UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

ITATIANE BORGES LIMA

AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: COMO ESTÃO OCORRENDO

RECIFE

2016

ITATIANE BORGES LIMA

AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: COMO ESTÃO OCORRENDO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

RECIFE
2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

L732a Lima, Itatiane Borges.
Aulas de combinatória no ensino médio: como estão ocorrendo / Itatiane Borges Lima. – 2016.
114 f. ; 30 cm.
Orientadora: Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.
Inclui Referências.

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Prática de ensino. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Pessoa, Cristiane Azevêdo dos Santos. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2016-25)

ITATIANE BORGES LIMA

AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: COMO ESTÃO OCORRENDO

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof.ª Dr.ª Cláudia Roberta de Araújo Gomes (Examinadora Externa)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof.ª Dr.ª Fátima Maria Leite Cruz (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Aprovado em: 01/03/2016

Recife, 01 de Março de 2016

AGRADECIMENTOS

A Deus por permitir viver a vida e aproveitá-la com tudo de mais lindo que ela tem para oferecer.

À minha esposa Nairany Arruda de Souza, sou grata pela paciência em me aguardar, interesse em me ajudar e apoio que me destes. Saiba que meu esforço é pensando em nós.

Ao meu sobrinho Santiago, que mesmo sem entender, tem feito dos meus dias, dias felizes. Nada é mais perfeito que a inocência de uma criança.

À minha irmã Izauriana Borges, por ter me apresentado o EDUMATEC e pela torcida.

Aos meus primos, Flávia e Jorge, obrigada pelo carinho.

À minha querida professora Cristiane Pessoa, que sempre me orientou com muita paciência e sabedoria. Você é uma das partes mais importante nesse trabalho. Você é uma fofa.

Às professoras Cláudia de Araújo e Fátima Cruz por aceitarem compor a banca, obrigada pelas contribuições.

À professora Gilda Guimarães, pelos ensinamentos.

Às professoras Rute Borba e Rosinalda Teles, que acompanharam esta caminhada e que em determinado período me deram apoio.

Às minhas amigas EDUMATEQUIANAS, Paula Cabral, Monalisa Cardoso e Cláudia Albuquerque, vocês pousaram a alegria no meu coração. Obrigada por me ouvirem.

Ao grupo de estudo GREDAM, Adry, Anaelize, Jesus, Pablo, Mona, Thalita, Andréa, Inglid e Josenir, pelo apoio e contribuições.

Aos amigos da turma de mestrado e doutorado, Anitta, Tiane, Ju Azevedo, Rita, Natália, Valdir, Ju, Fabiana e Priscila, pelas conversas e carinho.

A minha amiga BJ, Eunice.

Aos professores participantes da pesquisa, pela generosa contribuição.

“É preciso força pra sonhar e perceber
Que a estrada vai além do que se vê”

Marcelo Camelo (Los Hermanos)
Trecho da música: Além do que se vê

RESUMO

O presente trabalho teve o objetivo de analisar o ensino de Combinatória pelos docentes em turmas de 2º ano de Ensino Médio. Para tanto, apoiou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986) e na Teoria dos Conhecimentos Docentes de Professores que Ensinam Matemática, de Ball, Thames e Phelps (2008). O estudo foi realizado com dois professores formados em Licenciatura em Matemática, com o intuito de analisar os tipos de situações trabalhadas, os invariantes explicitados ao ensinar, as representações utilizadas e estimuladas durante as aulas e investigar o Conhecimento Pedagógicos do Conteúdo dos professores. Foram realizadas entrevistas iniciais, observações e videografias das aulas e entrevista final. As observações e videografias se deram durante todo o planejamento/aulas executadas pelos professores. Também foram solicitadas na entrevista final possibilidades de trabalhos com o conteúdo de Combinatória em diferentes anos e de que forma. Os resultados apontam que há dificuldades dos professores quanto ao trabalho com as situações e com os invariantes. Os professores não trabalham os invariantes de forma explícita, há dificuldades quanto à explicação e organização das características dos problemas, pouco exploram diferentes representações e as tentativas que fizeram não foram esgotadas, não possibilitando encontrar os resultados dos problemas, assim a resolução do problema era direcionada à utilização da fórmula. Identificamos que houve priorização das fórmulas pelos professores. Em relação aos Conhecimentos Pedagógicos dos Conteúdos, podemos afirmar que os professores, em certa instância, possuem esses conhecimentos, mesmo que algumas vezes não estejam esquematizados, metodologicamente falando, para a utilização em sala, ou seja, parece que precisa de um investimento maior por parte dos professores em relação aos seus conhecimentos. Há evidências da necessidade de perceber sobre a importância do trabalho com a Combinatória a partir de diferentes significados, representações e invariantes. Percebe-se que para que o professor possa superar suas dificuldades relativas a seu trabalho, deve buscar atualizações quanto à evolução de determinados conteúdos e sobre as mudanças pedagógicas.

Palavras-chave: Ensino Médio; Combinatória; Aulas; Prática docente.

ABSTRACT

This research was aiming to analyze the Combinatorial teaching by teachers in the 2nd year of High School classes. To this end, leaned on the Conceptual Fields Theory of Vergnaud (1986) and Theory of Knowledge Teacher Teachers who teach mathematics, Ball, Thames and Phelps (2008). The study was conducted with two teachers trained in Mathematics degree, in order to analyze the types of worked situations, the invariant explicit in teaching, representations used and stimulated during classes and investigate the Pedagogical Content Knowledge of teachers. Initial interviews, observations and videographies classes and final interview were conducted. Observations and videographies be given throughout the planning / classes performed by teachers. Also they were asked in the last interview about possibilities for working with the contents of Combinatorics in different years and how to work for. The results show that there are difficulties of teachers to working with the circumstances and within the invariants. Teachers do not work the invariant explicitly. There are difficulties how to explain and organize the characteristics of the problems, rather explore different representations and the attempts made have not been exhausted, enabling not find the results of problems, so the resolution of the problem was targeted using the formula. We suppose they were prioritizing formulas by teachers and regarding the pedagogical knowledge of the contents, we can say that teachers, in some instance, have such knowledge, even if sometimes are not outlined, methodologically speaking, for use in the classroom. It seems teachers need more investment in relation to their own knowledge. There is evidence of the need to realize the importance of work and Combinatorics from different meanings, representations and invariants. It is noticed for the teacher to overcome their difficulties relating to their work, should search for updates on the evolution of certain content and pedagogical changes.

Keywords: High School; Combinatorics; Classes; Teaching Practice.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Existem discussões na área de ensino sobre formação de professores e dentro dessas há desdobramentos tais como a prática e os conhecimentos envolvidos na profissão, por exemplo. Os saberes e os conhecimentos que os professores têm e vão acumulando, fazem parte destas reflexões e consideramos importante levantar questões que possam ajudar a pensar sobre a prática docente e relacioná-la à formação. Mesmo com tantas discussões acerca dessas temáticas, ainda perduram muitos questionamentos por parte daqueles que pesquisam e estudam sobre o assunto, principalmente sobre a formação que envolve a Licenciatura em Matemática, já que esta é uma área em que perduram muitos mitos e por se tratar de uma disciplina que gera dificuldade de aprendizagem para alguns estudantes.

Para Curi (2005), ainda que pesquisas sobre a formação de professores representem um avanço muito importante, precisam ser aprofundadas em suas especificidades, como é o caso do nível de escolaridade em que o profissional professor atua e a(s) disciplina(s) que ensina. Sabemos que cada ano escolar tem conteúdos específicos que os caracterizam. A forma como o professor ensina está, em certa medida, relacionada com a sua formação e suas experiências pessoais e profissionais.

A discussão de Curi reforça nossa opção por essa pesquisa em debater um conteúdo específico, num determinado ano de escolarização. O presente trabalho está inserido no campo de pesquisa sobre formação de professores e os conhecimentos matemáticos associados à prática docente escolar. Pretende-se analisar a prática docente de professores formados em Licenciatura em Matemática ministrando aulas de Combinatória para turmas do 2º ano do Ensino Médio (E.M.).

O conteúdo explorado neste trabalho é importante, pois percorre várias outras áreas do campo da Matemática. Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001) problemas combinatórios e técnicas de resolução tiveram implicações profundas em probabilidade, teoria dos números, teoria de autômatos, de inteligência artificial, pesquisa operacional, geometria combinatória e topologia. Acreditamos que a Combinatória é um campo da Matemática importante para desenvolver o raciocínio lógico. O que define a Combinatória, segundo Pessoa e Borba (2009), é a contagem de elementos ou de grupos de elementos que satisfaçam critérios específicos, sem ter que obrigatoriamente contar os elementos um a um.

Considerando diversas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Combinatória, percebemos a necessidade de um estudo que objetiva analisar aulas de professores formados em Licenciatura em Matemática que ministram o conteúdo de Combinatória no 2º ano do Ensino Médio, ano escolar em que tradicionalmente trabalha-se a Combinatória de maneira formal. Pesquisas anteriores (ROCHA, 2011; ASSIS, 2014) apresentam que professores que não trabalham diretamente com a Combinatória (professores de anos iniciais, por exemplo) têm dificuldades em compreender relações combinatórias, porém acreditamos que professores formados em Licenciatura em Matemática e que atuam no 2º ano do Ensino Médio poderão nos fornecer bons exemplos de aulas, devido ao possível conhecimento do professor em relação ao conteúdo e ao ensino. Nesse sentido, nossa investigação poderá gerar novas discussões sobre o ensino da Combinatória.

Em relação ao raciocínio combinatório[1], os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam para o 1º e 2º ciclos "levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio fundamental da contagem" (BRASIL, 1997, p. 57) e para o 3º e 4º ciclos, no que se refere aos problemas de contagem, "o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para a aplicação no cálculo de probabilidades" (BRASIL, 1998, p.52). Nesse sentido, é importante destacar que há a exigência desse trabalho desde os anos inicias do Ensino Fundamental.

Sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), especificamente sobre Combinatória, o documento aponta quais habilidades deverão ser desenvolvidas nos estudantes:

> Habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideais de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (PCNEM, 2002 p.44).

Considerando a proposta do PCNEM como base para o ensino de Combinatória, seria importante o professor trabalhar a aplicabilidade desse conteúdo a questões do dia a dia, a partir de estímulos de diferentes resoluções das situações-problema fornecidas pelo professor com a finalidade de desenvolver cada vez mais o raciocínio combinatório.

---

[1] De acordo com Pessoa e Borba (2010), considera-se *raciocínio combinatório* um tipo de pensamento sobre tal. *Análise combinatória* estuda os agrupamentos a partir de alguns critérios e *Combinatória* é o conteúdo da Matemática e está diretamente associado às situações de *arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano.*

De acordo com Pessoa e Borba (2009), apesar das recomendações dos PCN, na prática de sala de aula, como discutido anteriormente, a maioria dos problemas de raciocínio combinatório (arranjo, combinação e permutação) é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio. Apenas o do tipo produto cartesiano é trabalhado explicitamente nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A partir da compreensão da Combinatória, da formação necessária ao professor para o seu trabalho e o que trazem os PCN como requisitos básicos aos alunos do Ensino Médio, com o intuito de apurar a nossa hipótese, pretendemos responder à questão: como está ocorrendo o ensino de Combinatória no 2º ano E.M.? Que conhecimentos sobre Combinatória podem ser identificados nos professores em situação de aula?

Nessa pesquisa buscamos analisar o conteúdo de Combinatória trabalhado por professores tendo como base o foco nas situações, nos invariantes e nas representações simbólicas[2], assim, de modo mais específico, identificar as situações (tipos de problemas) combinatórias trabalhadas por professores do Ensino Médio, analisar os invariantes explicitados por professores ao ensinar Combinatória e analisar as representações utilizadas e estimuladas por professores ao ensinarem Combinatória e por fim será analisado o Conhecimento pedagógico do conteúdo[3].

Na seção que se trata sobre Conhecimentos Docentes desse trabalho apresentamos uma breve discussão sobre a relação entre a formação de professores, saberes e Conhecimentos Docentes em seus aspectos gerais. Dedicamos uma parte para apresentar o estudo Shulman (1986) sobre Conhecimentos Docentes e o estudo de Ball, Thames e Phelps (1991, 2008) sobre conhecimento de professores que ensinam Matemática. Os estudos de Ball e seus colaboradores (1991, 2008) serão o referencial teórico que se serve de suporte para o estudo, assim como o estudo de Vergnaud (1986) que será disposto na parte que trata sobre Combinatória: origem e formação de conceitos.

Detalhamos a segunda parte do referencial teórico na porção 3 desse trabalho. Nele nos debruçamos com o intuito de traçar a origem da Combinatória, de discutir sobre a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986), que também dá embasamento ao presente estudo. Nesse corte discutiremos sobre a formação de conceitos, sobre os diferentes problemas multiplicativos segundo Vergnaud e sobre a Combinatória. Será apresentado o

---

[2] *Situações*, *invariantes* e *representações* simbólicas formam um tripé que, segundo Vergnaud (1986), constituem o conceito. Essa formação será discutida mais adiante, no 2º capítulo dessa dissertação.

[3] O *Conhecimento pedagógico do conteúdo* é um dos saberes docentes discutidos por Shulman (1986) e retomados por Ball, Thames e Phelps (2008) e será discutido no 1º capítulo dessa dissertação.

estudo que defende uma organização única que envolve os quatros tipos de situações combinatórias (arranjo, permutação, produto cartesiano e combinação) desenvolvido por Pessoa e Borba (2007).

Na seção 4 apresentamos estudos anteriores referentes ao processo de ensino-aprendizagem da Combinatória nos diferentes níveis de ensino e estudos de investigação sobre a Combinatória relacionada a saberes e conhecimentos docentes.

Na sequência abordamos o procedimento metodológico adotado na pesquisa. Nessa 5 parte apresentamos, com detalhe, o proceder do estudo.

A discussão dos resultados da pesquisa será apresentada na sexta seção. As análises foram feitas a partir das observações e das falas dos professores que foram coletadas durante as videografias das aulas e entrevistas. Assim, nos apoiamos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), posicionamento da Combinatória desenvolvido nos estudos de Pessoa e Borba (2009) e sobre os conhecimentos de professores que ensinam Matemática nos estudos de Ball, Thames e Phelps (1991, 2008).

Por fim, nas considerações, seção 7, apresentamos alguns pontos que nos foram revelados em decorrência da pesquisa relacionados aos Conhecimentos do conceito e Conhecimento pedagógico do conteúdo de Combinatória que os professores apresentaram nos momentos de suas práticas. Apontamos algumas possibilidades para estudos futuros.

2 CONHECIMENTOS DOCENTES

2.1 Formação de professores: Saberes e Conhecimentos Docentes

As discussões sobre formação de professores, saberes e conhecimentos docentes parecem ser temas distintos, mas a partir do momento que existe a necessidade de se debruçar sobre cada um e tentar compreendê-los, percebe-se o quanto é necessário tratar dessa relação para, então, se dedicar a importância que deve ser dada em como os professores se apropriam dos conhecimentos que terão que aprender para, posteriormente, ensinar.

Segundo Nóvoa (1992) a formação do professor não se constrói por acumulações (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas e de reconstrução permanente de uma identidade pessoal. Por isso é tão importante o saber advindo da experiência. Ou seja, refletir sobre esse saber é levar em consideração os saberes acumulados na profissão de ensinar, o que não invalida os saberes adquiridos/construídos nos cursos de formação. Nóvoa (1992) busca trazer o percurso histórico do processo da formação docente, aponta a necessidade de se pensar a formação de professores. Levando em consideração a profissão de professor, ele tenta estimular o pensamento para diferentes maneiras e estratégias para a formação docente. Para ele:

> É preciso trabalhar no sentido da diversificação dos modelos e das práticas de formação, instituindo novas relações dos professores com o saber pedagógico e o científico. A formação passa pela experimentação, pela inovação, pelo ensaio de novos modelos de trabalho pedagógico. E por uma reflexão crítica sobre a sua utilização. A formação passa por processos de investigação, discretamente articulados com suas práticas educativas. (NÓVOA, 1992; p. 16)

O autor acredita que dessa forma poderá haver mudança na escola, a partir da mudança na formação dos professores, a qual depende também da transformação da prática pedagógica na sala de aula.

Pode-se afirmar que o tempo de profissão também é um componente no processo de consolidação de ser professor. Segundo Tardif e Raymond (2000) os saberes que fundamentam o ato de ensinar provêm de fontes diversas (formação inicial e continuada, currículo e socialização escolar, conhecimento das disciplinas a serem ensinadas, experiências da profissão, cultura pessoal e profissional, aprendizagem com os pares etc.).

Considerando o saber acumulado durante o percurso do tempo de ensino, é inevitável afirmar que os cursos de licenciatura são parte inicial do processo de formação docente. Em se tratando desses cursos, especificamente o de Matemática, acredita-se que há uma valorização excessiva dos conteúdos matemáticos em detrimento das discussões pedagógicas. Segundo Cury et al (2002) os cursos da área de Matemática, dependendo da época em que foram criados, apresentam estruturas diversas, mas é mais comum haver disciplinas ligadas à educação somente nos últimos semestres. Essas disciplinas ligadas à educação só apareceram após a Lei de Diretrizes de Base (LDB) 4024 no ano de 1961, a partir da qual foram adicionadas ao currículo as disciplinas de Psicologia da Educação, Didática e Práticas de Ensino.

Para Cury et al (2002) essa valorização excessiva dos conteúdos matemáticos é ligada à ideia que circula na sociedade, mais especificamente aos mitos sobre a Matemática como matéria difícil. Isso se torna um processo cíclico sobre os mitos que envolvem a Matemática, opiniões que vão influenciar o aluno, que futuramente se tornará professor.

Tardif (2008) acrescenta aos saberes experienciais do professor a característica de se fundamentar tanto na ação de ensinar quanto nas preconcepções do ensino e da aprendizagem escolar herdadas da história escolar.

A ideia de Cyrino (2004) compatibiliza com a de Tardif (2008), pois para ela a formação do professor de Matemática não se inicia no momento em que ele é admitido no curso de Licenciatura em Matemática, pois o professor tem contato com aspectos os quais caracterizam a profissão docente muito antes de iniciar o curso de Licenciatura; ou seja, é fator de influência na formação de um professor toda experiência por ele vivida ao longo de seu período escolar. Pode-se se pensar que professores podem reproduzir ações e comportamentos de docentes que marcaram algum período de sua vida durante o processo de escolarização, reproduzindo tanto formas de ensino quanto falas, sem refletir se aquelas ações herdadas serão positivas ou não.

O estudo de Curi (2000) permitiu delinear um perfil de professores de Matemática, suas concepções em relação à área e seu ensino e competências da profissão. A pesquisa foi realizada com um grupo de 377 professores durante o ano de complementação para a Licenciatura Plena de Matemática, especialmente planejada para professores que já lecionavam matemática em escolas públicas. O resultado da pesquisa mostrou a necessidade de programar mudanças tanto na formação inicial quanto na continuada, tanto no campo específico como no campo educacional. As ideias de Curi (2000) identificam-se com a de Nóvoa (1992) considerando que deva haver modificações no processo de formação tendo em vista todo o contexto de profissionalização docente, em uma perspectiva centrada no terreno profissional.

Considerando uma gama diversificada de autores que vêm debatendo e levantando questões sobre o processo de formação, é evidente que essa discussão é fundamentalmente importante para a escola. O processo de formação de professores vai se modificando por motivos diversos, porém as pesquisas e debates podem contribuir para a melhoria. Além desses saberes associados à prática docente escolar, existem outras reflexões importantes sobre os saberes, na qual Shulman desenvolveu um estudo que aponta uma seleção de conhecimentos que os professores devem ter. Nessa perspectiva em que as discussões são importantes para avançar o ensino escolar, nos debruçamos na seção seguinte tratando sobre a teoria de Shulman (2005) que preconiza a teoria de Ball, Thames e Phelpes (2008), pois esses estudos trazem uma nova perspectiva sobre a formação do professor, desde o conhecimento do conteúdo e o processo que envolve os elementos didáticos.

2.2 Conhecimentos Docentes segundo Shulman

Sabemos que existem elementos necessários para poder realizar a atividade de ensinar. Shulman (2005) identificou a necessidade de uma base de Conhecimento para professores (*knowledge base for teaching*). O autor acredita que o processo de ensino se inicia no momento em que o professor entende o que tem que aprender e como deve ensinar. Seus estudos deram grandes contribuições para as pesquisas sobre prática docente. Shulman discute a flexibilidade na atuação do professor, a qual vai ocorrer de acordo com a dificuldade, a natureza do assunto, a capacidade do aluno e os objetivos educacionais.

Ball, Thames e Phelpes (2008) acreditam que a contribuição central dos trabalhos de Shulman e seus colaboradores era de retificar o estudo sobre o conhecimento de professores, direcionando a atenção para o papel do conteúdo em situação de ensino. A contribuição seguinte focava em impulsionar o conhecimento do conteúdo, levando em consideração a profissionalização. Pode-se notar que a teoria de Shulman tinha como objetivo colocar em destaque a importância do conhecimento do conteúdo por parte dos professores.

Em seus trabalhos Shulman organizou categorias, entre elas as que tratam sobre o Conhecimento do conteúdo e o Conhecimento pedagógico. As categorias organizadas por Shulman (2005) são:

> Conhecimento pedagógico geral, especialmente tendo em conta esses princípios e estratégias de gestão e organização do tipo que ultrapassam o âmbito do sujeito. Conhecimento do currículo, com maestria especial de materiais e programas que servem como "ferramentas do comércio" de professor. Conhecimento pedagógico do conteúdo, que representa a mistura de matéria e didática para a compreensão de como determinados temas e questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos alunos, e expostos a seus ensinamentos. Conhecimento do conteúdo inclui conhecimento do assunto e sua estrutura. Conhecimento dos alunos e suas características. Conhecimento dos contextos educativos, que vão desde funcionamento do grupo ou classe, gestão e financiamentos escolares, para o caráter de comunidades e culturas. Conhecimento dos objetivos, metas e valores educativos e suas bases filosóficas e históricas. (SHULMAN, 2005, p. 11).[4]

O Conhecimento pedagógico compreende não só o que se refere ao saber da matéria, mas, em especial, ao gerenciamento que o professor faz em sala de aula que não se limita aos conteúdos a serem trabalhados, há a presença de estratégias para gerir o conteúdo. O Conhecimento do currículo é aquele que o professor tem sobre o roteiro do ensino da disciplina, dominando cada conteúdo a ser trabalhado em diferentes níveis de escolaridade.

O autor construiu essa base de ensino, com o intuito de reformar o que estava posto, pois anterior à ideia de Shulman, as ideias de formação de professores estavam centradas em habilidades básicas, como conhecimento de conteúdo e competências para o ensino. Shulman estava preocupado com os elementos necessários para que o professor pudesse ensinar como a aplicação dos conteúdos de forma instrutiva, e por isso se concentrou em apontar na base de ensino o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Dentre os conhecimentos apontados por Shulman, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo recebeu mais destaque.

---

[4] Tradução nossa. Em inglês: *"General pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter. Knowledge of learners and their characteristics. Knowledge of educational contexts, ranging from workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures. Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds. Content knowledge. Curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers. Pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding."*

Esse conhecimento centrava-se no aluno, pois se baseava na forma mais eficiente de ensinar, desde explicações, exemplos e formulação do conteúdo para que o aprendizado se tornasse mais acessível. Shulman (2005) selecionou o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo como a categoria que mais evidencia a maneira que o professor pensa e compreende um conteúdo, é a maneira que o professor ensina sua disciplina. Mesmo com essa base de conhecimento para o ensino, Shulman não descartava o fato de que a aprendizagem, em último momento, era responsabilidade do aluno.

Notamos a importância dessas categorias de conhecimentos para a prática de ensino, pois abandona a ideia consistente de que o professor o qual sabe ensinar é aquele conhecedor do conteúdo com profundidade, ou seja, aquele que tem o conhecimento teórico sobre sua disciplina. Ensinar passa a ser a habilidade a partir do conhecimento já existente sobre o conteúdo com o desenvolvimento na prática. Assim finda uma melhor compreensão sobre os aspectos que envolvem a teoria e a prática, proporcionando modificações e avanços quanto ao ensino.

A teoria desenvolvida por Shulman (1986, 1987) sem dúvida contribuiu e continua contribuindo para desmistificar elementos que norteiam as práticas dos professores de forma geral. Serviu também de aporte teórico para grandes pesquisadores do ensino da Matemática. Ball, Thames e Phelps (2008) baseados nos estudos de Shulman (1986, 1987) questionaram mais sobre os conhecimentos de professores que ensinam Matemática, desenvolveram um estudo sobre conhecimento matemático para o ensino - *mathematical knowledge for teaching.*

2.3 Conhecimentos Docentes Segundo Ball, Thames e Phelps

Nos estudos de Shulman nos quais ele relacionou os vários tipos de conhecimentos, base para o ensino de todas as áreas, Ball, Thames e Phelpes (2008) identificaram a ausência de alguns pontos. A partir disso foi vista a possibilidade de ampliar para áreas mais especificas de ensino, assim debruçaram o olhar para o ensino da Matemática. Ball, Thames e Phelpes (2008) levantaram algumas questões: (1) se o professor precisar saber mais, o que eles precisam saber e de que forma eles precisam saber essa Matemática para saber usá-la? (2) o que os professores precisam saber sobre a Matemática; como e onde os professores usam tal conhecimento matemático na prática?

A partir das análises das demandas para o ensino da Matemática, Ball, Thames e Phelpes (2008) apontam que as categorias de Conhecimento do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo definidas por Shulman podem ser subdivididas em Conhecimento Comum do Conteúdo e Conhecimento Especializado do Conteúdo, por um lado, e Conhecimento do Conteúdo e os Alunos e Conhecimento de Conteúdo e Ensino, no outro. Ainda indicam uma série de outros domínios de conhecimentos para o ensino da Matemática.

Dividido em duas partes maiores a partir das categorias de Shulmam, Conhecimento do Conteúdo (*content knowledge)* e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo *(pedagogical content knowledge)* dentro dessas duas categorias, organizaram um refinamento e subdividiram domínios de conhecimentos matemáticos para o ensino. Para Ball, Thames e Phelpes (2008) as categorias Conhecimento do Conteúdo são:

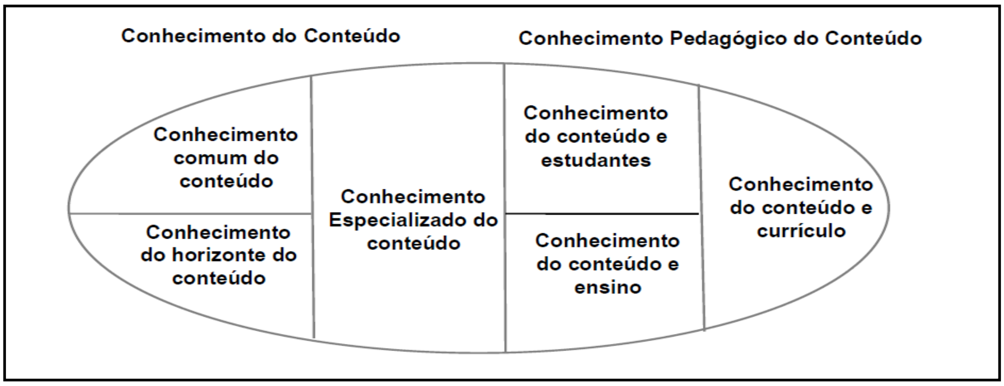
- Conhecimento Comum do Conteúdo *(Common Content Knowledge);*
- Conhecimento Especializado do Conteúdo (*Specialized Content Knowledge*);
- Conhecimento Horizontal do Conteúdo (*Horizon Content Knowledge).*

Para Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, os domínios se organizam em:

- Conhecimento do Conteúdo e Alunos *(Knowledge of Content and Students);*
- Conhecimento do Conteúdo e Currículo *(Knowledge of Content and Curriculum);*
- Conhecimento do Conteúdo e Ensino *(Knowledge of Content and Teaching*).

Esse refinamento pode ser visto no diagrama a seguir.

Figura 1– Diagrama dos Domínios do Conhecimento Matemático para o ensino.



Fonte: Ball, Thames e Phelps 2008, p.404.

A partir das categorias de Conhecimento de Conteúdo e Conhecimento Pedagógico de Conteúdo de Shulman, Ball, Thames e Phelpes (2008) propuseram a subdivisão em Conhecimento Comum do conteúdo e Conhecimento Especializado do conteúdo. Porém esses estudiosos se detêm em provar a importância sobre o Conhecimento Especializado do conteúdo.

Esse diagrama concernente ao Conhecimento do Conteúdo era inicialmente apresentado com duas subdivisões: Conhecimento Especializado do conteúdo e Conhecimento Comum do Conteúdo. Posteriormente surge outro conhecimento, o Conhecimento Horizonte do Conteúdo. Para melhor compreensão sobre os diferentes conhecimentos apresentados no diagrama acima, organizamos, no Quadro 1, as categorias, o tipo de conhecimento e o significado do domínio de cada um deles.

Quadro 1 - Categorias dos domínios, tipos de conhecimento e domínio proposto por Ball, Thames e Phelpes (2008)

Categorias	**Tipo de conhecimento**	**Domínio**
Conhecimento do Conteúdo	Conhecimento Comum do Conteúdo	Saber realizar um cálculo matemático. Inclui saber quando o aluno fornece uma resposta errada ou identificar quando um livro dá uma definição imprecisa.
	Conhecimento Especializado do Conteúdo	Saber realizar para além de um cálculo matemático. Apresentar ideias da Matemática. Saber modificar tarefas para serem mais fáceis ou mais difíceis.
	Conhecimento Horizonte do Conteúdo	Saber os conteúdos curriculares a partir da ligação entre eles nos diferentes anos de escolarização,
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo	Conhecimento Conteúdo e de Estudantes	Saber sobre o aluno e sobre a Matemática, ou seja, saber, por exemplo, se o assunto vai ser motivador ou não para os alunos.
	Conhecimento do Conteúdo e de Ensino	Saber combinado entre o conhecimento sobre a Matemática e sobre o ensino. Fazer o planejamento de ensino faz parte desse conhecimento.

	Conhecimento do Conteúdo e Currículo	Tem relação com o Conhecimento Horizonte do Conteúdo. Saber combinado entre o conteúdo e o conhecimento sobre o currículo. O professor saber se um determinado conteúdo pode se apresentar aos alunos em anos diferentes de escolarização e de que maneira, se caracteriza como esse conhecimento.

Fonte: Ball, Thames e Phelpes (2008)

Shulman (2005) e Ball, Thames e Phelpes (2008) comtemplaram um novo olhar para as demandas que norteiam as práticas dos professores. Se a contribuição central dos trabalhos de Shulman e seus colaboradores era de retificar o estudo sobre o conhecimento de professores, direcionando a atenção para o papel do conteúdo em situação de ensino, Ball, Thames e Phelpes (2008) contribuíram para apontar que conhecimento matemático os professores precisam para realizar o seu trabalho como professores de Matemática.

Em estudos anteriores Ball, Hill e Bass (2005) afirmavam que a qualidade do ensino da Matemática depende do Conhecimento do Conteúdo dos Professores. Um estudo de mais de quinze anos feito nos Estados Unidos concluiu que os professores pouco sabem sobre Matemática, assim como os estudantes. As autoras se preocupam, pois, esses alunos futuramente podem se tornar professores.

Sobre a afirmação acima, de que a qualidade do ensino da Matemática depende do Conhecimento do Conteúdo dos professores é possível inferir que o processo de formação de professores nos cursos de Licenciatura em Matemática está distinto dos conhecimentos necessários para ensinar, ou seja, é necessário que o professor saiba sobre o conteúdo que irá trabalhar e que deva aliar o saber matemático com o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo para um melhor aproveitamento por parte dos estudantes.

Os domínios propostos por Ball, Thames e Phelpes (2008) em relação aos conhecimentos docentes poderão ajudar o professor a enfrentar mais eficazmente situações de ensino da Matemática. Partindo desses domínios propostos realizamos a relação com o conteúdo de Combinatória. Especificamente definimos como Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo de Combinatória o conhecimento que os professores que ensinam Combinatória devem ter.

Sobre o Conhecimento Conteúdo e de Estudantes em relação à Combinatória, o professor deve ter o domínio de saber sobre o aluno e sobre a Matemática, ou seja, saber, por exemplo, se o assunto vai ser motivador ou não para os alunos. Em relação à Combinatória seria saber, por exemplo, que utilizar a resolução através da representação de listagem estimula os alunos a participarem da aula. Ou saber que é comum os alunos terem dificuldades quanto à diferenciação das situações de Combinação e Arranjo.

Sobre o Conhecimento do Conteúdo e de Ensino em relação à Combinatória, esse se estabelece com o domínio do saber combinado entre o conhecimento sobre a Matemática e sobre o ensino. Fazer o planejamento de ensino e elaboração de avaliação faz parte desse conhecimento. Em relação à Combinatória seria saber como se ensina esse conteúdo para turmas distintas, tanto para uma turma do 8º ano E.F. como para uma turma do 2º do E. M, por exemplo. Pode se caracterizar como o Conhecimento do Conteúdo e de Ensino de Combinatória.

Por fim sobre o Conhecimento do Conteúdo e Currículo em relação à Combinatória. Como apontando anteriormente, esse conhecimento tem relação com o Conhecimento Horizonte do Conteúdo. Caracteriza-se em o professor saber se um determinado conteúdo possa se apresentar aos alunos em anos diferentes de escolarização e de que maneira. Saber que se pode ensinar o conteúdo de Combinatória bem antes do Ensino Médio se caracteriza como o Conhecimento do Conteúdo e Currículo de Combinatória.

Na seção seguinte apresentaremos a segunda parte da fundamentação teórica.

3 COMBINATÓRIA: ORIGEM E FORMAÇÃO DE CONCEITOS

Nesse capítulo, debruçamo-nos em traçar a origem da Combinatória, tratamos sobre a formação dos conceitos iniciando a partir da Teoria dos Campos Conceituais descrita por Vergnaud (1986), em seguida sobre a formação de conceitos em Combinatória. Será apresentado o estudo que defende uma organização única que envolve os quatro tipos de situações combinatórias desenvolvido por Pessoa e Borba (2007).

3.1 Origem e definições

Antes mesmo de iniciar a discussão sobre a Combinatória, acreditamos que exista a necessidade de esclarecer o fato de como ela surgiu na Matemática, mais especificamente e de forma resumida, discutir como surgiu a Combinatória dentro da construção da necessidade dela existir na Matemática. Ao que tudo indica, segundo Brolezzi (1997), a Matemática surgiu, de início, da ideia de contar e medir. Para ele:

> Contar e fazer correspondência um a um é, segundo muitos autores, a fonte da ideia de número. Essa associação entre a contagem e a ideia de correspondência um a um não é, entretanto, uma explicação suficiente para o surgimento da ideia de número. É preciso adequar essa teoria à complexa riqueza do conceito numérico, complementando-a. Os números não podem ter surgido apenas da necessidade de contar objetos. [...] o uso das noções numéricas pelo homem esteve sempre associado tanto à ideia de contagem quanto à de medida. (BROLEZZI, p. 5-6).

Em sua tese, o autor divide a Matemática em duas, sendo uma ligada à Matemática do discreto e a outra à Matemática do contínuo. Pode-se relacionar que a ideia de contar está ligada à Matemática discreta e a ideia de medir está ligada à ideia da Matemática contínua.

O olhar sobre a Matemática discreta toma maior visibilidade com o surgimento para a aplicação na engenharia da computação. A Combinatória surgiu, sem ao menos existir essa divisão de Matemática. A Combinatória teve maior destaque no século XX. Os estudos de Loureiro (2008) sobre a Matemática discreta apontam o que a define é por ser feita de partes distintas, tratam de objetos que podem estar geometricamente separados, os conjuntos são finitos e podem ser enumerados.

Um ponto interessante é que o sentido de discreta da Matemática não seria exatamente esse sentido, mas no sentido de distinta. Para melhor ajustar esse significado Brolezzi (1997), em sua tese, traduz que do Latim *discretu*, *discernere* significa discriminar, separar, distinguir, ver claro. *Discernere* (epistemologicamente) – vem de *cernere* é igual a passar pelo crivo, joeirar, decidir. Aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte.

Ainda para Loureiro (2008) a Matemática contínua trata de conjuntos similares ao conjunto de números reais, tem o sentido de sem interrupção ou separação brusca, tem representações contínuas do ponto de vista geométrico, os conjuntos não podem ser enumerados (exemplo: o intervalo de uma reta). Numa tradução epistemológica Brozelli (1996) diz que o termo vem de *con-tenere* significa: ter junto, manter unido, segurar. Contínuo é o que está imediatamente unido à outra coisa.

A Matemática discreta inclui os conteúdos de Lógica e Conjuntos, Relações e Funções, Análise Combinatória, Grafos, Álgebra Booleana, Teoria de Grupo, Autômatos de Estados Finitos e Probabilidade. Neste sentido, podemos afirmar que Combinatória faz parte da Matemática discreta já que o conteúdo de Combinatória lida com conjuntos contáveis.

Para Hunter (2011) a Matemática discreta é dividida em cinco pensamentos, o lógico, relacional, recursivo, analítico e pensamento quantitativo. Para ele o pensamento quantitativo está ligado à técnica de contagem. Se considerarmos o estudo de Hunter, é nesse ponto em que a Combinatória se situa no pensamento ou raciocínio matemático dentro do contexto na Matemática do discreto.

Boyer (1996) aponta que a Combinatória surgiu a partir do interesse que alguns homens tiveram, de maneira segura, ganhar certos jogos de azar como cartas de baralho, jogos de dados e moedas. Para ele:

> A origem da Análise Combinatória está no jogo de azar, tais como lançamento de dados, jogos de carta etc. Porém, muito tempo se passou para associar os jogos com um raciocínio matemático. Quase todas as culturas primitivas praticavam algum tipo de jogo, mas somente no século XVII houve um bom desenvolvimento do assunto, devido à necessidade de se resolver problemas de contagem oriundos da teoria das probabilidades (BOYER, 1996; p.265).

Apesar de ter se originado do interesse de ganhar certos jogos de azar, o assunto teve grande importância para o desenvolvimento do pensamento matemático. A Combinatória teve maior repercussão quando da resolução de problemas originados da teoria das probabilidades. A Probabilidade, que também se originou dos jogos, recebeu destaque por ter uma utilização mais importante para a sociedade, essa teoria deu suporte, por exemplo, para calcular taxa de mortalidade ainda no século XVII. Na atualidade há um vasto olhar sobre a definição da teoria da Probabilidade, compreende-se que usamos o cálculo de Probabilidade de maneira intuitiva no dia-a-dia, ao se fazer, por exemplo, a previsão do tempo.

Morgado et al (1991) confirmam que o desenvolvimento da Análise Combinatória surgiu da necessidade de se resolver os problemas de contagem originados na teoria da Probabilidade. Ainda que os problemas de Combinatória tivessem surgido no século XII, para ele, os primeiros problemas de Análise Combinatória surgiram no desenvolvimento de um binômio (1+ X) ^{N}.

Segundo Morgado et al (1991):

> O desenvolvimento do binômio (1 + x)^{N} está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. O caso n = 2 já pode ser encontrado nos Elementos de Euclides, em torno de 300 a.C. O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China, (em torno de 1300) e antes disso pelos hindus e árabes. O matemático hindu Báskhara (1114-1 185?), conhecido geralmente pela "fórmula de Báskhara" para a solução de equações do 2º grau, sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de *n* objetos. O mesmo aconteceu com o matemático e filósofo religioso francês Levi Ben Gerson (1288- 1344), que nasceu e trabalhou no sul da França, e que, entre outras coisas, tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides. O nome coeficiente binomial foi introduzido mais tarde por Michael Stifel (1486'7-1567). (MORGADO et al, 1991, p.3).

O autor citado demostra acima que a Combinatória é bastante antiga, encontrada inclusive nos elementos de Euclides, 300 a.C e entre muitos matemáticos. Acrescenta que a Combinatória ganhou sua notoriedade e tem grande importância para diversas áreas do conhecimento. Assim coloca que:

> A Análise Combinatória tem tido um crescimento explosivo nas últimas décadas. A importância dos problemas de enumeração tem crescido enormemente, devido à necessidade em teoria dos grafos, em análise de algoritmos, etc. Muitos problemas importantes podem ser modelados matematicamente como problemas de teoria dos grafos (problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores, e também problemas de matemática "pura", como o famoso problema das 4 cores). (MORGADO et al, 1991, p. 5).

Considerando o que dispõe o autor quando afirma que a Combinatória trouxe grande importância devido à necessidade de resolucionar problemas de enumeração e inclusive para armazenamento de informações em banco de dados, apreciamos que essa importância permeia outras áreas das ciências como Física, Estatística, Engenharia, Biologia, Química, Economia, entre outras. Serve de base para muitos campos da própria Matemática como teoria dos números, teoria dos grupos, principio multiplicativo, ensino de estatística, utilização na própria Probabilidade e, mais importante, o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Sobre a origem da Combinatória buscamos no dicionário de Filosofia Abbagnano (1998), o significado da palavra Combinatória. A palavra aparece em três nomeações. A primeira nomeação sobre Combinatória é encontrado como significante da palavra “arte”, que é definido como a arte do raciocínio. A segunda definição sobre Combinatória foi encontrado como significante da palavra “característica”, a palavra característica é definida como "arte combinatória", significa "a arte de formar e de ordenar os caracteres de modo que se refiram aos pensamentos, isto é, de modo que tenham entre si a mesma relação que existe entre os próprios pensamentos". Por fim, a terceira parte foi encontrada como nomeação da palavra “Combinatória Artes” que designa o projeto, ou melhor, o ideal de uma ciência que, partindo de uma característica universal, ou seja, de uma linguagem simbólica que atribuísse um sinal a cada ideia primitiva e combinasse de todos os modos possíveis esses sinais primitivos, obtendo assim todas as ideias possíveis.

A definição “arte combinatória” foi dada pelo filósofo e matemático Gottfried Wilhelm Leibniz. Leibniz, ainda no final do século XVII, percebeu que o assunto de Análise Combinatória regia estruturas do pensamento. Ao escrever sobre "arte combinatória" concluiu que todo raciocínio se reduz a uma combinação ordenada de elementos como números, palavras e cores.

A procura pelo significado da palavra Combinatória no dicionário de Filosofia foi com o intuito de buscar a etimologia da palavra, e nesse sentido proporcionar o entendimento mais aprofundado sobre origem e significado. Com os significados encontrados da palavra Combinatória, percebemos que o sentido dela está ligado à maneira de pensar e desenvolver o pensamento. Ampliou a visão de não se limitar a pensar que a Combinatória seja um mero conteúdo escolar a ser ensinado, proporcionando a compreensão de que a Combinatória se trata de uma forma de pensar e organizar o mundo.

Para Roa e Navarro-Pellayo (2001) a Combinatória é uma das principais áreas da Matemática Discreta e Probabilidade. Em seus estudos apontam a importância da Combinatória como suporte para a aprendizagem de probabilidade. Os autores levam em consideração reflexões da área de Psicologia, baseados na importância dos estudos de Inhelder e Piaget. Segundo Inhelder e Piaget (1995, apud Roa e Navarro-Pellayo 2001), os esquemas combinatórios são considerados como um componente essencial do pensamento formal e o raciocínio hipotético dedutivo, opera por meio de operações combinatórias que são aplicadas a um conjunto de possibilidades a serem discutidos e listados para chegar a uma conclusão. Nesse sentido, podemos dizer que as atividades relacionadas à Combinatória, poderão desenvolver no sujeito o pensamento formal, assim, trabalhar esse conteúdo em sala de aula e de forma adequada, poderá auxiliar o estudante, futuro adulto, a resolver situações do seu dia a dia ou servir de base caso escolha para sua vida profissional áreas que envolvam a Matemática.

Atualmente, de acordo com o que defendem Morgado et al. (1991) a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Eles destacam dois tipos de problemas frequentes em Análise Combinatória: (1) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfaçam certas condições e (2) contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfaçam certas condições dadas.

3.2 A Combinatória e a Formação de Conceitos

3.2.1 Formação de Conceitos

Para Inhelder e Piaget (1955, 1962), os esquemas são um modo de reações susceptíveis de se reproduzirem e de serem generalizados. Esses esquemas são dados entre o sujeito e o mundo externo. Vergnaud (1990), a partir das ideias iniciais sobre esquemas, reelabora e afirma que o esquema é o elo entre as concepções e a conduta do indivíduo, ou seja, o sujeito, frente a uma circunstância, age segundo as concepções que ele próprio faz sobre a situação. Quando ele se coloca em frente a uma conjuntura que precise ser solucionada se depara com um conjunto de esquemas. O esquema é posto em ação pelo sujeito.

Para entender sobre esse elo entre as concepções e a conduta do individuo é necessário saber sobre a Teoria dos Campos Conceituais elaborada por Vergnaud (1986). Um Campo Conceitual é organizado em um conjunto de situações (o conceito), os invariantes (significado do conceito) e representações (representar o invariante). Considerando o conceito como um conjunto de invariantes que são utilizados na ação, essa Teoria está relacionada a um conjunto de situações que compõe um conjunto de esquemas que é colocado em ação pelo sujeito na situação. Com mais profundidade a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986) afirma que um campo conceitual é formado pela relação entre conceitos, por exemplo, o campo conceitual das Estruturas Aditivas é formado pelas relações existentes entre adição, subtração e outros conceitos que têm a ver com estas operações; o campo conceitual das Estruturas Multiplicativas forma-se pela relação entre multiplicação, divisão, frações, decimais, proporcionalidade, dentre outros.

Para ele um conceito pode ser definido como um tripé de três conjuntos (S, I, R):
S: o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, invariantes prescritivos;
I: o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito;
R: o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas.

Vergnaud aponta que existe a necessidade de se estudar a partir dos campos conceituais e não dos conceitos isolados. O teórico defende:

> A formação de um conceito, em particular se considera através das atividades de resolução de problemas, cobre em geral um longo período de tempo; com muitas interações e muitas defasagens. Não se pode compreender a significação dos erros ou dos procedimentos de uma criança de 13 anos se não se conhece a maneira a qual são formadas suas concepções e suas competências. (VERGNAUD, 1983, p. 9).

A partir dessa afirmação, Vergnaud (1983) acredita que grande parte dos erros dos estudos para se compreender sobre o processo complexo pelo qual os sujeitos dominam ou não os conceitos matemáticos, se dá por realizarem estudos com objetos pequenos, pois, para compreender o processo de apropriação dos conceitos matemáticos, é preciso levar em consideração a análise dos problemas, a análise dos procedimentos utilizados pelos alunos, bem como suas argumentações e as representações simbólicas utilizadas pelo sujeito.

Apesar do tripé inicialmente proposto por Vergnaud se basear nos invariantes operatórios (invariantes operatórios que dirigem, por parte do sujeito, os elementos pertinentes à situação e, portanto, guiam a construção dos modelos mentais) essas são as ações consideradas próprias da atividade cognitiva dos sujeitos. Neste estudo consideramos os invariantes como as propriedades do conceito, definido como invariantes prescritivos. Os invariantes, no caso da Combinatória, são propriedades que caracterizam cada tipo de problema, que podem se dar em relação à escolha e à ordenação de elementos da Combinatória. Mais adiante organizaremos essa discussão a partir do conteúdo de Combinatória.

Salientamos que a Teoria dos Campos Conceituais pode dar subsídios para a compreensão e trabalho de diversos outros conteúdos. A seguir, discutiremos o campo conceitual das Estruturas Multiplicativas.

3.2.2 Problemas Multiplicativos segundo Vergnaud

Vergnaud (1991) afirma que se podem diferenciar duas grandes categorias de relações multiplicativas nas funções das relações, tanto da multiplicação quanto da divisão. Vegnaud (1983, 1991 descreve classes de problemas multiplicativos que envolvem relações ternárias e quaternárias. O Quadro 2, a seguir, apresenta uma síntese as diferentes relações estabelecidas por Vergnaud (1991).

Quadro 2 - Noção de relação de problemas de Estruturas Multiplicativas para Vergnaud

Relação	**Definição**	**Exemplos**	**Representação (Esquema sagital)**
Binárias	Ligam dois elementos entre si. Os elementos colocados em relação podem ser de natureza muito diferentes.	"Pedro está sobre a mesa".	7 → 3
Ternárias	Ligam três elementos entre si.	"Pedro está entre André e Joana".	**É 4 a mais que** 7 → 3 **+ 4** 7 ← 3 **- 4** 7 → 3
Quaternárias	Ligam quatro elementos entre si.	"Londres é para Inglaterra o que Paris é para França".	Londres → Inglaterra ↕ Paris → França

Fonte: Vergnaud (1991)

As classes dos problemas multiplicativos que envolvem as relações ternárias e quaternárias são chamadas de isomorfismo de medidas e de produto de medidas, respectivamente. Vergnaud (1991) as define da forma como está colocado no Quadro 3.

Quadro 3 - Classes dos problemas multiplicativos segundo Vergnaud (1991)

Classes dos problemas	Definição	Exemplo
Isomorfismo de medidas	Relação quaternária, ou seja, entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as outras medidas, de outro tipo.	Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?
Produto de medidas	Relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional.	3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?

Fonte: Vergnaud (1991)

O estudo das relações multiplicativas aponta que existem muitos tipos de multiplicação ou classe de problemas. Essa pesquisa centrou-se nos problemas de produtos de medidas. Pessoa e Borba (2009) chamam a atenção que diferentes autores nomeiam por outros termos o que elas chamam de produto cartesiano, assim apontam: o produto cartesiano (para Nunes e Bryant, 1997), produto de medidas (para Vergnaud, 1983, 1991) como podem notar no Quadro 3 ou situações relacionadas à Combinatória (no PCN, 1997), os quais são considerados pelas autoras como tipo único e denominados de produto cartesiano. Assim chamaremos de produto cartesiano em nosso estudo.

Na seção seguinte discutiremos sobre a Combinatória, a relação desse conteúdo a partir do olhar da teoria de Vergnaud e a escolha da categorização adotada no presente estudo.

3.2.3 Formação de Conceitos em Combinatória

Pessoa e Borba (2010) defendem que a Combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias pode-se saber quantos elementos ou eventos são possíveis numa dada situação sem que seja necessário contá-los um a um.

Como colocado anteriormente, para Vergnaud (1986) um conceito pode, com efeito, ser definido como um tripé de três conjuntos (situações, invariantes e representação). Pessoa (2010) defende que as situações que dão significado ao conceito, no caso da Combinatória, podem ser permutação, combinação, arranjo e produto cartesiano. Em relação às propriedades invariantes são as relações/propriedades que envolvem a ordem e a escolha dos elementos nas situações envolvidas. Por fim as representações simbólicas são as diferentes formas de resolver as situações-problema, que podem ser representadas por desenhos, listagem, árvore de possibilidades, quadros, diagramas, Princípio Fundamental da Contagem (PFC), fórmula, dentre outras.

Esse trabalho se baseará em uma organização única defendida por Pessoa e Borba (2007), que envolve os quatros tipos de situações (arranjo, permutação, produto cartesiano e combinação). As autoras acreditam ser importante trabalhar em sala de aula estes quatro tipos de problemas (situações) e seus invariantes, pois são característicos do pensamento combinatório, o que contribui para a reflexão teórica.

Assim, o presente estudo se apoiou na categorização adotada pelas autoras acima. Os tipos de problemas são descritos no Quadro 4, abaixo, tal qual Pessoa (2009, p. 75) coloca, seguidos de exemplos e dos invariantes do conceito que os caracterizam.

Quadro 4 - Situações (tipos de problemas) combinatórias, exemplos e invariantes

Situação	Exemplo	Invariante
Produto Cartesiano	Ex.: Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz). Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?	Invariantes: (1) Dados dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.
Permutação	Ex.: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.	Invariantes: (1) Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Arranjo	Ex.: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas	Invariantes: (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; (2) A

	podemos ter os três primeiros colocados?	ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Combinação	Ex.: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?	Invariantes: (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com 0< p < n, p e n naturais; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Fonte: Pessoa (2009, p. 75)

A categorização apresentada é a estrutura que será usada como base para compreensão/organização das ideias centrais da pesquisa. Sabemos que as situações que as autoras chamam de arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano podem não ser os mesmos termos usados pelos professores, sobretudo o produto cartesiano, que, normalmente, é denominado pelos livros didáticos (SILVA, 2015) de princípio multiplicativo.

4 ESTUDOS ANTERIORES REFERENTES À COMBINATÓRIA

4.1 Estudo sobre desempenho de alunos ao resolverem problemas de Combinatória nos diferentes níveis de ensino

Neste ponto nos dedicaremos a discutir estudos referentes ao desempenho de alunos ao resolverem problemas de Combinatória nos diferentes níveis de ensino e estudos de investigação sobre saberes e conhecimentos docentes.

Algumas das pesquisas que envolvem o conteúdo de Combinatória se debruçaram em investigar para saber o que crianças, jovens e adultos sabem sobre o conteúdo em questão.

Dentre as pesquisas relacionadas à Combinatória, encontra-se o estudo desenvolvido por Esteves (2001) que investigou sobre o desempenho de alunos de uma escola particular. Nessa pesquisa foi analisado o desenvolvimento da Análise Combinatória em estudantes que finalizavam o Ensino Fundamental e alunos do 2º ano do Ensino Médio. Para essa investigação foi criada uma sequência de ensino que foi aplicada em dois grupos um experimental e um grupo de referência. O grupo experimental era composto por 28 alunos da 8ª Série (atual 9º ano do Ensino Fundamental), no qual o trabalho foi desenvolvido em dupla. O grupo de referência era composto por uma turma (30 alunos) de alunos do 2º ano do Ensino Médio. Antes dos alunos estudarem Combinatória, foram submetidos a um pré-teste. Os dois grupos se submeterem a abordagens distintas de ensino. A autora procurou dois grupos que tivessem o mesmo desempenho, e para assegurar que os dois grupos tinham desempenhos parecidos, realizou entrevista com a professora de Matemática que trabalhava com as duas turmas e a direção. O grupo experimental se submeteu à abordagem criada pela autora e o grupo de referência se submeteu à abordagem tradicional dos livros didáticos em sala de aula. Em seguida os dois grupos foram submetidos a um pós-teste.

Com o grupo experimental, a sequência didática foi realizada em horário extra, num total de sete encontros e a aplicação da sequência foi em dupla, mas o atendimento era coletivo em sala de aula. Com o grupo referência, a sequência didática foi realizada de acordo com a escola. Foram realizadas 12 aulas e essas aulas foram ministradas pela pesquisadora para garantir que todo o planejamento referente ao conteúdo fosse realizado.

Como resultados dessa pesquisa as autoras identificaram que os alunos apresentaram dificuldades em resolver problemas que envolviam Combinatória. A autora acredita que o fracasso se deu devido à confusão sobre a ordem, principalmente em problemas de combinação, falta de organização para enumerar os dados sistematicamente, dúvidas na identificação da operação. Os alunos, após apresentados às estratégias de resoluções que podiam ser aritméticas ou algébricas, abandonavam a utilização de estratégias através de árvores de possibilidades e desenho e quando o problema apresentava mais de uma etapa, não sabiam interpretá-lo. Em linhas gerais, a autora aponta grandes dificuldades em resolver problemas combinatórios. A pesquisadora concluiu que houve diferença entre o grupo experimental e o grupo de referência, e essa diferença foi significativa. O grupo experimental teve um melhor desempenho. O que chamou atenção no grupo referência foi o fato de já terem estudado o conteúdo de Combinatória proposto no Ensino Médio e de terem sido submetidos a três avaliações antes de participarem da pesquisa, ou seja, mesmo tendo tido maior contato com o conteúdo, o grupo referência não obteve melhor desempenho.

Acreditamos que esse estudo seja importante para nossa pesquisa, pois reforça a disposição de nosso olhar para verificação do trabalho com o conteúdo no momento da ação docente, assim poderemos trazer novas discussões.

Na pesquisa desenvolvida por Pessoa (2009), na qual foram investigados 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, a pesquisadora analisou o desempenho dos alunos a partir de diversas variáveis, por gênero, por tipo de escola, particular e pública; por nível de ensino; ano de escolarização; significados de Combinatória dos problemas (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano); e ordem de grandeza dos números, se esses levariam os alunos a diferentes desempenhos. Aprofundou o estudo ao analisar os tipos de respostas e estratégias apresentadas pelos alunos. A metodologia se deu a partir de teste, cada aluno resolvendo oito problemas de Combinatória, com livre escolha da forma de resolução, ou seja, não havia nenhum indicativo de como resolver os problemas.

Nessa investigação os resultados quanto à diferença dos desempenhos por gênero não foram significativos. Quanto à diferença entre escola particular e pública, os alunos da escola particular tiveram resultados superiores. Quanto ao nível de escolarização, foi detectado que quanto mais se avança o nível de escolarização, avança o desempenho dos alunos. Ao ser analisado os desempenhos dos diferentes alunos em resolverem problemas combinatórios dos quatro tipos (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano), observou-se que há diferenças significativas de desempenho entre os diferentes anos e entre os diferentes níveis escolares. Os resultados evidenciam a influência do ensino promovido na escola.

A autora relata que os desempenhos diferenciaram-se significativamente nos problemas de arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano, quando comparados entre si e de acordo com o desempenho dos alunos nos diferentes níveis de ensino. Os problemas mais fáceis são os de produto cartesiano, seguidos dos de arranjo e os mais difíceis são os de permutação e de combinação, este último com percentuais bastante baixos de acertos em todos os níveis, sendo a permutação o significado de mais difícil compreensão nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A autora aponta que, apesar das recomendações dos PCN, na prática de sala de aula a maioria dos problemas de raciocínio combinatório (arranjo, combinação e permutação) é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio e mesmo com esse fato os alunos do 2º ano do Ensino Médio apresentaram erros quanto à utilização do principio multiplicativo. Esse estudo permite contribuições importantes para compreender as dificuldades com o conteúdo em diferentes anos de escolarização.

A partir dos apontamentos descritos por esse estudo, sobre os desempenhos dos alunos e pelo conteúdo ser formalmente introduzido no 2º ano do Ensino Médio, direcionamos nosso olhar para o foco nas questões que envolvem a formação dos professores para o ensino da Matemática, saber sobre que conhecimentos de Combinatória os professores têm e mais especificamente saber sobre como se desenvolve esse conteúdo no ano em que ele mais ocorre no momento da atuação do professor. A pesquisa de Pessoa (2009) contribuiu para ampliação desse presente estudo. Nossa intenção é tentar compreender que conhecimentos serão dispostos para alunos do 2º ano do Ensino Médio pelo professor durante a prática docente.

Duro (2012) buscou compreender a psicogênese do pensamento combinatório. Essa pesquisa foi realizada com 18 pessoas, oito da Educação de Jovens e Adultos e 10 alunos do Ensino Médio regular. As idades dos pesquisados variaram entre 14 e 47 anos. A base teórica utilizada foi a Epistemologia de Jean Piaget e a aplicação de teste se deu a partir do método clínico de Piaget. Esse método permitiu intervenções do pesquisador em busca da compreensão da gênese do pensamento. Os testes foram realizados individualmente. Esses testes foram realizados com material manipulativo. No primeiro teste o sujeito tinha que organizar caminhos diferentes para chegar de um lugar a outro.

Os outros testes envolveram as situações de arranjo e permutação. O experimento 2 foi realizado através de uma mesa com quatro lugares (miniatura) e cinco bonecos para que pudessem sentar à mesa, os estudantes tinham que apontar as possibilidades de sentar. O terceiro experimento foi com as situações de arranjo e permutação, foi realizado com um pentágono e um hexágono confeccionados de madeira, contendo prego em cada vértice, o objetivo era encontrar a quantidade de triângulos diferentes.

As conclusões do estudo expõem que o experimento 2 foi aquele em que os alunos tiveram maior dificuldade, pois era necessária a movimentação dos objetos e só havia a memória para guardar essas informações, não foi disponibilizado lápis e papel para anotações. Para análise dos resultados se utilizou os estágios piagetianos. Foi concluído que o pensamento combinatório é construído passando por diferentes níveis de equilíbrio até sua formalização. O estudo aponta que a construção da Combinatória passa por patamares de equilíbrios que independem da idade ou ano de escolarização do estudante. Notou-se que os alunos mais jovens demonstraram maior quantidade e qualidade nas tomadas de consciência, enquanto os alunos da Educação de Jovens e Adultos tentaram fazer relações com acontecimentos do dia a dia, porém isso não fez com que melhorassem seus argumentos.

Pelos resultados apresentados na pesquisa percebe-se que há a comprovação que a contrução do pensamento para a Combinatória passa por graus de equilíbrio. Compreendemos que, para que o raciocínio combinatório seja desenvolvido nos alunos é preciso que o conteúdo seja apresentado e de forma organizada.

4.2 Estudos sobre Saberes e Conhecimentos Docentes

Existem muitas pesquisas investigativas sobre os conhecimentos dos professores. Procuramos destacar no presente estudo as pesquisas que mais se relacionam com o que pretendemos desenvolver. Neste sentido, as pesquisas tratadas nesse tópico envolvem preocupações com saberes e conhecimentos docentes relacionados à Combinatória a partir de diferentes posicionamentos teóricos, com a intenção de investigar professores com diferentes formações, com aplicação de testes e entrevistas.

Sabo (2010) se empenhou em pesquisar quais saberes docentes os professores, que ensinam Matemática no Ensino Médio possuem sobre Combinatória. A pesquisa foi realizada através de entrevista semiestruturada, levando em consideração o processo interpretativo das falas dos professores. Teve como aporte teórico a teoria de Tardif e a Teoria Antropológica do Didático, defendida por Chevallard (1999). A pesquisa foi realizada com seis professores, com formações distintas e ainda no processo de formação. Como principais resultados o estudo apontou que os professores apresentam dificuldades quanto à explicação sobre o conteúdo e que há valorização do uso de fórmula pelos professores. A pesquisa revelou a reprodução pelo professor da prática docente, pois a troca de experiências entre os colegas de profissão favorece a construção de novos saberes ou a sedimentação e a evolução de saberes antigos.

Em relação a esta pesquisa apresentada, o presente estudo amplia, no sentido de analisar quais conhecimentos os professores têm sobre o conteúdo e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, levando em consideração a prática durante as aulas executadas pelo professor e entrevistas. Ainda não foi realizada nenhuma pesquisa desse tipo, portanto, o presente estudo também pode contribuir na identificação de experiências diversificadas de ensino em Combinatória.

Na pesquisa de Rocha (2011) buscou-se verificar quais os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e Médio têm sobre a Combinatória. A pesquisa foi realizada com dois professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, dois professores dos anos finais do Ensino Fundamental e dois professores do Ensino Médio. Os pesquisados responderam questões sobre tipo de problema combinatório, resoluções de alunos e as formas de ensino para superação de dificuldades de alunos. A pesquisa em questão abordou os conhecimentos que Ball, Thames e Phelpes (2008) defendem como necessários ao professor que ensina Matemática. A metodologia se deu através de entrevista semiestruturada, essas entrevistas foram divididas em oito momentos. No primeiro momento houve o interesse em saber sobre a formação do professor e suas experiências com o objetivo de conhecê-lo. O segundo e terceiro momentos tiveram o intuito de saber sobre que Conhecimentos do Conteúdo de Combinatória tinham os professores, objetivando que os professores diferenciassem os problemas de arranjo e combinação. O quarto, quinto e sexto momentos da entrevista tiveram o objetivo de analisar as perspectivas dos professores sobre o desenvolvimento do raciocino combinatório, saber quais estratégias os participantes privilegiavam, e pretendiam que os professores apontassem estratégias para superação dos problemas, por eles observados, que os alunos têm sobre Combinatória. No último momento da entrevista a autora teve o intuito de averiguar sugestões para o ensino de Combinatória. Os professores analisaram protocolos de resolução de problemas realizados por alunos.

A autora percebeu que, apesar de diferentes formações, os professores apresentaram dificuldades quanto à diferenciação entre problemas de arranjo e combinação. A conclusão da pesquisadora aponta para a necessidade de um melhor desempenho por parte dos professores, maior aprofundamento de conhecimento de Combinatória. Indica ainda, a partir dos domínios propostos por Ball (2008), a relação com o conteúdo de Combinatória.

Esse estudo realizado por Rocha (2011) contribui para ampliar na presente pesquisa a consolidação do nosso olhar para um grupo de sujeitos que possui formação em Matemática e verificar como ocorre esse processo de ensino a partir da movimentação da sala de aula no momento da atuação docente.

Na pesquisa desenvolvida por Lima, Amorim e Pessoa (2013), que teve como objetivo analisar aulas sobre Combinatória em turmas de Educação de Jovens e Adultos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, na qual foram investigados cinco professores. As autoras buscaram apurar quais os recursos, o trabalho com o conteúdo, os tipos de problemas trabalhados, expectativa do professor sobre o estudante e as estratégias utilizadas pelos professores. A análise se deu a partir de uma entrevista e uma observação nas salas de aula de professores formados em Matemática, trabalhando o conteúdo de Combinatória. As autoras concluíram que existe uma resistência dos professores em trabalhar com Combinatória no Ensino Fundamental, verificou-se que a maioria dos professores reconhece o conteúdo como Contagem e que nenhum dos cinco professores trabalhou com questões de combinação, nem discutiram sobre as características dos problemas, ou seja, os invariantes. As autoras ainda apontam como importante, durante a formação inicial e continuada dos professores, discutir sobre conceitos matemáticos e reconhecer a sua importância no desenvolvimento do raciocínio lógico e da cidadania de seus alunos, assim como de que forma esses conteúdos poderão ser trabalhados.

De acordo com essa pesquisa, havia certa resistência dos professores em trabalhar o conteúdo de Combinatória antes do Ensino Médio. Na aula observada do professor que atuava no Ensino Médio verificou-se que ele não trabalhou as características dos problemas (invariantes), porém não houve um acompanhamento, por parte das pesquisadoras, de todo o planejamento para o ensino de Combinatória. Isso impulsionou nossa pesquisa a averiguar como ocorre o ensino de Combinatória a partir de todo o planejamento do conteúdo.

Assis (2014) analisou um efeito de uma formação continuada sobre Combinatória. Como base teórica utilizou a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. A pesquisa teve como ponto de partida as reflexões e práticas de uma professora do 2º ano do Ensino Fundamental. A metodologia se desenvolveu a partir de entrevista inicial, seis encontros com realização de formação, duas observações de aulas ministradas pela professora pesquisada e entrevista final. Durante a formação a pesquisadora afirma que enfatizou sobre as situações, invariantes e representações. A autora, através de entrevistas e formação continuada, identificou que existiam inicialmente dificuldades no reconhecimento e trabalho com a Combinatória. Após as intervenções, perceberam que a professora passou a fazer o reconhecimento das diferentes situações, invariantes e representações simbólicas. Concluem que a formação continuada pode contribuir para os docentes ressignificarem seus conhecimentos.

Esse trabalho envolve procedimento para formação continuada para o ensino de Combinatória, se a autora aponta que após as intervenções a professora passa a fazer o reconhecimento das diferentes situações, invariantes e representações é um ponto positivo para os trabalhos futuros que essa professora irá realizar com o conteúdo de Combinatória.

Acreditamos que esse procedimento seria interessante se aplicado em professores com formação em Licenciatura em Matemática, pois trazer a tomada de consciência da importância de se trabalhar os invariantes dos problemas e uma melhor estruturação quanto à organização apresentada neste trabalho, pode auxiliar os alunos quanto à resolução dos problemas e impulsionar o estímulo para diferentes resoluções pelo aluno.

Lima (2015) investigou os conhecimentos de professores da Educação Básica e alunos do Ensino Médio sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Essa pesquisa defende que o PFC pode ser usado na resolução de vários problemas combinatórios e na construção das fórmulas da Combinatória. A análise se desenvolveu a partir de dois estudos. O primeiro estudo envolveu um teste de múltipla escolha e explicação, de dados coletados junto a professores dos anos finais do Ensino Fundamental, professores do Ensino Médio e alunos deste último nível da Educação Básica. Esse primeiro estudo foi realizado com um total de 37 estudantes do 3º ano do Ensino Médio, 11 professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e 11 professores de Matemática do Ensino Médio. Esses dados das pessoas envolvidas foram retirados de outras pesquisas. Os testes aplicados foram elaborados numa disciplina do Mestrado. Para o segundo estudo, foi realizada uma entrevista semiestruturada com professores: três professores formados em Licenciatura em Matemática, baseada nos tipos de conhecimentos sugeridos por Ball, Thames e Phelps (2008). Essa coleta de dados foi realizada por meio de protocolos com situações combinatórias resolvidas por alunos com as justificativas focadas no PFC. Estas situações envolveram os quatro tipos de problemas: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação.

Como principais resultados, Lima (2015) aponta que os professores do Ensino Médio melhor reconhecem o uso do PFC, quando comparados com os professores do Ensino Fundamental. Afirma que o reconhecimento do PFC dos professores do Ensino Médio é muito superior ao dos alunos deste nível de ensino, o que pode indicar que os professores parecem não estar ressaltando este princípio no ensino junto aos alunos. Foi identificado que os professores evidenciam conhecimentos comuns e especializado e horizontal do conteúdo em relação ao PFC, mas não sabem relacionar o princípio multiplicativo com as fórmulas de Combinatória. Evidenciam conhecimento do aluno, mas referente ao conhecimento do ensino não deixam claro como o uso de outras estratégias, tais como árvores de possibilidades e fórmulas, se relacionam com o PFC. Concluiu que os conhecimentos docentes do PFC podem servir de base para um melhor desenvolvimento do ensino e aprendizagem da Combinatória, mas há aspectos do conhecimento dos professores que eles necessitam melhorar.

Um detalhe importante nessa pesquisa é que os alunos do Ensino Médio não conseguiram acertos totais quanto aos testes aplicados. Mas os professores do Ensino Médio tiveram bom desempenho quanto aos testes e demostraram habilidades quanto ao uso do PFC. O que parece que há uma contradição quanto aquilo que o professor sabe e o que ensina.

Acreditamos ser importante verificar a mobilização dos conhecimentos na prática, pois ao realizar a observação das práticas docentes poderemos encontrar outros elementos que justifiquem a contradição entre o conhecimento teórico, o que os professores sabem sobre o conteúdo e a atuação em sala de aula, conhecimento prático.

Citamos algumas das tantas pesquisas que abrangem o conteúdo de Combinatória, que envolvem aplicação de teste para saber o que sabem os alunos e investigação sobre os conhecimentos dos professores. Existem diversas pesquisas relacionadas à Combinatória, como visto, alguns dos estudos se preocupam em saber que conhecimentos os professores possuem a partir de aplicação de teste e entrevista, mas ainda não havia estudo no qual se observa o professor no momento de sua prática em sala de aula. Esse estudo se debruçará no ano em que a Combinatória mais ocorre, focando o olhar sobre o professor no momento da prática. Além disso, já que se espera até os últimos anos de escolarização para este ser ensinado, será, portanto, investigado de que forma está sendo trabalhado este conteúdo. Parte deste trabalho se concentrou na análise pedagógica do conteúdo, mas em alguns momentos, nas análises das observações de aulas, iremos tecer análises e comentários sobre os conhecimentos docentes. A seguir apresentamos os objetivos e o método do presente trabalho.

5 OBJETIVOS E MÉTODO

5.1 Objetivos

5.1.1 Objetivo Geral

Analisar conhecimentos docentes sobre o ensino de Combinatória em turmas do 2º ano do Ensino Médio.

5.1.2 Objetivo Específico

- Analisar as situações (tipos de problemas); os invariantes explicitados ao ensinar; as representações utilizadas e estimuladas ao ensinarem Combinatória.
- Investigar que Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo professores do 2º ano Ensino Médio têm sobre Combinatória.

5.2 Método

Neste capítulo apresentamos o percurso metodológico, como se deu a escolha dos participantes da pesquisa, o procedimento da pesquisa desde o instrumento de coleta e preparação para as análises.

5.2.1 Percurso Metodológico

A pesquisa surgiu embasada em estudo anterior desenvolvido por Lima, Amorim e Pessoa (2013), o qual identificou, a partir de pesquisa de observação da prática de ensino de professores ensinando Combinatória, para a Educação de Jovens e Adultos, que existe certa resistência por parte dos professores do Ensino Fundamental em ensinar o conteúdo de Combinatória antes do Ensino Médio. As autoras apontam que os participantes envolvidos nessa pesquisa relatavam que a Análise Combinatória era um conteúdo para estudantes do E. M. A partir dos resultados dessa pesquisa anterior, o presente estudo buscou investigar como o ensino da Combinatória vem ocorrendo em turmas do 2º ano do E. M. e que Conhecimentos Pedagógicos têm esses professores sobre Combinatória, já que o trabalho com este conteúdo, como apontaram alguns professores, é desenvolvido no Ensino Médio, e pesquisas (PESSOA, 2009; PESSOA E BORBA, 2007, 2008, 2009, 2010; SABO, 2010, ROCHA, 2011, ASSIS, 2014) anunciam a dificuldade em ensinar e aprender o conteúdo. A análise de como vêm ocorrendo essas aulas se deu baseada no tripé que forma o conceito: situações, invariantes e representações simbólicas (VERGNAUD, 1986), a partir das observações e videografias durante as situações de aulas. As análises sobre o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (BALL, THAMES E PHELPS, 2008) se deram a partir das entrevistas.

5.2.2 Participantes da Pesquisa

A seleção para participantes da pesquisa tem como critério professores formados em Licenciatura em Matemática que atualmente ensinam em turmas do 2º ano do Ensino Médio. A escolha desse grupo de sujeitos para realização da pesquisa se deu por acreditar que, por terem uma formação específica para o ensino da Matemática, melhor se adequariam a responder nossas inquietações. Pode parecer evidente a escolha desse grupo de sujeito por acreditar que essa é a formação exigida para atuar no ensino da Matemática neste ciclo de escolarização, porém nas escolas brasileiras é autorizado que outros tipos de formações exerçam a mesma função. São encontrados em escolas do município de Recife e Jaboatão, ministrando aulas de Matemática, professores com formação em Química, Engenharia, Física, Biologia, dentre outras. Essa afirmação foi comprovada durante a busca de sujeito para participar da pesquisa.

A intenção inicial era realizar essa pesquisa com seis participantes, mas percebemos algumas dificuldades, desde a procura dos participantes quanto à aceitação em participar da pesquisa. Durante a procura dos participantes para a pesquisa tivemos grandes dificuldades em encontrar professores que atendessem ao critério de serem formados especificamente em Licenciatura em Matemática e que atuassem com turmas de 2º ano e que fossem ensinar o conteúdo de Combinatória, já que também, um dos critérios, é que no planejamento anual do professor já estivesse o conteúdo dentro da programação de aula.

Consideramos também a ausência de pesquisa que tenha se debruçado em estudar com profundidade o conhecimento docente, analisando as aulas e o docente especificamente formado em Matemática ensinando Combinatória no ano em que ocorre formalmente o ensino deste conteúdo. Ou seja, já que se espera, quase que na totalidade, o final da escolarização básica para aprofundar este ensino, objetivamos estudar como ele está ocorrendo.

A presente investigação foi realizada com dois professores de escolas da rede pública de ensino da região metropolitana de Recife. Inicialmente foi realizada uma entrevista para traçar o perfil do sujeito envolvido na pesquisa e verificar algumas de suas experiências com a Combinatória, enquanto aluno e enquanto professor. Pousamos o olhar sobre o tempo de profissão, formação e a importância do conteúdo de Combinatória. Em seguida foram acompanhadas as aulas de acordo com os respectivos planejamentos. Ao término das aulas executadas eram realizadas algumas entrevistas com o intuito de responder indagações da pesquisadora. Na próxima seção será apresentado com detalhes o procedimento para a coleta e preparação para análise dos dados.

5.2.3 Procedimento Para Coleta e Análise dos Dados

A coleta da pesquisa se baseou em três momentos. No primeiro momento foi realizado a entrevista inicial. Posteriormente, no segundo momento, foi realizada a observação e videografia das aulas executadas pelo participante da pesquisa, e por fim o terceiro momento foi de entrevistas ao término das aulas.

Para coletar os dados para esse estudo utilizamos entrevistas semiestruturadas, observação, diário de bordo e videografia. A entrevista semiestruturada possibilita que o entrevistado responda outras inquietações que podem surgir durante a entrevista, evidentemente que a estrutura da entrevista está parcialmente estruturada.

As entrevistas foram realizadas de forma individual e em uma salas separadas. A entrevista semiestruturada foi baseada em estudo anterior desenvolvido por Lima, Amorim e Pessoa (2013). Nesse roteiro de entrevista inicial buscou-se compreender alguns pontos sobre a formação do sujeito envolvido na pesquisa como mostra o Quadro 5.

Quadro 5 - Roteiro de entrevista inicial

Entrevista inicial	1) Em qual instituição de ensino se formou? 2) Qual é a habilitação? 3) Tem Especialização? Mestrado? Doutorado? 4) Tempo de profissão e exercício na área de Matemática? 5) Tempo de ensino para turmas do 2º ano? Em quais outras turmas já atuou? Em quais turmas já ensinou Combinatória? Tempo que ensina Combinatória? 6) Como foi trabalhada com você a Combinatória quando aluno na Educação Básica? E na Graduação? E em Pós-Graduação?

Fonte: A autora.

A observação é uma metodologia aplicada em muitas pesquisas de cunho qualitativo. Existem vários tipos de observação, inclusive descrita por Flick (2009). Essas observações são categorizadas em quatro papéis (participante completo, participante como observador, observador como participante e observador completo). O papel escolhido foi a observação completa, sem nenhum tipo de participação da pesquisadora no ambiente de sala de aula.

Sobre a videografia, segundo Gil (2008) é uma ferramenta utilizada para realização em registro de vídeo, ou seja, para captura de imagens em movimento. Consideramos esse método um meio de aprofundar a coleta de dados, uma possibilidade de extrair elementos sobre as aulas de cada participante da pesquisa, elementos que não podem ser detectados através da entrevista. A videografia também permite a repetição dos eventos para uma melhor análise.

A presença da câmera era um dos elementos que tínhamos receio quanto aos efeitos que sua presença pudesse causar. Tivemos o cuidado quanto a exposição da câmera relacionada a iluminação e de não colocarmos grandes equipamentos em sala de aula. Acreditamos que de início gerava certa insegurança para os alunos presentes e para o professor, mas depois do primeiro contato, o ambiente ficava como o de costume. A cada encontro, professores e alunos não lembravam mais da presença da câmera. Acreditamos que a presença da câmera não alterou o comportamento do ambiente. Porém, sobre os sujeitos pesquisados, aventamos a possibilidade que eles tenham sido impulsionados a prepararem com mais cuidado as suas aulas, talvez ao menos quanto à conceitualização do conteúdo.

Após observação das aulas dos professores, foi verificado se há algumas semelhanças no perfil dos sujeitos e suas práticas de ensino com o conteúdo de Combinatória. As observações e videografias ocorreram durante todas as aulas ministradas sobre Combinatória, de acordo com o planejamento do participante envolvido, ou seja, é livre a quantidade de aulas realizadas. A opção por assistir todas as aulas ocorreu devido à preocupação em acompanhar todo o trabalhado que o professor realiza com o conteúdo de Combinatória.

O olhar que se deu durante as observações de aula foi à luz da Teoria de Vergnaud (1986) focalizando as situações, os invariantes do conceito e as representações trabalhados pelos professores. A pesquisa toma como base a organização de problemas combinatórios proposta por Pessoa e Borba (2007) que envolve os quatros tipos de situações (arranjo, permutação, produto cartesiano e combinação). Para a análise foi utilizada também a teoria desenvolvida por Ball, Thames, Phelps (1991, 2008) sobre Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo de professores que ensinam Matemática.

As observações das aulas foram divididas em três partes para a realização da análise: as situações que o professor usa durante sua prática, os invariantes sobre as situações que são apresentadas pelo professor para os seus alunos e as representações que dispõem durante suas aulas. Dentro desse roteiro de observação buscou-se verificar alguns pontos, como mostra o Quadro 6.

Quadro 6 - Roteiro para observação das aulas

	Base para observação	**Roteiro para observação**
CONHECIMENTOS DO CONCEITO	**Situações** (tipos de problemas – arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano).	Quais situações (tipos de problemas) foram apresentadas em sala de aula e de que forma?
	Invariantes	Os invariantes recebem destaque? Quais invariantes das situações são apresentadas? Se são, de que forma? Eles são trabalhados de maneira explícita ou implícita?
	Representações	Quais representações são apresentadas na sala de aula para

		as resoluções dos problemas? Há prioridade para as fórmulas ou o professor estimula o uso de diferentes representações?

Fonte: A autora.

Para a análise do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo foi realizado entrevistas semiestruturadas. Como apontado anteriormente, a análise se baseará no estudo desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008) sobre Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo de professores que ensinam Matemática. Essas entrevistas foram realizadas após o término das aulas observadas, de forma a responder a necessidade da pesquisa. Essas análises se deram divididas em três pontos: Conhecimento do Conteúdo e de Estudantes, Conhecimento do Conteúdo e de Ensino e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo. O Quadro 7 mostra os detalhes da base da entrevista (aspectos da teoria envolvida) e seu roteiro.

Quadro 7 - Base da entrevista e roteiro de entrevista

	Base de entrevista	Roteiro de entrevista
CONHECIMENTO PEDAGÓGICO (transformação do conteúdo para o ensino)	**Conhecimento conteúdo e de estudantes** É um tipo de conhecimento pedagógico do conteúdo que combina o saber sobre a Matemática e sobre o aluno. O que pode caracterizar esse tipo de Conhecimento é quando o professor reconhece erros comuns produzidos pelos alunos devido à sua experiência docente e conhecimento das estratégias e do desenvolvimento do aluno. Por exemplo, ao fornecer um exemplo aos alunos, os professores precisam prever o que eles vão achar interessante e motivador. Ao atribuir uma tarefa, eles precisam antecipar o que é provável que os alunos realizem e se eles vão	- O que achou da aula? - Você acredita que os alunos conseguiram compreender o que estava sendo trabalhado em sala de aula? - Você acredita que o conteúdo trabalhado motivou os alunos a participarem da aula? - O que motiva os alunos em aulas sobre Combinatória? - Que tipos de dificuldades os alunos encontram nesse conteúdo? - Acha possível que os alunos busquem outros tipos de estratégias para resolução dos problemas? Cite exemplos dessas estratégias.

	achar a tarefa fácil ou difícil. Eles também devem ser capazes de ouvir e interpretar o raciocínio dos alunos. Cada uma destas tarefas requer uma interação entre o entendimento matemático específico e a familiaridade com os alunos e os seus pensamentos matemáticos[5]. (BALL, THAMES E PHELS, 2008. p.9.).	- Precisaria de mais aulas para continuar este conteúdo? - Por que a escolha deste(s) problema(s) combinatório(s) para a aula? - Suas expectativas foram alcançadas? Por quê?
	Conhecimento do conteúdo e de ensino Saber combinado entre o conhecimento sobre a Matemática e sobre o ensino. Os professores precisam da sequência de conteúdo específico para o ensino, decidir qual o exemplo para começar e que exemplos deve usar para levar o aluno mais fundo no conteúdo. Durante uma discussão em sala de aula, os professores têm que decidir quando pedir mais esclarecimento, quando usar o comentário de um aluno para fazer a ligação com o conteúdo matemático, e quando pedir uma nova pergunta ou constituir uma nova tarefa para a aprendizagem dos alunos. Cada um destes requer uma interação entre a compreensão matemática específica e uma compreensão de questões pedagógicas que afetam a aprendizagem do aluno[6]. (BALL, THAMES E PHELS, 2008. p.9.).	- Como você faz o planejamento de suas aulas? - Quais fontes você usa? - Onde se baseia para elaborar e propor as questões de Combinatória? - Qual livro utiliza? - Acredita que o planejamento deu conta da aula que você ministrou? - Você mudaria alguma coisa que foi planejada/trabalhada na aula? - Que dificuldades você encontrou no planejamento/na aula? - De que maneira é possível ajudar os alunos na superação das dificuldades? - Que outros recursos utilizariam?

[5] Tradução nossa. Em inglês: "Because of this, we categorize it as *knowledge of content and students (KCS)*, atype of pedagogical content knowledge that combines knowing about students and knowing about mathematics. When choosing an example, teachers need to predict what students will find interesting and motivating. When assigning a task, they need to anticipate what students are likely to do with it and whether they will find it easy or hard. They must also be able to hear and interpret students' emerging and incomplete thinking. Each of these tasks requires an interaction between specific mathematical understanding and familiarity with students and their mathematical thinking.

[6] Tradução nossa. Em inglês: "*knowledge of content and teaching (KCT)*, is knowledge that combines knowing about teaching and knowing about mathematics. Many of the mathematical tasks of teaching require mathematical knowledge that interacts with the design of instruction. Teachers need to sequence particular content for instruction, deciding which example to start with and which examples to use to take students deeper into the content. They need to evaluate the instructional advantages and disadvantages of representations used to teach a specific idea. During a classroom discussion, they have to decide when to ask for more clarification, when to use a student's remark to make a mathematical point, and when to ask a new question or pose a new task to further students' learning. Each of these requires an interaction between specific mathematical understanding and an understanding of pedagogical issues that affect student learning."

	Conhecimento do conteúdo e currículo Rocha (2011), ao interpretar Ball (2008), afirma que essa categoria seria um refinamento do Conhecimento de conteúdo e ensino, um avanço na categorização. Seria o professor saber, por exemplo, que o conteúdo de Combinatória pode ser trabalhado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.	- Em que ano é possível iniciar o trabalho com a Combinatória? De que forma? - Como você iniciaria o trabalho com esse ano escolar que você está defendendo que a Combinatória seja trabalhada?

Fonte: A autora.

A análise e coleta de dados serão apresentadas no capítulo seguinte. O intuito não é fazer comparativo quanto às aulas, mas saber como elas ocorrem, realizar uma análise dos conhecimentos que os professores apresentam e mobilizam durante suas práticas, já que é o ano em que a Combinatória mais ocorre. Desse modo estabelecendo as relações entre o conhecimento sobre a Combinatória aposto à prática docente escolar. E, nesse sentido, poder trazer novos elementos para o ensino de Combinatória.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A pesquisa teve como principal objetivo analisar conhecimentos docentes sobre o ensino de Combinatória em turmas do 2º ano do Ensino Médio. Os objetivos específicos foram analisar o conhecimento do conteúdo através das situações (tipos de problemas) combinatórias trabalhadas pelo professor, dos invariantes explicitados por professores ao ensinar Combinatória e das representações utilizadas e estimuladas por professores ao ensinarem Combinatória e investigar que Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo eles possuem.

Nesse sentido, a pesquisa foi realizada com dois professores com formação de Licenciados em Matemática. Houve acompanhamentos de todas as aulas de Combinatória que esses dois professores planejaram e ministraram em uma de suas turmas, bem como entrevistas com os mesmos.

As análises dos dados foram, predominantemente, qualitativas, a partir de trechos das aulas e das falas extraídas durante as entrevistas semiestruturadas, nas quais discutem sobre suas aulas, suas atuações e superação das dificuldades com o conteúdo envolvido.

Na sequência, apresentaremos e discutiremos os dados que foram coletados a partir da entrevista inicial, das aulas e das entrevistas finais. Nesse sentido, o texto se dividirá em análise das aulas, sobre as situações, os invariantes e sobre as representações utilizadas pelo professor. As análises das entrevistas serão divididas em três partes: conhecimento do conteúdo e de estudantes, conhecimento do conteúdo e de ensino e conhecimento do conteúdo e currículo. As falas foram transcritas e extraídas dos vídeos, as quais serão destacadas no texto. Os códigos dos professores foram definidos por P1 para o professor 1 e P2 para professor 2.

6.1 Formação e perfil dos sujeitos pesquisados - entrevista inicial

Na entrevista inicial procuramos identificar singularidades entre as formações iniciais e continuadas, e suas experiências com a Combinatória como alunos; suas vivências na escola básica, graduação, pós-graduação; e como professores. Foram perguntados a respeito de suas formações, em quais turmas já ensinaram o conteúdo de Combinatória e sobre seus recursos para trabalharem esse conteúdo.

Os participantes da pesquisa tinham a mesma formação inicial, como apontado anteriormente, era um dos critérios para a escolha dos sujeitos da pesquisa. Sendo assim, os dois participantes são formados em Licenciatura em Matemática, possuem especializações e têm mais de cinco anos de experiência em sala de aula. Segundo Tardif (2008), o professor tem sua prática consolidada após cinco anos de profissionalização. São saberes que vão se construindo ao longo do contato com o trabalho. Tardif (2014) define esses saberes como saberes experienciais, são os saberes específicos baseados em seu trabalho cotidiano e no conhecimento de seu meio. Entendemos que esses saberes são incorporados de forma individual e ao mesmo tempo em conjunto, pois o professor, ao longo dos anos, vai incorporando saberes a partir da interação com os alunos e com outros professores. Para Shulman (2005) o processo de ensino se inicia no momento em que o professor entende o que tem que aprender e como deve ensinar.

No quadro abaixo podem ser observadas informações sobre formação e tempo de atuação sobre os participantes da pesquisa.

Quadro 8 - Perfil dos participantes da pesquisa

Professor	**Instituição**	**Nível de Pós-graduação**	**Tempo de profissão**	**Tempo com turmas do 2º ano E.M**	**Turmas que já trabalhou a Combinatória**
P1	Faculdade de Igarassu (FACIG)	Especialização em Ensino da Matemática	8 anos	4 anos	2º e 3º ano do Ensino Médio.
P2	Fundação do Ensino Superior de Olinda (FUNESO)	Especialização em Docência do Ensino Superior	20 anos	20 anos	2º ano do Ensino Médio.

Fonte: A autora.

A partir do que foi exposto acima, podemos constatar que P2 possui bem mais de cinco anos de experiência em sala de aula e com turma de 2º ano do Ensino Médio, inclusive ensina a esse ano de escolarização há mais de quinze anos, enquanto que o P1, mesmo possuindo mais de cinco anos de experiência docente, possui quatro anos de experiência com turma do 2º ano Ensino Médio. Podemos considerar tempo suficiente para consolidação de muitos conhecimentos.

Nessa entrevista inicial foi identificado que apenas P1 possui especialização ligada diretamente à sua área de atuação, a Matemática. Os sujeitos dessa pesquisa têm formação em faculdades da rede particular de ensino, porém toda a atuação como professor do P2, sempre se deu na rede pública de ensino. P1 se divide em ensinar alunos da rede pública e particular de ensino. P1 trabalha os três turnos, enquanto P2 trabalha nos horários da manhã e tarde. Os dois professores atualmente ensinam em turmas distintas dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

6.2 Experiência com a Combinatória quanto às suas formações

Nesta fase da pesquisa, buscamos conhecer as experiências escolares e durante a formação profissional, se essas experiências podiam intervir na sua prática docente em relação ao ensino de Combinatória.

Tardif (2014) aponta que a consciência profissional do professor está mergulhada no território do seu trabalho; esse território corresponde a tudo o que sabe fazer e dizer. Pensando nessa perspectiva, ele coloca que as próprias práticas profissionais estão enraizadas na história de vida e em sua personalidade e são portadoras de consequências não intencionais. Ou seja, para ele, o que os professores sabem sobre o ensino, sobre seus papéis e de como ensinar, vêm de suas histórias de vida, mais especificamente de suas histórias de vida escolar.

Nesse sentido procuramos identificar informações sobre que experiências tiveram durante sua vida escolar em relação ao conteúdo de Combinatória. Observamos que os professores envolvidos na pesquisa não recordam ter visto o conteúdo de Combinatória durante a vida escolar. Acreditamos que os ensinos que os alunos recebem durante sua vida escolar possam, de certa forma, contribuir para o aprimoramento futuro, ou seja, o conteúdo sendo trabalhado durante a vivência no ensino básico pode estimular o raciocínio, e, nesse sentido, pode minimizar dificuldades de aprendizagem e, consequentemente, a compreensão para o ensino, caso seja uma escolha a profissão de professor.

No Quadro 9 podem ser vistas a recordação do conteúdo de Combinatória em relação às formações dos professores.

Quadro 9 – Experiência com a Combinatória na formação

Professores	P1	P2
Recorda sobre a Combinatória no Ensino Básico	Não	Não
Recorda no período de Graduação	Sim	Não
Recorda na Pós-graduação	Não	Não

Fonte: A autora.

Percebemos durante as entrevistas que P2 afirma que não recorda do conteúdo de Combinatória em nenhum momento da história da sua vida. Em contrapartida P1 aponta que recorda durante a experiência na Graduação, porém não suficiente, como vemos no fragmento de sua fala:

> **P1**:"Foram poucos os momentos, se deram a partir de explicação resumida do assunto e com a presença de atividades em sala, mas nada em especial. Lembro que eram aplicadas fórmulas para resolver a Combinatória".

Nenhum dos pesquisados afirma ter tido uma disciplina específica durante a Graduação diretamente ligada à Combinatória. Shulman (2005), em seus estudos, aponta que uma das fontes de base de conhecimento do conteúdo de professores é a formação acadêmica. Podemos acrescentar que os cursos de Ensino Superior fazem parte desse processo para formação de professores através de seu currículo. O currículos como parte importante no processo incorpora aprendizagens da Matemática, assim, o conteúdo de Combinatória é incorporado à Matemática. Acreditamos que ele seja um conteúdo importante a ser desenvolvido nas instituições de ensino. Porém não podemos deixar de acrescentar que há uma gama de conteúdo a ser explorado nos cursos de Licenciatura em Matemática e talvez o conteúdo de Combinatória não esteja sendo priorizado.

Grossman, Wilson e Shulman (2005) acreditam que devido à matriz curricular extensa a ser vivenciada, provavelmente muitos professores iniciantes necessitam de aprofundar e até apreender novos conhecimentos do conteúdo e aprender a ensiná-lo, pois o olhar do aluno é diferente do olhar do professor sobre o conteúdo e este necessita ser construído durante sua formação acadêmica. Para esses autores, o olhar do professor sobre o conteúdo é construído durante sua formação acadêmica e no exercício da prática docente. Discordamos em parte dessa afirmação, pois acreditamos que, muitas vezes, o olhar do professor não é construído durante a formação acadêmica, mas durante sua vivência com o conteúdo durante as execuções de seu trabalho.

Considerando a fala acima do professor P1 ("Foram poucos os momentos, se deram a partir de explicação resumida do assunto e com a presença de atividades em sala, mas nada em especial. Lembro que eram aplicadas fórmulas para resolver a Combinatória"), podemos supor que a formação quanto ao conteúdo de Combinatória pode ter acontecido durante sua vivência na prática como docente. Ball, Hill e Bass (2005) como apontado anteriormente, afirmavam que a qualidade do ensino da Matemática depende do conhecimento do conteúdo dos professores. Sabemos que esses professores ensinam há mais de cinco anos e possuem conhecimento para ensinar, nesse sentido consideramos que o conhecimento do conteúdo dos professores deve ter sido adquirido com o tempo da profissão, através dos livros didáticos, alunos e colegas de profissão.

Souza (2009) defende que não se pode afirmar ou garantir que a formação de um professor se limite a uma única instituição formadora, mas de ações e relações coletivas de sujeitos:

> A formação escolar de um sujeito social no nível básico ou superior, nunca resulta apenas da prática dos docentes, mesmo legalmente. É resultante de um conjunto de práticas que se realizam na escola da Educação Básica e/ou Educação Superior, naturalmente da prática docente, mas também da própria prática discente e da prática gestora, bem como a prática epistemológica. E certamente, ainda influenciam, nessa formação, outras práticas sob as quais o formando vive a sua existência, quais sejam as práticas especificamente econômicas, políticas, institucionais, juvenis, sociais, numa expressão, suas experiências culturais. (SOUZA, 2009, p. 28)

Concordamos com Souza (2009) no que se refere que a prática do professor é a soma de um conjunto de práticas já existentes e práticas acometidas da vida escolar advinda da prática de outros professores. Esses professores que também foram formados pelas práticas de outros professores, também receberam formações de gestores e pelas suas próprias experiências com os estudantes, aliado ao fato de que também essas práticas estão relacionadas com a cultura, pois o humano é um todo, um ser social e cultural.

Quanto aos professores terem visto o conteúdo de Combinatória em cursos de pós-graduação, P2 não deu continuidade à sua formação ligada ao ensino de Matemática e por isso não teve acesso a tal conteúdo. Em contrapartida o P1 fez a Pós-graduação (Especialização) em Ensino da Matemática, mas afirma que não houve nenhuma disciplina ligada à Combinatória.

6.3 Recursos utilizados para a realização das aulas

Quanto aos recursos utilizados para a realização das aulas, foi observado que os professores utilizavam apenas o livro didático. Nesse sentido, direcionamos o olhar sobre o livro didático. Quanto ao uso do livro didático acredita-se que é um dos recursos mais utilizados pelos professores para apoio de seu trabalho. Quando perguntados com que frequência faz uso do livro didático para ensinar o conteúdo, P1 afirma que faz o uso com frequência, porém os alunos não utilizam livro. P2 diz usar o livro escolhido pela escola, porém os alunos também não utilizam livro. Os dois afirmam que os alunos não recebem o livro. Apesar de ambos afirmarem que utilizam o livro adotado pela escola, foi observado que P2 faz o uso de outras fontes para apoio de seu trabalho e P1 provavelmente utiliza o livro escolhido/adotado em anos anteriores, pois o seu livro é o escolhido pela escola para este ano, mas é datado de 2010.

Ainda sobre o livro didático, em tese deveria chegar para os alunos, pois o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) que foi criado em 2004, tem como propósito a distribuição de livros didáticos para os alunos do Ensino Médio da rede pública de ensino de todo o País. Atualmente a escolha dos livros didáticos é realizada pelos professores, através de uma plataforma virtual, a partir de uma catalogação de livros para serem escolhidos. Esses livros escolhidos serão utilizados nos próximos três anos letivos pelo professor da rede pública de ensino. Porém percebemos que os livros didáticos não chegam aos alunos, ao menos nessas duas escolas da Região Metropolitana do Recife.

Ao observar as aulas desses professores, notamos que os alunos só utilizam caderno e caneta durante as aulas e que, em geral, as anotações realizadas no caderno pelos alunos, são anotações existentes no livro didático. O professor, que tem o livro didático, escreve as definições dos conteúdos no quadro, consequentemente os alunos anotam em seus cadernos e em seguida o professor anota exercícios e aguarda que os alunos resolvam.

Os professores pesquisados foram questionados sobre quais outros recursos utilizaram ou utilizam para ministrar suas aulas. Responderam que usam apenas livros, e como observados, esses livros são utilizados como apoio para eles mesmos. Não há presença de outros recursos para o ensino de Combinatória.

No Quadro 10 aparece a lista dos livros utilizados por P1 e P2.

Quadro 10 - Livros utilizados pelos professores

Professores	**P1**	**P2**
Quantidade de livros usados	1	3
Referências dos livros que utilizaram durante as aulas de apoio ao ensino	Conexões com a Matemática. Editora responsável: Juliane M. Barroso. Editora: Moderna – 1ª ed. – São Paulo, 2010.	Fundamentos da Matemática elementar (Combinatória e Probabilidade). Samuel Hazzan. – 6ª ed. – São Paulo: Atual, 1993.
		Raciocínio Matemático. Jonofon Sérates. Editora: Vestcon – 2ª ed. 1996.
		Matemática contexto e aplicações. Luiz Roberto Dante – 2ª ed. – São Paulo: Ática, 2013.

Fonte: A autora.

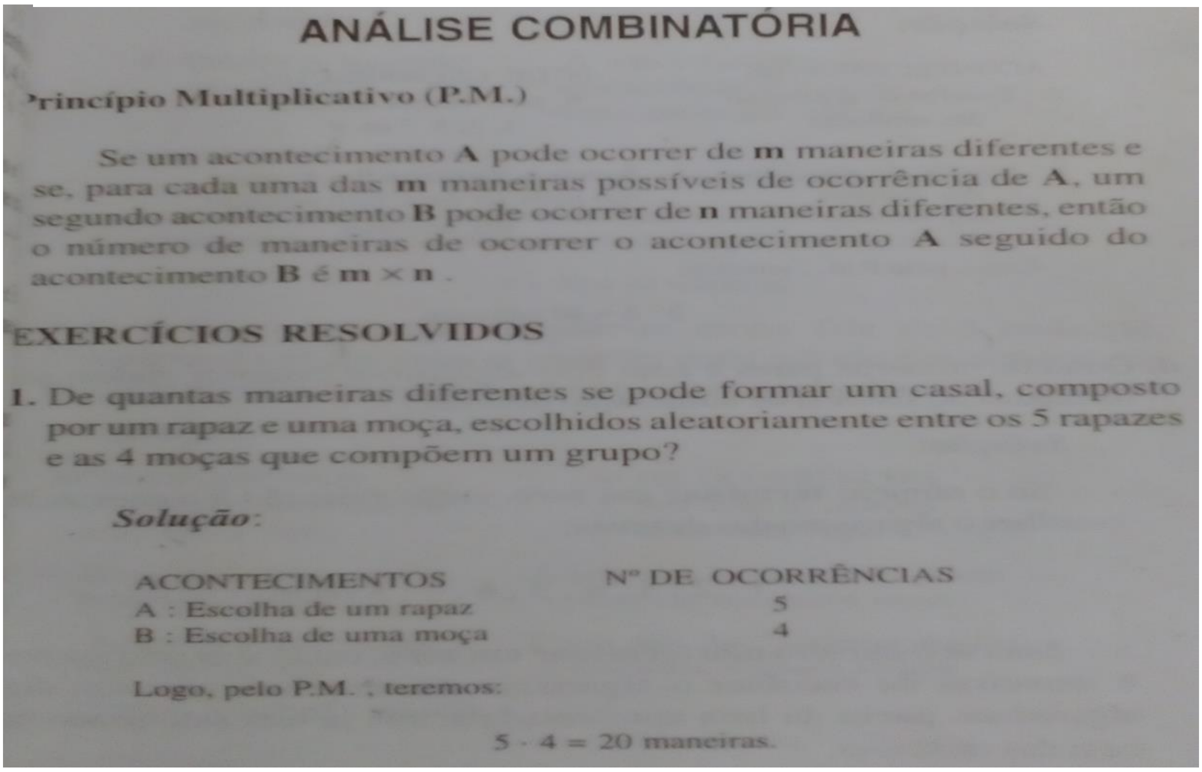
De acordo com o quadro acima, é possível notar que os livros utilizados por P2 são antigos, um dos livros que ele utiliza como apoio para suas aulas tem 22 anos da data de sua publicação e o outro 19 anos desde sua publicação. Parece que esses livros que utiliza foram adquiridos desde que iniciou a carreira de professor, desse modo, o ensino de Combinatória pode estar sofrendo influência dos aspectos do ensino de duas décadas atrás.

Os livros, por consequência do tempo, sofrem transformações, atualizações quanto aos termos e procedimentos para o ensino. Os livros que são específicos para aprendizagem escolar recebem modificações com maior frequência. Atualmente há realização de avaliações quanto aos livros didáticos, essa tarefa compete ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). O PNLD tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da Educação

Básica. As obras são avaliadas, após as avaliações, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. O Guia é encaminhado às escolas, que escolhem, entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico. Mas esse programa nem sempre se destinou a avaliação de livros, foi a partir de 1996 que foi iniciado o processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos para o PNLD. Até hoje o programa realiza essas avaliações. Livros que apresentam erros conceituais e desatualizações, entre outras falhas, são excluídos do Guia do Livro Didático. Como se pode perceber, as edições dos livros utilizadas por P2 são anteriores ao início do processo de avaliação pedagógica dos livros feitas pelo PNLD.

Abaixo, Figura 2, há um extrato de uma página do livro do ano 1993. Esse trecho do livro mostra a parte que inicia o trabalho de Combinatória. A imagem mostra um fragmento de uma explicação do ensino do produto cartesiano com a proposta de uma multiplicação direta.

Figura 2 - Imagem do livro utilizado por P2 – produto cartesiano



ANÁLISE COMBINATÓRIA

Princípio Multiplicativo (P.M.)

Se um acontecimento **A** pode ocorrer de **m** maneiras diferentes e se, para cada uma das **m** maneiras possíveis de ocorrência de **A**, um segundo acontecimento **B** pode ocorrer de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento **A** seguido do acontecimento **B** é **m** × **n** .

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. De quantas maneiras diferentes se pode formar um casal, composto por um rapaz e uma moça, escolhidos aleatoriamente entre os 5 rapazes e as 4 moças que compõem um grupo?

Solução:

ACONTECIMENTOS	Nº DE OCORRÊNCIAS
A : Escolha de um rapaz	5
B : Escolha de uma moça	4

Logo, pelo P.M. ∴ teremos:

$5 \cdot 4 = 20$ maneiras.

Fonte: Hazzan (1993).

É possível notar que o livro necessita de algumas atualizações em relação ao indicativo para a aprendizagem do produto cartesiano, porém nessa pesquisa não nos dedicaremos a analisar o livro didático, todavia, o ensino de Combinatória exige a necessidade de um trabalho mais sistematizado com o conteúdo, de preferência que sejam trabalhados os invariantes das situações, neste caso o invariante do produto cartesiano. Na investigação realizada por Pessoa (2009) foi verificado que os alunos utilizaram multiplicação direta para resolução de problemas de permutação e arranjo, assim levando ao erro, portanto, se o produto cartesiano, que de fato pode ser resolvido via multiplicação direta, for mal explorado, poderá influenciar os alunos a acreditarem que os demais tipos de problemas combinatórios também poderão ser resolvidos via este tipo de multiplicação. Outro ponto interessante é que a sequência exposta nesse livro é exatamente a maneira como o professor P2 realiza a o trabalho em suas aulas.

Consideramos importante o uso do livro didático para ensino e aprendizagem de professores e de alunos, mas não pode ser considerado como o único recurso. Silva (2015), por considerar o livro didático como um importante recurso para o ensino, na sua pesquisa se debruçou em analisar os livros do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2012, pousando o olhar sobre a Combinatória. O autor defende que quanto maior o número de situação e diversidade de problemas explorados pelo livro os alunos se depararem, maior a chance de se construir o conceito. Afirma que na educação brasileira o livro didático acaba se tornando uma das únicas opções que ainda pode ser acessada por uma grande parte de alunos e professores. Completa que o livro didático tem sido um apoio importante para o trabalho do professor e uma fonte permanente para a aprendizagem do aluno.

Nesse sentido, acreditamos que o livro é um material que guia o professor quanto ao seu trabalho e serve como apoio de aprendizagem do conteúdo, principalmente no início de sua carreira profissional; ou seja, o livro finda por ser parte integrante na formação do professor e, de certa forma, traduz o contexto das aulas. Porém o livro não pode ser visto como o único recurso.

6.4 Descrição das salas de aula e aulas de cada professor

Nesta seção iremos descrever o ambiente da sala de aula, o qual esclarece sobre o ambiente de pesquisa. Será também descrito de forma resumida como se sucederam as aulas dos professores pesquisados. O Quadro 11 mostra o quantitativo de encontros para observação das aulas e o quantitativo das aulas de cada professor. Salientamos que o quantitativo de aulas foi determinado por cada professor de acordo com seus respectivos planejamentos.

Quadro 11 - Quantitativo de encontro de observação de aulas, quantitativo de aulas e horas de aulas executadas pelos professores

Professores	Encontros	Quantitativo de aulas	Horas[7]
P1	7	11	2h 17 minutos
P2	6	12	5h 29 minutos

Fonte: A autora.

Os dois professores trabalharam as mesmas situações de Combinatória, porém P2 teve um quantitativo maior de aula e quantitativo maior de horas efetivamente trabalhadas em aula. Quando perguntados sobre o quantitativo de aula, P1 e P2 afirmaram que normalmente utilizam-se desse tempo para trabalhar o conteúdo. A seguir será tratado da descrição das salas de aula dos sujeitos pesquisados.

6.4.1 Sala de Aula e Aulas do Professor 1 (P1)

Antes de realizar a descrição das aulas, iremos caracterizar um pouco a sala de aula. A turma que estava presente nas aulas de P1 era composta de aproximadamente 25 alunos, porém haviam 42 inscritos na caderneta. O turno das aulas era a tarde, nessa turma existia um rodízio de alunos, ou seja, em dias alternados parecia que a sala era composta por outra turma devido à ausência de alunos, ou seja, enquanto um grupo não frequentava, outro estava presente. Os alunos tinham idades entre 17 e 25 anos, com a presença de duas alunas com mais de 30 anos. Foi observado que os alunos que se sentam nas bancas próximas ao birô do professor se envolvem com as aulas, enquanto os alunos que se posicionam no fundo da sala, pouco participam.

Observando a caderneta do professor foi confirmado que Combinatória já estava no planejamento anual. O professor inicia o primeiro dia do conteúdo de Combinatória

[7] O tempo contado foi o de aula efetivamente ministrada.

apontando tudo o que vai ser trabalhado ao longo dos próximos dias, permutação, arranjo e por fim combinação. Inicia chamando atenção que o assunto é novo e que os alunos não precisam se preocupar, pois o assunto será tratado devagar. Retoma como se resolve um número de fatorial. Provavelmente a aula sobre fatorial deve ter sido trabalhada anteriormente. As aulas sobre fatorial não foram observadas. Porém esclarecerei alguns aspectos sobre o tema.

Ressaltamos que o fatorial é importante para o cálculo da Análise Combinatória. Fatorial é um número natural representado pela letra **n!** e define-se como o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a **n**. Por exemplo: 3! = 1 X 2 X 3 = 6. No Quadro 12 pode-se perceber os números e o resultado do fatorial do número 1 até o número 8:

Quadro 12 - Apresentação do fatorial

N	**n!**
1	0 X 1 = 1
2	1 X 2 = 2
3	1 X 2 X 3 = 6
4	1 X 2 X 3 X 4 = 24
5	1 X 2 X 3 X 4 X 5 = 120
6	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6 = 720
7	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6 X 7 = 5.040
8	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6 X 7 X 8 = 40.320

Fonte: A autora.

Como dissemos anteriormente, o professor iniciou sua primeira aula retomando fatorial, em seguida iniciou o que denominou de ideias de permutação. Nas aulas que se sucederam, apresentou: permutação simples e com repetição arranjo simples e por fim combinação. Abaixo está a descrição de forma resumida das 11 aulas ministradas por P1.

6.4.1.1 Síntese das aulas de P1

Aula 1: O professor retoma o assunto sobre fatorial, realiza no quadro o exemplo de 4!, solicita que eles cooperem verbalmente quanto ao cálculo das parcelas das multiplicações. Ao encontrar o resultado 24, diz que o número de 24 pode ser representado por 4!, ou 4! pode ser representado pelo número 24. Inicia com permutação, expõe uma pequena definição e escreve no quadro. Escreve dois exercícios de permutação no quadro e aguarda que os alunos copiem. Parece que durante as aulas os cálculos das parcelas das multiplicações são importantes para o professor, há certa imposição, em todas as aulas, de que os alunos respondam junto com o professor os resultados das multiplicações.

Aula 2: O professor responde os dois exercícios propostos no quadro na aula anterior. Em um determinado momento da aula fala do jogo da mega sena. Adiciona mais dois exercícios no quadro, aguarda que os alunos registrem no caderno e respondam. Aguarda um determinado tempo e em seguida realiza a correção.

Aula 3: Esta aula foi de permutação com repetição. Inicia apontando que os alunos terão que realizar simplificações usando o fatorial. Essa aula ficou mais direcionada à resolução de problemas de fração. Ao final da aula definiu o que seria permutação com repetição escrevendo no quadro e aguardou que os alunos registrassem no caderno.

Aula 4: Inicia a quarta aula com exercícios de permutação com repetição e em seguida resolve o problema no quadro. Dispõe mais dois exercícios no quadro, aguarda que os alunos copiem e resolvam, em seguida faz uma correção. Em alguns momentos vai até a certeira de alguns alunos e pergunta se estão com dúvidas.

Aula 5: Inicia a aula retomando um dos exercícios de permutação que não finalizou a correção. Realiza mais dois exercícios e faz a correção.

Aula 6: Escreve duas questões de permutação no quadro e solicita que os alunos resolvam sozinhos. Pede para que ao final da aula as resoluções sejam entregues a ele. Avisa que as atividades entregues complementarão a nota de prova.

Aula 7: Aula sobre arranjo simples. Inicia retomando sobre fatorial e permutação. Escreve um exemplo de uma situação de arranjo no quadro e resolve a situação. Escreve a definição e a fómula de arranjo. Aguarda que os alunos copiem.

Aula 8: Escreve dois exercícios de arranjo simples, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro.

Aula 9: Escreve dois exercícios de arranjo simples, diferentes dos passados na aula anterior, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro.

Aula 10: Aula sobre combinação. Escreve a definição e a fórmula de combinação no quadro. Aguarda que os alunos copiem. Na sequência escreve um exemplo de uma situação de combinação e resolve o problema. Por fim escreve um problema no quadro, aguarda que os alunos anotem e resolvam. Após determinado tempo, realiza a correção no quadro.

Aula 11: Escreve três exercícios de combinação, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro.

Após a descrição de cada aula, em síntese, pode-se apontar que a proposta de ensino é dada de forma vertical, ou seja, não há solicitação dos alunos quanto à construção do conhecimento. Em relação aos exercícios propostos, em geral é solicitado que a resolução seja individual, cada estudante resolve no caderno. As aulas se limitam a apresentação no quadro e exercícios, também não há presença de livro didático, exceto para orientação do próprio professor. As aulas foram trabalhadas sempre com as mesmas características, o P1 escreve as definições sobre as situações combinatórias no quadro, em seguida escreve um primeiro exemplo para resolução do problema e o professor resolve a primeira situação. Na sequência dispõe mais alguns exemplos no quadro, aguarda que os alunos resolvam em seus cadernos e depois ele mesmo realiza a resolução do problema com correção no quadro. Na seção abaixo serão descritos o ambiente e as aulas do P2.

6.4.2 Sala de Aula e Aulas do Professor 2 (P2)

A turma do professor P2 era composta por 45 alunos inscritos na caderneta, porém geralmente permanecia em sala um quantitativo de 32 alunos. Os alunos tinham idades entre 16 e 18 anos. Diferentemente da turma do P1, existia maior participação e envolvimento do grupo sala com as aulas. As aulas aconteciam no turno diurno.

Observando a caderneta do professor foi confirmado que Combinatória já estava no planejamento anual. A proposta de ensino ocorre de forma vertical, porém há algumas poucas tentativas quanto à solicitação dos alunos participarem. Em poucos momentos o P2 chamava os alunos à participação e busca suas opiniões e, quando solicitava a opinião dos alunos, ao receber respostas dos mesmos, pouco explorava esse momento. Em relação aos exercícios propostos, em geral é solicitado que a resolução seja individual, cada estudante resolve no caderno. As aulas se limitam à apresentação no quadro e exercícios, não há presença de livro didático, exceto para orientação do próprio professor em relação ao trabalho, assim como o P1.

Foi realizado o acompanhamento de todas as aulas referentes à Combinatória. O professor iniciou sua primeira aula com ideias de permutação. Nas aulas que se sucederam, ele trabalhou permutação com repetição, arranjo simples e por fim combinação, na mesma sequência que P1. Porém P2 faz uma aula que trata de combinação relacionada com a Geometria. Abaixo está a descrição, de forma resumida, das 12 aulas ministradas por P2.

6.4.2.1 Síntese das aulas P2

Aula 1: Aula de permutação. Iniciou com uma questão, a qual ele mesmo solucionou no quadro. Aguarda para que os alunos registrem no caderno.

Aula 2: Escreve dois exercícios de permutação, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro.

Aula 3: Escreve dois exercícios de permutação, diferentes dos apresentados na aula anterior, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro.

Aula 4: Escreve dois exercícios de permutação, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência, solicita que algum aluno responda no quadro. Por fim, auxilia o aluno, no quadro, quanto à resolução do problema.

Aula 5: Escreve um problema de permutação no quadro, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro explicando a resolução

Aula 6: Aula de permutação com repetição. Iniciou com a definição. Em seguida apresentou uma questão a qual ele mesmo soluciona no quadro. Aguada para que os alunos registrem no caderno. Coloca outra questão no quadro e uma aluna solicita que desta vez ele aguarde que os alunos respondam. O professor pergunta quem acertou e nenhum aluno tinha conseguido encontrar a resposta correta da questão de permutação com repetição.

Aula 7: Aula de arranjo simples. Inicia com um exemplo de questão de arranjo. Apresenta o exemplo no quadro, vai solucionando a questão, explicando aos alunos como se resolve. Apresenta a fórmula. Afirma que vai ensinar aos alunos como diferenciar uma questão de arranjo de uma de combinação. Tenta esquematizar como se estrutura a fórmula a partir da teoria dos conjuntos.

Aula 8: Escreve um exercício de arranjo, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro utilizando a fórmula e o PFC.

Aula 9: Escreve dois exercícios de arranjo, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro.

Aula 10: Aula de combinação simples. Iniciou com com a definição. Chama atenção quanto à diferença de arranjo e combinação. Tenta esquematizar como se estrutura a fórmula a partir da teoria dos conjutos. Em seguida apresenta a fórmula. Aguarda que os alunos registrem em seus cadernos.

Aula 11: Escreve dois exercícios de combinação, aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e respondam. Na sequência faz a correção no quadro.

Aula 12: Aula de aplicação da Análise Combinatória na Geometria. Escreve três exercícios envolvendo combinação e Geometria. Aguarda que os alunos copiem em seus cadernos e na sequência resolve os problemas propostos no quadro. Ao final solicita que os alunos registrem em seus cadernos problemas de permutação para serem solucionados em casa.

Assim como o P1, o P2 escreve as definições matemáticas, em seguida escreve um primeiro exemplo no quadro para resolução dos problemas, o professor resolve a primeira situação. Na sequência dispõe de mais alguns exemplos no quadro, aguarda que os alunos resolvam em seus cadernos e depois faz as correções no quadro. Diferentemente de P1, em alguns poucos momento os alunos de P2 são solicitados a participarem das aulas, resolvendo exercício no quadro. Essa situação será apresentada de forma detalhada e analisada no tópico das observações das aulas.

Foi observado que os dois professores dedicam um tempo maior à situação de permutação. Observamos também que os professores trabalharam os conteúdos na mesma sequência, permutação com repetição, arranjo simples e por fim combinação. Quando questionados sobre a sequência de ensino quanto à ordem das situações exploradas em sala de aula, ambos afirmaram que era a sequência que os livros apresentam.

6.5 Conhecimento do Conceito - observação das aulas à luz da Teoria de Gérard Vergnaud

Nesta parte será disposta a análise das observações. Como já mencionado no capítulo 2 desse estudo, Vergnaud (1986) aponta que existe a necessidade de estudar a partir de campos conceituais e não os conceitos isolados. Para ele um conceito pode ser definido como um tripé de três conjuntos (S, I e R), S: o conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I: o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito; R: o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas.

Pessoa e Borba (2007) materializam a definição de conceito definido como um tripé de Vergnaud no conteúdo de Combinatória; para elas a relação de situações que dão significado ao conceito (S), podem ser permutação, combinação, arranjo, produto cartesiano; em relação às propriedades invariantes (I) são as relações/propriedades que envolvem a ordem e a escolha dos elementos nas situações envolvidas e por fim sobre as representações simbólicas (S) são as diferentes formas de resolver as situações-problema, que podem ser representadas por materiais manipulativos, figuras, desenhos, listagem, árvore de possibilidades, quadros, diagramas, Princípio Fundamental da Contagem e fórmula.

Foi sobre essa perspectivas que pousamos o olhar sobre as aulas dos professores envolvidos nessa pesquisa, nesse sentido a análise das observações das aulas se dividirá em três eixos: as situações, os invariantes e as representações. Buscou-se verificar alguns pontos que serão mais detalhados em cada parte dos eixos de análise.

6.5.1 As Situações

Vergnaud (1990) defende que o conhecimento está relacionado à competência, a qual ele define como ação julgada adequada para tratar uma situação. Sendo situação: o conjunto de situações que dão sentido ao conceito. Para Pessoa e Borba (2007) as situações no conteúdo de Combinatória que dão sentido ao conceito podem ser permutação, combinação, arranjo e produto cartesiano.

Analisamos quais situações (tipos de problemas) foram apresentadas em sala de aula e de que forma. As situações que foram identificadas nos trabalhos de sala de aulas executadas pelos professores foram: permutação (com e sem repetição), arranjo simples e combinação. Como pode ser visto no Quadro 13.

Quadro 13 - Situações trabalhadas pelos professores

Professores	**P1**	**P2**
Situações trabalhadas pelos professores durante as observações	Permutação (com e sem repetição)	Permutação (com e sem repetição)
	Arranjo simples	Arranjo simples
	Combinação	Combinação

Fonte: A autora.

Foi observado que os professores trabalharam na mesma sequência, iniciando por permutação, seguindo por arranjo e finalizando com combinação. Esse tipo de organização para ensino se deve, de acordo com a fala dos professores, à maneira de como os conteúdo são apresentados nos livros.

O que nos chamou atenção foi que em nenhuma das aulas apareceu a situação de produto cartesiano, que para Pessoa e Borba (2007) pode ser caracterizada como no exemplo a seguir: para a festa de São João da escola tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz). Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Esperávamos que eles trabalhassem a ideia, embora não nominando por produto cartesiano, pois sabemos que os professores do Ensino Médio não chamam ou não conhecem como tal, mas que utilizassem a situação como parte do trabalho do conteúdo, podendo ter destacado no início de suas aulas. O produto cartesiano consta como um dos tipos de problemas que são destacados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como importantes para conhecimentos dos alunos. Os PCN destacam grupos de situações relacionadas às Estruturas Multiplicativas que precisam ser exploradas nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Entre elas estão “as situações associadas à ideia de combinatória” (BRASIL, 1997). Sendo assim, seria importante incorporar o produto cartesiano como um dos passos inicias para o desenvolvimento de situações mais complexas como as de arranjo, permutação e combinação.

Segundos os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012, p. 58) o professor pode elaborar situações em que o estudante seja levado a realizar diferentes combinações de elementos. Por exemplo, situações em que se pergunte ao estudante: diante de duas calças e três camisas, de quantas maneiras diferentes podemos combiná-las e quais são essas maneiras. Nesse sentido, os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) consideram o produto cartesiano como parte importante para a compreensão da Combinatória.

Identificamos também que as situações são apresentadas a partir de um problema a ser resolvido. Abaixo serão apresentados como as situações são iniciadas e de que forma por cada professor. As aulas são de maneira geral, expositivas. Observamos que ambos, P1 e P2, iniciaram suas atividades em sala com um problema a ser resolvido. P2 parece propor questões com maior nível de dificuldade, esta disposição pode estar relacionada como sua maior experiência com turmas de 2º E.M. e como a maior quantidade de livros que acessa para a preparação da aula. O Quadro 14 mostra como P1 e P2 iniciaram as aulas de permutação.

6.5.1.1 Situação de permutação

Quadro 14 - Aulas de P1 e P2 sobre permutação

Professores	**P1**	**P2**
Forma como apresenta	Apresenta no quadro: Dado um conjunto de elementos, chamamos de Permutação de elementos de uma sequência. Como exemplo dado um certo ANAGRAMA. Quantos anagramas podemos formar com a palavra CINEMA?	Apresenta no quadro: Quantos números de 4 <u>algarismos distintos</u> podem ser formados usando-se apenas os algarismos 4, 5, 6, 7,8?
Forma como	Soluciona o problema que apresentou	Exemplifica verbalmente a

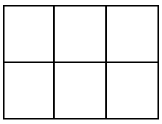
resolve	no quadro: 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720	permutação da palavra amor. Soluciona o problema que apresentou no quadro inicialmente: M | C | D | U 4 | 6 | 7 | 5/8 5.4.3.2 = 120

Fonte: A autora.

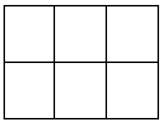
Observamos que os dois professores utilizaram um grande período de tempo trabalhando com permutação, como pode ser observado nas sínteses das aulas descritas anteriormente. P1 utilizou 6 do total de 11 aulas e P2 utilizou 7 do total de 12, ou seja, levando em consideração o total de aulas, os dois professores gastaram mais de 50% do tempo com permutação. Pessoa (2009) Correia e Oliveira (2011) e Azevedo e Borba (2012) apontam os problemas de permutação como os de mais difícil resolução por alunos de diferentes anos escolates. P1 inicia com a definição sobre permutação e em seguida exemplifica a situação. P2 não faz nenhuma menção ao que seja permutação, inicia diretamente propondo um problema a ser resolvido. Resolve a situação proposta e ao final pergunta se os alunos entenderam, alguns alunos afirmaram que não entenderam, mesmo assim o professor dá seguimento ao segundo exemplo. Inferimos que ele acredita que os alunos são capazes de aprender a partir de outros exemplos. Apresenta o segundo problema e soluciona tentando a cooperação dos alunos. Abaixo segue o Quadro 15 com a representação do problema apresentado por P2.

Quadro 15 - Problema apresentado por P2

Quantos números pares com três algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 6, 7, 8 e 9?



3. 2.1 = 6



3.2.1= 6

6 + 6 = 12 (Total de 12 algarismos)

Fonte: A autora.

Após o segundo exemplo, P2 pergunta se há alguma dúvida, os alunos respondem que não. Em sua dissertação Silva (2015) defende que quanto maior for o número de situações e diversidades de problemas explorados pelo livro, mais chance haverá para os alunos de construir o conceito. Acreditamos que o professor poderia ter feito uma abordagem diferente em relação ao conteúdo, pois considerar que um novo exemplo possa esclarecer mais sobre um determinado conteúdo e possa levar à compreensão e aprendizagem do conteúdo de Combinatória, não nos parece pedagogicamente coerente, pois pode direcionar o aluno a uma condição de se adaptar ou memorizar determinadas características das situações e não propriamente estimular o raciocínio combinatório.

6.5.1.2 Situação de arranjo

No Quadro 16, abaixo, está como os professores iniciaram suas aulas com a situação de arranjo.

Quadro 16 - Situação de arranjo

Professores	**P1**	**P2**
Forma como apresenta	Apresentou no quadro: Quantos números de três algarismos podemos formar com os números 1, 2, 3, 6, 7? Apresentou uma definição para o arranjo.	Afirmou oralmente que a partir do problema apresentado deduzirá a fórmula de arranjo. Apresentou o problema: Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados usando-se apenas os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
Forma como resolve	A partir da fórmula	A partir da fórmula

Fonte: A autora

A situação de arranjo é apresentada de forma bem semelhante pelos dois professores. Iniciaram a partir de um problema a ser resolvido. Observamos que os problemas que apresentaram eram bem parecidos. Apesar de P2 afirmar que vai levar os alunos a compreenderem a fórmula, a explicação não fica clara para os alunos. Ao que parece, P1 possui mais consciência sobre arranjo que P2. Observe a fala de P2:

> Fala de P2: "Hoje o assunto vai ser arranjo e combinação. Nós já estávamos falando, em alguns dos exercícios, sobre arranjo, mas só que não estávamos utilizando a fórmula e sim um esquema."

Porém anteriormente a essa aula, P2 tinha apenas trabalhado com questões de permutação. Há certa confusão sobre as situações.

6.5.1.3 Situação de combinação

No Quadro 17, abaixo, está como os professores iniciaram suas aulas com a situação de combinação e como a apresentam.

Quadro 17 – Situação de combinação

Professores	**P1**	**P2**
Forma como apresenta	Exemplifica oralmente. Define o conceito de combinação, apresenta a fórmula e os problemas. Exemplo 1: Ao sair de uma festa 10 amigos se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mãos foram trocados?	Com anotações no quadro tenta mostrar aos alunos como se constrói a fórmula de combinação. Apresenta a fórmula e o problema. Problema: dispondo-se de um grupo de 22 pessoas, de quantos modos podem ser formadas comissões de 4 pessoas?
Forma como resolve	A partir da fórmula	A partir da fórmula

Fonte: A autora

A situação de combinação é apresentada de forma distinta entre os dois professores. Enquanto P1 tenta explicar a partir das características da situação, P2 apresenta a partir de construção/demonstração da fórmula que aparentemente seriam os invariantes da situação de combinação. Observamos que apesar de terem apresentado as situações de forma diferente, há o mesmo objetivo que é ensinar a resolução dos problemas através da fórmula. De maneira geral, as situações são apresentadas a partir de um problema a ser resolvido.

6.5.2 Os Invariantes

Nesta etapa buscamos verificar como é realizado o trabalho em relação aos invariantes das situações. Tratamos nesse trabalho o termo invariante relacionado ao invariante do conceito, ou seja, o que se caracteriza como invariante está relacionado às particularidades de cada significado do conceito, melhor dizendo, são as definições em que compõem as situações de produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação. Para Pessoa (2009) os invariantes do conceito são propriedades de um conceito, essas propriedades não variam, seja qual for a situação em que o conceito esteja inserido.

Os invariantes estão relacionados às particularidades de cada significado do conceito que compõem as situações de produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação.

Quadro 18 - Situações e invariantes

Situação	**Invariante**
Permutação	Invariantes: (1) Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Arranjo	Invariantes: (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Combinação	Invariantes: (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0< p < n$, p e n naturais; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Fonte: Pessoa (2009, p.75)

Neste momento houve uma análise para identificar quais invariantes recebem destaque, quais invariantes das situações são apresentados e se são, de que forma. E ainda se os invariantes são trabalhados de maneira explícita ou implícita. Identificamos que os professores (P1 e P2) explicitaram os invariantes em suas aulas. Esses invariantes foram escritos no quadro como definições e características de cada situação trabalhada em aula, como podem ser observados nos Quadros 19 e 21 dos invariantes explicitados por P1 e P2, respectivamente. As apresentações das características dos invariantes foram reescritas exatamente da maneira que os professores dispuseram nos quadros e oralmente durante as aulas.

6.5.2.1 Invariantes trabalhados em aulas do P1

Quadro 19 - Invariantes explicitados por P1

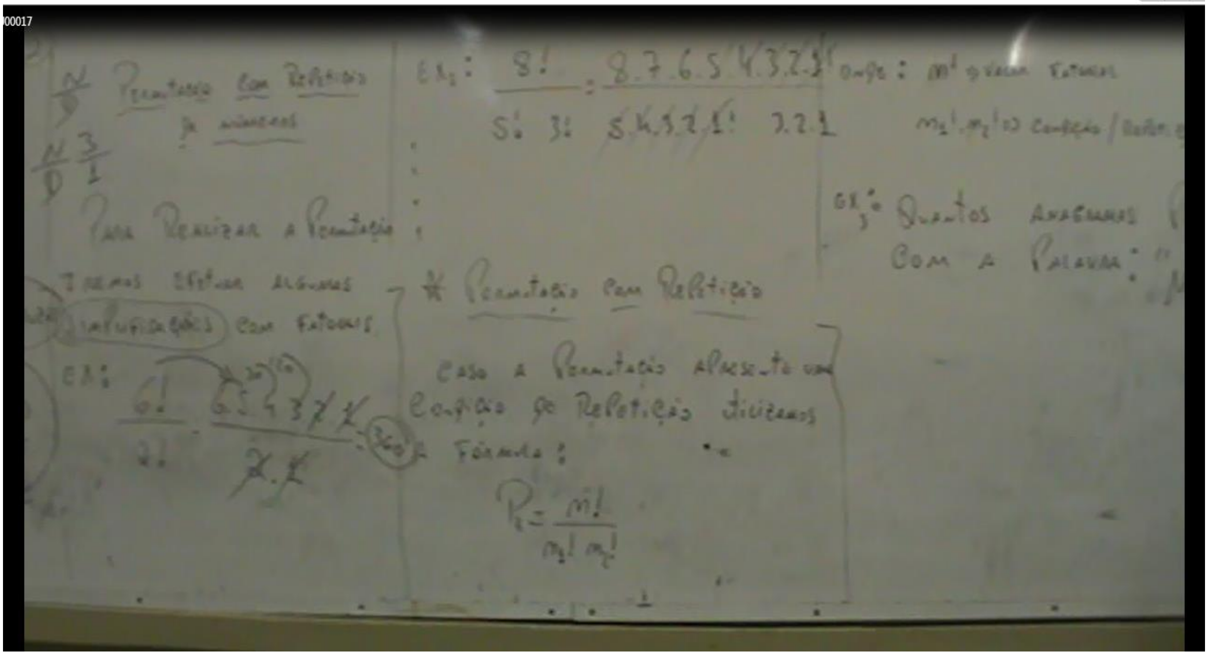
Professor	**P1**	
Os invariantes receberam destaque	Sim	
Invariantes das situações que são apresentadas no quadro em sala de aula	Permutação	Dado um conjunto de elementos, chamamos de Permutação de elementos de uma sequência. Como exemplo dado, ANAGRAMA.
	Arranjo	Quando trabalhamos com uma possibilidade, onde há certa condição, trabalhamos arranjo.
	Combinação	Definimos como combinação (n) elementos tomados (p) a (p), qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) escolhido entre os possíveis.
A forma como foram apresentados	Permutação	No quadro. Seguido da apresentação de fórmula. Oralmente: iremos trabalhar com o termo anagrama. É como o exemplo dos livros: "tenho 5 livros e quero organizar eles independente da ordem, pode ser o primeiro, o último, do meio, não importa a ordem, mas eu quero organizar ele. Essa forma de organizar posso transformar em fatorial. Da mesma forma eu posso trabalhar com a palavra. É justamente a quantidade de letras que eu tenho no total, mesmo que eu embaralhe independente da posição, independente da ordem é mais uma possibilidade que eu tenho". Posso transformar isso em fatorial.
	Arranjo	No quadro. Seguido da apresentação de fórmula.

	Combinação	Oralmente: Na combinação vai se trabalhar com uma observação ainda maior. Dentro da combinação vocês vão perceber que eu vou ter casos de quando eu organizar alguns pares de possibilidades, quando eu organizar os possíveis eventos que pode acontecer, possa ser que essas possibilidades se repitam. Exemplo: A B e B A. No quadro. Seguido da apresentação de fórmula.

Fonte: A autora.

Apesar de P1 de ter iniciado tentando destacar os invariantes da permutação, direciona-o para a prática de resolução através do uso de fatorial. Apesar de haver uma tentativa de explicação dos invariantes, o que consideramos importante para a compreensão dos problemas, a ênfase é no trabalho com fatorial. P1 ainda faz uma tentativa de explicitar os invariantes da permutação com repetição. Observe na Figura 3.

Figura 3 - Destaque do invariante de permutação com repetição trabalhada por P1



Fonte: A autora.

Após a definição no quadro, afirma:

Fala P1: “Para realizar a permutação iremos efetuar algumas simplificações com fatorial. Caso a permutação apresente uma condição de repetição, utilizamos a fórmula”.

Em seguida apresenta a fórmula para os alunos, conforme demonstrado no Quadro 20, abaixo:

Quadro 20 - Apresentação da fórmula da permutação por P1

Fórmula: $Pr: \dfrac{n!}{n1!\ n2!}$ n!= valor fatorial n1! e n 2! = condição/repetição

Fonte: A autora.

Mesmo com essa tentativa não fica claro o invariante da situação de permutação, pois seria necessário que ele deixasse explícitas as características que envolvem escolha e ordem dos elementos, ou seja, apontar que para a permutação serão usados todos os elementos do conjunto, cada um apenas uma vez, para os casos sem repetição, a ordem dos elementos gera nova possibilidade. Quando existe há a presença de algum elemento igual, é o caso de permutação com repetição. Apontou apenas que a permutação com repetição é quando há a presença de algum elemento igual.

Quanto ao invariante do arranjo, tenta fazer relação com fatorial, ressalva que é em outra situação. Não deu ênfase ao invariante, apresenta a fórmula e inicia a solução dos problemas. Quanto ao invariante de combinação, ao chamar atenção ao exemplo: A B e B A, quer afirmar que podem estar no mesmo conjunto, porém também não fica claro. A partir dos primeiros exemplos dados em aula, ele poderia ter explorado os invariantes de forma mais clara, discutindo com os alunos o que o problema solicita e destacando as características desta solicitação, entretanto, optou pelo uso da fórmula.

Em seguida apresentaremos os invariantes explicitados por P2 durante suas aulas.

6.5.2.2 Invariantes trabalhados em aulas do P2

Quadro 21 - Invariantes explicitados por P2

Professor	**P2**
Os invariantes receberam destaque	Sim

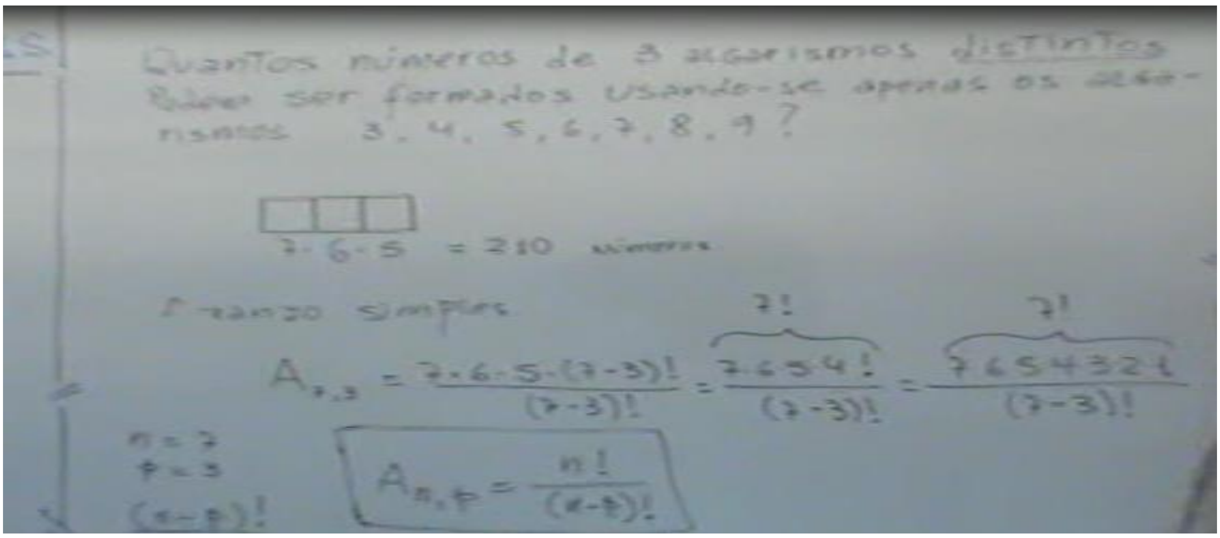
Invariantes das situações que são apresentadas	Permutação com repetição	A permutação de **n** elementos dos quais **α** é de um tipo, **β** é de outro, com **α + β +γ = n**, é dada.
	Arranjo simples	Agrupamentos: Conjunto fonte: conjunto finito F={ a1, a2, a3,..an} Números de elementos do conjunto F: n. Números de elementos do agrupamento: p onde p ≤ n. Seja F= { a, b, c } e os agrupamentos que se diferenciam (a, b) ≠ (b, c) pela ordem (a, b) ≠ (a, c) pela natureza A= {(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b) } $A3,\ 2= \frac{3!}{(3-2)} = \frac{3!}{1!} = 6$
	Combinação simples	Combinação simples de **p** elementos de F, é todo agrupamento formado por **p** de F distintos (P ≤ n) diferenciando-se apenas pela natureza. (a, b) ≠ (a, c) pela natureza (a, b) = (b, a) não pela ordem Números de combinações a partir de F= { a, b, c } C ={ (a, b), (a, c), (b, c)} Oralmente: “A ordem não vai diferenciar”
A forma que foram apresentados	Permutação com repetição	No quadro seguido da apresentação de fórmula e resolução dos problemas.
	Arranjo Simples	No quadro seguido da apresentação de fórmula e resolução dos problemas.
	Combinação Simples	No quadro, seguido da apresentação de fórmula e exemplo com os alunos.

Fonte: A autora.

Consideramos importante que os professores trabalhem os invariantes envolvidos nas situações, pois contribui para o aluno organizar que estratégia será dada para a resolução do problema. Todos os invariantes descritos por P2 foram apresentados com definições no quadro para que os alunos registrassem em seus cadernos, porém o único que não recebeu destaque durante as aulas foi permutação. Ao tratar sobre o invariante do arranjo, esclareceu as anotações que fez no quadro através de uma questão a ser resolvida. Tenta explicar os invariantes através de uma estruturação da fórmula, mas não fica clara essa organização dos invariantes através da estruturação da fórmula. Analisando os resultados de sua pesquisa, Sabo (2010) percebeu, através de entrevistas, que havia certa valorização da fórmula por parte dos professores, porém foi notado que os professores não demostraram segurança nos seus argumentos que legitime o uso de fórmulas, mostraram falta de conhecimento matemático com as demonstrações dessas fórmulas.

P2 expôs a questão: Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados usando-se apenas os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Dá destaque a explicação de que que todos os elementos do conjunto fonte (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) serão utilizados. Porém ao realizar a relação do invariante descrito na questão, as propriedades invariantes deixaram de ser destacadas e passou a solucionar o problema através da fórmula. Note na Figura 4 (extrato da resolução no quadro).

Figura 4 - Resolução do problema de arranjo P2



Fonte: A autora.

Ao explicitar o invariante de combinação simples, fez uma tentativa de deixar esse conceito mais claro para os alunos. Como podemos notar em sua fala durante a aula:

P2: “supomos que eu fosse formar uma dupla de alunos, possuo na mão uma relação de alunos, eu quero a presença de Maria e José, veja a ordem, primeiro citei o nome de Maria, depois o de José. Aí vocês dois aparecem na coordenação, então o coordenador chama José e Maria. Foi formado outro agrupamento ou outro grupo? Não. Então a ordem não diferencia.”

Ao exemplificar essa situação mais prática, utilizando os alunos como exemplo, contextualizou uma situação do dia a dia, isso auxilia os alunos para melhor compreensão da situação de combinação e melhor esclarece a relação que compõe a escolha de um subgrupo da lista que o professor possui e dos alunos que chegaram à coordenação. A ordem da escolha desse grupo não gera um novo grupo. Nesse sentido, é importante que o professor continue a propor situações-problema para os alunos, pensar no contexto que será utilizado, assim a aula será mais proveitosa e ajudará a desenvolver o raciocínio lógico. Esta estratégia utilizada por P2 é um bom exemplo de explicitação de invariantes.

Vergnaud (1983) afirma que os matemáticos e os professores sabem, em geral, o que é um invariante. É uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre certo conjunto de transformações. Isso é confirmado quando notamos que todos os invariantes receberam definições pelos professores. Porém há ressalva quanto à forma que os invariantes receberam destaque, pois as definições que são dadas aos conceitos não recebem enfoque e não são, de um modo geral, trabalhadas explicitamente. Como, na maioria das vezes, os professores não realizam um comparativo aos invariantes das situações apresentadas, a definição passa despercebida, dessa forma parece que não fica claro para os alunos. Observamos que no início das aulas há uma disposição, por parte do professor, de apresentar os invariantes das situações, porém quando parte para a resolução dos problemas, essa disposição perde força. Mesmo que ganhasse destaque, o fato das aulas conterem no cabeçalho o indicativo das situações de permutação, arranjo e combinação, pode levar o aluno a uma mera aplicação de fórmula, acarretando dificuldades em construir o conceito como seria esperado.

6.5.3 Representação

Para Vergnaud (1986) um Campo Conceitual é organizado em um conjunto de situações (o conceito), os invariantes (significado do conceito) e representações (representar o invariante). Representação é o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas. Referente à Combinatória, segundo Pessoa e Borba (2010), as representações são as diferentes formas de resolver as situações-problema, que podem ser representadas por desenhos, listagem, árvore de possibilidades, quadros, diagramas, Princípio Fundamental da Contagem, fórmula, dentre outras.

Nesse estudo consideramos importante que o professor trabalhe diferentes representações, porém sabemos que permitir que os alunos experimentem responder as atividades com suas próprias estratégias, é um caminho para o desenvolvimento do pensamento. No entanto, caso sejam apresentadas diferentes maneiras de se resolver as situações propostas, o aluno poderá encontrar uma forma que melhor se adeque a seu raciocínio, possibilitando finalizar um problema com êxito.

Neste momento, procuramos analisar quais representações são apresentadas na sala de aula para as resoluções dos problemas, se há prioridade para as fórmulas ou se os professores estimulam o uso de diferentes representações. No Quadro 22 mostraremos as representações que foram trabalhadas em cada situação por P1 e P2.

Quadro 22 - As representações trabalhadas por P1 e P2

Professor	Situação de permutação	Situação de arranjo	Situação de Combinação
P1	Fórmula	Fórmula	Fórmula
P2	PFC, listagem e fórmula.	PFC e fórmula	Fórmula

Fonte: A autora.

Observamos que em nenhum momento o P1 utilizou outras formas de resolução dos problemas, além de fórmulas. O P2 trabalhou listagem, PFC e fórmula. Em um determinado momento da aula do P2 parece que ele não conseguiu dominar a representação por listagem. Consideramos que a listagem pode ser utilizada como forma de explicação dos invariantes, consequentemente, uma boa estratégia para ensinar a Combinatória. Abaixo, no Quadro 23 descreveremos como ocorreu essa aula.

Quadro 23 - Representação por listagem P2

Questão escrita no quadro.

Questão 1) Quantos anagramas da palavra ESAF começam com uma consoante e terminam com uma vogal?

Resolução P2:

ESAF

F - - E   F - - A

S - - E   S - - A

4.p2 = 4.2!

4.p2 = 4.2.1 = 8

Legenda: p2 significa permutação de 2

Na sequência uma aluna lista todas as possibilidades no quadro, comprovando a resposta e excutada pelo P2, que resolveu através da fórmula.

Resolução da aluna:

F S E A   F A S E   S E F A   S A F E

F E S A   F S A E   S F E A   S F A E

8 possibilidades

Em seguida P2 parte para a outra questão.

Questão 2) Quantos anagramas da palavra ESAF as letras S e A aparecem juntas e nesta ordem?

Resolução P2:

SA

__ __ __

p3= 3!

p3= 3.2.1=6

(__) significa espaços

p3 significa permutação de 3

Resolução do aluno

SA F E

SA E F

F E SA

E F SA

E SA F

F SA E

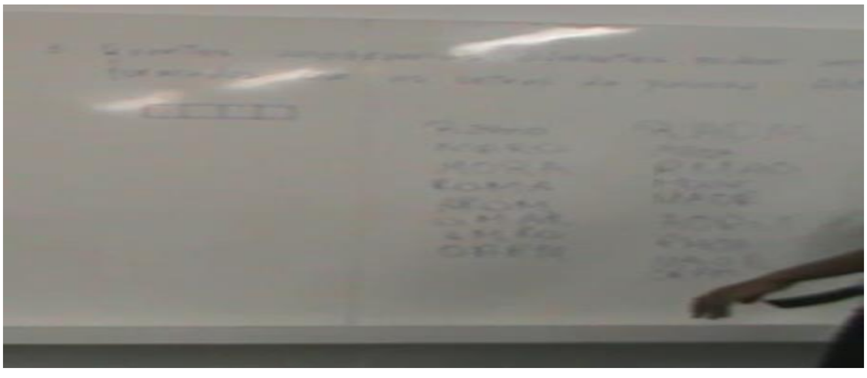
Fonte: A autora.

Nessa aula, acima detalhada, o professor tentou utilizar a listagem da questão 1 para solucionar a questão dois. Os alunos, na sua grande maioria, não entenderam a questão 2 em que as letras agora aparecem juntas e na ordem SA, pois o professor levou em consideração o caso da questão 1 que restringia as consoantes no início e as vogais ao final da palavra. Tentou explicar através da fórmula. No caso da questão 2 sobre a ordem SA, os espaços das letras diminuem, pois SA ocupam um único lugar. Um aluno percebeu o caso, enquanto que o professor parecia não ter notado, então o aluno listou.

Consideramos que a listagem pode ser utilizada como forma de explicação dos invariantes, porém neste caso houve certa dificuldade do professor em listar. Nesse momento da aula apresentada acima, percebemos que o olhar e opiniões dos alunos contribuem para o avanço do conteúdo que se está trabalhando, bem como pode contribuir para auxiliar o conhecimento dos professores.

Na pesquisa desenvolvida por Costa (2003) também foram observadas dificuldades dos professores em solucionar problemas Combinatórios sem o uso de fórmulas. Pontuamos que saber aplicar a fórmula é diferente de entender a situação dos problemas combinatórios. A pesquisa desenvolvida por Lima (2015) aponta resultados semelhantes. Foi identificado que os professores evidenciam conhecimentos comuns e especializado e horizontal do conteúdo em relação ao PFC, mas não sabem relacionar o princípio multiplicativo com as fórmulas de Combinatória. Foi observado também que o professor poderia ter auxiliado os alunos na listagem da palavra AMOR. Os alunos que listaram as possibilidades não conseguiram esgotar todas as 24 possibilidades, pois não havia uma sistematização quanto à ordem das palavras.

Figura 5 - Listagem da aula de P2



Fonte: A autora

Notamos também que houve uma priorização pelas fórmulas. Evidentemente que já esperávamos isso, embora documentos oficiais não apontem como ideal trabalhar apenas com fórmulas. Os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012, p. 112) apontam que, ao realizar atividades que explorem a representação e a contagem em uma situação Combinatória, devem levar o estudante à construção do conceito de princípio multiplicativo como recurso fundamental, mas não único, na resolução de diversos problemas. As Orientações Educacionais Complementares (BRASIL, 2002) indicam que a utilização da fórmula por parte dos alunos ao aprenderam Combinatória, seja consequência do raciocínio desenvolvido por eles e que as fórmulas devem ter a função de simplificar os cálculos, quando os dados dos problemas forem grandes. Assim, como apontado por Esteves (2001), a valorização da fórmula restringe os alunos à não utilização de outras técnicas. De certa forma, a indicação de estratégias por toda a aula ser apresentada pelos professores restringe a não experimentação de suas próprias estratégias de resolução por parte dos estudantes. Defende-se, no presente estudo, que utilizar-se de estratégias próprias para resolução de problemas combinatórios possibilita desenvolvimento do raciocínio lógico. Nesse sentindo entendemos que os alunos tendem a não utilizarem listagem, árvores de possibilidades, por exemplo, pois a fórmula garante a facilidade quanto à resolução, porém não auxilia a compreensão, de fato, dos problemas combinatórios.

Como observado no Quadro 23 P2 explorou o PFC nas situações de permutação e de arranjo. Sobre o PFC Pessoa e Borba (2007) consideram que essa é uma estratégia de resolução, ou seja, está localizado nas representações do tripé proposto por Vergnaud (1986). Para as referidas autoras, todos os problemas de Combinatória podem ser resolvidos por meio do Princípio Fundamental da Contagem.

English (2005, apud Rocha 2011, p.100) apresenta que o princípio multiplicativo, também chamado de Princípio Fundamental da Contagem, se relaciona a todos os problemas combinatórios, em especial, ao produto cartesiano. Essas relações podem representar diferenças de objetivos nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Essas diferenças ficam evidentes quando trabalhadas no Ensino Médio, pois funciona como estratégias para resolução dos problemas, auxiliando o trabalho e compreensão das fórmulas. Lima (2015), ao investigar quais conhecimentos os professores do ensino básico têm sobre PFC, evidenciou que os professores do Ensino Médio melhor reconhecem o uso do PFC em relação aos professores do Ensino Fundamental.

Em outro momento de aula observamos que o P2, ao resolver uma situação de arranjo, propõe duas formas de resolução, a primeira através do PFC e a outras através da fórmula, porém chama o PFC de “esquema” representado pelo quadro valor de lugar. Não chamando de princípio fundamental de contagem. Veja que o Quadro 24 evidencia a percepção do modo como ocorreu a aula.

Quadro 24 - P2 considera PFC um esquema – Momento de aula

Arranjo

Questão escrita no quadro

Uma escola possui 18 professores. Entre eles serão escolhidos: um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas são as possibilidades de escolha?

Observamos duas formas de resolução:

- **Primeira forma de resolução**

18. 17. 16 = ?

D = Diretor

V = Vice

C = Coordenador

Fala P2: Temos aí um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. É um agrupamento formado por três indivíduos. São 18 professores. Então, as possibilidades são18, no segundo caso, já que são distintos, 17, depois 16. Vejam quanto é que vai dar isso? Mas veja bem, isso no esquema. Outra recomendação utilizando a fórmula. Quem é o n? grupo de professores. P é igual a 3. É só substituir o número na fórmula e realizar essas continhas.

- **Segunda forma de resolução**

$$An,p= \frac{n!}{(n-p)!}$$

n=18 professores

p=3

A=18,3

$$A = \frac{18!}{15!}$$

$$A = \frac{\cancel{18}.17.16.15!}{\cancel{15}!} = 4.\ 896 \text{ grupos}$$

Fonte: A autora.

O fato de chamar o PFC de esquema pode estar relacionado aos livros antigos que o professor utiliza para a preparação de suas aulas, pois nos livros atuais o uso do PFC pode ser que esteja mais explícito.

Enquanto o professor ainda terminava a fala, uma aluna imediatamente deu a resposta correta. Neste caso, há uma espécie de instrução quanto às resoluções dos problemas, a fórmula é um método de resolução mais eficiente e econômica. Não são exploradas diferentes formas de resolução, nem a resolução partindo do aluno.

Outro momento merecedor de comentário foi quando P1, ao trabalhar a situação de arranjo, teve a possibilidade de explorar a representação através de desenho ou materiais manipulativos e não o fez.

A questão: De quantos modos 3 pessoas podem sentar num sofá de 5 lugares?

A resolução do problema: $A5,3 = \frac{5!}{5.3} = \frac{5\,!}{2!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} =$ 60 formas

A representação por desenho ou manipulativo pode dar a oportunidade ao aluno de interagir com o conteúdo, possibilitando um momento mais significativo com o objeto matemático. A exploração através do desenho possibilitaria a eles a compreensão do arranjo. Dessa maneira seria proporcionado o suporte para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Segundo Vergnaud (1991) os conhecimentos adquiridos pelos alunos devem ser construídos por eles mesmos, em relação direta com as operações que são capazes de realizar, com a realidade e com as relações que ele é capaz de captar, compor e transformar. Essas relações incorporam os conceitos que ele vai construindo progressivamente. Acreditamos que, se o professor tiver o domínio do conteúdo e trabalhar as diferentes formas de representação, poderá proporcionar diferentes maneiras de resolver uma situação combinatória, desse modo, além de o aluno perceber que existem diferentes maneiras de resolver uma situação combinatória, poderá perceber os invariantes do conceito e, dessa forma, desenvolver o raciocínio combinatório.

Para Vergnaud (1990) a ação operatória por si só não garante a plena conceitualização, pois é possível seguir roteiros pré-determinados sem domínio dos conceitos envolvidos nas situações. A utilização de representações não garante a conceitualização, porém é um meio necessário. O uso do símbolo de forma explícita é facilitador para o significado.

Ao que parece, devido a P2 possuir mais de quinze anos de experiência com turma de 2º ano do E.M, suas aulas tiveram mais conteúdo, comparadas às aulas de P1. Houve uma variação às representações propostas, foram trabalhados diferentes níveis de dificuldades nas questões e solicitação da participação dos alunos. Em contrapartida, P1, que possui quatro anos de experiência, aparenta ter mais domínio quanto ao conteúdo trabalhado, realizou uma melhor diferenciação entre as situações de permutação, arranjo e combinação e apresentou certo domínio oral sobre as situações.

Sobre o conhecimento do conteúdo de Combinatória podemos afirmar que os professores detêm esses conhecimentos, mesmo que algumas vezes não estejam tão arrumados ou organizados para a utilização em sala, porém é evidente a necessidade de um novo olhar sobre a importância do trabalho com a Combinatória a partir de diferentes significados, invariantes e representações, pois esse trabalho com os problemas combinatórios reflete na compreensão e no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos. Observamos que os problemas de Combinatória trabalhados pelos professores se basearam nos aspectos comuns do conteúdo, que era o esperado, mas também não tão diferenciados quantos aos métodos de ensino. Conhecer a fundo os diferentes tipos de problemas, saber mais claramente os invariantes das situações, utilizar diferentes representações e permitir que os alunos resolvam através de estratégias próprias, pode contribuir na construção desse tipo de raciocínio.

6.6 Conhecimentos Docentes - análise de entrevista final

Depois de realizado o estudo sobre os domínios do conhecimento Matemático para o ensino que devem ter os professores que lecionam Matemática, na perspectiva de Ball, Thames e Phelpes (2008), focamos o olhar em analisar esses conhecimentos no conteúdo de

Combinatória. Salientamos que investigamos o conhecimento do conteúdo dos professores em suas aulas a partir da teoria de Vergnaud.

A teoria de Ball, Thames e Phelpes (2008) fornece subsídios para essa pesquisa no que se refere ao olhar sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo. Nessa fase de análise, investigamos os dados apenas utilizando os domínios sobre conhecimentos pedagógicos dos conteúdos, que se dividem em: Conhecimento do conteúdo e de estudantes, Conhecimento do conteúdo e ensino e Conhecimento do conteúdo e currículo. Para os autores acima citados, esses conhecimentos perpassam pelos professores no momento de suas aulas. Isso não quer dizer que quando um professor está em situação de aula ou realizando o planejamento para aula, os conhecimentos dos professores estejam divididos em caixas, ou seja, isso não impede que, quando o professor esteja voltado para o saber sobre o conteúdo e de estudantes, não faça uso do conhecimento de ensino. Esses conhecimentos se entrelaçam.

As análises dos dados se deram, a partir de trechos das falas extraídas durante as entrevistas semiestruturadas, nas quais discutem sobre suas aulas, suas atuações e superação das dificuldades com o conteúdo envolvido. Dividimos as análises das entrevistas dos professores em três eixos: Conhecimento do conteúdo e de estudantes, Conhecimento do conteúdo e ensino e Conhecimento do conteúdo e currículo.

6.6.1 Conhecimento do Conteúdo e de Estudantes

Focando o olhar sobre Combinatória, no Conhecimento do conteúdo e de estudantes, espera-se que o professor saiba sobre o aluno e sobre o conteúdo de Combinatória. É um conhecimento que se mistura o saber sobre a Combinatória e o saber sobre aspectos os quais envolvem o estudante. Para Ball, Thames e Phelpes (2008) é a partir da familiaridade com seus alunos que o professor reconhece o pensamento matemático deles. Através da observação que fizemos dos professores durante a realização de seus trabalhos com os alunos em sala de aula, buscamos investigar quais conhecimentos esses docentes possuem sobre a relação do conteúdo de Combinatória e sobre seus alunos. Em alguns trechos mostraremos a relação entre as aulas ministradas e as entrevistas executadas.

Quando perguntamos sobre o que os professores acharam das suas aulas, tínhamos o intuito de colher mais elementos quanto ao saber matemático sobre o conteúdo de Combinatória conciliado com o saber sobre os alunos. Notamos que em suas respostas os argumentos dos professores demonstravam uma tendência a acreditarem que em as suas aulas não atingiam algo como suficientemente bom, como vemos nos fragmentos a seguir:

E: O que você achou das suas aulas?

P2: "Eu me esforço um pouco para fazer compreender, que os alunos entendam realmente o que eu estou passando, mas infelizmente aquele *feedback* a gente não tem. Às vezes algo se reflete na prova. Mas não é um *feedback* realmente. Eu sempre abro nas minhas aulas para que diga se entendeu ou se não entendeu, qual a dificuldade. E aí uso outras estratégias. <u>Mas se houvesse alguma observação de ser melhor, assim ou assado, mas a gente não tem</u>."

E: você se refere a um olhar de um profissional?

P2: "Sinto falta de um olhar profissional que possa ajudar a melhorar. Eu estou sempre aberto a isto, eu não vejo isto como maldade, acho que seria válido. <u>Isso é coisa de uma pessoa que quer melhorar</u>."

E: O que você achou das suas aulas?

P1: "Eu gosto muito da parte de prática, só que assim... Eu queria poder trazer coisas mais práticas para eles, porque sei que quando trabalhamos com a parte prática e a parte lúdica, digamos assim, a gente percebe que eles podem compreender um pouco melhor. Quando a gente consegue trazer alguns exemplos do dia a dia. Exemplo, eu estou ali com o livro, ele tem os exercícios, só que ali forma uma realidade, foi o autor que fez. Mas quando eu pego uma ideia parecida e aplico com a realidade deles, vejo que eles conseguem até assimilar melhor. <u>Eu vejo que eu queria colocar mais prática para eles, mas às vezes não consigo.</u>"

Com base nos comentários que fizeram, percebemos que os argumentos utilizados por P1 e P2, de certa forma, exoneram suas responsabilidades quanto à busca de algo que melhore seus desempenhos. P2 argumenta que a falta de avaliação por um profissional o deixa inseguro quanto à qualidade de sua aula. P1 argumenta que gosta da parte prática, gosta de trazer exemplos do dia a dia e acha que isso poderia garantir melhor aproveitamento de suas aulas, porém não sabe explicar o motivo de muitas vezes não conseguir achar a correlação da matéria com o cotidiano dos estudantes. Isso pode estar relacionado à ausência de trabalhos com o conteúdo de Combinatória tanto em sua formação acadêmica quanto na continuação de sua formação. Pode também estar associado ao material que eles costumam utilizar para a execução do trabalho. Como visto anteriormente, ficou claro que o único acervo para preparação das aulas são os livros didáticos, muitas vezes livros antigos. A pesquisa realizada por Sabo (2007) investigou os livros didáticos do Ensino Médio analisando os tipos de problemas combinatórios e a abordagem dada. Concluiu que os autores dos livros didáticos salientam a aplicação de fórmulas em exercícios que possuem, em grande parte, tarefas muito repetitivas e semelhantes.

Segundo Ball, Thames e Phelpes (2008) com a experiência os professores devem ser capazes de ouvir e interpretar o raciocínio dos alunos. O que caracteriza esse conhecimento é quando o professor reconhece erros produzidos pelos alunos devido à sua experiência docente e conhecimento das estratégias e do desenvolvimento do aluno. Porém quando perguntados se os alunos conseguiram compreender o que estava sendo trabalhado em sala de aula, os dois professores afirmaram que só conseguiriam saber após as aplicações de métodos avaliativos, como prova ou exercício valendo notas. Veja os fragmentos das falas dos professores.

E:Você acredita que os alunos conseguiram compreender o que estava sendo trabalhado em sala de aula?

P1: "O assunto acho que eles conseguiram, os alunos que vêm e participam. Fazendo as atividades, aí eu tenho a certeza que a ideia principal eles conseguiram pegar. Mas aquelas pessoas que perderam mais de duas aulas, aí já ficou complicado. Mas só irei saber quando eles fizerem a prova."

P2: "Eu só vou perceber completamente quando eu começar a fazer exercícios valendo nota. Por exemplo, uma aluna perguntou hoje: "de onde apareceu este 7? ", na aula anterior eu já tinha dito: olha, vou simplificar (fração) era uma simplificação, ela estava presente. Aí quando eu apresentei a fórmula, eu disse: é bom você memorizar as fórmulas. Irei saber quando eu realizar a atividade valendo nota."

Considerando que o professor, em posse do conhecimento do conteúdo e de estudantes, seja capaz de interpretar o raciocínio dos alunos, aguardar para saber o que os alunos sabem através de avaliação, denota pouco conhecimento sobre os alunos. Quando perguntado o que motiva os alunos em aulas de Combinatória, os dois professores acreditam que o conteúdo não é motivador. Veja as falas dos professores.

E: O que motiva os alunos em aulas sobre Combinatória?

P1: "vai depender da forma que você está levando para eles. Se você trouxer só atividades, e coloca atividades e você mesmo resolve, eles vão ficar só acompanhando. Não vão saber de onde vem para onde vai, como é que vão usar, eles não vão saber. Mas quando você dá um tempo para eles mesmos fazerem, ficando em cima perguntando quais são as dúvidas, mas tem que ficar em cima mesmo, porque se você não perguntar eles não vão nem tentar responder. Você tem que chegar junto mesmo e perguntar/questionar, ficar em cima para eles dizerem alguma coisa. Saber o que não entendeu, qual a dificuldade. Não há motivação. Se houvesse exemplos do cotidiano eles saberiam aplicar, seria interessante."

Na fala de P2:

P2: "<u>Depende do significado para eles</u>. A Combinatória tem mais sentido para o vestibular. <u>Uma coisa se criasse no concreto as combinações e outra coisa é saber quantas combinações</u>. O conteúdo fica vago... Quantas combinações posso fazer. <u>Deveria ter alguma coisa para fazer na prática mesmo</u>. Montar 792 figuras (pentágonos) em uma circunferência... É saber a quantidade que vai montar. <u>Não sei se há motivação. A Combinatória é mais uma forma de exercício aritmético</u>."

Apesar de P1 apontar que os alunos experimentem responder sozinhos, as estratégias de resolução não partem dos alunos, como visto nas análises das observações, a resolução dos problemas é a partir de aplicação de fórmula.

Há um estigma quanto ao conteúdo de Matemática ser considerado difícil. As pesquisas apontadas na parte que trata sobre estudos anteriores referentes à Combinatória, revelaram baixo desempenho de alunos com a resolução de problemas combinatórios. Talvez eles relacionem os baixos desempenhos com suas experiências referentes a esse ano de escolarização. Os professores parecem saber o que seria motivador para os alunos, eles têm consciência, afirmam que exemplos do dia a dia iriam motivá-los, mas não há uma busca para que isso ocorra. Ao assumirem o que seria motivador, afirmam que suas aulas não motivaram os alunos. Apontam que seriam necessárias mais aulas práticas, isso reforça a ideia anterior de que há uma não reponsabilidade desses professores sobre o seu trabalho. Parece que não é parte da demanda da profissão de professor buscar esses elementos que eles apontam estar faltando.

Gostaríamos de salientar as observações dos professores quanto a saber ouvir e interpretar o raciocínio dos alunos. P2 parece apontar que os alunos pouco falam, pois costuma, como ele mesmo colocou em suas falas, "ficar em cima dos alunos", porém esse grupo de alunos pouco interage nas aulas. Ou seja, P2 possui o conhecimento sobre seus alunos e a forma que encontrou para ter o "*feedback*" deles é estimular para que falem suas dúvidas no momento da resolução dos problemas.

Sabe-se que professores realizam aulas diferentes. Um mesmo professor pode, ao exercer o trabalho em salas diferentes, fazê-lo de maneira diversa, dependendo do grupo de alunos. Se o docente trabalhar em outras instituições fica sujeito a executar suas aulas de acordo com cada uma delas. A maioria das instituições de ensino possui suas próprias características de trabalho pedagógico.

Outro ponto que queríamos saber sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo de Combinatória, era se os professores conseguiriam apontar quais são as maiores dificuldades dos alunos. Estudos com alunos dos anos iniciais de escolarização apontaram (PESSOA e BORBA (2009) CORREIA e OLIVEIRA (2011) e AZEVEDO e BORBA (2012)) os problemas de permutação como os mais difíceis de serem solucionados e os problemas de produto cartesiano como sendo os mais de mais fácil solução. Para os alunos do Ensino Médio em geral, as situações de produto cartesiano e permutação são mais fáceis, enquanto que as situações de arranjo e combinação, mais difíceis. Tanto os alunos têm dificuldades em aprender, como os professores têm dificuldades de ensinar, como visto nas observações. P2 aponta as situações como importantes no processo de aprender a Combinatória, porém em suas aulas de combinação, chama a atenção quanto aos invariantes, a diferenciação de arranjo e combinação, mas não deixa clara a importância de saber a diferenciação entre os mesmos. P1 aponta o conteúdo em si como difícil para os alunos e acrescenta que ausência de outros conhecimentos matemáticos atrapalha o desenvolvimento das aulas. Abaixo segue reprodução da fala dos professores.

E: Que tipo de dificuldade os alunos encontram nesse conteúdo?

P1: "Quando começa a chegar na parte das operações, na parte de simplificação, fatorial, razão, divisão, números múltiplos, eles têm dificuldades. Dividir, transformar dois números em um, eles não entendem e perguntam: de onde veio isso? Como você viu na aula, eles não conseguem, eles têm dificuldades e referente, acredito, ao próprio assunto mesmo (Combinatória). A gente vê muito isso, os alunos perguntarem: professor vou aplicar isso onde?"

P2: "Saber identificar quando é um problema de arranjo, uma permutação ou combinação, o resto é aplicação de fórmula".

Ao mencionar que saber diferenciar as situações é onde se situa a dificuldade dos alunos, de certa forma P2 está apontando que os invariantes são um componente importante de ser trabalhado. Em contrapartida, durante suas aulas o trabalho com os invariantes não ficou claro para os alunos, já que também não estava organizado para o próprio professor. Outro fator que dificulta a diferenciação das situações pelos alunos é o fato do professor colocar no cabeçalho do quadro qual situação está sendo trabalhanda. Ressalvo que o interesse maior neste conteúdo deveria ser estimular o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

Refrente ao nosso questionamento de saber se é possível que os alunos busquem outros tipos de estratégias para resolução, P1 afirma que não conhece outros tipos de estratégias e, como observado em suas aulas, ele trabalhou apenas com resolução através da representação por fórmula. Observe sua fala:

P1: "Não. Eles resolvem pelo mecanismo. Se eles não soubessem o caminho, eles não saberiam resolver. Eu não conheço outros tipos de resolução. Eles devem resolver pela fórmula. Pois poderia até usar árvore, mas por conta até das questões."

Quanto ao P2, este parece conhecer mais sobre as representações dos momentos que foram observados em suas aulas. Afirma:

P2: "A resolução pelo esquema (PFC) é mais fácil, a árvore eles conseguem, mas é mais trabalhosa, vai escrever e desenhar mais."

E: Teve um momento, na questão da palavra AMOR que a resolução foi diferente.
P2: "Eles listaram. A listagem dá para fazer, mas 792 não dá. Naquele momento eles foram desenvolvendo."

P2 levanta a possibilidade de os alunos resolverem através de estratégias próprias de organizar o pensamento para a árvore de possibilidades, porém aponta que nem sempre outras representações, que não seja fórmula ou PFC, ajudam os alunos a encontrarem a resposta, pois os resultados, quanto à grandeza numérica, podem ser grandes. Apesar da representação através de árvore não ter aparecido em nenhum momento da aula do P2, é uma estratégia conhecida por ele, então poderia ter utilizado para ensino e auxílio no desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Quanto ao fato de onde se baseiam para elaborar e propor as questões de Combinatória, os dois professores utilizam o livro adotado pela escola e livros adquiridos de outros anos. Isso ficou evidenciado durante as observações de aula e comprovado através de suas falas.

6.6.2 Conhecimento do Conteúdo e de Ensino

Para Ball, Thames e Phelpes (2008) esse conhecimento é o saber combinado entre o conhecimento sobre a Matemática e sobre seu ensino. Os professores precisam saber a sequência de conteúdo específico para o ensino. Durante uma discussão em sala de aula, os professores têm que decidir quando pedir mais esclarecimento, quando usar um comentário de um aluno para fazer a ligação com o conteúdo matemático, e quando pedir uma nova pergunta ou constituir uma nova tarefa para a aprendizagem dos alunos. Cada um destes requer uma interação entre a compreensão matemática específica de questões pedagógicas que afetam a aprendizagem.

Quando perguntados o que mudaria daquilo que foi planejado/trabalhado em aula, ambos os professores, de certa forma, acreditam que em determinado momento as aulas não foram substancialmente claras para os alunos. P1 retoma a discussão que poderia ter aproveitado algo mais em sua aula, sugere a ludicidade que para ele existe no Ensino Fundamental**,** porém não sabe o motivo de muitas vezes não conseguir esse aproveitamento. Isso pode estar relacionado tanto à sua formação acadêmica como à formação continuada, a especificamente a ausência de trabalhos com o conteúdo de Combinatória. P2 afirma que poderia ter explorado de forma mais eficiente a fórmula de arranjo. Nesse sentido, percebe-se que os professores têm consciência de que houve a ausência de alguns elementos para que suas aulas fossem mais eficazes.

E:Você mudaria alguma coisa que foi planejada/trabalhada na aula?

P1: "Colocaria algo mais lúdico. Como se faz no Fundamental. Teve até uma parte de, pois do 8º período da Graduação, na parte de complementos, vi algumas partes lúdicas. Os professores da Graduação levavam jogos, mas para esse assunto eu nunca vi. Nem na Especialização. Já vi situações lúdicas até com área, com outros assuntos, mas com essa parte não.".

P2: "Sim, é possível, às vezes trago um assunto para uma sala e para outra eu trago diferente. Por exemplo, eu estava pensando até em voltar a dedução da fórmula de arranjo, pois acho que os alunos não entenderam, voltar com outras palavras."

A partir da sua fala, P1 parece mais uma vez isentar sua responsabilidade de resolver as dificuldades com que se depara ao trabalhar com o conteúdo, porém nesse aspecto o motivo seria porque não teve acesso durante sua formação. De certa forma está relacionado à ausência de trabalhos com o conteúdo de Combinatória tanto na sua formação acadêmica quanto nos cursos de especialização. Observamos que na prática do Ensino Médio os recursos didáticos diferenciados não são priorizados, talvez pelo tipo de problema relacionado à grande complexidade dos problemas combinatórios, portanto, poucos materiais manipulativos são pensados para o ensino de Combinatória, nem mesmo o recurso de utilização de jogos, principalmente para os anos finais de escolarização. Recurso esse que, sabemos, deu origem à Combinatória. O professor indicou ter visto durante a Graduação outros jogos, porém aponta não ter visto nada para a Combinatória. Rocha (2011) também evidenciou isso em sua pesquisa. Notou nas falas dos professores a dificuldade ao acesso tanto das informações quanto da divulgação de pesquisas. Nem sempre chegam aos professores que ensinam.

Sobre as dificuldades que encontram para realizar o planejamento/na aula.

P1: "Faço planejamento uma vez por semana, no espaço que tenho, faço um esforço para ver se consigo ao menos uma hora para isso. Aí pego o livro para analisar, ver quais são os exemplos, ver a forma de abordagem para eles, se abordar de tal maneira vai ser melhor ou se não vai ser bom. Entrar na aula sem nenhum planejamento é complicado. Mas a dificuldade é encontrar os problemas referentes aos exemplos, tem pouco, poderia ter mais. O livro explica, mas dá um exemplo só."

E: Então a base de planejamento é o livro?

P1: "Sim. Foi o que a escola adotou. Infelizmente os alunos não receberam."

E: Mas você poderia ter usado algum outro livro para ensinar Combinatória? Qual?

P1: "Poderia, mas não sei qual seria, não me lembro de nenhum agora."

Na fala de P2.

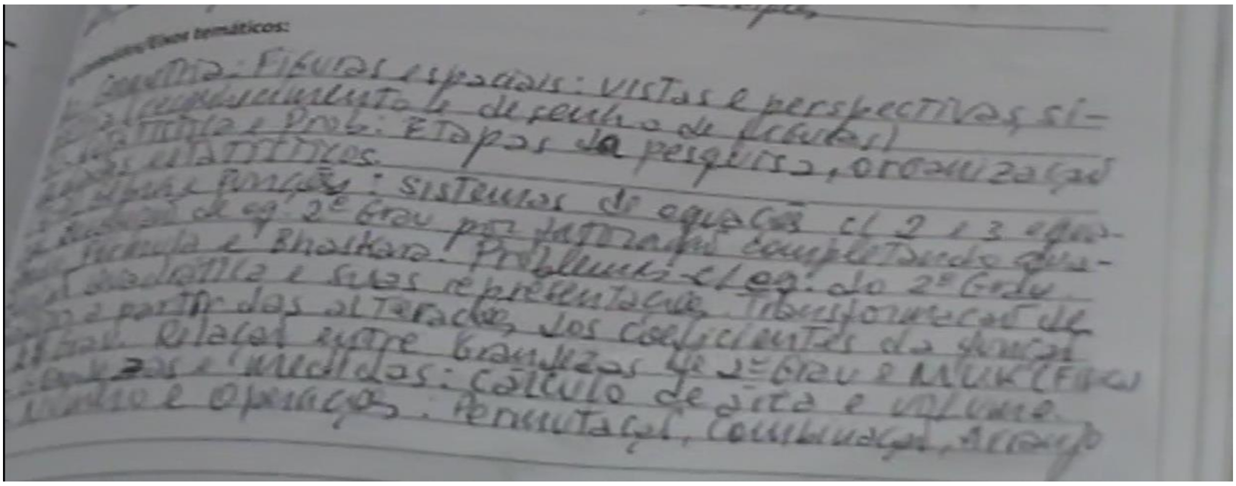
P2: “Faço o planejamento no começo do ano, na caderneta. No dia a dia uso o livro mesmo. Existe dificuldade tremenda com esse conteúdo, pois só tocamos nesse assunto uma vez naquele ano. É diferente daquele professor de cursinho ou de um colégio bem estruturado que tem vários professores de Matemática que cada um pega uma parte, um é Geometria, outro Álgebra, outro é para Funções. É mais fácil, pois o professor só foca aquilo ali.”

E: Os livros deram conta para o que você queria realizar?

P2: “Sim, por isso uso mais de um livro, em busca de exercícios.”

Em relação ao planejamento que P2 afirma realizar no começo do ano na caderneta, esse não se caracteriza como planejamento, são apenas os eixos temáticos que serão trabalhados durante o ano, como pode ser observado na Figura 6.

Figura 6 - Foto da caderneta do P2



Fonte: a autora.

Apesar dos professores terem experiência com turmas do 2º ano, ainda sentem dificuldade de trabalhar a Combinatória, como ficou explícito em suas falas. O planejamento pode contribuir para uma melhor abordagem dos conteúdos, pois é uma parte importante para a preparação/elaboração de aula. A elaboração do planejamento de ensino e preparação de uma sequência didática faz parte do domínio do conteúdo e de ensino. No entanto, foi identificado na entrevista inicial que P1 se divide em ensinar alunos da rede pública e particular de ensino e ainda trabalha os três turnos, o espaço de tempo para preparação fica bastante reduzido. P2 trabalha dois turnos. Quando perguntados se os alunos têm dificuldades com o conteúdo e de que maneira é possível ajudá-los na superação das dificuldades, a questão da falta de tempo para preparação das aulas fica mais clara na fala do P1.

P1: “Os alunos têm dificuldades, principalmente com a Matemática, de coisas lá atrás, uma multiplicação, divisão, entre outras. Eu poderia ajudar se eu tivesse algo mais lúdico, pois no Ensino Fundamental os alunos têm melhores resultados. No Ensino Médio poderíamos ter exemplos melhores. Infelizmente é o que se pode fazer, é o que se tem, infelizmente é o tempo que se consegue.”

Quanto ao P2, este afirma que o conteúdo de Combinatória precisa de um conhecimento a mais.

P2: “Precisa ter um grau de concentração. A Combinatória exige um conhecimento diferente.”
E: Existe dificuldade por parte dos alunos com esse conteúdo, se sim, como você poderia ajudá-los?
P2: “Sim, existem dificuldades, mas eu precisaria conhecer outros recursos, pois não conheço.”

Assim como apontado por Ball, Thames e Phelps (2008) esse conhecimento requer uma interação entre a compreensão matemática específica e uma compreensão de questões didáticas que afetam a aprendizagem. Mas, ao que parece, a partir da análise das entrevistas, os professores ainda precisam avançar nas questões que afetam a aprendizagem dos alunos, inclusive conhecer pesquisas acadêmicas as quais apontam as dificuldades de alunos de acordo com o ano que cada um estuda. Ao que parece, há uma dificuldade quanto ao acesso aos materiais. Rocha (2011) também identificou esses aspectos, a dificuldade ao acesso das informações e a divulgação sobre pesquisas que nem sempre chegam aos professores que ensinam Matemática.

6.6.3 Conhecimento do Conteúdo e do Currículo

Rocha (2011), ao interpretar Ball (2008), afirma que essa categoria seria um refinamento do Conhecimento de conteúdo e ensino, um avanço na categorização. Seria o professor saber, por exemplo, que o conteúdo de Combinatória pode ser trabalhado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim como identificado na observação de aula, que os professores necessitam de um novo olhar para o conteúdo, através de suas falas notamos que se precisa de um novo olhar para o currículo que envolve a Combinatória, pois ao ser lançada a pergunta em que ano é possível iniciar o trabalho com a Combinatória e de que forma, os professores fazem especulações quanto a que ano possa ser ensinado e não têm certeza como se daria esse trabalho. Durante a entrevista pode ser identificado:

E: Em que ano é possível iniciar o trabalho como a Combinatória?

P1: "Eu acredito a partir do 8º ano, estão com 13/14 anos."

E: Por quê?

P1: "Porque eu acho que no 6º ano você está trabalhando as questões dos números primos, reversibilidades, múltiplos, razão. Quando você chega no 7º ano você está trabalhando os números de possibilidades, números negativos, então é por isso que eu estou dizendo se não trabalhar algumas questões com eles, pode ser que eles não peguem. Possa ser que eles travem nessa questão. Exemplo, como eu vou ensinar para eles uma questão de possibilidades se eles não sabem bem a multiplicação e divisão ainda."

E: Como você iniciaria esse trabalho?

P1: "Eu trabalharia aplicações do dia a dia, situações-problema, tentando mostrar a eles."

E: Aponta um exemplo?

P1: "Eu poderia pegar um anagrama simples, com letras e iria mostrando as possibilidades para eles e eles iriam ver e depois iria para parte de multiplicação e dos múltiplos."

Na fala de P2:

P2: "Desde pequeno."

E: Que idade?

P2: "4 a 5 anos."

E: De que forma introduziria a aula?

P2: "Depende também do agrupamento que você vai utilizar. Trabalharia com permutação."

E: Da mesma maneira que fez com a turma do 2º ano E. M.?

P2: "Não. Colocaria três fichas coloridas (verde, azul, vermelha) e perguntaria de quantas maneiras é possível organizar. E se ele aprendessem desde pequeno, talvez quando ele tivesse nessa fase aqui ele ia lembrar que já tinha visto."

Os PCN destacam grupos de situações relacionadas às Estruturas multiplicativas, precisam ser exploradas nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Entre elas estão "as situações associadas à ideia de combinatória" (BRASIL, 1997), ou seja, reconhece a importância de se trabalhar nos anos iniciais com a Combinatória.

Como observado na fala do P1 ele acredita que para ensinar Combinatória para os alunos é necessário o conhecimento prévio de determinados conceitos, porém, sabe-se, para se ensinar ideias inicias sobre Combinatória não é preciso ter se apropriado do conceito das operações multiplicativas. Apesar da tentativa de introduzir a Combinatória antes do E. M., a estratégia retratada por P1, de supostamente realizar com os alunos do 8º ano, é idêntica às atividades por ele realizadas com os alunos do 2º E.M. Ou seja, o professor parece estar distante do conhecimento sobre o conteúdo e currículo proposto por Ball, Thames e Phelps (2008). Poderíamos apontar que se o professor tivesse conhecimento de documentos como o PCN concluiríamos, então, que esse conhecimento seria justamente o conhecimento do conteúdo e currículo disposto por Ball et al (2008). Com relação ao professor entrevistado, poderíamos identificar como Conhecimento do conteúdo e currículo disposto por Ball, Thames e Phelps (2008) o fato dele conhecer o que dispõe o PCN sobre Combinatória.

P2 sugere que o conteúdo poderia ser trabalhado com crianças da Educação Infantil. Essa ideia parece vir de inferências dos conhecimentos que ele possui, mas não há exatidão quanto à proposta, pois quando perguntado sobre as estratégias que utilizaria para ensinar a esse grupo, P2 realiza boa sugestão quanto ao uso de material que as crianças poderiam utilizar, mas ainda um pouco distante de um trabalho mais didático e ligado ao conteúdo. Além da proposta apontada pelo PCN, a pesquisa de Matias, Santos e Pessoa (2011) aponta, através do estudo realizado com alunos da Educação Infantil, que existe a possibilidade de compreensão dos invariantes do arranjo por crianças de cinco e seis anos de idade,os quais utilizaram fichas, tal como sugerido na fala de P2, para resolver as situações propostas. Concluiu-se que mesmo na Educação Infantil os alunos são capazes de estabelecer ricas e interessantes relações para a resolução de problemas combinatórios.

Sobre o Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo podemos afirmar que apesar dos professores terem experiências com o ensino do conteúdo de Combinatória, ainda possuem dificuldade de trabalhar a Combinatória, como ficou evidenciado em suas falas. Percebemos uma ausência do trabalho com o conteúdo de Combinatória na formação inicial dos professores pesquisados. Também constatamos que o material didático que serviu de apoio ao professores para a preparação de suas aula também não subsidiou para um trabalho sistematizado e, de certa forma, o material didático não propocionou segurança aos professores para a preparação de suas aulas.

7 CONSIDERAÇÕES

Nessa fase da pesquisa podemos tecer considerações sobre o que esse estudo se propôs a indagar: Como está ocorrendo o ensino de Combinatória no 2º ano Ensino Médio? Que conhecimentos sobre Combinatória podem ser identificados nos professores em situação de aula?

O objetivo da nossa pesquisa foi analisar conhecimentos docentes sobre o ensino de Combinatória em turmas do 2º ano do Ensino Médio. Durante a investigação procuramos analisar as situações (tipos de problemas), os invariantes explicitados ao ensinar e as representações utilizadas e estimuladas ao ensinarem Combinatória. Essa análise se baseou no momento de aula. Investigamos os Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo através das entrevistas.

Nossa questão inicial era saber como se dava o trabalho com a Combinatória no momento da prática do professor e quais Conhecimentos do Conceito e Conhecimentos Peedágógicos do Conteúdo têm professores do 2º ano do Ensino Médio sobre Combinatória. Nesse sentido, a pesquisa centrou-se de forma específica nas relações entre os conhecimentos matemáticos sobre Combinatória vinculados aos conhecimentos pedagógicos associados à pratica docente escolar.

Na entrevista inicial obtivemos a informação de que apenas um dos professores possui Especialização ligada diretamente à sua área de atuação, a Matemática. E mesmo que essa Pós-graduação tenha sido referente ao ensino da Matemática, não houve nenhuma disciplina sobre a Combinatória. Também foi identificado que os professores pesquisados possuem bastante tempo com turmas de 2º ano do Ensino Médio, mas isso não garantiu uma melhor conceitualização do conteúdo. A partir do que foi coletado da entrevista inicial, podemos supor que a formação, quanto ao conteúdo de Combinatória, pode ter acontecido durante sua vivência na prática como professor. Assim como observamos que não houve variação quanto aos métodos de ensino, também não houve presença de outros recursos para o ensino, os professores utilizavam apenas o livro didático para apoio e preparação de suas aulas. Foi notado também que os livros eram antigos, precisam de atualizações, pois alguns destes são de edições anteriores às ações do PNLD. Identificamos dificuldades quanto ao acesso a materiais. As aulas se limitam, predominantemente, à reprodução dos livros.

Sobre o trabalho com as situações, o que chamou atenção foi que não aparece em nenhuma das aulas a situação de produto cartesiano. Seria importante incorporar como um dos passos iniciais para posterior desenvolvimento de situações mais complexas como as de arranjo, permutação e combinação, já que, segundo os Parâmetros para a Educação Básica do

Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), o produto cartesiano é considerado como parte importante para a compreensão da Combinatória. O professor pode - e deveria - elaborar situações em que o estudante seja levado a realizar diferentes combinações de elementos. Por exemplo, situações em que se pergunte ao estudante: diante de duas calças e três camisas, de quantas maneiras diferentes ele pode combiná-las e quais são essas maneiras.

Observamos que, apesar de cada professor ter apresentado as situações de formas diferentes, existe o mesmo objetivo de ensinar a resolução dos problemas através da fórmula. Há certa confusão quantos à apresentação das situações, o conteúdo parece não estar claro para os professores. Identificamos também que as situações são apresentadas a partir de um problema a ser resolvido. Foi observado que os professores trabalharam na mesma sequência, iniciando por permutação, situação em que os dois professores demandaram mais tempo de aula, seguindo por arranjo e finalizando com combinação. Esse tipo de organização para ensino se deve à maneira de como o conteúdo é apresentado nos livros.

No que se refere aos invariantes, estes foram explicitados em suas aulas, porém o destaque não foi explícito. Apesar da tentativa de salientar os invariantes, os professores direcionam para a prática de resolução através do uso de fatorial. Não parece haver uma importância considerável acerca do invariante, discussão que julgamos imprescindível para a compreensão dos problemas.

Em relação às representações, notamos que em nenhum momento o P1 utilizou outras formas de resolução dos problemas, além de fórmulas. O P2 trabalhou listagem, PFC e fórmula. Em determinado momento da aula, P2 parece não conseguir dominar a representação por listagem. Apesar de P2 ter experimentado outros tipos de resolução, finda por levar a resolução dos problemas através da fórmula. De modo geral, há uma prioridade da utilização da fórmula. Mesmo havendo uma valorização da fórmula, os professores poderiam permitir que os alunos experimentassem outras formas de resolução dos problemas. Sem essa orientação, não é dada ao aluno a possibilidade de utilização de outras técnicas. Segundo Vergnaud (1991), os conhecimentos adquiridos pelos alunos devem ser construídos por eles próprios, em relação direta com as operações que são capazes de realizar com a realidade e com as relações que são capazes de captar, compor e transformar. Essas relações incorporam os conceitos que eles vão construindo progressivamente. Nesse sentido, experimentar outras formas de resolução pode auxiliar na compreensão dos invariantes dos problemas combinatórios. É importante frisar que não estamos defendendo o não uso das fórmulas, pois sabemos que estas são importantes para sintetizar um conceito e que auxiliam muito na resolução de problemas em que os resultados são grandes quantidades, entretanto, não deveriam ser o ponto de partida para o trabalho com o conceito.

Sobre os Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo coletados através das entrevistas, consideramos que em relação ao Conhecimento do Conteúdo e de Estudantes, ao fato dos professores afirmarem que poderiam ter realizado aulas mais eficientes e aulas mais práticas, essas privações podem estar relacionadas à ausência de trabalhos com o conteúdo de Combinatória tanto em sua formação acadêmica quanto na continuação de sua formação ou podem também estar associadas ao material que eles costumam utilizar para a execução do trabalho. Os professores também acreditam que para saber se os alunos compreenderam o conteúdo são necessários métodos avaliativos, porém para Ball, Thames e Phelpes (2008) com a experiência os professores devem ser capazes de ouvir e interpretar o raciocínio dos alunos, nesse sentido os professores não demonstram possuir o domínio de conhecimento sobre esses grupos de alunos.

Identificamos a ausência de recursos didáticos diferenciados e dificuldades quanto ao acesso a informações sobre diferentes recursos para o ensino de Combinatória. Rocha (2011) também evidenciou isso em sua pesquisa. Notou nas falas dos professores a dificuldade ao acesso tanto às informações quanto às pesquisas divulgadas em suportes científicos.

Sobre o Conhecimento do Conteúdo e Ensino, concluímos que pesar dos professores terem experiência com turmas do 2º ano, ainda possuem dificuldade de trabalhar a Combinatória, como ficou explícito nas observações das aulas e em suas falas, assim como a falta de tempo para preparação. Acreditamos que se houvesse uma maior tempo para o planejamento pode contribuir para um melhor desenvolvimento dos conteúdos, como apontado por Ball, Thames e Phelps (2008) a preparação para as aulas fazem parte do domínio do conteúdo e de ensino.

Em relação ao Conhecimento do Conteúdo e Currículo, podemos afirmar de forma geral que assim como identificado na observação de aula, e confirmado através de suas falas notamos que se precisa de um novo olhar para o currículo que envolve a Combinatória, pois ao ser questionados em ano é possível iniciar o trabalho com a Combinatória e de que forma, os professores fazem especulações quanto a que ano possa ser ensinado e não têm certeza como realizaria esse trabalho.

Sobre os conhecimentos identificados nos professores em situação de aula, podemos afirmar que estes docentes, em certa instância, possuem esses conhecimentos, mesmo que algumas vezes não estejam esquematizados, metodologicamente falando, para a utilização em sala, ou seja, parece que o Conhecimento Pedagógico precisa de um investimento maior por parte dos professores. É evidente a necessidade de um novo olhar sobre a importância do trabalho com a Combinatória a partir de diferentes significados, representações e invariantes, pois o trabalho com este conteúdo reflete na compreensão dos alunos e no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Esse aspecto também foi notado na pesquisa desenvolvida por Sabo (2010), a partir da qual concluiu que os professores não apresentam com clareza a construção dos conceitos que envolvem estudos de Análise Combinatória, por isso se apropriam das fórmulas.

Com esses resultados obtidos dissuadimos a ideia consistente de que o professor que sabe ensinar é aquele conhecedor apenas do conteúdo, ou seja, aquele que tem o conhecimento teórico sobre sua disciplina. Ensinar, para nós, é a habilidade a partir do conhecimento já existente sobre o conteúdo com o desenvolvimento na prática e atualizações sobre aquilo que ensina. Assim finda uma melhor compreensão sobre os aspectos que envolvem a teoria e a prática, proporcionando modificações e avanços quanto ao ensino.

A principal função do professor é auxiliar os alunos a compreender e se apropriar de determinados conhecimentos. Acreditamos que para o professor superar suas dificuldades relativas a seu trabalho, deve tomar a postura de investigador, na busca de atualizações quanto à evolução de determinados conteúdos e sobre as mudanças pedagógicas, principalmente levando em consideração o que apontam as pesquisas acadêmicas, procurando evidenciar seu interesse nos conteúdos que ensinam. Óbvio que sabemos que as instituições que promovem formação de professores exercem essa função de comunicação entre as pesquisas acadêmicas e os futuros docentes, mas durante a vida profissional há o distanciamento do universo de pesquisa. Nesse sentido, os professores precisam de seus próprios estímulos na busca de atualizações para realização de seu trabalho. analisar especificamente a relação entre o trabalho do professor e o livro didático.

Através da observação e das falas dos professores confirmamos em nossa pesquisa que o conhecimento do conteúdo de Combinatória dos professores necessita de apreciamento, pois existem muitos elementos da Combinatória e do trabalho pedagógico que precisam ser esclarecidos para os professores. Poderíamos ter extrapolado essa pesquisa em, ao mesmo tempo que analisamos as aulas, investigássemos os estudantes, de como o conteúdo está sendo compreendido pelos alunos, e sobre as expectativas dos alunos quanto ao conteúdo e às aulas.

Em pesquisas futuras pode ser analisado o trabalho do professor do Ensino Médio antes e depois de um processo de formação continuada em Combinatória; outra sugestão para estudos é analisar como se dá o processo de formação inicial de professores nos cursos de Licenciatura em Matemática, especificamente nas disciplinas ligadas a Combinatória. Essas são apenas suposições que podem gerar aprofundamento da pesquisa e de outras pesquisas possíveis que estão relaciondas a formação de professores e elementos necessários para ensinar.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 5ª Ed. - São Paulo: Martins Fonte, 2007.

ASSIS, A. **Conhecimento de Combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada: reflexões e prática de uma professora**. Dissertação (Mestrado). Recife, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEDUMATEC - UFPE), Recife, PE, 2014.

AZEVEDO, J; BORBA, R. O ensino da Combinatória por meio da construção de árvores de possibilidades com e sem o uso do software Diagramas de Árbol. **Anais...** do XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Canoas - RS, 12 a 14 de novembro de 2012.

BALL, D.L. Research on teaching mathematics: making subject matter knowledge part of the equation. In: BROPHY, J. (Ed.) **Advances in research on teaching***:* Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction. Greenwich, CT: JAI Press, 1991.V.2. p.1- 47.

BALL, Deborah; Hill, Heather; BASS, Hyman. Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide?**American Educator**. 2005, pp. 14-46.

BALL, D.L.; THAMES, M.H. e PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? In: **Journal of teacher educacion**. 2008 v.59 n.5 pp. 389-407.

BOYER, C. **História da Matemática**. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide., Edgard Blüche/Edusp, São Paulo, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática 1ª. e 2º. Ciclos**. Secretaria de Ensino Fundamental, Ministério da Educação, Brasília,1997.

BRASIL, MEC. Parâmetros **Curriculares Nacionais para Educação Básica**, 1998.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática**. Tese de Doutorado. São Paulo: FEUSP, 1997.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches em Didactitque des Mathématiques**, Vol, 19, nº 2, PP. 221- 266, 1999.

CURI, E. **A matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo: Musa, 2005.

______. **Formação de Professores de Matemática: Realidade presentes e perspectivas futuras.** Dissertação (Mestrado). São Paulo, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifica Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), 2000.

CURY, H. N.; BIANCHI, A. S. ; AZAMBUJA, C. R. J.; MÜLLER, M.J. ; SANTOS, M. B. dos. **Formação de Professores de Matemática.** Acta Scientiae (ULBRA), Canoas, v. 4, n. 1, p. 37-42, 2002.

COSTA. C. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso de modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental**. São Paulo, 2003, 151, f. Dissertação (Mestrado em Educação) Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2003.

CYRINO, Márcia C. C. T. **A formação do professor de Matemática: reflexões e experiências**. In: ECONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÂO MATEMÀTICA, 2004. Recife. *Anais – VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. 2004. P. 24-40.

DURO, M. **Análise Combinatória e a construção de possibilidades: O raciocínio formal do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado). Porto Alegre, Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (BR/RS), 2012.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos**-8º série do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado, Pontifica Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2001.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. Porto alegre: Artmed, 2009

GIL, A. C. ***Métodos e técnicas de pesquisa social***. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GROSSMAN, P.L.; WILSON, S.M.; SHULMAN, L.S. Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado**, 9, 2 (2005)

HUNTER, D. **Fundamentos da Matemática discreta**. LTC, 2011.

LIMA, P. **Princípio Fundamental da Contagem: Conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias**. Dissertação (Mestrado). Recife, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEDUMATEC - UFPE), Recife, PE, 2015.

LIMA, I; AMORIM, N; PESSOA, C. **Aulas de combinatória na educação de jovens e adultos: como ocorrem na prática?** Caderno de trabalhos de conclusão de curso de Pedagogia. Recife: UFPE, 2013, v.1, p. 1-27.

LOUREIRO, A. **Matemática discreta – Introdução**. 2008. Disponível em: <http://homepages.dcc.ufmg.br/~fbotelho/en/courses/md-2-2-2008/aulas/aula01_introducao.pdf. >Acesso em: 08 de dezembro de 2014.

INHELDER, B.; PIAGET, J. (1955). De la logique de I'enfanl a la logique de I'adolescent (The growth of logical thinking from childhood to adolescence). Paris: Presses Universitaires de France.

MATIAS, P.; SANTOS, M.; PESSOA, C. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. **Anais...** 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM). Recife, 2011.

MORGADO, A.; PITOMBEIRA, J.; PINTO DE CARVALHO, P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NÓVOA, António. **Formação de professores e profissão docente**. In: NÓVOA, ANTÓNIO (org). Os professores e a sua formação. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1992, p. 13-33.

NUNES, T. & BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco / Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife: SE, 2012.

PESSOA, C.; BORBA, R. **Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª a 4ª série.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, 2007.

PESSOA, C; BORBA, R. Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Recife, 2008.

_____. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Brasília, 2009.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese. Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. **O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica**. Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,v.1,n.1.2010.

ROA, Rafael; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. **In: Jornades europees d'estadística**. Palma, 2001. pp 253- 264.

ROCHA, C.**; Formação docente e o ensino de problemas Combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e tecnologia). Universidade federal de Pernambuco, Recife, 2011. 191 f.

SABO, R. **Análise de Livros Didáticos no Ensino Médio: Um estudo dos conteúdos referentes á Análise Combinatória**. Monografia (Pós-Graduação). Centro Universitário Santo André, Santo André, 2007.

____. **Saberes Docentes:** a análise combinatória no Ensino Médio. (Dissertação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP – São Paulo, 2010.

SHULMAN, L.S. **Those who understand: knowledge growth in teaching.** Educational Researcher. V.15. 1986.

____. Knowledge and teaching: foundation of the new reform. **Havard Education Review** , vol 57, n.1 p.313-333, fev.1987.

____. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. In: **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado**. V 9,2, 2005 (p.1-30)

SILVA, P. **Problemas Combinatórios Condicionais: um olhar para o Livro Didático.** Dissertação (Mestrado). Recife, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEDUMATEC - UFPE), Recife, PE, 2015.

TARDIF, M; RAYMOND, D. **Tempo e aprendizagem do trabalho no magistério**. Educação e Sociedade, Campinas, SP, v. 20, n. 73, p. 209-244, dez. 2000.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 9º ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

____. **Saberes docentes e formação profissional.** 17ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: R. Lesh & M. Landau (Eds.). **Acquisition of mathematics:** Concepts and process. New York : Academic Press, 1983.

____ . **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas.** Análise Psicológica, 1. 1986.

____ . La théorie de champs conceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques,** , vol 10, n°2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

____ . **El niño, las Matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria. Mexico : Trillas, 1991.