UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O MÉTODO DA TROFODINÂMICA ANALÍTICA: FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Marcelo Santos Carielo

RECIFE
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O MÉTODO DA TROFODINÂMICA ANALÍTICA: FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Marcelo Santos Carielo

Orientadora: Dra. Solange Rutz

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

RECIFE
2015

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C277m Carielo, Marcelo Santos.
O método da trofodinâmica analítica: fundamentação matemática e aplicações / Marcelo Santos Carielo. – 2015.
68 f.

Orientadora: Solange Rutz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2015.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Trofodinâmica analítica. I. Rutz, Solange (orientadora). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2016-031

MARCELO SANTOS CARIELO

O MÉTODO DA TROFODINÂMICA ANALÍTICA: Fundamentação Matemática e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 20/03/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Solange da Fonseca Rutz (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (Examinador Externo)
Universidade Estadual de Campinas

Agradecimentos

Agradeço à profa. Solange Rutz e ao prof. Peter Antonelli por me servirem de exemplo de dedicação ao trabalho na matemática, por todo ensinamento, disponibilidade, paciência, apoio e por me apresentarem um assunto tão interessante. Sou muito grato por tudo.

Agradeço aos meus pais Marcelo e Esmeralda e à minha irmã Aline pelo carinho, ajuda, sacrifício, paciência e amor indispensáveis em todos os momentos. Não sei como expressar o quanto sou grato. Sem palavras mesmo.

Agradeço à Passarinhamacurajazazinhamorica Thamara por ser tão querida, pelo carinho, por alimentar cada vez mais o amor... : o)

Agradeço aos meus companheiros de estudos por toda ajuda. Em especial ao Marcelo, Rubya, Josué, Joelma, Cláudia, Leonardo, Leandro e Reinaldo.

Agradeço aos professores que me deram aula na UFPE. Em especial ao prof. Henrique Vitório, pelos ensinamentos.

Agradeço aos membros da banca de defesa, em particular aos profs. Eduardo Leandro e Paulo Ruffino, pela disponibilidade, correções e sugestões.

Agradeço à secretária Tânia, pela paciência com que me ajudou a lidar com as pendências.

Por fim, agradeço ao CNPq por ter me ajudado financeiramente ao longo deste trabalho.

Resumo

Usando a teoria de KCC, estaremos estudando a construção do método da Trofodinâmica Analítica. Apresentaremos os conceitos de estabilidade de Jacobi e estabilidade linear para sistemas de equaçoes diferenciais em nossa modelagem. Veremos como a abordagem da Trofodinâmica Analítica permite um estudo mais adequado, se comparado com os métodos tradicionais, de certos sistemas ecológicos onde a dinâmica populacional dependa da densidade de população, ou das taxas de crescimento destas. Finalizamos com exemplos de aplicação em recifes de corais.

Palavras-chave: Trofodinâmica Analítica. Geometria de Finsler. Sistemas de equações diferenciais ordinária. Ecologia. Corais.

Abstract

Using KCC theory, we will be studying the construction of the Analytical Trophodynamics method. We will introduce the concepts of Jacobi's stability and linear stability for systems of differential equations within our modelling. We will show how Analytical Trophodynamics is a more appropriate approach, compared with the traditional methods, for modelling certain ecological systems where the population dynamics depend on population density, or on their growth rates. We conclude with examples of applications in coral reef ecology.

Keywords: Analytical Trophodynamics. Finsler geometry. Systems of ordinary differential equations. Ecology. Corals.

Sumário

Introdução **8**

1 Ferramentas Matemáticas **11**

1.1 Sistemas de Primeira Ordem 11

1.2 Sistemas de Segunda Ordem 17

1.3 Espaços Métricos 23

2 O Método da Trofodinâmica Analítica **33**

2.1 Dinâmica Populacional 33

2.2 Dinâmica de Produção 37

2.3 Sistemas Volterra-Hamilton 47

3 Exemplos **57**

3.1 Recifes de Corais Ideais 57

3.2 Interações Sociais 60

3.3 Ecologia Química 63

Referências **68**

Introdução

O estudo de certas equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem está intimamente ligado com questões envolvendo os fatores que influenciam o crescimento, ou o decrescimento, de uma população, quando ocorre a estabilidade do sistema de forma que nenhuma espécie seja extinta, entre outras relacionadas a dinâmica populacional.

Ao se construir um modelo matemático para ecologia, poderíamos assumir que as espécies estudadas se encontram em um ambiente com recursos inesgotáveis e inferir, a partir daí, que as populações naquele ambiente crescem indefinidamente. Embora esta não seja uma suposição adequada para casos gerais, já que inúmeros fatores limitam o crescimento de uma população, para crescimentos iniciais (por exemplo, o de tecidos embrionários) de um organismo esta é uma suposição coerente e frequentemente usada na prática. Saber qual fator devemos levar em conta em nossa modelagem pode nos levar a questões envolvendo o quanto o modelo a ser construído deverá corresponder a realidade e o quanto ele é matematicamente viável, no sentido de ser consistente.

Aqui estaremos estudando modelos da ecologia onde as populações de diferentes espécies interagem na disputa pelos recursos disponíveis no ambiente. Tradicionalmente, são considerados três formas principais de interação: predação, competição e simbiose. Estas são conhecidas como interações clássicas e são assumidas como sendo constantes ao longo do tempo. No entanto, devido aos inúmeros fatores presentes na natureza, muitas vezes as interações não são constantes, e podem depender da densidade de população ou das proporções das taxa de crescimento das populações envolvidas. Estas são conhecidas como interações sociais. Como veremos, modelos envolvendo interações clássicas podem ser construídos a partir de aproximações quadráticas em uma série de potências de uma função que possui significado biológico. No entanto, para o estudo das interações sociais, uma abordagem como essa não é adequada.

G.E. Hutchinson foi um dos primeiros a investigar os efeitos das interações sociais na modelagem ecológica, notando que estas afetam o modelo tanto quanto às interações clássicas. Inicialmente, partindo de aproximações obtidas por uma série de potências, ele propôs uma abordagem envolvendo termos quadráticos, desconsiderando os efeitos de termos de ordem mais altas. No entanto, com o avanço dos estudos na ecologia, notou-se que os termos de ordem mais altas do que os quadráticos são tão importantes quanto esses no estudos das interações ecológicas. Ao tentar estender a abordagem tradicional,

que geralmente usa EDOs de primeira ordem e séries de potências, apareceram certos imprevistos, visto que alguns princípios da biologia não estavam sendo contemplados pela modelagem considerada.

P.L. Antonelli propôs uma abordagem que, simplificadamente, investiga as propriedades estruturais de sistemas de EDOs de segunda ordem, permitindo uma ligação entre sua geometria e os princípios ecológicos de uma maneira mais adequada. Em tal abordagem, os invariantes de uma teoria equivalem aos invariantes de uma outra. Mais explicitamente, os conhecidos invariantes de KCC[1] irão possuir significados biológicos precisos, além de permitir o uso da geometria de Finsler para o estudo de uma nova abordagem, conhecida como Trofodinâmica[2] Analítica.

Com essa nova abordagem, temos uma maior flexibilidade na construção dos modelos, deslocando a preocupação central não mais para aproximações estatísticas de novas variáveis a fim de adequar a realidade ecológica a matemática, mas para as propriedades dos sistemas de EDOs de segunda ordem que correspondem aos modelos biológicos. Estes sistemas possuem uma geometria subjacente que permite obtermos informações sobre processo de produção, ou consumo, estudado. Os invariantes da geometria em questão irão fornecer informações sobre a estabilidade do processo. Veremos que por meio de um tensor de curvatura poderemos inferir sobre a estabilidade de um sistema de EDOs que descreve um processo de produção. Com isso, é possível levarmos em conta a grande plasticidade[3] da natureza presente na ecologia, ecossistemas, etc. de forma mais adequada. Por exemplo, agora também podemos levar em conta na modelagem as interações que não são constantes, assim como as interações sociais, e os efeitos do ambiente na dinâmica como um todo.

Outro ponto importante na Trofodinâmica Analítica é a existência de uma maior flexibilidade para introduzirmos novas variáveis na construção do modelo, as variáveis de produção de Volterra. Isto é de grande utilidade pois em modelos ecológicos mais complexos às vezes é inviável lidarmos com uma abordagem que pode estar deixando de lado princípios biológicos presentes no organismo estudado. Por exemplo, a Lei da Alometria[4] agora aparece de forma bastante natural. Além disso, questões de estabilidade no processo de produção agora podem levar em conta uma maior gama de possibilidades.

Em resumo, podemos dizer que os aspectos da Trofodinâmica Analítica apresentados

---

[1] Teoria cujo nome se refere aos matemáticos D.D. Kosambi, E. Cartan e S.S. Chern.

[2] Neste trabalho o termo Trofodinâmica indica que estamos considerando não somente a dinâmica entre as populações de espécies que interagem, mas também outros fatores como, por exemplo, o consumo de energia para produção de biomassa.

[3] Plasticidade pode ser entendida como a capacidade de um organismo em responder às variações ambientais por meio da mudança na sua forma, função ou comportamento [18].

[4] Basicamente, esta é uma lei biológica que afirma que as partes de um organismo crescem proporcionalmente.

neste trabalho se caracterizam principalmente pelo que mencionamos acima, no sentido de que, lidando de forma analítica com as propriedades subjacentes de sistemas de EDOs de segunda ordem, é possível modelarmos diferentes tipos de interações ecológicas que surgem na natureza, não apenas as que são constantes ao longo do tempo. Além disso, com as variáveis de produção de Volterra temos uma maior flexibilidade em relação a abordagem tradicional para captarmos a plasticidade da natureza em nossa modelagem.

No primeiro capítulo deste trabalho, apresentaremos as ferramentas matemáticas que serão usadas para a construção de elementos da Trofodinâmica Analítica. No segundo capítulo, obtemos alguns modelos tradicionais para dinâmica populacional e, em seguida, apresentamos a nova abordagem onde levamos em conta a dinâmica de produção entre outros fatores. No terceiro capítulo, estudamos três exemplos de aplicação da Trofodinâmica Analítica.

Capítulo 1

Ferramentas Matemáticas

Neste capítulo veremos alguns conceitos relacionados a sistemas de EDOs de primeira e segunda ordem que usaremos ao longo deste trabalho. Iremos obter os invariantes de KCC, apresentar o conceito de estabilidade de Jacobi e definir os espaços métricos de Finsler a partir dos quais estabeleceremos relações entre geodésicas e problemas variacionais. Em geral, buscaremos ferramentas matemáticas para nos auxiliar no estudo do método da Trofodinâmica Analítica feito nos próximos capítulos.

1.1 Sistemas de Primeira Ordem

Vejamos alguns teoremas e definições que envolvem equações diferenciais ordinárias (EDOs). As demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontradas em [20, 7, 21, 6, 9].

Dizemos que uma função é *diferenciável* quando ela for de classe C^∞ em todo seu domínio, isto é, quando suas derivadas de qualquer ordem existem e são contínuas. Podemos, também, chamar uma função diferenciável de função *suave*.

Teorema (Existência e Unicidade). *Sejam U um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$, (t_0, p_0) um ponto em U e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função suave. Então, existe uma única solução suave $X : (a, b) \to U$ para o problema de valor inicial*

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X), \quad X(t_0) = p_0, \tag{1.1}$$

com (a, b) sendo o intervalo aberto maximal que contém t_0.

O termo maximal no teorema acima se refere ao fato de que o intervalo de definição da solução $X(t)$ não pode ser estendido. Em vista dos objetivos dos nossos estudos, notemos que todas as funções envolvidas no teorema acima são suaves. No entanto, existem outras versões que exigem hipóteses mais fracas [20].

Sistemas Autônomos. Consideremos um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e o subconjunto aberto

$U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $X : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. A forma geral de um sistema de EDOs *autônomo* é dada por

$$X'(t) = f(X), \tag{1.2}$$

onde $X'(t) = \frac{dX}{dt}$.

Para os propósitos deste trabalho, analisaremos o caso bidimensional. Usando a notação $X(t) = (x(t), y(t))$ e $f(X(t)) = (P(x,y), Q(x,y))$, para $n = 2$, reescrevemos o sistema (1.2) como

$$\begin{cases} x'(t) = P(x,y) \\ y'(t) = Q(x,y). \end{cases} \tag{1.3}$$

Notemos que, como estamos considerando sistemas de EDOs autônomos, por definição, o lado direito de (1.3) não depende explicitamente da variável t.

Assumindo que o parâmetro t está variando, cada solução de (1.3) pode ser vista como uma trajetória $X(t)$ de uma partícula que se move com velocidade $X'(t)$.

Qualquer ponto $X^* = (x_0, y_0)$ do domínio tal que o lado direito de (1.3) se anule é chamado de *ponto crítico*, ou *ponto de equílibrio*, desse sistema.

Um ponto crítico de (1.3) $X^* = X^*(t_0)$, para algum $-\infty < t_0 < \infty$, pode ser classificado, quanto à estabilidade, da seguinte maneira:

a) *estável* - se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda solução $X(t)$ de (1.3) que satisfaz $\|X(t_0) - X^*\| < \delta$, também satisfaz $\|X(t) - X^*\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$;

b) *assintoticamente estável* - se o ponto crítico é estável e, além disso, $\lim_{t\to\infty} X(t) = X^*$.

c) *instável* - se o ponto crítico não for estável.

A definição a) acima nos diz que um ponto crítico é estável quando toda solução de (1.3) que estiver suficientemente próxima deste num instante t_0 (isto é, a uma distância menor do que δ), continuará próxima (a uma distância menor do que ϵ) a partir do instante t_0, ou seja, para todo $t \geq t_0$. Analogamente, b) diz que as soluções de (1.3) próximas a um ponto crítico assintoticamente estável, não só permanecerão próximas ao longo do tempo, mas tendem ao ponto crítico. Para t suficientemente grande, um ponto crítico assintoticamente estável coincide com uma solução. Por fim, c) nos diz que um ponto crítico instável é aquele para o qual toda solução de (1.3) está se afastando indefinidamente dele. Ressaltamos que essas análises são locais, portanto, em geral são válidas somente para uma vizinhança de cada ponto crítico considerado.

Dizemos que um ponto crítico X^* é *isolado* se existe uma vizinhança deste na qual não há nenhum outro ponto crítico.

Caso Linear. Suponhamos que a aplicação f usada em (1.2) seja linear e consideremos o caso bidimensional. Então, da álgebra linear, sabemos que, fixada uma base do $\mathbb{R}^2$, é possível representar f por uma matriz real 2×2. Iremos denotar tal matriz por $\mathbf{A}$. Logo, o sistema (1.2) pode ser escrito na notação matricial como

$$X'(t) = \mathbf{A}X(t), \tag{1.4}$$

onde $X(t)$ e $X'(t)$ são como já definidos anteriormente.

Para o caso de um sistema de EDOs autônomo linear como (1.4), podemos simplificar a análise da estabilidade dos pontos críticos assumindo que cada ponto crítico está na origem. De fato, suponhamos que $X^* \neq (0,0)$ é um ponto crítico de (1.4). Então, fazendo a substituição $X(t) = Y(t) - X^*$ em (1.4), o que geometricamente equivale a uma translação, temos que

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t) - X^*\right] = \mathbf{A}\left[Y(t) - X^*\right], \tag{1.5}$$

ou seja,

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{dX^*}{dt} = \mathbf{A}Y(t) - \mathbf{A}X^*. \tag{1.6}$$

Mas como X^* é um ponto crítico que está fixo (portanto constante com respeito a t), então $\mathbf{A}Y(t) = \mathbf{A}Y^* = (0,0)$, $\frac{dX^*}{dt} = (0,0)$ e $\mathbf{A}X^* = 0$. Logo, (1.6) se reduz a

$$Y'(t) = \mathbf{A}Y(t). \tag{1.7}$$

Notemos que agora a origem é um ponto crítico, pois se $Y = (0,0)$, então $\mathbf{A}Y = (0,0)$.

Para simplificar assumiremos que os pontos críticos estão na origem. Além disso, iremos considerar somente pontos críticos que estão isolados ($\det \mathbf{A} \neq 0$). Ou seja, numa região próxima à origem teremos um único ponto crítico.

Apresentamos agora um teorema que permite classificarmos a estabilidade dos pontos críticos de (1.4) de acordo com autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

Teorema (Estabilidade Linear). *A estabilidade dos pontos críticos de (1.4) com* $\det \mathbf{A} \neq 0$, *é dada pelos autovalores* λ_1 *e* λ_2 *da matriz* $\mathbf{A}$ *de acordo com as seguintes possibilidades:*

(a) ***estável***: *se, e somente se,* $\mathrm{Re}(\lambda_1) \leq 0$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2) \leq 0$;

(b) ***instável***: *se* $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$;

(c) ***assintoticamente estável***: *se* $\mathrm{Re}(\lambda_1)$ e $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$.

Verifiquemos a validade do teorema acima para tempos grandes (isto é, para $t \to \infty$). Se as soluções do polinômio característico associado a matriz $\mathbf{A}$, denotado por $p_A(\lambda)$, são

os pares conjugados $\lambda_{\pm} = a \pm ib$, onde a, b são reais e $b \neq 0$, então as soluções de (1.3), podem ser escritas na forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{at} \left\{ c_1 \begin{bmatrix} x_0^+ \\ y_0^+ \end{bmatrix} e^{ibt} + c_2 \begin{bmatrix} x_0^- \\ y_0^- \end{bmatrix} e^{-ibt} \right\}, \tag{1.8}$$

onde x_0, y_0, c_1 e c_2 são constantes reais e i é a unidade imaginária. Visto que o termo envolvendo i é limitado, pois expressa o comportamento oscilatório da solução, sua existência é completamente determinada pela parte real dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$. Logo, supondo $\mathrm{Im}(\lambda) = \pm b = 0$, temos que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{para } t \longrightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(\lambda) = a < 0. \tag{1.9}$$

Portanto, podemos classificar um ponto crítico X^* de (1.4) em: estável se, e somente se, $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$; assintoticamente instável, se $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ e instável, se $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

Sob as considerações feitas, uma solução $X(t)$ irá convergir para um ponto crítico $X^* = (0, 0)$ quando este for assintoticamente estável, o que equivale a $\lim_{t \to \infty} X(t) = (0, 0)$. Outra consequência, é que pelos sinais dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$ em (1.4) podemos determinar a estabilidade do ponto crítico $X^* = (0, 0)$.

Com o teorema acima podemos analisar a estabilidade para o caso linear de f (1.2) em pontos críticos na origem, ou pontos transladados para a origem. Caso f seja não-linear, não é possível uma translação como anteriormente. No entanto, podemos analisar a estabilidade considerando uma vizinhança de um ponto crítico $X^* = (0, 0)$ já conhecido. Nesse caso, investigaremos como obter informações sobre estabilidade utilizando uma linearização da parte não-linear. Podemos supor que a não-linearidade se deve a pequenas pertubações nos coeficientes da matriz $\mathbf{A}$, ou, equivalentemente, a pequenas pertubações nos autovalores de $\mathbf{A}$, já que os autovalores de $\mathbf{A}$ são raízes de $p_A(\lambda) = 0$. Tais pertubações fazem com que o sistema linear (1.4) deixe de ser linear. Vejamos como essas pertubações afetam a questão de estabilidade dos pontos críticos.

Caso Não-Linear. A partir do sistema linear (1.4), consideremos o seguinte sistema não-linear

$$X' = \mathbf{A}X + \boldsymbol{\eta}, \tag{1.10}$$

onde $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1(x, y), \eta_2(x, y))$ é um termo não-linear suave. A adição deste termo pode ser interpretado como uma perturbação no sistema $\mathbf{A}X$. Notemos que quando a pertubação for nula, o que corresponde a $\boldsymbol{\eta} = (0, 0)$, o sistema não-linear acima se reduz ao linear (1.4). Por esta razão, é comum nos referirmos ao termo $\mathbf{A}X$ em (1.10) como sendo a parte linear deste sistema.

Usando as definições feitas em (1.3) e (1.4), podemos reescrever (1.10) na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x,y) \\ \eta_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Como estamos interessados em aproximar este sistema não-linear por um linear que permita investigarmos questões de estabilidade dos seus pontos críticos, assumiremos que:

(i) $\eta_1(x,y)$ e $\eta_2(x,y)$ são suaves numa vizinhança de $(0,0)$;

(ii) $(0,0)$ é um ponto crítico isolado da parte linear de (1.10), isto é, $\det \mathbf{A} \neq 0$;

(iii) (η_1, η_2) é suficientemente pequeno numa vizinhança de $(0,0)$, no sentido de que

$$\lim_{\|(x,y)\| \to 0} \frac{\|(\eta_1, \eta_2)\|}{\|(x,y)\|} = 0. \tag{1.12}$$

Usando tais condições, é possível mostrar [20] que o ponto crítico $(0,0)$ de (1.4) é um ponto crítico isolado de (1.10)[1].

Pela condição (i), para um ponto crítico (x_0, y_0) numa vizinhança de $(0,0)$, as funções F e G em (1.11) admitem expansão em série de Taylor em torno de (x_0, y_0),

$$\begin{cases} F(x,y) = F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)} + \partial_x F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \partial_y F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + \eta_1(x,y) \\ G(x,y) = G(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)} + \partial_x G(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \partial_y G(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + \eta_2(x,y), \end{cases} \tag{1.13}$$

onde as funções $\eta_i = \eta_i(x,y)$, $i = 1, 2$, são suficientemente pequenas numa vizinhança de $(0,0)$. Então, pela condição (iii),

$$\lim_{\|(x,y)\| \to 0} \frac{\|\eta_i\|}{\|(x,y)\|} = 0. \tag{1.14}$$

Por definição, para o ponto crítico (x_0, y_0) temos que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ e, como

---

[1] De fato, suponha que X_0 é um ponto crítico próximo de (0,0). Então, por (1.10), temos que

$$\begin{aligned} AX_0 + \boldsymbol{\eta}(X_0) = 0 \quad &\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \quad X_0 = -A^{-1}\, \boldsymbol{\eta}(X_0) \\ &\overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \quad \frac{X_0}{\|X_0\|} = -A^{-1}\, \frac{\boldsymbol{\eta}(X_0)}{\|X_0\|} \to 0, \text{ quando } X_0 \to 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois A é não-singular e $\lim\limits_{X_0 \to 0} \frac{X_0}{\|X_0\|}$ pode não ser nulo.

(x_0, y_0) está fixo, vale o seguinte

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Daí, por (1.11),

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Logo, para pontos (x, y) próximos do ponto crítico (x_0, y_0), usando (1.16) e (1.14), o sistema não-linear (1.11) fica sendo

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y G \end{bmatrix}_{(x,y)=(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}, \tag{1.17}$$

onde o ponto $(x - x_0, y - y_0)$ está numa vizinhança de (x_0, y_0). Portanto, para pontos (x, y) próximos do ponto crítico (x_0, y_0), podemos considerar como aproximação linear de (1.11) o seguinte sistema,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y G \end{bmatrix}_{(x,y)=(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{1.18}$$

onde $(u, v) = (x - x_0, y - y_0)$. Feito isso, os autovalores da matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ dão informações sobre a estabilidade numa vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0) de (1.11) de forma semelhante ao caso linear de acordo com o seguinte teorema.

Teorema (Hartman-Grobman). *A estabilidade dos pontos críticos de (1.11) com* $\det \mathbf{A} \neq 0$*, é dada pelos autovalores* λ_1 *e* λ_2 *da matriz* $\tilde{\mathbf{A}}$ *definida por (1.18), de acordo com as seguintes possibilidades:*

(a) ***instável***: *se* $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$;

(b) ***assintoticamente estável***: *se* $\mathrm{Re}(\lambda_1), \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$.

Com isso, vemos que o estudo da estabilidade de pontos críticos para casos não-lineares (1.11) pode ser simplificado por meio de uma linearização (1.18) na vizinhança de um ponto crítico. Notemos que quando os autovalores λ_1, λ_2 de $\tilde{\mathbf{A}}$ em (1.18) forem tais que $\mathrm{Im}(\lambda_1) = -\mathrm{Im}(\lambda_2)$ e $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$, o teorema aqui apresentado para a estabilidade não-linear não fornece informações sobre o ponto crítico. Exemplos desse caso podem ser encontrados em [9]. Além disso, ressaltamos que as observações feitas após o teorema de estabilidade linear continuam valendo aqui, mas agora consideramos o *jacobiano* $\tilde{\mathbf{A}}$ que aparece em (1.18) como sendo a matriz $\mathbf{A}$. De fato, aqui o jacobiano é uma matriz associada a uma transformação linear que permite inferirmos sobre a estabilidade de um

sistema não-linear. Por esta razão é comum nos referirmos ao jacobiano como sendo uma linearização da parte não-linear de um sistema não-linear, ou que ambos teoremas fornecem uma noção de a estabilidade linear (local).

1.2 Sistemas de Segunda Ordem

Algumas definições. Agora apresentaremos algumas definições com respeito a conceitos envolvendo o espaço e a geometria com que estaremos lidando. Estes resultados podem ser encontrados em [21, 8, 15].

Chamaremos de *variedade diferenciável* de dimensão n uma variedade topológica M munida de uma estrutura diferenciável $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, h_\alpha)\}$, onde $U_\alpha \subset M$ é um aberto e $h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo para cada índice α. Isto é:

(i) M é um espaço topológico Haussdorf com base enumerável;

(ii) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$;

(iii) $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ é diferenciável para quaisquer índices α, β;

(iv) a família $\mathfrak{U}$ é maximal.

Uma estrutura diferenciável $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ como esta também é chamada de *atlas* formado por *cartas locais* (U_α, h_α). Sempre que nos referirmos a uma variedade M, estaremos supondo uma variedade diferenciável conforme a definição acima. Escrevemos M^n para indicar uma variedade diferenciável de dimensão n.

Para simplificar a notação, é comum nos referirmos a um vetor genérico $u = (u^1, \ldots, u^n)$ simplesmente por u^i, ou (u^i).

Definimos uma *curva parametrizada* como sendo uma função suave $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo aberto real. Em geral, para um sistema de coordenadas locais (U, h) de uma variedade M, expressamos uma curva $\gamma : I \to M^n$ como $\gamma : x^i(t)$, onde x^i $(i = 1, \ldots, n)$ se refere às coordenadas e t é um parâmetro. Para nossos propósitos, podemos supor que M é subconjunto do espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$ e é conexa. Sempre que definirmos uma função pela letra γ fica subtendido que nos referimos a uma curva como esta.

Dada uma variedade diferenciável M^n e um ponto $p \in M^n$, dizemos que o conjunto definido por $T_pM = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ com } \gamma(0) = p \text{ e } \dot{\gamma}(0) = v\}$ é o *espaço tangente* a M no ponto p. Logo, o espaço tangente T_pM é um espaço vetorial de dimensão n.

A união disjunta de todos espaços tangentes a M é denotada por $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$. O mapa sobrejetivo $\pi : TM \to M$, dado por $\pi(p, v) = p$, é conhecido como *projeção natural* de TM em M. Chamamos a tripla (TM, π, M) de *fibrado tangente* sobre M. É comum denotar o fibrado tangente sobre M simplesmente por TM.

Um altas diferenciável $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$) para uma variedade M, induz de forma natural um atlas diferenciável $\{(TU_\alpha, \tilde{h}_\alpha)\}$ para o fibrado tangente TM. Além disso, TM é uma variedade com dimensão igual ao dobro da de M.

Dada uma variedade diferenciável M, consideremos uma sistema de coordenadas locais $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ para um ponto $p \in M$, com $h(p) = (x^1, \ldots, x^n)$. Então para uma escolha particular de *trivialização local* associada a (U, h) em TM, temos um sistema de coordenadas locais no fibrado $(TU, \tilde{h})$, isto é, $\tilde{h}(p, v) = (h(\pi(v)), v) = (x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$. Dessa maneira, quando $(p, v) \in TM$ (ou $v \in TM$), poderemos escrever esse ponto em termos de coordenadas locais $(TU, \tilde{h})$, $(p, v) = (x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$.

Consideremos um sistema de coordenadas (U, x) em um ponto p da variedade M. Definimos uma *seção* de um fibrado tangente (TM, π, M) como sendo o mapa contínuo $s : M \to TM$ tal que $\pi \circ s = \mathbb{1}_M$, onde $\mathbb{1}_M$ denota o mapa identidade sobre M. Se o mapa s é definido por $s(p) = 0$ para todo $s \in M$ dizemos que s é uma *seção nula*.

Frequentemente, a fim de descartar as singularidades do fibrado tangente TM, escolhemos como domínio o *fibrado tangente furado* $\widetilde{TM} := TM \backslash \{0\}$, isto é, o fibrado tangente sem a seção nula. Portanto, na maioria das vezes o espaço que servirá de domínio para as funções aqui estudadas será tal que, em um sistema de coordenadas locais, $(p, v) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0) \notin \widetilde{TM}$, para todo $p \in M$.

Dados dois pontos fixos p e q em uma variedade conexa M, iremos denotar por $\mathcal{C}_{p,q}$ a família de curvas diferenciáveis que unem estes dois pontos e cujo *traço* pertence a M. Ou seja, $\mathcal{C}_{p,q} := \{\gamma : I \to M \mid \gamma(t_1) = p,\ \gamma(t_2) = q,\ \text{onde } t_1, t_2 \in I \text{ e } \gamma \text{ é diferenciável}\}$. Às vezes, escreveremos simplesmente $\mathcal{C}$ para nos referirmos a uma classe de curvas como esta.

Muitas vezes usaremos a abreviação *p-homogênea* no lugar de *positivamente homogênea*. Dizemos que uma função $f : \widetilde{TM} \to \mathbb{R}$, com $f(x, v) \in \mathbb{R}$ é *p-homogênea de grau k* em v se $f(x, \lambda v) = \lambda^k f(x, v)$ para todo número real $\lambda > 0$.

Consideremos um ponto p numa variedade M^n, e suas coordenadas em uma carta local sendo denotadas por $(x^1, \ldots, x^n)$. Dizemos que n^{k+l} funções $T^{p_1 \cdots p_k}_{q_1 \cdots q_l}(x^i)$ são as componentes de um *campo de tensores do tipo* (k, l) sobre a variedade M, se, sob uma mudança de coordenadas não-singulares $\bar{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \cdots, n$, estas funções transformam de acordo com

$$\bar{T}^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_l}(\bar{x}^r) = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}} \cdot \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{q_l}}{\partial \bar{x}^{j_l}}\, T^{p_1 \cdots p_k}_{q_1 \cdots q_l}(x^s). \tag{1.19}$$

Dizemos que um tensor do tipo (k, l) tem k componentes *contravariantes* e l componentes *covariantes*. Em particular, um tensor do tipo $(1, 0)$ é chamado de *vetor contravariante* (ou simplesmente de *vetor*), e um tensor do tipo $(0, 1)$ é chamado de *vetor covariante* (ou simplesmente de *covetor*).

Ao longo deste trabalho, estaremos usando a notação de Einstein que omite o símbolo

de somatório para índices repetidos [15]. Portanto, escreveremos simplesmente $a^i b^i$ para representar a soma $\sum_i a^i b^i$.

Teorema (Euler). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em um conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Então, $f = f(x, y)$ é p-homogênea de grau k em y^i se, e somente se,*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y^i} \cdot y^i = kf(x,y), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.20}$$

O resultado acima é bastante usado no estudo de funções p-homogêneas. Sua demonstração pode ser encontrada em [6].

Frequentemente usaremos funções do tipo $f = f(x, \dot{x}) = (x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$, e as notações $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ e $\dot{\partial}_i f = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}$ para derivadas parciais com respeito às coordenadas x^i e direções $\dot{x}^i$ com $i = 1, \ldots, n$.

Um resultado importante do Cálculo Tensorial que estaremos usando com frequência é que se um tensor se anula em algum sistema de coordenadas, digamos x^i, então ele se anula em qualquer sistema de coordenadas $\bar{x}^i = f^i(x^1, \cdots, x^n)$, onde f^i indica uma transformação de coordenadas [15].

Sprays. Vejamos algumas quantidades que são intrínsecas à teoria aqui estudada, e serão de grande utilidade para estabelecermos relações entre a geometria, sistemas de EDOs de segunda ordem e a Trofodinâmica Analítica.

Sejam $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ uma carta local para algum ponto de uma variedade diferenciável M e $\gamma : x^i(s)$ uma curva parametrizada com coordenadas $x^i = x^i(s)$ para $i = 1, \ldots, n$. Consideremos o sistema de coordenadas no fibrado tangente que foram induzidas por (U, h) de forma natural, $(TU, x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$. Definimos um *spray local* em (U, h) por

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + 2G^i\left(x, \tfrac{dx}{ds}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.21}$$

onde cada função $G^i : TU \to \mathbb{R}$ é suave e p-homogênea de grau 2 em $\frac{dx^i}{ds} = \dot{x}^i$. Quando os coeficientes G^i não forem p-homogêneos de grau 2 em $\dot{x}^i$, o sistema (1.21) não define um spray, mas um *semi-spray* [5].

Em vista de simplificar, usaremos a seguinte notação,

$$\dot{\partial}_j G^i \equiv G^i_j, \quad \dot{\partial}_k G^i_j \equiv G^i_{jk}, \tag{1.22}$$

onde $\dot{\partial}_r$ indica a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^r}$. Como assumimos que G^i é p-homogênea de grau 2 em $\dot{x}^r$, pelo Teorema de Euler, segue que G^i_j e G^i_{jk} são p-homogêneas de grau 1 e 0,

respectivamente. Logo,

$$2G^i = \dot{\partial}_j G^i \cdot \dot{x}^j \equiv G^i_j \dot{x}^j = (\dot{\partial}_k G^i_j \dot{x}^k) \cdot \dot{x}^j \equiv G^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k.$$

Daí, obtemos a identidade

$$2G^i \equiv G^i_j \dot{x}^j \equiv G^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{1.23}$$

O parâmetro s usado em (1.21) é chamado *parâmetro natural*. Quando em (1.21) mudarmos o parâmetro natural para um arbitrário, irão aparecer termos lineares em $\dot{x}^i$. Isto é, sob uma reparametrização $s \mapsto t$ as equações (1.21) assumem a forma [2]

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \tfrac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2s/dt^2}{ds/dt}\ \frac{dx^i}{dt}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.24}$$

De forma geral, por (1.23), podemos reescrever o spray (1.21) como

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{ds} = \xi^i \\ \dfrac{d\xi^i}{ds} = G^i_j \xi^j, \end{cases} \tag{1.25}$$

ou ainda,

$$\frac{d\xi^i}{ds} + G^i_{jk}(x,\xi)\ \xi^j\ \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{1.26}$$

Então, sob mudanças de coordenadas não-singulares do tipo

$$\begin{cases} \bar{x}^i = f^i(x^1,\ldots,x^n), \quad i = 1,\ldots,n, \\ \bar{t} = t, \end{cases} \tag{1.27}$$

---

[2]Para verificarmos a expressão (1.24), primeiramente notemos que $2G^i = G^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$, onde G^i_{jk} é p-homogêneo de grau 0, por (1.23), e consequentemente é invariante sob reparametrizações. Agora, fazendo a substituição $s \mapsto t$, segue pela regra da cadeia que

$$\frac{dx^i}{ds} \mapsto \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{ds},$$
$$\frac{d^2x^i}{ds^2} \mapsto \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = \left[\frac{d^2x^i}{dt^2}\frac{dt}{ds} + \frac{dx^i}{dt}\left(-\frac{d^2s/dt^2}{(ds/dt)^2}\right)\right]\frac{dt}{ds}.$$

Então, após substituirmos as expressões acima em (1.21), obtemos

$$(1.21) \longmapsto \left\{\left[\frac{d^2x^i}{dt^2}\frac{\cancel{dt}}{\cancel{ds}} + \frac{dx^i}{dt}\left(-\frac{d^2s/dt^2}{(ds/dt)^2}\right)\right]\frac{\cancel{dt}}{\cancel{ds}}\right\} + 2G^i\left\{\frac{dx^j}{dt}\frac{\cancel{dt}}{\cancel{ds}}\right\}\left\{\frac{dx^k}{dt}\frac{dt}{ds}\right\} = 0.$$

Portanto, cancelando os termos $\frac{dt}{ds} \neq 0$ e rearranjando, temos (1.24).

definimos a *derivada covariante de Berwald*,

$$\frac{D\xi^i}{ds} := \frac{d\xi^i}{ds} + G^i_{jk}(x,\xi)\ \xi^j\ \frac{dx^k}{ds}, \quad i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{1.28}$$

Esta derivada é conhecida como o *primeiro invariante de KCC* do spray (1.21), que denotaremos por $\boldsymbol{e}^i = \frac{D\xi^i}{ds}$.

Consideremos uma família de curvas $\bar{\gamma} : \bar{x}^i = \bar{x}^i(s,\epsilon)$ satisfazendo (1.28) e definida por

$$\bar{x}^i = x^i(s) + \varepsilon V^i + O(\varepsilon^2), \tag{1.29}$$

onde $|\varepsilon| \ll 1$ é um parâmetro fixo, $V^i = V^i(s)$ são as componentes de um campo de vetores contravariante definido ao longo de $\gamma : x^i(s)$ e $O(\varepsilon^2)$ denota termos de ordem 2 em ε. Dessa forma, $\bar{\gamma}$ está numa vizinhança da curva γ. Substituindo a família $\bar{x}^i(s)$ acima em (1.26), e depois fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos a *equação de Jacobi*[3],

$$\frac{d^2V^i}{ds^2} + 2G^i_j\ \frac{dV^j}{ds} + 2\partial_j G^i\ V^j = 0 \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{1.37}$$

---

[3]De fato, substituindo as soluções $x^i(s)$ e $\bar{x}^i(s)$ (1.29) no spray (1.21) obtemos

$$2\bar{G}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}}) = 2G^i\left(x + \varepsilon V + O(\varepsilon^2),\ \dot{x} + \varepsilon\dot{V} + O(\varepsilon^1)\right) = -\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} = -\left[\ddot{x}^i + \varepsilon\ddot{V}^i + O(\varepsilon^1)\right]. \tag{1.30}$$

Então, usando novamente (1.21), reescrevemos a expressão acima como

$$2\bar{G}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}}) = 2G^i(x,\dot{x}) - \varepsilon\ddot{V}^i - O(\varepsilon^1), \tag{1.31}$$

ou seja,

$$\varepsilon\ddot{V}^i + O(\varepsilon^1) + 2\bar{G}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}}) - 2G^i(x,\dot{x}) = f(\varepsilon) = 0, \tag{1.32}$$

onde f indica que podemos ver o lado direito como uma função suave de ε. Daí, usando o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon - 0}, \tag{1.33}$$

e, observando que $\varepsilon = 0$ implica em $\bar{x}^i = x$ e $\bar{G}^i = G^i$ (portanto, $f(0) = 0$), pela regra da cadeia,

$$\frac{df}{d\varepsilon} = \ddot{V}^i + O(\varepsilon^0) + 2\left\{\partial_j\bar{G}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}})\ \frac{d}{d\varepsilon}\left[x^j + \varepsilon V^j + O(\varepsilon^2)\right] + \dot{\partial}_j\bar{G}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}})\ \frac{d}{d\varepsilon}\left[\dot{x}^j + \varepsilon V^j + O(\varepsilon^2)\right]\right\} - 0 = 0, \tag{1.34}$$

onde $\frac{df}{d\varepsilon} = f'(\varepsilon)$. Agora, calculando as derivadas, reescrevemos a expressão acima como

$$\frac{d^2V^i}{ds^2} + O(\varepsilon^0) + 2\partial_j\bar{G}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}})\ \left[V^j + O(\varepsilon^1)\right] + 2\dot{\partial}_j\bar{G}^i(\bar{x},\dot{\bar{x}})\ \left[\dot{V}^j + O(\varepsilon^1)\right] = 0. \tag{1.35}$$

Portanto, tomando o limite $\varepsilon \to 0$, temos

$$\frac{d^2V^i}{ds^2} + 2\partial_j G^i(x,\dot{x})\ V^j + 2\dot{\partial}_j G^i(x,\dot{x})\ V^j = 0, \tag{1.36}$$

pois no limite $\bar{x}^i$ (1.29) se reduz a x^i. Por fim, usando a identidade (1.23) obtemos a equação de Jacobi (1.37).

Daí, usando o *tensor de desvio de Berwald*

$$\mathcal{B}^i_j := 2\partial_j G^i - \dot{x}^r\ \partial_r G^i_j + 2G^i_{jr}G^r - G^i_r G^r_j, \tag{1.38}$$

escrevemos (1.37) na forma da *equação de desvio de Jacobi*

$$\frac{D^2V^i}{ds^2} + \mathcal{B}^i_j(x,\dot{x})\ V^j = 0, \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{1.39}$$

Notemos que $\mathcal{B}^i_j$ é p-homogêneo de grau 2 em $\dot{x}$, pois é a soma de termos p-homogêneos de grau 2 em $\dot{x}^r$. Além disso, como a equação (1.39) é tensorial, esta vale para qualquer sistema de coordenadas escolhido, mudando apenas os valores dos coeficientes B^i_j, mas mantendo a mesma forma.

O tensor de desvio $\mathcal{B}^i_j$ será o *segundo invariante de KCC* de (1.21). Adiante, veremos que seus autovalores fornecem informações sobre a estabilidade de um sistema de EDOs relacionado com (1.21).

Definimos o *tensor de torção de Berwald* por

$$\mathcal{R}^i_{jk} = \frac{1}{3}\ \left(\dot{\partial}_j\mathcal{B}^i_k - \dot{\partial}_k\mathcal{B}^i_j\right), \tag{1.40}$$

e, a partir deste, o *tensor de curvatura de Berwald*

$$\mathcal{B}^i_{hjk} = \dot{\partial}_h\mathcal{R}^i_{kj}, \quad i,j,k,h = 1,\ldots,n. \tag{1.41}$$

Estes tensores são conhecidos, respectivamente, como o *terceiro e quarto invariantes de KCC* de (1.21).

Por fim, definimos o *quinto invariante de KCC* de (1.21), conhecido como *tensor de Douglas*, por

$$\mathcal{D}^i_{jkl} := \dot{\partial}_l G^i_{jk}, \quad i,j,k,l = 1,\ldots,n. \tag{1.42}$$

Os cinco invariantes de KCC do spray (1.21) são os tensores $\boldsymbol{e}^i$, $\mathcal{B}^i_j$, $\mathcal{R}^i_{jk}$, $\mathcal{B}^i_{hjk}$ e $\mathcal{D}^i_{jkl}$, dados por (1.28), (1.38), (1.40), (1.41) e (1.42).

Estabilidade de Jacobi. Uma curva γ solução de (1.26) é *estável a Jacobi* quando for o caso de: dada qualquer outra solução $\bar{\gamma}$, se as condições iniciais de ambas estão suficientemente próximas em algum instante, então ambas curvas continuam próximas no seguinte sentido. Fixada uma solução $\gamma : x^i(s)$, para qualquer outra solução $\bar{\gamma} : \bar{x}^i(s)$ tal que $\bar{x}^i(s_0) \approx x^i(s_0)$ e $\dot{\bar{x}}^i(s_0) \approx \dot{x}^i(s_0)$, temos que $\bar{x}^i(s) \approx x^i(s)$, para todo $s \geq s_0$[4]. Se

[4]Pelo Teorema de Imersão de Nash, podemos assumir que todo espaço aqui estudado está imerso isometricamente no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$. Com isso, sempre que lidarmos com alguma noção envolvendo métrica, podemos considerar a norma usual $|\cdot|$ do $\mathbb{R}^n$. No caso da estabilidade de Jacobi, podemos

todas as soluções de (1.26) são estáveis, dizemos que o *sistema é estável a Jacobi*. Se não for o caso do sistema ser estável, então será chamado de *instável*, e dizemos que temos a presença de um *caos fraco*. Essa noção de estabilidade fornece informações sobre o comportamento das soluções em uma região aberta envolvendo $\gamma(s_0)$.

O seguinte teorema [5, 6, 22] mostra como os autovalores do tensor de desvio de Berwald $\mathcal{B}^i_j$, dado por (1.38), fornece informações sobre a estabilidade de Jacobi para uma família de curvas satisfazendo (1.26).

Teorema (Estabilidade de Jacobi). *O sistema (1.26) é estável no sentido de Jacobi em* $(x(s), \dot{x}(s))\big|_{s=s_0}$ *se, e somente se, a parte real de todos os autovalores de* $\mathcal{B}^i_j\big|_{s=s_0}$ *(1.38) forem estritamente positivas. Caso contrário, dizemos que o sistema é* fracamente caótico.

Usando o teorema acima, podemos obter informações sobre como as curvas definidas pela a equação (1.39) estão se afastando ao longo de tempo. Neste trabalho, as curvas definidas por (1.26) vão ser geodésicas de uma geometria de Finsler. Assim, o Teorema de Jacobi fornece informações de quando geodésicas associadas a um sistema de EDOs de segunda ordem se afastam *não muito rapidamente*, caracterizando a presença de um caos fraco.

Observemos que as condições iniciais que aparecem na noção de estabilidade de Jacobi envolvem tanto coordenadas as quanto direções iniciais. Já que estamos considerando sistemas de EDOs de segunda ordem, a direção inicial será bastante importante. Por exemplo, suponha que estamos lidando com curvas soluções *periódicas*. Então, pela periodicidade, após algum tempo, as soluções devem retornar a posição inicial. Inicialmente, suponhamos que o espaço considerado seja um *cilindro de altura ilimitada* e buscamos por soluções periódicas definidas sobre o cilindro. Neste caso, considerando a geometria usual (Riemanniana), se a direção inicial não for adequada, a curva solução poderá nunca retornar à posição inicial. Por outro lado, se o espaço for considerado como sendo uma *esfera*, então independentemente da direção inicial que escolhermos para solução periódicas, está irá retornar a posição inicial após um período de tempo. Isso exemplifica como a noção de estabilidade se relaciona diretamente com o espaço que for considerado.

1.3 Espaços Métricos

Métrica de Finsler. Sejam TM um fibrado tangente sobre uma variedade M e γ uma curva pertencente a classe de curvas $\mathcal{C}$ definida anteriormente. Dada uma função suave

---

considerar que estamos no espaço $(\mathbb{R}^{2n+1}, |\cdot|)$, de forma que $\bar{x}^i(s_0) \approx x^i(s_0)$ e $\dot{\bar{x}}^i(s_0) \approx \dot{x}^i(s_0)$ equivalem a $|\bar{x}^i(s_0) - x^i(s_0)| < \epsilon$ e $|\dot{\bar{x}}^i(s_0) - \dot{x}^i(s_0)| < \epsilon,\ \forall \epsilon > 0$, respectivamente.

$L : TM \to \mathbb{R}$, consideremos a integral de γ

$$\tau(\gamma) := \int_\gamma L(x(t), \tfrac{dx}{dt})\ dt. \tag{1.43}$$

Para que esta integral forneça uma noção de comprimento, ela não pode depender de uma escolha particular de parametrização da curva considerada, pois a distância entre dois pontos em um certo espaço não pode ter ambiguidades, ou seja, tem que ser independente da maneira que percorremos a curva. Além disso, é conveniente que sob um segmento de curva finito, a distância total percorrida seja finita. Logo, a integral tem que fornecer um valor finito. Como de costume, aqui estudaremos somente distâncias positivas. Por fim, também estamos interessados no caso em que uma integral como esta esteja associada a um problema variacional, isto é, para os casos em que o funcional τ satisfaz a equação de Euler-Lagrange associada a um problema variacional. Em vista disso, consideremos a seguinte definição [5].

Dizemos que a função suave $L : TM \to \mathbb{R}$ é *fundamental* se:

(i) $L = L(x, \dot{x})$ é p-homogênea de grau 1 em $\dot{x}$, para todo $\dot{x} \neq 0$;

(ii) existe uma região T_xM_* em cada espaço tangente T_xM que não contém $\dot{x} = 0$ e é *positivamente cônica*[5];

(iii) o *tensor métrico de Finsler*

$$g_{ij}(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\ \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j L^2 \tag{1.44}$$

é regular, isto é, $\det g_{ij} \neq 0$ em T_xM^* para todo $x \in M$;

(iv) $L(x, \dot{x})\big|_{\dot{x}=\dot{x}_0} > 0$ para todo $\dot{x}_0 \in T_xM^*$.

Seguem algumas observações. Já que a função L acima é diferenciável, em particular, $L \circ \gamma$ é contínua num intervalo compacto. E como estamos integrando sobre uma curva γ escolhida em $\mathcal{C}$, a integral (1.43) existe (é finita).

A condição (i) sobre a função fundamental L garante que (1.43) seja independente do parâmetro t. Para verificarmos este resultado, consideremos as curvas parametrizadas $\gamma(t) : x^i(t)$ e $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) : x^i(\tilde{t})$ definidas sobre os intervalos reais $[a, b]$ e $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, respectivamente. Suponha que o difeomorfismo $\phi : [a, b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ é uma reparametrização de γ que preserva

[5]Definimos uma *região positivamente cônica* no espaço tangente T_xM como sendo o conjunto dos pontos $\{(x, \lambda y) : \lambda > 0\}$, onde $y \neq 0$ (isto é, y é vetor não-nulo de T_xM).

orientação, isto é, $\phi(t) = \tilde{t}$ tal que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$ e $\phi'(t) > 0$. Por definição, temos que

$$\tau(\gamma) = \int_{\gamma} L\Big(x(t), \tfrac{dx}{dt}\Big)\ dt\ = \int_a^b L\Big(x(t), \tfrac{dx}{dt}\Big)\ dt. \tag{1.45}$$

Logo, fazendo a mudança $\tilde{t} = \phi(t)$, $\frac{d\tilde{t}}{dt} = \phi'(t) > 0$, ficamos com

$$\tau(\gamma) = \int_{a=\phi^{-1}(\tilde{a})}^{b=\phi^{-1}(\tilde{b})} L\Big(x(\phi^{-1}(\tilde{t})), \tfrac{dx}{d\tilde{t}}\ \phi'(t)\Big)\ \frac{d\tilde{t}}{\phi'(t)} = \tau\left(\gamma \circ \phi^{-1}\right). \tag{1.46}$$

Agora usamos o teorema da mudança de variáveis para integrais, e a homogeneidade de $L(x, \dot{x})$ dada por (i), obtendo

$$\tau(\gamma) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \phi'(t) F\Big(x(\tilde{t}), \tfrac{dx}{d\tilde{t}}\Big)\ \frac{d\tilde{t}}{\phi'(t)}. \tag{1.47}$$

Mas como assumimos que a reparametrização preserva orientação, $\phi'(t) > 0$, a expressão acima se reduz a

$$\tau(\gamma) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} L\Big(x(\tilde{t}), \tfrac{dx}{d\tilde{t}}\Big)\ d\tilde{t} = \tau(\tilde{\gamma}). \tag{1.48}$$

Portanto, a condição (i) assegura que $\tau(\gamma)$ não depende de uma escolha particular de parametrização para curva $\gamma \in \mathcal{C}$. Caso consideremos uma reparametrização que reverta a orientação, $\phi'(t) < 0$, com uma demonstração análoga a acima é possível verificar que $\tau(\gamma)$ não muda.

Já a condição (iii) assegura que g_{ij} é positivo definido quando $T_x M_* = \widetilde{TM}$. Para verificarmos isto, fixemos arbitrariamente um ponto $(x, \dot{x}) \in \widetilde{TM}$. Usando a homogeneidade de $L(x, \dot{x})$ e o Teorema de Euler, segue que

$$2 \cdot \underbrace{L^2(x, \dot{x})}_{\text{hom. grau 2}} = 1 \cdot \underbrace{\dot{\partial}_j L^2}_{\text{hom. grau 1}} \cdot \dot{x}^j = \frac{1}{2}\ \dot{\partial}_i(\dot{\partial}_j L^2\ \dot{x}^j) \cdot \dot{x}^i = \frac{1}{2}\ \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j L^2\ \dot{x}^i \dot{x}^j. \tag{1.49}$$

Ou seja, pela definição de g_{ij} em (iv),

$$L^2 = \left(\frac{1}{2}\ \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j L^2\right)\ \dot{x}^i \dot{x}^j = g_{ij}\ \dot{x}^i \dot{x}^j. \tag{1.50}$$

Agora, por (iii), obtemos que

$$g_{ij}\ \dot{x}^i \dot{x}^j = L^2 > 0 \Longrightarrow g_{ij} > 0, \tag{1.51}$$

já que sempre temos $\dot{x}^i \dot{x}^j > 0$ em todo $\widetilde{TM}$. Portanto, no caso particular da região positivamente cônica ser $\widetilde{TM}$, o tensor métrico g_{ij} é positivo definido. Além disso, usando o Teorema de Euler em (1.50) segue que g_{ij} é p-homogêneo de grau 0 em $\dot{x}^r$. Adiante

veremos como este se relaciona com as equações de Euler-Lagrange.

Usando uma função fundamental L, definimos uma *função métrica fundamental de Finsler* por

$$F(x, \dot{x}) = |\dot{x}^i| = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}, \tag{1.52}$$

onde F é p-homogênea de grau 1 em $\dot{x}^i$. Quando uma variedade M é munida de uma função métrica de Finsler F, obtemos o *espaço métrico de Finsler*, que iremos denotar por (M, F).

Seguindo [15], [19] e [6], vejamos como relacionar equações geodésicas de uma geometria feita no espaço de Finsler (M, F) com as equações de Euler-Lagrange de um problema variacional.

Princípio Variacional. As equações de Euler-Lagrange associadas a um problema variacional podem ser encontradas de acordo com o seguinte procedimento [6, 15].

Consideremos dois pontos p_1 e p_2 em uma carta (U, h) de M. Estamos interessados em saber sob quais condições a integral de um *funcional* F, ao longo de uma curva $\gamma \in \mathcal{C}_{p_1,p_2}$,

$$J(\gamma) = \int_\gamma F \; dt \tag{1.53}$$

é otimizada. Esse é um problema variacional bastante conhecido que comumente é expresso de forma resumida por $\delta \int_\gamma F \; dt = 0$. Vejamos como obter uma condição necessária para otimizar o *custo total* $J(\gamma)$, ao longo de uma curva γ.

Seja $\gamma : x^i(t)$ uma curva em $\mathcal{C}_{p_1,p_2}$ unindo os pontos $p_1 = \gamma(t_1)$ e $p_2 = \gamma(t_2)$. Consideremos a família $\gamma_\epsilon : x^i(t, \epsilon)$ dada por

$$x^i(t, \epsilon) = x^i(t) + \epsilon\eta^i(t), \tag{1.54}$$

onde $\epsilon \in (-1, 1)$ é o parâmetro e $\eta^i(t)$ são funções diferenciáveis em t tais que

$$\eta^i(t_1) = \eta^i(t_2) = 0. \tag{1.55}$$

A condição acima garante que a família γ_ϵ passa por p_1 e p_2, pois

$$x^i(t_j, \epsilon) = x^i(t_j) = p_j \quad (j = 1, 2). \tag{1.56}$$

Notemos que $\gamma_\epsilon \in \mathcal{C}_{p_1,p_2}$. Derivando γ_ϵ com respeito a t temos

$$\frac{\partial \dot{x}^i(t, \epsilon)}{\partial t} = \dot{x}^i(t, \epsilon) = \dot{x}^i(t) + \epsilon\dot{\eta}^i(t). \tag{1.57}$$

E substituindo as expressões acima em (1.43), ficamos com

$$J(\gamma_\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x(t) + \epsilon\eta(t),\ \dot{x}(t) + \epsilon\eta(t)\right)\ dt. \tag{1.58}$$

Podemos expressar a integral $J(\gamma_\epsilon) = J(\epsilon)$ acima como uma série de potências

$$J(\epsilon) = J(0) + \delta J + \delta^2 J + \ldots, \tag{1.59}$$

onde

$$\delta J = \epsilon \left(\frac{dJ}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} \quad \text{e} \quad \delta^2 J = \frac{1}{2}\ \epsilon^2 \left(\frac{d^2 J}{d\epsilon^2}\right)\Big|_{\epsilon=0} \tag{1.60}$$

são notações comuns do cálculo variacional.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva $\gamma_* := \gamma_\epsilon(0) = \gamma(t,\epsilon)|_{\epsilon=0}$ forneça o valor extremo para a integral $J(\gamma)$. Se isto ocorre, então $\delta J(\epsilon) = 0$, ou seja, $\frac{dJ(\gamma_\epsilon)}{d\epsilon}\big|_{\epsilon=0} = 0$. Vejamos como essa condição pode ser escrita na forma de um sistema de EDOs de segunda ordem.

De (1.54) e (1.57) , temos que

$$\frac{\partial x^i(t,\epsilon)}{\partial \epsilon} = \eta^i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \dot{x}^i(t,\epsilon)}{\partial \epsilon} = \dot{\eta}^i. \tag{1.61}$$

Consequentemente, derivando (1.58),

$$\left(\frac{dJ}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\ \eta^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\ \dot{\eta}^i\right)\ dt. \tag{1.62}$$

Agora, integrando por partes o primeiro termo da integral acima, ficamos com

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta^i\ \frac{\partial F}{\partial x^i}\ dt = \left(\eta^i\ \int_{t_1}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^i}\ dt\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^i}\ d\tilde{t}\right) \dot{\eta}^i\ dt. \tag{1.63}$$

Já que vale (1.55), substituindo (1.63) em (1.62), obtemos

$$\left(\frac{dJ}{d\epsilon}\right)\Big|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} - \int_{t_1}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^i}\ d\tilde{t}\right) \dot{\eta}^i\ dt. \tag{1.64}$$

Daí, usando (1.60) e assumindo que

$$\Phi_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} - \int_{t_1}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^i}\ d\tilde{t}, \tag{1.65}$$

a condição $\delta J(\epsilon) = 0$ é equivalente a

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi_i \ \dot{\eta}^i \ dt = 0. \tag{1.66}$$

Consideremos as constantes c_i definidas por

$$c_i(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi_i \ dt, \tag{1.67}$$

donde

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Phi_i - c_i) \ dt = 0. \tag{1.68}$$

Agora, escolhemos as funções η^i em (1.54) como

$$\eta^i(t) = \int_{t_1}^{t} (\Phi_i - c_i) \ dt. \tag{1.69}$$

Notemos que as funções acima satisfazem (1.55). Além disso, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\dot{\eta}^i(t) = \Phi_i - c_i. \tag{1.70}$$

Logo, (1.66) é equivalente a

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\Phi_i - c_i) \ dt = 0, \tag{1.71}$$

ou ainda, por (1.68),

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} (\Phi_i - c_i)(\Phi_i - c_i) \ dt = 0. \tag{1.72}$$

Como o integrando desta integral é a soma de quadrados, (1.72) implica que

$$\Phi_i - c_i = c_i - \Phi_i = 0. \tag{1.73}$$

Daí, substituindo (1.65) na expressão acima, ficamos com

$$\int_{t_1}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^i} \ d\tilde{t} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = c_i. \tag{1.74}$$

E derivando com respeito a t, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.75}$$

Estas EDOs de segunda ordem são conhecidas como equações de *Euler-Lagrange* asso-

ciadas ao problema variacional $\delta \int_\gamma F\ dt = 0$. Tais equações fornecem uma condição necessária para que uma curva $\gamma_* \in \mathcal{C}$ otimize o custo total $J(\gamma)$ (1.53). Portanto, se $\gamma_* : x^i(t)$ é solução do problema variacional $\delta \int_\gamma F\ dt = 0$, então suas coordenadas $x^i(t)$ satisfazem (1.75).

Geodésicas. De forma intuitiva, podemos dizer que uma curva é *geodésica* se minimiza distância para pontos "suficientemente próximos". Para obtermos as equações geodésicas de Finsler, partimos do problema variacional de encontrar a curva que minimiza a distância entre dois pontos fixos, conforme [19]. Isso equivale a encontrar uma curva que minimize a integral (1.43). Como antes, consideremos que um funcional fundamental L, isto é, que tem as propriedades de (i) a (iv). Logo, as equações de Euler-Lagrange para o problema variacional $\delta \int_\gamma L(x, x')ds = 0$ são dadas por[6]

$$\frac{\partial L_s}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L_s}{\partial x'^i}\right) = 0. \tag{1.76}$$

Como $L_t = L(x, \dot{x})$ é p-homogêneo de grau 1 em $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, pelo Teorema de Euler, segue que

$$1 \cdot L_t = \underbrace{\frac{\partial L_t}{\partial \dot{x}^i}}_{\text{hom. grau 0}} \cdot \dot{x}^i \qquad \text{e} \qquad \underbrace{\frac{\partial^2 L_t}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}}_{\text{hom. grau -1}} \cdot \dot{x}^i = 0. \tag{1.77}$$

Usando a regra da cadeia e as expressões acima, podemos obter a seguinte identidade

$$\frac{\partial^2 L_t}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = 2\left[L_t\ \frac{\partial^2 L_t}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} + \frac{\partial L_t}{\partial \dot{x}^i}\ \frac{\partial L_t}{\partial \dot{x}^j}\right]. \tag{1.78}$$

Logo, multiplicando por $\dot{x}^j$ e somando sob os índices j ficamos com

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 L_t}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ \dot{x}^j = L_t\ \frac{\partial^2 L_t}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ \dot{x}^j + \frac{\partial L_t}{\partial \dot{x}^i}\ \frac{\partial L_t}{\partial \dot{x}^j}\ \dot{x}^j. \tag{1.79}$$

Agora, por (1.77), a primeira parcela do lado direito da igualdade na expressão acima se anula, reduzindo esta a

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 L_t}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\ \dot{x}^j = L_t\ \frac{\partial L_t}{\partial \dot{x}^i}. \tag{1.80}$$

Notemos que escolhendo uma parametrização pelo comprimento de arco s temos $L_s = L(x, x') = 1$. Então, pela definição do tensor métrico $g_{ij}(x, \dot{x})$, (1.44), temos

$$g_{ij}(x, \dot{x})\ \dot{x}^j = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x'^i}. \tag{1.81}$$

[6] Aqui estaremos usando as notações $x' = \frac{dx}{ds}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $L_t = L(x, \dot{x})$ e $L_s = L(x, x')$.

Como $t = t(s)$, derivando a expressão acima com respeito a s, usando (1.50) e as equações de Euler-Lagrange, reescrevemos (1.76) como

$$\frac{d}{ds}\left[g_{ij}(x,\dot{x})\ \dot{x}^j\right] = \frac{\partial L_s}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{hk}(x,x')}{\partial x^i}\ x'^h x'^k. \tag{1.82}$$

Assim, podemos definir os *símbolos de Christoffel de primeira espécie* (como na geometria Riemanniana)

$$\Gamma_{ihk}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\ \left[\frac{\partial g_{ih}(x,\dot{x})}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{hk}(x,\dot{x})}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}(x,\dot{x})}{\partial x^h}\right]. \tag{1.83}$$

Agora analisando o lado esquerdo de (1.82), temos que

$$\frac{d}{ds}\left[g_{ij}(x,\dot{x})\ \dot{x}^j\right] = \frac{\partial g_{ik}(x,x')}{\partial x^j}\ x'^k x'^j + \frac{\partial g_{ik}(x,x')}{\partial x'^j}\ x'^k x''^j + g_{ij}(x,x')x''^j. \tag{1.84}$$

E como $g_{ij}(x,\dot{x})$ é p-homogênea de grau 0 em $\dot{x}^r$, temos que

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j}\ \dot{x}^k = \frac{1}{2}\ \frac{\partial^3 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}\ \dot{x}^k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k}\cdot \dot{x}^k = 0. \tag{1.85}$$

Com isso, (1.82) fica sendo

$$g_{ij}(x,x')x''^j + \left[\frac{\partial g_{ih}(x,x')}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{hk}(x,x')}{\partial x^i}\right] x'^h x'^k = 0. \tag{1.86}$$

Então, pela simetria nos subíndices de g_{ij},

$$g_{ij}(x,\dot{x})x''^j + \Gamma_{hik}(x,\dot{x})x'^h x'^k = 0. \tag{1.87}$$

Agora, usando o levantamento de índices via métrica g_{ij}, obtemos os *símbolos de Christoffel de segunda espécie*

$$\Gamma^j_{hk}(x,\dot{x}) := g^{ij}(x,\dot{x})\Gamma_{hik}(x,\dot{x}). \tag{1.88}$$

Aqui usamos a notação do cálculo variacional indicando a inversa de g_{ij} por g^{ij}, como em [15]. Por fim, multiplicamos (1.87) por g^{ij}, somamos sobre os subíndices, e usamos (1.88) para obtermos

$$x''^j + \Gamma^j_{hk}(x,x')\ x'^h x'^k = 0, \quad j,h,k = 1,\ldots,n. \tag{1.89}$$

Estas EDOs de segunda ordem são conhecidas como as *equações geodésicas de Finsler*. Os n^3 coeficientes $\Gamma^j_{hk}(x,x')$ acima são p-homogêneos de grau 0 nos argumentos de direção $x'^r = \frac{dx^r}{ds}$.

Algumas observações sobre a conexão e geodésicas. Para o que segue, usemos

a notação $\dot{x}^r = \frac{dx^r}{ds}$ e consideremos uma curva $\gamma : x^i(s)$. Se escolhermos $2G^i(x,\dot{x}) := \Gamma^i_{jk}(x,\dot{x})\dot{x}^j\dot{x}^k$ no spray (1.21), então γ será uma *geodésica em* s_0 se, e somente se,

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = 0, \tag{1.90}$$

para todo s em uma vizinhança de s_0, onde $\frac{D}{ds}$ denota a derivada covariante de Berwald (1.28). Esta definição é equivalente à dada anteriormente em (1.89). Dizemos que γ é uma *geodésica* se a condição (1.90) vale para todo s do seu domínio. Usando a definição de derivada covariante expressa em coordenadas com $\xi^i := \frac{dx^i}{ds}$, a condição acima equivale a um sistema idêntico a (1.89)

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \quad i,j,k = 1,\ldots,n, \tag{1.91}$$

onde Γ^i_{jk} são os coeficientes associados à métrica g_{ij}. Com isso, vemos que o anulamento do primeiro invariante $\boldsymbol{e}^i = \frac{D\xi^i}{ds}$ dado por (1.28), equivale às soluções de (1.26) serem geodésicas da geometria Finsleriana.

Se os coeficientes da conexão Γ^i_{jk} dependem somente da posição x^r (consequentemente, p-homogênea de grau 0 em $\dot{x}^r$) e s é o parâmetro comprimento de arco, então (1.91) são equações geodésicas para o caso Riemanniano. Acima vimos que o fato de assumirmos Γ^i_{jk} p-homogênea de grau 0 numa geometria Finsleriana, permite relacionarmos as geodésicas (1.91) com o spray (1.21) via $2G^i(x,\dot{x}) = \Gamma^i_{jk}(x,\dot{x})\dot{x}^j\dot{x}^k$. Além do mais, em certos casos, o spray (1.21) corresponde às equações de Euler-Lagrange associadas a um problema variacional.

Transporte Paralelo. Seja $\xi : \xi^i(s)$ um campo definido ao longo da curva $\gamma : x^i(s)$. Dizemos que o campo ξ^i é *paralelo* ao longo de γ se $\frac{D\xi^i}{ds} \equiv 0$. Na geometria Riemanniana, para uma variedade M munida de uma conexão linear (onde os coeficientes Γ^i_{jk} da conexão não dependem da direção ξ), dados dois pontos suficientemente próximos p e q em γ, existe uma *única* transformação linear de T_pM para T_qM, obtida por uma derivada covariante como (1.28), que *transporta paralelamente* um vetor ξ_p para um vetor $\bar{\xi}_q$ ao longo de γ. Ressaltamos que para a geometria aqui considerada é possível que os coeficientes Γ^i_{jk}, que são p-homogêneos de grau 0 em $\dot{x}^r$, dependam das direções, pois podem depender das razões $\frac{\dot{x}^r}{\dot{x}^s}$. Consequentemente, fixado uma curva, o transporte paralelo de vetores irá depender das direções, não sendo mais único como no caso Riemanniano. Neste caso, a transformação definida usando-se (1.28) deixa de ser linear.

Agora podemos caracterizar mais explicitamente a equação de desvio de Jacobi (1.39) em termos de desvio geodésico. Consideremos duas geodésicas satisfazendo (1.91) dadas por $\gamma : x^i(s)$ e $\bar{\gamma} : \bar{x}^i(s)$, e os pontos $P : x^i(s_p)$ em γ e $\bar{P} : \bar{x}^i(s_p)$ em $\bar{\gamma}$. Seja $\xi : \dot{x}^i(s)$ um campo de vetores tangentes ao longo de γ. Então, o campo de Jacobi V^i, obtido por

(1.39), é tal que o vetor $V^i(s_p)$, indo de P para $\bar{P}$, é perpendicular ao vetor tangente $\xi(s_p) = \dot{x}^i(s_p)$. Assim, o comprimento do vetor $V^i(s_p)$ nos dá uma medida do quanto as duas geodésicas estão afastadas quando $s = s_p$. Seguindo este raciocínio, fazendo o parâmetro s variar infinitesimalmente de s_p até s_q, teremos um outro vetor $V^i(s_q)$, definido ao longo das geodésicas γ e $\bar{\gamma}$. O comprimento deste novo vetor nos diz o quanto as duas geodésicas estão afastadas em $s = s_q$. Dessa maneira, o vetor $V^i(s_q)$ pode ser interpretado como o *transporte paralelo* de $V^i(s_p)$ ao longo de γ. Além disso, os vetores $V^i(s_q)$ e $V^i(s_p)$ são paralelos, e repetindo o processo anterior, podemos medir o afastamento de duas geodésicas em todos pontos.

O seguinte resultado será de grande utilidade em nossos estudos. Sua demonstração pode ser encontrada em [6].

Teorema (Douglas). *Seja $\mathcal{D}^i_{jkl}$ o tensor de Douglas definido por (1.42). Então $\mathcal{D}^i_{jkl} \equiv 0$ se, e somente se, $G^i(x,\xi)$ é quadrático em ξ^i. Além disso, esta condição independe de sistemas de coordenadas.*

Definimos a *conexão de Douglas* por

$$\Gamma^i_{jk}(x,\xi) := \frac{\partial G^i_j}{\partial \xi^k} \quad i,j,k = 1,\ldots,n, \tag{1.92}$$

onde cada G^i_j é dado por (1.22).

Já que G^i_j é p-homogêneo de grau 1, usando (1.23) e o Teorema de Euler, podemos verificar que a conexão de Douglas é p-homogênea de grau 0 em ξ^i. Consequentemente, pelo Teorema de Douglas, usando esta conexão, os vetores $\xi^i = \frac{dx^i}{ds}$ podem ser transportados paralelamente ao longo de geodésicas $\gamma : x^i(s)$ definidas por (1.26), ou, equivalentemente, por (1.91).

Capítulo 2

O Método da Trofodinâmica Analítica

Neste capítulo apresentaremos alguns tópicos da Trofodinâmica Analítica. Veremos como levar em conta na modelagem matemática certos aspectos da natureza que sob a abordagem clássica teríamos dificuldades. Por exemplo, o caso em que as interações entre os organismos não são constantes ao longo do tempo. Estudaremos os sistemas de Volterra-Hamilton em tais contextos e veremos algumas relações com aspectos da geometria apresentados anteriormente.

2.1 Dinâmica Populacional

A dinâmica populacional é um assunto bastante estudado na modelagem biológica. Aqui veremos como obter os principais modelos da abordagem clássica usando os axiomas de Hutchinson [12].

Denotaremos por $N = N(t)$ o número total de indivíduos num determinado instante de tempo finito t.

Dinâmica Populacional. De forma a estudar a população $N(t)$, consideremos as condições (*axiomas de Hutchinson*):

(i) $\dfrac{dN}{dt} = f(N)$, onde f é diferenciável (a taxa de crescimento depende da população);

(ii) $f(0) = 0$ (não há geração espontânea);

(iii) $N(t)$ é limitada (os recursos são limitados).

Sabemos que uma função analítica (de classe C^ω) coincide com sua série de potências na vizinhança de algum ponto [21]. Mas aqui, como em [12], na condição (i) foi assumido a diferenciabilidade ao invés de analiticidade, pois estaremos lidando com uma função f menos restrita (não necessariamente analítica) que se relaciona com algum conceito biológico. Neste contexto, é interessante uma maior flexibilidade ao invés de restrições que

poderiam tornar inviável a ligação entre biologia e matemática. Assumir a diferenciabilidade de f permite realizarmos aproximações sucessivas na vizinhança de algum ponto. Usando (i), estudaremos modelos biológicos obtidos a partir de truncagens na expansão em série de uma função com estas propriedades.

Modelos de Malthus e Logístico. Assumindo (i), expandimos a função f em série de potências numa vizinhança de $N = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, N^k = f(0) + f'(0)N + \frac{1}{2}\, f''(0)N^2 + O\left(N^3\right), \tag{2.1}$$

onde $O\left(N^3\right)$ denota termos de ordem N^3, isto é, $O\left(N^3\right) \leq CN^3$, sendo C uma constante fixa. Agora, reescrevemos (2.1) como

$$f(N) = a + bN + cN^2 + O\left(N^3\right), \tag{2.2}$$

onde a, b e c são constantes. Então, considerando (ii), obtemos

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=0} = \Big[a + bN + cN^2 + O\left(N^3\right)\Big]_{t=0} = 0, \tag{2.3}$$

o que implica em $a = 0$. Assim, para truncagem de primeira ordem em (2.1), assumindo as condições (i) e (ii) e escolhendo $b = \lambda$, temos o *modelo Malthusiano*

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N. \tag{2.4}$$

A constante λ na expressão acima é chamada de *taxa de crescimento intrínseco* da população $N(t)$. Esta constante pode ser interpretada, biologicamente, como uma taxa da eficiência metabólica do organismo: quanto maior o valor da taxa de metabolismo, maior será a taxa de crescimento da população. Neste trabalho, assumiremos que a taxa de crescimento intrínseco é sempre positiva.

Podemos encontrar a solução $N(t)$ de (2.4) da seguinte maneira. Integrando (2.4), temos que

$$\int_{N(0)}^{N} \frac{d\tilde{N}}{\tilde{N}} = \lambda \int_0^t d\tilde{t} \quad \Longrightarrow \quad \ln(\tilde{N})\Big|_{N(0)}^{N} = \lambda\, \tilde{t}\Big|_0^t \quad \Longrightarrow \quad \ln\left[\tfrac{N}{N(0)}\right] = \lambda\, t, \tag{2.5}$$

e aplicando a função exponencial de ambos os lados na última expressão a direita, obtemos a *curva Malthusiana*

$$N(t) = N(0)\, e^{\lambda t}. \tag{2.6}$$

Já que $\lambda > 0$, por (2.6), o limite $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$ não irá existir se considerarmos uma po-

pulação inicial $N(0) \neq 0$. Logo, a curva Malthusiana está crescendo exponencialmente (indefinidamente) conforme o tempo t aumenta, de forma que a condição (iii) acima não ocorre. Esta situação não é verificada na natureza, visto que inúmeros fatores limitam o crescimento de uma população $N(t)$, impedindo que haja um crescimento ilimitado. Em geral não é comum haver recursos ilimitados, e o efeito de tal restrição na dinâmica do crescimento não está presente no modelo Malthusiano. Embora tenhamos um crescimento exponencial no modelo Malthusiano e isto seja um pouco inadequado para analisarmos instantes de tempo muito grande, este modelo é bastante usado ao se modelar o crescimento inicial de uma população. Por exemplo, veremos adiante que o crescimento inicial de um organismo geralmente tende a ser exponencial, sendo este fato influenciado pela abundância de alimentos disponíveis quando um organismo se encontra na sua fase embrionária.

A fim de obtermos um modelo em que, além das condições (i) e (ii), a condição de limitação (iii) também ocorra, consideremos um trucamento em (2.1) que envolva termos quadráticos,

$$f(N) = a + bN + cN^2, \tag{2.7}$$

onde a, b e c são constantes escolhidas como $a = 0,\ b = \lambda > 0$ e $c = \frac{-\lambda}{K}$. Biologicamente, a constante K é conhecida como *capacidade de suporte* do ambiente. Esta constante é sempre positiva e fornece uma medida do número de indivíduos que podem ser confinados em mesmo ambiente. Observemos que as constantes a e b são idênticas as que obtemos na construção do modelo Malthusiano, mas agora a constante $c < 0$ será a responsável por incorporar a limitação de recursos, condição (iii). De fato, sob as considerações anteriores e (2.7), obtemos o *modelo logístico*

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{2.8}$$

que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii), pois suas soluções não triviais (isto é, diferentes de $N(t) \equiv 0$, $N(t) \equiv K$) são dadas por

$$N(t) = \frac{K}{1 + c\ e^{-\lambda t}}, \tag{2.9}$$

com c constante.

Para verificarmos que (2.9) é solução de (2.8), procuremos por soluções diferentes de $N(t) \equiv 0$ e $N(t) \equiv K$. Reescrevendo (2.8), usando frações parciais e depois integrando,

$$\int \frac{dN}{\lambda N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \int \frac{dN}{\lambda N} + \int \frac{dN}{\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \int dt, \tag{2.10}$$

ficamos com

$$\frac{1}{\lambda}\ \ln|N| + \frac{1}{\lambda K}\ \left(-K \ln\left|1 - \tfrac{N}{K}\right|\right) = t + b, \tag{2.11}$$

onde b é uma constante de integração. Então, reorganizando a expressão acima e aplicando a função exponencial, temos que

$$|N| = \left|1 - \tfrac{N}{K}\right| \; e^{\lambda t} \; e^{\lambda b}. \tag{2.12}$$

Como consideramos $N \neq 0$ e $N \neq K$, por (2.12), segue que

$$N = \left(1 - \tfrac{N}{K}\right) \; e^{\lambda t} e^{\lambda c} = e^{\lambda t} e^{\lambda b} - \tfrac{N}{K} \; e^{\lambda t} e^{\lambda b}, \tag{2.13}$$

ou seja,

$$N\left(1 + \tfrac{e^{\lambda t} e^{\lambda b}}{K}\right) = e^{\lambda t} e^{\lambda b}. \tag{2.14}$$

Daí, multiplicando ambos os lados por $e^{-\lambda t} e^{-\lambda b}$,

$$N\left(e^{-\lambda t} e^{-\lambda b} + \tfrac{1}{K}\right) = 1, \tag{2.15}$$

e escolhendo uma constante $c := e^{-\lambda b} K$ positiva, podemos reescrever a expressão acima como (2.9),

$$N\left(e^{-\lambda t} \, \tfrac{c}{K} + \tfrac{1}{K}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{K}{1 + c \; e^{-\lambda t}}, \tag{2.16}$$

o que verifica a validade de (2.9).

Pelo Teorema da Existência e Unicidade de EDOs, asseguramos localmente a unicidade das soluções para o modelo logístico (2.8), mas não globalmente. Por exemplo, considerando a condição inicial $N(0) = 0$ para (2.8), segue da hipótese (ii) que $N(t) = 0$ para todo instante tempo t, ou seja, $N(t) \equiv 0$ é a única solução para esta condição inicial. No entanto, como veremos a seguir, se $N(0) \approx 0$, então o modelo logístico equivale ao Malthusiano, no sentido de ter como solução (2.6), que como vimos se torna ilimitada para tempos suficientemente grandes. Em geral, de acordo com a condição inicial, poderemos ter quatro tipos de soluções para (2.8). Essa dependência das soluções da condição inicial faz com que não seja possível garantirmos que uma solução local seja global, pois poderia ser o caso da solução depender explicitamente da condição inicial, o que não permitiria garantimos que o intervalo maximal da solução possa ser estendido para todo domínio.

Analisando o comportamento de uma solução do modelo logístico em uma vizinhança de zero (isto é, para $N \approx 0$), vemos que o ponto de equilíbrio $N = 0$ é instável. De fato, em uma vizinhança de zero o modelo logístico se aproxima do malthusiano, pois, usando a expansão de Taylor para $N \approx 0$, temos que

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \left(1 - \frac{N}{K}\right) = \lambda N - \frac{\lambda N^2}{K} \approx \lambda N, \tag{2.17}$$

pois como $\frac{\lambda N^2}{K} \ll \lambda N$ para $N \approx 0$, podemos considerar apenas termos de ordem N na expressão acima. Por (2.4), sabemos que no modelo malthusiano a população $N(t)$ cresce

exponencialmente conforme o tempo t avança, se afastando do ponto de equilíbrio $N = 0$, o que indica uma instabilidade. Por outro lado, o ponto de equilíbrio $N = K$ é estável, pois em uma vizinhança de K, usando a expansão de Taylor para $N \approx K$, vale que

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\,(K - N) - \frac{\lambda}{K}\,(N - K)^2 \approx -\lambda\,(N - K)\,, \tag{2.18}$$

pois, como no caso acima, o fato de $|K - N|^2 \ll |K - N|$ quando $N \approx K$, permite que desconsideremos os termos quadráticos em (2.18). Daí, por integração,

$$\int \tfrac{dN}{N-K} \approx \int -\lambda dt \quad \Longrightarrow \quad \ln(N - K) \approx -\lambda t + \tilde{c} \quad \Longrightarrow \quad N - K \approx c\, e^{-\lambda t}, \tag{2.19}$$

onde $\tilde{c}$ e c são constantes. Logo, conforme o tempo t avança, o termo $ce^{-\lambda t}$ se aproxima de zero, o que, de acordo com a última expressão à direita em (2.19), equivale à população N se aproximar da capacidade de carga K. Portanto, para instantes de tempo suficientemente grandes, o modelo logístico possui um único ponto de equilíbrio assintoticamente estável dado por $N = K$.

2.2 Dinâmica de Produção

A dinâmica de produção permite levarmos em conta na modelagem, além do número de indivíduos (que podem ser vistos como organismos biológicos[1]), outros fatores que estão presentes na população. É interessante uma certa flexibilidade em nossa abordagem matemática quando vamos estudar a influência de fatores da natureza que possuem uma grande variabilidade. Por exemplo, modelos da ecologia envolvendo a dinâmica de uma planta formada por folhas, flores, brotos, sépalas que sofrem influências do ambiente são estudados de forma mais eficiente se for possível utilizarmos os princípios da biologia subjacentes, como a Lei de Laird, para inferirmos sobre sua dinâmica. Seria complicado se tentássemos modelar o efeito das interações entre as diferentes partes de uma planta como esta sob a abordagem clássica. A Trofodinâmica Analítica permite estudarmos modelos como estes, que levam em consideração diversos fatores influenciando na dinâmica, de maneira analítica e estabelecendo relações diretas com princípios fundamentais da biologia. Agora, apresentaremos alguns elementos desta nova abordagem.

Crescimento orgânico. Definimos a *fórmula de Gompertz* por

$$m(t) = a \cdot e^{-c \cdot e^{-\lambda t}}, \tag{2.20}$$

[1]Entenderemos por organismo um ser vivo qualquer [18].

onde a, c, λ são constantes positivas. Esta é uma curva experimental que fornece a biomassa total acumulada em um organismo.

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados de (2.20), obtemos

$$y(t) = \ln a - c \cdot e^{-\lambda t}, \tag{2.21}$$

onde $y(t) := \ln\big(m(t)\big)$. Assim, o logaritmo natural (ln) da biomassa é determinado pela seguinte equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \, \frac{dy}{dt} = 0, \tag{2.22}$$

quando as condições iniciais são $y(0) = \ln a - c$ e $\left(\frac{dy}{dt}\right)\Big|_{t=0} = \dot{y}(0) = \lambda c$. De forma mais geral, assumindo *condições iniciais positivas* para (2.22), isto é, $y(0) > 0$ e $\dot{y}(0) > 0$, obtemos uma única solução que é conhecida como *curva de Gompertz*.

De fato, procurando soluções do tipo $y(t) = e^{rt}$ para (2.22) segue que

$$r^2 + \lambda r = 0 \implies r = r_1 = 0, \quad r = r_2 = -\lambda. \tag{2.23}$$

Daí,

$$y(t) = c_1 \, e^{r_1} \; + \; c_2 \, e^{r_2 t} \implies y(t) = c_1 \; + \; c_2 \, e^{-\lambda} t, \tag{2.24}$$

onde $\lambda > 0$, c_1 e c_2 são constantes. Se $y(0) = c_1 > 0$ e $\dot{y}(0) = -\lambda c_2 > 0$, então $c_2 < 0$ e $c1 > -c_2 > 0$. Logo, existe constante $a > 1$ tal que $c_1 := \ln a$. Além disso, também podemos escolher $c_2 := -c$, para uma constante $c > 0$. Com isso a expressão para o ln da biomassa fica sendo (2.21).

Organismos Multidimensionais. Segundo a *Lei de Laird* [14], em certas classes de vertebrados cada *unidade modular* tem crescimento Gompertziano de mesma taxa λ. Isto é, cada parte deste organismo cresce de acordo com

$$m_i(t) = a_i \cdot e^{-c_i \cdot e^{\lambda t}}, \tag{2.25}$$

onde cada $i = 1, \ldots, n$ se refere a uma unidade modular dum organismo, que geralmente é considerada como sendo um órgão. Um organismo de uma determinada espécie com tal característica às vezes é chamado de *organismo modular*.

De forma semelhante ao que fizemos anteriormente, escolhendo $y^i(t) := \ln(m_i(t))$ para cada unidade modular i, temos uma equação diferencial associada,

$$\frac{d^2y^i}{dt^2} + \lambda \, \frac{dy^i}{dt} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.26}$$

Assumindo condições iniciais positivas (isto é, $y^i(0) > 0$, $\dot{y}^i(0) > 0$), tais equações formam um sistema de EDOs cujas soluções fornecem curvas que são trajetórias de crescimento dos órgãos do organismo que, como antes, obedecem à fórmula de Gompertz. Portanto, (2.25)

e (2.26) com condições iniciais positivas são equivalentes. Comumente, nos referimos à equação (2.25), ou (2.26), como a *Lei de Laird*.

Lei da Alometria. Em 1932, Huxley observou [13] que as partes que formam um organismo são proporcionais, e crescem proporcionalmente. Esta relação é conhecida como *Lei da Alometria* ou, simplesmente, *alometria*.

Como exemplo, consideremos um organismo vertebrado (multidimensional) formado por dois órgãos $i = 1, 2$. Pela Lei de Laird, (2.25) e (2.26), temos as seguintes curvas de crescimento

$$\begin{cases} y^1 = \ln m_1 = \ln a_1 - c_1 e^{-\lambda t} \\ \\ y^2 = \ln m_2 = \ln a_2 - c_2 e^{-\lambda t}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Isolando a variável t na primeira equação e substituindo na segunda, ficamos com

$$y^2 = \frac{c_2}{c_1}\, y^1 \;+\; \ln a_2 - \frac{c_2}{c_1} \ln a_1, \tag{2.28}$$

que é a equação de uma reta do tipo $y^2 = Ay^1 + B$, onde A, B são constantes. Esta relação linear entre y^1 e y^2 confirma a Lei da Alometria para este exemplo. Geralmente, no estudo de animais os y^i são os logaritmos do cálcio, fósforo, glicogênio e outros componentes presentes em animais embrionários [17].

Energia associada ao crescimento. Medawar mostrou por meio de experimentos que a *energia de crescimento* $\tilde{E}_t$ de uma certa cultura de tecidos embrionários está relacionada à sua biomassa [16], de forma que

$$\tilde{E}_t = c\, \frac{dy}{dt},$$

onde $y = \ln m$ e c é uma constante positiva determinada por ajustes estatísticos.

Assim como [6], em busca de aplicar esse conceito de energia de crescimento à ecologia, podemos relacionar $\tilde{E}_t$ com o conhecido conceito de energia total $\tilde{H}_t$. Então, assumindo que a energia potencial é nula, ficamos com

$$\tilde{E}_t = c\, \sqrt{2\tilde{H}_t}, \tag{2.29}$$

onde c é uma constante positiva determinada experimentalmente. Daí, fixada uma curva de crescimento $y(t)$,

$$\tilde{H}_t = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2. \tag{2.30}$$

A expressão acima fornece a energia que está sendo gasta (consumida, ou dissipada) ao longo de $y(t)$ a uma taxa λ durante o crescimento de um organismo. Notemos que a forma de (2.30) é de uma energia cinética.

Usando a Lei de Laird, podemos estudar o tamanho total de um organismo a partir de cada órgão que o compõe. Para isso, consideramos o tamanho s_i de cada unidade modular como

$$s_i := y^i = \ln a_i - c_i e^{-\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.31}$$

Então, o *tamanho total* s do organismo é a soma dessas unidades (órgãos) que formam o organismo,

$$s := \sum_{i=1}^{n} s_i = A - Be^{-\lambda t}, \tag{2.32}$$

onde $A = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$ e $B = \sum_{i=1}^{n} c_i$ são constantes.

Seguindo o raciocínio acima, definimos a *energia total* H_t de um organismo modular como sendo a soma das energias H_i, ao longo das trajetórias $y^i(t)$, associadas a cada unidade modular s_i do organismo. Então, usando a Lei de Laird, obtemos

$$H_t := \sum_{i=1}^{n} H_i. \tag{2.33}$$

Daí, temos a *energia de Medawar*

$$E_t = c\,\sqrt{2H_t}, \tag{2.34}$$

onde c é uma constante positiva experimental. Notemos que a energia de Medawar generaliza (2.29) visto que leva em consideração cada parte que forma um organismo modular, permitindo com isso que estudemos as influências de cada parte do organismo na dinâmica de crescimento.

Em geral a energia de crescimento H_t (2.33) não é constante ao longo das trajetórias de crescimento, pois pela definição de (2.33), (2.30) e (2.25) a energia H_t decai ao longo do tempo. No entanto, sob certas condições, é possível obtermos um funcional de energia, a partir de H_t, que seja constante ao longo das trajetórias de crescimento. Para isso consideremos uma reparametrização $t \mapsto s$, onde s é o tamanho total dado por (2.32). Então, a equação (2.22) assume a forma

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.35}$$

cujas soluções são retas $y^i(s) = a^i s + b^i$, onde a^i e b^i são constantes de integração. Portanto, a partir desta reparametrização, definimos o *funcional de energia de Maupertuis*

$$H_s = \frac{1}{2}\,\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dy^i}{ds}\right)^2. \tag{2.36}$$

Notemos que, por definição, $\frac{dH_s}{ds} \equiv 0$. Isto mostra que a energia de crescimento H_s é cons-

tante ao longo das trajetórias de crescimento $y^i(s)$. Usando *cálculo variacional*, podemos mostrar[2] que as equações de Euler-Lagrange para o problema variacional $\delta \int_\gamma H_s ds = 0$ associado a (2.36) são dadas por (2.35). Portanto, para um parâmetro especial s a energia dada pelo funcional H_s está sendo otimizada ao longo de retas. Além disso, é possível mostrar que após a reparametrização $t \mapsto s$, continua valendo a Lei da Alometria.

Princípio de Maupertuis e Curvas de Crecimento. De acordo com o *Princípio de Maupertuis*, ao longo dum processo, a natureza age de forma a economizar certas quantidades de forma que o gasto de energia seja o mais eficiente possível.

Por ora, em busca de estabelecer relações entre os modelos experimentais biológicos aqui estudados e a geometria diferencial, seria interessante se tivéssemos um modelo cujas curvas de crescimento minimizassem uma noção de distância que seja equivalente à energia de crescimento. Se isto ocorre, minimizar "distância" é equivalente a minimizar energia, e as soluções de ambos os problemas são as mesmas trajetórias. Neste caso, ao longo de tais trajetórias, o crescimento é ótimo, o que satisfaz o Princípio de Maupertuis e as equações de Euler-Lagrange. Em vista disso, seguem alguns teoremas cujas demonstrações podem ser encontradas em [6].

Teorema I. *Seja $H_s : \widetilde{TM} \to \mathbb{R}$ um funcional suave, p-homogêneo de grau 2 em $\dot{x}^i$, onde $H_s = H_s(x, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$. Se a matriz real $n \times n$*

$$g_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_s}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.37}$$

é positiva definida e simétrica em $\dot{x}^i$, $\dot{x}^j$ em $\widetilde{TM}$ para todo $x \in M$, então as soluções das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial H_s}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial H_s}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.38}$$

correspondentes ao problema variacional

$$\delta \int_\gamma H_s ds = 0 \tag{2.39}$$

fornecem como soluções curvas γ_* tais que $\int_\gamma H_s ds$ é minimizada sobre a classe $\mathcal{C}$.

Denominamos o parâmetro s que aparece no teorema acima como *parâmetro natural* do funcional de custo de Maupertuis generalizado H_s. Observemos que, por definição, $\frac{dH_s}{ds} \equiv 0$, ou seja, H_s é constante ao longo das soluções γ_*. Um parâmetro como este é tal

[2]Se $H_s := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\dot{y}^i\right)^2$, onde $\dot{y}^i := \frac{dx^i}{ds}$, então $\partial_i H_s = 0$, $\dot{\partial}_i H_s = \dot{y}^i$ e $\frac{d}{ds}\left(\dot{\partial}_i H_s\right) = \ddot{y}^i$. Então, as equações de Euler-Lagrange (1.75) associadas a H_s são dadas por $\ddot{y}^i(s) = 0$.

que H_s satisfaz as equações de Euler-Lagrange de um determinado problema variacional. Quando isto ocorre, dizemos que o processo é *ótimo*. Mais adiante, voltaremos ao assunto da otimalidade. Uma das consequência importantes do teorema acima é que generaliza o funcional de energia de Maupertuis H_s definido anteriormente,(2.36), pois o problema variacional associado fornece curvas que *minimizam* o custo total $\int_\gamma H_s ds$. Além disso, a condição de g_{ij} ser positiva definida equivale ao funcional H_s ser positivo em todo seu domínio, correspondendo a energia cinética ser sempre positiva. A demonstração desta consequência é análoga a (1.51).

Considerando um parâmetro natural s, conforme o Teorema I, definimos

$$L(x,\dot{x}) := \sqrt{2H_s(x,\dot{x})} = \sqrt{g_{ij}(x,\dot{x})\ \tfrac{dx^i}{ds}\tfrac{dx^j}{ds}}, \tag{2.40}$$

onde $\dot{x}^r = \frac{dx^r}{ds}$. Da forma parecida ao que fizemos para encontrar (1.49), é possível mostrar que o funcional L (2.40) é p-homogêneo de grau 1 em $\dot{x}^i$. E já que $\frac{dL}{ds} \equiv 0$, então L não depende explicitamente do parâmetro s. Assim, o funcional L fornece uma noção de distância e

$$\int_\gamma L(x,\dot{x})\ ds = \int_{s_0}^{s_1} L(x,\dot{x})\ ds = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\ ds = \int_{s_0}^{s_1} |\dot{x}^i(s)|\ ds \tag{2.41}$$

corresponde ao comprimento da curva $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$ unindo $p = \gamma(s_0)$ a $q = \gamma(s_1)$.

Observemos que para um parâmetro natural s, o funcional L equivale a *primeira forma fundamental* da geometria diferencial. Dessa maneira, a noção de parâmetro natural aqui abordada equivale à de *parâmetro intrínseco* da geometria estudada, e permite generalizarmos a noção de métrica das geometrias Euclideana ($g_{ij} = \delta_{ij}$) e Riemanniana ($g_{ij} = g_{ij}(x)$). Agora podemos definir comprimento num espaço munido de uma métrica que depende da posição e da direção, $g_{ij} = g_{ij}(x,\dot{x})$. Além disso, pela expressão (2.41), vemos que a definição de parâmetro natural está relacionada com a de *comprimento de arco*. Se s é o parâmetro comprimento de arco, então $L(x(s),\dot{x}(s)) \equiv 1$ e (2.41) fornece a distância do comprimento de arco de $p = \gamma(s_0)$ até $q = \gamma(s_1)$.

Sob certas condições de regularidade, o problema variacional associado ao funcional $L = \sqrt{2H_s}$,

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{2H_s(x,\dot{x})}\ ds = 0, \tag{2.42}$$

possui equações de Euler-Lagrange como em (2.38). Ou seja, (2.42) e (2.39) fornecem as mesmas curvas γ_* como solução. Este resultado é parte da demonstração do próximo teorema e pode ser encontrada em [6].

Teorema II. *As curvas que otimizam (2.42) são de mínimo e soluções de*

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}(x,\dot{x})\ \frac{dx^j}{ds}\ \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (i,j,k = 1,\ldots,n), \tag{2.43}$$

onde os coeficientes

$$\Gamma^i_{jk}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\ g^{ir}(\partial_k g_{rj} + \partial_j g_{rk} - \partial_r g_{jk}), \tag{2.44}$$

são p-homogêneos de grau 0 *em* $\dot{x}^l$. *Além disso,*

$$2G^i = \Gamma^i_{jk}(x,\dot{x})\dot{x}^j\dot{x}^k. \tag{2.45}$$

Analogamente a (1.24), após uma reparametrização as equações (2.43) assumem uma forma com termos lineares envolvendo $\dot{x}^i$. Se um parâmetro s é tal que o lado direito de (2.43) se anula (isto é, não há termos lineares envolvendo $\dot{x}^i$), então este é chamado de *parâmetro natural*. É possível mostrar que se s é um parâmetro natural de (2.43), então $r = as + b$, com a, b constantes, também é parâmetro natural.

Ressaltamos que as n^3 funções $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x,\dot{x})$ do Teorema II não constituem as componentes de um tensor do tipo $(1,3)$, pois, sob uma mudança de coordenadas não-singulares $\bar{x}^i = f^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i = 1,\cdots,n$, estas não transformam de acordo (1.19). No entanto, sob tal mudança de coordenadas (somente nas componentes x^i) temos a seguinte relação [15]

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}\ \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} = \Gamma^r_{is}\ \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}. \tag{2.46}$$

Para um parâmetro natural, (2.43) são as equações geodésicas (1.91). Isso mostra que existe uma relação entre as curvas de produção obtidas por modelos biológicos envolvendo um funcional de custo associado ao crescimento orgânico como L (2.40) e as geodésicas de uma geometria de Finsler. Além disso, se definirmos

$$G^i\,(x,\dot{x}) = \frac{1}{4}\ g^{ih}\left(\dot{\partial}_h\dot{\partial}_k H_s \cdot \dot{x}^k - \partial_h H_s\right), \tag{2.47}$$

as curvas $\gamma_* : x^i(s)$ soluções de 2.39, (2.38), são as mesmas que as de

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i\left(x, \tfrac{dx}{ds}\right) = 0 \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.48}$$

Com isso, fazendo $2G^i = \Gamma^i_{jk}(x,\dot{x})\dot{x}^j\dot{x}^k$ as equações geodésicas (2.43) se tornam as equações de Euler-Lagrange associadas a um problema variacional envolvendo o funcional H_s, conforme o Teorema I. Por exemplo [6], dado uma curva de crescimento definida por

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \alpha\ \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0, \tag{2.49}$$

onde $\alpha = \alpha(\lambda, K)$ e y é uma *variável de crescimento líquido*, investigar se existe, ou não, um funcional de energia de Maupertuis H_s cuja as equações de Euler-Lagrange não é trivial. De modo geral, saber se é possível obter um funcional cujo problema variacional associado possui equações de Euler-Lagrange que sejam equivalentes à equações geodésicas está relacionado com a otimalidade do processo. Nesse sentido, análogo ao que dissemos antes, um processo é *ótimo* ao longo duma curva, quando esta verifica as equações de Euler-Lagrange. Caso não verifique, o processo *não é ótimo*. Para o caso acima, é possível verificar que o funcional de Maupertuis definido por

$$H_s = \frac{1}{2}\, e^{2\alpha y} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \tag{2.50}$$

satisfaz os Teoremas I e II. Portanto, ao longo de curvas $\gamma_* : y^i(s)$ definidas por (2.49) com condições iniciais adequadas, o custo total $\int_{\gamma_*} H_s\, ds$ é mínimo. Além disso, via $2G^i = \Gamma^i_{jk}(x, \dot{x})\dot{x}^j\dot{x}^k$ e (2.47) é possível mostrar que $\gamma_* : y^i(s)$ são geodésicas que verificam o Teorema II.

Relação entre Γ^i_{jk} e G^i_{jk}. Neste trabalho, estaremos estudando alguns modelos envolvendo equações diferenciais de segunda ordem, onde as funções $\Gamma^i_{jk}(x, \dot{x})$ do Teorema II serão os *coeficientes de interação* G^i_{jk}, onde G^i_{jk} é dado por (1.22). Biologicamente, os coeficientes G^i_{jk} são interpretados como a *interação* entre duas espécies j, k confinadas num mesmo ambiente i.

Em geral $G^i_{jk} \neq \Gamma^i_{jk}$, no entanto podemos estabelecer uma relação entre ambos coeficientes da seguinte maneira. Derivando $2G^h(x, \dot{x})$ com respeito a $\dot{x}^j$ temos que

$$\dot{\partial}_j \left(2G^h\right) = \dot{\partial}_j \left(\Gamma^h_{rs}(x, \dot{x})\dot{x}^r\dot{x}^s\right) = \dot{\partial}_j(\Gamma^h_{rs})\dot{x}^r\dot{x}^s + \Gamma^h_{rs}\dot{\partial}_j(\dot{x}^r\dot{x}^s).$$

Mas como

$$\dot{\partial}_j(\dot{x}^r\dot{x}^s) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}(\dot{x}^r)\dot{x}^s + \dot{x}^r\frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}(\dot{x}^s) = \delta^r_j\dot{x}^s + \dot{x}^r\delta^s_j = \delta^r_j\dot{x}^s + \delta^r_j\dot{x}^s = 2\delta^r_j\dot{x}^s,$$

então

$$\dot{\partial}_j(2G^h) = \dot{\partial}_j(\Gamma^h_{rs})\dot{x}^r\dot{x}^s + 2\Gamma^h_{rs}\delta^r_j\dot{x}^s = \dot{\partial}_j(\Gamma^h_{rs})\dot{x}^r\dot{x}^s + 2\Gamma^h_{js}\dot{x}^s.$$

Agora, derivando a expressão acima com respeito a $\dot{x}^i$, ficamos com

$$\begin{aligned}\dot{\partial}_i\dot{\partial}_j(2G^h) &= \dot{\partial}_i(\dot{\partial}_j\Gamma^h_{rs})\dot{x}^r\dot{x}^s + \dot{\partial}_j\Gamma^h_{rs}\dot{\partial}_i(\dot{x}^r\dot{x}^s) + 2\dot{\partial}_i(\Gamma^h_{js})\dot{x}^s + 2\Gamma^h_{js}\dot{\partial}_i(\dot{x}^s)\\ &= \dot{\partial}_i\dot{\partial}_j\Gamma^h_{rs}\dot{x}^r\dot{x}^s + \dot{\partial}_j\Gamma^h_{rs}(2\delta^r_i\dot{x}^s) + 2\dot{\partial}_i\Gamma^h_{js}\dot{x}^s + 2\Gamma^h_{js}\delta^s_i.\end{aligned}$$

Já que por definição $\dot{\partial}_i\dot{\partial}_j(2G^h) = 2\dot{\partial}_i\dot{\partial}_j(G^h) = 2G^h_{ij}$ e δ^p_q só não é nulo quando $p = q$,

podemos reescrever a expressão anterior como

$$G^h_{ij} = \frac{1}{2}\,\dot\partial_i\dot\partial_j\Gamma^h_{rs}\dot x^r\dot x^s + \dot\partial_j\Gamma^h_{is}\dot x^s + \dot\partial_i\Gamma^h_{js}\dot x^s + \Gamma^h_{ji}.$$

Então, usando a simetria dos símbolos de Christoffel e em seguida rearranjando os índices nos dois últimos termos, obtemos

$$G^h_{ij} = \frac{1}{2}\dot\partial_i\dot\partial_j\Gamma^h_{rs}\dot x^r\dot x^s + \dot\partial_j\Gamma^h_{is}\dot x^s + \dot\partial_i\Gamma^h_{rj}\dot x^r + \Gamma^h_{ij}. \tag{2.51}$$

Por fim, multiplicando por $\dot x^j$ e depois somando com respeito ao índice j, os dois primeiros termos se anulam, pois os coeficientes Γ^i_{jk} considerados são p-homogêneos de grau 0 em $\dot x$, e o Teorema de Euler implica em $\dot\partial_l\Gamma^i_{jk}\cdot\dot x^l \equiv 0$. Após isso, rearranjando novamente os índices, obtemos uma relação entre os coeficientes G^h_{ij} e Γ^h_{ij} dada por

$$G^h_{ij}\dot x^j = \Gamma^h_{ij}\dot x^j + \dot\partial_i\Gamma^h_{rs}\dot x^r\dot x^s \quad i,j,h = 1,\ldots,n. \tag{2.52}$$

Como dissemos antes, geralmente estamos considerando um espaço de Finsler onde os coeficientes da conexão $\Gamma^h_{ij}(x,\dot x)$ são p-homogêneos de grau 0 em $\dot x^r$, mas podem depender das direções $\dot x^r$. No entanto, como as interações biológicas são determinadas por G^h_{ij}, somente quando for o caso de Γ^h_{ij} não depender das direções $\dot x^r$ é que estes coeficientes coincidem com os de interações G^h_{ij}. Podemos observar este fato fazendo $\dot\partial_i\Gamma^h_{rs} \equiv 0$ em (2.52).

Critério de Harper. Um conceito de bastante interesse para o estudo da Trofodinâmica Analítica é o *Critério de Harper*. Este afirma que alguns organismos podem ser considerados como um conjunto de populações. Por exemplo, segundo este critério, uma planta pode ser vista como sendo um conjunto de populações de folhas, flores, raízes, etc. Já que pela Lei de Laird cada unidade modular da planta tem sua dinâmica individual, então, por Harper, todas essas unidades contribuem para sua biomassa total. Dessa maneira, para descrevermos a dinâmica da biomassa total de uma planta cuja maior parte é formada por folhas, precisamos saber como quantidade de folhas e a biomassa de cada uma dessas se comportam ao longo do tempo.

Como exemplo do Critério de Harper, vejamos a dinâmica do seguinte modelo de plantas aquáticas [10]. Consideremos como *medida* de folhas presentes a *proporção relativa* dada por

$$\hat x(t) := \frac{K-N}{N}, \tag{2.53}$$

onde $N = N(t)$ é a população e K é uma constante positiva. Derivando em relação à

variável t obtemos

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K-N}{N}\right) = \frac{0 - K\,\frac{dN}{dt}}{N^2} = -\frac{K}{N^2}\left[\lambda N\left(1-\tfrac{N}{K}\right)\right] = -\lambda\left(\frac{K-N}{N}\right). \tag{2.54}$$

Logo,

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -\lambda\hat{x}(t), \tag{2.55}$$

sempre que N é como em (2.8). Além disso, podemos escrever a equação (2.53) como um sistema de EDOs de primeira ordem. Para isso consideremos

$$\hat{x} = \frac{dy}{dt}, \tag{2.56}$$

onde $y := \ln m$ e $m = m(t)$ é uma biomassa com crescimento Gompertziano (2.20). Então, pela definição acima e sua derivada (2.55), temos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \hat{x} \\ \dfrac{d\hat{x}}{dt} = -\lambda\hat{x}. \end{cases} \tag{2.57}$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{K-N}{N} \\ \dfrac{dN}{dt} = \lambda N(1-\dfrac{N}{K}), \end{cases} \tag{2.58}$$

pois $\hat{x}$ é dado por (2.53). Portanto, (2.57) é equivalente à equação (2.22), pois derivando (2.55) e usando (2.56) temos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\,\frac{dy}{dt} = \frac{d\hat{x}}{dt} + \lambda\hat{x} = -\lambda\hat{x} + \lambda\hat{x} = 0, \tag{2.59}$$

o que mostra a equivalência.

Notemos que, na construção do modelo acima, partimos de uma definição de medida da biomassa dada pela variável (2.53). Isso exemplifica como introduzir novas variáveis associadas a medidas biológicas como a biomassa e, a partir dessas, construirmos modelos considerando as dinâmicas de produção e logística. Outro fato interessante presente neste modelo é o de considerar uma espécie onde se leva em conta o crescimento do organismo como sendo elemento de uma população e *colônia* ao mesmo tempo [6]. Essa característica é dada pelo sistema (2.58), onde cada elemento da população N influencia na produção de biomassa y, e ambas dinâmicas (de produção e logística) se combinam formando um sistema que modela o crescimento do organismo.

Vimos anteriormente que as soluções do modelo Malthusiano (2.4) são exponenciais (2.6). Analogamente, as soluções da EDO (2.55) são dadas por $\hat{x}(t) = Ae^{-\lambda t}$, onde $A := \hat{x}(0)$ é uma constante, indicando um crescimento exponencial.

A fim de verificarmos a Lei da Alometria para a planta considerada acima, suponhamos que, além das folhas relacionadas com a variável $\hat{x}$, agora também temos uma medida das flores dada em termos da proporção relativa

$$\hat{z}(t) := \frac{\tilde{K} - \tilde{N}}{\tilde{N}}, \tag{2.60}$$

onde $\tilde{K}$ é o crescimento intrínseco da população $\tilde{N}$ que tem dinâmica logística (2.8). Consequentemente, seguindo os mesmos passos que fizemos acima com $\hat{x}(t)$, a variável $\hat{z}(t)$ satisfaz

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = -\lambda \hat{z}(t), \tag{2.61}$$

de forma que para $z(0) := B$, onde B é uma constante, tenhamos $\hat{z}(t) = Be^{-\lambda t}$. Isto confirma a Lei de Laird visto que a taxa de crescimento λ é a mesma para as variáveis associadas às folhas $\hat{x}(t) = Ae^{-\lambda t}$ e flores $\hat{z}(t) = Be^{-\lambda t}$. Além disso, $\frac{\hat{z}}{\hat{x}}$ é constante, e portanto a Lei da Alometria é verificada.

2.3 Sistemas Volterra-Hamilton

Variável de Volterra. Definimos a *variável de produção* de Volterra associada a uma população de tamanho $N^i(t)$ por

$$x^i(t) = k_{(i)} \int_0^t N^i(\tau) d\tau + x^i(0), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.62}$$

onde cada k_i é constante[3]. Frequentemente estaremos usando a variável de produção na seguinte forma

$$\frac{dx^i}{dt} = k_{(i)} N^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.63}$$

Volterra definiu x^i como uma 'quantité de vie' [23], o que pode ser entendido como uma "quantidade de vida" presente numa população de tamanho N^i. Assim, a definição acima nos diz que uma população com N^i indivíduos produz (ou consome) a uma taxa *per capita* k_i certa quantidade x^i. Podemos interpretar (2.62) como sendo uma energia presente numa população. Embora muitas vezes a variável de produção x^i é considerada como

[3] O parênteses no subíndice i em $k_{(i)}$ indica que estes *não* são somados conforme a notação de Einsten para soma de índices repetidos.

sendo uma medida da biomassa, é possível a escolhermos como sendo uma outra medida. Por exemplo, x^i pode representar a quantidade de toxinas produzidas para autodefesa de uma planta. Tal escolha facilita o estudo das interações que são influenciadas por essas substâncias químicas, e não somente pela biomassa ou número de indivíduos, como veremos num exemplo do próximo capítulo.

A introdução da variável de produção sob o ponto de vista da Trofodinâmica Analítica possibilita um estudo mais adequado de certos modelos que possuem uma grande *plasticidade*. Por exemplo, para modelarmos a dinâmica de uma planta lidamos com uma grande variabilidade do tamanho, forma, biomassa etc. Neste caso, se levarmos em conta as *interações* entre suas partes, como flores, sépalas, raízes etc., e ainda as *influências do meio ambiente* nas interações, podem surgir algumas dificuldades do ponto de vista empírico da medida dessas quantidades, ou de outras equivalente associadas à produção (ou consumo). No entanto, tendo uma maior flexibilidade para escolha das novas variáveis e uma abordagem que permita captar mais adequadamente as influências do ambiente, podemos lidar com a grande variabilidade existente numa planta de forma bastante eficiente, principalmente quando estudarmos os efeitos das *interações sociais*.

Interações Ecológicas. Agora iremos estudar diferentes de espécies coexistindo num mesmo ambiente e alguns tipos de interações que ocorrem entre elas. Denotaremos uma *comunidade* (isto é, um conjunto de populações habitando um mesmo local) por Σ. O crescimento de uma das populações que constituem a comunidade Σ pode, ou não, afetar o crescimento de uma outra população. Dizemos que Σ é uma *comunidade simples* com n espécies, se todas elas interagem com pelo menos uma outra população que não seja ela própria. Quando for este o caso, não há *populações isoladas*, que não interagem com nenhuma outra. Ao longo deste trabalho, normalmente estaremos lidando com este caso.

Consideremos o seguinte modelo

$$\frac{dN^i}{dt} = \lambda_{(i)}N^i - \Gamma^i_{jk}N^jN^k, \quad i,j,k = 1,\ldots,n, \tag{2.64}$$

que leva em consideração termos logísticos em que aparecem λ_i e termos de interação constante envolvendo Γ^i_{jk}. Aqui os coeficientes de interação constantes G^i_{jk} são iguais aos símbolos Christoffel de segunda espécie definidos anteriormente, isto é, $\Gamma^i_{jk} \equiv G^i_{jk}$.

Dizemos que as interações são *ecológicas* quando os coeficientes G^i_{jk} são constantes. Neste caso, consideraremos que as interações entre duas espécies em Σ podem ser de três tipos:

a) *predação* - quando a taxa de crescimento de uma das espécies cresce, e a da outra diminui;

b) *competição* - se ambas taxas diminuem;

c) *simbiose* - se ambas taxas crescem.

Seja Σ uma comunidade simples com n espécies interagindo ecologicamente (predação, competição e simbiose). Consideremos o *modelo de Gause-Witt*

$$\frac{dN^i}{dt} = \lambda_{(i)}N^i - \frac{\lambda_{(i)}}{K_{(i)}}\,(N^i)^2 - \delta_{(i)}\frac{\lambda_{(i)}}{K_{(i)}}\,N^iN^j, \quad i,j = 1,\ldots,n, \tag{2.65}$$

onde λ_r, δ_r e K_r são constantes positivas para qualquer índice r. Este modelo expressa a dinâmica da população de cada espécie $N^i(t)$ em Σ, levando em consideração a interação entre $N^i(t)$ e $N^j(t)$. Os coeficientes que envolvem os termos quadráticos N^iN^j expressam o efeito da *interação interespecífica* entre as populações $N^i(t)$ e $N^j(t)$ na taxa de crescimento da população $\frac{dN^i}{dt}$. Como anteriormente, os coeficientes λ_i e K_i indicam, respectivamente, a taxa de crescimento intrínseco da população $N^i(t)$ e a capacidade de carga do ambiente em que esta se encontra. Já o coeficiente δ_i fornece uma medida da eficiência entre a interação da população $N^i(t)$ com a população $N^j(t)$. Os coeficientes que envolvem os termos quadráticos $(N^i)^2$ expressam o efeito da *interação intraespecífica*.

Consideremos um caso bidimensional do modelo de Gause-Witt dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dN^1}{dt} = \lambda_1N^1 - \frac{\lambda_1}{K_1}\,(N^1)^2 - \frac{\lambda_1\delta_1}{K_1}\,N^1N^2 \\ \dfrac{dN^2}{dt} = \lambda_2N^2 - \frac{\lambda_2}{K_2}(N^2)^2 - \frac{\lambda_2\delta_2}{K_2}\,N^1N^2, \end{cases} \tag{2.66}$$

onde as constantes

$$\frac{\lambda_r}{K_r}, \quad \frac{\lambda_r\delta_r}{K_r}, \quad r = 1,2 \tag{2.67}$$

indicam, respectivamente, os coeficientes de interação intraespecífica e interespecífica. É possível mostrar que os pontos de equilíbrio de (2.66) são da forma

$$(N^1_*, N^2_*) = \Big(\frac{K_1 - \delta_1K_2}{1-\delta_1\delta_2},\ \frac{K_2 - \delta_2K_1}{1-\delta_1\delta_2}\Big), \tag{2.68}$$

de acordo com os parâmetros considerados.

Teorema. *Para um modelo de Gause-Witt como (2.66) as interações entre as populações não-nulas $N^1(t)$ e $N^2(t)$ são tais que:*

(i) *Se $\delta_1 > \frac{K_1}{K_2}$ e $\delta_2 > \frac{K_2}{K_1}$, então ocorre a competição e de acordo com as condições iniciais uma das duas espécies será extinta;*

(ii) *Se $\delta_1 > \frac{K_1}{K_2}$ e $\delta_2 < \frac{K_2}{K_1}$, então ocorre a predação e independente das condições iniciais a espécie $N_1(t)$ será extinta;*

(iii) *Se $\delta_1 < \frac{K_1}{K_2}$ e $\delta_2 > \frac{K_2}{K_1}$, então ocorre a predação e independente das condições iniciais a espécie $N_2(t)$ será extinta;*

(iv) *Se* $\delta_1 < \frac{K_1}{K_2}$ *e* $\delta_2 < \frac{K_2}{K_1}$, *então ocorre a simbiose (ambas espécies coexistem).*

Com exceção do caso (iv) os outros obedecem ao *Princípio da Exclusão Competitiva*, o qual basicamente afirma que competidores completos não podem coexistir [6]. Já para o caso (iv), Hutchinson diz que "há uma limitação quanto a competição interespecífica a qual não se aplica aos outros três casos" [12].

Notemos que o modelo (2.66) não envolve termos além dos quadráticos. O estudo das interações interespecíficas na dinâmica populacional e dos efeitos de termos cúbicos aparece em [11]. No entanto, algumas das considerações feitas envolvendo termos cúbicos não foram satisfatórias. Primeiramente, para estudar os efeitos dos termos cúbicos, Hutchinson considerou o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \dfrac{dN^1}{dt} = \lambda_1 N^1 - \frac{\lambda_1}{K_1}\ (N^1)^2 - \frac{\lambda_1\delta_1}{K_1}\ N^1(N^2)^2 \\ \dfrac{dN^2}{dt} = \lambda_2 N^2 - \frac{\lambda_2}{K_2}\ (N^2)^2 - \frac{\lambda_2\delta_2}{K_2}\ (N^1)^2 N^2. \end{cases} \tag{2.69}$$

Agora os coeficientes de interação interespecíficas na primeira e segunda equação de (2.69) são dados por

$$\frac{\lambda_1\delta_1 N^2}{K_1}, \quad \frac{\lambda_2\delta_2 N^1}{K_2}. \tag{2.70}$$

Logo, dependem da população. Esta dependência é conhecida como *interações sociais.*

Estudando as interações sociais, Hutchinson percebeu que se introduzisse um indivíduo $N^2 = 1$ num ambiente habitado por uma espécie $N^1(t)$, o efeito da interação desse sobre a espécie $N^1(t)$ seria dado por $\frac{\lambda_1\delta_1\cdot(1)^2}{K_1}$, assim como no modelo de Gause-Witt, $\frac{\lambda_1\delta_1}{K_1}$. A partir daí, afirmou que "em geral pode se esperar que os novos coeficientes tenham valores da mesma ordem de magnitude do que aqueles derivados de experimentos anteriores"[12]. No entanto, ao particularizar para o caso de introduzir um único indivíduo ($N^2 = 1$) interagindo socialmente, não notou que se tivesse introduzido $N^2 = 10$ indivíduos [6], por exemplo, o efeito destes não seriam da mesma ordem de antes, pois $\frac{\lambda_1\delta_1\cdot(10)^2}{K_1}$ é igual a 100 vezes $\frac{\lambda_1\delta_1}{K_1}$. Ou seja, o efeito das interações sociais agora não possuem a mesma ordem de magnitude.

O efeito das interações sociais de ordem maior que a quadrática foi percebido experimentalmente, e se mostrou tão importante quanto estes [24]. Então, um método que envolva truncagens na série de Taylor até termos de segunda ordem pode estar descartando informações importantes para a modelagem. Depois de questionado sobre tais questões, Hutchinson propôs uma abordagem afirmando que aos termos cúbicos, e de ordens mais altas, poderia ser aplicado um *processo de homogeneização.* No entanto, como notou [3] as equações homogeneizadas obtidas por esse processo não incorporam os efeitos sociais (caso em que os coeficientes de interação não são contantes, e dependem da densidade da

população). Em vista disso, surge a necessidade de uma nova abordagem.

As interações biológicas sociais também são conhecidas como interações de *alta-ordem* devido aos efeitos que surgem na modelagem quando se leva em conta aproximações maiores que as quadráticas.

Interações na Trofodinâmica Analítica. Para uma carta local no fibrado $\widetilde{TM}$, induzida de forma natural pelo sistema de coordenadas locais (U, h) de um ponto em M^n, consideremos um *sistema de Volterra-Hamilton* dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = k_{(i)}N^i \\ \dfrac{dN^i}{dt} = \lambda_{(i)}N^i - G^i_{jk}(x,\dot{x})N^jN^k + e^i, \qquad i,j,k = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{2.71}$$

onde as coordenadas x^i são variáveis de Volterra definidas por (2.63), λ_i são as taxas de crescimento intrínseco, G^i_{jk} são os coeficientes de interação, $\dot{x}^i := \frac{dx^i}{dt}$ e e^i indica a *influência do ambiente externo*. Por ora, não iremos considerar os efeitos do ambiente em nossa modelagem, isto é, assumiremos $e^i \equiv 0$.

Podemos classificar os tipos de *interações* de um modelo trofodinâmico, de acordo com os coeficientes G^i_{jk} do sistema (2.71), da seguinte maneira:

a) *interações ecológicas* - se os coeficientes de interação G^i_{jk} são contantes;

b) *interações metabólicas*[4] - se os G^i_{jk} dependem explicitamente das coordenadas x^i;

c) *interações sociais* - se os G^i_{jk} dependem explicitamente da população N^i, isto é, das proporções $\frac{N^r}{N^s}$.

Dizemos que um processo é *ótimo* quando suas curvas de produção satisfazem as equações de Euler-Lagrange de algum problema variacional. Notemos que, assumindo[5] $N^i := \frac{dx^i}{dt}$, $\lambda_i \equiv \lambda$, $k_i \equiv 1$, $e^i \equiv 0$ e (2.47), o sistema de Volterra-Hamilton (2.71) assume a forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = N^i \\ \dfrac{dN^i}{dt} = \lambda N^i - G^i_{jk}N^jN^k. \end{cases} \tag{2.72}$$

Então, se os coeficientes de interação G^i_{jk} são constantes, fazendo uma reparametrização $t \mapsto s$, podemos eliminar os termos envolvendo λ, e este sistema de EDOs corresponde as

[4] As interações metabólicas também são conhecidas como *simbióticas*.

[5] Os parênteses nos subíndices $k_{(i)}$ indicam que não estamos somando de acordo com a notação de Einsten (citada no capítulo 1) para os subíndices i.

equações geodésicas (2.43) de algum funcional de Maupertuis H_s como nos Teoremas I e II. Isso mostra que, no caso de processos ótimos, o sistema de EDOs de segunda ordem formado pela equações das geodésicas minimizantes (que são equivalentes às equações de Euler-Lagrange) pode ser representado por um sistema de Volterra-Hamilton.

A vantagem de sistemas de Volterra-Hamilton como (2.71) é que permitem modelarmos processos que não são ótimos. Para processos *não ótimos*, não podemos obter um funcional de energia de Maupertuis como no Teorema I e II de forma que as equações de Euler-Lagrange sejam equações geodésicas minimizantes. Este sempre é o caso quando os coeficientes G^i_{jk} dependem das proporções $\frac{N^i}{N^j}$, ou seja, quando há interações sociais.

Teorema III. *O sistema (2.64) com $\lambda_i \equiv \lambda$ e coeficientes Γ^i_{jk} tais que $\Gamma^i_{jk} \neq 0$ quando $j \neq i$ ou $k \neq i$, para cada $i = 1, \ldots, n$ e alguns $j, k = 1, \ldots, n$, são equações de Euler-Lagrange para um funcional de Maupertuis quadrático H_s minimizante (Teorema I) se, e somente se, existem constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que*

$$\begin{cases} \Gamma^i_{ii} = \alpha_i, \ \Gamma^i_{jk} = 0, & \text{se } i \neq j \neq k \\ \Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ji} = \alpha_j, & \text{se } i \neq j \\ \Gamma^i_{jj} = -\alpha_i, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{2.73}$$

Além disso, a menos de multiplicação por uma constante,

$$H_s = \frac{1}{2}\, e^{2\alpha_i x^i} \left[\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx^n}{ds}\right)^2 \right], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.74}$$

onde $s = \frac{1}{\lambda}\, e^{\lambda t}$.

Um resultado importante [1] é que existe uma única métrica g_{ij} associada a um sistema de Volterra-Hamilton como no Teorema III, com coeficientes constantes. A expressão de g_{ij} pode ser obtida usando (2.74) no Teorema I, de forma que

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left\{ e^{2\alpha_i x^i} \left[(\dot{x}^1)^2 + \cdots + (\dot{x}^n)^2 \right] \right\} = \frac{e^{2\alpha_i x^i}}{2}\, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left\{ 2\dot{x}^j \right\}. \tag{2.75}$$

E como $\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{x}^i} = \delta_{ij}$, a expressão acima pode ser reescrita como

$$g_{ij} = e^{\phi} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.76}$$

onde $\phi := 2\alpha_i x^i$. Esta métrica é conhecida como *métrica de Antonelli-Voorhees.*

Algumas relações entre invariantes de KCC e H_s. Vejamos como os invariantes de KCC podem fornecer de forma direta algumas informações sobre a teoria aqui estudada.

Primeiramente, notemos que, pelo Teorema de Euler, podemos escrever o funcional de

energia de Maupertuis H_s do Teorema I como

$$H_s = \frac{1}{2}\, g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^j. \tag{2.77}$$

A fim de simplificar, definimos o *tensor de Cartan*,

$$\mathcal{C}_{ijk} := \frac{1}{2}\, \dot{\partial}_k g_{ij}, \tag{2.78}$$

onde g_{ij} é como em (2.77). Este tensor fornece informações sobre o funcional de Maupertuis H_s de forma direta, pois pelas relações acima teremos que H_s é quadrático em $\dot{x}^i$ se, e somente se, $\mathcal{C}_{ijk} \equiv 0$.

Vimos pelos Teoremas I e II que para o funcional de Maupertuis H_s (consequentemente, para uma métrica g_{ij} positiva definida) as geodésicas são curvas minimizantes soluções de $\delta \int_\gamma \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} = 0$ que podem ser obtidas por meio do primeiro invariante de KCC (1.28) através da condição $\boldsymbol{e}^i \equiv 0$, conforme observamos em (1.90). Além disso, escolhendo $\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 2G^i$ as equações geodésicas (2.43) ficam sendo o spray (1.21), e portanto podemos definir os outros invariantes de KCC como fizemos no capítulo 1. Feito isso, por meio destes invariantes, podemos simplificar outras questões. Por exemplo, pelo Teorema de Douglas, estamos sob a presença de interações sociais em nossa modelagem se, e somente se, o tensor de Douglas (1.42) é tal que $\mathcal{D}^i_{jkl} \neq 0$. Além disso, se o tensor de torção de Cartan (2.78) é tal que $\mathcal{C}_{ijk} \equiv 0$, então $\mathcal{D}^i_{jkl} \equiv 0$. Consequentemente, o anulamento do tensor de Cartan $\mathcal{C}_{ijk}$ assegura que os coeficientes G^i do spray (1.21) são quadráticos.

Vejamos outras consequências. Pelas definições anteriores, se $\mathcal{C}_{ijk} \equiv 0$ e $\mathcal{D}^i_{jkl} \equiv 0$, então $\Gamma^i_{jk} \equiv G^i_{jk}$. Portanto, o anulamento dos tensores de Douglas e Cartan em nossa modelagem é suficiente para garantir que os coeficientes da conexão da geometria definem as interações biológicas em questão. Ressaltamos que somente o anulamento do tensor de Douglas não garante esta condição. Um exemplo disto é dado pelo seguinte funcional de energia de Maupertuis

$$H_s = \frac{1}{2}\, e^{\phi}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j, \quad i,j = 1,2, \tag{2.79}$$

onde

$$\phi = (2\alpha_i x^i)(L^2+1) + 2L\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^2}\right), \tag{2.80}$$

onde L é como (2.40). Calculando a métrica g_{ij} associada ao funcional de Maupertuis H_s acima, em seguida os coeficientes Γ^i_{jk} da conexão pela fórmula (2.44) do Teorema II, veremos que $\dot{\partial}_r\Gamma^i_{jk} \equiv 0$, implicando em $G^i_{jk} \neq \Gamma^i_{jk}$. Isto ocorre porque embora o tensor de Douglas de (2.79) se anule, este funcional é somente p-homogêneo de grau 2, e não quadrático.

Em geral, saber se as geodésicas associadas a um funcional de Maupertuis H_s podem

ser transformadas em retas por meio de uma mudança de coordenadas não é imediato. Vejamos um teorema importante nesse sentido.

Teorema IV. *Existe uma mudança de coordenadas para as equações geodésicas associadas ao funcional de energia de Maupertuis H_s (2.77), de forma que $\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$ se, e somente se, $\mathcal{B}^i_{jkl} \equiv 0$ e $\mathcal{D}^i_{jkl} \equiv 0$, onde $\mathcal{B}^i_{jkl}$ e $\mathcal{D}^i_{jkl}$ são os tensores de Berwald (1.41) e Douglas (1.42), respectivamente $(i, j, k, l = 1, \ldots, n)$.*

Logo, o anulamento do quarto e quinto invariantes de KCC garante que existe um sistema de coordenadas de forma que as curvas de crescimento associadas a produção sejam simplificadas assumindo forma de retas. Ou seja, as geodésicas associadas a um funcional de Maupertuis, sob uma mudança de coordenadas, assumem a forma de retas, como no caso do espaço Euclideano.

Outra consequência importante fornecida pelos invariantes KCC é que se $\mathcal{D}^i_{jkl} \equiv 0$ (isto é, G^i é quadrático), então o tensor de curvatura de Berwald $\mathcal{B}^i_{jkl}$ assume a forma do tensor de curvatura de Riemann[6] $\mathcal{R}^i_{jkl}$ com os coeficientes de interação G^i_{jk} no lugar de Γ^i_{jk}. Podemos verificar isto de forma imediata pela identidade

$$\mathcal{B}^i_{jkl} = \mathcal{R}^i_{jkl} + \dot{x}^r(\Gamma^s_{rl}\mathcal{D}^i_{jks} - \Gamma^s_{rk}\mathcal{D}^i_{jls}), \quad i, j, k, l = 1, \ldots, n. \tag{2.82}$$

A expressão acima segue das definições (2.44), (1.42) e (1.41).

Além disso, um resultado semelhante ao Teorema IV e que aparece na geometria Riemanniana é o seguinte: se $\mathcal{R}^i_{jkl} \equiv 0$, então existe um sistema de coordenadas locais (U, h) tal que todos Γ^i_{jk} se anulam, de forma que neste sistema de coordenadas, o spray (1.21) com parâmetro s, assume a forma $\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$ [6]. Neste caso, se o spray define equações geodésicas, estas são retas dadas por essas EDOs de segunda ordem.

Estabilidade para o caso bidimensional. Consideremos um espaço métrico de Finsler (M^2, F). Seja $L := \sqrt{2H_s}$ um funcional como em (2.40), onde H_s é a energia de Maupertuis dado por

$$H_s = \frac{1}{2}\, e^{2\alpha_i x^i} \left[\left(\frac{dx^1}{ds} \right)^m + \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^m \right]^{2/m}, \quad i = 1, 2. \tag{2.83}$$

---

[6] Em um sistema de coordenadas locais, o tensor de curvatura de Riemann pode ser definido em termos dos coeficientes da conexão de Levi-Civita por

$$\mathcal{R}^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jl}\, \Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\, \Gamma^i_{ml}. \tag{2.81}$$

Definimos o *tensor de curvatura de Gauss-Berwald* $\mathcal{K}(x,\dot{x})$ pela fórmula [6]

$$\mathcal{K}(x,\dot{x}) = \frac{m(m-2)}{4(m-1)^2}\left\{\frac{(\alpha_1)^2\left[\left(\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^1}\right)^{m-1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]^2\left[\left(\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^1}\right)^{m}+1\right]}{\left(\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^1}\right)^{2m-1}}\right\}\frac{\dot{x}^1\dot{x}^2}{L^2}, \tag{2.84}$$

onde $m \geq 2$ é um número inteiro.

Vejamos como o tensor de desvio de Berwald $\mathcal{B}^i_j$ e o tensor de curvatura de Gauss-Berwald $\mathcal{K}$ acima fornecem as mesmas informações sobre a estabilidade no sentido de Jacobi para o caso bidimensional. Para isso, primeiramente mostraremos alguns resultados, e em seguida analisaremos a equação de desvio de Jacobi (1.39).

Usando o funcional L definido acima, obtemos um vetor unitário $l^i := \frac{\dot{x}^i}{L}$ na direção de $\dot{x}^i$, e, também, um outro vetor unitário m^j que é perpendicular a l^i por meio da equação

$$g_{ij}l^i m^j = 0, \quad i,j = 1,2, \tag{2.85}$$

onde g_{ij} é a métrica associada ao funcional de Maupertuis H_s (2.83) como nos Teoremas I e II. O par (l^i, m^i) é denominado *frame de Berwald*. Então, usando (l^i, m^i), podemos obter o seguinte resultado,

$$\mathcal{B}^i_k = L^2\mathcal{K}m^i m_k, \quad i,k = 1,2, \tag{2.86}$$

onde os vetores unitários covariantes (com os subíndices) são obtidos por meio do rebaixamento de índices utilizando a métrica: $m_r = g_{rs}m^s$. Agora, considerando uma geodésica $\gamma : x^k(s)$, temos a seguinte relação

$$g_{ij}l^j\,\frac{Dm^i}{ds} = 0, \tag{2.87}$$

onde $\frac{Dm^i}{ds}$ é a derivada covariante de Berwald ao longo de γ. Esta condição mostra que $\frac{Dm^i}{ds}$ é perpendicular a direção l^i do frame de Berwald (l^i, m^i). Além disso, como m^i é unitário, vale que $m^i \cdot m_i = 1$. Então, derivando esta relação ficamos com

$$\frac{D}{ds}(m^i \cdot m_i) = 2m_i\,\frac{Dm^i}{ds} = 0. \tag{2.88}$$

Ou seja, $\frac{Dm^i}{ds}$ também é perpendicular a direção m^i. E como estamos considerando um espaço bidimensional, $\frac{Dm^i}{ds}$ ser perpendicular a l^i e m^i, implica que $\frac{Dm^i}{ds} \equiv 0$.

Consideremos um campo de Jacobi V^i definido por (1.39), ao longo de uma geodésica $\gamma : x^k(s)$, dado por

$$V^i(s) = v(s)m^i, \tag{2.89}$$

onde $v(s)$ é uma função suave adequada de forma que

$$g_{ij}V^i \ \frac{d\dot{x}^j}{ds} = 0. \tag{2.90}$$

Assim, usando (2.86), podemos reduzir a equação de Jacobi (1.39) a

$$\frac{D^2v}{ds} + \mathcal{K}v = 0. \tag{2.91}$$

Notemos que esta equação tem a mesma forma que a equação de desvio de Jacobi definida anteriormente em (1.39). Além disso, se $\mathcal{K}$ não depende da direção $\dot{x}^i$, então (2.91) é a equação do desvio geodésico conhecida na geometria Riemanniana. Prosseguindo, verifiquemos (2.91). Substituindo (2.89) e (2.86) em (1.39), obtemos

$$\frac{D^2V^i}{ds^2} + \mathcal{B}^i_k V^k = \frac{D^2V^i}{ds^2} + L^2\mathcal{K}m^i m_k V^k = 0. \tag{2.92}$$

Além disso, ao longo da geodésica $\gamma : x^k(s)$ definida anteriormente, temos

$$\frac{D^2V^i}{ds^2} = \frac{D}{ds}\left(\frac{D}{ds}\left(v(s)m^i\right)\right) = \frac{D}{ds}\left(\frac{Dv}{ds}\ m^i + v\ \frac{Dm^i}{ds}\right), \tag{2.93}$$

onde $\frac{Dm^i}{ds} \equiv 0$, por (2.88). Logo, a expressão acima fica sendo

$$\frac{D^2V^i}{ds^2} = \frac{D}{ds}\left(\frac{Dv}{ds}\ m^i\right) = \frac{D}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\ m^i\right) = \frac{d^2v}{ds^2}\ m^i. \tag{2.94}$$

Então, substituindo (2.94) em (2.92), temos

$$\frac{d^2v}{ds^2}\ m^i + L^2\mathcal{K}m^i m_k\ v(s)m^k = \frac{d^2v}{ds^2}\ m^i + L^2\mathcal{K}m^i v(s) = 0,$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de que m^i é unitário, ou seja, $m^i m_i = 1$. Usando novamente este fato, ao multiplicarmos a expressão acima por m_i e depois somarmos com respeito ao índice i, concluímos que

$$\frac{d^2v}{ds^2} + L^2\mathcal{K}v(s) = 0. \tag{2.95}$$

Por fim, observando que $L^2 \equiv 1$ ao longo das geodésicas, a equação acima se torna (2.91). Portanto, no caso de um espaço bidimensional, o estudo da estabilidade do sistema (1.39) se reduz ao estudo de (2.91), e é determinada pelo sinal da curvatura de Gauss-Berwald $\mathcal{K}(x,\dot{x})$ sobre $\widetilde{TM^2}$: (i) $\mathcal{K} > 0$ se, e somente se, a produção é estável no sentido de Jacobi; (ii) $\mathcal{K} \leq 0$ se, e somente se, a produção é fracamente caótica.

Capítulo 3

Exemplos

Neste capítulo apresentaremos alguns modelos em que aparece cada um dos tipos de interações definidos no capítulo anterior. Veremos como os elementos da Trofodinâmica Analítica estudados surgem no contexto da biologia.

3.1 Recifes de Corais Ideais

Em nosso primeiro exemplo [4], estudaremos um recife de corais ideal formado por n espécies de corais. Assumiremos que todas as espécies interagem duas-a-duas e os produtos (substâncias) depositados por cada uma dessas no recife afetam a interação e dinâmica da comunidade como um todo. Geralmente o acúmulo de carbonato de cálcio produzido por diferentes espécies de pólipos formam as *estruturas de corais escleractínios* presentes nos recifes. Para o modelo de coral aqui estudado é esperado que no início do processo de crescimento o sistema de EDOs associado ao modelo seja fortemente influenciado por fatores externos, acarretando um certa indeterminação na predição para instantes próximos aos dos dados iniciais. Já para instante de tempo grande como $t \to \infty$, o sistema é resistente (robusto) a grandes mudanças ocasionadas pelo ambiente externo. Essas influências externas são introduzidas no modelo como sendo um *ruído ambiental*, que é conhecido como *canalização estocástica*. Biologicamente, os ruídos ambientais são marcados pela captação da intensidade luminosa que incide sobre o organismo, quantidade de alimentos e espaço disponíveis. A disputa por tais recursos comumente ocorre por meio de uma competição entre as espécies envolvidas.

Um modelo de coral ideal. Consideremos um ambiente simples formado pelos produtores $P_1, \ldots, P_n$, onde cada P_i consiste de N^i indivíduos. Assumindo variáveis de Volterra dadas por

$$x^i(t) = \int_{t_0}^{t} N^i(\tau) d\tau, \tag{3.1}$$

consideremos o seguinte modelo de corais ideais

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = k_{(i)} N^i \\ \dfrac{dN^i}{dt} = -\Gamma^i_{jk} N^j N^k + \gamma^i_j N^j, \qquad i,j,k = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde todos os coeficientes k_i, Γ^i_{jk} e γ^i_j são constantes. Cada constante k_i representa a taxa de depósito por indivíduo do produto i em P_i. Já os coeficientes γ^i_j são as taxas de crescimento intrínseco de cada espécie e Γ^i_{jk} são os coeficientes de interação. Observemos que como Γ^i_{jk} são constantes o modelo está sob efeito das interações ecológicas clássicas mencionadas anteriormente. Além disso, notemos que o sistema (3.2) tem a mesma forma do que o sistema (2.71) visto no capítulo 2.

Substituindo a primeira equação de (3.2) na segunda, ficamos com

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \tilde{\Gamma}^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \gamma^i_j \left(\frac{1}{k_{(j)}} \frac{dx^j}{dt} \right), \quad i,j,k = 1,\ldots,n, \tag{3.3}$$

onde

$$\tilde{\Gamma}^i_{jr} = \frac{k_{(i)}}{k_{(j)} k_{(r)}} \Gamma^i_{jr}. \tag{3.4}$$

Em geral, se assume que as taxas de depósito k_i em (3.2) são da ordem de um micro de espessura por hora de luz solar incidente. Sem perda de generalidade, aqui iremos assumir que $k_i \equiv 1$. Se supormos que $k_i < 0$, então ao invés de um depósito de substâncias estamos tendo uma perca que, biologicamente, aqui será dada pelo processo de bioerosão de corais de recifes causada, por exemplo, pelos recifes de esponjas achatadas e os ouriços-do-mar. Além disso, estaremos supondo que as taxas de crescimento intrínseco γ^i_j são todas iguais de forma que $\gamma^i_j \equiv \lambda$ para todas as espécie de coral. Esta condição pode ser obtida em laboratórios através da adição de fosfato de forma que tenhamos uma normalização de tais taxas de crescimento de cada espécie.

Agora, fazendo uma reparametrização $t \mapsto s$ em (3.3), obtemos o seguinte sistema de EDOs de segunda ordem

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{3.5}$$

Esta mudança é semelhante a que fizemos no capítulo 1, quando abordamos as geodésicas. Assim como vimos antes, ressaltamos que as soluções destas EDOs de segunda ordem podem não ser geodésicas em uma geometria Riemanniana. A fim de que sejam geodésicas, assumimos que existe um único tensor métrico g_{ij}, a menos de multiplicação por uma constante, como no Teorema III. Ou seja, a métrica g_{ij} obtida por (2.76) é a única que satisfaz a equação (3.5). Além disso, usando a unicidade da métrica de Antonelli-Voorhees g_{ij}, podemos definir uma extensão estocástica do sistema de Volterra-Hamilton

(3.2), como o processo de movimento Browniano natural Δ_g sobre um espaço alométrico. Uma discussão mais detalhada sobre esse aspecto pode ser encontrada em [4]. Aqui estaremos interpretando os ruídos do ambiente presentes em nosso modelo como sendo o fator responsável por um desvio do processo de crescimento ideal. Por exemplo, em um dia nublado as nuvem encobrindo a luz solar podem interferir na quantidade de luz que estará incindindo sobre a superfície da água do mar, de forma que ocorram certas alteração na quantidade de luz disponível para as espécies que competem por luminosidade. Para captar esses efeitos em nossa modelagem é preciso introduzirmos ruídos no modelo de Volterra-Hamilton e estudar os efeitos causados nos invariantes obtidos a partir dele, entre outros elementos que conectam a geometria e biologia.

Corais de recifes ideais e reais. Um modelo de coral como o aqui apresentado, em (3.2), certamente difere do caso de corais reais. Na prática, saber quais fatores influenciam no processo de crescimento da estrutura do recife de corais pode não ser tão direto. Neste exemplo, assumimos que o acúmulo de carbonato de cálcio é a principal contribuição para o crescimento dos recifes de corais, mas outros fatores também depositam sedimentos que se acumulam contribuindo para formação da estrutura de corais. Por exemplo, além de competirem pela maior incidência de luz, alimentos e espaço, certas algas calcárias e o processo de litificação[1] dos solos submarinos, entre outros fatores, também podem afetar a formação de recifes de corais. Além disso, existem dificuldades matemáticas em se distinguir entre o acúmulo de algas calcárias e acúmulo de carbonato de cálcio que contribuem para formação das estruturas de corais. No entanto, para uma certa franja de recife de corais em Barbados, foi estimado que a produção de carbonato de cálcio contribui cinco vezes mais do que o depósito de algas calcárias e, também, do que a litificação. Em vista desse dado experimental, é adequado assumirmos que a estrutura de corais é formada por carbonato de cálcio.

Embora existam inúmeros fatores para se levar em conta em um modelo de corais real, alguns deles podem ser eliminados por certos ajustes experimentais. Por exemplo, a litificação pode ser eliminada pelo uso de caixa-de-vidros sobre a porção do recife que será estudada. Feito isso, é possível simplificar a modelagem e obtermos fórmulas matemáticas que descrevem os principais fatores, como as equações envolvendo a variável de produção de Volterra $x^i(t)$ que descrevem o crescimento de diferentes produtores de carbonato de cálcio em um recife de corais ideal.

[1] Incorporação de sedimentos na estrutura de recifes.

3.2 Interações Sociais

Veremos agora um modelo da ecologia marinha [6] que envolve as interações sociais e algumas das suas consequências na questão da estabilidade.

Produção sob o efeito das interações sociais. Consideremos o funcional de energia de Maupertuis

$$H_s = \frac{1}{2}\, e^{2\alpha_i x^i} \left[\left(\frac{dx^1}{ds} \right)^m + \cdots + \left(\frac{dx^n}{ds} \right)^m \right]^{2/m}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.6}$$

onde $m \geq 2$ é um inteiro e s é o parâmetro natural. Notemos que, quando $m = 2$, (3.6) se reduz a um funcional quadrático H_s dado por (2.74) como no Teorema III.

Um exemplo da ecologia marinha onde aparecem as interações sociais pode ser obtido considerando o caso bidimensional ($n = 2$) do funcional de Maupertuis H_s definido por (3.6), o que interpretamos como duas espécies interagindo de acordo com uma relação obtida a partir de (3.6). Consideremos este caso e vejamos algumas consequências.

Usando os Teoremas I e II, mostramos que a métrica g_{ij} associada a tal funcional H_s (isto é, (3.6) com $n = 2$) é positiva definida. Logo, as equações de Euler-Lagrange para um problema variacional envolvendo H_s fornecem geodésicas minimizantes da forma (2.43). Isso mostra que H_s fornece curvas de produção onde o processo é ótimo.

Agora, fazendo a reparametrização do parâmetro natural s para um parâmetro t, onde $s = \frac{1}{\lambda}\, e^{\lambda t}$, surgem termos lineares envolvendo λ nas equações de Euler-Lagrange (equações geodésicas) de forma que estas possam ser escritas como o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = N^1 \\ \dfrac{dx^2}{dt} = N^2 \\ \dfrac{dN^1}{dt} = \lambda N^1 - \alpha_1 (N^1)^2 - \alpha_2 \left(\frac{m}{m-1} \right) N^1 N^2 + \frac{\alpha_1}{m-1} \left(\frac{N^2}{N^1} \right)^{m-2} (N^2)^2 \\ \dfrac{dN^2}{dt} = \lambda N^2 - \alpha_2 (N^2)^2 - \alpha_1 \left(\frac{m}{m-1} \right) N^1 N^2 + \frac{\alpha_2}{m-1} \left(\frac{N^1}{N^2} \right)^{m-2} (N^1)^2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Estabilidade do processo de produção. Notemos que nas duas últimas equações do sistema acima aparecem termos envolvendo as proporções $\frac{N^i}{N^j}$, o que indica a presença de interações sociais.

O sistema (3.7) tem um ponto de equilíbrio (N^1_*, N^2_*) dado por

$$\left(N^1_*, N^2_* \right) = \left(\frac{\lambda\ \alpha_1^{\frac{1}{m-1}}}{\alpha_1^{\frac{m}{m-1}}\ +\ \alpha_2^{\frac{m}{m-1}}}, \frac{\lambda\ \alpha_2^{\frac{1}{m-1}}}{\alpha_1^{\frac{m}{m-1}}\ +\ \alpha_2^{\frac{m}{m-1}}} \right). \tag{3.8}$$

Para analisar a estabilidade deste ponto de equilíbrio, primeiramente fazemos uma linea-

rização no sistema (3.7), ficando com o Jacobiano

$$\tilde{\mathbf{A}}_* = \begin{bmatrix} -\alpha N_*^1(1+\hat{k}^m) & 0 \\ \\ 0 & -\alpha N_*^1(1+\hat{k}^m) \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

onde $\hat{k}$ é definido por $\alpha_2 = \hat{k}^{m-1}\alpha_1 = \hat{k}^{m-1}\alpha$ e $\alpha > 0$ é uma constante real. Calculando as raízes do polinômio característico $p_{\tilde{\mathbf{A}}_*}(\lambda)$ vemos que os dois autovalores de $\tilde{\mathbf{A}}_*$ são iguais, reais e positivos. Com isso, pelo Teorema de Estabilidade Linear, segue que o ponto de equilíbrio (N_*^1, N_*^2) *é estável*.

Usando a definição (3.6) com $n = 2$ e o Teorema II, obtemos os coeficientes de interação G^i_{jk},

$$G^1_{11} = \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{2}\,(m-2)\left(\frac{N^2}{N^1}\right)^m, \tag{3.10}$$

$$G^1_{12} = \frac{m}{2(m-1)}\left[\alpha_2 + \alpha_1(m-2)\left(\frac{N^2}{N^1}\right)^{m-1}\right], \tag{3.11}$$

$$G^1_{22} = -\frac{m}{2}\,\alpha_1\left(\frac{N^2}{N^1}\right)^{m-2} \tag{3.12}$$

e G^2_{22}, G^2_{21}, G^2_{11} são obtidos a partir dos coeficientes acima trocando os índices $(1,2)$ por $(2,1)$. A partir destes coeficientes de interação G^i_{jk}, encontramos o tensor de Douglas $\mathcal{D}^i_{jkl}$ (1.42),

$$\mathcal{D}^1_{111} = \frac{\alpha_1}{2}\,m(m-2)\left(\frac{N^2}{N^1}\right)^m\,\frac{1}{N^1}\quad,\qquad \mathcal{D}^1_{112} = -\frac{\alpha_1}{2}\,m(m-2)\left(\frac{N^2}{N^1}\right)^{m-1}\,\frac{1}{N^1},$$
$$\mathcal{D}^1_{122} = \frac{\alpha_1}{2}\,m(m-2)\left(\frac{N^2}{N^1}\right)^{m-2}\,\frac{1}{N^1}\quad,\qquad \mathcal{D}^1_{121} = \mathcal{D}^1_{112},\quad \mathcal{D}^2_{212} = \mathcal{D}^2_{221}$$

e os demais são obtidos alternando-se os índices. Dessa maneira, por inspeção dos coeficientes $\mathcal{D}^i_{jkl}$ acima, o anulamento do tensor de Douglas equivale ao funcional de Maupertuis H_s ser quadrático ($m = 2$), o que está de acordo o Teorema de Douglas, pois temos a relação (2.45). Assim, o modelo (3.7) apresenta interações sociais se, e somente se, $m \geq 3$. Pelo que vimos no capítulo II, isto acontece somente quando $\mathcal{D}^i_{jkl} \neq 0$. Além disso, pelo Teorema IV, deduzimos que para $m \geq 3$ não existe uma mudança de coordenadas tal que as curvas do processo de produção de (3.7) sejam retas.

No entanto, considerando o caso quadrático ($m = 2$) de (3.6), as hipóteses do Teorema III são satisfeitas e, para $n = 2$, ficamos com

$$H_s = \frac{1}{2}\,e^{2\alpha_i x^i}\left[\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2\right], \quad i = 1, 2. \tag{3.13}$$

Então, pelos Teoremas I e II, as equações de Euler-Lagrange associadas ao funcional de Maupertuis H_s acima são geodésicas minimizantes e podem ser escritas como o seguinte sistema de Volterra-Hamilton

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = N^1 \\ \dfrac{dx^2}{dt} = N^2 \\ \dfrac{dN^1}{dt} = \lambda N^1 - \alpha_1 (N^1)^2 - 2\alpha_2 N^1 N^2 + \alpha_1 (N^2)^2 \\ \dfrac{dN^2}{dt} = \lambda N^2 - \alpha_2 (N^2)^2 - 2\alpha_1 N^1 N^2 + \alpha_2 (N^1)^2. \end{cases} \tag{3.14}$$

Além disso, por (2.82), temos que $\mathcal{B}^i_{jkl} \equiv \mathcal{R}^i_{jkl} \equiv 0$. Logo, o Teorema IV assegura a existência de uma mudança de coordenadas em (3.14) de forma as curvas de crescimento sejam retas. Verifiquemos esta consequência.

Fazendo uma reparametrização do parâmetro arbitrário t para o natural s e, em seguida, usando coordenadas polares (r, θ) em $r = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2}$ e $\theta = \alpha_2 x^1 - \alpha_1 x^2$, o sistema (3.14) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 r}{ds^2} - r \left(\dfrac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2 \theta}{ds^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{dr}{ds} \dfrac{d\theta}{ds} = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Estas EDOs de segunda ordem são a forma polar de retas em um sistema de coordenadas retangular $\bar{x}^i$ do espaço Euclideano.

Por fim, analisemos a estabilidade de Jacobi de um sistema de Volterra-Hamilton associado ao funcional de Maupertuis H_s (3.6) para $n = 2$. Neste caso, o tensor de desvio de Berwald $\mathcal{B}^i_j$ (1.38) nos dá as mesmas informações que o tensor de curvatura de Gauss-Berwald $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x, \dot{x})$, pois como vimos anteriormente, a equação que irá fornecer o desvio geodésico possui a mesma forma que (1.39) com $\mathcal{K}$ no lugar de $\mathcal{B}^i_j$ [6]. Assim, a noção de estabilidade de Jacobi agora é estabelecida por meio do sinal do tensor $\mathcal{K}$. Em vista disso, por inspeção de (2.84), temos que $\mathcal{K} > 0$ quando $m \geq 3$. Neste caso, pelo Teorema de Estabilidade de Jacobi, o processo de produção é *estável*. Por outro lado, para $m = 2$ temos que $\mathcal{K} \equiv 0$, e o teorema assegura que, neste caso, o processo *é instável*, ocorrendo a presença de um caos fraco no sistema de produção associado ao funcional de Maupertuis H_s (3.13). Concluímos também que, quando a curvatura deste espaço é nula, existe uma mudança de coordenadas de forma que as curvas de crescimento são retas que se afastam uma da outra não muito rapidamente, conforme a noção de estabilidade de Jacobi definida no capítulo 2. Este resultado contrasta com o que foi estabelecido quanto

a estabilidade linear do caso quadrático do sistema (3.7), já que no sentido de Jacobi este sistema apresenta instabilidade.

3.3 Ecologia Química

Seguindo [2], como último exemplo, vejamos um *sistema mutuamente simbiótico* de produção de autotoxinas em comunidades de plantas simbióticas.

Interações e produção. Em comunidades de plantas simbióticas, ocorre a produção de autotoxinas que tornam a *produtividade instável*. No entanto, em muitos casos, as substâncias químicas produzidas por uma das plantas beneficiam todas as outras da comunidade, e a instabilidade se mantém ao longo do tempo. Toxinas com esta característica são conhecidas como *queironômias*. Por outro lado, se as toxinas produzidas prejudicam o receptor, então são chamadas de *alonômias*.

Em geral, existem sistemas que sob condições iniciais adequadas, após um longo tempo, alcançam um certo equilíbrio, no sentido de não ocorrer grande mudanças no processo de produtividade. Como exemplo, vamos estudar sob que condições um sistema de produção de autotoxinas permite inferirmos sobre o tipo de substância produzida (alonômias/queironômias). Além disso, analisaremos a estabilidade da produção.

Consideremos uma comunidade formada por duas espécies de plantas mutuamente simbióticas. Denotemos por N^1 e N^2 o número de módulos de produção (unidades modulares) que podem ser considerados como, por exemplo, folhas, flores, raízes, etc. Esses módulos são responsáveis pela produção de substâncias químicas secundárias que influenciam na competição, sucessão e crescimento da planta.

Assumiremos que a variável de produção de Volterra $x^i(t)$, definida por

$$\frac{dx^i}{dt} = k_{(i)}N^i, \quad i = 1, 2, \tag{3.16}$$

representa a quantidade total de substância química produzida pelo módulo j de N^i. Sem perda de generalidade para nossos propósitos, assumiremos que a taxa *per capita* de crescimento é constante para todos módulos, isto é, $k_i \equiv 1$. Além disso, vamos supor que as espécies se encontram em condições ideais, onde o ambiente não interfere no processo e as quantidades x^i e N^i são funções do tempo. Em experimentos laboratoriais, é possível adicionar fosfato em culturas aquáticas de forma que as taxas de crescimento intrínseco sejam *normalizadas*, isto é, sejam proporcionais, ou iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$).

Consideremos o modelo

$$\begin{cases} \dfrac{dN^1}{dt} = -2\left(\alpha_2 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^1\right) N^1 N^2 + \left(\alpha_1 + \beta_1 x^1 + \beta_3 x^2\right)\left[\left(N^2\right)^2 - \left(N^1\right)^2\right] + \lambda N^1 \\ \dfrac{dN^2}{dt} = -2\left(\alpha_1 + \beta_1 x^1 + \beta_3 x^2\right) N^1 N^2 + \left(\alpha_2 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^2\right)\left[\left(N^1\right)^2 - \left(N^2\right)^2\right] + \lambda N^2, \end{cases} \tag{3.17}$$

onde os coeficientes $\alpha_i > 0$ e β_i $(i = 1, 2)$ são constantes e λ é a taxa de crescimento intrínseco normalizada. Observemos que esse modelo leva em consideração termos logísticos e de produção para descrever a dinâmica da população N^r, e que os coeficientes de interação (envolvendo os termos $N^i N^j$) dependem da coordenada x^r. Portanto, tal modelo está sob o efeito das interações metabólicas.

Se supormos que em (3.17) x^i são parâmetros e N^i variáveis, obtemos um único ponto de equilíbrio(N^1_*, N^2_*) não nulo e *estável*,

$$\begin{cases} N^1_* = \dfrac{\lambda(\alpha_1 + \beta_1 x^1 + \beta_3 x^2)}{(\alpha_1 + \beta_1 x^1 + \beta_3 x^2)^2 + (\alpha_2 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^1)^2} \\ N^2_* = \dfrac{\lambda(\alpha_2 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^1)}{(\alpha_1 + \beta_1 x^1 + \beta_3 x^2)^2 + (\alpha_2 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^1)^2}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Usando a regra da cadeia, como fizemos anteriormente, sob a reparametrização $t \mapsto s$ definida por $s = e^{\lambda t}$, os termos lineares em (3.17) envolvendo λ desaparecem. Ou seja, por meio de tal reparametrização, eliminamos os termos logísticos de (3.17). Ressaltamos que, como vimos no capítulo 2, isso nem sempre é possível.

Seja L o funcional dado por

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} N^i N^j\right) e^{2\phi}, \tag{3.19}$$

onde

$$\phi := \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \frac{1}{2}\,\beta_1 (x^1)^2 + \frac{1}{2}\,\beta_2 (x^2)^2 + \beta_3 x^1 x^2, \tag{3.20}$$

e δ_{ij} corresponde a matriz identidade [15]. Então, as equações de Euler-Lagrange para o problema variacional associado ao funcional L,

$$\delta \int_\gamma L(x, \dot{x})\, ds = 0, \quad \gamma \in \mathcal{C}, \tag{3.21}$$

são dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^1}{ds^2} = -2\left(\alpha_2 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^1\right) \ \frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \left(\alpha_1 + \beta_1 x^1 + \beta_3 x^2\right)\left[\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2\right] \\ \dfrac{d^2x^2}{ds^2} = -2\left(\alpha_1 + \beta_1 x^1 + \beta_3 x^2\right) \ \frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \left(\alpha_2 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^1\right)\left[\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2\right]. \end{cases} \tag{3.22}$$

Notemos que, escolhendo (3.16) e fazendo a reparametrização (3.17), o modelo resultante envolve somente termos de produção, como mostra (3.22). Além disso, visto que esse sistema de EDOs de segunda ordem são equações de Euler-Lagrange de um problema variacional, usando o Teorema II, é possível associá-lo as equações geodésicas.

Agora, vejamos como se dá a produção das substâncias químicas. Escolhendo as contantes β_i acima como sendo $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 < 0$, obtemos um *sistema perfeitamente cooperativo*. Neste caso, por inspeção de (3.17), vemos que a produção de x^1 e x^2 é benéfica para N^1 e N^2, respectivamente. Ou seja, a produção de cada emissor favorece ele próprio. Consequentemente, temos um sistema simbiótico com *alomônios* x^1 e x^2. No entanto, escolhendo $\beta_1 = \beta_2 > 0$ e $\beta_3 = -\beta_1 = -\beta_2$, então obtemos um *sistema perfeitamente simbiótico*. Novamente, por inspeção de (3.17), vemos que agora a produção de x^1 e x^2 beneficia N^2 e N^1, respectivamente. Ou seja, agora a produção de toxinas favorece os receptores. Portanto, concluímos que neste caso x^1 e x^2 são *queiromônios*.

Estabilidade da produção de autotoxinas. Em vista de estudarmos a estabilidade, assumindo que tanto x^i como N^i são variáveis no sistema (3.17), consideremos o seguinte resultado.

Se (3.17) é perfeitamente cooperativo, então a produção de autotoxinas é estável. Por outro lado, se é perfeitamente simbiótico, então é instável.

Para verificarmos o resultado acima, primeiramente notemos que se $x^i > 0$ $(i = 1, 2)$, então substituindo a variável de produção de Volterra (3.16) na definição (3.19), por um procedimento análogo ao feito em (1.49) e (1.51), obtemos a métrica

$$g_{ij} = \delta_{ij} e^{2\phi}, \quad i, j = 1, 2, \tag{3.23}$$

onde $\phi := \alpha_i x^i$ e α_i constante. Observemos que a métrica acima é Riemanniana no primeiro quadrante (isto é, para $x^i > 0$), pois em tal caso o tensor de Cartan $\mathcal{C}_{ijk}$ (2.78) é identicamente nulo. Assim, as equações de produção (3.22) são equações geodésicas - com o parâmetro *natural* s - para a métrica g_{ij} definida por (3.23). Além disso, os coeficientes Γ^i_{jk} associados com estas geodésicas são da mesma forma do que no Teorema II, ou seja, podem ser obtidos de (2.44). Portanto, por (3.23) e (2.44), para $i, j = 1, 2$, temos que

$$\Gamma^i_{ii} = \partial_i \phi, \quad \Gamma^i_{ji} = \Gamma^i_{ij} = \partial_j \phi, \quad \Gamma^i_{jj} = -\partial_j \phi, \quad \text{se} \quad i \neq j; \tag{3.24}$$

e $\Gamma^i_{jk} = 0$, caso contrário.

Usando a definição de tensor de curvatura de Riemann $\mathcal{R}^i_{jkl}$ [2] para métrica g_{ij} e os coeficientes (3.24), ficamos com

$$\mathcal{R}^i_{jij} = \partial_i\partial_i\phi + \partial_j\partial_j\phi, \quad \text{se} \quad i \neq j; \tag{3.25}$$

e $\mathcal{R}^i_{jkl} = 0$, caso contrário. Logo, a *curvatura Gaussiana* [15] de g_{ij} é o escalar

$$K := -\frac{\mathcal{R}_{1212}}{\det g_{ij}}, \tag{3.26}$$

onde $\mathcal{R}_{1212} = g_{1i}\,\mathcal{R}^i_{212} = e^{2\phi}(\partial_1\partial_1\phi + \partial_2\partial_2\phi)$. Daí, por (3.25),

$$K = -e^{2\phi}(\beta_1 + \beta_2). \tag{3.27}$$

Analisando (3.27), vemos que no caso de um sistema perfeitamente cooperativo (ou seja, $\beta_1 = \beta_2 < 0$), temos $K > 0$. Por outro lado, se o sistema é perfeitamente simbiótico (ou seja, $\beta_1 = \beta_2 > 0$), temos $K \leq 0$. Portanto, pelo Teorema de Estabilidade de Jacobi, o processo de produção do modelo (3.22) é *estável* no primeiro caso e *instável* no segundo.

[2] Para um espaço métrico bidimensional (M, F), onde F é uma função métrica fundamental de Finsler quadrática, a curvatura de Gauss-Berwald $\mathcal{K}$ coincide com o de a Gauss K, isto é, $\mathcal{K} = K$. Além disso, vimos no capítulo 2 que neste caso as informações sobre a estabilidade podem ser obtidas por meio de $\mathcal{K}$ no lugar do tensor de desvio Berwald $\mathcal{B}^i_j$.

Referências

[1] Antonelli, P. L.; Voorhees, B. H. *Non-Linear Growth Mechanics, I. Volterra-Hamilton Systems.* Bull. Math. Biol., v.45, 1982. p. 103–116.

[2] Antonelli, P. L. *Autotoxin Production in Some Symbiotical Plant Communities Is Unstable.* In: Mathematical Essays on Growth and the Emergence of Form, Winnipeg, 1982. p. 109–114.

[3] Antonelli, P. L. et. al. *On Hutchinson's Competition Equations and Their Homogenization: A Higher-Order Principle of Competitive Exclusion.* Ecol. mod., v. 60, 1992. p. 309–320.

[4] Antonelli, P. L. *Optimal Growth Of An Ideal Coral Reef.* Acta Cient. Venezolana, v.31, 1980. p. 521–525.

[5] Antonelli, P. L. et. al. *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology.* Edmonton: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[6] Antonelli, P. L.; Bradbury, R. H. *Volterra-Hamilton Models in Ecology and Evolution of Colonial Organisms.* Singapore: World Scientific, 1996.

[7] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* 8.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[8] Do Carmo, M. P. *Geometria Riemmaniana.* 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[9] Doering, C. I.; Lopes, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias.* 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[10] Harper, J. L. *Population Biology of Plants.* London: Academic Press, 1977.

[11] Hutchinson, G. E. *A note on the theory of competition between two social species.* Ecology, v. 28, 1947. p. 319–321.

[12] Hutchinson, G. E. *An Introduction to Population Biology.* New Haven: Yale University Press, 1978.

[13] Huxley, J. *Problems of Relative Growth.* New York: Dover Press, 1972.

[14] Laird, A. *Dynamics of Relative Growth.* Growth, v.29, 1965. p. 249–263.

[15] Lovelock, D.; Rund, H. *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles.* New York: Dover Publications, 1989.

[16] Medawar, P. B. *The Growth, Growth Energy and Aging of The Chicken's Heart.* Proceedings of the Royal Society of London, v.129, 1940. p. 332–355.

[17] Needham, J. A. *Heterogony, a chemical ground-plan for development.* Biol. Rev., v.9, 1934. p. 79–109.

[18] Ricklefs, R. E. *A Economia da Natureza.* 6.ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan LTDA, 2010.

[19] Rutz, S. F. *Symmetry and Gravity in Finsler Spaces.* PhD thesis, Queen Mary & Westfield College, University of London, 1993.

[20] Sánchez, D. A. *Ordinary Differential Equations an Stability Theory: An Introduction.* San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1968.

[21] Tu, L. W. *An Introduction to Manifolds.* 2.ed. New York: Springer, 2011.

[22] Udriste, C.; Nicola, I. R. *Jacobi Stability for Geometric Dynamics.* Journal of Dynamical Systems & Geometric Theories, v.5, 2007. p. 85–95.

[23] Volterra, V. *Principes de biologie mathématique*, 1936. In: Mathematical Essays on Growth and the Emergence of Form. Univ. Alberta Press, Winnipeg, 1982. p. 269–309.

[24] Wilbur, H. *Competition, predation, and structure of Ambystoma-Rana Sylvatica Comunity.* Ecology, v.53, 1972. p. 3–21.