Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

José Luiz Santos da Silva Júnior

Discussão sobre tamanho de fragmento e efeitos de isolamento com uso da equação Fisher - Kolmogorov

Recife
2011

José Luiz Santos da Silva Júnior

Discussão sobre tamanho de fragmento e efeitos de isolamento com uso da equação Fisher - Kolmogorov

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. William Artiles

Recife

2011

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586d Silva Júnior, José Luiz Santos da.
Discussão sobre o tamanho de fragmento e efeito de isolamento com uso da equação de Fisher-Kolmogorov / José Luiz Santos da Silva Júnior. – 2011.
47 f.: il., fig.

Orientador: William Artiles Roqueta
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2011.

Inclui referências e apêndices.

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Biomatemática. 4. Dinâmica proporcional. I. Roqueta, William Artiles. (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2016-049

JOSÉ LUIZ SANTOS DA SILVA JUNIOR

DISCUSSÃO SOBRE TAMANHO DE FRAGMENTO E EFEITOS
DE ISOLAMENTO COM USO DA EQUAÇÃO DE FISHER-KOLMOGOROV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 31/08/2011.

BANCA EXAMINADORA

_____
William Artiles Roqueta (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Fernando Nóbrega Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Aos meus pais
José Luiz e Maria do Carmo

Agradecimentos

- Aos meus pais (José Luiz e Maria do Carmo), minhas irmãs (Cassandra e Carol) e a toda minha família que sempre me apoiaram;
- À minha namorada Stephanie;
- Aos porfessores do DMAT-UFPE. Em especial, aos professores Herrique Araújo, Aron Simis, Ramón Mendoza, César Castilho e William Artiles;
- Aos colegas do DMAT-UFPE. Em especial, Alexandro Caicedo, Marcus , Charlene, Filipe Dantas (bichona),Geibison (binho), Manaíra (brother), Leandro, Felipe Wergete(fifí), Wanderson (joey esponja), Filipe Andrade, Fábio Pereira, Itacíra, Fábio Santos, Murilo(mumu), Cléssius, Ricardo (medible);
- À Universidade Federal de Pernambuco, à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática e à funcionária Tânia Maria M. Maranhão;
- A CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação é apresentada uma solução estacionária para um modelo de dinâmica populacional de uma única espécie, considerando a dispersão da população num espaço heterogêneo e um crescimento logístico da população. No primeiro capítulo, para dar ao leitor alguma intimidade com os conceitos apresentados estudamos alguns modelos de dinâmica populacional de uma única espécie. Referimo-nos a uma única população para dizer que não analisamos aqui a interação entre diversas espécies. No segundo capítulo concentra-se a parte substancial do nosso trabalho. Na seção 1 apresentamos o modelo, na seção 2 apresentamos a solução estacionária para o problema e na seção 3 fazemos uma discussão sobre efeitos de isolamento para uma população.

Palavras-Chave: Equação do Calor. Dinâmica Populacional. Equação de Fisher-Kolmogorov. Biomatemática.

Abstract

This thesis presents a stationary solution to a model of population dynamics of a single species, considering the dispersion of biological population in a heterogeneous space and a logistic population growth. In the first chapter, to give the reader some familiarity with the concepts presented study some models of population dynamics of a single species. We refer to a single population to say we do not analyze the interaction between different species. The second chapter focuses on the substantial part of our work. In Section 1 presents the problem and the model, section 2 presents the stationary solution to the problem and in Section 3 we make a discussion about isolation effects on a population.

Key-Words: Heat Equation. Poulation Dynamics. Fisher-Kolmogorov Equation. Mathematical Biology.

Sumário

1 Dinâmica Populacional **11**

1.1 Dinâmica Populacional de Uma Única Espécie 11

1.2 Modelo de Malthus 11

1.3 Modelo Logístico 12

1.4 Modelo de Clark 13

1.5 Dinâmica Populacional de Duas Espécies 16

1.5.1 Introdução 16

1.5.2 Sistema Predador-Presa(modelo de Lotka-Volterra) 17

1.5.3 Estabilidade e Equilíbrio do Modelo de Lotka-Volterra 18

2 EFEITOS DO TAMANHO DE FRAGMENTO E ISOLAMENTO (MODELO FK) **22**

2.1 Descrição do Modelo 22

2.2 Solução Estacionária 24

2.3 Resultados Numéricos e Discussão 31

A Análise da Estabilidade Linear **37**

B Funções de Liapunov **44**

Referências **45**

Introdução

Problemas matemáticos em dinâmica populacional têm atraído uma considerável atenção por anos. Iniciado pelos artigos clássicos de Lotka (1925), Volterra (1926), Fisher (1937) e Kolmogorov[16] (1937), estas ideias foram expandidas em uma vasto campo científico na interface entre a matemática e ecologia. Em particular, é de grande importância, tanto econômica quanto ambiental[12], o estudo de fragmentação de habitat, para que perguntas como: Qual a melhor forma de desmatar parte de uma floresta?, Qual o tamanho de fragmento ou fragmentos de floresta que deve ser conservada para manutenção das espécies?, Que forma deve ter este fragmento?, Quais as consequências do isolamento? [7],[16]. Hoje, diferentes técnicas matemáticas são utilizadas para descrever dinâmica populacional. Entretanto, a abordagem clássica baseada em equações diferenciais ainda parece ser a mais comum e também a usaremos neste trabalho.

Analisaremos aqui um modelo de uma população movendo-se no espaço, sujeita a uma certa taxa de crescimento constante e positiva, com capacidade de suporte do meio limitada e a uma condição ambiental heterogênea tornando a densidade máxima não constante no espaço . Essa saturação define uma densidade máxima para esta população num dado ponto do espaço. Para descrever matematicamente o problema acima, usaremos a equação de Fisher-Kolmogorov [16]. O objetivo principal é encontrar uma solução analítica estacionária para tal equação. Também, será analisada a dependência da densidade de saturação máxima com o tamanho do fragmento biológico. Não serão levados em cosideração padrões de fragmentação, somente serão observados efeitos dependentes da extensão do fragmento.

Discutiremos ainda, a existência de um tamanho crítico para o fragmento de modo a permitir a subsistência da espécie sugerido por Skellam [13].

Capítulo 1

Dinâmica Populacional

1.1 Dinâmica Populacional de Uma Única Espécie

Nesta seção introduziremos alguns modelos de crescimento populacional de uma única espécie . Começaremos pelo mais simples o Modelo de Malthus, que teve um forte impacto sócio-econômico e também influenciou Charles Darwin que sentiu na densidade populacional a causa de uma inevitável seleção natural.

1.2 Modelo de Malthus

Malthus Propôs em 1978 que uma população sem restrições cresce geometricamente , [4]:

Seja $x(t)$ a densidade populacional no tempo t, assumimos que esta é uma espécie que não sofre interferência de outras espécies, e que as taxas de crescimento e morte são proporcionais ao número de indivíduos da população, ou seja, a variação relativa da população é proporcional à própria população. Matematicamente:

$$x_t(t) = (a - b)x(t)$$

onde $a > 0$ é o coeficiente de crescimento da população devido aos nascimentos(taxa de natalidade), e $b > 0$ é o coeficiente de variação da população devido as mortes(taxa de mortalidade).

Para simplificar tomaremos $\alpha = a - b$, e chamaremos α de coeficiente de crescimento da população. Podemos então reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$x_t(t) = \alpha x(t)$$

Para $t = 0$ temos $x(0) = x_0$(população inicial), integrando e aplicando a condição inicial a equação chegamos a :

$$x(t) = x_0 \exp \alpha t$$

.

Podemos tirar algumas conclusões desta equação:

i) Se $\alpha > 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$, a população cresce indefinidamente.

ii) Se $\alpha < 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, a população tende a extinção.

iii) Se $\alpha = 0, x(t) = x_0, \quad \forall t$ a população permanece constante.

1.3 Modelo Logístico

Para $\alpha > 0$ no modelo anterior, temos que a população crescerá com o passar do tempo. É razoável supor que uma população em algum meio deva crescer com um limite máximo devido por exemplo, à alimentação , à luz solar, espaço físico, etc... . Em 1838 Verhulst, e mais tarde em 1930 Pearl, propuseram que o coeficiente de crescimento deveria decrescer proporcionalmente à população, ou

seja, α deve ser variável. Propondo então:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\alpha - \beta x(t))x(t)$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Consideramos agora $(\alpha - \beta x(t))$ nosso novo coeficiente de crescimento. Novamente tomando $x(0) = x_0$(população incial) e integrando obtemos:

i) para $\alpha \neq 0$, $x(t) = \dfrac{\alpha \exp \alpha t}{C + \beta \exp \alpha t}$ onde $C = \alpha - \beta x_0$
ii) para $\alpha = 0$, $x(t) = \dfrac{x_0}{1 + \beta x_0 t}$.
De i) vemos que:
1) se $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{\alpha}{\beta}$
2) se $\alpha = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$

ou seja, para $\alpha > 0$ se tomarmos $x_0 > \frac{\alpha}{\beta}$ a população decresce se aproximando assintoticamente de $\frac{\alpha}{\beta}$ com $t \to \infty$, já se tomarmos $x_0 < \frac{\alpha}{\beta}$ a população cresce se aproximando assintoticamente de $\frac{\alpha}{\beta}$ com $t \to \infty$ e por útimo se $x_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ a população permanece constante com o tempo, ou seja, $x(t) = \frac{\alpha}{\beta}$, $\forall t$.

1.4 Modelo de Clark

Vamos agora apresentar um modelo que se baseia em uma equação diferencial de segunda ordem. Este modelo conveniente foi dado por Clark em 1971:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = H(x, \frac{dx}{dt})$$

Aqui a derivada segunda representa a "força de sobrevivência da espécie ". Vamos supor que esta força seja a soma de duas outras quantidades:

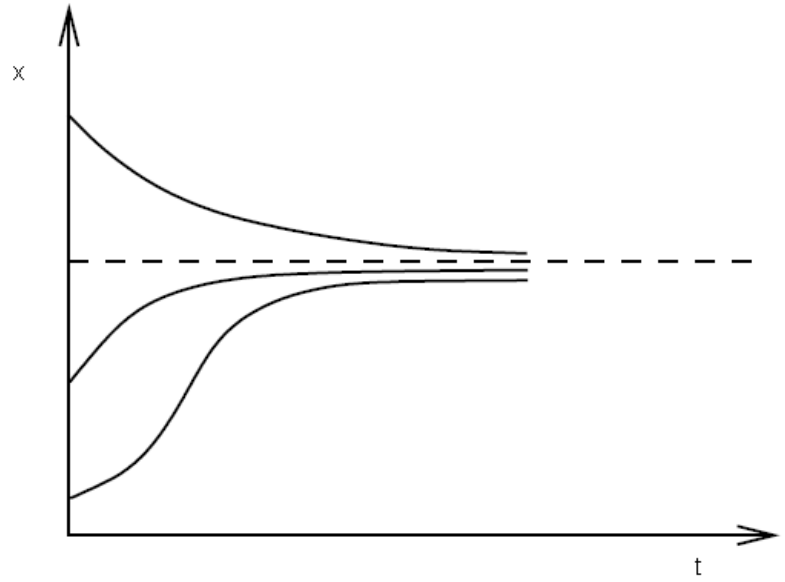

Figura 1.1: curva logística ($\alpha > 0$)

H_r : força de retorno ao ponto de equilíbrio, ou força de restauração

H_p : força devido a influência do passado recente da população.

Assim,

$$H(x, \frac{dx}{dt}) = H_r + H_p.$$

Faz sentido supor que a força de restauraçaõ H_r depende somente de x, e escrevemos $H_r = -h(x)$ onde , $h(x)$ deve satisfazer:
1. $\exists\, x^* > 0$ tal que $h(x^*) = 0$ (equilíbrio)
2. $(x - x^*)h(x^*) > 0$ para $x \neq x^*$ (efeito restaurador).
Agora, como H_p reflete a história recente da população, assumimos que esta é influenciada pela taxa de crescimento da população, digamos da seguinte forma :

$$H_p = -f(x)\frac{dx}{dt}$$

Voltando ao nosso modelo e aplicando o discutido acima obtemos:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + h(x) = 0$$

Iremos fazer agora algumas suposições:

1)f é par, h é ímpar, $xh(x) > 0$ para $x \neq 0$ e $f(0) < 0$;

2)f, h contínuas e h Lipschitz.

3)$F(x) = \int_0^x f(u)du$ com $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$

4)$F(x)$ tem um único zero positivo, $x = \alpha$, e $F(x)$ é monotonicamente crescente para $x > \alpha$.

Precisamos agora de um teorema conhecido como Teorema de Liénard que será enunciado agora:

[de Líenard]

A equação $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + h(x) = 0$, com f e h satisfazendo as condições, de 1) à 4) anteriores, possui uma única solução periódica orbitamente estável.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Sinko [8].

Com isso vemos que este modelo se comporta de maneira diferente dos anteriores, cujas soluções se aproximam assintoticamente de algum ponto.

Exemplo: Tomemos $h(x) = x - u$ e $f(x) = (x-u)^2 - 1$, assim

$$\ddot{x} + ((x-u)^2 - 1)\dot{x} + (x-u) = 0$$

fazendo a mudança de variável $w = x - u$ vemos que $h(w)$ e $f(w)$ satisfazem as condições do Teorema de Líenard, logo existe uma única solução periódica.

1.5 Dinâmica Populacional de Duas Espécies

1.5.1 Introdução

Nas seções anteriores estudamos alguns modelos de dinâmica populacional de uma única espécie. Nesta apresentaremos um modelo de dinâmica populacional para duas espécies, mas antes disso, faremos uma breve apresentação de relações entre duas espécies: digamos espécie A e espécie B. A classificação se baseia nos efeitos resultantes dessa interação:

(i) Neutralismo, em que nenhuma das espécies é afetada pela interação.

(ii) Competição, em que cada espécie afeta negativamente a outra, seja na luta por comida, espaço físico ou qualquer outro meio de subsistência.

(iii) Mutualismo, em que a interação é benéfica para ambas as espécies que podem ou não viver juntas executando funções complementares. Em algumas associações mutualísticas as duas espécies tiram proveito da relação de tal forma que, quando separadas são incapazes de viver individualmente.Essas associações formam uma sociedade distinta, denominada Simbiose. Um exemplo desta relação é a convivência dos cupins com as bactérias em seus intestinos que digerem madeira.

(iv) Protocooperação, em que a interação é benéfica, mas não necessária para as espécies. Um exemplo desta situação é a dos caranguejos que hospedam celenterados em seus dorsos os quais servem de camuflagem aos caranguejos, que por outro lado são transportados e obtêm partículas de alimentos quando os caranguejos capturam suas presas.

(v) Comensalismo,em que a espécie A(comensal) necessita da espécie B(hospedeira), mas não se afetam pela interação.

(vi) Predação, em que a espécie A(presa) é afetada negativamente pela espécie B(predador), a qual necessita dessa interação. Do ponto de vista ecológico, esta relaçao é extremamente necessária para a estabilidade do sistema. Como exemplo desta interação interespecífica, podemos citar o relato de Odum: em 1907 havia uma população de 4.000 veados e uma respeitável população de predadores, pumas e lobos, coabitando uma determinada região, no Arizona. Entre 1907 e 1923 fez-se um esforço para remover os predadores. Em 1923 a população de veados subiu a 100.000, o que estava além da capacidade de sustento oferecida pela vegetação. Em pouco tempo, a vegetação foi devorada, e em dois anos a população de veados caiu para 10.000, continuando a decrescer. Calcula-se que num sistema presa-predador a população de veados não passaria de 30.000.

1.5.2 Sistema Predador-Presa(modelo de Lotka-Volterra)

Denotam-se por $x = x(t)$ e $y = y(t)$ as populações, respectivamente, da presa e do predador em um instante de tempo t. Para modelar a interação entre as duas espécies são assumidas as seguintes hipóteses:

1. Na ausência do predador, a população da presa aumenta a uma taxa proporcional à população atual. Dessa forma, se $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = ax, a > 0$. Onde a é a taxa de crescimento da população de presas.

2. Na ausência de presas, a população do predador se extingue à uma taxa proporcional à sua população atual. Assim, se $x = 0$, $\frac{dy}{dt} = -\mu y, \mu > 0$. Onde μ é a taxa de morte dos predadores.

3. Número de encontros entre presas e predadores é diretamente proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a inibir o crescimento da população de presas e a aumentar o da população de predadores. Dessa forma, a população de presas sofre uma redução de $-\alpha xy$ e a população de predadores é aumentada de γxy, onde α e γ são constantes positivas e correspondem, respectivamente, às taxas de predação e de conversão da caça em novos predadores.

Destas hipóteses obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x(a-\alpha y) \\ \dfrac{dy}{dt} &= y(\gamma x-\mu). \end{cases} \tag{1.1}$$

que é conhecido como modelo de Lotka-Volterra.

1.5.3 Estabilidade e Equilíbrio do Modelo de Lotka-Volterra

Note que, estas equações formam um sistema não-linear e não integrável em t. Como x e y representam populações, estudaremos o comportamento de (1.1) no primeiro quadrante, que é onde existe significado biológico , já que , não existe população negativa.

Nos semi-eixos já sabemos o comportamento do sistema, como visto na descrição do modelo. O ponto de equilíbrio do sistema no primeiro quadrante é $(\frac{\mu}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$.

Proposição 1.1. *Todas as órbitas do sistema (1.1), no primeiro quadrante, menos o ponto* $(\frac{\mu}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$ *são curvas fechadas.*

Demonstração. Consideremos a função :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\frac{x}{x^*} - ln\frac{x}{x^*} - 1)\gamma x^* + (\frac{y}{y^*} - ln\frac{y}{y^*} - 1)\alpha y^* \quad , \\ \text{onde } \ x^* &= \frac{\mu}{\gamma} \ , \ y^* = \frac{a}{\alpha} \ , \ f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

A função f tem as seguintes propriedades:

1. existe um único ponto crítico que é de mínimo absoluto em (x^*, y^*).

   Prova: A função $g(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = t - ln(t)$ tem um mínimo absoluto em $t = 1$, logo :
   $t - ln(t) > 1 \Rightarrow t - ln(t) - 1 > 0$. Assim , $f(x, y) > 0$ se $(x, y) \neq (x^*, y^*)$.
   Portanto, existe um mínimo absoluto em (x^*, y^*)

2. f é constante ao longo de cada órbita $(x(t), y(t))$ de (1.1).

   Prova: Derivemos f em relação a t:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) &= \frac{1}{x^*}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\gamma x^* + \frac{1}{y^*}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\alpha y^* \\
&= (x - x^*)\gamma\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} + \ (y^* - y)\alpha\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \\
&= (x - \frac{\mu}{\gamma})\gamma(a - \alpha y) + \ (y - \frac{a}{\alpha})\alpha(-\mu + \gamma x) \qquad (1.3) \\
&= (\gamma x - \mu)(a - \alpha y) + \ (\alpha y - a)(-\mu + \gamma x) \\
&= 0, \forall t.
\end{aligned}$$

3. f não é constante em aberto conexo algum.
   Prova: Basta notar que sendo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x - x^*}{x}\gamma$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y - y^*}{y}\alpha$ estes somente se anulam simultaneamente em (x^*, y^*) .
   Assim as curvas de nível de f são curvas fechadas o redor de (x^*, y^*) .

A função f satisfazendo essas três propriedades é uma função Liapunov(ver Apêndice) e as curvas

de nível desta função são as órbitas periódicas do sistema (1.1).

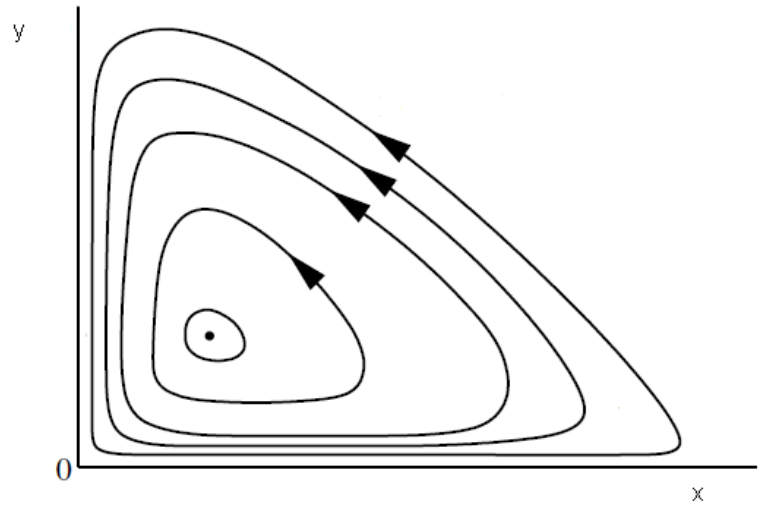

Figura 1.2: Soluções, no plano de fase, para o sistema Lotka-Volterra

A interpretação do resultado acima é que toda evolução que comece no interior do primeiro quadrante resulta periódica. Como (x^*, y^*) corresponde a um equilíbrio, se as populações iniciais forem $x(0) = x^*$ e $y(0) = y^*$ elas continuarão constantes ao longo do tempo.

Proposição 1.2. *Se $(x(t), y(t))$ é uma órbita do sistema (1.1), de período Γ , no primeiro quadrante, exceto o ponto (x^*, y^*) então:*

$$\frac{1}{\Gamma}\int_0^{\Gamma} x(t)dt = x^*$$

e

$$\frac{1}{\Gamma}\int_0^{\Gamma} y(t)dt = y^*$$

Ou seja, para qualquer evolução as médias das populações coincidem com os valores do ponto (x^*, y^*).

Demonstração.

Do sistema (1.1) temos

$$\int_0^\Gamma \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int_0^\Gamma (x\gamma - \mu)dt$$

assim,

$$ln(y(t))_0^\Gamma = \gamma \int_0^\Gamma x(t)dt - \mu\Gamma$$

como $y(0) = y(\Gamma)$, o primeiro termo da equação anterior é zero. Daí,

$$\int_0^\Gamma x(t)dt = \frac{\mu\Gamma}{\gamma}$$

ou seja,

$$\int_0^\Gamma x(t)dt = x^*\Gamma$$

.

Análogo para y(t).

Capítulo 2

EFEITOS DO TAMANHO DE FRAGMENTO E ISOLAMENTO (MODELO FK)

2.1 Descrição do Modelo

Neste capítulo, analisaremos um modelo de uma população de uma espécie com taxa de crescimento constante e positiva. Esta população habita uma região dividida em duas partes: uma área mais favorável ao desenvolvimento dessa que será chamada região interna ou máscara, e uma segunda (região externa), uma área pouco favorável mas, ainda assim, onde a vida é possível. Consideramos que a capacidade de suporte do meio à vida é limitada, gerando uma densidade populacional de saturação. Além disso, os indivíduos se movem no espaço de forma aleatória, impondo um fenômeno de difusão fickiana.

Trataremos aqui, não com o número de indivíduos da população e sim, com a densidade populacional. Entendemos a densidade populacional como função contínua do tempo e do espaço, sendo estas variáveis contínuas.

Para modelar o problema iremos considerar a equação de Fisher-Kolmogorov em uma dimensão:

$$u_t = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + au(x,t) - \frac{b}{a}u^2(x,t), \tag{2.1}$$

onde D e a representam a difusividade e a taxa de crescimento respectivamente, u representa a densidade populacional, $\frac{b}{a}$ é o inverso da capacidade de suporte, l é o comprimento da máscara e $(x,t) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Implicitamente, estaremos tratando com um problema de valor inicial e de fronteira. No estudo analítico, entretanto, procuraremos por soluções estacionárias do problema.

Faremos, primeiramente, a adimensionalização da equação (2.1) com a seguinte alteração:

$$\begin{aligned} x &= x^*\sqrt{\tfrac{D}{a}}, \\ t &=^* t\tfrac{1}{a}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

implicando

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_{x^*}\sqrt{\tfrac{a}{D}}, \\ \partial_t &= \partial_{t^*}a, \\ L = l\sqrt{D/a}. & \end{aligned} \tag{2.3}$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1) obtemos

$$u_t = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) - Cu^2(x,t)\,, \tag{2.4}$$

onde $C = \frac{b}{a}$ e o asterisco foi retirado por simplicidade.

Na última equação C representa a condição ambiental em função da posição x. Como supomos duas condições ambientais diferentes, dentro e fora da região favorável a vida, podemos escrever C como uma função constante por partes da seguinte forma:

$$C(x) = \begin{cases} C_1, \, se \;\; |x| < \frac{L}{2}, \\ C_0, \, se \;\; |x| > \frac{L}{2}, \end{cases} \tag{2.5}$$

ou seja, dentro da região mais favorável a condição ambiental é representada pela constante c_1, e fora dela representada pela constante c_0. Quanto maior C mais desfavorável é o ambiente, assim devemos ter $c_0 > c_1$

2.2 Solução Estacionária

Nós consideramos agora (2.4) com $C(x)$ dado por (2.6) e a variável densidade populacional é reescrita como $u = \frac{3}{2}\frac{\phi}{C_1}$:

$$\frac{3}{2c_1}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3}{2c_1}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{3}{2c_1}\phi - \frac{3}{2c_1}\,(\frac{3}{2}\frac{C(x)}{c_1}\phi^2\,)$$

dividindo ambos lados por $\frac{3}{2c_1}$ temos,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi - \frac{3}{2}\frac{C(x)}{c_1}\phi^2$$

faremos agora

$$k(x) = \begin{cases} \frac{C_0}{C_1}, \, se \;\; |x| > \frac{L}{2}, \\ 1, \, se \;\; |x| < \frac{L}{2}, \end{cases} \tag{2.6}$$

e obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi - \frac{3}{2}k(x)\phi^2. \tag{2.7}$$

Que pode ainda ser reescrito de modo a evidenciar as condições de vida extena e interna:

$$\begin{cases} \phi_t &= \phi_{xx} + \phi - \frac{3}{2}k(x)\phi^2 \quad |x| > \frac{L}{2} \\ \phi_t &= \phi_{xx} + \phi - \frac{3}{2}\phi^2 \qquad |x| < \frac{L}{2}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Sobre as condições físicas e biológicas do problema podemos estabelecer que fora da região propícia a densidade populacional se aproxima da saturação externa que é dado pelo inverso de $\frac{3k}{2}$, ou seja, $\frac{2}{3k}$.Neste ponto, é importante salientar que mesmo não sendo mencionado em [1] é imprecindível que a densidade externa se aproxime de $\frac{2}{3k}$ mas nunca seja igual.Esta afirmação será melhor compreendida mais adiante. Também é esperada continuidade na fronteira entre as regiões tanto da densidade populacional ϕ quanto do fluxo ϕ_x. Estamos supondo aqui também uma simetria para a densidade populacional inicial expressa por $\phi_0(-x,0) = \phi_0(x,0)$ e como procuraremos por solução estacionária esperamos que a densidade populacional se estabilize para um tempo suficientemente grande.

Tendo em mente as considerações acima e denotando por ϕ^o e ϕ^i as densidades populacionais externas e internas, respectivamente, dispomos das seguintes condições:

$$\begin{aligned} \phi^o(\pm\tfrac{L}{2},t) &= \phi^i(\pm\tfrac{L}{2},t) \\ \phi^o_x(\pm\tfrac{L}{2},t) &= \phi^i_x(\pm\tfrac{L}{2},t) \\ \phi^o(\pm\infty,t) &= \tfrac{2}{3k} \\ \phi(x,0) = \phi_0(x) & \end{aligned} \tag{2.9}$$

Com tudo que foi estabelecido nesta seção, procuraremos por uma solução estacionária não-trivial, ou seja, procuramos solução para:

$$\begin{cases} 0 &= \phi_{xx} + \phi - \frac{3}{2}k(x)\phi^2 \quad |x| > \frac{L}{2}, \\ 0 &= \phi_{xx} + \phi - \frac{3}{2}\phi^2 \qquad |x| < \frac{L}{2}, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \phi^o(-\tfrac{L}{2},t) &= \phi^i(-\tfrac{L}{2},t), \\ \phi^o_x(-\tfrac{L}{2},t) &= \phi^i_x(-\tfrac{L}{2},t), \\ \phi^o(-\infty,t) &= \tfrac{2}{3k}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Podemos considerar somente condições para x positivo $\phi(x,\cdot)$, pois não depende das condições iniciais e as condições físicas são simétricas.

De (2.10) temos

$$0 = \phi^o_{xx} + \phi^o - \frac{3}{2}k(x)\,(\phi^o\,)^2$$

multiplicando a equação acima por $2\phi^o_x$ e a reformulando encontramos

$$2\phi^o_x\phi^o_{xx} + 2\phi^o\phi^o_x - k(x)\,(3\,(\phi^o\,)^2\phi^o_x\,) = 0$$

note que o lado esquerdo da equação é justamente a derivada em relação a x de

$$(\phi^o_x\,)^2 + (\phi^o\,)^2 - k(x)\,(\phi^o\,)^3 - d_o,$$

onde d_o é uma constante. Logo,

$$(\phi^o_x\,)^2 + (\phi^o\,)^2 - k(x)\,(\phi^o\,)^3 - d_o = 0.$$

Procedendo de maneira análoga para a parte interna encontramos

$$(\phi^i_x\,)^2 + (\phi^i\,)^2 - (\phi^i\,)^3 - d_i = 0$$

e assim chegamos a

$$\begin{cases} \phi_x^2 + \phi^2 - k\phi^3 - d_o \;\; = 0\;, & x > \frac{L}{2}, \\ \phi_x^2 + \phi^2 - \phi^3 - d_i \;\; = 0\;, & 0 < \;\; x < \frac{L}{2}, \end{cases} \tag{2.12}$$

onde d_0 e d_i são constantes e serão determinadas posteriormente.

Não trabalharemos aqui com o as equações acima diretamente, e sim com o problema inverso. Neste sentido, tomamos $x > \frac{L}{2}$ e escrevemos $\phi = \phi\big(x(\phi)\big)$. Então, derivando em relação a ϕ encontramos,

$$1 = \phi_\phi = \phi_x\big(x(\phi)\big)x_\phi$$

por outro lado, da equação primeira equação em 2.12

$$\phi_x = \sqrt{-\phi^2 + k\phi^3 + d_o}$$

e agora combinando chegamos a:

$$x_\phi = \frac{1}{\sqrt{k\phi^3 - \phi^2 + d_o}}.$$

Procedendo de forma similar para $0 < x < \frac{L}{2}$ encontramos

$$x_\phi = \frac{1}{\sqrt{\phi^3 - \phi^2 + d_i}}.$$

Integrando as expressões acima obtemos a posição em função da densidade populacional para cada condição ambiental:

$$\begin{aligned} x(\phi) &= \int \frac{d\phi}{\sqrt{k\phi^3 - \phi^2 + d_o}} + b_0\ , \quad x > \tfrac{L}{2}, \\ x(\phi) &= \int \frac{d\phi}{\sqrt{\phi^3 - \phi^2 + d_i}} + b_i\ , \qquad 0 > \ x < \tfrac{L}{2}, \end{aligned} \quad . \tag{2.13}$$

onde b_0 e b_i são as novas constantes de integração , que junto com a_0 e a_i, serão determinadas pelas condições de contorno. Iremos, agora, trilhar um caminho na intenção de determiná-las, fazendo antes algumas considerações úteis.

Na área favorável a vida, $|x| < \frac{L}{2}$, devemos ter um valor máximo para a densidade populacional ϕ, que será denotada por $\phi^* = \phi(0, \cdot)$. Claramente, $\phi^i \leq \phi^* \leq \frac{2}{3}$, onde ϕ^i é a função densidade para $|x| \leq \frac{L}{2}$. Além disso, pela continuidade de ϕ na fronteira, temos $\phi(\frac{L}{2}, \cdot) = \phi^i(\frac{L}{2}, \cdot) = \phi^+$ e $\frac{2}{3k} < \phi^+ \leq \phi^i$.

De acordo com a notação estabelecida no parágrafo anterior chegamos as condições de fronteira:

$$\begin{aligned} \phi_x(0,\cdot) &= 0\ , \quad \text{ou } x_\phi(\phi^*) = \infty, \\ \phi(0,\cdot) &= \phi^*\ , \quad \text{ou } x(\phi^*) = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Aplicando as condições de contorno do problema inverso à segunda equação em (2.12) obtemos $d_0 = -(\phi^*)^3 + (\phi^*)^2$. Substituindo o valor encontrado para d_0 em (2.13) obtemos,

$$x(\phi) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\phi^3 - {\phi^*}^3 - \phi^2 + {\phi^*}^2}}$$

Fatorando o polinômio no denominador da expressão anterior percebemos que $\phi^3 - {\phi^*}^3 - \phi^2 + {\phi^*}^2 = (\phi - \phi^*)(\phi^2 + \phi^*\phi - \phi + {\phi^*}^2 - \phi^*)$, possui somente uma raiz real $\phi = \phi^*$. Daí, o integrando

$$\frac{\phi}{\sqrt{\phi^3 - {\phi^*}^3 - \phi^2 + {\phi^*}^2}}$$

é uma função contínua no intervalo (ϕ^+, ϕ^*) e podemos escrever:

$$x(\phi) = \int_{\phi^*}^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^3 - {\phi^*}^3 - \varphi^2 + {\phi^*}^2}}\ , \quad 0 < x < \tfrac{L}{2}, \tag{2.15}$$

note que $x(\phi)$ satisfaz (2.14) e está bem definida, apesar da descontinuidade do integrando em $x(\phi)^*$. Com efeito, seja s pentencente ao intervalo (ϕ^+, ϕ^*), a integral $\int_{\phi^*}^{s} \frac{d\varphi}{(\phi - \phi^*)^{\frac{1}{2}}}$ converge, pois toda integral da forma $\int_a^b \frac{dy}{(y-b)^\alpha}$ com $\alpha < 1$ é convergente.

Sejam $g(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^3 - {\phi^*}^3 - \phi^2 + {\phi^*}^2}}$ e $h(\phi) = \frac{1}{(\phi - \phi^*)^{\frac{1}{2}}}$. Temos,

$$\lim_{\phi -> \phi^*} \frac{h(\phi)}{g(\phi)} = \lim_{\phi -> \phi^*} \frac{1}{(\phi^2 + \phi^*\phi - \phi + {\phi^*}^2 - \phi^*)}$$

como não existe raíz real para o polinômio $(\phi^2 + \phi^*\phi - \phi + {\phi^*}^2 - \phi^*)$, o limite acima é uma constante diferente de zero. Pelo teste do limite do quociente para integrais impróprias, concluimos que a integral em 2.15 converge para todo $\phi \in [\phi^+, \phi^*]$

por outro lado, para a região exterior as condições são:

$$\begin{aligned} \phi_x(\infty,\cdot) &= 0\ , \quad \text{ou } x_\phi(\tfrac{2}{3k}) = \infty, \\ \phi(\tfrac{L}{2},\cdot) &= \phi^+\ , \quad \text{ou } x(\phi^+) = \tfrac{L}{2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Usando as condições acima na primeira equação em (2.12) concluimos que $d_o = \frac{4}{27k^2}$ e podemos escrever:

$$x(\phi) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{k\phi^3 - \phi^2 + \frac{4}{27k^2}}} + \frac{L}{2}\ , \quad x > \tfrac{L}{2}. \tag{2.17}$$

Fatorando o polinômio do denominador encontramos

$$k\phi^3 - \phi^2 + \frac{4}{27k^2} = (\phi - \frac{2}{3k}\ )^2\ (\phi + \frac{1}{3k}\ ),$$

cujas raízes são $\frac{2}{3k}$ e $-\frac{1}{3k}$ que não pertencem ao intervalo $(\frac{2}{3k}, \phi^+]$. Sendo assim podemos escrever :

$$x(\phi) = \int_{\phi^+}^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\varphi - \frac{2}{3k})^2(\varphi + \frac{1}{3k})}} + \frac{L}{2}\ , \quad x > \tfrac{L}{2}, \tag{2.18}$$

ou ainda,

$$x(\phi) = \int_{\phi^+}^{\phi} \frac{3k d\varphi}{(3k\varphi - 2)\sqrt{k\varphi + \frac{1}{3}}} + \frac{L}{2}\ , \quad x > \tfrac{L}{2}, \tag{2.19}$$

onde verificam-se as condições (2.16) .

Aqui verifica-se o motivo pelo qual $\phi \neq \frac{2}{3k}$. Se fosse possível a igualdade nossa solução não seria válida para este valor, pois a integral acima diverge para $\phi = \frac{2}{3k}$.

Chegamos então a solução para o problema inverso para cada região:

$$\begin{aligned} x(\phi) &= \int_{\phi^*}^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^3 - {\phi^*}^3 - \varphi^2 + {\phi^*}^2}}\ , \qquad x < \ \tfrac{L}{2}, \\ x(\phi) &= \int_{\phi^+}^{\phi} \frac{3kd\varphi}{(3k\varphi - 2)\sqrt{k\varphi + \frac{1}{3}}} + \frac{L}{2}\ , \quad x > \ \tfrac{L}{2}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

O problema ainda não está completamente solucionado pois não conhecemos ϕ^+ e ϕ^*. Da continuidade da densidade populacional na fronteira temos

$\phi^o(\frac{L}{2}, \cdot) = \phi^+ = \phi^i(\frac{L}{2}, \cdot)$

donde,

$$\phi^{+3} - \phi^{+2} - \phi^{*3} + \phi^{*2} = k\phi^{+3} - \phi^{+2} + \frac{4}{27k^2}$$

que implica

$$\phi^+ \ = \left(\frac{\phi^{*2} - \phi^{*3} - \frac{4}{27k^2}}{k-1} \right)^{\frac{1}{3}} \ = \ f(\phi^*). \tag{2.21}$$

Com esta nova perspectiva escrevemos

$$\int_{\phi^*}^{f(\phi^*)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^3 - {\phi^*}^3 - \varphi^2 + {\phi^*}^2}} \ = \frac{L}{2}, \tag{2.22}$$

Esta equação define $\phi*$ e torna o problema determinado, com solução única. E mais, agora temos uma relação entre ϕ^* e L, o que nos permite saber como se comporta a densidade populacional máxima para diferentes tamanhos da região favorável à vida. Mais explicitamente:

$$G(\phi^*, L) \ = P[f(\phi^*)] - P[\phi^*] - \frac{L}{2} \ \equiv 0, \tag{2.23}$$

onde $P[\phi]$ é uma primitiva do integrando em (2.22).

2.3 Resultados Numéricos e Discussão

De posse da equação (2.23) vamos examinar a relação entre a população máxima e o tamanho da região favorável. É representado graficamente ϕ^* em termos de L solucionado numericamente a equação (2.23), para vários valores de k. Estas curvas são apresentados na figura 2.1. Usamos a equação (2.21) para plotar o gráfico 2.2 e estudar o comportamento da densidade populacional na fronteira em relação a densidade populacional máxima.

Para se ter uma melhor compreensão do que será dito, deve-se primeiro entender que espécies diferentes têm, via de regra, taxas de crescimento e dispersividade diferentes. Além disso, não é impróprio conjecturar que espécies diferentes "sentem"de forma diferente as condições ambientais do meio. Dito isso, entendemos que para cada espécie teremos um k diferente.

Com tudo que foi dito no parágrafo anterior e lembrando que o comprimento adimensional do fragmento é dado por $L = l\sqrt{a/D}$, inferimos que, para l fixo, espécies mais dispersivas têm um comprimento adimensional de fragmento menor, enquanto que para espécies menos dispersivas tem-se L maior. Como reflexo disso, ao analisar os gráficos da figura 2.1, deve-se ter em mente que espécies mais dispersivas tendem a estar mais a esquerda da figura enquanto que as menos dispersivas devem estar mais a direita.

Observando a figura 2.1 abaixo, nota-se que para qualquer valor de k, existe vida dentro da área mais favorável , independente do valor de L. Isto conduz a afirmar que, para este modelo, não cabe a existência de um valor crítico para o comprimento do fragmento, ou seja, tamanhos pequenos de fragmento não levam a extinção. Também verifica-se que a perpetuação da espécie independe das condições externas, expressas por k, pois para quaisquer valores de k existe vida na área interna. De fato, as condições externas afetam o ambiente interno mas não a ponto de conduzir a extinção.

Analisando ainda a figura 2.1, percebe-se que quanto maior o valor de L maior será a máxima densidade populacional. Outro fato importante, lembrando da relação entre dispersividade e o grá-

fico, é que espécies mais dispersivas tem densidade de saturação inferior àquelas menos dispersivas. Além disso, nota-se que quanto maior k, condição externa mais severa, maior será a inclinação da curva, especialmente quando L é pequeno, implicando que dispersores são mais influenciados por condições externas.

Da figura 2.2 percebe-se que tanto para condições externas intermediárias como também para condições severas não há alteração considerável na densidade populacional da fronteira para mudanças na densidade máxima.

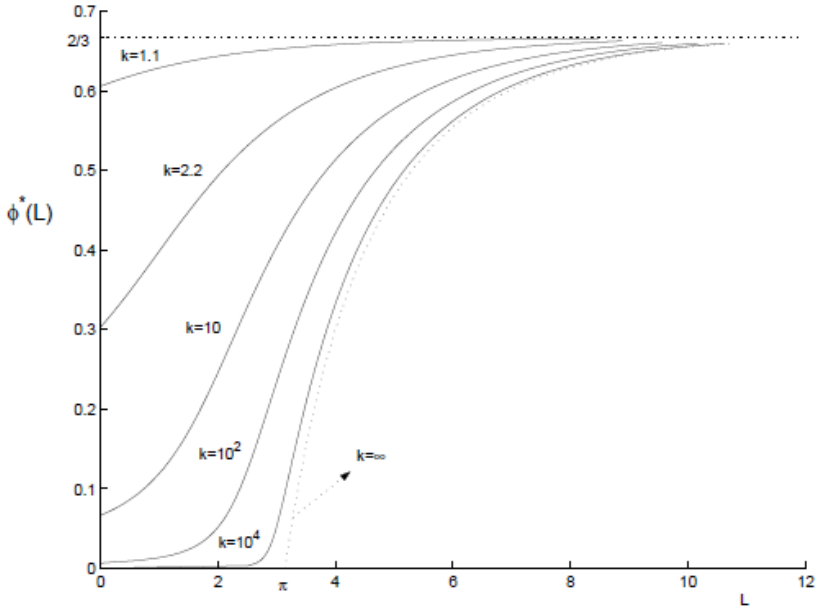

Figura 2.1: A máxima densidade populacional como função de L para vários valores de K. (figura retirada de [1]

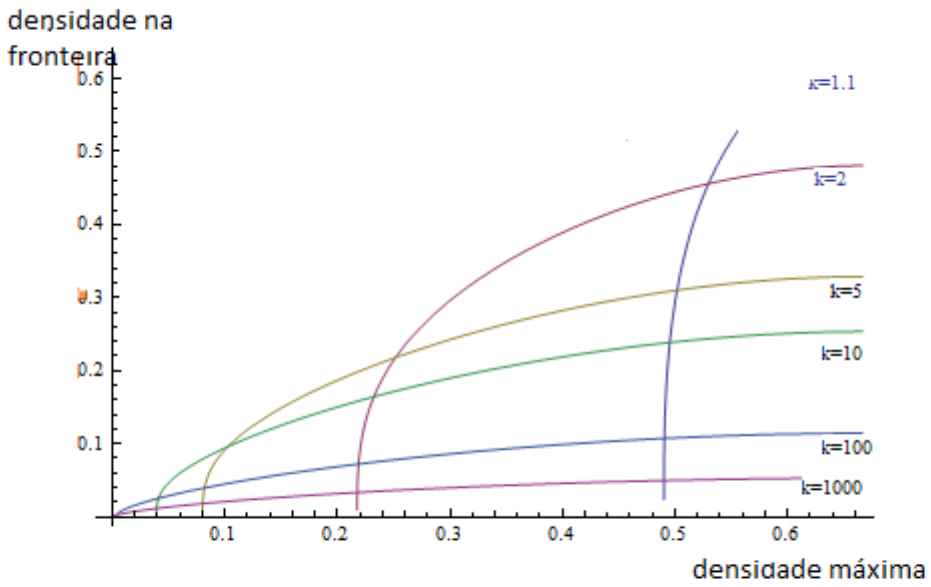

Figura 2.2: A densidade populacional na fronteira em função da máxima densidade populacional para vários valores de K.

Conclusão

Analisamos aqui um modelo de uma população movendo-se no espaço, sujeita a uma certa taxa de crescimento constante e positiva, com capacidade de suporte do meio limitada e a uma condição ambiental heterogênea, contínua por partes. Para tal análise, fizemos uso da equação de Fisher - Kolmogorov, chegando a solução estacionária para o problema. De posse desta, conseguimos uma relação entre máxima densidade populacional, tamanho do fragmento e condições ambientais externas donde conclui-se:

1. Há vida no interior do fragmento independentemente do tamanho deste e das condições ambientais externas.
2. Existe uma relação entre o tamanho do habitat e a densidade de saturação, que é maior para regiões maiores.
3. Espécies mais dispersivas são mais suscetíveis a extinção.
4. Isolamento não é um fator determinante para extinção de uma espécie, sendo mais atuante em seres mais dispersivos.

Perspectivas de trabalhos futuros

1. Estudos bidimensional e tridimensional.
2. Dinâmica populacional com várias espécies em fragmentos.
3. Estudos de fragmentos conectados.

Referências

[1] Artiles, W.R. & De Carvalho P.G.S. & Kraenkel,R.A *Patch-size and isolation effects in the Fisher - Kolmogorov equation*, J. Math. Biol., volume 57, pp 521-535, 2008.

[2] De Cravalho P.G.S. *Modelo de Fisher - Kolmogorov em dinâmica populacional com capacidade de suporte espacialmente dependente*, Tese(Física)-IFT/UNESP, 2007.

[3] Andow, D. ,Abrmson, G. ,Levin, S. , Okubo, A., *Spread of invading organisms*, Landscape Ecology 4, 177-188 (1990).

[4] Murray J.D., *Mathematical Biology I : An Introduction*, Springer (1961) 308-340.

[5] Evans, L. C. , *Partial Differential Equations*, Graduate Stdies in Mathematics, American Mathematical Society, Volume 19 (1998).

[6] Friedman, A. , *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[7] EWERS, ROBERT M. & DIDHAM, RAPHAEL K. *The Effect of Fragment Shape and Species' Sensitivity to Habitat Edges on Animal Population Size*,Conservation Biology, Vol. 21, (2007).

[8] Sinko, J.W.& Streifer W. , *A Model for populations reproducing by fission*, Ecology, 52, pp. 330-335, 1971.

[9] H. Brézis, *Análisis Fuctional*, teoría y aplicaciones, Alianza, Madrid, 1984.

[10] G. B. Folland, *Real analysis*, Modern techniquer and their applications. 2ª ed, Wiley-Interscience, 1999.

[11] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*. Marcel Dekker, New York, 1973.

[12] Polasky S. & Nelson E. & Lonsdorf E. & Fackler P. & Starfield A., *CONSERVING SPECIES IN A WORKING LANDSCAPE: LAND USE WITH BIOLOGICAL AND ECONOMIC OBJECTIVES*. Ecological Applications 15:13871401, 2005.

[13] Skellam G. J. , *The mathematical theory of the dynamics of biological populations*, New York, Academic Press., 1973.

[14] Kenkre, V.M. & Kuperman M.N. , *Aplicability of Fisher equatio to bacterial population dynamcs.*, Phys.Rev. E 67, 051921 (2003)

[15] Ferraz, G. , *A large scale deforesttion experiment: efects of patch area and isolation on amazon birds.*, Science, 315, 238-241, 2007.

[16] Kolmogorov, A.N.& Petrovsky I.G.& Piskunov,N.S *Invetigation of the equation of diffusion ombined with incrising of the substance and its application to biology problem* , Bull,Moscow State Univ. Ser. A: Math. Mech. 1(6), pp. 1-25, 1937.

[17] Krauss J., *Habitat fragmentation causes immediate and time-delayed biodiversity loss at different trophic levels*,Ecology Letters Volume 13, Issue 5, pages 597605, May 2010.

[18] Fahrig L. , *Efect of habitat fragmantation on the extinction threshold : a synthesis*, Ecological Applications 12:346353.

[19] Begon M. , *Ecology*, Blackwell Publishing LTD, Oxford 2006.

[20] Ayres, J.M.,& Fonseca, G.A.B.,& Queiroz, H.L.,& Pinto, L.P., Masterson, D. Cavalcanti, R.B. , *Ecology*, Corredores Ecológicos das Florestas Tropicais do Brasil. Belém: Soc. Civil Mamirauá, p. 256., 2005.

[21] Tijonov, Partial differential Equation J. Comput. Phys., **190** (2003), pp. 325-345.

ANEXO A

Análise da Estabilidade Linear

Faremos uma breve discussão sobre um sistema de equações diferenciais ordinárias, autônomas (a variável dependente não aparece explicitamente na equação diferencial) de primeira ordem, cuja forma geral é:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= g(x,y). \end{cases} \tag{A.1}$$

O espaço de fase é o espaço de variáveis dependentes, neste caso o plano xy. É neste espaço que se definem as trajetórias ou as curvas associadas as equações (A.1) que satisfazem a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \tag{A.2}$$

Ponto singular é o ponto (x_s, y_s), tal que $f(x_s, y_s) = g(x_s, y_s) = 0$.Da teoria de equações diferenciais ordinárias sabe-se que por um ponto (x_0, y_0) passa uma única curva, salvo o caso em que este ponto seja singular. Podemos mudar as variáveis da seguinte forma:

$$x := \bar{x} + x_s$$

$$y := \bar{y} + y_s$$

o ponto singular (x_s, y_s) da equação (A.2) passa para $(0, 0)$, na equação transformada:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} = \frac{f(\bar{x}, \bar{y})}{g(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{f(x - x_s, y - y_s)}{g(x - x_s, y - y_s)} \tag{A.3}$$

Portanto, sem perda de generalidade, vamos assumir que o ponto singular é $(0, 0)$.

Estudaremos o comportamento do sistema nas vizinhanças de um ponto singular. Isto nos permite estabelecer uma solução aproximada deste sistema, válida para pontos no espaço de fase, situados suficientemente próximos de um ponto singular. Para tal, as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ devem ser analíticas nas vinzinhança do ponto $(0, 0)$ para serem expandidas numa série de Taylor nas vinzinhança deste ponto. Expandindo em primeira ordem de x e y, obtém-se:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \\ g(x, y) &\approx g(0, 0) + x\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) + y\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \end{aligned} \tag{A.4}$$

Podemos agora reescrever (A.1) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

onde A é chamada matriz comunidade e é definida por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(0,0)} \tag{A.6}$$

os índices representam as respectivas derivadas parciais calculadas no ponto $(0,0)$ e definem as quantidades a, b, c e d. Esta metodologia é útil porque descrevemos o comportamento do sistema através das equações lineares abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \tag{A.7}$$

O sistema acima possui soluçõoes que correspondem às formas paramétricas das curvas do espaço de fase. Para determiná-las encontra-se os autovalores λ_1 e λ_2, da matriz A, já que as soluções do sistema são da forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{(\lambda_1 t)} + c_2 v_2 e^{(\lambda_1 t)} \tag{A.8}$$

onde c_1 e c_2 são duas constantes arbitrárias e os vetores v_1 e v_2 são os autovetores da matriz A. Os autovalores associados a esta matriz são dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}\left((a+d) + [(a+d)^2 - 4detA]^{\frac{1}{2}}\right) \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{2}\left((a+d) - [(a+d)^2 - 4detA]^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \tag{A.9}$$

A equação matricial para os autovetores pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

cuja solução satisfaz:

$$\begin{cases} (a-\lambda_i)(x_1)_i + b(x_2)_i &= 0 \\ \\ c(x_1)_i + (d-\lambda_i)(x_2)_i &= 0 \end{cases} \tag{A.11}$$

o índice i foi introduzido para distinguirmos os autovalores λ_i, $i = 1, 2$. A primeira destas equações nos fornece explicitamente os autovetores em termos dos elementos da matriz A como:

$$v_i = \begin{pmatrix} (x_1)_i \\ (x_2)_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_i - a}{b} \end{pmatrix}. \tag{A.12}$$

Com todas as informações sobre os autovalores e autovetores uma breve análise para as diversas situações entre λ_1 e λ_2 pode ser feita obtendo-se os esboços característicos das curvas no espaço de fase:

1. Caso λ_1 e λ_2 reais e distintos: Admitindo que λ_1 e λ_2 têm os mesmos sinais. Os típicos autovetores v_1 e v_2 são ilustrados na figura (A.1) abaixo.

Suponha que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Então de (slstelk), por exemplo, para $c_2 = 0$ e $c_1 \neq 0$, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{(\lambda_1 t)}, \tag{A.13}$$

logo a solução no plano de fase move-se ao longo de v_1 no sentido da origem conforme $t \to \infty$ na direção mostrada na figura, ou seja, ao longo de PO se $c_1 > 0$ e ao longo de Q O se $c_1 < 0$. Suficientemente próximo da origem todas as soluções tendem a zero. Esta singularidade é chamada de nó do tipo I. Com $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ este nó é dito estável desde que todas as trajetórias tendam para $(0, 0)$ conforme $t \to \infty$. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ este será um nó instável, ou seja, as trajetórias tendem para $(0, 0)$ quando $t \to -\infty$.

Considerando que λ_1 e λ_2 tenham sinais diferentes, por exemplo $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Isto implica que $v_1 e^{(\lambda_1 t)} \to 0$ ao longo de v_1 conforme $t \to \infty$ enquanto que $v_2 e^{(\lambda_2 t)} \to 0$ ao longo de v_2 conforme

$t \to -\infty$.

Existe, desta forma, direções diferentes em v_1 e v_2: as soluções próximas ao ponto $(0,0)$ são mostradas na figura (A.2) abaixo. Esta singularidade é conhecida como ponto de sela e é sempre instável.

2. Caso λ_1 e λ_2 sejam complexos: Considerando $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha + \beta i$ com $\beta i \neq 0$ as soluções envolverão um termo da forma $e^{(\alpha \pm \beta i)t}$ que resulta num comportamento oscilatório nas vizinhanças do ponto $(0,0)$.

- Para o caso $\alpha \neq 0$ tem-se uma espiral que é estável se $\alpha < 0$ e instável se $\alpha > 0$.
- Para o caso $\alpha = 0$ tem-se curvas em forma de elipse. Singularidades desta natureza em geral não são estáveis porque uma pequena perturbação em uma curva no espaço de fase não resulta num retorno à mesma trajetória anteriormente não perturbada. A perturbação resulta numa nova solução. Isto pode ser verificado pela figura (A.3).

3. Caso em que $\lambda_1 = \lambda_2$: Agora os autovalores não são distintos e em geral as soluções envolvem termos como $te^{\lambda t}$. Desta forma, existe somente um autovetor v ao longo do qual as soluções tendem para $(0,0)$. O tempo t no termo $te^{\lambda t}$ modifica a solução longe do ponto $(0,0)$. Esta singularidade é conhecida como nó do tipo II. Se as soluções não contém o termo do tipo $te^{\lambda t}$ tem-se uma singularidade do tipo estrela, a qual pode ser estável ou instável dependendo do sinal de λ. Estas singularidades são ilustradas na figura (A.4):

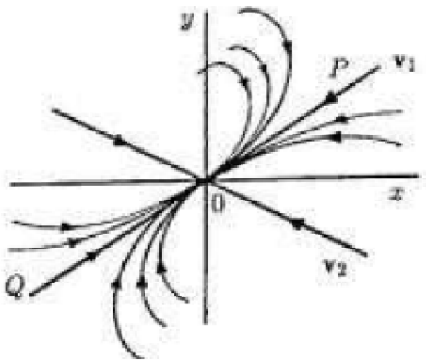

Figura A.1: Singularidade nó tipo I (figura retirada de [4])

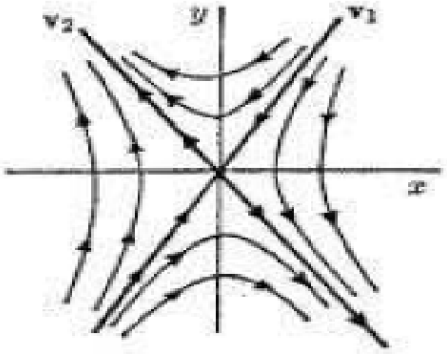

Figura A.2: Ponto de sela (figura retirada de [4])

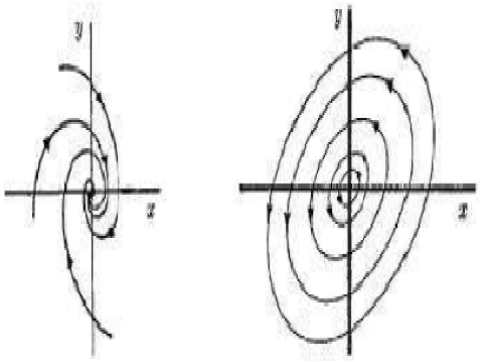

Figura A.3: Singularidades espiral e centro (figura retirada de [4])

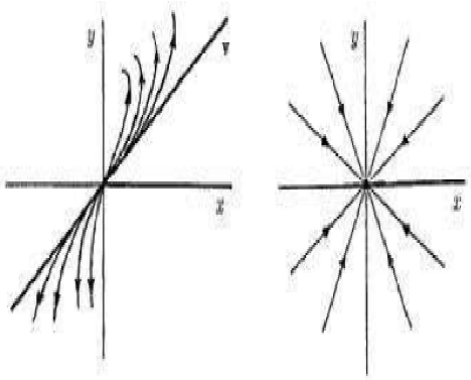

Figura A.4: Singularidades nó tipo II e do tipo estrela (figura retirada de [4])

ANEXO B

Funções de Liapunov

Consideremos o sistema autônomo

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x), \tag{B.1}$$

e seja V uma função real de n variáveis. A derivada de V ao longo das soluções do sistema autônomo anterior é dada por:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x), \tag{B.2}$$

$\frac{dV(x)}{dt}$ representa como $V(x)$ cresce ou decresce ao longo das soluções de (B.1).

A função V é dita definida positiva definida se $V(0) = 0$ e fora da origem,em um domínio contendo a origem $V(x) > 0$.

Suponha que (B.1) tem um equilíbrio em $x = 0$, ou seja, $f(0) = 0$. Seja V uma função definida positiva em D, e seja $\Omega \subset D$ uma subregião de D contendo a origem em seu interior temos :

1) Se $\frac{dV(x)}{dt} \leq \ 0, \forall x \in \Omega$ então $x = 0$ é estável;

2) Se $\frac{dV(x)}{dt} < \ 0, \forall x \in \Omega$ então $x = 0$ é assintoticamente estável, se a região de atração contem Ω;

3)Se $\frac{dV(x)}{dt} > \ 0, \ \ \forall x \in \Omega$ então $x = 0$ é instável.

No primeiro caso, ou seja, quando $\frac{dV(x)}{dt} \leq \ 0$, V é chamada função de Liapunov para o campo f. Além disso, se $\frac{dV(x)}{dt} \equiv \ 0$, então a origem é um centro, isto é, as soluções em Ω são periódicas e suas equações são no plano de fase dadas pela família de curvas $V(x) = K$ onde K é constante.