Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ricardo Donato Castillo Maldonado

PROBLEMAS PARABÓLICOS COM RESULTADOS TIPO FUJITA EM DOMÍNIOS ARBITRÁRIOS

Recife

2016

Ricardo Donato Castillo Maldonado

PROBLEMAS PARABÓLICOS COM RESULTADOS TIPO FUJITA EM DOMÍNIOS ARBITRÁRIOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano

Recife

2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

M244p Maldonado, Ricardo Donato Castillo.
Problemas parabólicos com resultados tipo Fujita em domínios arbitrários / Ricardo Donato Castillo Maldonado. – 2016.
98 f.

Orientador: Miguel Fidencio Loayza Lozano.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, Recife, 2016.
Inclui referências.

1. Análise (Matemática). 2. Equações diferenciais parciais. I. Lozano, Miguel Fidencio Loayza (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2016-040

RICARDO DONATO CASTILLO MALDONADO

PROBLEMAS PARABÓLICOS COM RESULTADOS TIPO FUJITA EM DOMÍNIOS ARBITRÁRIOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 19/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano, (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Marko A. Rojas-Medar (Examinador Externo)
Universidad de Tarapacá - Chile

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, pelas benções, e essa certeça de saber que ainda nos momentos difíceis, sua misericordia está sempre presente para te dar paz e força para perseverar.

Agradeço aos meus Pais, são a minha inspiração.

Agradeço a Marilia, minha linda esposa, benção de Deus na minha vida.

Agradeço ao meu Orientador, Miguel Loayza, pela proposta de trabalho.

Agradeço a todos os amigos feitos ao longo do curso.

Agradeço a senhora Marluce pelas orações.

Agradeço ao senhor Lorenzo Chamorro Huamaní, professor na graduação, por me lembrar que existe um Deus Fiel que sempre cumpre com suas promesas de bem para com os homens.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

O SENHOR é o meu pastor, nada me faltará.
Deitar-me faz em verdes pastos,
guia-me mansamente a águas tranquilas.
Refrigera a minha alma;
guia-me pelas veredas da justiça,
por amor do seu nome.
Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte,
não temeria mal algum,
porque tu estás comigo.
Salmos 23

RESUMO

Estudamos condições de existência e não existência de soluções globais para um sistema acoplado de equações parabólicas não lineares e para um problema parabólico com expoente variável. Em ambos os casos, consideramos um domínio arbitrário de $\mathbb{R}^N$ com fronteira regular e com condições de Dirichlet na fronteira. Como consequência destes resultados é possível determinar o coeficiente de Fujita destes problemas.

Palavras chaves: Sistemas parabólicos. Soluções globais. Soluções não globais. Expoente de Fujita.

ABSTRACT

We study conditions for existence and non existence of global solutions for a nonlinear coupled parabolic systems and for parabolic problem with variable exponent. In both cases, we consider an arbitrary domain of $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary and Dirichlet condition on the boundary. As consequence of these results is possible to determinate the Fujita's exponent of ones.

Keywords: Parabolic sytems. Global solutions. Nonglobal solutions. Fujita's exponent.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

A equação do calor e os sistemas destas equações modelam vários fenômenos do tipo difusivo. Para mais detalhes sugerimos as referências [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Estudos referentes à existência local de soluções para tais problemas são bem conhecidos. É natural analisar condições sobre as quais as soluções são globais, e condições sobre as quais a solução não é global.

Em [7], Meier considerou a seguinte equação parabólica semilinear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= h(t)u^p \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $p > 1$, u_0 é limitada, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado ou ilimitado com fronteira regular e $h \in C[0,\infty)$. Ele estudou a existência do expoente crítico de Fujita p^* de (1.1), ou seja, um número tal que se $1 < p \leq p^*$, então toda solução branda $u : [0, T_{\max}) \to C_0(\Omega)$ do problema (1.1) explode em tempo finito, isto é, $T_{\max} < \infty$ e

$$\limsup_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_\infty = \infty,$$

e se $p > p^*$, então existe uma solução global não trivial do problema (1.1), isto é, $T_{\max} = \infty$. O valor $T_{\max}$ é o tempo máximo de existência da solução.

Determinar o valor do expoente de Fujita do problema (1.1) e suas extensões tem sido alvo de pesquisa de muitos matemáticos. Veja por exemplo [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14].

O valor de p^* depende do domínio Ω e da função h. Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $h = 1$, Fujita em [9], mostrou que:

- Se $1 < p < 1 + \dfrac{2}{N} = p^*$, então a única solução global de (1.1) é a solução nula.
- Se $p > p^*$, então existem soluções globais positivas.

Mais tarde, foi provado por outros autores, como por exemplo Weissler [13], Hayakawa [15] e Kobayashi, Sirao e Tanaka [16], que se $p = p^*$, então o problema não possui soluções globais não negativas.

A seguir damos mais alguns exemplos de valores de p^*:

(i) Para um cone $\Omega = \{(r,\theta); r > 0, \theta \in D \subset S^{N-1}\}$ e $h = 1$, $p^* = 1 + 2/(N + \gamma_+)$, onde $\gamma_+ = -(N-2)/2 + \sqrt{w_1 + (N-2)^2/4}$ e w_1 é o menor autovalor de Dirichlet do operador Laplace-Beltrami em D, veja [17].

(ii) Para $\Omega = \mathbb{R}^N_k = \{x; x_i > 0, i = 1, \cdots, k\}$ e $h(t) \sim t^q$ para t grande, isto é, existem constantes $c_0, c_1 > 0$ tais que $c_0 t^q \leq h(t) \leq c_1 t^q$ para t grande, $p^* = 1 + 2(q+1)/(N+k)$, veja [12].

(iii) Se $h(t) \sim e^{\beta t}$ para t grande, $\beta > 0$ e Ω é limitado, então $p^* = 1 + \beta/\lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador Laplaciano em Ω com condições de Dirichlet na fronteira, veja [7].

Meier mostrou que existe uma conexão entre o valor de p^* e o comportamento assintótico da solução do problema linear homogêneo correspondente a (1.1). Especificamente, ele mostrou que se $h(t) \sim t^q$ para t grande com $q > -1$, então

$$p^* = 1 + \frac{q+1}{\mu^*}, \tag{1.2}$$

onde $\mu^* = \sup\{\mu > 0;$ existe $u_0 \in C_0(\Omega), u_0 \geq 0$ tal que $\limsup_{t\to\infty} t^\mu \|S(t)u_0\|_\infty < \infty\}$, e $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor no domínio Ω.

Para obter a identidade (1.2), Meier utilizou o seguinte resultado, que é provado usando uma supersolução e uma subsolução específicas do problema (1.1).

Teorema 1 (Meier [7]). *Sejam $p > 1$ e $h \in C[0, \infty)$.*

(i) Se existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$ *tal que*

$$\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{p-1} d\sigma < \infty,$$

então existem soluções globais não triviais e positivas do problema (1.1).

(ii) Se

$$\lim_{t\to\infty} \sup \|S(t)u_0\|_\infty^{p-1} \int_0^\infty h(\sigma)d\sigma = \infty,$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$, *então cada solução não trivial e não negativa de (1.1) explode em tempo finito.*

Em 2012, R. Ferreira, A. de Pablo, M. Prez-LLanos, e J.D. Rossi [18], estudaram o expoente crítico de Fujita p^* do seguinte problema com expoente variável

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= u^{p(x)} \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $p(x)$ e $u_0(x)$ são funções contínuas e limitadas. A função p é também conhecida como expoente variável.

Considerando

$$p^- = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} p(x) \quad e \quad p^+ = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} p(x)$$

eles mostraram o seguinte resultado que estende os resultados obtidos por Fujita [9].

Teorema 2 ([18])**.** *Seja p uma função contínua e limitada definida em $\mathbb{R}^N$ tal que $p(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

(i) Se $p^- > 1 + \dfrac{2}{N}$, *então existem soluções globais não triviais do problema* (1.3).

(ii) Se $p^+ < 1 + \dfrac{2}{N}$, *então todas as soluções do problema* (1.3) *explodem em tempo finito.*

(iii) Se $p^- < 1 + \dfrac{2}{N} < p^+$, *então existem funções $p(x)$ tal que o problema* (1.3) *tem soluções globais não triviais, e funções $p(x)$ tal que todas as soluções com condição inicial* $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$ *explodem em tempo finito.*

O resultado do Teorema 2 foi pioneiro no contexto de coeficiente de Fujita para expoente variável. Este trabalho é uma continuação do trabalho preliminar de explosão em tempo finito obtido por J. P. Pinasco [19] em 2009, para domínios limitados. Os problemas com expoente variável tem sido motivo de intensa pesquisa nos últimos anos, por exemplo temos os seguintes trabalhos [20], [21], [22], [23], e o livro [24] e as referências contidas nele.

Seguindo a linha de expoente crítico, temos o trabalho realizado por T. Y. Lee e W. Ni no ano de 1992. Eles encontraram um novo expoente crítico, que depois na literatura matemática foi batizado como segundo expoente crítico de Fujita ou no contexto do artigo [18] chamado de terceiro expoente crítico. Neste caso, o valor crítico depende do comportamento assintótico das condições iniciais. Mais especificamente, eles estudaram o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= u^p \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0) &= \lambda\Psi \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $u(0) \in C_b(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, e Ψ pertence a um dos seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} I^a &= \left\{ \Psi \in C_b(\mathbb{R}^N) : \Psi \geq 0 \ e \ \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \Psi(x) < \infty \right\}, \\ I_a &= \left\{ \Psi \in C_b(\mathbb{R}^N) : \Psi \geq 0 \ e \ \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \Psi(x) > 0 \right\}, \end{aligned}$$

onde $a \geq 0$. Com esses conceitos temos o seguinte resultado

Teorema 3 ([25])**.** *Seja* $p > 1 + \dfrac{2}{N}$.

(i) Se $a > \dfrac{2}{p-1}$*, então para qualquer* $\Psi \in I^a$ *existe* $\Lambda_0 > 0$ *dependendo de* p*,* N*, e* Ψ*, tal que o problema* (1.4) *tem soluções globais não triviais, para todo* $\lambda < \Lambda_0$.

(ii) Se $a < \dfrac{2}{p-1}$*, então todas as soluções do problema* (1.4) *com condição inicial* $\lambda\Psi \in C_b(\mathbb{R}^N)$ *explodem em tempo finito.*

O valor $a^* = \dfrac{2}{p-1}$ obtido no Teorema 3 é conhecido como o segundo valor crítico de Fujita.

O objetivo principal deste trabalho é estender os resultados obtidos por Meier para sistemas acoplados não lineares em domínios arbitrários. Isto também será feito para o problema com expoente variável. Também obtemos o segundo expoente crítico de Fujita ou dito também de terceiro expoente crítico para o problema (1.4) com expoente variável $p = p(x)$. Apenas para destacar, este trabalho é o primeiro a ser feito para a equação do calor com expoente variável.

A seguir descreveremos de maneira mais específica os resultado contidos neste trabalho.

No primeiro momento, vamos estender os resultados do Teorema 1, para um sistema acoplado. Daremos condições que garantem a existência global ou explosão num tempo finito de soluções não negativas do seguinte problema:

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta u &=& f(t)v^p & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v &=& f(t)u^q & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &=& v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &=& u_0 \geq 0 & v(0) = v_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{1.5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio arbitrário, $f \in C[0,\infty)$ é uma função contínua $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, e $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$.

Nesta situação nosso principal resultado é:

Teorema 4. *Sejam $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$ e $f \in C[0,\infty)$.*

(i) Se

$$\lim_{t\to\infty} \sup \|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty,$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$, então cada solução não trivial e não negativa de (1.5) explode em tempo finito.

(ii) Se existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ tal que

$$\int_0^\infty f(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma < \infty,$$

então $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$, $u_0, v_0 \geq 0$ existem tal que a correspondente solução positiva de (1.5) com condição inicial (u_0, v_0) é global e não trivial.

No segundo momento, estamos interessados em estudar condições que garantem existência global ou explosão em tempo finito das soluções não negativas do seguinte sistema acoplado

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(t)(u^r + v^p) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v &= f(t)(u^q + v^s) \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &= v = 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \qquad\quad v(0) = v_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio arbitrário, $f \in C[0,\infty)$ é uma função contínua, $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, e $p,q,r,s \geq 1$.

Para esse sistema obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5. *Sejam $r,s > 1$, $p,q \geq 1$ com $pq > 1$ e $f \in C[0,\infty)$.*

1. *Se alguma das seguintes condições*

   (a) $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{r-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty,$

   (b) $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty,$

   (c) $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{s-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty,$

   (d) $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{q(s-1)} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} f(\sigma)d\sigma\right)^{s-1} \int_{\frac{t}{2}}^t f(\sigma)d\sigma = \infty,$

   é válida para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$, então qualquer solução não trivial do problema (1.6) explode em tempo finito.

2. *Se existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ que satisfaz alguma das seguintes condições*

   (a) $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{r-1} d\sigma < \infty,$

   (b) $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma < \infty,$

   (c) $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{s-1} d\sigma < \infty,$

   (d) $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{q\frac{s-1}{s}} d\sigma < \infty,$

   então, existe $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ com $u_0, v_0 \geq 0$ tal que a correspondente solução do problema (1.6) é uma solução global não negativa.

É bom mencionar que os resultados dos Teoremas 4 e 5 formam parte de um artigo que publicamos no periódico *Journal of Mathematical Analysis and Applications* em 2015,(veja [26]). Nesta Tese apresento um método distinto, neste novo método o Teorema de Sard não é utilizado.

Num terceiro momento, mencionamos o trabalho feito em parceria com Crislene Santos, para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(t)u^r v^p & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v &= g(t)u^q v^s & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = v &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0, & v(0) = v_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado ou ilimitado, com fronteira $\partial\Omega$ regular, $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, $r, s, p, q > 0$ e $f, g \in C[0,\infty)$.

Nosso primeiro resultado para o problema (1.7), é o seguinte

Teorema 6. *Sejam $f, g \in C[0,\infty)$, $r, s, p, q > 0$ tais que $r + p \leq q + s$ e $r > 1$.*

(i) Se todo $z_0 \in C_0(\Omega)$, $z_0 \geq 0$, $z_0 \neq 0$ satisfaz a seguinte condição,

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)z_0\|_\infty^{p+r-1} \int_0^t \min\{f(\sigma), g(\sigma)\}d\sigma = \infty, \tag{1.8}$$

então qualquer solução não trivial de (1.7), com condição inicial $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ satisfazendo $u_0, v_0 \geq w_0$ para algum $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$, é uma solução não global.

(ii) Se existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$, tal que

$$\int_0^\infty \max\{f(\sigma), g(\sigma)\}\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{p+r-1}d\sigma < \infty, \tag{1.9}$$

então existe uma condição inicial $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, tal que a correspondente solução de (1.7) é uma solução global.

Nosso segundo resultado para o problema (1.7), é o seguinte

Teorema 7. *Seja $f, g \in C[0,\infty)$, $r, s, p, q > 0$ tais que $1 < r + p \leq q + s$, $0 < r < 1$, e $\beta = -\dfrac{1+q-r}{D}$ com $D = (1-r)(1-s) - pq$.*

(i) *Se para todo* $z_0 \in C_0(\Omega)$, $z_0 \geq 0, z_0 \neq 0$ *cumpre-se*

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)z_0\|_\infty^{1/\beta} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty. \tag{1.10}$$

Então qualquer solução não trivial do problema (1.7), *que tenha condição inicial* $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ *que satisfaz* $u_0 \geq w_0$, $v_0 \geq w_0$ *para algum* $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$, *é uma solução não global.*

(ii) *Suponha que* $s < p+1$ *e que existe* $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ *satisfazendo*

$$\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{1/\beta} d\sigma < \infty. \tag{1.11}$$

Então, existe uma condição inicial $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$, $u_0, v_0 \geq 0$ *tal que a correspondente solução do problema* (1.7) *é uma solução global não trivial.*

Num quarto momento, estamos interessados em obter resultados semelhantes ao de Meier, Teorema 1, e ao trabalho de R. Ferreira, A. de Pablo, M. Prez-LLanos, e J.D. Rossi, Teorema 2, para o seguinte problema com expoente variável

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(t)u^{p(x)} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio arbitrário com fronteira regular, $p(x)$ é uma função contínua e limitada, $u_0(x) \in C_0(\Omega)$.

Considerando

$$p^- = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} p(x) \quad e \quad p^+ = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} p(x),$$

obtemos os seguintes resultados

Teorema 8. *Suponha que* $p \in C(\Omega)$ *limitada e* $f \in C[0,\infty)$.

1. *Se* $p^+ > 1$ *e*

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{p^+-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty \tag{1.13}$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$. *Então, qualquer solução não trivial do problema* (1.12) *explode em tempo finito ou é uma solução global que explode em tempo infinito, isto é,* $\limsup_{t\to\infty} \|v(t)\|_\infty = \infty$.

2. *Suponha que existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ satisfazendo*

$$\int_0^\infty f(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{p^- -1} d\sigma < \infty. \tag{1.14}$$

Então, existe uma constante $\Lambda > 0$, dependendo de p^+ e p^-, tal que para $0 < \lambda < \Lambda$ a solução u de (1.12) com condição inicial λw_0 é uma solução global não trivial. Mais ainda, existe uma constante $\gamma > 0$ tal que $u(t) \leq (1+\gamma)S(t)u_0$.

Quando $f(t) \sim t^q$ para t suficientemente grande obtemos o seguinte resultado:

Teorema 9. *Suponha $f(t) \sim t^q$ com $q > -1$, para t suficientemente grande.*

(i) Se $1 < p^+ < 1 + \dfrac{q+1}{\mu^*}$, então qualquer solução não trivial e não negativa do problema (1.12) explode em tempo finito ou é uma solução global que explode em tempo infinito.

(ii) Para $p^+ > 1 + \dfrac{q+1}{\mu^*}$, há duas situações:

(a) Se $p^- > 1 + \dfrac{q+1}{\mu^*}$, então existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ tal que a correspondente solução do problema (1.12) é uma solução global não trivial.

(b) Se $p^- < 1 + \dfrac{q+1}{\mu^*}$, então existem funções p tais que todas as soluções do problema (1.12) explodem em tempo finito , e existem funções p tal que o problema (1.12) tem uma solução global não trivial.

Quando $f(t) \sim e^{t\beta}(\beta > 0)$ para t suficientemente grande temos o seguinte resultado:

Teorema 10. *Suponha que Ω é limitado e $f(t) \sim e^{\beta t}$ para t suficientemente grande.*

(i) Se $1 < p^+ < 1 + \dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$, então qualquer solução não trivial e não negativa do problema (1.12) explode em tempo finito ou explode em tempo infinito.

(ii) Quando $p^+ > 1 + \dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$, nós temos duas situações:

(a) Se $p^- > 1 + \dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$, então existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ tal que a correspondente solução do problema (1.12) é uma solução global não trivial.

(b) Se $p^- < 1 + \dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$, então existem funções p tais que todas as soluções do problema (1.12) explodem em tempo finito, e existem funções p tal que o problema (1.12) tem uma solução global não trivial.

Num quinto momento, estamos interessados em obter resultados semelhantes ao de T. Y. Lee e W. Ni, Teorema 3, para o caso de expoente variável; mais especificamente temos o seguinte problema a estudar

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= u^{p(x)} \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) &= \lambda u_0 \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.15}$$

onde $u(x,0) \in C_b(\mathbb{R}^N)$, e $p > 1$. Considerando os seguintes conjuntos, para $a \geq 0$

$$\begin{aligned} I^a &= \left\{ \Psi \in C_b(\mathbb{R}^N) : \Psi \geq 0 \text{ e } \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \Psi(x) < \infty \right\}, \\ I_a &= \left\{ \Psi \in C_b(\mathbb{R}^N) : \Psi \geq 0 \text{ e } \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \Psi(x) > 0 \right\}, \end{aligned}$$

obtemos os seguintes resultados importantes

Teorema 11. *Sejam $p^- > 1$ e $f \in C[0,\infty)$.*

1. *Suponha que*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{2}\min\{a,N\}p^+ + \frac{1}{2}\min\{a,N\}} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty. \tag{1.16}$$

   Então, qualquer solução v do problema (1.15) com condição inicial $v_0 \in I_a$ explode em tempo finito, ou explode em tempo infinito, isto é, $\limsup_{t\to\infty} \|v(t)\|_\infty = \infty^+$.

2. *Suponha que*

$$\int_0^\infty f(\sigma)\sigma^{-\frac{1}{2}\min\{a,N\}p^- + \frac{1}{2}\min\{a,N\}} d\sigma < \infty. \tag{1.17}$$

   Então, para qualquer $w_0 \in I^a$, existe uma constante $\Lambda_0 > 0$ dependendo de p^+, p^-, e w_0 tais que, para todo $0 < \lambda < \Lambda$, a solução u de (1.15) como condição inicial λw_0 é uma solução global não trivial. Mais ainda, existe uma constante $\gamma > 0$ tal que $u(t) \leq (1+\gamma)S(t)u_0$.

Quando $f(t) \sim t^q$ para t suficientemente grande, obtemos o seguinte Teorema.

Teorema 12. *Suponha que $p^- > 1 + \dfrac{2}{N}$, e $f(t) \sim t^q$ com $q > -1$, para t suficientemente grande.*

1. *Se* $a < \dfrac{2q+2}{p^+-1}$, *então qualquer solução não trivial e não negativa* v *do problema* (1.15) *como condição inicial* $v_0 \in I_a$, *explode em tempo finito ou explode em tempo infinito, i.e.* $\limsup\limits_{t\longrightarrow\infty} \|v(t)\|_\infty = \infty$.

2. *Se* $\dfrac{2q+2}{p^--1} < a$, *então para qualquer* $w_0 \in I^a$, *existe uma constante* $\Lambda > 0$ *dependendo de* p^+, p^-, *e* w_0 *tal que a solução do problema* (1.15) *com condição inicial* λw_0 *é uma solução global não trivial, para todo* $0 < \lambda < \Lambda$.

3. *Se* $\dfrac{2q+2}{p^+-1} < a < \dfrac{2q+2}{p^+-1}$, *então existem funções* $p(x)$ *tais que todas as soluções do problema* (1.15) *com condição inicial* $u_0 \in I_a$ *explodem em tempo finito.*

Nosso trabalho está dividido da seguinte maneira. No Capítulo 1, introduzimos algumas notações e resultados preliminares. No Capítulo 2, analisamos a existência global e explosão de soluções não negativas dos problemas parabólicos (1.5), e (1.6). Esse resultado foi publicado no *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, em 2015 com o título *On the critical exponent for some semilinear reaction-diffusion systems on general domains.* No Capítulo 3, apresentamos resultados de existência de soluções globais e de soluções que explodem num tempo finito para o sistema (1.7), os resultados deste Capítulo formam parte de um trabalho que já foi submetido para publicação no *Journal of Differential Equations.* No Capítulo 4, analisamos a existência global e explosão de soluções não negativas do problema parabólico com expoente variável (1.12), e estudamos o segundo expoente crítico de Fujita para soluções não negativas do problema parabólico com expoente variável (1.15). Os resultados deste último Capítulo farão parte de um artigo que será submetido em breve.

Capítulo 2

Conceitos preliminares

Este Capítulo tem como principal objetivo inserir a linguagem e os conceitos básicos, bem como um pouco da notação que utilizaremos no restante do trabalho. Para mais detalhes, veja as referências [27, 28, 29, 30].

2.1 Definições básicas e notações

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio, $N \geq 1$.

Definição 2.1. *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é Lipschitz (ou Lipschitziana) se existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|, \ \forall \ x, y \in \Omega.$$

Definição 2.2. *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz se para cada $x \in \Omega$, existir uma vizinhança do ponto x, V_x, tal que $f|_{V_x}$ é Lipschitz.*

Denotaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções reais u definidas em Ω mensuráveis tais que $|u|^p$ é integrável (à Lebesgue) em Ω, ou seja,

$$L^p = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, u \text{ mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Além disso, $L^p(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = \infty$, precisamos do seguinte conceito

Definição 2.3. *Dizemos que uma função u mensurável em Ω é essencialmente limitada em Ω se existe uma constante $C \in \mathbb{R}^+$ tal que $|u(x)| \leq C$ quase sempre (q.s.) em Ω, ou seja, $|u(x)| \leq C$ exceto, possivelmente, para x pertencente a algum subconjunto de Ω com medida nula.*

Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções u mensuráveis em Ω que são essencialmente limitadas em Ω.

Chama-se de supremo essencial de u ao ínfimo do conjunto

$$\{C \in \mathbb{R}^+;\ |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

e denotamos por

$$\sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|.$$

Temos que $L^\infty(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|$$

é um espaço de Banach.

Denotamos por $C_b(\Omega)$ o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em Ω, com valores em $\mathbb{R}$.

Definição 2.4. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u|_K \in L^p(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções com valores reais, definidas em Ω, de classe C^∞ que tem suporte compacto (ou seja, fora de um domínio compacto as funções se anulam) equipado com a topologia da convergência uniforme de todas as derivadas sobre subconjuntos compactos de Ω.

Consideremos os espaços de Sobolev usuais

$$W^{m,p} = \{f \in L^p(\Omega) : \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty,\ \text{para todo } 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, m é um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$.

Aqui temos que D^α é o operador derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$.

Para $1 \leq p < \infty$, definimos a norma de $u \in W^{m,p}(\Omega)$ por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, temos

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ e por $W_0^{-m,p}(\Omega)$ o dual (topológico) de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$ escrevemos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$, e $H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$. No caso em que $m = 0$ temos que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Um espaço que será muito utilizado neste trabalho é o conjunto $C_0(\Omega)$ o qual representa o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^\infty(\Omega)$.

O próximo resultado caracteriza o espaço $C_0(\Omega)$

Teorema 2.5. *O espaço $C_0(\Omega)$ é o conjunto das funções $u \in C(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} / u$ é contínua$\}$ que verificam as seguintes propriedades:*

(i) $u(x) = 0$, para todo $x \in \partial\Omega$;

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe $M < \infty$ tal que $|u(x)| \leq \varepsilon$ para todos $x \in \Omega$ tais que $|x| \geq M$.

Prova: Para a demonstração veja o apêndice de [31], Lema $A.3.48$.

□

Observação 2.6. *(i) Quando Ω é um domínio limitado, temos que*

$$C_0(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

(ii) Se Ω é ilimitado, então $C_0(\Omega)$ é o conjunto das funções $u \in C(\overline{\Omega})$, que se anulam sobre a fronteira $\partial\Omega$ tais que $|u(x)| \to 0$ quando $|x| \to \infty$, $x \in \Omega$.

Sejam I um intervalo na reta e X um espaço de Banach com a norma $\| \,.\, \|_X$.

Definição 2.7. *Seja $p \in [1, \infty]$ e I um intervalo de reta. Definimos por $L^p(I, X)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que a função $t \to \|f(t)\|_X$ pertence a $L^p(I)$.*

Para $f \in L^p(I, X)$, definimos no caso $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left\{ \int_I \|f(t)\|_X^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

no caso $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \sup_{t \in I} ess \|f(t)\|_X.$$

Denotamos por:

(i) $C^k(I; X)$, o espaço formado pelas funções que são k vezes continuamente diferenciáveis sobre I com valores em X.

(ii) $\mathcal{D}(I; X)$, o conjunto de todas as funções $f : I \to X$ com suporte compacto em I, equipado com a topologia da convergência uniforme de todas as derivadas sobre subintervalos compactos de I.

(iii) $L^p_{loc}(I; X)$, o espaço das funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que $f|_J \in L^p(J; X)$ para qualquer subintervalo limitado J de I.

(iv) $C_0(I; X)$, o fecho do conjunto $\mathcal{D}(I; X)$ em $L^\infty(I; X)$.

2.2 Semigrupos

Definição 2.8. *Um semigrupo de operadores lineares em um espaço de Banach X é uma família $(S(t))_{t \geq 0}$ tal que*

- $S(0) = I_X$;

- *$S(s+t) = S(s)S(t)$, para todo $t, s \geq 0$.*

  Se, além disso,

- *$\lim\limits_{t \to 0} \|S(t) - I_X\| = 0$, diremos que o semigrupo é uniformemente contínuo;*

- *$\lim\limits_{t \to 0} \|S(t)x - x\| = 0$, para cada $x \in X$, diremos que o semigrupo é fortemente contínuo ou que é um C_0 semigrupo.*

Definição 2.9. *Seja $(S(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Seu gerador infinitesimal é o operador L definido por $L : D(L) \subset X \to X$, onde*

$$D(L) = \left\{ x \in X;\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\},$$

$$Lx = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \ \textit{para todo}\ x \in D(L).$$

Agora vamos citar alguns resultados sobre a teoria de semigrupos. Para maiores detalhes veja [30].

Seja $(S(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo e A o seu gerador infinitesimal. Temos que:

- Existem $M \geq 1$ e β tais que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\beta t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

- Para $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$, temos

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Considere o problema de Chauchy da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= Au(t), \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um gerador de $C_0 -$ semigrupo.

A teoria de semigrupos está associado ao estudo desse problema. Mais precisamente, temos que o semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ é o operador solução desse problema, ou seja, para cada $u_0 \in X$, $t \to S(t)u_0$ é uma solução.

Definição 2.10. *Seja* $(S(t))_{t\geq 0}$ *um semigrupo fortemente contínuo. Dizemos que* $(S(t))_{t\geq 0}$ *é uniformemente limitado se* $\|S(t)\| \leq M,\ M \geq 1$. *Quando* $\|S(t)\| \leq 1$ *dizemos que* $(S(t))_{t\geq 0}$ *é um semigrupo de contração.*

Teorema 2.11 (Hille-Yosida)**.** *Suponha que* $A : D(A) \subset X \to X$ *é um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração* $(S(t))_{t\geq 0}$.

(ii) A *é um operador linear fechado, densamente definido cujo conjunto resolvente contém* $(0,\infty)$ *e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Prova: Ver demonstração em [30, Teorema 3.1, p.8].

□

2.3 Equação do Calor

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$ regular.

A equação do calor homogênea é a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,\ \ (x,t) \in \Omega \times [0,\infty),$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ designa o operador Laplaciano.

Consideremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 \qquad \text{em } \Omega \times [0,\infty), \\ \qquad u(x,t) &= 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times [0,\infty), \\ \qquad u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Este problema é conhecido como equação do calor homogênea com condição de Dirichlet na fronteira.

É bem conhecido, para o problema (2.1), onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ regular, que:

- Para $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$, existe uma solução $u \in D(\Delta) = H_0^1(\Omega)$.

- Para $u_0 \in L^p(\Omega)$, temos o seguinte:
  - Se $p = 2$, então existe uma solução $u \in D(\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$.
  - Se $1 < p < \infty$, então existe uma solução $u \in D(\Delta) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.
  - Se $p = 1$, temos que existe uma solução $u \in \{u \in W_0^{1,1}(\Omega);\ \Delta u \in L^1(\Omega)\}$.
  - Se $p = \infty$, então existe uma solução $u \in \{u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega);\ \Delta u \in L^\infty(\Omega)\}$.
- Para $u_0 \in C_0(\Omega)$, o problema possui uma solução $u \in \{u \in C_0([0,\infty),\Omega);\ \Delta u \in C_0(\Omega)\}$ da forma $u = S(t)u_0$, onde $(S(t))_{t\geq 0}$ é conhecido como semigrupo do calor em $C_0(\Omega)$.

Ademais, temos um resultado técnico que será usado nos seguintes capítulos.

Teorema 2.12. *Assuma que $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$. Se $p \geq 1$, então $[S(t)u_0]^p \leq S(t)u_0^p$. Se $0 < p < 1$, então $[S(t)u_0]^p \geq S(t)u_0^p$.*

Prova: Por densidade, é possível assumir que $u_0 \in D(\Omega)$. Se $w(t) = [S(t)u_0]^p$ para todo $t \geq 0$, temos que $w_t - \Delta w = -p(p-1)[S(t)u_0]^{p-2}\|\nabla S(t)u_0\|^2 \leq 0$, portanto o resultado se segue pelo princípio do máximo quando $p > 1$.

Agora, assuma que $0 < p < 1$. Desde que $u_0^p \in C_0(\Omega)$, a conclusão se segue como no caso anterior trocando p por $\dfrac{1}{p}$.

□

2.4 A equação do calor não linear

Consideramos agora o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) & = & \Delta u + f(u), \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u & = & 0, \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) & = & u_0, \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto com fronteira $\partial\Omega$ regular e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz. Temos os seguintes resultados.

Teorema 2.13 ([31], [32])**.** *Dado $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, existe uma única solução integral u do problema (2.2)*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds \tag{2.3}$$

definida num intervalo maximal $[0, T_{\max})$, *e* $u \in L^\infty(\Omega \times (0, T_{\max}))$. *Além disso, vale uma das seguintes alternativas:*

(i) $T_{\max} = \infty$, *e neste caso dizemos que a solução é global;*

(ii) $T_{\max} < \infty$ *e* $\limsup\limits_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$, *e neste caso dizemos que a solução explode num tempo finito.*

Teorema 2.14 (Princípio de Comparação [32])**.** *Suponhamos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é localmente Lipschitz e que* $\overline{u}(x,t), \underline{u}(x,t)$ *são funções suaves em* $\overline{\Omega} \times (0,T)$ *tais que* $\overline{u}, \underline{u} \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \cap C([0,T), L^2(\Omega))$ *e*

$$\begin{cases} \overline{u}_t - \Delta \overline{u} & \geq & f(\overline{u}) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \underline{u}_t - \Delta \underline{u} & \leq & f(\underline{u}) & \text{em } \Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{2.4}$$

Então $\overline{u}(x,t) \geq \underline{u}(x,t)$ *para todo* $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$.

2.5 Sistema parabólico não linear

Vamos considerar o seguinte sistema de equações parabólicas não lineares

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & = & f(u,v) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v & = & g(u,v) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = v & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0, & & v(0) = v_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$ regular, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e $(u_0, v_0) \in (L^\infty(\Omega))^2$.

Definição 2.15. *Um par de funções* (u,v) *é dito solução de (2.5) em* $[0,T)$, $T \leq \infty$ *se* $(u,v) \in (L^\infty(\Omega \times (0,T)))^2$ *e satisfaz*

$$\begin{cases} u(t) & = & S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma) f(u(\sigma), v(\sigma)) d\sigma, \\ v(t) & = & S(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma) g(u(\sigma), v(\sigma)) d\sigma, \end{cases} \tag{2.6}$$

para todo $t \in [0,T)$, *onde* $S(t)$ *é o semigrupo do calor.*

Quando $f(u,v) = u^r v^p$ e $g(u,v) = u^q v^s$, onde p,q,r,s são números não negativos, e $(u_0,v_0) \in (L^\infty(\Omega))^2$ tal que $u_0 \geq 0$ e $v_0 \geq 0$, temos então que existe uma solução de (2.5) definida em um intervalo $[0,T)$, e se $(u_0,v_0) \neq (0,0)$, então a solução é única (veja [29]).

Dizemos que o sistema (2.5) é completamente acoplado quando $f_v(u,v) \neq 0$ e $g_u(u,v) \neq 0$ para $u,v > 0$. Caso contrário, dizemos que o sistema é incompletamente acoplado.

No caso em que $f(u,v) = u^r v^p$ e $g(u,v) = u^q v^s$, temos que o sistema é completamente acoplado se, e somente se $p.q > 0$

Teorema 2.16 ([29], Lema 2.1)**.** *Sejam f e g contínuas. Então (2.5) tem solução não negativa definida no intervalo $[0,T)$. Se f e g são localmente Lipschitz, então a solução é única em $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ e a aplicação $(u_0,v_0) \to (u(t),v(t))$ de $(L^\infty(\Omega))^2$ em $(L^\infty(\Omega \times (0,T)))^2$ é contínua. Além disso, (u,v) pode ser extendida ao intervalo maximal $[0,T_{max})$ e ocorre uma das seguintes condições : $T_{max} = \infty$ ou $T_{max} < \infty$ e $\limsup_{t\to T_{max}}(\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = \infty$.*

Definição 2.17. *Dizemos que um par de funções não negativas $(\overline{u},\overline{v}) \in (L^\infty(\Omega \times (0,T)))^2$ é uma supersolução de (2.5) se*

$$\begin{cases} \overline{u}_t - \Delta\overline{u} \geq f(\overline{u},\overline{v}) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \overline{v}_t - \Delta\overline{v} \geq g(\overline{u},\overline{v}) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \overline{u} \geq 0, \quad \overline{v} \geq 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ \overline{u}(0) \geq u_0, \quad \overline{v}(0) \geq v_0. & \end{cases} \tag{2.7}$$

Subsoluções são definidas analogamente, invertendo as desigualdades.

Assumindo que f e g são funções contínuas que satisfazem

$$f(x,y) \geq f(x',y'),\ g(x,y) \geq g(x',y') \text{ para todo } 0 \leq x' \leq x \text{ e } 0 \leq y' \leq y. \tag{2.8}$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.18 ([29], Lema 2.2)**.** *Seja $(\overline{u},\overline{v})$ uma supersolução de (2.5) em $(0,T)$. Então existe uma solução (u,v) de (2.5) em $[0,T)$ tal que $u \leq \overline{u}$, $v \leq \overline{v}$. Além disso, se $(\underline{u},\underline{v})$ é uma subsolução de (2.5) em $[0,T)$ verificando $\underline{u} \leq \overline{u}$, $\underline{v} \leq \overline{v}$, então existe uma solução (u,v) definida em $[0,T)$ tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$.*

Corolário 2.19 ([29], Corolário 2.3). *Assuma que f e g são funções localmente Lipschitz satisfazendo (2.8) e seja (u,v) solução de (2.5) em $(0,T)$.*

(i) Se $(\overline{u},\overline{v})$ é a supersolução de (2.5) em $(0,T)$, então $u \leq \overline{u}$ e $v \leq \overline{v}$ em $\Omega \times (0,T)$.

(ii) Se $(\underline{u},\underline{v})$ é a subsolução de (2.5) em $(0,T)$, então $u \geq \underline{u}$ e $v \geq \underline{v}$ em $\Omega \times (0,T)$.

Para o caso não Lipschitz temos o seguinte resultado

Teorema 2.20 ([29], Lema 2.5). *Assuma que f e g são funções contínuas satisfazendo (2.8), com $f(0,0) = g(0,0) = 0,\ f \not\equiv 0,\ g \not\equiv 0$. Sejam $u_0 = v_0$ e $(\overline{u},\overline{v})$ uma supersolução de (2.5) tal que $\overline{u} > 0,\ \overline{v} > 0$ em $\Omega \times (0,T)$. Então $\overline{u} \geq u$ e $\overline{v} \geq v$ em $\Omega \times (0,T)$ para toda solução (u,v) de (2.5) tal que $u(0) = v(0) = 0$.*

2.6 Algumas desigualdades

Esta seção tem como objetivo enunciar algumas desigualdades que serão utilizadas ao decorrer deste trabalho. A prova destas podem ser encontradas em [27].

Teorema 2.21 (Desigualdade de Jensen's). *Seja X um conjunto dotado de uma medida positiva μ tal que $\displaystyle\int_X d\mu = 1$ e seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então para cada $f \in L^1(X, d\mu)$ tal que $F(f) \in L^1(X.d\mu)$, temos*

$$F\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) \leq \int_X F(f(x))d\mu(x).$$

Corolário 2.22. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, $\varphi \in L^1(\Omega)$ uma função não negativa tal que $\displaystyle\int_\Omega \varphi(x)dx = 1$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então*

$$F\left(\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right) \leq \int_\Omega F(f(x))\varphi(x)dx,$$

para todo $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $f\varphi \in L^1(\Omega)$ e $F(f)\varphi \in L^1(\Omega)$.

Teorema 2.23 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $T > 0,\ A \geq 0$ e $f \in L^1(0,T)$ uma função não negativa. Então para cada função $\varphi \in C([0,T])$ não negativa tal que*

$$\varphi(t) \leq A + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds,$$

para todo $t \in [0, T]$, *vale que*

$$\varphi(t) \leq A \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right).$$

para todo $t \in [0, T]$.

Capítulo 3

Expoente crítico para alguns sistemas parabólicos em domínios arbitrários

3.1 Introdução

Em [7], Meier considerou o seguinte problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(t)u^p \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $p > 1$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in C[0,\infty)$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio arbitrário (limitado ou não limitado) com fronteira regular. Meier se interesou em estudar o coeficente crítico de Fujita p^* de (3.1), ou seja , um número tal que se $1 < p < p^*$, então toda solução do problema (3.1) explode em tempo finito, e se $p > p^*$, então existe uma solução global não trivial do problema (3.1). O valor de p^* depende da geometria do domínio Ω e da função f. No que segue apresentamos uma lista de valores de p^*.

(i) Para $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $f = 1$, temos $p^* = 1 + \dfrac{2}{N}$, como se pode apreciar em [9].

(ii) Para o cone $\Omega = \{(r,\theta); r > 0, \theta \in D \subset S^{N-1}\}$, e $f(t) \sim t^q$ para t suficientemente grande, temos $p^* = 1 + 2(q+1)/N + \gamma^+$, onde $\gamma^+ = -(N-2)/2 + \sqrt{w_1 + (N-2)^2/4}$, e w_1 é o primeiro autovalor do operador de Laplace-Beltrami em D, como se pode apreciar em [11].

(iii) Para $\Omega = \mathbb{R}^N_K = \{x = (x_1, ..., x_N); x_i > 0, i = 1, ..., K\}$ e $f(t) = t^q$ para t suficientemente grande, temos $p^* = 1 + 2(q+1)/(N+k)$, como se pode apreciar em [12].

(iv) Para Ω limitado e $f \sim e^{\beta t}$ para t suficientemente grande, temos $p^* = 1 + \beta/\lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de Dirichlet do operador Laplaciano em Ω, como se pode apreciar em [7].

Meier mostrou uma relação entre p^* e o comportamento assintótico da solução do problema linear homogêneo correspondente ao problema (3.1), (veja [7], [12]). Especificamente, ele mostrou que se $f(t) \sim t^q$ para t suficientemente grande e $q > -1$, então

$$p^* = 1 + \frac{q+1}{\mu^*} \tag{3.2}$$

onde

$$\mu^* \cong \mu^*(\Omega) = \sup\left\{\mu \geq 0; \text{existe } u_0 \in C_0(\Omega), u_0 \geq 0, \text{ tal que} \limsup_{t\to\infty} t^\mu \|S(t)u_0\|_\infty < \infty\right\} \tag{3.3}$$

e $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor com condições de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega$.

A identidade (3.2) é obtida como consequência do seguinte

Teorema 3.1 (veja Meier [7])**.** *Assuma que $p > 1$ e $f \in C[0, \infty)$*

(i) Se

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{p-1} \int_0^\infty f(\sigma)d\sigma = \infty,$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$, então cada solução não trivial não negativa de (3.1) explode em tempo finito.

(ii) Se existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \neq 0$, $u_0 \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{p-1} d\sigma < \infty,$$

então existem soluções globais positivas do problema (3.1).

Observação 3.2. *Alguns comentários sobre o Teorema 3.1.*

i) O Teorema foi demonstrado usando super e subsoluções específicas para o problema (3.1). A técnica tem suas limitações, em especial quando consideramos sistemas destas equações (3.1).

ii) As condições (i) e (ii) do Teorema (3.1), são dadas para qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Mais ainda, elas são expressadas em termos do comportamento de $\|S(t)u_0\|_\infty$, o qual depende só da geometria de Ω. Por exemplo, para uma determinada escolha de u_0, nós temos que se Ω é limitado, então $\|S(t)u_0\|_\infty \sim e^{-\lambda_1 t}$ para t suficientemente grande; e se $\Omega = \mathbb{R}^N$, então $\|S(t)u_0\|_\infty \sim t^{-\frac{N}{2}}$ para t suficientemente grande; e quando $\Omega = \mathbb{R}^N_k$ temos que $\|S(t)u_0\|_\infty \sim t^{-\frac{N+k}{2}}$ para t suficientemente grande.

Nossa meta é estender os resultados de Meier para o seguinte sistema parabólico semilinear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(t)v^p \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v &= f(t)u^q \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u &=v \quad 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \quad v(0) = v_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio arbitrário, $f \in C[0,\infty)$ é uma função contínua $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, e $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$. Este problema foi considerado por muitos pesquisadores para diversos domínios (veja, [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41]).

É bem conhecido que o problema (3.4) tem uma única solução

$$(u,v) \in [C((0,T), C_0(\Omega))]^2$$

$u, v \geq 0$ definidas em um intervalo maximal $[0, T_{\max})$, isto é,

$$\begin{cases} u(t) &= S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma, \\ v(t) &= S(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)u^q(\sigma)d\sigma, \end{cases} \tag{3.5}$$

para todo $t \in [0, T_{\max})$. Mais ainda, nós temos explosão alternativa: Ou $T_{\max} = \infty^+$ (Solução global) ou $T_{\max} < \infty$ e $\limsup\limits_{t \to t_{\max}} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = \infty$ (Solução que explode em um tempo finito).

A explosão em tempo finito ou a existência global das soluções do problema (3.4) foram estudadas por Escobedo e Herrero quando $f = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$ (veja [33]) ou Ω é um domínio limitado (veja [34]). Em particular, quando $f = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$, nós temos o seguinte.

- Suponha $1 < pq < 1 + (2/N)\max\{p+1, q+1\}$. Então qualquer solução não trivial do problema (3.4) explode num tempo finito.

- Suponha $pq > 1 + (2/N)\max\{p+1, q+1\}$. Então, existe $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$, com $u_0 \geq 0$, e $v_0 \geq 0$, tal que o problema (3.4) admite uma solução global não trivial.

Nosso primeiro resultado é o seguinte

Teorema 3.3. *Sejam $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$ e $f \in C[0, \infty)$.*

(i) Assumindo que

$$\lim_{t\to\infty} \sup \|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^\infty f(\sigma)d\sigma = \infty,$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$, então qualquer solução não trivial e não negativa de (3.4) explode em tempo finito.

(ii) Assuma que $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ existe tal que

$$\int_0^\infty f(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma < \infty.$$

Então $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$, $u_0, v_0 \geq 0$ existem tal que a correspondente solução de (3.4) é uma solução global não trivial não negativa. Mais ainda, existe uma constante $\gamma > 0$ tal que $u(t) \leq (1+\gamma)S(t)u_0$ e $v(t) \leq (1+\gamma)[S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}}$.

Quando $f(t) \sim t^a$ para t suficientemente grande e μ^* é dado por (3.3), obtemos o seguinte resultado

Corolário 3.4. *Suponha que $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$; e $f(t) \sim t^a$ com $a > -1$, para t suficientemente grande.*

(i) Se $1 < pq < 1 + (p+1)\dfrac{a+1}{\mu^*}$, então qualquer solução não trivial e não negativa do problema (3.4) explode em tempo finito.

(ii) Se $pq > 1 + (p+1)\dfrac{a+1}{\mu^*}$, então existem $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0, v_0 \geq 0$ tal que a correspondente solução do problema (3.4) é uma solução global não trivial.

Observação 3.5. *Algumas observações sobre o Teorema 3.3 e o Corolário 3.4.*

i) Se $p = q$, então as condições (i) e (ii) do Teorema 3.3, são as mesmas que foram dadas por Meier em [7] para o problema (3.1).

ii) *Se Ω é um domínio limitado e $f(t) = e^{\beta t}$ para todo $t \geq 0$, então é possível concluir do Teorema 3.3 que o expoente crítico de Fujita do problema (3.4) satisfaz a igualdade $pq = 1 + (p+1)\dfrac{\beta}{\lambda_1}$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano com condições de Dirichlet na fronteira em Ω.*

iii) *Do Corolário 3.4, nós encontramos que o expoente crítico do problema (3.4) verifica a igualdade $pq = 1 + (p+1)\dfrac{a+1}{\mu^*}$. Portanto, quando $f = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$ dos resultados de Escobedo e Herrero [33], podemos concluir que $\mu^* = \dfrac{N}{2}$.*

Agora consideremos o seguinte sistema parabólico:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t)(u^r + v^p) & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ v_t - \Delta v = f(t)(u^q + v^s) & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 \geq 0 & v(0) = v_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, $p, q, r, s \geq 1$, e $f \in C[0,\infty)$.

O Problema (3.6) foi muito bem estudado quando $f = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$. De fato, Cui [42] deu condições que garantem existência global e explosão em tempo finito para as soluções do problema (3.6), por outro lado o comportamento assintótico das soluções globais de (3.6) foi estudado por Snoussi e Tayachi [43].

Nosso segundo resultado é o seguinte

Teorema 3.6. *Sejam $r, s > 1$, $p, q \geq 1$ com $pq > 1$ e $f \in C[0,\infty)$.*

1. *Suponha que alguma das seguintes condições*

   (a) $\displaystyle\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{r-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty,$

   (b) $\displaystyle\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty.$

   (c) $\displaystyle\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{s-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty.$

   (d) $\displaystyle\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{q(s-1)} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} f(\sigma)d\sigma\right)^{s-1} \int_{\frac{t}{2}}^t f(\sigma)d\sigma = \infty.$

é válida para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$. Então, qualquer solução não trivial do problema (3.6) explode em tempo finito.

2. *Se existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ satisfazendo alguma das seguintes condições*

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{r-1} d\sigma < \infty$,

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma < \infty$,

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{s-1} d\sigma < \infty$, *e*

   (d) $\displaystyle\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{q\frac{s-1}{s}} d\sigma < \infty$,

   então, existe $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ com $u_0, v_0 \geq 0$ tal que a correspondente solução do problema (3.6) é uma solução global não trivial e não negativa.

Observação 3.7. *Fica claro, que se (u, v) é uma solução do problema (3.6), então as funções u, v, são supersoluções de (3.1), com s em vez de p, e (u, v) é super solução de (3.4). Portanto, as condições $(a) - (c)$ dadas no item 1 do Teorema 3.6 garatem que (u, v) explode em tempo finito. A condição (d) dada no item 1 do Teorema 3.6 representa outra situação de explosão em tempo finito.*

Quando $f(t) \sim t^a$ para t suficientemente grande e μ^* é dado por (3.3), obtemos o seguinte resultado

Corolário 3.8. *Suponha que $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$, $r, s \geq 1$ e $f(t) \sim t^a$ com $a > -1$, para t suficientemente grande.*

(i) *Se* $\dfrac{1+a}{\mu^*} < \max\left\{r-1, s-1, \dfrac{pq-1}{p+1}, \dfrac{q(s-1)}{s}\right\}$, *então qualquer solução não trivial e não negativa do problema (3.6) explode em tempo finito.*

(ii) *Se* $\dfrac{1+a}{\mu^*} > \max\left\{r-1, s-1, \dfrac{pq-1}{p+1}, \dfrac{q(s-1)}{s}\right\}$, *então existem $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0, v_0 \geq 0$ tal que a correspondente solução do problema (3.6) é uma solução global não trivial.*

O presente Capítulo está organizado da seguinte maneira: Na Seção 3.2 apresentamos alguns resultados preliminares para o problema (3.4) e demonstramos o Teorema 3.3. Na Seção 3.3, estudamos o problema (3.6) e demonstramos o Teorema 3.6.

3.2 O sistema parabólico (3.4)

Para a explosão em tempo finito usamos o seguinte resultado

Proposição 3.9. *Assuma $p, q \geq 1$ com $pq > 1$, $f \in C[0,\infty)$, e $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$. Ademais, suponha que $u, v \in C([0,T), C_0(\Omega))$ são funções não negativas que satisfazem*

$$\begin{cases} u(t) & \geq & S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)v^p d\sigma, \\ v(t) & \geq & S(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)u^q d\sigma. \end{cases} \tag{3.7}$$

Então, existe uma constante $C = C(p,q) > 0$ tal que

$$\|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^t f(\sigma)d\sigma \leq C, \tag{3.8}$$

para todo $t \in [0,T)$.

Prova: Considere $h(t) = \displaystyle\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma$. De (3.7) nós temos que $u(t) \geq S(t)u_0$, daí e do Teorema 2.12 temos

$$\begin{aligned} v(t) & \geq \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)(S(\sigma)u_0)^q d\sigma \\ & \geq (S(t)u_0)^q h(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T)$.

Usando a desigualdade $v(t) \geq (S(t)u_0)^q h(t)$, o Teorema 2.12, e considerando $\beta = pq$, obtemos

$$\begin{aligned} u(t) & \geq \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)((S(\sigma)u_0)^q h(\sigma))^p d\sigma \\ & \geq C_1(S(t)u_0)^\beta h(t)^{p+1}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,t)$, onde $C_1 = \dfrac{1}{p+1}$.

Usando a desigualdade $u(t) \geq C_1(S(t)u_0)^\beta h(t)^{p+1}$ e o Teorema 2.12, nós temos

$$\begin{aligned} v(t) & \geq \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)(C_1(S(\sigma)u_0)^\beta h(\sigma)^{p+1})^q d\sigma \\ & \geq C_1^q(S(t)u_0)^{q\beta} \int_0^t f(\sigma)h(\sigma)^{q(p+1)}d\sigma \\ & \geq C_1^q \frac{1}{q(p+1)+1}(S(t)u_0)^{q\beta}h(\sigma)^{q(p+1)+1}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,t)$.

Usando a desigualdade $v(t) \geq C_1^q \dfrac{1}{q(p+1)+1}(S(t)u_0)^{q\beta}h(t)^{q(p+1)+1}$ e o Teorema 2.12, obtemos

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)(C_1^q\frac{1}{q(p+1)+1}(S(t)u_0)^{q\beta}h(t)^{q(p+1)+1})^p d\sigma \\
&\geq C_1^\beta[1+(p+1)q]^{-p}(S(t)u_0)^{\beta^2}\int_0^t f(\sigma)h(\sigma)^{p(q(p+1)+1)}d\sigma \\
&\geq C_1^\beta[1+(p+1)q]^{-p}[p(q(p+1)+1)+1]^{-1}(S(t)u_0)^{\beta^2}h(t)^{p(q(p+1)+1)+1} \\
&\geq C_2(S(t)u_0)^{\beta^2}h(t)^{p(q(p+1)+1)+1},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T)$, onde $C_2 = C_1^\beta[1+(p+1)q]^{-p}[(p+1)(\beta+1)]^{-1}$.

Continuando este processo iterativo é possível demonstrar por indução sobre n que

$$u(t) \geq C_k(S(t)u_0)^{\beta^k}h(t)^{(p+1)\frac{\beta^k-1}{\beta-1}}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

onde $C_1 = \dfrac{1}{p+1}$ e para, $k \geq 2$,

$$C_k = C_{k-1}^\beta\left[1+q(p+1)(\frac{\beta^{k-1}-1}{\beta-1})\right]^{-p}\left[(p+1)\frac{\beta^k-1}{\beta-1}\right]^{-1}. \tag{3.10}$$

Agora, mostraremos que existe $\eta > 0$ tal que $C_k \geq \eta^{\beta^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\xi_k = -\beta^{-k}\ln C_k$, é suficiente provar que a sequência $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente. Observe que $\xi_i - \xi_{i-1} = \beta^{-i}\ln(\dfrac{C_{i-1}^\beta}{C_i})$. De (3.10) temos $\ln\dfrac{C_{i-1}^\beta}{C_i} \leq \gamma(1+i)$ para alguma constante $\gamma > 0$. Portanto,

$$\xi_k - \xi_1 = \sum_{i=2}^k(\xi_i - \xi_{i-1}) \leq \gamma\sum_{i=2}^k(1+i).\beta^{-i} < \infty. \tag{3.11}$$

Logo, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente.

Finalmente, de (3.9) temos que $\|u(t)\|_\infty^{\beta^{-k}} \geq \eta\|S(t)u_0\|_\infty h(t)^{(p+1)\frac{1-\beta^{-k}}{\beta-1}}$. O resultado (3.8) é obtido fazendo $k \to \infty$.

□

Para existência global, usamos o seguinte resultado.

Proposição 3.10. *Sejam $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$ e $f \in C[0,\infty)$. Se existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ tal que*

$$\alpha = \int_0^\infty f(\sigma)\|S(t)w_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}}d\sigma < \infty, \tag{3.12}$$

então, existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, $0 \le u_0 \le w_0$, *tal que se* $(u_n, v_n)_{n\ge 0}$ *é a sequência dada por:*

$$\begin{cases} u_0(t) = & S(t)u_0 \quad = v_0(t), \\ u_n(t) & = \quad S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)v_{n-1}^p d\sigma, \quad para \quad todo\ n \ge 1, \\ v_n(t) & = \quad S(t)v_0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)u_{n-1}^q d\sigma, \quad para \quad todo\ n \ge 1, \end{cases} \tag{3.13}$$

para todo $t \in [0, \infty)$, *segue que*

$$u_n(t) \le (1+\alpha)S(t)u_0 \qquad v_n(t) \le [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}}, \ . \tag{3.14}$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Prova: Seja $0 < \lambda \le \min\{(1+\alpha)^{-p\frac{p+1}{pq-1}}, \|w_0\|_\infty^{-1}\}$, $u_0 = \lambda w_0$, e $v_0 = w_0$. Por indução sobre n, temos que para $n = 0$, (3.14) é verdade. Supondo que (3.14) é verdade para n, mostraremos que o resultado é verdade para $n+1$. De (2.12), como $p\dfrac{q+1}{p+1} = \dfrac{pq-1}{p+1} + 1$, temos

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &\le S(t)u_0 + (1+\alpha)^p \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{p\frac{q+1}{p+1}} d\sigma \\ &\le S(t)u_0 + (1+\alpha)^p \int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} S(t-\sigma)S(\sigma)u_0 d\sigma \\ &\le S(t)u_0 + (1+\alpha)^p S(t)u_0 \int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma \\ &\le S(t)u_0 + (1+\alpha)^p \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}} \alpha S(t)u_0 \\ &\le (1+\alpha)S(t)u_0. \end{aligned}$$

Analogamente, como $q = \dfrac{pq-1}{p+1} + \dfrac{q+1}{p+1}, \dfrac{q+1}{p+1} \le 1$ e $\|S(t)u_0\|_\infty \le \|u_0\|_\infty \le 1$, temos $S(t)u_0 \le [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}}$. Logo, pelo Teorema 2.12, temos

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) &\le S(t)u_0 + (1+\alpha)^q \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^q d\sigma \\ &= S(t)u_0 + (1+\alpha)^q \int_0^t f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{\frac{pq-1}{p+1} + \frac{q+1}{p+1}} d\sigma \\ &\le [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} + (1+\alpha)^q \int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} S(t-\sigma)[S(\sigma)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} d\sigma \\ &\le [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} + (1+\alpha)^q [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} \int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma \\ &\le [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} + (1+\alpha)^q [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}} \alpha \\ &\le [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} + (1+\alpha)^p \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}} \alpha [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} \\ &\le (1+\alpha)[S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, (3.14) é verdade para $n+1$.

$\square$

[Prova do Teorema 3.3] (i) Procederemos por contradição, suponha que existe $(u_0, v_0) \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, $(u_0, v_0) \neq 0$ tal que a correspondente solução do problema (3.4) com condição inicial (u_0, v_0) é uma solução global. Sem perda de generalidade podemos supor que $u_0 \neq 0$.

Afirmamos que, existe $\tau > 0$ tal que $u(\tau) > 0$, e $v(\tau) > 0$. Com efeito, observe que do item (i) do Teorema 3.3 temos que existe $\tau > 0$ tal que $\|S(\tau)u_0\|_\infty \int_0^\tau f(\sigma)d\sigma > 1$. Em particular, $C(\tau) = \int_0^\tau f(\sigma)d\sigma > 0$. Portanto, de (3.5), $u(\tau) \geq S(\tau)u_0 > 0$, e do Teorema 2.12 temos

$$\begin{aligned} v(\tau) &\geq \int_0^\tau S(\tau-\sigma)f(\sigma)(S(\sigma)u_0)^q d\sigma \\ &\geq (S(\tau)u_0)^q \int_0^\tau f(\sigma)d\sigma \\ &\geq C(\tau)(S(\tau)u_0)^q > 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Desde que $(u(\cdot+\tau), v(\cdot+\tau))$ é solução do problema (3.4) com condição inicial $(u(0+\tau), v(0+\tau)) = (u(\tau), v(\tau))$ e $f := f(\cdot+\tau)$, então pela Proposição 3.9, temos que existe uma constante $C(p,q) = C > 0$ tal que

$$\|S(t)u(\tau)\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^t f(\sigma+\tau)d\sigma \leq C,$$

para todo $t \geq \tau$. O qual contradiz o item (i) do Teorema 3.3.

(ii) Como a parte (ii) do Teorema 3.3 é verdade, então, da Proposição 3.10, temos que existe $(u_0, v_0) \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$ tal que a sequência dada por (3.13) verifica a estimativa (3.14). Usando indução é possível mostrar que $u_n \leq u_{n+1}$ e $v_n \leq v_{n+1}$, e observe também que $S(t)u_0 \leq u_n(t)$, $S(t)u_0 \leq v_n(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo pelo Teorema da convergência monótona existem $(u(t), v(t))$ tais que

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) \geq S(t)u_0 \quad v(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t) \geq S(t)v_0.$$

Assim, $(u(t), v(t))$ é uma solução global não trivial do problema (3.4) com condição inicial (u_0, v_0).

$\square$

[Prova do Corolário 3.4]: **(i)** Se $1 < pq < 1 + (p+1)\dfrac{a+1}{\mu^*}$, então $\mu^* < (p+1)\dfrac{a+1}{pq-1}$. Pela definição de μ^* em (3.3), temos que $\limsup\limits_{t\to\infty} t^{\frac{(a+1)(p+1)}{pq-1}}\|S(t)u_0\|_\infty = \infty$ para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$. Logo, $\limsup t \to \infty \|S(t)u_0\|^{\frac{pq-1}{p+1}} \displaystyle\int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty$. Assim o resultado se segue do item (i) do Teorema 3.3.

(ii) Supondo que $pq > 1 + (p+1)\dfrac{a+1}{\mu^*}$ temos que $\mu^* > (p+1)\dfrac{a+1}{pq-1}$. Logo, pela definição de μ^*, temos que existem $s > 0$ e $w_0 \in C_0(\Omega)$ tais que $s > (p+1)\dfrac{a+1}{pq-1}$ e $\limsup\limits_{t\to\infty} t^s\|S(t)u_0\|_\infty < \infty$ com

$$\int_0^\infty f(\sigma)\|S(t)u_0\|^{\frac{pq-1}{p+1}}d\sigma < \infty. \tag{3.16}$$

Portanto, o resultado é verdadeiro pelo item (ii) do Teorema 3.3.

□

3.3 O sistema parabólico (3.6)

Como no problema (3.4), vamos considerar a solução do problema (3.6) na forma integral

$$\begin{cases} u(t) = S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[u^r(\sigma) + v^p(\sigma)]d\sigma, \\ v(t) = S(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[u^q(\sigma) + v^s(\sigma)]d\sigma, \end{cases} \tag{3.17}$$

onde $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, $f \in C[0,\infty)$ e $p, q, r, s \geq 1$.

Os seguintes resultados serão usados na parte da explosão no Teorema 3.6.

Proposição 3.11. *Sejam $r > 1$, $f \in C[0,\infty)$ e $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$. Suponha que $u \in C([0,T), C_0(\Omega))$ é uma função não negativa que satisfaz*

$$u(t) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)u^r(\sigma)d\sigma, \tag{3.18}$$

para todo $t \in [0,T)$. Então,

$$\|S(t)u_0\|_\infty^{r-1}\int_0^t f(\sigma)d\sigma \leq (r-1)^{-1}, \tag{3.19}$$

para todo $t \in [0,T)$.

Prova: A demonstração é similar ao Lema 15.6 do livro [44].

Proposição 3.12. *Sejam $r, s \geq 1$, $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$ e $f \in C[0,\infty)$. Se $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$, $u_0, v_0 \geq 0$ e se $(u,v) \in C([0,T), C_0(\Omega))$, $u, v \geq 0$ é a correspondente solução do problema (3.6) com condição inicial (u_0, v_0), então,*

$$\|S(t)u_0\|_\infty^{q(s-1)} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} f(\sigma) d\sigma \right)^{s-1} \int_{\frac{t}{2}}^t f(\sigma) d\sigma \leq (s-1)^{-1}, \tag{3.20}$$

para todo $t \in [0,T)$.

Prova: Da primeira identidade de (3.17), $u(t) \geq S(t)u_0$. Logo, pela segunda identidade de (3.17) e do Teorema 2.12, segue que

$$\begin{aligned} v(t) &\geq \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma) [S(\sigma)u_0]^q d\sigma \\ &\geq [S(t)u_0]^q \int_0^t f(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \tag{3.21}$$

para todo $t \in [0,T)$. Se $\tau \in (0,T)$ e se $\widetilde{v}(t) = v(t+\tau)$ para todo $t \in [0, T-\tau)$, então temos de (3.17) que

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(t) &\geq S(t)v(\tau) + \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma+\tau) \widetilde{v}^s(\sigma) d\sigma, \\ &= S(t)\widetilde{v}(0) + \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma+\tau) \widetilde{v}^s(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 3.12, temos que

$$\|S(t)v(\tau)\|_\infty^{s-1} \int_0^t f(\sigma+\tau) d\sigma \leq (s-1)^{-1}, \tag{3.22}$$

para todo $t \in [0, T-\tau)$. Fazendo a seguinte mudança de variáveis $t := \dfrac{t}{2}$ e $\tau := \dfrac{t}{2}$, o resultado se segue das estimativas (3.21) e (3.22).

□

Para w_0 definimos

$$\alpha_1 = \int_0^\infty f(t) \|S(t)w_0\|_\infty^{r-1} dt, \tag{3.23}$$

$$\alpha_2 = \int_0^\infty f(t) \|S(t)w_0\|_\infty^{s-1} dt, \tag{3.24}$$

$$\beta_1 = \int_0^\infty f(t) \|S(t)w_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} dt, \tag{3.25}$$

$$\beta_2 \quad = \quad \int_0^\infty f(t)\|S(t)w_0\|_\infty^{\frac{q(s-1)}{s}} dt, \tag{3.26}$$

onde $r > 1$, $s > 1$, $p \geq q \geq 1$, com $pq > 1$ e $f \in C[0, \infty)$.

Lema 3.13. *Suponha que $r > 1$, $s > 1$, $p \geq q \geq 1$, com $pq > 1$ e $f \in C[0, T)$. Se existe $w_0 \in C_0(\Omega)$ o qual verifica:*

(i) $\alpha_1 < \infty$, $\beta_1 < \infty$, e $s > q\dfrac{p+1}{q+1}$, então, existe $u_0 \in C_0(\Omega)$ tal que as sequências $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ de $C([0,T), C_0(\Omega))$ definidas para todo $t \in [0, T)$ da seguinte maneira

$$\begin{cases} u_0(t) = \quad S(t)u_0 \quad = v_0(t), \\ \quad u_n(t) \quad = \quad S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[u_{n-1}^r(\sigma) + v_{n-1}^p(\sigma)]d\sigma, \ n \geq 1, \\ \quad v_n(t) \quad = \quad S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[u_{n-1}^q(\sigma) + v_{n-1}^s(\sigma)]d\sigma, \ n \geq 1, \end{cases} \tag{3.27}$$

são limitadas. Mais ainda elas satisfazem a seguinte desigualdade

$$S(t)u_0 \leq u_n(t) \leq 2S(t)u_0 \qquad S(t)u_0 \leq v_n(t) \leq 2[S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}}. \tag{3.28}$$

(ii) $\alpha_1 < \infty$, $\alpha_2 < \infty$, $\beta_1 < \infty$, então existe $u_0 \in C_0(\Omega)$ tal que a sequência definida por (3.27) satisfaz

$$S(t)u_0 \leq u_n(t) \leq 2S(t)u_0 \qquad S(t)u_0 \leq v_n(t) \leq 2S(t)u_0, \tag{3.29}$$

para todo $n \geq 0$ e $t \geq 0$.

Prova:

(i) Seja $\lambda > 0$ suficientemente pequeno tal que $\lambda\|w_0\|_\infty \leq 1$,

$$\lambda^{r-1}2^r\alpha_1 + \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}}2^p\beta_1 \leq 1, \quad \text{e } \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}}\beta_1(2^q + 2^s) \leq 1. \tag{3.30}$$

Seja $u_0 = \lambda w_0$. Procedemos por indução sobre $n \geq 0$, partindo das igualdades dadas por (3.27). O resultado é claro para $n = 0$. Vamos supor que (3.28) é verdade para n. De (3.27) temos,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) \quad \leq \quad & S(t)u_0 + 2^r \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^r d\sigma + \\ & 2^p \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{p\frac{q+1}{p+1}} d\sigma. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^r d\sigma &\leq \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{r-1}]d\sigma \\ &= S(t)u_0\int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{r-1}d\sigma \\ &\leq \lambda^{r-1}\alpha_1 S(t)u_0.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Como $p\dfrac{q+1}{p+1} = 1 + \dfrac{pq-1}{p+1}$, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{p\frac{q+1}{p+1}}d\sigma &\leq S(t)u_0\int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}}d\sigma \\ &\leq \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}}\beta_1 S(t)u_0.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Por (3.30) $-$ (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}u_{n+1}(t) &\leq S(t)u_0 + \lambda^{r-1}2^r\alpha_1 S(t)u_0 + \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}}2^p\beta_1 S(t)u_0 \\ &\leq 2S(t)u_0.\end{aligned} \tag{3.34}$$

De forma análoga temos,

$$\begin{aligned}v_{n+1}(t) \leq\ & S(t)u_0 + 2^q\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^q d\sigma + \\ & 2^s\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{s\frac{q+1}{p+1}}d\sigma.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Como $q = \dfrac{pq-1}{p+1} + \dfrac{q+1}{p+1}$ e $\dfrac{q+1}{p+1} \leq 1$, pelo Lema (2.12), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma) &\leq \int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}}S(t-\sigma)[S(\sigma)]^{\frac{q+1}{p+1}}d\sigma \\ &\leq [S(t)]^{\frac{q+1}{p+1}}\int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}}d\sigma \\ &\leq \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}}\beta_1[S(t)]^{\frac{q+1}{p+1}}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Como $s\dfrac{q+1}{p+1} \geq q$ e $S(t)u_0 \leq 1$, de (3.36) se segue que

$$\begin{aligned}\int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)u_0]^{s\frac{q+1}{p+1}}d\sigma &\leq \int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)u_0]^q d\sigma \\ &\leq \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}}\beta_1[S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) &\leq S(t)u_0 + \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}} 2^q \beta_1 [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} + \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}} 2^s \beta_1 [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}} \\ &\leq 2[S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, a estimativa (3.28) é válida para $n+1$.

(ii) Seja $u_0 = \lambda w_0$, onde $\lambda > 0$ é escolhida tal que $\lambda \|w_0\| \leq 1$ e

$$\lambda^{r-1} 2^r \alpha_1 + \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}} 2^p \beta_1 \leq 1, \qquad \lambda^{s-1} \alpha_2 (2^q + 2^s) \leq 1. \tag{3.37}$$

Procederemos por indução sobre $n \geq 0$. É claro que (3.29) é verdade para $n = 0$. Suponhamos que (3.29) é verdade para n, as estimativas para u_{n+1} são obtidas como o caso anterior.

Como $s \leq q$ e $\|S(t)u_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma) [S(\sigma)u_0]^q d\sigma &\leq \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma) [S(\sigma)u_0]^s d\sigma \\ &\leq \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma) [S(\sigma)u_0 . \|S(\sigma)u_0\|_\infty^{s-1}] d\sigma \\ &\leq \lambda^{s-1} \alpha_2 S(t) u_0. \end{aligned}$$

Portanto, por (3.37), concluímos que

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) &\leq S(t)u_0 + 2^q \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma) [S(\sigma)u_0]^q d\sigma \\ &\quad + S(t)u_0 + 2^s \int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma) [S(\sigma)u_0]^s d\sigma \\ &\leq S(t)u_0 + \lambda^{s-1} 2^q \alpha_2 S(t) u_0 + \lambda^{s-1} 2^s \alpha_2 S(t) u_0 \\ &\leq S(t)u_0 \end{aligned}$$

Portanto, (3.29) é verdade para $n+1$. ∎

Prova do Teorema 3.6: (i) Seja $(u_0, v_0) \neq (0,0)$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$. Suponha que (u, v) é a correspondente solução global do problema (3.6).

Suponha que se cumpre a condição (a) do Teorema 3.6. Da primeira identidade de (3.17), obtemos a primeira desigualdade (3.18) da Proposição 3.11, e como conseqûencia disso obtemos a segunda desigualdade (3.19) da mesma Proposição, o qual contradiz a condição (a). Portanto (u,v) explode em tempo finito.

Agora, suponha que a condição (b) do Teorema 3.6 é verdade. Da Proposição 3.9, nós temos que a desigualdade (3.8) cumpre-se para todo $t \geq 0$, o qual contradiz a condição (b). Portanto, (u,v) explode em tempo finito.

Quando cumpre-se (c), procedemos como na obtenção de (3.15) e obtemos

$$v(\tau) \geq [S(\tau)u_0]^q \int_0^\tau f(\sigma)d\sigma \neq 0, \text{ para algum } \tau > 0.$$

Da segunda igualdade de (3.17), temos

$$v(t+\tau) \geq S(t)v(\tau) + \int_0^t S(t-\sigma)f(\tau+\sigma)v^s(\sigma+\tau)d\sigma,$$

para $t \geq 0$. Logo, pela Proposição 3.11, temos que $\|S(t)v(\tau)\|_\infty^{s-1} \int_0^t f(\sigma+t)d\sigma \leq (s-1)^{-1}$, para todo $t \geq 0$, o qual contradiz (c). Portanto, (u,v) explode em tempo finito.

Finalmente, assumindo que cumpre-se (d), usamos a Proposição 3.12, e o resultado da explosão se segue da mesma maneira dos casos anteriores.

(ii) Pela hipóteses do Teorema, e supondo que os valores de α_i e β_i, $i = 1,2$ definidos em (3.23), (3.24), (3.25), e (3.26) são finitos, nós consideramos as seguintes duas situações:

1. **CASO [**$s \geq q(\dfrac{p+1}{q+1})$ **ou** $s \leq q$**]**. Suponha que u_0 é definido como na demonstração do Lema 3.13, e que (u_n, v_n) é definido por (3.27). Procedendo por indução, é possível mostrar que $u_n \leq u_{n+1}$, $v_n \leq v_{n+1}$. Pelo teorema da convergência monótona e as estimativas de limitação (3.28), concluímos que existem $u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$, $v(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t)$ para todo $t \geq 0$. Podemos observar que (u,v) é uma solução global não trivial do problema (3.6).

2. **CASO [**$s < q(\dfrac{p+1}{q+1})$ **e** $s > q$**]**. Seja $p_0 < p$ satisfazendo $s = q(\dfrac{p_0+1}{q+1})$. Como $s > q$ nós concluímos que $p_0 > q$.

   Observe que

$$\beta_2 = \int_0^\infty f(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{\frac{q(s-1)}{s}} dt \int_0^\infty f(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{\frac{p_0 q-1}{p_0+1}} dt < \infty. \tag{3.38}$$

Como na demonstração da parte (i) do Lema 3.13, considere $u_0 = \lambda w_0$, escolhemos $\lambda > 0$ suficientemente pequeno tal que $\|u_0\| \leq 1$,

$$\lambda^{r-1}2^r\alpha_1 + \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}}2^p\beta_1 \leq 1, \tag{3.39}$$

$$\lambda^{\frac{p_0q-1}{p_0+1}}(2^q + 2^s)\beta_2 \leq 1. \tag{3.40}$$

Se (u_n, v_n) é a sequência definida em (3.27), afirmamos que

$$u_n(t) \leq 2S(t)u_0 \qquad v_n(t) \leq 2[S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p_0+1}} \tag{3.41}$$

para todo $t \geq 0$, $n \geq 0$. Com efeito, nós procedemos por indução. É claro que para $n = 0$, a estimativa (3.41) é válida. Supondo que estas estimativas são válidas para n, mostraremos que elas são válidas para $n+1$. Nós procedemos de maneira similar a demonstração da parte (i) do Lema 3.13, com algumas modificações. Como $p > p_0$ e $\|S(t)u_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &\leq S(t)u_0 + 2^r\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^r d\sigma + \\ &\quad 2^p\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{p\frac{q+1}{p_0+1}}d\sigma \\ &\leq S(t)u_0 + 2^r\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^r d\sigma + \\ &\quad 2^p\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{p\frac{q+1}{p+1}}d\sigma. \end{aligned}$$

Procedemos como na obtenção de (3.32), (3.33), usando (3.39) obtemos

$$u_{n+1}(t) \leq S(t)u_0 + \lambda^{r-1}2^r\alpha_1 S(t)u_0 + \lambda^{\frac{pq-1}{p+1}}2^p\beta_1 S(t)u_0 \leq S(t)u_0.$$

Similarmente, como $s\dfrac{q+1}{p_0+1} = 1$, temos

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) &\leq S(t)u_0 + 2^q\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^q d\sigma + \\ &\quad 2^s\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{s\frac{q+1}{p_0+1}}d\sigma \\ &= S(t)u_0 + 2^q\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^q d\sigma + \\ &\quad 2^s\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^q d\sigma. \end{aligned}$$

Argumentando como na obtenção de (3.36), usando (3.38), e a identidade $q = \dfrac{p_0 q - 1}{p+1} + \dfrac{q+1}{p_0+1}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^q d\sigma &\leq [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p_0+1}} \int_0^t f(\sigma)[S(\sigma)u_0]^{\frac{p_0 q-1}{p+1}} \\ &\leq \lambda^{\frac{p_0 q-1}{p+1}} \beta_2 [S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p_0+1}}.\end{aligned}$$

Logo, de (3.40),

$$v_{n+1}(t) \leq S(t)u_0 + \lambda^{\frac{p_0 q-1}{p+1}}(2^q + 2^s)\beta_2[S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p_0+1}} \leq 2[S(t)u_0]^{\frac{q+1}{p_0+1}}.$$

Portanto, (3.41) é verdade para $n+1$. Usando as estimativas de (3.41) deduzimos o resultado como no caso anterior.

$\square$

Capítulo 4

Expoente crítico para um sistema parabólico fortemente acoplado

4.1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio qualquer com fronteira $\partial\Omega$ regular. Consideremos o seguinte sistema de equações parabólicas não lineares

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t)u^r v^p & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v = g(t)u^q v^s & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0, \quad v(0) = v_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, $r, s, p, q > 0$ e $f, g \in C[0,\infty)$.

Dado $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$, sabemos que existe uma solução $(u,v) \in C([0,T_{max}),[C_0(\Omega)]^2)$ definida no intervalo maximal $[0,T_{max})$ e que satisfaz

$$\begin{cases} u(t) = S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma, \\ v(t) = S(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)g(\sigma)u^q(\sigma)v^s(\sigma)d\sigma, \end{cases} \tag{4.2}$$

para todo $t \in [0,T_{max})$. Além disso, temos a seguinte alternativa excludente: $T_{max} = +\infty$ (solução global) ou $T_{max} < \infty$ e $\limsup_{t \to T_{max}}(\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = +\infty$ (explosão em tempo finito), veja por exemplo, [29], [34], [45], e as referências citadas nesses artigos.

Daqui em diante, $(S(t))_{t\geq 0}$ denota o semigrupo do calor com condições de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega$. Denotemos por φ_1 a primeira autofunção do operador Laplaciano associado ao primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Nós assumimos que $\displaystyle\int_\Omega \varphi_1(x)dx = 1$.

Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $f = g \equiv 1$, o problema (4.1) foi considerado em [29].

Teorema 4.1 ([29]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $f = g \equiv 1$, $p, q, r, s > 0$ e*

$$D = (1 - r)(1 - s) - pq. \tag{4.3}$$

(i) Se $r > 1$ ou $s > 1$ ou $D < 0$, então o problema (4.1) admite soluções globais e não globais.

(a) Se $u_0 \geq C\varphi_1, v_0 \geq C\varphi_1$ para $C > 0$ suficientemente grande então a solução (4.1) é não global.

(b) Se $u_0 \leq \varphi^a, v_0 \leq \varphi^b$ com a e b convenientemente escolhidos, então a solução de (4.1) é global.

(ii) Se $r < 1$, $s < 1$ e $D \geq 0$, todas as soluções do problema (4.1) são globais.

A situação é mais delicada quando $\Omega = \mathbb{R}^N$

Teorema 4.2 ([45]). *Seja $\Omega = \mathbb{R}^N$, $pq > 0$, $r + p \leq q + s$. Assuma que (u, v) não tem a forma $(u, 0)$ ou $(0, v)$ de modo que $u > 0$ e $v > 0$ em $(0, T)$.*

(i) Suponha que $r > 1$.

(a) Se $(r + p - 1)^{-1} < N/2$, então o problema (4.1) tem soluções globais e não globais.

(b) Se $(r + p - 1)^{-1} \geq N/2$, então qualquer solução não trivial do problema (4.1) é não global.

(ii) Assuma que $0 < r \leq 1$, $D = (1 - r)(1 - s) - pq \neq 0$,

$$\alpha = -\frac{1 + p - s}{D}, \ \beta = -\frac{1 + q - r}{D} \tag{4.4}$$

e $\nu = \max(\alpha, \beta)$.

(a) Se $\nu < 0$, então todas as soluções de (4.1) são globais.

(b) Se $0 \leq \nu < N/2$, então o problema (4.1) tem soluções globais e não globais.

(c) Se $\nu \geq N/2$, então qualquer solução não trivial (4.1) é não global.

Quando $r = 0$, $s = 0$, e $f = g \equiv 1$, o problema (4.1) foi considerado em [34] quando Ω é um domínio limitado, e em [33] quando $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Teorema 4.3 ([33], [34]). *Assuma que $r = s = 0$ e $h = 1$.*

(i) Suponha que Ω é um domínio limitado. Se $0 < pq < 1$, então todas as soluções do problema (4.1) são globais. Se $pq > 1$, então o problema (4.1) tem soluções globais e soluções não globais.

(ii) Suponha que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $p \geq q > 0$ com $pq > 1$. Se $\dfrac{p+1}{pq-1} < \dfrac{N}{2}$, então o problema (4.1) tem soluções globais. Seja $\dfrac{p+1}{pq-1} \geq \dfrac{N}{2}$, então qualquer solução não trivial de (4.1) é não global.

O estudo dos expoentes críticos foi iniciado com Fujita [9]. Ele considerou o problema $u_t - \Delta u = u^p$ em $\mathbb{R}^N \times (0,T)$, $u(0) = u_0$ e mostrou que este problema não tem soluções globais se $1 < p < 1 + \dfrac{2}{N}$, e no caso $p > 1 + \dfrac{2}{N}$ existem soluções globais e soluções não globais. O caso $p = 1 + \dfrac{2}{N}$ foi demonstrado que pertence ao caso não global, veja [15], [16], e [13]. A partir desses trabalhos pioneiros, estudos sobre expoente crítico tem sido feitos para uma diversidade de equações não lineares, e sistemas destas equações, veja por exemplo nas pesquisas [8] e [10]. A demonstração destes resultados tem sido obtidos usando diferentes argumentos, por exemplo o método das sub e supersoluções, o método de Kaplan, argumentos do ponto fixo, etc. Em [7], Meier estudou o seguinte problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = h(t)u^p & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $p > 1$, u_0 é limitado e mostrou o seguinte

Teorema 4.4 ([7]). *(i) Se existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \neq 0$ satisfazendo*

$$\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1} d\sigma < \infty, \tag{4.6}$$

então o problema (4.5) tem soluções globais não triviais.

(ii) Se

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty, \tag{4.7}$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \neq 0$, então qualquer solução não trivial de (4.5) é uma solução não global.

Observe que o resultado de Meier depende só do comportamento assintótico de $\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ o qual depende da geometria de Ω. Com efeito, é conhecido que se Ω é limitado, $u_0 \in C_0(\Omega)$ e $0 \leq u_0 \leq C\varphi_1$, então temos

$$\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ce^{-\lambda_1 t}, \tag{4.8}$$

para todo $t \in [0,\infty)$. Agora, no caso que $\Omega = \mathbb{R}^N$ nós temos que se $u_0 \sim |x|^{-\sigma}$ para $|x|$ suficientemente grande, isto é, existem constantes $C_0, C_1 > 0$ tal que $C_0|x|^{-\sigma} \leq u_0 \leq C_1|x|^{-\sigma}$, para $|x|$ suficientemente grande, então

$$\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \sim t^{-\frac{1}{2}\min\{\sigma,N\}} \tag{4.9}$$

para t suficientemente grande, veja [25].

É importante destacar dois fatos sobre o resultado do Meier. O primeiro fato, é que o resultado é válido para qualquer domínio Ω (limitado ou não limitado). O segundo fato, é que para determinar se uma solução com condição inicial $u_0 \in C_0(\Omega)$ explode em tempo finito ou é uma solução global, é suficiente determinar o valor de $\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Por exemplo, para Ω limitado, $h(t) \leq Ct^a$ para t suficientemente grande $u_0 \leq \varphi_1$, por (4.8) temos que

$$\int_0^\infty h(t)\|S(t)u_0\|_\infty^{p-1} dt \leq C + C\int_{t_0}^\infty t^a e^{-\lambda t} dt < \infty,$$

onde $t_0 > 0$ é tal que $h(t) \leq Ct^a$ para $t \geq t_0$. Dos resultados de Meier, concluímos que o problema (4.5) tem soluções globais não triviais. Os resultados de Meier foram extendidos para o problema (4.5), para uma não linearidade mais geral em [46]. Para sistemas (4.1) no caso $r = s = 0$, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.5 ([26])**.** *Sejam $r, s = 0$, $p \geq q \geq 1$ com $pq > 1$ e $h \in C[0, \infty)$.*

(i) Se

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty,$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \neq 0$, então qualquer solução não trivial de (4.1) explode em tempo finito.

(ii) Assumindo que existe $w_0 \in C_0(\Omega), w_0 \geq 0, w_0 \neq 0$ tal que

$$\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma < \infty,$$

então existe $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2, u_0, v_0 \geq 0$, tal que a correspondente solução de (4.1) é uma solução global não trivial.

O objetivo principal deste trabalho é estender os resultados de Meier para o sistema (4.1) com $r, s > 0$.

No nosso primeiro resultado, tratamos o caso $r > 1$.

Teorema 4.6. *Seja $f, g \in C[0, \infty)$, $r, s, p, q > 0$ tal que $r + p \leq q + s$ e $r > 1$.*

(i) Se para todo $z_0 \in C_0(\Omega)$, $z_0 \geq 0$, $z_0 \neq 0$

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)z_0\|_\infty^{p+r-1} \int_0^t \min\{f(\sigma), g(\sigma)\}d\sigma = \infty, \tag{4.10}$$

então qualquer solução não trivial de (4.1), que tenha condição inicial $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ que satisfaz $u_0, v_0 \geq w_0$ para algum $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$, é uma solução não global.

(ii) Se existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ tal que

$$\int_0^\infty \max\{f(\sigma), g(\sigma)\}\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{p+r-1}d\sigma < \infty, \tag{4.11}$$

então existe uma condição inicial $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, tal que a correspondente solução de (4.1) é uma solução global não trivial.

Observação 4.7. *Temos aqui alguns comentários do Teorema 4.6.*

(i) Suponha que Ω é um domínio limitado, $f = g \equiv 1$ e $u_0 \leq C\varphi_1$. De (4.8), segue que

$$\int_0^\infty \|S(\sigma)u_0\|_\infty^{p+r-1} d\sigma \leq \int_0^\infty Ce^{-\lambda_1\sigma(p+r-1)} d\sigma < \infty,$$

se $r > 1$. Portanto, pelo Teorema 4.6 item (ii), existem soluções globais, o qual coincide com o resultado de [29].

(ii) Suponha que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\min\{f(t), g(t)\} \sim t^a$, $(a > -1)$ para t suficientemente grande. If $z_0 \geq 0, z_0 \neq 0$, se segue de (4.9) que

$$\|S(t)z_0\|_\infty^{p+r-1} \int_0^t \min\{f(\sigma), g(\sigma)\} d\sigma \geq Ct^{-\frac{N}{2}(p+r-1)+a+1}$$

para t suficientemente grande. Logo, pelo Teorema 4.6, qualquer solução de (4.1) com condição inicial $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ satisfazendo $u_0, v_0 \geq w_0$ para algum $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$, não é uma solução global, sempre que $(p + r - 1)^{-1} > N/[2(a + 1)]$. Em particular, quando $a = 0$ nós obtemos (i), item (b), do Teorema 4.2 para $u_0 \geq w_0$, $v_0 \geq w_0$.

(iii) Assumindo que $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\max\{f(t), g(t)\} \sim t^a (a > -1)$ para t suficientemente grande, e $u_0 \leq C|x|^{-d}$, para $|x|$ suficientemente grande e $d > N$. De (4.9) temos

$$\int_0^\infty h(t)\|S(t)u_0\|_\infty^{p+r-1} dt \leq C + \int_{t_0}^\infty t^{a+\frac{N}{2}(p+r-1)} dt < \infty,$$

quando $a - \dfrac{N}{2}(p + r - 1) < -1$ e t_0 é suficientemente grande. Portanto, pelo Teorema 4.6, concluímos que existe uma solução global não trivial. Em particular, para $a = 0$, nós obtemos a parte de existência global de (i), item (a), do Teorema 4.2.

(iv) Seja Ω_1 um subdomínio de Ω com fronteira suave e $r > 1$. Como qualquer solução do problema (4.1) com Ω_1 no lugar de Ω, é uma subsolução de (4.1), nós deduzimos pelo Teorema 4.1 e o princípio de comparação que todas as soluções com condição inicial suficientemente grande não são soluções globais.

Nosso resultado para o caso $0 < r < 1$ é o seguinte

Teorema 4.8. *Sejam $f, g \in C[0, \infty)$, $r, s, p, q > 0$ tais que $1 < r + p \leq q + s$, $0 < r < 1$, e $\beta > 0$ definido em (4.4).*

(i) *Se todo* $z_0 \in C_0(\Omega),\ z_0 \geq 0, z_0 \neq 0$ *satisfaz*

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{1/\beta} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty, \tag{4.12}$$

então qualquer solução não trivial do problema (4.1)*, que tenha condição inicial* $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ *satisfazendo* $u_0 \geq w_0$, $v_0 \geq w_0$ *para algum* $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$, *é uma solução global.*

(ii) *Suponha que* $s < p+1$ *e que existe* $w_0 \in C_0(\Omega),\ w_0 \geq 0,\ w_0 \neq 0$ *satisfazendo*

$$\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{1/\beta} d\sigma < \infty. \tag{4.13}$$

Então, existe uma condição inicial $(u_0, v_0) \in [C_0(\Omega)]^2,\ u_0, v_0 \geq 0$ *tal que a correspondente solução do problema* (4.1) *é uma solução global não trivial.*

Observação 4.9. *Alguns comentários a respeito do Teorema* 4.8.

(i) *Temos* $D = (1-r)(1-s)-pq < 0$. *Pois, como* $0 < r < 1$ *e* $1 < p+r \leq q+s$, *deduzimos que* $\dfrac{p}{1-r} > 1$. *Logo,* $\dfrac{p}{1-r}q + s - 1 > q + s - 1 > 0$.

(ii) *Argumentando como no item (iv) da Observação* 4.7*, podemos concluir que qualquer solução do problema* (4.1) *com condição inicial suficientemente grande não é global quando* $D < 0$.

(iii) *Quando* $1 - r + q > 0$, *temos que* $\beta > 0$. *Nossa hipótese* $s < p+1$ *é considerada para garantir* $\alpha > 0$. *Esta condição foi usada em diversos trabalhos, por exemplo veja* [47], [48], [49], *e* [50].

(iv) *Quando* Ω *é limitado ou* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *e* $f = g \equiv 1$, *é possível argumentar como na Observação* 4.7 *para obter a parte (b) do item (i) do Teorema* 4.1*, e a parte (b) do item (ii) do Teorema* 4.2.

4.2 Demonstração do Teorema 4.6

Precisamos dos seguintes resultados preliminares.

Proposição 4.10. *Sejam p, q, r, s números positivos com $r > 1$, $h \in C[0, \infty)$ e $w_0 \in C_0(\Omega)$ tal que $u_0 \geq w_0$ e $v_0 \geq w_0$. Suponha que existem funções contínuas $u, v \in C([0, T), C_0(\Omega))$ satisfazendo*

$$\begin{cases} u(t) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma, \\ v(t) \geq S(t)v_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)u^q(\sigma)v^s(\sigma)d\sigma, \end{cases} \tag{4.14}$$

para qualquer $t \in [0, T)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|S(t)w_0\|_\infty^{p+r-1} \int_0^t h(\sigma)d\sigma \leq C,$$

para qualquer $t \in [0, T)$.

Prova: Seja $m(t) = \displaystyle\int_0^t h(\sigma)d\sigma$. Como $u_0 \geq w_0$ e $v_0 \geq w_0$, temos de (4.14) que $u(t) \geq S(t)w_0$ e $v(t) \geq S(t)w_0$. Logo, pelo Teorema 2.12 temos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma \\ &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)w_0]^{r+p}d\sigma \\ &\geq \int_0^t h(\sigma)[S(t-\sigma)S(\sigma)w_0]^{r+p}d\sigma \\ &\geq [S(t)w_0]^{r+p}m(t), \end{aligned} \tag{4.15}$$

para qualquer $t \in [0, T)$. Usando as desigualdades $v(t) \geq S(t)w_0$, $u(t) \geq m(t)[S(t)w_0]^{r+p}$ e o Teorema 2.12 temos que

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma \\ &\geq \int_0^t h(\sigma)m^r(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)w_0]^{(r+p)r}[S(\sigma)w_0]^p d\sigma \\ &= \int_0^t h(\sigma)m^r(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)w_0]^{r(r+p)+p}d\sigma \\ &\geq \int_0^t h(\sigma)m^r(\sigma)[S(t-\sigma)S(\sigma)w_0]^{r(r+p)+p}d\sigma \\ &= [S(t)w_0]^{r(r+p)+p}\int_0^t h(\sigma)m^r(\sigma)d\sigma \\ &= \frac{1}{r+1}[S(t)w_0]^{r(r+p)+p}m(t)^{r+1} \end{aligned}$$

para qualquer $t \in [0, T)$.

Similarmente, como $v(t) \geq S(t)w_0$, e $u(t) \geq \dfrac{1}{r+1} m(t)^{r+1}[S(t)w_0]^{r(r+p)+p}$, temos que

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma \\
&\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)\left\{\frac{1}{r+1}m(\sigma)^{r+1}[S(\sigma)w_0]^{r(r+p)+p}\right\}^r [S(\sigma)w_0]^p d\sigma \\
&= \int_0^t \frac{h(\sigma)}{(r+1)^r} m(\sigma)^{r(r+1)} S(t-\sigma)[S(\sigma)w_0]^{r[r(r+p)+p]+p} d\sigma \\
&\geq \int_0^t \frac{h(\sigma)}{(r+1)^r} m(\sigma)^{r(r+1)} [S(t-\sigma)S(\sigma)w_0]^{r[r(r+p)+p]+p} d\sigma \\
&\geq [S(t)w_0]^{r[r(r+p)+p]+p} \int_0^t \frac{h(\sigma)}{(r+1)^r} m(\sigma)^{r(r+1)} d\sigma \\
&\geq \frac{1}{(r+1)^r[r(r+1)+1]} m(t)^{r(r+1)+1}[S(t)w_0]^{r[r(r+p)+p]+p},
\end{aligned}$$

para qualquer $t \in [0,T)$.

Afirmamos que

$$u(t) \geq c_n m(t)^{\frac{r^n-1}{r-1}}[S(t)w_0]^{r^n+p\frac{r^n-1}{r-1}}, \tag{4.16}$$

para qualquer $t \in [0,T)$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $c_1 = 1$ e

$$c_n = c_{n-1}^r \left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)^{-1}, \text{ for } n \geq 2. \tag{4.17}$$

Para provar a afirmação, argumentaremos por indução. Para $n = 1$, segue-se de (4.15)

$$u(t) \geq m(t)[S(t)w_0]^{r+p} = c_1 m(t)^{\frac{r-1}{r-1}}[S(t)w_0]^{r+p\frac{r-1}{r-1}}.$$

Agora, assumindo que (4.16) é verdade para n. Então

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma \\
&\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)[c_n m(\sigma)^{\frac{r^n-1}{r-1}}[S(\sigma)w_0]^{r^n+p\frac{r^n-1}{r-1}}]^r[S(\sigma)w_0]^p d\sigma \\
&= c_n^r \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)m(\sigma)^{\frac{r(r^n-1)}{r-1}}[S(\sigma)w_0]^{r^{n+1}+p\frac{r^{n+1}-r}{r-1}+p} d\sigma \\
&\geq c_n^r [S(t)w_0]^{r^{n+1}+p\frac{r^{n+1}-1}{r-1}} \int_0^t h(\sigma)m(\sigma)^{\frac{r^{n+1}-r}{r-1}} d\sigma \\
&\geq c_n^r \left(\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\right)^{-1} m(t)^{\frac{r^{n+1}-1}{r-1}}[S(t)w_0]^{r^{n+1}+p\frac{r^{n+1}-1}{r-1}} \\
&= c_{n+1} m(t)^{\frac{r^{n+1}-1}{r-1}}[S(t)w_0]^{r^{n+1}+p\frac{r^{n+1}-1}{r-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (4.16) é válida para $n+1$.

Agora, nós mostraremos que existe uma constante $\eta > 0$ tal que

$$c_k \geq \eta^{r^k} (\Leftrightarrow -r^{-k} \ln c_k \leq -\ln \eta) \text{ para } k \geq 2, \tag{4.18}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Com efeito, seja $\xi_k = -r^{-k} \ln c_k$. Observe que é suficiente provar que $(\xi_k)_{k\geq 1}$ é limitado superiormente. Note que

$$\xi_k - \xi_{k-1} = -r^{-k} \ln c_k + r^{-(k-1)} \ln c_{k-1} = r^{-k} \ln \frac{c_{k-1}^r}{c_k}.$$

Logo, pela equação (4.17), nós temos $\dfrac{c_{k-1}^r}{c_k} = \dfrac{r^k - 1}{r-1}$. Portanto $\xi_k - \xi_{k-1} = r^{-k} \ln \dfrac{r^k-1}{r-1}$. Como $\dfrac{r^k-1}{r-1} \leq (r+1)^k$, segue-se $\ln \dfrac{r^k-1}{r-1} \leq \ln(r+1)^k = k \cdot \gamma$, onde γ é uma constante. Como

$$\xi_k - \xi_1 = \sum_{i=2}^{k} (\xi_i - \xi_{i-1}) \leq \gamma \sum_{i=2}^{\infty} r^{-i} \cdot i < \infty,$$

nós concluímos que (ξ_k) é limitado superiormente.

De (4.16), concluímos

$$\|u(t)\|_\infty \geq c_n m(t)^{\frac{r^n-1}{r-1}} \|S(t)w_0\|_\infty^{r^n + p\frac{r^n-1}{r-1}},$$

ou equivalentemente,

$$\left(\frac{1}{c_n}\right)^{1/r^n} \|u(t)\|_\infty^{1/r^n} \geq m(t)^{\frac{1-1/r^n}{r-1}} \|S(t)w_0\|_\infty^{1+p\left(\frac{1-1/r^n}{r-1}\right)}.$$

Das estimativas (4.18), fazemos $n \to \infty$, e obtemos

$$m(t)^{\frac{1}{r-1}} \|S(t)w_0\|_\infty^{1+\frac{p}{r-1}} \leq C := \eta^{-1},$$

para qualquer $t \in [0, T)$. ∎

4.2.1 Existência Não global

Prova do Teorema 4.6 (i) Argumentamos por contradição. Assumimos que (u, v) é uma solução global para (4.1) com condição inicial (u_0, v_0) tal que $u_0 \geq w_0$ e $v_0 \geq w_0$ para algum $w_0 \neq 0$, $w_0 \in C_0(\Omega)$.

Seja $h(t) = \min\{f(t), g(t)\}$ para todo $t \geq 0$. Como

$$u(t) \geq S(t)w_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma,$$

$$v(t) \geq S(t)w_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)u^q(\sigma)v^s(\sigma)d\sigma,$$

para todo $t \in [0, +\infty)$, segue-se da Proposição 4.10, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|S(t)w_0\|_\infty^{p+r-1} \int_0^t h(\sigma)d\sigma \leq C,$$

para qualquer $t \in [0, +\infty)$. Portanto, $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)w_0\|_\infty^{p+r-1} \int_0^t h(\sigma)d\sigma \leq C$ o qual contradiz a condição (4.10). Assim, a solução (u, v) não pode ser global.

4.2.2 Existência Global

Prova do Teorema 4.6 *(ii)* Seja $h(t) = \max\{f(t), g(t)\}$ para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\alpha = \int_0^\infty h(t)\|S(t)w_0\|_\infty^{p+r-1}dt,$$

e $\widetilde{u}_0 = \lambda w_0$, onde $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno tal que $\lambda\|w_0\|_\infty \leq 1$, e $2^{q+s}\lambda^{p+r-1}\alpha \leq 1$.

Seja $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ com $\widetilde{v}_0 = \widetilde{u}_0$. Definamos $u^0(t) = S(t)\widetilde{u}_0$, $v^0(t) = S(t)\widetilde{v}_0$ e a sequência $(u^n)_{n\geq 1}$, $(v^n)_{n\geq 1}$ dada por

$$\begin{cases} u^n(t) &= S(t)\widetilde{u}_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)(u^{n-1})^r(\sigma)(v^{n-1})^p(\sigma)d\sigma, \\ v^n(t) &= S(t)\widetilde{v}_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)(u^{n-1})^q(\sigma)(v^{n-1})^s(\sigma)d\sigma. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$u^n(t) \leq 2S(t)\widetilde{u}_0 \text{ e } v^n(t) \leq 2S(t)\widetilde{u}_0, \tag{4.19}$$

para todo $t \geq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Demonstraremos a afirmação por indução sobre n. Para $n = 0$ é claro. Assumindo que a afirmação é verdade para n, mostraremos que é verdade para $n+1$.

Temos

$$
\begin{aligned}
u^{n+1}(t) &= S(t)\widetilde{u}_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)(u^n)^r(\sigma)(v^n)^p(\sigma)d\sigma \\
&\leq S(t)\widetilde{u}_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)[2S(\sigma)\widetilde{u}_0]^r[2S(\sigma)\widetilde{u}_0]^p d\sigma \\
&\leq S(t)\widetilde{u}_0 + 2^{r+p}\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)\|S(\sigma)\widetilde{u}_0\|_\infty^{p+r-1}S(\sigma)\widetilde{u}_0 d\sigma \\
&= S(t)\widetilde{u}_0 + 2^{r+p}S(t)\widetilde{u}_0\int_0^t h(\sigma)\|S(\sigma)\widetilde{u}_0\|_\infty^{p+r-1}d\sigma \\
&\leq S(t)\widetilde{u}_0 + 2^{r+p}\lambda^{p+r-1}\alpha S(t)\widetilde{u}_0 \\
&\leq S(t)\widetilde{u}_0 + 2^{q+s}\lambda^{p+r-1}\alpha S(t)\widetilde{u}_0 \\
&\leq 2S(t)\widetilde{u}_0.
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
v^{n+1}(t) &= S(t)\widetilde{u}_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)(u^n)^q(\sigma)(v^n)^s(\sigma)d\sigma \\
&\leq S(t)\widetilde{u}_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)[2S(\sigma)\widetilde{u}_0]^q[2S(\sigma)\widetilde{u}_0]^s d\sigma \\
&\leq S(t)\widetilde{u}_0 + 2^{q+s}\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)\|S(\sigma)\widetilde{u}_0\|_\infty^{q+s-1}[S(\sigma)\widetilde{u}_0] d\sigma \\
&= S(t)\widetilde{u}_0 + 2^{q+s}S(t)\widetilde{u}_0\int_0^t h(\sigma)\|S(\sigma)\widetilde{u}_0\|_\infty^{q+s-1}d\sigma.
\end{aligned}
$$

Como $r+p \leq q+s$ e $\|\widetilde{u}_0\|_\infty \leq 1$,

$$
\begin{aligned}
v^{n+1}(t) &\leq S(t)\widetilde{u}_0 + 2^{q+s}S(t)\widetilde{u}_0\int_0^t h(\sigma)\|S(\sigma)\widetilde{u}_0\|_\infty^{p+r-1}d\sigma \\
&\leq S(t)\widetilde{u}_0 + 2^{q+s}\lambda^{r+p-1}\alpha S(t)\widetilde{u}_0 \\
&\leq 2S(t)\widetilde{u}_0.
\end{aligned}
$$

Portanto, a afirmação é válida para $n+1$.

Também usando argumentos de indução é possível mostrar que $u^n \leq u^{n+1}$ e $v^n \leq v^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, das estimativas (4.19), concluímos que existe $u(t) = \lim_{n\to\infty} u^n(t)$ e $v(t) = \lim_{n\to\infty} v^n(t)$, para qualquer $t \geq 0$. Assim temos uma solução global para (4.1).

4.3 Demonstração do Teorema 4.8

Precisamos de alguns resultados técnicos.

Lema 4.11. *Assuma que* $0 < r < 1$*,* $p + r > 1$*,* $A_0, \alpha_0, \pi_0, \theta_1, \beta_1 \geq 0$*. Defina por indução*

$$A_k = \frac{A_{k-1}^r B_1^p}{\alpha_k}, \ \ \alpha_k = r\alpha_{k-1} + p\beta_1 + 1, \ \ \pi_k = r\pi_{k-1} + p\theta_1,$$

para $k \in \mathbb{N}$*. Então*

$$\liminf_{k\to\infty} A_{k+1} \geq \left[\frac{B_1^p(1-r)}{\alpha_0(1-r) + 1 + p\beta_1}\right]^{\frac{1}{1-r}}, \tag{4.20}$$

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \frac{1 + p\beta_1}{1-r}, \tag{4.21}$$

$$\lim_{k\to\infty} \pi_k = \frac{1}{1-r} p\theta_1. \tag{4.22}$$

Prova: Note que

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= r\alpha_k + p\beta_1 + 1 \\
&= r(r\alpha_{k-1} + p\beta_1 + 1) + p\beta_1 + 1 = r^2\alpha_{k-1} + (r+1)p\beta_1 + r + 1 \\
&= r^2(r\alpha_{k-2} + p\beta_1 + 1) + (r+1)p\beta_1 + r + 1 \\
&= r^3\alpha_{k-2} + (r^2 + r + 1)p\beta_1 + r^2 + r + 1.
\end{aligned}$$

Iterando este processo k vezes obtemos

$$\alpha_{k+1} = r^{k+1}\alpha_0 + (1 + p\beta_1)\frac{1 - r^{k+1}}{1-r}. \tag{4.23}$$

Logo,

$$\ln A_{k+1} = r \ln A_k + p \ln B_1 - \ln\left[r^{k+1}\alpha_0 + (1 + p\beta_1)\frac{1 - r^{k+1}}{1-r}\right].$$

Como $0 < r < 1$, segue do fato que a função logaritmo é uma função não decrescente, que

$$\ln A_{k+1} \geq r \ln A_k + p \ln B_1 - \ln\left(\frac{\alpha_0(1-r) + 1}{1-r} + \frac{\beta_1 p}{1-r}\right). \tag{4.24}$$

Observe que a desigualdade (4.24) é da forma $a_{k+1} \geq ra_k + b$, com $a_{k+1} = \ln A_{k+1}$ e $b = \ln\left[\frac{B_1^p(1-r)}{\alpha_0(1-r) + 1 + p\beta_1}\right]$. Logo,

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\geq r(ra_{k-1} + b) + b \\
&= r^2 a_{k-1} + rb + b \\
&\geq r^2(ra_{k-2} + b) + rb + b = r^3 a_{k-2} + r^2 b + rb + b \\
&\vdots \\
&\geq r^{k+1} a_0 + \frac{1 - r^{k+1}}{1-r} b.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\ln A_{k+1} &\geq r^{k+1}\ln A_0 + \frac{1-r^{k+1}}{1-r}\ln\left[\frac{B_1^p(1-r)}{\alpha_0(1-r)+1+p\beta_1}\right]\\ &= \ln\left\{A_0^{r^{k+1}}\left[\frac{B_1^p(1-r)}{\alpha_0(1-r)+1+p\beta_1}\right]^{(1-r^{k+1})/(1-r)}\right\}.\end{aligned}$$

Portanto, segue-se (4.20).

O limite (4.21) segue-se diretamente de (4.23). Para obter o limite (4.22), nós argumentamos como na obtenção de (4.23) e obtemos $\pi_{k+1} = r^{k+1}\pi_0 + \dfrac{1-r^{k+1}}{1-r}p\theta_1$. Fazendo $k \to \infty$ obtemos a conclusão desejada. ∎

Também usaremos o seguinte resultado.

Proposição 4.12. *Sejam $p, q, r, s > 0$ tais que $1 < p + r \leq q + s$, com $0 \leq r < 1$, $D < 0$ e $\beta > 0$ definida por (4.4). Seja $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \neq 0$, $w_0 \geq 0$. Assuma que $u,\ v \in C([0,T), C_0(\Omega))$ são funções não negativas tal que*

$$\begin{cases} u(t) \geq S(t)w_0 + \displaystyle\int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma, \\ v(t) \geq S(t)w_0 + \displaystyle\int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)u^q(\sigma)v^s(\sigma)d\sigma. \end{cases} \tag{4.25}$$

Então, existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de p, q, r e s, verificando

$$\|S(t)w_0\|_\infty^{1/\beta}\int_0^t h(\sigma)d\sigma \leq C,$$

para todo $t \in [0,T)$.

Prova: Faremos a prova em quatro passos. Seja $m(t) = \displaystyle\int_0^t h(\sigma)d\sigma$. Observe que

$$u(t) \geq S(t)w_0, \tag{4.26}$$

$$v(t) \geq S(t)w_0. \tag{4.27}$$

Passo 1. Afirmamos que existe uma constante $\eta > 0$ tal que

$$u(t) \geq \Lambda_0 m(t)^{\alpha_0}[S(t)w_0]^{\frac{p}{1-r}}, \tag{4.28}$$

$$v(t) \geq B_1 m(t)^{\beta_1}[S(t)w_0]^{\theta_1}, \tag{4.29}$$

para qualquer $t \in [0,T)$, onde

$$A_0 := \Lambda_0 = 1, \alpha_0 = \frac{1}{1-r}, \pi_0 = \frac{p}{1-r}, \tag{4.30}$$

$$B_1 = \frac{A_0^q}{\beta_1}, \beta_1 = \alpha_0 q + 1, \theta_1 = \frac{pq}{1-r} + s = \pi_0 q + s. \tag{4.31}$$

Com efeito, das desigualdades (4.26), (4.27), $(4.25)_1$ e o Teorema 2.12 obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)w_0]^r[S(\sigma)w_0]^p d\sigma \\ &= \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)w_0]^{p+r} d\sigma \\ &\geq \int_0^t h(\sigma)[S(t-\sigma)S(\sigma)w_0]^{p+r} d\sigma \\ &\geq m(t)[S(t)w_0]^{p+r}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Usando as desigualdades (4.32), (4.27), $(4.25)_1$, o Teorema 2.12 e argumentando como na obtenção de (4.32) obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)m(\sigma)^r[S(\sigma)w_0]^{r(r+p)+p} d\sigma \\ &\geq \frac{m(t)^{r+1}}{r+1}[S(t)w_0]^{r(p+r)+p}. \end{aligned}$$

Iterando este processo é possível obter

$$u(t) \geq c_n m(t)^{\frac{1-r^n}{1-r}}[S(t)w_0]^{r^n + p\frac{1-r^n}{1-r}},$$

para qualquer $t \in [0, T)$, onde $c_1 = 1$ e $c_n = c_{n-1}^r \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)^{-1}$. Argumentando similarmente como na demonstração de (4.18) obtemos uma constante $\eta > 0$ tal que $c_n \geq \eta^{r^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. segue-se, fazendo $n \to \infty$, que (4.28) é verdade para Λ_0 e α_0 definidos por (4.30).

Como $D < 0$, segue-se que $\theta_1 = \pi_0 q + s = \frac{pq}{1-r} + s > 1$. De (4.27), (4.28), $(4.25)_2$ e do Teorema 2.12, concluímos que

$$\begin{aligned} v(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)A_0^q m(\sigma)^{\alpha_0 q}[S(\sigma)w_0]^{\pi_0 q + s} d\sigma \\ &\geq A_0^q \frac{1}{\alpha_0 q + 1} m(t)^{\alpha_0 q + 1}[S(t)w_0]^{\pi_0 q + s} \\ &\geq B_1 m(t)^{\beta_1}[S(t)w_0]^{\theta_1}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde B_1, β_1 e θ_1 são definidas por (4.31). Logo, segue-se (4.29).

Passo 2. Nós afirmamos que existe $\Lambda_1 = \left[\frac{B_1^p(1-r)}{2+p\beta_1}\right]^{\frac{1}{1-r}} > 0$ tal que

$$u(t) \geq \Lambda_1 m(t)^{\frac{1+p\beta_1}{1-r}}[S(t)w_0]^{\frac{\theta_1 p}{1-r}}, \tag{4.34}$$

$$v(t) \geq B_2 m(t)^{\beta_2}[S(t)w_0]^{\theta_2}, \tag{4.35}$$

onde

$$B_2 = \frac{\Lambda_1^q B_1^s}{\beta_2}, \quad \beta_2 = 1 + \frac{q}{1-r} + \beta_1\left(s + \frac{pq}{1-r}\right), \quad \theta_2 = \left(\frac{pq}{1-r} + s\right)\theta_1 = \theta_1^2. \tag{4.36}$$

Com efeito, como $p + r > 1$ e $\theta_1 > 1$, $r\pi_0 + p\theta_1 = r\left(\dfrac{p}{1-r}\right) + p\theta_1 > r + p > 1$. Das desigualdades (4.29), (4.28), $(4.25)_1$ e do Teorema 2.12 obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)A_0^r m(\sigma)^{r\alpha_0}[S(\sigma)w_0]^{r\pi_0} B_1^p m(\sigma)^{p\beta_1}[S(\sigma)w_0]^{p\theta_1} d\sigma \\ &= A_0^r B_1^p \int_0^t h(\sigma)m(\sigma)^{r\alpha_0 + p\beta_1} S(t-\sigma)[S(\sigma)w_0]^{r\pi_0 + p\theta_1} d\sigma \\ &\geq A_1 m(t)^{\alpha_1}[S(t)w_0]^{r\pi_0 + p\theta_1}, \end{aligned}$$

onde

$$A_1 = \frac{A_0^r B_1^p}{\alpha_1}, \alpha_1 = r\alpha_0 + \beta_1 p + 1, \ \pi_1 = r\pi_0 + p\theta_1 > 1 \tag{4.37}$$

onde θ_1, β_1 e B_1 são definidas por (4.31). Logo,

$$u(t) \geq A_1 m(t)^{\alpha_1}[S(t)w_0]^{\pi_1}. \tag{4.38}$$

Observe que $r\pi_1 + p\theta_1 > r + p$, porque $\pi_1, \theta_1 > 1$. Das desigualdades (4.38), (4.29), $(4.25)_1$ e do Teorema 2.12 obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)A_1^r m(\sigma)^{r\alpha_1}[S(\sigma)w_0]^{r\pi_1} B_1^p m(\sigma)^{p\beta_1}[S(\sigma)w_0]^{p\theta_1} d\sigma \\ &= A_1^r B_1^p \int_0^t h(\sigma)m(\sigma)^{r\alpha_1 + p\beta_1} S(t-\sigma)[S(\sigma)w_0]^{r\pi_1 + p\theta_1} d\sigma \\ &\geq A_2 m(t)^{\alpha_2}[S(t)w_0]^{\pi_2}, \end{aligned}$$

onde $A_2 = \dfrac{A_1^r B_1^p}{\alpha_2}$, $\alpha_2 = r\alpha_1 + p\beta_1 + 1, \pi_2 = r\pi_1 + p\theta_1$.

Iterando este processo, obtemos para $k \in \mathbb{N}$,

$$u(t) \geq A_k m(t)^{\alpha_k}[S(t)w_0]^{\pi_k}, \tag{4.39}$$

onde

$$A_k = \frac{A_{k-1}^r B_1^p}{\alpha_k}, \ \alpha_k = r\alpha_{k-1} + p\beta_1 + 1, \ \pi_k = r\pi_{k-1} + p\theta_1. \tag{4.40}$$

Para ver isto, usaremos indução. De (4.28) e (4.38), observamos que (4.39) é verdade para $k = 0$ e $k = 1$ respectivamente. Assumindo que (4.39) é verdade para k, segue das desigualdades (4.29) e (4.39) que

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)A_k^r m(\sigma)^{r\alpha_k}[S(\sigma)w_0]^{r\pi_k} B_1^p m(\sigma)^{p\beta_1}[S(\sigma)w_0]^{p\theta_1} d\sigma \\ &= \frac{A_k^r B_1^p}{r\alpha_k + p\beta_1 + 1} m(t)^{r\alpha_k + p\beta_1 + 1}[S(t)w_0]^{r\pi_k + p\theta_1} \\ &= A_{k+1} m(t)^{\alpha_{k+1}}[S(t)w_0]^{\pi_{k+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, segue-se (4.39). Das estimativas (4.21) e (4.22) do Lema 4.11 obtemos (4.34) fazendo $k \to \infty$.

Por outro lado, como $\theta_1 > 1$ e $p + r > 1$ obtemos que $q\dfrac{\theta_1 p}{1-r} + s\theta_1 > q + s > 1$ e $q\dfrac{\theta_1 p}{1-r} + \theta_1 s = \theta_1^2 > 1$. Logo, das desigualdades (4.34), (4.29), $(4.25)_2$ e do Teorema 2.12

$$\begin{aligned} v(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)\{\Lambda_1 m(\sigma)^{\frac{1+\beta_1 p}{1-r}}[S(\sigma)w_0]^{\frac{\theta_1 p}{1-r}}\}^q\{B_1 m(\sigma)^{\beta_1}[S(\sigma)w_0]^{\theta_1}\}^s d\sigma \\ &\geq \Lambda_1^q B_1^s [S(t)w_0]^{q\frac{\theta_1 p}{1-r} + \theta_1 s} \int_0^t h(\sigma) m(\sigma)^{q\frac{1+\beta_1 p}{1-r} + s\beta_1} d\sigma \\ &= \Lambda_1^q B_1^s \frac{m(t)^{1 + s\beta_1 + q\frac{1+p\beta_1}{1-r}}}{1 + s\beta_1 + q\frac{1+p\beta_1}{1-r}} [S(t)w_0]^{q\frac{\theta_1 p}{1-r} + \theta_1 s} \\ &= \frac{\Lambda_1^q B_1^s}{1 + \frac{q}{1-r} + \beta_1(s + \frac{pq}{1-r})} m(t)^{1 + \frac{q}{1-r} + \beta_1(s + \frac{pq}{1-r})}[S(t)w_0]^{q\frac{\theta_1 p}{1-r} + s\theta_1} \\ &= B_2 m(t)^{\beta_2}[S(t)w_0]^{\theta_2} \end{aligned}$$

onde B_2, β_2 e θ_2 são definidas por (4.36). Logo, segue-se (4.35).

Passo 3. Afirmamos que

$$u(t) \geq \Lambda_2 m(t)^{\frac{1+p\beta_2}{1-r}}[S(t)w_0]^{\frac{p\theta_2}{1-r}}, \tag{4.41}$$

$$v(t) \geq B_3 m(t)^{\beta_3}[S(t)w_0]^{\theta_3}, \tag{4.42}$$

para qualquer $t \in [0, T)$, onde

$$B_3 = \frac{\Lambda_2^q B_2^s}{\beta_3},\ \beta_3 = 1 + \frac{q}{1-r} + \beta_2\left(\frac{pq}{1-r} + s\right),\ \theta_3 = q\frac{p\theta_2}{1-r} + s\theta_2 = \theta_1^3. \tag{4.43}$$

Com efeito, como $\theta_1 > 1$ e $p + r > 1$, segue-se que $r\dfrac{\theta_1 p}{1-r} + p\theta_2 > r + p > 1$. Usando as desigualdades (4.35), (4.34), $(4.25)_1$ e o Teorema 2.12

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)\left[\Lambda_1 m(\sigma)^{\frac{1+p\beta_1}{1-r}}[S(\sigma)w_0]^{\theta_1\frac{p}{1-r}}\right]^r\left[B_2 m(\sigma)^{\beta_2}[S(\sigma)w_0]^{\theta_2}\right]^p d\sigma \\
&\geq \Lambda_1^r B_2^p [S(t)w_0]^{\theta_1\frac{pr}{1-r}+p\theta_2}\int_0^t h(\sigma)m(\sigma)^{r\frac{1+p\beta_1}{1-r}+p\beta_2}d\sigma \\
&\geq \Lambda_1^r B_2^p \frac{m(t)^{1+r\frac{1+p\beta_1}{1-r}+p\beta_2}}{1+r\frac{1+p\beta_1}{1-r}+p\beta_2}[S(t)w_0]^{\theta_1\frac{pr}{1-r}+p\theta_2} \\
&= \tilde{A}_1 m(t)^{\widetilde{\alpha}_1}[S(t)w_0]^{\tilde{\pi}_1},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

onde

$$\tilde{A}_1 = \frac{\Lambda_1^r B_2^p}{\widetilde{\alpha}_1}, \widetilde{\alpha}_1 = 1 + r\widetilde{\alpha}_0 + p\beta_2,\ \tilde{\pi}_1 = r\tilde{\pi}_0 + p\theta_2,$$

onde $\widetilde{\alpha}_0 = \dfrac{1+\beta_1 p}{1-r}$, $\tilde{\pi}_0 = \dfrac{p\theta_1}{1-r}$.

Observe que $r\pi_0 + p\theta_2 > r + p > 1$. Similarmente, das desigualdades (4.44), (4.35), $(4.25)_1$ e do Teorema 2.12

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)\{\tilde{A}_1 m(\sigma)^{\widetilde{\alpha}_1}[S(\sigma)w_0]^{\tilde{\pi}_1}\}^r\{B_2 m(\sigma)^{\beta_2}[S(\sigma)w_0]^{\theta_2}\}^p d\sigma \\
&\geq \tilde{A}_1^r B_2^p [S(t)w_0]^{r\tilde{\pi}_1+p\theta_2}\int_0^t h(\sigma)m(\sigma)^{r\widetilde{\alpha}_1+p\beta_2}d\sigma \\
&= \tilde{A}_1^r B_2^p \frac{m(t)^{1+r\widetilde{\alpha}_1+p\beta_2}}{1+r\widetilde{\alpha}_1+p\beta_2}[S(t)w_0]^{r\tilde{\pi}_1+p\theta_2} \\
&\geq \tilde{A}_2 m(t)^{\widetilde{\alpha}_2}[S(t)w_0]^{\tilde{\pi}_2},
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{A}_2 = \frac{A_1^r B_2^p}{\widetilde{\alpha}_2}, \widetilde{\alpha}_2 = 1 + r\widetilde{\alpha}_1 + p\beta_2,\ \tilde{\pi}_2 = r\tilde{\pi}_1 + p\theta_2,$$

Iterando este processo e fixando a desigualdade (4.35), obtemos

$$u(t) \geq \tilde{A}_k m(t)^{\widetilde{\alpha}_k}[S(t)w_0]^{\tilde{\pi}_k}, \tag{4.45}$$

onde

$$\tilde{A}_k = \frac{\tilde{A}_{k-1}^r B_2^p}{\widetilde{\alpha}_k},\ \widetilde{\alpha}_i = 1 + r\widetilde{\alpha}_{i-1} + p\beta_2, \tilde{\pi}_i = r\tilde{\pi}_{i-1} + p\theta_2. \tag{4.46}$$

Pelo Lema 4.11

$$\liminf_{k\to\infty} \tilde{A}_k \geq \left[\frac{B_2^p(1-r)}{2+p\beta_2}\right]^{\frac{1}{1-r}} =: \Lambda_2,$$

$$\lim_{i\to\infty} \widetilde{\alpha}_k = \frac{1+p\beta_2}{1-r},$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \pi_k = \frac{p\theta_2}{1-r}.$$

Logo, fazendo $k \to \infty$ em (4.45), obtemos a estimativa (4.41).

Por outro lado, como $\theta_2 > 1$ e $p + r > 1$, segue-se que $q\dfrac{\theta_2 p}{1-r} + \theta_2 s > q + s > 1$. Logo, das desigualdades (4.41), (4.35), $(4.25)_2$ e do Teorema 2.12

$$\begin{aligned}
v(t) &\geq \int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)\{\Lambda_2 m(\sigma)^{\frac{1+p\beta_2}{1-r}}[S(\sigma)w_0]^{\frac{p\theta_2}{1-r}}\}^q\{B_2 m(\sigma)^{\beta_2}[S(\sigma)w_0]^{\theta_2}\}^s d\sigma \\
&\geq \Lambda_2^q B_2^s [S(t)w_0]^{q\frac{p\theta_2}{1-r}+s\theta_2}\int_0^t h(\sigma)m(\sigma)^{q\frac{1+p\beta_2}{1-r}+s\beta_2} d\sigma \\
&= \Lambda_2^q B_2^s \frac{m(t)^{1+q\frac{1+p\beta_2}{1-r}+s\beta_2}}{1+q\frac{1+p\beta_2}{1-r}+s\beta_2}[S(t)w_0]^{q\frac{p\theta_2}{1-r}+s\theta_2} \\
&= B_3 m(t)^{\beta_3}[S(t)w_0]^{\theta_3},
\end{aligned}$$

onde B_3, β_3 e θ_3 são definidos por (4.43). Logo, segue-se (4.42).

Passo 4. Dos passos acima, afirmamos que é possível obter

$$u(t) \geq \Lambda_k m(t)^{\frac{1+p\beta_k}{1-r}}[S(t)w_0]^{\frac{p\theta_k}{1-r}}, \tag{4.47}$$

e

$$v(t) \geq B_{k+1} m(t)^{\beta_{k+1}}[S(t)w_0]^{\theta_{k+1}}, \tag{4.48}$$

onde $B_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\theta_0 = 1$, $\Lambda_0 = 1$, e para $k \geq 1$

$$\begin{cases}
B_k &= \dfrac{\Lambda_{k-1}^q B_{k-1}^s}{\widetilde{\beta}_k}, \\
\beta_k &= 1 + q\left(\dfrac{1+p\beta_{k-1}}{1-r}\right) + s\beta_{k-1} = 1 + \dfrac{q}{1-r} + \beta_{k-1}\left(\dfrac{pq}{1-r}+s\right), \\
\theta_k &= pq\dfrac{\theta_{k-1}}{1-r} + s\theta_{k-1} = \theta_{k-1}\left(\dfrac{pq}{1-r}+s\right) = \theta_1^k, \\
\Lambda_k &= \left[\dfrac{B_k^p(1-r)}{2+p\beta_k}\right]^{\frac{1}{1-r}}.
\end{cases}$$

Como $\beta_{k+1} = 1 + \dfrac{q}{1-r} + \beta_k \left(\dfrac{pq}{1-r} + s\right)$, segue-se

$$
\begin{aligned}
\beta_{k+1} &= \frac{1-r+q}{1-r} + \theta_1 \left(\frac{1-r+q}{1-r} + \beta_{k-1}\theta_1\right) \\
&= \left(\frac{1-r+q}{1-r}\right)(1+\theta_1) + \beta_{k-1}\theta_1^2 \\
&= \left(\frac{1-r+q}{1-r}\right)(1+\theta_1) + \theta_1^2 \left(\frac{1-r+q}{1-r} + \theta_1\beta_{k-2}\right) \\
&\vdots \\
&= \left(\frac{1-r+q}{1-r}\right)\frac{\theta_1^{k+1}-1}{\theta_1 - 1}.
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Observe que de (4.48) obtemos

$$
S(t)w_0 \le [v(t)]^{\frac{1}{\theta_{k+1}}} B_{k+1}^{-\frac{1}{\theta_{k+1}}} m(t)^{-\frac{\beta_{k+1}}{\theta_{k+1}}}, \tag{4.50}
$$

para qualquer $t \in [0,T)$ e $k \in \mathbb{N}$.

De (4.49), obtemos que

$$
\begin{aligned}
B_{k+1} &= \frac{\Lambda_k^q B_k^s}{\beta_{k+1}} \\
&= \frac{B_k^{\frac{pq}{1-r}+s}}{\beta_{k+1}} \left(\frac{1-r}{2+p\beta_k}\right)^{\frac{q}{1-r}} \\
&= \frac{(1-r)^{\frac{q}{1-r}} B_k^{\theta_1}}{\left(\frac{1-r+q}{1-r}\right)\left(\frac{\theta_1^{k+1}-1}{\theta_1-1}\right)\left[2 + p\left(\frac{1-r+q}{1-r}\right)\left(\frac{\theta_1^k-1}{\theta_1-1}\right)\right]^{\frac{q}{1-r}}}.
\end{aligned}
$$

Logo, fazendo $\Gamma = \dfrac{q}{1-r}$ e $b_k = \ln B_k$, de (4.49) obtemos que

$$
\beta_k = (1+\Gamma)\frac{\theta_1^k - 1}{\theta_1 - 1}, \; b_0 = \ln B_0 = \ln 1 = 0
$$

e

$$
\begin{aligned}
b_{k+1} &= \ln B_{k+1} \\
&= \theta_1 \ln B_k + \Gamma\left[\ln(1-r) - \ln\left(2 + p(1+\Gamma)\frac{\theta_1^k-1}{\theta_1-1}\right)\right] - \\
&\quad \ln\left((1+\Gamma)\frac{\theta_1^{k+1}-1}{\theta_1-1}\right).
\end{aligned}
$$

Como $\theta_1 > 1$ segue-se que $1 < \dfrac{\theta_1^{k+1}-1}{\theta_1 - 1} < \dfrac{1}{\theta_1 - 1}\theta_1^{k+1}$. Então,

$$\begin{aligned} b_{k+1} &\geq \theta_1 b_k + \Gamma\left[\ln(1-r) - \ln\left(\frac{(2+p(1+\Gamma))\theta_1^{k+1}}{\theta_1 - 1}\right)\right] - \ln\left(\frac{(1+\Gamma)\theta_1^{k+1}}{\theta_1 - 1}\right) \\ &= \theta_1 b_k + \Gamma\left(\ln(1-r) - \ln\left(\frac{2+p(1+\Gamma)}{\theta_1 - 1}\right)\right) - \\ &\quad \ln\left(\frac{1+\Gamma}{\theta_1 - 1}\right) - (k+1)(\Gamma+1)\ln\theta_1. \end{aligned}$$

Definimos

$$b = (\Gamma+1)\ln\theta_1,$$
$$a = \Gamma\left(\ln(1-r) - \ln\left(\frac{2+p(1+\Gamma)}{\theta_1 - 1}\right)\right) - \ln\left(\frac{1+\Gamma}{\theta_1 - 1}\right),$$

e obtemos

$$b_{k+1} \geq \theta_1 b_k + a - (k+1)b. \tag{4.51}$$

Assim,

$$\begin{aligned} b_{k+1} &\geq \theta_1 b_k + a - (k+1)b \\ &\geq \theta_1(\theta_1 b_{k-1} + a - kb) + a - (k+1)b \\ &= \theta_1^2 b_{k-1} + (\theta_1 + 1)a - b(k\theta_1 + k + 1) \\ &\geq \theta_1^3 b_{k-2} + (\theta_1^2 + \theta_1 + 1)a - b((k-1)\theta_1^2 + k\theta_1 + k + 1) \\ &\vdots \\ &\geq a\frac{\theta_1^{k+1}-1}{\theta_1 - 1} - b\sum_{i=0}^{k}(k+1-i)\theta_1^i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \theta_1^{-(k+1)} b_{k+1} &\geq \frac{a(1-\theta_1^{-(k+1)})}{\theta_1 - 1} - b\sum_{j=0}^{k}(k+1-j)\theta_1^{-(k+1-j)} \\ &\geq \frac{a(1-\theta_1^{-(k+1)})}{\theta_1 - 1} - b\sum_{j=1}^{k+1} j\theta_1^{-j} \\ &\geq -b\frac{\theta_1^2}{(\theta_1 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que $\dfrac{b_{j+1}}{\theta_{j+1}} \geq -\ln C$. Então, da desigualdade (4.50) temos

$$S(t)w_0 \leq [v(t)]^{\frac{1}{\theta_{k+1}}} m(t)^{-\frac{\beta_{k+1}}{\theta_{k+1}}} C, \tag{4.52}$$

para qualquer $t \in [0, T)$.

Note que $\theta_1 > 1$. Então,

$$\lim_{k\to\infty} \theta_{k+1} = \lim_{j\to\infty} \theta_1^{k+1} = +\infty \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{\beta_{k+1}}{\theta_{k+1}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(1+\Gamma)}{\theta_1^{k+1}} \left(\frac{\theta_1^{k+1}-1}{\theta_1 - 1} \right) = \frac{\Gamma + 1}{\theta_1 - 1} \\ &= \frac{\frac{1-r+q}{1-r}}{s + \frac{pq}{1-r} - 1} = \beta. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $k \to \infty$ em (4.52), concluímos que

$$\|S(t)w_0\|_\infty^{\frac{1}{\beta}} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = m(t)\|S(t)w_0\|_\infty^{\frac{1}{\beta}} \leq C,$$

para qualquer $t \in [0, T)$.

4.3.1 Existência não global

Prova do Teorema 4.8 (i) Argumentaremos por contradição. Suponha que (u, v) é uma solução global com condição inicial satisfazendo $u_0 \geq w_0$, $v_0 \geq w_0$, $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \neq 0$.

Seja $h(t) = \min\{f(t), g(t)\}$ para todo $t \in [0, \infty)$. Como

$$\begin{aligned} u(t) &\geq S(t)w_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)u^r(\sigma)v^p(\sigma)d\sigma, \\ v(t) &\geq S(t)w_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)u^q(\sigma)v^s(\sigma)d\sigma, \end{aligned}$$

segue-se da Proposição 4.12 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|S(t)w_0\|_\infty^{1/\beta} \int_0^t h(\sigma)d\sigma \leq C$$

para todo $t \in [0, +\infty)$ o qual contradiz a condição (4.12). Logo, (u, v) não é uma solução global.

4.3.2 Existência global

Prova do Teorema 4.8 (ii) Sejam $h(t) = \max\{f(t), g(t)\}$ para todo $t \in [0, \infty)$, e $\lambda > 0$ suficientemente pequeno tal que $\lambda\|w_0\|_\infty \leq 1$ e $\lambda^{1/\beta}2^{q+s}\gamma \leq 1$, onde

$$\gamma = \int_0^\infty h(t)\|S(t)w_0\|_\infty^{1/\beta} dt < \infty.$$

Se $\widetilde{u}_0,\ \widetilde{v}_0 \in C_0(\Omega)$, com $0 \leq \widetilde{v}_0 < \lambda w_0$ e $0 \leq \widetilde{u}_0 \leq \widetilde{v}_0^{\alpha/\beta}$, considere $u^0(t) = S(t)\widetilde{u}_0$, $v^0(t) = S(t)\widetilde{v}_0$ e as sequências $(u^n)_{n\geq 1},\ (v^n)_{n\geq 1}$ definidas da seguinte maneira

$$\begin{cases} u^n(t) &= S(t)\widetilde{u}_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)(u^{n-1})^r(\sigma)(v^{n-1})^p(\sigma)d\sigma, \\ v^n(t) &= S(t)\widetilde{v}_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)(u^{n-1})^q(\sigma)(v^{n-1})^s(\sigma)d\sigma. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$u^n(t) \leq 2[S(t)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta} \text{ e } v^n(t) \leq 2S(t)\widetilde{v}_0, \tag{4.53}$$

para todo $t > 0$.

Procederemos por indução. Para $n = 0$ é verdade. Assuma que é verdade para n. Então,

$$\begin{aligned} u^{n+1}(t) &= S(t)\widetilde{u}_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)(u^n)^r(\sigma)(v^n)^p(\sigma)d\sigma \\ &\leq S(t)\widetilde{v}_0^{\alpha/\beta} + 2^{r+p}\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)[S(\sigma)\widetilde{v}_0]^{\frac{\alpha}{\beta}r}[S(\sigma)\widetilde{v}_0]^p d\sigma. \end{aligned}$$

Como $0 < \dfrac{\alpha}{\beta} \leq 1$, e $r + p \leq q + s$, segue-se que $[S(t)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta} \geq S(t)\widetilde{v}_0^{\alpha/\beta}$. Obsevando que $\dfrac{\alpha}{\beta}r + p = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{1}{\beta}$, temos

$$\begin{aligned} u^{n+1}(t) &\leq S(t)\widetilde{v}_0^{\alpha/\beta} + 2^{r+p}\int_0^t h(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta}\|S(\sigma)\widetilde{v}_0\|_\infty^{1/\beta}d\sigma \\ &\leq S(t)\widetilde{v}_0^{\alpha/\beta} + 2^{r+p}[S(t)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta}\int_0^t h(\sigma)\|S(\sigma)\widetilde{v}_0\|_\infty^{1/\beta}d\sigma \\ &\leq [S(t)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta} + 2^{r+p}[S(t)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta}\lambda^{1/\beta}\gamma \\ &\leq [S(t)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta} + 2^{q+s}[S(t)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta}\lambda^{\alpha/\beta}\gamma \\ &\leq 2[S(t)\widetilde{v}_0]^{\alpha/\beta}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} v^{n+1}(t) &= S(t)\widetilde{v}_0 + \int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)(u^n)^q(\sigma)(v^n)^s(\sigma)d\sigma \\ &\leq S(t)\widetilde{v}_0 + 2^{q+s}\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)[S(\sigma)\widetilde{v}_0]^{\alpha q/\beta}[S(\sigma)\widetilde{v}_0]^s d\sigma. \end{aligned}$$

Observe que $\dfrac{\alpha}{\beta}q + s = \dfrac{1}{\beta} + 1$. Logo,

$$\begin{aligned} v^{n+1}(t) &\leq S(t)\widetilde{v}_0 + 2^{q+s}\int_0^t S(t-\sigma)h(\sigma)[S(\sigma)\widetilde{v}_0]\|S(\sigma)\widetilde{v}_0\|_\infty^{1/\beta}d\sigma \\ &\leq S(t)\widetilde{v}_0 + 2^{q+s}S(t)\widetilde{v}_0\int_0^t h(\sigma)\|S(\sigma)\widetilde{v}_0\|_\infty^{1/\beta}d\sigma \\ &\leq S(t)\widetilde{v}_0 + 2^{q+s}\lambda^{1/\beta}\alpha S(t)\widetilde{v}_0 \\ &\leq 2S(t)\widetilde{v}_0. \end{aligned}$$

Portanto, (4.53) é verdade para $n+1$.

Procedendo por indução, é possível mostrar que $u^n \leq u^{n+1}$, $v^n \leq v^{n+1}$. Logo, pela estimativa (4.53), existe (u, v) tal que $u(t) = \lim_{n\to\infty} u^n(t)$ e $v(t) = \lim_{n\to\infty} v^n(t)$, para qualquer $t \geq 0$, a qual é uma solução para o problema (4.1).

$\square$

Capítulo 5

Expoentes críticos para um problema parabólico com expoente variável

5.1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio arbitrário com fronteira regular $\partial\Omega$. Consideramos o seguinte problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t)u^{p(x)} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0 \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $p \in C(\Omega)$ é uma função limitada satisfazendo

$$0 < p^- \leq p(x) \leq p^+ \quad \text{para} \quad \text{todo } x \in \Omega,$$

onde

$$p^- = \inf_{x\in\Omega} p(x) \qquad p^+ = \sup_{x\in\Omega} p(x),$$

$f \in C[0,\infty)$, e a condição inicial $u_0 \in C_0(\Omega)$ no caso do primeiro expoente crítico de Fujita, e $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$ no caso do segundo valor crítico de Fujita (Neste caso $\Omega = \mathbb{R}^N$).

A existência local das soluções do problema (5.1) podem ser demonstradas usando as mesmas ideias de [18], [19], [21], [31], [32]. A unicidade pode falhar pois p pode ser menor que 1 em algum subdomínio de Ω. Mesmo assim, nós temos uma solução maximal

$$u \in C([0, t_{\max}), C_0(\Omega)),$$

definida em um intervalo maximal $[0, T_{\max})$ verificando

$$u(t) \;=\; S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)u(\sigma)^{p(x)}d\sigma, \tag{5.2}$$

para qualquer $t \in [0, T_{\max})$. Mais ainda, temos a seguinte alternativa : $T_{\max} = \infty$ ou $T_{\max} < \infty$ e $\limsup_{t\to t_{\max}} \|u(t)\|_{\max} = \infty$ (solução que explode em tempo finito). A fórmula $(S(t))_{t\geq 0}$ denota o semigrupo do calor com condições de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega$.

Em 1966, Fujita [9] considerou o problema (5.1) no caso particular $p(x) = \text{constante} = p > 1$, e $f(t) = constante = 1$. Mais especificamente, Fujita estudou o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \triangle u &= u^p \quad\quad \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ \quad u(0) &= u_0 \geq 0 \quad \text{em } C_b(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{5.3}$$

Ele mostrou que existe $p_f = 1 + \dfrac{2}{N}$, tal que o problema (5.3) não tem soluções triviais quando $1 < p < p_f$. Por outro lado, no caso $p > p_f$, ele mostrou que existem soluções globais e soluções que explodem num tempo finito. O número p_f é conhecido como segundo valor crítico de Fujita, e foi estudado para diversas equações e sistemas destas equações, como pode-se apreciar em [10], [15], [51] e no caso de sistemas veja [26].

Depois de Fujita, Tzong-Yow Lee e Wei-Ming Ni [25] em 1992, estudaram o problema (5.3), considerando o comportamento assintótico das condições iniciais, e deram condições de existência e não existência das soluções quando $p > 1 + \dfrac{2}{N}$; mais especificamente, para $a \geq 0$ eles definiram os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} I^a &= \{\psi \in C_0(\mathbb{R}^N) : \psi \geq 0 \text{ and } \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \psi(x) < \infty\}, \\ I_a &= \{\psi \in C_0(\mathbb{R}^N) : \psi \geq 0 \text{ and } \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \psi(x) > 0\}, \end{aligned}$$

e demonstraram o seguinte resultado

Teorema 5.1 ([25]). *Suponha que $p > 1 + \dfrac{2}{N}$. Então, temos*

1. *Se $0 < a < \dfrac{2}{p-1}$, então qualquer solução não trivial, e não negativa u do problema* (5.3) *com condição inicial $u_0 \in I_a$, explode em tempo finito.*

2. *Se* $\dfrac{2}{p-1} < a$, *então para qualquer* $w_0 \in I^a$, *existe* $\Lambda > 0$ *constante dependendo de* p *e* w_0, *tal que a solução do problema* (5.3) *com condição inicial* λw_0 *é uma solução global não trivial, para todo* $0 < \lambda < \Lambda$.

O número $a^* = \dfrac{2}{p-1}$ é conhecido como o segundo valor crítico de Fujita. Resultados similares foram obtidos para outros casos por muitos autores, por exemplo veja [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], e [64].

O caso particular $f \equiv 1$ foi estudado em [18], [19], [20], [22], [23], e para o caso de sistema parabólico acoplado citamos o trabalho de [21].

R. Ferreira, A. de Pablo, M. Perez-Llanos, e J.D. Rossi [18], estudaram o expoente crítico de Fujita para o problema (5.1). Mais especificamente, eles mostraram o seguinte

Teorema 5.2 ([18])**.** *Suponha* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *e* $f \equiv 1$.

(i) *Se* $p^- > 1 + \dfrac{2}{N}$, *então o problema* (5.1) *tem soluções globais não triviais.*

(ii) *Se* $1 < p^- < p^+ \leq 1 + \dfrac{2}{N}$, *então todas as soluções do problema* (5.1) *explodem em tempo finito.*

(iii) *Se* $p^- < 1 + \dfrac{2}{N} < p^+$, *então existem funções* $p(x)$ *tal que o problema* (5.1) *tem soluções globais não triviais e funções* $p(x)$ *tal que todas as soluções não triviais explodem em tempo finito.*

Neste caso o valor crítico $p^* = 1 + \dfrac{2}{N}$, caracteriza o conjunto das funções $P = \{p \in C_b(\mathbb{R}^N) : p^- > 1\}$ por meio dos valores extremos do expoente variável $p(x)$, isto é, p^- e p^+.

Motivados pelo trabalho de Lee e Ne no Teorema 5.1, queremos conhecer o que acontece quando o expoente variável satisfaz $p > 1 + \dfrac{2}{N}$. Assim nossa meta é encontrar um valor semelhante ao do segundo valor crítico de Fujita para o problema (5.1). Para este propósito usaremos as mesmas ideias dos artigos [25] e [26].

Quando o expoente é variável acontece um fenômeno interessante, existem funções $p(x)$ e domínios Ω, tais que todas as soluções do problema (5.1) explodem em tempo finito, veja Teorema 1.3 de [18]. Este fato pode ser suprimido no caso em que Ω é limitado e a função $p(x) = p$ é constante, pois neste caso é conhecido que o problema (5.1) tem soluções globais para dados iniciais pequenos, e quando $0 < p \leq 1$, todas as soluções são globais (veja [34] e [29].

É importante mencionar que para domínios não limitados, o expoente crítico de Fujita para o problema (5.1) foi estudado por muitos autores, veja por exemplo [7], [11], [37], [38], [65], etc.

Estes resultados tem sido obtidos por diferentes métodos, como sub e supersoluções, método de Kaplan, argumentos de ponto fixo, etc. Em [7], Meier demonstrou o seguinte resultado o qual é válido para qualquer domínio. Mais especificamente, ele demonstrou o seguinte resultado

Teorema 5.3 (Meier [7]). *Sejam $p(x) \equiv p \equiv constante > 1$ e $f \in C[0,\infty)$.*

(i) Se existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, tal que

$$\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{p-1} d\sigma < \infty,$$

então existem soluções globais positivas do problema (5.1).

(ii) Se

$$\lim_{t\to\infty} \sup \|S(t)u_0\|_\infty^{p-1} \int_0^\infty h(\sigma)d\sigma = \infty,$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, então cada solução não trivial e não negativa de (5.1) explode em tempo finito.

Observe que o resultados de Meier depende do comportamento assintótico da norma $\|S(t)u_0\|_\infty$. Como consequência do Teorema 5.3 é possível concluir que se $f(t) \sim t^q$ para t suficientemente grande e $q > -1$, o expoente crítico de Fujita é dado por $p_F = 1 + \dfrac{q+1}{\mu^*}$, onde

$$\begin{aligned} \mu^* \cong \mu^*(\Omega) = \sup\{\mu \geq 0;\ \text{existe } u_0 \in C_0(\Omega), u_0 \geq 0\ \text{ tal que} \\ \lim_{t\to\infty} \sup t^\mu \|S(t)u_0\|_\infty < \infty\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Outra consequência do Teorema 5.3 é que se Ω é um domínio limitado e $f(t) \sim e^{\beta t}$ para t suficientemente grande, então $p_F = 1 + \dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$, onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do operador Laplaciano em $H_0^1(\Omega)$.

Nosso objetivo neste capítulo é estender os resultados de Meier 5.3 para o problema (5.1) para expoente variável $p(x) \in C(\Omega)$. Logo, analisamos os casos $f(t) \sim t^q$ e $f(t) \sim e^{\beta t}$ para t suficientemente grande.

Os resultados desta Seção são os seguintes:

Teorema 5.4. *Suponha que $p \in C(\Omega)$ limitada, e $f \in C[0,\infty)$.*

(i) *Se $p^+ > 1$ e*

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{p^+-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty \tag{5.5}$$

para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, então qualquer solução não trivial do problema (5.1) explode em tempo finito ou é uma solução global que explode em tempo infinito, isto é, $\limsup_{t\to\infty} \|v(t)\|_\infty = \infty^+$.

(ii) *Suponha que existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ satisfazendo*

$$\int_0^\infty f(\sigma)\|S(\sigma)w_0\|_\infty^{p^--1} d\sigma < \infty. \tag{5.6}$$

Então, existe uma constante $\Lambda > 0$, dependendo de p^+, p^-, tal que para $0 < \lambda < \Lambda$ a solução u de (5.1) com condição inicial λw_0 é uma solução global não trivial. Mais ainda, existe uma constante $\gamma > 0$ tal que $u(t) \leq (1+\gamma)S(t)u_0$.

Quando $f(t) \sim t^q$ para t suficientemente grande e μ^* é dado por (5.4), obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.5. *Suponha $f(t) \sim t^q$ com $q > -1$, para t suficientemente grande.*

(i) Se $1 < p^+ < 1 + \dfrac{q+1}{\mu^*}$, então qualquer solução não trivial e não negativa do problema (5.1) explode em tempo finito ou é uma solução global que explode em tempo infinito.

(ii) Se $p^+ > 1 + \dfrac{q+1}{\mu^*}$, então nós temos duas situações:

(a) Se $p^- > 1 + \dfrac{q+1}{\mu^*}$, então existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ tal que a correspondente solução do problema (5.1) é uma solução global não trivial.

(b) *Se* $p^- < 1+\dfrac{q+1}{\mu^*}$, *então existem funções* p *tais que todas as soluções do problema* (5.1) *explodem em tempo finito e existem funções* p *tal que o problema* (5.1) *tem uma solução global não trivial.*

Quando $f(t) \sim e^{t\beta}(\beta > 0)$ para t suficientemente grande temos o seguinte resultado.

Teorema 5.6. *Suponha que* Ω *é limitado e* $f(t) \sim e^{\beta t}$ *para* t *suficientemente grande.*

(i) *Se* $1 < p^+ < 1 + \dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$, *então qualquer solução não trivial e não negativa do problema* (5.1) *explode em tempo finito ou explode em tempo infinito.*

(ii) *Quando* $p^+ > 1 + \dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$ *nós temos duas situações:*

(a) *Se* $p^- > 1 + \dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$, *então existe* $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ *tal que a correspondente solução do problema* (5.1) *é uma solução global não trivial.*

(b) *Se* $p^- < 1+\dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}$, *então existem funções* p *tais que todas as soluções do problema* (5.1) *explodem em tempo finito, e funções* p *tal que o problema* (5.1) *tem uma solução global nao trivial.*

O presente Capítulo está organizado da seguinte maneira, na Seção 5.2 apresentamos alguns resultados preliminares para o problema (5.1) e demonstramos os Teoremas 5.4, 5.5 e 5.6. Na Seção 5.3 apresentamos algumas preliminares e tratamos o problema do segundo expoente crítico de Fujita.

5.2 Primeiro expoente crítico de Fujita

Lema 5.7. *Suponha que* $p^+ > 1$ *e* $u_0 \in C_0(\Omega)$. *Se* $u \in C([0,T), C_0(\Omega))$ *é uma função contínua não negativa tal que* $\sup_{t\in[0,T)} \|u(t)\|_\infty < \infty$ *e satisfaz*

$$u(x,t) \geq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)u(\sigma)^{p(x)}d\sigma \tag{5.7}$$

para todo $t \in [0,T]$, *então existe uma constante* $C > 0$, *a qual depende da limitação de* u, p^+ *e* p^-, *tal que*

$$\|S(t)u_0\|_\infty^{p^+-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma \leq C \cdot \theta(M), \tag{5.8}$$

para todo $t \in [0,T)$, *onde* $\theta(M) = \rho(M)^{-\frac{p^+-1}{p^+}}$ *e* $\rho(M)$ *é dado por* (5.9).

Prova: Seja $M = \sup\limits_{t\in[0,T)} \|u(t)\|_\infty$. Como $u/M \leq 1$, de (5.7) temos

$$
\begin{aligned}
u(t) &\geq S(t)u_0 + \int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)M^{p(x)}\left[\frac{u(\sigma)}{M}\right]^{p(x)} d\sigma \\
&\geq S(t)u_0 + \int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)M^{(p(x)-p^+)}u(\sigma)^{p^+} d\sigma \\
&\geq S(t)u_0 + \rho(M)\int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)u(\sigma)^{p^+} d\sigma,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\rho(M) = \begin{cases} M^{p^- - p^+}, \text{ se } M > 1 \\ \quad\quad 1, \text{ se } M \leq 1 \end{cases} \tag{5.9}
$$

Logo,

$$
u(t) \geq S(t)u_0 + \rho(M)\int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)u(\sigma)^{p^+} d\sigma. \tag{5.10}
$$

Como $p^+ > 1$, de (5.10) temos que

$$
\begin{aligned}
u(t) &\geq \rho(M)\int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)[S(\sigma)u_0]^{p^+} d\sigma \\
&\geq \rho(M)[S(t)u_0]^{p^+}\int_0^t f(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}
$$

Usando esta desigualdade e (5.10) temos

$$
\begin{aligned}
u(t) &\geq \rho(M)^{p^+}\int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)\left\{\left(\int_0^\sigma f(s)ds\right)[S(\sigma)u_0(\sigma)]^{p^+}\right\}^{p^+} d\sigma \\
&\geq \rho(M)^{p^+}\int_0^t f(\sigma)\left(\int_0^\sigma f(s)ds\right)^{p^+} S(t-\sigma)[S(\sigma)u_0(\sigma)]^{(p^+)^2} d\sigma \\
&\geq \frac{1}{p^+ + 1}\left(\int_0^t f(s)ds\right)^{p^+ + 1}\rho(M)^{p^+}[S(t)u_0(\sigma)]^{(p^+)^2}.
\end{aligned}
$$

Por indução sobre n, é possível demonstrar que

$$
u(t) \geq C_n\left(\int_0^t f(s)ds\right)^{\frac{(p^+)^n - 1}{p^+ - 1}}\rho(M)^{(p^+)^n}[S(t)u_0]^{(p^+)^n}, \tag{5.11}
$$

onde

$$
C_1 = 1, \quad C_n = (C_{n-1})^{p^+}\left[\frac{(p^+)^n - 1}{p^+ - 1}\right]^{-1}. \tag{5.12}
$$

para $n \geq 2$.

Agora mostraremos que existe uma constante $\eta > 0$ dependendo só de p^+ tal que $C_n \geq \eta^{(p^+)^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\xi_n = -(p^+)^n \ln C_n$. Então é suficiente demonstrar que a sequência (ξ_n) é limitada superiormente. Observe que $\xi_i - \xi_{i-1} = (p^+)^{-i} \ln\left(\dfrac{C_{i-1}^{p^+}}{C_i}\right)$. De (5.12) temos que $\ln\left[\dfrac{C_{i-1}^{p^+}}{C_i}\right] = \ln\left[\dfrac{(p^+)^i - 1}{p^+ - 1}\right] \leq \ln(p^+ + 1)^i \leq \gamma i$ com $\gamma = \gamma(p^+) > 0$. Logo,

$$\xi_n - \xi_1 = \sum_{i=2}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}) \leq \gamma \sum_{i=2}^{\infty} r^{-i} \cdot i < \infty.$$

Portanto, (ξ_k) é limitada superiormente.

Finalmente, de (5.11), concluímos que

$$M^{\frac{1}{(p^+)^n}} \geq \eta \rho(M)^{\frac{1}{p^+}} \left(\int_0^t f(\sigma) d\sigma\right)^{\frac{1-\frac{1}{(p^+)^n}}{p^+-1}} S(t)u_0.$$

Fazendo $n \to \infty$, se segue o resultado.

$\square$

Lema 5.8. *Sejam $p^- > 1$ e $f \in C[0,\infty)$. Suponha que existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ satisfazendo*

$$\alpha = \int_0^{\infty} f(\sigma) \|S(\sigma)w_0\|_{\infty}^{p^- - 1} d\sigma < \infty. \tag{5.13}$$

Então, existe $u_0 \in C_0(\Omega)$ com $0 \leq u_0 \leq w_0$ tal que, se $(u_n)_{n \geq 0}$ é a sequência definida por

$$\begin{cases} u_0 &= S(t)u_0 \\ u_n(t) &= S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-\sigma) f(\sigma) u_{n-1}^{p(x)}(\sigma) d\sigma, \end{cases} \tag{5.14}$$

para todo $n \geq 0$ e todo $t \geq 0$. Então,

$$u_n(t) \leq (1+\alpha) S(t) u_0 \tag{5.15}$$

para todo $t \geq 0$.

Prova: Sejam $0 < \lambda \leq \min\left\{(1+\alpha)^{-\frac{p^+}{p^- - 1}}, \|w_0\|_{\infty}^{-1}\right\}$ e $u_0 = \lambda w_0$. Procedemos por indução sobre n. Para $n = 0$, é claro que (5.15) é verdade. Assumindo que (5.15) é verdade para n, mostraremos que é verdade para $n+1$. Como $p^- = \inf_{x\in\Omega} p(x)$ e $\|u_0\|_\infty = \|\lambda w_0\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x,t) &\leq S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t-\sigma)f(\sigma)((1+\alpha)S(t)u_0(x))^{p(x)}(x,\sigma)d\sigma \\
&\leq S(t)u_0(x) + (1+\alpha)^{p^+}\int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)(S(\sigma)u_0(x))^{p(x)}d\sigma \\
&\leq S(t)u_0(x) + (1+\alpha)^{p^+}\int_0^t f(\sigma)S(t-\sigma)(S(\sigma)u_0(x))^{[(p^- -1)+1]}d\sigma \\
&\leq S(t)u_0(x) + (1+\alpha)^{p^+}\int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{p^- -1}S(t-\sigma)S(\sigma)u_0(x)d\sigma \\
&\leq S(t)u_0(x) + (1+\alpha)^{p^+}S(t)u_0\int_0^t f(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{p^- -1}d\sigma \\
&\leq S(t)u_0(x) + (1+\alpha)^{p^+}\lambda^{(p^- -1)}\alpha S(t)u_0 \\
&\leq (1+\alpha)S(t)u_0
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$

$\square$

Lema 5.9. *Seja $f \in C[0,\infty)$ tal que $f(t) \sim t^q$ $(q > -1)$, para t suficientemente grande, e seja p uma função contínua definida em um domínio arbitrário $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tal que $1 < p^-$. Se existe um domínio $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que*

$$p(x) = p_0 < 1 + \frac{q+1}{\mu_1^*} \quad \textit{para todo} \quad x \in \Omega_1, \tag{5.16}$$

onde

$$\mu_1^* \equiv \mu^*(\Omega_1) = \sup\{\mu \geq 0; u_0 \in C_0(\Omega_1), u_0 \geq 0 \textit{ existe tal que} \\ \limsup_{t\to\infty} t^\mu \|S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} < \infty\}, \tag{5.17}$$

e $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor com condições de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega_1$, então a solução u do problema (5.1) com condição inicial $u_0 \in C_0(\Omega)$ e com expoente variável p cumprindo (5.16) explode em tempo finito.

Prova: Seja $w_0 \in C_0(\Omega_1)$ tal que $w_0(x) \leq u_0(x)$ para todo $x \in \Omega_1$. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f(t)w^{p_0} & \text{em } \Omega_1 \times (0,T), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1 \times (0,T), \\ 0 \leq w(0) = w_0 & \in C_0(\Omega_1). \end{cases} \tag{5.18}$$

É bem conhecido que a solução w do problema (5.18) explode em tempo finito, veja [7] e [26]. Observe que w é subsolução de u , logo o resultado se segue.

$\square$

Lema 5.10. *Seja $f \in C[0,\infty)$ tal que $f(t) \sim e^{\beta t}$ $(\beta > 0)$, para t suficientemente grande, e seja p uma função contínua definida em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tal que $1 < p^-$. Se existe um domínio $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que*

$$p(x) = p_0 < 1 + \frac{\beta}{\lambda_1(\Omega_1)} \quad para \quad todo \quad x \in \Omega_1, \tag{5.19}$$

onde

$$\lambda_1(\Omega_1) \tag{5.20}$$

é o primeiro autovalor do Laplaciano em Ω_1 com condições de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega_1$, então a solução u do problema (5.1) com condição inicial $u_0 \in C_0(\Omega)$ e com expoente variável p cumprindo (5.19) explode em tempo finito.

Prova: A prova é similar ao do Lema 5.9.

$\square$

Prova do Teorema 5.4. **(i)** Seja $u_0 \neq 0$ $u_0 \geq 0$. Suponha que a correspondente solução u de (5.1) com condição inicial u_0 é uma solução global. Temos duas possibilidades, u é limitado ou explode em tempo infinito, isto é, $\limsup_{t\to\infty} \|u(t)\|_\infty = \infty$.

Se u é limitado com $M = \sup_{t\in[0,\infty)} \|u(t)\|_\infty$, de (5.2) e do Lema 5.7, temos que existe $C > 0$ dependendo de M, p^+ e p^-, tal que

$$\|S(t)u_0\|_\infty^{p^+-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma \leq C,$$

para todo $t \in [0,\infty)$. Assim

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{p^+-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma \leq C,$$

o qual contradiz (5.5). Portanto, u explode em tempo finito.

(ii) Como (5.6) é verdade, então do Lema 5.8, temos que existe $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ tal que a sequência definida no Lema 5.8 verifica a estimativa (5.15). Fazendo indução sobre n, é possível concluir que $u_n \leq u_{n+1}$. Se $u(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t)$, então do Teorema da convergência monótona, (5.14), e (5.15), obtemos que u é uma solução global não trivial do problema (5.1).

Prova do Teorema 5.5. Os itens (i) e (ii) (parte (a)), seguem diretamente do Teorema 5.4. Mostraremos então a parte (b) do item (ii). Seja $u_0 \in C_0(\Omega)$. Primeiro observe que se Ω_1 é um subdomínio de Ω, então $\mu^*(\Omega) \leq \mu^*(\Omega_1)$ e

$$1 + \frac{1+q}{\mu^*(\Omega_1)} \leq 1 + \frac{1+q}{\mu^*(\Omega)}. \tag{5.21}$$

Agora seja $\Omega_1 \neq \Omega$ subdomínio de Ω, e o expoente variável $p(x) \in C(\Omega)$ tal que

$$1 < p(x) = p^- < 1 + \frac{1+q}{\mu^*(\Omega_1)}, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_1. \tag{5.22}$$

Logo, do Lema 5.9 obtemos que o problema (5.1) com expoente variável definido por (5.22), e condição inicial $u_0 \in C_0(\Omega)$ explode em tempo finito.

Agora mostraremos que existe uma função $p(x) \in C(\Omega)$, tal que, $1 < p^- < 1 + \dfrac{\beta}{\mu^*(\Omega)} < p^+$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N > 2$ tal que o problema (5.1) com $f(t) = 1$ para todo $t \in [0, \infty)$ tem uma solução global não trivial. Nossa meta é construir uma supersolução estacionária. Usaremos a supersolução que se encontra em [18] (exemplo 2) com uma pequena modificação. Sem perda de generalidade podemos assumir que $0 \in \Omega$. Escolhemos $R > 0$ tal que $x \in \Omega$ para todo $|x| < R$, e definimos o seguinte expoente descontínuo

$$r(x) = \begin{cases} p^+, & |x| > R, \\ p^-, & |x| \leq R, \end{cases} \tag{5.23}$$

onde $p^+ > \dfrac{N}{N-2} > 1 + \dfrac{2}{N} \geq 1 + \dfrac{1}{\mu^*(\Omega)} > p^- > 1$.

Na região $|x| > R$ com $x \in \Omega$, considere a supersolução radial $u_*(x) \cong U_*(|x|)$ da equação $-\Delta v = v^{p^+}$ em $\mathbb{R}^N$ (veja [44]) onde

$$U_*(r) = cr^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{2}{p^+ - 1}, \quad c = (\alpha(N - 2 - \alpha))^{\frac{1}{p^+-1}} \tag{5.24}$$

Na região $|x| < R$ consideramos a solução radial de

$$\begin{cases} -\Delta w &= w^{p^-} \quad \text{em } B_R(0), \\ w &= cR^{-\alpha} \quad \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases} \tag{5.25}$$

Então, escolhendo $R > 0$ suficientemente pequeno, a função

$$\overline{U}(x) = \begin{cases} w(|x|) & x \in B_R(0), \\ U^*(|x|) & x \in \overline{\Omega} - B_R(0), \end{cases} \tag{5.26}$$

é uma supersolução de nosso problema (5.1) com $r(x)$ como exponente (veja [18]). Como $R > 0$ é pequeno, $\overline{U}|\partial B_R(0) = cR^{-\alpha}$ e $\alpha > 0$, por continuidade existe $\delta > 0$ tal que $B_{R+\delta}(0) \subset \Omega$ e $\overline{U} > 1$ no anel $B_{R+\delta}(0) - B_R(0)$. Então definimos $p(x)$ como sendo qualquer função contínua que verifica

$$p(x) = \begin{cases} p^- & \text{em} \quad B_R(0), \\ p^+ & \text{em} \quad \overline{\Omega} - B_{R+\delta}(0), \\ p^- \leq p(x) \leq p^+ & \text{em} \quad B_{R+\delta}(0) - B_R(0). \end{cases} \tag{5.27}$$

Observe que $\overline{U}$ é uma solução de nosso problema com expoente variável $p(x)$. De fato, na região $B_R(0) \cup (\Omega - B_{R+\delta}(0))$, temos que $p(x) = r(x)$ e que $\overline{U}$ é uma supersolução de nosso problema (5.1) com expoente variável $r(x)$. Portanto é suficiente mostrar que $\overline{U}$ é supersolução no anel $B_{R+\delta}(0) - B_R(0)$, com efeito

$$\Delta\overline{U} + \overline{U}^{p(x)} \leq \Delta\overline{U} + \overline{U}^{p^+} = \Delta\overline{U} + \overline{U}^{r(x)} \leq 0. \tag{5.28}$$

Prova do Teorema 5.6. Os itens (i) e (ii) (parte (a)), seguem diretamente do Teorema 5.4. Mostraremos então a parte (b) do item (ii). Seja $u_0 \in C_0(\Omega)$. Primeiro observe que se Ω_1 é um subdomínio de Ω, então $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(\Omega_1)$ e

$$1 + \frac{\beta}{\lambda_1(\Omega_1)} \leq 1 + \frac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}. \tag{5.29}$$

Depois, defina o expoente variável $p(x) \in C(\Omega)$ com a seguinte propriedade :

$$1 < p(x) = p^- < 1 + \frac{\beta}{\lambda_1(\Omega_1)}, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}_1. \tag{5.30}$$

Logo, do Lema 5.10, obtemos que o problema (5.1) com expoente variável definido por (5.30), e condição inicial $u_0 \in C_0(\Omega)$ explode em tempo finito.

Agora mostraremos que existe uma função $p(x) \in C(\Omega)$, tal que, $1 < p^- < 1 + \dfrac{1+q}{\lambda_1(\Omega)} < p^+$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N > 2$ tal que o problema (5.1) com $f(t) = 1$ para todo $t \in [0, \infty)$ tem uma solução global não trivial.

Nossa meta é construir uma supersolução estacionária. Usaremos a supersolução que se encontra em [18] (exemplo2) com uma leve modificação. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $0 \in \Omega$. Escolhemos $R > 0$ tal que $x \in \Omega$ para todo $|x| < R$, e definimos o seguinte expoente descontínuo

$$r(x)=\begin{cases} p^{+}, & |x|>R,\\ p^{-}, & |x|\leq R,\end{cases} \tag{5.31}$$

onde $p^{+}>\dfrac{N}{N-2}>1+\dfrac{2}{N}\geq 1+\dfrac{\beta}{\lambda_1(\Omega)}>p^{-}>1$ (para Ω suficientemente grande).

Na região $|x|>R$ com $x\in\Omega$, considere a supersolução radial $u_*(x)\cong U_*(|x|)$ da equação $-\Delta v=v^{p^{+}}$ em $\mathbb{R}^N$(veja [44]). Onde

$$U_*(r)=cr^{-\alpha},\quad \alpha=\frac{2}{p^{+}-1},\quad c=(\alpha(N-2-\alpha))^{\frac{1}{p^{+}-1}}. \tag{5.32}$$

Na região $|x|<R$ consideramos a solução radial de

$$\begin{cases} -\Delta w &= w^{p^{-}} \quad \text{em} \quad B_R(0),\\ \quad w &= cR^{-\alpha} \quad \text{em} \quad \partial B_R(0).\end{cases} \tag{5.33}$$

Então, escolhendo $R>0$ suficientemente pequeno, a função

$$\overline{U}(x)=\begin{cases} w(|x|) & x\in B_R(0),\\ U^*(|x|) & x\in\overline{\Omega}-B_R(0),\end{cases} \tag{5.34}$$

é uma supersolução de nosso problema (5.1) com $r(x)$ como expoente (veja [18]). Como $R>0$ é pequeno, $\overline{U}|\partial B_R(0)=cR^{-\alpha}$ e $\alpha>0$, por continuidade existe $\delta>0$ tal que $B_{R+\delta}(0)\subset\Omega$ e $\overline{U}>1$ no anel $B_{R+\delta}(0)-B_R(0)$. Então, definimos $p(x)$ como sendo qualquer função contínua que verifica

$$p(x)=\begin{cases} p^{-} & \text{em} \quad B_R(0),\\ p^{+} & \text{em} \quad \overline{\Omega}-B_{R+\delta}(0),\\ p^{-}\leq p(x)\leq p^{+} & \text{em} \quad B_{R+\delta}(0)-B_R(0).\end{cases} \tag{5.35}$$

Observe que $\overline{U}$ é uma solução de nosso problema com expoente variável $p(x)$. De fato, na região $B_R(0)\cup(\Omega-B_{R+\delta}(0))$, temos que $p(x)=r(x)$ e que $\overline{U}$ é uma supersolução de nosso problema (5.1) com expoente variável $r(x)$, portanto é suficiente mostrar que $\overline{U}$ é supersolução no anel $B_{R+\delta}(0)-B_R(0)$, de fato temos

$$\Delta\overline{U}+\overline{U}^{p(x)}\leq\Delta\overline{U}+\overline{U}^{p^{+}}=\Delta\overline{U}+\overline{U}^{r(x)}\leq 0. \tag{5.36}$$

$\square$

5.3 Segundo expoente crítico de Fujita

Consideremos o seguinte problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \triangle u &= f(t)u^{p(x)} \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) \geq 0 \quad \text{em } C_b(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{5.37}$$

onde $C_b(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em $\mathbb{R}^N$, $f \in C[0,\infty)$, e $p(x) \in C_b(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$0 < p^- \leq p(x) \leq p^+ \quad \text{para todo } \ x \in \Omega,$$

onde

$$p^- = \inf_{x\in\Omega} p(x) \qquad\qquad p^+ = \sup_{x\in\Omega} p(x).$$

No que segue, consideraremos os seguintes conjuntos :

$$\begin{aligned} I^a &= \{\psi \in C_b(\mathbb{R}^N) : \psi \geq 0 \text{ e } \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \psi(x) < \infty\}, \\ I_a &= \{\psi \in C_b(\mathbb{R}^N) : \psi \geq 0 \text{ e } \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \psi(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Nesta seção os nossos resultados são os seguintes :

Teorema 5.11. *Sejam $p^- > 1$ e $f \in C[0,\infty)$.*

i.- Suponha que

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{2}\min\{a,N\}p^+ + \frac{1}{2}\min\{a,N\}} \int_0^t f(\sigma)d\sigma = \infty. \tag{5.38}$$

Então, qualquer solução v do problema (5.37) com condição inicial $v_0 \in I_a$ explode em tempo finito, ou v explode em tempo infinito, isto é, $\limsup_{t\to\infty} \|v(t)\|_\infty = \infty^+$.

ii.- Suponha que

$$\int_0^\infty f(\sigma)\sigma^{-\frac{1}{2}\min\{a,N\}p^- + \frac{1}{2}\min\{a,N\}} d\sigma < \infty. \tag{5.39}$$

Então, para qualquer $w_0 \in I^a$, existe $\Lambda_0 > 0$ constante dependendo de p^+, p^-, e w_0, tais que, para todo $0 < \lambda < \Lambda$, a solução u de (5.37) como condição inicial λw_0 é uma solução global não trivial. Mais ainda, existe uma constante $\gamma > 0$ tal que $u(t) \leq (1+\gamma)S(t)u_0$.

Quando $f(t) \sim t^q$ para t suficientemente grande, obtemos o seguinte Corolário:

Corolário 5.12. *Suponha que* $p^- > 1 + \dfrac{2}{N}$, *e* $f(t) \sim t^q$ *com* $q > -1$, *para* t *suficientemente grande. Temos que*

(i) *Se* $a < \dfrac{2q+2}{p^+ - 1}$, *então qualquer solução não trivial e não negativa* v *do problema* (5.37) *como condição inicial* $v_0 \in I_a$, *explode em tempo finito ou explode em tempo infinito, i.e.* $\limsup\limits_{t \longrightarrow \infty} \|v(t)\|_\infty = \infty$.

(ii) *Se* $\dfrac{2q+2}{p^- - 1} < a$, *então para qualquer* $w_0 \in I^a$, *existe* $\Lambda > 0$ *constante dependendo de* p^+, p^- *e* w_0 *tal que a solução do problema* (5.37) *com condição inicial* λw_0 *é uma solução global não trivial, para todo* $0 < \lambda < \Lambda$.

(iii) *Se* $\dfrac{2q+2}{p^+ - 1} < a < \dfrac{2q+2}{p^+ - 1}$, *então existem funções* $p(x)$ *tal que todas as soluções do problema* (5.37) *com condição inicial* $u_0 \in I_a$ *explodem em tempo finito.*

Na seguinte subseção apresentamos algumas preliminares, e demonstramos o Teorema 5.11 e o Corolário 5.12.

5.3.1 Segundo expoente crítico do problema (5.37)

Considerando

$$q(t; a, n) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}\min a, N}, & \text{se } a \neq n, \\ t^{-\frac{N}{2}} \quad\quad\quad, & \text{se } a = n, \end{cases}$$

temos o seguinte

Lema 5.13. *(i)* $\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = O(q(t; a, N))$, *para* t *suficientemente grande, e qualquer* $u_0 \in I^a$.

(ii) $q(t; a, N) = O(\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})$, *para* t *suficientemente grande, e qualquer* $u_0 \in I_a$.

(iii) $t^{-\frac{N}{2}} = O(\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})$, *para* t *suficientemente grande, e qualquer* $u_0 \in C_b(R^N)$.

Prova: Para a demonstração veja Lema 2.12 de [25]. ∎

Agora definamos o cone Ω' da seguinte forma

$$\Omega' = \{x_0 + \theta(a + y); \theta > 0, y \in \mathbb{R}^N, y.a = 0, |y| < R\}, \tag{5.40}$$

onde $x_0, a \in \mathbb{R}^N$, $a \neq 0$, $R > 0$, e y.a é o produto escalar usual em $\mathbb{R}^N$.

O seguinte resultado é devido a Souplet e Weissler, e será muito importante para obter resultado de explosão em tempo finito.

Teorema 5.14. *Seja Ω um domínio ilimitado de $\mathbb{R}^N$ contendo um cone Ω', $f =$ constante $=$ 1, e $p(x) = p =$ constante > 1. Se existe uma constante $C(\Omega') > 0$ tal que, a condição inicial $u_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ do problema (5.37) satisfaz*

$$\liminf_{|x|\to\infty, x\in\Omega'} u_0(x)|x|^{\frac{2}{p-1}} > C(\Omega'),$$

então a solução u de (5.37) como condição inicial u_0 explode em tempo finito.

Prova: Para a demonstração veja Teorema 2 de [66], e para informações adicionais veja [67].

$\square$

Prova do Teorema 5.11. **(i)** Seja $u_0 \in I_a$. Do Lema 5.13 temos que para t suficientemente grande, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$Ct^{-\frac{1}{2}\min\{a,N\}p^+ + \frac{1}{2}\min\{a,N\}} \leq \|S(t)u_0\|_\infty^{p^+-1}.$$

Logo, de (5.38) temos

$$\begin{aligned} \infty &= C\limsup_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{2}\min\{a,N\}p^+ + \frac{1}{2}\min\{a,N\}} \int_0^t f(\sigma)d\sigma, \\ &\leq \limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{p^+-1} \int_0^t f(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Portanto, do Teorema 5.4, obtemos o resultado desejado.

(ii) Seja $w_0 \in I^a$ tal que (5.39) é verdade. Do Lema 5.13 temos que para t suficientemente grande, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|S(t)w_0\|_\infty^{p^--1} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\min\{a,N\}p^+ + \frac{1}{2}\min\{a,N\}}$$

logo, de (5.38) temos que

$$\int_0^\infty \|S(\sigma)\|_\infty^{p^--1} f(\sigma)d\sigma \leq \int_0^\infty f(\sigma)\sigma^{-\frac{1}{2}\min\{a,N\}p^- + \frac{1}{2}\min\{a,N\}}d\sigma < \infty.$$

Portanto, do Teorema 5.4, obtemos a conclusão desejada.

□

Prova do Corolário 5.12. Os itens (i) e (ii) são imediatos pelo Teorema 5.11. Mostraremos então a veracidade do item (iii) no caso $q = 0$.

Considere o expoente contínuo $p(x) > 0$ tal que

$$p(x) \equiv constante = p^- > 1 \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in D_{R_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R_0 > 0\}$$

e $\dfrac{2}{p^+ - 1} < a < \dfrac{2}{p^- - 1}$.

Temos que para $u_0 \in I_a$ existe uma constante $C_1 > 0$ e $R_1 > 0$ tal que $u_0(x) \geq C_1\psi(x)$ para todo $x \in D_{R_1} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R_1\}$ onde $\psi(x) = |x|^{-a}$.

Considere a seguinte função definida para todo $x \neq 0$:

$$\widetilde{\psi}(x) = \psi(x)\phi(x),$$

onde $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \geq R_2 + 1, \\ 0, & \text{se } |x| \leq R_2, \end{cases}$$

onde $R_2 > \max\{R_0, R_1\}$. Assim, temos que $u_0 \geq C_1\psi(x) \geq C_1\widetilde{\psi}(x)$, e observe também que $C_1\ \widetilde{\psi}/D_{R_2} \in C_0(\overline{D_{R_2}})$.

Agora considere o seguinte problema parabólico definido no domínio exterior $D_{R_2} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R_2\}$.

$$\begin{cases} v_t - \triangle v &= v^{p^-} \quad \text{em} \quad D_{R_2} \times (0, T), \\ v &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial D_{R_2} \times (0, T), \\ v(0) &= C_1\ \widetilde{\psi}/D_{R_2}, \end{cases} \tag{5.41}$$

onde $\widetilde{\psi}/D_{R_2}$ é uma restrição da função $\widetilde{\psi}$ no domínio exterior D_{R_2}. Mostraremos que a solução v deste problema explode em tempo finito.

Consideremos o cone

$$\Omega_1 = \{(R_2 + 1)e_1 + \theta(e_1 + y) : \theta > 0,\ y \in \mathbb{R}^N,\ y.e_1 = 0,\ |y| < R\}$$

$$\text{onde } e_1 = (1, 0, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^N.$$

Note que $|x| > R_2 + 1$, para todo $x \in \Omega_1$. Logo $\Omega_1 \subset D_{R_2}$ e

$$\begin{aligned}
\liminf_{|x|\to\infty, x\in\Omega_1} |x|^{\frac{2}{p^- -1}} \left(\widetilde{\psi}/D_{R_2}\right)(x) &= \liminf_{|x|\to\infty, x\in\Omega_1} |x|^{\frac{2}{p^- -1}} \widetilde{\psi}(x) \\
&= \liminf_{|x|\to\infty, x\in\Omega_1} |x|^{\frac{2}{p^- -1}} \psi(x) \\
&= \liminf_{|x|\to\infty, x\in\Omega_1} C_3 |x|^{\frac{2}{p^- -1}} |x|^{-a} > C_3.
\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 5.14 a solução v do problema (5.41) com condição inicial $C_1\ \widetilde{\psi}/D_{R_2}$ explode em tempo finito. Observe também que a solução u do problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \triangle u(x,t) &= (u(x,t))^{p(x)} \quad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0 \in I_a, \end{cases}$$

é uma supersolução da solução v do problema (5.41) com condição inicial $C_1\ \widetilde{\psi}/D_{R_2}$. Portanto u explode em tempo finito.

$\square$

Referências

[1] ARIS, R. *The Mathematical Theory of diffusion and reaction in Permeable Catalysts*, Clarendon Press, Oxeford University Press, New York, v. 1 , 1975.

[2] BEBERNES, J.; EBERLY, D. *Mathematical Problems from Combustion Theory*, Applied Math. Sciences, Springers, New York, 1989.

[3] BELLMAN, R. *Mathematical Methods in Medicine*, Wourld Scientific, Singapore, 1983.

[4] CHILDRESS, S.; PERCUS, J. K. *Mathematical Models in Developmental Biology*, Courant Inst. of Math. Sciences, New York University, 1978.

[5] GAVALAS, G. R. *Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems*, Springers Tracts in Natural Philosophy. Springer-Verlag, New York, New York, v. 17, 1968.

[6] ZEL'DOVICH Y. B.; BARENBLATT G. I.; LIBROVICH, V. B.; MAKHVILADZE, G. M. *The mathematical theory of combustion and explosions*, Consultants Bureau, New York, 1985.

[7] MEIER, P. *On the critical exponent for reaction-diffusion equations*, Arch. Rational Mech. and Analysis, v. 109, p. 63-71, 1990.

[8] DENG, K.; LEVINE, H. A. *The role of critical in Blow-up theorems: the sequel*, Jour. Math. Anal. and App., v. 243, p. 85-126, 2000.

[9] FUJITA, H. *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Tokyo, p. 109-124, 1966.

[10] LEVINE, H. A. *The role of critical exponents in blowup theorems*, SIAM Review, v. 32, p. 262-288, 1992.

[11] LEVINE, H. A.; MEIER, P. *The value of the critical exponent for reaction-diffusion equations in cones*, Arch. Rational Mech. and Analysis, v. 109, p. 73-80, 1990.

[12] MEIER, P. *Blow-up of solutions of semilinear parabolic differential equations*, J. Appl. Math. Physics (ZAMP), p. 135-149, 1988.

[13] WEISSLER, F. *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math., v. 38, p. 29-40, 1981.

[14] WEISSLER, F. *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in* L^p, Indiana Univ. Math. J., v. 29, p. 79-120, 1980.

[15] HAYAKAWA, K. *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proc. Japan Acad. , v. 49 , p. 503-505, 1973.

[16] KOBAYASHI, K.; SIRAO, T.; TANAKA, H. *On the blowing up problem for semilinear heat equation*, J. Math. Soc. Japan, v. 29, p. 407-429, 1977.

[17] BANDLE, C.; LEVINE, H. A. *On the existence and nonexistence of global solutions of reaction-diffusion equations in sectorial domains*, Trans. Am. Math. Soc, v. 316 , p. 595-622, 1989.

[18] FERREIRA R.; DE PABLO, A.; PÉREZ-LLANOS, M.; ROSSI, J.D. *Critical exponents for a semilinear parabolic equation with variable reaction*, Proc.Roy. Soc. Edinburgh: Sec.A, v. 142 , p. 1027-1042, 2012.

[19] PINASCO, P. *Blow-up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents*, Nonlinear Anal., v. 71 , p. 1049-1058, 2009.

[20] KHELGHATI, A.; BAGHAEI, K. *Blow-up in a semilinear parabolic problem with variable source under positive initial energy*, Applicable Analysis: An International Journal, 2014.

[21] BAI, X.; ZHENG, S. *A semilinear parabolic system with coupling variable exponents*, Annali di Matematica, 2011.

[22] WANG, H.; He, Yijun *On blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy*, Applied Mathematics Letters, v. 26 , p. 1008-1012, 2013.

[23] WUA, X.; GUOA, B.; GAO, W. *Blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy*, Applied Mathematics Letters, v. 26 , p. 539-543, 2013.

[24] DIENING, L.; HARJULEHTO, P.; HÄSTÖ, P.; RU̇ŽČKA, M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, v. 2017, 2011.

[25] LEE, T. Y.; NI, W. *Global existence, large time behavior and life span of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 333, p. 262-288, 1992.

[26] CASTILLO, R.; LOAYZA, M. *On the critical exponent for some semilinear reaction-diffusion systems on general domains*, J. Math.Anal.Appl., v. 428, p. 1117-1134, 2015.

[27] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[28] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies im Mathematics, American Mathematical Society, v. 19, 1998.

[29] DICKSTEIN, F.; ESCOBEDO, M. *A maximum principle for semilinear parabolic systems and applications*, Nonlinear Analysis, v. 45, p. 825-837, 2001.

[30] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[31] CAZENAVE, T.; HARAUX, A. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press Oxford, 1998.

[32] BRÉZIS, H.; CAZENAVE, T. *Nonlinear evolution equation(in preparation)*, 1994.

[33] ESCOBEDO, M.; HERRERO, M. A. *Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system*, J. Diff. Eq., v. 89, p. 176-202, 1991.

[34] ESCOBEDO, M.; HERRERO M. A. *A semilinear parabolic system in a bounded domain*, Ann. Mat. Pura Appl., v. 4, p. 315-336, 1993.

[35] DICKSTEIN, F.; LOAYSA, M. *Life span of solutions of a weakly coupled parabolic system*, Z. Angew. Math. Phys., v. 59, p. 1-23, 2008.

[36] IGARASHI, T.; UMEDA, N. *Existence and nonexistence of global solutions in time for a reaction-diffusion system with inho-mogeneous terms*, Funkcial. Ekvac. , v. 51 , p. 17-37, 2008.

[37] IGARASHI, T.; UMEDA, N. *Nonexistence of global solutions in time for reaction-diffusion system with inhomogeneous terms in cones*, Tsukuba J. Math. , v. 33 , p. 131-145, 2009.

[38] IGARASHI, T.; UMEDA, N. *Existence of global solutions in time for reaction-diffusion systems with inhomogeneous terms in cones*, Hiroshima Math. J. , v. 42 , p. 267-291, 2012.

[39] MOCHIZUKI, K.; HUANG, Q. *Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Methods Appl. Anal., v. 5 , p. 109-124, 1998.

[40] QUI, Y.W.; LEVINE, H.A. *The critical exponent of degenerate parabolic systems*, Z. Angew. Math. Phys., v. 44 , p. 249-265, 1993.

[41] UMEDA, N. *Existence and nonexistence of global solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Commun. Appl. Anal., v. 10, p. 57-78, 2006.

[42] CUI, S. *Global behavior of solutions to a reaction-diffusion system*, Nonlinear Analysis, v. 4 , p. 351-379, 2000.

[43] SNOUSSI, S.; TAYASHI, S. *Asymptotic self-similar behavior of solutions for a semilinear parabolic system*, Commun. Contemp. Math., v. 3 , p. 363-392, 2001.

[44] QUITNER, P.; SOUPLET, P. *Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States*, Birkhäuser Adv. Texts, 2007.

[45] ESCOBEDO, M.; LEVINE, H. A. *Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Arch. Rational Mech. and Analysis, v. 129, p. 47-100, 1995.

[46] LOAYZA, M.; SANTOS, C. *Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation on a general domain*, Electronic Journal of Differential Equations, v. 2014, p. 1-9, 2014.

[47] DICKSTEIN, F.; LOAYZA, M. *Life span of solutions of a strongly coupled parabolic system*, Matemática Comtemporânea, v. 32, p. 85-106, 2007.

[48] Lu, G. *Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: A Cauchy problem*, Theory, Methods & Applications Nonlinear Analysis, v. 24, n. 8, p. 1193-1206, 1995.

[49] SNOUSSI, S.; TAYASHI, S. *Global existence, asymptotic behavior and self-similar solutions for a class of semilinear parabolic systems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods, Applications, v. 48, p. 13-35, 2002.

[50] Zou, H. *Blow-up rates for semi-linear reaction-diffusion systems*, J. Differential Equations, v. 257, p. 843-867, 2014.

[51] GALAKTIONOV, V. A.; LEVINE H. A. *A general approach to critical fujita exponents in nonlinear parabolic problems*, Nonlinear Anal, v. 34, p. 1005-1027 , 1998.

[52] YANG, J.; YANG, C.; ZHENG S. *Second critical exponent for evolution p-Laplacian equation with weighted source*, Mathematical and Computer Modelling, v. 56 , p. 247-256, 2012.

[53] YANG, J.; YANG, C.; ZHENG S.; QU C. *Fujita phenomenon in inhomogeneous fast diffusion system*, Z. Angew. Math. Phys. , v. 64 , p. 311-319, 2013.

[54] YANG, J.; ZHOU, S.; ZHENG, S. *Asymptotic Behavior of The Nonlocal Diffusion equations with localized source*, Proceedings of the American Mathematical Society, v. 142, Number 10, p. 3521-3532, 2014.

[55] LI, Z.; DU, W. *Life span and secondary critical exponent for degenerate and singular parabolic equations*, Annali di Matematica, v. 193, p. 501-515, 2014.

[56] MI, Y.; MU, C.; ZENG, R. *Secondary critical exponent, large time behavior and life span for a quasilinear parabolic equation with slowly decaying initial values*, Z. Angew. Math. Phys., v. 62 , p. 961-978, 2011.

[57] MU, C.; LI, Y.; WANG, Y. *Life span and a new critical exponent for a quasilinear degenerate parabolic equation with slow decay initial values*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, v. 11, p. 198-206, 2010.

[58] MU, C.; ZENG, R.; ZHOU, S. *Life span and a new critical exponent for a doubly degenerate parabolic equation with slow decay initial values*, J. Math. Anal. Appl., v. 384 , p. 181-191, 2011.

[59] MUKAI, K.; MOCHIZUKI K.; HUANG, Q. *Large time behavior and life span for a quasilinear parabolic equation with slowly decaying initial values*, Nonlinear analysis, v. 39 , p. 33-45, 2000.

[60] YANG, C.; CAO, Y.; ZHENG, S. *Second critical exponent and life span for pseudo-parabolic equation*, J. Differential Equations, v. 253 , p. 3286-3303, 2012.

[61] YANG, C.; ZHENG, S.; ZHOU, S. *Critical exponents in a degenerate parabolic equation with weighted source*, Applicable Analysis, v. 92, No. 4, 2013.

[62] YANG, C.; JI, F.; ZHOU S. *The second critical exponent for a semilinear nonlocal parabolic equation*, J. Math.Anal.Appl., v. 418, p. 231-237, 2014.

[63] LI, Y.; MU Ch. *Life span and a new critical exponent for a degenerate parabolic equation*, J. Differential Equations, v. 207 , p. 392-406, 2004.

[64] ZHENG P.; MU, Ch. *Global existence, large time behavior, and life span for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and source*, v. 65 , p. 471-486, 2014.

[65] PINSKY, R. G. *Existence and nonexistence of global solutions for* $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ *in* $\mathbb{R}^d$, Jour. Diff. Equations, v. 133 , p. 152-177, 1997.

[66] SOUPLET, P.; WEISSLER, F. *Self-similar subsolutions and blow-up for nonlinear parabolic equations*, J. Math. Anal. Appl., v. 212 , p 60-74, 1997.

[67] ROUCHON, P. *Blowup of solutions of nonlinear heat equations in unbounded domains for slowly decaying initial data*, Z. Angew. Math. Phys., v. 52 , p. 1017-1032, 2001.