciclo de alfabetização matemática a metodologia adotada na coleção prioriza a resolução de atividades que, nem sempre se caracterizam como situações-problema e os conceitos e procedimentos são retomados ao longo da obra mas, por vezes, sem o devido aprofundamento. Além disso, neste ciclo não são incentivadas a utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas, a comparação entre elas nem a verificação de procedimentos e resultados pelo aluno, aspectos bem diferentes do que a proposta atual de ensino da Matemática. Já no ciclo da Matemática, o Guia aponta que os tópicos abordados são bem contextualizados nas práticas cotidianas e que, geralmente, os capítulos começam com um quadrinho ou uma ilustração que remetem a essas práticas. Contudo, as orientações presentes neste ciclo são diretivas, oportunizando poucas possibilidades para elaborar estratégias próprias.

Com relação ao trabalho com a Combinatória nos conteúdos trabalhados, conforme a avaliação do Guia, não foi possível identificar este conteúdo de forma explícita, apenas no livro do 2º ano apresenta que vão ser trabalhadas as ideias da multiplicação. Neste sentido, pela avaliação do Guia não é possível identificar que a coleção aborda os problemas combinatórios, nem nos Números e Operação, nem em Tratamento da Informação, conforme orientado nos PCN destinados a este ciclo (BRASIL, 1997).

Analisando as atividades presentes na coleção, identificamos que a abordagem da Combinatória é bastante superficial, primeiramente pelo quantitativo de problemas encontrados, conforme a Tabela 13 abaixo, e por não abranger todos os anos escolares.

Tabela 13. Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 4AI:

Ciclo	Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios
Alfabetização	1º ano	0

Matemática	2º ano	12
	3º ano	06
Matemática	4º ano	04
	5º ano	02
Total		24

Os problemas combinatórios são abordados no campo de Números e Operações, envolvidos nos problemas multiplicativos, mas, no geral, sem fazer relação a uma das ideias da multiplicação com raciocínio de resolução diferente, uma vez que a coleção foca a aprendizagem do cálculo numérico deste tipo de problema. Apenas no livro do 2º ano é feita esta relação, mas tratando como “problema de árvore de possibilidades”, conforme a Figura 28.

Figura 28. Apresentação sobre as ideias da multiplicação na coleção 4AI

A multiplicação ajuda a resolver problemas de soma de parcelas iguais, de organização retangular e de árvore de possibilidades. Com as atividades aqui propostas você retomará as ideias da multiplicação, já vistas anteriormente.

Fonte: Ponto de Partida. Maria Inez Castro Cerullo, Regina Maria Chacur e Maria Tomie Shirahige. Editora Sarandi, 2011, 2º ano, p. 199.

Neste ano escolar foi encontrado um quantitativo maior de problemas, a metade do total presente na coleção, por abordar situação nas estruturas aditivas no qual são solicitadas possibilidades de somas para um determinado valor (Figura 29).

Figura 29. Problemas de combinação relacionados a atividades de adição na coleção 4AI

3. Felipe e Mário continuaram jogando dois dados cada um. Ajude-os a descobrir como obter os números abaixo com os dados e desenhe as respostas.

a) 6 pontos

Há três possibilidades, mas os alunos podem representá-las em cinco desenhos diferentes, jogando os dados e tirando os resultados a seguir: 5 e 1; 4 e 2; 3 e 3; 2 e 4; 1 e 5.

b) 9 pontos

Há duas possibilidades, mas os alunos podem representá-las em quatro desenhos diferentes, jogando os dados e tirando os resultados a seguir: 5 e 4; 6 e 3; 4 e 5; 3 e 6.

c) 8 pontos

Há duas possibilidades, mas os alunos podem representá-las em três desenhos diferentes, jogando os dados e tirando os resultados a seguir: 2 e 6; 4 e 4; 6 e 2.

Fonte: Ponto de Partida. Maria Inez Castro Cerullo, Regina Maria Chacur e Maria Tomie Shirahige. Editora Sarandi, 2011, 2º ano, p. 73.

Neste sentido, também não é feita nenhuma relação da Combinatória com o campo do Tratamento da Informação, conforme orientam documentos oficiais para este ciclo (BRASIL, 1997), exceto em uma única atividade em que são solicitadas as possibilidades antes de questionar a probabilidade.

Dentre os problemas, foram apenas encontradas situações a resolver, não havendo assim, explicações, exemplos e exercícios respondidos. Neste sentido, acreditamos a coleção apresenta uma abordagem da Combinatória insuficiente para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

8.3.1.4.2 Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 4AI

Analisando os significados da Combinatória presentes na coleção 4AI, identificamos os quatro tipos de problemas, com maior quantitativo de produto cartesiano, seguido da combinação e da permutação. O problema de arranjo mais uma vez apresenta a menor quantidade de problemas, com apenas uma questão em toda a coleção, conforme a Tabela 14.

Tabela 14. Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 4AI

Ciclo	Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios por significado			
		Produto Cartesiano	Arranjo	Combinação	Permutação
Alfabetização matemática	1º ano	0	0	0	0
	2º ano	3	0	8	1
	3º ano	5	0	0	1
Matemática	4º ano	2	0	0	2
	5º ano	0	1	0	1
Total		10	1	8	5

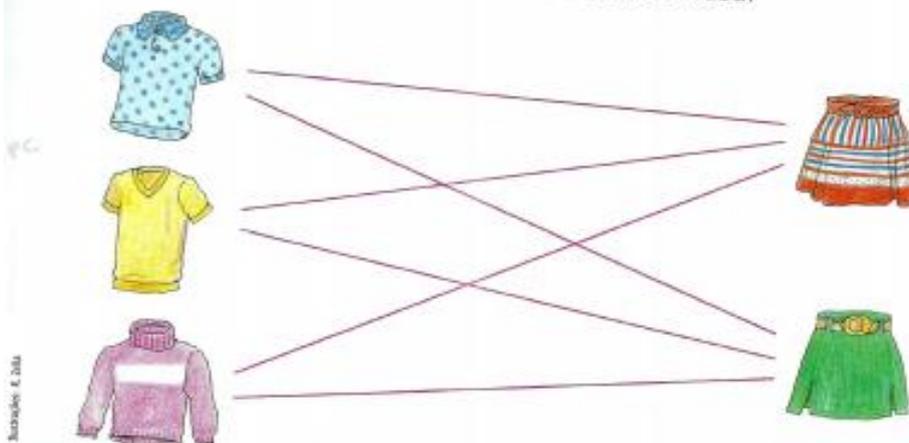
Os dados ainda nos levam a identificar que não é realizado um trabalho sistemático da Combinatória no que tange a variedade de problemas por ano escolar. Além de não serem encontrados no livro do 1º ano, nos demais anos são encontrados apenas um ou outro tipo de problema. Entretanto, pesquisas apontam a necessidade de se trabalhar os diferentes tipos de problemas que envolvem o conceito, uma vez que as crianças apresentam dificuldades da compreensão dos invariantes presentes nos mesmos (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011).

Ao tratar diretamente dos problemas combinatórios a coleção faz referência apenas aos problemas de produto cartesiano, conforme pode ser exemplificado na Figura 30.

Figura 30. Problema de produto cartesiano na coleção 4AI

6. Isadora fez 2 saias e 3 blusas para a sua boneca. Com essas roupas, ela quer vestir sua boneca de maneiras diferentes. Ajude Isadora a formar diferentes combinações de roupa.

a) Com cores diferentes, ligue uma saia a cada blusa.



b) Quantas combinações diferentes Isadora formou? 6

7. André tem 4 camisetas diferentes e 3 bermudas, também diferentes, e todas as peças combinam entre si. Quantos trajes diferentes André pode formar com essas peças? Faça suas anotações e responda no espaço abaixo.

Os problemas 6 e 7 apresentam a multiplicação com a ideia de possibilidades, como tabela multiplicativa ou árvore de possibilidades.
Antes de dar início à resolução das atividades, proponha aos alunos que vivenciem a situação que consta nos problemas apresentados. Prepare material feito de papel para simular diferentes trajes e discuta com eles o número de possibilidades de combinação das diferentes peças. Várie o número de saias e blusas. Apresente outras situações, como, por exemplo: "Para certa dança, precisamos formar pares mistos, um menino e uma menina. Quantos pares poderíamos formar com os alunos da turma?"

Resposta: 12 trajes

Fonte: Ponto de Partida. Maria Inez Castro Cerullo, Regina Maria Chacur e Maria Tomie Shirahige. Editora Sarandi, 2011, 2º ano, p. 207.

São atividades clássicas do raciocínio combinatório envolvendo o produto cartesiano, que, no entanto, precisam deixar claro para os alunos que não são a única forma de se pensar em Combinatória, nem de se resolver, uma vez que a coleção valoriza o cálculo da multiplicação no trabalho com tais estruturas. Sobre este aspecto, os estudos de sondagem analisados apontam que os alunos de fato possuem maior facilidade neste tipo de problema e dificuldades explícitas nos demais, podendo estar relacionado aos dados encontrados nos livros didáticos deste ciclo, que os trabalha de forma reduzida. Neste sentido, consideramos insuficiente a

abordagem dos significados da Combinatória na coleção, a fim de que se possa propiciar o desenvolvimento de tal raciocínio.

8.3.1.4.3 Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 4AI

Analisando como as representações simbólicas relacionadas aos problemas combinatórios estão presentes na coleção, identificamos que na apresentação das atividades, de maneira geral, é utilizado um desenho junto ao enunciado da questão, conforme a Tabela 15 a seguir.

Tabela 15. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 4AI

Ano Escolar/ livro	Tipos de representações simbólicas na apresentação das atividades				
	Apenas enunciado	Desenho	Tabela/ Quadro	Dinheiro	Mais de uma*
1º	0	0	0	0	0
2º	7	5	0	0	0
3º	0	6	0	0	0
4º	0	4	0	0	0
5º	0	1	0	1	0
Total	7	16	0	1	0

*Mais de uma: questões que apresentavam mais de uma representação junto ao enunciado do problema.

Percebemos assim, que a coleção não apresenta outros tipos de representação para apresentar os problemas, como tabelas e quadros, como encontramos em outras coleções, representações que podem auxiliar no apoio ao pensamento dos alunos. Com relação às representações simbólicas sugeridas na resolução das atividades, a Tabela 16, a seguir, nos mostra os dados encontrados.

Tabela 16. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 4AI

Ano Escolar	Tipos de representações simbólicas sugeridas para a resolução das atividades								
	Sem sugestão	Desenho	Algoritmo	Listagem	Árvore de possibilidades	Tabela/Quadro	Calculo mental ou oral	Mais de uma*	Ligando
1º									
2º	5	6							1
3º	6								
4º	2			2					
5º	2								
Total	15	6		2					1

*Mais de uma: questões que sugeriam mais de uma forma de resolução.

Percebemos assim que a maioria dos problemas não sugere ao aluno nenhuma forma de representação simbólica para resolução, deixando a critério do estudante escolher como resolver. Contudo, como a coleção também não apresenta uma variedade de representações na apresentação das atividades, apenas pelo livro didático o aluno não terá a oportunidade de conhecer e testar das diferentes formas de resolver os problemas combinatórios, além de confrontar e verificar tais estratégias, conforme orientam os PCN (BRASIL, 1997). O professor precisa estar atento às orientações curriculares e aos resultados de pesquisas para trabalhar a Combinatória com alunos no que tange às estratégias de resolução.

8.3.1.4.4 A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 4AI

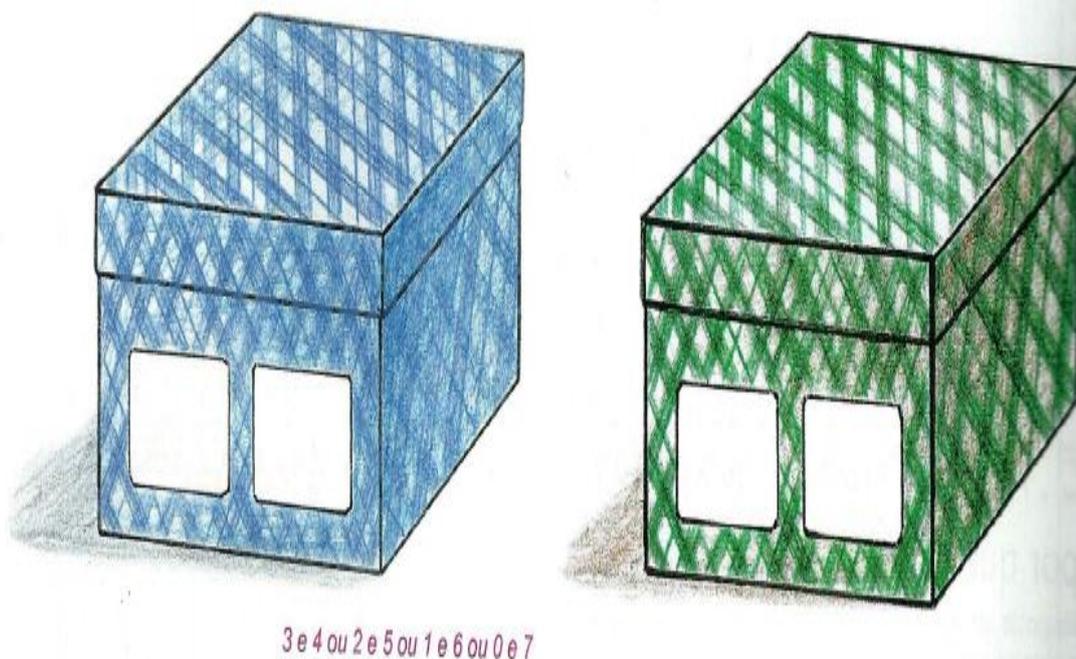
Analisando se a coleção propõe a sistematização da estratégia de resolução não encontramos indícios desse aspecto nas atividades encontradas nos livros, uma vez que poucas sugerem como o aluno resolvê-las. Nas atividades que apresentam resposta para o professor e quando apresenta a listagem das possibilidades, ocorre de forma sistemática, contudo são poucas as respostas que registram os casos possíveis, geralmente apresenta ao professor apenas o valor da resposta. Este aspecto poderia levar o professor a sistematizar a resposta com os alunos na correção, uma vez que se trata de uma estratégia significativa apresentada por alunos em estudos de sondagem (PESSOA e BORBA, 2009) e após o ensino da mesma em intervenções nos anos iniciais (PESSOA e SANTOS, 2012).

8.3.1.4.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 4AI

As atividades propostas na coleção, ao questionar as possibilidades nas situações-problema, variam em solicitar o quantitativo total ou o registro de cada uma das possibilidades, com predominância do segundo caso. O mesmo ocorre com relação ao quantitativo de possibilidades solicitadas, a coleção geralmente solicita o total de casos possíveis a serem combinados, levando os alunos a esgotarem as possibilidades. Contudo, no livro do 2º ano algumas situações que envolvem as possibilidades de somas para determinado valor, são solicitados também alguns casos entre os possíveis, conforme a Figura 31.

Figura 31. Problema de combinação solicitando apenas algumas das possibilidades na coleção 4A1

a) Escreva números de 0 a 9 nas etiquetas das caixas abaixo de modo que a soma dos números em cada caixa seja igual a 7.



Fonte: Ponto de Partida. Maria Inez Castro Cerullo, Regina Maria Chacur e Maria Tomie Shirahige. Editora Sarandi, 2011, 2º ano, p. 64.

Este exemplo apresenta como algumas atividades questionam apenas algumas entre as possibilidades possíveis, uma vez que só apresenta dois espaços para serem registradas as combinações, mas, como vemos na resposta ao professor, no total são quatro as possibilidades. Neste sentido, é importante que ao tratar da Combinatória sejam apresentadas situações aos alunos que os façam pensar no total de casos possíveis ao combinar elementos, característica de tais problemas, tendo em vista a superação do pensamento apenas do provável e das preferências, por exemplo, como encontrados no estudo de Pessoa e Borba (2009), em repostas apresentadas por alunos, principalmente nos anos iniciais.

8.3.1.4.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 4A1

O manual do professor apresenta poucas sugestões para o trabalho com a Combinatória. Durante as atividades, aparecem alguns registros para o docente nos quais se chama atenção para as estratégias de resolução que poderão surgir pelos alunos e orienta o uso de material manipulável em algumas atividades. Contudo, não faz menção ao professor sobre os tipos de problemas combinatórios, seus invariantes e outras possibilidades de resolução para as questões, nem sugestões de atividades. Além disso, nem sempre apresenta a resposta com a resolução dos problemas, muitas vezes apenas com o resultado final.

8.3.1.4.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 4A1

No Quadro 8, a seguir, apresentamos uma síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e o livro didático sobre a Combinatória.

Quadro 8. Síntese da coleção 4A1 em relação aos documentos oficiais e as pesquisas

Categoria	Documentos oficiais	Resultados de pesquisas	Livro didático
Abordagem sobre a Combinatória: O trabalho com este conceito desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.	BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012.	PESSOAS e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011.	Apresenta os problemas sem fazer relação à Combinatória, de forma aleatória nos livros ao trabalhar multiplicação. Não aparecem no 1º ano.
Significados combinatórios trabalhados nos livros: tipos de problemas combinatórios são explorados nos livros.	BRASIL, 1997.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009.	Baixa frequência de problemas ao longo da coleção, com predominância de produto cartesiano.
As diferentes representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades.	BRASIL, 1997; PERNAMBUCO, 2012.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009.	No geral apresenta os problemas com um desenho e não sugere uma estratégia de resolução.
A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução.		PESSOA e SANTOS, 2011; PESSOA e SANTOS, 2012.	Não apresenta indícios de proposta de sistematização.
Esgotamento de possibilidades.		PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SANTOS, 2011 e 2012.	Solicita o esgotamento de possibilidades na maioria das atividades.

8.3.2 Livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental

Analizamos duas coleções de livros didáticos destinadas aos anos finais do Ensino Fundamental. A primeira é a mais adotada no país e a última é a menos adotada, de acordo com dados do Ministério da Educação (MEC). Assim como na análise das coleções anteriores, apresentamos também a abordagem que cada coleção faz da Combinatória ao longo dos livros, os significados combinatórios trabalhados, as representações simbólicas apresentadas junto aos enunciados dos problemas e as representações sugeridas para a resolução, se as coleções sugerem a sistematização das estratégias de resolução e pedem o esgotamento das

possibilidades, relacionando assim com a análise feita nos documentos oficiais e os resultados de pesquisas. Além disso, fazemos algumas comparações com a abordagem encontrada nos anos iniciais, assim como se há uma gradação de dificuldades nos problemas entre os anos escolares.

8.3.2.1 Coleção 1 dos anos finais do Ensino Fundamental (1AF)

8.3.2.1.1 Abordagem da Combinatória na coleção 1AF

A coleção 1AF, segundo dados do MEC, é a coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental mais adotada no país. A análise feita pelo Guia do Livro Didático de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2013a) aponta que a obra se destaca pelos textos interessantes, vários deles com narrativas históricas. Além disso, afirma que os exercícios e atividades são propostos de forma equilibrada após a apresentação de cada tema e que, em geral, visam às aplicações e à sistematização de procedimentos ou propriedades. Por outro lado, o Guia aponta que as propostas de investigação e de descoberta são pouco presentes na obra, contudo que todos os conceitos e procedimentos são retomados e ampliados ao longo dos volumes (BRASIL, 2013a).

Sobre a organização das unidades, o Guia destaca que cada unidade é subdividida em itens dedicados a tópicos do conteúdo, nos quais há, sempre, explicações acompanhadas de exemplos e de exercícios propostos. Com relação aos conteúdos, o Guia aponta que os mesmos abrangem os solicitados tradicionalmente para este ciclo de ensino e que os campos da Matemática são distribuídos de forma bem próxima do padrão desejável, de modo geral. Sobre a metodologia afirma que a coleção incentiva a investigação e o levantamento de hipóteses, assim como a interação entre os alunos. Além disso, aponta que é destacado o uso da calculadora em atividades de diversos campos e o uso de materiais concretos, este mais presente nos dois volumes iniciais (BRASIL, 2013a).

Com relação ao trabalho com a Combinatória, a partir da avaliação feita pelo Guia, a coleção apresenta o conteúdo de forma direta nos livros do 8º e 9º ano relacionados ao campo do Tratamento da Informação, junto a conteúdos de Estatística e Probabilidade. Também é mencionado no livro do 6º ano de forma

indireta, ao abordar como conteúdo as ideias da multiplicação. Neste sentido, a avaliação permite compreender a Combinatória relacionada com os campos da Matemática conforme orientam documentos curriculares (BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012).

Tais dados são confirmados por meio da análise realizada nas atividades de Combinatória presentes na coleção. Identificamos ainda problemas relacionados à abordagem de Potenciação, no qual a potência é relacionada à quantidade de etapas de escolha, conforme a resposta ao professor na Figura 32.

Figura 32. Problema de produto cartesiano relacionado à potenciação na coleção 1AF

13 Um restaurante oferece três tipos de salada, três tipos de carne e três tipos de sobremesa. Quantas refeições diferentes podem ser oferecidas, se cada uma deve conter uma salada, um tipo de carne e uma sobremesa? 27 refeições • $3^3 = 27$

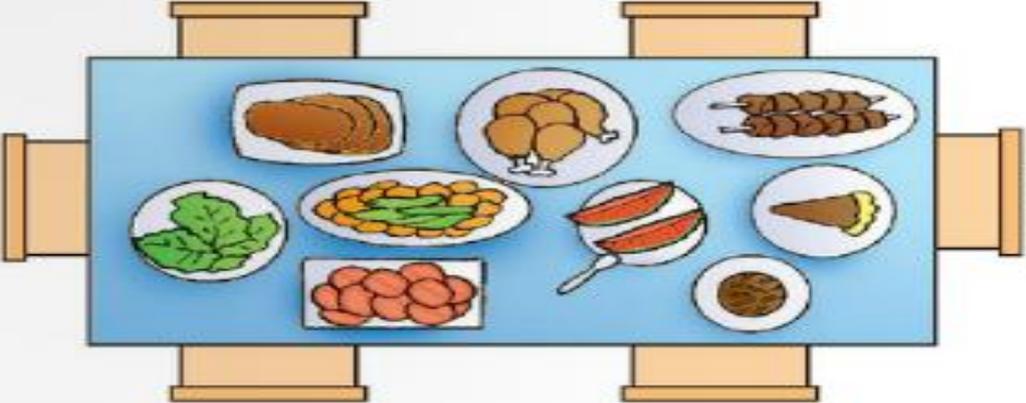


Ilustração: Menu Cartão

Fonte: Praticando Matemática. Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Editora do Brasil, 2012, 9º ano, p. 10.

Ao relacionar às ideias da multiplicação, a Combinatória é vista apenas como problemas de produto cartesiano, abordagem semelhante à apresentada pelos livros dos anos iniciais. Porém, como visto nos PCN (BRASIL, 1998) o objetivo do trabalho com a Combinatória nestes ciclos “é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua

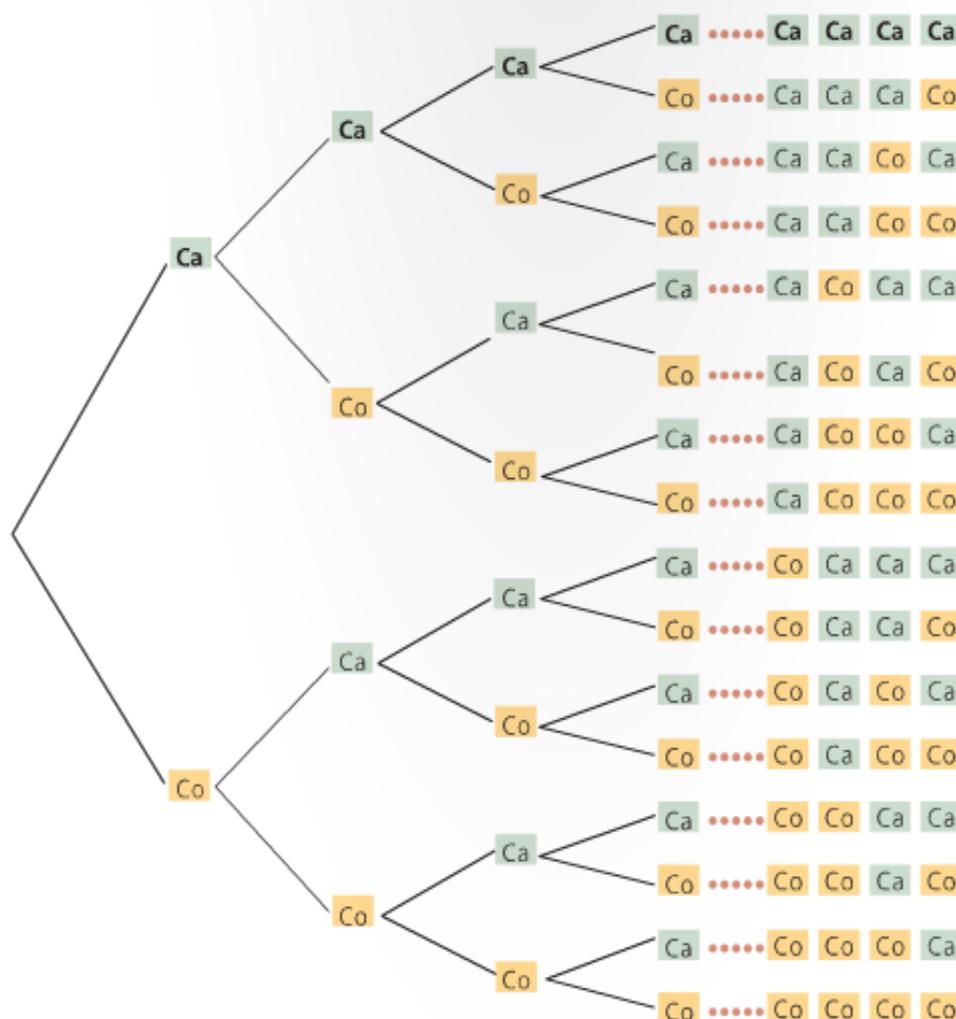
aplicação no cálculo de probabilidades” (BRASIL, 1998, p.52). Ao tratar da Probabilidade é feita uma relação com as possibilidades, conforme a Figura 33.

Figura 33. Problema combinatório relacionado à Probabilidade na coleção 1AF

Vamos trabalhar mais um pouco com a moeda.

- Se lançarmos uma moeda 4 vezes, qual é a probabilidade de obter cara nos quatro lançamentos?

Podemos construir um diagrama de árvore para determinar todos os resultados possíveis:



São 16 resultados possíveis.

Se você lembrar do princípio multiplicativo, economizará tempo:

Para cada lançamento há duas possibilidades: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ possibilidades no total.

Então, a probabilidade de obter cara nos 4 lançamentos é $\frac{1}{16}$, ou 0,0625, ou, ainda, 6,25%.

Fonte: Praticando Matemática. Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos. Editora do Brasil, 2012, 9º ano, p. 136.

Este aspecto é encontrado nos Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), orientando que sejam proporcionadas situações que o aluno faça relação da Combinatória com a Probabilidade, para que a resolução de problemas de contagem auxilie a indicar as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão, ou seja, a Probabilidade.

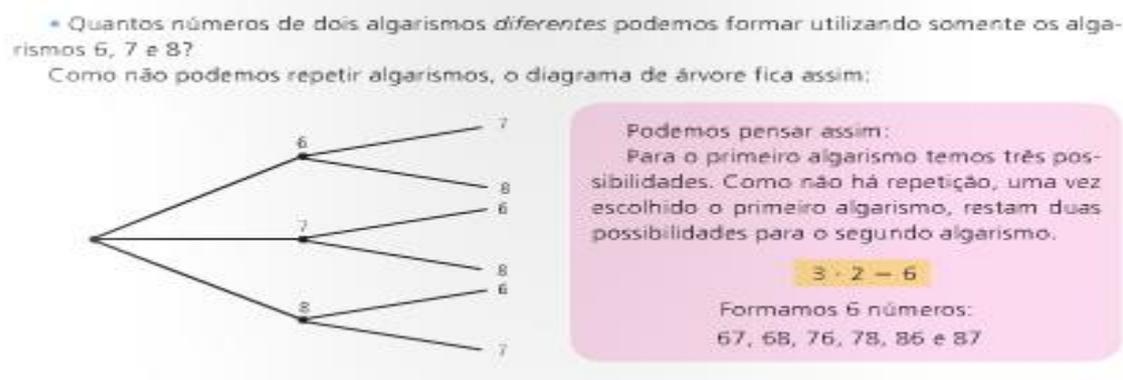
A partir do mapeamento dos livros, foi possível identificar na coleção um quantitativo de 63 problemas envolvendo o raciocínio combinatório, conforme a Tabela 17 abaixo. Além de exercícios a resolver, a coleção apresenta explicações e exercícios resolvidos, assim como problemas de múltipla escolha em sessões de desafio. Este aspecto se diferencia dos anos iniciais, no qual não se tem ainda a ênfase de um princípio de conceitualização da ideia combinatória.

Tabela 17. Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 1AF

Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios
6º ano	08
7º ano	06
8º ano	44
9º ano	05
Total	63

A Tabela também nos mostra que a ênfase do trabalho com a Combinatória na coleção se dá no 8º ano, no qual é nesse ano que o conteúdo Possibilidades é trabalhado de forma mais sistematizada com a resolução de variadas situações combinatórias, a partir de diferentes representações simbólicas, levando a compreensão do princípio fundamental da contagem, conforme a Figura 34. Antes disso, é visto apenas como uma retomada aos problemas multiplicativos.

Figura 34. Problema de arranjo resolvido pela árvore de possibilidade e pelo princípio fundamental da contagem na coleção 1AF



Fonte: Praticando Matemática. Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Editora do Brasil, 2012, 8º ano, p. 258.

Ambos os documentos curriculares analisados corroboram na utilização das diferentes estratégias de resolução. Na Figura 34 encontramos ainda o uso do princípio multiplicativo ou fundamental da contagem. Segundo o uso dessa estratégia os Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) orienta-a a partir do 8ª ano, tendo em vista que os alunos já desenvolveram diferentes estratégias não formais para resolver os problemas de contagem nos ciclos anteriores e como os problemas podem apresentar números um pouco maiores, se faz necessário que os alunos percebam que o princípio multiplicativo como uma estratégia que auxilia resolver mais facilmente muitos problemas.

Em relação a este aspecto, percebemos que os valores de possibilidades presentes nos problemas na coleção são maiores, se levarmos em consideração aos dos anos iniciais. Neste sentido, evidenciamos gradação de dificuldade, especialmente nos dois últimos anos, no quantitativo de possibilidades e por apresentar problemas mais desafiadores, alguns apresentando a repetição de elementos e também envolvendo outros conhecimentos, como a potência. Além disso, são dados subsídios aos alunos para lidarem com essa gradação, como o uso do princípio fundamental da contagem, exemplos e explicações.

As explicações presentes na coleção levam ainda à percepção do invariante de ordem entre os problemas de arranjo e combinação, conforme a Figura 35,

obstáculo esse apresentado por alunos em estudos (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SILVA, 2012).

Figura 35. Explicação com destaque para percepção do invariante de ordem no problema combinação na coleção 1AF

3. O vôlei de praia é disputado entre duplas. Numa classe do 8º ano há quatro alunas que praticam esse esporte: Rita, Paula, Andréa e Joana. Quantas duplas diferentes o professor de Educação Física pode formar?



Se usássemos o mesmo raciocínio do problema anterior teríamos:

- número de possibilidades de escolha para a primeira jogadora da dupla: 4
- número de possibilidades de escolha para a segunda jogadora da dupla: 3

Uma vez escolhida a primeira jogadora, restam três para a segunda escolha.

No entanto, o professor pode formar somente **6 duplas diferentes**. Observe:

Rita – Paula
Rita – Andréa
Rita – Joana

Paula – Rita
Paula – Andréa
Paula – Joana

Andréa – Rita
Andréa – Paula
Andréa – Joana

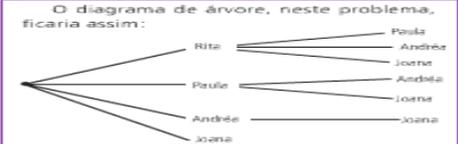
Joana – Rita
Joana – Paula
Joana – Andréa

Rita – Paula } São a mesma
Paula – Rita } dupla.

O mesmo acontece com outras duplas. Cada dupla aparece duas vezes. Quando fizemos $4 \cdot 3 = 12$, contamos duas vezes cada dupla.

Então o professor pode formar, na verdade, $12 : 2 = 6$ duplas diferentes.

O diagrama de árvore, neste problema, ficaria assim:



Fonte: Praticando Matemática. Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Editora do Brasil, 2012, 8º ano, p. 258.

A percepção dos invariantes presentes nos problemas combinatórios é um elemento importante para a compreensão das situações envolvidas neste raciocínio e para a resolução dos problemas. A explicitação destas características foi um dos pilares responsável pelo avanço na compreensão de estudantes no estudo de intervenção realizado por Pessoa e Silva (2012) com alunos no final do Ensino Fundamental.

Neste sentido, a coleção apresenta uma abordagem da Combinatória no qual podemos relacionar com a abordagem presente nos documentos oficiais e nas pesquisas analisadas. Além disso, apresenta características presentes no tripé de Vergnaud (1986), para o desenvolvimento do conceito, quando finaliza a etapa do Ensino Fundamental.

8.3.2.1.2 Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 1AF

Analisando os significados combinatórios presentes na coleção, a Tabela 18 nos apresenta como estes problemas estão distribuídos nos livros da obra.

Tabela 18. Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 1AF

Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios por significado			
	Produto Cartesiano	Arranjo	Combinação	Permutação
6º ano	7	0	0	1
7º ano	0	0	1	5
8º ano	20	7	14	3
9º ano	2	2	1	0
Total	29	9	16	9

De modo geral, percebemos que o produto cartesiano é predominante na coleção, seguido da combinação e da permutação e arranjo. Esses dados são bem semelhantes ao encontrado nos anos iniciais, apontando que ainda não tem se tratado dos diferentes problemas combinatórios com a mesma intensidade, mesmo os alunos nesta etapa já apresentando maturidade e conhecimentos que auxiliam na compreensão e resolução de problemas considerados mais difíceis, como a permutação.

É possível perceber também, que apenas no 8º ano todos os problemas são trabalhados. Nos outros anos, apenas alguns são apresentados aos alunos. Estudos apontam que alunos nestes ciclos já são capazes de resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SILVA, 2012), contudo apresentam dificuldades que precisam ser trabalhadas, em alguns problemas, por meio de um ensino sistemático e seria importante que o livro abordasse essa variedade por ano escolar.

8.3.2.1.3 Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 1AF

As estratégias de resolução são um elemento marcante nas orientações curriculares para o ensino de Combinatória nos anos finais do Ensino Fundamental. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), ambos de Matemática, corroboram nas orientações ao incentivo do uso das diferentes formas de representação na resolução de problemas combinatórios, sem que haja o ensino

de fórmulas. Além disso, pesquisas apontam que alunos neste ciclo resolvem de forma bem sucedida tais problemas por meio de estratégias não formais (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SILVA 2012). Analisando as representações presentes nos enunciados das questões da coleção, identificamos que a maioria dos problemas são apresentados com um desenho, conforme a Tabela 19 abaixo.

Tabela 19. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 1AF

Ano Escolar/ livro	Tipos de representações simbólicas na apresentação das atividades			
	Apenas enunciado	Desenho	Tabela/ Quadro	Mais de uma*
6º	4	3	1	0
7º	5	1	0	0
8º	18	25	1	0
9º	1	4	0	0
Total	28	33	2	0

*Mais de uma: questões que apresentavam mais de uma representação junto ao enunciado do problema.

Este resultado também é semelhante ao encontrado nos livros dos anos iniciais, contudo no início do Ensino Fundamental outras representações surgem como apoio ao pensamento dos alunos junto ao enunciado das questões. O mesmo ocorre com as sugestões de estratégia para a resolução das questões, conforme a Tabela 20 abaixo.

Tabela 20. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 1AF

Ano Escolar	Tipos de representações simbólicas sugeridas para a resolução das atividades								
	Sem sugestão	Desenho	Algoritmo	Listagem	Árvore de possibilidades	Tabela/ Quadro	Calculo mental ou oral	Mais de uma	Outra
6º	7	0	0	0	0	0	0	1	0
7º	2	0	0	4	0	0	0	0	0
8º	33	0	0	5	0	2	0	4	0
9º	2	0	0	1	0	1	0	1	0
Total	44	0	0	10	0	3	0	6	0

*Mais de uma: questões que sugeriam mais de uma forma de resolução.

A Tabela 20 nos mostra que a maioria das questões deixa a critério do aluno como resolver os problemas. Algumas outras questões sugerem uma listagem, uma tabela ou mais de uma forma de resolução. Desta forma, neste ciclo as sugestões de resolução são menos frequentes, contudo, como são presentes explicações sobre o conteúdo abordado, a obra apresenta os exemplos resolvidos por meio de diferentes estratégias de resolução, conforme a Figura 36.

Figura 36. Problema de produto cartesiano resolvido por diferentes representações na coleção 1AF

1. Contando possibilidades

Contamos objetos, pessoas... Processos de contagem são necessários em inúmeras atividades humanas. Agora, vamos contar possibilidades.

1. Um colégio oferece a seus alunos cursos complementares no primeiro e no segundo semestres. No primeiro semestre o aluno pode optar por um dos seguintes cursos:

- Iniciação Musical ou História da Arte.

No segundo semestre as opções são três:

- Teatro, Dança ou Artes Plásticas.

O aluno pode escolher somente um curso por semestre.



Quantas e quais são as opções de escolha para o aluno no ano?



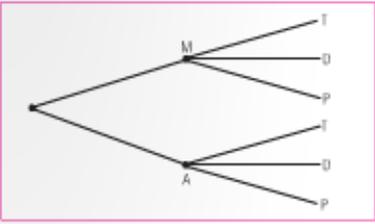
Há formas organizadas de registrar todas as possibilidades de escolha.

Podemos utilizar:

- uma tabela:

	Teatro (T)	Dança (D)	Artes Plásticas (P)
Iniciação Musical (M)	M - T	M - D	M - P
História da Arte (A)	A - T	A - D	A - P

- ou um diagrama:



• Este tipo de diagrama é chamado de **diagrama de árvore**.

O aluno tem no total 6 possibilidades de escolha. Observe:

- Número de possibilidades para o 1º semestre: 2
- Número de possibilidades para o 2º semestre: 3

$2 \cdot 3 = 6$

Fonte: Praticando Matemática. Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Editora do Brasil, 2012, 8º ano, pp. 257 e 258.

Além de apresentar este aspecto das representações que se relaciona com o encontrado em pesquisas e em documentos oficiais, a coleção também leva o aluno a compreender o uso do princípio fundamental da contagem, que as orientações curriculares chamam também de princípio multiplicativo, como uma estratégia mais formalizada neste ciclo, objetivo de aprendizagem antes que se aprendam as fórmulas.

8.3.2.1.4 A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 1AF

Analisando se a coleção propõe a sistematização da estratégia como forma de resolução, foi possível identificar este aspecto como podemos observar na Figura 36 acima, propondo formas organizadas de registrar todas as possibilidades de escolha. Este aspecto é também evidenciado como importante na resolução em estudos de sondagem (PESSOA e BORBA, 2009) e intervenção (PESSOA e SILVA 2012) neste ciclo de ensino. Além deste exemplo da Figura 36, sempre ao apresentar as explicações, as possibilidades são registradas de forma sistemática. Uma das atividades encontradas também chama atenção para este fato (Figura 37).

Figura 37. Problema de permutação com proposta de sistematização na coleção 1AF

15 Considere todos os números naturais de três algarismos diferentes formados por 3, 4 e 5.

Responda.

- a) Quais começam por 3? 345 e 354
- b) Quais começam por 4? 435 e 453
- c) Quais começam por 5? 534 e 543
- d) Quantos são no total? 6

Este tipo de atividade propõe que o aluno fixe um elemento e descubra as possibilidades com ele iniciando e depois com os demais, de forma a não esquecer nem repetir nenhuma possibilidade, erro comum entre os estudantes ao resolver problemas combinatórios. Em problemas com um número maior de possibilidades o aluno pode também generalizar o resultado sem precisar contar os casos possíveis com todos os elementos no início.

8.3.2.1.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 1AF

Com relação ao esgotamento de possibilidades, a coleção, em todas as questões solicita o total de possibilidades, não encontrando questões, assim, que solicitem apenas alguns casos como visto em livros dos anos iniciais. Ao questionar o resultado de possibilidades, os problemas em sua maioria solicitam apenas o resultado final. Poucas são as questões que pedem o registro de cada possibilidade ou as duas formas de resposta. Neste sentido, as atividades da coleção levam o aluno a esgotar as possibilidades dos problemas, pensando no total de casos possíveis, característica dos problemas combinatórios, pensar além do provável.

8.3.2.1.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 1AF

A coleção não apresenta nenhuma orientação ao professor, nem ao longo das atividades, nem em um manual ao final do livro. Ela fornece apenas as respostas das atividades. Neste sentido, não há orientação sobre o ensino de Combinatória, seus significados, invariantes e representações simbólicas para resolução.

8.3.2.1.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 1AF

No Quadro 9, a seguir, apresentamos uma síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e o livro didático sobre a Combinatória.

Quadro 9. Síntese da coleção 1AF em relação aos documentos oficiais e as pesquisas

Categoria	Documentos oficiais	Resultados de pesquisas	Livro didático
Abordagem sobre a Combinatória: O trabalho com este conceito desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.	BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012.	PESSOAS e BORBA, 2009.	É abordado em ideia de multiplicação no 6º ano, só revisão e desafios, 7º ano, e no 8º e 9º ano relacionados a Estatística e Probabilidade ao tratar de possibilidades.
Significados combinatórios trabalhados nos livros: tipos de problemas combinatórios são explorados nos livros.	BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009;	Apresenta todos os tipos de problemas, com predominância de produto cartesiano. Trabalho todos por livro apenas no 8º ano.
As diferentes representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades.	BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012.	VERGNAUD, 1986.	Apresenta os problemas na maioria só com o enunciado ou com um desenho e tem maior frequência de não sugestão de estratégia para resolução. Chama atenção para o princípio fundamental da contagem.
A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução.		PESSOA e SILVA, 2012.	Apresenta proposta de sistematização na explicação do conteúdo e em atividades.
Esgotamento de possibilidades.		PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SILVA 2012.	Solicita o esgotamento de possibilidades em todas as atividades.

8.3.2.2 Coleção 2 dos anos finais do Ensino Fundamental (2AF)

8.3.2.2.1 Abordagem da Combinatória na coleção 2AF

A coleção 2AF, segundo dados do MEC, é a coleção de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental menos adotada no país. A avaliação realizada pelo Guia do Livro Didático de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2013a), aponta que a coleção se destaca pela

qualidade das atividades propostas e pela abordagem equilibrada de conceitos, algoritmos e procedimentos. Além disso, que as atividades são variadas, bem contextualizadas e são pontos de partida para que o aluno desenvolva o uso da linguagem, tanto oral quanto escrita, valorizando a resolução de problemas voltados para as práticas sociais (BRASIL, 2013a).

O Guia aponta que na distribuição dos capítulos os mesmos estão organizados por itens que contêm textos de explanação e sistematização dos conteúdos, com adequada atenção aos cinco campos da Matemática escolar. A avaliação afirma ainda que as ideias centrais são revistas várias vezes, no mesmo volume e ao longo dos volumes e que os conteúdos da obra são apresentados por meio de explicações teóricas, seguidas de exemplos, de algumas sistematizações e de atividades. Com relação às estratégias de resolução, o Guia aponta que a coleção orienta a utilização de diversificadas formas de resolver um problema, comparando resultados e trabalhando em duplas ou grupos. Além de utilizar diferentes tipos de materiais, como os concretos, a calculadora e instrumentos de desenho e medição.

Com relação ao trabalho com Combinatória, foi possível identificar no Guia que a coleção aborda o conteúdo de forma direta ao tratar do conteúdo Possibilidades no campo de Números e Operações e no Tratamento da Informação.

Analisando os livros da coleção identificamos que a obra contempla o trabalho com o conteúdo em todos os volumes, contudo relacionado apenas ao campo do Tratamento da Informação. Apesar disso, a proposta além de se relacionar diretamente com os conteúdos Estatística e Probabilidade, apresenta uma sistematização da ideia de contagem de possibilidades com explicações, exemplos e atividades que envolvem além de situações-problema, questionamentos com reflexões sobre o raciocínio combinatório. Desta forma, a Combinatória é trabalhada de forma ampla na coleção, no qual a Tabela 21 a seguir, apresenta o quantitativo de problemas encontrados na mesma e como tais problemas estão distribuídos por ano escolar.

Tabela 21. Quantitativo de problemas combinatórios distribuídos em cada ano escolar/livro na coleção 2AF

Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios
6º ano	32
7º ano	39
8º ano	14
9º ano	38
Total	123

A Tabela 21 nos mostra que a coleção apresenta um quantitativo elevado de problemas combinatórios, se levarmos em consideração a análise da coleção anterior, no qual o quantitativo chega a quase dobrar. Com relação à distribuição por ano escolar percebemos que existe um equilíbrio no quantitativo quase em todos os anos, indicando que a coleção trabalha com o conteúdo na mesma intensidade em cada ano dos ciclos dos anos finais.

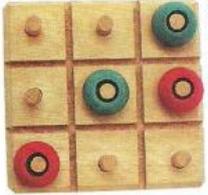
A coleção se destaca por apresentar o trabalho com a Combinatória iniciando com uma explanação do assunto de maneira contextualizada, apresentando sua utilidade e exemplificando com situações práticas e próximas da realidade. Além disso, propõe perguntas com questionamentos que ajudam a refletir sobre o assunto, conforme a Figura 38.

Figura 38. Questionamentos sobre a Combinatória na coleção 2AF

Conversar para aprender

Veja comentários e resolução no *Guia do professor*.

- a. Uma pessoa diz: “O produto das idades de meus dois filhos é 12”. Quais podem ser essas idades? *1 e 12, 2 e 6 ou 3 e 4.*
- b. Que relação você nota entre uma loteria, como a Mega-Sena, e o tema que estamos estudando (situações com muitas possibilidades)? *Resposta pessoal.*
- c. Você consegue dar exemplos de uma situação com várias possibilidades? *Resposta pessoal.*
- d. Observe à direita uma situação de jogo da velha. Agora será a vez do jogador que está com as argolas verdes. Se ele raciocinar bem, pode ganhar o jogo. Qual é a jogada correta? Mostre duas maneiras de o jogo terminar depois disso.



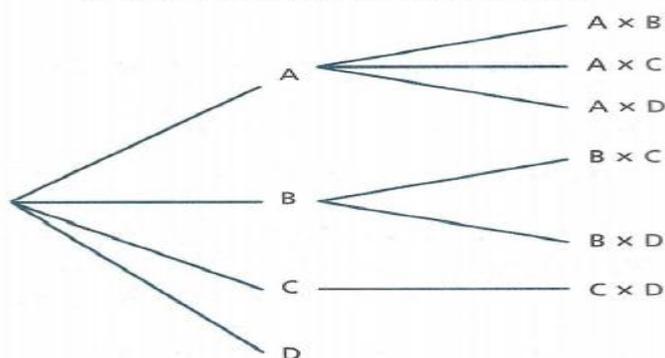
CARLOS LUVIZARI

Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 6º ano, p. 27.

Tais questionamentos propiciam uma reflexão sobre a ideia de combinar possibilidades. A coleção também propõe o trabalho com a Combinatória na busca da percepção de padrões entre problemas através do princípio fundamental da contagem, no qual exemplos parecidos são resolvidos para se perceber a utilização desta estratégia em situações, principalmente, em que o número de possibilidades é extenso, como também observamos como esta estratégia é indicada em orientações curriculares. Neste sentido, algumas situações levam a serem percebidos alguns invariantes do problema, como na Figura 39, no qual apresenta uma árvore de possibilidade chamando atenção para as possibilidades não registrada para o jogador D, uma vez que este já foi combinado com todos os outros e neste problema a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, não podendo assim ser repetidas.

Figura 39. Problema de combinação chamando atenção para o invariante de ordem na coleção 2AF

38. Os jogadores A, B, C e D disputam um torneio de tênis de mesa. Cada jogador enfrenta os adversários apenas uma vez. Veja, abaixo, a árvore que mostra as partidas. Note que não saem “ramos” de D, porque as partidas que ele disputa já apareceram em ramos anteriores.



- Quantas são as partidas desse torneio?
- Imagine um torneio como esse, mas com 8 jogadores: A, B, C, D, E, F, G e H. Desenhe a árvore de possibilidades e descubra quantas partidas haveria nesse caso.

A explicitação dos invariantes que diferenciam as situações combinatórias é um elemento de ensino importante, uma vez que se trata de uma das dificuldades apresentadas por alunos em estudos de sondagem ainda neste ciclo (PESSOA e BORBA, 2009) e um dos motivos de avanço de desempenho por estudantes em intervenções que apostaram na explicitação destas características (PESSOA e SILVA, 2012).

Outro aspecto importante ao se tratar dos invariantes dos problemas é que a coleção deixa claro que padrões multiplicativos são encontrados nas situações de Possibilidades, contudo nem sempre são aplicáveis a todos os tipos de problemas, conforme a Figura 40, que apresenta algumas conclusões sobre o conteúdo em estudo.

Figura 40. Conclusões sobre os problemas combinatórios na coleção 2AF

Conclusões

- Tabelas e diagramas em forma de árvore ajudam a contar possibilidades.
- Perceber um padrão nos problemas simples ajuda a resolver os mais difíceis.
- Muitas vezes, há um padrão multiplicativo para obter o total de possibilidades (mas cuidado: nem sempre é possível usar a multiplicação para contar as possibilidades de uma situação!).

Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 7º ano, p. 72.

Este terceiro ponto das conclusões leva à reflexão sobre a utilização do princípio fundamental da contagem não ser aplicado no mesmo padrão para a resolução de qualquer tipo de problema combinatório. Neste sentido a coleção chama atenção para as variadas formas de se organizar possibilidades, mesmo sem tratá-las separadamente ou por nomenclatura, mas que a utilização de um padrão para um problema de arranjo, que a ordem gera novas possibilidades, não se aplica a um problema de combinação, por exemplo, uma vez que além da utilização do princípio fundamental da contagem deve-se dividir o resultado pelo número de repetição dos casos.

Além disso, a coleção apresenta um trabalho de relação direta da Combinatória com a Probabilidade, ao tratar em um capítulo posterior retomando

nas atividades a solicitação das possibilidades totais de acontecer determinado caso para depois questionar a probabilidade de acontecer um caso específico, conforme a Figura 41.

Figura 41. Problema combinatório relacionado à Probabilidade na coleção 2AF

24. No globo, há apenas três bolas numeradas com 2, 5 e 7. Vamos formar números de três algarismos sorteando essas bolas. Depois de cada sorteio, a bola é recolocada no globo. Assim, podemos formar números como 252, 777 ou 725.



- Quantos números diferentes podem ser formados dessa maneira?
(Dica: Há 3 possibilidades para o primeiro algarismo, três para o segundo algarismo...) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
- Qual é a probabilidade de o número formado no sorteio ser 257? $\frac{1}{27}$
- Qual é a probabilidade de o número ser 222? $\frac{1}{27}$
- Um número formado por algarismos repetidos tem menos chance que um número com algarismos não repetidos? Não, todos têm chances iguais.

Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 9º ano, p. 108.

Este aspecto é visto em orientações curriculares desde os anos iniciais (BRASIL, 1997) e nos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012), abordando a relação existente entre estes dois conteúdos, uma vez que a partir deste raciocínio que o aluno poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, elementos importantes para a

aprendizagem da Probabilidade e da Estatística. No caso da coleção 2AF a Combinatória é retomada ao trabalhar a Probabilidade. Esta relação com os campos da Matemática se diferencia da abordagem da Combinatória nos anos iniciais, no qual é mais relacionada aos Números e Operações. Contudo, em ambos os ciclos as recomendações são para o trabalho nos dois campos.

Foi possível identificar ainda uma gradação de dificuldade em relação aos anos iniciais, nos quais os problemas apresentavam situações mais complexas, com maior número de possibilidades e com repetição de elementos nas possibilidades.

8.3.2.2 Significados combinatórios trabalhados nos livros da coleção 2AF

Com relação aos significados combinatórios presentes na coleção, a Tabela 22 a seguir apresenta como os mesmos estão distribuídos na coleção e por ano escolar.

Tabela 22. Quantidade de problemas por significados em cada ano escolar/livro na coleção 2AF

Ano escolar/livro	Quantidade de problemas combinatórios por significado			
	Produto Cartesiano	Arranjo	Combinação	Permutação
6º ano	6	6	11	5
7º ano	13	6	5	14
8º ano	0	8	3	3
9º ano	0	12	5	18
Total	19	32	24	40

Lembrando que oito dos 123 problemas encontrados na coleção não diziam respeito a um tipo de problema específico, mas apresentavam questões de reflexão sobre os problemas combinatórios de uma forma geral. Desta forma, foi possível perceber que todos os significados da Combinatória estão presentes na coleção, e isso quase que se repete por ano escolar. Os problemas de produto cartesiano que nos anos iniciais são mais predominantes, nesta coleção dos anos finais aparecem em menor quantidade. Este fato pode estar relacionado à facilidade presente neste tipo de problema e à ênfase já dada ao mesmo em ciclos anteriores, buscando-se nesta etapa trabalhar mais os considerados mais complexos. Desta forma, no último

ciclo dos anos finais do Ensino Fundamental o problema de produto cartesiano não aparece nos livros. Percebemos também que os problemas de arranjo e permutação são mais trabalhados nesta etapa de ensino, uma vez que nos anos iniciais estão pouco presentes.

Neste sentido, a coleção apresenta um trabalho com os significados combinatórios que se relacionam com as orientações curriculares para estes ciclos (BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012), variando nos tipos de situações-problema envolvendo o pensamento combinatório.

8.3.2.2.3 Representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades na coleção 2AF

Além de apresentar explicações sobre a Combinatória, a coleção também faz uso de representações simbólicas que auxiliam no desenvolvimento do raciocínio e da compreensão das situações abordadas. Ao apresentar os problemas, muitos são apenas encontrados com o enunciado, conforme a Tabela 23.

Tabela 23. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) apresentadas junto ao enunciado dos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 2AF

Ano Escolar/ livro	Tipos de representações simbólicas na apresentação das atividades				
	Apenas enunciado	Desenho	Tabela/ Quadro	Árvore de Possibilidades	Mais de uma*
6º	18	12	0	0	2
7º	22	13	0	3	1
8º	7	2	0	2	3
9º	16	5	1	4	12
Total	63	32	1	9	18

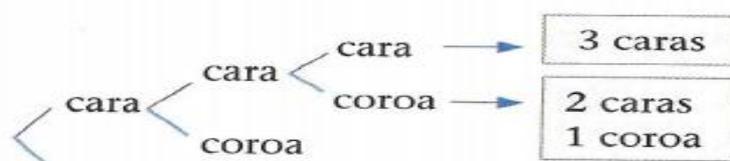
*Mais de uma: questões que apresentavam mais de uma representação junto ao enunciado do problema.

Contudo, mais da metade destes problemas são apresentados com alguma representação, que muitas vezes servem de apoio ao pensamento, como os desenhos, tabelas e árvores de possibilidades. Esta última estratégia citada está presente nos problemas, geralmente, apresentando o início dos ramos de

possibilidades e é solicitado que o aluno continue até esgotar o total de casos (Figura 42).

Figura 42. Problema combinatório apresentado com uma árvore de possibilidades na coleção 2AF

20. Vamos desenhar a árvore de possibilidades do lançamento de três moedas honestas. O começo da árvore é assim:



- Copie e complete o desenho da árvore no caderno.
- Ao todo, quantas são as possibilidades no lançamento de três moedas?

Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 8º ano, p. 181

Com relação às sugestões de representações simbólicas para resolução dos problemas, 73% das questões não apresentavam sugestão de estratégia para o aluno resolvê-las, deixando a critério do mesmo escolher a melhor forma de resolução, conforme a Tabela 24, a seguir.

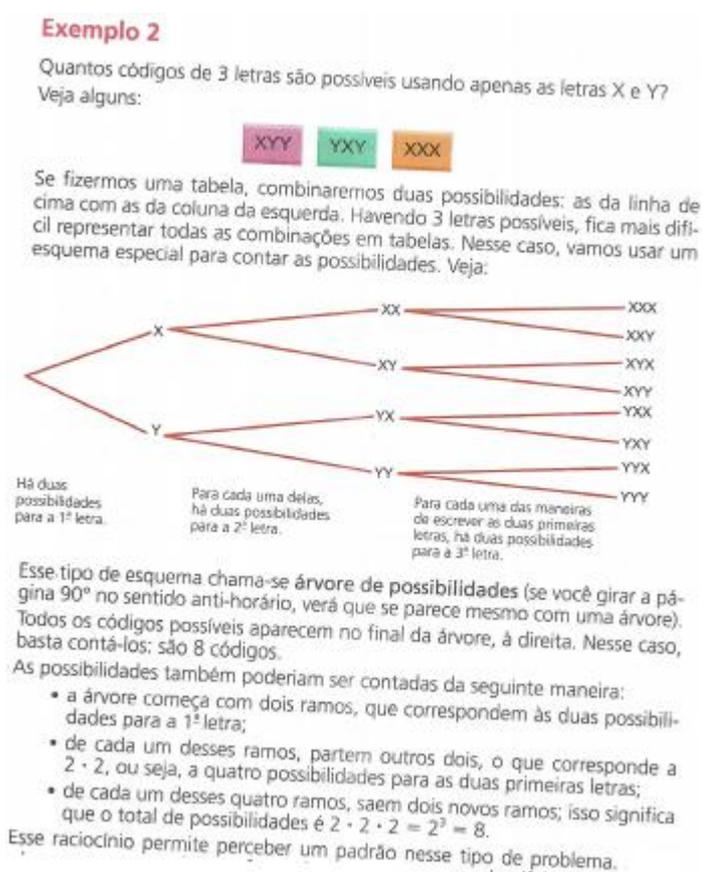
Tabela 24. Quantitativo de representações simbólicas (estratégias) sugeridas nos problemas em cada ano escolar/livro na coleção 2AF

Ano Escolar	Tipos de representações simbólicas sugeridas para a resolução das atividades								
	Sem sugestão	Desenho	Algoritmo	Listagem	Árvore de possibilidades	Tabela/Quadro	Calculo mental ou oral	Mais de uma	Princípio Fundamental da Contagem
6º	25	2	2	0	0	2	0	1	0
7º	26	2	0	0	5	0	0	2	4
8º	7	0	0	1	2	3	0	1	0
9º	32	0	0	0	4	0	0	1	1
Total	90	4	2	1	11	5	0	5	5

*Mais de uma: questões que sugeriam mais de uma forma de resolução.

Nas explicações que a coleção apresenta sobre o assunto, foi possível perceber que a mesma tende trabalhar tipos específicos de estratégias em alguns dos livros como adequados às situações abordadas. No livro de 6º ano é dada mais ênfase à tabela e ao desenho e no 7º ano a árvore de possibilidades somada ao princípio fundamental da contagem. Esta estratégia a partir do cálculo multiplicativo aparece como sugestão de resolução nos exemplos respondidos, como uma forma de consolidar em algoritmo os padrões encontrados em algumas situações combinatórias, conforme a Figura 43.

Figura 43. Problema de permutação utilizando árvore de possibilidades e o princípio fundamental da contagem na coleção 2AF



Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 7º ano, p. 71.

Este aspecto é o início da formalização do cálculo da Combinatória, que conforme os documentos oficiais para esta etapa do ensino (Brasil, 1998; PERNAMBUCO, 2012) só será apresentado com fórmulas no Ensino Médio. Neste sentido, a coleção poderia apresentar uma maior variedade de representações e

ainda propor a confrontação entre estratégias diferentes, como também propõem as orientações curriculares. Contudo, apresenta de forma significativa a proposta de compreensão do cálculo multiplicativo, elemento importante também para a compreensão das fórmulas no ciclo seguinte.

8.3.2.2.4 A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução na coleção 2AF

A coleção 2AF apresenta a proposta de sistematização de forma frequente em várias atividades de todos os livros da obra, além de estar também claramente em explicações do conteúdo no levantamento de possibilidades nos exemplos trabalhados. As Figuras 44 e 45 nos apresentam um exemplo de como a sistematização é abordada no livro.

Figura 44. Proposta de sistematização na coleção 2AF

Exemplo

Imagine bandeiras com 4 faixas horizontais, cada uma com uma cor, escolhida entre estas quatro: amarela, azul, vermelha e cinza. Sem repetir nenhuma cor, quantas bandeiras diferentes podem ser desenhadas?

Claro que seria possível desenhar todas as bandeiras ou fazer uma lista de todas as possibilidades, mas podemos nos esquecer de algumas no meio do caminho, além de perder muito tempo. Por isso, veremos outras maneiras de enfrentar o problema.

Uma resolução

Para resolver, Diogo, aluno de 9º ano, usou um recurso chamado **árvore de possibilidades**. Ele começou pensando apenas nas bandeiras com a faixa de cima amarela.

Se a primeira faixa é amarela, a segunda pode ser azul, vermelha ou cinza. São três possibilidades.

Se eu já usei amarelo na primeira e azul na segunda, a terceira faixa só pode ser vermelha ou cinza. Há só duas possibilidades na terceira faixa porque não posso repetir cores.

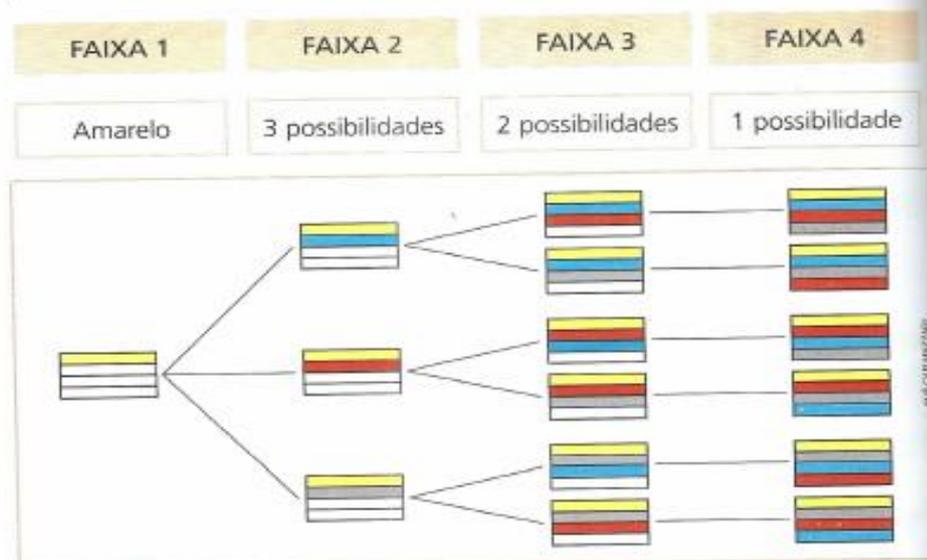
Árvore de possibilidades
Consulte o dicionário.

ILUSTRAÇÕES: ANIL CAR MAZZARI

Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 9º ano, pp. 97.

Figura 45. Proposta de sistematização (continuação) na coleção 2AF

Diogo está no caminho certo. Verificando quantas possibilidades de cor há em cada faixa, ele descobrirá em quantas bandeiras a primeira faixa é amarela. Para registrar as possibilidades, Diogo desenhou a parte da árvore de possibilidades que mostra essas bandeiras de primeira faixa amarela. Veja como ficou:



Com esse diagrama, nenhuma possibilidade é esquecida e conclui-se que há 6 bandeiras com faixa de cima amarela. Como essa faixa de cima pode ter 4 cores, o total de possibilidades é $6 \times 4 = 24$.

Outra resolução

Acompanhe este outro raciocínio:

- São 4 possibilidades para a primeira faixa (em cima). Para cada uma delas, há 3 possibilidades para a segunda faixa. Nessas duas faixas, o total de possibilidades é 4×3 .
- Para cada possibilidade das duas faixas iniciais, há 2 possibilidades na terceira faixa; portanto, ficam $4 \times 3 \times 2$. E, para cada uma dessas possibilidades, há uma só possibilidade na última faixa. Logo, o total é:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Nesse caso, fizemos um raciocínio multiplicativo.

Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 9º ano, p. 98.

A explicação trata de forma clara como a organização da estratégia facilita o desenvolvimento da resolução, ao fixar uma cor por vez no tipo da bandeira. Além disso, geralmente a proposta de sistematização leva também à generalização do resultado, conforme veremos na Figura 46.

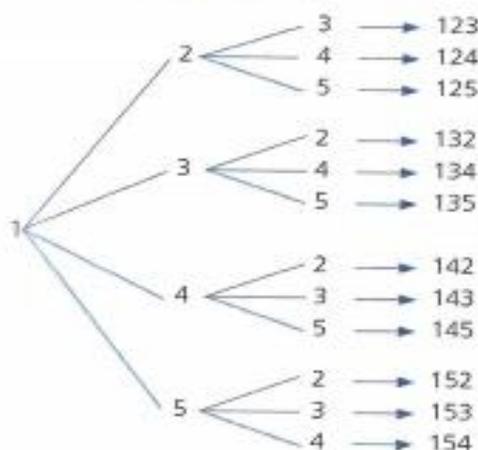
Figura 46. Proposta de percepção de regularidades para generalização na coleção 2AF

22. Na urna esférica, há cinco bolinhas numeradas de 1 a 5. Vamos sortear três delas, uma de cada vez. Mas atenção! A bolinha sorteada uma vez não volta à urna! Nesse sorteio, formaremos números de três algarismos.

Veja aqueles que começam com o algarismo 1:



AMILCAR MAZDARI



- Quantos são os números começados com 1? 12
- Quantos números começados com 2 podem ser formados no sorteio? 12
- No total, quantos números podem ser obtidos? 60

Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 8º ano, p. 181.

O exemplo nos mostra que além de sistematizar as possibilidades fixando um número por vez como inicial, os questionamentos levam a perceber uma regularidade nas repostas para cada caso e sem que seja necessário listar as possibilidades para cada número é possível generalizar e chegar ao resultado total. Este aspecto foi percebido em estudos de sondagem (PESSOA e BORBA, 2009) e trabalhado em intervenções com alunos do mesmo nível de ensino (PESSOA e

SILVA, 2012), obtendo avanços significativos na compreensão e no desempenho dos alunos.

8.3.2.2.5 Esgotamento de possibilidades na coleção 2AF

Ao solicitar as soluções dos problemas combinatórios, a coleção tende a questionar apenas a quantidade de casos possíveis, assim como que sejam indicados todos os casos, por meio de uma lista, árvore ou tabela. Contudo, muitas dessas atividades solicitam as duas formas de resposta para um mesmo enunciado, conforme a Figura 47.

Figura 47. Problema com solicitação de cada possibilidade e do total na coleção 2AF

36. O 7º ano B formou um time feminino de vôlei e precisa escolher as cores do uniforme. A camiseta pode ser amarela, cinza ou vermelha. Os *shorts* podem ser verdes, alaranjados ou azuis.

a)

Camiseta	
Shorts	amarela cinza vermelha
verdes	verde-am verde-cin verde-verm
alaranjados	alar-am alar-cin alar-verm
azuis	az-am az-cin az-verm



a) Faça no caderno a tabela que mostra todas as possibilidades de uniforme.
 b) Quantas são essas possibilidades? $3 \cdot 3 = 9$
 c) Se houvesse 6 cores possíveis para a camiseta e 8 cores para os *shorts*, como poderíamos contar as possibilidades de uniformes bicolores? $6 \cdot 8 = 48$

Fonte: Matemática Imenes e Lellis. Luiz Marcio Imenes e Marcell Lellis. Editora Moderna, 2012, 7º ano, p. 72.

A proposta das atividades leva o aluno ao esgotamento das possibilidades, pedindo sempre que se chegue ao total de casos possíveis, pensando assim no universo de possibilidades que cada situação pode ter. O questionamento de cada

caso e depois do total leva também a confrontação, por exemplo, de uma estratégia não formal e de um cálculo.

8.3.2.2.6 Orientações ao professor sobre a Combinatória na coleção 2AF

A coleção contempla em seus volumes orientações ao longo das atividades, com comentários sobre os invariantes dos problemas, sistematização e generalização de respostas para o docente. No manual do professor a coleção faz menção das orientações dos PCN para o trabalho com a Combinatória, chamando atenção para além dos aspectos já presentes ao longo dos livros, para o uso das estratégias não formais utilizadas pelos alunos, que no início resolvem por tentativas. Apresenta algumas formas de resolver um problema, realçando que a multiplicação é marcante em alguns problemas, ao tratar do produto cartesiano, contudo que é um erro achar que toda análise de possibilidades se relaciona necessariamente com essa operação. O mesmo é destacado ao uso dos padrões multiplicativos (o princípio fundamental da contagem), que exige atenção às características dos problemas para que haja sua utilização de forma correta. Contudo, o manual se limita a orientar o uso da tabela e da árvore de possibilidades, seguido dos padrões multiplicativos, uma vez que sabemos de outras estratégias que os alunos desenvolvem de forma bem sucedida, como a listagem e o desenho.

Neste sentido, o manual do professor da coleção atende aos principais elementos para o ensino da Combinatória neste nível de ensino, conforme as orientações curriculares e resultados de pesquisas recentes na área.

8.3.2.2.7 Síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e a coleção 2AF

No Quadro 10, a seguir, apresentamos uma síntese da relação entre os documentos oficiais, as pesquisas científicas e o livro didático sobre a Combinatória.

Quadro 10. Síntese da coleção 2AF em relação aos documentos oficiais e as pesquisas

Categoria	Documentos oficiais	Resultados de pesquisas	Livro didático
Abordagem sobre a Combinatória: O trabalho com este conceito desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.	BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012.	PESSOAS e BORBA, 2009.	Desenvolvem um trabalho sistemático em todos os anos escolares com ênfase de abordagem ao campo Tratamento da Informação, fazendo relação direta com a Probabilidade e a Estatística.
Significados combinatórios trabalhados nos livros: tipos de problemas combinatórios são explorados nos livros.	BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012.	VERGNAUD, 1986; PESSOA e BORBA, 2009.	Trabalha com todos os tipos de problemas, com diminuição do produto cartesiano, chamando atenção ainda para os invariantes das situações.
As diferentes representações simbólicas sugeridas nas atividades para a resolução dos problemas e na apresentação das atividades.	(BRASIL, 1998; PERNAMBUCO, 2012.	VERGNAUD, 1986.	Na apresentação das atividades algumas são apresentadas com desenho, árvore de possibilidades e tabela. A maioria dos problemas não sugere estratégia de resolução.
A sistematização como forma de organização da estratégia de resolução.		PESSOA e SILVA, 2012.	Presença marcante do incentivo a sistematização, com proposta de percepção de regularidades e generalização.
Esgotamento de possibilidades.		PESSOA e BORBA, 2009 e 2012; PESSOA e SANTOS, 2011 e 2012.	Solicita o esgotamento de possibilidades nas das atividades.

Desta forma, estes foram os principais resultados obtidos com a análise da abordagem da Combinatória nos documentos curriculares oficiais, resultados de pesquisas e livros didáticos do Ensino Fundamental, além das relações existentes entre os mesmos. No capítulo a seguir, apresentamos as conclusões da pesquisa com as principais contribuições do presente estudo.

9 CONSIDERAÇÕES

A pesquisa teve como objetivo analisar a abordagem da Combinatória em orientações curriculares de documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental e se há consonância entre as abordagens. Consideramos que estes três instrumentos se configuram como elementos importantes no âmbito educacional para os processos de ensino e aprendizagem e que possuem relação mútua nas suas construções. As pesquisas científicas proporcionam, por meio de uma metodologia precisa, descobertas que sobrepõem formas de intervir na realidade e contribuir para a melhoria da qualidade da educação, seja no ensino ou na organização escolar. Este mesmo elemento tem relação direta com a elaboração das orientações curriculares oficiais, transformando em documento os conteúdos e princípios básicos para a Educação. É no livro didático que tais construtos devem estar materializados, levando aos alunos um dos principais recursos do processo de ensino e aprendizagem de qualidade e seguindo padrões de elaboração comprovados nas pesquisas e orientados nos documentos oficiais.

Neste sentido, analisando as orientações para o Ensino Fundamental nos Parâmetros Curriculares Nacionais e nos Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco, ambos de Matemática, percebemos que no primeiro documento oficial para a Educação Básica que analisamos, os PCN, a Combinatória é indicada para ser trabalhada de forma contínua ao longo de todo o período de escolarização, desde o primeiro ciclo dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Já o documento que apresenta orientações específicas para o estado (PERNAMBUCO, 2012), aborda o conteúdo a partir do segundo ciclo. Em ambos a Combinatória é encontrada no trabalho com os campos dos Números e Operações, relacionada às estruturas multiplicativas, e no Tratamento da Informação, por meio de situações de contagem que mobilizem o pensamento estatístico e probabilístico. Segundo tais orientações, as situações abordadas devem envolver os quatro significados da Combinatória (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação) em todos os ciclos.

Percebemos ainda que tais documentos orientam a utilização de estratégias variadas de resolução de tais problemas, durante todo o período do Ensino Fundamental. De acordo com os mesmos, as fórmulas fazem parte de um momento de formalização que deve ser trabalhado apenas no Ensino Médio. Desta forma, é incentivado o uso de desenhos, listagem, árvores de possibilidades, tabelas e

quadros, e que no último ciclo os alunos sejam levados a compreender a resolução a partir do princípio multiplicativo, também conhecido como princípio fundamental da contagem. Neste sentido, a proposta de resolução de problemas nesta etapa da Educação Básica, propõe a mobilização de representações variadas diante das situações combinatórias, e que ao longo dos ciclos deve-se evoluir na formalização das estratégias para que numa etapa final, possa-se compreender melhor a utilização das fórmulas.

Em relação aos mesmos aspectos, as pesquisas educacionais na área apontam que desde o início da escolarização crianças são capazes de resolver problemas combinatórios, desenvolvendo estratégias variadas e válidas para representar o seu pensamento, apontando ainda a necessidade de um ensino sistemático que valorize o trabalho com os diferentes significados do conceito, investindo na explicitação dos invariantes implícitos nos mesmos, a partir de estratégias que os próprios alunos já desenvolvem, como a listagem e o desenho. Neste sentido, relacionamos estas contribuições com as orientações dos documentos, uma vez que mesmo com a presença da Combinatória para ser trabalhada em diferentes situações de contagem, os estudos apontam maior facilidade em resolver o produto cartesiano e nos demais significados dificuldades que perduram até mesmo no Ensino Médio. Isto nos leva a refletir que talvez esta variedade de situações não esteja sendo trabalhada de forma sistemática nestes ciclos. Por outro lado, as representações simbólicas utilizadas ao resolver tais problemas se relacionam de forma direta em ambos os elementos, documentos oficiais e resultados de pesquisas.

Analisando as coleções de livro didático, identificamos que o conteúdo é abordado desde os anos iniciais, conforme as orientações dos PCN (BRASIL, 1997) e como as pesquisas apontam já haver o desenvolvimento deste raciocínio (PESSOA e BORBA, 2009; MATIAS, SANTOS e PESSOA, 2011; PESSOA e SANTOS, 2011). Contudo, com relação à sua abordagem nos campos da Matemática, nos anos iniciais as coleções analisadas, em sua maioria tendem a trabalhar o conteúdo mais relacionado aos Números e Operações, fazendo pouca relação à Probabilidade e à Estatística. Já nos anos finais percebemos uma maior relação da Combinatória com o Tratamento da Informação. Porém, em ambos os ciclos é indicado o trabalho com a Combinatória nos dois campos da Matemática.

Com relação aos significados da Combinatória presentes nas coleções, identificamos que nos anos iniciais há predominância de produto cartesiano, seguido da combinação. A permutação e o arranjo são os tipos de problemas menos encontrados nestes ciclos. Ao tratar diretamente do conteúdo nas ideias da multiplicação, as coleções comentem o equívoco de relacionar apenas com as situações de produto cartesiano, o que pode se apresentar como um obstáculo didático para as crianças em relação ao pensamento combinatório, o limitando a este significado. Este fato pode estar relacionado com a maior facilidade das crianças em resolverem tal problema e maiores dificuldades nos demais conforme estudos (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011), mesmo as orientações curriculares explicitando o trabalho com os quatro significados. Além disso, quando as crianças passam por um ensino sistemático abordando o conceito em sua totalidade de significados, avançam significativamente na compreensão de todas as situações. Nos anos finais, as coleções apresentam, no geral, um maior quantitativo de situações-problema envolvendo o conteúdo analisado, além de variar mais nos tipos de significados combinatórios abordados, assim como orientam os PCN (BRASIL, 1998) e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012).

Com relação às representações simbólicas, as coleções se relacionam diretamente com as orientações curriculares analisadas, assim como com as pesquisas. Nos anos iniciais além de sugerirem em boa parte das atividades o uso de uma estratégia não formal para resolução, as coleções também as apresentam com diferentes representações junto aos enunciados das questões, no qual os desenhos, quadros e tabelas, por exemplo, podem servir como um apoio ao pensamento dos alunos na compreensão das atividades e para a mobilização de uma estratégia. Em ambos os ciclos, é perceptível na maioria das coleções a proposta de confrontação de estratégias, no qual o aluno é levado a compreender um mesmo problema por mais de uma forma de resolução. Nos anos finais, tais estratégias são frequentes na explicação inicial dos problemas, contudo o índice de sugestão e de apresentação junto ao enunciado é menor do que nos livros dos ciclos anteriores. Assim como nos documentos, os livros abordam no final do Ensino Fundamental a proposta de percepção do princípio fundamental da contagem como estratégia de resolução para problemas com um número maior de possibilidades, nos quais se torna inviável listar cada um dos casos possíveis.

Sobre este aspecto, percebemos uma gradação de complexidade nos problemas combinatórios ao longo do Ensino Fundamental. Nos anos iniciais, o conteúdo está mais relacionado a problemas a resolver, com número de possibilidades reduzido, que podem ser respondidos pela explicitação de cada caso combinado. Nos anos finais, percebemos que a abordagem é feita por meio de uma explicação inicial, apresentando o conteúdo de forma contextualizada, porém com situações mais complexas. Identificamos assim, a repetição de elementos, além de um maior número de possibilidades nos resultados, levando-se à percepção de padrões de resolução por meio do princípio fundamental da contagem.

Outros aspectos da abordagem da Combinatória também foram identificados nas coleções, como o uso da sistematização e o esgotamento de possibilidades nos problemas. Ambos foram identificados também em pesquisas (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011 e 2012; PESSOA e SILVA, 2012). Nos anos iniciais, de modo geral, as coleções não chamam atenção nas atividades para a sistematização da estratégia como forma de organização da mesma, a fim de que se possa registrar todos os casos possíveis, sem esquecer ou repetir algum. Contudo, as coleções em seus enunciados propõem o esgotamento de possibilidades, uma vez que predominantemente solicita o total de combinações possíveis. Este último aspecto também foi identificado nas coleções dos anos finais, contudo, a proposta de sistematização é mais explícita nestes ciclos, por meio das explicações e atividades que visam à fixação de um elemento inicial para o esgotamento de possibilidades com o mesmo e posteriormente dos demais. Além disso, propõem também a percepção de regularidades e generalização do resultado, para que não seja necessário listar todos os casos, como visto no estudo de intervenção de Pessoa e Silva (2012) com alunos do mesmo segmento.

Percebemos, ainda, que principalmente nos anos iniciais, as coleções não apresentam orientações ao professor sobre todos os aspectos do trabalho com a Combinatória, principalmente no que tange a seus significados e invariantes. Em ambos os ciclos, tais orientações se resumem mais ao uso de diferentes estratégias de resolução, e quando apresentam alguma característica dos problemas, é de apenas uma situação ou outra, que são mais frequentes nos anos finais. Neste sentido, acreditamos que as coleções poderiam orientar melhor o professor sobre o ensino deste conteúdo.

A partir das evidências apresentadas, o presente estudo pôde perceber importantes relações da abordagem da Combinatória nos três elementos investigados, documentos oficiais, pesquisa científica e livros didáticos do Ensino Fundamental, havendo assim, consonância dos mesmos em vários dos aspectos analisados, tais como abordagem ao longo de todo o segmento, trabalho com os diferentes significados envolvidos no conceito, apoio nas variadas estratégias de resolução apresentadas por alunos e orientadas para o ensino, a sistematização da estratégia e o esgotamento de possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, superando o pensamento do provável para o possível.

Percebemos ainda que muitas das orientações curriculares e resultados de pesquisas estão presentes nos livros didáticos analisados. Contudo, ainda se faz necessária mais atenção aos livros dos anos iniciais, no sentido de se trabalhar com a mesma importância os quatro significados que forma o conceito da Combinatória, além de relacioná-los de forma direta com este conhecimento e não apenas o produto cartesiano.

O presente estudo apresenta contribuições no sentido de analisar o processo de ensino e aprendizagem levando em consideração os principais elementos que norteiam o trabalho pedagógico de forma mútua e correlativa, uma vez que os fatores educacionais dificilmente podem ser analisados de forma isolada. Percebemos, assim, importantes evoluções nas propostas para o ensino de Combinatória, necessitando ainda de maior atenção na sua abordagem nos anos iniciais, no qual pesquisas futuras podem estar indo além investigando como o professor utiliza o livro didático como recurso de ensino para este conteúdo, especificamente se é feita distinção ao tratar das ideias da multiplicação como formas de pensar diferentes e se é proposta uma ampliação do que é encontrado nos livros, uma vez que foi percebido o trabalho neste recurso relacionando a Combinatória apenas ao produto cartesiano nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, pode-se investigar como os estudantes da Educação Básica resolvem as situações-problemas propostas pelos livros didáticos, investigando suas estratégias de resolução e percepção dos invariantes, assim como investigar como o professor analisa tais atividades presentes neste recurso de ensino em cada etapa de escolarização.

REFERÊNCIAS

ABREU, R., ALMEIDA, D.. Refletindo sobre a pesquisa e sua importância na formação e na prática do professor do ensino fundamental. **Revista entre ideias: educação, cultura e sociedade**, América do Norte, 13, jun. 2009. Disponível em: <http://www.portalseer.ufba.br/index.php/entreideias/article/view/3217/2655>. Acesso em: 29 Jul. 2015.

ALMEIDA, A. L. de ; FERREIRA, A. C. Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, IV, 2009, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto, 2009.

ALMEIDA e SILVA, M. P. de L. Palestra pronunciada no XXI Fórum Estadual da Undime, Seminário “Líderes em Gestão Escolar”. Fundação Lemann, 15/02/2012.

ALMEIDA, B.; SANTANA, M. P. A importância dos documentos oficiais da educação brasileira. 23 de abril de 2011. Disponível em: <http://moraesesantana.blogspot.com.br/2011/04/importancia-dos-documentos-oficiais-da.html>

AMARAL, R. As Contribuições da pesquisa na formação acadêmica. **Identidade Científica**: Presidente Prudente-SP, v. 1, n. 1, p. 64-74, jan./jun. 2010.

ANDRINI, A; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática**. Matemática do 1º ao 5º ano. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ARAUJO, J. **Tempo, desafio conceitual e didático: um estudo exploratório sobre orientações dos documentos curriculares e atividades de livros didáticos para alfabetização matemática**. Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2013.

ASSIS, A.; MAGALHÃES, S. Amor, Roma, Mora: o raciocínio combinatório nos livros didáticos do 2º ao 5º ano do ensino fundamental. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DE PERNAMBUCO , IV, 2012, Caruaru. **Anais...** Caruaru: EPEPE, 2012.

BATANERO, C.; NAVARRO-PELAYO, V.; GODINO, Juan. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. **Educational Studies in Mathematics** 32, 1997, p. 181-199.

BARRETO, F.; AMARAL, F.; BORBA, R. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. **Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia**. Recife: UFPE, 2007, v. 2, p. 1-21.

BELFORT, E. Reflexões sobre o Papel do Livro Texto em Matemática: Um Carcereiro ou um Bom Companheiro? In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2003, Blumenau. **Anais...** Blumenau: CIAEM, 2003.

BIEHL, J.; BAYER, A. A Escolha do Livro Didático de Matemática. In: ENCONREO GAÚCO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2009, Ijuí. **Anais...** Ijuí: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Rio Grande do Sul, 2009.

BOCCATO, V. R. C. Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação. **Rev. Odontol. Univ.** Cidade São Paulo, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 265-274, 2006.

BORBA, R.; BRAZ, F. M. T. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Fortaleza, III, 2012. **Anais...** Fortaleza: SIPEMAT, 2012.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: ENEM, 2013.

BORBA, R.; ARAÚJO, A.; BRAZ, F. A compreensão por alunos do ensino médio de problemas combinatórios condicionais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: ENEM, 2013.

BORBA, R.; ROCHA, C.; MARTINS, G.; LIMA, R. O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório. In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí, 2009. **Anais...** Ijuí: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Rio Grande do Sul, 2009.

BORBA, R.; PONTES, D.; SILVA, J.; MARTINS, M. N. Como etapas de escolha podem influenciar a resolução de problemas combinatórios. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: ENEM, 2013.

BROUSSEAU, Guy; Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, Jean. **Didáticas das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BRASIL, MEC. **Guia de livros didáticos: PNLD 1997**. 1ª a 4ª série. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1996.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 3º e 4º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, Matemática e Tecnologias. Ensino Médio**. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 2000.

_____. **PCN+ Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Ministério da Educação, Brasília, 2002.

_____. Guia de livros didáticos: **PNLD 2007 : Alfabetização Matemática e Matemática**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

_____. Guia de livros didáticos: **PNLD 2011 : Matemática anos finais do Ensino Fundamental**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010a.

_____. **Portal do Ministério da Educação**. Brasília, MEC/SEF, 2010b.

_____. Guia de livros didáticos: **PNLD 2012 : Matemática Ensino Médio**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

_____. Guia de livros didáticos: **PNLD 2013 : Alfabetização Matemática e Matemática**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2012.

_____. Guia de livros didáticos: **PNLD 2014 : Matemática anos finais do Ensino Fundamental**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013a.

_____. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Currículos e Educação Integral, 2013b.

CARVALHO, J. B.; LIMA, P. F. **Matemática**, v. 17, Brasília, 2010.

CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. **Média Aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado. Recife: UFPE, 2011.

CENTURION, M.; LA SCALA, J.; RODRIGUES, A. **Porta Aberta**. Matemática do 1º ao 5º ano. São Paulo: Editora FNT, 2011.

CERULLO, M. I.; CHACUR, R.; SHIRANHIGE, M. T. **Ponto de Partida**. Matemática do 1º ao 5º ano. São Paulo: Editora Sarandi, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Livro didático de matemática: uso ou abuso?** Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. p.83-86, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Ápis**. Matemática do 1º ao 5º ano. São Paulo: Editora Ática, 2011.

DEMO, Pedro. **Introdução à metodologia da ciência**. 2ª Edição. São Paulo. Editora Atlas S.A. 1987. P. 118.

DE TONI, Marijane.; FICAGANA, Nádia. Livro didático: deve ser adotado? In: ENCONTRO IBEROAMERICANO DE COLETIVOS ESCOLARES E REDES DE PROFESSORES QUE FAZEM INVESTIGAÇÃO NA SUA ESCOLA, 4, 2003. **Atas...** Rio Grande do Sul: imprensa Universitária da UNIVATES, 2003.

GATTI, Bernardete Angelina. **A construção da pesquisa em educação no Brasil**. Brasília: Plano Editora, 2002. Série Pesquisa em Educação, v. 1.

GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V.; CAVALCANTI, M. e MARQUES, M. Análise das atividades sobre representações gráficas nos livros didáticos de matemática. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II, 2003, Recife **Anais...** Recife – UFRPE: SIPEMAT, 2008.

GUIRADO, João Cesar; CARDOSO, Evelyn. Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX, 2007, Paraná. **Anais...** Paraná: EPEM, 2007.

HOMA, Agostinho Iaquan. **Testes adaptativos no padrão SCORM com Análise Combinatória**. Monografia de Especialização. Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), 2011.

IMENES, L.; LELLIS, M. **Matemática Imenes e Lellis**. Matemática do 6º ao 9º ano. São Paulo: Editora Moderna, 2012.

JUSTINO, Marinice Natal. **Pesquisa e recursos didáticos na formação e prática docentes**. Curitiba: Ibpex, 1ª ed. 2011.

LOPES, Celi Espasandin; COUTINHO, Silva. Leitura e escrita em educação estatística. In: LOPES, Celi Espasandin; NACARATO, Adair Mendes. (Org.). **Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidade**. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2009.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2005.

MARTINS, Glauce. **Livros didáticos na alfabetização de jovens e adultos: um estudo sobre as estruturas multiplicativas**. Dissertação. Mestrado em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2010.

MATIAS, Patrícia; SANTOS, Missilane; PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. In: VIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, VIII, 2011. **Anais...** Recife, CIAEM, 2011.

MERAYO, Felix. **Matemática Discreta**. Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

MOLINA, O. **Quem engana quem? Professor x livro didático**. Vol. 2. ed. Campinas, SP: Ed. Papirus, 1988.

MORGADO, Augusto; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João; PINTO DE CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graffex, 1991.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, João Batista; GUIMARÃES, Sônia Dantas. ; BOMÉNY, Helena Maria. **A política do livro didático**. São Paulo: Summus, Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1984.

OLIVEIRA, Eliane; COUTINHO, Cileda. Combinatória nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: uma análise do PNL D 2013. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: ENEM, 2013.

PERNAMBUCO. **Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco**. Secretaria de Educação do Estado. Pernambuco, 2012a.

PERNAMBUCO. **Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco**. Secretaria de Educação do Estado. Pernambuco, 2012b.

PESSOA, Cristiane. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. Tese. Doutorado em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

_____. **O Ensino de Combinatória no Ciclo de Alfabetização**. In: Carlos Roberto Vianna; Emerson Rolkouski. (Org.). Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Educação Estatística. 1ª ed. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional, 2014, v. 1, p. 39-50.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II, 2003, Recife **Anais...** Recife – UFRPE: SIPEMAT, 2008.

_____. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

_____. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1. 2010. Disponível em: <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4> Acesso em: 10 ago. 2013.

_____. Problemas combinatórios: estratégias e respostas de alunos da Educação Básica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2012, Petrópolis. **Anais...** Petrópolis: SIPEM, 2012.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2011, Recife. **Anais...** Recife: CIAEM, 2011.

_____. Listagem, invariantes, sistematização e generalização: um caminho para o ensino de combinatória em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. In: Simpósio Internacional de Educação Matemática, III, 2012, Fortaleza. **Anais...**Fortaleza: Sipemat, 2012.

PESSOA, Cristiane; SILVA, Monalisa. Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental. In: Simpósio Internacional de Educação Matemática, III, 2012, Fortaleza. **Anais...**Fortaleza: Sipemat, 2012.

PINHEIRO, Carlos; ABAR, Celina; SÁ, Pedro. Aprendizagem de análise combinatória por meio da resolução de problemas como ponto de partida. In: III Simpósio Internacional de Educação Matemática, Fortaleza. **Anais...**Fortaleza: Sipemat, 2012.

ROJO, R. **Recomendações para uma política e materiais didáticos**. MEC: Brasil, 2005.

ROSA, Heitor. Tópicos em resolução de problemas de combinatória. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2004, Recife. **Anais...** Recife: ENEM, 2004.

SÁ, Pedro Franco de; A resolução de problemas: concepção e sugestões para aula de Matemática. **Traço: revista do centro de ciências exatas e tecnologia**. Belém: UNAMA, v.7, n.16, p. 63-77, 2005.

SALOMON, Délcio Vieira. **Como fazer uma monografia**. 10. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001. 412 p.

SILVA, Monalisa; PESSOA, Cristiane. Raciocínio Combinatório: Estado da arte em eventos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**. v. 17, n. 14, pp. 670-693, 2015.

SILVA, M. B.; PONTES, D.; TEIXEIRA, M. J. Princípio Fundamental da Contagem: A compreensão dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre os problemas de combinatória. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: ENEM, 2013.

SILVA, J. da; SPINILLO, A. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, Recife. **Anais...** Recife: CIAEM, 2011.

SILVA, Pablo Egídio Lisboa da. **Problemas Combinatórios Condicionais: um olhar para o livro didático do Ensino Médio**. Dissertação: Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2015.

SOUZA, M. H.; SPINELLI, W. **Asas para Voar**. Matemática do 1º ao 5º ano. Editora Ática: São Paulo, 2011.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. Os Blocos Lógicos e o Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório. . In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: ENEM, 2013.

VEIGA-NETO, Alfredo. **De geometrias, currículo e diferenças**. Campinas: CEDES, Educação e Sociedade, a. XXIII, n.79, 2002. p.163-186.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics: Concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

_____. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1, 1986, pp. 75-90.

_____. La théorie de champs conceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques**, vol 10, n°2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

_____. **El niño, las matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.