



**Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática e Tecnológica Curso de
Mestrado**

ANDERSON DOUGLAS PEREIRA RODRIGUES DA SILVA

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁREA COMO GRANDEZA GEOMÉTRICA: UM
ESTUDO POR MEIO DOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS, MATERIAIS
MANIPULATIVOS E NO APPRENTI GÉOMÈTRE 2 NO 6ºANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Recife
2016

ANDERSON DOUGLAS PEREIRA RODRIGUES DA SILVA

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁREA COMO GRANDEZA GEOMÉTRICA: UM
ESTUDO POR MEIO DOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS, MATERIAIS
MANIPULATIVOS E NO APPRENTI GÉOMÈTRE 2 NO 6º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

Recife
2016

Catálogo na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

- S586e Silva, Anderson Douglas Pereira Rodrigues da.
Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental / Anderson Douglas Pereira Rodrigues da Silva. – Recife: O autor, 2016.
315 f ; 30 cm.
Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.
Inclui Referências e Apêndices.
1. Matemática (ensino fundamental) - Estudo e ensino.
2. Geometria. 3. Software Apprenti Géomètre 2. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Cavalcante, Patrícia Smith. II. Título.
- 372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2016-15)

ANDERSON DOUGLAS PEREIRA RODRIGUES DA SILVA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁREA COMO GRANDEZA GEOMÉTRICA: UM ESTUDO POR MEIO DOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS, MATERIAIS MANIPULATIVOS E NO APPRENTI GÉOMÈTRE 2 NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 16/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a Dr^a Paula Moreira Baltar Bellemain (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a Dr^a Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a Dr^a Cibelle de Fátima Castro de Assis (Examinadora Externa)
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus; autor da minha fé, a Ele seja dada toda honra, glória e louvor para sempre, meu amigo de todas as horas.

À minha família, meus pais Rostan e Neide e minha irmã Thalya pelo carinho dispensado nos momentos de escrita desta dissertação.

À minha noiva Jessyca pela paciência, apoio e compreensão durante todos os momentos que precisei me ausentar para pesquisar e concluir este trabalho.

À minha eterna professora e amiga Walenska Maysa, por ter acreditado que conseguiria chegar até aqui, mesmo quando nem eu mesmo acreditava.

À minha orientadora professora Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain, uma grande pesquisadora, com quem aprendi muito durante esses anos a grandeza de seus ensinamentos me permitiram vislumbrar novos horizontes em Educação Matemática. Essas linhas também não são suficientes para externar minha gratidão.

À professora e amiga Verônica Gitirana pelo acolhimento durante os momentos em que tanto precisei, suas contribuições foram sem dúvida, fundamentais para a realização desta pesquisa.

Ao professor Franck Bellemain pela disponibilidade de bibliografias que me permitiram ampliar meus conhecimentos sobre a Geometria Dinâmica e por se mostrar prestativo em contribuir sempre que fosse preciso.

Às professoras Cibelle Assis e Verônica Gitirana pelas importantes contribuições na minha banca de qualificação.

Aos amigos do grupo LEMATEC, em especial a Emanuelle, Juliana, Luciana, Núbia, Ricardo, Rosilângela, Roberto, Suzana e Wilson, pelas contribuições e apoio nos momentos em que tanto precisei.

Aos amigos do Pró-Grandezas em especial a Alexandre pelas leituras do texto e contribuições para o aperfeiçoamento desta pesquisa.

Aos amigos do GEEMAT – Grupo de Estudo em Educação Matemática da Faculdade Dirson Maciel de Barros, Goiana-PE, em especial a Amanda, Amaury e Walenska pela participação nos momentos de aplicação e coleta de dados da pesquisa.

Aos alunos, sujeitos da pesquisa. Ao CREM (*Centre Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*) que se mostraram disponíveis sempre que solicitei ajuda.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa de estudo durante todo o período de realização deste Mestrado.

Aos amigos Clara e Mário pela atenção e por sempre estarem dispostos a tirar nossas dúvidas na secretaria do EDUMATEC.

Às amigas Djanira, Maria José Henrique, Ione, Maria de Lurdes, Wilma Pessoa e Marineuza pelo acolhimento, disponibilidade da escola e participação na coleta de dados da pesquisa e a você leitor que deseja aperfeiçoar seus conhecimentos sobre área como grandeza geométrica.

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo investigar o tratamento dado por alunos do 6º ano do ensino fundamental às situações que dão sentido a área como grandeza, em ambientes com características distintas: papel e lápis, materiais manipulativos e no software de geometria *Apprenti Géomètre 2*. Como suporte teórico, utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud e seus colaboradores e a abordagem de área como grandeza geométrica proposta por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Os estudos das situações que dão sentido a área como grandeza propostos por Paula Baltar e por Lúcia Durão Ferreira levam a considerar quatro grandes classes de situações: comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície. Os procedimentos metodológicos utilizam alguns elementos da Engenharia Didática, mais especificamente a análise a priori das tarefas como elemento central de apoio e justificativa das escolhas realizadas na elaboração das tarefas e na determinação dos critérios de análise das produções dos alunos. O dispositivo experimental foi estruturado em duas grandes etapas, nas quais os sujeitos realizaram tarefas com papel e lápis, materiais manipulativos e no software *Apprenti-Géomètre 2*. A primeira etapa visava a familiarização com os recursos, ambientes e conhecimentos necessários a serem reinvestidos na segunda etapa, a qual, por sua vez, consistiu na resolução de tarefas sobre área. As duas etapas foram vivenciadas por 12 alunos do 6º ano de uma escola pública municipal situada na Zona da Mata do estado de Pernambuco. Na análise a posteriori, foram caracterizados os procedimentos utilizados pelos alunos e identificados teoremas em ação subjacentes aos mesmos. Os sujeitos da pesquisa mostraram dominar parcialmente ou plenamente na comparação das áreas procedimentos de inclusão e sobreposição, como também decomposição e recomposição de figuras. A pluralidade de recursos tanto no ambiente materiais manipulativos, como no *Apprenti Géomètre 2*, favoreceu a utilização de tais procedimentos, permitindo a superação de concepções geométricas de área. Vários sujeitos mobilizam teoremas em ação verdadeiros – segundo os quais a área é invariante por isometrias e o corte e colagem sem perda nem sobreposição conserva as áreas. Identificamos ainda que nas situações de medida de área e mudança de unidade o aspecto numérico da área prevalece independente da utilização da diversidade de recursos oferecidos nos ambientes, pois para muitos dos sujeitos da pesquisa só é possível medir a área de uma figura se for possível ladrilhá-la, assim como o número parece ser suficiente para determinar as áreas das figuras, nesse tipo de situação, indicando assim indícios de concepção numérica de área.

PALAVRAS-CHAVE: Área. Grandeza Geométrica. Ambientes.

RÉSUMÉ

La présente étude a pour but d'étudier le traitement fait par des élèves de 6^o à des situations qui donnent du sens à l'aire en tant que grandeur dans des environnements présentant des caractéristiques distinctes: papier/crayon, matériel de manipulation et le logiciel de géométrie "Apprenti Géomètre 2". Comme support théorique, nous utilisons la théorie des champs conceptuels développée par Gérard Vergnaud et ses collaborateurs et la notion d'aire comme grandeur géométrique proposée par Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin-Glorian. L'étude de situations qui donnent du sens à la notion d'aire comme grandeur proposées par Paula Baltar et Lucia Durão Ferreira conduit à considérer quatre grandes catégories de situations comparaison d'aires, mesure d'aire, le changement d'unité et production de surfaces.

Les principes méthodologiques utilisent certains éléments de l'Ingénierie Didactique, en particulier l'analyse a priori des tâches comme un élément central de justification des choix faits dans l'élaboration des tâches et la détermination des critères d'analyse de la production des élèves. Le dispositif expérimental a été structuré en deux grandes étapes, pour lesquelles les sujets ont effectué des tâches avec papier/crayon, du matériel de manipulation et le logiciel "Apprenti géomètre 2". La première étape visait à ce que les élèves se familiarisent avec les ressources, les environnements et les connaissances nécessaires pour la deuxième étape, qui, à son tour, consistait en la résolution de tâches à propos de l'aire. Les deux étapes ont été effectuées par 12 élèves de 6e d'une école publique municipale de la "zone da mata" de Pernambuco. Dans l'analyse a posteriori, les procédures mises en œuvre par les élèves ont été caractérisées et les théorème-en-actes sous-jacents identifiés. Les sujets ont montré qu'ils dominaient partiellement ou totalement les procédures d'inclusion et de recouvrement pour la comparaison d'aires, ainsi que la décomposition et la recomposition de figures. La multiplicité de ressources autant en ce qui concerne le matériel de manipulation que l'environnement "Apprenti Géomètre 2", a favorisé l'utilisation de telles procédures, permettant de surmonter les conceptions géométriques de l'aire. Plusieurs sujets ont mobilisé des théorème-en-actes vrais –selon lesquels l'aire est invariante par isométrie et par le découpage-recollement sans perte ni superposition. Nous avons également identifié que dans les situations de mesure d'aire et de changement d'unité, l'aspect numérique de l'aire prévaut indépendamment de l'utilisation de la diversité des ressources disponibles dans les environnements proposés, notamment parce que pour la plupart des sujets, on ne peut mesurer l'aire d'une figure si elle peut être quadrillée, ainsi le nombre semble suffisant pour déterminer l'aire des figures dans ce type de situation, faisant apparaître des indices d'une conception numérique de l'aire.

MOTS-CLES: Aire. Grandeur Géométrique. Environnements.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Organização conceitual da área como grandeza	29
Figura 2- Esquema dos tipos de situação.....	30
Figura 3- Comparação de área por inclusão de S1 em S2	32
Figura 4- Comparação por sobreposição após deslocar (translação) e girar (rotação) “S ₁ ” ...	32
Figura 5- Decomposição e recomposição.....	33
Figura 6- Produção de superfície de área menor e maior que uma superfície dada	36
Figura 7- Produção de superfície de área menor e maior que uma superfície dada	37
Figura 8- Processo de decomposição no <i>Apprenti Géomètre 2</i> pela diagonal de um quadrado	43
Figura 9- Organização da sala do dispositivo de familiarização 1º momento.....	47
Figura 10- Familiarização no AG 2	49
Figura 11- Passos para executar o software	50
Figura 12- Organização da sala do Dispositivo Central primeira parte	51
Figura 13- Organização da sala para aplicação das entrevistas.....	53
Figura 14- Inclusão da figura A na figura B.....	60
Figura 15- Justaposição lados das figuras A e B	61
Figura 16- Sobreposição de C em A.....	61
Figura 17 - Sobreposição do paralelogramo D ao retângulo A	62
Figura 18- Sobreposição de E e F à A	63
Figura 19- Decomposição de “E” e comparação por sobreposição à “A”	63
Figura 20- Decomposição, recomposição e sobreposição da figura F à figura A	64
Figura 21- Tarefa 2 no ambiente materiais manipulativos	67
Figura 22- Composição da figura G	70
Figura 23- Quadriculando as figuras A, B, C e D com segmentos.....	71
Figura 24 - Ladrilhagem das figuras A, B, C e D.....	71
Figura 25- Decomposição e recomposição do Tetraminó	72
Figura 26- Decomposição do paralelogramo E	73
Figura 27- Sobreposição de B e F em A e de A em G	74
Figura 28- Comparação de A com B	74
Figura 29- Procedimento de Ladrilhagem no <i>Apprenti Géomètre 2</i>	79
Figura 30- Processo de medida pela contagem na malha	83
Figura 31- Pavimentação das figuras A e B	84

Figura 32- Tentativa de ladrilhamento da figura C	85
Figura 33- Processo de decomposição da unidade U	86
Figura 34- Equidecomposição da unidade U.....	87
Figura 35-Ladrilhamento do triângulo C com decomposições de V.....	88
Figura 36-Distinção entre a área da unidade e a unidade como medida de área.....	89
Figura 37- Figuras desenhadas no interior e exterior de Y.....	93
Figura 38- Decomposição e recomposição de Y	94
Figura 39- Produção de superfície preservando a forma de uma figura dada	95
Figura 40- Resolução da tarefa 3	99
Figura 41- Conjunto de peças da tarefa 4	101
Figura 42 – Ladrilhamento da tarefa 4	102
Figura 43- Decomposição do quadrado pela diagonal	107
Figura 44- Procedimentos para a decomposição do quadrado pela divisão de segmentos	109
Figura 45- Figuras que compõem o lápis	113
Figura 46 - Extrato do protocolo Aln°1T1.....	118
Figura 47- Extrato do protocolo An°1AT2.....	118
Figura 48 - Extrato do protocolo Aln°2T2.....	119
Figura 49- Extrato do protocolo Aln°8T3.....	120
Figura 50- Extrato do protocolo Aln°5T3.....	120
Figura 51 – Extrato do protocolo Aln°4T4.....	121
Figura 52 - Extrato de protocolo An°1T4.....	122
Figura 53 - Extrato de protocolo Aln°7T4.....	122
Figura 54- Extrato de protocolo Aln°9T4.....	122
Figura 55- Extrato de Protocolo DL5AG2	125
Figura 56 - Extrato do protocolo DL1AG2	127
Figura 57 - Extrato do protocolo DL4AG2	128
Figura 58 - Extrato do Protocolo DL7AG2	128
Figura 59 - Extrato do protocolo DL6AG2	129
Figura 60 – 1° Processo: Extrato do Protocolo DL6AG2.....	132
Figura 61- 2° Processo: Extrato do Protocolo DL2AG2	133
Figura 62 - Extrato do Protocolo DL3AG2	134
Figura 63-Extrato de Protocolo DL5AG2	135
Figura 64 - Extrato de Protocolo DL1AG2	136
Figura 65 - Extrato de protocolo DL7AG2	136

Figura 66 - Extrato do protocolo de passos para decompor um triângulo da dupla DL1AG2	139
Figura 67 – Organização para montar o barco	140
Figura 68 - tarefa finalizada extrato de protocolo da DL1AG2	140
Figura 69 - Extrato do protocolo DL2AG2	141
Figura 70 - Extrato do protocolo DL4AG2 parte 1	142
Figura 71 - Extrato do protocolo DL4AG2 parte 2	143
Figura 72 - Extrato do protocolo DL6AG2	143
Figura 73 - Extrato do protocolo dos passos realizados para montar o lápis DL1 AG2	146
Figura 74- Extrato do protocolo DL1AG2	147
Figura 75 -Extrato do protocolo DL2AG2 construção do lápis	148
Figura 76 - Extrato do Protocolo DL2AG2- parte 2.....	149
Figura 77 - Extrato do Protocolo DL2AG2 parte 3	149
Figura 78 - Extrato do protocolo DL2AG2: finalização da construção	150
Figura 79- Extrato do protocolo DL4AG2	151
Figura 80- Extrato do Protocolo DL3AG2	151
Figura 81 - Extrato do protocolo DL5AG2	151
Figura 82- Extrato do protocolo DL1AG2	155
Figura 83- Extrato do Protocolo DL2AG2 parte 1	156
Figura 84- Extrato do protocolo DL2AG2 parte 2	157
Figura 85 - Segunda tentativa de construção da casa	158
Figura 86 - Construção do sol	158
Figura 87- Extrato do protocolo da dupla DL6AG2.....	159
Figura 88- Extrato do protocolo DL5AG2	159
Figura 89- Enunciado da tarefa 1 (Versão Papel e Lápis).....	165
Figura 90- Extrato de protocolo Dpn°1APLT1	166
Figura 91- Extrato do protocolo Dpn°2APLT1	167
Figura 92- Extrato do protocolo Dpn°1AMMT1	168
Figura 93- Extrato do protocolo DPn°2AMMT1 (resposta).....	169
Figura 94- Justificativa dos procedimentos de comparação das áreas Dpn°2AMMT1.....	169
Figura 95- Extrato do protocolo escrito da Dp. n°1AAG2T1.....	171
Figura 96- Extrato do protocolo Dp.n°1AAG2T1	172
Figura 97- Comparação por inclusão extrato do protocolo Dp.n°1AAG2T1	172
Figura 98- Reflexão da figura “E” e análise de reflexão da figura “F”	173

Figura 99- Extrato do protocolo Dp.nº2AAG2T1 decomposição do paralelogramo E.....	174
Figura 100- Extrato do protocolo Dp.nº2AAG2T1	175
Figura 101- Outra forma de decompor a figura D.....	175
Figura 102- Tentativas de compor a figura F com triângulos	176
Figura 103- Composição da figura F a partir da construção de triângulos.....	177
Figura 104- Junção de dois triângulos para comporem F.....	177
Figura 105- Junção de procedimentos do protocolo da Dp.nº2AAG2T1.....	178
Figura 106- Extrato do protocolo da Dp.nº2AAG2T1 -tentativa de compor um retângulo ...	179
Figura 107- Extrato do protocolo Dp.nº2AAG2T1 tentativa de compor um retângulo	179
Figura 108- Decomposição do paralelogramo E para compor um retângulo.....	180
Figura 109- Protocolo final da Dp.nº2AAG2T1	181
Figura 110- Extrato do protocolo DLnº2AAG2T1.....	181
Figura 111- Tarefa 2 (Versão Papel e Lápis)	184
Figura 112- Extrato do protocolo da Dpnº1APLT2	186
Figura 113- Extrato do protocolo Dpnº1APLT2 item (b)	187
Figura 114- Extrato do protocolo Dpnº2APLT2	187
Figura 115- Extrato do protocolo da Dpnº1APLT2	188
Figura 116- Completando a figura E para formar um retângulo	189
Figura 117- Descrição do processo de comparação Dpnº1AMMT2.....	190
Figura 118- Decomposição e recomposição de D	191
Figura 119 Extrato do protocolo Dpnº 2AAG2T2	192
Figura 120- Extrato do protocolo Dpnº2AAG2T2 aplicação de isometrias para comparação	193
Figura 121- Decomposição e recomposição da figura E.....	194
Figura 122- Enunciado da tarefa 3- Versão Papel e Lápis	200
Figura 123- Extrato do protocolo da Dpnº2APLT3	201
Figura 124- Extrato do protocolo escrito da Dpnº1AMMT3	202
Figura 125- Extrato do protocolo Dpnº1AAG2T3	202
Figura 126- Extrato do protocolo da Dpnº2AAG2T3	203
Figura 127- Extrato do protocolo da Dpnº1AAG2T3	203
Figura 128- Extrato do protocolo da Dpnº2AMMT3.....	204
Figura 129- Extrato do protocolo escrito da Dpnº2APLT4.....	207
Figura 130- Extrato do protocolo da Dpnº1APL: estratégias de medidas das áreas das figuras A, B e C.....	208

Figura 131- Extrato do protocolo da Dpn°1APLT4: preenchimento do	208
Figura 132- Extrato do protocolo da Dpn°1AMMT4.....	209
Figura 133- Extrato do protocolo da Dpn°2AMMT4.....	209
Figura 134- Extrato do protocolo em alguns print screen da vídeo gravação do computador da Dpn°2AAG2T4.....	210
Figura 135- Extrato do protocolo da Dpn°2AAG2T4-.....	211
Figura 136- Extrato do protocolo escrito da Dpn°2AAG2T4.....	212
Figura 137- Extrato do protocolo da Dpn°1AAG2T4	213
Figura 138- Extrato do Protocolo da Dpn°2APLT5	218
Figura 139- Extrato do Protocolo da Dpn°1APLT5	218
Figura 140- Extrato do protocolo da Dpn°1AAG2T5	219
Figura 141- Extrato do protocolo da Dpn°2AAG2.....	220
Figura 142- Extrato do protocolo do grupo 1 no AG2, tarefa 1	225
Figura 143- Extrato do protocolo escrito do grupo 1 tarefa 1	226
Figura 144- Extrato do protocolo escrito do grupo 4, Tarefa1	226
Figura 145- Extrato do protocolo escrito, grupo 2,	227
Figura 146- Extrato do protocolo escrito, grupo 3,	227
Figura 147 - Extrato do protocolo grupo 1, tarefa 2, item (a)	230
Figura 148- Extrato do protocolo do grupo 2, tarefa e, item (a).....	230
Figura 149- Comparação de A com as figuras C e G.....	231
Figura 150- Extrato do protocolo do grupo 2, tarefa 2, item (a) no AG2.....	232
Figura 151- Extrato do protocolo do grupo 3, item (a) completando C e E.....	233
Figura 152- Extrato do protocolo escrito do grupo 4, tarefa 2, item (a).....	233
Figura 153- Extrato do Protocolo do Grupo 1, item (b)	234
Figura 154- Extrato do protocolo escrito do grupo 3, item (b).....	234
Figura 155- Extrato do protocolo do grupo 4, item (b)	235
Figura 156- Processo de comparação das figuras D e E com A.....	235
Figura 157- Extrato do protocolo da justificativa do grupo 1, item (c).....	236
Figura 158- Extrato do protocolo do grupo 2, sobreposição de D e E em A	236
Figura 159- Extrato do protocolo do grupo 4, tarefa 2, item (c)	237
Figura 160- Extrato do protocolo escrito do grupo 3	241
Figura 161- Extrato do protocolo do grupo 3, no AG2	241
Figura 162- Decomposição da unidade U para pavimentar C.....	244
Figura 163- Extrato do protocolo escrito do grupo 2	245

Figura 164- Extrato do protocolo no AG2 grupo 1	246
Figura 165- Decomposição de Y	248
Figura 166- Figura extraída da análise dos protocolos no AG2 dos grupos 1, 2 e 3.....	249
Figura 167- Extrato final do protocolo do grupo 4.....	250
Figura 168-Tela de abertura do <i>Apprenti Géomètre 2</i>	265
Figura 169- Figuras dos Jogos de Bases do menu Figuras Padrão.....	266
Figura 170- Interface do AG2 após selecionar a opção de menu A e o menu movimentos...	267
Figura 171- Interface do AG2 (menu B)- Representação de um triângulo a partir do menu-	268
Figura 172- Interface do AG2 - Menus AB ou AC	269
Figura 173- Decomposições no <i>Apprenti Géomètre 2</i>	271
Figura 174- DL2AG2	280
Figura 175- DL1AG2	280
Figura 176- DL3AG2	280
Figura 177- DL4AG2	280
Figura 178- DL6AG2	280
Figura 179- DL5AG2	280
Figura 180-DL7AG2	281
Figura 181- DL3AG2	281
Figura 182- DL2AG2	281
Figura 183-DL1AG2	281
Figura 184- DL6AG2	281
Figura 185-DL5AG2	281
Figura 186- DL4AG2	281
Figura 187- DL7AG2	281
Figura 188- DL2AG2	282
Figura 189- DL1AG2	282
Figura 190- DL4AG2	282
Figura 191- DL3AG2	282
Figura 192- DL6AG2	282
Figura 193- DL5AG2	282
Figura 194-DL7AG2	283
Figura 195- DL2AG2	283
Figura 196- DL1AG2T4.....	283
Figura 197- DL3AG2	283

Figura 198- DL4AG2	283
Figura 199- DL5AG2	284
Figura 200- DL7AG2	284
Figura 201- DL6AG2	284
Figura 202- DL1AG2	284
Figura 203- DL4AG2	285
Figura 204- DL2AG2	285
Figura 205-DL5AG2	285
Figura 206-DL6AG2	286
Figura 207- DL7AG2	286

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Apresentação das tarefas da Etapa de Familiarização.....	41
Quadro 2- Apresentação das tarefas do Dispositivo Central.....	41
Quadro 3- Organização global dos dispositivos experimentais da pesquisa.....	45
Quadro 4- Medidas das áreas das figuras da tarefa 2.....	68
Quadro 5- Correspondência entre as ações realizadas e as duplas na tarefa 2.....	131
Quadro 6-Diferentes tipos de triângulos.....	136
Quadro 7- Principais ações realizadas pelas duplas na tarefa 3.....	144
Quadro 8- Estratégias utilizadas pelas diferentes duplas.....	152
Quadro 9- Respostas final das duplas-Tarefa 1.....	165
Quadro 10- Teoremas em ação mobilizados nos três ambientes da pesquisa.....	182
Quadro 11- Procedimentos de comparação das áreas das figuras da tarefa 1.....	183
Quadro 12- Síntese das respostas das duplas.....	185
Quadro 13- Procedimento utilizados pelas duplas para comparar as áreas das figuras da tarefa 2.....	195
Quadro 14- Teoremas em ação tarefa 2.....	196
Quadro 15- Respostas consideradas corretas ou não na comparação das áreas pelas duplas	199
Quadro 16- Procedimentos utilizados pelas duplas na T4.....	214
Quadro 17- Teoremas em ação mobilizados na tarefa 5.....	221
Quadro 18- Estratégias, materiais, ferramentas, menus e procedimentos.....	222
Quadro 19-Composição dos grupos, datas e horários da segunda etapa do dispositivo central	223
Quadro 20- Critérios para comprar as áreas das figuras e estabelecer a relação de ordem das áreas.....	240
Quadro 21- Respostas dadas pelos grupos a tarefa 4.....	246

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PROBLEMÁTICA DA PESQUISA	21
2.1 ERROS E ENTRAVES NA APRENDIZAGEM DE ÁREA	21
2.2 DIFERENTES RECURSOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁREA	23
2.3 UM BREVE ESTUDO SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	26
2.4 SITUAÇÕES QUE DÃO SENTIDO À ÁREA COMO GRANDEZA GEOMÉTRICA	28
2.4.1 <i>Situação de Comparação</i>	31
2.4.2 <i>Situação de Medida</i>	33
2.4.3 <i>Situação de Mudança de Unidade</i>	34
2.4.4 <i>Situação de Produção de Superfície</i>	35
2.5 OBJETIVOS	38
2.5.1 <i>Objetivo Geral</i>	38
2.5.2 <i>Objetivos Específicos</i>	38
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	39
3.1 ESCOLHA DO CAMPO DE PESQUISA	39
3.2 ESCOLHA, CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS E TRAJETÓRIA PARA APLICAÇÃO DA PESQUISA	39
3.3 O ESPAÇO, O TEMPO E A ORGANIZAÇÃO DO CAMPO DE PESQUISA.....	40
3.4 JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DOS AMBIENTES E RECURSOS DA PESQUISA..	42
3.4.1 <i>Escolha do Apprenti Géomètre 2 em Relação aos Demais Ambientes</i>	44
3.5 ORGANIZAÇÃO DOS DISPOSITIVOS.....	45
3.5.1 <i>Etapa de Familiarização (1º momento)</i>	46
3.5.2 <i>Etapa de Familiarização (2º momento)</i>	48
3.5.3 <i>Dispositivo Central (1ª parte)</i>	51
3.5.4 <i>Dispositivo Central (2ª Parte)</i>	52
3.6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DO DISPOSITIVO CENTRAL.....	54
3.6.1 <i>Análise A priori da Tarefa 1 – comparação de área não numérica</i>	57
3.6.2 <i>Análise a Priori da Tarefa 2- Comparação de Área com a Intervenção do Aspecto Numérico</i>	66
3.6.3 <i>Análise a Priori da Tarefa 3- Medida de Área</i>	75

3.6.4 <i>Análise a Priori da Tarefa 4</i>	80
3.6.5 <i>Análise a Priori da Tarefa 5</i>	90
3.7 ETAPA DE FAMILIARIZAÇÃO	96
3.7.1 <i>Análise a Priori das Tarefas do Ambiente Não-digital</i>	96
3.7.2 <i>Ambiente Digital- Primeiro Encontro</i>	103
3.7.3 <i>Ambiente Digital- Segundo Encontro</i>	104
3.7.4 <i>Análise a Priori das Tarefas de Exploração do Apprenti Géomètre 2</i>	105
4 ANÁLISE A POSTERIORI DA ETAPA DE FAMILIARIZAÇÃO	117
4.1 TAREFAS NO AMBIENTE NÃO- DIGITAL.....	117
4.1.1 <i>Tarefa 1 – Reprodução de Figuras na Malha Quadriculada</i>	117
4.1.2 <i>Tarefa 2 – Isometrias na Malha Pontilhada Quadrada</i>	118
4.1.3 <i>Tarefa 3 – Composição de Figuras (Quebra Cabeça)</i>	119
4.1.4 <i>Tarefa 4 – Composição de Figuras (Ladrilhagem)</i>	122
4.1.5 <i>Síntese Geral das Análises e Desempenho dos Alunos</i>	123
4.2 TAREFAS NO AMBIENTE DIGITAL – PRIMEIRA PARTE	124
4.3 TAREFAS NO AMBIENTE DIGITAL- SEGUNDA PARTE.....	126
4.3.1 <i>Tarefa 1- Exploração Livre do Software</i>	127
4.3.2 <i>Tarefa 2- Complementação de Figuras (Trem)</i>	130
4.3.3 <i>Tarefa 3- Reprodução de Figuras (Barco)</i>	137
4.3.4 <i>Análise a Posteriori da Tarefa 4- Reprodução do Lápis</i>	145
4.3.5 <i>Tarefa 5- Reprodução de Figuras -Paisagem</i>	153
4.3.6 <i>Síntese das Análises e Desempenho dos Alunos -Etapa de Familiarização - Parte 2</i> ..	160
4.4 SÍNTESE DAS ANÁLISES DA ETAPA DE FAMILIARIZAÇÃO NOS AMBIENTES NÃO - DIGITAL E DIGITAL	163
5 ANÁLISE A POSTERIORI DAS TAREFAS DO DISPOSITIVO CENTRAL	164
5.1 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 1 NOS TRÊS AMBIENTES	165
5.1.1 <i>Análise a Posteriori da Tarefa 1 Ambiente Papel e Lápis</i>	166
5.1.2 <i>Análise a Posteriori da Tarefa 1 Ambiente Materiais Manipulativos</i>	168
5.1.3 <i>Análise a Posteriori da Tarefa 1 Ambiente Apprenti Géomètre 2</i>	170
5.1.4 <i>Consideração Geral Sobre a Tarefa 1</i>	181
5.2.1 <i>Análise a Posteriori da Tarefa 2 Ambiente Papel e Lápis</i>	185
5.2.2 <i>Análise a Posteriori da Tarefa 2 Ambiente Materiais Manipulativos</i>	189
5.2.3 <i>Análise a Posteriori da Tarefa 2 Apprenti Géomètre 2</i>	191

5.2.4 Consideração Geral Sobre a Tarefa 2	194
5.3 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 3 NOS TRÊS AMBIENTES	200
5.3.1 Respostas e Procedimentos Utilizados Pelas Duplas nos Três Ambientes da Pesquisa	201
5.4 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 4 NOS TRÊS AMBIENTES	206
5.4.1 Respostas e Procedimentos Utilizados Pelas Duplas nos Três Ambientes da Pesquisa	206
5.4.2 Considerações Gerais Sobre a Tarefa 4 nos Três Ambientes	214
5.5 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 5 NOS TRÊS AMBIENTES	216
5.5.1 Considerações Gerais Sobre a Tarefa 5 nos Três Ambientes	221
6 ANÁLISE A POSTERIORI DO DISPOSITIVO CENTRAL (PARTE 2)– UTILIZAÇÃO DOS DIVERSOS AMBIENTES.....	223
6.1 SITUAÇÃO DE COMPARAÇÃO DE ÁREA (TAREFA 1)	224
6.1.1 Considerações Sobre a Tarefa 1	228
6.2 SITUAÇÃO DE COMPARAÇÃO DE ÁREA (TAREFA 2).....	230
6.2.1 Considerações Sobre a Tarefa 2	237
6.3 SITUAÇÃO DE MEDIDA DE ÁREA (TAREFA 3).....	241
6.4 SITUAÇÃO DE MEDIDA E MUDANÇA DE UNIDADE (TAREFA 4).....	243
6.5 SITUAÇÃO DE PRODUÇÃO DE SUPERFÍCIE (TAREFA 5)	248
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	252
REFERÊNCIAS	261
APÊNDICES	264
APÊNDICE A- <i>APPRENTI GÉOMÈTRE</i> : UMA VISÃO GERAL.....	264
APÊNDICE B - POTENCIALIDADES DO <i>APPRENTI GÉOMÈTRE 2</i> PARA O ESTUDO DAS SITUAÇÕES QUE DÃO SENTIDO A ÁREA COMO GRANDEZA	270
APÊNDICE C – TAREFAS DE FAMILIARIZAÇÃO NO AMBIENTE NÃO DIGITAL....	273
APÊNDICE D – TAREFAS DE FAMILIARIZAÇÃO NO <i>APPRENTI GÉOMÈTRE 2</i>	277
APÊNDICE E - EXTRATO DO PROTOCOLO FINAL DE CADA DUPLA NO AMBIENTE DIGITAL (<i>APPRENTI GÉOMÈTRE 2</i>)	280
APÊNDICE F- TAREFAS DO DISPOSITIVO CENTRAL	287

1 INTRODUÇÃO

Este estudo dá continuidade a um conjunto de pesquisas que vêm ao longo dos anos sendo desenvolvidas pelo grupo Pró- grandezas¹ da Universidade Federal de Pernambuco que tem como objetivo investigar fenômenos didáticos relativos às grandezas e medidas, enfatizando as grandezas geométricas (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Os estudos de Duarte (2002), Melo (2003), Santana (2006), Pessoa (2010) e Ferreira (2010), que investigam questões sobre o ensino e a aprendizagem de área, realizados por integrantes do grupo supracitado, evidenciam possibilidades de exploração de materiais manipulativos, como por exemplo, o uso da malha quadriculada. Outros estudos como os de Baldini (2004), Gobbi (2010) e do CREM² (2007) utilizam softwares de geometria com alunos de diferentes níveis de escolaridade como forma de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem de área de figuras planas.

Tomamos os achados dessas pesquisas como ponto de partida para o estudo sobre área, mas nenhuma delas havia focado diretamente no estudo de uma pluralidade de recursos que abrissem margem para que alunos pudessem desenvolver diferentes tipos de estratégias para resolver tarefas sobre área.

Além disso, sentimos a necessidade de um estudo voltado ao uso de software de geometria que por meio de seu dinamismo permitisse aos alunos experimentar diferentes tipos de estratégias de resolução de tarefas sobre área. Assim escolhemos o software *Apprenti Géomètre 2* utilizado nas pesquisas do CREM (2007) em um estudo com alunos da comunidade francófona na Bélgica e que apresentou um diferencial na aprendizagem dos alunos nas resoluções de tarefas de comparação de área. Pretendíamos verificar a potencialidade desse software nas resoluções de tarefas sobre área no contexto brasileiro.

Adotamos em nossa pesquisa a abordagem de área como grandeza geométrica a partir dos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989). Essa abordagem corresponde a distinguir e articular três quadros³: o quadro geométrico, o quadro numérico e o das grandezas (FERREIRA, 2010).

¹ Grupo de pesquisa da Universidade Federal de Pernambuco vinculado ao Cnpq e formado por professores de matemática, pedagogia e Pesquisadores em Educação Matemática, coordenado pelos professores: Paula Moreira Baltar Bellemain, Paulo Figueiredo Lima e Rosinalda Teles.

² *Centre Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*.

³ Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 389), um quadro é constituído de objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa num dado momento, a esses objetos e relações.

Fundamentamos nossa pesquisa na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud que reúne com êxito contribuições da Psicologia Cognitiva, da Didática da Matemática e da Matemática. As pesquisas que adotam esse marco teórico vêm ajudando a entender melhor como as crianças formam e desenvolvem conceitos matemáticos, a partir da observação de suas estratégias de ação (GITIRANA, et. al. 2014, p.7).

Essas autoras, com base nos estudos de Vergnaud, afirmam que diversos fatores influenciam e interferem na formação e desenvolvimento de conceitos e que o conhecimento conceitual emerge a partir da resolução de situações de caráter teórico ou prático.

Em nossa pesquisa utilizamos um conjunto de situações que dão sentido a área como grandeza proposto por Ferreira (2010) em quatro grandes classes: comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície.

Pretendíamos então a partir desse conjunto de situações identificar os procedimentos que os alunos utilizariam para resolver um conjunto de tarefas sobre área, como também destacar as relações lógicas sofisticadas que os alunos muitas vezes usam implicitamente e que possuem- ou não- relações matemáticas correspondentes e que são denominados na TCC de Teoremas em ação (GITIRANA, et. al. 2014, p.7).

Nossa pesquisa, contou com a participação de 12 estudantes de um 6º ano de uma escola pública da zona da mata norte do estado de Pernambuco e teve como objetivo investigar o tratamento dado por esses alunos a um conjunto de situações que dão sentido a área em três ambientes distintos: papel e lápis, materiais manipulativos e um software de geometria (*Apprenti Géomètre 2*).

Estruturamos o texto em 6 capítulos da seguinte forma:

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica e a problemática da pesquisa. Realiza-se um breve estudo dos erros observados em alunos dos mais diferentes níveis de escolaridade no contexto francês por meio dos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989); a partir dessa questão discutem-se as concepções numéricas e geométricas de área; explicita-se a adoção da abordagem de área como uma grandeza geométrica e o uso de diferentes recursos para o ensino e aprendizagem de área.

Ainda nesse capítulo realizamos um breve estudo sobre a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud (1996) que embasa a nossa pesquisa. Em continuidade aos estudos de Baltar (1996) e Ferreira (2010), realizamos um estudo das situações que dão sentido a área como grandeza, a saber: situação de comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície, seguidos de um conjunto de

procedimentos e teoremas em ação que podem ser mobilizados em tais situações. Esse capítulo é finalizado com a apresentação dos objetivos da pesquisa.

O capítulo 3 é dedicado aos procedimentos metodológicos, no qual situamos a pesquisa justificando nossas escolhas, a caracterização dos sujeitos e o campo da pesquisa, como também justificamos a escolha dos três ambientes (papel e lápis, materiais manipulativos e software de geometria-*Apprenti Géomètre 2*) nos quais os alunos responderam a um conjunto de tarefas sobre área. Seguimos explicitando como se deu a trajetória da coleta dos dados dividida em duas grandes etapas. A primeira, denominada de familiarização nos ambientes (não-digital e digital) teve como objetivo criar condições para que os alunos, sujeitos da pesquisa, se familiarizassem com os recursos e adquirissem conhecimentos a serem reinvestidos na segunda etapa da pesquisa denominada de dispositivo central, composta de tarefas sobre área.

Em seguida, realizamos uma descrição e análise a priori das cinco tarefas do dispositivo central da pesquisa e apresentamos os possíveis procedimentos e teoremas em ação verdadeiros ou falsos que podem surgir das resoluções dos alunos nos três ambientes. Ainda nesse capítulo, realizamos uma análise a priori das tarefas aplicadas nos ambientes não digital e digital, na etapa de familiarização, e explicitamos os conhecimentos e ferramentas que estariam em jogo nessa etapa e que seriam pertinentes para a resolução das tarefas sobre área do dispositivo central.

No capítulo 4 trazemos as análises dos dados da etapa de familiarização, destacando procedimentos, estratégias e hipóteses explicativas das resoluções dos alunos para as tarefas propostas, inclusive das dificuldades encontradas por eles. Ainda nesse capítulo, apresentamos a análise a posteriori da segunda parte da etapa do dispositivo experimental relativo à familiarização com o software *Apprenti Géomète 2*, na qual evidenciamos o trabalho com as transformações isométricas do plano, com decomposição e recomposição de figuras, complementação e reprodução de figuras e o uso das principais ferramentas e menus importantes desse software para que os alunos pudessem resolver as tarefas sobre área do dispositivo central.

O capítulo 5 é dedicado às análises a posteriori das tarefas do dispositivo central aplicadas nos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e software de geometria. Apresentamos procedimentos realizados pelos alunos para resolver as tarefas propostas sobre área, dentre elas: composição e recomposição de figuras e explicitamos os principais teoremas em ação verdadeiros e falsos que surgiram nas resoluções dos alunos.

No capítulo 6 damos continuidade à análise dos dados coletados no dispositivo central, em uma etapa na qual foram oferecidos recursos dos diversos ambientes e foi dada aos alunos a opção de uso desses recursos.

Por fim apresentamos nossas considerações finais, nas quais discutimos os resultados da pesquisa, apontamos algumas limitações e indicamos pistas de estudos a serem realizados. Seguem-se as referências e os apêndices.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Neste capítulo justificaremos área como grandeza geométrica a partir dos estudos desenvolvidos por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) e o que as pesquisas nacionais e internacionais desde então têm abordado com relação ao ensino e aprendizagem de área. Apresentamos um breve estudo sobre a Teoria dos Campos Conceituais (1990) e um estudo das situações que dão sentido à área como grandeza.

2.1 ERROS E ENTRAVES NA APRENDIZAGEM DE ÁREA

A proposta de abordar área como uma grandeza geométrica nesta pesquisa apoia-se nos estudos desenvolvidas por Douady e Perrin-Glorian (1989). Essas pesquisadoras observam diversos erros cometidos por alunos franceses com relação ao conceito de área, tais como:

- A superfície unitária sendo uma superfície com certa forma faz com que a possibilidade de medida de uma superfície dependa de S ser efetivamente ladrilhável com elementos daquela forma. Assim, os alunos encontram dificuldade para exprimir a área de um triângulo em cm^2 (centímetros quadrados), dada a impossibilidade de cobri-lo com número finito de quadrados.
- A área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície;
- Se o perímetro de uma superfície se altera sua área também (e reciprocamente).
- Se duas superfícies têm o mesmo perímetro, elas têm a mesma área.
- Estende-se o uso de certas fórmulas a situações em que elas não são válidas: por exemplo, produto de duas “dimensões” para obter a área de um paralelogramo ou o produto das três “dimensões”, no caso de um triângulo (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 394)⁴.

Essas dificuldades observadas na resolução de tarefas sobre a área ocorrem segundo as pesquisadoras, como consequência do tratamento dado por alguns alunos aos problemas sobre área com base em uma “concepção forma” ligada ao quadro geométrico, ou uma “concepção número” vinculada ao quadro numérico, ou as duas simultaneamente, mas sem estabelecer relações entre elas.

As concepções numéricas caracterizam-se como aquelas segundo as quais o aluno só considera os aspectos pertinentes para o cálculo de área, enquanto que as concepções geométricas são aquelas segundo as quais os alunos confundem área e figura, assim como perímetro e contorno.

⁴ Essa citação trata-se de uma tradução livre do texto original em francês *UN PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DU CONCEPT D'AIRE DE SURFACE PLANE* (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 394).

Diante dessas dificuldades as pesquisadoras francesas entendem que na aprendizagem da área devem ser considerados três quadros: o quadro geométrico, o quadro das grandezas e o quadro numérico.

O quadro geométrico refere-se às superfícies planas; o quadro numérico refere-se às medidas da área das superfícies, interpretadas como números reais não negativos; e o quadro das grandezas refere-se ao estabelecimento de classes de equivalência formadas por figuras de mesma área.

Douady e Perrin-Glorian (1989) ainda defendem que a abordagem da área como uma grandeza favorece as articulações pertinentes entre os quadros geométrico e numérico, o que contribui para a superação de dificuldades de aprendizagem e erros como aqueles citados anteriormente. As pesquisadoras francesas afirmam que para construir a noção de área como grandeza, é preciso tanto distinguir área e superfície, como área e número.

Em pesquisas posteriores que adotam a abordagem de área como grandeza (tais como Baltar, 1996, Bellemain e Lima, 2002, Teles, 2007), explicita-se que a distinção entre a área e a figura se justifica porque figuras qualitativamente diferentes podem ter mesma área e a distinção entre área e número é necessária porque quando há mudança de unidade muda o valor numérico (que nessa modelização é a medida da área) embora a grandeza, como atributo da figura, não seja alterada. Douady e Perrin-Glorian colocam que uma das razões do desenvolvimento pelos alunos, de concepções “forma” (ou concepções geométricas) e “número” (ou concepções numéricas) estava relacionada à proposta de ensino no nível equivalente aos anos iniciais na França na época. Segundo elas:

A apresentação padrão, atualmente, consiste em recorrer ao ladrilhamento de superfícies passando-se rapidamente pelo ladrilhamento e contagem dos quadrados para determinar a área de superfícies quadriculáveis; em seguida, para retângulos ou quadrados, procuram-se meios econômicos de contagem; depois, procede-se à introdução das unidades convencionais com múltiplos e submúltiplos e, de acordo com o caso, antes ou depois disso, leva-se ao estabelecimento das fórmulas de áreas dos retângulos em função dos comprimentos dos lados (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 393).

Embora os estudos de Douady e Perrin- Glorian (1989) tenham sido realizados em um contexto francês, estudos realizados por pesquisas brasileiras apontam também erros e entraves na aprendizagem de área nos mais diferentes níveis de escolaridade e que estão relacionados ao tratamento dado aos aspectos geométricos e numéricos da área, o amálgama entre área e perímetro.

Duarte (2002) realizou um estudo diagnóstico com quatro duplas de alunos de 5ª série do ensino fundamental, atualmente 6º ano. A partir da aplicação de um conjunto de

atividades, o autor identifica que os alunos apresentam dificuldades em dissociar superfície de área, não aceitando que figuras diferentes podem possuir mesma área, bem como área do número, pelo fato de não conseguirem fazer distinção entre a área e a medida dessa grandeza.

Melo (2003) também realizou um estudo diagnóstico sobre os conhecimentos de alunos de 5^a a 8^a série, atualmente 6^o e 9^o anos do ensino fundamental relacionado aos conceitos de área e perímetro. Esse autor identifica a partir da análise qualitativa de uma atividade de comparação de área aplicada com 373 alunos de uma escola da classe média da rede particular do Recife, alguns erros provenientes das respostas dadas pelos alunos a essa atividade. Entre os erros encontrados, o autor observa assim como Duarte (2002), que para alguns alunos, figuras diferentes não podem ter mesma área. Nesse caso, o foco dos alunos para determinar se duas figuras possuíam ou não mesma área estaria relacionada ao formato das figuras.

Ferreira (2010) desenvolveu um estudo de caráter diagnóstico e de intervenção com alunos do 3^o ciclo do ensino fundamental sobre a construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro. Essa autora constata nas respostas dadas por esses alunos a uma atividade de comparação de área de oito figuras, que ao invés de os alunos determinarem a área das figuras eles determinam o perímetro, deixando em evidência, a partir de suas análises, que os alunos confundem área com o perímetro.

Essas dificuldades encontradas no contexto brasileiro trazem à tona indícios da mobilização das concepções geométricas e numéricas da área presentes nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) e que são resistentes a aprendizagem de área como grandeza geométrica.

2.2 DIFERENTES RECURSOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁREA

São várias as pesquisas que ao longo dos anos têm utilizado diferentes recursos para diagnosticar as dificuldades e erros de alunos dos diferentes níveis de escolaridade, como também para aprimorar o ensino e a aprendizagem de área. Outras pesquisas mostram a insuficiência do uso de diferentes recursos importantes para o trabalho de área como grandeza em livros didáticos.

Dentre os recursos abordados no ensino e aprendizagem da área de figuras planas temos o tangram (DUARTE, 2002; FACCO, 2003; SANTANA, 2006), as malhas quadriculadas (FACCO, 2003; SANTANA, 2006; PESSOA, 2010, FERREIRA, 2010;

PAULA, 2011), os poliminós (SANTANA, 2006) e diferentes softwares de geometria, nas pesquisas de Baldini (2004), CREM (2007), Gobbi (2011), e Silva (2015).

Entre essas pesquisas as de Duarte (2002), Santana (2006), Pessoa (2010), Ferreira (2010) e Silva (2015) se inspiram nos estudos de Douady e Perrin- Glorian (1989) e abordam a área como grandeza geométrica.

Duarte (2002) em seu estudo utilizou como um dos recursos didáticos o tangram para o trabalho com uma atividade denominada de “comparando áreas através de figuras conhecidas”. O autor coloca que houve um índice bastante elevado de acerto pelos alunos da 5ª série nessa atividade, na qual era perguntado se três figuras obtidas por decomposição de duas outras, tinham áreas diferentes.

Facco (2003) realizou uma pesquisa de caráter diagnóstico com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental, a autora aplicou um teste piloto com esses alunos voltado ao processo de composição e decomposição de figuras, com e sem o auxílio do tangram, do ladrilhamento e malhas quadriculadas, essa autora identifica por meio do uso desses recursos que os alunos apresentam dificuldades no registro de unidade de medida de área e confundem as unidades de medidas. Nesse caso os recursos serviram para diagnosticar as dificuldades desses alunos.

Pessoa (2010) em seu estudo diagnóstico com o uso de malhas quadriculadas para o ensino de área como grandeza geométrica com 100 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, coloca como resultado de sua pesquisa que o uso das malhas quadriculadas faz avançar a compreensão dos alunos da área enquanto grandeza. Paula (2011) por sua vez, buscou avaliar as potencialidades do ensino de área de figuras planas por meio de atividades mediadas com o uso de malha quadriculada, em um estudo diagnóstico realizado com alunos do 9º ano do ensino fundamental. Essa autora coloca que a proposta de trabalho contribuiu significativamente para a aprendizagem de áreas de figuras planas considerando um importante recurso para ser utilizado por professores nas aulas de matemática.

Por outro lado, Santana (2006) realizou um estudo em livros didáticos sobre o uso de recursos no qual indica contribuições possíveis do uso do tangram, das malhas e dos poliminós na construção do conceito de área como grandeza geométrica, mas também mostra que esses recursos são pouco explorados nos livros didáticos pesquisados.

Com relação ao uso da malha essa autora coloca que:

Na comparação de áreas, através da medida de área, as malhas são recursos didáticos que facilitam a articulação entre o quadro numérico e o quadro das grandezas; ao se escolher a superfície unitária, favorece a contagem de ladrilhos que compõem a figura plana representada. A mudança de unidade de área provoca a mudança de medida de área, mas há invariância de área (SANTANA, 2006, p. 37).

Santana (2006) afirma ainda que o tangram e os poliminós podem favorecer as questões da mudança de unidade e do uso de diferentes superfícies unitárias associadas a uma mesma unidade, contribuindo para estabelecer a articulação entre o quadro numérico e o quadro das grandezas e da distinção entre figura e área:

Destacamos, como um importante papel do tangram e poliminós, a manipulação das peças na construção de diferentes figuras planas, servindo de suporte para auxiliar na dissociação entre área e figura. Nas representações de figuras planas nas malhas quadrada, triangular ou retangular, justamente ao se conservar a figura, vê-se esse recurso como um auxiliar à compreensão das quantidades de quadrados, triângulos ou retângulos, que essa figura plana possui. Não é a manipulação dos objetos nem a construção de figuras em malhas que podem garantir a aprendizagem, mas, essas representações, possivelmente, contribuem para facilitar a reflexão e a compreensão sobre os aspectos geométricos e numéricos de área, ou seja, a construção de área como grandeza geométrica. (SANTANA, 2006, p. 61).

Baldini (2004) elaborou uma sequência didática e aplicou-a com alunos do ensino médio envolvendo a construção dos conceitos de área e perímetro com o uso do software Cabri Géomètre II. Essa autora constatou em uma das atividades aplicadas que esse software pelo fato de proporcionar movimentos dos vértices das figuras, sem alterar suas propriedades permitiu aos alunos responderem satisfatoriamente, que área e perímetro não variam no mesmo sentido, que figuras de mesma área podem ter perímetros distintos e, reciprocamente, figuras de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes.

Gobbi (2012) por sua vez elaborou uma sequência didática com o objetivo de investigar como alunos do 7º ano do Ensino Fundamental constroem conhecimentos sobre área e perímetro de figuras planas utilizando como recurso o software Geogebra. Essa autora também queria verificar as contribuições que esse software poderia trazer para o ensino da geometria. Algumas das atividades aplicadas com o uso do software Geogebra para o trabalho com área, consistiam no processo de ladrilhamento de figuras e produção de figuras a partir de uma quantidade de ladrilhos suficientes para a realização de uma determinada pavimentação, a autora coloca que não houve dificuldades por parte dos alunos para resolver as atividades propostas com uso desse software pelo fato de os alunos poderem movimentar as figuras e girá-las de forma dinâmica.

O CREM (2007), um grupo de pesquisa da Bélgica realizou um estudo por meio do uso de um software de geometria denominado de *Apprenti Géomètre 2* (Aprendiz de Geometria) com alunos do 5^{ème} *primer* da comunidade francófona na Bélgica equivalente ao

5º ano do ensino fundamental brasileiro, como forma de investigar o impacto do uso desse software, no processo de ensino e aprendizagem de área e perímetro de figuras geométricas planas. O grupo desenvolveu e aplicou uma sequência de atividades que a partir das ferramentas de decomposição, fusão, duplicação, mover, rotação e reflexão de figuras desse software, permitiram aos alunos avançar na resolução de problemas sobre área de figuras geométricas planas.

Silva (2015) baseado nos estudos do CREM (2007), utilizou como recurso em uma oficina com professores e pesquisadores em Educação Matemática o software de geometria *Apprenti Géomètre 2*, com o objetivo de investigar a potencialidade desse software para o ensino e aprendizagem de área como grandeza, para isso aplicou uma sequência com onze atividades de comparação de área. Nesse estudo ele apresenta uma análise de uma das atividades aplicadas por meio desse software e observa que o dinamismo oferecido pelo software e em especial a possibilidade de decompor e recompor figuras permitiu aos professores responderem as atividades de maneira pertinente.

2.3 UM BREVE ESTUDO SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Adotamos como aporte teórico em nossos estudos a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) desenvolvida por Gérard Vergnaud e seus colaboradores, a qual “é uma teoria cognitivista, que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, nomeadamente daquelas que revelam das ciências e das técnicas” (VERGNAUD, 1996, p. 155).

Essa teoria mesmo não sendo específica da matemática, [...] “privilegia modelos que atribuem um papel essencial aos próprios conceitos matemáticos” (VERGNAUD, 1996, p. 168). A escolha de adotar a Teoria dos Campos Conceituais nos leva a conceber área como um conceito.

Com base em Vergnaud (1996), consideramos que um conceito é constituído por uma tríade $C = (S, I \text{ e } R)$, na qual **S** é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência), **I** é o conjuntos de invariantes sobre os quais se assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado) e **R** é o conjuntos das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).

Para Bellemain e Bittar (2000) o mapeamento, a análise e a classificação dos elementos desse tripé trazem uma contribuição significativa para a compreensão da

construção de conceitos pelos sujeitos, e mais especificamente, em situação escolar. As autoras ainda colocam que é importante abordar situações variadas que permitam a construção pelos alunos de um significado amplo para os conceitos.

Consideramos em nossa pesquisa assim como os estudos de Baltar (1996), Duarte (2002) e Ferreira (2010) o conceito de área a partir da tríade estabelecida anteriormente, ou seja, o conjunto das situações que dão sentido à área, o conjunto de invariantes operatórios subjacentes à ação e o conjunto das representações simbólicas em jogo.

Magina et al. (2008) explicita que a compreensão de um conceito por mais simples que seja, não emerge de apenas um tipo de situação e reciprocamente. Nessa perspectiva, a formação de um conceito se faz ao longo do tempo por meio de muitas interações, de maneira que os alunos podem fazer com que novas situações e novos conceitos lhes sejam significativos, aplicando e adaptando as suas ideias antigas (CARVALHO, 2011).

Ferreira (2010) em seu estudo sobre área e perímetro como grandezas, no qual adota como aporte teórico a TCC relata que para ganhar significado um conceito deve ser apresentado numa grande variedade de situações e que quando estamos diante de situações conhecidas, utilizamos esquemas já conhecidos. Essa autora explica ainda que na TCC, os esquemas são formados por regras de ações, antecipação, inferências e invariantes operatórios.

Os invariantes operatórios, designados pelas expressões conceitos em ação e teorema em ação, são conhecimentos contidos nos esquemas.

De acordo com Magina et al. (2008), eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos (feitos pelo aluno). Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nesse caso, eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas (MAGINA, et al. 2008, p 12).

Em nossa pesquisa focaremos nas situações que dão sentido à área e nos invariantes operatórios, mais especificamente os teoremas em ação que são proposições, que podem ser verdadeiras ou falsas. Essas proposições permanecem, em grande parte, implícitas nas ações do sujeito.

2.4 SITUAÇÕES QUE DÃO SENTIDO À ÁREA COMO GRANDEZA GEOMÉTRICA

Um primeiro estudo das situações que dão sentido à área foi proposto por Baltar (1996), no âmbito de uma pesquisa voltada para a elaboração e experimentação de uma engenharia didática com alunos de nível equivalente ao terceiro ciclo do ensino fundamental, na França.

Essa autora realiza um breve levantamento dos tipos de problemas sobre área, ao longo da história da matemática. Esse levantamento permitiu evidenciar uma variedade de situações concernente a esse conceito, dentre as quais destaca as situações de medida de área, comparação das áreas de duas superfícies dadas, produção de superfície de mesma área que uma superfície dada, a otimização⁵ de área e da conservação de área por transformação (BALTAR, 1996).

Ela também adotou em seu estudo como hipótese que “o desenvolvimento no ensino do conceito de área como grandeza permite os alunos estabelecerem relações necessárias entre dois quadros - o geométrico e o numérico” (DOUADY; PERRIN-GLORIAN 1989).

Na construção do conceito de área como grandeza geométrica está em jogo fortemente a relação de equivalência “ter mesma área”. De um ponto de vista estritamente matemático, tendo sido definida uma unidade, pode-se dizer que duas superfícies de mesma medida têm mesma área. Segundo Baltar (1996), as pesquisas anteriores a dela, como os estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) mostram que de um ponto de vista da aprendizagem dos alunos a construção da relação de equivalência deve ser anterior ao uso da medida tendo como suporte fundamental a noção de equidecomposição: duas superfícies equidecompostas têm mesma área.

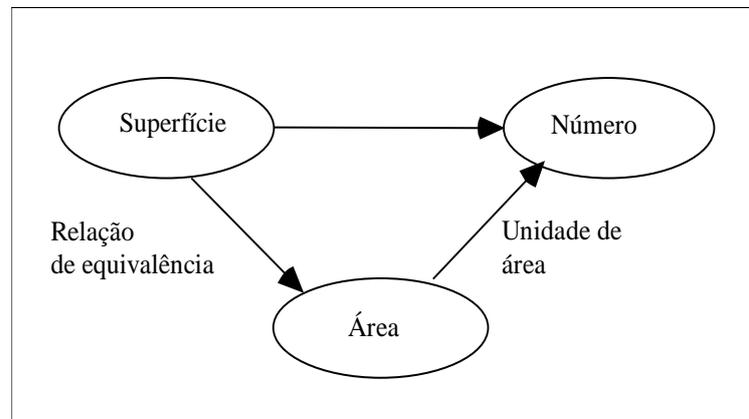
Bellemain e Lima (2002) explicitam de forma clara o processo acima mencionado ao expor o seguinte exemplo:

Se duas superfícies podem ser decompostas em um número finito de partes, duas a duas congruentes, então elas têm mesma área. No âmbito dos modelos concretos de superfícies feitos, por exemplo, com papel, a propriedade matemática acima referida é representada pelo procedimento comum de corte e colagem, no qual podemos recortar um deles em partes que coladas umas às outras – sem sobreposição nem criação de lacunas – formam o outro modelo (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 41).

Ainda para esses autores as relações entre os quadros geométricos e o das grandezas podem ser esquematizados da seguinte forma:

⁵ A otimização da área de acordo com Ferreira (2010) são dadas as condições que envolvem todos os problemas do tipo “ achar a maior área para um perímetro fixo”, por exemplo, dentro de um conjunto de superfícies.

Figura 1- Organização conceitual da área como grandeza



Fonte: Bellemain e Lima (2002, p. 41)

Esse diagrama evidenciado nos estudos de Baltar (1996), Bellemain e Lima (2002), Mello (2003) e Ferreira (2010) apresenta alguns elementos pertinentes para o desenvolvimento do estudo das situações que dão sentido à área como grandeza.

Do ponto de vista dos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) é preciso a distinção e articulação entre três quadros, a saber: o geométrico, o numérico e o das grandezas para a construção do conceito de área como grandeza. Segundo Bellemain e Lima (2002):

O quadro geométrico: constituído por superfícies planas; **quadro numérico:** consistindo nas medidas das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos. **quadro das grandezas:** contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classes de equivalência de superfícies de mesma área. Os objetos do quadro geométrico são, por exemplo, as superfícies planas, as figuras planas - triângulos, quadriláteros, círculos, figuras de contornos irregulares, etc. – que são modelos matemáticos de faces planas de objetos do mundo físico. São essas figuras que são comparadas com relação ao atributo área. O quadro numérico é o dos números reais não negativos - 2, 7, $1/2$, $\sqrt{2}$, etc. Expressões compostas de um número e de uma unidade de medida: 2m^2 , 7cm^2 , $1/2\text{ ha}$, 2 cm^2 , $\sqrt{2}\text{ m}^2$, etc. – são formas de representar grandezas. (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 29).

A partir dessa perspectiva, Baltar (1996) propõe um conjunto de situações que dão sentido à área como grandeza em três grandes grupos: comparação de área, medida de área e produção de superfície.

As situações de comparação se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas. Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência, os quadros geométrico e numérico vão ser necessários para a resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas.

Nas **situações de medida**, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade.

As **situações de produção** são diferentes das anteriores do ponto de vista da tarefa cognitiva do aluno. Enquanto nas situações de comparação e medida em geral há apenas uma resposta correta para cada situação, as situações de produção, frequentemente admitem várias respostas corretas. Além disso, apesar de a resposta esperada para uma situação de produção ser uma superfície (objeto geométrico), a intervenção dos outros quadros pode ser tão importante quanto a do quadro geométrico. (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 45)

Esse conjunto de situações foi organizado em quatro grupos por Ferreira (2010) que realizou um estudo com alunos no 3º ciclo do ensino fundamental tendo como objetivo investigar a construção do conceito de área e da relação de área e perímetro da seguinte forma:

Figura 2- Esquema dos tipos de situação

S I T U A Ç Õ E S	COMPARAÇÃO	ESTÁTICAS	Sem unidade de medida		
			Com unidade de medida	Não-convencional	
		Convencional			
		DINÂMICAS	Variação da área e do perímetro por deformação ou transformação geométrica		
	Otimização da área por invariância do perímetro e vice-versa				
	MEDIDA	EXATA	Com unidade de medida não-convencional		
			Com unidade de medida convencional		
		ENQUADRAMENTO	Aproximações		
	MUDANÇA DE UNIDADE		Com unidade de medida	Não-convencional	
				Convencional	
	PRODUÇÃO		Mesma área que a de uma figura dada		
			Área maior ou menor que a de uma figura dada		
Com área dada					

Fonte: Ferreira (2010, p. 29)

Em nossa pesquisa utilizaremos a classificação das situações propostas nos estudos de Ferreira (2010) apresentadas na figura 2, entretanto organizaremos da seguinte maneira: comparação de área com e sem a presença do aspecto numérico, medida de área, medida de área e mudança de unidade e produção de superfície⁶ de mesma área, de área maior e menor que uma figura dada, sem a presença do aspecto numérico. Esse último tipo de situação faz avançar a relação do quadro geométrico e das grandezas na construção do conceito de área.

⁶ Utilizam-se na presente pesquisa os termos superfície e figura como sinônimos.

Para cada classe de situação descrita anteriormente descrevemos a partir dos estudos de Baltar (1996), Bellemain (2000), Melo (2003) e Ferreira (2010) que norteiam essa parte da pesquisa, a classificação dos possíveis procedimentos e identificação dos invariantes operatórios relacionados à área como grandeza unidimensional.

2.4.1 Situação de Comparação

De acordo com Baltar (1996), Bellemain (2000) e Ferreira (2010) dependendo das variáveis escolhidas e os valores assumidos, os procedimentos de resolução serão diferenciados. Nesse tipo de situação, a primeira distinção a ser feita concerne ao número de superfícies a comparar: duas ou mais superfícies.

Segundo Ferreira (2010) quando passamos da comparação de área de duas superfícies àquelas de várias superfícies (seriação), seja de forma explícita ou implícita, é importante que haja essa distinção, uma vez que, nos problemas de seriação é preciso colocar em prática a transitividade da relação de ordem o que não ocorre na comparação de duas superfícies. Essa autora ainda subdivide a situação de comparação em estática e dinâmica.

Nos estudos de Bellemain (2000) referentes às situações problemas relativa ao conceito de área, essa autora explicita as situações estáticas e dinâmicas, nas quais pede-se para comparar as áreas de duas figuras, nas quais o aspecto numérico não esteja em jogo. As situações estáticas são aquelas em que as figuras não sofrem efeitos de movimentos e as dinâmicas dizem respeito à conservação ou variação da área relacionada ao estudo dos efeitos de deformações e transformações geométricas.

Outra questão voltada às situações estáticas diz respeito à disposição da medida da área de superfície relacionada ao procedimento de comparação numérica, onde se escolhe uma unidade de medida, e a superfície cuja medida é maior têm maior área, e duas superfícies de mesma medida têm mesma área (FERREIRA, 2010).

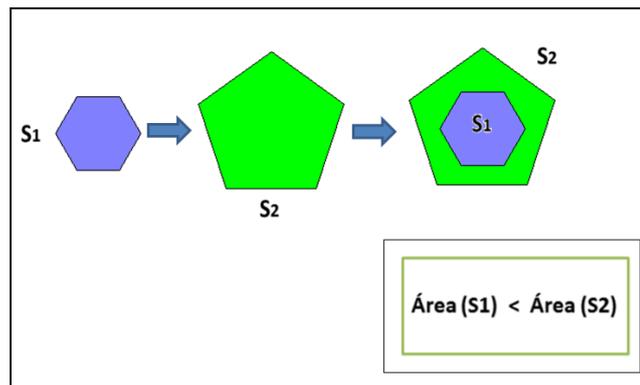
Ainda para Ferreira (2010) esse tipo de procedimento onde intervém o quadro numérico está apoiado na ordem estabelecida para as medidas, que é a mesma estabelecida pela grandeza área. Diante desse contexto a autora conclui que independente da unidade de área escolhida, se duas superfícies são medidas com a mesma unidade e a medida da área de uma superfície S_1 é maior que a medida da área de uma superfície S_2 , então a área de S_1 é maior que a área de S_2 .

Evidenciaremos apenas como foco da nossa pesquisa os procedimentos de comparação nos quais intervém a área como grandeza unidimensional que segundo Ferreira (2010) trata-se

da comparação da área de duas ou mais figuras sem a intervenção de outras grandezas (inclusive sem a intervenção de comprimentos).

- **Inclusão e sobreposição:** Sobrepondo-se uma superfície S_1 por deslocamento em S_2 essa por sua vez, estando contida totalmente no interior de S_2 , se dirá que a área de S_1 é menor que a área de S_2 , como ilustra a imagem a seguir:

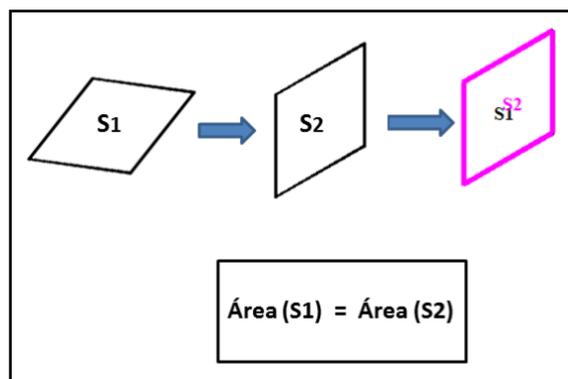
Figura 3- Comparação de área por inclusão de S_1 em S_2



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no *Apprenti Géomètre 2* (AG2)

Se as áreas de S_1 e S_2 coincidirem por sobreposição, após a aplicação de transformações isométricas do plano, diremos que as duas superfícies têm mesma área.

Figura 4- Comparação por sobreposição após deslocar (translação) e girar (rotação) " S_1 ".

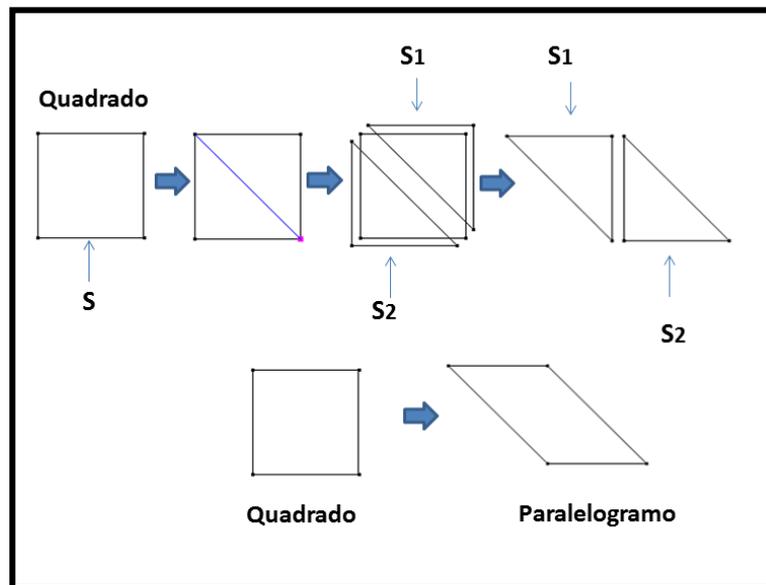


Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG 2

- **Equidecomposição:** este procedimento consiste na decomposição das superfícies e comparação dos pedaços obtidos.
- **Decomposição e recomposição (corte e colagem):** esse procedimento consiste em decompor uma determinada superfície S em duas superfícies distintas S_1 e S_2 , e montar uma figura S' por meio da recomposição de S_1 e S_2 sem perda nem

sobreposição. Nesse caso, S' terá mesma área que S . Essa questão também se estende à decomposição de S em um número finitos de partes.

Figura 5- Decomposição e recomposição



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

De acordo com Bellemain (2000), os teoremas em ação subjacentes ao processo de inclusão e sobreposição correspondem à “invariância da área por isometrias, deslocamento e a aditividade das áreas”.

Quanto aos procedimentos de equidecomposição, decomposição e recomposição estão baseados nos seguintes teoremas em ação verdadeiros: “duas superfícies equidecomponíveis têm mesma área e o corte e colagem sem perda nem sobreposição conservam as áreas”.

Ainda para Bellemain (2000) esses tipos de procedimentos têm um papel central na construção do conceito de área como grandeza, uma vez que, não temos a intervenção do quadro numérico para comparar as áreas e também por permitirem evidenciar que figuras diferentes podem ter mesma área.

2.4.2 Situação de Medida

De acordo com Ferreira (2010, p.31) “essa situação tem como objetivo a passagem do quadro das grandezas para o quadro numérico”. Para essa autora, a medida de área pode ser expressa por um número seguido de uma unidade (medida exata) ou por um intervalo (medidas aproximadas por enquadramento) com a escolha sucessiva de unidades que permitam uma medida mais aproximada da área da superfície.

Dois tipos de situação de medida são evidenciados nos estudos de Baltar (1996) e Ferreira (2010): as situações de enquadramento e as de medida exata.

“Nas situações de enquadramento, a área de uma superfície de borda irregular ou arredondada será aproximada. As situações de medida exata de área são aquelas em que, para a escolha de uma unidade, é atribuído um número a área da superfície” (FERREIRA, 2010, p. 32).

Interessam-nos os procedimentos descritos por essas autoras nos quais são considerados área como grandeza unidimensional, ou seja, medida direta das áreas em que um objeto se associa um número, que será sua medida, ou pelo menos uma medida aproximada (FERREIRA, 2010). Dois tipos de procedimentos são esperados nessa situação:

Ladrilhamento: uma superfície S é ladrilhável com uma superfície S' se é possível recobrir S com um número inteiro “ n ” de superfícies S' , sem deixar lacunas e sem sobreposição, onde S' será a superfície unitária. (FERREIRA, 2010).

O segundo procedimento proposto por Ferreira (2010) trata-se da **adição e subtração de áreas:** uma superfície S é decomposta em duas superfícies S_1 e S_2 , ou em um número finito de partes S_1, S_2, \dots, S_n disjuntos dois a dois ($S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$). Com relação a esse tipo de procedimento temos o seguinte teorema em ação: Se S e S' são superfícies quase disjuntas, $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$ (BALTAR, 1996).

2.4.3 Situação de Mudança de Unidade

Nas situações de mudança de unidade, a noção de área como grandeza geométrica pode ser construída distinguindo a área do número controlando a correspondência entre o quadro geométrico e o numérico. De acordo com Ferreira (2010), este tipo de situação tem como procedimento representar uma mesma área com unidades de medidas diferentes, ou seja, a uma mesma superfície podem corresponder números diferentes segundo uma unidade de medida escolhida, mas a área não muda. (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

A situação de mudança de unidade foi adotada no trabalho de Ferreira (2010) como ampliação dos estudos de Baltar (1996). O objetivo dessa autora era introduzir esse tipo de situação separadamente com o uso de diferentes superfícies para medir as áreas de determinadas figuras, antecedendo a introdução das unidades de medidas convencionais, para que os alunos compreendam a construção do par (n° , unidade de medida) independente das transformações operatórias de conversão de unidades.

Como explicitamos anteriormente no contexto francês na época dos estudos realizados por Douady e Perrin-Glorian (1989) centrava-se no trabalho com a utilização das unidades de

medidas convencionais com múltiplos e submúltiplos, dessa forma o foco estava voltado essencialmente aos quadros numéricos e por vezes ao geométrico, não existindo um trabalho acentuado voltado para área como grandeza geométrica, no qual fosse possível a articulação dos quadros supracitados.

No Brasil os estudos de Ferreira (2010) também trouxeram à tona a partir de uma análise de livro didático que as situações de mudança de unidade privilegiam o quadro numérico, uma vez que, é sugerido nas tarefas das coleções analisadas que o aluno estabeleça relações entre diferentes unidades de medidas de uma mesma grandeza, reconheça que os sistemas de medidas são decimais para realizem conversões utilizando as regras desse sistema.

Diante desse contexto o trabalho com unidade de medidas não convencionais neste tipo de situação com o foco voltado à articulação entre os três quadros, numérico, geométrico e das grandezas, favorece a construção do conceito de área como grandeza.

2.4.4 Situação de Produção de Superfície

De acordo com Bellemain e Lima (2002), as situações de produção de superfície admitem diferentes tipos de respostas. Esse tipo de situação permite, ora a articulação entre os quadros geométricos e o das grandezas, nos procedimentos em que o aspecto numérico é bloqueado, ora a articulação entre os quadros numérico e geométrico.

Destacaremos os procedimentos relacionados à produção de superfície de área maior, menor e de mesma área que uma superfície dada, procedimentos nos quais consideramos a área como grandeza unidimensional.

2.4. 4.1 Produção de Superfície de Mesma Área que uma Superfície Dada.

Contagem das unidades: este procedimento está relacionado com os procedimentos de ladrilhamento das situações de medida de área, os teoremas em ação subjacente são: escolhida uma unidade de medida, duas figuras de mesma medida têm mesma área. Esse procedimento também traz à tona um invariante operatório segundo o qual a medida da área é o número de ladrilhos necessários para recobrir a superfície (BALTAR, 1996).

Ferreira (2010) coloca que a escolha de determinados valores para as variáveis neste tipo de situação como forma da superfície dada, a forma da unidade de medida, e aquela da superfície que será produzida, pode ser favorável ou bloquear a resolução do aluno.

Decomposição e recomposição (corte e colagem): esse é um tipo de procedimento geométrico, no qual o aspecto numérico não está em jogo. Se uma superfície S' é obtida a

partir da decomposição e recomposição de S, dizemos que S e S' têm mesma área. O teorema em ação subjacente a essa ação é: o corte e colagem (a decomposição e recomposição) sem perda nem sobreposição conservam as áreas.

Nesse tipo de situação ainda podemos observar se a partir de uma superfície dada, ao sugerir que se construa a partir dela, uma de mesma área, podemos observar se para os alunos a ideia de mesma área está relacionada ao formato da figura ou se dissocia desta. Neste tipo de procedimento está em jogo o quadro das grandezas e o quadro geométrico, a articulação entre esses dois quadros faz avançar a ideia de área como grandeza.

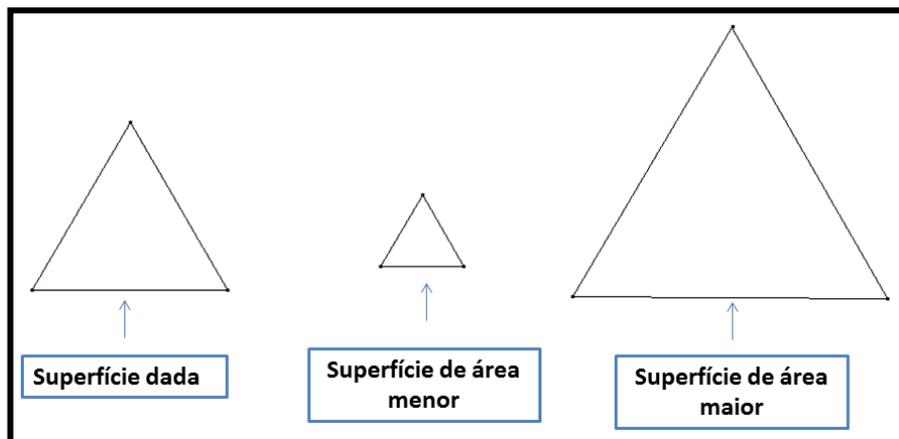
2.4.4.2 Produção de Superfície de Área Maior ou Menor que uma Superfície Dada

Esse tipo de procedimento se subdivide em duas subclasses: os procedimentos geométricos e os numéricos.

Os procedimentos geométricos estão relacionados à construção de superfície no interior ou exterior de uma superfície dada. Esse procedimento justifica-se pela aditividade das áreas e porque área é uma função positiva, uma superfície incluída em outra tem área menor, esta questão também diz respeito às situações de comparação por inclusão. Implicitamente temos um teorema em ação: se S e S' são superfícies quase disjuntas, $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$ (BALTAR, 1996).

Ainda nesse tipo de procedimento muitas vezes o formato da superfície é mantido ao produzirem uma de área maior ou menor que uma superfície dada, o que pode ser interpretado como um indício de concepção geométrica como ilustra a imagem a seguir:

Figura 6- Produção de superfície de área menor e maior que uma superfície dada

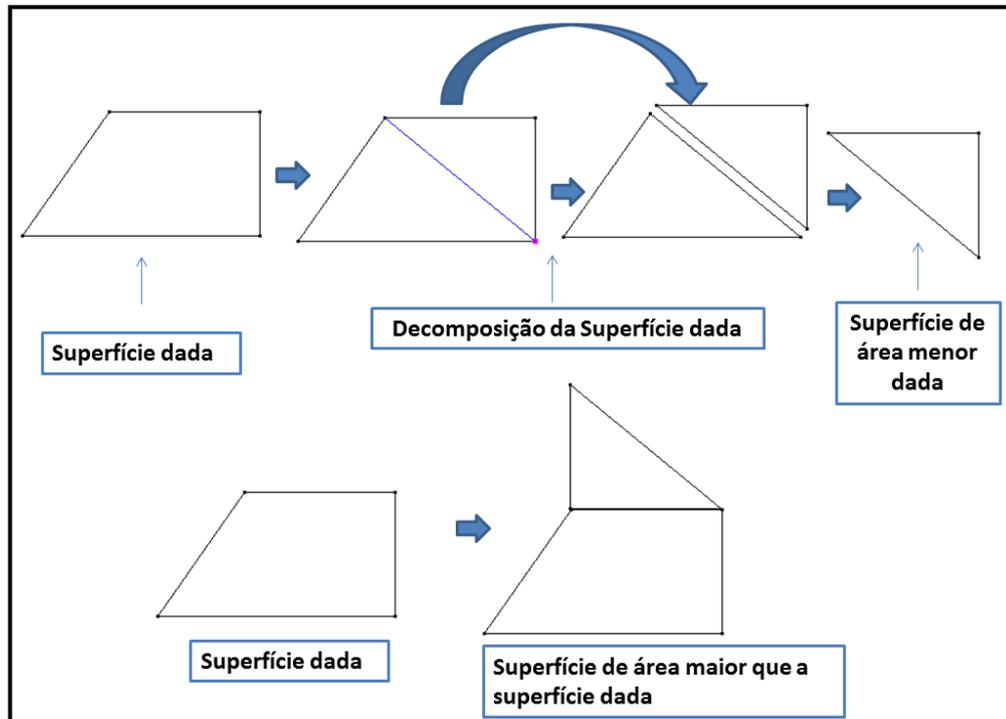


Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

Outra questão que pode ser observada nesse tipo de procedimento é cortar uma parte da superfície inicial ou adicionar um pedaço a essa mesma superfície: esse procedimento

também se justifica pela aditividade das áreas, no entanto ao contrário do procedimento anterior, a forma da superfície não é mantida, esse procedimento pode corresponder à distinção entre área e figura, e favorece também a distinção entre área e perímetro, uma vez que os alunos poderão visualizar que figuras diferentes podem ter mesma área e perímetros distintos e isso pode ocorrer reciprocamente.

Figura 7- Produção de superfície de área menor e maior que uma superfície dada



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

Nos procedimentos numéricos utiliza-se a medida de área de uma superfície inicial (obtida pela contagem de quadradinhos e por cálculos) para produzir uma superfície de área maior, ou menor. Esses procedimentos estão baseados na propriedade que a ordem estabelecida entre as medidas das áreas é a mesma que a ordem para as áreas (FERREIRA, 2010, p. 34).

A pesquisa aqui apresentada apoia-se nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), nas pesquisas anteriores desenvolvidos pelo Grupo Pró-grandezas, que adotam a abordagem da área como grandeza geométrica nas investigações que ao longo dos anos, com variados referenciais teóricos, tem utilizado diferentes tipos de recursos para o ensino e aprendizagem de área de figuras planas e na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais. Pretende-se nesse trabalho investigar as condições que permitem aos alunos de um 6º ano, por meio de uma pluralidade de recursos (dentre os quais o software de geometria *Apprenti Géomètre 2*),

ampliar a possibilidade de resolução de tarefas sobre área e conseqüentemente dar sentido a esse conceito.

Elaboramos então diante desse contexto, a seguinte pergunta de pesquisa: a construção e aplicação de uma seqüência de tarefas envolvendo as situações que dão sentido à área como grandeza, construídas com uma pluralidade de recursos, potencializa o desenvolvimento de procedimentos de resolução pelos alunos?

2.5 OBJETIVOS

2.5.1 Objetivo Geral

Investigar o tratamento dado por alunos de 6º ano do ensino fundamental às situações que dão sentido à área como grandeza (comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície) em ambientes com características distintas: papel e lápis, materiais manipulativos e software de geometria.

2.5.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar os procedimentos de resolução de tarefas de comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície nos ambientes: papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*.
- Identificar os teoremas em ação verdadeiros ou falsos, mobilizados pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, na resolução de tarefas sobre área nos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*.
- Identificar aportes do uso de diversos recursos para a construção do sentido da área como grandeza.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nossa metodologia de pesquisa é baseada em elementos da Engenharia Didática⁷ (ARTIGUE, 1996). A revisão de literatura apresentada no capítulo anterior deu suporte à elaboração e à análise a priori das tarefas que compuseram a sequência didática. A estrutura da experimentação, as escolhas didáticas feitas e sua justificativa são apresentadas a seguir. Na análise a posteriori, os procedimentos de resolução utilizados pelos alunos são confrontados com o que foi antecipado na análise a priori, destacando os teoremas em ação que surgiram por meio desses procedimentos.

3.1 ESCOLHA DO CAMPO DE PESQUISA

Para realizar nosso estudo escolhemos uma escola da rede pública municipal localizada na Mata Norte do Estado de Pernambuco, pelo fato de termos a possibilidade de viabilizar espaço físico, recursos e materiais necessários para aplicação da pesquisa. A escola escolhida é a única dessa cidade em que o laboratório de informática estava ativo e com os computadores funcionando perfeitamente, condições que favoreceriam a aplicação das tarefas propostas aos sujeitos da pesquisa.

3.2 ESCOLHA, CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS E TRAJETÓRIA PARA APLICAÇÃO DA PESQUISA

Decidimos aplicar a pesquisa no 6º ano do Ensino Fundamental, por esse ano iniciar uma nova etapa da Educação Básica, na qual se espera que os alunos tenham sistematizado competências básicas, com relação à área de figuras planas em anos anteriores, como nos mostram as Expectativas de Aprendizagem⁸ referentes ao 4º ano do Ensino Fundamental:

Comparar áreas de figuras poligonais desenhadas em malha quadriculada pela contagem de quadradinhos e metade de quadradinhos; Comparar áreas de duas figuras planas recorrendo às relações entre elas ou a decomposição e composição; Medir a área, cobrindo uma superfície plana com unidades quadradas; reconhecer que duas figuras podem ter a mesma área, mas não serem necessariamente congruentes; [...] (PERNAMBUCO, 2012, p.74-75).

No 6º ano também se espera que os alunos desenvolvam competências para resolver e elaborar problemas envolvendo as ideias de área [...] sem utilização de fórmulas

⁷ A engenharia didática caracteriza-se por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1996, p. 196).

⁸ As Expectativas de Aprendizagem, explicitadas nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) indicam o mínimo que o estudante deve aprender para desenvolver as competências básicas em uma disciplina. .

(PERNAMBUCO, 2012). Realizamos nosso estudo ora em duplas, ora em trios de alunos. Organizamos desse modo, para que entre eles houvesse uma socialização do desenvolvimento das tarefas propostas na pesquisa, tanto para favorecer a aprendizagem como para que tivéssemos mais informações sobre como os alunos estavam raciocinando. Optamos pela participação de 12 alunos⁹ de uma turma de 6º ano da escola pública municipal escolhida.

Esse 6º ano, assim como os 12 alunos que participaram da pesquisa, foram indicados pela equipe pedagógica da referida escola, selecionados a partir dos níveis elevados de proficiência obtidos em um projeto¹⁰ realizado pela equipe de assessores pedagógicos da Secretaria Municipal de Educação desse município.

No dia 13 de agosto foi entregue o termo de consentimento aos alunos que haviam sido escolhidos para participar da pesquisa. Além disso, conversamos em particular com os 12 alunos sobre o objetivo da pesquisa, o procedimento da coleta de dados e o comprometimento do pesquisador com cada um deles durante todo período da aplicação.

No dia 14 do referido mês foi recolhido o termo de autorização, devidamente assinado pelos pais e/ou responsáveis, permitindo a participação desses alunos. Eles se comprometeram em participar mesmo em um dia que não houvesse aula, se mostraram bastante motivados e foi entregue a cada um o cronograma dos encontros para a realização da pesquisa.

3.3 O ESPAÇO, O TEMPO E A ORGANIZAÇÃO DO CAMPO DE PESQUISA.

Para atender o objetivo geral da pesquisa, de investigar o tratamento dado por alunos de 6º ano do ensino fundamental às situações que dão sentido à área como grandeza (comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície), em ambientes com características distintas: papel e lápis, materiais manipulativos e software de geometria, organizamos a pesquisa em duas partes distintas.

Chamamos a primeira de **Etapas de Familiarização**, que consistiu em oferecer aos sujeitos participantes da pesquisa um conjunto de tarefas de familiarização com os materiais e recursos necessários à resolução das tarefas propostas na segunda parte denominada de **Dispositivo Central**.

⁹ Essa decisão de escolha de 12 alunos estava relacionada à organização de seis duplas que participariam das resoluções de tarefas nos três ambientes explicitados nos objetivos, em uma das etapas da pesquisa (decisão do pesquisador).

¹⁰ O objetivo desse projeto que é aplicado no início e final do ano letivo nesse município é diagnosticar as dificuldades dos alunos em português e matemática por meio da aplicação de uma avaliação interna no 6º e 9º anos do ensino fundamental, para elaboração e aplicação de um plano de intervenção junto aos professores. Os alunos com as melhores desempenhos foram selecionados para participar desta pesquisa.

As tarefas da Fase de Familiarização foram organizadas em dois ambientes um denominado de não digital e outro de digital. Além de promover a familiarização com os recursos, as tarefas estavam voltadas para conhecimentos úteis à resolução das tarefas do Dispositivo Central.

Quadro 1 - Apresentação das tarefas da Etapa de Familiarização

Etapas de Familiarização		
Ambiente Não digital	Tarefa 1	Reprodução na malha quadriculada
	Tarefa 2	Isometrias na malha pontilhada quadrada
	Tarefa 3 e 4	Composição de figuras
Ambiente Digital	Tarefa 1	Exploração livre do software
	Tarefa 2	Complementação de figuras
	Tarefa 3 a 5	Reprodução de figuras

Fonte: elaborada pelo autor

Quanto às tarefas do Dispositivo Central todas foram similares nos três ambientes com o diferencial no ambiente materiais manipulativos no qual trazemos na própria estrutura da tarefa a presença da malha pontilhada (tarefa 2) e da malha quadriculada (tarefa 4).

Quadro 2- Apresentação das tarefas do Dispositivo Central

Dispositivo Central		
Papel e Lápis	Materiais Manipulativos	<i>Apprenti Géomètre 2</i>
Tarefas 1 e 2 - Situação de comparação de área		
Tarefa 3- Situação de medida de área		
Tarefa 4- Situação de medida de área e mudança de unidade		
Tarefa 5- Situação de produção de superfície		

Fonte: elaborada pelo autor

Esse conjunto de tarefas foi organizado a partir das situações que dão sentido à área como grandeza geométrica, propostos por Ferreira (2010) em quatro grandes grupos a saber:

comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície e aplicados nos três ambientes da pesquisa.

3.4 JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DOS AMBIENTES E RECURSOS DA PESQUISA

Escolhemos três ambientes distintos para aplicar nossa pesquisa, a saber: papel e lápis, materiais manipulativos e o software de geometria *Apprenti Géomètre 2* (Aprendiz de Geometria).

O ambiente papel e lápis foi escolhido por ser uma ferramenta tradicional e conhecida dos alunos para resolverem tarefas no cotidiano escolar. Assim teríamos a possibilidade de verificar quais procedimentos seriam utilizados pelos sujeitos, quando não dispunham de outros recursos tais como a malha quadriculada, o papel pontilhado ou um software.

O segundo ambiente, denominado de materiais manipulativos, foi caracterizado pela disponibilidade de uma diversidade de recursos tais como: papel de decalque, malha pontilhada quadrada, malha quadriculada, malha isométrica, tesoura, fita adesiva, cola, lápis de colorir, canetas hidrográficas e giz de cera. Todos esses recursos foram inseridos em um kit e entregues aos alunos que participaram da Etapa da Familiarização (ambiente não digital), e aos que realizaram as tarefas nesse ambiente no Dispositivo Central.

Conjecturamos que o uso desses materiais permite aos alunos ampliar as possibilidades de procedimentos de resolução, em relação ao ambiente papel e lápis. Por exemplo, em uma tarefa de comparação das áreas de duas figuras, o uso do papel de decalque, permite não apenas comparar mentalmente (como é o caso, no ambiente papel e lápis), mas decalcar uma figura, transportá-la e sobrepor às demais figuras. Ou seja, o ambiente permite realizar concretamente movimentos de translação, rotação e reflexão, favorecendo uma abordagem dinâmica da tarefa. Do mesmo modo, o fato de disponibilizar tesoura e fita adesiva faz com que os alunos possam realizar efetivamente decomposição e recomposição de figuras, nos diferentes tipos de tarefas propostos.

O terceiro ambiente escolhido foi *Apprenti Géomètre 2*, um software de geometria que lida com o processo de decomposição e recomposição de maneira original em relação aos demais softwares consultados, tais como: o *Cabri Géomètre*¹¹ e o *Geogebra*¹². Nesses

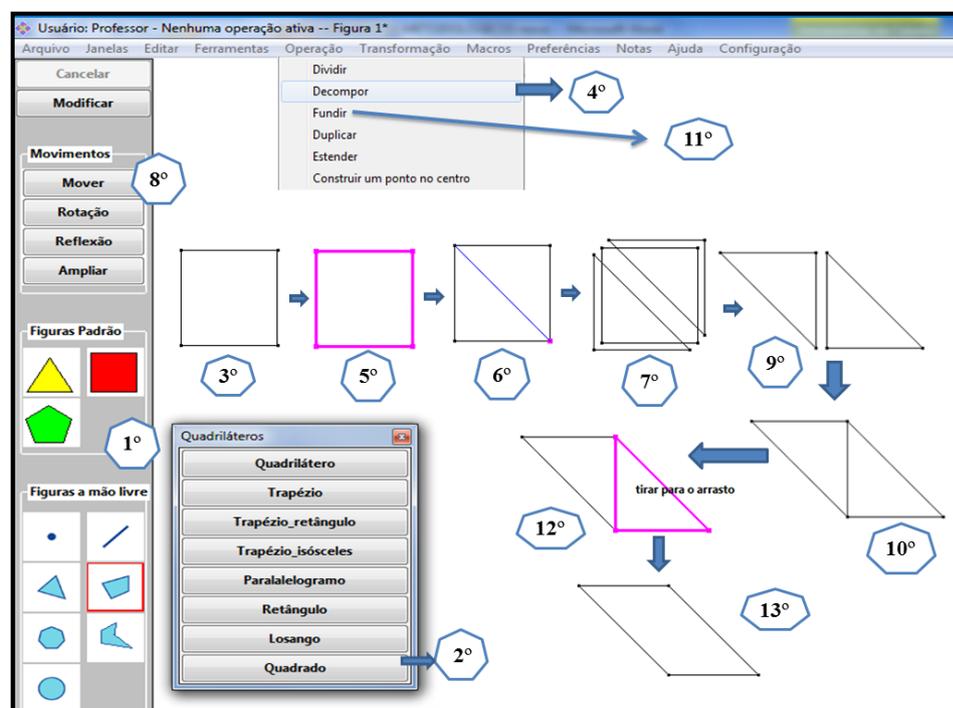
¹¹ O Cabri Géomètre 2 é um software de Geometria Dinâmica desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain que permite construir objetos geométricos interativamente (BALDIN; VILLAGRA, 2002, p. 11).

¹² O Geogebra é uma software de Geometria Dinâmica que busca integrar a geometria e a álgebra, foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter, da universidade de Salzburg para ser utilizado em um ambiente de sala de aula (GOBBI, 2012).

softwares não há uma ferramenta específica que permita ao aluno realizar processos de decomposição e recomposição de figuras, como é o caso no *Apprenti Géomètre 2*.

O uso dessas ferramentas de decomposição e recomposição de figuras pode ampliar, por exemplo, a possibilidade de resolução de algumas tarefas de comparação de área. Sendo F_1 e F_2 , figuras de mesma área, porém de formas diferentes, uma das maneiras de comparar suas áreas é decompor uma delas e recompor de modo a obter uma figura possível de comparar por sobreposição, ou seja, se duas figuras coincidem por sobreposição elas têm mesma área. A ilustração a seguir apresenta em alguns passos uma possibilidade de decompor e recompor uma figura (quadrado) no software.

Figura 8- Processo de decomposição no *Apprenti Géomètre 2* pela diagonal de um quadrado



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG 2

Para realizar a decomposição de um quadrado e com as peças decompostas compor um paralelogramo, pode-se, por exemplo, decompor o quadrado (selecionar a ferramenta *decompor* do menu *Operação*, clicar sobre a figura selecionando-a, escolher um dos seus vértices, selecionar com o botão esquerdo do mouse e arrastar até o outro vértice)¹³ e recompor a nova figura – no caso o paralelogramo (aplicar movimentos de rotação e ou reflexão nas partes decompostas, justapô-las, fazendo coincidir um de seus vértices e em

¹³ Outras formas de decompor no software podem ser evidenciadas no Apêndice B.

seguida selecionar a ferramenta *Fusão* do menu *Operação* e por último clicar nas partes que devem ser fundidas).

3.4.1 Escolha do *Apprenti Géomètre 2* em Relação aos Demais Ambientes

Outras vantagens do uso e de escolha do *Apprenti Géomètre 2* comparado com os demais ambientes podem ser evidenciadas pela construção de figuras de forma mais precisa, as figuras criadas permanecem no local até que sejam movimentadas, não há o risco de movimentos involuntários, toda a construção pode ser movimentada se necessário por uma única ação.

Podem ser aplicadas as figuras desenhadas na interface do software, transformações isométricas do plano (rotação, translação e reflexão), porém diferente dos ambientes materiais manipulativos, os efeitos de visualização são evidenciados de forma enfática pelo dinamismo do software.

As figuras podem ser decompostas, recompostas e duplicadas quantas vezes for necessário, os alunos podem voltar e refazer uma determinada ação, assim como remover qualquer figura construída na área de trabalho do software quantas vezes for preciso.

Outra questão importante que vale a pena ressaltar da escolha do *Apprenti Géomètre 2* em relação aos demais ambientes é que possui uma ferramenta denominada de “Histórico do aluno” que oferece como possibilidade uma espécie de rastro, ou seja, essa opção disponibiliza um histórico das ações dos alunos ao resolverem uma determinada tarefa, o qual fica armazenado em um arquivo criado no computador. Ao abrirmos o arquivo temos a possibilidade de verificar os procedimentos utilizados durante a resolução das tarefas.

Diante desse contexto verificaremos se o uso software *Apprenti Géomètre 2* poderá ampliar a possibilidade de procedimentos de resolução das tarefas com as situações de comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície, diferente do ambiente papel e lápis e do uso de materiais manipulativos.

Descrevemos as principais características do software, as funcionalidades de seus menus e ferramentas durante as análises das tarefas propostas na pesquisa no ambiente digital e no dispositivo central, quanto à descrição do software trazemos no **Apêndice A** uma visão geral.

3.5 ORGANIZAÇÃO DOS DISPOSITIVOS

A aplicação das tarefas foi organizada da forma como ilustra o quadro abaixo:

Quadro 3- Organização global dos dispositivos experimentais da pesquisa

Familiarização	Datas	Horário	
		Manhã	Tarde
Aplicação das tarefas no ambiente não digital	Sábado 15/08/2015	9h às 11h	-
Aplicação das tarefas no <i>Apprenti Géomètre 2</i> no laboratório de informática (Momento Instrucional).	Quarta 19/08/2015	8h às 12h	-
Aplicação das tarefas no <i>Apprenti Géomètre 2</i> no laboratório de informática (Momento de exploração do software pelos alunos e resolução das tarefas de familiarização com os software).	19/08/2015	-	13h30 às 17h
Dispositivo Central	Datas	Horário	
Aplicação do conjunto de cinco tarefas nos três ambientes da pesquisa.	14/10/2015	7h30 às 12h30	
Encontro com o grupo 1	20/10/2015	8h às 11h	
Encontro com o grupo 2	16/11/2015	8h às 11h	
Encontro com o grupo 3	17/11/2015	8h às 11h	
Encontro com o grupo 4	18/11/2015	8h às 11h	

A Etapa de Familiarização foi organizada em três momentos ilustrados no quadro 3. O primeiro momento em um sábado pela manhã, no qual foram aplicadas as tarefas de familiarização no ambiente não digital.

O segundo em uma quarta feira, no qual foram realizados dois encontros, um pela manhã com o objetivo de apresentar os menus do *Apprenti Géomètre 2* (ambiente digital) aos alunos participantes da pesquisa de forma expositiva e instrucional por meio de slides e no próprio software, e o outro encontro no mesmo dia à tarde, com o objetivo de trabalhar com tarefas que permitissem aos alunos utilizar as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.

Essas tarefas¹⁴ foram elaboradas de maneira a permitir que os alunos utilizassem as principais ferramentas do software e desenvolvessem habilidades pertinentes à realização das tarefas do Dispositivo Central.

O Dispositivo Central por sua vez, foi dividido em duas partes, a primeira consistiu na aplicação de cinco tarefas nos três ambientes da pesquisa, a saber: papel e lápis, materiais manipulativos e software de geometria (*Apprenti Géomètre 2*) sendo duas duplas por ambiente, com a possibilidade de responder as tarefas apenas com os recursos disponíveis no respectivo ambiente. Na segunda parte, os alunos podiam utilizar os diferentes recursos disponíveis nos três ambientes.

Houve um período longo, como observamos no quadro 3, entre a aplicação das tarefas de familiarização e as tarefas do dispositivo central. A justificativa dessa distância é devido à não disponibilidade do laboratório de informática, e ao fato de os alunos estarem participando de vários eventos pedagógicos na escola, não sendo possível retirá-los das atividades que estavam sendo vivenciadas.

Em conversa informal com o professor dessa turma quanto à utilização por ele de diferentes recursos durante as aulas de matemática, tais como: malha quadriculada, malha isométrica ou mesmo recursos tecnológicos, software de geometria, entre outros, observamos em sua fala que o mesmo nunca havia utilizado o laboratório de informática, pois segundo ele não tinha habilidade para o uso do computador. Quanto ao uso das malhas, o professor colocou que o próprio livro didático adotado pela escola trabalhava nas tarefas de medida de área com a malha quadriculada e que já havia trabalhado com os alunos no início do segundo semestre do ano letivo.

Durante as aplicações das tarefas em cada dispositivo, como também nos ambientes da pesquisa, os alunos foram organizados de forma mais conveniente à coleta de dados, buscamos evidenciar como aconteceu cada encontro com os alunos.

3.5.1 Etapa de Familiarização (1º momento)

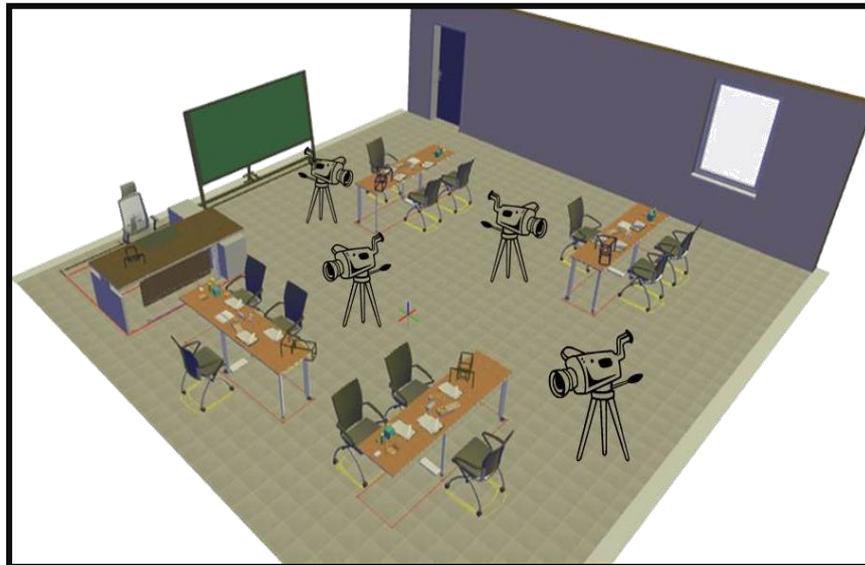
Participaram das tarefas de familiarização, todos os 12 sujeitos de uma turma do 6º ano, escolhidos para participar da pesquisa. Foram aplicadas quatro tarefas de familiarização no ambiente não digital.

¹⁴ As tarefas de familiarização foram elaboradas após a conclusão pelo autor da pesquisa das tarefas sobre área do dispositivo central.

Não estipulamos tempo para a realização de cada tarefa, apenas orientamos qual seria o horário de conclusão e que terminando uma tarefa os alunos deveriam iniciar a outra, e sempre recorrer ao pesquisador, para tirar as dúvidas sobre o desenvolvimento de cada uma delas. O papel do pesquisador nesse momento era de apenas situar os alunos quanto à aplicação de cada tarefa e às leituras dos enunciados de cada uma delas, ou seja, dar os comandos necessários para que compreendessem como deveriam realizar as tarefas propostas.

Além do conjunto de tarefas, cada aluno recebeu um kit em uma pasta de papel, contendo lápis de cor, lápis grafite, tesoura sem ponta, fita adesiva, cola e giz de cera. Esses materiais foram utilizados pelos alunos para responder as tarefas da primeira parte desse dispositivo. Cada aluno deveria desenvolver suas tarefas individualmente nesse primeiro momento, mas poderiam também socializar a resolução com os demais membros de sua equipe, caso fosse necessário. Para a aplicação dessas tarefas organizamos o ambiente da seguinte forma:

Figura 9- Organização da sala do dispositivo de familiarização 1º momento



Fonte: Elaborada pelo autor da pesquisa no software pCon.planner

Os alunos foram organizados em quatro grupos de três, como ilustra a figura 9, objetivando uma melhor captura e coleta de dados por meio de vídeo gravação. Colocamos uma câmera em cada birô onde estavam os alunos e espalhamos algumas pela sala de aula, com o objetivo de vídeo gravar as ações, procedimentos de resoluções e como eles interagiam durante a aplicação das tarefas.

Contamos nesse primeiro momento com a participação de quatro pessoas da equipe pedagógica da escola, que tiveram o papel de contribuir com a vídeo gravação dos sujeitos da pesquisa durante o desenvolvimento das tarefas.

O objetivo central de todas as tarefas de familiarização nos ambientes não digital e digital da pesquisa resume-se em criar condições para que os alunos se familiarizassem com recursos que são pouco utilizados no ambiente escolar e para que adquirissem conhecimentos importantes para resolver as tarefas do Dispositivo Central, mas nessa etapa, não foram diretamente abordadas tarefas relativas à área de figuras planas, foco central da pesquisa.

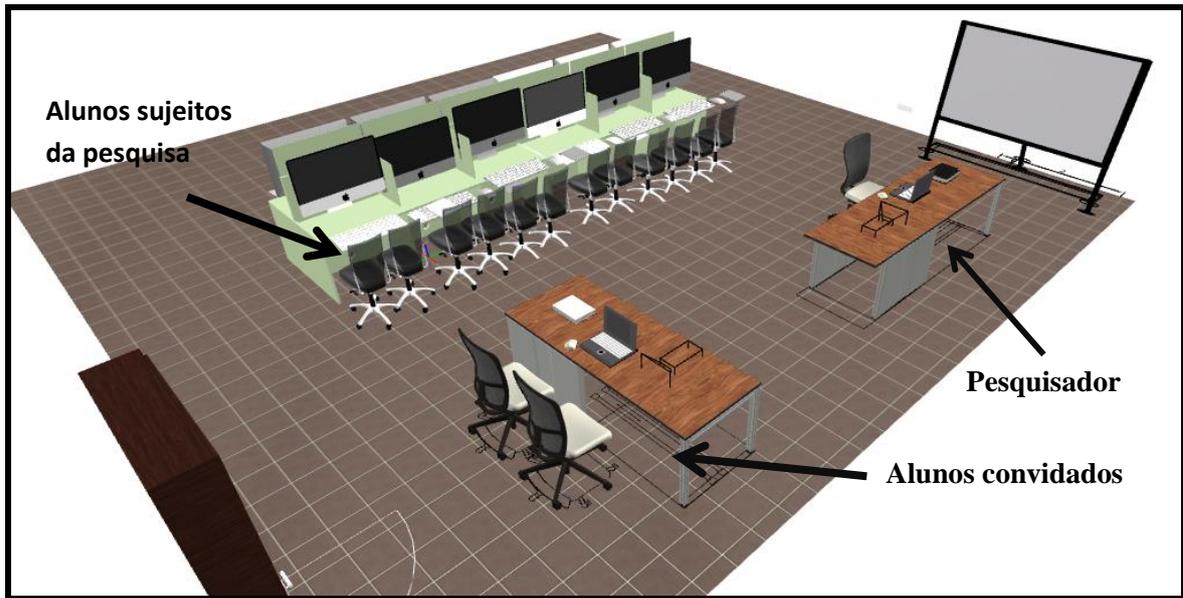
3.5.2 Etapa de Familiarização (2º momento)

O segundo momento da Etapa de Familiarização da nossa pesquisa contou com a participação de 14 sujeitos. Escolhemos dois alunos a mais que a quantidade prevista de participantes, do mesmo 6º ano, para que houvesse mais alunos familiarizados com o software *Apprenti Géomètre 2*, a serem incluídos no Dispositivo Central, no caso de algum dos 12 sujeitos escolhidos não poder participar até o final da coleta de dados da pesquisa.

Esse momento aconteceu no dia 19 de agosto de 2015 e foi dividido em dois encontros. O primeiro, no horário de 8h às 12h, no qual foram apresentadas as principais ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, de forma instrucional por meio da apresentação de slides e exposição do próprio software por meio da projeção em um data show. O segundo encontro aconteceu nesse mesmo dia, no horário de 13h30 às 17h, com o objetivo de darmos continuidade ao trabalho de familiarização com o referido software, por meio de cinco tarefas que permitiriam os alunos utilizar os principais menus e ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*. Orientamos os alunos que ao terminarem cada tarefa deveriam salvá-la e passar para a seguinte.

Organizamos os alunos da seguinte forma para o primeiro encontro realizado pela manhã e para o segundo encontro à tarde:

Figura 10- Familiarização no AG 2



Fonte: Elaborada pelo autor da pesquisa no software pCon.planner.

Organizamos os alunos em duplas, ou seja, dois alunos por computador, um ao lado do outro em cabines, e uma dupla separada (alunos convidados) em uma mesa com um notebook com mouse, porque não tínhamos mais espaços nas cabines. Preferimos dessa forma, por causa da disponibilidade de computadores e para que os alunos realizassem as tarefas de forma colaborativa e captássemos dados de suas conversas, falas soltas referentes às resoluções das tarefas, procedimentos e hipóteses, que poderiam surgir anteriores à ação no software.

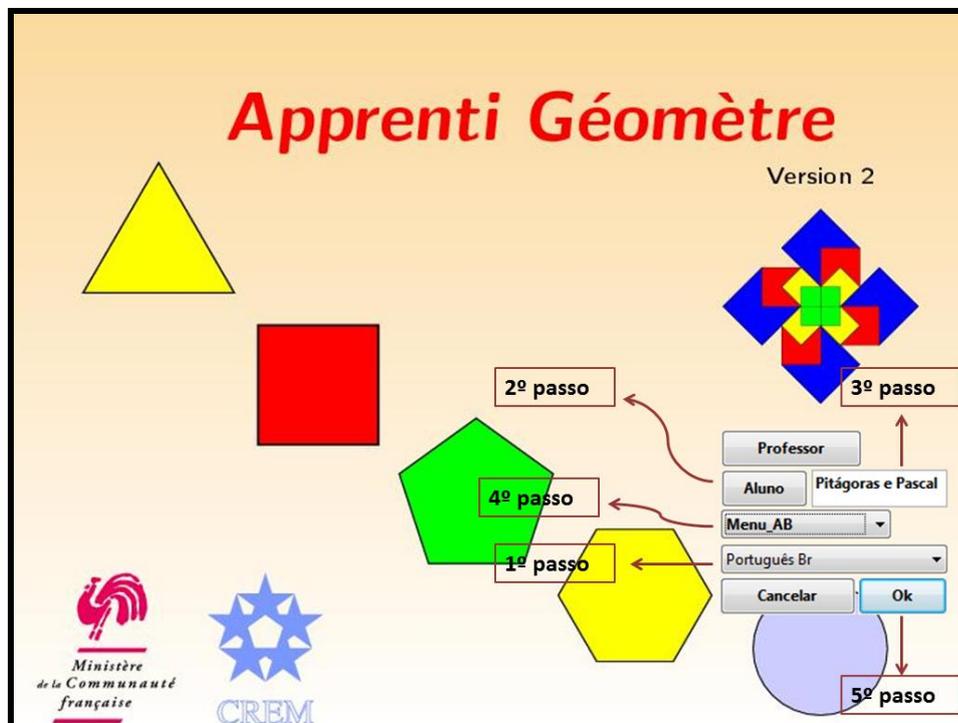
Para aplicação das tarefas dessa parte da pesquisa, instalamos antecipadamente o *Apprenti Géomètre 2* na versão 2.4.0 nos computadores do laboratório de informática da referida escola e inserimos o menu em português. Esse menu foi desenvolvido pelo autor da pesquisa, uma vez que o software só apresentava a opção de menu de idioma em inglês e francês.

Como forma de coletar os dados para saber quais procedimentos os alunos utilizariam para resolver as tarefas propostas no *Apprenti Géomètre 2*, utilizamos dois softwares de captura de tela o **a tube catcher** que permite fazer a gravação da interface do computador com o áudio de forma simultânea, e o **Camtasia Studio 7** para gravarmos os alunos direto da câmera dos computadores, para coletarmos dados das conversas dos alunos e sabermos as ações, hipóteses e procedimentos elencados pelos mesmos, antes de utilizarem o software para resolver cada tarefa.

O papel do pesquisador nesse primeiro encontro pela manhã, tinha como objetivo apresentar em uma aula expositiva e instrucional por meio de slides e diretamente no *Apprenti Géomètre 2*, as seguintes questões: como os alunos deveriam proceder para executar esse software e o conjunto de suas principais ferramentas e funcionalidades, de maneira que explorassem suas possibilidades dinâmicas.

Nesse primeiro encontro com os alunos no Ambiente Digital, eles teriam apenas que executar no software os comandos dados ou apresentados pelo pesquisador nos slides e no próprio *Apprenti Géomètre 2*. Assim mostramos aos alunos alguns passos que deveriam ser executados por eles antes de iniciar as tarefas, como ilustra a figura a seguir:

Figura 11- Passos para executar o software



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

Os alunos nesse encontro foram instruídos a executarem os cinco passos apresentados na figura 11, depois de abrirem o software com um clique duplo em seu ícone, presente na área de trabalho dos computadores. Teriam então, após executarem o software, que verificar primeiro a opção de idioma, se já estaria em português, se não estivesse, deveriam escolher essa opção para em seguida continuar com os demais passos. O segundo seria escolher a opção aluno, o terceiro passo, digitar o nome de cada integrante da dupla, o quarto escolher os menus de acordo com a sugestão da tarefa e o quinto e último clicar em OK.

Esses passos teriam que ser realizados antes de resolverem as tarefas para que pudéssemos ter um histórico das resoluções das tarefas pelos alunos.

Mesmo tendo as câmeras para vídeo gravar e também os softwares de captura de tela nos computadores, a ferramenta de “*Histórico do aluno*” poderia contribuir com a coleta dos dados, sobretudo caso houvesse algum problema nessas gravações ou alguma interferência nos vídeos, uma vez que os alunos estariam um ao lado do outro em cabines, mas na mesma sala no laboratório de informática.

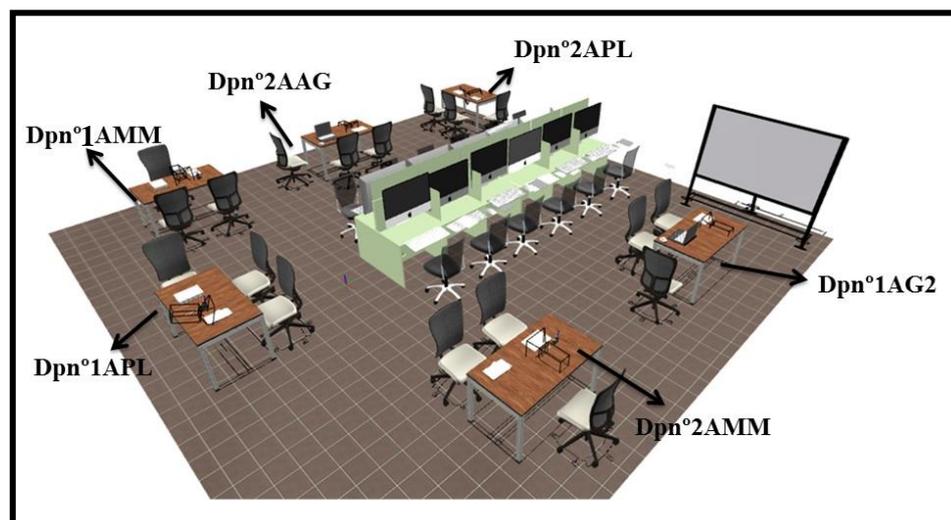
Entretanto o histórico que o software oferece não dá acesso nem aos comentários, dos alunos nem seus gestos, o que justifica a escolha dos softwares de captura de tela **Camtasia Studio 7** e o **a tube catcher**, como complemento ao que o próprio *Apprenti Géomètre 2* permite fazer.

3.5.3 Dispositivo Central (1ª parte)

Participaram desse primeiro encontro do dispositivo central, no dia 14 de dezembro de 2015, no horário das 7h30 às 12h30, os 12 alunos escolhidos no início da pesquisa¹⁵.

Organizamos todos os alunos no laboratório de informática dessa escola, em duplas, sendo que duas duplas realizaram as tarefas no ambiente que chamamos Papel e lápis (APL), duas duplas no ambiente intitulado na pesquisa Materiais Manipulativos (AMM) e duas duplas realizaram as tarefas no *Apprenti Géomètre 2* (AG2), como ilustra a imagem a seguir:

Figura 12- Organização da sala do Dispositivo Central primeira parte



Fonte: Elaborada pelo autor da pesquisa no software pCon.planner

¹⁵ A dupla convidada não participou da aplicação das tarefas dessa etapa, pois todos os alunos anteriormente escolhidos puderam participar até o final dos encontros da coleta de dados.

As duplas escolhidas para responderem as tarefas no *Apprenti Géomètre 2* foram selecionadas de acordo com seu desempenho na etapa de familiarização com o software, as demais duplas dos ambientes papel e lápis e materiais manipulativos foram organizadas a partir da afinidade dos alunos.

As siglas Dpn°1AMM significa (Dupla de número 1 ambiente materiais manipulativos), Dpn°1APL (Dupla de número 1 ambiente papel e lápis) e Dpn°1AG2 (Dupla de número 1 Ambiente *Apprenti Géomètre 2*), para denominarmos as outras duplas apenas inserimos o 2, assim saberíamos qual seria a segunda dupla de cada um dos ambientes. Caracterizamos cada dupla com esses códigos, para um melhor controle de seus protocolos.

Contamos com a participação de integrantes do grupo Pró-Grandezas e equipe pedagógica da escola. Cada um foi instruído anteriormente sobre o papel a desempenhar nesse dispositivo da pesquisa, ou seja, orientar os alunos acerca dos materiais que deveriam utilizar para responder cada tarefa nos diferentes ambientes, tirar algumas dúvidas nos enunciados das tarefas, caso os alunos não conseguissem ler e organizar a questão da vídeo-gravação, observando se as câmeras estavam funcionando perfeitamente. Assim para cada dupla de alunos tínhamos um monitor incluindo o pesquisador.

Em cada um dos birôs em que estavam as duplas colocamos uma câmera com o objetivo de gravar as ações, as falas e procedimentos utilizados pelos alunos para resolverem as tarefas propostas.

As duplas de alunos que foram escolhidas para responder as tarefas utilizando o *Apprenti Géomètre 2*, além de termos uma câmera no birô, capturamos a tela do computador de cada uma, com o software **a tube catcher** que permite capturar não apenas a tela, mas também o áudio de forma simultânea.

O uso desse software assim como a organização do ambiente para realização desse dispositivo foi importante para que pudéssemos acompanhar as ações e procedimentos de resoluções de cada tarefa pelas duplas.

As duplas ficaram separadas, ou seja, localizamos cada uma por ambiente separando-as, para que não houvesse influência nas resoluções das tarefas e interferência nas filmagens.

3.5.4 Dispositivo Central (2ª Parte)

A segunda parte do Dispositivo Central foi a realização de encontros com os 12 sujeitos participantes da pesquisa, cujo objetivo era saber a conceitualização de área a partir das respostas dadas por esses sujeitos que contrariamente à primeira parte desse dispositivo,

poderiam escolher os diferentes recursos disponíveis no três ambientes, de acordo com sua preferência. Pretendíamos também, verificar se a pluralidade de recursos permitiria aos alunos mobilizarem diferentes procedimentos eventualmente bloqueados devido às limitações de certos ambientes.

Organizamos os alunos em quatro trios, compostos de alunos que na etapa anterior haviam realizado as tarefas em diferentes ambientes (um aluno do ambiente papel e lápis, um dos materiais manipulativos e um do *Apprenti Géomètre 2*). Cada trio resolveu as tarefas em um momento distinto.

Organizamos o laboratório de informática da referida escola para a realização dessa segunda parte do dispositivo central da seguinte forma:

Figura 13- Organização da sala para aplicação das entrevistas



Fonte: Elaborada pelo autor da pesquisa no software pCon.planner

Todos os encontros com os alunos dessa segunda parte do dispositivo central foram vídeo-gravados. Também ativamos a câmera do computador portátil e o software **a tube catcher** para capturar a tela e o áudio de forma simultânea, caso os alunos optassem em responder as tarefas utilizando o *Apprenti Géomètre 2*. Os alunos teriam também que justificar as respostas dadas a cada uma das tarefas, para que tivéssemos acesso aos protocolos escritos, caso houvesse alguma interferência nos protocolos vídeo gravados.

Outro aspecto dessa segunda parte do dispositivo central foi que entregamos a cada trio, as respectivas tarefas de cada integrante realizadas na primeira parte desse dispositivo em cada ambiente, caso quisessem socializar suas respostas.

3.6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DO DISPOSITIVO CENTRAL

Para a realização desse dispositivo foram entregues às seis duplas, cinco tarefas similares nos três ambientes, formuladas com base no levantamento das pesquisas anteriores sobre área como grandeza e na fundamentação teórica da nossa pesquisa (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, BALTAR, 1996, BELLEMAIN; LIMA, 2002, DUARTE, 2002, MELO, 2003, CREM, 2007, FERREIRA, 2010), o que nos conduziu a considerar alguns aspectos na construção das tarefas:

- algumas tarefas eram sem interferência do quadro numérico e outras permitiam o uso do quadro numérico;
- foram incluídas tarefas que favorecem a distinção entre área e figura e a distinção entre área e número;
- havia situações de comparação (com ou sem a intervenção do quadro numérico), medida de área, mudança de unidade e produção de superfícies;
- procurou-se elaborar tarefas que permitissem averiguar a mobilização ou não dos teoremas-em-ação (corretos ou errôneos) identificados nas pesquisas anteriores;
- cada tarefa, com pequenos ajustes, poderia ser realizada pelos sujeitos nos três ambientes (papel e lápis, materiais manipulativos e *Apprenti Géomètre 2*), mesmo se as possibilidades de ação dos sujeitos nesses ambientes eram em alguns casos bem diferentes.

Assim organizamos as tarefas da seguinte forma: a primeira tarefa consistiu em uma situação de comparação de área sem intervenção do quadro numérico, a segunda também de comparação de área com a intervenção do aspecto numérico. A terceira é uma situação de medida de área, a quarta trata da medida de área e mudança de unidade e a quinta e última situação é uma tarefa de produção de superfície. Como já foi dito, cada dupla realizou as tarefas em um dos três ambientes (duas duplas realizaram as tarefas em cada ambiente).

Como as cinco tarefas eram similares nos três ambientes¹⁶, uma parte da análise a priori é comum e uma parte é específica de cada ambiente. Algumas dessas tarefas apresentam características distintas de acordo com cada ambiente e as possibilidades de ação dos alunos e os *feed-backs* do ambiente, em cada caso, são diferentes. Escolhemos ora apresentar a versão do *Apprenti Géomètre 2* ora a versão do ambiente materiais manipulativos. Consideramos que são ambientes que oferecem uma maior diversidade de

¹⁶ O conjunto de tarefas em cada ambiente está disponível no Apêndice F.

estratégias possíveis, como mostram as pesquisas do CREM (2007) e Silva (2015), pelo potencial das ferramentas do software ou ainda pesquisas como Duarte (2002), Facco (2003), Santana (2006), Pessoa (2010) que evidenciam as possibilidades de exploração de materiais manipulativos como a malha quadriculada, por exemplo, para a realização de tarefas sobre área.

Cada uma das seis duplas de alunos recebeu as cinco tarefas grampeadas. Na capa deveriam identificar-se (colocar seus nomes, a série e a idade para termos um controle do material coletado e para sabermos a faixa etária dos alunos participantes da pesquisa). Para cada tarefa, além de responder o que era solicitado, precisavam explicar como haviam resolvido. Mesmo as duplas que utilizaram o *Apprenti Géomètre 2*, precisaram preencher a ficha, pois se houvesse algum problema na vídeo gravação ou mesmo nos computadores, ainda teríamos os protocolos escritos.

Todas as duplas foram filmadas nos três ambientes, posicionamos como relatamos anteriormente uma câmera em cada birô onde se encontravam os alunos, porém além de filmarmos com uma câmera separadamente, as dupla que responderam as tarefas no *Apprenti Géomètre 2* também foram filmadas com a câmera do computador que estavam utilizando, por meio do software **Camtasia Studio 7**.

Não estipulamos tempo de resolução para as tarefas, mas orientamos os alunos que ao concluírem uma tarefa, deveriam seguir para a próxima e assim sucessivamente. Todas as versões das tarefas nos três ambientes encontram-se no **Apêndice F**.

No ambiente papel e lápis os alunos receberam apenas a ficha contendo as tarefas, nenhum outro material manipulativo foi entregue, apenas um lápis grafite para cada integrante da dupla.

Entregamos as duplas do ambiente materiais manipulativos no início da realização das tarefas um kit em uma pasta plástica contendo: papel de decalque (manteiga), malha pontilhada quadrada, malha quadriculada, malha isométrica, tesoura, fita adesiva, cola, lápis de colorir, canetas hidrográficas, giz de cera e uma quantidade de ladrilhos suficientes para serem utilizados nas tarefas 3 e 4 de acordo com suas especificidades.

O monitor responsável por cada dupla orientava quais materiais deveriam ser utilizados de acordo com as especificidades de cada tarefa, como por exemplo, na tarefas 3,. os alunos poderiam utilizar os ladrilhos para o trabalho com a situação de medida de área já reproduzidos em uma quantidade suficiente entregue junto no kit, ou mesmo reproduzi-los na malha isométrica, ou ainda utilizar o papel de decalque, não entregamos a nenhum dos alunos instrumentos de medida convencionais, como régua graduada, fita métrica entre outros, pois o

nosso objetivo era introduzir o conceito de área como grandeza e bloquear o uso da relação entre área e comprimento, por meio das fórmulas.

Ao final da realização desse dispositivo entregamos um kit com os materiais supracitados a todos os alunos participantes da pesquisa.

A seguir são apresentadas as análises a priori de cada tarefa.

3.6.1 Análise A priori da Tarefa 1 – comparação de área não numérica

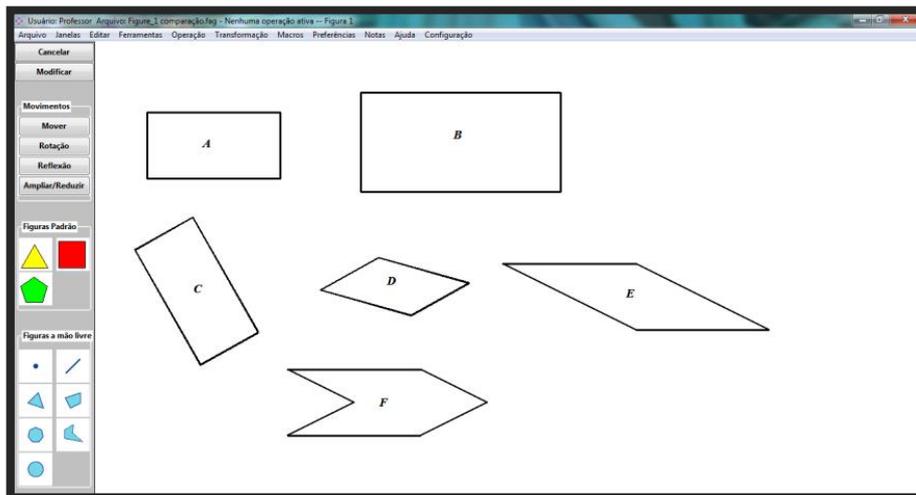
Tarefa 1- Situação de Comparação de Área (Versão AG2)¹⁷



TAREFA 1

Abra o arquivo “*Tarefa Figure_1.fag*” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, vocês devem escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português BR e clicar em OK.

1- Indique quais das figuras abaixo têm mesma área que o retângulo A:



Resposta

Explique como você fez para responder essa tarefa:

¹⁷ As demais versões dessa tarefa encontram no Apêndice F.

3.6.1.1 Descrição Global da Tarefa 1 e Análise dos Elementos Comuns aos Três Ambientes

A tarefa 1 é representante da classe de situação de comparação de área de duas figuras quaisquer. Com o objetivo de privilegiar a articulação entre o quadro geométrico e o quadro das grandezas, procuramos bloquear o quadro numérico. Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), a construção da noção de ter mesma área deve anteceder o ensino da medida de área, para que os alunos construam a noção de área como grandeza e não como um número, ou seja, para que compreendam área como um atributo da figura. Ferreira (2010) ainda coloca que as situações de comparação de áreas, sem o uso de medidas, são bastante escassas nos livros didáticos. Essa autora observa a predominância de tarefas que tratam apenas da medida de área. Esse fator pode conduzir os alunos à compreensão de área como um número, ou seja, às chamadas concepções numéricas da área.

A tarefa 1 nos três ambientes se apresentava da mesma forma que a descrita anteriormente para ser respondida no *Apprenti Géomètre 2*, havia diferença apenas nos comandos a serem seguidos anteriores à resolução da tarefa propriamente dita. O objetivo dessa tarefa era saber qual é a ideia de mesma área que os alunos mobilizariam. Trata-se de indicar, quais das cinco figuras teriam a mesma área que a do retângulo A. Deveriam responder no quadro em branco e em seguida explicar como fizeram para desenvolver essa tarefa, ou seja, quais procedimentos utilizaram.

3.6.1.2 Respostas Possíveis e Corretas da Tarefa 1

Todas as figuras dessa tarefa são polígonos e foram pensadas de modo a bloquear o aspecto numérico de comparação. As figuras que possuem a mesma área que a do retângulo A, são C, E e F, o paralelogramo “D” tem área menor e o retângulo “B” tem área maior que a de A.

Na construção dessa tarefa, para sabermos qual a ideia de mesma área que os alunos mobilizariam, foram construídos polígonos que tivessem a mesma área, mas que estivessem em posição diferentes (o retângulo C é idêntico ao retângulo A, mudando apenas a posição), e as figuras E e F podem ser obtidas a partir de A, por decomposição e recomposição, sem perda nem sobreposição. Pretendemos verificar se para o aluno a decomposição-recomposição conserva a área e se a mudança de posição e localização conserva a área.

O retângulo B com área maior que a de “A” notavelmente, assim incluindo A em B, os alunos poderiam perceber a diferença das áreas. Por outro lado, se os alunos confundem área e

formato da figura, podem pensar que A e B têm áreas iguais. Quanto ao paralelogramo “D”, pode-se verificar por inclusão que tem área menor que A.

3.6.1.3 Respostas Possíveis e Incorretas da Tarefa 1

Uma resposta possível que os alunos podem colocar é que todas as figuras têm áreas diferentes do retângulo “A”, levando em conta a localização de cada uma, assim a ideia (errônea) é que basta mudar de lugar, que a área da figura muda.

Outra possibilidade é que apenas a figura C tem mesma área que A, pois são figuras idênticas, variando apenas de localização e posição.

Podem responder que as figuras B, C, D e E, possuem a mesma área que a da figura “A” por terem a mesma quantidade de lados, mobilizando um teorema em ação falso, segundo o qual as figuras que possuem a mesma quantidade de lados possuem mesma área. Eles poderão ainda pensar que a área está relacionada ao formato das figuras, assim A, B e C, possuem áreas iguais por serem retângulos. Outro caso é levar em conta as projeções horizontais e verticais da figura E, e colocarem que ela não possui mesma área que a do retângulo “A” porque tem maior altura ou largura, ou ainda ocupa mais espaço.

3.6.1.4 Especificidades dos Procedimentos nos Três Ambientes

Os alunos que utilizaram o ambiente papel e lápis só podiam comparar as áreas das figuras mentalmente, uma vez que não dispunham de nenhum outro material (nem manipulativo nem o software), o que dá ao ambiente uma característica estática e favorece o aspecto perceptivo. Para verificar a igualdade ou desigualdade das áreas deveriam deslocar (rotacionar e transladar) uma das figuras e sobrepor à outra mentalmente ou realizar mentalmente ou riscando na ficha à mão livre procedimentos de decomposição e recomposição das figuras. Nos demais ambientes, esse modo de resolver a tarefa também é possível.

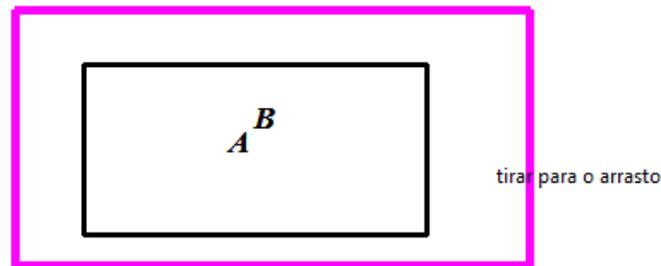
No ambiente de materiais manipulativos, os alunos podem decalcar as figuras e sobrepor umas às outras. Esse procedimento permite verificar que C se sobrepõe a A, que D “cabe dentro” de A e que A “cabe dentro” de B. Se o aluno mobiliza o teorema em ação verdadeiro segundo o qual área de uma figura é invariante por isometria poderá concluir que a área de A é igual à de C, embora C esteja em posição não prototípica, e que as áreas de B e D são diferentes da área de A.

O fato de disponibilizar tesoura e fita adesiva permite realizar efetivamente corte-colagem (decomposição e recomposição). Se o aluno mobilizar o teorema-em-ação segundo o qual figuras equidecompostas têm mesma área, dirá que as áreas de E e F são iguais à área de A.

Esse mesmo procedimento poderá ocorrer no ambiente materiais manipulativos, porém os alunos terão a possibilidade de utilizarem diferentes materiais e diferentes procedimentos, tais como: decalcar a figura A, recortá-la e sobrepor a figura B, chegando a conclusão que por inclusão B tem área maior que a de A, ou seja a combinação desse teorema-em-ação com a aditividade da área justifica que se tivermos uma figura X e uma figura Y, se X “cabe dentro” de Y então por inclusão a área de X é menor que a de Y (FERREIRA, 2010),

No *Apprenti Géomètre 2* poderiam utilizar a ferramenta “mover” que tem a função de arrastar (traslação) figuras, e sobrepor a figura A a figura B como ilustra a imagem a seguir:

Figura 14- Inclusão da figura A na figura B



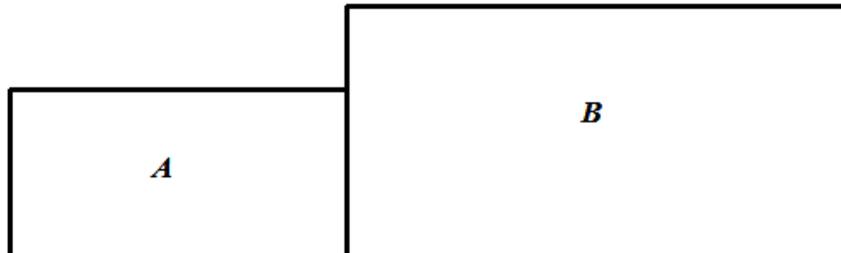
Fonte: elaborada pelo autor no AG2

Nesse caso os alunos estariam mobilizando um procedimento correto de comparação de área, que por inclusão a área da figura A é menor que a da figura B e por isso não teriam as mesmas áreas.

O software, como o papel de decalque, permitem verificar efetivamente que há inclusão e isso é importante. Mas é preciso outro passo, mobilizar o teorema em ação que diz que se há inclusão, não há igualdade das áreas. Se há sobreposição (figuras idênticas), há igualdade das áreas.

Outro procedimento previsto nessa comparação seria justapor um dos lados da figura A ao da figura B como ilustra a imagem a seguir:

Figura 15- Justaposição lados das figuras A e B

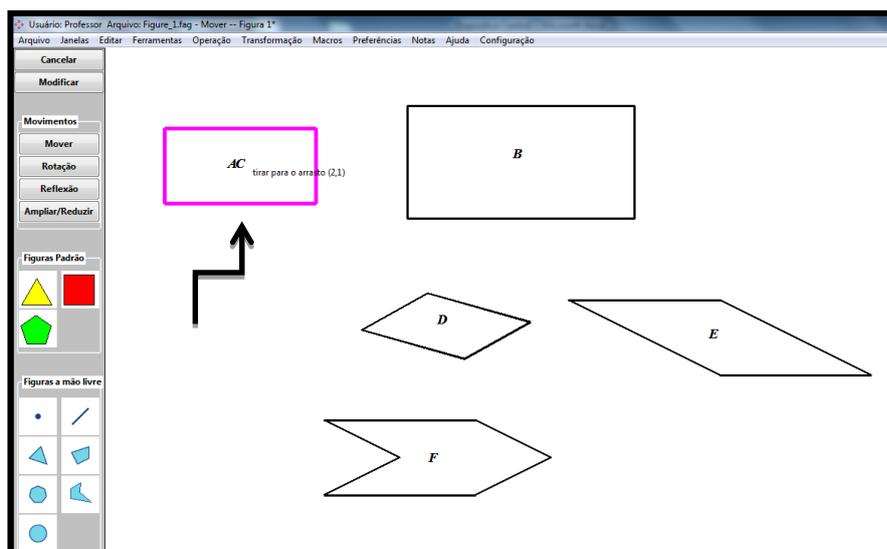


Fonte: elaborada pelo autor

Nesse caso, os alunos podem acertar a tarefa colocando que a área da figura A é menor que a área da figura B, mas esse tipo de procedimento não corresponde à mobilização de um teorema em ação verdadeiro.

Para comparar as áreas de A e C no *Apprenti Géomètre 2*, os alunos precisariam apenas selecionar a ferramenta rotação em seguida aplicar esse processo deixando a figura C na mesma posição da figura A e em seguida selecionar *mover* do menu *Movimento* para arrastar a figura C sobrepondo-a diretamente ao retângulo A como ilustra a imagem a seguir:

Figura 16- Sobreposição de C em A



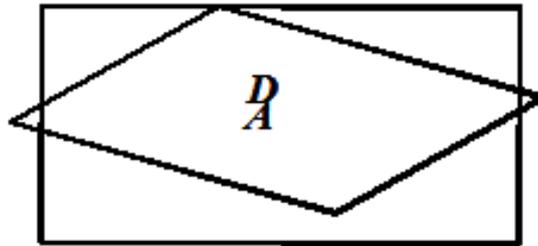
Fonte: elaborada pelo autor

Com relação à comparação das áreas do paralelogramo D com o retângulo A no ambiente papel e lápis os alunos teriam que realizar esse processo apenas visualmente e no

ambiente materiais manipulativos poderiam decalcar com o papel de decalque (manteiga) o paralelogramo e sobrepor ao retângulo A para chegarem à conclusão que por inclusão a área de D é menor que a área da figura A.

No *Apprenti Géomètre 2* os alunos poderiam selecionar a ferramenta mover e em seguida arrastar o paralelogramo D sobrepondo-o ao retângulo A e notavelmente perceber que as áreas são diferentes, pois mesmo aplicando movimento de rotação ou reflexão na figura D, após sobrepô-la em A, contrariamente à inclusão anterior o que sobra no paralelogramo é nitidamente menos do que o que resta no retângulo, como ilustra a figura a seguir:

Figura 17 - Sobreposição do paralelogramo D ao retângulo A



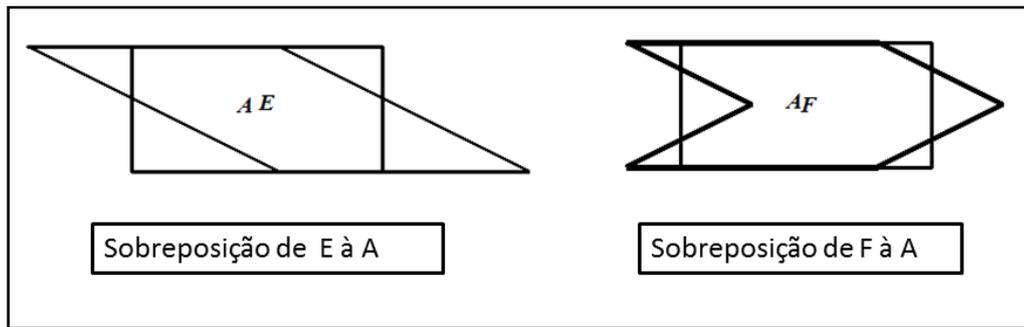
Fonte: elaborada pelo autor

Assim poderiam chegar à conclusão que a área da figura D é menor que a área da figura A, para que os alunos mobilizem as ferramentas que permitem o movimento das figuras, tais como: *mover*, *rotação* e *reflexão*, precisariam na etapa de familiarização responder as tarefas que correspondem a complementação e reprodução de figuras que exigem para completá-las a mobilização das ferramentas supracitadas.

Quanto à comparação das áreas de A e E e das áreas das figuras A e F, em qualquer dos três ambientes, poderá ser mobilizado um teorema em ação falso ligado à percepção, levando a concluir que as figuras E e F ocupam mais espaço que A, porque são mais “espalhadas” e por isso tem área maior e não igual à de A.

No ambiente materiais manipulativos os alunos poderão utilizar o papel de decalque para decalcar as figuras E e F em seguida sobrepor ao retângulo A, assim poderão verificar que não é possível incluir a figura E totalmente em A (nem tampouco a figura F) e relatar que não têm mesma área. Esse erro corresponde à mobilização do teorema-em-ação falso segundo *o qual figuras de mesma área são necessariamente idênticas*.

Figura 18- Sobreposição de E e F à A

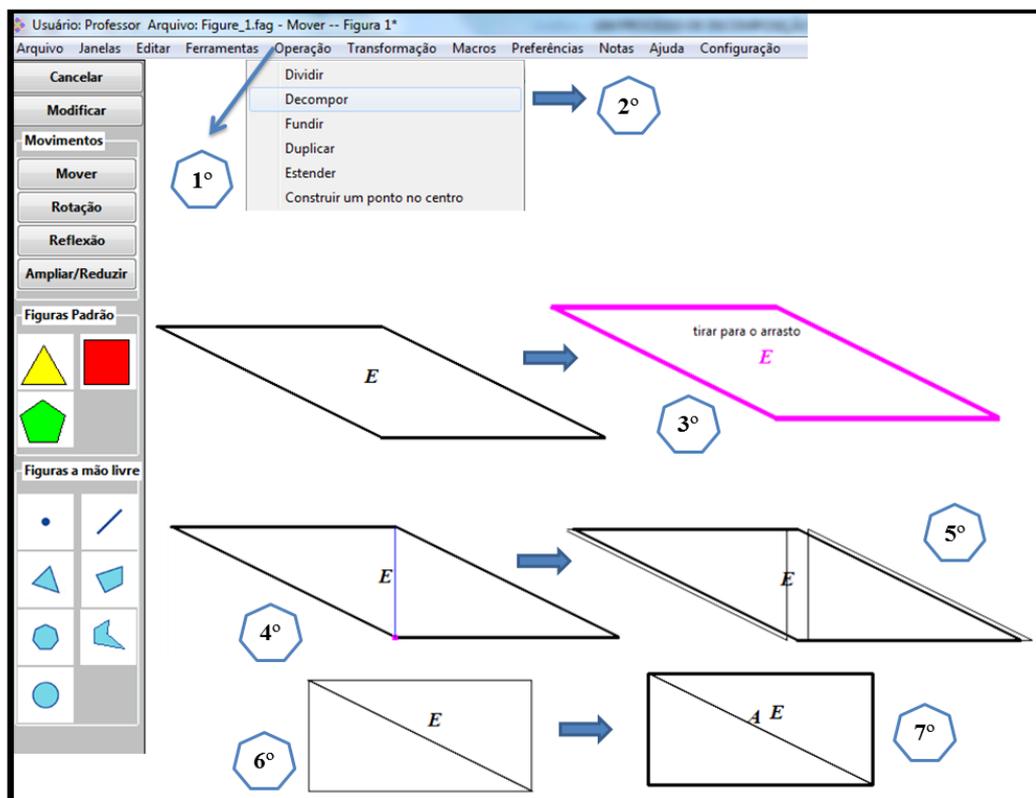


Fonte: elaborada pelo autor

A ilustração anterior apresenta a sobreposição de E e F à A, mostrando assim a ideia de ocupar mais espaço e também de não coincidir por sobreposição.

Para concluir corretamente que as áreas de E e F são iguais à de A, os processos de decomposição e recomposição estão fortemente em jogo. O corte-colagem pode ser realizado com tesoura e fita adesiva, no ambiente materiais manipulativos. Mas ilustramos a seguir os modos como pode ser realizado no *Apprenti Géomètre 2*.

Figura 19- Decomposição de “E” e comparação por sobreposição à “A”



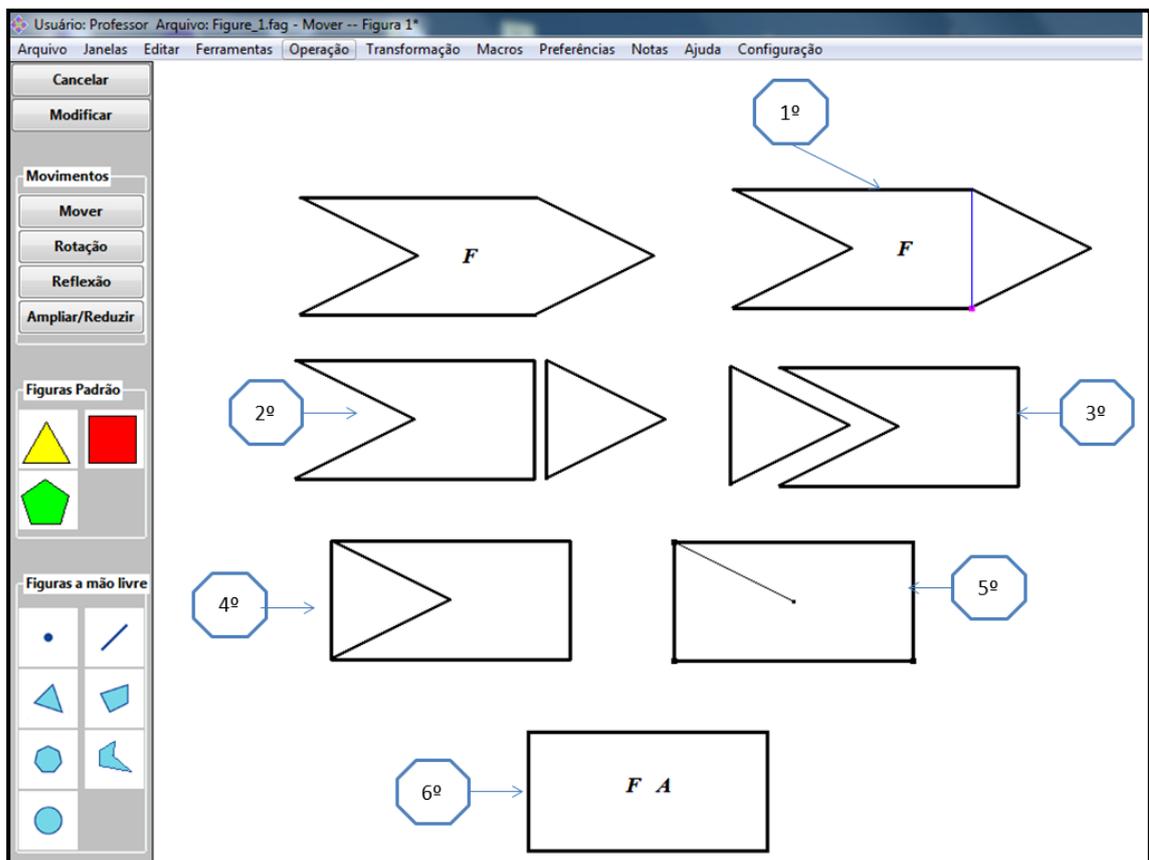
Fonte: elaborada pelo autor

Para realizar os procedimentos de decomposição acima mencionados é preciso clicar no menu *Operação* e em seguida na ferramenta *decompôr*, selecionar a figura E, depois clicar em um dos vértices e ir arrastando com o mouse até o outro, assim poderão decompor, e em seguida compor um retângulo com as partes decompostas, para isso será necessário que o aluno utilize algumas das transformações isométricas do plano (translação, rotação ou reflexão) no processo de recomposição das figuras, esses movimentos são possíveis por meio da utilização das ferramentas do menu *Movimentos* (mover, rotação e reflexão).

Após esses procedimentos, poderão escolher a opção *agrupar* do menu editar, e após terem agrupado as peças, sobrepor ao retângulo A, ou escolher a ferramenta *fundir* do menu *Operação*, fundir as partes decompostas e em seguida compor definitivamente um retângulo, pela fusão das peças, esse retângulo pode ser movido pela interface do software sem que as peças se separem e por fim sobrepor ao retângulo “A” como ilustrou o 7º passo da figura 19.

Os mesmos procedimentos utilizados para decompor o paralelogramo E também podem ser investidos para decompor a figura F, como ilustramos a seguir:

Figura 20- Decomposição, recomposição e sobreposição da figura F à figura A



Fonte: elaborada pelo autor

Após esses procedimentos os alunos poderão colocar que as figuras A e F possuem a mesma área. Um teorema em ação falso que poderia surgir nessa comparação seria dizer diretamente, sem necessariamente decompor, recompor e sobrepor F à A que a área da figura F é maior que a da figura A por possuir uma maior quantidade de lados.

Com relação às ferramentas mobilizadas nessa tarefa que precisam ser consideradas na fase de familiarização diz respeito às ferramentas *decompor* do menu *Operação*, *mover*, *rotação* e *reflexão* do menu *Movimentos*.

3.6.2 Análise a Priori da Tarefa 2- Comparação de Área com a Intervenção do Aspecto Numérico

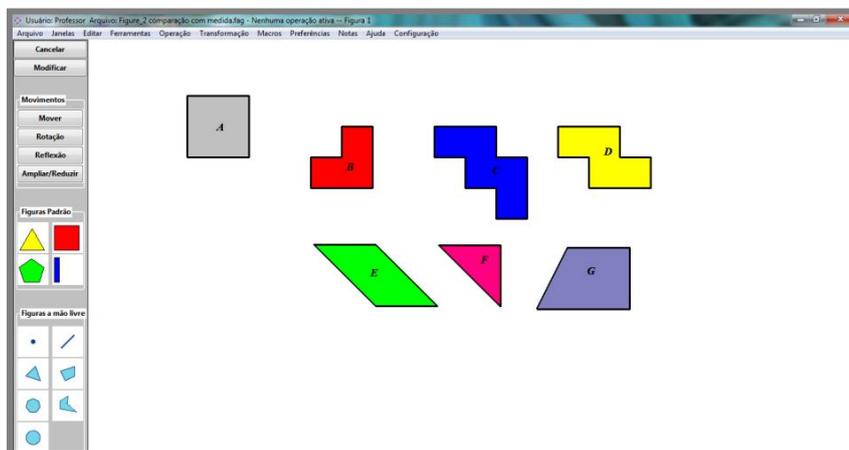
Tarefa 2¹⁸ - Situação de Comparação de Área no AG2



TAREFA 2

Abra o arquivo “*Tarefa Figure_2. fag*” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, vocês devem escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br e clicar em OK.

2- Observe o conjunto de figuras abaixo:



Agora, responda cada uma das perguntas.

- Entre as figuras, quais possuem área maior que A? _____
Explique como você fez:
- Entre as figuras, quais possuem área menor que A? _____
Explique como você fez:
- Entre as figuras, quais possuem a mesma área que A? _____
Explique como você fez:

¹⁸ A versão completa dos enunciados encontra-se no Apêndice F. Na apresentação acima, do enunciado foi suprimido o espaço disponibilizado para os alunos registrarem a explicação de suas respostas.

3.6.2.1 Descrição Global da Tarefa 2 e Análise dos Elementos Comuns aos Três Ambientes

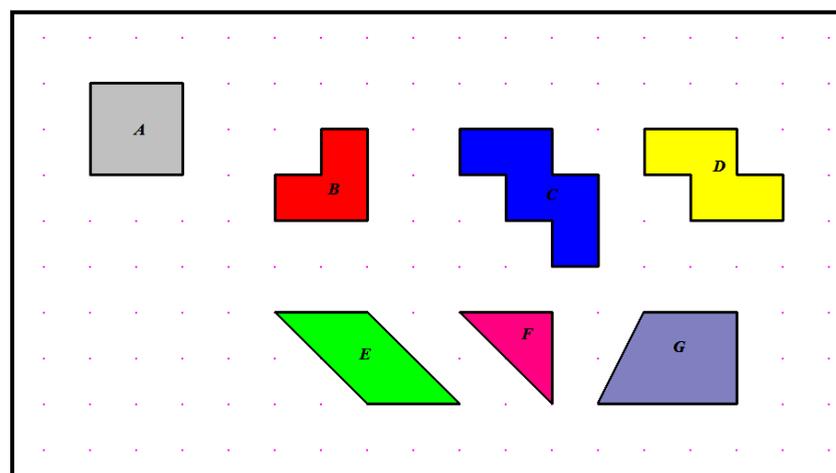
A tarefa 2 é representante da classe de situação de comparação de área de duas figuras e está em jogo ora a articulação entre os quadros geométricos e das grandezas sem a intervenção do quadro numérico, ora a articulação entre o quadro das grandezas e o quadro numérico, uma vez que, os alunos terão a possibilidade de recorrer a medida para comparar as áreas de algumas das figuras representadas na tarefa 2.

Essa por sua vez, é composta por três itens: o item (a) solicita que o aluno compare as áreas das figuras para identificar qual ou quais, tem área maior que a de uma figura dada, no item (b) qual ou quais das figuras tem área menor que a de uma figura dada, no item (c) qual ou quais tem área igual à do quadrado A.

O objetivo dessa tarefa é identificar qual a ideia para o aluno de área maior, menor ou igual em um contexto no qual é possível medir a área das figuras diretamente com unidades de área. Formulamos essa tarefa de maneira que os alunos pudessem utilizar para comparar as áreas das figuras procedimentos de inclusão, sobreposição, composição, decomposição e recomposição (não numéricos), mas também pudessem comparar as medidas de área usando uma unidade dada, para decidir quais das figuras têm mesma área que A, quais têm área maior e quais têm área menor que a de A.

A versão dessa tarefa no ambiente *materiais manipulativos* traz as figuras em uma malha pontilhada quadrada, a fim de favorecer o procedimento de comparação numérico. A imagem a seguir ilustra essa questão:

Figura 21- Tarefa 2 no ambiente materiais manipulativos



Fonte: elaborada pelo autor

Retiramos a malha pontilhada quadrada do ambiente papel e lápis pra vermos como os alunos responderiam essa tarefa apenas com o lápis grafite. Na versão do *Apprenti Géomètre* 2 a malha tampouco faz parte do enunciado, para permitir que os alunos mobilizassem as ferramentas do software afim de responderem cada item.

3.6.2.2 Respostas Possíveis e Corretas da Tarefa 2

Tomando a área do quadradinho da malha pontilhada (utilizada na versão do ambiente materiais manipulativos) como unidade, o quadro a seguir indica as medidas das áreas de cada uma das figuras:

Quadro 4- Medidas das áreas das figuras da tarefa 2

Figuras	Medida da área tomando o quadradinho da malha como unidade
Figura A	4 quadradinhos
Figura B	3 quadradinhos
Figura C	5 quadradinhos
Figura D	4 quadradinhos
Figura E	4 quadradinhos
Figura F	2 quadradinhos
Figura G	5 quadradinhos

Fonte: elaborada pelo autor

Com relação ao item (a) as figuras que possuem área maior que a do quadrado A, são C e G, no item (b) as figuras que possuem área menor que a de A são B e F e no item (c) as figuras D e E possuem a mesma área que a de A

3.6.3.3 Respostas Possíveis e Incorretas da Tarefa 2

Alguns critérios de comparação podem ser mobilizados nesta tarefa que não condiz com procedimentos corretos de comparação das áreas, tais como:

- A quantidade de lados,
- O perímetro,
- Outros comprimentos da figura (largura ou altura);
- Uma noção mais intuitiva de espaço ocupado, vinculada à percepção (concepções geométricas).

Os alunos poderão no item (a) colocar que as figuras C e G têm área maior que a de A por terem mais lados, nesse caso a ideia de área estaria relacionada à quantidade de lados das figuras, ou mesmo que a figura E teria área maior, por não coincidir por sobreposição e não poder incluir diretamente, pelo fato de ocupar mais espaço, ou ainda pela questão dos comprimentos dessa figura (largura ou altura).

No item (b) poderão responder que F tem área menor por ter menos lados. No item (c) a ideia de mesma área poderá estar relacionada à quantidade de lados, assim para esses alunos E teria a mesma área que A, ou ainda que B teria a mesma área por causa do comprimento de um dos lados (altura).

3.6.2.4 Análises dos Possíveis Procedimentos de Resposta de Cada Item nos Três Ambientes

Nessa tarefa o aluno poderá comparar as áreas das figuras B, C e D com a do quadrado A pela contagem de quadradinhos, ao perceber que a figura A é composta por quatro quadradinhos, então poderão notar que B é composto por três quadrados, assim teria área menor, C composto por cinco quadradinhos teria área maior e D mesma área que a de A, essa questão nos traz à tona um teorema em ação verdadeiro: *“a área é a quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma figura”* (FERREIRA, 2010).

Com relação a essa questão Douady e Perrin-Glorian (1989) colocam que duas figuras S_1 e S_2 , tem mesma área quando elas são constituídas do mesmo número de quadrados, podendo ser sobrepostos ou não, assim temos que D tem mesma área que A, ainda segundo essas autoras se S_1 contém menos quadrados que S_2 , a área de S_1 é menor que a de S_2 , assim a área da figura B é menor que a do quadrado A. Estendemos essa questão para explicitar a área de C, se S_1 contém mais quadrados que S_2 então a área de S_1 é maior que S_2 , então temos pela contagem de quadradinhos que a área de C é maior que a do quadrado A.

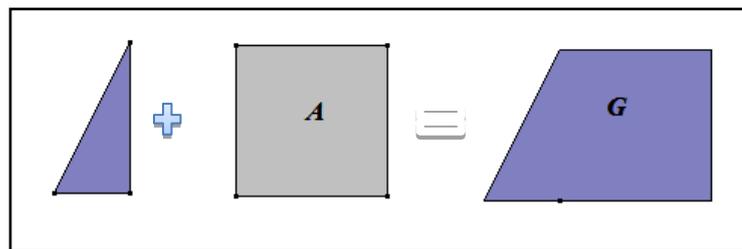
A comparação de A com B também poderá ser realizada por inclusão nos ambientes materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*, ou seja, no primeiro os alunos terão como possibilidade decalcar a figura B para sobrepô-la ao quadrado A, no segundo poderão selecionar a ferramenta mover e arrastar B até incluí-la em A.

Assim notarão por inclusão que a área da figura B é menor que a da figura A. Esse mesmo procedimento poderá ser evidenciado na comparação da figura F com o quadrado A, os alunos também poderão notar que após incluírem F em A, “F terá metade da área da figura A”, um invariante operatório correto é que diz respeito a inclusão -“se uma figura X cabe dentro de outra figura Y então a área de X é menor que a área de Y (FERREIRA, 2010).

As figuras E e G, assim como a F, não poderão ser comparadas apenas pela contagem de quadradinhos. Para comparar a figura E, os alunos precisarão decompor essa figura em dois triângulos retângulos e recompor uma figura possível de ser comparada por sobreposição, nesse caso um quadrado, notando assim que as figuras A e E possuem as mesmas áreas, os teoremas em ação mobilizados nessa questão serão: “*superfície equidecompostas têm mesma área*” e a “*área é invariante*”. Na comparação de A com D, além do procedimento de contagem descrito anteriormente, poderão decompor o tetraminó representado pela figura D, em dois retângulos e em seguida deslizar as peças e compor um quadrado para então sobrepô-lo à figura A e notar que possuem as mesmas áreas, dois teoremas em ação que podemos identificar nessa comparação é “*o corte e colagem sem perda nem sobreposição conserva as áreas*” e a “*área é invariante por isometria*”.

Com relação à figura G poderão colocar que tem área maior que a de A visualmente ao perceberem que a figura G é composta por um quadrado de mesma área que o da figura A adicionado um triângulo retângulo como ilustra a imagem a seguir:

Figura 22- Composição da figura G



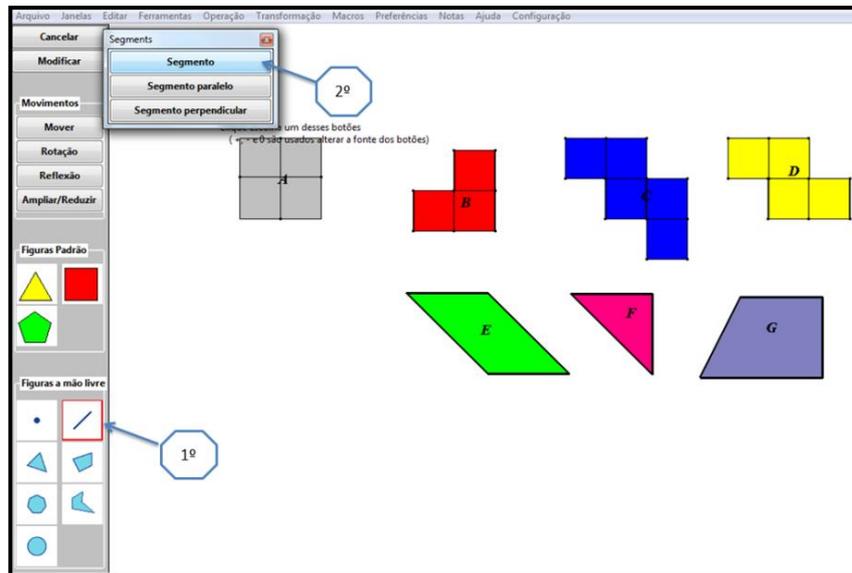
Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

Esse procedimento nos traz à tona segundo Duarte (2002) o princípio de aditividade de área, segundo o qual dada uma figura G composta pela união de duas figuras quase disjuntas (com no máximo pontos de fronteira em comum) G1 e G2, a área de G é a soma das áreas de G1 e G2.

No ambiente papel e lápis e materiais manipulativos os alunos poderão tentar utilizar o lápis grafite para quadricular as figuras A, B, C e D e então comparar suas áreas, no *Apprenti Géomètre 2*, esse procedimento poderá ser realizado de duas formas, os alunos poderão utilizar o menu “*Figuras a mão livre*” selecionar a opção *Segmento* e quadricular essas figuras, ou perceber que essas figuras são compostas por quadrados do “*Jogo de Base quadrado*” do menu “*Figuras Padrão*” e sobrepor cada uma ladrilhando-as para então contar a quantidade de quadradinhos de cada figura.

Esse tipo de procedimento também nos traz à tona um teorema em ação segundo o qual: “a área é a quantidade de quadradinhos necessárias para recobrir uma superfície” (FERREIRA, 2010) e permite observar que B tem área menor que A, C tem área maior que A e D tem área igual a A. As figuras abaixo ilustram esses dois procedimentos.

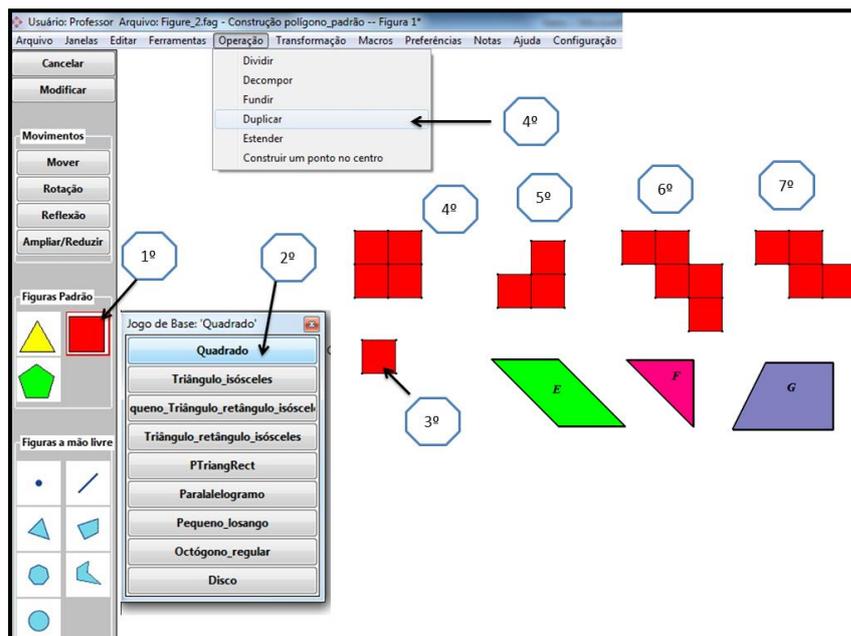
Figura 23- Quadriculando as figuras A, B, C e D com segmentos



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

Escolhemos para realizar esse procedimento a opção segmentos do menu “Figuras a mão livre” e demarcamos cada uma das figuras quadriculando-as.

Figura 24 - Ladrilhagem das figuras A, B, C e D



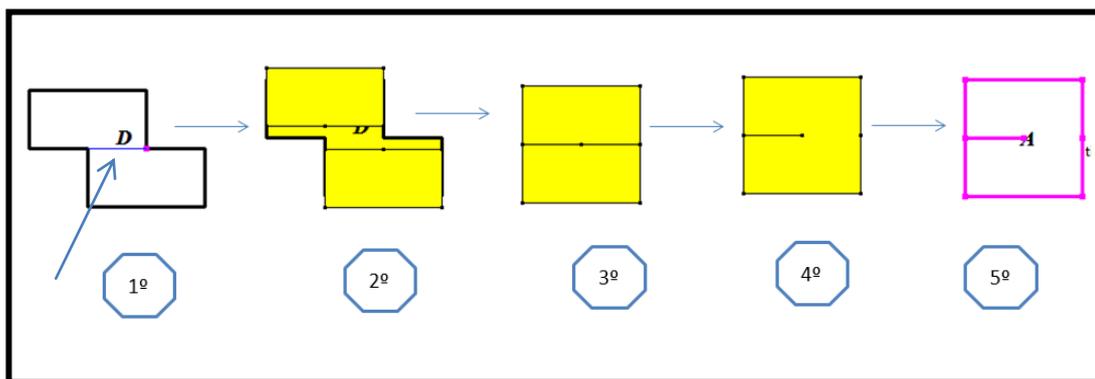
Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

O segundo procedimento é perceber que as figuras A, B, C e D são compostas por quadrados do menu “*Figuras Padrão*”, assim poderão ladrilhar cada uma delas, escolhendo o quadrado do *Jogo de base: ‘Quadrado’*, clicar na área de trabalho do software na qual já aparece pré-definida as figuras em seguida escolher a opção *duplicar* do menu *Operação*, duplicar o quadrado arrastando-o até as figuras A, B, C e D completando a ladrilhagem para em seguida comparar as figuras pela contagem de quadradinhos que compõe cada uma.

Outro procedimento que os alunos poderão realizar para comparar as áreas de D com A é o processo de corte e colagem (decomposição e recomposição). Eles poderão perceber como relatado anteriormente, que será preciso construir uma figura que sobreponha ao quadrado A perfeitamente, assim precisarão decompor o tetraminó D e compor um quadrado com as partes decompostas, o mesmo processo poderá ocorrer com o paralelogramo E, assim o processo de decomposição e recomposição estará em jogo na comparação das áreas das figuras D e E com a figura A. O fato de dispor de tesoura e fita adesiva permite que os alunos realizem efetivamente essas decomposições-recomposições no ambiente materiais manipulativos, o que permite comparar as áreas de A e D bem como de A e E. Já no ambiente papel e lápis, esses procedimentos terão que ser feitos mentalmente.

No *Apprenti Géomètre 2* esses procedimentos poderão acontecer da seguinte forma:

Figura 25- Decomposição e recomposição do Tetraminó



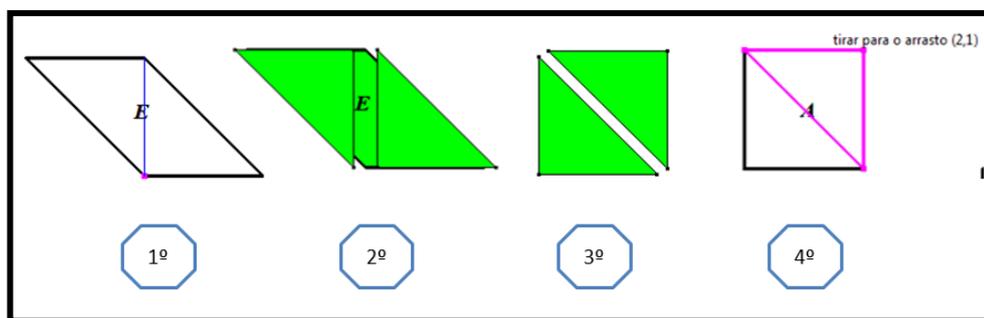
Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

Para realizar esse processo será preciso escolher a opção decompor do menu operação, em seguida selecionar o tetraminó com um clique do mouse, para então com a ligação de dois pontos (indicado pela seta) decompor a figura, o passo de número 3 apresenta a junção das peças decompostas formando um quadrado, para isso basta com a ferramenta *move* que tem a função de arrastar as figuras, justapor as peças decompostas.

Para unir essas peças é preciso apenas escolher a ferramenta *fundir* e em seguida clicar em cada uma das peças após ter coincido um de seus lados, assim teremos um quadrado, então os alunos poderão movê-lo diretamente e sobrepor ao quadrado A para verificar que essas duas figuras possuem mesma área, ou após a decomposição arrastar os retângulos decompostos e sobrepô-los diretamente em A.

No *Apprenti Géomètre 2* a comparação das áreas de A e E usando a decomposição-recomposição poderá ser realizada da seguinte forma:

Figura 26- Decomposição do paralelogramo E



Fonte: elaborada pelo autor

Para que essa decomposição aconteça os alunos precisarão decidir pelo ponto de corte da figura corretamente, ou seja, escolher a diagonal que lhes permita decompor e com as peças compor um quadrado para comparar por sobreposição D com A, caso isso não aconteça eles poderão colocar que essas figuras não possuem a mesma área. Quanto aos comandos serão os mesmos da decomposição do tetraminó E.

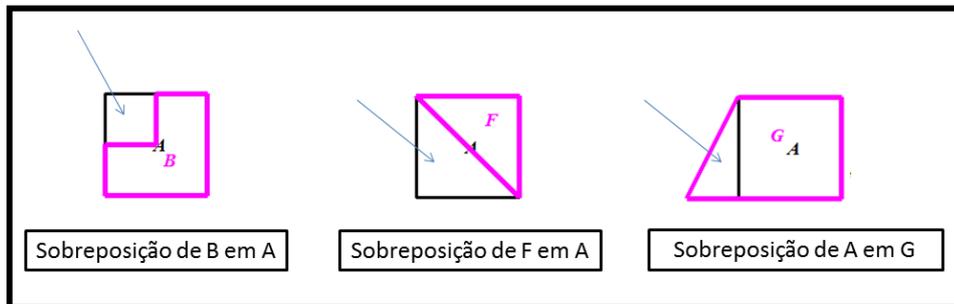
Notamos que nessas comparações tanto da figura D quanto da E à figura A, dois teoremas em ação estarão subsidiando as ações desses alunos: “o corte e colagem sem perda nem sobreposição conserva a área”, “área é invariante por isometria”.

As comparações das áreas de B e F com a do quadrado A poderão ocorrer por sobreposição nos ambientes materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*, os alunos poderão observar após sobreporem B e F em A que as áreas tanto de B quanto de F são nitidamente menores que a de A, porque o que falta em B e F sobra em A. Esse procedimento de sobrepor as figuras poderão ser realizados no *Apprenti Géomètre 2* por meio da ferramenta *mover* do menu “*Movimentos*”.

A comparação da figura G com A, tanto no software quanto no ambiente materiais manipulativos poderá acontecer por sobreposição, os alunos poderão notar após sobreporem A à G que essas duas figuras não possuem a mesmas áreas, porque ao sobrepor A à G, sobra

uma parte em G. Com relação a sobreposição de B e F em A, poderão notar que são menores porque falta uma parte em cada uma delas para que tenham a mesma área que a do retângulo A. A figura a seguir ilustra esses procedimentos:

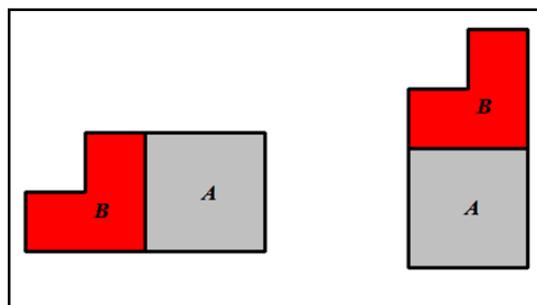
Figura 27- Sobreposição de B e F em A e de A em G



Fonte: elaborada pelo autor

Um procedimento errôneo que os alunos poderão mobilizar para comparar as figuras B com A é a justaposição dos lados como ilustra a imagem abaixo:

Figura 28- Comparação de A com B



Fonte: elaborada pelo autor

Ao realizarem esses procedimentos estarão mobilizando invariantes operatórios incorretos para definir quando a área de uma figura poderá ser maior, menor ou igual à área de uma figura dada, nesse caso o quadrado A.

Para resolver essa tarefa no *Apprenti Géomètre 2* algumas ferramentas e menus poderão ser mobilizadas, tais como: do menu “*Figuras Padrão*” o *quadrado do Jogo de Base*; do menu “*Figuras a mão livre*” a opção *Segmento*, as ferramentas *Decompor e Fundir* do menu “*Operação*” e do menu *Movimentos* as ferramentas *Mover*, *Rotação* e *Reflexão*. Que serão consideradas nas tarefas de familiarização.

3.6.3 Análise a Priori da Tarefa 3- Medida de Área

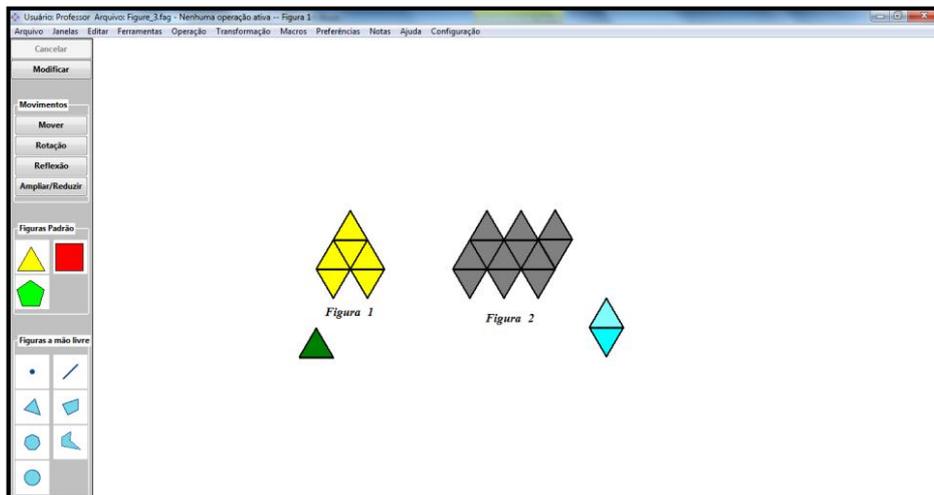
Tarefa 3- Situação de Medida de Área¹⁹



TAREFA 3

Abra o arquivo “*Tarefa Figure_3.fag*” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, vocês devem escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br e clicar em OK.

3- Observe as figuras 1 e 2 desenhadas abaixo:



Vamos chamar de “A”, a unidade de medida definida pelo triângulo 

Vamos chamar de “B”, a unidade de medida definida pelo losango 

Qual a área da figura 1 usando “A” como unidade de medida? _____

Qual a área da figura 2 usando “B” como unidade de medida? _____

Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área? _____

Justifique como você pensou:

¹⁹As três versões dessa tarefa encontram-se no Apêndice F.

3.6.3.1 Descrição Global da Tarefa 3 e Análise dos Elementos Comuns aos Três Ambientes

A tarefa 3 é representante da classe de situação de medida de área, privilegiando a articulação entre o quadro das grandezas e o quadro numérico. De acordo com Bellemain e Lima (2010, p. 45), nessas situações destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade.

Essa tarefa tem como objetivo assim como a tarefa 1 saber qual a ideia de mesma área que os mobilizam, porém está em jogo em primeiro plano o ladrilhamento efetivo e a importância da necessidade de se ter o par número unidade de medida para expressar as áreas das figuras 1 e 2. Assim como Ferreira (2010) consideramos que devemos dar um tratamento que privilegie a articulação entre os três quadros, com a presença das figuras, antecedendo a introdução das unidades de medidas convencionais, para que o aluno compreenda a construção do par (n° , unidade de medida) independente de transformações meramente operatórias presentes em muitas tarefas nos livros didáticos.

Essa tarefa apresenta-se da mesma forma nos três ambientes da pesquisa, com o diferencial nos comandos que antecediam a resolução no *Apprenti Géomètre 2* e na presença da malha isométrica no ambiente materiais manipulativos. Preferimos deixar essa malha nesse ambiente para que os alunos pudessem reproduzir os ladrilhos e recortá-los para em seguida sobrepô-los as figuras 1 e 2 com o objetivo de saber quantos seriam necessários para pavimentar cada uma delas de acordo com o que fora estabelecido na tarefa.

Também entregamos as duplas desse ambiente uma quantidade suficiente de superfícies unitárias²⁰ para que pudessem sobrepôr as figuras 1 e 2. As duplas do ambiente papel e lápis não tiveram nenhum outro recurso, nem a possibilidade de corte e colagem para responderem essa tarefa.

Pretendíamos nessa tarefa retirar as demarcações das figuras 1 e 2, ao menos do ambiente papel e lápis e do *Apprenti Géomètre 2*, para identificarmos procedimentos diferenciados de resolução desta tarefa, ou seja, verificar como os alunos lidam com situações de medida sem a demarcação das unidades nas figuras 1 e 2, mas o *Apprenti Géomètre 2* não

²⁰ Ver Apêndice F.

nos ofereceu essa possibilidade²¹, uma vez que, todas as tarefas desta pesquisa foram desenvolvidas por meio desse software.

3.6.3.2 Resposta Possível e Correta da Tarefa 3

Os alunos poderão colocar como resposta correta nessa tarefa que serão necessários seis triângulos iguais ao verde (6A) para ladrilhar efetivamente a figura 1 e 6 losangos iguais ao azul (6B) para ladrilhar a figura 2. Assim temos que a área da figura 1 são seis triângulos e área da figura 2 são seis losangos.

Com relação às figuras 1 e 2 terem as mesmas áreas item (3), a resposta correta esperada é que as figuras não têm mesma área. Para responder corretamente, o aluno precisa distinguir área e número. Nesse caso, a quantidade de ladrilhos verdes (triangulares) necessária para recobrir a figura 1 é igual à quantidade de ladrilhos azuis (em forma de losango) necessárias para recobrir a figura 2, mas as áreas das figuras não são iguais, pois a unidade de medida utilizada nos dois casos não é a mesma.

3.6.3.3 Respostas Possíveis e Incorretas da Tarefa 3

Essa tarefa permite verificar se os alunos mobilizam apenas uma concepção numérica da área (DOUADY e PERRIN-GLORIAN, 1989). Se ao invés de considerar a área como par número unidade, os sujeitos compararem apenas os números, poderão então responder que as áreas das figuras são iguais porque ambas medem 6 (desconsiderando que as unidades de área utilizadas são diferentes).

3.6.3.4 Procedimentos de Comparação Previstos nas Três Versões

No ambiente papel e lápis assim como nas demais versões os alunos poderão apenas observar as unidades A e B e contar quantas figuras iguais à unidade A definida por um triângulo cabem na figura 1, e quantas figuras iguais a B definida por um losango cabem na figura 2.

No ambiente materiais manipulativos os alunos poderão reproduzir o triângulo verde e o losango azul na malha isométrica que será entregue, ou mesmo na própria malha na qual as

²¹ Todas as tarefas da pesquisa nas três versões foram desenvolvidas no *Apprenti Géomètre 2* pelo autor da pesquisa, a especificidade de construção desta tarefa, assim como o problema que não permitiu retirar as demarcações das figuras encontram-se explicitados no Apêndice D.

figuras 1 e 2 estarão pré-definidas, quantas vezes forem necessário para ladrilhar cada uma delas com os seus respectivos ladrilhos²².

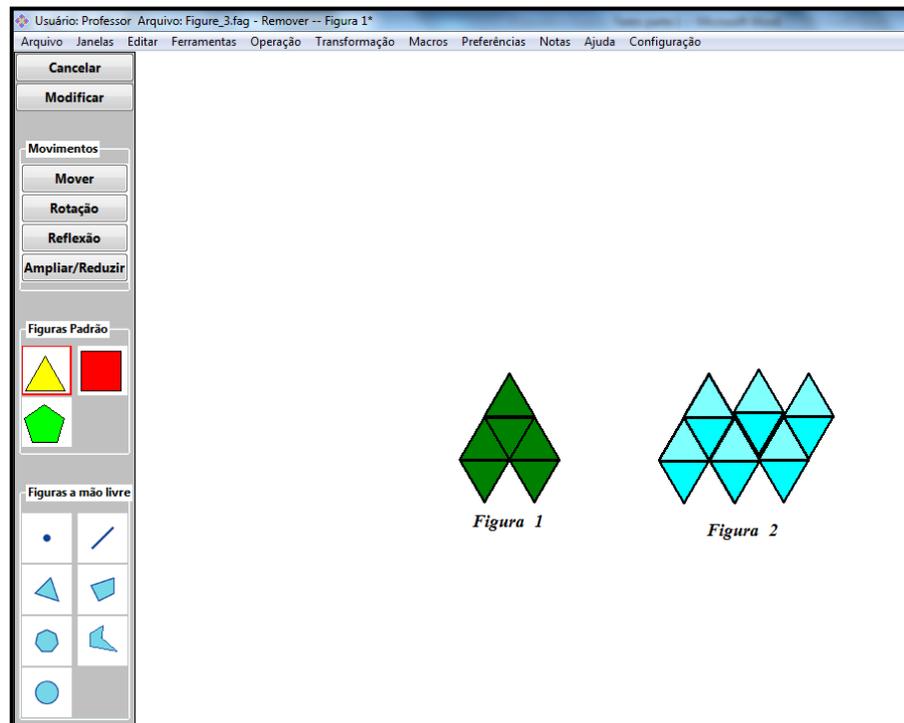
Poderão também decalcar cada um dos ladrilhos para em seguida sobrepor e efetuar a contagem, ou apenas reproduzir um único ladrilho e deslizar sobre suas respectivas figuras efetuando a contagem. Outro aspecto será recortar uma quantidade de ladrilhos suficientes que serão entregues às duplas desse ambiente, ladrilhar as figuras e em seguida efetuar a contagem. As transformações isométricas do plano em especial a translação e rotação serão importantes no processo de ladrilhagem da figura 1, pois os triângulos que a constituem não encontram-se todos em uma mesma posição que a do ladrilho A representado por um triângulo verde.

Procedimentos similares também poderão ser realizados no *Apprenti Géomètre 2* por meio de algumas ferramentas, ou seja, os alunos poderão com a ferramenta *mover*, deslizar triângulo verde denominado de A sobre a Figura 1, aplicar também uma *rotação* ou *reflexão* para encaixá-lo perfeitamente e assim efetuar a contagem, ou mesmo duplicar as unidades A e B, por meio da ferramenta *Duplicar* do menu *Operação* quantas vezes forem necessárias para então efetivar a ladrilhagem das Figuras 1 e 2, sendo necessário aplicação dos movimentos de translação (*mover*), rotação ou reflexão aos triângulos duplicados para ladrilhar a Figura 1.

Se os alunos preferirem, poderão utilizar nessa ladrilhagem os triângulos equiláteros do *Jogo de base: 'Triângulos'* do menu "*Figuras Padrão*", reproduzindo-os na tela do software quantos fossem necessários para ladrilhar e em seguida efetuar a contagem, esse procedimento não poderá acontecer com o losango visto que esse menu não contempla essa figura.

²² A quantidade de ladrilhos suficientes entregues aos alunos para responderem a tarefa 3 no ambiente materiais manipulativos encontram-se no Apêndice F, após a ficha desta tarefa.

Figura 29- Procedimento de Ladrilhagem no *Apprenti Géomètre 2*



Fonte: elaborada pelo autor

A figura acima apresenta as figuras 1 e 2 ladrilhadas após procedimentos de duplicação e sobreposição das suas respectivas unidades de medidas.

Dentre as ferramentas e menus que podem ser mobilizados pelos alunos para realizarem essa tarefa, destacamos os seguintes: As ferramentas que permitem as transformações isométricas do plano do menu *Movimentos* (*mover*, *rotação* e *reflexão*), do menu *Operação* a ferramenta *duplicar*, ou a opção *triângulos equiláteros* do Menu *Figuras Padrão* e sub menu *Jogo de Base: triângulo*, assim os alunos precisarão ter conhecimento sobre a funcionalidade de cada uma dessas ferramentas e menus para responderem esta tarefa por meio do *Apprenti Géomètre 2*.

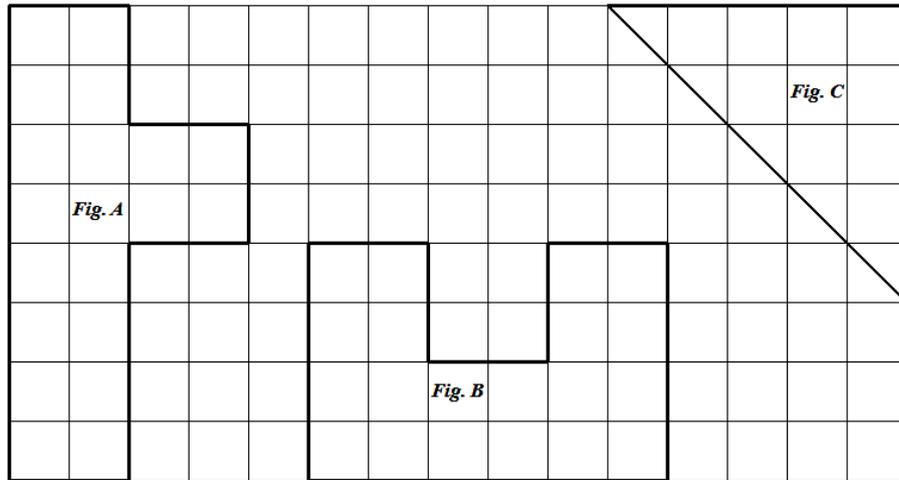
Esses menus e ferramentas serão trabalhos na tarefa de complementação de figuras na fase de familiarização com o *Apprenti Geomètre 2*.

3.6.4 Análise a Priori da Tarefa 4

Tarefa 4- Medida de área e Mudança de Unidade – versão do ambiente materiais manipulativos

TAREFA 4

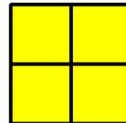
4- Observe as figuras A, B e C, desenhadas na malha quadriculada abaixo:



Vamos chamar de “U”, a unidade de área definida pela figura



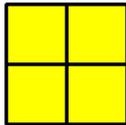
Vamos chamar de “V”, a unidade definida pela figura



É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades (U e V)?

Justifique sua resposta: _____

Complete quando possível a tabela abaixo:

	Unidade  U	Unidade  V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A		
B		
C		

3.6.4.1 Descrição Global da Tarefa 4 e Análise dos Elementos Comuns aos Três Ambientes

A tarefa 4 faz parte das classes de situação de medida de área e de mudança de unidade, Essa situação tem como objetivo a passagem do quadro das grandezas para o quadro numérico. De acordo com Ferreira (2010) esse tipo de situação baseia-se na possibilidade de representação de uma mesma área com unidades de medida diferentes. Segundo Duarte (2002) esse tipo de situação em que se promove a mudança de unidade para medir a área de uma mesma figura pode evidenciar a invariância da área.

Com relação a esta questão, Douady e Perrin-Glorian (1989) colocam que atribuindo-se a uma determinada figura as medidas por ladrilhamento utilizando diferentes formas de ladrilhos contribui para construir a noção de área como grandeza autônoma.

Essas autoras colocam ainda que esse tipo de situação ajuda os alunos a distinguir a área do número controlando a correspondência entre figuras e números: na qual a uma mesma figura poderá corresponder números diferentes segundo uma unidade escolhida, mas a área não muda. Esse tipo de tarefa é importante na superação das concepções numéricas.

É provável assim como na tarefa 3, que os alunos tenham um bom desempenho nesse tipo de situação, uma vez que a abordagem do conceito de área desde os anos iniciais do ensino fundamental, enfatiza o emprego de unidades de medidas não convencionais para o trabalho com o ladrilhamento efetivo de determinadas figuras na malha quadriculada (DUARTE, 2002).

Temos como objetivo nessa tarefa investigar como os alunos lidam com a possibilidade de ladrilhamento efetivo com a utilização de diferentes unidades para ladrilhar uma mesma figura (mudança de unidades) e com a impossibilidade desse ladrilhamento, dada uma determinada unidade de área. Nesta tarefa temos a unidade U representada por um retângulo e a unidade V por um quadrado, a forma dessas figuras não permite o ladrilhamento efetivo da figura C, sendo necessários outros mecanismos para que esse processo aconteça, como decomposições das unidades U e V, ora em quadrados, ora em triângulos.

Douady e Perrin-Glorian (1989) com relação ao ladrilhamento não efetivo de determinada figuras, coloca que no contexto francês alguns alunos se recusavam a expressar a área de um triângulo em centímetros quadrados porque não era possível ladrilhar efetivamente o triângulo usando quadradinhos. Pretendemos aqui por meio desta tarefa, verificar se esse caso também corresponde aos alunos no Brasil, porém sem a utilização de unidades de medidas convencionais para darmos um tratamento que privilegie a articulação

entre os quadros geométricos, numéricos e das grandezas, tomando como unidade diferentes figuras, sem focar nas transformações meramente operatórias (FERREIRA, 2010).

Decidimos apresentar a tarefa 4 nessa análise da maneira como está definida no ambiente materiais manipulativos pelo diferencial da malha quadriculada, pois nos demais ambientes retiramos a malha para que os alunos pudessem utilizar outros procedimentos para resolver essa tarefa, não apenas pela contagem visualmente, uma vez que, na malha esse processo poderá estar em evidência.

Para responder essa tarefa no software as duplas deveriam observar os comandos que antecediam o enunciado da tarefa na ficha que foram entregues (ver Apêndice F).

No ambiente materiais manipulativos poderiam utilizar os materiais que lhes haviam sido entregues no kit²³ que receberam para resolverem essa tarefa. Em especial para essa tarefa foi entregue uma quantidade suficiente de ladrilhos em uma folha de papel (unidades de medidas U e V) para utilizarem caso fosse necessário medir as figuras A, B e C ladrilhando-as.

3.6.4.2 Respostas Possíveis e Corretas da Tarefa 4

Para os alunos em que a possibilidade de medir não esteja relacionada à forma que as unidades de medidas se encontram, colocam que será possível medir todas as figuras inclusive o triângulo com as unidades U e V. Com relação as medidas das áreas das figuras A, B e C, temos que $A = 10 U$ e $5 V$, $B = 10 U$ e $5 V$, $C = 6 U$ e $3 V$ (decompostos).

	Unidade U	Unidade V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A	10	5
B	10	5
C	6	3

Fonte: elaborada pelo autor

3.6.4.3 Respostas Possíveis e Incorretas da Tarefa 4

Os alunos poderão colocar que só será possível medir as áreas das figuras A e B com as unidades de medidas U e V, e que C não será possível dada à impossibilidade de ladrilhar efetivamente essa figura com tais unidades, ou mesmo admitirem que é possível medir a área

²³ O Kit para as duplas que participaram do ambiente materiais manipulativos foi composto por: papel de decalque, malha pontilhada quadrada, malha quadriculada, malha isométrica, tesoura, fita adesiva, cola, lápis de colorir, canetas hidrográficas, giz de cera e uma quantidade de ladrilhos suficientes para serem utilizados nas tarefas 3 e 4 de acordo com suas especificidades. Os ladrilhos que foram entregues na tarefa 4, se encontram no Apêndice F.

da figura C usando para a medição apenas a quantidade de ladrilhos que cabe inteiramente dentro do triângulo ou a quantidade de ladrilhos que recobre parcialmente o triângulo C.

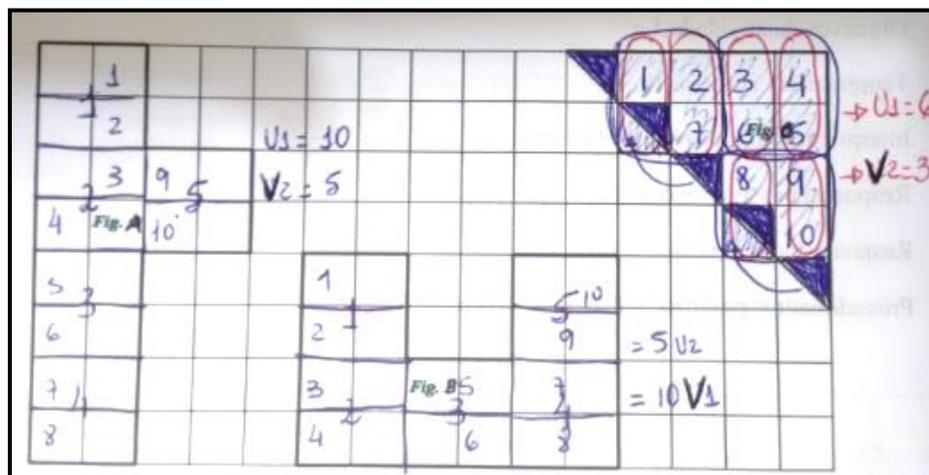
Pessoa (2010) também elencou em sua pesquisa alguns erros previsíveis com relação ao ladrilhamento não efetivo de determinadas figuras na malha quadriculada, essa autora coloca que “para alguns alunos a área depende do recobrimento da superfície utilizando uma quantidade finita de superfícies unitárias da mesma forma que uma unidade dada.

3.6.4.4 Procedimentos de Resolução da Tarefa 4 Previsto nos Três Ambientes

No ambiente papel e lápis os alunos poderão procurar algum tipo de alternativa para medir as unidades U e V e em seguida verificar as medidas das áreas das figuras A, B e C, esse procedimento será mais complexo para essas duplas, uma vez que, os procedimentos de medição deverão ser utilizados apenas visualmente, assim terão que colocar as medidas das áreas dessas figuras de forma mais intuitiva. Os alunos podem ainda traçar sobre a folha do enunciado uma decomposição da figura com as superfícies unitárias.

No ambiente materiais manipulativos poderão deduzir as medidas das áreas pela contagem de quadradinhos, pois nesse ambiente está em jogo o trabalho com a malha quadriculada, a imagem abaixo ilustra essa questão:

Figura 30- Processo de medida pela contagem na malha



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

A figura acima apresenta um possível processo de medida das áreas das figuras A, B e C, pela contagem de quantas unidades iguais a U e a V cabem em A e B, sem a necessidade de reprodução dessas unidades para ladrilhar cada uma dessas figuras, com relação ao triângulo C os alunos poderão utilizar o processo de completar quadrados para observar

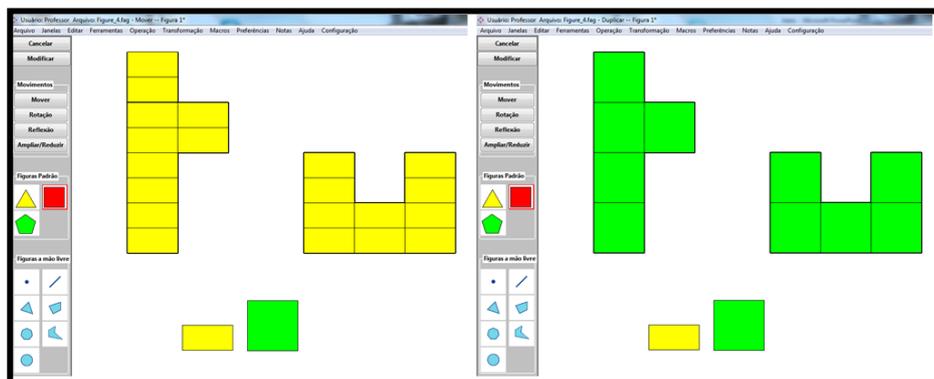
quantas unidades iguais a U e V seriam necessárias para pavimentar C. Um teorema em ação verdadeiro estará implícito neste caso é que “a área é a quantidade de unidades necessárias para recobrir cada figura”.

Os alunos poderão ainda nesse ambiente reproduzir as peças em uma malha quadriculada, ou mesmo recortar uma quantidade de ladrilhos suficientes que serão entregues no kit, para sobrepor as unidades nas figuras dadas e ladrilha-las. Eles poderão dizer que todas elas podem ser ladrilhadas com as unidades U e V, e que seriam necessárias 10 U para ladrilhar efetivamente a figura A, 10 U para a figura B e decompor as unidades para completar a figura C verificando que são necessários 6 U para ladrilhar essa figura. Com relação a V, seria necessário 5 figuras iguais a essa unidade para ladrilhar a figura A, outras 5 para ladrilhar efetivamente a B e 3 para ladrilhar C sendo necessário também decompor. Alguns alunos podem observar que $V = 2U$ e que a medida da área de cada figura usando a unidade V será metade da medida da área usando U como unidade.

Com relação ao ladrilhamento não efetivo da figura C, os alunos podem colocar que não é possível ladrilhar, uma vez que, sobrepondo as unidades sugeridas a essa figura não haverá como pavimentar-la completamente.

Processos semelhantes a esses poderão ser realizados no *Apprenti Géomètre 2*, nesse ambiente não teremos a presença da malha quadriculada, retiramos essa malha para observarmos como os alunos se sairiam para medir as áreas das figuras dadas, sem necessariamente utilizar os procedimentos de contagem anterior a ladrilhagem. Assim para ladrilhar as figuras A e B, tinham como possibilidade utilizar a ferramenta duplicar do menu operação aplicando esse processo às unidades U e V e movendo cada uma delas até pavimentar completamente essas figuras. A imagem abaixo apresenta a pavimentação das figuras A e B após a aplicação desses procedimentos.

Figura 31- Pavimentação das figuras A e B



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

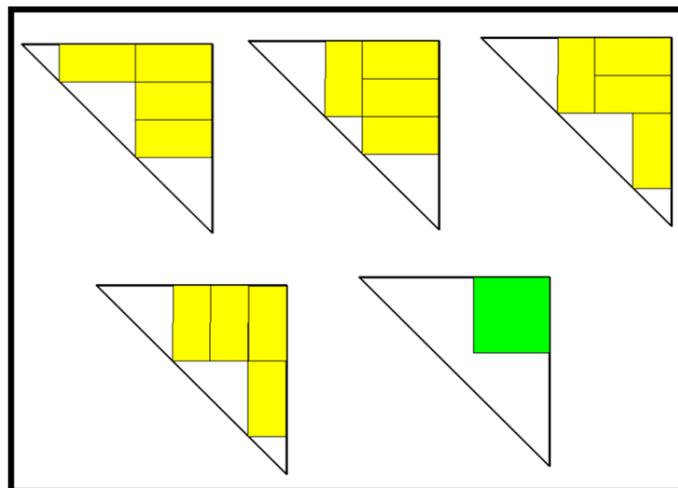
Outra possibilidade seria duplicar os ladrilhos U e V em uma quantidade suficiente para ladrilhar as figuras A e B e em seguida selecionar a ferramenta mover e arrastar cada uma até completar a pavimentação, ou ainda sobrepor U em V e verificar que V cabe duas de U não sendo necessário então realizar a duplicação de V, mas apenas identificar se a figura A cabe 10 U, então 5 V seria suficiente para ladrilhar e assim medir as áreas dessas figuras.

Os teoremas em ação que podemos identificar a partir dessas ações é que “a área é invariante por isometria” e “escolhida uma mesma unidade duas superfícies de mesma unidade tem mesma área”, nesse caso das figuras A e B.

Com relação à pavimentação de C os alunos poderão colocar que não será possível ladrilhar essa figura, dada a forma dos ladrilhos U e V. Assim para eles na figura C caberia apenas 4 unidades iguais a U e apenas 1 igual a V, poderão ainda tentar utilizar os processos de rotação e reflexão dessas unidades, mas também chegar a conclusão da impossibilidade de ladrilhar com essas unidade a figura C.

A figura a seguir apresenta algumas possíveis tentativas de ladrilhamento com as unidades U e V.

Figura 32- Tentativa de ladrilhamento da figura C



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

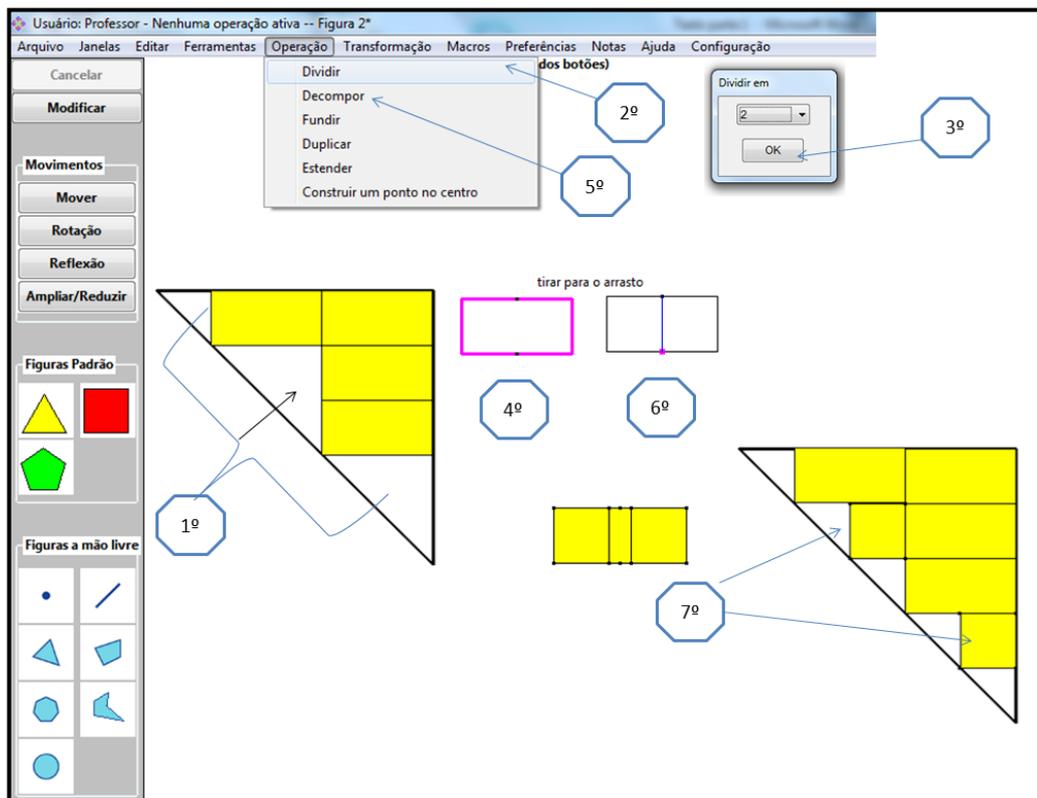
Para os que colocarem que é possível medir a área de C com as unidades U e V, não importa a forma do ladrilho, assim para eles os processos decomposições e recomposição estarão em jogo nessa pavimentação.

Os alunos poderão notar que serão necessários 6 U para pavimentar o triângulo C completamente, mas que apenas 4 permanecerão da forma que estão, sendo necessário aplicar

aos outros dois decomposições para em seguida encaixá-lo a fim de pavimentar completamente C.

No *Apprenti Géomètre* o processo de pavimentação a partir da decomposição dos ladrilhos poderá acontecer da seguinte forma:

Figura 33- Processo de decomposição da unidade U

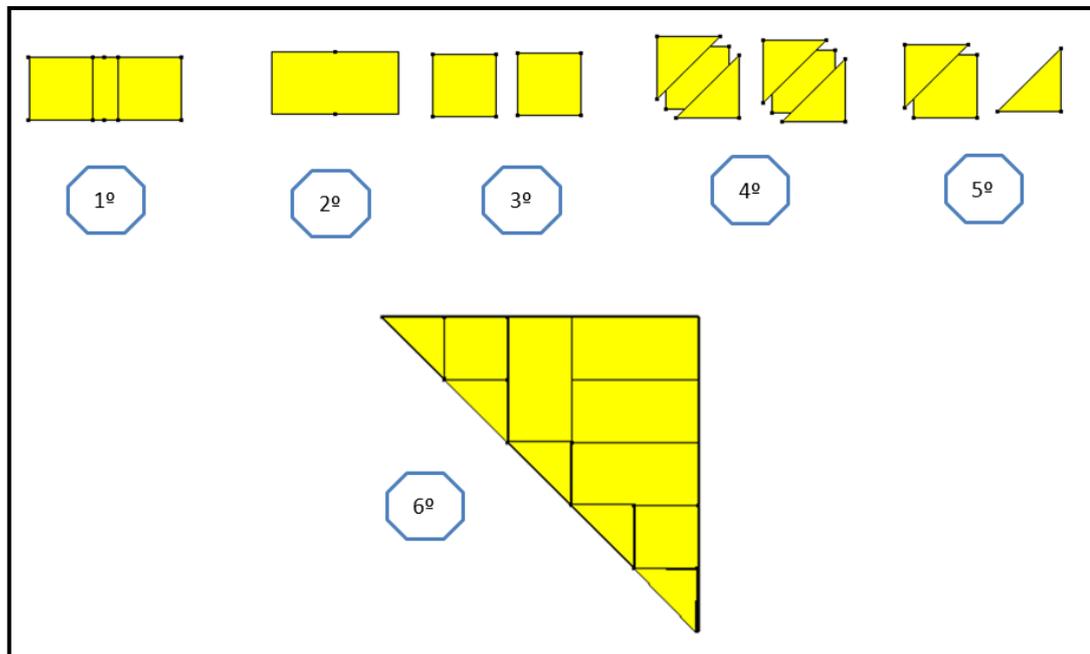


Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

Os alunos precisarão analisar as partes de C que precisam ser pavimentadas, então poderão decompor U ao meio ao notarem que esse ladrilho é composto por dois quadrados, assim após decompor, mover esses quadrados até a figura C preenchendo algumas das lacunas, mesmo assim decomposto essa unidade em dois quadrados será insuficiente ladrilhar as lacunas que faltam da figura C com peças iguais a essa, será preciso então, realizar mais uma decomposição da unidade U, ou duplicar os quadrados decompostos, para então decompor esses quadrados pela diagonal obtendo triângulos retângulos isósceles, e assim após aplicarem processo de rotação nesses triângulos, encaixá-los nas partes que faltam completando a pavimentação de C.

Um teorema em ação que poderemos analisar nessa questão é que “*superfícies equidecompostas*” tem mesma área. A ilustração a seguir apresenta o processo final de ladrilhagem de C:

Figura 34- Equidecomposição da unidade U



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

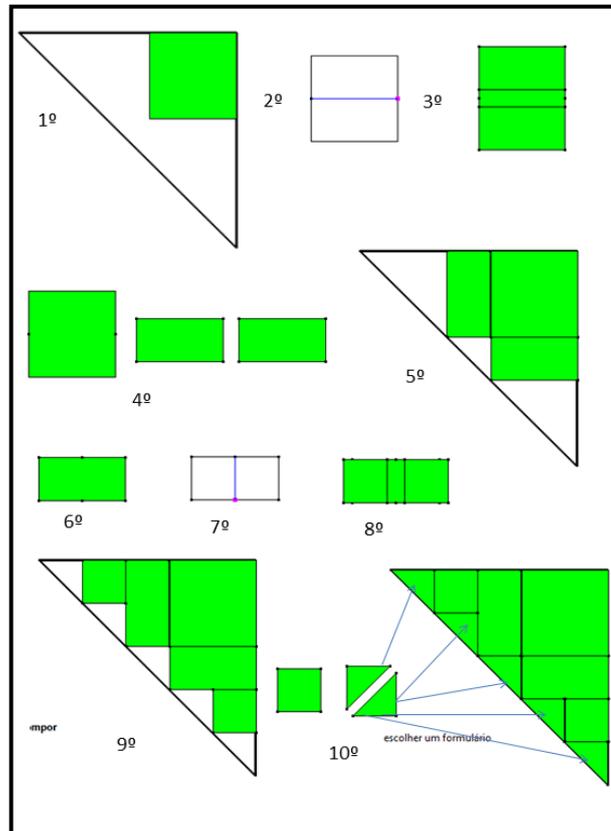
O primeiro passo é decompor novamente a figura U em dois quadrados, o *Apprenti Géomètre 2* oferece a possibilidade de decompor várias vezes uma mesma figura utilizando o mesmo processo, após esse procedimento mover cada um dos quadrados e em seguida pela diagonal decompor em dois triângulos retângulos isósceles como ilustra o passo 4 da figura 93, com essa decomposição dos dois quadrados obteremos quatro desses triângulos, sendo necessário mais um para completar a pavimentação, assim será preciso decompor mais uma vez um dos quadrados existentes, ou uma vez decomposto um dos quadrados, duplicar os triângulos gerados.

A outra possibilidade seria observar que a unidade U é composta por dois quadrados do *Jogo de base*: ‘*Quadrado*’ do menu “*Figuras Padrão*” e que este por sua vez é composto por dois triângulos retângulos isósceles desse mesmo *Jogo de base*, assim poderão diretamente escolher essas figuras e encaixá-las nas lacunas de C, sem necessariamente utilizar processos de decomposição na unidade U.

Esses mesmos procedimentos poderão ocorrer com a unidade V, com o objetivo de pavimentar completamente o triângulo C. Os alunos precisarão de 3 unidades iguais a V para ladrilhar essa figura. Sendo que apenas uma encaixa perfeitamente, assim para completar a pavimentação terão que decompor a unidade U, em retângulos e em seguida decompor esses em quadrados, e decompor o quadrado pela diagonal em dois triângulos retângulos, duplicar e

mover após aplicar movimentos de rotação completando figura C, apresentaremos a seguir os passos para que esse procedimento aconteça.

Figura 35-Ladrilhamento do triângulo C com decomposições de V



Fonte: elabora pelo autor da pesquisa no AG2

O primeiro passo é observar que serão necessárias 2 unidades iguais a V, para pavimentar C, em seguida, duplicar V, para então iniciar os procedimentos, após essa duplicação, o segundo passo é selecionar a ferramenta dividir do menu operação e em seguida escolher um dos lados da figura para criar um ponto médio que divida o segmento em duas partes, tendo dividido esses segmentos o próximo passo é selecionar a ferramenta decompor e ligar os pontos criados selecionado um e arrastando com o cursor do mouse ao outro, assim terão decomposto a unidade V representada por um quadrado de forma a obter dois retângulos.

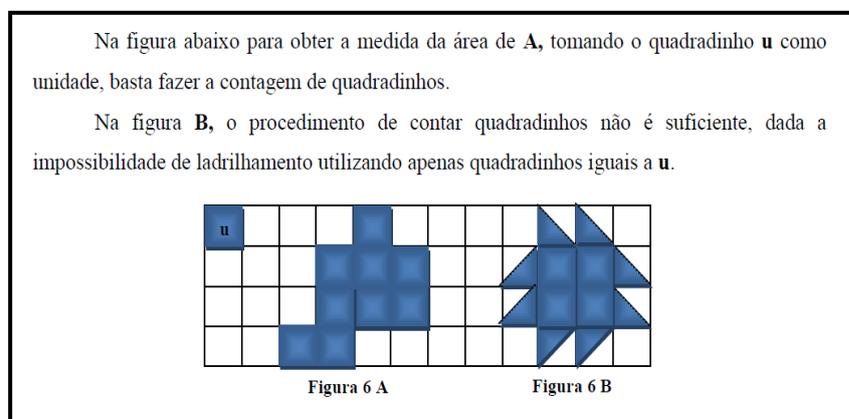
Com a ferramenta *mover* os alunos deverão arrastar esses retângulos completando algumas das lacunas do triângulo C como mostra o quinto passo. Para completar as demais partes, uma das possibilidades é seguir o processo de decomposição descrito anteriormente, decompor o retângulo em quadrados e esses em triângulos retângulos isósceles, assim

aplicando a esses triângulos as transformações isométricas do plano pavimentarão por completo C.

Nesses procedimentos, os seguintes teoremas em ação verdadeiros estarão sendo mobilizados: “o corte e colagem sem perda nem sobreposição conserva a área”, “a área é invariante por isometria”.

Para exemplificar a diferença das áreas das unidades U e V e essas como unidade de medida de área utilizamos o exemplo dado por Pessoa (2010), essa autora coloca a seguinte questão:

Figura 36-Distinção entre a área da unidade e a unidade como medida de área



Fonte: Pessoa (2010, p. 25)

A partir desse exemplo, pode-se destacar a distinção entre a área do quadradinho como unidade e o quadradinho como superfície unitária. A unidade de área não depende de sua “forma” e dois triângulos retângulos isósceles cujos catetos medem o mesmo comprimento que o quadradinho da malha representam a mesma área que um quadradinho. Nesse caso, interpretaremos que para o aluno que não leva em conta o formato das unidades U e V no processo de pavimentação de C, para eles mesmo que de forma implícita a partir do momento que decompõem essas unidades ou mesmo ao completarem quadrados na malha para a possibilidade de ladrilhamento efetivo, o que estarão levando em conta será que as áreas de U e V não dependem de sua forma.

Para realizar essa tarefa os alunos precisarão ter conhecimento da funcionalidade das ferramentas *Duplicar* do menu *Operação* que lhes permitirão reproduzir as unidades U e V em uma quantidade suficiente para pavimentar as figuras A, B e C, do menu *Movimentos* (*Mover e Rotação*), para mover cada unidade e completar a pavimentação das figuras quando possível e a ferramenta *Decompor e Dividir* do menu *Operação* que poderão ser mobilizadas para decompor as unidades U e V.

3.6.5 Análise a Priori da Tarefa 5

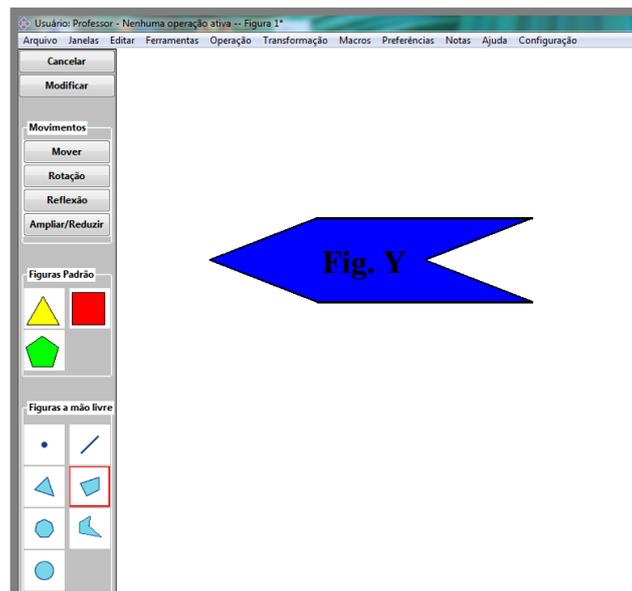
Tarefa 5- Situação de Produção de Superfície



TAREFA 5

Abra o arquivo “*Tarefa Figure_5.fag*” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, vocês devem escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br e clicar em OK.

- 5- Observe a figura abaixo, desenhada na interface do *Apprenti Géomètre 2* por meio do menu “figuras a mão livre”.



Dada a figura “Y” acima, utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, responda o que se pede:

- Desenhe uma figura de área menor que a da figura “Y”.
- Desenhe uma figura de área maior que a da figura “Y”.
- Desenhe uma figura de área igual a da figura “Y”.

3.6.5.1 Descrição Global da Tarefa 5 e Análise dos Elementos Comuns aos Três Ambientes

A tarefa 5 é representante da classe de situação de produção de superfícies a partir de uma figura dada e de comparação de área uma vez que é solicitado ao aluno que desenhe figuras de área maior, menor ou igual a área dada. Esse tipo de situação é importante para a dissociação e articulação do quadro das grandezas e do geométrico, porque o aluno é levado a produzir superfícies de formas variadas tendo todas as mesmas áreas ou não.

De acordo com Ferreira (2010) as situações de produção de superfície são de uma natureza diferente das situações de comparação de área, medida de área e mudança de unidade, pois admitem várias respostas a uma mesma atividade.

Temos como objetivo nessa tarefa investigar as estratégias que os alunos mobilizarão para produzir uma figura de área menor, uma de área maior e outra de mesma área que a uma figura dada.

Esse tipo de tarefa da maneira que se apresenta nos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*, bloqueia a estratégia de contagem para podermos observar se para o aluno a área está ligada a forma da figura não se dissociando dela.

Com relação ao ambiente materiais manipulativos a figura Y não estará representada na malha quadrilhada, nem em outro tipo de malha, mas os alunos poderão utilizá-las, assim podem ainda recorrer ao processo de contagem para construir uma figura de área maior, menor e igual a figura Y dada.

Os enunciados diferem de acordo com cada ambiente²⁴, ou seja, no ambiente papel e lápis, solicitamos apenas que os alunos observem a figura Y e a partir dela reproduzam uma de área menor, maior e igual. No ambiente materiais manipulativos sugerimos que dada a figura Y, os alunos precisariam desenhar utilizando a malha quadriculada e/ou o pontilhado quadriculado e/ou a malha isométrica uma figura de área menor, uma de área maior e uma de área igual à da figura dada. No *Apprenti Géomètre 2* a tarefa apresentava-se da mesma forma exposta anteriormente (Tarefa 5- Situação de Produção de Superfície), os alunos precisariam apenas seguir os comandos sugeridos anterior a realização da tarefa.

²⁴ Ver Apêndice F das versões das tarefas do Dispositivo Central

3.6.5.2 Procedimento e Respostas Possíveis e Correta da Tarefa 5

- Construir diferentes figuras no exterior, ou no interior de Y;
- Decompor Y e colocar que as partes decompostas têm área menor;
- Acrescentar a Y uma determinada figura (a área da figura será maior que Y pela aditividade das áreas);
- Produzir superfícies de formas variadas tendo todas as mesmas áreas que Y.

3.6.5.3 Procedimento e Resposta Possível e Incorreta da Tarefa 5

- Os alunos poderão por meio da reprodução de figuras apresentar indícios de concepções geométricas de área, ou seja, confundir área com a figura.
- Construir superfícies que não tenham área maior, menor, nem igual a área da figura Y.

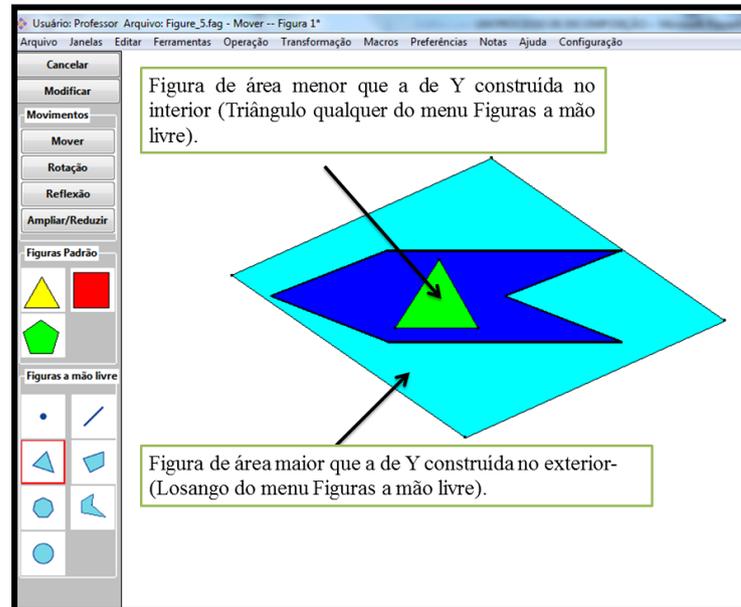
3.6.5.4 Procedimentos de Resolução da Tarefa 5 Previsto nos Três Ambientes

Os alunos poderão desenhar diferentes figuras, em posição prototípica ou não prototípica, de área menor, maior ou igual a Y utilizando a malha quadriculada, no ambiente materiais manipulativos, ou mesmo realizar traçados quadriculados no ambiente papel e lápis, o processo de contagem poderá estar em jogo e um invariante operatório correto que se apoia esse procedimento seria a “*área é o número de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície*” (FERREIRA, 2010).

Outro procedimento que os alunos poderão realizar é construir figuras no interior ou exterior de Y, para isso as malhas entregues no kit, assim como o papel de decalque no ambiente materiais manipulativos, podem ser utilizados para essa produção, quanto ao ambiente papel e lápis esse procedimento poderá ser realizado diretamente em Y, ou seja, desenhar uma figura no interior, e uma no exterior. Esse procedimento segundo Ferreira (2010) se justifica pela aditividade das áreas e porque a área é uma função positiva, em que uma superfície inclusa em outra tem área menor.

No *Apprenti Géomètre 2*, os alunos disporão de uma variedade de ferramentas e menus, com os quais poderão desenhar figuras (menu *Figuras a mão livre*) no interior ou exterior de Y, como ilustra a figura a seguir:

Figura 37- Figuras desenhadas no interior e exterior de Y



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

Para realizar esse procedimento no *Apprenti Géomètre 2* basta escolher uma das figuras do menu *Figuras a mão livre* e reproduzi-las na interface do software.

Os alunos também poderão inserir uma das figuras do menu *Figuras Padrão* (figuras pré-definidas) no interior de Y, sem precisar construí-las como no menu “*Figuras a mão livre*”, assim com um clique do mouse na figura escolhida e em seguida dentro da figura Y, teremos uma figura inclusa em Y diretamente, assim por inclusão essa figura tem área menor que a de Y, a combinação desse teorema em ação com a aditividade da área se justifica que se tivermos uma figura X e uma figura Y, se X “cabe dentro” de Y então por inclusão a área de X é menor que a área de Y (FERREIRA, 2010).

Um procedimento errôneo seria determinar as áreas das figuras pela quantidade de lados, ou seja, uma figura de área menor que a de Y seria uma figura que tivesse menos lados que a figura Y, uma de área maior seria uma que tivesse uma maior quantidade de lados e uma de mesma área uma figura que tivesse a mesma quantidade de lados de Y.

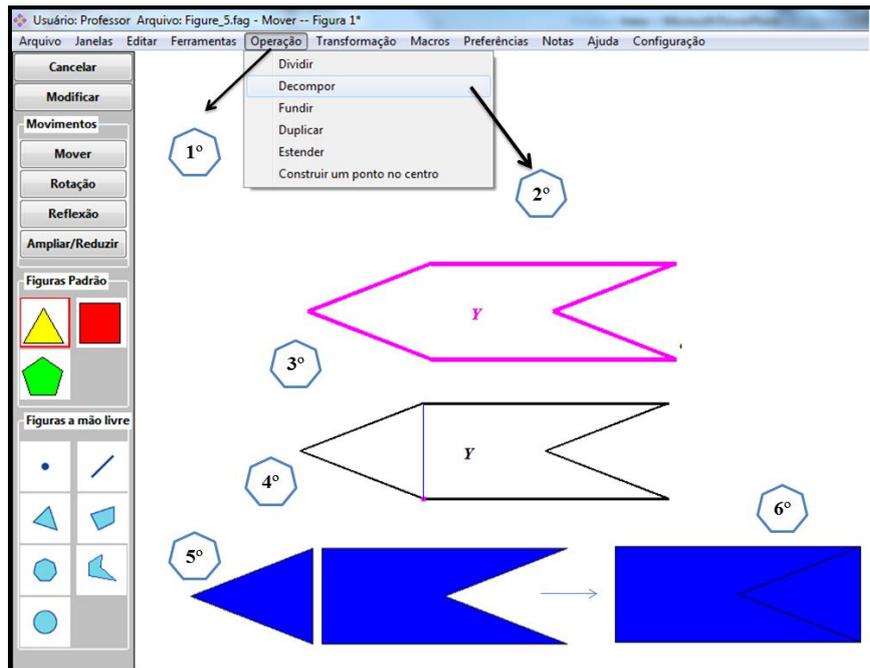
Nesse caso outro teorema em ação falso subsidia a ação desses alunos, ou seja, figuras que tem mais ou menos lados possuem área maior, menor ou igual à de uma figura dada.

Com relação à produção de figuras de mesma área os alunos poderão decompor Y e recompor um retângulo identificando que essas figuras possuem mesma área. Nesse caso para

esses alunos a área não estaria relacionada ao formato da figura, ou seja, para eles figuras diferentes podem ter mesma área. Os teoremas em ação que estariam em jogo são: “o corte e colagem (decomposição e recomposição) sem perda nem sobreposição conservam as áreas” e a “área é invariante por isometrias”.

No *Apprenti Géomètre 2* esse procedimento poderá ser realizado da seguinte forma:

Figura 38- Decomposição e recomposição de Y



Fonte: elabora pelo autor da pesquisa

Para realizar essa decomposição e recomposição no *Apprenti Géomètre 2*, basta selecionar o menu *Operação*, a ferramenta *Decompor*, em seguida selecionar a figura, após identificar o ponto de corte, selecionar um dos vértices da figura e arrastar com o botão esquerdo do mouse até o outro vértice para decompor, em seguida para recompor uma nova figura basta apenas utilizar a ferramenta *Mover* do menu *Movimentos* e encaixar as partes decompostas.

Em outro extremo o formato da figura Y poderá ser preservado, se isso acontecer à concepção geométrica da área poderá está fortemente por trás desses procedimentos, não havendo uma articulação entre o quadro geométrico e o das grandezas.

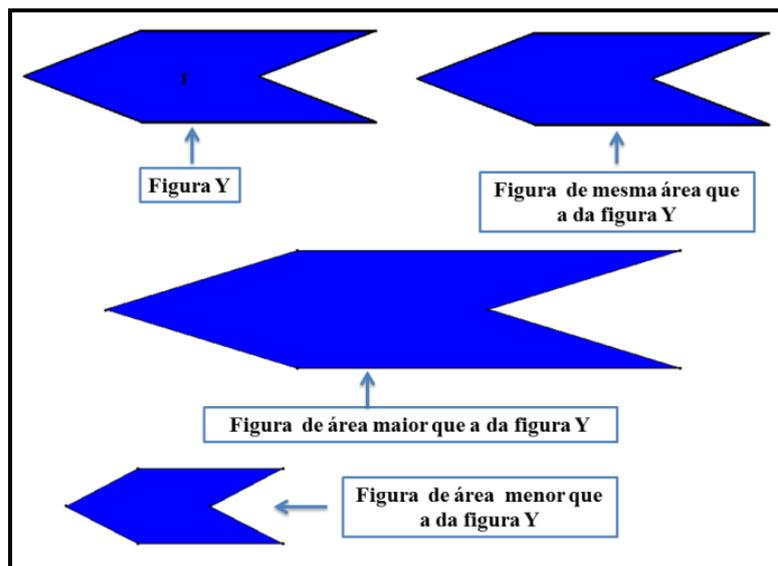
No ambiente papel e lápis os alunos poderão medir os lados da figura com o próprio lápis e tentar reproduzir a figura Y preservando sua forma, no ambiente materiais manipulativos poderão decalcar Y com papel de decalque, ou mesmo sobrepor a malha

quadriculada para em seguida reproduzir uma figura de mesma forma de Y de área maior, menor ou igual à de Y.

Com relação à reprodução de uma figura de área igual à figura Y levando em consideração o formato dessa figura, no *Apprenti Géomètre 2* eles poderão *duplicar* Y, assim para esses alunos a ideia de ter mesma área poderá está relacionada a uma figura que fosse idêntica a figura dada. Caracterizando uma concepção geométrica da área.

A ilustração a seguir apresenta esse tipo de procedimento da preservação da forma de Y na construção de uma figura de área maior, menor e de mesma área que a de Y:

Figura 39- Produção de superfície preservando a forma de uma figura dada



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

Para responder essa tarefa de produção de superfície os alunos precisarão estar familiarizados com o uso de malhas quadriculadas, e terem construído conhecimento referente ao procedimento de decomposição e recomposição (corte e colagem) de figuras, reprodução e construção de figuras, quanto ao uso das ferramentas e menus do *Apprenti Géomètre 2* para a resolução desta tarefa, será preciso ter conhecimento das funcionalidades das ferramentas *decompor*, *fundir*, *duplicar*, do menu *Movimentos* (*mover*, *rotação e reflexão*), assim como saberem construir diferentes figuras por meio dos menus *Figuras a mão livre* e *Figuras Padrão*.

3.7 ETAPA DE FAMILIARIZAÇÃO

As tarefas a seguir foram aplicadas com o objetivo de familiarizar os ambientes, materiais e recursos necessários à resolução das tarefas do Dispositivo Central. Essas tarefas foram pensadas e elaboradas pelo autor da pesquisa, com exceção das tarefas três e quatro, que foram adaptadas de um quebra cabeça desenvolvido pelo “*Centre de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques*” (Grupo responsável pelo desenvolvimento do *Apprenti Géomètre 2*, o software de geometria escolhido como um dos ambientes da pesquisa).

3.7.1 Análise a Priori das Tarefas do Ambiente Não-digital

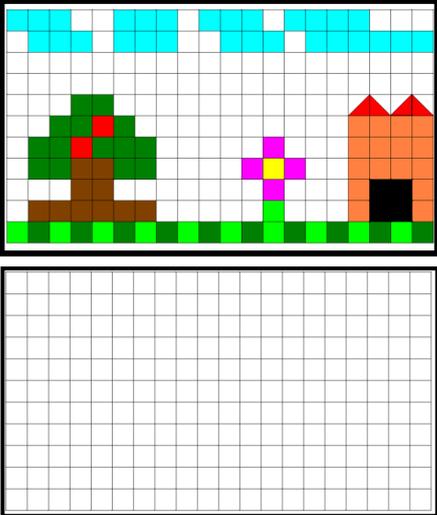
3.7.1.1 Tarefa 1-Reprodução de Figuras na Malha Quadriculada

Objetivo da tarefa: Permitir que alunos observem a posição de cada figura na malha 1 e reproduzam na malha quadriculada em branco.

Esses procedimentos de reprodução de figuras serão importantes para que os alunos se familiarizem com a malha quadriculada, uma vez que, as duplas que forem escolhidas para responderem as tarefas no ambiente materiais manipulativos, precisaram reproduzir na malha quadriculada, diferentes ladrilhos ora para pavimentar figuras e medir suas áreas, ora para reproduzir figuras e comprar suas áreas.

Descrição da tarefa: Para realização desta tarefa os alunos podiam utilizar lápis de colorir, ou mesmo o lápis grafite para reproduzir a paisagem da malha 1 na malha em branco.

1- Observe a figura e em seguida reproduza-a na malha quadriculada:



The image shows a 10x10 grid with a landscape drawn on it. The sky is represented by light blue squares at the top. The ground is green. There are several trees: a large green one on the left, a smaller one in the middle, and a pink one on the right. A brown house with a red roof and a black chimney is on the right. A path of brown squares leads from the bottom left towards the house. The bottom half of the grid is empty, intended for reproduction.

Procedimentos Previstos

Para desenvolver essa tarefa os alunos precisavam ler as figuras, observar a posição relativa das figuras fazendo uma correspondência com a malha em branco, a contagem dos quadradinhos que compõem as figuras também está em jogo nesse processo.

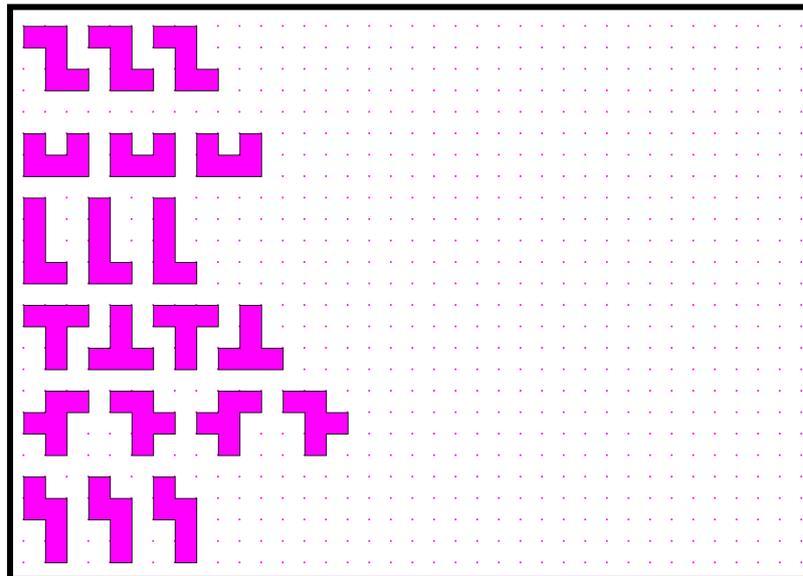
3.7.1.2 Tarefa 2 – Isometrias na Malha Pontilhada Quadrada

Objetivo da tarefa: trabalhar com os alunos as transformações isométricas do plano (translação, reflexão e rotação) por meio da reprodução e repetição de padrões.

Esta tarefa justifica-se pelo fato que será entregue aos sujeitos que participarão do Dispositivo Central no ambiente materiais manipulativos, malhas pontilhadas quadradas e isométricas como recursos, para responderem as tarefas de comparação de área (tarefa 2) e produção de superfície (tarefa 3).

Descrição da tarefa: Para responder esta tarefa os alunos poderão utilizar lápis coloridos, canetas coloridas ou lápis grafite, para reproduzir os padrões.

2 - Observe os padrões dos pentaminós abaixo e reproduza-os:



Procedimentos Previstos

Para reproduzir esses poliminós, os alunos precisam primeiro observar a posição de cada um e em seguida reproduzi-los repetidamente de acordo com suas respectivas posições na malha pontilhada quadrada, eles podem notar também que esses poliminós são compostos por cinco quadradinhos justapostos pelos lados e reproduzi-los após verificarem a posição de cada um na referida malha.

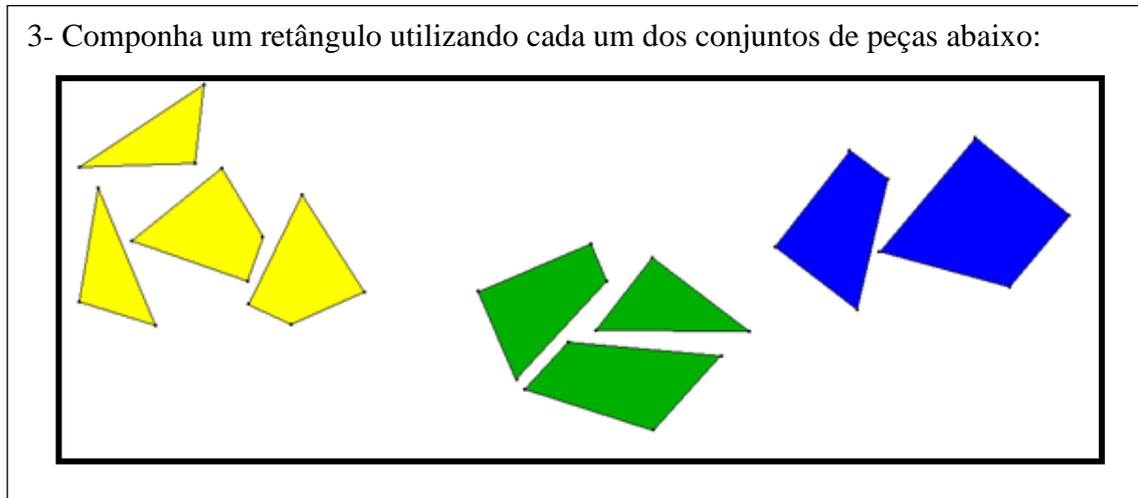
Esses procedimentos possibilitarão aos alunos mobilizar mentalmente estratégias que lhes serão úteis para resolver tarefas do Dispositivo Central ao lidarem com as transformações isométricas do plano no ambiente estático, mobilizando procedimentos dinâmicos de comparação das áreas de figuras, ou mesmo por meio da contagem das unidades determinar as medidas das áreas das figuras (tarefa 3 do dispositivo central).

3.7.1.3 Tarefa 3 – Composição de figuras

Objetivo da tarefa: trabalhar de forma implícita com composição e recomposição de figuras e com as transformações isométricas do plano (rotação, translação e reflexão). Os alunos precisarão para resolver a atividade compor um retângulo com cada conjunto de peças de acordo com suas respectivas cores.

Essa tarefa se justifica em relação às do Dispositivo Central por permitir aos alunos estratégias de recorte e colagem, translação, reflexão, rotação e justaposição das peças para composição do retângulo. Os estudantes podem estabelecer metas e um plano específico para a resolução da atividade ou tentar resolvê-la de forma intuitiva.

Descrição da atividade: Serão entregues aos alunos três conjuntos de figuras em papel sulfite, fita adesiva, cola e tesoura sem ponta. Os alunos receberam um conjunto de peças coloridas desenhadas em papel em formato de um quebra cabeça. Eles terão que recortar cada conjunto de peças e comporem um retângulo, em seguida colá-los na pasta de papel entregue com o kit para a realização das atividades deste dispositivo.

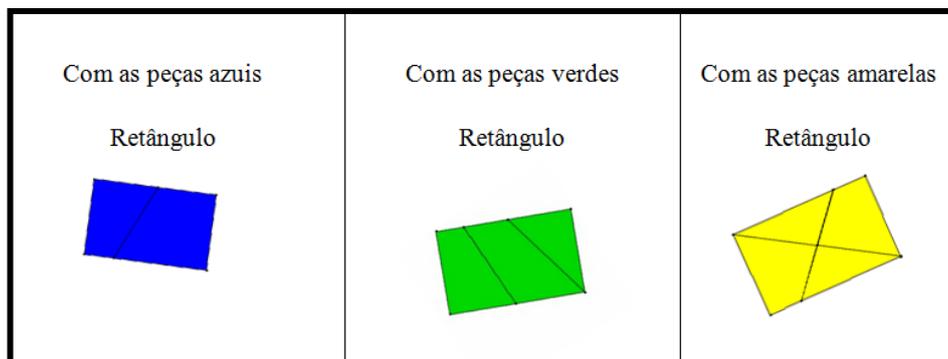


Procedimentos Previstos

Os alunos poderão realizar diversos processos de rotação nas peças que lhes serão entregues para tentar completar o quebra cabeça que está constituído em três níveis, o mais fácil que compõe o retângulo azul, o médio que compõe o retângulo verde e o mais difícil que compõe o retângulo amarelo. Eles poderão por tentativa e erro montar o retângulo ou elaborar estratégias montando mentalmente hipóteses para chegarem a uma conclusão.

Resposta esperada nas resoluções dos alunos

Figura 40- Resolução da tarefa 3



Fonte: adaptada do CREM (2007)

Os alunos poderão apresentar dificuldades para montar o retângulo com as peças amarelas visto que exige um grau maior de concentração, no qual precisarão aplicar vários movimentos de rotação nas peças para formar o retângulo.

3.7.1.4 Tarefa 4 – Composição de Figuras (Ladrilhagem)

Objetivo da tarefa: trabalhar a ladrilhagem de determinadas figuras a partir de um conjunto de peças dadas, como possibilidade de o aluno utilizar as transformações isométricas do plano (translação, rotação e reflexão), composição e recomposição de figuras para completar o ladrilhamento.

Justificamos a escolha dessa tarefa por permitir que os alunos utilizem de forma intuitiva, além de movimentos de rotação que podem ser mobilizados com mais frequência para encaixar as figuras, processos de composição, recomposição, justaposição e sobreposição de um conjunto de peças dadas, para realizarem a ladrilhagem das figuras retangulares que estão demarcadas.

Esta atividade se assemelha à anterior pelo fato de os alunos precisarem construir retângulos a partir de um conjunto de peças dadas. Nesse caso, uma vez que, o aluno tenha concluído alguns dos quebra cabeças da atividade 3, poderá ter desenvolvido habilidades que lhes permitiriam facilmente completar de forma satisfatória o ladrilhamento.

O diferencial da atividade 3 em relação a 4, está no trabalho com a sobreposição dos retângulos que já estão formados em um determinado plano, só será preciso que o aluno pavimente todos os retângulos, pela justaposição das peças sem as sobrepor.

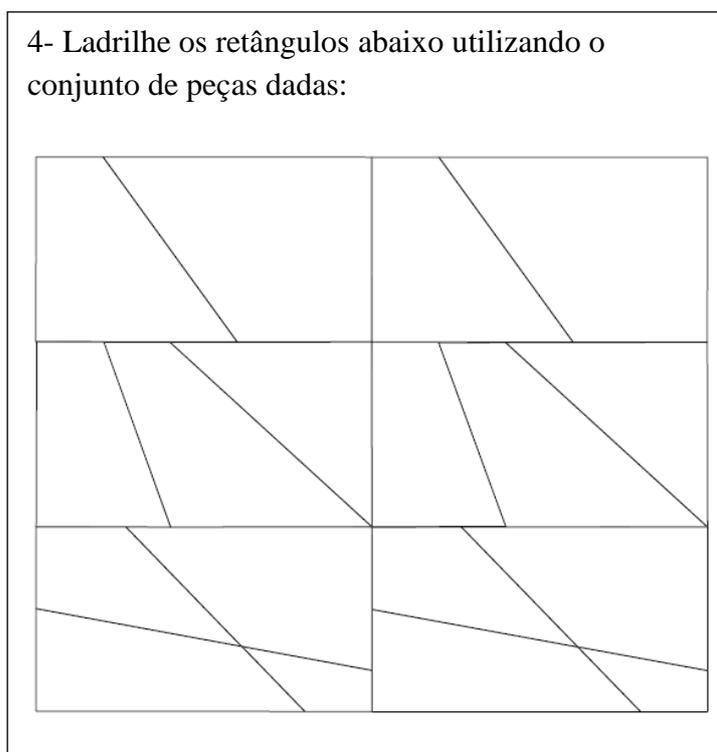
Descrição da tarefa: Serão entregues aos alunos conjuntos de peças recortadas nas cores azul claro, azul escuro, verde claro, verde escuro, vermelho e rosa. Cada conjunto de peças compõe um retângulo, os alunos deverão sobrepor retângulos já demarcados em um determinado plano. Para o desenvolvimento desta atividade os alunos receberão cola, fita adesiva, peças recortadas e a atividade em uma folha A4.

Figura 41- Conjunto de peças da tarefa 4



Fonte: adaptada do CREM(2007)

Esse conjunto de 18 peças foi entregue aos alunos recortadas para que os mesmos pavissem a seguinte figura da atividade a seguir:

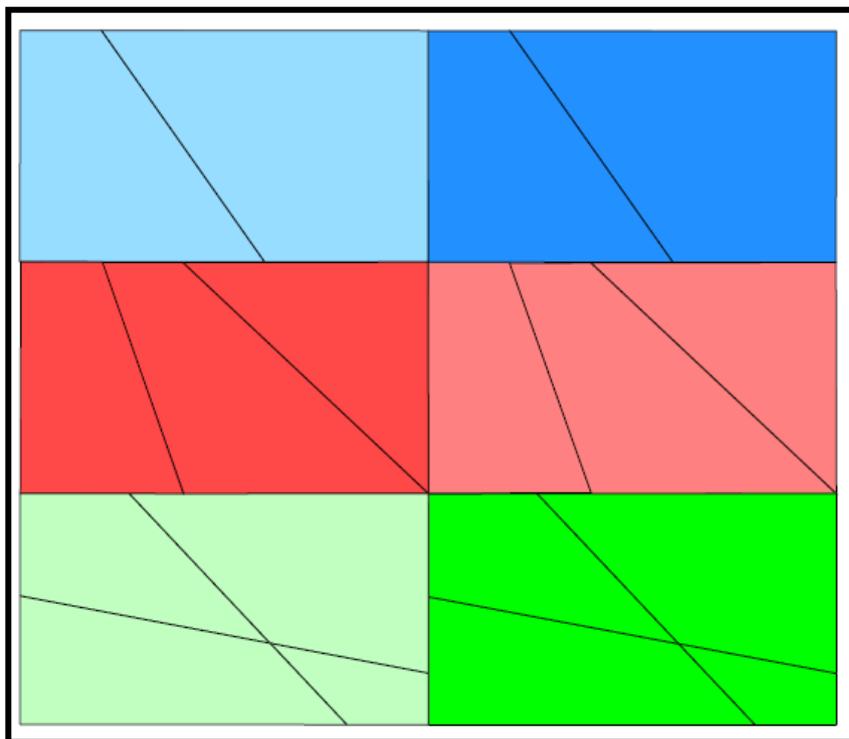


Para resolver essa tarefa os alunos poderão sobrepor às peças dadas tentando encaixá-las perfeitamente, e por tentativa de acerto ou erro, verificar as que cabem perfeitamente ou não, buscando assim completar o ladrilhamento.

Eles também poderão identificar que as peças de cores claras e escuras são as mesmas e a partir do conhecimento já mobilizado na atividade 3 compor retângulos com peças de mesma cor sobrepondo-as aos retângulos no plano, ou variar compor com cores diferentes.

Ilustramos a seguir uma possível solução de ladrilhamento.

Figura 42 – Ladrilhamento da tarefa 4



Fonte: (CREM, 2007)

A figura 9 representa o ladrilhamento completo, ou seja, as peças foram encaixadas perfeitamente de acordo com suas respectivas cores. Apresentamos assim uma possível solução desta tarefa.

As tarefas no ambiente não digital foram pensadas ao mesmo tempo para:

- permitir que os alunos se familiarizassem com recursos pouco usuais na sala de aula de matemática (tesoura e fita adesiva para realização de corte-colagem, quebra-cabeças geométricos, malhas quadriculadas e pontilhadas).
- trabalhar elementos constitutivos dos procedimentos de resolução das tarefas do dispositivo central – decomposição e recomposição, ladrilhamento de figuras, isometrias – sem no entanto abordar especificamente as questões sobre área (não se trata da invariância da área por isometrias, nem da medida da área usando o ladrilhamento, por exemplo).

3.7.2 Ambiente Digital- Primeiro Encontro²⁵

O primeiro encontro foi instrutivo e teve como principal função colocar os alunos em situação de começar o trabalho, instalar uma cultura com o uso de software de geometria.

Expusemos nesse primeiro encontro de trabalho com o *Apprenti Géomètre 2* alguns dos principais menus e ferramentas por meio de slides e no próprio software, projetamos essa apresentação em um data show. Depois de explicitarmos os passos para executar o software (escolhemos a opção do menu inicial AB que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*). Solicitamos que os alunos reproduzissem os comandos dados nos seus respectivos computadores, operando assim com as principais ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.

Os seguintes menus e suas funções foram apresentados:

- **Figuras padrão** - seus *Jogos de base*: quadrado, triângulo, pentágono e como proceder para levar as figuras que fazem parte desse sub menu diretamente à interface do software;
- **Movimento** - como fazer para *mover*, fazer uma *rotação* e *reflexão* nas figuras;
- **Figuras a mão livre**- seus conjuntos de figuras que podem ser criadas com alguns cliques do mouse com certas particularidades na interface do software;
- **Operação** - as ferramentas de *dividir*, *decompor*, *fundir* e *duplicar* figuras;
- **Editar** - as ferramentas de *remover*, *copiar* e *colar*;
- **Ferramentas** - as opções de *colorir*, *nomear* e alterar a espessura do contorno da figura, por último as ferramentas que aparecem quando damos um clique com o botão direito do mouse nas figuras desenhadas na interface do software, tais como: esconder ponto (opção que retira o ponto dos vértices da figura), enviar para trás ou trazer para frente figuras após serem sobrepostas.
- **Arquivo** – salvar como (essa ferramenta é relevante, pois ao término de cada tarefa os alunos precisavam salvá-las com seus respectivos nomes).

Todas essas ferramentas e suas funcionalidades poderão ser utilizadas na resolução das tarefas do Dispositivo Central.

²⁵ No apêndice A referente ao *Apprenti Géomètre 2* apresentamos de forma mais detalhada alguns desses menus e as funcionalidades de algumas dessas ferramentas que são importantes para o trabalho de área como grandeza geométrica.

3.7.3 Ambiente Digital- Segundo Encontro

Para esse encontro, preparamos um conjunto de cinco tarefas que tiveram como objetivo familiarizar de forma mais sistematizada as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*. Nelas os alunos tiveram que construir diversas figuras utilizando as ferramentas desse software. Entregamos a cada dupla de alunos participante, as tarefas em uma ficha em papel, eles deveriam observar os comandos da ficha e responde-las utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*. Todas as tarefas que os alunos resolveram nesse dispositivo foram criadas nos menus A, B e AB do próprio *Apprenti Géomètre2*.

Das cinco tarefas que foram aplicadas, apenas a de número 2 estava pré-definida em uma pasta na área de trabalho dos computadores do laboratório, as demais precisariam ser construídas no próprio software.

Os alunos foram orientados pelo pesquisador como proceder para executar cada tarefa e que deveriam após concluí-las, salvá-las na área de trabalho do computador que estivessem utilizando.

A organização da sala foi da mesma forma que no primeiro encontro, as duplas também foram às mesmas e trabalharam nos seus respectivos computadores escolhidos pela manhã, a fim de facilitar o monitoramento dos protocolos de cada dupla. Os alunos também foram vídeo-gravados (capturamos o áudio e o vídeo de cada dupla), assim como a resolução das tarefas na tela do computador.

O Papel do pesquisador nesse momento foi de orientar os alunos quanto ao desenvolvimento das tarefas tirando as possíveis dúvidas que poderiam surgir com relação aos menus do software, pois os alunos precisavam nesse momento familiarizar-se com os menus e funcionalidades das ferrametnas do *Apprenti Géomètre 2* para responderem o conjunto de tarefas do Dispositivo Central que exigiriam a mobilização dos principais menus e ferramentas explorados nessa parte.

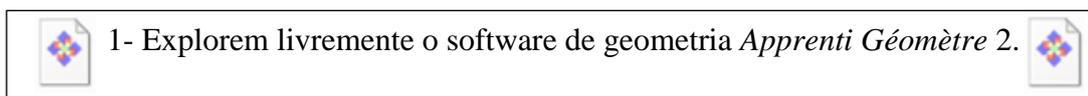
3.7.4 Análise a Priori das Tarefas²⁶ de Exploração do *Apprenti Géomètre 2*

3.7.4.1 Tarefa 1- Exploração Livre do Software

Objetivo da tarefa: Explorar livremente os menus A, B, C, AB e AC que compõe o *Apprenti Géomètre 2*.

Essa tarefa justifica-se pela necessidade dos alunos explorarem os menus e ferramentas do software livremente, sem ser de forma instrucional como no primeiro encontro.

Descrição: Para a realização dessa tarefa foi entregue uma ficha a cada dupla de alunos, eles deveriam ler o que se pedia no enunciado e responder no software e assim que concluíssem a tarefa salvá-la na área de trabalho do computador com o nome de cada um que compõe a dupla.



Possíveis Procedimentos

Os alunos poderiam nessa tarefa construir figuras na interface do *Apprenti Géomètre 2* utilizando os menus *Figuras Padrão* ou *Figuras a mão livre*, utilizar as ferramentas do menu operação para realizar decomposições sucessivas de figuras, fazer rotações, translações, reflexões, poderão ainda compor figuras diversas utilizando a criatividade. A mobilização livre de tais menus seria pertinente para que os alunos respondessem as tarefas do dispositivo central que demandaria da utilização de diferentes menus e ferramentas.

3.7.4.2 Tarefa 2- Complementação de Figuras (Trem)

Objetivo da tarefa: Permitir que os alunos explorem o menu A do *Apprenti Géomètre 2* para que conheçam as principais ferramentas que compõe esse menu e suas funções.

Essa tarefa justifica-se pelo fato de permitir que os alunos mobilizem as ferramentas do menu A para completar uma figura dada.

²⁶ Todas as tarefas de exploração do *Apprenti Géomètre 2* presentes nesta etapa da pesquisa foram desenvolvidas pelo autor, inspiradas a partir dos estudos do CREM (2007).

Descrição: Na ficha da atividade que foi entregue aos alunos havia dois trens um completo e um incompleto, o aluno devia completar as lacunas do segundo a partir do primeiro com as peças existentes no primeiro que faltam no segundo. Para realizar essa atividade o aluno deveria dar um clique duplo na **Fig. 2** disponível na pasta com o nome familiarização com o *Apprenti Géomètre 2* em seus computadores, em seguida selecionar a opção “**aluno**” digitar seus nomes, escolher o menu A e clicar em ok.

2- Observe as figuras 1 e 2 abaixo :

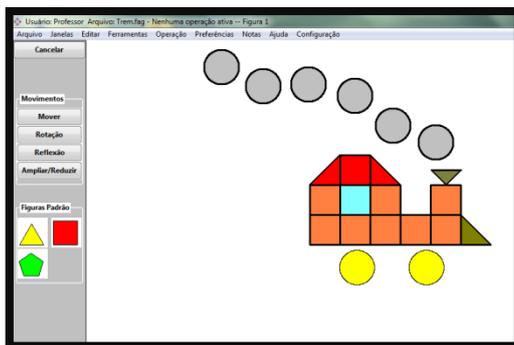


Figura 1

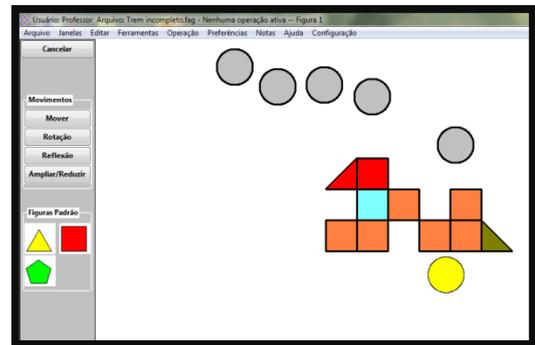


Figura 2

Note que a figura 2 está incompleta, pois algumas peças foram retiradas. Complete-a utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para que fique de acordo com a figura 1.

Essa tarefa foi configurada e desenvolvida pelo autor da pesquisa no **menu A** que limita o acesso do aluno a algumas ferramentas presente em outros menus (ver Apêndice A); esse menu foi criado na primeira versão do *Apprenti Géomètre 2* no qual há um conjunto de figuras geométricas pré-programadas, sendo apenas necessário escolher uma delas e com um clique na figura e em seguida na área de trabalho desse software, e reproduzir quantas forem preciso para resolver a tarefa.

Possíveis Procedimentos

Para realizar essa tarefa o aluno precisaria mobilizar algumas ferramentas, tais como:

- Do menu movimentos
Mover, rotação e reflexão;
- Do menu Figuras Padrão o “Jogo de Base Quadrado”
O quadrado e o triângulo retângulo;
- Do menu Figuras Padrão o “Jogo de Base Triângulos”

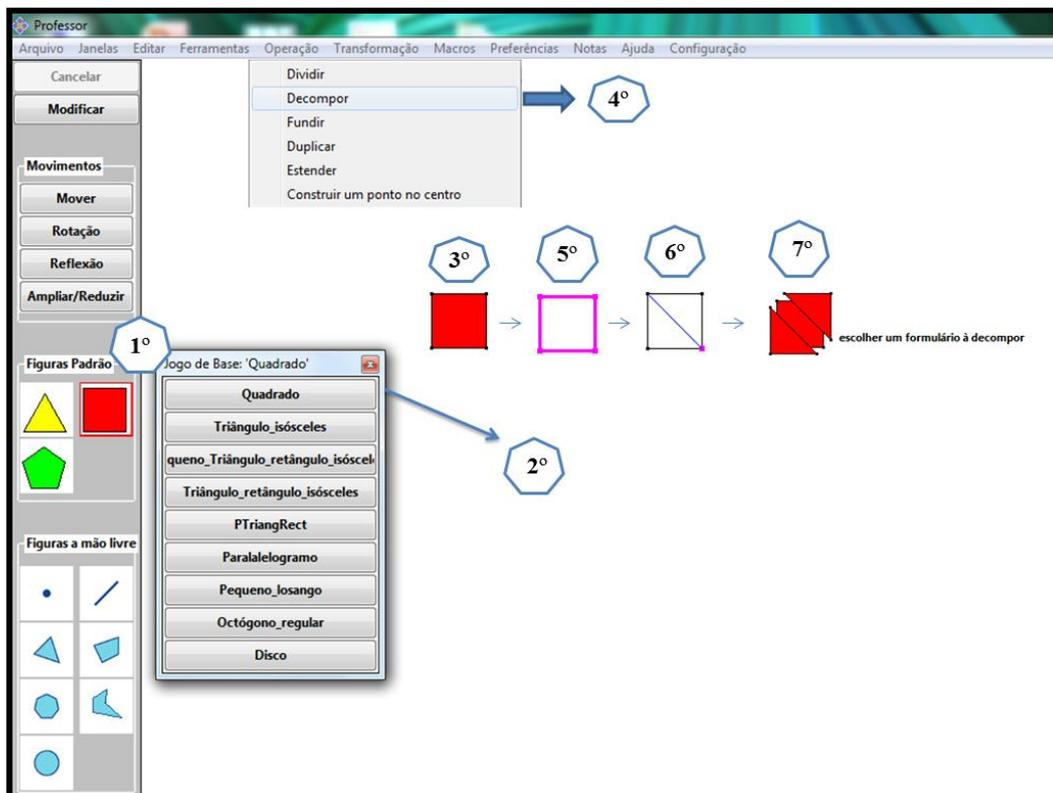
O pequeno triângulo isóscele e o pequeno disco;

- Do menu Operação
Decompor e duplicar;
- Do menu ferramentas
A opção colorir.

Para completar o trem de uma forma geral o aluno poderia escolher as figuras descritas anteriormente, seleccioná-las e enviar direto para a tela, aplicar translações, rotações ou reflexões, no caso do triângulo retângulo e do pequeno triângulo isósceles, encaixando-os nos seus respectivos lugares.

Para completar a parte superior do trem ele teria duas opções, escolher o triângulo retângulo do *Jogo de Base: 'Quadrado'* do menu *Figuras Padrão*, arrastar e completar essa parte do trem, ou decidir escolher um dos quadrados que compõe a figura, duplicá-lo e em seguida decompor pela diagonal para ter um triângulo retângulo utilizando as ferramentas *duplicar* e *decompor* do menu *Operação*. Outra opção é duplicar o triângulo retângulo existente fazer uma rotação ou uma reflexão e preencher a lacuna da parte superior do trem. Apresentamos a seguir um processo de decomposição do quadrado pela diagonal.

Figura 43- Decomposição do quadrado pela diagonal



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

Para decompor um quadrado pela diagonal utilizando os menus do *Apprenti Géomètre 2*, é preciso realizar alguns passos: primeiro escolher o quadrado do menu Figuras Padrão; selecionar a ferramenta decompor; clicar na figura que se deseja decompor (neste caso o quadrado); clicar em um dos vértices; arrastar com o mouse pela diagonal até o outro vértice da figura, assim é possível decompor o quadrado em dois triângulos retângulos.

Com relação aos quadrados que compõe o trem podem ser escolhidos no menu *Figuras Padrão* selecionados e encaixados diretamente nas lacunas, mudando as cores em seguida.

Uma das dificuldades que o aluno poderá encontrar será saber qual triângulo compõe a chaminé, pois para isso terá que conhecer os tipos de triângulos quanto aos lados, ou por tentativa procurar no menu *Figuras Padrão* um triângulo que seja semelhante ao da figura 1.

Outra dificuldade que poderá surgir é saber qual círculo compõe as engrenagens e a fumaça do trem, pois no *Jogo de Base: Quadrado, Triângulo e Pentágono* existem círculos, mas de tamanhos diferentes, porém o único que completa essas lacunas é o pequeno círculo do Jogo de Base Triângulo. Para todas as ações que serão realizadas o aluno sempre terá que recorrer à ferramenta “*mover*”.

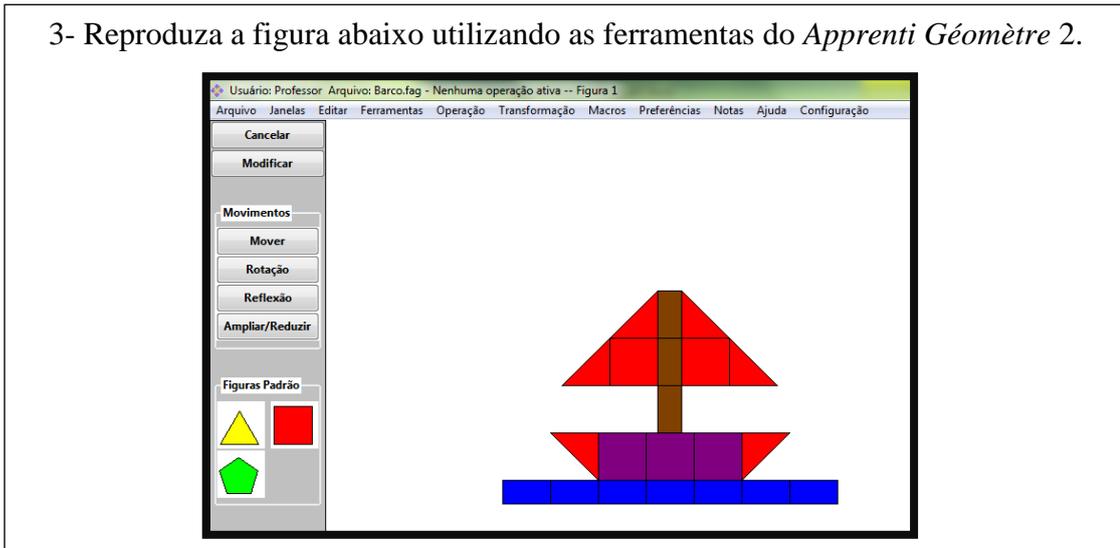
3.7.4.3 Tarefa 3- Reprodução de Figuras (Barco)

Objetivo da tarefa: Permitir que os alunos explorem as ferramentas *decompor* e *duplicar* do menu *Operação* e as ferramentas mover, rotação e reflexão do menu *Movimentos*.

Essa tarefa justifica-se por permitir que os alunos utilizem de forma acentuada as ferramentas *duplicar*, *decompor* e os *Jogos de Base* do menu “A”.

Descrição: Foi entregue aos alunos a figura de um barco em uma ficha de papel, eles teriam que reproduzi-lo utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*. Para realizar essa tarefa (assim como as tarefas 4 e 5, que se seguem) os alunos tinham que clicar na opção aluno, digitar o nome de cada integrante da dupla, em seguida escolher o menu e clicar em OK para iniciar a construção da figura dada na ficha. No caso da tarefa 3, o menu a ser escolhido era o A.

3- Reproduza a figura abaixo utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.

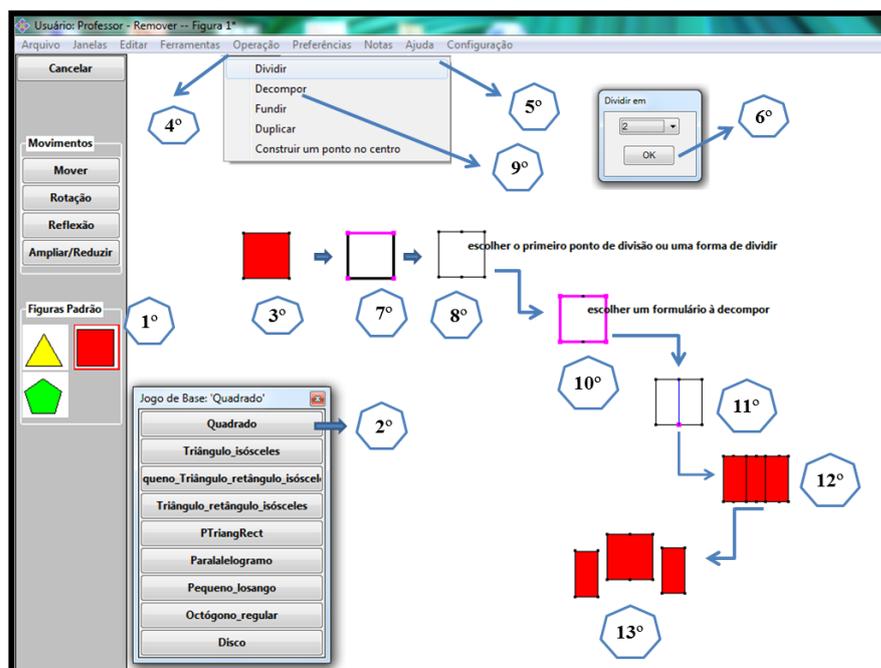


Possíveis Procedimentos

Para realizar essa tarefa além de o aluno mobilizar alguns dos menus descritos na tarefa 1 da etapa de familiarização, será necessário que ele previamente identifique que o barco é composto por cinco quadrados, seis triângulos retângulos isósceles e dez retângulos.

Os retângulos que compõe a figura do barco não fazem parte de nenhum dos menus e sub menus das *Figuras Padrão*. Os alunos precisarão decompor o quadrado para obterem o retângulo, utilizando um dos seguintes procedimentos para realizar essa decomposição:

Figura 44- Procedimentos para a decomposição do quadrado pela divisão de segmentos



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

A figura 44 ilustra em alguns passos a decomposição de um quadrado pelos seus lados com o objetivo de dividi-lo e por meio dessa divisão obter dois retângulos. Essas ações podem ser realizadas por meio das ferramentas *dividir* e *decompor* do menu *Operação*. Dessa forma os alunos poderão decompor o quadrado de acordo com os seguintes passos:

- 1º Selecionar o menu Figuras Padrão;
- 2º Escolher a opção quadrado do Jogo de Base: “Quadrado”;
- 3º Clicar na tela do *Apprenti Géomètre 2* na qual a figura já aparecerá pré-definida;
- 4º Selecionar o menu operação;
- 5º Escolher a opção dividir do menu operação;
- 6º Selecionar a opção dividir segmentos em dois;
- 7º Escolher um dos lados do quadrado;

8º Clicar em um dos lados assim que a figura aparecer selecionada (essa ação permitirá dividir o segmento que forma um dos lados do quadrado em duas partes, ou seja criar um ponto médio);

- 9º Escolher a ferramenta decompor do menu operação;
- 10º Selecionar a figura a decompor;
- 11º Ligar os pontos que dividem o segmento com o arrastar do mouse;

No passo 12 verificamos o quadrado decomposto em dois retângulos e no 13 as figuras arrastadas pelo menu mover, vemos que o software deixa um formulário por trás para que os alunos saibam qual figura gerou aquelas peças.

Os alunos podem duplicar os retângulos criados quantas vezes for necessário para construir o barco. Quanto às demais peças como o quadrado e o triângulo retângulo podem ser encontradas facilmente no menu Figuras Padrão, no Jogo de Base Quadrado, porém os alunos terão que aplicar as transformações isométricas do plano como rotação, translação e reflexão do triângulo para encaixá-los na composição do barco por causa das posições que essas figuras se encontram.

Eles também poderão ao invés de escolher o triângulo retângulo isósceles do menu *Figuras Padrão*, escolher um quadrado desse mesmo menu, decompor pela diagonal e em seguida duplicar até terem a quantidade suficiente para montar a figura.

Os alunos poderão apresentar dificuldades para decompor, visto que o processo de decomposição requer o uso de alguns procedimentos que podem não ter sido construídos na primeira parte deste momento do dispositivo. Outra questão é que poderão tentar ao invés do retângulo inserir outra figura para montar o mastro do barco e a água, assim não terão concluído a atividade de forma satisfatória, pois não utilizaram as mesmas figuras que

compõem o barco solicitado na tarefa. As ferramentas decompor, mover, rotação e reflexão, serão importantes para responder as tarefas que tratam da situação de comparação de área de duas superfícies quais quer, como também as situações de mudança de unidade e produção e superfície do dispositivo central.

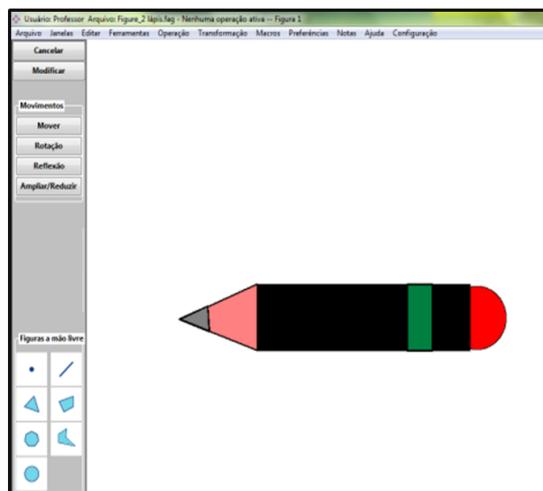
3.7.4.4 Tarefa 4 – Reprodução de Figuras (Lápis)

Objetivo da tarefa: Permitir que os alunos explorem o menu B do *Apprenti Géomètre 2* para que conheçam as principais ferramentas que compõe esse menu e suas funções.

Esta tarefa justifica-se por permitir que os alunos explorem o menu “Figuras a mão livre” que aparece na interface do software ao escolhermos na tela inicial do *Apprenti Géomètre 2* o menu “B” ou mesmo os menus AB e AC. Esse menu oferece como ferramenta a construção de figuras com alguns cliques do mouse, diferente do menu “A” das tarefas anteriores, no qual há um menu com um conjunto de figuras pré-definidas e não é necessário construí-las, basta escolher a figura desejada no menu *Figuras Padrão*, clicar sobre uma delas e em seguida na área de trabalho do software para se ter as figuras desejadas. Quando escolhermos o menu B não temos como opção o menu *Figuras Padrão*, há uma lacuna no local onde fica localizado esse menu. Esse menu será útil no dispositivo central para que os alunos possam nas tarefas de produção de superfície, produzir figuras de área maior, menor ou igual a de uma superfície dada, no exterior ou no interior de uma determinada figura dada.

Descrição: Foi entregue aos alunos a figura de um lápis em uma ficha de papel, a ser reproduzido utilizando as Ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, utilizando o menu “B”.

4 - Reproduza a figura abaixo utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.



Para realizar essa tarefa o aluno precisava mobilizar algumas ferramentas do menu “B”, tais como:

- Do menu movimentos
Mover, rotação e reflexão;
- Do menu Figuras a mão livre
O quadrado e o triângulo retângulo;
- Do menu Figuras Padrão o “Jogo de Base Triângulos”
O pequeno triângulo isósceles e o pequeno disco (pequeno círculo);
- Do menu ferramentas
A opção colorir, enviar para trás e esconder ponto.

Possíveis Procedimentos

Para iniciar a construção do lápis os alunos teriam que identificar as figuras que o compõe: um retângulo grande, com seu lado de maior comprimento na horizontal, um retângulo pequeno, com o lado de maior comprimento na vertical, um círculo e dois triângulos isósceles.

Os alunos podem apresentar dificuldades para construir esse lápis, visto que as figuras que o compõe não estão pré-definidas como as do menu “A”, eles precisam construir cada uma delas, aplicar processos de translação, reflexão e rotação, sobreposição e justaposição nas figuras que compõem o lápis para concluí-lo.

Outra dificuldade que podemos destacar é no reconhecimento previamente das figuras que compõem o lápis para então reproduzi-lo como sugere a tarefa, os alunos podem não conhecer os tipos de triângulos quanto aos lados ou quanto aos ângulos e por tentativa procurar no menu “Figuras a mão livre”, no qual há várias opções de triângulos um tipo de triângulo qualquer que satisfaça a construção da ponta do lápis, essa questão é válida também para os retângulos que compõem a figura, os alunos poderão escolher outro quadrilátero diferente do retângulo e tentar utiliza-lo como base na construção do lápis.

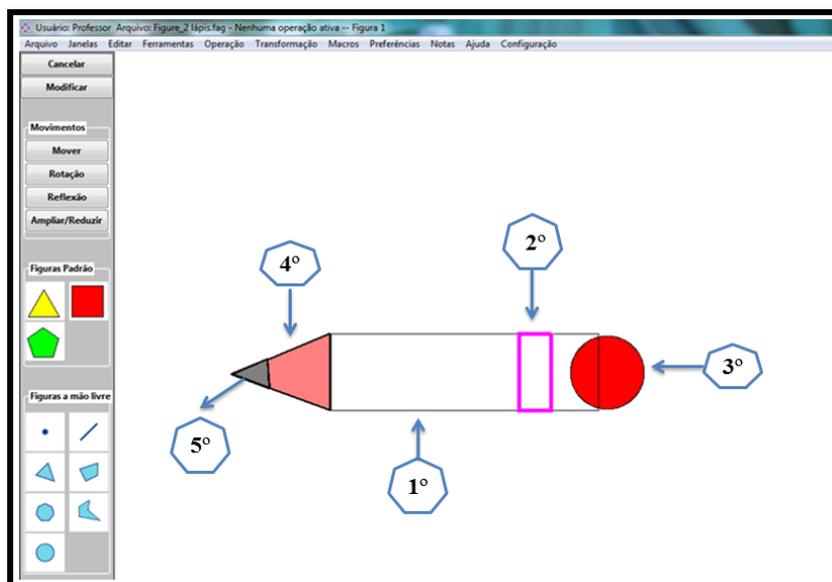
Mesmo que o nosso foco não seja no reconhecimento das figuras geométricas, nesse caso os tipos de triângulos quanto aos lados ou quanto aos ângulos, observaremos a questão da leitura que os alunos precisam realizar na figura para reproduzi-la corretamente.

Outra questão que poderá surgir é na construção do círculo, podem não percebê-lo e tentar depois de terem construído toda base do lápis, utilizar a opção arco do menu “*Figuras a mão livre*” para montar a borracha vermelha, porém realizando esse procedimento podem não obter sucesso na construção da borracha. Podem então perceber que a borracha é formada

pelo círculo que foi construído e enviado para trás do retângulo que compõe o corpo do lápis. A utilização das ferramentas “trazer para frente” e “enviar para trás” será importante para conclusão da tarefa, os alunos precisam se familiarizar com essas ferramentas, pois quando se constrói uma figura no *Apprenti Géomètre 2* e em seguida uma outra, ao sobrepormos duas figuras uma delas fica escondida por trás da outra, esse fator poderá dificultar a comparação da área de duas figuras, sendo necessário que os alunos mobilizem tais ferramentas.

Utilizamos diferentes figuras para compor o lápis como ilustra a figura 45:

Figura 45- Figuras que compõem o lápis



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2

Para construir a figura da tarefa 4, iniciamos pelo retângulo que compõe a parte do corpo do lápis, para formar esse retângulo selecionamos do menu “Figuras a mão livre” a opção “Quadriláteros” e clicamos em retângulo. Para formá-lo é necessário construir primeiro um dos lados com dois cliques do mouse e em seguida arrastar, ou seja, para determinar um retângulo são necessários três cliques com os quais são determinados os lados e os ângulos (o software completa a construção e impõe restrições quanto aos ângulos ou comprimentos).

O segundo passo foi criar um retângulo e coloca-lo sobre a parte do corpo do lápis, em seguida construímos um círculo, definido por dois pontos com dois cliques do mouse, ou seja, o primeiro ponto representa o centro e o segundo o ponto fixo do círculo, colorimos e enviamos para trás do lápis, compomos assim a borracha.

Quanto aos triângulos que compõe a parte da ponta do lápis, foram criados da seguinte forma: primeiro com dois cliques determinamos a base do triângulo isósceles e um terceiro

ponto fixo para construí-lo completamente, justapomos um dos lados desse triângulo ao retângulo que forma o corpo do lápis.

O mesmo procedimento foi realizado para compor o outro triângulo isósceles menor para formar a pontinha do lápis, esse por sua vez foi construído utilizando como vértice um dos pontos fixos do triângulo anterior, para completar esse lápis aplicamos alguns movimentos de translação e rotação para justapor e/ou sobrepor as figuras.

Então prevemos que os alunos mobilizem todas as ferramentas e menus descritos anteriormente para construir o lápis, completando a tarefa de forma satisfatória.

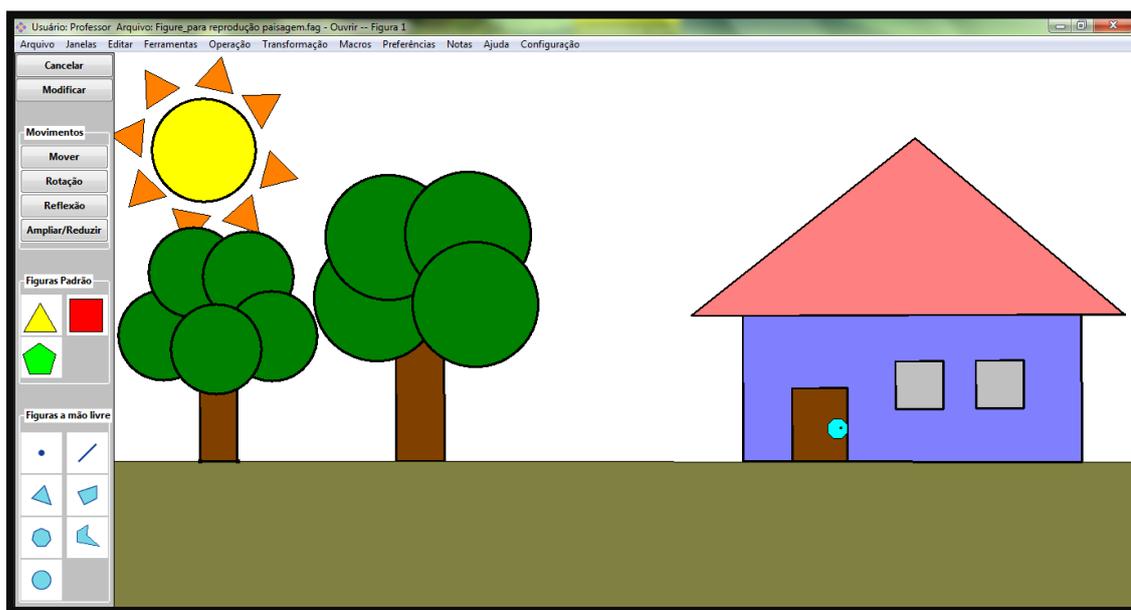
3.7.4.5 Tarefa 5 – Reprodução de Figuras (Paisagem)

Objetivo da tarefa: Permitir que os alunos explorem os menus AB e/ou AC do *Apprenti Géomètre 2*. Esse menu é formado pela junção dos menus A + B e A + C.

Esta tarefa justifica-se por permitir que os alunos mobilizem as ferramentas do menu AB, esse menu será indicado sempre na parte da descrição das tarefas do Dispositivo Central para que os alunos tenham diversas possibilidades de respondê-las por meio das ferramentas que esse menu oferece.

Descrição: A tarefa consiste na reprodução de uma paisagem, utilizando diversas ferramentas contidas no menu AB ou AC.

5- Reproduza a figura abaixo utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.



Para realizar essa tarefa o aluno precisa mobilizar algumas ferramentas do menu “AB” ou “AC”, tais como:

- Do menu movimentos
 - Mover, rotação ou reflexão;
- Do menu Figuras a mão livre
 - O retângulo, o círculo e o triângulo isósceles;
- Do menu Figuras Padrão o “Jogo de Base Triângulos”
 - O triângulo isósceles;
- Do menu Figuras Padrão o “Jogo de Base Quadrado”
 - O quadrado e o octógono regular;
- Do menu ferramentas
 - A opção colorir, enviar para trás e esconder ponto.

Possíveis procedimentos

Essa tarefa tem um grau de dificuldade maior que as anteriores, pois exige dos alunos a mobilização de diversos procedimentos e reconhecimento das figuras que compõem a paisagem para construí-la. Assim para construir a figura que representa o sol precisam utilizar o círculo dos *Jogos de base* do menu *Figuras Padrão* ou construir o círculo pelo menu “*Figuras a mão livre*”, para representar os raios do sol, poderão ser levados diretamente a tela do software triângulos isósceles do menu “*Figuras Padrão*” e em seguida aplicar movimentos de rotação e translação (mover). A ferramenta duplicar permite reproduzir os triângulos sem necessariamente recorrer ao “*Jogo de Base Triângulos*” constantemente.

As árvores podem ser construídas com os círculos do menu “*Figuras Padrão*” ou desenhá-las utilizando a ferramenta do menu “*Figuras a mão livre*”. A ferramenta enviar para trás e trazer para frente podem ser usadas para obter uma reprodução mais fiel da paisagem. Para traçar os caules das árvores, assim como a estrutura da casa, a porta e o gramado, foram construídos retângulos e aplicadas as transformações isométricas do plano a eles.

O telhado da casa é formado pelo triângulo isósceles dos sub menus *Malhas Isométrica* do menu “*Figuras a mão livre*”. A maçaneta da porta é formada por um octógono do *Jogo de base: ‘Quadrado’* e inserido um ponto solto representando o espaço da chave e as janelas pelos quadrados pré-definidos desse mesmo jogo. As duas figuras também podem ser construídas pelo menu “*Figuras a mão livre*” e a opção polígonos regulares no caso do octógono regular e do quadrado na opção *Quadriláteros*. Uma ferramenta que poderá facilitar o trabalho dos alunos será a de *duplicar* as figuras, evitando procedimentos repetitivos.

A maneira de criar essas figuras no software com a utilização do menu “*Figuras a mão livre*”, segue os processos descritos na tarefa 4.

Trata-se de uma tarefa relativamente complexa, que exige dos alunos a identificação das figuras que compõem a paisagem e das ferramentas do software que permitem reproduzir essas figuras e compor, pelo menos de maneira aproximativa, a paisagem.

As tarefas no ambiente digital foram pensadas para permitirem aos alunos a familiarização das funcionalidades das ferramentas e menus, assim como conhecimentos a serem reinvestidos na resolução das tarefas sobre áreas, como, por exemplo, nas tarefas de comparação os alunos precisariam sobrepor duas figuras para comprar suas áreas, para isso será preciso em alguns casos utilizar as ferramentas *mover*, *rotação* e *reflexão* do menu Movimentos que permitem movimentar e aplicar as transformações isométricas do plano as figuras, por isso que nas tarefas de reprodução de figuras deste ambiente foi enfatizado o trabalho com essas transformações.

Outras ferramentas que serão relevantes para a realização das tarefas de comparação de área, medida de área e mudança de unidade e produção de superfície são as ferramentas *decompor*, *dividir* e *duplicar* do menu *Operação*, trabalhadas enfaticamente na reprodução do barco na tarefa 3 deste dispositivo.

As tarefas de comparação de área exigirão que os alunos para compararem por sobreposição as áreas de duas figuras de formas diferentes, decompor e tentar como procedimento fazer com que essas figuras coincidam por sobreposição, para isso a importância da ferramenta *decompor* do menu *Operação*.

Para realizarem as tarefas de medida de área e mudança de unidade será necessário que os alunos reproduzam diferentes tipos de ladrilhos para medir as áreas de várias figuras, para isso a importância da familiarização com a ferramenta *duplicar* do menu *Operação*.

Quanto as tarefas de produção de superfície além de ser necessário a utilização de algumas ferramentas explicitadas anteriormente, também será necessário que os alunos saibam construir diferentes figuras por meio do menu “*Figuras a mão livre*”, por isso o fato de enfatizarmos a familiarização desse menu nas tarefas 4 e 5, assim como as figuras pré-definidas do menu “*Figuras Padrão*”, que podem ser utilizadas para esse tipo de tarefa com situação de produção ou mesmo para serem utilizada como unidade de medida de área, no caso do quadrado do *Jogo de base*: quadrado desse mesmo menu na situação de comparação de área com procedimento numérico.

4 ANÁLISE A POSTERIORI DA ETAPA DE FAMILIARIZAÇÃO

4.1 TAREFAS NO AMBIENTE NÃO- DIGITAL

Participaram destas tarefas os 12 sujeitos escolhidos para compor a pesquisa cada aluno foi identificado por um número de 1 a 12, os protocolos foram denominados com uma sigla indicativa do aluno seguido da tarefa. Assim Aln^o1T1 corresponde à tarefa 1 do aluno 1. Apresentaremos apenas nessas análises os protocolos mais representativos dos alunos, se cada um utilizou estratégias diferentes para responder a tarefa, explicitaremos cada um desses, assim como seus respectivos protocolos.

Todos os alunos foram organizados nesta parte deste dispositivo em trios, mas cada um deveria responder individualmente suas tarefas e caso quisessem socializar a forma que haviam resolvido, ficava a critério do aluno, ao fim deveriam entregar ao pesquisador todo o material que lhes havia sido entregue para responder tais tarefas, como o kit em uma pastinha de papel contendo lápis de cor, lápis grafite, tesoura, fita adesiva, cola e giz de cera e a ficha individual com as respectivas tarefas devidamente respondidas.

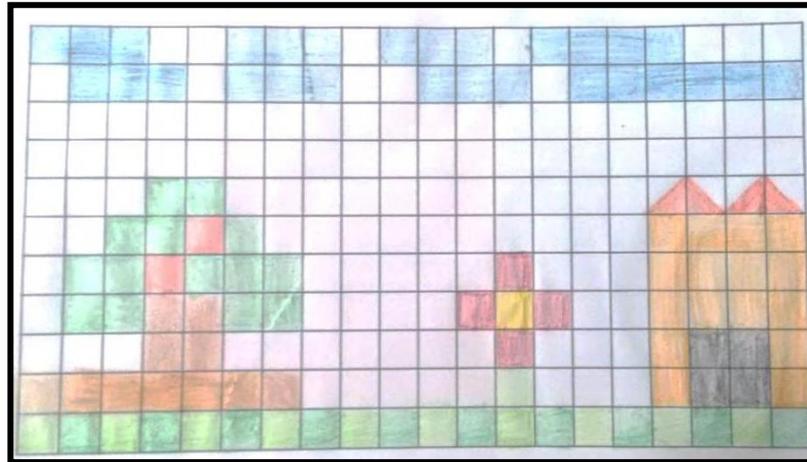
Mesmo que esses alunos tenham sido organizados em trios na sala de aula, alguns deles não socializaram as tarefas, optaram por resolver individual, por isso encontramos resultados diferentes por alunos que possivelmente estavam no mesmo grupo.

Todos os trios foram filmados, havia uma câmera em cada birô e algumas espalhadas na sala de aula, onde foi realizada esta parte do dispositivo. Para contribuir com a coleta de dados e filmagem participaram quatro pessoas da equipe pedagógica da escola.

4.1.1 Tarefa 1 – Reprodução de Figuras na Malha Quadriculada

Todos os sujeitos conseguiram sem dificuldades concluir essa tarefa, como previmos utilizaram o lápis de cor e o giz de cera para reproduzir as figuras da mesma forma que a da malha 1, alguns apenas utilizaram cores diferentes conforme acharam melhor, eles observaram as posições das figuras na malha 1, contaram os quadradinhos e fizeram a correspondência na malha quadriculada em branco. Apresentamos a seguir o extrato do protocolo de um dos alunos.

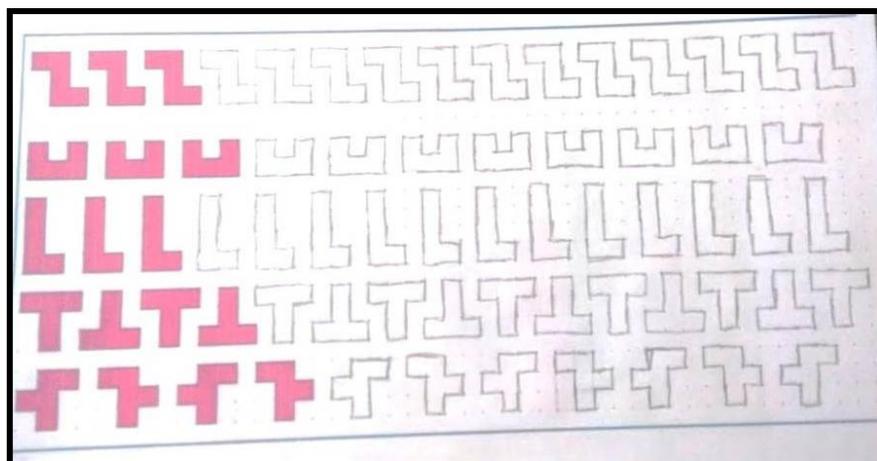
Figura 46 - Extrato do protocolo Aln°1T1



4.1.2 Tarefa 2 – Isometrias na Malha Pontilhada Quadrada

Todos os 12 alunos responderam essa tarefa, porém apenas 9 conseguiram concluí-la de forma satisfatória, ou seja, reproduzir os padrões da forma estabelecida. Como procedimentos para resolver essa tarefa, verificamos que após realizarem uma leitura da posição das figuras e do espaço ocupado por cada uma, tentavam estabelecer uma correspondência, entre os políminós presentes na malha isométrica e os que precisavam ser reproduzidos. Perceberam também que essas figuras eram compostas por cinco quadrados, justapostos pelos lados. O extrato do protocolo a seguir ilustra essa tarefa finalizada por um dos alunos.

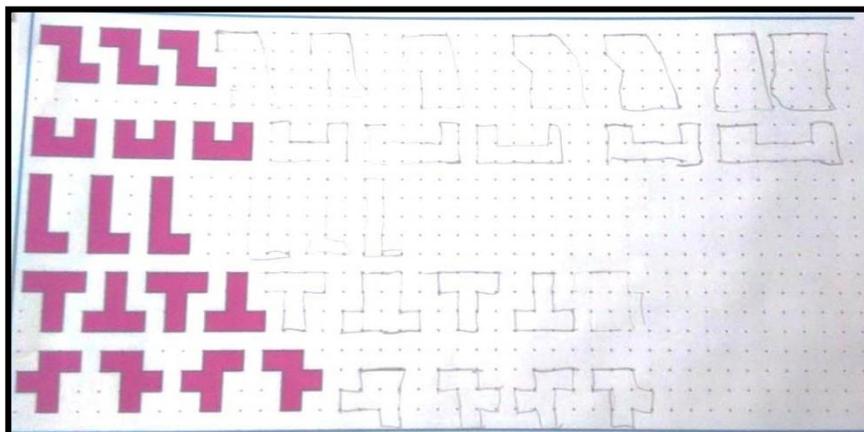
Figura 47- Extrato do protocolo An°1AT2



Os outros três alunos tentaram resolver a tarefa utilizando diversos procedimentos para reproduzi-los, mas tiveram dificuldades em reproduzir os pentaminós seguindo o padrão sugerido. Como mostra o protocolo a seguir, os erros dizem respeito à forma das figuras

(algumas não são congruentes aos poliminós dados) e à posição das figuras (os sujeitos não seguem o padrão sugerido que corresponde a uma translação nos dois primeiros casos, a uma simetria de rotação de 180° , no terceiro caso e a uma simetria de reflexão no quarto)

Figura 48 - Extrato do protocolo Aln^o2T2



Esses três alunos que apresentaram dificuldades não estavam no mesmo trio, organizados no início da aplicação desta parte do dispositivo experimental, tais dificuldades estão relacionadas na interpretação das figuras e/ou na reprodução das mesmas usando as isometrias.

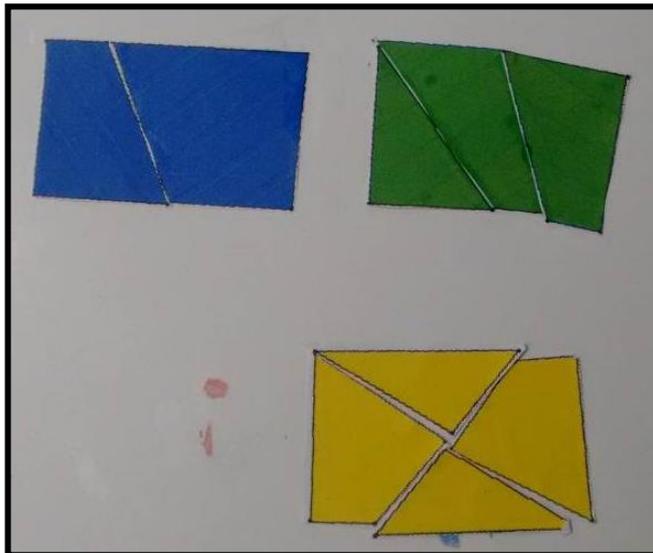
Mesmo que esses três alunos, não tenham concluído a tarefa 2, observamos um esforço no sentido de terminarem a tarefa, as diversas tentativas mobilizadas e explicitadas anteriormente nos deixa claro essa questão.

4.1.3 Tarefa 3 – Composição de Figuras (Quebra Cabeça)

Todos os alunos compuseram os retângulos azul (duas peças) e verde (três peças), mas dois dos 12 alunos não conseguiram compor o retângulo amarelo (quatro peças). Oito alunos iniciaram pelas peças azuis, seguido da verde e depois a amarela e quatro alunos iniciaram pela montagem das peças verdes em seguida as amarelas e ao encontrarem dificuldades para montar o retângulo amarelo decidiram compor o retângulo com as peças azuis e depois voltaram para o amarelo.

A ilustração a seguir mostra a resolução do aluno 8, que concluiu essa tarefa em 20 minutos e montou os três retângulos em posição prototípica (com o lado de maior comprimento na horizontal).

Figura 49- Extrato do protocolo Aln°8T3²⁷



O protocolo Aln°5T3 a seguir, mostra a resolução do aluno 5, que utilizou a estratégia de montar o quebra cabeça em ordem crescente do que tinha menos peça ao de mais peças, e concluiu a tarefa em 15 minutos. Observa-se também que os retângulos montados por esse aluno estão em posição não prototípica.

Figura 50- Extrato do protocolo Aln°5T3

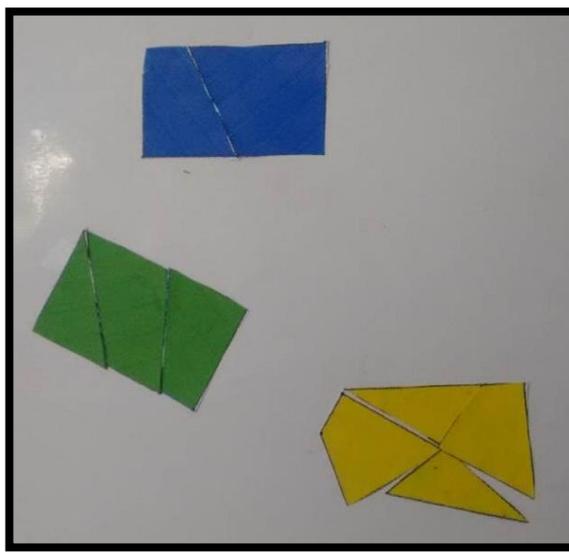


Resultados análogos a esses foram evidenciados na pesquisa do CREM (2007), na qual relata que os alunos para responder essa tarefa estabeleceram como critério as peças que apresentavam mais facilidade de montagem, selecionando-as em ordem crescente, ou seja, das que tinham menos peças até as de mais peças.

²⁷ Cada um dos alunos deveriam após completarem a composição dos retângulos colá-los na pastinha de papel que continha o Kit.

Quanto aos dois alunos que tiveram dificuldades em compor o retângulo com as peças amarelas, percebemos que os alunos testaram diversas hipóteses de justaposição dos lados das peças amarelas, sem sucesso. Concluíram que não era possível formar a figura sugerida. O extrato do protocolo de um desses alunos ilustra a solução final:

Figura 51 – Extrato do protocolo Aln^o4T4



A explicação da parte verbal, observações e conclusões expressadas pelos alunos evidenciaram a necessidade de intensificar o trabalho com esse tipo de tarefa para o desenvolvimento de habilidades que permitam o levantamento de possíveis hipóteses para resolução de determinados desafios propostos.

Evidenciamos nesta análise dois pontos importantes relacionados a esta tarefa: primeiro que são necessárias várias ações por tentativa e erro para chegar a completar os retângulos com as peças dadas de acordo com as cores, segundo que era necessário os alunos nessas ações mobilizar processo visual – manual (ver as figuras e de forma intuitiva movimentá-las a fim de chegar a uma resolução) e cognitivo – manual (elaborar hipóteses de resolução e a partir delas chegar a uma conclusão) para chegarem a concluir a tarefa (CREM, 2007).

Nem todos os alunos conseguiram de forma satisfatória concluir a montagem do quebra cabeça, entretanto mesmo que não tenham chegado ao final da tarefa, as estratégias utilizadas pelos alunos evidenciaram a mobilização das transformações isométricas do plano e a desmistificação da forma prototípica das figuras, cumprindo assim um dos objetivos desse dispositivo.

A tarefa permitiu também diagnosticar dificuldades no campo conceitual da geometria que podem justificar, pelo menos parcialmente, dificuldades que os alunos apresentam para resolver as tarefas sobre área.

4.1.4 Tarefa 4 – Composição de Figuras (Ladrilhagem)

Como antecipamos na análise a priori dessa tarefa, os alunos organizaram as peças de diferentes maneiras para compor o ladrilhamento dos retângulos desenhados sobre o plano.

Figura 53 - Extrato de protocolo Aln°7T4

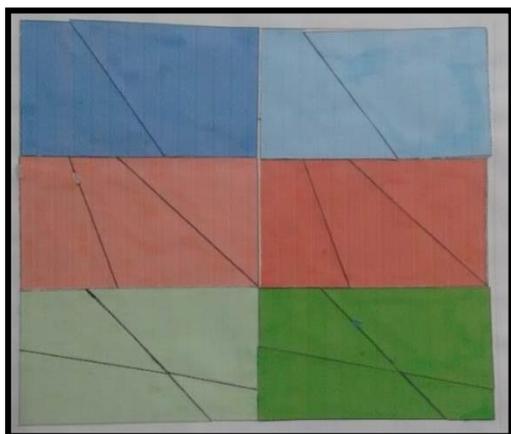
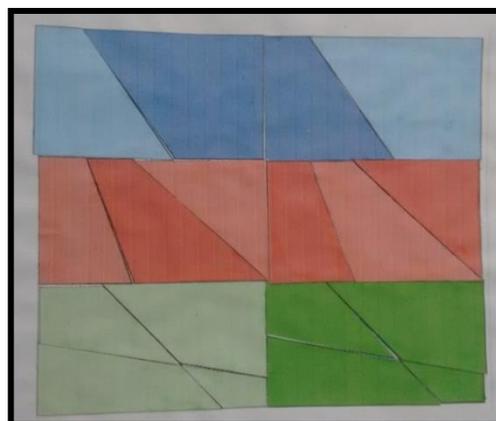
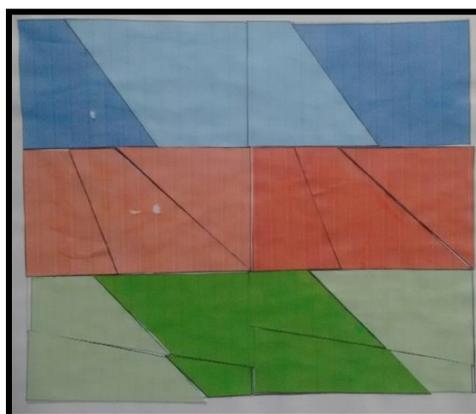


Figura 52 - Extrato de protocolo An°1T4



Os alunos apresentaram diferentes possibilidades de ladrilhamento com os conjuntos de peças, o extrato de protocolo Aln°7T4 ilustra a composição dos retângulos desenhados sobre o plano com as peças de mesma cor, diferentemente do extrato de protocolo Aln°11T4 no qual o aluno escolhe ladrilhar os retângulos com cores diferentes. O extrato de protocolo a seguir deixa visível outra configuração:

Figura 54- Extrato de protocolo Aln°9T4



Esse aluno também utiliza uma possibilidade diferente de ladrilhar compondo alguns dos retângulos com uma combinação de peças de cores diferentes. Essa possibilidade de ladrilhamento por meio da composição dos retângulos com peças de diferentes cores evidencia o processo de composição de figuras. Todos os alunos ao perceberem que haviam concluído o ladrilhamento, de forma a encaixar perfeitamente as peças sobre os retângulos, como era a última tarefa da primeira parte do dispositivo experimental, entregavam todo o material.

Todas as duplas mostraram por meio da resolução que sabiam responder a tarefa, fizeram adequadamente à composição. A dificuldade estava apenas relacionada em saber em qual parte encaixar os ladrilhos para pavimentar completamente.

4.1.5 Síntese Geral das Análises e Desempenho dos Alunos

Com relação às tarefas 1 e 2 desse ambiente que se tratava da reprodução de figuras, as quais estavam em jogo a familiarização com as malhas (quadriculada e pontilhado quadrado), pudemos identificar que na tarefa 1 todos os alunos conseguiram fazer uma correspondência de posição relativa entre a figura da malha quadriculada e em seguida reproduzir na malha em branco, porém na tarefa 2 que se tratava da reprodução de poliminós apenas nove alunos concluíram essa tarefa reproduzindo essas figuras na posição em que se encontravam, dentre eles (Aln°1T2, Aln°3T2, Aln°4T2, Aln°5T2, Aln°6T2, Aln°7T2, Aln°9T2, Aln°11T2 e Aln°12T2) os outros três (Aln°2T2, Aln°8T2 e Aln°10T2) não conseguiram reproduzir alguns dos poliminós respeitando o padrão estabelecido, apresentando dificuldades em estabelecer a correspondência de posição relativa entre os poliminós na malha e os que deveriam ser reproduzidos, como também na mobilização das transformações isométricas do plano no ambiente estático.

As tarefas 3 e 4 desse mesmo ambiente que se tratavam de composição de figuras e da utilização das transformações isométricas do plano para realizar as composições, verificamos que na tarefa 3 na qual foi solicitada a composição de retângulos com diferentes peças de um quebra cabeça, apenas dois alunos tiveram dificuldades em concluí-la devido a complexidade da composição do retângulo com um determinado conjunto de quatro peças (peças amarelas), dentre eles (Aln°4T3 e Aln°9T2) porém os outros dez (Aln°1T2, Aln°2T2, Aln°3T2, Aln°5T2, Aln°6T2, Aln°7T2, Aln°8T2, Aln°10T2, Aln°11T2 e Aln°12T2), conseguiram montar todos os retângulos completamente.

Nas resoluções dessas tarefas tanto os alunos que conseguiram concluir, como os que não chegaram a uma solução esperada compondo todos os retângulos utilizando os conjuntos de peças dadas, verificamos a utilização das transformações isométricas do plano de forma dinâmica, ou seja, os alunos puderam aplicar procedimentos de rotação, translação e reflexão com as diferentes peças do quebra cabeça para chegarem as soluções. Essa tarefa também permitiu aos alunos elencar diferentes hipóteses, enquanto outros apenas agiam intuitivamente, para compor os retângulos com as peças dadas.

Com relação à tarefa 4 de composição de um conjunto de retângulo, os alunos não apresentaram dificuldades, apenas ao verificarem que uma determinada peça não se encaixava perfeitamente, tentavam novamente utilizando outra, até completarem a pavimentação, assim todos os alunos concluíram essa tarefa. Além do trabalho com a composição, observamos também nessa tarefa o processo de ladrilhamento efetivo dos retângulos.

Essa etapa se mostrou importante e permitiu aos alunos a familiarização com diferentes tipos de recursos dentre eles: o uso das malhas quadriculadas e o pontilhado quadrado e conhecimentos relevantes a serem reinvestidos nas tarefas sobre área no Dispositivo Central, dentre esses conhecimentos destacamos: as repetições de figuras, reprodução de figuras, as transformações isométricas do plano, a composição de figuras e implicitamente na tarefa 4 o processo de ladrilhagem de figuras/composição de figuras, todos esses conhecimentos serão importantes para que os alunos respondam as tarefas de comparação de área, medida de área utilizando diferentes ladrilhos, e nas situações de produção de superfície, na qual tanto o uso das malhas poderá ser um importante recurso para produzir superfície de área maior, menor ou igual a área de uma superfície dada.

4.2 TAREFAS NO AMBIENTE DIGITAL – PRIMEIRA PARTE

Nesse tópico são apresentadas as estratégias mobilizadas pelos alunos para responderem as tarefas da etapa de familiarização que teve como objetivo familiarizar os alunos com o *Apprenti Géomètre 2*.

Participaram dessas atividades 14 alunos, dos quais 12 comporiam o Dispositivo Central. Para caracterizar os extratos de protocolos desses alunos vamos denominar as duplas por DL1AG2 (Dupla 1 *Apprenti Geomètre 2*) e analogamente as demais duplas.

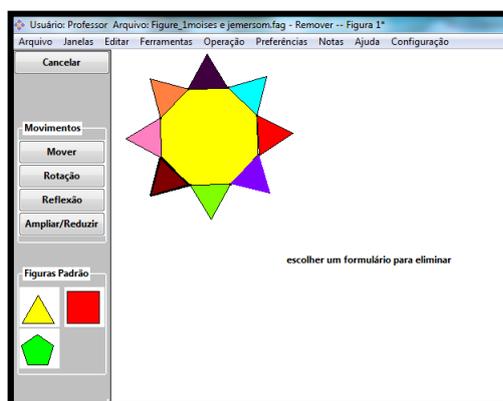
As duplas foram compostas por afinidades dos próprios alunos também nessa etapa de familiarização.

Como já foi dito, foram realizados dois encontros em um mesmo dia, sendo o primeiro instrutivo (de manhã) e o segundo composto por tarefas a serem realizadas em duplas pelos alunos (à tarde).

No encontro da manhã, os alunos acompanharam tudo o que estava sendo exposto, reproduzindo em cada um dos seus computadores (um computador para cada dupla), prestando atenção nos comandos que executávamos e reproduziam o que aparecia na interface do *Apprenti Géomètre 2* a partir da projeção do data show. Quando os alunos tinham dúvidas sobre procedimentos e menus, o pesquisador se aproximava da dupla e dava explicações complementares. Um dos aspectos que suscitou dúvidas foi o processo de decomposição de figuras, utilizando a ferramenta “*decompor*”.

Cabe ressaltar que ainda no encontro de instrução, alguns dos alunos já começaram a construir com autonomia figuras utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* como mostra o extrato do protocolo a seguir:

Figura 55- Extrato de Protocolo DL5AG 2



Esse é um extrato do protocolo da dupla de alunos DL5AG2 que decidiu representar a figura de um sol no primeiro encontro da etapa de familiarização com o *Apprenti Géomètre 2*. Para isso escolheram o octógono e o triângulo equilátero do menu *Figuras padrão*, duplicaram os triângulos sete vezes utilizando a ferramenta *duplicar* do menu *Operação*, em seguida realizaram rotações e moveram os triângulos até formarem os raios do sol.

Não havíamos previsto que alguma dupla pudesse no momento em que estivéssemos apresentado as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, construir alguma figura, ou mesmo selecionar menus, para realizar procedimentos, diferente dos comandos que estavam sendo explicitados.

Os 14 alunos participaram de forma satisfatória realizando todos os comandos dados nesse primeiro encontro, trabalhando de forma colaborativa, ora um aluno da dupla utilizava

as ferramentas do software, ora o outro, de forma que todos pudessem se envolver para realizar o que estava sendo proposto pelo pesquisador na exposição dos slides, referente aos menus e ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.

4.3 TAREFAS NO AMBIENTE DIGITAL- SEGUNDA PARTE

Como já foi dito, os 14 sujeitos dispuseram de aproximadamente 3 horas e meia para resolver em duplas no *Apprenti Géomètre 2* cinco tarefas com o objetivo de familiarizá-los com os principais menus e ferramentas do software e favorecer o desenvolvimento de habilidades úteis para as tarefas do dispositivo central. Não foi estipulado tempo para resolução de cada tarefa, apenas orientamos os alunos quanto ao término das tarefas até às 17h. A captura da tela dos computadores nos permitiu saber quantos minutos cada dupla levou para resolver e concluir cada tarefa.

De forma geral, notamos a curiosidade em explorar o *Apprenti Géomètre 2*, a empolgação e o empenho de todos para completar cada tarefa. Apesar de não terem experiência prévia com software de geometria, os alunos não apresentaram grandes dificuldades em manipular as ferramentas do software. As gravações em áudio mostraram também que o uso do software provocava ajustes no vocabulário empregado pelos alunos. Por exemplo, os alunos 1 e 2 da DL5AG2 na resolução da tarefa 3 que consistia na reprodução de um barco socializaram o seguinte:

Aluno 1: “*para encaixar esse triângulo tu tens que girar*”;

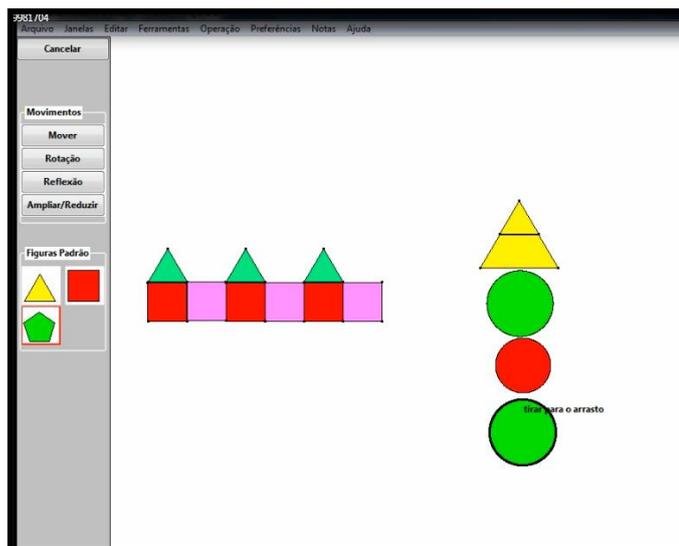
Aluno 2: “*não é girar não é fazer uma rotação*”

Eles se referiam ao encaixe de um triângulo isósceles do *Jogo de base*: ‘Quadrado’ do menu *Figuras Padrão* que para completar uma das partes do barco precisava da aplicação de uma rotação central nesse triângulo isósceles.

4.3.1 Tarefa 1- Exploração Livre do Software

Todas as duplas construíram figuras utilizando as ferramentas e os menus do *Apprenti Géomètre 2*. Apresentaremos a seguir alguns dos extratos de protocolos, explicitando menus e ferramentas utilizados nessa tarefa:

Figura 56 - Extrato do protocolo DL1AG2

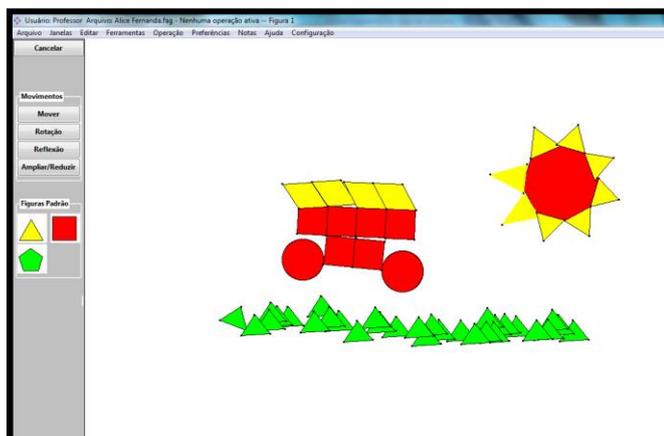


Essa dupla escolheu na janela de abertura do software o menu “A” que contém em destaque o menu *Figuras Padrão* e seus *Jogos de base*: quadrado, triângulo e pentágono. Pelo processo de justaposição de peças, tentaram montar a parede de um muro de um castelo com quadrados e triângulos. Como queriam montar um palhaço, para confecção do chapéu utilizaram o trapézio do *Jogo de Base* “Triângulo” e um triângulo equilátero desse mesmo jogo. Para o corpo do palhaço utilizaram círculos do *Jogo de Base* “Pentágono”. Como o menu “A” não possui uma ferramenta de ampliação ou redução de figuras (individualmente)²⁸, a dupla não conseguiu montar o nariz do palhaço, pois era necessário reduzir o círculo.

A dupla DL4AG2 utilizou o menu “A” e as figuras do menu “Figuras Padrão” para montar um carro, um sol e um gramado como ilustra o extrato de protocolo a seguir:

²⁸ A opção de Ampliar e Reduzir figuras não permite realizar esses procedimentos apenas em uma única figura reproduzida na área de trabalho do software, ele tem a função de Ampliar e Reduzir todas as figuras de uma única vez.

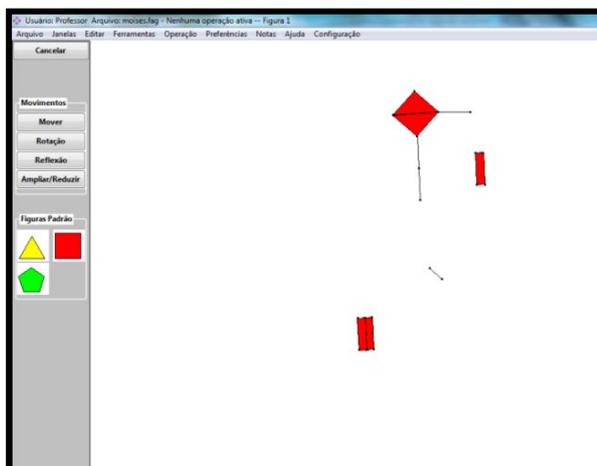
Figura 57 - Extrato do protocolo DL4AG2



Essa dupla escolheu do menu Figuras Padrão 4 paralelogramos, 6 quadrados, 31 triângulos equiláteros para representar a grama, 8 triângulos isósceles para compor os raios do sol, e um octógono para representar o formato arredondado do sol e 2 discos para formar os pneus de um carro.

Observamos que para desenvolver essa figura foi necessário escolher as peças do menu Figuras Padrão e aplicar alguns movimentos (rotação e translação) para encaixá-las. Para isso a dupla utilizou a ferramenta mover. Os alunos da dupla a seguir tentaram construir uma pipa. Para obterem retângulos, utilizaram processos de decomposição do quadrado do menu “Figuras Padrão”. Utilizaram a ferramenta dividir do menu operação dividiram dois segmentos que formam os lados do quadrado, criando um ponto médio em cada segmento, ligaram esses pontos por meio da ferramenta decompor do menu operação, construindo assim retângulos pela divisão do quadrado. Eles também aplicaram uma rotação central no quadrado conforme protocolo seguir:

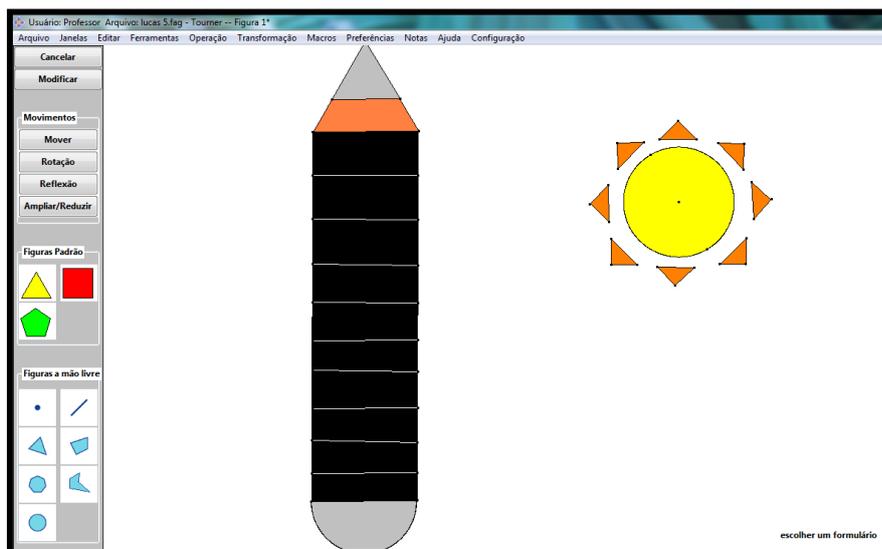
Figura 58 - Extrato do Protocolo DL7AG2



Observando a figura acima identificamos que além desses alunos decomporem o quadrado para obterem retângulos e assim construir a linha da pipa, aplicaram também uma rotação central no quadrado de forma de deixa-lo em uma posição não prototípica, que remete na cultura escolar à representação de um losango (parte superior da pipa).

Finalmente, destacamos o extrato do protocolo da dupla DL6AG2 que utilizou o menu AB, e construiu um lápis e um sol.

Figura 59 - Extrato do protocolo DL6AG2



Esse extrato mostra a escolha da dupla pela opção de menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do software, e incorpora o conjunto de menus *Figuras Padrão* e *Figuras a mão livre*. Para construírem o lápis utilizaram o retângulo da opção *Quadriláteros* do menu *Figuras a mão livre* e com três clique definiram o retângulo na área de trabalho do software, em seguida construíram um círculo, definido por dois pontos, e enviaram para trás do retângulo, depois escolheram a opção triângulo desse mesmo menu e construíram a base de acordo com o lado do retângulo para representar a primeira parte da ponta do lápis, em seguida escolheram o triângulo isósceles ainda desse menu, e definiram um triângulo coincidindo um dos vértices do outro já formado. Para ilustrar o lápis com segmentos foram desenhando retângulos.

O sol por sua vez foi construído com o círculo do menu *Figuras a mão livre* e os raios com pequenos triângulos isósceles do menu *Figuras Padrão* da opção *Jogo de Base: Quadrado*.

Essa dupla para realizar essa construção pode ter se inspirado no desenho do lápis da tarefa 4 desta etapa de familiarização, pois havíamos entregue no início da realização dessa etapa, todo o conjunto contendo as cinco tarefas em uma ficha de papel.

Os extratos de protocolos evidenciados nessas análises foram selecionados como os mais representativos dos participantes, pois queríamos apresentar as escolhas dos principais menus pelos alunos e as ferramentas do software que foram mobilizadas durante o processo de exploração. A tabela a seguir evidencia as principais ferramentas e menus escolhidos nessa tarefa.

Tabela 1- Menus e Ferramentas mobilizados na tarefa 1

Menus e Ferramentas mobilizados na tarefa 1	Total de duplas
Menu A	6
Menu AB	1
Figuras Padrão	7
Figuras Padrão e Figuras a mão livre	1
Ferramenta Mover	7
Ferramenta Rotação	5
Ferramenta Decompor	1
Ferramenta Duplicar	4

Todas as sete duplas que participaram da etapa de familiarização realizaram a tarefa de forma satisfatória, ou seja, mobilizaram diferentes ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, para construir figuras conforme solicitado na tarefa 1.

4.3.2 Tarefa 2- Complementação de Figuras (Trem)

Esta tarefa tinha como objetivo permitir que os alunos explorassem o menu “A” do *Apprenti Géomètre 2* para se familiarizarem com as principais ferramentas que compõe esse menu e suas funções. Os alunos precisariam observar dois trens em uma ficha de papel - um completo (montado com várias figuras geométricas do menu *Figuras Padrão* do *Apprenti Géomètre 2*) e outro incompleto. A tarefa consistia em completar o trem quase formado, sendo necessário mobilizar poucas ferramentas do menu A.

Essa tarefa já estava pré-definida na área de trabalho dos computadores no laboratório de informática. Todas as duplas conseguiram sem a ajuda do pesquisador ler o enunciado da tarefa, encontrar o arquivo na área de trabalho e executar os comandos da forma que se pedia, ou seja, dar um clique duplo na **Fig. 2** (nome do arquivo) disponível na pasta com o nome

familiarização com o *Apprenti Géomètre 2* nos computadores, em seguida selecionar a opção “**aluno**” digitar seus nomes, escolher o menu “A” e clicar em ok.

Nessa tarefa as duplas utilizaram estratégias similares para completarem o trem composto por 10 quadrados, 3 triângulos retângulos e 1 pequeno triângulo isósceles do *Jogo de Base ‘Quadrado’* do menu *Figuras Padrão* e 8 pequenos círculos do *Jogo de Base ‘Triângulos’*. As duplas utilizaram diferentes ações para resolver essa tarefa, dentre elas destacamos as seguintes:

Quadro 5- Correspondência entre as ações realizadas e as duplas na tarefa 2

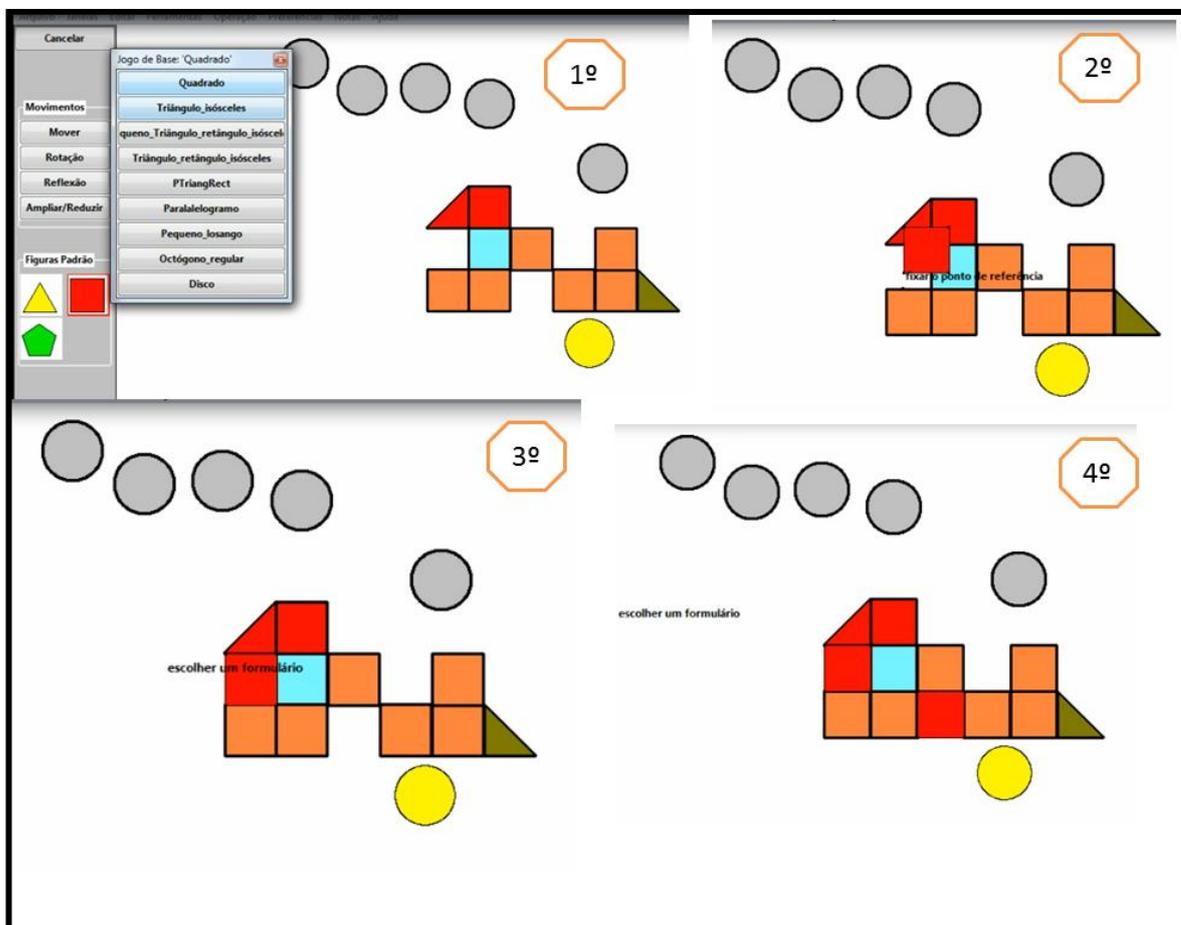
Ações realizadas na tarefa 2	Duplas
Duplicar Figuras	DL2AG2, DL4AG2
Comparar Figuras	Todas as Duplas
Decompor Figuras	DL2AG2 e DL4AG2
Rotação de figuras	Todas as Duplas
Reflexão de figuras	DL7AG2
Mover figuras	Todas as Duplas

As categorias elencadas no quadro 4 foram criadas a partir das análises dos vídeos da captura de tela dos computadores das duplas de alunos que participaram da pesquisa e indicam as principais ações realizadas pelas duplas. Explicitaremos a seguir um esboço do modo como as duplas resolveram essa tarefa. .

Todas as duplas iniciaram a tarefa completando as lacunas do trem com quadrados. Cinco duplas (DL1AG2, DL3AG2, DL5AG2, DL6AG2 e DL7AG2) escolheram o quadrado do *Jogo de Base: ‘Quadrado’* do menu *Figuras Padrão* para preencher as referidas lacunas e as outras duas duplas duplicaram os quadrados já existentes no trem com a ferramenta *duplicar do menu operação*. As figuras a seguir ilustram os dois processos²⁹.

²⁹ Todas as figuras que apresentam os passos das construções dos alunos, foram obtidas com **print screens** da captura da tela da interface do *Apprenti Géomètre 2* gravadas por meio do software a tube catcher durante a realização das tarefas desta etapa de familiarização.

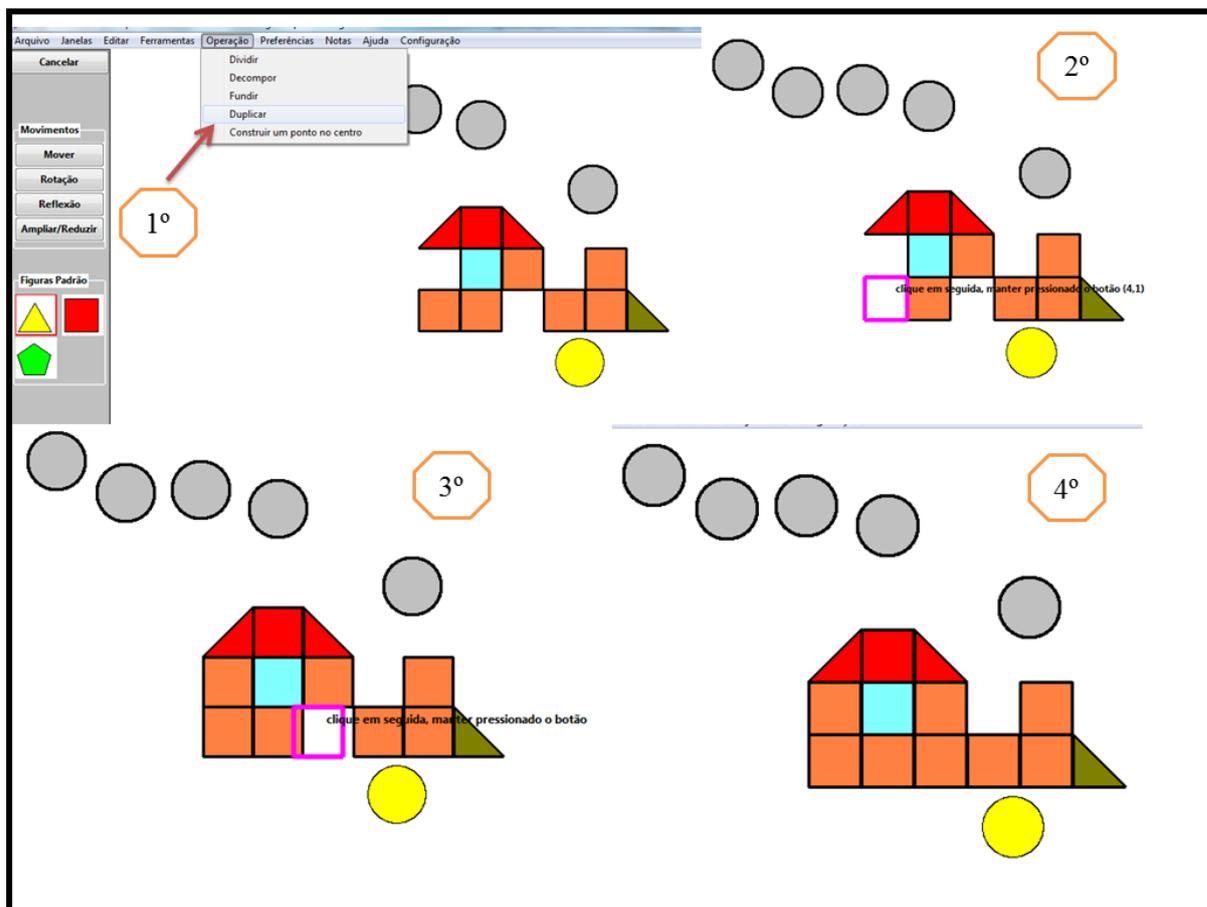
Figura 60 – 1º Processo: Extrato do Protocolo DL6AG2



A figura anterior ilustra o procedimento adotado pelas cinco duplas que utilizaram o quadrado do *Jogo de Base 'Quadrado'* do menu *Figuras Padrão*. Dessas, duas repetiram a ação de voltar ao menu *Figuras Padrão* e preencheram o trem diretamente nas lacunas, sem necessariamente utilizar a ferramenta mover, as outras aproveitaram que o quadrado já tinha sido selecionado e deram três cliques com o mouse na área de trabalho do *Apprenti Géomètre 2* reproduzindo-os e movendo-os para completar as lacunas do trem. Uma vez acionada a ferramenta “*Quadrado*” podem ser reproduzidos na área de trabalho do software, quantos forem necessários, apenas com um clique do mouse. Por último coloriram os quadrados para deixá-los com as mesmas cores dos demais.

Outra forma de completarem essa parte da tarefa foi a duplicação dos quadrados já existentes no trem, empregada pelas duplas DL2AG2 e DL3AG2, a qual é ilustrada a seguir.

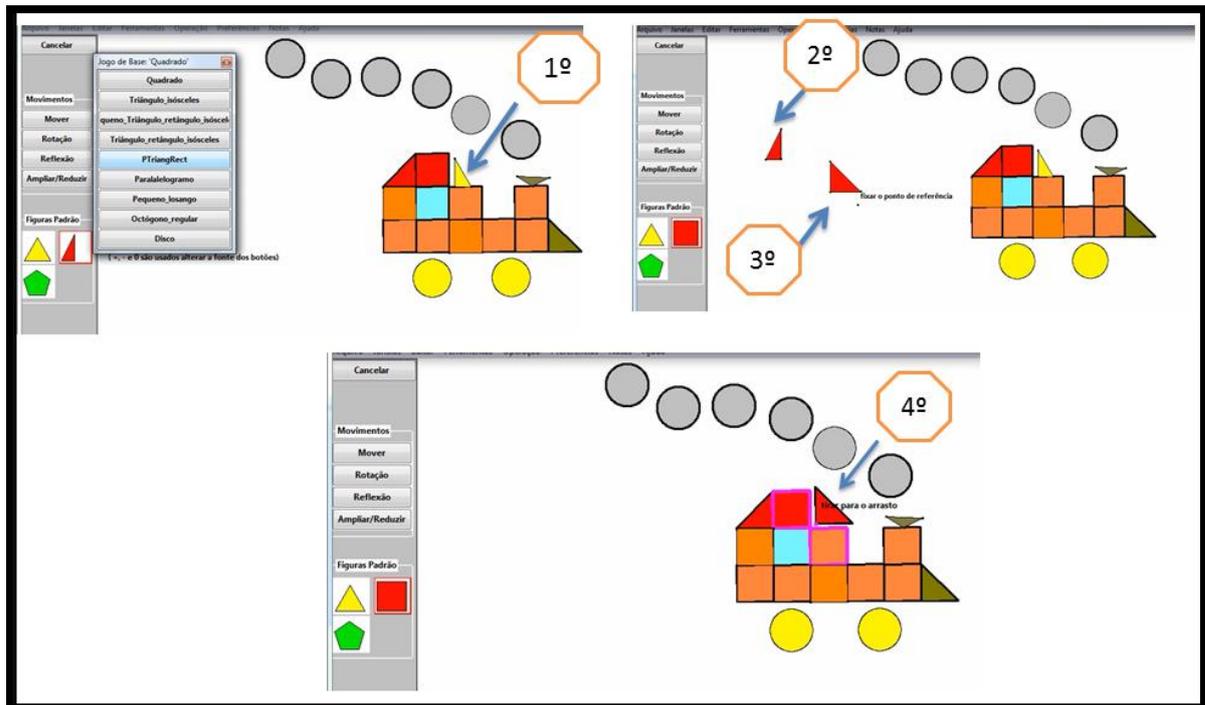
Figura 61- 2º Processo: Extrato do Protocolo DL2AG2



Para duplicar os quadrados já existentes, utilizaram a ferramenta *duplicar do menu operação*, selecionaram a figura que queriam duplicar, arrastando-a até completar o trem.

Algumas duplas comparavam as figuras existentes no trem com as que eram encontradas no *menu Figuras Padrão*. Por vezes escolhiam uma determinada figura desse mesmo menu e inseriam no trem, quando as figuras não se encaixavam perfeitamente, voltavam a procurar até encontrarem uma correspondente à lacuna.

Figura 62 - Extrato do Protocolo DL3AG2

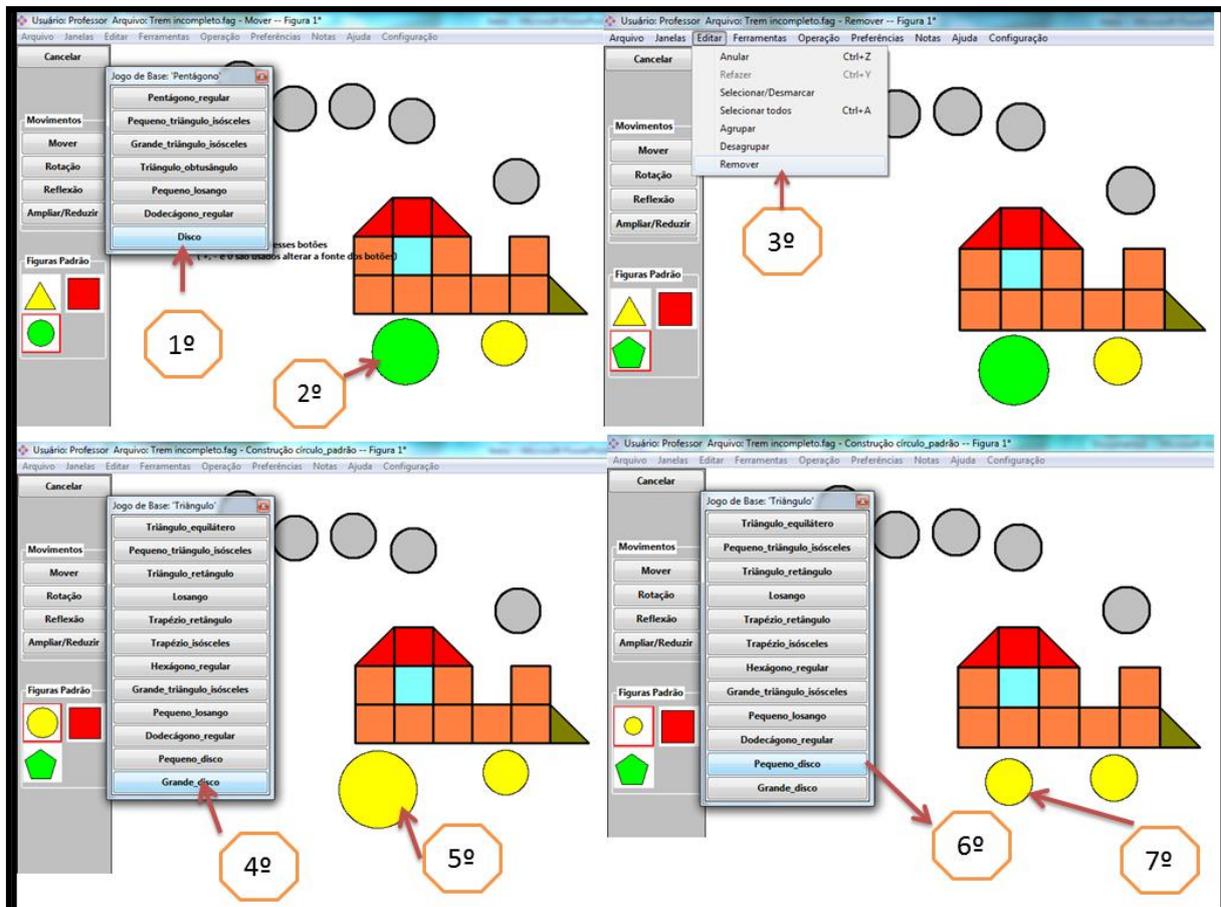


O extrato do protocolo DL3AG2 da figura 8 mostra em alguns passos os procedimentos utilizados por esses alunos para completar a parte superior do trem formada por um triângulo retângulo isósceles do *Jogo de Base: 'Quadrado'*.

As duplas DL1AG2, DL3AG2, DL6AG2, DL7AG2, utilizaram procedimentos semelhantes ao ilustrado anteriormente, ou seja, por tentativa, encontraram o triângulo que caberia perfeitamente nesta lacuna. As duplas DL2AG2 e DL4AG2 duplicaram o triângulo retângulo existente, em seguida aplicaram uma reflexão, e por fim encaixaram na parte superior do trem completando essa parte da tarefa.

Nessa tarefa os alunos também utilizaram processos de comparação de figuras. Verificamos esses procedimentos ao inserirem os círculos para completarem as engrenagens do trem e a fumaça. Quando os alunos identificavam que os tamanhos dos círculos que haviam inserido eram diferentes dos que já existia no trem, voltavam ao menu *Figuras Padrão* para procurar um de mesmo tamanho. O único círculo que completava essas partes do trem era o “Pequeno círculo” (pequeno disco) do *Jogo de Base: Triângulos*.

Figura 63-Extrato de Protocolo DL5AG2



Essa dupla realizou vários procedimentos até chegar ao *Pequeno círculo do Jogo de Base: 'Triângulos'*, que correspondiam aos círculos já existentes. Primeiro levaram à tela o *círculo do Jogo de Base: 'Pentágono'*, ao verificarem que não era do mesmo tamanho do que já existia no trem, removeram e em seguida escolheram o *grande círculo do Jogo de Base: 'Triângulos'*, como este era bem maior removeu novamente e inseriu o pequeno círculo desse mesmo Jogo. Após terem chegado à conclusão que este último tinha o mesmo tamanho, moveram-no e encaixaram na parte de trás do trem.

Com relação à fumaça, todas as duplas após encontrarem os círculos correspondentes às engrenagens, ora duplicavam-no e completavam a parte da fumaça, ora recorriam ao *Jogo de Base 'Triângulos'* e escolhiam novamente o *Pequeno círculo* completando a parte da fumaça que faltava.

Quanto à chaminé, observamos que os alunos apresentaram dificuldades em saber qual o tipo de triângulo formavam-na, como ilustram os extratos dos protocolos a seguir:

Figura 65 - Extrato de protocolo DL7AG2

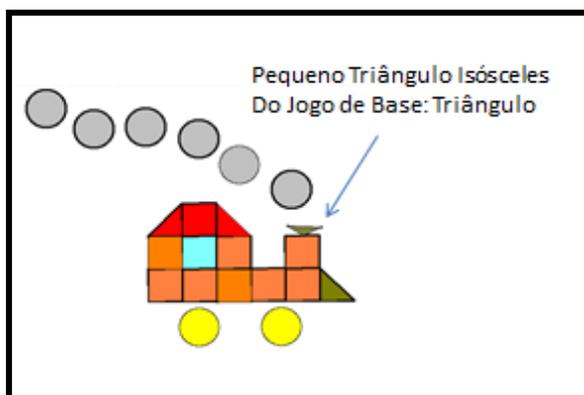
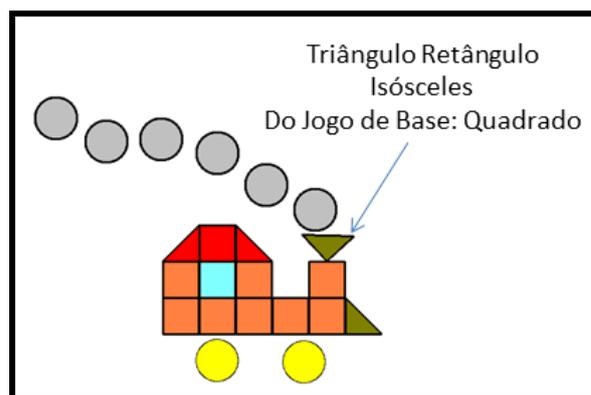


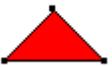
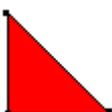
Figura 64 - Extrato de Protocolo DL1AG2



Verificamos nesta tarefa que os alunos têm bastante dificuldade em reconhecer os tipos de figuras mais comuns, nesse caso, os tipos de triângulos quanto aos lados (isósceles, equilátero e escaleno).

O quadro a seguir mostra a escolha de diferentes triângulos pelas duplas para compor a chaminé do trem.

Quadro 6-Diferentes tipos de triângulos

Tipos de Triângulos utilizados na chaminé	Duplas
Figuras Padrão - Jogo de Base 'Quadrado': Pequeno Triângulo Retângulo Isósceles 	DL4AG2, DL6AG2
Figuras Padrão - Jogo de Base 'Quadrado': Triângulo Retângulo Isósceles 	DL1AG2
Figuras Padrão - Jogo de Base 'Triângulos': Pequeno Triângulo Isósceles 	DL2AG2, DL3AG2, DL5AG2, DL7AG2

Os tipos de triângulos presentes no menu “*Figuras Padrão*” se diferenciam de acordo com os *Jogos de Base* os quais são constituídos por meio de decomposições e recomposições

de figuras a partir do quadrado, do triângulo e do pentágono. A chaminé era composta pelo *pequeno triângulo retângulo isósceles do Jogo de Base: 'Quadrado'*, assim apenas DL4AG2 e DL6AG2, acertaram essa parte do trem.

Todas as sete duplas concluíram a tarefa, mas apenas DL4AG2 e DL6AG2, completaram o trem corretamente com todas as peças que faltavam de acordo com o trem completo. De uma forma geral, o objetivo dessa tarefa, ou seja, provocar a mobilização das principais ferramentas do menu A (duplicar, rotação, mover, decompor, reflexão, remover e colorir) foi atingido.

4.3.3 Tarefa 3- Reprodução de Figuras (Barco)

Essa tarefa consistiu na construção de um barco formado por cinco quadrados, seis triângulos retângulos isósceles do *Jogo de Base: 'Quadrado'* e dez retângulos que foram construídos pelo pesquisador no *Apprenti Géomètre 2* a partir da decomposição de um quadrado desse mesmo *Jogo de Base*. Seu objetivo era permitir que os alunos explorassem as ferramentas *decompor* e *duplicar* do menu *operação* e as ferramentas *mover*, *rotação* e *reflexão* do menu *movimentos*. Essas ações são relevantes para que os alunos respondam com sucesso as tarefas de comparação de área de figuras planas do Dispositivo Central. O fato de exigir que os alunos utilizem a decomposição de figuras não apenas pelas diagonais torna essa tarefa mais complexa que as anteriores.

Todas as duplas iniciaram a tarefa realizando os comandos solicitados na ficha. Assim tivemos a oportunidade de analisar o histórico das ações de cada uma no software, para sabermos como haviam respondido a tarefa. Capturamos a tela do computador utilizando o software de captura de tela *a tube Catcher*, que nos permitiu observar de forma mais precisa as ações realizadas pelos alunos.

Como sinalizado na análise a priori, as principais estratégias mobilizadas nesta tarefa foram: verificar as figuras que compunham o barco, realizando uma leitura prévia dessas figuras reproduzindo-as na área de trabalho do software; inserir as figuras que completavam o barco com cliques nos sub menus do “*Jogo de Base*” e na área de trabalho do *Apprenti Géomètre 2*, para duplicá-las com a ferramenta *duplicar* do menu *operação*, até terem a quantidade suficiente de figuras (quadrados e triângulos retângulos isósceles) para montar cada parte do barco, para então iniciar a construção.

Para completar o barco era preciso também, além do quadrado e do triângulo retângulo isósceles do menu “*Figura Padrão*” do *Jogo de Base 'Quadrado'*, dez retângulos idênticos.

Nessa parte os alunos apresentaram dificuldades, uma vez que, não há retângulos em nenhum dos *Jogos de Base* desses sub menus, ou seja, os alunos procuravam várias vezes em todos os *Jogos de Base*, analisando figura por figura para verificar se algumas daqueles representava o retângulo.

Essa análise nos permitiu identificar que os alunos utilizavam no decorrer das tarefas várias peças desses jogos, mas não compreendiam a lógica de cada uma das figuras que compunham esses sub menus, estarem agrupadas nos *Jogos de Base*: ‘*Quadrado*’, ‘*Triângulo*’ ou ‘*Pentágono*’.

Esse *Jogo de Base* segundo o CREM (2014) compreende três famílias de figuras, designada pelo nome de um polígono regular representado por um quadrado, um triângulo equilátero e um pentágono.

Ainda segundo esse grupo de pesquisa cada família tem um número limitado de figuras, que são construídas a partir da decomposição, recomposição e fusão dos polígonos regulares que simbolizam cada Jogo, ou seja, as combinações interessantes que podem surgir da decomposição, recomposição e fusão dessas figuras, por exemplo, a família do quadrado do *Jogo de Base*: ‘*Quadrado*’, uma das figuras que compõem essa família é um triângulo isósceles formado pela decomposição desse quadrado pela diagonal³⁰.

Mesmo que os alunos não tenham compreendido a lógica do *Jogo de Base* do software, o que nos chama atenção nessas análises, são as estratégias que eles utilizaram ao não encontrarem os retângulos, 10 duplas recorreram ao processo de decomposição, ou seja, procuravam uma figura no *Jogo de Base* sem solicitar ajuda do pesquisador, que por meio da decomposição pela diagonal ou não, pudessem formar um retângulo, as outras 4 duplas solicitaram ajuda ao pesquisador de como poderiam decompor uma figura sem necessariamente ser pela diagonal.

Nesse caso inserimos uma figura na tela e mostramos como decompor sem necessariamente ser pela diagonal, ou seja, explicitamos que para realizar outro tipo de decomposição era preciso dividir os segmentos da figura por meio da ferramenta *dividir* do menu *Operação* e após esses procedimentos recorrer a ferramenta *decompor* desse mesmo menu e seguir os procedimentos que eles já estavam familiarizados.

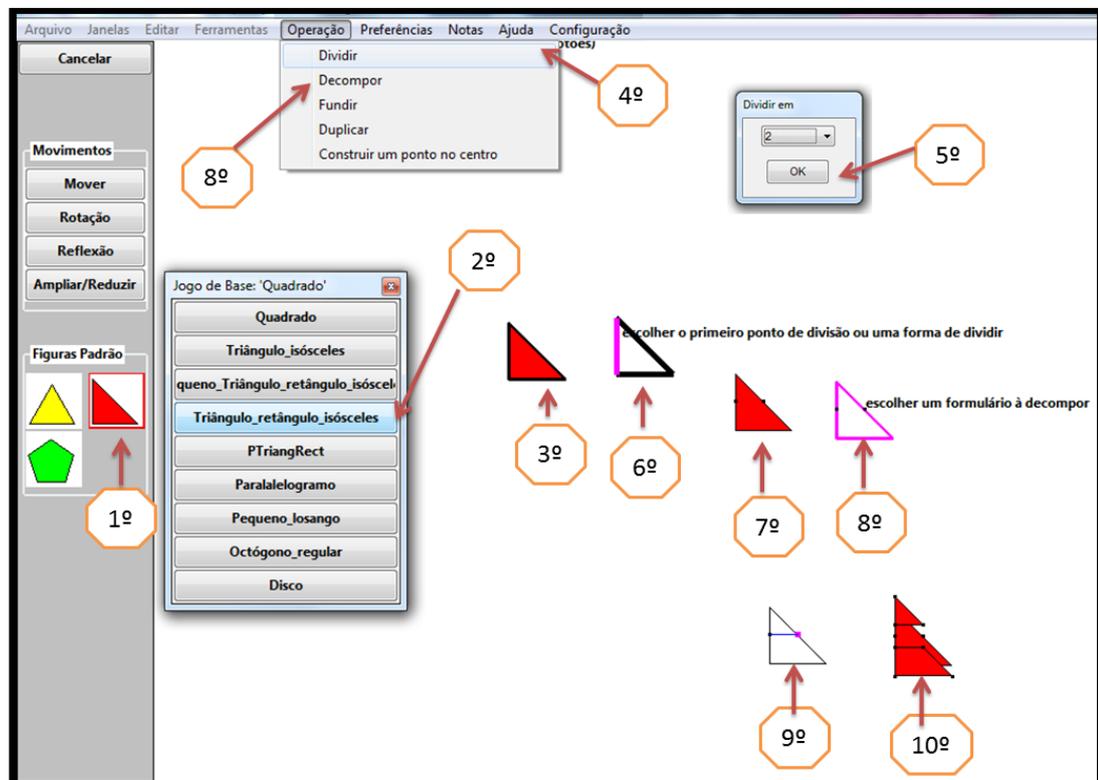
Após algumas tentativas, chegavam à conclusão que decompondo o quadrado pela vertical ou horizontal, obteriam retângulos.

³⁰ A apresentação das figuras que compõem os *Jogos de Base*: quadrado, triângulo e pentágono estão presentes no Apêndice A.

Nem todas as duplas iniciaram a construção do barco procurando pelo retângulo, notamos que oito duplas iniciam pelas figuras mais familiares dos Jogos de Base, tais como: o quadrado e o triângulo retângulo isósceles, para em seguida iniciarem a busca pelo retângulo, três duplas iniciaram a tarefa procurando diretamente o retângulo, como não encontravam, recorriam às figuras mais familiares supracitadas. Apenas uma dupla iniciou a tarefa procurando o retângulo e tentando montar essa peça pela decomposição de outra.

O extrato de protocolo a seguir, ilustra em alguns passos as estratégias utilizadas pela dupla DL1AG2 para decompor o triângulo retângulo isósceles.

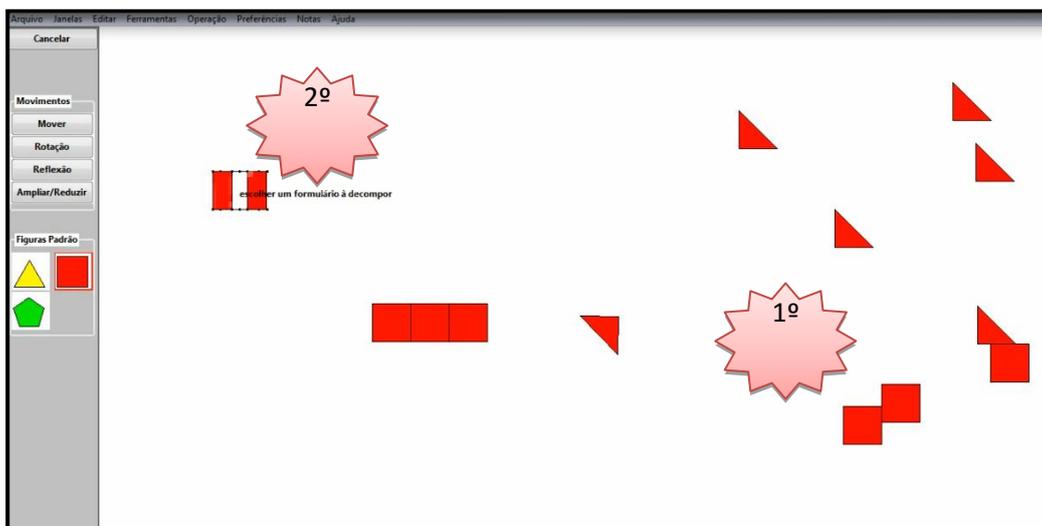
Figura 66 - Extrato do protocolo de passos para decompor um triângulo da dupla DL1AG2



Observamos nesse extrato de protocolo (figura 66) os passos utilizados e agrupados para explicitar a estratégia da dupla DL1AG2 para obter um retângulo, como não conseguiram com esse tipo de estratégia, recorreram ao Jogo de Base para inserir as demais figuras necessárias para construir o barco. Assim inseriram na área de trabalho do *Apprenti Géomètre 2*, cinco quadrados e seis triângulos retângulo isósceles, deixando-os em um lugar reservado da tela. Após esses procedimentos, ainda recorreram aos *Jogos de Base* na intenção de encontrar o retângulo em um dos Jogos novamente, não encontrando, decidiram escolher o quadrado e decompô-lo.

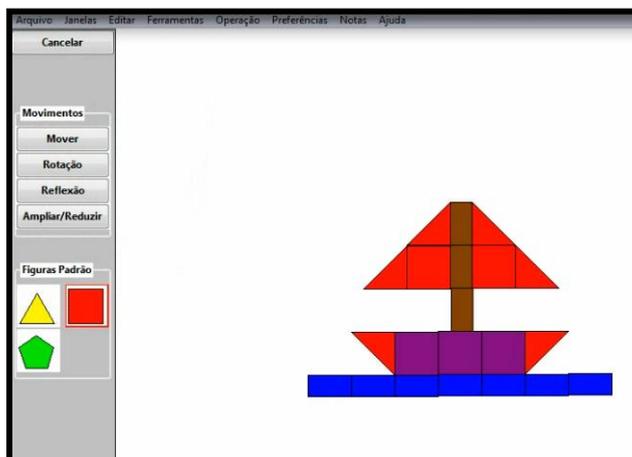
Entretanto essa escolha só ocorreu depois de terem refletido como poderiam formar esse retângulo, qual figura poderiam encontrar que ao decompor de alguma forma permitisse obter um retângulo. O extrato do protocolo DL1AG2 apresenta a segunda etapa da estratégia dessa dupla para montar o barco.

Figura 67 – Organização para montar o barco



Após terem decomposto o quadrado em dois retângulos, duplicaram-no na intenção de completar a construção das partes do barco que dependiam dessa figura. Finalizaram essa construção aplicando rotações e reflexões nas figuras que já se encontravam definidas na área de trabalho do software para que ficassem na mesma posição do barco da tarefa 3, dessa forma concluíram satisfatoriamente essa tarefa.

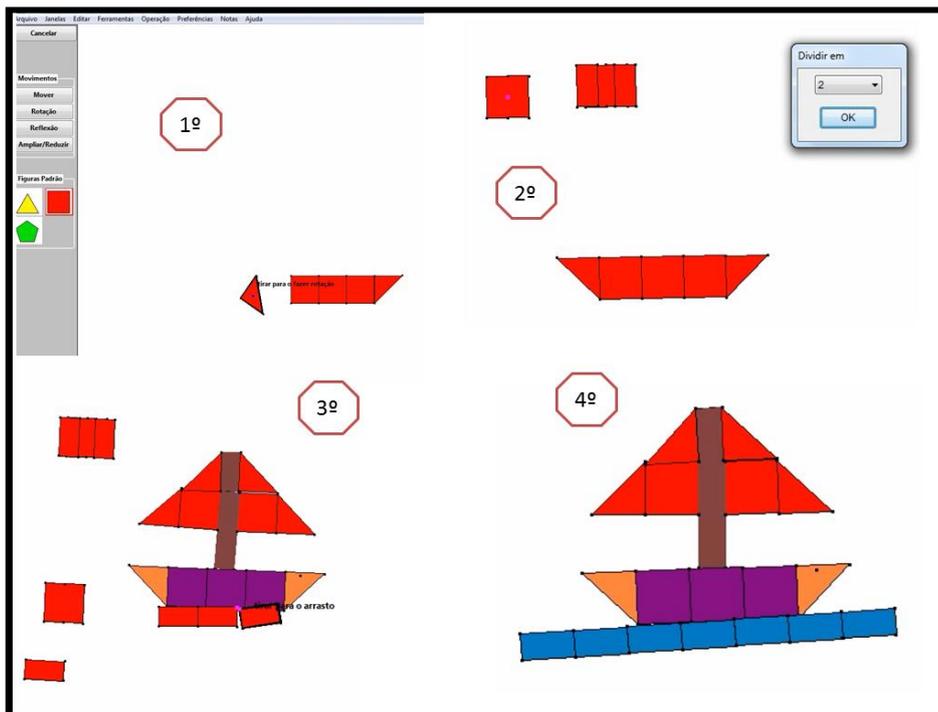
Figura 68 - tarefa finalizada extrato de protocolo da DL1AG2



A figura 68 apresenta a tarefa concluída pela dupla DL1AG2, notamos que esses alunos se preocuparam também que a figura tivesse as mesmas cores que o barco da tarefa.

A dupla DL2AG2 iniciou a atividade com uma estratégia diferente da dupla anterior, o agrupamento do protocolo dos passos que essa dupla utilizou para responder a tarefa mostra essas estratégias.

Figura 69 - Extrato do protocolo DL2AG2



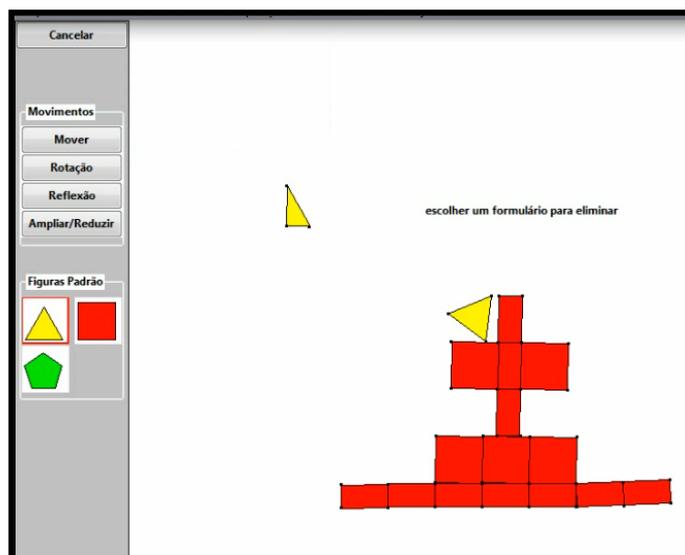
Esse extrato mostra que os alunos iniciaram a tarefa inserindo as figuras mais comuns, ou seja, o quadrado e o triângulo retângulo isósceles do *Jogo de Base: 'Quadrado'*, completando assim uma das partes do barco, o segundo passo apresenta a decomposição do quadrado para a construção do mastro, a terceira apresenta a aplicação do procedimento de rotação do retângulo para concluir a tarefa compondo a parte sobre a qual está o barco, por último temos a figura completa. Mesmo que a figura não tenha ficado na mesma posição que a da ficha da referida tarefa, os alunos mobilizaram as ferramentas e estratégias necessárias para concluí-la.

De forma geral, todas as duplas para realizar essa tarefa precisaram mobilizar o processo de decomposição aplicado ao quadrado, na horizontal ou vertical e não mais de uma forma habitual no *Apprenti Géomètre 2* na qual essa decomposição em duas partes iguais acontecia pela diagonal do quadrado.

Para encaixar as figuras de modo a completar o barco, também foi necessário aplicar movimentos de rotação ou reflexão e translação, uma vez que, as posições que as figuras se encontravam no barco, diferiam da posição das figuras do *Jogo de Base: 'Quadrado'*, ao clicarmos, por exemplo, em um triângulo retângulo isósceles desse *Jogo de Base*, ao inserimos na tela, apareciam em uma posição prototípica, sendo necessário aplicar movimentos de rotação e/ou reflexão, para encaixá-los perfeitamente e assim completar o barco. Essa ação e aplicação dos movimentos desmistificou a posição prototípica em que se encontravam as figuras desta tarefa.

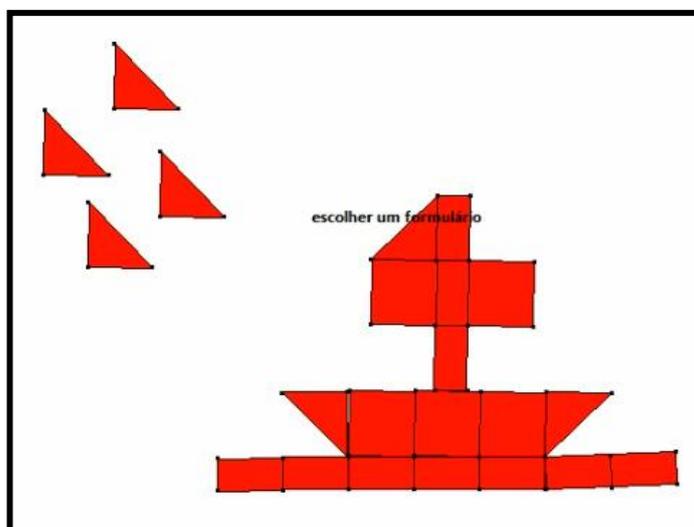
Outra questão que aparece bastante enfática nesta tarefa é que os alunos, assim como na tarefa anterior, sentiram também dificuldades em saber qual tipo de triângulo formava a parte da vela do barco e da proa como ilustra o protocolo a seguir:

Figura 70 - Extrato do protocolo DL4AG2 parte 1



O extrato do protocolo DL4AG2 apresenta duas tentativas dessa dupla em completar o barco com diferentes triângulos, com o objetivo de verificar se um desses encaixava perfeitamente. Não conseguiram nas primeiras tentativas encontrar o tipo de triângulo que correspondia a tal lacuna, pois estavam inserindo figuras do *Jogo de Base: 'Triângulo'*, mas o que correspondia a essa parte do barco era o triângulo retângulo isósceles do *Jogo de Base: 'Quadrado'*. Após quatro tentativas conseguiram identificar o referido triângulo que completava a parte da vela do barco.

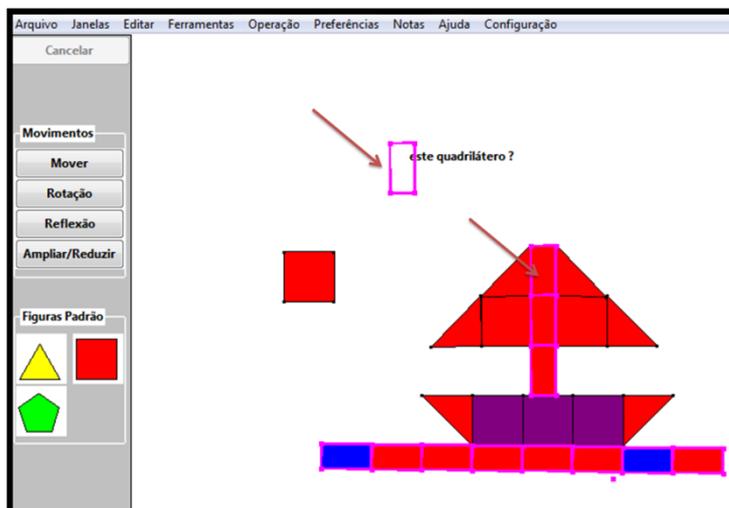
Figura 71 - Extrato do protocolo DL4AG2 parte 2



O extrato do protocolo DL4AG2 parte 2 apresenta a inserção do triângulo retângulo isósceles por essa dupla para completar a parte da proa e da vela que formam o barco.

Outra questão observada nesta tarefa foi que as figuras intermediárias utilizadas para a construção permaneciam na tela após os alunos terem concluído a construção do barco.

Figura 72 - Extrato do protocolo DL6AG2



Esse fato ocorreu com cinco duplas. Isso acontece quando ao *duplicar* uma determinada figura no *Apprenti Géomètre 2* (opção que cria uma cópia de qualquer figura desenhada no software), essas figuras criadas permanecem vinculadas à original, de forma

que, mesmo criando várias cópias, aplicando decomposições, movimentos de reflexão, rotação e translação as cópias criadas, permanecem vinculadas à original.

Dessa forma como os alunos da figura 72 realizaram uma única decomposição de um quadrado em retângulos, e em seguida duplicaram os retângulos partir dessa decomposição para montar as partes que faltavam no barco, os retângulos duplicados ficaram vinculados aos originais. Ao selecionarem para excluir, notaram que excluiriam também os demais, assim decidiram salvar a tarefa e seguir para próxima.

Esse problema teria sido evitado se eles tivessem utilizado a estratégia que apresentamos anteriormente, ou ao invés de utilizarem a ferramenta *duplicar*, copiassem e colassem os retângulos decompostos com as ferramentas (*copiar e colar*) no menu *Editar*.

As demais duplas também decompueram o quadrado em retângulos, duplicaram esses retângulos apenas nove vezes, aproveitando os que haviam sido gerados no início da decomposição, assim ao apagarem o quadrado, nenhuma modificação ocorria na figura, deixando a área de trabalho do software limpa, apenas com o barco.

Simplificaremos por meio de um quadro os diferentes procedimentos utilizados pelas duplas de alunos para responderem essa tarefa.

Quadro 7- Principais ações realizadas pelas duplas na tarefa 3

Ações realizadas na tarefa 3	Duplas
Duplicar Figuras	DL2AG2, DL4AG2 DL3AG2 e DL6AG2
Decompor Figuras	Todas as Duplas
Rotação de figuras	Todas as Duplas
Reflexão e rotação de figuras	DL1AG2 e DL7AG2
Mover figuras	Todas as Duplas

O quadro 7 mostra que quatro das duplas de alunos duplicaram figuras após terem levado diretamente para tela, todas as duplas utilizaram o processo de decomposição do quadrado para obterem retângulos, todas as duplas precisaram aplicar movimentos de rotação e de translação (ferramenta *mover*) para que as figuras pudessem ficar em uma posição que encaixasse ou completasse o barco, mas apenas duas duplas utilizaram os dois processos de reflexão e rotação dos triângulos e retângulos que compuseram a figura do barco.

As principais ferramentas utilizadas foram: *colorir, destacar segmento (espesso), retirar ponto, decompor, duplicar, dividir, mover, rotação e reflexão* e as figuras do menu *Figuras Padrão*.

Utilizando estratégias diversas, as sete duplas conseguiram reproduzir satisfatoriamente o barco. Atingimos o objetivo da tarefa, uma vez que, os alunos desenvolveram, por meio dela, certa familiarização com as principais ferramentas do menu “A” necessárias à resolução das tarefas do Dispositivo Central. Além disso, a tarefa levou à mobilização de conhecimentos do campo conceitual da geometria, evidenciando dificuldades na identificação de figuras, mas também favorecendo a sua superação pelos alunos.

4.3.4 Análise a Posteriori da Tarefa 4- Reprodução do Lápis

O objetivo desta tarefa foi permitir que os alunos explorassem o menu “B” do *Apprenti Géomètre 2* para que conheçam as principais ferramentas que compõe esse menu e suas funções.

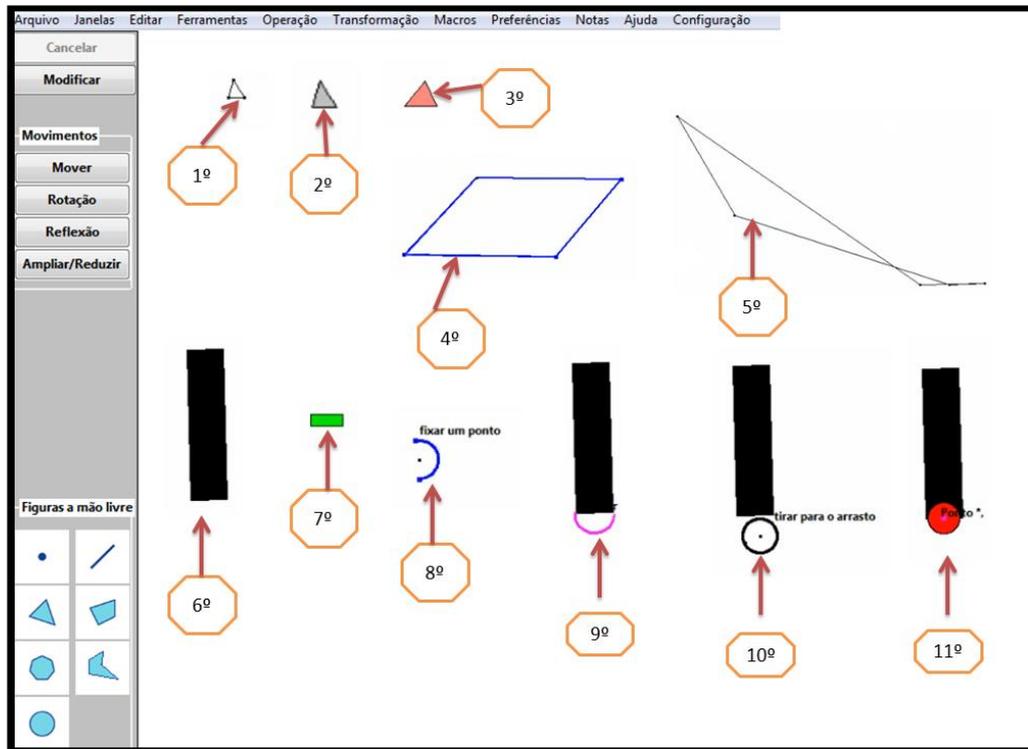
De acordo com o CREM (2014), o menu “B” é denominado de “*Figuras a mão Livres*” e difere do menu “*Figuras Padrão*”, uma vez que, as figuras desse menu não aparecem com um simples clique na tela. As construções de “*Figuras Livres*” são realizadas pela fixação de pontos, um de cada vez, de acordo com a especificidade da construção de cada figura, ou seja, para construir um triângulo por meio desse menu são necessários três cliques com o mouse, definindo os vértices do triângulo.

A figura a ser construída era um lápis composto a partir de um retângulo grande, um retângulo pequeno, um disco (círculo), e dois triângulos isósceles.

Vários alunos apresentaram dificuldades nas construções dessas figuras que não mais se apresentavam pré-definidas como no menu “A”.

Um dos alunos da dupla DL1AG2 colocou em sua fala a seguinte questão após ter executado os comandos necessários para realizar a tarefa - “*agora é para puxar*”, ou seja, eles não teriam mais a possibilidade de levar as figuras diretamente para tela e sim construí-las definindo pontos e arrastando com o mouse. O extrato do protocolo a seguir apresenta as estratégias utilizadas por essa dupla para construírem o lápis.

Figura 73 - Extrato do protocolo dos passos realizados para montar o lápis DL1 AG2



Os alunos dessa dupla iniciaram a construção pela ponta do lápis, escolheram primeiro o triângulo do *sub menu 'Malha isométrica'*, colocando em sua falas que era necessário construir um triângulo menor para formar a ponta desse lápis. Assim com três cliques do mouse definiram os pontos que formam o triângulo, de forma intuitiva. Em seguida, como acharam que a figura desenhada não representava perfeitamente a ponta do lápis removeram-na e iniciaram tudo novamente.

Após terem montado a ponta do lápis pela segunda vez, coloriram, esconderam os pontos dos vértices do triângulo, para deixá-lo da mesma forma que se apresentava na tarefa. Em seguida, passaram para o próximo passo que foi a criação de um triângulo maior que o anterior para completar a parte da ponta do lápis, utilizaram o triângulo 1 do sub menu 'Malha Isométrica', escolheram a opção quadriláteros e tentaram desenhar um quadrado. Como não conseguiram, pois a figura formada foi um paralelogramo, apagaram-no e escolheram a opção 'Polígonos qualquer', também na intenção de construir um quadrado ou um retângulo para representar o corpo do lápis, mas não obtiveram sucesso nas escolhas das figuras.

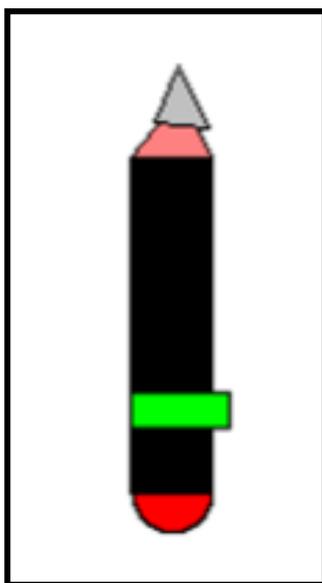
Após terem tentado utilizando várias figuras, construir a parte do corpo do lápis e sem obter êxito, conversaram entre si e acharam melhor recorrer novamente à opção "quadriláteros". Então encontraram o retângulo que formava uma das partes do lápis,

definiram-no e em seguida coloriram de preto, utilizaram essa mesma estratégia para construir também o retângulo menor que forma um pequeno friso no lápis.

Concluindo essa parte utilizam o vocabulário que é necessário “*construir uma roda*”, ou seja, o círculo que forma a borracha, mas ao invés de escolherem diretamente no sub menu ‘Arco’ o disco, tentam criar um arco para inserir na parte final do lápis que forma a borracha. Em seguida após terem criado um arco que segundo eles encaixariam perfeitamente, moveram-no e inseriram-no, porém não conseguiram colorir, pois o software só colore figuras formadas por linhas poligonais ou não poligonais fechadas.

Diante desse problema, resolveram excluir o arco e construir um pequeno círculo de forma que pudessem colorir e completar essa parte do lápis. Tendo completado e enviado o círculo para trás do lápis de modo que aparecesse apenas uma parte da borracha como na figura da tarefa, seguiram para montar as demais partes do lápis com as peças que estavam separadas. O extrato do protocolo DL1AG2 apresenta como ficou a construção final do lápis:

Figura 74- Extrato do protocolo DL1AG2



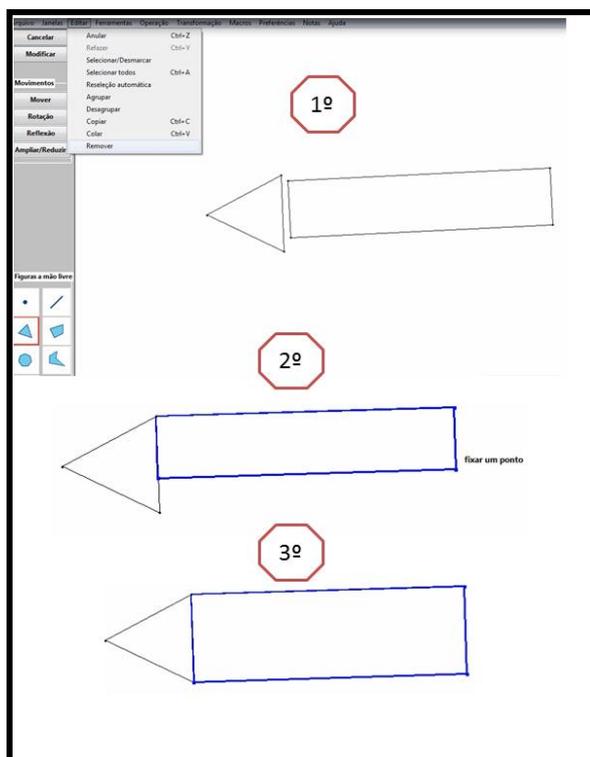
Essa dupla utilizou como estratégia construir as figuras separadamente para então montar o lápis. Mesmo que a construção não tenha ficado idêntica à da ficha das tarefas, esses alunos realizaram procedimentos previstos e mobilizaram as principais ferramentas do menu “B”. Dentre elas o menu “*Figuras a mão livre*” e seus sub menus *Quadriláteros*, *Polígonos regulares* e *Malha isométrica*, as ferramentas do menu *Movimentos*, *esconder ponto*, *destacar segmento (espesso)*, *enviar para trás* e *trazer para frente* também são evidenciadas nessas construções.

Notamos também que não houve a preocupação de deixar o lápis na posição horizontal, como se encontrava na ficha da tarefa, esse ponto nos permite refletir que os alunos podem ter começado a perceber as figuras, não mais em uma posição prototípica.

A dupla DL2AG2 realizou um procedimento diferente para resolver esta tarefa, iniciou o processo de construção do lápis utilizando segmentos do menu “*Figuras a mão livre*”, mas não obtendo sucesso na construção removeram e reiniciaram todo o processo, desta vez, com outra estratégia, construir cada figura de acordo com suas representações, primeiro o retângulo na mesma posição que se encontrava descrita na ficha da tarefa, ou seja, na posição horizontal, e em seguida um triângulo isósceles, percebendo que esse não encaixava perfeitamente, removeram o retângulo e construíram outro utilizando um dos lados do triângulo.

A intenção dessa dupla era que as figuras se encaixassem perfeitamente de maneira que justapondo suas arestas pudessem reproduzir o lápis da forma sugerida pela atividade.

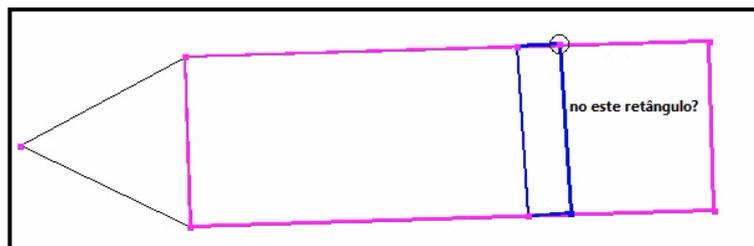
Figura 75 -Extrato do protocolo DL2AG2 construção do lápis



Para finalizar essa construção e concluir a tarefa, após encaixarem o retângulo a um dos lados do triângulo arrastando com o mouse e fazendo coincidir os vértices de um dos lados desse triângulo aos vértices de um dos lados do retângulo grande, prosseguem com a construção do retângulo pequeno.

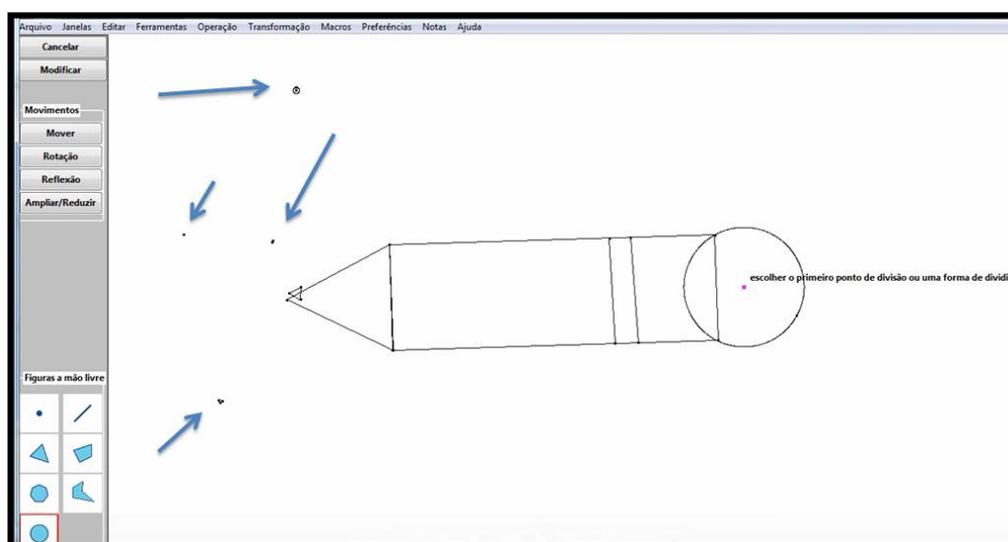
Eles iniciaram essa parte escolhendo na opção *Quadriláteros* o retângulo e diretamente dentro do retângulo maior constroem o outro retângulo como ilustra o estrato do protocolo a seguir:

Figura 76 - Extrato do Protocolo DL2AG2- parte 2³¹



Em seguida a estratégia foi escolher um triângulo equilátero e construir a ponta do lápis, esse triângulo foi construído fora do lápis e inserido sobre o triângulo grande sobrepondo e fazendo coincidir um de seus vértices. Para a construção da borracha do lápis, houve várias tentativas, utilizaram o sub menu “*arco*” por diversas vezes tentando encaixar perfeitamente na parte de trás do lápis e assim terem a borracha por completo, depois de várias tentativas decidiram construir um círculo diretamente no lápis, de forma a encaixá-lo.

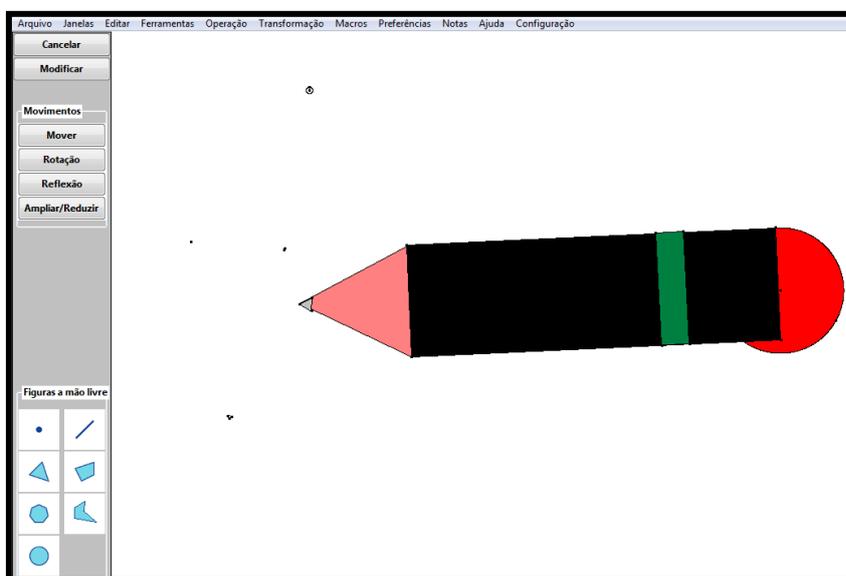
Figura 77 - Extrato do Protocolo DL2AG2 parte 3



³¹ Algumas mensagens aparecem no software como forma de interagir com o usuário, como por exemplo, no extrato do protocolo da DL2AG2 (figura 76) aparece a mensagem “*este retângulo*” como forma de perguntar se a ação escolhida deve ser aplicada nesta figura.

Esse extrato do protocolo DL2AG2 que caracterizamos como parte 3, apresenta na parte de trás do lápis a tentativa dessa dupla de deixar o círculo em um tamanho que encaixasse perfeitamente. Destacamos também com quatro setas alguns pontos na tela, esses pontos representam construções nas quais os alunos não conseguiram concluir de forma satisfatória as construções das figuras com os cliques necessários para formá-las. O software apresenta também um bug e não permite que essas construções não realizadas sejam apagadas. O extrato do protocolo a seguir apresenta a finalização da tarefa:

Figura 78 - Extrato do protocolo DL2AG2: finalização da construção



Esse extrato apresenta o último passo que a dupla utilizou para concluir a tarefa. Observamos que não conseguiram encaixar perfeitamente o círculo para que o lápis apresentasse a mesma característica do da ficha em papel que foi entregue a cada dupla de alunos para reproduzir no *Apprenti Gémètre 2*, mas conseguiram mobilizar diversas ferramentas do menu B para concluir a tarefa.

Nem todas as sete duplas concluíram a tarefa de forma satisfatória, ou seja, montar o lápis com as figuras da forma que se aproximasse suficientemente do lápis da ficha. Os protocolos a seguir ilustram a finalização da construção do lápis pelas duplas DL3AG2, DL4AG2:

Figura 80- Extrato do Protocolo DL3AG2

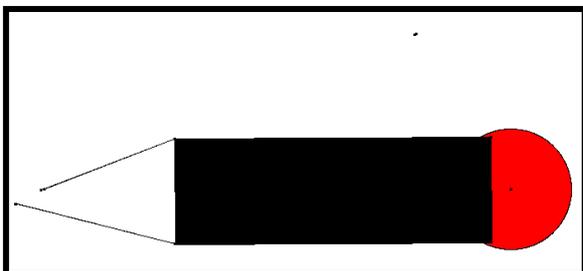
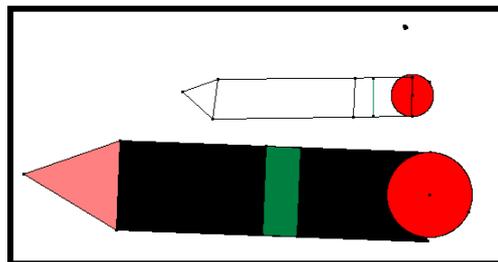


Figura 79- Extrato do protocolo DL4AG2

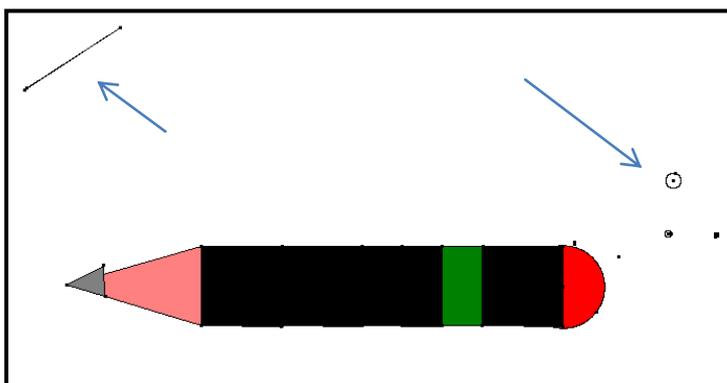


O extrato do protocolo DL3AG2 mostra que essa dupla não conseguiu completar a tarefa, uma vez que, o círculo que representa a borracha é maior que o esperado e a ponta do lápis não foi concluída e ao invés de utilizar os triângulos do *sub menu Malhas isométricas*, traçam segmentos. Tanto o retângulo quanto o círculo foram construídos separadamente e encaixados em seguida.

Os alunos da dupla 4 (figura 79), não conseguiram montar a ponta do lápis, mas cada integrante dessa dupla quis individualmente construir seu próprio lápis, embora tenham utilizado as mesmas estratégias. Por isso esse extrato apresenta dois lápis de tamanhos diferentes. Ambos os alunos da dupla construíram o retângulo grande e sobre esse o retângulo pequeno, escolheram o triângulo isósceles e coincidiram dois dos vértices aos do retângulo grande, construíram o círculo para representar a borracha sobre o retângulo grande, mas não utilizaram a ferramenta enviar para trás. E por fim coloriram cada parte de acordo com as cores do lápis da tarefa.

As duplas DL5AG2, DL6AG2 e DL7AG2 concluíram a tarefa satisfatoriamente, as peças foram encaixadas uma após outra, apenas apresentaram dificuldades na construção do círculo que representava a borracha do lápis.

Figura 81 - Extrato do protocolo DL5AG2



A DL5AG2 construíram figuras por tentativas, mas completaram a tarefa, por isso identificamos na figura 81, alguns sinais de tentativas de construir figuras com segmentos e falhas ao tentarem construir o círculo, sinalizadas por setas.

Mesmo que nem todas as sete duplas tenham concluído montando o lápis com a tarefa sugerida, observamos que todas as duplas formularam e testaram possibilidades de figuras, sem desistir diante das dificuldades e isso permitiu a exploração das funcionalidades do menu B.

Destacamos também que a diversidade de ferramentas do software possibilitou que os alunos pusessem em prática as diferentes estratégias traçadas.

Essa tarefa mostrou também de forma mais enfática o trabalho da dupla em conjunto, observamos que há uma cooperação entre ambos os integrantes, com o objetivo de concluir a tarefa, assim quando um não conseguia uma estratégia de início para construir uma das figuras que compunha o lápis, o outro dava suas sugestões, ora um manipulava as ferramentas do software, ora o outro. Quando esse procedimento não acontecia, um dos integrantes da dupla orientava como o outro deveria fazer para construir as figuras e assim foram aos poucos concluindo esta tarefa.

Verificamos também que as ferramentas de *rotação* e *mover* foram usadas com frequência, os processos de justaposição das figuras e sobreposição estão presentes em cada construção, assim como os sub menus *Quadriláteros*, *Segmentos*, *Malha isométrica*, *Polígonos qualquer* e “*arcos*” foram acionados para que os alunos construíssem figuras e chegassem a uma conclusão sobre quais figuras formavam o lápis.

Organizamos também em forma de quadro as principais ações realizadas na resolução desta tarefa:

Quadro 8- Estratégias utilizadas pelas diferentes duplas

Estratégias utilizadas na tarefa	Duplas
Utilizam segmentos para construir as figuras que compõem o lápis.	DL1AG2, DL2AG2, DL3AG2 e DL5AG2
Constroem as figuras que compõem o lápis separadamente para depois juntá-las.	DL1AG2 e DL4AG2
Constroem as figuras que formam o lápis sobrepondo-as, justapondo-as ou coincidindo seus vértices.	DL2AG2, DL6AG2 e DL7AG2
Constroem figuras separadamente por tentativas buscando as que compõem o lápis para em seguida montá-las.	DL1AG2, DL2AG2 e DL5AG2
Escolhem as figuras adequadamente que compõem o lápis, constrói e encaixa-as.	DL6AG2 e DL7AG2

O quadro 8 apresenta as principais estratégias utilizadas pelas duplas para completar o lápis, algumas delas estão inseridas em diferentes categorias, pois utilizaram diferentes estratégias durante a realização da tarefa.

As duplas DL1AG2, DL2AG2, DL5AG2, DL6G2 e DL7AG2 concluíram a tarefa de forma satisfatória, ou seja, conseguiram montar o lápis com todas as figuras necessárias em bom nível de conformidade com a figura que constava na ficha em papel. Embora duas das sete duplas não tenham conseguido completar totalmente a figura, todos utilizaram os processos de justaposição e sobreposição das figuras que compõem o lápis. A DL4AG2 não concluiu a tarefa de forma satisfatória, pois uma das figuras que compunham o lápis estava faltando e DL3AG2 não concluiu a tarefa, montaram apenas o retângulo grande e o círculo, porém não conseguiram construir a parte da ponta do lápis, pois utilizaram para construir segmentos, ao invés de triângulos que montava essa parte do lápis.

Notamos também que inclusive nas duplas que conseguiram concluir a tarefa satisfatoriamente, dificuldades em reconhecer os diferentes tipos de polígonos e quais deveriam ser usados para construir o lápis e por isso foram necessárias diversas tentativas com o objetivo de completá-lo.

4.3.5 Tarefa 5- Reprodução de Figuras -Paisagem

Esta tarefa teve como objetivo permitir que os alunos explorassem os menus AB e/ou AC desse software. Esses menus reúnem o menu “*Figuras Padrão*” no qual se encontram as figuras pré-definidas utilizadas nas tarefas 1, 2 e 3 e o menu “*Figuras a mão livre*” no qual há diferentes conjuntos de figuras que precisam com alguns cliques do mouse serem construídas na tela do software.

Para realizar essa tarefa era preciso previamente clicar na opção aluno, digitar o nome dos integrantes da dupla, em seguida escolher a opção de menu AB ou AC e clicar em OK. Seis duplas seguiram os comandos que antecediam a tarefa, mas a opção escolhida foi o menu AB, apenas uma optou pelo menu AC³².

A tarefa consistia na reprodução de uma paisagem que poderia ser construída com peças do menu “*Figuras Padrão*” (algumas partes da paisagem) e outras apenas com as figuras do menu “*Figuras a mão livre*”.

³² Mais informações sobre a composição de ferramentas e funcionalidades desse menu “AC” podem ser encontradas no manual do usuário do software *Guide de utilisateur du logiciel-CREM* (2014, p.1), disponível em <www.crem.be>.

Assim como na tarefa anterior, os alunos também apresentaram dificuldades para concluir essa, pois uma das características centrais dessa tarefa era a construção de diversas figuras por meio do menu “*Figuras a mão livre*”. Os alunos só concluiriam essa tarefa de construção de uma paisagem de forma satisfatória, se ao menos conseguissem reproduzir todas as figuras que compunham a paisagem da ficha que lhes haviam sido entregues.

A dupla DL1AG2 iniciou a construção da paisagem inserindo o grande disco (grande círculo) do *Jogo de Base: ‘Triângulo’* e triângulos isósceles do *Jogo de Base: ‘Quadrado’*, a estratégia dessa dupla foi construir primeiramente o sol, após terem completado essa construção, definiram um retângulo com três cliques do mouse para formarem o chão da paisagem, essa figura foi escolhida no menu “*Figuras a mão livre*” na opção quadriláteros.

Identificamos nas falas desses alunos o reconhecimento das figuras geométricas que representavam cada elemento da paisagem. Dando continuidade a tarefa construíram o caule das árvores, esses foram representados por retângulos, em seguida as folhagens dessas árvores representadas por círculos, optaram em construí-los com o menu “*Figuras a mão livre*” ao invés do menu “*Figuras Padrão*”, assim foi necessário defini-lo a partir de dois cliques, o primeiro que define o centro e o segundo que fixa o círculo, em seguida duplicaram sete vezes, para completar as folhagens das árvores, esses alunos acharam mais fácil construir esses círculos pois poderiam defini-los do tamanho que quisessem diferentemente dos círculos presente nos *Jogos de Base* do menu “*Figuras Padrão*” no qual já estariam pré-definidos não podendo reduzi-los nem ampliá-los.

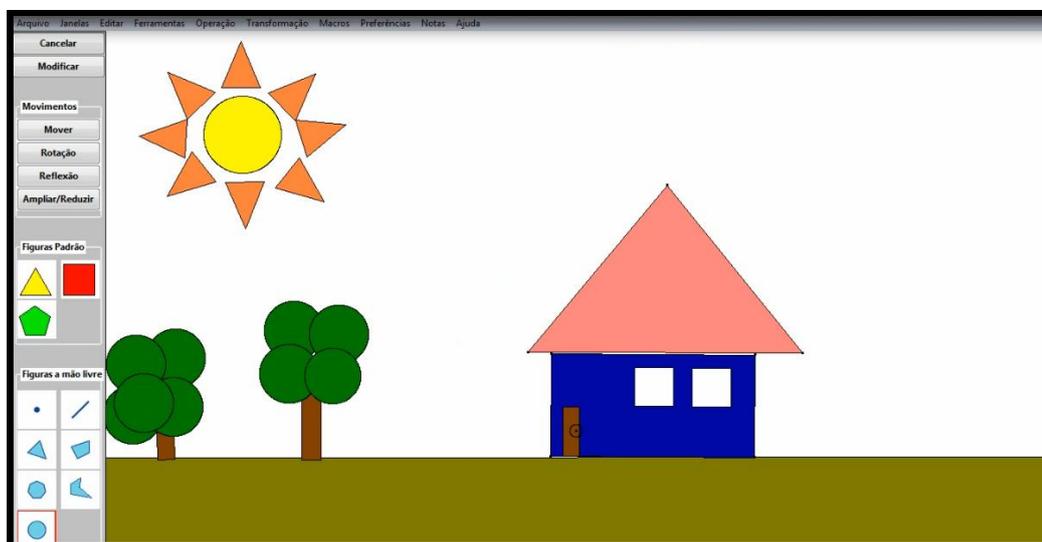
O próximo passo foi a construção do retângulo que formava uma das partes da casa, após terem concluído essa construção, escolheram o quadrado do menu “*Figuras Padrão*” para montar a janela da casa. O triângulo escolhido para construir o teto foi o escaleno do menu “*Figuras a mão livre*”.

Para criar esse triângulo os alunos precisaram com dois cliques do mouse, definir dois pontos formando a base e em seguida a altura desse triângulo com um terceiro clique, fixando um último ponto. A porta da casa foi representada por um retângulo construído com a ferramenta de mesmo nome do menu “*Figuras a mão livre*”, e por último a fechadura, essa era formada por um octógono e um ponto livre no centro, porém como essa figura era pequena e de difícil visualização na ficha da tarefa, essa dupla inseriu um círculo construído com a ferramenta *círculo* do menu “*Figuras a mão livre*”.

Percebemos nessa tarefa a mobilização de diferentes estratégias previstas, dentre elas a construção de figuras com o menu “*Figuras a mão livre*” e “*Figuras Padrão*” para montar a paisagem, a utilização das ferramentas do menu *Movimentos (rotação e mover)*, *duplicar* do

menu operação e a sobreposição das figuras. A seguir apresentamos a finalização da tarefa pela dupla DL1AG2:

Figura 82- Extrato do protocolo DL1AG2



Observamos nesse protocolo a conclusão da tarefa pela dupla DL1AG2, mesmo que a paisagem não tenha ficado com as mesmas características da sugerida na tarefa, notamos um grande domínio das funcionalidades das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* por essa dupla de alunos, na análise da gravação da interface do computador, notamos a preocupação de deixar a paisagem com as mesmas características da apresentada na tarefa, a interação entre os integrantes da dupla favoreceu concluir a tarefa de forma satisfatória.

Identificamos também que quando um dos integrantes tinha dificuldade em realizar alguma construção, o outro interagiu no sentido de indicar qual ferramenta utilizar, como por exemplo, ao duplicarem os triângulos que formavam os raios do sol e os discos (círculos) que formavam as folhagens das árvores, eles tinham o conhecimento que a ferramenta *mover* tirava a seleção automática desse menu, pois caso contrário as figuras seriam duplicadas constantemente.

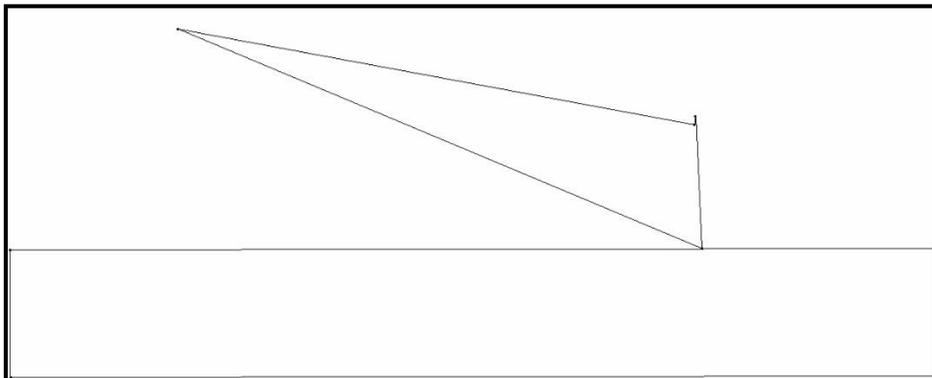
Mesmo que não tenham conseguido completar a paisagem com as devidas figuras que a formavam, pois os triângulos que representam os raios do sol eram equiláteros e não isósceles e a fechadura da porta era representada por um octógono e foi inserido um círculo, a dupla DL1AG2 conclui a tarefa de forma satisfatória, pois utilizaram diferentes estratégias de resolução e mobilizaram as ferramentas dos menus, “*Movimentos*”, “*Figuras a mão livre*”, “*Figuras Padrão*” e o menu “*Operação*”, atingindo o objetivo proposto de mobilizar e

conhecer as funcionalidades das ferramentas do menu AB da tela inicial do *Apprenti Géomètre 2*.

A dupla DL2AG2 diferente da anterior apresentou dificuldades para construir a paisagem proposta nesta tarefa, um dos fatores está relacionado ao processo de construção das figuras, ou seja, como relatamos em nossas análises a priori e parte nas análises a posteriori desta segunda etapa do dispositivo experimental (fase de familiarização), as figuras contidas no menu “*Figuras a mão livre*”, precisam ser construídas com alguns cliques do mouse na área de trabalho do software, seguindo algumas particularidades. Outro fator é a confusão no reconhecimento das figuras que formam a paisagem, essa questão é notada no início da tarefa, pois tentam no primeiro momento construir um triângulo escaleno ao invés do retângulo para representar o chão, ao perceberem que essa figura não estava relacionada a da paisagem, removeram-na e em seguida construíram um retângulo.

As dificuldades para construir cada figura que compunham a imagem da paisagem perduram, o extrato do protocolo a seguir apresenta a tentativa dessa dupla em inserir um quadrado para representar a parte frontal da casa, não conseguiram nas primeiras tentativas, pois escolheram a opção “*Quadriláteros*” e esse, por sua vez, é determinado por quatro cliques arrastando o mouse sobre a interface do software determinado quatro pontos que formam o vértice da figura.

Figura 83- Extrato do Protocolo DL2AG2 parte 1



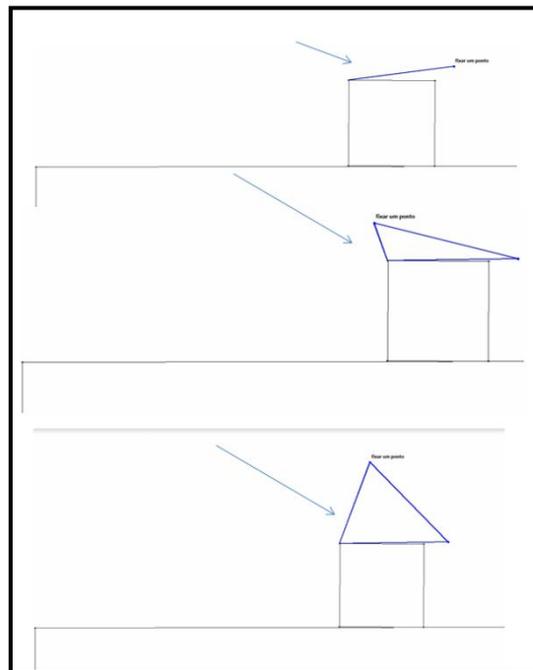
Não obtendo sucesso retornaram ao menu “*Figuras a mão livre*” e escolhem a opção quadrado para continuar. Após concluírem a construção da segunda figura que determinava a parte frontal da casa, a dupla continuou a tarefa construindo o telhado com o triângulo desse mesmo menu, notamos que ainda tentou visualizar no *Jogos de base* do menu “*Figuras Padrão*”, um triângulo pré-definido, mas não encontrando um que fosse congruente ao

sugerido na tarefa, prosseguem optando em construir um triângulo isósceles do menu “*Figuras a mão livre*”.

Essa dupla de alunos também tem dificuldade para determinar esse triângulo, tentaram construir um dos lados justapondo ao do quadrado, fixaram a base e em seguida a altura, mas a figura não fica em uma posição que representasse de maneira satisfatória o telhado casa, assim tentam com a ferramenta mover arrastá-lo, porém como no início da construção haviam fixado o primeiro vértice do triângulo ao do quadrado, o software realiza uma ligação entre esses pontos e não há como mover uma única figura, neste caso o triângulo, sem junto mover o quadrado.

Assim removeram as duas figuras e iniciam a construção novamente. O extrato do protocolo a seguir ilustra esse primeiro processo de construção do triângulo:

Figura 84- Extrato do protocolo DL2AG2 parte 2



Observamos então que essa dupla tentou por várias vezes fixar os pontos necessários à construção do triângulo que representava a parte do telhado, ao determinarem com os três cliques necessários, notam que ele não está alinhado, tentaram movê-lo, mas vai junto o quadrado, assim removem as duas figuras e iniciam todo o processo novamente.

A dificuldade nessa tarefa perdurou até o final da aplicação desse dispositivo, essa dupla não obteve sucesso em seu processo de construção de forma satisfatória para concluir a tarefa, mesmo que tenham tentado várias vezes, não conseguiram montar a casa, removeram

tudo em seguida salvaram a última tentativa, abriram um novo documento e tentaram construir o sol, como o horário da aplicação já havia se esgotado foi solicitado que as duplas parassem as construções e salvassem da maneira que haviam desenvolvido cada elemento da paisagem, assim essa dupla não consegue concluir a tarefa, os extratos do protocolo DL2AG2 a seguir, ilustra a segunda tentativa dessa dupla em construir a casa e em seguida o sol.

Figura 85 - Segunda tentativa de construção da casa

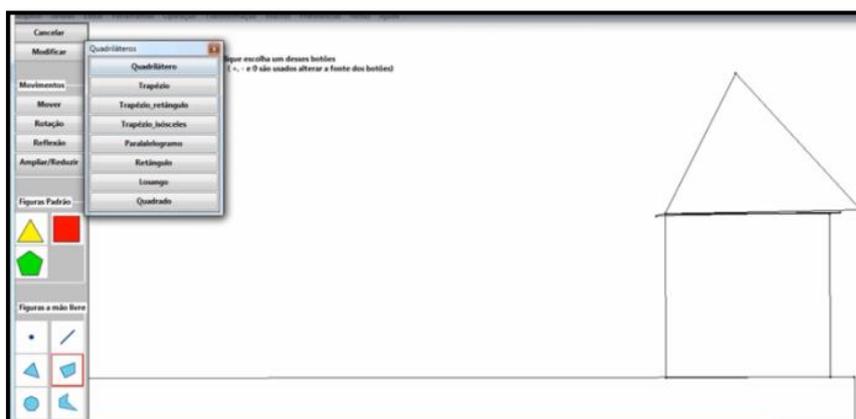
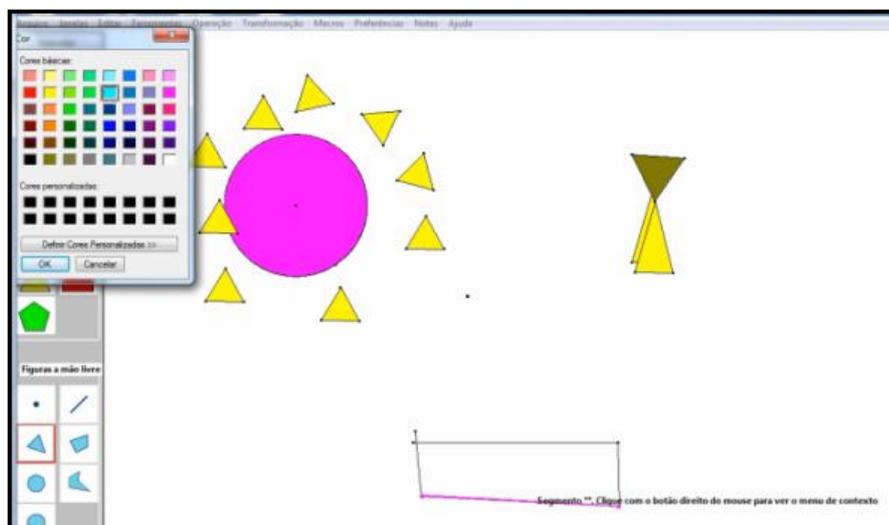


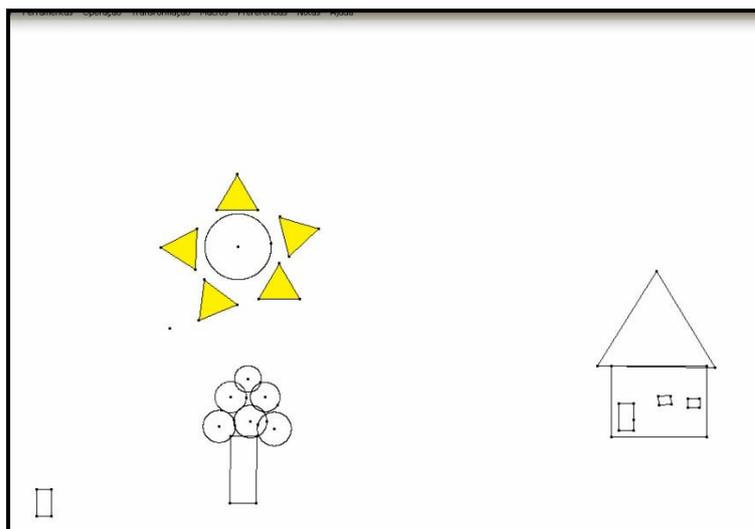
Figura 86 - Construção do sol



Mesmo que essa dupla não tenha conseguido concluir a tarefa de forma satisfatória, observamos as diversas tentativas em conseguir completar a paisagem utilizando várias estratégias de construção das figuras do menu “*Figuras a mão livre*”, notamos também que essa dupla conhecia as funcionalidades das ferramentas, mas não estavam totalmente familiarizadas com esse menu de construção.

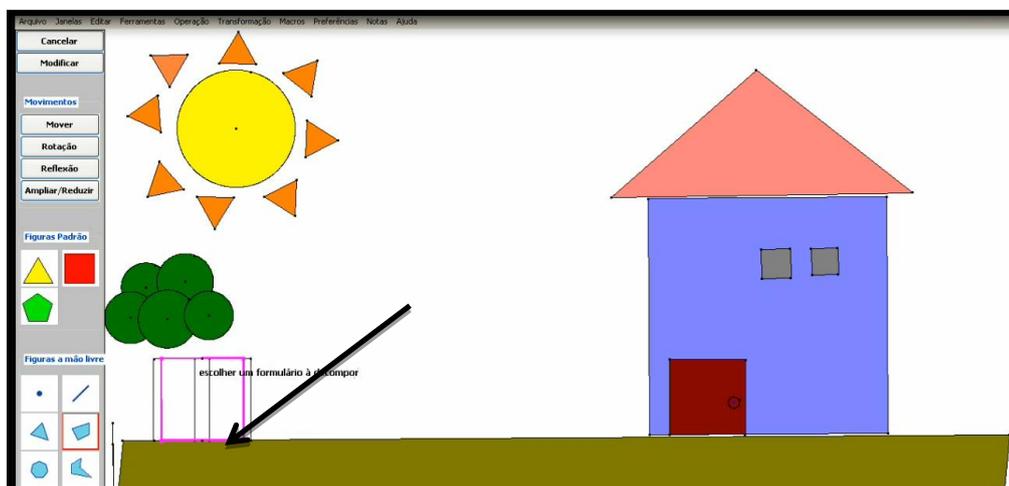
A dupla DL6AG2 também não conseguiu completar a tarefa, fizeram várias tentativas de construção, para conseguirem terminar a casa o sol e uma das árvores, mas o tempo não deu para completar a paisagem da forma sugerida na tarefa. Apresentaremos a seguir a finalização dessa tarefa por esses alunos que após várias tentativas de construções.

Figura 87- Extrato do protocolo da dupla DL6AG2



Apresentamos nessa parte algumas construções mais representativas, das sete duplas que responderam esta tarefa, como estratégia não prevista a dupla DL5AG2 para representar o chão na paisagem utilizam o paralelogramo, o caule das árvores tentam formar com quadrados do menu “*Figuras a mão livre*” como percebem a diferença do caule da paisagem da tarefa para o que eles montaram, dividem o quadrado utilizando a estratégia de decomposição da tarefa 2, assim obtêm dois retângulos e completam em seguida as duas árvores.

Figura 88- Extrato do protocolo DL5AG2



Notamos que essa dupla não realizou uma leitura previa nas características das figuras que formavam a paisagem, pois ao invés de construírem retângulos para montar a parte frontal da casa e a porta, construíram quadrados, não notaram que no menu “*Figuras a mão livre*” havia uma opção de retângulos no sub menu *Quadriláteros*, já na construção dos caules das árvores, construíram um quadrado e em seguida decompueram na vertical, assim obtiveram dois retângulos.

As duplas DL1AG2, DL4AG2, DL5AG2 e DL7AG2, concluíram a tarefa de forma satisfatória, mesmo que algumas figuras que compunham a paisagem de cada uma dessas duplas tenham sido diferentes da sugerida na tarefa, conseguiram utilizar ferramentas necessárias e pertinentes para representar as figuras da paisagem, aproximando a da representada na ficha da tarefa.

As duplas DL2AG2 e DL6AG2 tentaram de diversas formas, mas não conseguiram concluir devido a dificuldade nas construções das figuras do menu “*Figuras a mão livre*”. A DL3AG2 não conseguiu realizar a tarefa, pois o tempo da aplicação havia sido esgotado.

De uma forma geral, mesmo que nem todas as duplas tenham completado essa tarefa de forma satisfatória como esperávamos, as estratégias utilizadas, o domínio das ferramentas do software, mesmo que ainda de forma ingênua, foram pontos positivos que nos permitiram interpretar que esses alunos estariam familiarizados com o menu AB e não seria necessário mais um período de familiarização para que eles compreendessem as funcionalidades das ferramentas que seriam utilizadas no próximo dispositivo.

4.3.6 Síntese das Análises e Desempenho dos Alunos -Etapa de Familiarização - Parte 2

Quanto as tarefas do ambiente digital, participaram 14 alunos que foram organizados em duplas e identificados pelas siglas DL1AG2 (Dupla de número 1 *Apprenti Géomètre 2*), modificamos apenas os números para diferenciar as duplas de 1 a 7.

Verificamos que todas as sete duplas construíram diferentes figuras na tarefa de exploração livre no *Apprenti Géomètre 2*, utilizando diferentes menus e ferramentas. De forma implícita nessa tarefa estava também o trabalho com as transformações isométricas do plano, na qual os alunos ao construírem diferentes figuras, utilizavam movimentos de rotação, translação e reflexão para atingirem seus objetivos.

A tarefa de 2 desse dispositivo que consistia na complementação de uma trem, na qual de forma implícita estava em jogo fortemente processos de comparação e translação de figuras, apenas as duplas DL4AG2 e DL6AG2 completaram o trem da forma sugerida na

ficha das tarefas que havia sido entregue aos alunos, ou seja, realizaram a leitura das figuras que compunham o trem, selecionaram no menu “*Figuras Padrão*” cada uma delas preenchendo as lacuna com suas respectivas peças. As duplas DL1AG2, DL2AG2, DL3AG2, DL5AG2 e DL7AG2 não concluíram de forma satisfatória a tarefa, pois não conseguiram completar a chaminé do trem com o triângulo sugerido.

Essa tarefa não foi concluída da forma que se esperava, mas os alunos conseguiram construir conhecimentos pertinentes à resolução de tarefas do dispositivo central, uma vez que, utilizaram para completar as lacunas do trem processos de comparação de figuras e movimentos de translação.

Com relação à tarefa 3 referente a reprodução de um barco, todas as duplas concluíram de forma satisfatória, ou seja, completaram o barco com todas as figuras sugeridas. Também observamos nas análises das resoluções desta tarefa conhecimentos que são constitutivos dos esquemas que os alunos vão precisar mobilizar pra resolver as tarefas sobre área, tais como: decomposição e recomposição de figuras e as transformações isométricas do plano.

Quanto a tarefa 4 que consistia na reprodução de um lápis, as duplas DL1AG2, DL2AG2, DL5AG2, DL6AG2 e DL7AG2, concluíram a tarefa de forma satisfatória, pois reproduziram o lápis com todas as figuras sugeridas, a dupla DL4AG2 não concluiu devido a falta de algumas figuras e a DL3AG2 não conseguiu montar o lápis. Essa tarefa tinha um grau de dificuldade maior em relação as outras, pois para construir o lápis era preciso escolher o menu B e as figuras do menu “*Figuras a mão livre*”, as figuras desse menu não se encontram pré-definidas, era preciso então que os alunos construíssem com alguns cliques do mouse, esse fator dificultou a construção por parte de algumas duplas.

Essa dificuldade também pôde ser evidenciada na tarefa 5 na qual foi solicitado a reprodução de uma paisagem, as duplas DL1AG2, DL4AG2, DL5AG2 e DL7AG2 reproduziram a paisagem da forma que se esperava, ou seja, representando cada figura que formava a paisagem, porém as DL2AG2 e DL6AG2 tiveram dificuldade nas construções e a dupla DL3AG2, não chegou a realizar a tarefa pois não dava mais tempo.

Tivemos como objetivo tanto na tarefa 4 como na 5, observar como os alunos lidavam com as construções de figuras utilizando o menu “*Figuras a mão livre*”, pois seria relevante para o trabalho com as situações de produção de superfície a partir de uma figura dada. O quadro a seguir apresenta uma síntese do desempenho das duplas nas cinco tarefas:

Síntese do desempenho das duplas da etapa de familiarização digital

Tarefas	DL1AG2	DL2AG2	DL3AG2	DL4AG2	DL5AG2	DL6AG2	DL7AG2
Tarefa 1	CS	CS	CS	CS	CS	CS	CS
Tarefa 2	NCS	NCS	NCS	CS	NCS	CS	NCS
Tarefa 3	CS	CS	CS	CS	CS	CS	CS
Tarefa 4	CS	CS	NCS	NC	CS	CS	CS
Tarefa 5	CS	NCS	NR	CS	CS	NCS	CS

Legenda: **CS**- Concluiu satisfatoriamente a tarefa; (realizou a tarefa, completou e/ou a construção das figuras com todas as peças sugeridas).

NCS- Não concluiu satisfatoriamente a tarefa; (realizou a tarefa, mas se confundiram na representação de algumas figuras, ou mesmo faltou alguma para completar corretamente a reprodução).

NC- Não concluiu; (realizou a tarefa, mas faltaram muitas peças para terminá-la).

NR-Não respondeu a tarefa.

4.4 SÍNTESE DAS ANÁLISES DA ETAPA DE FAMILIARIZAÇÃO NOS AMBIENTES NÃO - DIGITAL E DIGITAL

As análises das tarefas desse dispositivo aplicadas nos ambientes digital e não digital nos permitiram identificar não só a familiarização com os recursos presentes nesses ambientes (malha isométrica, malha pontilhada quadrada, quebra-cabeças, as ferramentas *decompor*, *duplicar*, *dividir*, *mover*, *reflexão*, *rotação*, e os menus *Figuras Padrão* e *Figuras a mão livre*) mas também conhecimentos pertinentes para serem reinvestidos nas tarefas do dispositivo central. Dentre esses conhecimentos destacamos as comparações de figuras, as transformações isométricas do plano, as decomposições de figuras, a interpretação de figuras para reproduzi-las, a complementação de figuras, a sobreposição, os processos de justaposição, construção de figuras entre outros. Conhecimentos esses que não são propriamente sobre área, mas que serão necessários para que os alunos consigam resolver as tarefas com as situações de comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície do dispositivo central.

Conseguimos então com essa etapa de familiarização atingir dois objetivos complementares: aquisição de conhecimentos a serem reinvestidos na resolução das tarefas sobre área e familiarização dos recursos, como a malha quadriculada, o pontilhado quadrado e com as ferramentas e menus do software de geometria *Apprenti Géomètre 2*.

5 ANÁLISE A POSTERIORI DAS TAREFAS DO DISPOSITIVO CENTRAL

Todas as tarefas desse dispositivo foram realizadas em duplas, pelos 12 alunos³³ do 6º ano escolhidos desde o primeiro encontro da aplicação da pesquisa. Não estipulamos tempo para cada uma das tarefas, mas todos os alunos conseguiram concluir dentro do horário estipulado pelo pesquisador, ou seja, 7h30 às 12h30 do dia 14/10/2015. Essa seção contou com a participação de colaboradores que estiveram presentes para contribuir com a organização do ambiente e apresentar os materiais manipulativos, assim como observar se os alunos estavam respondendo cada tarefa. Os colaboradores podiam tirar dúvidas sobre os enunciados das tarefas, mas não deviam intervir na resolução dos alunos.

Como já foi dito, havia duas duplas trabalhando em cada ambiente e todas as seis duplas resolveram cinco tarefas sobre área (com pequenas variações de um ambiente a outro). Os protocolos que serviram de exemplo serão representados por uma sigla de acordo com cada ambiente. Assim Dpnº1APLT3 designa a resolução da tarefa 3, pela dupla número 1 que realizou as tarefas no ambiente papel e lápis. Quando quisermos nos referir a um dos alunos dessa mesma dupla nessa mesma tarefa representaremos pela sigla: Anº2Dp.nº1APLT3, assim teremos A nº2- aluno de número 2; Dp – Dupla; nº 1- número 1; APL- Ambiente Papel e Lápis; T3 – Tarefa 3.

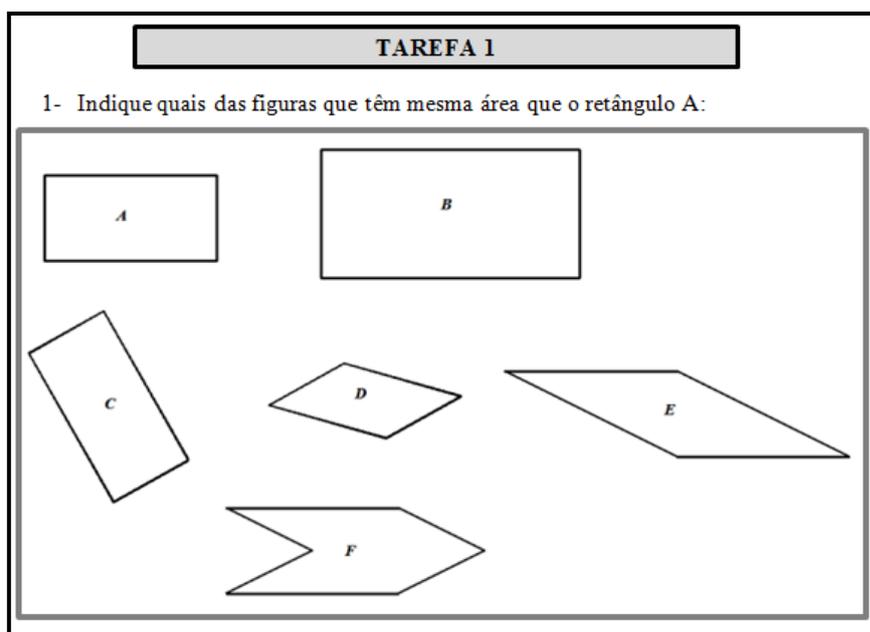
Analogamente, Dpnº2AMMT4 designa a dupla de número dois, no ambiente materiais manipulativos, tarefa 4 e Anº1Dp.nº2AMMT4, indica um dos alunos dessa dupla nessa tarefa e Dp.nº2AAG2T5, diz respeito à resolução da tarefa 5, no ambiente *Apprenti Géomètre 2*, pela dupla 2 e as produções de um dos integrantes dessa dupla são designadas por Anº1Dp.nº2AAG2T5.

³³ A dupla de alunos a mais convidada como alternativa de continuarem participando dos demais encontros da pesquisa, caso algum aluno não pudesse continuar até o final da coleta de dados, não foi convidada a participar do dispositivo central, visto que, pudemos contar com a participação dos 12 alunos, que haviam sido escolhidos para participarem da coleta de dados da pesquisa.

5.1 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 1 NOS TRÊS AMBIENTES

Era solicitado nesta tarefa que os sujeitos indicassem quais das cinco figuras, denominadas pelas letras B, C, D, E e F, teriam a mesma área que a do retângulo A.

Figura 89- Enunciado da tarefa 1 (Versão Papel e Lápis)



Fonte: elaborada pelo autor

O quadro a seguir sintetiza as respostas das duplas para a tarefa 1

Quadro 9- Respostas final das duplas-Tarefa 1

Dupla	Resposta
Dpn°1APL	B e C
Dpn°2APL	C
Dpn°1AMM	B e C
Dpn°2AMM	C
Dp. n°1AAG2	C
Dp. n°2AAG2	B, C, E e F

Todas as respostas dadas pelas duplas estão parcialmente corretas. A resposta que mais se aproxima da correta é a da dupla Dp. n°2AAG2 que identifica as três figuras que têm

mesma área que A (C, E e F), mas erra ao indicar uma figura que tem área diferente que a de A, nesse caso a figura (B).

5.1.1 Análise a Posteriori da Tarefa 1 Ambiente Papel e Lápis

Ao longo da resolução dessa tarefa, a dupla Dpn^o1APLT1 elaborou diferentes hipóteses e mobilizou diferentes estratégias de resolução. No início da tarefa, realizou um procedimento de comparação visual e concluiu que as figuras B e C teriam as mesmas áreas que o retângulo A. Nesse caso os alunos mobilizaram um teorema em ação falso que a área está relacionada ao formato das figuras. Um dos integrantes da dupla acrescenta em seguida que D também teria a mesma área que A, por ter a mesma quantidade de lados:

An^o1Dp.n^o1APLT1- “*eu acho que D também tem mesma área*”

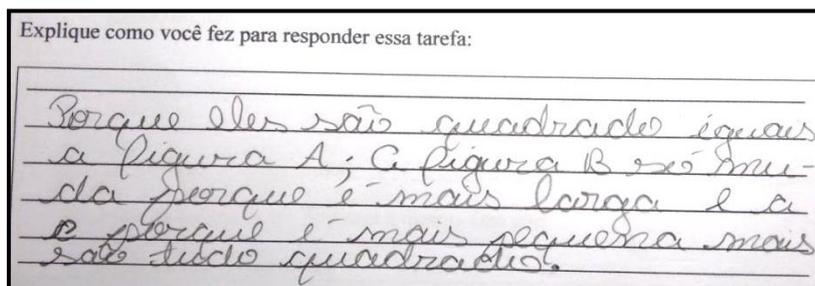
An^o2Dp.n^o1APLT1- “*Por que hein danado*” ?

An^o1Dp.n^o1APLT1- “*eu acho porque tem 4 lado*”.

An^o2Dp.n^o1APLT1- “*é mesmo, A tem 4 lados e D também têm*”.

O que interpretamos como mobilização do teorema em ação falso segundo o qual “*duas figuras que tem a mesma quantidade de lados possuem a mesma área*”. Em seguida, o aluno An^o2Dp.n^o1APLT1- “*é não, acho que D não é, porque não é quadrado*”. A partir daí voltam à ideia inicial, concluindo que apenas as figuras C e B têm mesma área que A. A figura a seguir mostra a explicação final dessa dupla na tarefa 1.

Figura 90- Extrato de protocolo Dpn^o1APLT1



A resposta dessa dupla indica dificuldades no campo conceitual da geometria, uma vez que confunde retângulo e quadrado. Além disso, justifica a igualdade das áreas “*porque são tudo quadrado*”, ou seja, parece que para essa dupla, a área está relacionada com o formato das figuras, o que interpretamos como um indício de concepções geométricas (TELES, 2007).

A dupla Dpn^o2APLT1 diferente da anterior sente a necessidade para responder a tarefa do auxílio de materiais manipulativos, solicitaram um papel de decalque para decalcar as

figuras para em seguida compará-las³⁴. No início da tarefa, observamos que a área das figuras para essa dupla estaria relacionada também aos seus formatos, assim identificamos em uma das falas da integrante An^o1Dp.n^o2APLT1 que as figuras B e C seriam as únicas que teriam as mesmas áreas que a do retângulo A, por serem todas retângulos, mobilizando assim como a Dpn^o1APLT1 um teorema em ação falso segundo o qual duas figuras de mesma forma têm mesma área.

Depois de analisarem novamente a tarefa observando as figuras com mais atenção, relataram que apenas o retângulo C teria a mesma área que A, porque aplicando uma rotação em C e depois sobrepondo à A, apenas C teria a mesma área que a do retângulo A.

Essa dupla mobiliza então de forma implícita mentalmente processos de rotação e sobreposição de figuras, para comparar as áreas, assim um teorema em ação verdadeiro seria *que área de uma figura é invariante por isometria*, mas também manifestam com essa mobilização pelo fato de colocar que apenas C têm mesma área que a da figura A, outro teorema em ação, porém (falso), segundo o qual se duas figuras têm mesma área, então são idênticas.

O protocolo abaixo apresenta as respostas e a justificativa dessa dupla.

Figura 91- Extrato do protocolo Dpn^o2APLT1

Resposta

Letra "C".

Explique como você fez para responder essa tarefa:

(Porque, a letra "B" tem a (mesma) mesma área que
 x Porque a letra "C" tem a mesma área que a "A".

Apenas as justificativas na ficha escrita não foram suficientes para analisarmos a ideia de mesma área dessa dupla, foi necessário analisar a vídeo-gravação para em seguida termos explicitado as ideias iniciais sobre mesma área.

³⁴ Não foi entregue nenhum outro material as duplas do Ambiente Papel e Lápis mesmo que houvessem solicitado.

Após as comparações da área da figura A com as áreas das figuras B e C, essas duplas não compararam a área de A com mais nenhuma outra, seguem para próxima tarefa.

5.1.2 Análise a Posteriori da Tarefa 1 Ambiente Materiais Manipulativos

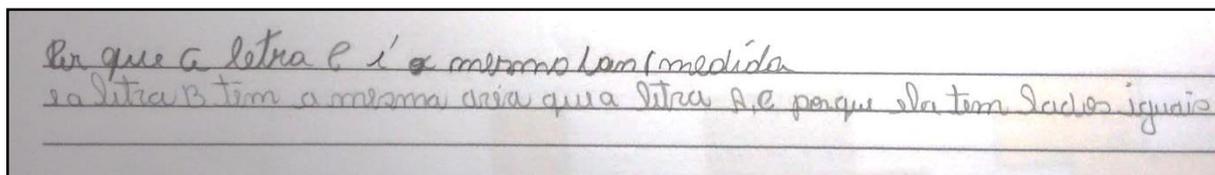
Para responder essa tarefa os alunos receberam um kit contendo canetas coloridas, papel de decalque, tesoura, fita adesiva, giz de cera, malha quadricula, malha pontilhada quadrada e um caderno de desenho. Eles poderiam utilizar esses diferentes materiais manipulativos para comparar as áreas das figuras dessa tarefa e dizer quais delas teriam a mesma área que a do retângulo A.

A dupla Dpn°1AMMT1 iniciou a tarefa decalcando cada uma das seis figuras, após esse procedimento recortaram apenas o retângulo C e compararam por sobreposição a área dessa figura com a da figura A. Em seguida colocaram que C tem a mesma área de A, nesse caso estariam mobilizando um teorema em ação verdadeiro segundo o qual a *isometria conserva a área*.

Tentaram ainda por sobreposição comparar a área da figura C com a da figura E, após sobrepor E em C, aplicaram movimentos de rotação várias vezes em E, não conseguiram visualizar se E e C teriam as mesmas áreas, pois para comparar as áreas dessas figuras diretamente por sobreposição, era preciso aplicar procedimentos de decomposição e recomposição para em seguida por sobreposição notarem que essas figuras possuíam as mesmas áreas.

O próximo passo foi comparar as áreas das figuras C e B, colocaram que elas também possuíam a mesma área que a da figura A “*por causa dos lados*”. O extrato do protocolo da figura 92 apresenta a resposta final dada por essa dupla:

Figura 92- Extrato do protocolo Dpn°1AMMT1

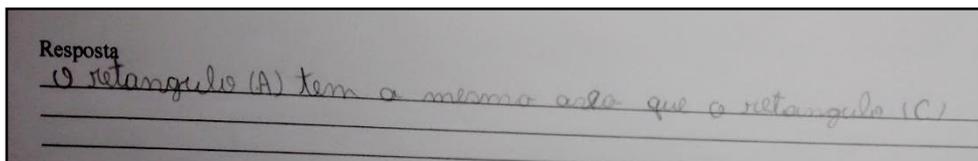


Por meio da vídeo gravação identificamos que essa dupla se referia as figura A, B e C serem todas retângulos e por isso teriam as mesmas áreas, nesse caso a área estaria relacionada ao formato das figuras o que pode caracterizar como indícios de concepções geométricas de área.

Essa dupla ainda tenta comparar por inclusão a área da figura A as da figura E e F, colocaram em suas falas que não dá certo esse procedimento pois as figuras são diferentes, ou seja, para eles as figuras E e F não tem o mesmo formato de A por isso tem áreas diferentes, ou ainda pelo fato de não poder comparar por sobreposição diretamente (coincidir por sobreposição), essas figuras teriam áreas diferentes de A. Assim outro teorema em ação falso que podemos identificar é que para ter *as mesmas áreas as figuras precisam tem os mesmos formatos*. Para esses alunos figuras diferentes não possuem mesma área.

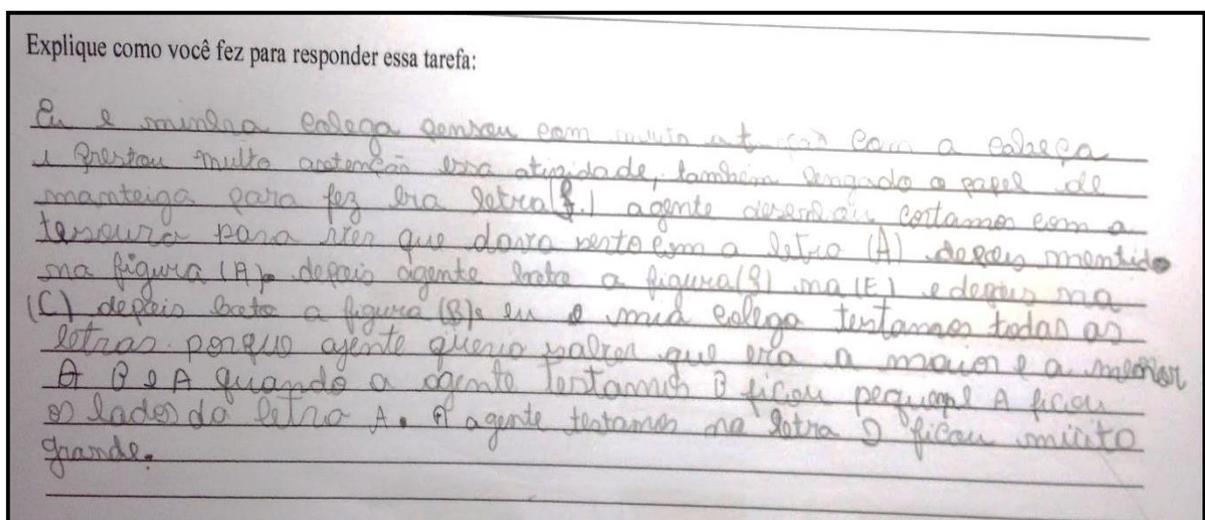
A dupla Dpn^o2AMMT1 colocou que apenas o retângulo A tem a mesma área que o retângulo C como mostra o extrato do protocolo a seguir:

Figura 93- Extrato do protocolo DPN^o2AMMT1 (resposta)



Para chegarem a essa conclusão decalcaram a figura C em seguida recortaram-na, aplicaram uma rotação e sobrepueram diretamente a A, assim identificaram que C e A têm mesma área. Notamos que há um esforço maior de comparação das áreas das figuras dessa tarefa por essa dupla, para chegarem à conclusão de quais teriam as mesmas áreas que a do retângulo A. O extrato do protocolo a seguir traz a justificativa dessa tarefa por essa dupla.

Figura 94- Justificativa dos procedimentos de comparação das áreas Dpn^o2AMMT1



Na comparação de B com A, a monitora pergunta se elas têm mesma área, o Anº1Dp.nº2AMMT1, responde que não, *porque é mais larga*, esse aluno se referia a inclusão de A em B.

Continuam comparando mentalmente as demais figuras e mais uma vez relatam que C tem mesma área que A, dessa vez, mudam de opinião colocando a seguinte frase: *“porque tem o mesmo tamanho”*. Em seguida pegam o papel de decalque (manteiga) decalcam a figura F, recortam e sobrepõe ao retângulo A, como a sobreposição não ocorre perfeitamente, segundo essa dupla- *“não dá certo”*, essas figuras não teriam a mesma área.

Outra questão colocada pela dupla na justificativa de como fizeram para comparar as áreas das figuras, identificamos como um desvio do que a tarefa sugeria, foi sobrepor a figura F ao paralelogramo E, depois ao retângulo C, em seguida ao retângulo B com o objetivo de saber qual tinha área maior ou menor, ainda se confundem na escrita relatando que ao compararem A e B, B ficou menor, ou seja, teria área menor, mas estavam se referindo ao retângulo A, inverteram apenas na escrita.

Ao realizarem essa comparação identificamos um procedimento no qual está apoiado um invariante operatório correto: *“a área é invariante por isometrias”*, se uma figura X cabe dentro de Y então por inclusão a área de X é menor que a de Y (FERREIRA, 2010).

Mesmo que não tenham conseguido verificar que as áreas das figuras F e E seriam as mesmas que a do retângulo A, tendo como possibilidade decompor as figuras para em seguida compor um retângulo e por sobreposição realizar a comparação, essa dupla ao decalcar a figura C aplica uma rotação e em seguida sobreposição e confirma a igualdade das áreas dessas duas figuras.

5.1.3 Análise a Posteriori da Tarefa 1 Ambiente Apprenti Géomètre 2

As duas duplas que utilizam o *Apprenti Géomètre 2* para responder essa tarefa, cumpriram os comandos que a antecedem, e sem a ajuda do monitor conseguiram abrir o arquivo “Tarefa Figure_1.fag”. Em seguida digitaram seus nomes e escolhem a opção de menu AB e o idioma em Português Br. Notamos que os procedimentos realizados pelos alunos no dispositivo de familiarização que antecedia as tarefas nesse software, contribuíram de forma satisfatória, pois os alunos puderam seguir os comandos a serem realizados no *Apprenti Géomètre 2* com autonomia.

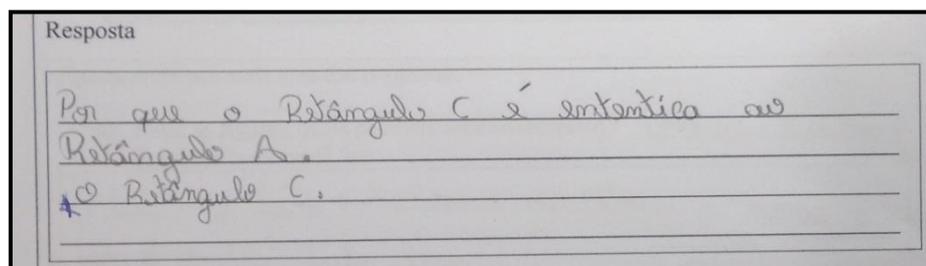
A Dp.nº1AAG2T1 não justificou na ficha em papel todos os procedimentos utilizados para comparar as áreas das figuras dessa tarefa, mas a vídeo gravação, a captura da tela do

computador e o histórico das ações gravadas pelo software, nos permitiram analisar estes procedimentos.

Há uma interação entre os sujeitos An^o1Dp.n^o1AAG2T1 e An^o2Dp.n^o1AAG2T1 dessa dupla no sentido de compreender o que a tarefa estava solicitando, um dos sujeitos coloca em sua fala que C e B teriam as mesmas áreas que A, não utilizam as ferramentas do software para comparar apenas conversam entre si. Assim estariam mobilizando um teorema em ação falso segundo *o qual figuras que tem mesma forma possuem mesma área*.

Eles realizaram vários procedimentos para comparar as áreas das figuras dessa tarefa no *Apprenti Géomètre 2*, o protocolo a seguir apresenta a resposta final que esses alunos escreveram após as comparações das áreas dos retângulos A e C.

Figura 95- Extrato do protocolo escrito da Dp. n^o1AAG2T1

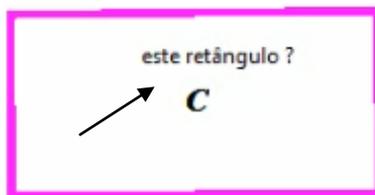


Ao colocarem que o retângulo C tem a mesma área que o retângulo “A” por serem idênticos, esses alunos mobilizaram um teorema em ação verdadeiro segundo *o qual a área é invariante por isometria*, uma vez que, para realizar essa comparação utilizaram a ferramenta *rotação* aplicaram esse movimento à figura C e em seguida moveram diretamente sobrepondo à figura A, chegando à conclusão que elas possuem mesma área. Por outro lado, ao concluírem que apenas C tem mesma área que A pode ser interpretado como mobilização de um teorema em ação falso segundo *o qual figuras só têm mesma área se forem idênticas*.

Esses alunos apresentaram domínio das ferramentas do software, e suas funcionalidades, observamos que aplicaram várias rotações centrais nas figuras D, E e F, com o objetivo de por meio das visualizações a partir das rotações aplicadas, deixá-las “*idênticas*” segundo o sujeito An^o1Dp.n^o1AAG2T1 ao retângulo A.

Outro procedimento observado e que não foi previsto foi que ao deslizarem o mouse sobre as figuras A, B e C, o software apresenta a seguinte mensagem:

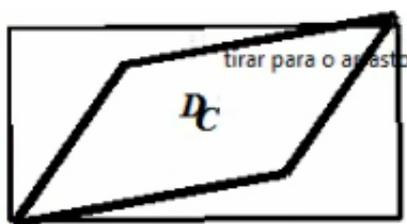
Figura 96- Extrato do protocolo Dp.nº1AAG2T1
comparação dos retângulos



O objetivo do software é interagir com o usuário no sentido de indicar se a ação escolhida deverá ser realizada naquela figura. A dupla deslizou o cursor do mouse sobre as demais figuras e a mensagem “este retângulo?” não aparece quando se aproxima das demais figuras (aparece os seus respectivos nomes). Questionamos se essa retroação do software reforça a ideia de que as áreas das figuras D, E e F são diferentes das áreas das figuras A, B e C (o que provavelmente corresponde à mobilização de concepções geométricas).

Observamos nas falas que o sujeito Anº1Dp.nº1AAG2T1 que é preciso “*ajeitar o paralelogramo D*”, ou seja, procurar uma maneira de deixá-lo idêntico ao retângulo A, o outro sujeito Anº2Dp.nº1AAG2T1 coloca que “*não tem como*” e sobrepõe D a C para evidenciar sua opinião.

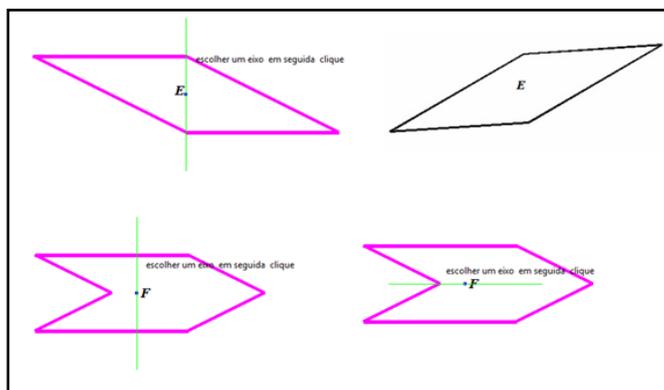
Figura 97- Comparação por inclusão extrato do protocolo Dp.nº1AAG2T1



Em seguida desfazem a sobreposição do paralelogramo D ao retângulo C, relatando que não há possibilidades das áreas serem as mesmas, pois não se sobrepõem perfeitamente, ou seja, para esses alunos figuras de mesma área são figuras idênticas. Continuam a tarefa verificando se é possível aplicando reflexões a essa figura, deixarem idêntica ao retângulo A, não conseguindo e ainda com a ferramenta de reflexão acionada, tentam visualmente verificar se aplicando alguma reflexão em F, poderiam sobrepô-la perfeitamente ao retângulo A e assim chegar à conclusão que possuíam as mesmas áreas, analisaram vários eixos para aplicar a reflexão.

O extrato do protocolo a seguir apresenta algumas tentativas de reflexão das figuras E e F por alguns eixos.

Figura 98- Reflexão da figura “E” e análise de reflexão da figura “F”



Não conseguindo obter sucesso com as reflexões no sentido de transformar as figuras em retângulos, de forma a sobrepor perfeitamente a “A” e assim comparar as áreas dessas figuras, o próximo passo foi novamente aplicar o movimento de rotação na figura C, em seguida acionar a ferramenta *mover* e sobrepor a figura C ao retângulo A. Esses sujeitos mobilizam teorema em ação verdadeiro, segundo os quais: *área é invariante por isometria*, eles ainda mostram-se surpresos com essa comparação ter sido um sucesso e prosseguem sobrepondo a figura C sobre B, assim identificam que B não tem mesma área que C, por inclusão, assim se $\text{área de C} = \text{área de A}$ e $\text{área de C} < \text{área de B}$, então $\text{área de A} < \text{área de B}$.

Por fim, após as várias comparações justificam na ficha de papel que apenas C tem mesma área que A. Esses alunos não conseguem, assim como as duplas do ambiente materiais manipulativos (e papel e lápis), mobilizar processos de decomposição e recomposição das figuras. Ou seja, na ação dos alunos, não se percebe a mobilização do teorema-em-ação verdadeiro segundo o qual *o corte e colagem sem perda nem sobreposição conserva a área das figuras*. Após terem justificado na ficha em papel salvaram a tarefa e seguiram para próxima.

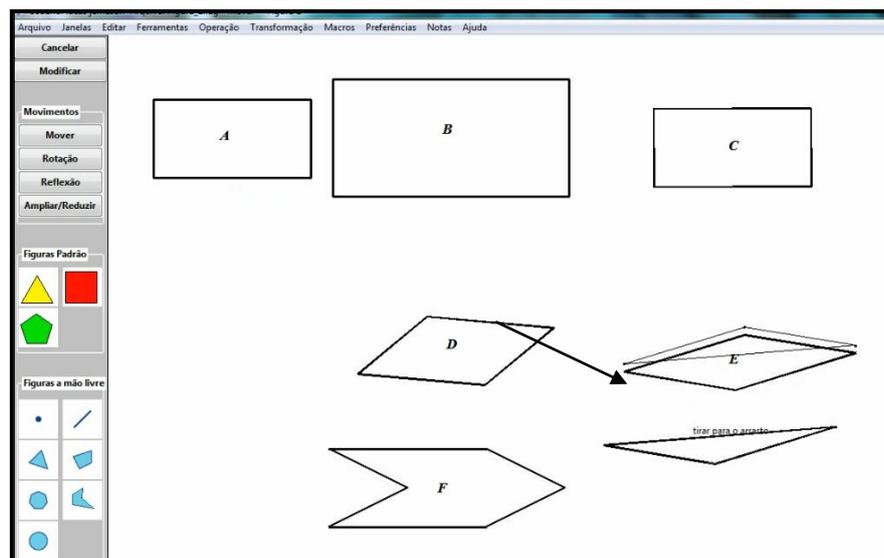
Observamos que os alunos da Dp.nº2AAG2T1 antes de iniciar a comparação das figuras discutiram quais as possíveis estratégias para comparar as áreas das figuras. Primeiro aplicaram uma rotação em um dos vértices do retângulo C colocando essa figura em uma posição prototípica próxima ao retângulo A, selecionaram a ferramenta de reflexão, mas o sujeito Anº1Dp.nº2AAG2T1 que não estava no computador, se referia à ferramenta de decomposição.

Procuravam então uma maneira de decompor as figuras para deixá-las segundo ele “*idênticas*” ao retângulo A e assim sobrepô-las perfeitamente. Essa dupla também utilizou por sua vez, um procedimento não previsto, a ferramenta *ampliar/reduzir* do menu *Movimentos*, essa estratégia levaria ao fracasso, pois as áreas das figuras não permaneceriam invariáveis ao aplicar uma redução ou ampliação.

Notamos que nesse caso havia a necessidade de formular um novo menu no software que limitasse o acesso ao aluno a algumas ferramentas³⁵ que atrapalham no processo de comparação de áreas.

Após terem aplicado uma redução no paralelogramo E, decompueram essa figura. A área da figura obtida a partir de E é menor que a área de A, embora as áreas de A e E fossem iguais. O extrato do protocolo a seguir apresenta o paralelogramo E reduzido e uma decomposição por uma das diagonais.

Figura 99- Extrato do protocolo Dp.nº2AAG2T1 decomposição do paralelogramo E

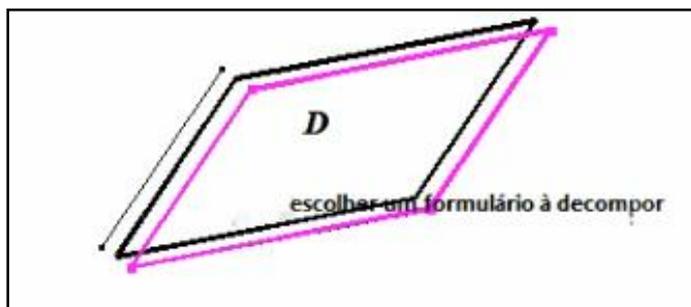


Esses alunos concluem essa decomposição e observam que não há como recompor uma figura possível de ser comparada ao retângulo A, essa dupla mobiliza um teorema em ação falso segundo o qual *a área está associada ao formato das figuras*. O próximo passo foi decompor o paralelogramo D. Após aplicar uma rotação nessa figura, o Anº1Dp.nº2AAG2T1 sugere que a decomposição seja feita pela diagonal, o Anº2Dp.nº2AAG2T1 solicita que a decomposição precisa ser realizada de forma a obter um triângulo que ao recompor a nova

³⁵ O *Apprenti Géomètre 2* oferece essa possibilidade-ver Apêndice A.

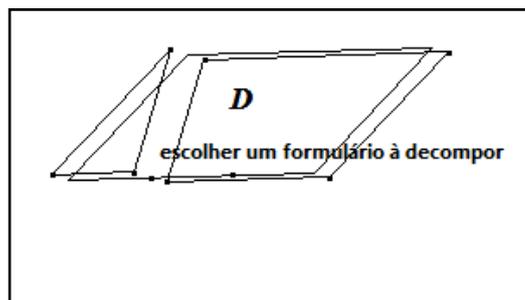
figura a partir de D, com as partes decompostas, pudessem formar um retângulo, mas não conseguem, apenas decompõem um dos lados da figura D como ilustra o protocolo abaixo:

Figura 100- Extrato do protocolo Dp.nº2AAG2T1



Esse aluno tinha como estratégia decompor o paralelogramo D da seguinte forma após a aplicação de uma rotação (identificado no áudio de um dos alunos):

Figura 101- Outra forma de decompor a figura D



Fonte: Elaborada pelo autor da pesquisa

Assim poderiam com as partes decompostas compor segundo eles um retângulo possível de comparar por sobreposição, porém não obtiveram sucesso nessa estratégia. Em seguida, após removerem a decomposição, ilustrada na figura 101, duplicaram D, na tentativa de montar um retângulo por justaposição dos lados das figuras duplicadas, nessa estratégia analisaram e chegaram a conclusão que também não obteriam sucesso.

Mesmo se essa dupla não encontrou uma decomposição adequada, há indícios de que mobilizou o teorema em ação segundo o qual o *corte e colagem sem perda nem sobreposição conserva as áreas*, pois na tentativa de comparar as áreas, os sujeitos decompõem as figuras buscando construir outra que possa ser comparada com A por sobreposição.

Eles notaram que a figura E foi modificada e removeram, assim como as duplicações da figura D, como teriam que desfazer muitas ações para poder voltar para o início da tarefa,

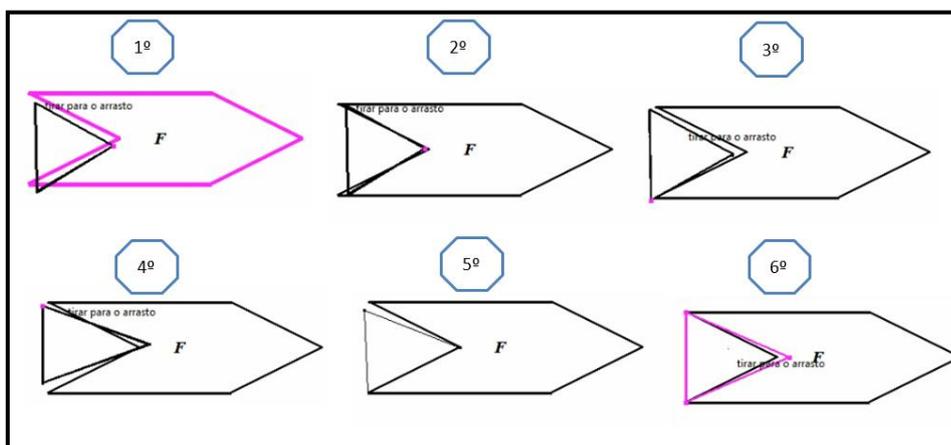
na qual as figuras não tivessem sofrido nenhuma modificação, encerraram a tarefa sem salvá-la e iniciaram tudo novamente.

Ao iniciarem a tarefa novamente eles organizam as figuras da seguinte forma A, B e C nessa ordem, em uma forma prototípica como se elas tivessem a mesma área por serem todas retângulos e por isso eles as agrupam dessa forma, em seguida aplicaram movimento de rotação ao paralelogramo D. O An^o2Dp.n^o2AAG2T1 insiste em completar essa figura e sugere encontrar no menu *Figuras padrão* um triângulo pré-definido em um dos *Jogos de base* que complete essa figura.

Esse sujeito coloca a seguinte expressão em sua fala: “*a gente precisa de dois triângulos para completar um lado e o outro dessa figura*” se referindo ao paralelogramo D. Assim escolheram o triângulo isósceles do *Jogo de Base: ‘Quadrado’*, aplicaram uma rotação no sentido de encaixá-lo diretamente em D. O An^o2Dp.n^o2AAG2T1 relata que esse triângulo é pequeno e que não completaria a figura D. Em seguida, não obtendo sucesso nessa estratégia removeram esse triângulo.

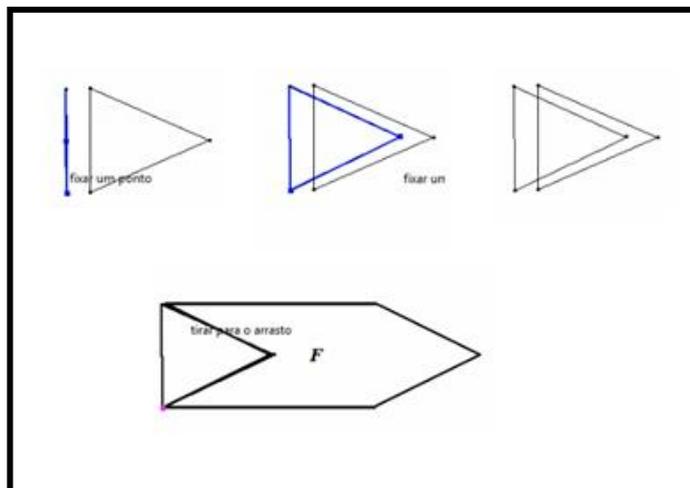
Ainda com esse mesmo objetivo de poder completar o paralelogramo D com triângulos para obterem um retângulo, selecionaram a opção triângulo do menu *Figuras livres* e tentaram construir um que encaixasse perfeitamente. Escolheram aleatoriamente o triângulo retângulo, em seguida não conseguiram deixá-lo de um tamanho que coubesse diretamente em D. Removeram e construíram outro, dessa vez um triângulo equilátero, mas o objetivo não era mais completar a figura D e sim a figura F, aplicaram uma rotação central e tentaram encaixar esse triângulo. Não conseguindo, buscaram construir outro novamente de um tamanho maior que o anterior, o protocolo a seguir ilustra algumas tentativas de compor a figura F.

Figura 102- Tentativas de compor a figura F com triângulos



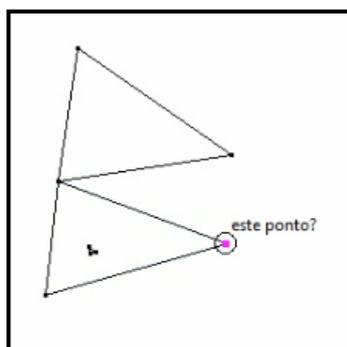
Após tentarem por diversas vezes, e sem sucesso, a última tentativa foi pegar um dos triângulos que quase se encaixou perfeitamente, como referência, e construir outro um pouco menor como ilustra a imagem a seguir:

Figura 103- Composição da figura F a partir da construção de triângulos



Após esses procedimentos, a estratégia dessa dupla é a partir da criação de dois triângulos encaixá-los, como ilustra o protocolo a seguir:

Figura 104- Junção de dois triângulos para comporem F

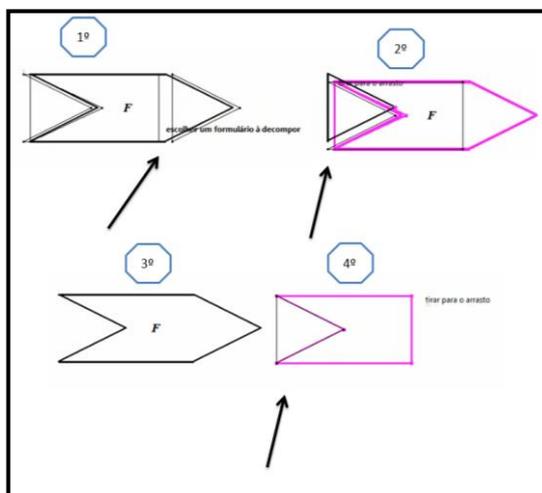


Essa dupla não fica satisfeita com essa estratégia e solicita ajuda ao monitor sobre como eles poderiam fazer para decompor a figura F, indicando qual parte da figura queriam obter, assim são orientados como proceder para decompor a figura da maneira que eles queriam, ou seja, o monitor indica apenas qual ferramenta do *Apprenti Géomètre 2* permite decompor sem necessariamente ser pela diagonal³⁶.

³⁶ Ferramenta *Dividir* do menu *Operação*, deve-se dividir os segmentos e em seguida selecionar a ferramenta *Decompor* ligando os pontos divididos.

Esses sujeitos realizam o processo de decomposição e colocam a seguinte frase: “*agora estou ligado como é*”. Essa dupla estava familiarizada apenas com a decomposição pela diagonal das figuras, não lembravam que poderiam a partir da criação de pontos ou que de um vértice a outro da figura poderiam aplicar o processo de decomposição, sem necessariamente ser pela diagonal.

Figura 105- Junção de procedimentos do protocolo da Dp.nº2AAG2T1

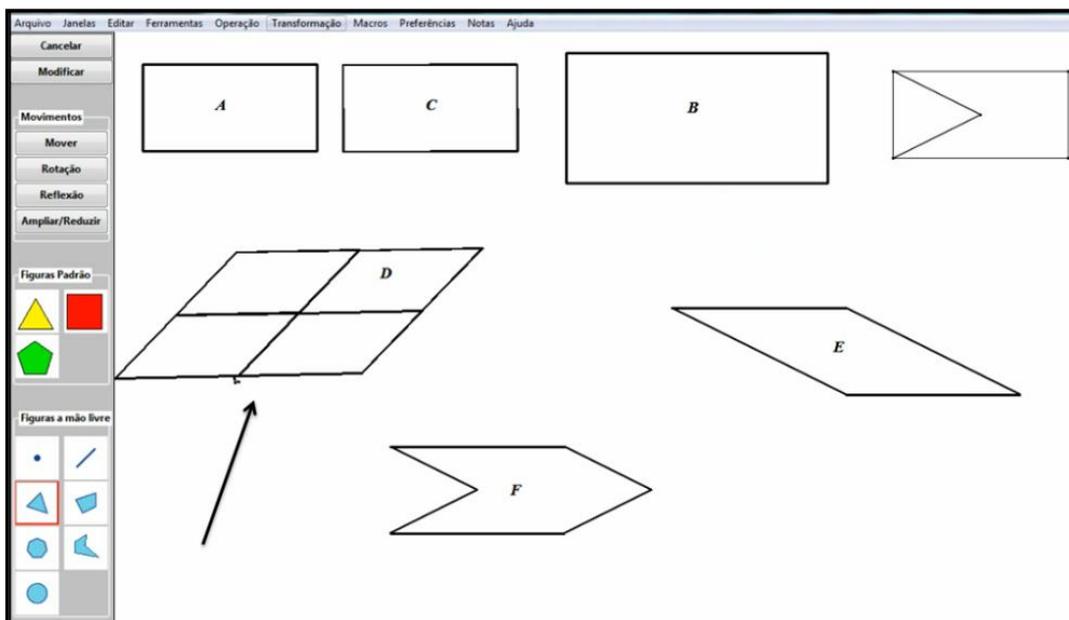


Observamos na figura 105 a decomposição da figura F e a composição de um retângulo a partir da junção das partes decompostas. Mobilizam a partir desse momento um teorema em ação verdadeiro segundo o qual o *corte e colagem sem sobreposição nem perda conserva a área*.

Algo que nos chama atenção nessa dupla, é o cuidado em não removerem as figuras decompostas e nem os formulários (figura original que permanece como um protocolo após a decomposição), entendem as funcionalidades das ferramentas e explicitam que apagando a figura de origem, as peças criadas a partir dela são removidas também.

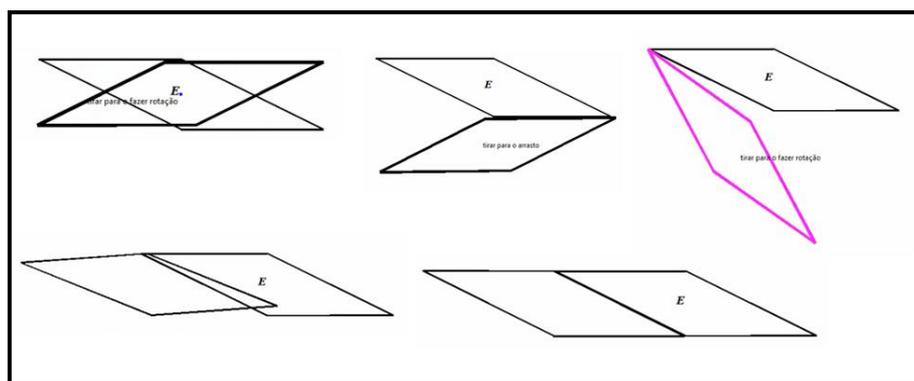
Após realizarem essa decomposição, voltam o olhar para tentar novamente compor um retângulo a partir de duplicações sucessivas da figura D, justapõem as peças duplicadas formando por aditividade um paralelogramo de área maior que D como nos mostra o protocolo a seguir:

Figura 106- Extrato do protocolo da Dp.nº2AAG2T1 -tentativa de compor um retângulo



O objetivo dessa dupla ainda estava voltado à construção de um retângulo, de alguma forma, já havia verificado que A e F, tinham as mesmas áreas, só lhes restavam saber D e E. Não atingindo o objetivo esperado ao observarem de diversas formas a impossibilidade de compor um retângulo, duplicando o paralelogramo D, focam o olhar para na figura E, é sugerido por um dos integrantes que aplicasse uma rotação, identificamos que eles tentam utilizar os mesmos procedimentos aplicados a figura D no sentido de comporem um retângulo, assim duplicam a figura E e realizam os seguintes procedimentos:

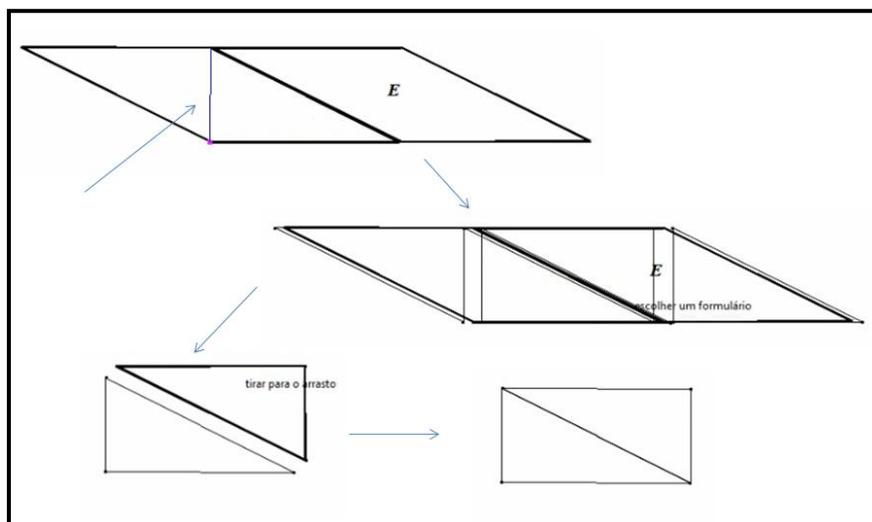
Figura 107- Extrato do protocolo Dp.nº2AAG2T1 tentativa de compor um retângulo



Não conseguindo êxito na composição de um retângulo, mesmo tendo duplicado e aplicado diferentes rotações e translações, conseguem apenas montar por último outro paralelogramo pela justaposição da peça duplicada.

Na fala do Anº1Dp.nº2AAG2T1 notamos a seguinte expressão: “*precisamos decompor*” e aponta como o outro sujeito que estava utilizando o computador deveria realizar a decomposição, ou seja, qual seria a diagonal escolhida que ao decompor permitira obter dois triângulos retângulos e assim aplicando movimento de rotação e translação (*mover*) obteriam um retângulo. O extrato do protocolo desse procedimento a seguir apresenta os passos realizados por esses alunos:

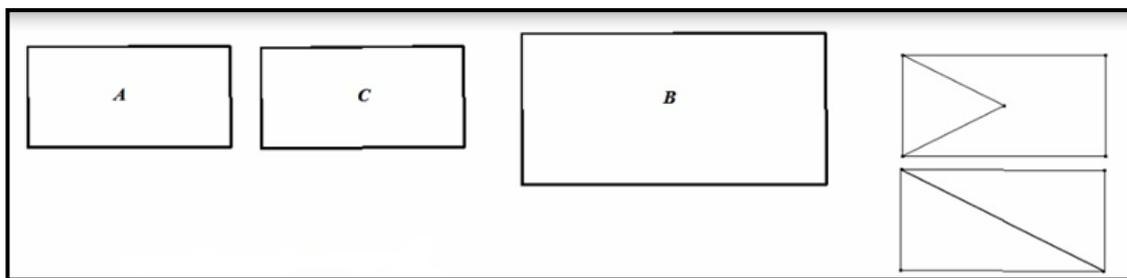
Figura 108- Decomposição do paralelogramo E para compor um retângulo



Esses alunos após duplicarem a figura E e justapor um de seus lados formando um novo paralelogramo, decompõe cada uma das figuras que foram justapostas, arrastam uma de suas partes e compõe com as peças um retângulo.

Após todo esse processo retornam para verificar se a figura D teria a mesma área que C, E e F, aplicando agora uma decomposição, o Anº1Dp.nº2AAG2T1 coloca que mesmo assim ele acha que a área de D é menor e que não vai conseguir formar um retângulo com as peças obtidas, para tirarem a conclusão decompõe a figura D, aplicam movimentos de reflexão e rotação mas não conseguem obter sucesso. Por fim chegam a conclusão que apenas as figuras B, C, E e F possuem as mesmas áreas que A, assim ora mobilizam um teorema em ação verdadeiro que *o corte e colagem sem perda nem sobreposição conserva a área* em relação as decomposições e recomposições das figuras E e F, mas por outro lado na resolução final mobilizam um teorema em ação falso segundo *o qual figuras que tem mesma forma possuem mesmas áreas*, por fim organizam as figuras da seguinte forma:

Figura 109- Protocolo final da Dp.nº2AAG2T1



O extrato do protocolo da ficha dessa dupla apresenta a resposta e a justificativa dada pela dupla sobre essa tarefa:

Figura 110- Extrato do protocolo DLnº2AAG2T1

Resposta

mesmo B e C $\frac{1}{2}$

Explique como você fez para responder essa tarefa:

Juntamos as partes triangulares para poder fazer a igualdade

A justificativa de resolução da dupla que aparece nesse protocolo diz respeito apenas a decomposição das figuras em triângulos, se referindo as partes decompostas das figuras E e F, que lhes permitiram compor um retângulo. No *Apprenti Géomètre 2* capturamos a tela da última ação dessa dupla no software, como ilustrou o protocolo 109.

5.1.4 Consideração Geral Sobre a Tarefa 1

Organizamos em forma de quadro os teoremas em ação verdadeiros, falsos, e procedimentos utilizados pelas duplas nos três ambientes com o objetivo de comparar as figuras e dizer se teriam ou não mesma área que A.

Quadro 10- Teoremas em ação mobilizados nos três ambientes da pesquisa

Teorema em ação verdadeiro	Duplas
Área é invariante por isometria	Dpn°2APLT1, Dpn°1AMMT1, Dpn°2AMMT1, Dpn°1AAG2T1
O corte e colagem (decomposição e recomposição) sem perda nem sobreposição conserva as áreas.	Dpn°2AAG2T1
Teorema em ação falso	Duplas
Duas figuras de mesma forma têm mesma área.	Dpn°1APLT1, Dpn°2APLT1, Dpn°1AMMT1, Dpn°1AAG2T1, Dpn°2AAG2T1
Duas figuras que têm as mesmas quantidades de lados têm mesma área.	Dpn°1APLT1
Figuras diferentes possuem áreas diferentes	Dpn°1AMMT1, Dpn°2AMMT1, Dpn°2AAG2T1

Observamos nos procedimentos utilizados pelos sujeitos participantes da pesquisa nessa tarefa com situação de comparação de área, que ora mobilizavam teoremas em ação verdadeiros, ora mobilizavam teoremas em ação falsos e por vezes na comparação de uma mesma figura, percebemos que a ideia de ter mesma área para muitos desses alunos, estava relacionada às seguintes questões:

- 1° A mesma quantidade de lados (Dpn°1APLT1, Dpn°1AMMT1);
- 2° As figuras precisam ser idênticas (Dpn°1AMMT1, Dpn°1AAG2T1, Dpn°2AAG2T1);
- 3° Partir de uma figura e chegar em outra por decomposição e recomposição; (Dpn°2AAG2T1);
- 4° Precisam ter mesma forma; (Dpn°1APLT1, Dpn°2APLT1, Dpn°1AMMT1);

Destacamos em cinco categorias as ideias de mesma área que foram mobilizadas pelas duplas nos três ambientes, a saber: papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*. Os teoremas em ação apresentados no quadro 10 foram identificados a partir dos diversos procedimentos mobilizados pelas duplas para comparar o conjunto de figuras da

tarefa 1, elencaremos os respectivos procedimentos e quais as duplas que os mobilizaram na tabela a seguir:

Quadro 11- Procedimentos de comparação das áreas das figuras da tarefa 1

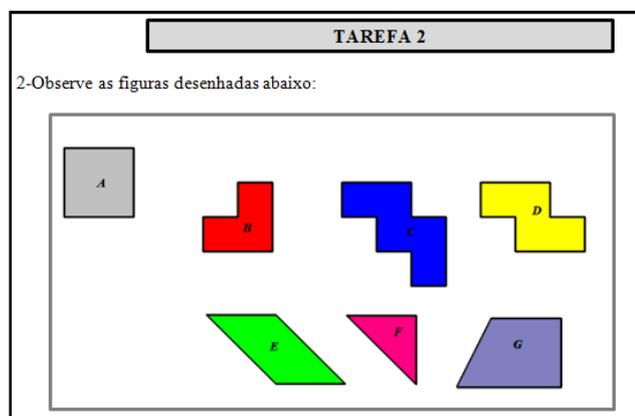
Procedimentos	Duplas
Visualmente	Dpn°1APLT1, Dpn°2APLT1, Dpn°1AAG2T1
Translação e sobreposição	Dpn°1AAG2T1
Rotação, translação e sobreposição	Dpn°1MMT1
Decomposição, recomposição e translação	Dpn°2AAG2T1
Rotação, translação e inclusão	Dpn°1AAG2T1
Rotação e sobreposição	Dpn°2APLT1, Dpn°2MMT1
Decalcar e sobrepor	Dpn°1MMT1, Dpn°2MMT1
Duplicar e justapor	Dpn°1AAG2T1
Duplicação e rotação	Dpn°1AAG2T1
Rotação, translação e sobreposição	Dpn°1MMT1, Dpn°1AAG2T1
Decalque e inclusão	Dpn°1MMT1, Dpn°2MMT1
Reflexão	Dpn°1AAG2T1
Reflexão, rotação e translação	Dpn°2AAG2T1
Redução e ampliação	Dpn°2AAG2T1
Decomposições sucessivas	Dpn°2AAG2T1
Compor para completar figuras	Dpn°2AAG2T1
Duplicação, translação e justaposição	Dpn°2AAG2T1

Alguns dos procedimentos apresentados nesse quadro para comparar as áreas das figuras da tarefa 1, foram mobilizados pelas duplas ora em um ambiente ora em outro pela possibilidade dinâmica de utilização dos materiais, no caso do ambiente materiais manipulativos e pela possibilidade da utilização das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.

5.2 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 2 NOS TRÊS AMBIENTES

O objetivo dessa tarefa era identificar qual a ideia que o aluno mobilizava de área maior, menor ou igual à de uma figura dada, neste caso tínhamos um conjunto de seis figuras B, C, D, E, F e G que deveriam ser comparadas ao quadrado A. Embora essa tarefa privilegie a articulação entre o quadro geométrico e o da grandeza, o aspecto numérico também estava em jogo, uma vez que a comparação das figuras B, C e D podia ser realizada facilmente com base na contagem de quadradinhos (unidade de área), diferentemente das figuras E e G que precisariam mobilizar processos de decomposição e recomposição e F sobreposição. Assim havia também uma articulação entre o quadro das grandezas e o quadro numérico.

Figura 111- Tarefa 2 (Versão Papel e Lápis)



Fonte: elaborada pelo autor

Essa tarefa era composta por três itens, o primeiro solicitava que os alunos colocassem quais figuras teriam área maior que a do quadrado A, assim tínhamos C e G, as de área menor B e F e as de área igual E e D. Os procedimentos previstos para comparação das figuras eram: contagem dos quadradinhos, decomposição e recomposição, inclusão e sobreposição.

As duplas mobilizaram diferentes estratégias de resolução desta tarefa de acordo com cada ambiente e nos permitiu identificar alguns teoremas em ação verdadeiros e/ou falsos a partir das comparações das figuras.

O quadro a seguir sintetiza as respostas das duplas para a tarefa 2

Quadro 12- Síntese das respostas das duplas

Dupla	Resposta					
	Figuras de área maior que a de A	Critérios	Figuras de área menor que a de A	Critérios	Figuras de mesma área que a de A.	Critérios
Dpn°1APL	E	RE	B	RPC	G	RE
Dpn°2APL	G	RC	F	RPC	B	RE
Dpn°1AMM	G	RC	F e B	RC	D	RPC
Dpn°2AMM	C e E	RE	F e B	RC	D	RPC
Dp. n°1AAG2	C e G	RC	F	RPC	D	RPC
Dp. n°2AAG2	C e G	RC	F	RPC	B e D	RE

Consideramos as respostas dos alunos de acordo com os seguintes critérios: RC- resposta correta, RPC- resposta parcialmente correta, RE- resposta errada, NR não respondeu.

Os resultados mostram que a maioria das duplas consegue encontrar uma figura de área maior, menor ou igual à área do quadrado A e por isso consideramos a resposta parcialmente correta (RPC), mas observamos uma quantidade relativa de respostas erradas, principalmente na identificação de figuras de mesma área que a do quadrado A.

5.2.1 Análise a Posteriori da Tarefa 2 Ambiente Papel e Lápis

Para comparar as áreas das figuras dessa tarefa, as duplas desse ambiente utilizaram diferentes estratégias de forma intuitiva. Com relação ao item (a) a Dp.n°1APLT2 coloca que o paralelogramo E tem área maior que a do quadrado A, nesse caso não dispunha de outro recurso apenas o lápis grafite para comparar às áreas. O protocolo a seguir apresenta a resposta e a justificativa dessa dupla.

Figura 112- Extrato do protocolo da Dpn°1APLT2

a) Entre as figuras, quais possuem área maior que A? <u> E </u> Explique como você fez:
<i>Eu acho porque a figura E é mais comprida.</i>

Essa dupla considera E como tendo área maior que a do quadrado A, na análise da vídeo gravação identificamos que se referiam a dois dos lados da figura E, ou seja, segundo a An°1Dpn°1APLT2 “ *E tem área maior porque tem dois lados mais compridos que A*”. Essa dupla leva em consideração o comprimento dos lados das figuras no processo de comparação de suas áreas.

Nesse caso além de mobilizarem um procedimento incorreto de comparação das áreas, essa dupla traz à tona um teorema em ação falso segundo o qual *o comprimento dos lados determinam as áreas*. Não havíamos previsto em nossas análises a priori esse tipo de comparação, mas evidenciamos nos estudos de Duarte (2002) que esse processo de comparação de área considerando comprimentos dos lados da figura aparece com frequência.

A Dpn°2APLT2 coloca que apenas “G” tem área maior que a de A, mesmo não justificando em sua ficha de papel, identificamos nas análises dos protocolos vídeo gravado que a aluna An°2Dpn°1APLT2 indaga o seguinte: “*G é mais maior porque tem um pedaço a mais que A*”. Assim para esses alunos a relação de ordem das áreas está apoiada em um invariante operatório correto de acordo com o princípio de aditividade de área previsto em nossa análise, segundo o qual dada uma figura G composta pela união de duas figuras quase disjuntas (com no máximo pontos de fronteira em comum) G1 e G2, a área de G é a soma das áreas de G1 e G2.

Então a área de G é maior que a de A por essa figura ser composta por uma figura de mesma área que A mais a junção de outra figura de área menor que A.

Com relação ao item (b) sobre quais das figuras possuíam área menor que A, a Dpn°1APLT2 responde ser apenas a letra B, segundo essa dupla porque “*cabe dentro de A*” o protocolo a seguir apresenta a resposta final dada por essa dupla ao item (b):

Figura 113- Extrato do protocolo Dpn°1APLT2 item (b)

b) Entre as figuras, quais possuem área menor que A? <u>B</u> Explique como você fez:
Eu acho porque a figura B da dentro de A.

Esses alunos tentaram como alternativa para chegarem a essa conclusão medir a figura B com o polegar e em seguida a figura A, observamos em uma das falas do An°2Dpn°1APLT2 a seguinte expressão: “*se a gente colocar B dentro de A falta uma parte*”, assim identificamos dois procedimentos corretos de comparação de área mobilizados por essa dupla por inclusão e sobreposição. Ao realizarem essa comparação não identificaram mais nenhuma figura de área menor, prosseguem para o próximo item. A dupla Dpn°2APLT2 coloca que apenas F tem área menor que A como ilustra o protocolo a seguir:

Figura 114- Extrato do protocolo Dpn°2APLT2

b) Entre as figuras, quais possuem área menor que A? <u>Dentro "F"</u> Explique como você fez:
Porque o triângulo está no meio com a metade do quadrado.

Essa dupla explica que F tem área menor por representar metade do quadrado, nesse caso está presente o processo de decomposição mentalmente, essa dupla sente constantemente a necessidade de utilizar mecanismos que pudessem confirmar seus procedimentos, solicitaram régua, papel de decalque e tesoura. Como o nosso objetivo era também observar quais estratégias os alunos mobilizariam nesse ambiente estático para comparar as figuras, não podíamos permitir o acesso a outros recursos diferentes do lápis grafite, então um dos alunos dessa dupla utilizou o dedo indicador, sobrepôs em F e em seguida em A, supondo então, que a área de F era metade da área de A. Observamos nas comparações dessa dupla um teorema em ação verdadeiro: “*área é invariante por isometrias*”.

Para exemplificar essa questão, Douady e Perrin-Glorian (1989) colocam que ao deslizar uma determinada figura e por sobreposição recobrirmos apenas uma parte de outra, a área da primeira é menor que a área da segunda.

Com relação ao item (c) a Dpn^o1APLT2 coloca que a letra G tem a mesma área que a de A por possuírem a mesma quantidade de lados, assim mobilizam um teorema em ação falso segundo o qual *duas figuras que possuem a mesma quantidade de lados possuem mesmas áreas*.

Figura 115- Extrato do protocolo da Dpn^o1APLT2

<p>c) Entre as figuras, quais possuem a mesma área que A? <u>G</u> Explique como você fez:</p> <p><i>Eu acho porque todos dois tem mesmo lado.</i></p>

Os alunos da Dpn^o2APLT2 antes de realizar a comparação das áreas das figuras para identificar quais teriam as mesmas áreas, conversam entre si e surge a seguinte pergunta: “*Como assim mesmas áreas*”? Em seguida o An^o1Dpn^o2APLT2 responde com a seguinte expressão: “*é ter o mesmo tamanho*” a conserva dessa dupla nos traz algumas reflexões, destacaremos a seguir esse diálogo:

An^o1Dpn^o2APLT2- *eu acho que B tem mesma área.*

An^o2Dpn^o2APLT2- *tem não porque B falta um pedaço, olha!*

An^o2Dpn^o2APLT2- *era bom que a gente pudesse desenhar para ver.*

An^o1Dpn^o2APLT2 – *eu ainda acho que é B;*

An^o2Dpn^o2APLT2- *mas por quê ?*

An^o1Dpn^o2APLT2 – *porque tem mesma altura e mesma largura.*

An^o2Dpn^o2APLT2 – *Ah bom! Eu acho que tem mesma largura, mas mesma altura? (dúvida).*

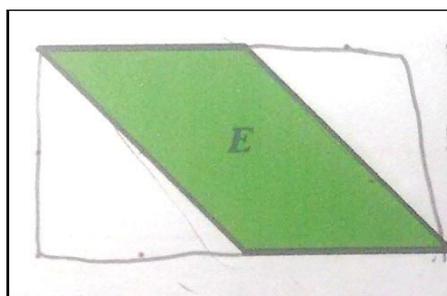
Por fim decidem que B tem a mesma área que A, observamos que um dos alunos no início da conversa, para ele faltava em B um pedaço, ou seja, uma parte de B para poder ter mesma área que a da figura A, identificamos assim que a ideia de mesma área para esse aluno estaria relacionada as figuras A e B terem a mesma forma, ou mesmo que B teria que ser idêntico ao quadrado A para terem a mesma área, por fim o comprimento de dois dos lados da figura B determinaram para esses alunos a concepção de ter mesma área. Essa questão foi prevista e representada na figura 28 da análise a priori dessa tarefa.

5.2.2 Análise a Posteriori da Tarefa 2 Ambiente Materiais Manipulativos

Essas duplas diferente da anterior tiveram como possibilidade utilizar o papel de decalque, tesoura, fita adesiva como recursos para comparar as áreas das figuras da tarefa 2. No item (a) tanto a Dpn^o1AMMT2 como Dpn^o2AMMT2, decalcam o quadrado A com o papel de decalque e em seguida iniciam o processo de comparação das áreas das figuras, tendo A como referência, a Dpn^o1AMMT2 sobrepõe A em cada uma das figuras B, C, D, E, F e G e como A por inclusão cabe dentro de G, sobrando uma parte, assim apenas essa figura, segundo essa dupla, teria área maior que do quadrado A.

A dupla Dpn^o2AMMT2 também chega a essa mesma conclusão, porém identificam que mesmo não tendo como incluir A em C, para saber se a área de C era maior ou menor, pela contagem de quadradinhos, chegaram à conclusão que a área de C é maior que a de A. Ainda para essa dupla a área do paralelogramo E é maior que a do quadrado A, nesse caso tentam construir um retângulo na malha pontilhada quadrada, completando a figura E como mostra o protocolo a seguir:

Figura 116- Completando a figura E para formar um retângulo



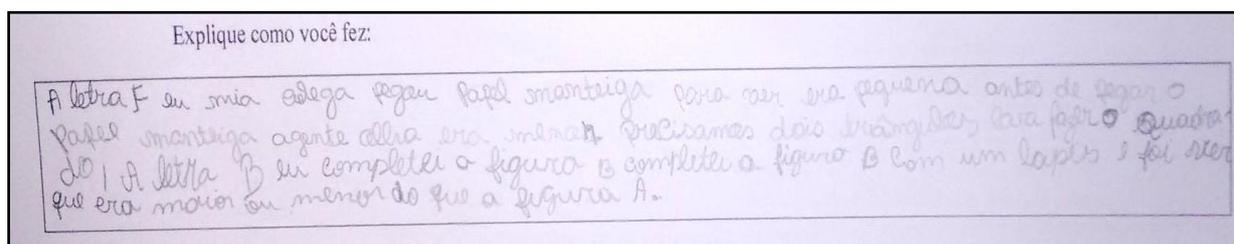
Para esses alunos ao decompor o paralelogramo E obteriam um retângulo de área maior que a de A, podendo também sobrepor perfeitamente. Assim após realizarem esse procedimento, sobrepõem o quadrado A para comparar com a figura E, colocando em seguida que a área de E é maior que a do quadrado A, porque ao sobreporem A em E sobra uma parte.

Esses alunos comentem um erro ao não conseguirem visualizar que a decomposição da figura E por sua diagonal principal, resultaria em dois triângulos retângulos, que aplicando a esses uma translação, comporiam um quadrado de mesma área que A.

Com relação ao item (b) tanto a Dpn^o1AMMT2 como também a Dpn^o2MMT2 colocam que as áreas das figuras F e B, são menores que a do quadrado A. A Dpn^o1AMMT2 chegam a essa conclusão após decalcarem F e B e sobreporem ao quadrado A.

A Dpn^o1AMMT2 realiza esse processo visualmente, mas em seguida para verificar se estariam corretas, realizam dois procedimentos distintos como descreve o protocolo dessa dupla a seguir:

Figura 117- Descrição do processo de comparação Dpn^o1AMMT2



Transcrição do procedimento de comparação da Dpn^o1AMMT2: “A letra F eu mia colega pegou papel manteiga para ver era pequena antes de pegar o papel manteiga agente olha era menor. Precisamos dois triângulos para fazer o quadrado, A letra B eu completei a figura B completei a figura B com um lápis e foi ver que era maior ou menor do que a figura A”.

A partir dessa descrição da justificativa utilizados por essa dupla para comparar as áreas das figuras F e B, verificamos que segundo essa dupla F é menor porque é metade do quadrado, decalcaram também F e sobrepuseram ao quadrado A para confirmar suas respostas e B verificaram que era menor que A, pois faltava um quadradinho para que tivessem mesma área. Identificamos procedimentos de inclusão, sobreposição, completar quadrados nas comparações dessas duplas para estabelecer a relação de ordem das áreas das figuras.

Com relação ao item (c) quais figuras teriam mesma área que a do quadrado A identificamos procedimentos semelhantes das duplas desse ambiente, elas colocaram que D tem mesma área que A, após realizarem os seguintes procedimentos: a Dpn^o1AMMT2 decalca D e sobrepõe ao quadrado A, observando que essas figuras não se sobrepõem completamente, decompõem D em dois retângulos em seguida sobrepõe a A confirmando que possuem as mesmas áreas. Um teorema em ação verdadeiro que podemos identificar nesses procedimentos é “duas figuras que coincidem por sobreposição tem mesma área”.

A Dpn^o2AMMT2 não concretiza o processo de decomposição com corte e colagem apenas coloca que deslizando uma das partes da figura D, comporiam uma figura que coincidiria por sobreposição em A. Identificamos alguns teoremas em ação verdadeiros nessa

comparação, segundo os quais “*área é invariante por isometria*”, e o “*corte e colagem sem perda nem sobreposição conservam as áreas*”.

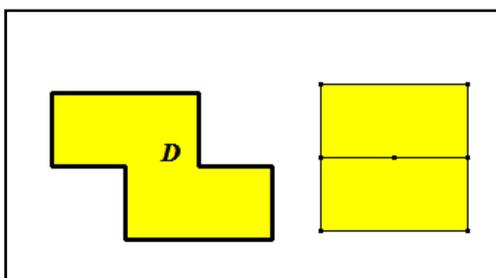
5.2.3 Análise a Posteriori da Tarefa 2 *Apprenti Géomètre 2*

A dupla Dpn°1AAG2 iniciou a tarefa utilizando o menu “*Movimentos*” as opções rotação e mover para sobrepor as figuras e compará-las a fim de encontrar as figuras com maior e menor área que A, da mesma forma fizeram com cada uma das figura para identificarem qual das figuras B, C, D, E e F teria mesma área que A. Apenas os protocolos escritos não nos permitiram identificar quais procedimentos esses alunos mobilizaram para responder essa tarefa, foi necessário recorrer à vídeo gravação da captura da tela do computador para podermos analisar os procedimentos realizados.

Como resposta à tarefa no protocolo escrito observamos que para eles as figuras C e G, possuíam área maior que a da Figura A, chegaram a essa conclusão ao sobrepor a figura A ao pentaminó C e visualmente identificarem que havia uma parte em C que sobrava, o mesmo acontece na comparação de A com G, dessa vez ao invés de mover o quadrado A para sobrepô-lo a G, fazem o procedimento inverso. Essa dupla acerta esse item por completo.

Com relação às figuras que tem menor área, colocam apenas que F, eles movem essa figura, sobrepondo ao quadrado A e chegam a essa conclusão. Não conseguem identificar que a área de B também é menor que a de A, seguem para o próximo item para identificar quais das figuras tinham mesma área que a da figura A, visualmente identificam que D tem mesma área, após decomporem e recomporem um quadrado com as peças decompostas como apresentamos no protocolo a seguir.

Figura 118- Decomposição e recomposição de D

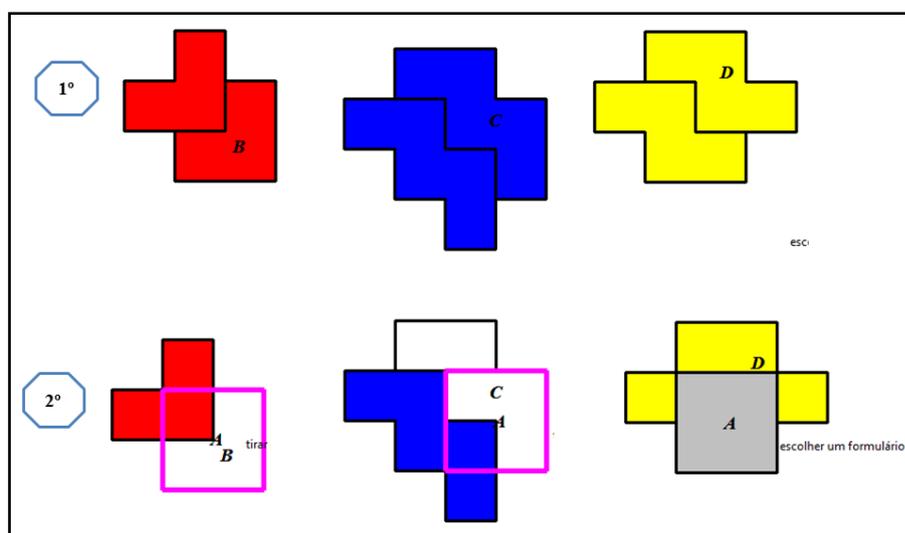


Esses alunos após a decomposição não sobrepõem as peças, mas chegam à conclusão que A e D têm mesmas áreas. Esse procedimento nos traz à tona alguns teoremas em ação verdadeiros segundo os quais, *área é invariante por isometria* e o *corte e colagem sem perda*

nem sobreposição conservam as áreas. Eles tentam aplicar esse mesmo processo no paralelogramo E, mas não conseguem decompor a figura de uma forma a produzir uma figura congruente a A para então observar se teriam ou não mesmas áreas, realizam decomposições sucessivas em diversas partes da figura, mas não obtêm sucesso. Assim não deixam claro se as figuras A e E têm ou não mesma área.

A Dpn^o2AAG2 utilizou um procedimento diferente da dupla anterior e do previsto em nossas análises a priori para comprar as áreas das figuras, eles duplicaram algumas das figuras e tentaram completá-las para então por sobreposição identificar suas áreas. A imagem a seguir apresenta o processo de comparação.

Figura 119 Extrato do protocolo Dpn^o 2AAG2T2



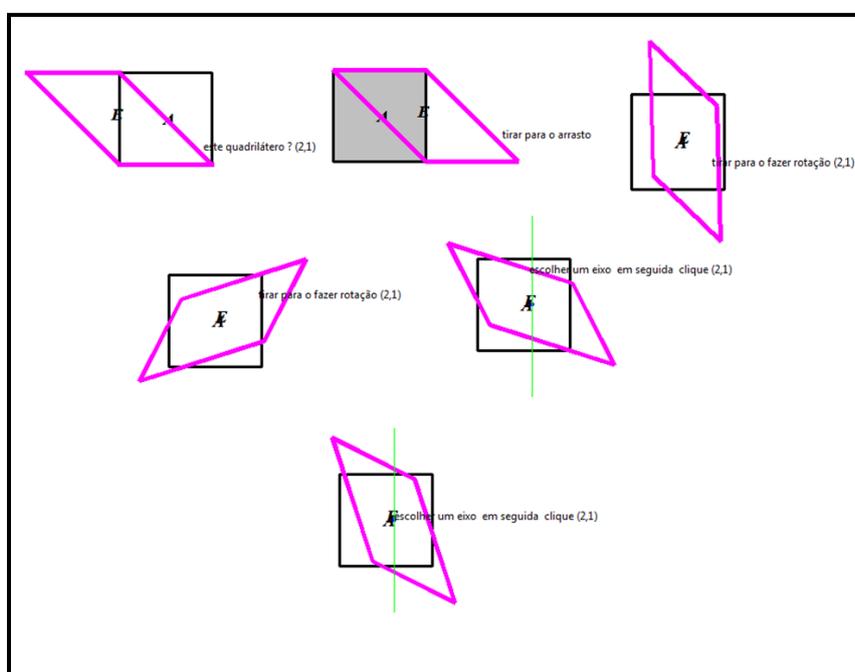
Entendemos que esse processo utilizado por essa dupla remete ao de compor uma superfície que ao sobrepôr, ou mesmo incluir uma determinada figura, fosse possível comparar por sobreposição suas áreas. Assim eles colocam que C tem área maior que a de A, B e D têm mesma área, acertam que a figura D tem mesma área, mas erram ao não analisarem que no caso da figura B faltava uma parte para que assim tivesse a mesma área que a do quadrado A, como duplicaram B e completaram, encaixando a parte duplicada na parte que faltava e em seguida sobrepuseram o quadrado A, não compararam corretamente, assim esse erro veio à tona nessa comparação.

Com relação ao item (b) colocam que apenas F tem área menor ao moverem essa figura e colocarem sobre A, na fala do An^o1Dpn^o2AAG2 observamos a seguinte expressão: “duas de F dá uma de A” para esses alunos a área da figura F era menor por ser metade da área da figura A.

A comparação da figura G com o quadrado A, acontece por sobreposição de A em G, eles identificam que a figura G é composta por uma parte a mais que a figura A. Com relação à figura E, primeiro sobrepõem ao quadrado A, após isso aplicam várias rotações e reflexões de forma a procurar uma possibilidade de verificar se o paralelogramo E coincidiria de alguma forma por sobreposição para então explicitarem se teriam as mesmas áreas ou não.

Os passos abaixo apresentam as tentativas de verificar uma possibilidade de sobreposição perfeita de E em A.

Figura 120- Extrato do protocolo Dpn°2AAG2T2 aplicação de isometrias para comparação

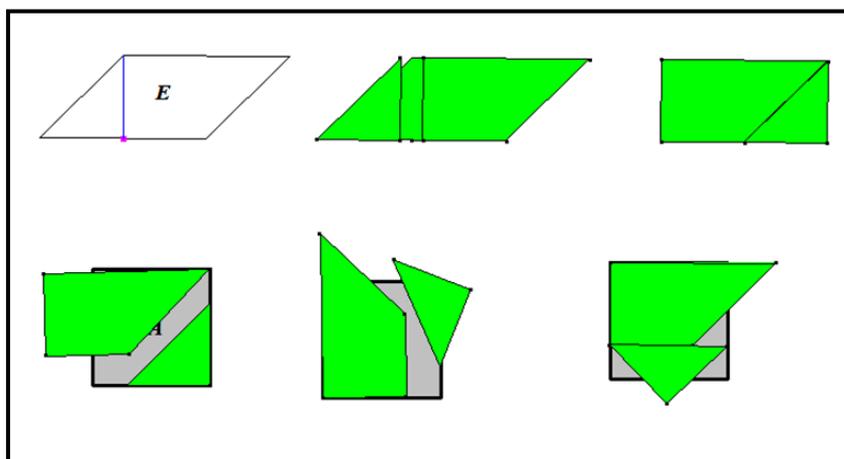


Identificamos após esses procedimentos que os alunos desfazem a sobreposição, movendo o paralelogramo E para área em branco (nesse procedimento a área é a região-concepção geométrica da área) da tela da tarefa no software, verificando uma possibilidade de decompor essa figura. Eles queriam compor um retângulo, na fala do An°1Dpn°2AAG2 que não estava utilizando o software, mas estava interagindo com os comandos necessários para que o outro integrante da dupla respondesse a tarefa relata o seguinte: “*essa figura tem muita ponta para dar certo a gente tem que decompor*”, a partir dessa conclusão verificam uma possibilidade de decompor essa figura. Diante dessa explicação entendemos que para esses alunos a ideia de ter mesma área estaria relacionada a compor uma figura que coincidissem por sobreposição, verificando que figuras equidecompostas têm mesma área.

Então se perguntaram como fazer para retirar uma das partes do paralelogramo E que lhes permitiram compor um retângulo, ao selecionarem a ferramenta decompor, tentam ligar um dos vértices a outro segmento, porém o software não responde a essa ação. Pedem ajuda ao professor pesquisador como eles poderiam decompor a figura, apontado às partes que queriam aplicar esse procedimento.

O professor pesquisador orienta que é preciso criar um ponto para dividir, a partir desse comando, selecionam a ferramenta dividir em dois e dividem um dos segmentos do paralelogramo. Apresentaremos a seguir os passos utilizados por essa dupla para comporem o retângulo:

Figura 121- Decomposição e recomposição da figura E



Após selecionarem a opção dividir e dividirem um dos lados do paralelogramo E, selecionaram a ferramenta decompor em seguida dividiram a figura e compõem um retângulo movendo e justapondo as partes decompostas, em seguida pegam cada uma dessas partes e tentam sobrepor a figura A com o objetivo de coincidir as partes decompostas sobre A, não obtendo êxito concluem dizendo que a área da figura E é maior que a de A.

Para esses alunos a ideia de ter mesma área estava relacionada às figuras coincidirem por sobreposição, como também à possibilidade de decompor e recompor de modo a obter uma figura idêntica.

5.2.4 Consideração Geral Sobre a Tarefa 2

O quadro a seguir ilustra os procedimentos que foram utilizados pelas duplas nos três ambientes com o objetivo de comparar as áreas das figuras B, C, D, E, F e G para identificarem quais teriam área maior, menor ou mesma área que a do quadrado A.

Quadro 13- Procedimentos utilizados pelas duplas para comparar as áreas das figuras da tarefa 2

Procedimentos	Duplas
Apenas visualmente	Dpn°1APLT2, Dpn°2APLT2, Dpn°1MMT2, Dpn°2MMT2
Utilizam algum mecanismo para medir (dedos, partes da mão etc.)	Dpn°2APLT2
Inclusão e sobreposição	Dpn°2APLT2, Dpn°1MMT2
Decomposição	Dpn°2APLT2
Comparação dos comprimentos dos lados das figuras	Dpn°2APLT2
Decalque e sobreposição	Dpn°1MMT2, Dpn°2MMT2
Contagem de quadradinhos	Dpn°2MMT2, Dpn°1AAG2T2
Decomposição, recomposição e inclusão	Dpn°2MMT2
Decomposição, recomposição e sobreposição	Dpn°2MMT2
Inclusão, sobreposição e completar quadrados	Dpn°1MMT2
Decomposição e translação de uma das partes da figura	Dpn°2MMT2
Rotação, mover e sobrepor	Dpn°1AAG2T2
Visualmente para em seguida sobrepor	Dpn°1AAG2T2
Mover e inclusão	Dpn°1AAG2T2
Mover e sobrepor	Dpn°1AAG2T2
Decomposição e recomposição	Dpn°1AAG2T2, Dpn°2AAG2T2
Decomposições sucessivas	Dpn°1AAG2T2
Duplicar, decompor e completar lacunas	Dpn°2AAG2T2
Rotação, Reflexão e sobreposição	Dpn°2AAG2T2

Como podemos observar várias são as combinações de procedimentos que foram utilizadas pelos alunos com o objetivo de comparar as áreas das figuras desta tarefa, os

procedimentos de decomposição, recomposição e sobreposição estiveram presentes nas comparações das figuras B, C, D, E, F e G ao quadrado A como forma de identificarem quais das figuras possuíam área maior, menor ou mesma área que a do quadrado A. Facco (2003) coloca que esses procedimentos subsidiam o raciocínio dos alunos para identificação da existência de figuras de mesma forma, mas de áreas diferentes.

A partir dos procedimentos utilizados pelos alunos para comparar as áreas das figuras dessa tarefa, alguns teoremas em ação verdadeiros e falsos vieram à tona, alguns deles já foram identificados nos estudos de Baltar (1996), Duarte (2002) e Ferreira (2010). Apresentaremos a seguir, cada um desses teoremas e quais duplas os mobilizaram.

Quadro 14- Teoremas em ação tarefa 2

Teorema em ação verdadeiro	Duplas
Área é invariante por isometria.	Dpn°1APLT2, Dpn°2APLT2 Dpn°2AMMT2, Dpn°1AAG2T2
O corte e colagem (decomposição e recomposição) sem perda nem sobreposição conservam as áreas.	Dpn°2AMMT2, Dpn°1AAG2T2
Duas figuras que coincidem por sobreposição têm mesma área.	Dpn°1AMMT2
Teorema em ação falso	Duplas
Os comprimentos dos lados das figuras determinam as áreas.	Dpn°1APLT2
Duas figuras que têm a mesma quantidade de lados têm mesma área.	Dpn°2APLT2

Com relação às ideias de área maior, menor e mesma área que a do quadrado A, identificamos nas respostas dos alunos o que para eles significavam essa relação de ordem das áreas, mesmo não pedindo para que eles organizassem as figuras em ordem da que tem maior área para que tem maior, pois esse não era o objetivo dessa tarefa, mas permitir os alunos comparar sem estabelecer esse critério, pudemos notar essas ideias presentes nas ações de cada dupla que as vezes diferiam de acordo com cada ambiente.

Ideia de área menor:

Ser metade do quadrado A- Dpn°2APLT2, Dpn°1AMMT2, Dpn°2AAG2T2, essa ideia está presente nas respostas referentes à comparação do triângulo F com o quadrado A, ora por apenas visualmente e intuitivamente como no caso da dupla do ambiente papel e lápis, ora por decalque e sobreposição no ambiente materiais manipulativos, ora por deslocamento (mover) e sobreposição no caso do *Apprenti Géomètre 2*. Segundo Douady e Perrin-Gorian (1989) ao deslizaros S_1 e sobrepor uma parte de S_2 , então a área de S_1 é menor que a de S_2 . Essa justificativa nos remete aos procedimentos utilizados pelas duplas supracitadas na comparação do quadrado A com o triângulo F.

Com relação as que conseguiram observar que a área de B era menor, colocam que falta uma parte nessa figura para que fique idêntica ao quadrado A, nesse caso a ideia de área menor estaria em uma figura que tivesse uma parte a menos que A. Douady e Perrin-Glorian (1989) justificam esse critério com a seguinte questão: Se S_1 contém menos quadrados que S_2 , então a área de S_1 é menor que a de S_2 , (nesse caso também intervém uma ideia mesmo que implícita de medida de área)

Ideia de área maior:

Ter lados maiores (as figuras que tem maior comprimento de um dos lados, têm maior área) – Dpn°1APLT2, nesse caso erram ao estabelecerem esse critério de comparação para estabelecer o princípio de relação de ordem das áreas.

A figura que é formada por mais quadrinhos, ou seja, composta por uma maior quantidade de quadrados de mesma unidade que o quadrado A tem maior área. Nesse caso a Dpn°2AMMT2 acerta ao estabelecer esse critério, levando em conta a composição da figura C um pentaminó composto por 5 quadrados congruentes e justapostos por um de seus lados e o quadrado A composto apenas por 4 quadrinhos, assim a área da figura A é menor que a de C.

O outro critério de área maior que encontramos e que é considerado correto é a inclusão, ou seja, considerar que se uma figura X cabe dentro de Y, então a área de Y é maior que a área de X. Indiretamente ao sobrepor, visualmente ou não, F em A, ou mesmo como observamos A em G, intuitivamente as duplas mobilizam esse procedimento na identificação da relação de ordem das áreas, identificando quem tem área maior ou menor.

Outra questão que podemos observar sobre ter área maior que encontramos nas resoluções dessa tarefa, e que é considerado correto está apoiado em um invariante operatório temos o princípio de aditividade de área, segundo o qual dada uma figura G composta pela

união de duas figuras quase disjuntas (com no máximo pontos de fronteira em comum) G_1 e G_2 , a área de G é a soma das áreas de G_1 e G_2 . Essa questão foi observada na comparação de A com G pela Dpn^o2APLT2.

Ideia de mesma área:

- Ter o mesmo tamanho;
- Ter mesma altura e largura;
- Ter a mesma forma;
- Coincidir por sobreposição;
- A decomposição e a recomposição sem perda nem sobreposição conservam as áreas.

Essas são as ideias de mesma área que observamos com mais frequência a partir das respostas dos alunos ao item (c) relativo às figuras que possuíam as mesmas áreas que a do quadrado A .

Para sintetizar os procedimentos e se as duplas ao compararem as áreas das figuras utilizaram critérios corretos ou não e se chegaram a partir desses critérios a respostas corretas ou incorretas, montamos uma tabela na ordem em que as comparações foram explicitadas nessa parte de análise a posteriori dessa tarefa.

Cada um dos critérios apresentados no quadro a seguir foram retirados dos procedimentos utilizados pelos alunos nos diferentes ambientes para comparar as áreas das figuras. Algumas das duplas não comparam figura por figura, por isso não tivemos como explicitar as comparações para identificarmos os critérios estabelecidos.

Quadro 15- Respostas consideradas corretas ou não na comparação das áreas pelas duplas

Crítérios estabelecidos	Dupla (as)	C- Correto, I- Incorreto
E tem área maior que a de A porque tem lados maiores.	Dpn ^o 1APLT2	Incorreto
G tem área maior que a de A porque tem uma parte a mais.	Dpn ^o 2APLT2, Dpn ^o 2AAG2T2	Correto
B tem área menor que A porque cabe dentro de A.	Dpn ^o 1APLT2	Correto
F tem área menor que a de A porque cabe dentro de A.	Dpn ^o 2APLT2	Correto
G tem a mesma área que a de A porque tem a mesma quantidade de lados.	Dpn ^o 1APLT2	Incorreto
B e A tem mesma área por causa da projeção de dois dos lados.	Dpn ^o 2APLT2	Incorreto
G tem área maior que a de A, porque A cabe dentro de G e sobra uma parte.	Dpn ^o 1AMMT2, Dpn ^o 2AMMT2	Correto
A área de C é maior que a área de A pela contagem de quadradinhos.	Dpn ^o 2AMMT2	Correto
E tem área maior que a de A porque decompondo e compondo um retângulo, ao sobrepor A esse apenas ocupa uma parte da figura formada.	Dpn ^o 2AMMT2	Incorreto
As áreas de F e B são menores que a de A, porque ao sobrepor ficam faltando uma parte.	Dpn ^o 1AMMT2, Dpn ^o 2AMMT2	Correto
F tem área menor por ser metade da figura A. (Decalque e sobreposição).	Dpn ^o 1AMMT2, Dpn ^o 2AAG2T2	Correto
D e A possuem as mesmas áreas por recorte, colagem e sobreposição.	Dpn ^o 1AMMT2	Correto
D e A possuem as mesmas áreas, uma vez que, deslizando uma das partes de D, consegue-se compor uma figura que coincide por sobreposição em A.	Dpn ^o 2AMMT2	Correto
C e G têm área maior que a de A porque sobra uma parte ao comprar com A.	Dpn ^o 1AAG2T2	Correto
F tem área menor que a da figura A porque ao mover e sobrepor F ocupa apenas uma parte de A.	Dpn ^o 1AAG2T2	Correto
D tem mesma área que A porque ao decompor D e com as partes decompostas compor um quadrado e por sobreposição coincide em A.	Dpn ^o 1AAG2T2	Correto
C tem mesma área que A pelo processo de completar quadrados, a partir da duplicação de C e encaixe da figura duplicada em uma de suas partes, sobrepondo A para conferir.	Dpn ^o 2AAG2T2	Correto
D tem mesma área que A pelo processo de completar quadrados, a partir da duplicação de D e encaixe da figura duplicada em uma de suas partes, sobrepondo A para conferir.	Dpn ^o 2AAG2T2	Correto
B tem mesma área que A ao duplicar B e encaixar em uma de suas partes para sobrepor A e conferir.	Dpn ^o 2AAG2T2	Incorreto
E têm área maior que A por não conseguirem compor com as partes decompostas de E, uma figura que por sobreposição coincida em A.	Dpn ^o 2AAG2T2	Incorreto

5.3 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 3 NOS TRÊS AMBIENTES

O objetivo dessa atividade era saber qual é a ideia de mesma área que os alunos mobilizariam, ou ainda se para ele o número parece ser suficiente para determinar as áreas das figuras.

Como os resultados foram semelhantes nos três ambientes não destacaremos nessa análise cada um como fizemos anteriormente em tópicos, mas faremos uma apresentação geral dos resultados e dos procedimentos utilizados, caso se diferencie em cada um dos ambientes.

Figura 122- Enunciado da tarefa 3- Versão Papel e Lápis

TAREFA 3

3-Observe as figuras abaixo:



Figura 1



Figura 2





Vamos chamar de "A", a unidade de medida definida pelo triângulo 

Vamos chamar de "B", a unidade de medida definida pelo losango 

Qual a área da figura 1 usando "A" como unidade de medida? _____

Qual a área da figura 2 usando "B" como unidade de medida? _____

Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área? _____

Fonte: elaborada pelo autor

Todas as duplas conseguiram medir as áreas das figuras 1 e 2 de acordo com suas respectivas unidades, a dificuldade se apresentava no item C, quando a partir da igualdade de valor numérico as duplas Dpn^o1APLT3, Dpn^o2APLT3, Dpn^o1AMMT3, Dpn^o2AAG2T3 estabeleceram a igualdade das áreas e que podem ser caracterizados como indícios de concepções numéricas de área.

5.3.1 Respostas e Procedimentos Utilizados Pelas Duplas nos Três Ambientes da Pesquisa

Como resposta a essa tarefa as duplas Dpn°2APLT3, Dpn°1AMMT3, Dpn°1AAG2 T3 e Dpn°2 AAG2T3, colocam que a área da figura 1 são 6 e a área da figura 2 também são 6, respondendo no terceiro item que essas figuras tinham as mesmas áreas porque contaram quantos triângulos cabiam na figura 1 e quantos losango cabiam na figura dois e deu o mesmo número. Como previmos esses alunos não levaram em conta o par (número-unidade de medida) para expressar as áreas das figuras 1 e 2. Neste caso para essas duplas de alunos o número parece ser suficiente para determinar as áreas das figuras, sendo o aspecto numérico um fator determinante para expressar as áreas. O extrato de protocolo a seguir, apresenta a resposta final da dupla Dpn°2APLT3:

Figura 123- Extrato do protocolo da Dpn°2APLT3

Qual a área da figura 1 usando "A" como unidade de medida?	6
Qual a área da figura 2 usando "B" como unidade de medida?	6
Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área?	Sim
Justifique como você pensou para responder essa tarefa:	
Porque nós contamos os triângulo e losango e deu a mesma letra quantidade.	

Essa dupla do ambiente papel e lápis utilizou procedimento de contagem para saber quantos triângulos iguais a A caberiam na figura 1 e quantos losangos iguais a B caberiam na figura 2, assim determinaram as medidas das áreas de cada um das figuras 1 e 2, nas unidades dadas. Como nos dois casos, a medida foi seis a dupla considera que as figuras tem áreas iguais, apoiando-se na mobilização de uma concepção numérica da área

Nesse caso mobilizam um invariante operatório incorreto segundo o qual duas figuras distintas, cujas medidas de área com unidades distintas são iguais têm mesma área.

A Dpn°1AMMT3 apresenta em suas respostas, justificativas semelhantes ao da dupla Dpn°2APLT3 descritas anteriormente.

Figura 124- Extrato do protocolo escrito da Dpn°1AMMT3

Qual a área da figura 1 usando "A" como unidade de medida?	6
Qual a área da figura 2 usando "B" como unidade de medida?	6
Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área?	sim
Justifique como você pensou para responder essa tarefa:	
<p>Agente Pensou de em esta um triângulo e um losango para medir a figura 1 e figura 2 então só alteramos a quantidade de área</p>	

Esses alunos chegam a essa conclusão após recortarem as unidades A e B que lhes foram entregues no início da tarefa, eles apenas recortam uma unidade de cada e em seguida deslizam sobre as respectivas figuras 1 e 2 conforme solicitado no enunciado da tarefa.

As duplas que também utilizaram o *Apprenti Géomètre 2* também chegam a mesma conclusão que as anteriores porém justificam da seguinte forma:

Figura 125- Extrato do protocolo Dpn°1AAG2T3

Qual a área da figura 1 usando "A" como unidade de medida?	6
Qual a área da figura 2 usando "B" como unidade de medida?	6
Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área?	Sim
Justifique como você pensou:	
<p>Eu pensei que colocando o triângulo verde dentro de cada uma das figuras 1 e 2 e riscando uma vez feita que as áreas</p>	

Essa dupla do ambiente *Apprenti Géomètre 2* justifica sua resposta, colocando que levou em consideração apenas a unidade de medida definida pelo triângulo verde para medir as áreas das figuras 1 e 2, mas observamos na vídeo gravação que se referiam ao triângulo verde para medir a área figura 1 e o losango azul para medir a área da figura 2, mas como a unidade B foi composta por dois triângulos congruentes ao da unidade A, esses alunos se confundiram ao justificar suas respostas.

Observamos também que para os alunos dessa dupla chegarem à resolução dessa tarefa, utilizaram o processo de ladrilhagem, como previmos, escolheram a ferramenta duplicar do menu operação, em seguida duplicam as unidades A e B e ladrilharam cada uma das figuras 1 e 2 com suas respectivas unidades, utilizando as ferramentas mover e rotação, seguido da contagem para definir as áreas das figuras 1 e 2.

Para o ladrilhamento da figura 1 os alunos além de duplicarem, aplicaram ora uma reflexão, ora rotação nos triângulos pra encaixá-los perfeitamente e completar a ladrilhagem

dessa figura, com uma quantidade suficiente de triângulos em posições diferentes das dos duplicados.

A Dpn^o2AAG2T3 utilizou como procedimento para medir as áreas das figuras 1 e 2, apenas a contagem, ou seja, visualmente contaram quantos triângulos iguais a A caberia na figura 1 e quantos losangos caberiam na figura 2 e assim definiram as medidas de suas áreas como sendo 6, também não levaram em conta o par número unidade de medida, colocam que as figura 1 e 2 têm as mesmas áreas e justificam que contaram e juntaram as unidades, como ilustra o extrato do protocolo a seguir:

Figura 126- Extrato do protocolo da Dpn^o2AAG2T3

Qual a área da figura 1 usando "A" como unidade de medida?	6
Qual a área da figura 2 usando "B" como unidade de medida?	(6)
Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área?	A mesma área
Justifique como você pensou:	contando e juntando as mesmas figuras

As duplas Dpn^o1AAG2T3 e Dpn^o2AMMT3 levaram em consideração em suas respostas o par (número- unidade de medida). Para elas o aspecto numérico não é suficiente para definir se duas figuras tem mesma área. Observamos que explicitaram claramente que as figuras 1 e 2 não possuem as mesmas áreas. Porém a justificativa final das respostas dessas duplas nos traz uma reflexão sobre a ideia de mesma área que são mobilizadas, como por exemplo, o extrato do protocolo da Dpn^o1AAG2T3 que chegou a conclusão pela contagem das unidades visualmente que área da figura 1 são seis triângulos e a área da figura 2 seis losangos e afirmam que essas figuras não têm mesma área de acordo com os seguinte critérios:

Figura 127- Extrato do protocolo da Dpn^o1AAG2T3

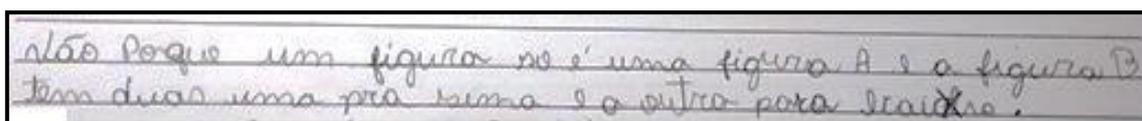
Justifique como você pensou para responder essa tarefa:
Porque elas não são iguais
Porque elas tem o mesmo
modelo e a figura 1 tem um
triângulo e a outra tem
dois triângulos

Identificamos que para essa dupla as figuras não tem mesma área porque não são iguais, assim a área estaria associada ao formato das figuras, ou seja, duas figura para terem mesma área precisariam ser idênticas, nesse caso a área está associada ao aspecto geométrico das figuras e não há uma articulação entre o quadro geométrico e o das grandezas, ao estabelecerem esse critério para definir se as figuras possuíam ou não as mesmas áreas.

Ainda prosseguem colocando que elas têm o mesmo modelo, interpretamos por meio da vídeo gravação que essa dupla se referia ao formato das figuras e porque a figura 1 era composta apenas de triângulos e a figura 2 de losangos, sendo esses formados por dois triângulos e como a figura 2 eram constituídas por vários losangos que equivaliam a dois triângulos da unidade A, essa dupla entende que esses critérios eram fatores primordiais para determinar as diferenças das áreas.

Outro procedimento que destacamos foi o utilizado pela Dpn^o2AMMT3, para definir as medidas das áreas das figuras 1 e 2, apenas utilizaram o processo de contagem visualmente e verificaram que a área da figura 1 são seis triângulos e a área da figura 2 são seis losangos. O que nos chama a atenção é o procedimento utilizado para verificar se as figuras tinham ou não as mesmas áreas. Essa dupla decalca a figura 1 e sobrepõe a figura 2, chegando a conclusão que a figura 2 é constituída por duas da figura 1, justapostas em posições diferentes. Assim justificaram após realizarem esses procedimentos a seguinte questão:

Figura 128- Extrato do protocolo da Dpn^o2AMMT3



não porque um figura no é uma figura A e a figura B tem duas uma pra soma e a outra para dividir.

A partir dessa justificativa e da análise dos protocolos vídeo gravados identificamos que para essa dupla o que a questão numérica não determinava a diferenças das áreas das figuras 1 e 2, mas para elas esse aspecto se confirmava ao perceber que a figura 2 era composta por duas figuras iguais a 1, sendo que uma delas em posição diferente.

Duarte (2002) nos traz uma justificativa para essa questão, ao expor em seu estudo o princípio da aditividade das áreas, no qual essa dupla utilizou implicitamente, ou seja, a área da união de duas figuras sem sobreposição é igual à soma da área dessas duas figuras. Estendemos essa explicação para o seguinte procedimento se uma figura S é duplicada e obtém-se uma figura S', a soma das áreas de S + S' será maior que a área de S.

Podemos perceber então que pela aditividade das áreas essa dupla chega a uma conclusão correta sobre as áreas das figuras 1 e 2 serem diferentes.

Todas as duplas percebem que as áreas das unidades A e B, são *invariantes por isometrias*, e mesmo que a maioria não tenha levado em conta o par (número unidade de medida), efetuaram as medições de cada uma das figuras utilizando as unidades sugeridas.

A partir da aplicação dessa tarefa entendemos a necessidade de acentuar nas escolas o trabalho com a situação de medida de área, pois mesmo prevendo que os alunos não teriam problemas para responder essa tarefa, uma vez que, os livros didáticos trazem esse tipo de situação desde os anos iniciais do ensino fundamental, Duarte (2002) e Ferreira (2010), observam que o aspecto numérico ainda persiste na concepção de área, ou seja, como fator determinante para definir as áreas das figuras, ou mesmo no processo de comparação de áreas para explicitar a igualdade das áreas de duas figuras.

As demarcações confundiram um pouco os alunos na determinação das áreas das figuras 1 e 2, como previmos, na elaboração dessa tarefa. Deveríamos ter retirado, ao menos no ambiente papel e lápis e no *Apprenti Géomètre 2*, para analisarmos procedimentos diferentes dos de contagem diretamente por visualização dos ladrilhos já dispostos nas figuras 1 e 2, porém não havia possibilidade devido ao bug que o software apresentava de erro na elaboração dessa tarefa.

Os resultados encontrados nessa tarefa diferem dos apresentados nas pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989), segundo essas autoras os alunos ao trabalharem com a abordagem da medida e a comparação das áreas na qual o aspecto numérico estava em jogo, o recurso dos números não causaram problemas nessa comparação.

Em nosso estudo observamos que 4 das duplas levam em conta o aspecto numérico para definir se as figuras 1 e 2 eram a mesma, ou seja, no item (c) eles ao invés de compararem as áreas das figuras compararam números, apenas 2 duplas não consideram que seriam as mesmas devido à comparação por outros tipos de procedimentos.

5.4 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 4 NOS TRÊS AMBIENTES

Essa tarefa trata de uma situação de medida e mudança de unidade. O objetivo era de investigar como os alunos lidam com a possibilidade de ladrilhamento efetivo ou não de um conjunto formado por três figuras A, B e C, no qual as figuras A e B poderiam ser ladrilhadas efetivamente com as unidades U e V, e a figura C não poderia ser ladrilhada completamente com as unidades U e V. Para ladrilhar completamente C seria necessário decompor as unidades U e V em partes que pudessem ser encaixadas nas lacunas que faltavam nessa figura, após encaixarem algumas dessas unidades e assim completar o processo de ladrilhamento.

As duplas Dpn^o2APLT4, Dpn^o2AMMT4 e Dpn^o2AAG2T4, colocaram nas justificativas das respostas dessa tarefa, que há possibilidade de medir a área da figura C com as unidades U e V, nesse caso para essas duplas não importa o formato dessas unidades, ao entenderem que poderiam, seja, decompondo em partes, ou mesmo completando quadrados na malha, ou apenas visualmente como no caso do ambiente papel e lápis. Para dupla Dpn^o1APLT4 e Dpn^o1AMMT4, não é possível pavimentar completamente o triângulo C dado o formato das unidades U e V. A Dpn^o1AAG2T4 mesmo colocando que era possível medir a área de C com as unidades U e V, assim como pavimenta-la, não conseguem realizar esses procedimentos, nem de medida corretamente nem tampouco de pavimentação, pois não encontram um ponto de decomposição da unidade U que lhes permitissem preencher as lacunas de C e em seguida observar corretamente sua medida.

5.4.1 Respostas e Procedimentos Utilizados Pelas Duplas nos Três Ambientes da Pesquisa

A dupla Dpn^o2APLT4 do ambiente papel e lápis coloca em suas respostas que é possível medir as áreas de todas as figuras com as unidades U e V como mostra o extrato do protocolo escrito dessa dupla seguir:

Figura 129- Extrato do protocolo escrito da Dpn^o2APLT4

É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades (U e V)?
 sim

Justifique sua resposta: Porque pode medir as áreas de todas as figuras

Complete quando possível a tabela abaixo:

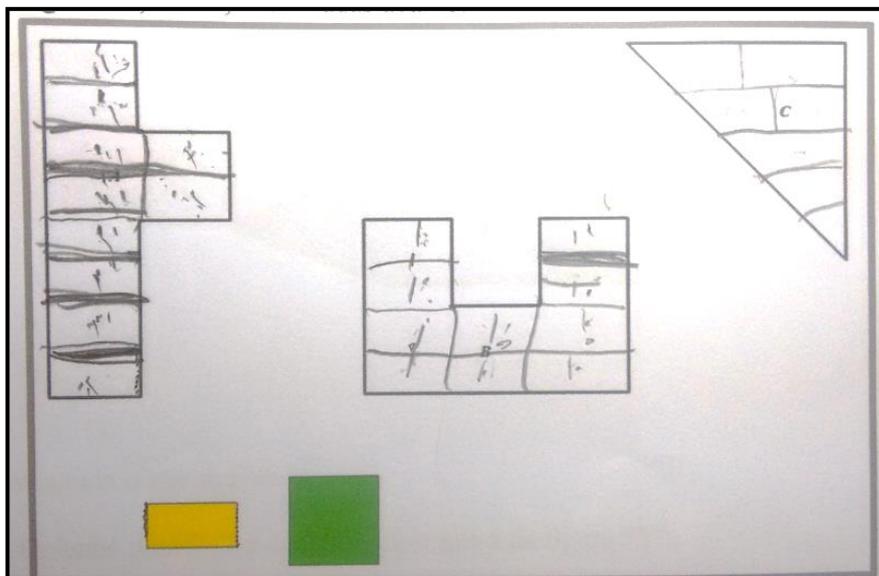
	Unidade  U	Unidade  V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A	10	5
B	10	5
C	6	3

Para essa dupla é possível medir as áreas das figuras A, B e C com as unidades U e V e completam o quadro da tarefa corretamente com as respectivas medidas das áreas dessas figuras utilizando cada unidade. Para chegar a essa conclusão utilizam apenas procedimento visual e tentam medir as unidades com o lápis, solicitaram constantemente do monitor o papel de decalque para decalcar as unidades e conferir se o preenchimento do quadro estava correto, mas não foi entregue nenhum recurso, como por exemplo, papel de decalque (manteiga). Entendemos que de forma intuitiva essa dupla chegou à resolução dessa tarefa preenchendo a tabela corretamente.

A dupla Dpn^o1APLT4 desse mesmo ambiente justifica que é possível apenas medir as figuras A e B, mas não é possível medir C porque é um triângulo, assim observamos também na vídeo-gravação que essa dupla leva em conta o formato das unidades U e V. Como procedimento para chegar a essa conclusão, demarcam todas as três figuras, após medirem com o lápis as unidades U e V e em seguida sobrepondo o lápis as figura A e B contaram a medida da área de cada uma.

A figura a seguir apresenta o extrato do protocolo dessa dupla, evidenciando as demarcações das figuras A, B e C.

Figura 130- Extrato do protocolo da Dpn^o1APL: estratégias de medidas das áreas das figuras A, B e C



Como podemos verificar no extrato do protocolo acima os alunos dessa dupla demarcam as figuras A, B e C, como observaram que não era possível ladrilhar C, completam o quadro da seguinte forma:

Figura 131- Extrato do protocolo da Dpn^o1APLT4: preenchimento do quadro com as unidades de áreas

Complete quando possível a tabela abaixo:

Figura	Unidade  U	Unidade  V
	Medida de Área	Medida de Área
A	10	5
B	10	5
C	0	0

Uma justificativa semelhante a essa foi colocada pela Dpn^o1AMMT4, que preencheu o quadro da mesma forma, colocando o número “0” na lacuna referente à medida da área de C. Como procedimentos essa dupla recorta apenas duas das unidades dadas em uma ficha (ver anexo) e apenas deslizam sobre as figuras para contar e preencher o referido quadro das unidades, mesmo que essa tarefa tenha sido desenvolvida com a presença da malha, esses alunos não levam em conta o procedimento de contagem diretamente na malha quadriculada

como previmos. O protocolo a seguir nos traz essa justificativa da impossibilidade de medida de C, explicitado por essa dupla do ambiente materiais manipulativos.

Figura 132- Extrato do protocolo da Dpn°1AMMT4

É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades (U e V)? ~~sim~~ não

Justifique sua resposta:

porque as áreas das figuras não se parecem com desenhos da letra U, V, nós pegamos a figura U, V e medimos com ela sem desenhar embaixo das figuras A, B e C do que ficou faltando um pedaço de desenho em branco em C.

Como resposta final ao sobreporem as unidades U e V, verificando que havia partes em C que “ficavam em branco”, ou seja, que não era possível medir, concluem preenchendo a tabela com “0” como a dupla anterior dada para eles à impossibilidade de medir a área de C com tais unidades. Para esses alunos o que está em jogo é que a composição da área da figura C não poderá ser efetuada dado o formato dos ladrilhos.

Assim como Douady e Perrin-Glorian (1989) apresentaram nos resultados de sua pesquisa, nesse tipo de abordagem da medida de área, os alunos não encontram dificuldade para associar números diferentes à mesma figura, os quais expressam resultados de ladrilhamento com unidades diferentes, porém para esses alunos da dupla supracitada o aspecto da impossibilidade de medir uma determinada figura dado o formato das unidades persiste.

Se tratando da possibilidade de medida da área de todas as figuras não importando o formato das unidades U e V, temos a dupla Dpn°2AMMT4, que após a justificativa da possibilidade de medir as áreas com as referidas unidades, preenchem o quadro corretamente:

Figura 133- Extrato do protocolo da Dpn°2AMMT4

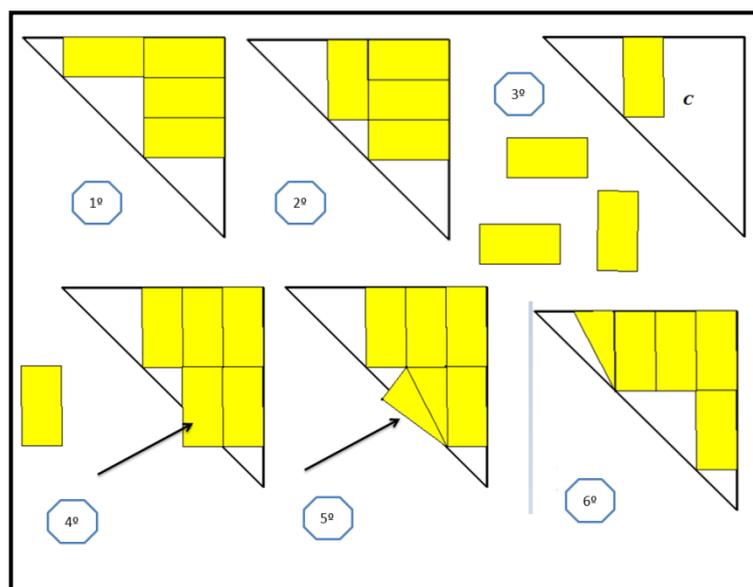
	Unidade  U	Unidade  V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A	10	5
B	30	5
C	6,0	3,0

Essa dupla chegou a conclusão da possibilidade de ladrilhagem e medida das figuras A, B e C por meio da contagem diretamente na malha, completando o triângulo com as partes que faltavam como apresentamos na figura 30 das análises a priori, assim colocaram no quadro que seriam necessários 6 U e 3 V para pavimentar a figura C.

As duplas que utilizaram o *Apprenti Géomètre 2*, ou seja, as Dpn°1AAG2T4 e Dpn°2AAG2T4 mobilizam procedimentos de decomposição das unidades U e V para tentar pavimentar completamente a figura C e medir as áreas, notamos que um dos fatores que pode ter favorecido esses alunos a pensarem em uma estratégia de decomposição dessas unidades para desmistificar as formas, foi a tarefa 3 do dispositivo de familiarização nesse ambiente, cujo objetivo era que os alunos montassem um barco com as figuras do menu “Figuras Padrão”, e utilizassem a ferramenta decompor do menu operação para construir retângulos que não faziam parte do conjunto de figuras desse menu, mas que eram importantes para que o barco construído pelos alunos representasse a mesma figura descrita na ficha de papel que havia sido entregue.

A Dpn°2AAG2T4 duplicou a unidade U em uma quantidade suficiente para ladrilhar A e B, após realizarem o processo de contagem escreveu na tabela e em seguida executou o mesmo procedimento com V. Com relação à ladrilhagem de C realizaram os seguintes procedimentos descritos em alguns passos na imagem a seguir por meio de diversas tentativas, retirados da captura de tela do computador dessas duplas:

Figura 134- Extrato do protocolo em alguns print screen da vídeo gravação do computador da Dpn°2AAG2T4

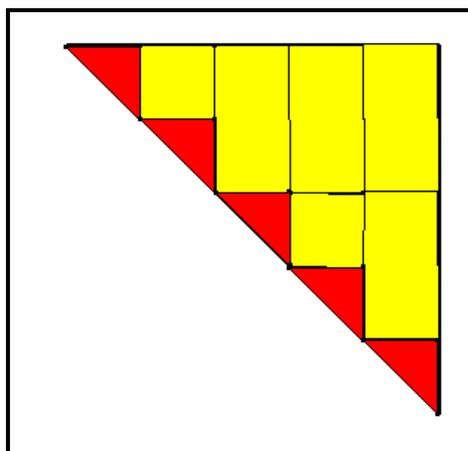


Os primeiros passos apresentam as tentativas de ladrilhagem de C com a unidade U em diferentes posições, eles notaram que mesmo aplicando rotação central em U, colocando-a na vertical não caberia mais dessa unidade de forma a preencher as lacunas do triângulo C, a partir dessas conclusões seguem decompondo U pela diagonal obtendo assim, dois triângulos retângulos, após tentaram com essas peças preencher as lacunas de C, mas não obtiveram êxito.

O próximo passo como alternativa para ladrilhar o triângulo C, decidiram decompor U em dois quadrados para encaixá-los em C. Para efetuar essa decomposição assim como previmos, escolheram as ferramentas dividir em dois, então puderam dividir os segmentos horizontais de U, e em seguida utilizando a ferramenta decompor, ligaram os pontos de divisão, obtendo assim dois quadrados congruentes.

Após moverem os quadrados que haviam sido gerados a partir da decomposição de U, notaram que ainda havia lacunas em C e que essas precisariam ser preenchidas com triângulos, assim esses alunos selecionaram a opção quadrado do menu “Figuras Padrão”, deram dois cliques na tela, trazendo diretamente esses quadrados pré-definidos, sobrepuseram a unidade U, após esses procedimentos decompueram o quadrado pela diagonal, em seguida moveram os triângulos retângulos gerados e com a aplicação de movimento de rotação, completaram a ladrilhagem de C. O extrato de protocolo a seguir apresenta a pavimentação completamente C.

Figura 135- Extrato do protocolo da Dpn°2AAG2T4-
Pavimentação de C com a unidade U



Essa dupla utilizou uma junção de dois procedimentos previstos em nossas análises e descritos nas figuras 72 e 73. Com relação à ladrilhagem com a figura V, observamos na vídeo-gravação que os alunos colocaram não ser necessário realizar novamente o processo de

decomposição, eles sobrepuseram U em V e notaram que utilizaram 6U, para pavimentar completamente C, e como V era composta por duas peças iguais a U, seriam necessárias apenas 3V para pavimentar completamente o triângulo C, nesse caso utilizaram apenas o processo de comparação de U e V para determinar essa questão e preencherem o quadro.

Assim concluem da seguinte forma como ilustra o extrato do protocolo escrito dessa dupla a seguir:

Figura 136- Extrato do protocolo escrito da Dpn°2AAG2T4

É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades (U e V)? SIM

Justifique sua resposta: porque da para medir as áreas
da área

Complete quando possível a tabela abaixo:

	Unidade  U	Unidade  V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A	10	5
B	10	5
C	6	3

Notamos também nas análises que o extrato do protocolo escrito seria insuficiente para sabermos os procedimentos que as duplas utilizaram, pois eles apresentaram muita dificuldade em justificar como haviam realizados a tarefa, ou seja, quais procedimentos e estratégias tinham mobilizado para responder cada item. A análise da vídeo-gravação nos foi favorável e percebemos que para esses alunos a forma dos ladrilhos não era um fator determinante que impossibilitaria a pavimentação de determinadas figuras.

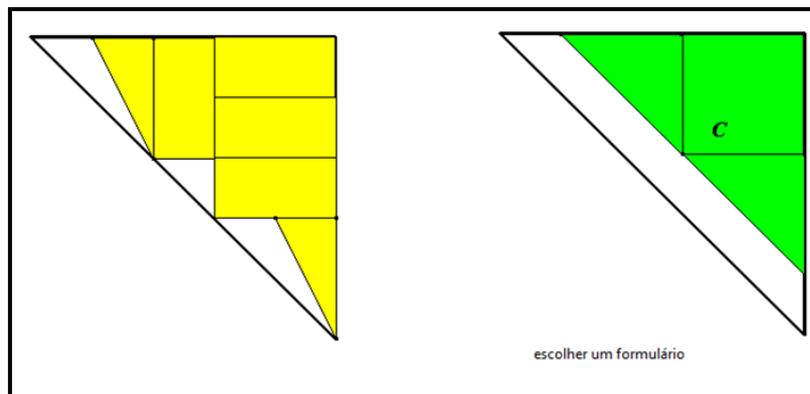
Neste momento, ressaltamos diferenciar alguns aspectos entre a ação de ladrilhar e a medição de área de certa figura. Nesta tarefa, a ladrilhagem efetiva da figura C com quantidade inteira de figuras U ou V é impossível, mas isto não impede que possamos expressar área da figura C tomando como unidade as áreas das figuras U ou V. Lembramos que unidade de área e superfície unitária são elementos diferentes. Quando nos referimos a unidade de área, temos figuras diferentes que podem ter a mesma medida de área e serem utilizadas como unidade, enquanto que superfície unitária é o caso das figuras U e V, ou seja,

são superfícies que foram utilizadas como unidade de área para expressar as medidas de área de outras superfícies.

No caso dos alunos que realizaram atividade no Dpn^o2AAG2, aceitaram, mesmo que implicitamente que a decomposição e recomposição não alteram a área, possibilitando uma maneira de medir a área da figura C por meio da ladrilhagem entre as figuras U ou V e alguma outra figura resultante de decomposição destas. Isto possibilitou uma tentativa de produção de uma figura de mesma área que a figura dada, que seja ladrilhável com quantidade finita de superfícies unitárias e em seguida, usar o ladrilhamento.

Os sujeitos da Dpn^o1AAG2 também utilizaram procedimentos de decomposição, mas não obtiveram sucesso em suas estratégias de decompor as unidades U e V para com as partes decompostas pavimentar completamente C. Assim não completaram o quadro corretamente no que diz respeito à medida da área da figura C. O extrato do protocolo dessa dupla apresenta como ficou a pavimentação de C após decomposições de U e V.

Figura 137- Extrato do protocolo da Dpn^o1AAG2T4



Essa dupla no quadro final desta tarefa coloca que seriam necessárias apenas 5U e 2V para pavimentar C. Assim utilizam um procedimento diferente das duplas dos demais ambientes, porém não conseguem visualizar uma estratégia de decomposição favorável das unidades U e V que pavimentasse completamente o triângulo C para efetuar a medida.

Interpretamos, assim como Pessoa (2010), como justificativa para a compreensão desses alunos que não levaram em conta o formato das unidades de medidas U e V para pavimentar a figura C, a seguinte explicação: a área da unidade não depende de sua “forma” e sim da região que esta ocupa, assim o processo de decomposição da dupla Dpn^o2AAG2T4, no qual compôs a unidade U em dois quadrados congruentes, e esses em dois triângulos

retângulos, pavimentando completamente C, a forma das figuras A, B e C, nem tampouco das unidades importam no processo de medição.

5.4.2 Considerações Gerais Sobre a Tarefa 4 nos Três Ambientes

Tínhamos nessa tarefa como objetivo observar alguns aspectos fundamentais a serem analisados nos procedimentos dos alunos: a possibilidade de ladrilhamento efetivo das figuras A e B com diferentes unidades; ver como os alunos lidam com o ladrilhamento efetivo e com a impossibilidade de ladrilhar efetivamente C.

Com relação ao primeiro aspecto todos os alunos conseguiram ladrilhar as figuras A e B com os diferentes tipos de ladrilhos e completaram corretamente o quadro que solicitava quantas unidades iguais a U e V seriam necessárias para pavimentar essas figuras estabelecendo a medida de A e B. Com relação ao segundo aspecto em jogo nessas análises observamos que apenas 4 das duplas colocaram que é possível medir as áreas das figuras A, B e C com as unidades U e V, porém apenas 3 acertam a quantidade necessária de U e V para pavimentar a figura C, 2 duplas expuseram em suas respostas que não é possível ladrilhar dado o formato das unidades U e V, nem tampouco medir as áreas dessas figuras, notamos que para essas duplas o aspecto geométrico ainda predomina e não conseguem distinguir a área do formato das figuras.

Quanto aos procedimentos utilizados organizamos em forma de tabela para explicitar de forma mais sintetizada os critérios de medida das áreas das três figuras:

Quadro 16- Procedimentos utilizados pelas duplas na T4 para medir as áreas das figuras

Procedimentos utilizados para medir as áreas das figuras A, B e C	Dupla (as)
Visualmente e algum instrumento não convencional para medir (lápiz grafite).	Dpn°1APLT4, Dpn°2 APLT4
Recortar as unidades e deslizar sobre as figuras A, B e C.	Dpn°1AMMT4
Contagem na malha e completar quadrados.	Dpn°2AMMT4
Duplicar as unidades, mover e sobrepor as figuras A, B e C.	Dpn°1AAG2T4, Dpn°2AAG2T4
Decompor as unidades.	Dpn°1AAG2T4, Dpn°2AAG2T4
Sobreposição, rotação e mover.	Dpn°2AAG2T4

Esses procedimentos foram categorizados a partir das principais ações realizadas pelas duplas para responderem esta tarefa, inserimos também na tabela combinações de procedimentos que foram mobilizados buscando evidenciar de forma mais sintetizada os principais procedimentos realizados pelas duplas em cada ambiente.

Quanto aos teoremas em ação verdadeiros que podemos evidenciar em relação as áreas das unidades U e V, é que a *área é invariante por isometria*, neste caso em relação a pavimentação de A e B por todas as duplas, assim como a *área é a quantidade de ladrilhos necessários para recobrir determinadas figuras*.

Com relação as Dpn^o1AAG2T4, Dpn^o2AAG2T4, os teoremas em ação que surgem a partir dos procedimentos utilizados de decomposição das unidades U e V, é que superfície equidecompostas têm mesma área, ou seja, decompondo a unidade U em dois quadrados congruentes e esses dois em quatro triângulos, os espaços ocupados por esses triângulos na figura C, assim como por esses dois quadrados será equivalente a área da unidade U.

5.5 ANÁLISE A POSTERIORI DA TAREFA 5 NOS TRÊS AMBIENTES

O objetivo dessa tarefa era de investigar os procedimentos que os alunos mobilizariam nos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2* para produzir uma figura de área menor, maior e igual a de uma figura Y dada, assim observaríamos se para os alunos a área estaria ligada a forma da figura não se dissociando dela, evidenciando assim a concepção forma ligada ao quadro geométrico, apresentado nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) como um entrave na aprendizagem de área como grandeza.

Todas as duplas responderam essa tarefa, as do ambiente papel e lápis sentiram bastante dificuldade e solicitavam constantemente ao monitor um instrumento para medir as figuras, colocando a impossibilidade de desenhar dada a ausência de uma régua, como por exemplo.

As duplas dos demais ambientes não apresentaram nenhuma dificuldade em responder essa tarefa devido a disponibilidade de materiais que lhes havia sido entregues no caso das duplas do ambiente materiais manipulativos, as do *Apprenti Géomètre 2* tinham como possibilidade utilizar todas as ferramentas do menu AB para realizar essa tarefa.

Mesmo não estipulando tempo de resolução de cada tarefa para que os alunos ficassem a vontade em respondê-las, apenas cumprindo o horário estabelecido para aplicação deste dispositivo, notamos que o dinamismo do *Apprenti Géomètre 2* favoreceu os alunos que estavam respondendo a tarefa 5 nesse ambiente. As construções dinâmicas das figuras, as ferramentas de *rotação*, *mover* e *decompor*, assim como os menus *Figuras Padrão* e *Figuras a mão livre* foram importantes para que as Dpn^o1AAG2 e Dpn^o2AAG2 concluíssem essa tarefa antes das demais nos outros ambientes. Não estamos levando em conta nesse caso se esses alunos acertaram ou erraram esta tarefa, mas a agilidade proporcionada por esse ambiente.

As análises da vídeo-gravação da Dn^o1APLT5 nos traz à tona os procedimentos que essa dupla utilizou para responder essa tarefa, com relação ao item (a) desenhar uma figura de área menor, no início solicitaram uma régua para que pudessem medir e assim responder esse item, porém o monitor orientou que elas não poderiam utilizar esse recurso, apenas deveriam responder utilizando o lápis grafite, e que elas precisariam pensar em uma estratégia que lhes permitisse responder essa tarefa.

A An^o1Dn^o1APLT5 coloca que só é preciso então desenhar um quadrado, que este teria área menor que Y, porém a outra integrante da dupla An^o2Dn^o1APLT5 acha que não, e tenta utilizando o lápis na horizontal medir um dos lados da figura Y, em seguida acha que é melhor desenhar um triângulo, ou seja, um que representasse segundo ele a *ponta da figura*, porque essa seria menor, pois representaria só uma parte de Y. O primeiro aluno dessa dupla mobiliza um teorema em ação falso segundo *o qual a quantidade de lados da figura determina sua área*. O outro integrante entende que a figura Y é composta por um triângulo e que retirando esse de Y, a área dele seria menor. Para esse aluno a área não está relacionada ao formato das figuras, nem tão pouco, a quantidade de lados.

Com relação a este mesmo item (b) essa dupla desenha no exterior de Y sem demarcar em volta da figura um retângulo, de forma que Y coubesse dentro desse retângulo, para esses alunos a ideia de área maior estaria relacionada ao processo de inclusão, assim se Y cabia dentro desse retângulo criado, teria área menor. Porém a ideia de mesma área para eles item (c) estava relacionada a uma figura igual a Y, assim medem os lados de Y com o lápis grafite que estavam utilizando e reproduzem a figura Y no item (c). *Nesse caso mobilizaram um teorema em ação falso segundo o qual duas figuras que têm mesma forma têm mesma área*.

A Dpn^o2APLT5 também utilizou o lápis grafite para medir os lados, desenharam uma figura semelhante a Y, menor, uma maior e uma igual, para esses alunos a área está relacionada ao formato da figura, e assim como no item (c) para dupla anterior a área não se dissocia das figuras. Para essas duplas o aspecto geométrico da área aparecesse como predominante, sendo um fator negativo para compreensão da área como um atributo da figura.

Os estratos dos protocolos a seguir dessas duplas nesse ambiente apresentam a resposta final.

Figura 139- Extrato do Protocolo da Dpn°1APLT5

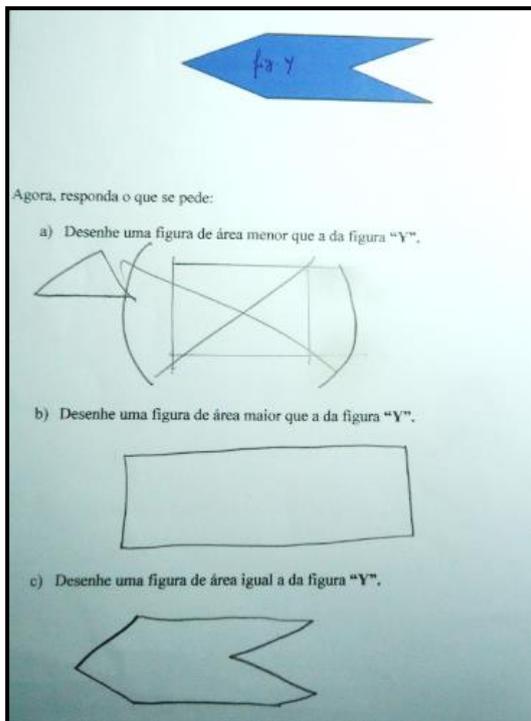
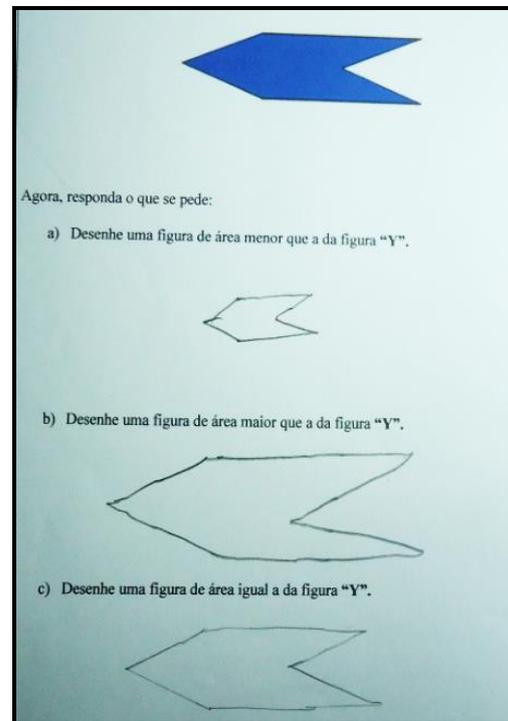


Figura 138- Extrato do Protocolo da Dpn°2APLT5



Esses extratos de protocolos das duplas Dpn°1APLT5 e Dpn°2APLT5 apresentam a resposta final de cada uma das duplas em relação a cada item.

No ambiente materiais manipulativos a Dpn°1AMMT5 para responder ao item (a) fizeram opção pela malha quadriculada sobrepuseram essa malha a figura Y desenhada na ficha da tarefa e em seguida desenharam no interior um quadrado de área menor, a Dpn°2AMMT5 utilizaram também a malha quadriculada, porém decalcaram a figura Y com o papel de decalque e em seguida desenharam um triângulo, um losango e um retângulo de área menor que Y após sobreporem a malha a essa figura.

Com relação a uma figura de área maior item (b) as duas duplas desenharam no exterior de Y um retângulo, esses procedimentos segundo Ferreira (2010) de construir uma superfície no interior ou exterior da superfície inicial se justifica pela aditividade das áreas e porque a área é uma função positiva, em que uma superfície inclusa em outra tem área menor.

Com relação ao item (c) a dupla Dpn°1AMMT5 reproduz a mesma figura na malha quadriculada, já a dupla Dpn°2AMMT5 apenas cola na malha a figura Y antes decalcada.

Ainda para Ferreira (2010) este procedimento quando a forma da figura é mantida reporta a concepção geométrica da área, nesse caso para essa dupla assim como para as duplas

do ambiente papel e lápis a ideia de mesma área estaria relacionada ao formato da figura e não se dissocia dessa.

Para a Dpn^o1AAG2T5 iniciaram escolhendo do menu *Figura Padrão* um triângulo equilátero, levando-o diretamente a tela com um clique do mouse, como essa dupla ficou sendo monitorada pelo pesquisador, foi perguntado a esses alunos porque para eles o triângulo teria área menor que a da figura Y, o An^o1Dpn^o1AAG2T5 respondeu da seguinte forma: *Por que esse triângulo é menor que Y*, após essa questão seguem para o próximo item e desenharam uma octógono, então o pesquisador perguntou mais uma vez porque para eles essa figura tinha área maior, então inicia o seguinte diálogo:

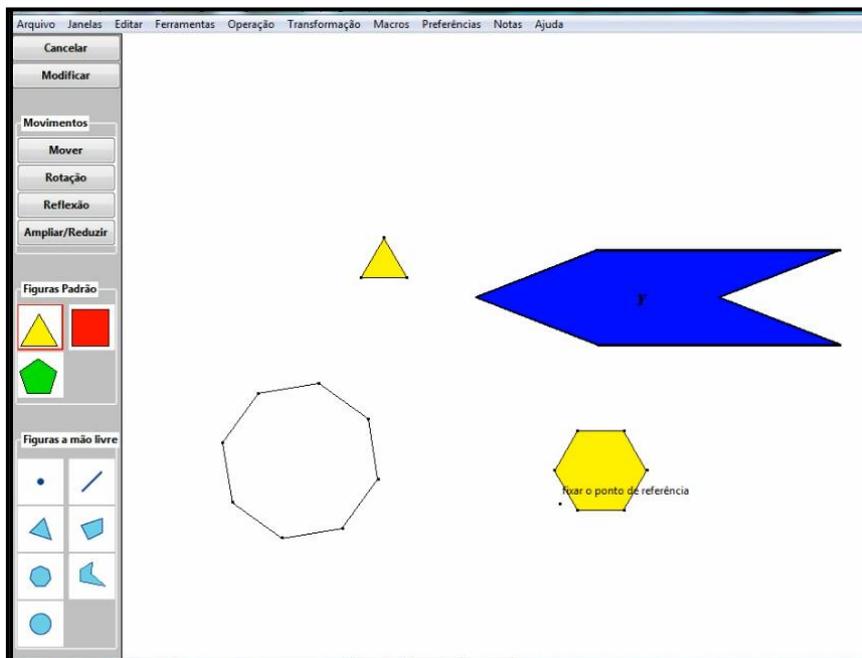
An^o1Dpn^o1AAG2T5 – *Eu acho porque os lados são maiores.*

An^o2Dpn^o1AAG2T5- *Não os lados não são maiores.*

An^o1Dpn^o1AAG2T5- *É mesmo, é porque tem mais lados.*

Verificamos então que para esses alunos a quantidade de lados definiam se a área da figura é maior, menor ou igual a de uma figura dada. O extrato final do protocolo dessa dupla apresenta as figuras desenhadas.

Figura 140- Extrato do protocolo da Dpn^o1AAG2T5

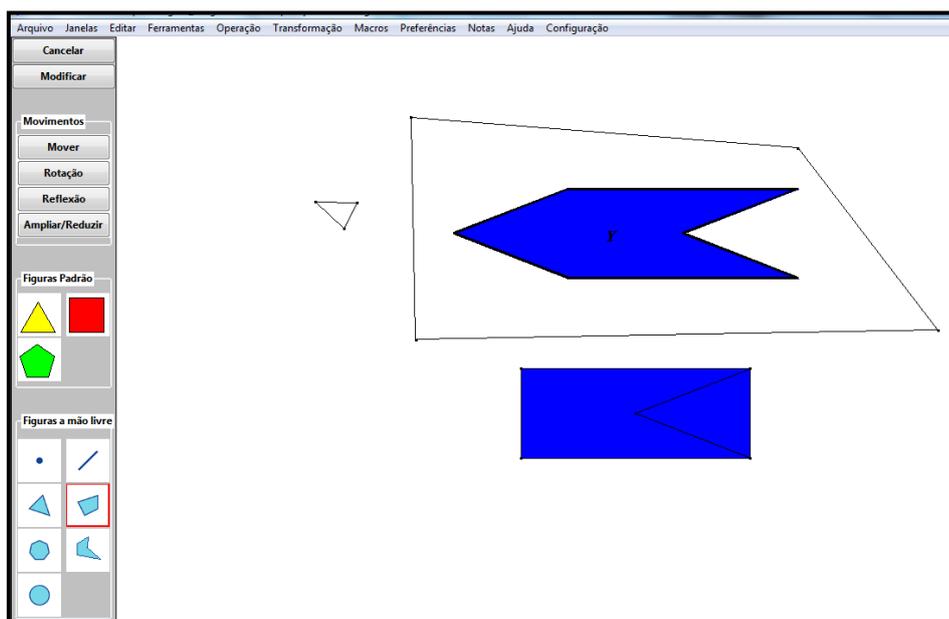


Esse extrato de protocolo apresenta como essa dupla concluiu a tarefa 5. Como figura de área menor, escolheram o triângulo equilátero do menu *Figuras Padrão*, de área maior um octógono regular do menu Figuras a mão livre e um hexágono regular como tendo a mesma área por causa da mesma quantidade de lados da figura Y. Essa dupla mobilizou nesse caso

um teorema em ação falso, que também foi identificado na resolução dessa tarefa pelo An^o1Dn^o1APLT5 do ambiente papel e lápis, segundo o qual, a quantidade de lados determina a relação de ordem das áreas das figuras, ou seja, qual figura tem área, maior, menor ou igual a uma figura dada.

A dupla Dpn^o2AAG2T5 escolhe no início a opção triângulo do menu “*Figuras a mão livre*”, constrói um triângulo pequeno e em seguida movem sobrepondo a Y, assim por inclusão os alunos chegam a conclusão que este possui área menor, com relação ao item (b) selecionam a opção quadrilátero desse mesmo menu, e constroem um quadrilátero exterior a figura Y, de forma que esta ficou incluída dentro do quadrilátero formado. Com relação ao item (c) decompõe Y e com a parte decomposta montam um retângulo como ilustra o extrato do protocolo dessa dupla a seguir:

Figura 141- Extrato do protocolo da Dpn^o2AAG2



Verificamos então a partir dos procedimentos realizados por essa dupla que além do aspecto da área não está relacionado ao formato das figuras, ao produzirem uma nova figura de mesma área que a da figura dada, esse alunos conseguem dissociar nessa tarefa o quadro das grandezas e o quadro geométrico. Um teorema em ação verdadeiro que podemos analisar com a decomposição e recomposição de Y, é que o corte e colagem (decomposição e recomposição) sem perda nem sobreposição conservam as áreas.

5.5.1 Considerações Gerais Sobre a Tarefa 5 nos Três Ambientes

Como previmos os alunos construíram diferentes figuras, ora com a mesma forma da figura inicial, ora com formas diferentes e em posições diferentes. Os procedimentos utilizados nos permitiram verificar que para as duplas Dpn°1APLT5, Dpn°2APLT5 e Dpn°2AMMT5, a área está relacionada ao formato das figuras e não se dissocia dela, apenas para Dpn°2AAG2T5 o aspecto da área não está relacionado ao formato das figuras.

Com relação aos teoremas em ação identificamos alguns a partir das respostas dadas pelos alunos, a tabela a seguir apresenta essa questão:

Quadro 17- Teoremas em ação mobilizados na tarefa 5

Teorema em ação verdadeiro	Duplas
A decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição conserva a área.	Dpn°2AAG2T5
Teorema em ação falso	Duplas
A quantidade de lados determinam as áreas das figuras.	Dpn°1APLT5 e Dpn°1AAG2T5
Duas figuras que têm mesma forma têm mesma área.	Dpn°1APLT5

A aplicação dessa tarefa, assim como os resultados que obtivemos mostraram que o bloqueio da estratégia de contagem, permitiram os alunos mobilizarem outros tipos de procedimentos para construir uma figura de área maior, menor e igual à área da figura Y, reunimos em forma de tabela os principais procedimentos, materiais, menus, ferramentas e estratégias utilizadas pelas duplas para a construção das figuras.

Quadro 18- Estratégias, materiais, ferramentas, menus e procedimentos mobilizadas pelas duplas na tarefa 5

Estratégias	Duplas
Desenhar uma figura no interior de Y.	Dpn°1AMMT5 e Dpn°2AMMT5
Desenhar uma figura no exterior de Y.	Dpn°1APLT5,Dpn°1AMMT5, Dpn°2AMMT5
Desenhar uma figura de área menor e depois incluir em Y.	Dpn°2AAG2T5
Medir os lados da figura Y para desenhar uma figura menor, maior e iguala ela/ Medir os lados da figura Y para desenhar uma figura semelhante a ela.	Dpn°1APLT5, Dpn°2APLT5
Materiais/Ferramentas/Menus	
Lápis grafite	Dpn°1APLT5, Dpn°2APLT5
Malha quadriculada	Dpn°1AMMT5 e Dpn°2AMMT5
Mover	Dpn°1AAG2T5 e Dpn°2AAG2T5
Decompor	Dpn°2AAG2T5
Menu Figuras Padrão	Dpn°1AAG2T5
Menu Figuras a mão livre	Dpn°1AAG2T5 e Dpn°2AAG2T5
Procedimentos	
Decalcar e sobrepor	Dpn°2AMMT5
Sobrepor à malha quadriculada a figura Y	Dpn°1AMMT5
Decomposição, recomposição e sobreposição	Dpn°2AAG2T5

6 ANÁLISE A POSTERIORI DO DISPOSITIVO CENTRAL (PARTE 2)– UTILIZAÇÃO DOS DIVERSOS AMBIENTES

Quanto às composições dos grupos que participaram dessa segunda parte do dispositivo central, organizamos em forma de quadro para melhor explicitar os participantes, destacando cada um em relação a sua composição nas duplas da primeira parte desse dispositivo. Inserimos também nesse quadro as datas e os horários dos encontros com os alunos.

Quadro 19-Composição dos grupos, datas e horários da segunda etapa do dispositivo central

Grupos	Composição dos grupos em relação às duplas anteriores	Datas	Horários
Grupo 1	An°1Dpn°1APL, An°1Dpn°1MM e An° 1Dpn°1AAG2	20/10/2015	8h às 11h
Grupo 2	An°2Dpn°2APL, An°2Dpn°1AMM e An°2Dpn°1AAG2	16/11/2015	8h às 11h
Grupo 3	An°1Dpn°2AMM, An°1Dpn°2APL e An°2Dpn°2AAG2	17/11/2015	8h às 11h
Grupo 4	An°2Dpn°2AMM, An°2Dpn°1APL e An°1Dpn°2AAG2	18/11/2015	8h às 11h

As legendas referentes a cada um dos integrantes, assim como a ordem das duplas em relação a cada ambiente são evidenciadas no início das análises a posteriori deste dispositivo. Foram dadas as seguintes instruções aos integrantes de cada grupo antes das resoluções das tarefas pelo pesquisador:

Vocês precisarão analisar as respostas dadas por cada um dos integrantes do grupo a cada tarefa realizada anteriormente e julgar se estão corretas ou não, após analisarem deverão escolher uma das fichas e reproduzir a respostas das tarefas justificando-as, ou seja, terão que

dizer o que levaram vocês a concordarem ou não com cada uma das respostas, caso julguem a necessidade de responder a tarefa novamente, terão como possibilidade escolher os ambientes que acharem mais pertinentes para responder cada uma. Todas as ações terão que ser decididas em conjunto, por meio da socialização dos pontos de vistas de cada um.

Para responder as tarefas, os alunos poderiam utilizar os seguintes materiais: papel de decalque, malha quadriculada, pontilhado quadrado, malha isométrica, canetas coloridas, cola, fita adesiva, lápis grafite, caneta esferográfica e hidrográfica, giz de cera e tesoura. Se optassem pelo *Apprenti Géomètre 2* para todas as tarefas teriam que seguir as seguintes instruções: abrir a pasta com o nome do grupo, ou seja, disponibilizamos no computador portátil 4 pastas identificadas com o número referente a cada grupo, por exemplo, “*Grupo 1 AG2*” para que tivéssemos um controle dos protocolos de cada grupo nesse ambiente, em seguida deveriam clicar no arquivo de nome “*Tarefa Figure _1.fag*”, selecionar a opção aluno, digitar os nomes dos integrantes do grupo, escolher o menu AB, em seguida o idioma português e clicar em OK. Os nomes das tarefas se diferenciavam apenas pelo número de ordem de 1 a 5.

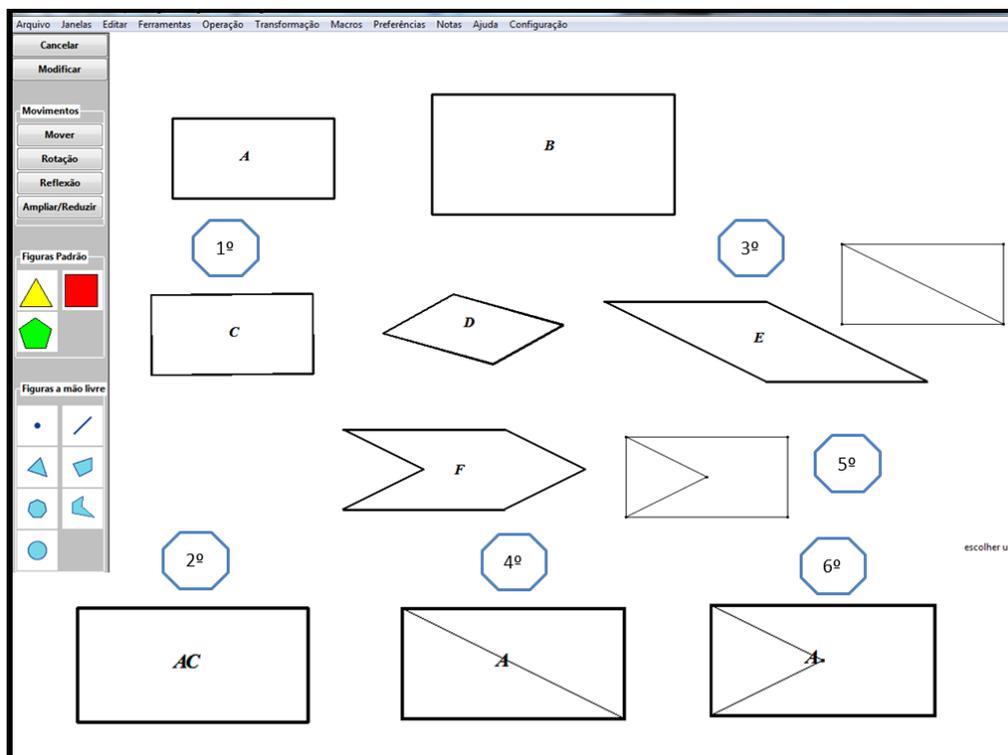
6.1 SITUAÇÃO DE COMPARAÇÃO DE ÁREA (TAREFA 1)

O grupo 1 decidiu responder esta tarefa novamente, não quiseram aproveitar as respostas das tarefas anteriores, nem tão pouco compará-las, escolheram utilizar o *Apprenti Géomètre 2*, segundo eles seria mais fácil responder utilizando o “*computador*,” ou seja, para esses alunos a agilidade e o dinamismo permitidos pelo software seria favorável para que eles respondessem todas as tarefas mais rapidamente. Eles responderam esta tarefa no software e em seguida justificaram na ficha em papel.

Para esse grupo 1 as figuras C, E e F têm mesma área que a do retângulo A, pelo fato que decompondo essas figuras, poderiam compor um retângulo e coincidir por sobreposição direta em A. As ações desses alunos nos traz à tona alguns teoremas em ação verdadeiros sobre área, explicitados nos estudos de Baltar (1996), Duarte (2002) e Ferreira (2010). O corte e colagem (decomposição e recomposição) sem perda nem sobreposição conservam as áreas e a área é invariante por isometrias. De acordo com Melo (2003) o processo de comparação das áreas de duas figuras por corte e colagem evidencia uma concepção de área como grandeza, ou seja, o aluno responde uma determinada questão estabelecendo relações entre o quadro geométrico e o das grandezas.

Os extratos dos protocolos desse grupo a seguir apresenta as respostas finais realizadas no *Apprenti Géomètre 2* e justificadas na ficha desta tarefa em papel.

Figura 142- Extrato do protocolo do grupo 1 no AG2, tarefa 1



Observamos que esses alunos, diferente das análises anteriores da primeira parte deste dispositivo, conseguiram encontrar o ponto central de decomposição sem necessariamente perder tempo em diversas decomposições e acertam a tarefa encontrando as três figuras que tinham as mesmas áreas que a do retângulo A. Primeiro como ilustra o extrato do protocolo 142, eles aplicaram uma rotação em C e em seguida sobrepuseram em A utilizando a ferramenta mover. Após decomposaram E, compuseram um retângulo e sobrepuseram em A, verificando que também tinham as mesmas áreas, o próximo passo decomposaram F e em seguida com as partes decompostas construíram um retângulo e após também sobrepuseram as partes em A chegando à conclusão que também teriam as mesmas áreas.

Como resposta na ficha, temos o seguinte extrato do protocolo:

Figura 143- Extrato do protocolo escrito do grupo 1 tarefa 1

Resposta
<p>A figura A, F, E em todos as figuras A porque a área são iguais</p>
Explique como você fez para responder essa tarefa:
<p>dupliquei, mesurei, rotacionei, coloquei em cima da figura e dei certo.</p>

Notamos que em relação à primeira parte do dispositivo central os alunos conseguiram justificar alguns dos procedimentos que eles realizaram para responder a tarefa no software.

Da mesma forma que o anterior o grupo 4 também utiliza o *Apprenti Géomètre 2* para responder a essa tarefa, porém além de utilizarem esse ambiente utilizaram também o papel de decalque, assim respondem utilizando o software e em seguida decalcaram as figuras, recortaram e sobrepuseram cada uma das partes ao retângulo A. O extrato do protocolo do grupo 4 apresenta a justificativa em relação aos procedimentos que utilizaram para responder essa tarefa.

Figura 144- Extrato do protocolo escrito do grupo 4, Tarefa 1

Resposta
<p>A figura e, f, e</p>
Explique como você fez para responder essa tarefa:
<p>quando o corte colagem e o computador pegamos o papel montei anedinos e colamos cortamos e também usamos o computador</p>

Observamos que assim como o grupo 1, o grupo 4 também responderam corretamente a tarefa, nesse caso vemos que a presença de diversos recursos podem ser favoráveis a resolução desse tipo de tarefa.

O grupo 3 mesmo escolhendo utilizar o *Apprenti Géomètre 2* para responder a essa tarefa, colocaram em suas respostas que apenas a figura C tem mesma área que a de A, para o grupo 2 que utiliza apenas o papel de decalque para responder essa tarefa, também apenas C tem mesma área que a do retângulo A, os extratos dos protocolos escritos desses grupos apresentam as respostas dadas a esta tarefa, assim como a justificativa final.

Figura 146- Extrato do protocolo escrito, grupo 3, tarefa 1

Resposta

Resposta "C"

Explique como você fez para responder essa tarefa:

nos giramos a figura 'C'
colocamos uma idêntica da outra
e descobrimos que tem a
mesma área

Figura 145- Extrato do protocolo escrito, grupo 2, tarefa 1

Letra "e"

Explique como você fez para responder essa tarefa:

Porque eu desenhei em uma folha
de papel manteiga e girei e coloquei sobre
a outra figura "A" e notei que
a mesma área

Como procedimento o grupo 3 utiliza a ferramenta rotação e em seguida mover do menu movimentos para sobrepor C em A, o grupo 2 também utiliza procedimentos semelhantes porém no ambiente materiais manipulativos, ao decalcarem C, aplicam uma rotação e sobrepõem em A para verificar a igualdade das áreas.

A ideia de mesma área para esses alunos dos grupos 3 e 2 estava relacionada a uma figura que fosse *idêntica* a A, mesmo que estivesse em uma posição não prototípica. Os procedimentos de rotação, translação (mover) e sobreposição para esses grupos para explicitar a noção de ter mesma área nos permite identificar que para esses alunos a área de uma figura é invariante por isometrias.

6.1.1 Considerações Sobre a Tarefa 1

Verificamos que a partir do momento em que os alunos observavam suas respostas e socializavam, decidiam responder ora utilizando o software, ora o papel de decalque, e por vezes os dois de forma simultânea, notamos que para os grupos 1 e 4 o aspecto da decomposição estava muito forte e presente sempre na resolução dessa tarefa, para esses alunos não importava se as figuras eram diferentes, para eles se ao decomporem e compusessem uma que por inclusão pudessem coincidir assim teriam as mesmas áreas, entendemos que para esses alunos o formato da figura não determina sua área, podendo indicar possivelmente indícios de superação do aspecto geométrico da área, que segundo Douady e Perrin-Glorian (1989) é um dos entraves que dificultam o conhecimento da noção de área como grandeza.

Porém para os grupos 2 e 3 mesmo que os alunos tenham acertado que o retângulo C tem a mesma área que a do retângulo A, notamos que para eles figuras diferentes não podem ter mesma área, mas ao realizarem uma combinação de procedimentos, ou seja, aplicar uma rotação e uma translação entendemos que para esses alunos a área não se modifica, mobilizando um teorema em ação verdadeiro explicitado anteriormente que a área é invariante por isometrias e deslocamentos.

Notamos então que mesmo de forma tímida os alunos conseguem a partir dos resultados das tarefas realizadas na primeira parte deste dispositivo, por meio da socialização em grupo e a possibilidade da utilização de diversos ambientes para respondê-las ou mesmo justificar seus pontos de vistas, fazem avançar na compreensão de área como grandeza.

Organizaremos em forma de tabelas as estratégias, procedimentos, materiais, ferramentas, mobilizados pelos alunos para responder a tarefa 1.

Tabela 2 - Estratégias, Materiais/Ferramentas e Procedimentos realizados pelos grupos, Tarefa 1

Estratégias	Grupos
Aplicar rotação em C para em seguida sobrepor em A.	1, 2, 3 e 4
Decompor as figuras E e F para em seguida com as partes decompostas sobrepor em A.	1 e 4
Decalcar C, aplicar uma rotação e sobrepor em A.	2 e 4
Materiais/Ferramentas	
Lápis grafite e papel de decalque	2 e 4
Mover	1, 3 e 4
Rotação	1, 3 e 4
Decompor	1 e 4
Procedimentos	
Decalcar, rotação e sobrepor	2 e 4
Rotação, mover e sobrepor	1, 2 e 4
Decomposição, recomposição, translação e sobreposição	1 e 4

Essa tabela apresenta de forma global as estratégias, materiais, ferramentas e procedimentos, mobilizados pelos alunos nos quatro grupos, com o objetivo de sintetizar cada uma das ações realizadas para responder esta situação de comparação de área de seis polígonos da tarefa 1, que teve como objetivo bloquear o aspecto numérico de comparação, para permitir a articulação entre o quadro geométrico e o das grandezas, para que assim os alunos pudessem avançar no aspecto de área como uma grandeza autônoma (DOUADY, PERRIN-GLORIAN, 1989).

No que diz respeito aos teoremas em ação que nos permite verificar a questão acima mencionada, para todos os grupos *área é invariante por isometrias*, porém apenas os grupos 1 e 4 *o corte e colagem sem perda nem sobreposição conservam as áreas*. Para os demais grupos o aspecto de área pode ainda está fortemente ligada ao quadro geométrico, ao não identificarem que as figuras E e F possuíam também as mesmas áreas que a do retângulo A, assim para eles figuras diferentes não podem ter mesma área.

6.2 SITUAÇÃO DE COMPARAÇÃO DE ÁREA (TAREFA 2)

Os grupos nesta tarefa optaram por responder utilizando *Apprenti Géomètre 2*. Com relação ao item (a) para responderem quais das figuras possuíam área maior que a do quadrado A, cada integrante socializou suas respostas dadas anteriormente a esta tarefa na primeira parte deste dispositivo e optaram em refazer para melhor justificar os procedimentos que haviam mobilizado, pois alguns não lembravam como haviam feito para responder alguns dos itens, e por vezes, a justificativa era que o outro parceiro da dupla que havia colocado as respostas.

Os grupos 1 e 2 colocaram que as figuras C e G possuíam área maior que A, como procedimento para chegar a essa conclusão os grupos sobrepuseram A em C e em seguida em G, notando que “*sobrava um quadrado ao comparar A com C e um triângulo ao comparar A com G*” (grupo 1), ou mesmo *porque havia sobrado um espaço* (grupo 2) como ilustra os extratos dos protocolos a seguir:

Figura 147 - Extrato do protocolo grupo 1, tarefa 2, item (a)

Agora, responda cada uma das perguntas.

a) Entre as figuras, quais possuem área maior que A? G, C
 Explique como você fez:

Porque a C sobra um quadrado e a G sobra um triângulo.

Figura 148- Extrato do protocolo do grupo 2, tarefa e, item (a)

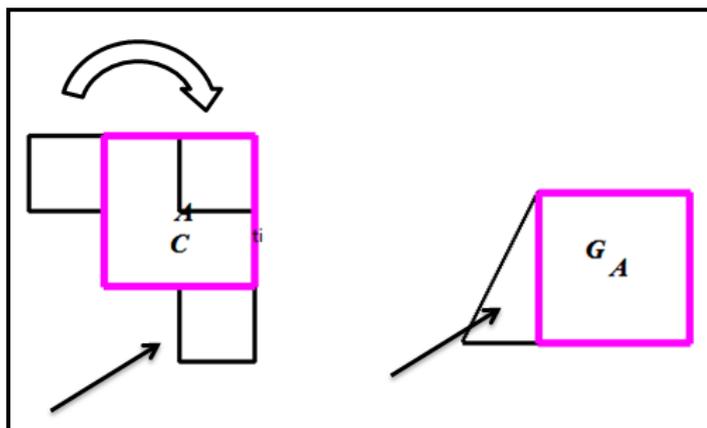
Agora, responda cada uma das perguntas.

a) Entre as figuras, quais possuem área maior que A? G, C
 Explique como você fez:

Porque a figura (g) sobra espaço e também

Para o primeiro grupo compararem A com C e colocarem na justificativa que sobrava um quadrado e por isso a área de C era maior que a de A e no caso de G a área desse seria maior porque sobrava um triângulo, realizaram os seguintes procedimentos no *Apprenti Géomètre 2*.

Figura 149- Comparação de A com as figuras C e G



Procedimento semelhante a esse de comparação das áreas das figuras C e G com a área do quadrado A, também foi realizado pela Dpn^o1AAG2 anteriormente, um dos participantes desse grupo foi integrante da referida dupla, observamos na discussão, que os demais participantes desse grupo concordaram com o An^o1AAG2, após explicitar como havia respondido a tarefa, pois mesmo sem saber explicar verbalmente, mostrou no software quais procedimentos havia realizado para respondê-la.

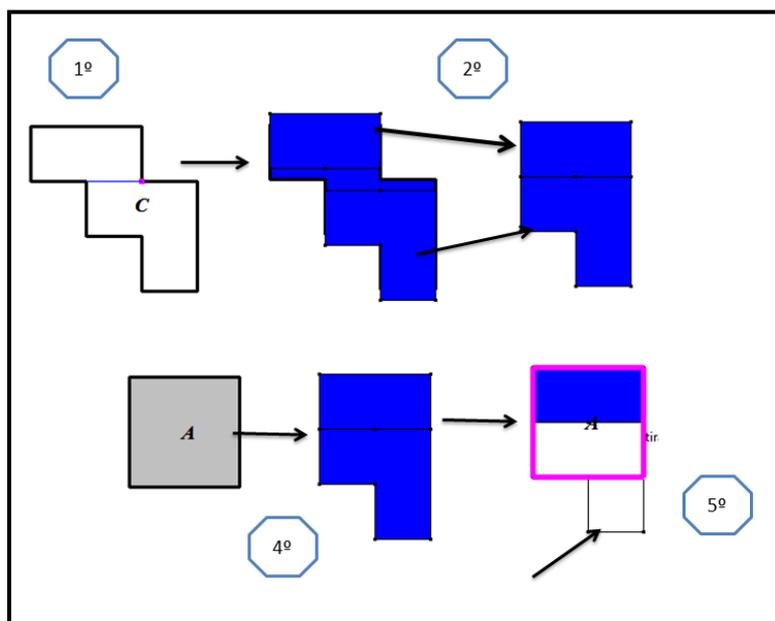
Observamos dois aspectos de comparação para estabelecer as ordens das áreas em relação a maior e menor área na comparação de duas figuras. O primeiro diz respeito à sobreposição, em seguida decomposição para completar uma determinada figura e verificar que sobra uma das partes, e o segundo a sobreposição de uma figura que coincide com apenas uma das partes da outra. Nesse caso podemos identificar uma comparação das áreas de duas figuras, sem necessariamente recorrer ao aspecto numérico, nem tampouco a contagem, pois uma das formas de comparar as figuras C e A, como previsto em nossas análises a priori seria a contagem de quantos quadradinhos as figuras eram constituídas, mas como esse procedimento não veio à tona, verificamos que a comparação realizada permite a articulação entre o quadro geométrico e o das grandezas, deixando o aspecto numérico de comparação de áreas das figuras em segundo plano.

A expressão “*sobrar uma parte*” ao comparar duas figuras, deixa claro para esses alunos a relação de ordem das áreas, ou seja, das que possuem maior área na comparação de duas figuras dadas. Para o grupo 2, o mesmo critério do grupo 1 vem à tona nas comparações das relações de ordem das áreas.

Para chegar a essa conclusão, decompõem primeiro C, em seguida deslizam uma das partes decompostas de maneira conveniente a comparar com A, em seguida sobrepõem o

quadrado A em C, verificando que sobra uma das partes dessa figura, o extrato do protocolo desse grupo captado no *Apprenti Géomètre 2* e organizado em alguns *print screen* da tela nos mostra esse procedimento.

Figura 150- Extrato do protocolo do grupo 2, tarefa 2, item (a) no AG2

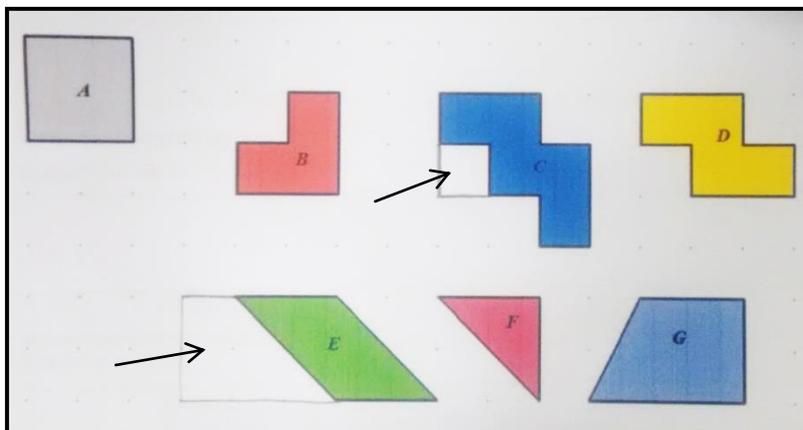


Primeiro os alunos desse grupo selecionam a ferramenta decompor e recompõe uma figura conveniente para comparar com A, em seguida, com a ferramenta mover justapõe as partes decompostas. Após movem A sobrepondo a nova figura construída, a partir daí notaram então que sobra uma das partes de C. Em seguida verificam sobrepondo A em G que a área de G é maior que a de A porque também sobra uma parte após sobreporem.

Os grupos 3 e 4 optaram em utilizar o pontilhado quadrado no qual as figuras foram desenhadas no ambiente materiais manipulativos. Para responder esse item (a) também deixaram o *Apprenti Géomètre 2* aberto nesta tarefa, caso tivessem dificuldades em responder utilizando apenas o pontilhado e o papel de decalque que também foram escolhidos por esses grupos.

Para eles as figuras C, E e G, tinham áreas maiores que a de A, utilizaram como procedimento para comparar C com A completar uma das partes de C, e visualmente, após decalcarem A e sobreporem em C chegaram a conclusão da relação de ordem das áreas dessas duas figuras. Com relação, as figuras E e G, o grupo 3 coloca que o quadrado A têm área menor porque ao sobreporem a figura A na figura G, sobra uma parte em G, e o paralelogramo E porque ao completarem e sobreporem A, ocupa apenas uma parte de E, o protocolo a seguir mostra como fizeram para completar C e E.

Figura 151- Extrato do protocolo do grupo 3, item (a) completando C e E

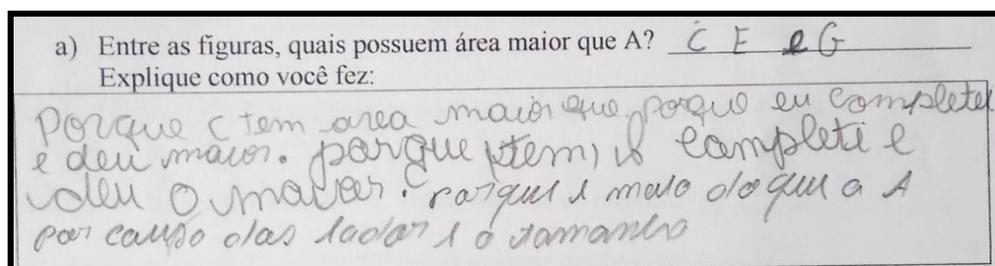


Procedimentos semelhantes foram identificados nos protocolos da Dpn^o2MMT2, como um dos participantes do grupo 3, foi um dos alunos que compuseram essa dupla, o qual socializou os procedimentos que havia sido realizado para comparar as áreas, no próprio pontilhado e utilizando o papel de decalque, decidiram novamente responder a tarefa para tirarem a conclusão, se essas figuras possuíam mesmo área maior que a do quadrado A.

Os integrantes do grupo 4 como divergiam suas respostas decidiram refazer a tarefa, mas assim como o grupo anterior erraram ao colocarem que a área da figura E era maior que a do quadrado A por causa dos comprimentos dos lados.

O extrato do protocolo desse grupo a seguir apresenta a explicação da resposta dada ao item (a).

Figura 152- Extrato do protocolo escrito do grupo 4, tarefa 2, item (a)



Notamos que para esses alunos a relação de ordem das áreas, estava mesmo que de forma implícita, relacionada às respostas pelos grupos anteriores, ou seja, completar C para sobrepôr A e verificar que sobrava uma parte, sobrepôr A em G e também verificar essa questão, porém E não obtiveram êxito, pois não conseguiram visualizar que sua área era a

mesma que a de A, mas como ilustrou o protocolo 138, o grupo 3 não visualizou um ponto de decomposição que permitisse de maneira conveniente recompor no pontilhado E para então sobrepor A, e chegar a uma conclusão de forma satisfatória.

Com relação ao item (b) sobre as figuras que possuíam área menor que a do quadrado A, os grupos optaram em responder utilizando o *Apprenti Géomètre 2*, apenas o grupo 4, enquanto um dos integrantes moviam B e F para sobreporem a A, o outro integrante decalcava com papel de decalque essas mesmas figuras e aplicava o mesmo procedimento para conferir nos dois ambientes. Mesmo que todos tenham acertado que as áreas das figuras B e F são menores que a do quadrado A, as explicações de cada grupo são diferentes, apresentaremos a seguir alguns protocolos destacando o porquê para eles que as áreas eram menores.

Figura 153- Extrato do Protocolo do Grupo 1, item (b)

<p>b) Entre as figuras, quais possuem área menor que A? <u>B, F</u> Explique como você fez:</p> <p><i>Porque a B falta um quadrado e a F falta um triângulo</i></p>
--

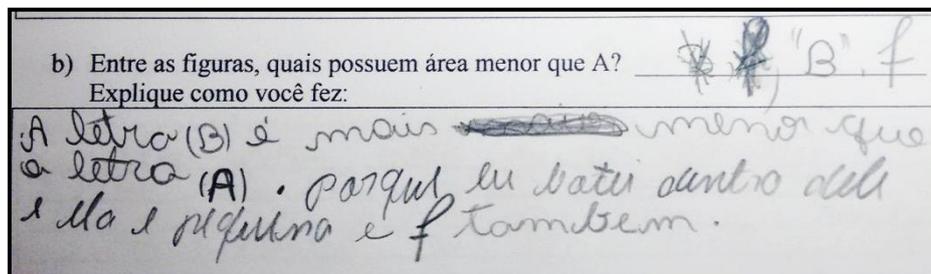
Para esses alunos, assim como para os do grupo 2 as figuras B e F tinham área menor que A porque faltavam uma parte para que essas figuras tivessem a mesma área que A, ou mesmo faltava uma parte para que completasse um quadrado que coincidissem por sobreposição em A. Para o grupo 3 a área de F era menor que a do quadrado A, porque ao decompor A pela diagonal, obtém-se duas de F, e B porque faltava uma parte como ilustra o protocolo a seguir:

Figura 154- Extrato do protocolo escrito do grupo 3, item (b)

<p>b) Entre as figuras, quais possuem área menor que A? <u>Letra F, B</u> Explique como você fez:</p> <p><i>por que recatando o letra A do duas do letra F e o metade o letra A e B falta um pedaço.</i></p>

Para o grupo 4 a questão da área de B e F era menor por inclusão dessas figuras em A, como ilustra o protocolo escrito desse grupo.

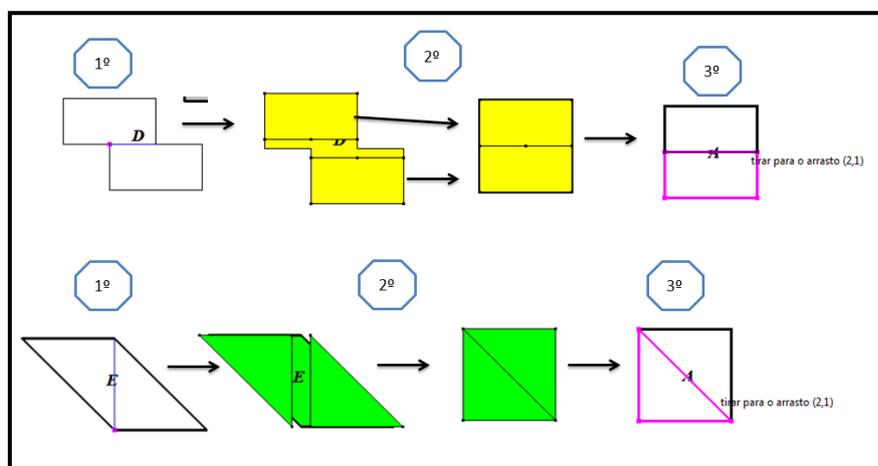
Figura 155- Extrato do protocolo do grupo 4, item (b)



Com relação ao item (c) das figuras que possuem mesma área que o quadrado A, tanto o grupo 1 como o grupo 2, colocaram que o tetraminó D e o paralelogramo E têm mesma área que a do quadrado A, mesmo utilizando o software os procedimentos foram diferentes para chegarem a essa conclusão.

O extrato do protocolo do grupo 1 apresenta os procedimentos realizados para chegarem a essa conclusão.

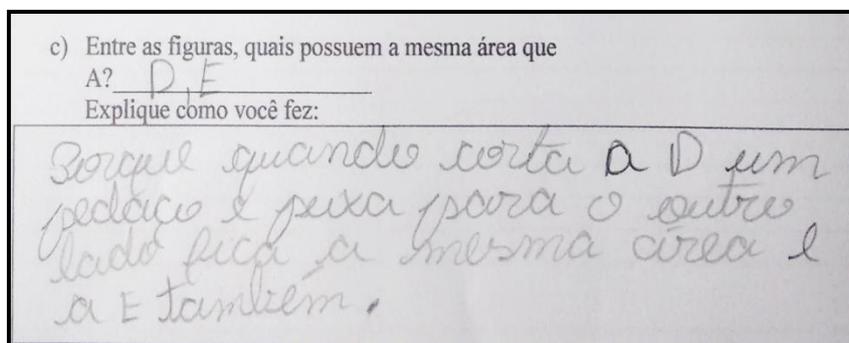
Figura 156- Processo de comparação das figuras D e E com A



Esses alunos decomposeram D em seguida compuseram um quadrado com as partes decompostas, realizaram também a decomposição do paralelogramo E para em seguida chegarem à conclusão sem sobrepor as partes decompostas em A, apenas visualmente, que essas figuras possuem as mesmas áreas. O extrato do protocolo escrito desse grupo a seguir, expõe a explicação desse grupo, após realizarem os processos descritos anteriormente.

Esse tipo de procedimento também foi previsto nas análises a priori das tarefas deste dispositivo.

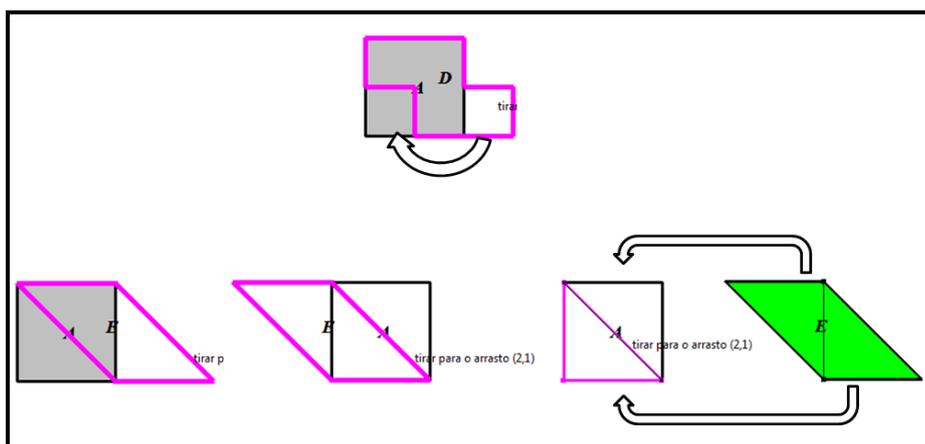
Figura 157- Extrato do protocolo da justificativa do grupo 1, item (c)



Notamos que mesmo tentando explicar os procedimentos realizados de forma a justificá-los, foi necessário nessa segunda parte do dispositivo central recorrer a vídeo-gravação da captura da tela do computador, para que pudéssemos explicitar de forma mais organizadas o aspecto de ter mesma área para esse grupo.

O grupo 2 não utilizou a ferramenta decompor do software, mas realizaram esse processo mentalmente (identificamos em suas falas e no software), após sobrepor o tetraminó D e o paralelogramo E em A, da seguinte forma:

Figura 158- Extrato do protocolo do grupo 2, sobreposição de D e E em A



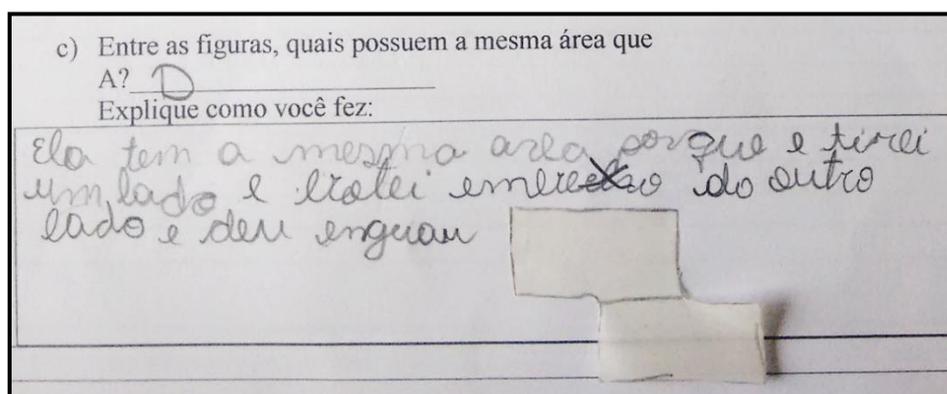
A partir dessa sobreposição verificaram que ao deslizarem uma das partes de D e E poderiam por sobreposição coincidir as partes decompostas e assim as figuras teriam as mesmas áreas. Para esses alunos além do formato das figuras não determinaram as áreas,

alguns teoremas em ação verdadeiros são identificados, tais como: *área é invariante por isometrias e o corte e colagem sem perda nem sobreposição conservam as áreas*.

O grupo 3 decidiu apenas copiar a resposta dada a este item pela Dpn^o2AAG2, ou seja o integrante An^o2Dpn^o2AAG2, participante dessa dupla convenceu os demais do grupo utilizando o *Apprenti Géomètre 2* que B tinha mesma área que a do quadrado A, ou seja, justapôs dois dos lados de B em A, esse procedimento também foi previsto em nossas análises a priori e ilustrado na figura 63. Esses alunos mobilizaram um procedimento incorreto de comparação das áreas, ao levarem em conta o comprimento dos lados das figuras.

O grupo 4 utilizou apenas o papel de decalque, decalcou a figura D em seguida sobrepôs uma das partes dessa figura em A, depois a outra, explicitando em seguida que tinham as mesmas áreas, como ilustra o protocolo a seguir:

Figura 159- Extrato do protocolo do grupo 4, tarefa 2, item (c)



Para os alunos desse grupo a ideia de mesma área estava relacionada ao fato de que pudessem coincidir as partes dessa figura em A por sobreposição, porém não verificam mais nenhuma outra figura, para eles havia apenas essa de mesma área, ao serem questionado pelo entrevistador da possibilidade de outra figura ter mesma áreas eles colocam que não pelo fato de já terem respondido os outros itens com todas as figuras.

6.2.1 Considerações Sobre a Tarefa 2

Para comparação as áreas das figuras nessa tarefa e estabelecer se as áreas eram maior menor ou igual a do quadrado A, foram utilizados diferentes estratégias, materiais, ferramentas, e procedimentos, destacamos cada um desses na tabela a seguir de forma sintetizada:

Tabela 3- Estratégias, Materiais/Ferramentas e Procedimentos realizados pelos grupos, tarefa 2

Estratégias	Item	Grupos
Sobreposição de A em C.	(a)	1 e 2
Sobreposição de A em G.	(a)	1 e 2
Decomposição e recomposição de C para sobrepor A.	(a)	2 e 4
Mover e sobrepor B e F em A.	(b)	1,2,3,4
Decalcar B e F para sobrepor em A.	(b)	4
Decomposição e recomposição de D e E para sobrepor as figuras recompostas em A.	(c)	1
Comparar os lados de B com os de A.	(c)	3
Sobreposição de D e E em A diretamente.	(c)	2
Sobrepor um das partes de D diretamente em A em seguida a outra parte, sem necessariamente decompor.	(c)	4
Materiais (M)/Ferramentas do AG2(F)		
Papel de decalque e malha pontilhada quadrada (M)	(a)	3 e 4
Mover (F)	(a)	1 e 2
Decompor (F)	(a)	2
Mover (F)	(b)	1,2,3,4
Papel de decalque (M)	(b)	4
Mover (F)	(c)	1,2,3
Decompor (F)	(c)	1
Papel de decalque (M)	(c)	4
Procedimentos		
Mover e sobrepor	(a)	1 e 2
Decompor, recompor, mover e sobrepor	(a)	2
Completar figuras no pontilhado	(a)	3 e 4
Mover e sobrepor	(b)	1, 2,3 e 4
Decalcar e sobrepor	(b)	4
Decompor e recompor	(c)	1
Sobrepor	(c)	2, 4
Justapor os lados das figuras	(c)	3

De forma geral no critério de comparação das áreas das figuras, os grupos não utilizaram o aspecto da contagem para definir se as áreas das figuras eram maior, menor ou igual do quadrado A, observamos então a articulação entre os quadros geométricos e das grandezas nesse tipo de situação de comparação das áreas das figuras.

Notamos também nesta tarefa que para todos os grupos figuras diferentes podem ter mesma área, assim o aspecto geométrico da área não é predominante, com relação aos teoremas em ação verdadeiros que identificamos de forma geral a partir dos procedimentos realizados é que *área é invariante por isometrias e deslocamento* (grupos 1, 2, 3 e 4) e *o corte e colagem (decomposição e recomposição) sem perda nem sobreposição conservam as áreas* (grupo 2 item (a), grupos 1 e 2 item (c)). Alguns teoremas em ação falso também foram encontrados a partir dos procedimentos utilizados para comparar as figuras E e B com o quadrado A. A área do paralelogramo E seria maior que a do quadrado A, por causa dos comprimentos de dois dos lados da figura E, assim para esses alunos o que determina a relação das áreas de duas figuras serem maior ou menor são os comprimentos dos lados (grupo 4) e com relação a B tem mesma área que A por causa da comparação dos comprimento de dois de seus lados com os de A. (grupo 3).

Notamos que assim como a tarefa anterior tivemos mesmo que de forma ingênua, certo avanço e certa agilidade dos alunos para responderem essa tarefa, porém mesmo que os critérios de comparação para identificarem a relação das áreas em alguns itens tiveram rendimentos satisfatórios em relação à tarefa anterior, os grupos 3 e 4, ainda relacionaram esse critério ao comprimento ou projeção dos lados das figuras. A tabela a seguir apresenta os

No quadro a seguir constam critérios estabelecidos por cada grupo para a comparação das figuras em cada item. Analisamos que apenas três dos critérios utilizados pelos alunos para comparar as áreas das figuras não diz respeito a um processo de comparação das áreas de forma satisfatória, no item (a) os alunos do grupo três não conseguem encontrar uma forma de decompor o paralelogramo E de maneira a observar que este tinha a mesma área que A e não que tinha área maior, os grupos 3 e 4, erram ao não comparar em as áreas e sim os lados das figuras. Os demais critérios apresentam que de forma satisfatória os alunos conseguem estabelecer e identificar as figuras de área maior, menor e igual à da figura A.

Quadro 20- Critérios para comparar as áreas das figuras e estabelecer a relação de ordem das áreas

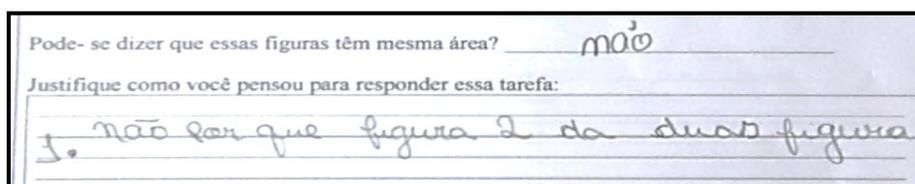
Crítérios estabelecidos	Item	Grupo (os)	C- Correto I-Incorreto
A área da figura C é maior que a área de da figura A ao compararem por sobreposição, mesmo que essas figuras não se sobreponham perfeitamente, sobra um quadrado em C.	(a)	1	Correto
A área da figura G é maior que a da figura A, porque ao sobrepor A em G sobra um triângulo.	(a)	1	Correto
As áreas das figuras C e G são maiores que a de A porque ao sobrepor A diretamente a essas figuras sobra uma parte em cada uma delas.	(a)	2, 3 e 4	Correto
A área de E é maior que a de A porque completando E no pontilhado na comparação por sobreposição, A ocupa apenas uma das partes de E.	(a)	3	Incorreto
A área da figura E é maior que a de A porque E tem os comprimentos de dois de seus lados maiores que os de A.	(a)	4	Incorreto
As áreas das figuras são B e F são menores que a de A porque ao sobreporem essas figuras em A, B falta um quadrado para que tenha a mesma área que A e F um triângulo de mesma área que F.	(b)	1 e 2	Correto
A área da figura F é menor que a da figura A porque representa a metade dela e B porque falta uma parte para ter a mesma área que A.	(b)	3	Correto
Por inclusão as áreas das figuras B e F são menores que a de A.	(b)	4	Correto
D e E têm mesma área que A porque ao decompor essas figuras é possível recompor uma que tenha também mesma área que A.	(c)	1	Correto
D e E têm mesma área que A porque ao decompô-las é possível recompor uma figura que coincida por sobreposição em A.	(c)	2	Correto
B tem mesma área que A por causa da comparação dos comprimentos de dois de seus lados com os de A.	(c)	3	Incorreto
D têm mesma área que A porque as partes de D coincidem por sobreposição em A.	(c)	4	Correto

6.3 SITUAÇÃO DE MEDIDA DE ÁREA (TAREFA 3)

Todos os grupos resolveram esta tarefa utilizando ora no ambiente papel e lápis, ora no *Apprenti Géomètre 2*, no caso do grupo 3, pelo processo de contagem das unidades, estabelecem as áreas das figuras 1 e 2, os grupos 1 e 4 não levam em conta o par número unidade de medida, colocando que as áreas das figuras eram apenas 6, diferente dos grupos 2 e 3 que levaram em conta o par número unidade de medida para definir as áreas das figuras 1 e 2.

Com relação ao terceiro item apenas o grupo 3 colocou que as figuras não têm mesma área e justificam da seguinte forma:

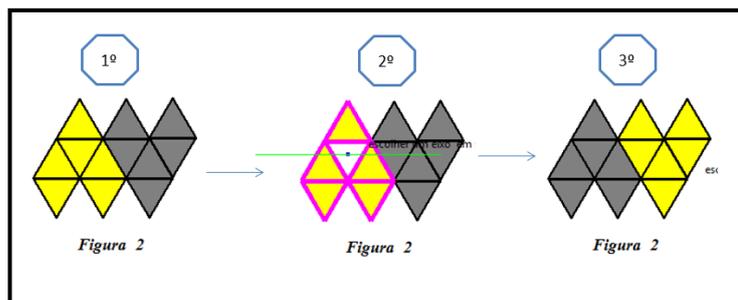
Figura 160- Extrato do protocolo escrito do grupo 3



Esse grupo utilizou o *Apprenti Géomètre 2* para responder a essa tarefa, porém o critério utilizado para estabelecer as áreas das figuras 1 e 2 foi a contagem visualmente na tela do computador, porém para definir que essas figuras não possuíam as mesmas áreas, utilizaram a ferramenta mover, moveram a figura 1 em seguida sobrepueram na figura 2, após terem realizado esses procedimentos aplicaram uma reflexão na figura 1 encaixando em seguida na segunda parte da figura 2 que havia ficado sem ser preenchida, chegando dessa forma a conclusão descrita pelo grupo no protocolo 146.

O extrato do protocolo desse grupo no *Apprenti Géomètre 2*, ilustra em alguns passos o procedimento descrito anteriormente:

Figura 161- Extrato do protocolo do grupo 3, no AG2



Para os demais grupos as figuras 1 e 2 possuíam as mesmas áreas, pelo fato de ter dado a mesma quantidade, ou seja, porque medindo a figura 1 com a unidade A representada por um triângulo encontraram 6 e medindo a área da figura 2 com a unidade B definida por um losango encontraram também 6. Verificamos que para esses alunos o aspecto numérico está fortemente como fator determinante na comparação das áreas das figuras. Esse critério estabelecido pelos alunos para definir a igualdade das áreas, nos traz à tona as confusões entre a área e sua medida. Nesse caso ao invés de comparar as áreas das figuras os alunos apenas comparam números, levando em conta o aspecto numérico.

Verificamos que nesta tarefa, não houve evolução, nem tampouco mudança das respostas em relação ao que havia sido respondido pelas duplas na primeira parte desse dispositivo, ou seja, 4 duplas levaram em conta o número ao compararem as áreas das figuras 1 e 2.

Os estudos de Duarte (2002) e Ferreira (2010) apontam que as situações de medida de área são abordadas desde os ciclos iniciais do ensino fundamental, observam por meio na análise em livros didáticos a ênfase no trabalho com unidade de medidas não convencionais, e que possivelmente nesse tipo de situação os alunos não encontrariam dificuldades para comparar as áreas das figuras.

Entretanto, notamos que é necessário acentuar o trabalho com esse tipo de situação de medida trabalhado nessa tarefa, para que percebam que duas figuras podem dar a mesma medida e terem áreas diferentes.

6.4 SITUAÇÃO DE MEDIDA E MUDANÇA DE UNIDADE (TAREFA 4)

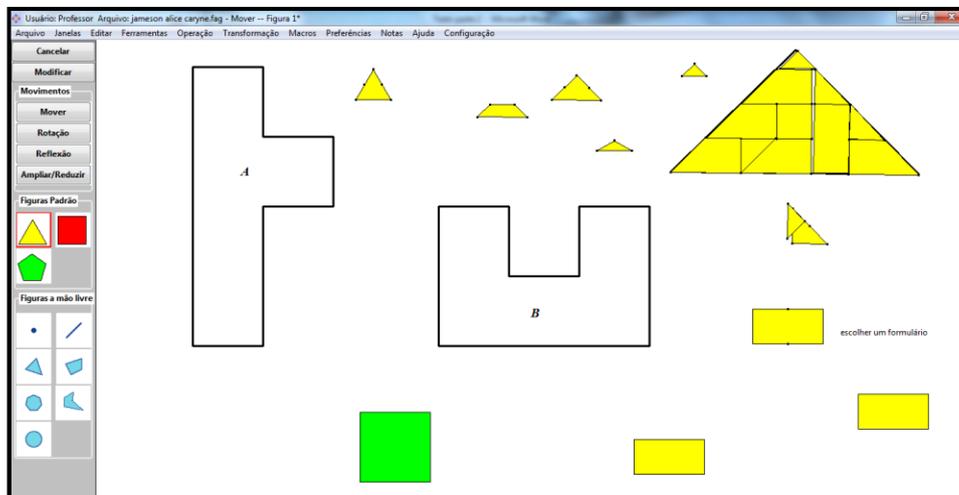
Para realizar essa atividade os grupos optaram pelo *Apprenti Géomètre 2*, ora duplicavam as unidades U e V em uma quantidade suficiente que lhes permitissem ladrilhar as figuras A e B e a partir daí determinar a medida de área dessas figuras, ora duplicavam apenas U pavimentavam A e B, e estabeleciam visualmente quantas unidades iguais a V seriam necessárias a essa pavimentação, após perceberem por sobreposição de U em V, que V era composta por duas unidades de U. Todas as duplas conseguiram estabelecer a medida das áreas das figuras A e B.

Quanto ao ladrilhamento da figura C, assim como a medida da área dessa figura, todos os grupos tentaram ladrilhar completamente o triângulo C utilizando diversas estratégias, tais como: verificar quantas unidades iguais a U e V seriam necessárias para a pavimentação completamente de C (grupo 2), preencher C com as unidades U e V até não terem mais possibilidades, mesmo aplicando as transformações isométricas do plano a essas unidades (grupos 1, 3 e 4), pretendiam então verificar a partir da ladrilhagem a medida de área dessa figura.

O grupo 2 como mencionamos anteriormente tentou de diversas formas ladrilhar completamente C, decompondo a unidade U e com as partes decompostas concluir tal ladrilhamento, não obtiveram sucesso nas decomposições, mas para esses alunos a forma dessas unidades não impediriam a pavimentação de C, pois poderiam aplicar decomposições a essa unidade e encaixá-las em C, apresentando implicitamente um teorema em ação verdadeiro segundo *o qual a equidecomposição conservam as áreas*.

Apresentaremos a seguir em uma tela como ficou a pavimentação de C após os alunos desse grupo aplicar as decomposições na unidade U.

Figura 162- Decomposição da unidade U para pavimentar C



Observamos que um dos participantes desse grupo 2 o aluno An^o2Dpn^o2AAG2, foi integrante da dupla que acertou quantas unidades de U e V seriam necessárias à pavimentação de C, na primeira parte deste dispositivo, aplicando uma junção de procedimentos previstos nas análises a priori, porém ao socializar com os demais colegas do grupo sua resposta, muda de ideia ao não conseguir repetir o procedimento utilizado anteriormente para pavimentar C.

O grupo decide então após várias discussões, inclusive lideradas pelo participante mencionado anteriormente, que seriam necessárias 6U e um triângulo para pavimentar completamente C.

Assim como resposta final ao quadro concluem colocando que seriam necessárias 6,5 U para pavimentar C, quanto a V verificam apenas visualmente e concluem que seriam necessárias 3,5, porque essa unidade era formada por duas de U. Observando atentamente a pavimentação de C, notamos que ainda há lacunas entre as figuras, por isso chegamos à conclusão que esse processo de ladrilhamento não foi efetivado por esse grupo dado a decomposição da unidade U em partes que não se encaixariam perfeitamente completando de forma satisfatória as lacunas em C, nem tampouco conseguem estabelecer a medida da área da figura C corretamente.

O extrato do protocolo escrito desse grupo apresenta a resposta final.

Figura 163- Extrato do protocolo escrito do grupo 2

É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades (U e V)?

Justifique sua resposta: *Porque pode medir as áreas de todas as figuras.*

Complete quando possível a tabela abaixo:

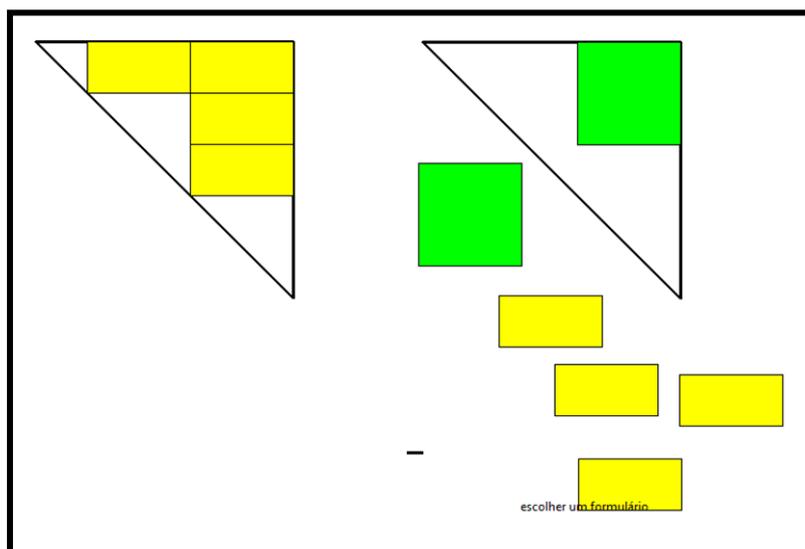
	Unidade  U	Unidade  V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A	10	5
B	10	6
C	6,5	3,5

De uma forma geral observamos que dois dos alunos participantes desse grupo 2, que haviam anteriormente utilizando a malha quadriculada, ou mesmo o software para chegar a conclusão dessa tarefa de forma satisfatória, não conseguiram pensar em uma estratégia favorável nessa segunda parte do dispositivo central.

Verificamos que mesmo oferecendo diversas possibilidades para os alunos responderem essa tarefa por meio da diversidade de ferramentas e menus do software, não conseguem elaborar uma estratégia para encontrar um ponto de decomposição nas figuras que lhes permitam decompô-las e com suas partes pavimentar completamente C, preenchendo as lacunas que vão surgindo ao encaixar as peças, como também medir a área dessa figura, mesmo assim o que nos traz à tona de relevante nas respostas desse grupo é que não levam em conta o aspecto das formas das unidades U e V.

Quanto aos demais grupos, notamos que conseguiram responder corretamente no quadro as medidas das áreas das figuras A e B, porém para eles, dada a impossibilidade de pavimentar completamente C por causa dos formatos das unidades U e V, não era possível medir a área dessa figura. O extrato do protocolo a seguir do grupo 1, ilustra uma das possibilidade que os alunos do grupo utilizou para responder essa questão, duplicando as unidades U e V e tentando ladrilhar C, para observar se era possível medir C com essas unidades.

Figura 164- Extrato do protocolo no AG2 grupo 1



Mesmo que os grupos 1, 2 e 4 tenham colocado que não seria possível medir a área de C, realizaram diferentes procedimentos em busca de ladrilhar C e medir sua área. Os grupos também apresentaram diversas justificativas a essa tarefa, organizamos em forma de quadro os protocolos das respostas desses grupos a esta tarefa dadas na entrevista.

Quadro 21- Respostas dadas pelos grupos a tarefa 4

Resposta à pergunta: É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades U e V?	Justificativa	Grupo
A e B sim, C não	Não por causa das formas das figuras U e V.	4
Sim	Porque podem ser medidas.	2
Não, só A e B	Porque o triângulo é pequeno não cabe muitas de U e V.	3
Não	Porque fica faltando alguns pedaços em C.	1

Em síntese observamos uma dificuldade por parte dos alunos com relação ao ladrilhamento efetivo, uma vez que, para eles não era possível medir C usando as unidades U e V.

O *Apprenti Géomètre 2* também se mostrou uma importante ferramenta ao possibilitar a duplicação das unidades, sem a necessidade de os alunos decalcarem as unidades no papel de decalque para medir as áreas das figuras A e B, as ferramentas duplicar e mover, foram importantes para que os alunos pudessem medir as áreas dessas figuras.

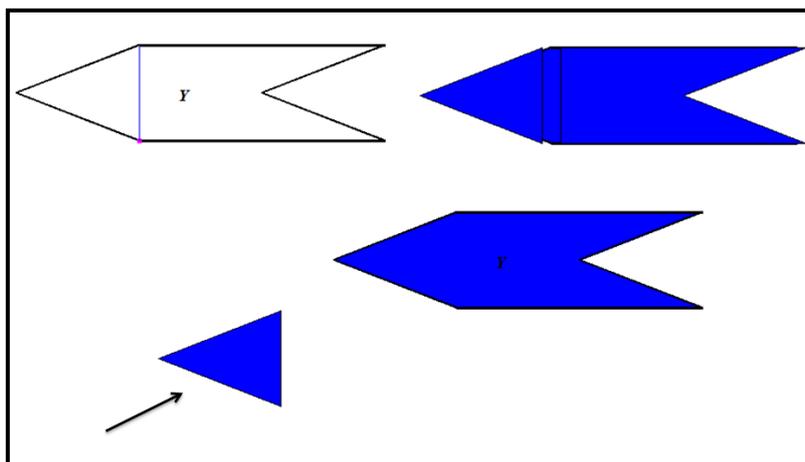
Outro aspecto foi observar como os alunos lidavam com diferentes superfícies unitárias, verificamos que não apresentam dificuldades aparentes para medir as áreas das figuras A e B com diferentes tipos de ladrilhos, nem tampouco a mudança de unidade foi um fator que dificultasse aos alunos estabelecer a medida das áreas dessas figuras, porém a questão da impossibilidade de ladrilhar a figura C com as unidades U e V dado seus formatos e a dificuldade de medir a área dessa figura, foi um dos fatores observados durante as resoluções pela maioria dos grupos. Apenas o grupo 2 não levou em conta o formato dessas unidades, colocando que seria possível ladrilhar e medir a área da figura C com as unidades U e V.

6.5 SITUAÇÃO DE PRODUÇÃO DE SUPERFÍCIE (TAREFA 5)

Os grupos 1, 2 e 3 optaram por responder essa tarefa utilizando o *Apprenti Géomètre 2*, apenas o grupo 4 decidiu utilizar o papel de decalque.

Com relação ao item (a) que solicitava uma figura de área menor que a da figura dada, os grupos 1, 3 e 4, decompueram Y de forma a obter um triângulo, como esse era uma das partes de Y chegaram à conclusão que tinha área menor. A figura a seguir apresenta em alguns passos como estes alunos realizaram esse procedimento.

Figura 165- Decomposição de Y



Os grupos 1 e 3 escolheram primeiro a ferramenta decompor do menu operação, em seguida selecionaram a figura Y com um clique do mouse, após ligaram dois dos vértices, decompondo Y em duas partes, um triângulo e um polígono irregular. Assim chegaram à conclusão que o triângulo era menor porque era uma parte de Y.

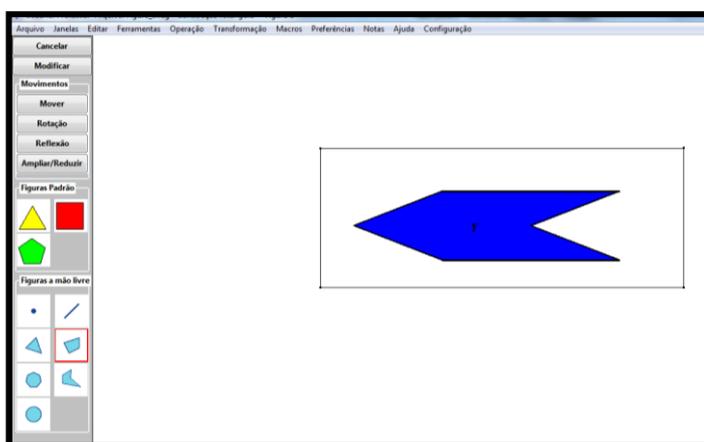
Quanto ao grupo 4 que utilizou o papel de decalque, os alunos desse grupo decalcaram a figura Y e em seguida recortaram uma das partes de Y de forma a obterem um triângulo, procedimento semelhante ao usado anteriormente pelos grupos 1 e 3, no *Apprenti Géomètre 2*.

O grupo 2 utilizou um procedimento diferente dos grupos anteriores, desenharam um retângulo no interior de Y por meio do menu *Figuras a mão livre*, concluindo assim, que essa figura possuía área menor porque poderia ser incluída em Y, esse procedimento nos traz à tona a dissociação entre o quadro geométrico e o quadro das grandezas, uma vez que, para esses alunos o formato da superfície não é mantido. Identificamos assim um teorema em ação

verdadeiro, ou seja, *se uma figura X cabe dentro de uma figura Y, então a área de X é menor que a área de Y.*

Com relação ao item (b) o qual solicitava uma figura de área maior que a da figura dada, os grupos 1, 2 e 3, construíram uma figura no exterior da figura Y, de forma que essa ficasse inclusa. A figura desenhada foi um retângulo, construído por meio do menu *Figuras a mão livre*, após selecionar a opção quadrilátero e em seguida retângulo. A ilustração a seguir apresenta essa questão.

Figura 166- Figura extraída da análise dos protocolos no AG2 dos grupos 1, 2 e 3

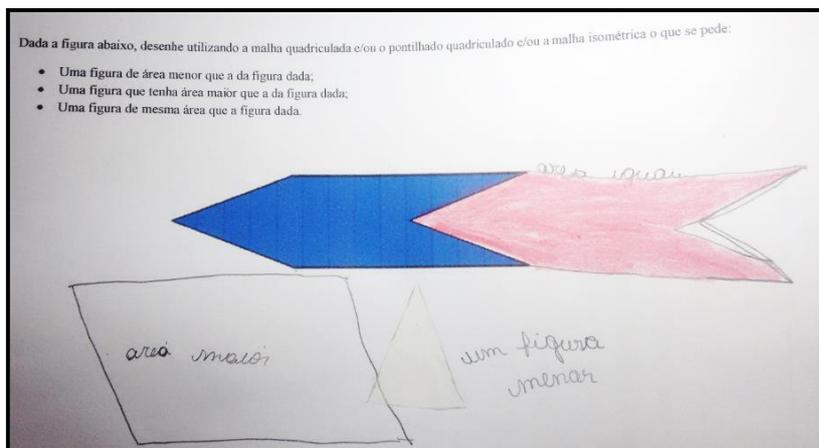


Quanto ao grupo 4 sobrepuseram o papel de decalque a figura Y e desenharam no exterior de Y um paralelogramo, após esse procedimento reproduziram no papel branco esse paralelogramo, chegando a mesma conclusão que os grupos anteriores.

O item (c) o qual solicitava uma figura de área igual a da figura de Y apenas os grupos 1 e 3, utilizando o *Apprenti Géomètre 2*, decompueram Y e com as partes decompostas montaram um retângulo, colocando em suas falas que possuíam as mesmas áreas, porque apenas haviam decomposto e recomposto com as mesmas partes de Y a nova figura. Esse procedimento nos permite identificar um teorema em ação verdadeiro segundo o qual *o corte e colagem sem perda nem sobreposição conservam as áreas.*

Os grupo 2 e 4, apenas reproduziram a figura Y, para esses alunos a ideia de mesma área estava fortemente ligada ao formato das figuras, como procedimento o grupo 2 duplicou Y com a ferramenta duplicar do menu operação e o grupo 4 decalcaram novamente Y e no papel branco reproduziram aproveitando uma das partes dessa figura. Apresentaremos a seguir o extrato do protocolo final do grupo 4 e como organizaram cada uma das figuras.

Figura 167- Extrato final do protocolo do grupo 4



Em síntese observamos uma mudança positiva no tratamento dado nas respostas, procedimentos e estratégias dos alunos em relação a essa mesma situação aplicada na primeira parte deste dispositivo, a qual verificamos que os alunos confundiram área com a quantidade de lados das figuras, ou seja, reproduziram como tendo área maior que a figura dada, uma figura que tivesse mais lados, uma figura de área menor uma que tivesse menos lados, e uma de mesma área, reproduziram uma figura mesmo que de diferentes formas, mas que tivesse a mesma quantidade de lado que Y .

A partir das socializações dos alunos em cada grupo sobre as estratégias utilizadas anteriormente para responder a cada tarefa, suscitou discussões que os conduziram a mudar de opinião e decidiram também refazer cada um dos itens para verificarem se os pontos de vista discutidos tinham fundamentos.

Identificamos a partir das respostas dadas pelos alunos com relação ao item (a) que conseguiram de forma satisfatória estabelecer a relação das áreas das figuras no sentido de verificar que decompondo uma figura em duas partes, uma dessas partes terá área menor que a figura completa, ou mesmo que desenhando uma figura no interior da figura dada, essa terá área menor. Com relação ao item (b) conseguem também estabelecer de forma satisfatória critérios para construir figuras de área maior ao desenharem no exterior de Y, retângulos como no caso dos grupos 1, 2 e 3, e o grupo 4 um paralelogramo, assim todos obteriam área maior que a de Y, uma vez que essa figura estaria inclusa nas demais.

Esses procedimentos nos permite identificar que há uma dissociação entre o quadro das grandezas e o quadro geométrico, uma vez que, esses alunos não levam em conta o formato da figura Y, ao reproduzirem figuras diferentes para explicitarem se tinham área maior ou menor.

Entretanto no item C a ideia de mesma área para os grupos 2 e 4 ainda está fortemente ligada ao formato das figuras, dessa forma apenas os outros grupos 1 e 3 não levaram em conta o formato da figura Y, permitindo-nos identificar a dissociação entre o quadro geométrico e o das grandezas de forma a compreender área como uma grandeza e não como uma figura.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim como os trabalhos de Duarte (2002), Melo (2003), Santana (2006), Teles (2007), Ferreira (2010) e Pessoa (2010), discutidos em nossa revisão de literatura, essa pesquisa está inserida no conjunto de investigações desenvolvidas pelo grupo Pró-Grandezas da UFPE, o qual tem se dedicado desde 2000 a estudar questões sobre o ensino e aprendizagem das grandezas, em particular área, comprimento e volume.

Como as demais pesquisas do grupo, adotamos a abordagem do conceito de área como grandeza geométrica, a partir dos estudos de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). Essas pesquisadoras francesas, ao realizarem um estudo nas avaliações de desempenho de alunos franceses na época elencaram erros e entraves na aprendizagem de área. Dentre eles, observaram confusões entre área e perímetro, o uso de fórmulas em situações em que não são válidas e a tendência por parte de alguns alunos de pensar que a possibilidade de medida da área de uma figura depende da compatibilidade entre o formato dos ladrilhos e o formato da figura, ou seja, só seria possível medir a área de uma figura com certa unidade, se fosse possível ladrilhá-la efetivamente com uma quantidade finita de superfícies unitárias.

Esses erros ocorrem, segundo as pesquisadoras francesas, como consequência do tratamento dos problemas sobre área segundo concepções geométricas ou segundo concepções numéricas. As concepções geométricas (ou concepções forma) são aquelas nas quais os alunos confundem área e figura e qualquer modificação da figura é entendida como modificação de todas as suas propriedades (inclusive a área e o perímetro). De acordo com as concepções numéricas, no outro extremo, só interessam os aspectos relacionadas ao cálculo das áreas. Ferreira (2010) baseada nos estudos de Douady e Perrin-Glorian, ainda complementa que as concepções numéricas também estão relacionadas quando o aluno entende a área de uma figura como um número, sem considerar a unidade. Por vezes os alunos desenvolvem ambas as concepções, mobilizam ora uma ora outra, mas não conseguem estabelecer relações pertinentes entre os aspectos geométricos e numéricos em jogo na resolução de tarefas sobre área.

Douady e Perrin-Glorian (1989) defendem que no ensino da área devem ser considerados três quadros: o quadro geométrico, o quadro numérico e o das grandezas. Mostram ainda que a abordagem de área como grandeza favorece uma articulação entre os

quadros geométrico e numérico contribuindo para a superação das dificuldades explicitadas anteriormente.

Constatamos que pesquisas brasileiras também enfatizaram erros e entraves de alunos dos mais diferentes níveis de escolaridade e que estão relacionados ao tratamento dado aos quadros geométricos e numéricos separadamente como explicitado nos estudos das pesquisadoras francesas.

Dentre esses erros e entraves destacamos os explicitados nos estudos de Duarte (2002) dificuldades em dissociar superfície de área, não aceitando que figuras diferentes podem possuir mesma área, bem como área do número, pelo fato de não conseguirem fazer distinção entre a área e a medida dessa grandeza. Melo (2003) também coloca que para muitos dos alunos da sua pesquisa figuras diferentes não podem ter mesma área e que o foco dos alunos para determinar se duas figuras possuíam ou não mesma área estaria relacionada ao formato das figuras. Nessas pesquisas e em Ferreira (2010). Observamos indícios de concepções geométricas como uma das causas da não dissociação entre área e perímetro.

Realizamos também um breve estudo sobre os diferentes recursos presentes nas pesquisas. Ora esses recursos eram utilizados para diagnosticar os conhecimentos dos alunos e por vezes para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da área.

Notamos então que são vastas as pesquisas que tratam do uso de diferentes recursos tais como: o tangram (DUARTE, 2002), tangram e malhas quadriculadas (FACCO, 2003), tangram, malhas quadriculadas e poliminós (SANTANA, 2006), atividades com uso de malhas quadriculadas (PESSOA, 2010; PAULA, 2011) e atividades com o uso de diferentes softwares de geometria, como Baldini (2004), Gobbi (2011), CREM (2007) e Silva (2015).

O marco teórico de nossa pesquisa foi a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud e seus colaboradores. Desse ponto de vista, concebemos área como um conceito (VERGNAUD, 1990), ou seja, como uma tríade: o conjunto das situações que dão sentido a área, o conjunto de invariantes operatórios subjacentes à ação do sujeito e o conjunto das representações simbólicas em jogo. (BELLEMAIN; BITTAR, 2000).

Ferreira (2010) relata baseada nos estudos de Vergnaud (1990) que para ganhar significado um conceito deve ser apresentado em uma grande variedade de situações. Em nossa pesquisa focamos tanto nas situações que dão sentido ao conceito, primeiro elemento da tríade de Vergnaud (1990) como também nos invariantes operatórios subjacentes à ação dos sujeitos, mais especificamente os teoremas em ação, já relacionados nos estudos de Baltar (1996), Duarte (2002), Melo (2003) e Ferreira (2010).

Ferreira (2010) baseada nos estudos de Baltar (1996) organizou um conjunto de quatro tipos de situações que dão sentido a área como grandeza geométrica: comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície. No nosso trabalho organizamos essas situações da seguinte forma: comparação de área com e sem a presença do aspecto numérico, medida de área, medida de área e mudança de unidade e produção de superfície de mesma área, de área maior e menor que uma figura dada.

Nossa pesquisa apresentou um diferencial em relação aos estudos anteriores que ao longo dos anos vêm buscando diagnosticar ou intervir nas dificuldades dos alunos dos mais diferentes níveis e modalidade de ensino. Algumas dessas pesquisas (DUARTE, 2002; FACCO, 2003; MELO, 2003; PESSOA, 2010; FERREIRA, 2010) utilizaram recursos não digitais - papel e lápis, diferentes tipos de malhas, papel de decalque, tesouras, régua, tangram, poliminós. Mas por um lado não estudaram simultaneamente a resolução de tarefas com recursos digitais e não digitais nem tampouco tomaram a influência da pluralidade de recursos como objeto de estudo.

Assim sentimos a necessidade de um estudo voltado ao uso de uma pluralidade de recursos como os explicitados anteriormente, incluindo os materiais manipulativos e um software de geometria que oferecesse aos alunos por meio do dinamismo, a possibilidade de utilizar procedimentos de resolução de determinadas tarefas sobre área que dificilmente seriam realizados em um ambiente estático.

O software escolhido foi o *Apprenti Géomètre 2*, pelo fato de disponibilizar em seus menus ferramentas que permitem a decomposição, recomposição, rotação, translação, reflexão, duplicar e dividir figuras geométricas planas desenhadas em sua interface. Segundo as pesquisas do CREM (2007), esse software apresentou boas contribuições na resolução de tarefas sobre área com alunos no contexto Belga. Assim traduzimos esse software para português para que pudéssemos identificar se sua utilização traria um diferencial nas resoluções de tarefas sobre área no contexto dos alunos brasileiros.

Traçamos então como objetivo da pesquisa investigar o tratamento dado por alunos do 6º ano do ensino fundamental às situações que dão sentido à área como grandeza geométrica em três ambientes: papel e lápis, materiais manipulativos e em um software de geometria (*Apprenti Géomètre 2*). Para atingirmos o objetivo da pesquisa estruturamos nosso experimento em dois momentos denominados de etapa de familiarização e dispositivo central.

A etapa de familiarização teve ao menos dois objetivos: permitir aos alunos a aquisição de conhecimentos a serem considerados na resolução de tarefas sobre área como

grandeza no dispositivo central e a familiarização dos alunos com diferentes recursos, pouco utilizados em sala de aula ou mesmo desconhecidos.

Essa etapa foi dividida em dois momentos, o primeiro denominado de ambiente não digital, no qual os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar com a malha quadriculada, com a malha isométrica, com reprodução de figuras, com quebra-cabeças e com composição de figuras. Pudemos perceber nesse ambiente por meio das respostas dadas às quatro tarefas que os alunos adquiriram conhecimentos úteis para a resolução das tarefas do dispositivo central da pesquisa sobre área, no que diz respeito à posição relativa de uma figura, às transformações isométricas do plano (rotação, translação e reflexão) e à composição de figuras.

O segundo momento, denominado de ambiente digital, foi dividido em duas partes. Na primeira foi realizado um momento instrutivo de apresentação do software *Apprenti Géomètre 2* com o objetivo de colocar os alunos em situação de começar o trabalho, ou seja, a instalação de certa cultura, pois o professor de matemática dos alunos participantes da pesquisa havia relatado em uma conversa informal com o pesquisador, que por não ter habilidade com o uso de recursos digitais no caso do computador, não tinha como trabalhar com o uso de software nas aulas de matemática.

Os alunos acompanharam atentamente a exposição, pelo pesquisador, das funcionalidades das ferramentas e menus do *Apprenti Géomètre 2* por meio da projeção de slides e apresentação das ferramentas no próprio software. Observamos nesse primeiro encontro que os alunos sempre se antecipavam e conseguiam descobrir algumas das funcionalidades de ferramentas e menus do software sem necessariamente serem orientados quanto a isso. Porém esse momento foi pertinente, para explicitar alguns procedimentos como os de decomposição e recomposição de figuras, para que os alunos entendessem a lógica do software para realizar esses processos.

Na segunda parte do dispositivo digital aplicamos um conjunto de cinco tarefas, sendo uma de complementação de figura e quatro de reprodução de figuras. Essas tarefas consistiram na exploração de ferramentas e menus do software e de conhecimentos que eram constitutivos de esquemas que os alunos mobilizariam no dispositivo central. Dentre os conhecimentos mobilizados nesta parte tivemos: processos de decomposição, recomposição, justaposição e as transformações isométricas do plano. Diversas ferramentas foram mobilizadas, como: do menu operação (duplicar, fundir, dividir, decompor) do menu movimentos (mover, rotação e reflexão) e os menus “Figuras Padrão e Figuras a mão Livre”.

Mesmo que a intenção das etapas de familiarização não fosse o trabalho diretamente com tarefas relativas à área, observamos que estava em jogo fortemente a relação entre o quadro geométrico e o das grandezas, ou seja, uma imbricação entre os dois quadros, uma vez que, ao exploramos nas tarefas de familiarização o trabalho com isometrias, com repetição de padrões, com decomposição e recomposição, com composição de figuras, interpretação da figura e reprodução, trouxe à tona a importância do quadro geométrico na construção do conceito de área.

Com relação ao uso do *Apprenti Géomètre 2* nas etapas de familiarização notamos que permitiu aos alunos elaborarem diferentes procedimentos de resolução e conjecturas que por meio das funcionalidades das ferramentas puderam realizar as tarefas propostas. Assim o aluno precisou por si só tomar decisões que seriam pertinentes para concluir cada tarefa. Nesse sentido esse software permitiu um cenário que favoreceu aos alunos diferentes possibilidades de resolver uma mesma tarefa de forma prática.

A captura de telas dos computadores juntamente com a análise dos vídeos de cada dupla, nos permitiram identificar quais procedimentos e as principais ferramentas que foram mobilizadas para responder as tarefas propostas, assim como a compreensão dos alunos com relação às funcionalidades de cada ferramenta do *Apprenti Géomètre 2*.

Alguns bugs também apareceram durante a realização das tarefas pelos alunos, dentre eles, se o aluno clicasse muitas vezes na interface do software, ou construíssem diversas figuras por meio do menu “*Figuras a mão livre*” e que não fosse construída corretamente o software apresentava uma mensagem de erro e encerra automaticamente, sem oferecer uma opção para o aluno salvar uma construção que havia sido realizada.

Avaliamos que esta etapa de familiarização nos ambientes não digital e digital cumpriu seu papel de forma pertinente para os objetivos traçados.

Quanto ao dispositivo central observamos que os alunos mostraram dominar parcialmente ou plenamente na resolução de tarefas sobre área, procedimentos de inclusão, sobreposição, decomposição e recomposição. Um dos fatores que permitiram aos alunos mobilizar tais procedimentos foi a pluralidade de recursos oferecidos. No ambiente materiais manipulativos, destacam-se: malhas quadriculadas, malhas pontilhadas, papel de decalque e a tesoura e no *Apprenti Géomètre 2* a possibilidade dinâmica da utilização das ferramentas do menu Movimentos (rotação, mover e reflexão) e das ferramentas decompor, duplicar e dividir.

Essas possibilidades de uso desses diferentes recursos trouxeram à tona teoremas em ação verdadeiros dentre eles a área é invariante por isometria e o corte e colagem sem perda nem sobreposição conservam as áreas.

No ambiente papel e lápis a invariância das áreas por isometria também surgiu nas resoluções das tarefas deste dispositivo pelas duplas desse ambiente, porém não identificamos, mesmo que de forma implícita nos procedimentos utilizados pelos alunos estratégias de decomposição e recomposição de figuras, um dos fatores que pode não ter sido favorável para que resolvessem tais tarefas utilizando esse procedimento foi a não disponibilização de outros recursos, como nos demais ambientes.

Como teoremas em ação falsos e que foram mobilizados nos diferentes ambientes temos: duas figuras que têm mesma quantidade de lados têm mesma área, duas figuras de mesma forma têm mesma área, figuras que não coincidem por sobreposição não têm mesma área e os comprimentos dos lados das figuras determinam suas áreas.

Quanto ao aspecto geométrico da área, verificamos que nas situações de comparação, a área estava relacionada para muitos dos alunos ao formato das figuras, ou mesmo ao fato das figuras serem idênticas e na situação de produção ao serem solicitados à construção de figuras de área maior, menor ou igual à de uma superfície dada, a forma da superfície era mantida. Com relação ao aspecto numérico da área, na situação de medida, os alunos entendiam que a área da figura estava associada a um número, pois não consideravam o par (número unidade de medida) e ao invés de comparar as áreas eles comparavam números.

Mesmo de forma discreta observamos nas situações de medida de área e mudança de unidade que para algumas duplas o formato dos ladrilhos não importava, ao darem conta que podiam decompô-los, para ladrilhar completamente uma figura que efetivamente não seria ladrilhada dada a forma de determinados ladrilhos e a partir daí medir a área das figuras. Esse fator foi observado em algumas duplas que utilizaram o *Apprenti Géomètre 2*, porém para a maioria dos alunos quando não era possível ladrilhar uma determinada figura dado o formato dos ladrilhos, era impossível medir sua área, no caso da tarefa 4 do dispositivo central.

Notamos que os procedimentos de decomposição foram evidentes nas resoluções das duplas que utilizaram o *Apprenti Géomètre 2*, um dos fatores que pode ter influenciado foi uma das tarefas de familiarização nesse software que exigiu dos alunos para reproduzir um desenho de um barco (tarefa 4 do ambiente digital) realizar procedimentos de decomposição de figuras. Identificamos então que os alunos do ambiente papel e lápis e materiais manipulativos, mesmo tendo realizado esses procedimentos anteriormente no software não conseguiram trazer essa reflexão para o papel, ou seja, raciocinar na lógica do software.

Mas também não podemos enfatizar se os alunos não mobilizaram esses procedimentos nos demais ambientes pelo fato de não terem conhecimento suficiente, ou pelo fato de não terem tido familiarização suficiente, mas observamos que as tarefas no ambiente

não digital com relação aos procedimentos de decomposição e recomposição foram trabalhadas na pesquisa de forma discreta.

Quanto à segunda parte do dispositivo central observamos uma pluralidade de estratégias pela possibilidade de os alunos utilizarem diferentes recursos. Nessa parte do dispositivo central, os alunos puderam escolher os recursos que sentissem mais à vontade para responder as tarefas nos três ambientes. Notamos ainda um avanço significativo pelos grupos de alunos tanto na resolução das tarefas, quanto em teoremas em ação verdadeiros dentre eles: “área é invariante por isometrias e o corte e colagem sem perda nem sobreposição conservam as áreas”.

Com relação aos procedimentos mobilizados temos inclusão, sobreposição, contagem e de forma acentuada os procedimentos de decomposição e recomposição de figuras. Verificamos que nessa parte do dispositivo houve um avanço nas tarefas referente às situações de comparação de área, pois os alunos conseguiram identificar que figuras diferentes tinham as mesmas áreas, e para confirmar essa questão, realizaram decomposições em diferentes figuras a fim de comporem uma que coincidissem por sobreposição confirmando então que elas tinham as mesmas áreas.

Nas situações de medida de área, o aspecto numérico ainda predominou. Mesmo com a pluralidade de recursos, os alunos não levaram em conta o par (número unidade de medida) para estabelecer as áreas das figuras e para muitos deles comparar a área é comparar números (inclusive quando as unidades de área utilizadas não são as mesmas).

Com relação às situações de medida e mudança de unidade a maioria dos alunos não conseguiu ladrilhar uma determinada figura, dada à impossibilidade de ladrilhagem com determinadas formas de ladrilhos, nem tampouco estabelece a medida das áreas de algumas figuras, apresentado indícios de concepção numérica da área. Esse tipo de dificuldade também foi identificado nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989).

Um avanço também foi notado nas situações de produção de superfície, as quais consistiam em produzir figuras de área, maior, menor ou igual a uma superfície dada. Os alunos escolheram utilizar o *Apprenti Géomètre 2* pelo fato de ser mais econômico para construir diferentes tipos de figuras por meio dos menus “*Figuras Padrão* ou *Figuras a mão livre*”, de fato os alunos conseguiram produzir figuras diferentes de área maior, menor e igual a uma figura dada, estabelecendo a articulação entre os quadros geométrico e das grandezas, desestabilizando as concepções geométricas da área.

Notamos que muitos dos alunos recorriam ao software porque achavam mais econômico para responder as tarefas propostas, outros preferiram em algumas tarefas utilizar

o ambiente materiais manipulativos. Em algumas ocasiões resolviam responder utilizando o software e depois no ambiente materiais manipulativos como forma de levar a lógica do software para o papel.

Quanto ao uso do *Apprenti Géomètre 2* no dispositivo central da pesquisa, listamos a partir das análises realizadas que o software em alguns momentos proporcionou um tempo menor para resolução das tarefas. Mostrou-se útil na precisão da duplicação dos ladrilhos para o trabalho com a ladrilhagem de figuras de forma satisfatória pelo fato de não esgotar a possibilidade da duplicação desses diferentes ladrilhos.

Nas situações de comparação de área os alunos do ambiente materiais manipulativos por vezes se perdiam no decalque das figuras, quando o objetivo era decalcar e sobrepor para verificar se as figuras possuíam ou não as mesmas áreas e isso conduziu algumas das duplas a erros, porém os alunos que utilizaram o *Apprenti Géomètre 2* conseguiam sem maior esforço, utilizando as ferramentas duplicar, mover, rotação sobrepor as figuras e verificar se possuíam ou não as mesma áreas.

A organização das ferramentas no software e a possibilidade de poder decompor uma determinada figura sucessivamente, assim como duplicar, aplicar rotação, translação e reflexão, possibilitou aos alunos desse ambiente a utilização de procedimentos mais variados de resolução do que nos demais ambientes.

O modo de lidar com as transformações isométricas do plano foi notado fortemente como um diferencial do *Apprenti Géomètre 2*, em relação aos demais ambientes. Os alunos identificavam claramente que era preciso em alguns momentos aplicar movimentos de translação, reflexão e rotação para comparar as áreas de figuras que não se encontravam em uma mesma posição que outra figura dada na tarefa.

Todas as tarefas foram desenvolvidas pelo autor da pesquisa no *Apprenti Géomètre 2*, mesmo as adaptadas para o ambiente papel e lápis. Porém sentimos a necessidade que os enunciados das tarefas estivessem descritos na própria interface do software, porque os alunos se desconcentravam, muitas vezes, pois precisavam recorrer às fichas constantemente para saber o que a tarefa estava solicitando.

Com relação aos ambientes, os resultados da pesquisa reforçam nossa compreensão de que ao introduzir ambientes digitais, como o uso de softwares, será possível sem o menor custo excluir os ambientes não-digitais. Embora tenhamos observado ganhos evidentes com o uso do *Apprenti Géomètre 2*, na resolução das tarefas, o ambiente materiais manipulativos também proporcionou ampliação das possibilidades de procedimentos de resolução.

Algumas limitações foram identificadas na pesquisa. A primeira diz respeito à complexidade e amplitude do dispositivo experimental (fases de familiarização e etapas do dispositivo central) que geraram dificuldades na análise dos dados, dentro do tempo de um mestrado. Encontramos resultados interessantes, mas ainda há muito a explorar a partir dos dados coletados. Não realizamos entrevista com os alunos anterior ao uso dos materiais manipulativos, nem tampouco sobre o conhecimento que eles tinham acerca do uso de recursos digitais para termos uma visão da familiarização desses alunos anterior à aplicação das tarefas da pesquisa. Outro ponto a se destacar é que o dispositivo experimental foi relativamente curto e não houve institucionalização e sistematização dos conteúdos abordados. É provável que uma sequência didática mais longa, intercalando a resolução de tarefas pelos alunos e momentos de sistematização e de instrução sobre os conteúdos abordados provocasse modificações mais significativas nos conhecimentos mobilizados pelos alunos.

Por fim, elencamos algumas perspectivas para novas investigações:

- Aprofundar o estudo dos aportes do uso de diversos recursos para a construção do sentido de área como grandeza;
- Analisar os dados da pesquisa, sob a ótica dos recursos, utilizando outros aportes teóricos, como a teoria da orquestração instrumental;
- Elaborar e experimentar uma engenharia didática ancorada na pluralidade de recursos para a construção do sentido de área como grandeza;
- Investigar a prática dos professores quanto ao uso de recursos no ensino de área.
- Elaborar e desenvolver recursos tecnológicos acessíveis ao professor para o ensino de área;

Notamos ainda a partir da nossa pesquisa que a utilização de uma pluralidade de recursos mostrou-se importante na resolução de tarefas sobre área pelos alunos do 6º ano. Santana (2006) em seu estudo coloca de forma enfática que a exploração de recursos nos livros didáticos é incipiente e que há uma necessidade do trabalho acentuado com o uso de trangram, malhas quadriculadas e políminós, por exemplo. Assim apontamos tanto para autores de livros didáticos, professores e formadores de professores que no trabalho com área na escola seja incorporado uma maior riqueza de recursos (digitais e não digitais) como forma de superar as lacunas no processo de ensino e aprendizagem de área.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

BALDINI, L. A. Ferreira. **Construção do conceito de área e perímetro**: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica. 2004. 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)- Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BALDIN, Y.Y. VILLAGRA, G. A. L. **Atividades com Cabri Géomètre**. São Carlos: EDUFSCar, 2002. 240 p.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes**: une étude de l'acquisition des relations entre les longuers et les aires au collège. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1996.

BELLEMAIN, P.; LIMA, P. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.

BELLEMAIN, P.M.B. Estudo de situações-problema relativas ao conceito de área. In: X ENDIPE-ENCONTRO DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 2000, Rio de Janeiro. Ensinar e aprender: sujeitos, saberes, tempos e espaços. **Anais...** Rio de Janeiro, 2000. CD-ROM.

BELLEMAIN. P. M. B. ; BITTAR. M. **O ensino da geometria e a teoria dos Campos Conceituais**. 2000. Disponível em <<http://www.cefetes.br/gwadocpub/PosGraduacao/Especializa%C3%A7%C3%A3o%20em%20educa%C3%A7%C3%A3o%20EJA/Publica%C3%A7%C3%B5es/anped2002/bellemainmicurso19.pdf>> Acesso em 2 de fevereiro de 2016.

CARVALHO, D. L. de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 4. Ed. São Paulo: Cortez, 2011. 119 p.

CREM, Apprenti Géomètre. **Guide utilisateur du logiciel**. Disponível em <<http://api.crem.be/medias/logiciels/1/Guide%20utilisateur.pdf>> Acesso em 15 de setembro de 2015.

CREM, Apprenti Géomètre. **Grandeurs, Fractions et Mesures**. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 2003.

CREM, Apprenti Géomètre. **Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages**. Tome 2. Nivelles, Bélgica, Ministère de la Communauté Française, 2007.

CREM, Apprenti Géomètre. **Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique**. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 2005.

DIEGO USCANGA. **aTube Catcher**. Disponível em < <http://www.atube.me/video/>> Acesso em 12 de setembro de 2015.

DUARTE, J. H. **Análise de Situações Didáticas para a Construção do Conceito de Área, como Grandeza, no Ensino Fundamental**. 2002. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação).- Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

EASTERNGRAPHICS. **Pcon.creator**. Disponível em < <http://pcon-planner.com/pt/contato-pconplanner/>> Acesso em 17/12/2015.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane**. Educational Studies in Mathematics.v.20, n.4, p. 387-424, 1989.

FACCO, S. R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. 2003. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).- Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2003.

FERREIRA, L. de F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação) -. Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

GITIRANA, V. et al. **Repensando multiplicação e divisão contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 1. Ed. São Paulo: PROEM, 2014.

GOBBI, J.A. **Do livro didático ao software geogebra**: a engenharia didática no estudo de figuras planas na 6ª série/7º ano do ensino fundamental. 2012. 135f. Dissertação (Curso de Mestrado profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática)-Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2012.

LIMA, P. ; BELLEMAIN, P. Grandezas e Medidas. In CARVALHO, J.B.P.F. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática**, v. 17. Brasília, MEC, 2010, p.167- 200.

MAGINA, S. et al. **Repensando Adição e Subtração**. 3. ed. São Paulo: PROEM, 2008. 119p.

MELO, M.A.P. **Um estudo de conhecimentos de alunos de 5º a 8º série do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro**. 2003. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Pós- graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2003.

NÖEL, G.; PLIEZ, G. **Apprenti Géomètre**. Copyright. CREM, Fevereiro 2014.

PAULA, A. P. M. **Ensino de área de figuras planas por atividades**. 2011. 232f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011.

PERNAMBUCO, SEDUC. **Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental** com base nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco, Recife, SEDUC-PE, 2012.

PERNAMBUCO, SEDUC. **Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica de Pernambuco**. Recife: SEDUC, 2012.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada**: influência de algumas variáveis. 2010.141f. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática e Tecnológica)- Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

SANTANA, W. M. G. de **O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área**: uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental. 2006. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

SILVA, A. D. Área de figuras planas com o *Apprenti Géomètre 2*: análise de uma atividade. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIV. , 2015. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. **Anais...** Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, 2015.

SILVA, A. D. Da composição e da decomposição de figuras planas à construção do conceito de área: um estudo por meio do *Apprenti Géomètre 2*. In: EBRAPEM: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, XVIII., 2014, Recife. **Anais eletrônicos...** Recife, 2014. Disponível em:

<<http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XVIIIIBRAPEM/PDFs/GD2/andersonsilva2.pdf>> .

Acesso em 14 de janeiro de 2015.

TECHSMITH CORPORATION. **Camtasia Studio 7**. Disponível em:

<<https://www.techsmith.com/tutorial-camtasia-7.html>> Acesso em 13 de setembro de 2015.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre os campos conceituais das grandezas geométrica e suas medidas, da álgebra e das funções**: um estudo sobre as fórmulas de área no ensino fundamental. 2007. 294f. Tese (Doutorado em Educação). Centro de Educação, UFPE, Recife, 2007.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, JEAN. **Didáctica das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.

APÊNDICES

APÊNDICE A- *APPRENTI GÉOMÈTRE*: UMA VISÃO GERAL

O *Apprenti Géomètre* é um software de geometria desenvolvido pelo “*Centre de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques (CREM)*”³⁷ para atender a proposta do Ministro da Educação Básica da comunidade francófona na Bélgica, em fornecer um software de matemática para crianças de 8 a 12 anos, que lhes permitisse realizar atividades de geometria dificilmente acessível em um contexto escolar tradicional.

Ao abrirmos o software, a janela de entrada do *Apprenti Géomètre*³⁸ 2, oferece ao usuário cinco opções de menus: A, B, C, AB e AC. Nesta janela é preciso que o usuário se identifique como professor ou aluno.

Na opção de aluno, o mesmo terá que se identificar escrevendo seu nome, para que assim, o professor tenha acesso posteriormente ao histórico de atividades que esse aluno desenvolveu, por meio do software, identificando-o. A opção “*Professor*” oferece ao professor personalizar um novo menu de acesso ao aluno, por meio da ferramenta *Personalizar*.

Como esta opção de menu o professor pode traçar atividades iniciais, defini menus para deixar acessível ao aluno e decidir as ferramentas que estarão disponíveis à atividade que será proposta, ou seja, um menu de controle no qual os alunos, só poderão utilizar as ferramentas que serão compatíveis com o planejamento do professor. Esse software encontra-se disponível em <<http://www.crem.be>> é livre e pode ser instalado em computadores com o sistema operacional Windows, Mac OSX, Mac OS9 e Linux. No referido site encontramos ainda tarefas pré-definidas³⁹ com o uso do *Apprenti Géomètre 2* e utilizadas nas pesquisas desenvolvidas pelo CREM. Há também um manual de utilização e publicações referente ao uso do *Apprenti Géomètre 2* como um importante recurso no processo de ensino e aprendizagem de áreas de figuras planas (SILVA, 2014).

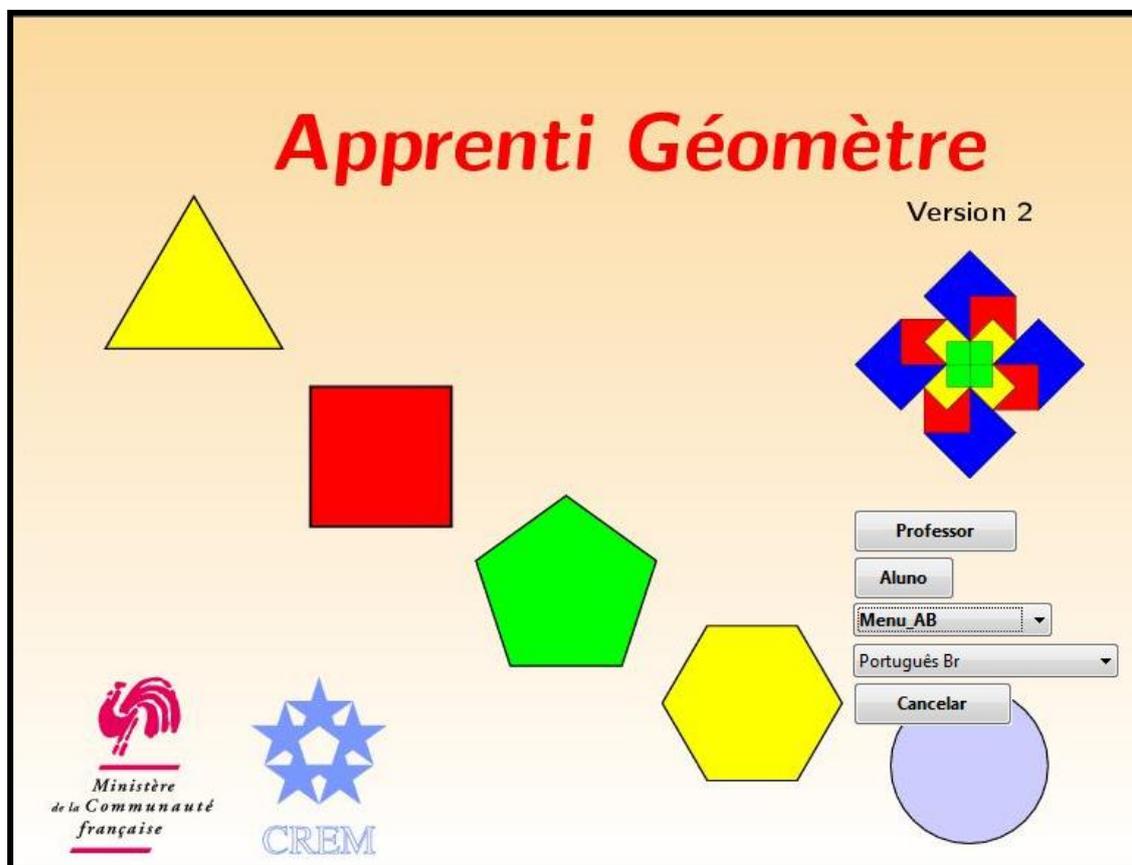
³⁷ Centre de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques (CREM) é um grupo de pesquisa responsável pelo projeto de elaboração do *Apprenti Géomètre* nas versões 1 e 2. A elaboração do projeto desse software contou com a participação dos seguintes integrantes: Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Guy Noël, Nicolas Rouche et Marie-Françoise Van Troeye. Este Centro está localizado na 5rueÉmileVandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique.

³⁸ Esse software foi traduzido para língua portuguesa pelo autor da pesquisa, uma vez que, ao fazermos o download do arquivo do software que se encontra disponível no site da CREM citado anteriormente, só oferece duas opções de idiomas- francês e inglês.

³⁹ Essas atividades foram desenvolvidas pela CREM com o objetivo de fazer um estudo com alunos da comunidade francófona na Bélgica por meio do *Apprenti Géomètre 2*.

A figura abaixo ilustra a janela de abertura do *Apprenti Géomètre 2* :

Figura 168-Tela de abertura do *Apprenti Géomètre 2*



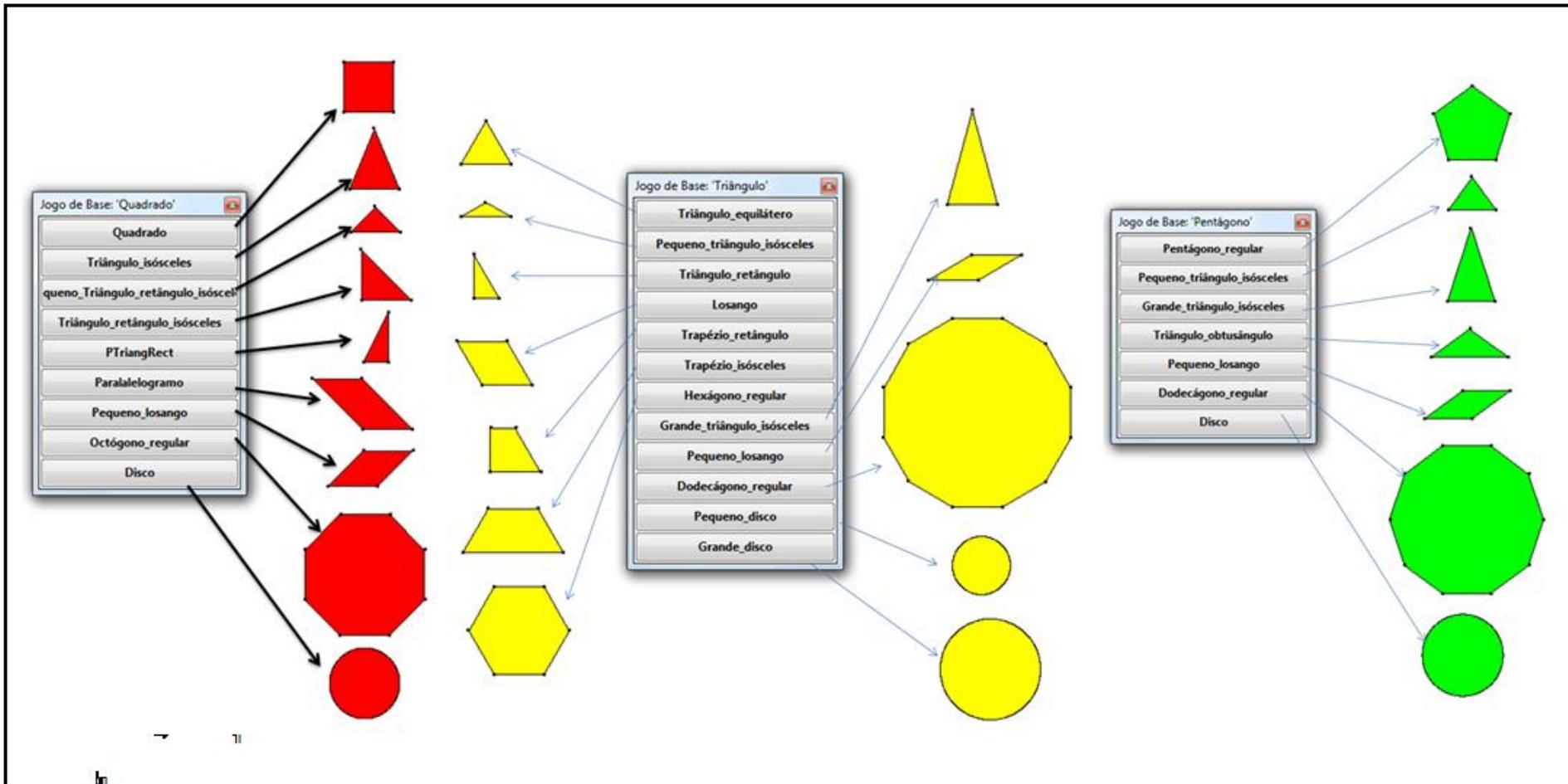
Fonte: produzida pelo autor após um *print screen* da tela de abertura do AG2

As opções de menus presentes na figura 1 oferecem ferramentas diferentes para o usuário. O menu A foi desenvolvido para estudantes com idade de 8 a 12 anos. Nesse menu o estudante tem acesso a um conjunto de figuras geométricas pré-definidas. É preciso apenas escolher a figura, clicar em uma delas que encontram-se agrupadas em sub menus denominados de jogo de base e em seguida na interface do software, assim ele poderá reproduzir quantas figuras forem necessárias ao desenvolvimento das atividades propostas pelo professor.

Apresentaremos a seguir as figuras que compõem os Jogos de Base: Quadrado, Triângulo e Pentágono, ou seja, as famílias dessas figuras formadas com as combinações interessantes que podem surgir da decomposição, recomposição, fusão, inscrição ou circunscrição dos polígonos regulares supracitados⁴⁰

⁴⁰ Explicações detalhadas, assim como as composições, inscrições e circunscrições das figuras podem ser encontradas no manual de usuário do software, disponível no site do CREM- <http://www.crem.be>.

Figura 169- Figuras dos Jogos de Bases do menu Figuras Padrão

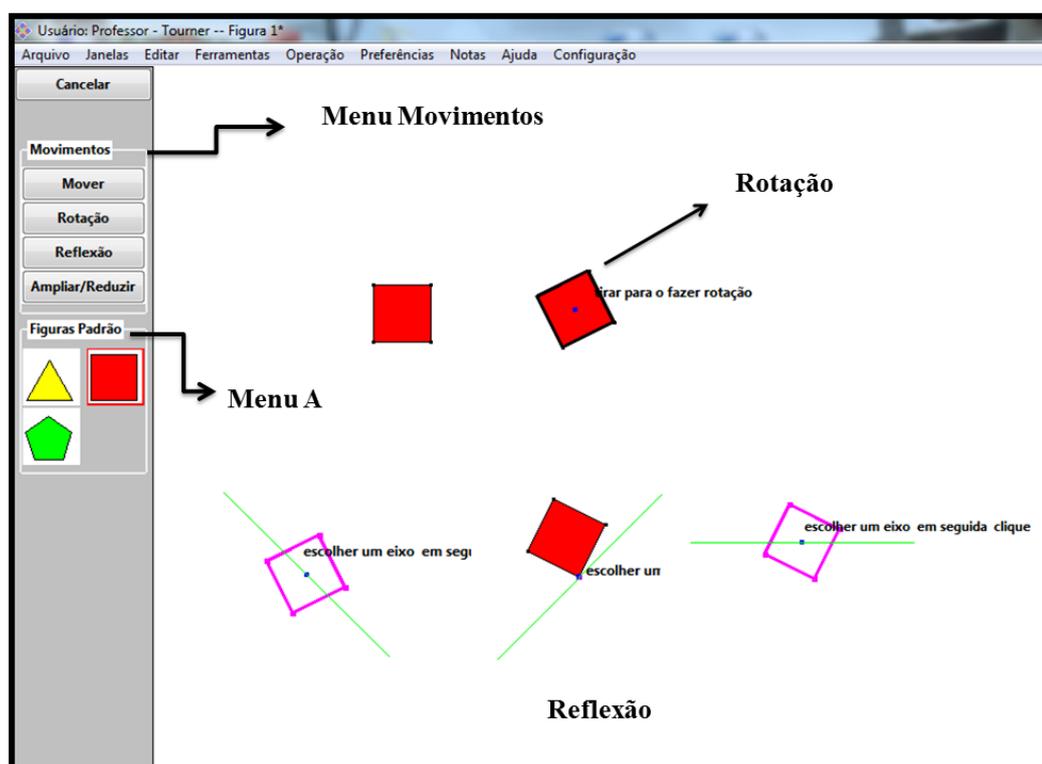


Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa no AG2 (versão português)

O aluno poderá também utilizar o menu *Movimentos* com a possibilidade de mover, realizar uma rotação ou fazer uma reflexão nas figuras criadas na interface do software por meio do menu *Figuras Padrão*.

A ilustração abaixo apresenta a interface do *Apprenti Géomètre 2*, após escolhermos a opção de menu A e em seguida termos desenhados a representação de três quadrados do menu *Figuras Padrão*, mostrando assim as opções do menu *Movimentos*.

Figura 170- Interface do AG2 após selecionar a opção de menu A e o menu movimentos



Fonte: elaborada pelo autor no software AG 2

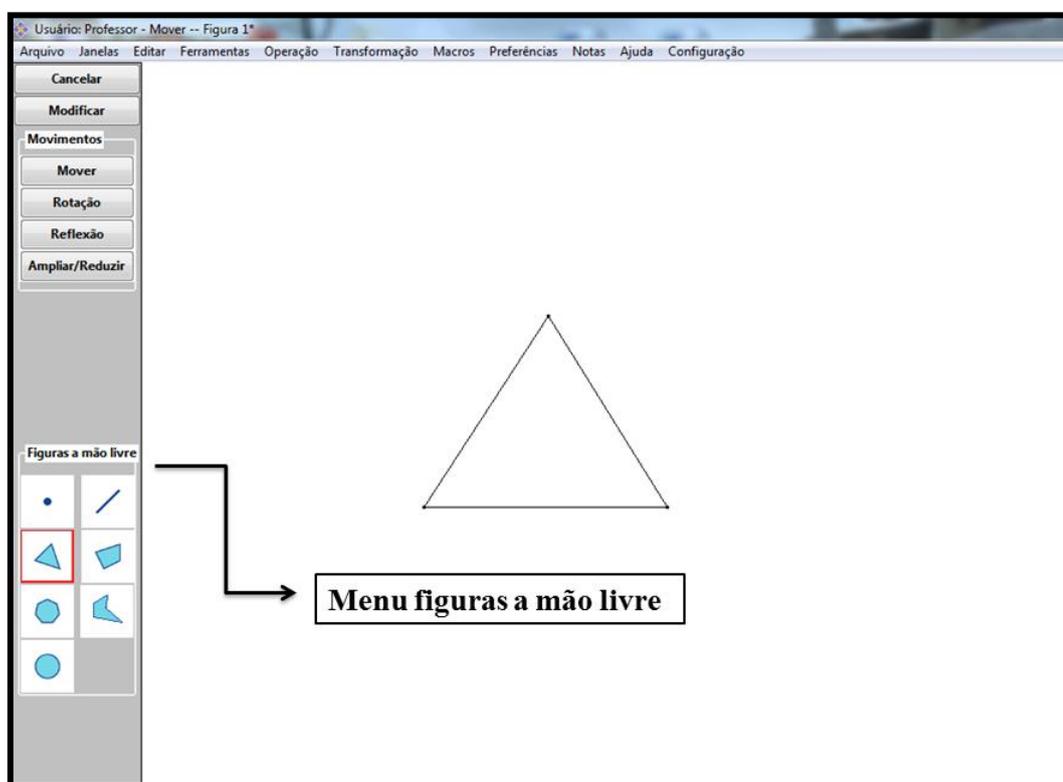
O menu B está totalmente incluído no menu C, esses menus contém um conjunto de figuras que precisam ser construídas com alguns cliques do mouse, essas por sua vez são agrupadas em famílias assim como menu anterior, porém são definidas pelo seu números de lados, ângulos etc. o menu que contém essa família de figuras é denominado de *Figuras a mão livre*.

Diferente do menu *Figura Padrão* que traz um conjunto de figuras geométricas pré-definidas, sendo preciso apenas um clique sobre a figura com o mouse e depois na interface do software para que as figuras sejam criadas, o menu *Figuras a mão livre* permite a construção da figura por meio de alguns cliques, exigindo do aluno um conhecimento mais elaborado para construir diferentes figuras.

Para desenhar um triângulo qualquer, por exemplo, é preciso selecionar a opção triângulo do menu *Figuras a mão livre* em seguida determinar três pontos não colineares com clicando com o botão direito do mouse. Os dois primeiros pontos determinam a base do triângulo e o último a altura, assim é possível construir um triângulo qualquer utilizando esses procedimentos.

A ilustração a seguir apresenta a interface do *Apprenti Géomètre 2* após selecionar a opção de menu na tela de abertura do software o menu B e ter construído um triângulo qualquer.

Figura 171- Interface do AG2 (menu B)- Representação de um triângulo a partir do menu- Figuras a mão livre

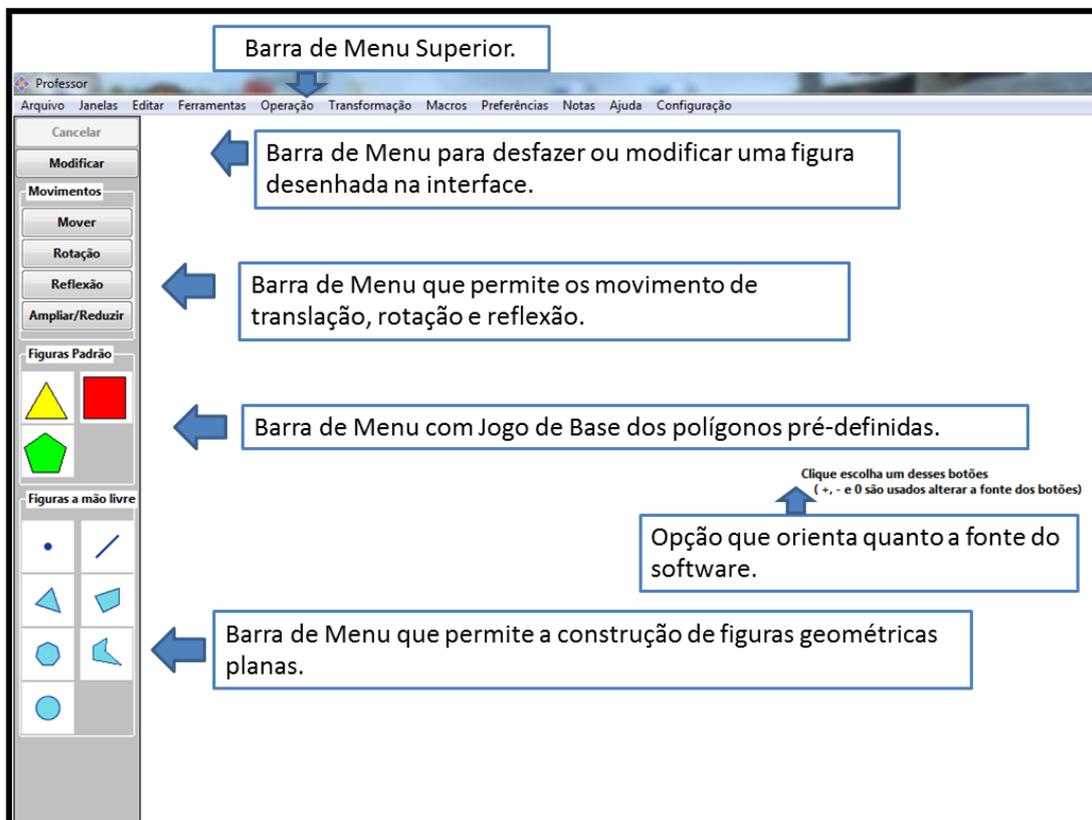


Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa

Os menus AB e AC são junções dos menus A + B e A + C. Os menus *Cancelar* (desfazer), *Modificar* (modificar uma figura desenhada na interface do software), o menu *Movimentos* que inclui as ferramentas *Mover* (deslizar), *Rotação*, *Reflexão* e *Ampliar/Reduzir* (redimensionar uma figura) e os menus *Figuras Padrão* e *Figuras a mão livre* se unem para a formação dos menus AB e AC.

Ilustraremos a seguir a interface do *Apprenti Géomètre 2*, após ter escolhido as opções de menus AB ou AC:

Figura 172- Interface do AG2 - Menus AB ou AC



Fonte: elaborada pelo autor da pesquisa adaptado para português (SILVA, 2014)

O *Apprenti Géomètre 2* possui uma barra superior, onde são encontrados os menus com ferramentas que permitem a decomposição, fusão, duplicação, divisão de figuras geométricas, entre outras.

APÊNDICE B - POTENCIALIDADES DO *APPRENTI GÉOMÈTRE 2* PARA O ESTUDO DAS SITUAÇÕES QUE DÃO SENTIDO A ÁREA COMO GRANDEZA

O *Apprenti Géomètre 2* traz em seus menus diferentes ferramentas que apresentam possibilidades para o trabalho com as situações de comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície.

O menu *Figura Padrão*, por exemplo, reúne um conjunto de figuras pré-definidas que podem ser utilizadas como unidade de mediada não convencional CREM (2007). Com esses tipos de figuras podemos trabalhar com as situações de comparação, medida de área e mudança de unidade.

Segundo Lima e Bellemain (2010, p.12) no ensino fundamental, é importante, que se dê oportunidade ao aluno de efetuar medições de forma intuitiva, com o emprego de unidades não convencionais [...]. Tais atividades podem contribuir para a compreensão do caráter arbitrário da unidade e para desenvolver a habilidade de adequar a unidade à grandeza a ser medida.

Outros conjunto de figuras pré-definidas são encontrados na opção *Figuras Padrão* do menu *Preferências* que fica localizado na barra de menu superior do software, dentre esses conjuntos temos as peças do jogo tangram e os poliminós, há uma opção também de se trabalhar com as malhas pontilhadas quadradas e com a malha isométrica, com relação a esses recursos e que são importantes para o trabalho com comparação e medida de área de figuras planas. Santana (2006) coloca que a utilização em particular, do tangram, dos poliminós e das malhas, traz contribuição significativa para a aprendizagem de área de figuras planas.

O menu B e C, ou mesmo os menus AB e AC citados anteriormente, implementam o menu “*Figuras a mão livre*” que contém um conjunto de figuras que precisam ser construídas utilizando diferentes procedimentos de acordo com as propriedades da figuras, um ferramenta útil para o trabalho com as situações de produção de superfície, uma vez que os alunos podem criar a partir de uma figura dada, uma que tenha área maior, menor ou igual, sem recorrer ao aspecto numérico da área, com esse tipo de construção estarão articulando os quadros geométricos e das grandezas, permitindo assim a construção de área como grandeza autônoma (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

O *Apprenti Géomètre 2*, também permite o trabalho com as transformações isométricas do plano, por meio do menu *Movimentos* o usuário tem a possibilidade de movimentar as figuras desenhadas na interface do software mantendo-as congruentes – *Mover*, *Rotação* e *Reflexão*. Franchi et al.(1992) relata que a análise desses movimentos é importante em vários

aspectos. Um deles é favorecer a percepção e a capacidade de análise de movimentos tais como: translação e rotação em torno de um ponto, rotação em torno de um eixo e que essas atividades fazem parte da experiência diária de todos.

Outro aspecto ainda segundo essa autora é propiciar o desenvolvimento de habilidades de visualização tais como: visualizar uma figura em diferentes posições e prever elementos geométricos das figuras- “essa montagem superpõe-se a esta por meio de translação”... “este lado é congruente a este”...

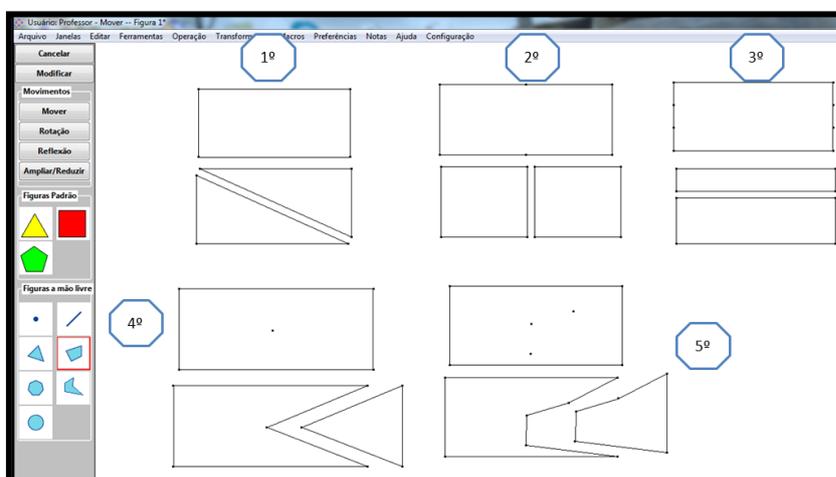
Esses autores também colocam que tais habilidades mencionadas anteriormente, devem ser desenvolvidas gradativamente pelos alunos, para posteriormente realizar tarefas mais complexas.

Um grande diferencial que o *Apprenti Géomètre 2* traz em relação aos demais softwares de geometria e que é importante para o trabalho com as situações de comparação de área e produção de superfície, uma vez que, ao compararmos duas superfícies de forma diferentes, uma das maneiras de saber se elas possuem ou não mesma área, um dos procedimentos que pode ser utilizado é decompor uma dessas figuras e recompor uma nova possível de comparar por sobreposição e assim, se essas duas figuras coincidirem por sobreposição, terão as mesmas áreas.

Há algumas possibilidades de decompor uma figura no *Apprenti Géomètre 2*, pela diagonal, pela vertical ou horizontal, ou de diferentes formas por meio da criação e ligação de pontos sobre a figura, entretanto para que essa decomposição aconteça é preciso conectar esses pontos criados na figura com dois dos vértices da mesma.

Ilustraremos a seguir alguns procedimentos de decomposição de figuras utilizando o *Apprenti Géomètre 2*.

Figura 173- Decomposições no *Apprenti Géomètre 2*



Fonte: elaborada pelo autor

Um dos procedimentos para decompor uma figura no *Apprenti Géomètre 2* é pela diagonal, para realizar esse tipo de decomposição é preciso apenas criar uma figura na interface do software por meio dos menus “*Figuras Padrão*” ou “*Figuras a mão livre*”, selecionar a ferramenta “*Decompor*” do menu *Operação*, em seguida clicar sobre a figura, selecionando-a e por último clicar em um dos seus vértices arrastando com o botão direito do mouse até o outro vértice pela diagonal, assim o processo de decomposição pela diagonal se efetuará, a figura 1 apresenta a decomposição de um retângulo em dois triângulos retângulos, quanto as decomposições pela vertical e horizontal figuras 2 e 3, é preciso primeiro selecionar a ferramenta “*Dividir*” do menu *Operação*, e escolher em quantas partes queremos dividir os segmentos da figura, após selecionar um dos segmentos, dessa forma ele será dividido em partes proporcionais, em seguida devemos selecionar a ferramenta “*Decompor*”, selecionar a figura e ligar os pontos de divisão pela vertical como mostra a figura 2, ou pela horizontal como ilustra a figura 3.

Com relação à figura 4, outra forma de decompor é escolher a opção “*Construir um ponto no centro*”, do menu *Operação*, essa opção permite criar no centro da figura um ponto que passa a pertencer a mesma. Após a criação desse ponto central, é preciso apenas selecionar a ferramenta “*Decompor*”, clicar sobre a figura, escolher um dos vértices, ligar ao ponto central com o botão direito do mouse e concluir arrastando até o outro vértice da figura, assim realizaremos mais um processo de decomposição de outra forma, diferente da maneira habitual no software apenas pela diagonal.

Ainda há outra forma de decompor por meio da criação de pontos livres nas figuras desenhadas na interface do software, como ilustra a figura 5, foram criados diversos pontos de corte sobre a figura, por meio do menu “*Figura a mão livre*”, assim ao selecionarmos a ferramenta *Decompor* e clicarmos sobre a figura, é preciso apenas selecionar um dos vértice e com o botão direito do mouse liga-lo aos demais pontos criados, entretanto a decomposição só se efetuará se a ligação dos pontos terminar em um outro vértice da figura.

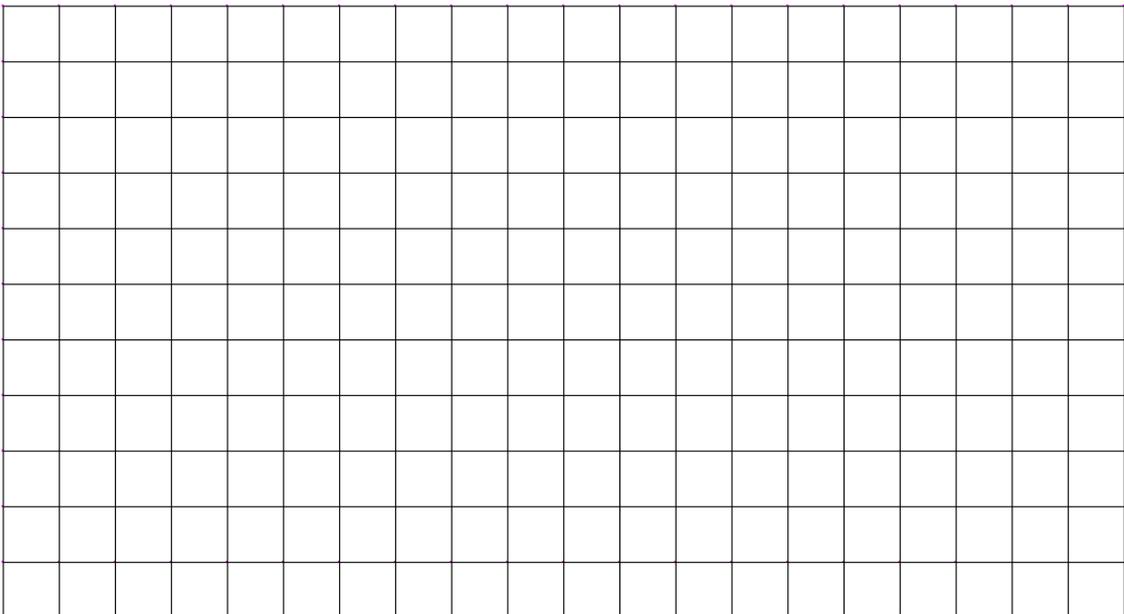
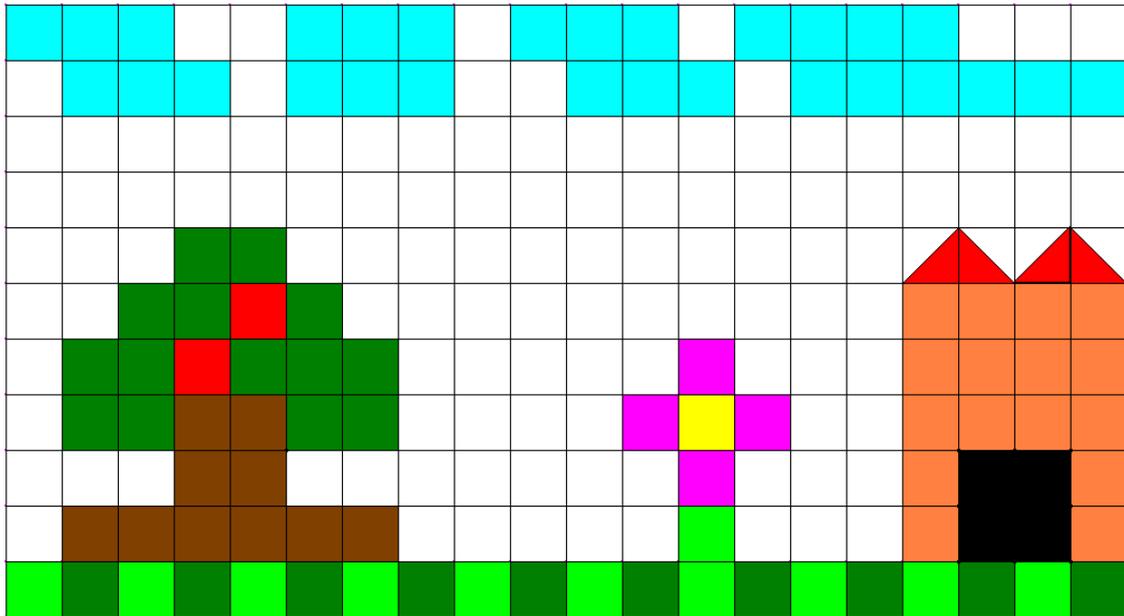
Outra característica do *Apprenti Géomètre 2* que pode contribuir com as situações de medida de área e mudança de unidade é a ferramenta “*Duplicar*” do menu *Operação*, essa ferramenta tem como função duplicar qualquer figura desenhada na interface do software, assim para medirmos a área de uma determinada figura utilizando diferentes tipos de ladrilhos podemos duplica-los de forma a obter uma quantidade suficiente que permita a pavimentação completa de uma figura, para então identificarmos a medida de sua área.

APÊNDICE C – TAREFAS DE FAMILIARIZAÇÃO NO AMBIENTE NÃO DIGITAL

Escola:			
Ano/Série :	Turma:	Turno:	Data:
Aluno (a):		Idade:	

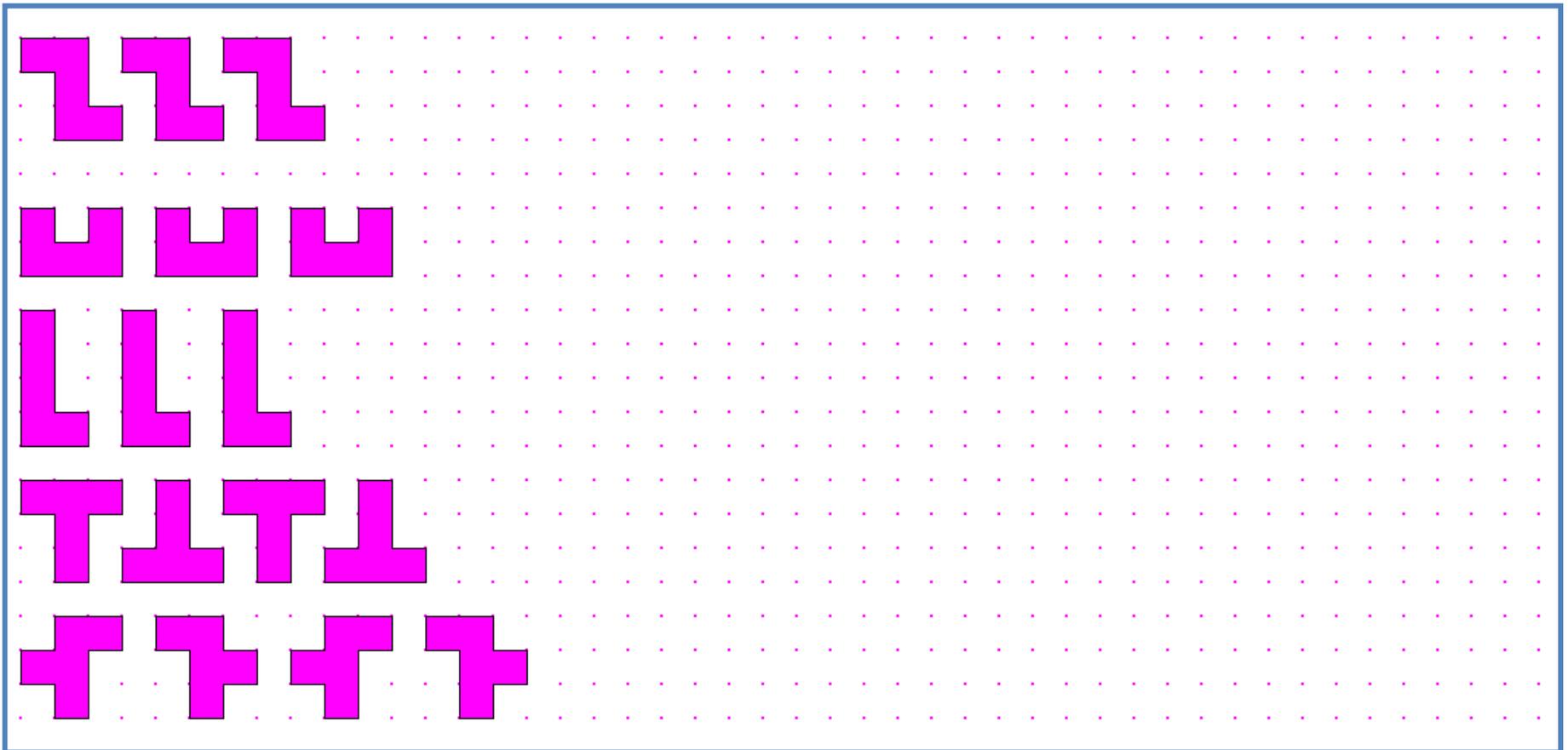
Tarefa 1 (reprodução na malha quadriculada)

1- Observe a figura e em seguida reproduza-a na malha quadriculada:



Tarefa 2 (Isometrias na malha pontilhada quadrada)

2- Observem os padrões dos frisos abaixo e continuem a reproduzir os pentaminós:

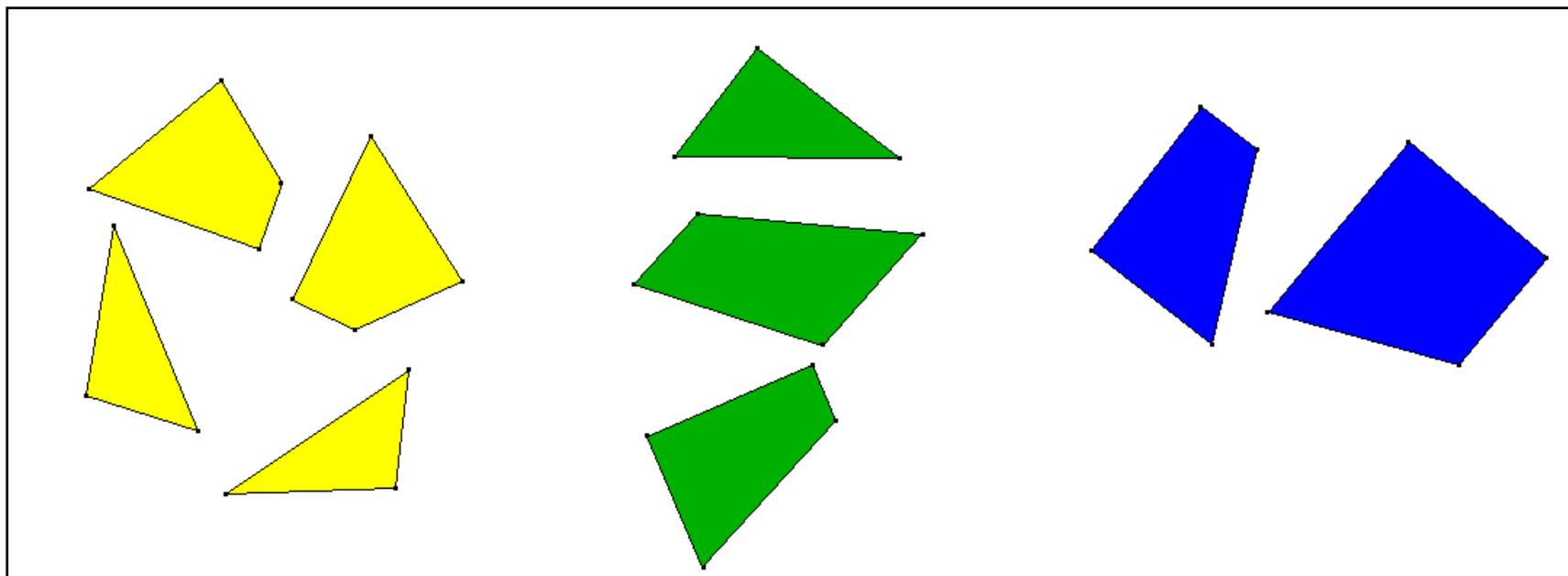


Tarefas de Familiarização no Ambiente Não Digital –Composição de figuras

Escola:			
Ano/Série :	Turma:	Turno:	Data:
Aluno (a):			Idade:

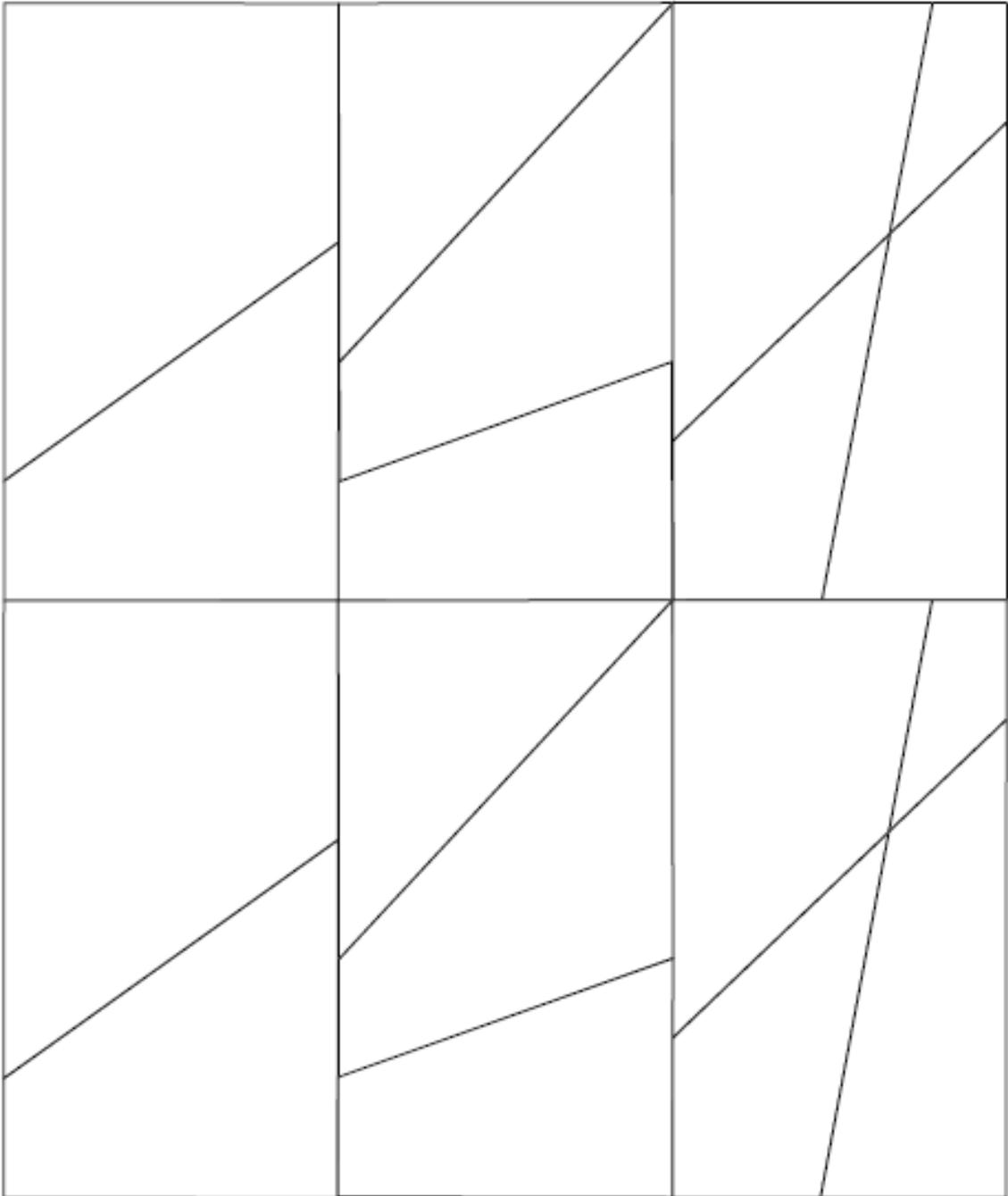
Tarefa 3 (Corte e colagem)

3- Componha um retângulo utilizando cada um dos conjuntos de peças abaixo:



Tarefa 4 (Ladrilhagem efetiva de figuras)

4- Ladrilhem a figura abaixo utilizando o conjunto de peças dadas:



APÊNDICE D – TAREFAS DE FAMILIARIZAÇÃO NO *APPRENTI GÉOMÈTRE 2*

Escola:			
Ano/Série :	Turma:	Turno:	Data:
Aluno (a):			Idade:



Tarefas de Exploração do *Apprenti Géomètre 2*

1- Explore livremente o software de geometria *Apprenti Géomètre 2*.

2- Observe as figuras 1 e 2 abaixo:

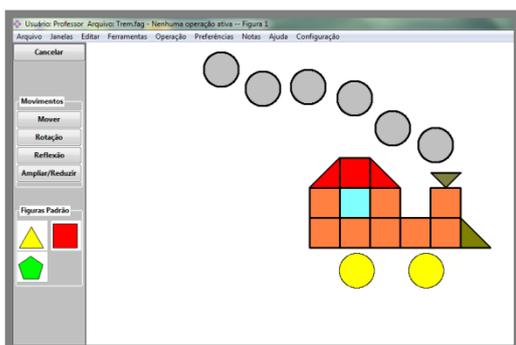


Figura 1

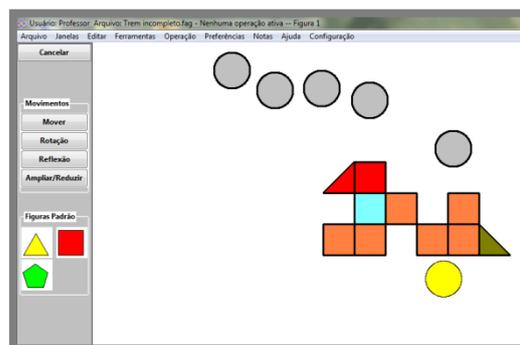


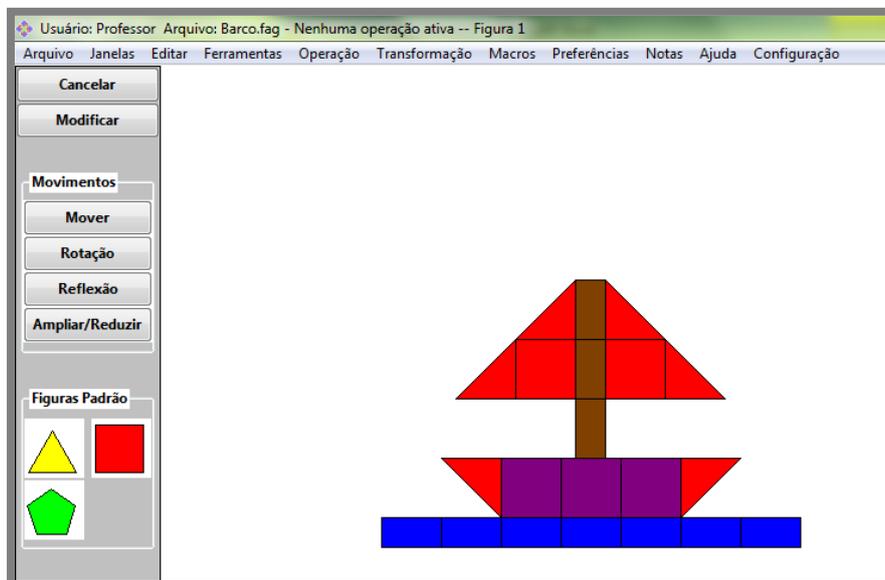
Figura 2

Note que a figura 2 está incompleta, pois algumas peças foram retiradas. Complete-a utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para que fique de acordo com a figura 1.

Observação: Para realizar essa atividade você deve dar um clique duplo na Fig. 2 (disponível na pasta “familiarização no AG2”), em seguida selecionar a opção “aluno”, digitar seus nomes, escolher o menu A e clicar em ok.

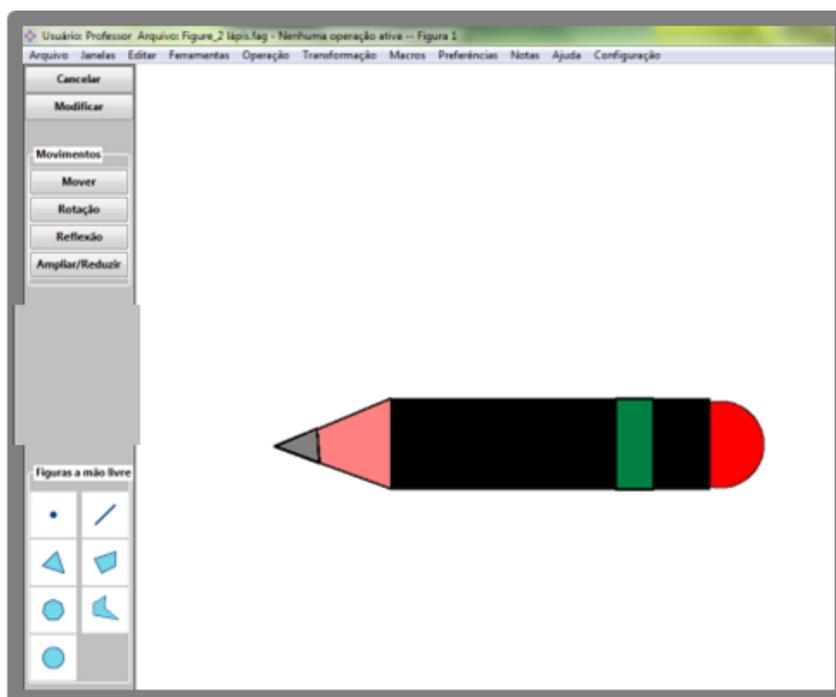
Para realizar esta tarefa você deve clicar na opção aluno, digitar seu nome, em seguida escolher a opção de menu “A” e clicar em **Ok**.

3-Reproduza a figura abaixo utilizando as ferramentas do Apprenti Géomètre 2.



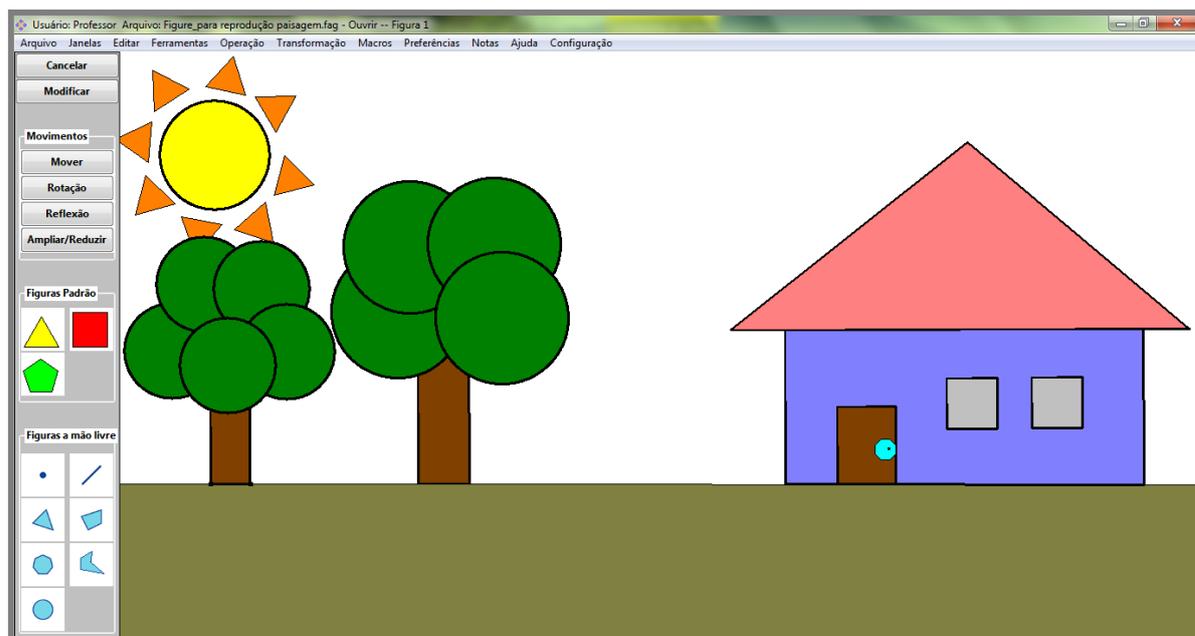
Para realizar esta tarefa você deve clicar na opção aluno, digitar seu nome, em seguida escolher a opção de menu “B” e clicar em **Ok**.

4-Reproduza a figura abaixo utilizando as ferramentas do Apprenti Géomètre 2.



Para realizar esta atividade você deve clicar na opção aluno, digitar seu nome, em seguida escolher a opção de menu “AB” ou “AC” e clicar em **Ok**.

5-Reproduza a figura abaixo utilizando as ferramentas do Apprenti Géomètre 2.



APÊNDICE E - EXTRATO DO PROTOCOLO FINAL DE CADA DUPLA NO AMBIENTE DIGITAL (APPRENTI GÉOMÈTRE 2)

TAREFA 1- Exploração Livre do *Apprenti Géomètre 2*

Figura 175- DL1AG2

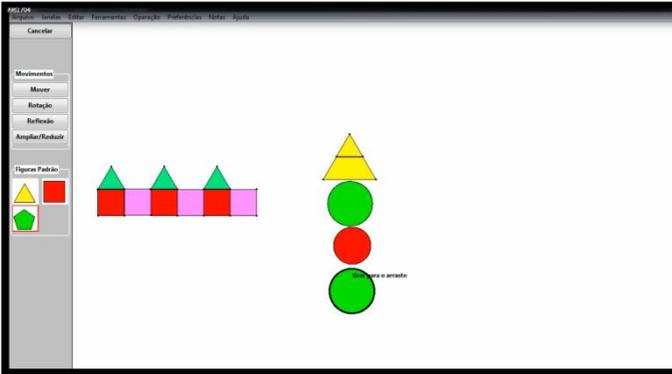


Figura 174- DL2AG2

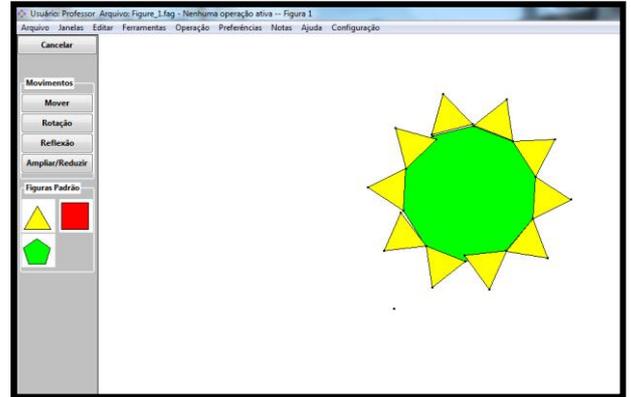


Figura 176- DL3AG2

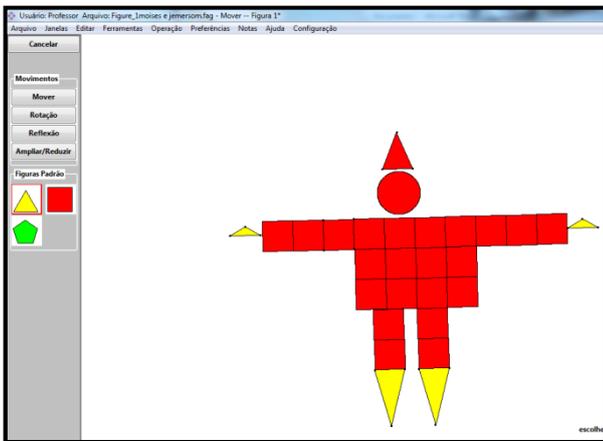


Figura 177- DL4AG2

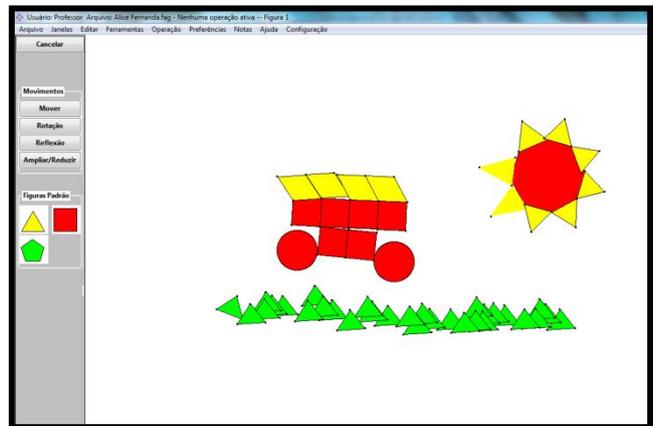


Figura 179- DL5AG2

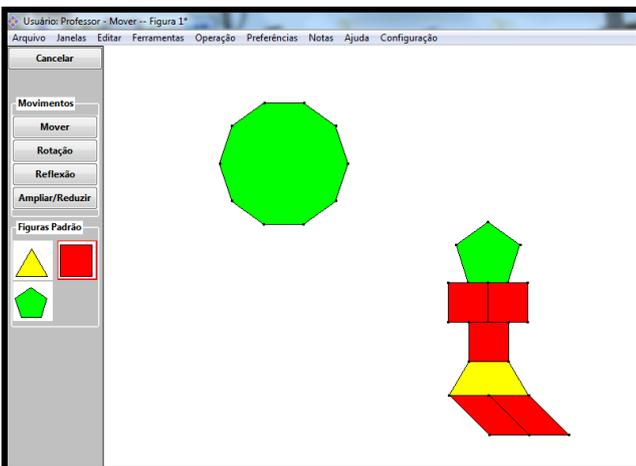


Figura 178- DL6AG2

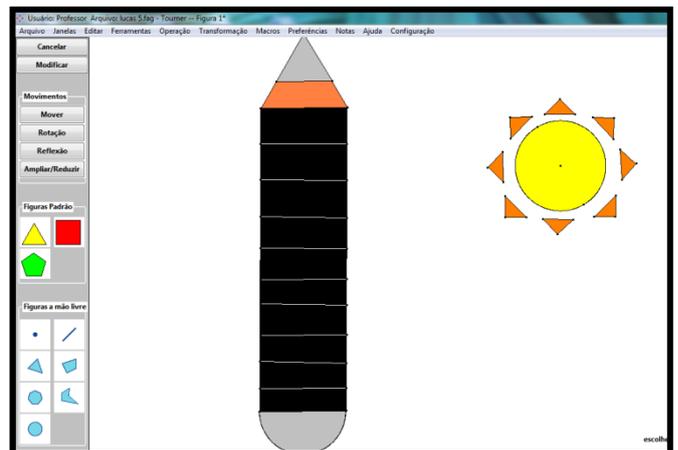
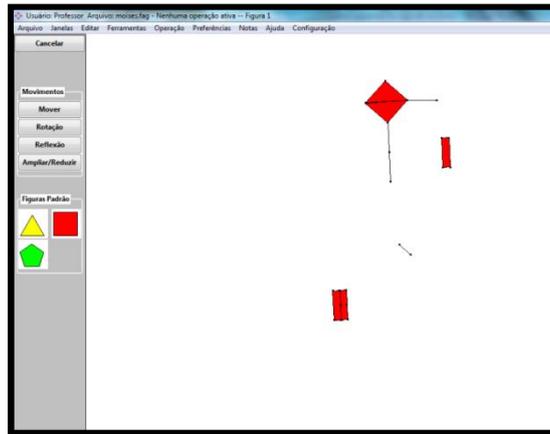


Figura 180-DL7AG2



TAREFA 2 – Complementação de Figura (Trem)

Figura 183-DL1AG2

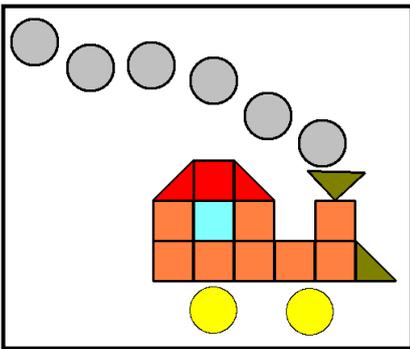


Figura 182- DL2AG2

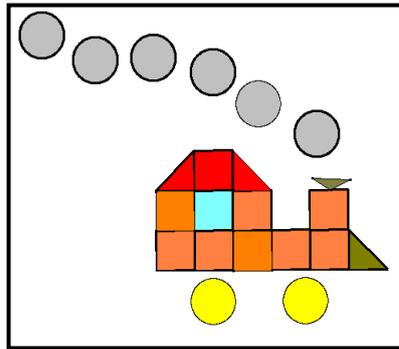


Figura 181- DL3AG2

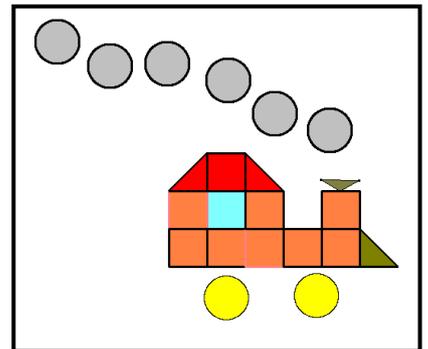


Figura 186- DL4AG2

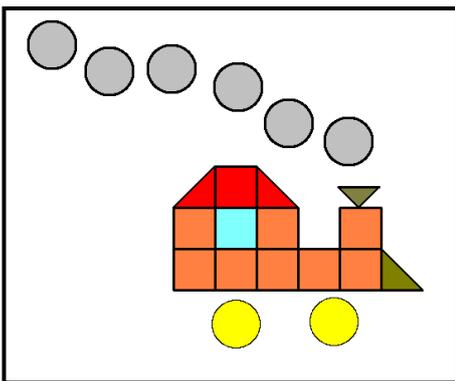


Figura 185-DL5AG2

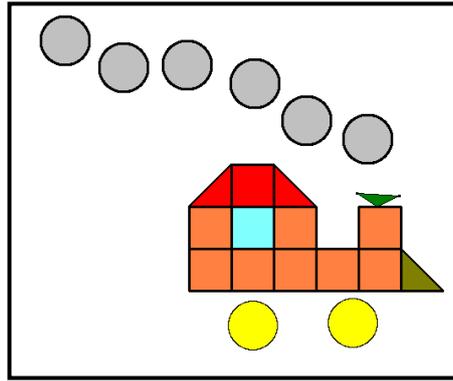


Figura 184- DL6AG2

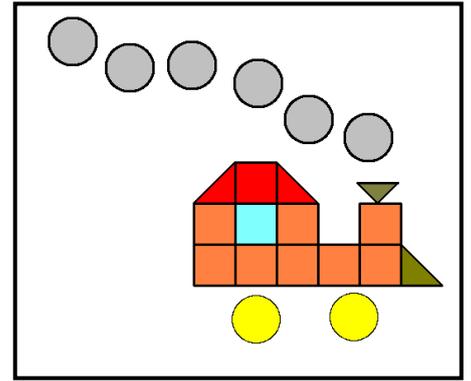
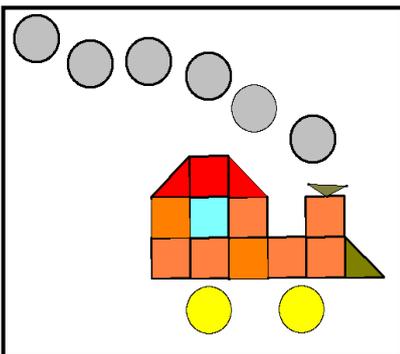


Figura 187- DL7AG2



TAREFA 3 – Reprodução de Figuras (Barco)

Figura 189- DL1AG2

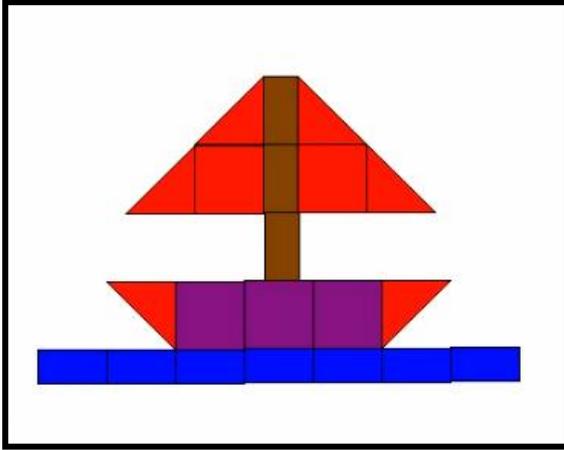


Figura 188- DL2AG2

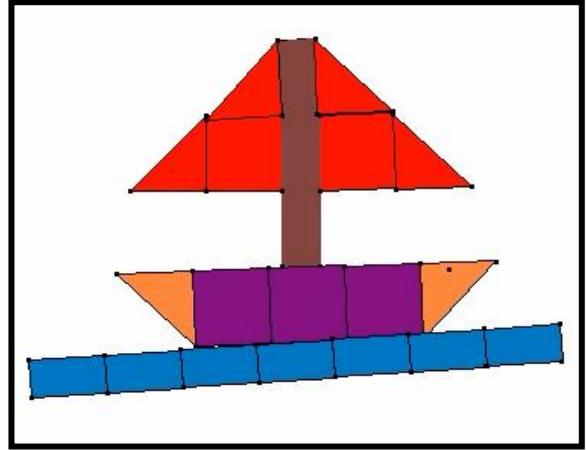


Figura 191- DL3AG2

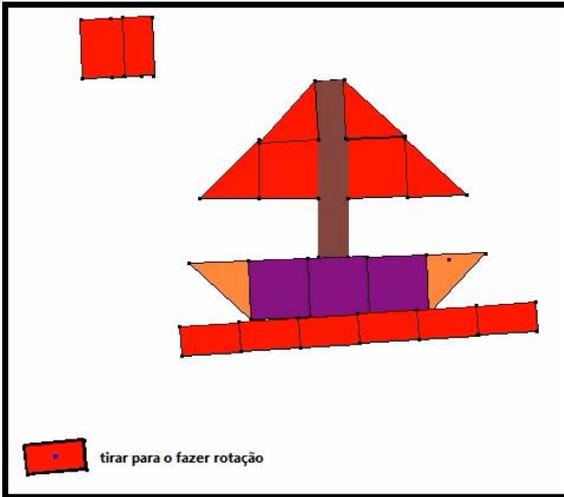


Figura 190- DL4AG2

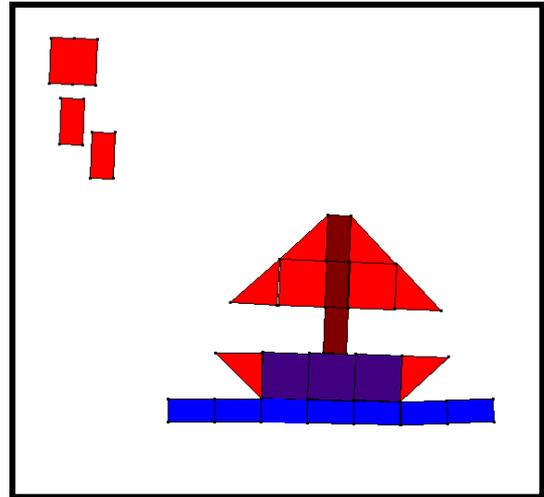


Figura 193- DL5AG2

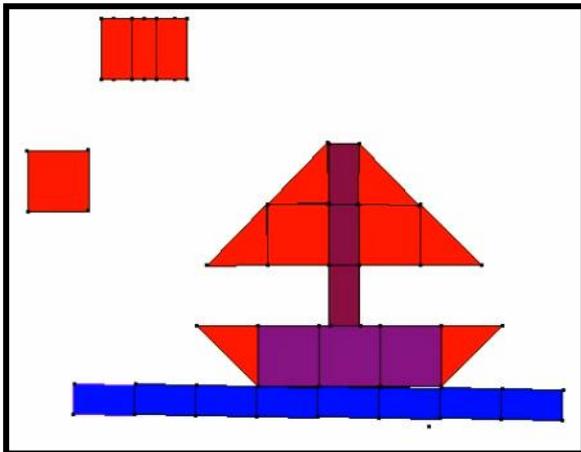


Figura 192- DL6AG2

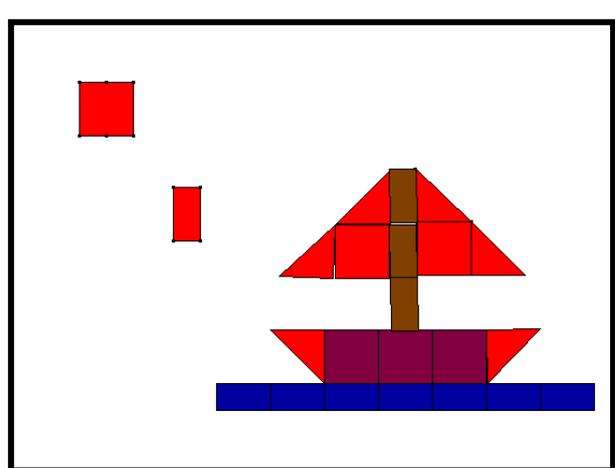
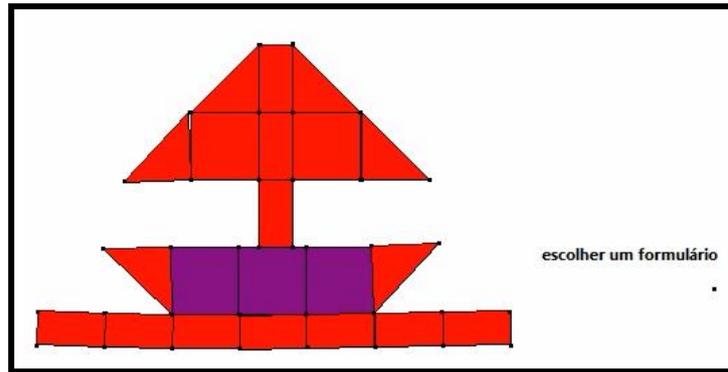


Figura 194-DL7AG2



TAREFA 4 – Complementação de Figuras (Lápis)

Figura 196- DL1AG2T4

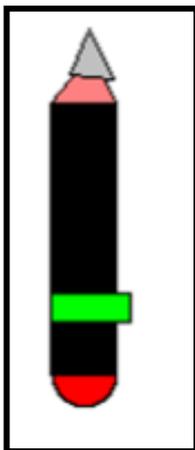


Figura 195- DL2AG2

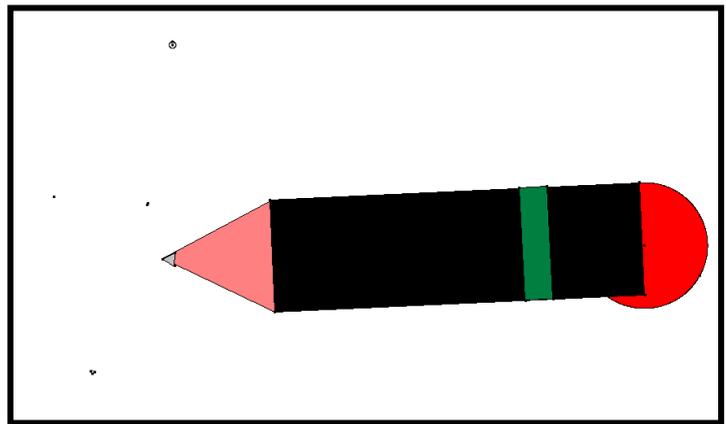


Figura 197- DL3AG2

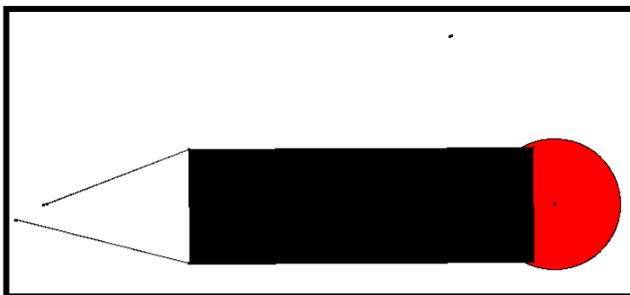


Figura 198- DL4AG2

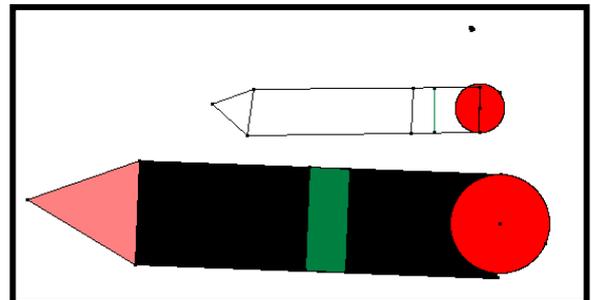


Figura 199- DL5AG2

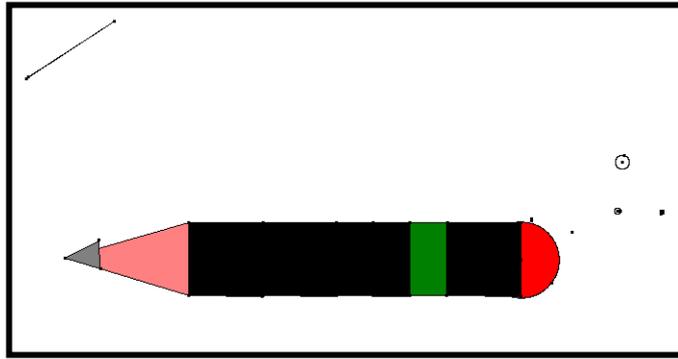
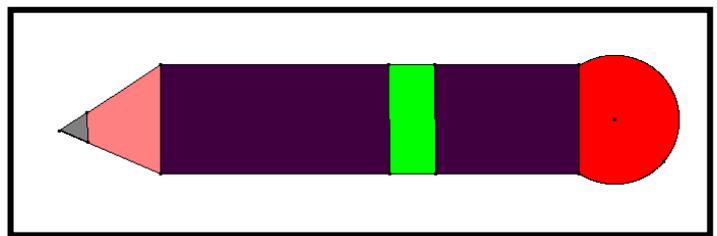


Figura 201- DL6AG2



Figura 200- DL7AG2



TAREFA 5 – Reprodução de Figura (Paisagem)

Figura 202- DL1AG2

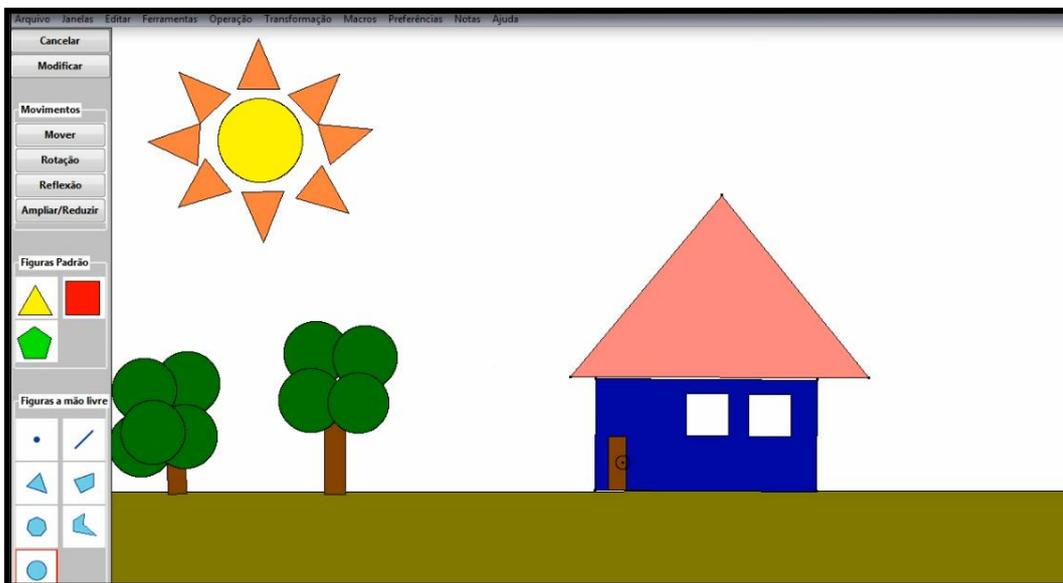


Figura 204- DL2AG2

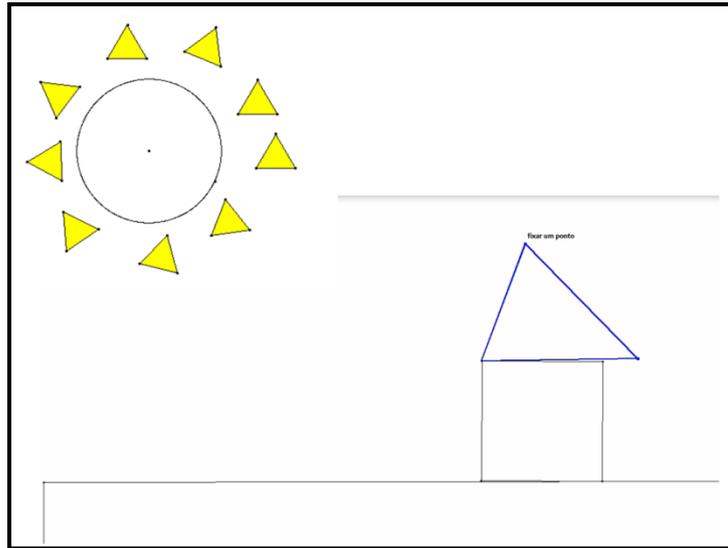


Figura 203- DL4AG2

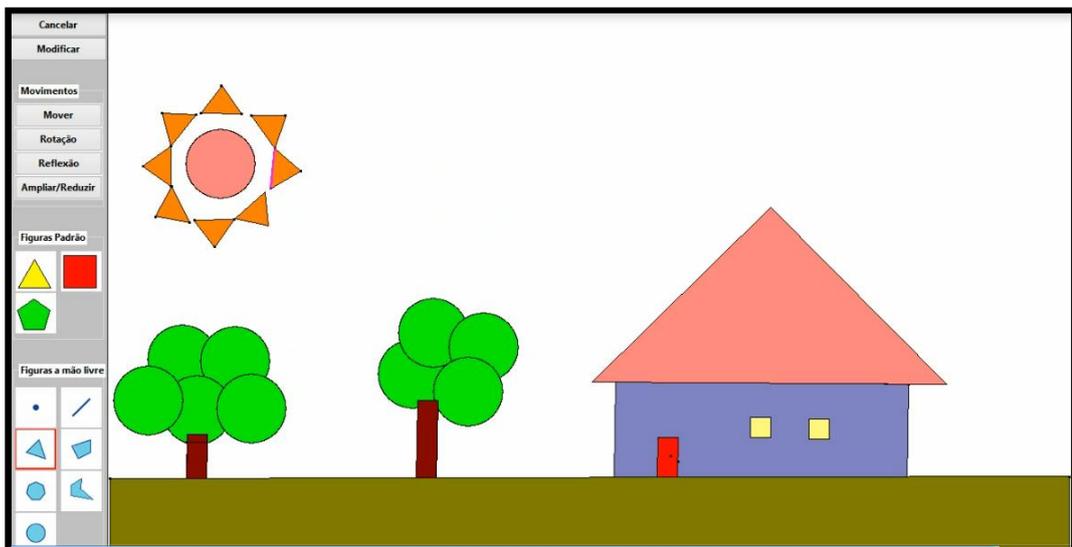


Figura 205-DL5AG2

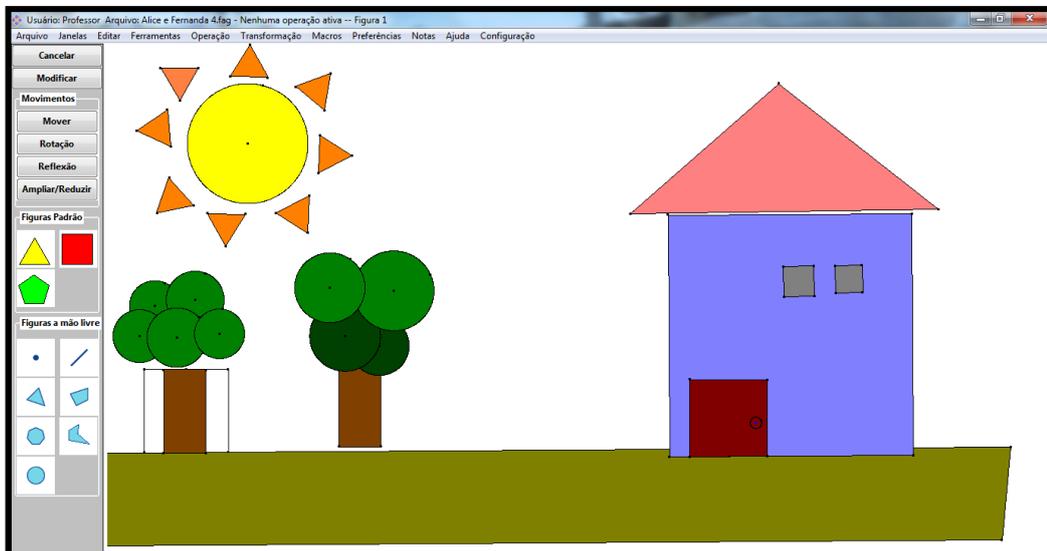


Figura 206-DL6AG2

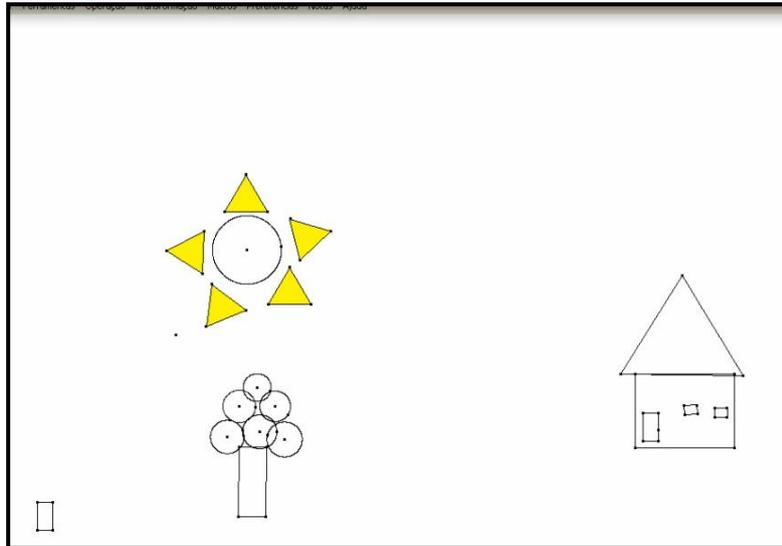
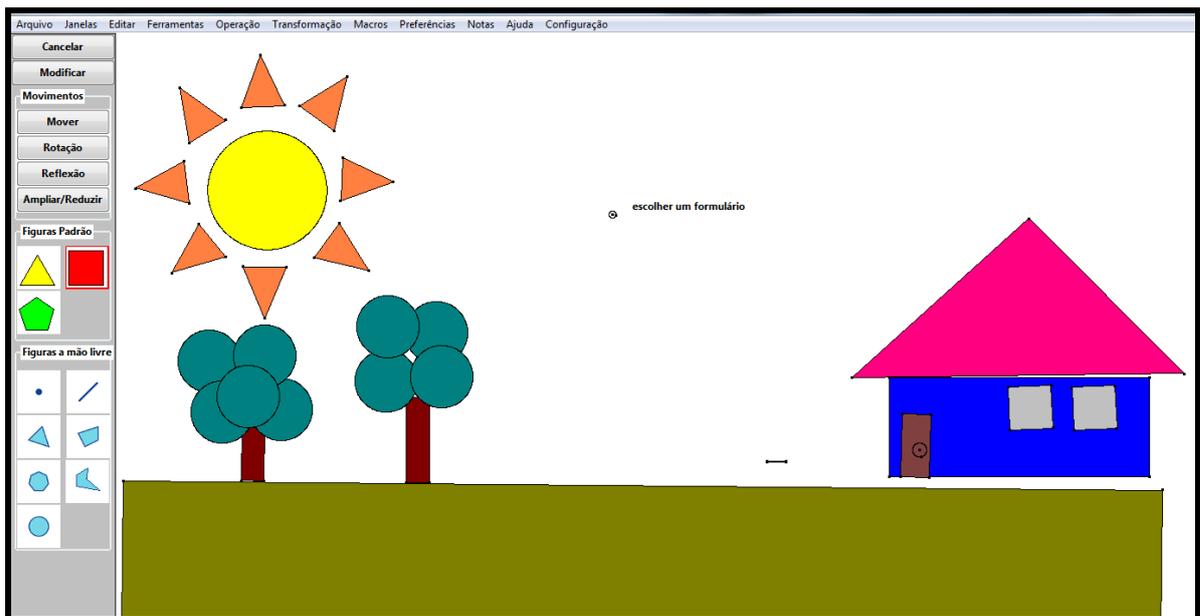


Figura 207- DL7AG2



APÊNDICE F- TAREFAS DO DISPOSITIVO CENTRAL

Neste apêndice consta as fichas das tarefas que foram entregues aos alunos participantes do Dispositivo Central nos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*.

Com relação ao ambiente materiais manipulativos, após as fichas destas tarefas, encontram-se a malha quadriculada, a malha isométrica e a quantidade suficiente de ladrilhos que foram entregues aos alunos que participaram respondendo as tarefas nesse ambiente.



TAREFAS COM MATERIAIS MANIPULATIVOS

Escola: _____

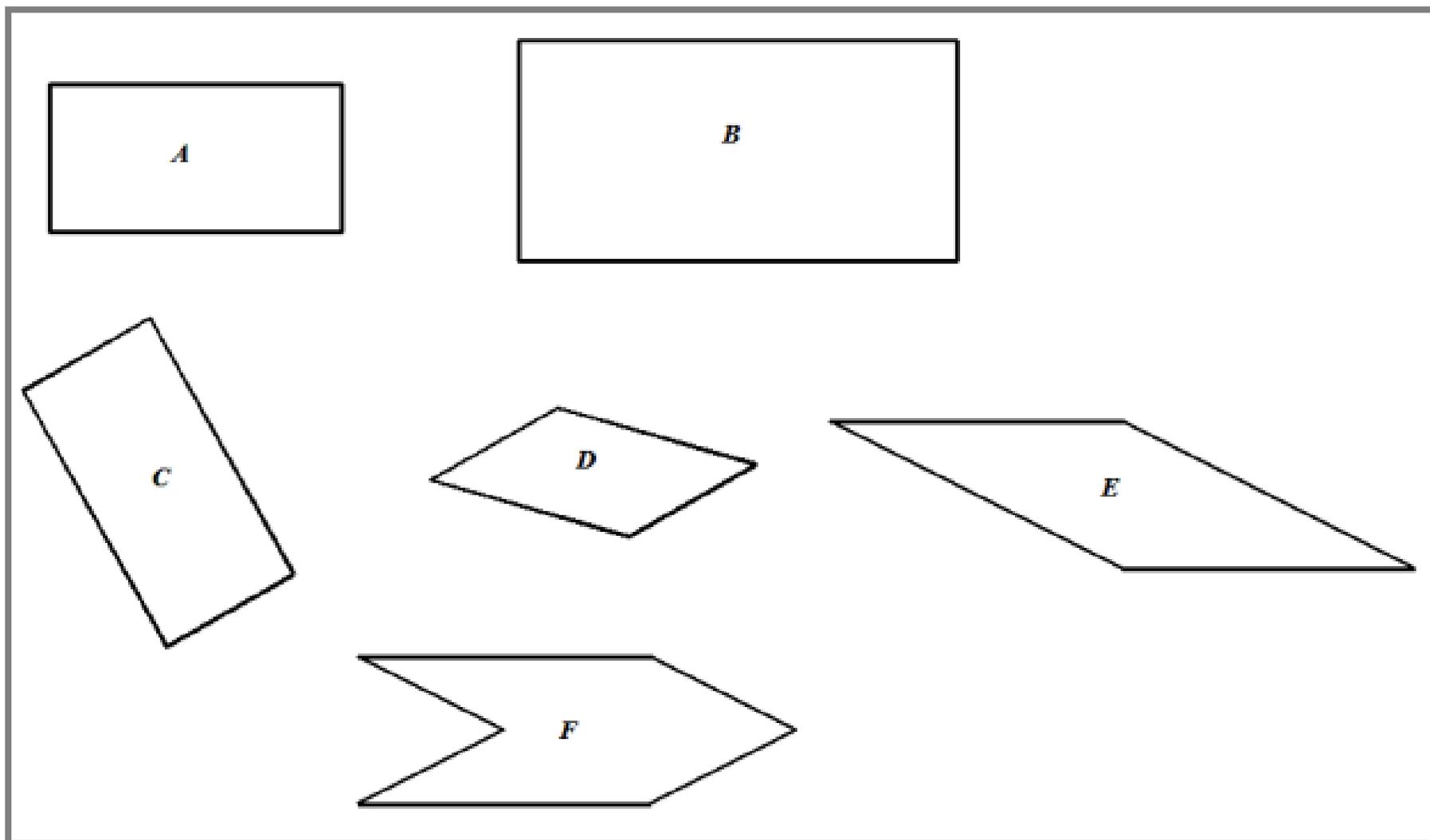
Série/ Ano: _____ Município: _____ UF _____

Aluno1 (a): _____ Idade: _____

Aluno 2 (a): _____ Idade: _____

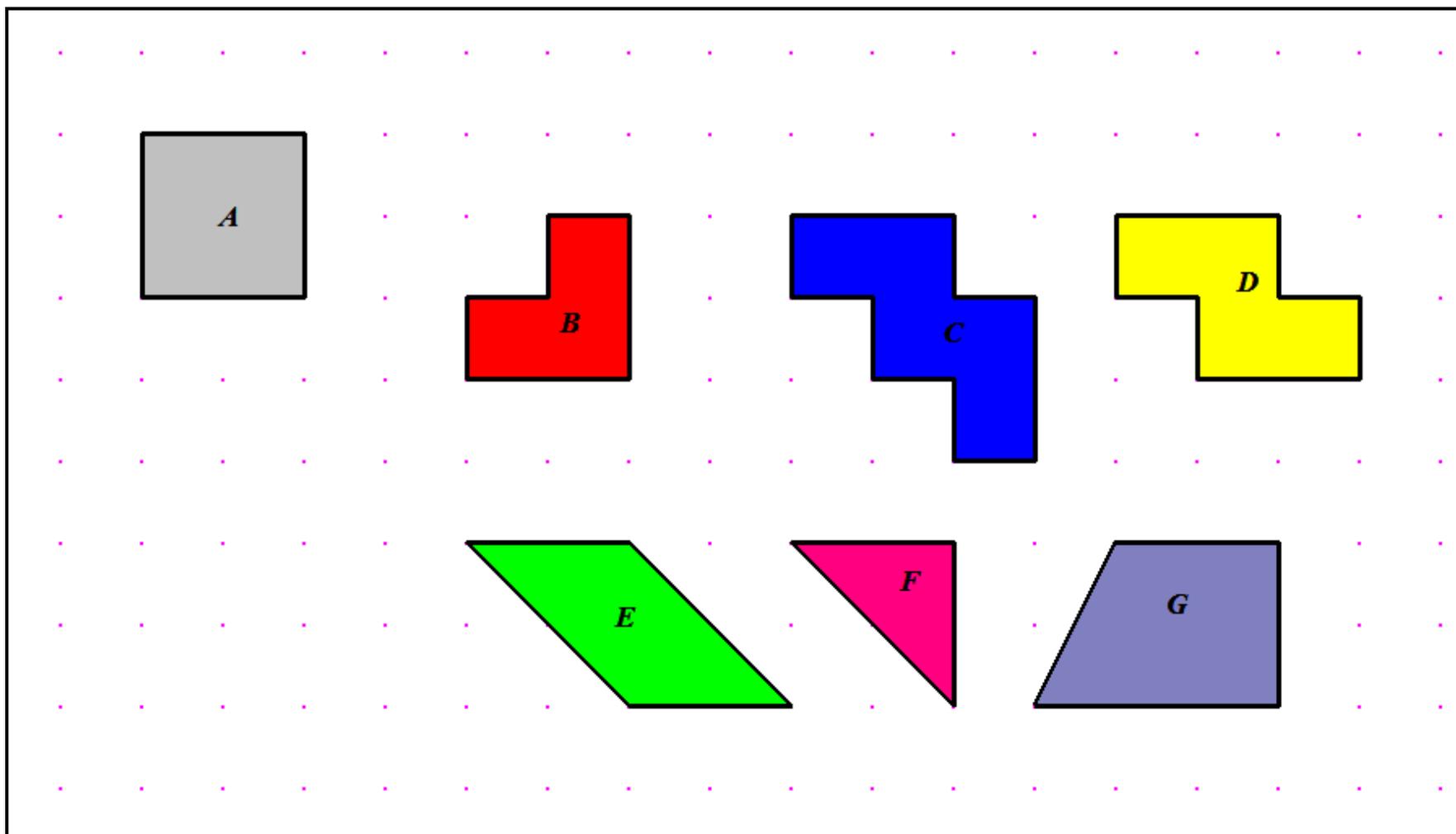
SITUAÇÃO DE COMPARAÇÃO DE ÁREA-TAREFA 1

1- Indique quais as figuras que têm mesma área que o retângulo A



SITUAÇÃO DE COMPARAÇÃO DE ÁREA-TAREFA 2

2- Observe as figuras desenhadas sobre o pontilhado abaixo:



Agora, responda cada uma das perguntas.

a) Entre as figuras, quais possuem área maior que A? _____

Explique como você fez:

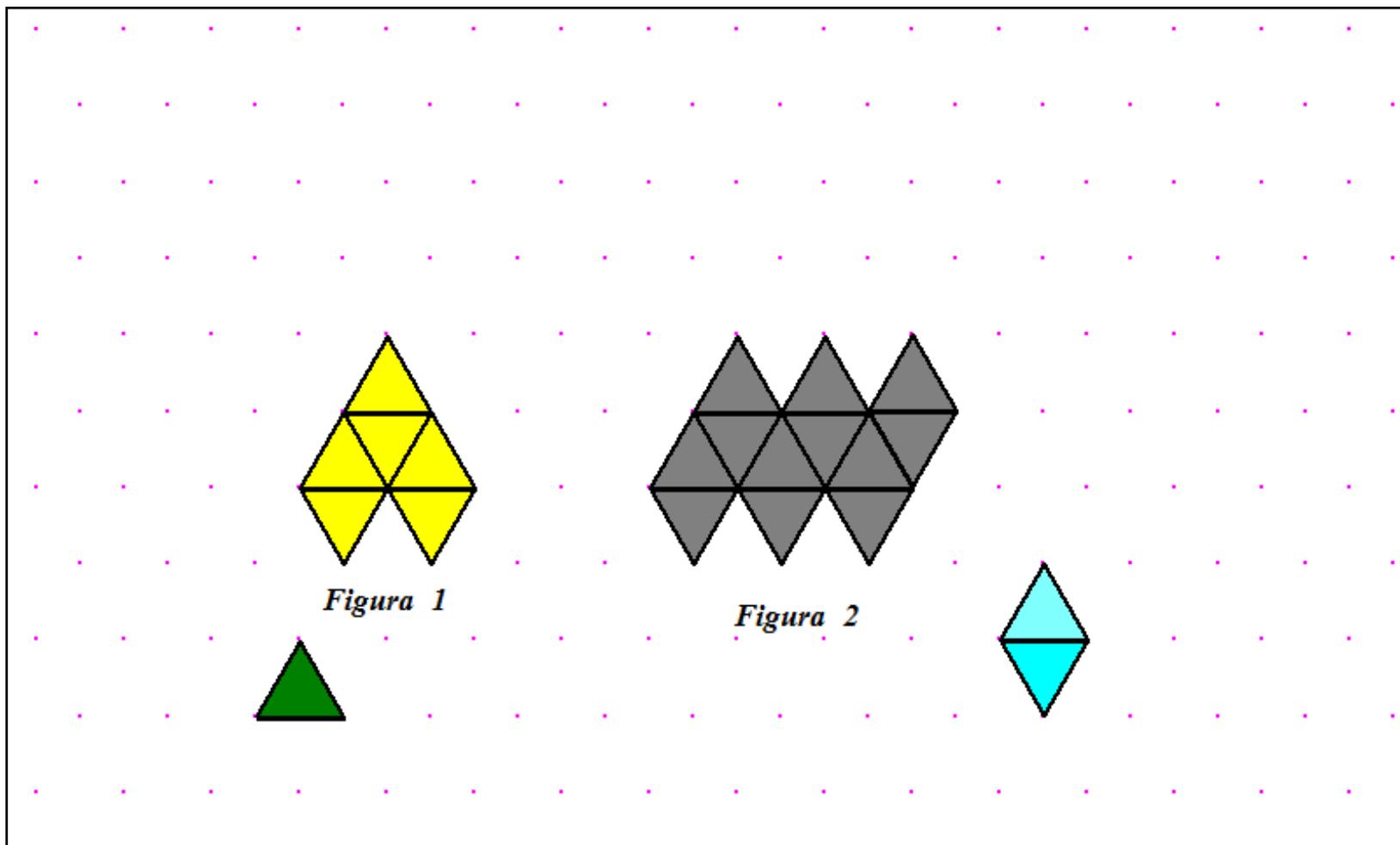
b) Entre as figuras, quais possuem área menor que A? _____

Explique como você fez:

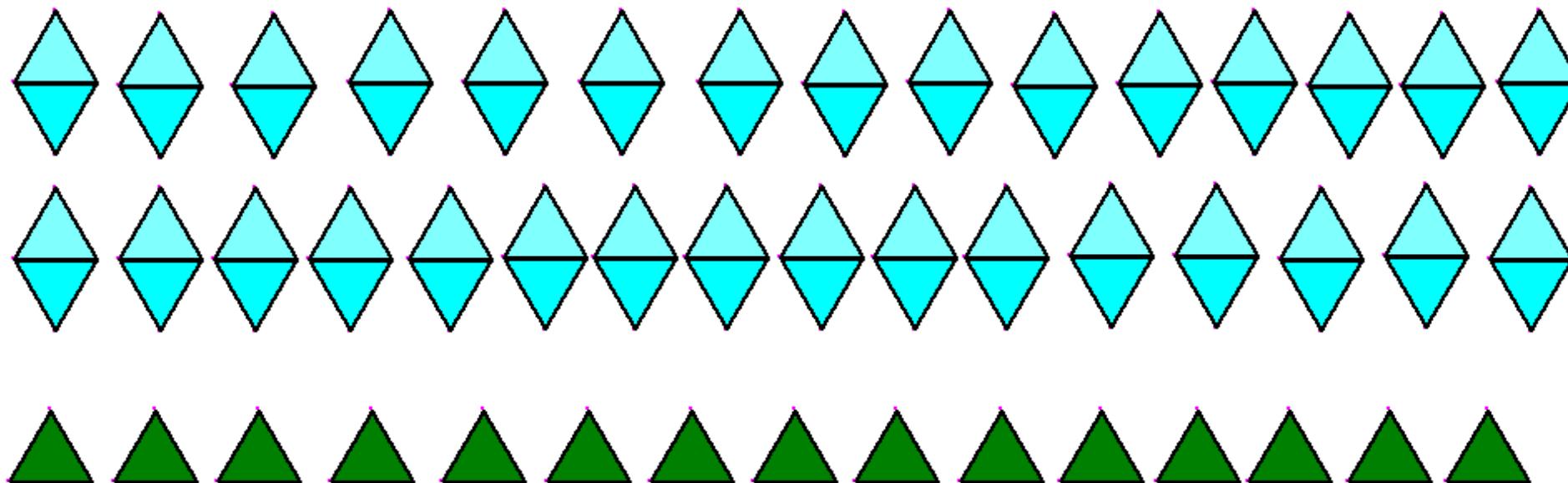
c) Entre as figuras, quais possuem a mesma área que A? _____

SITUAÇÃO DE MEDIDA DE ÁREA-TAREFA 3

3- Observe as figuras desenhadas sobre a malha isométrica abaixo:

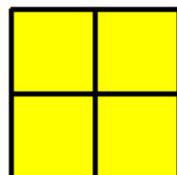
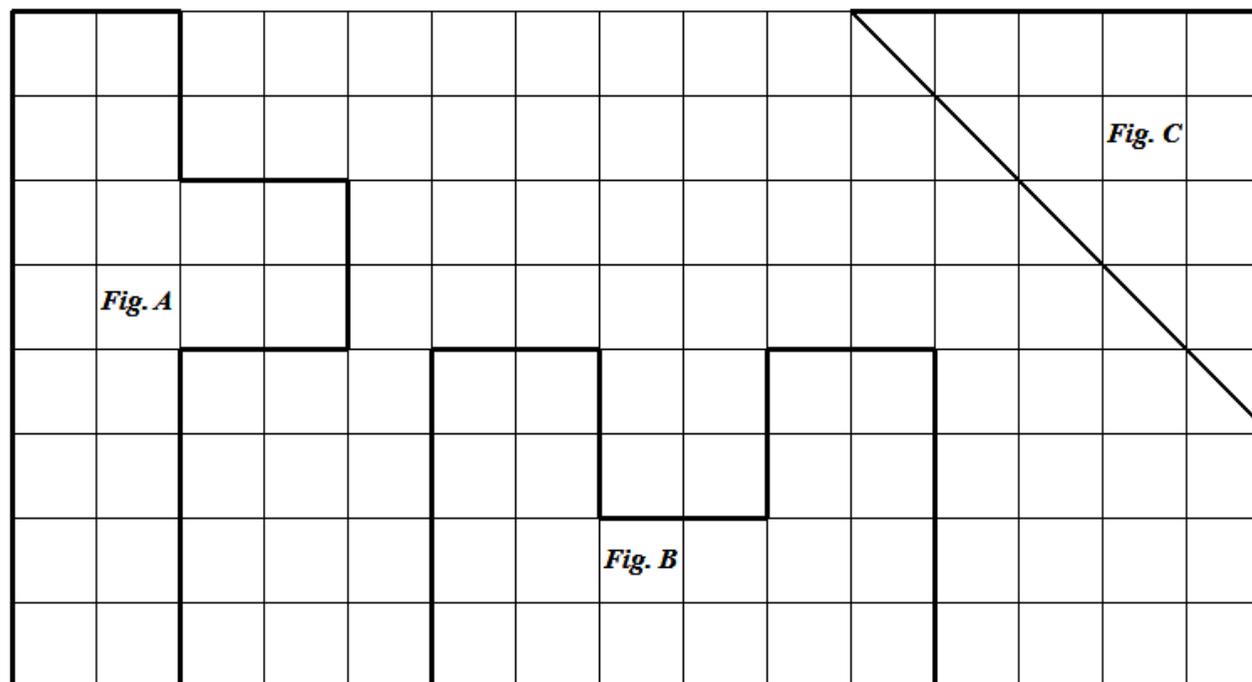


LADRILHOS ENTREGUES AOS ALUNOS DO AMBIENTE MATERIAIS MANIULATIVOS



SITUAÇÃO DE MEDIDA DE ÁREA E MUDANÇA DE UNIDADE-

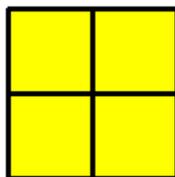
4- Veja as figuras A, B e C, desenhadas na malha quadriculada abaixo :



Vamos chamar de “U”, a unidade de área definida pela figura



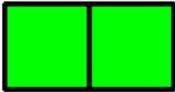
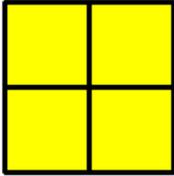
Vamos chamar de “V”, a unidade definida pela figura



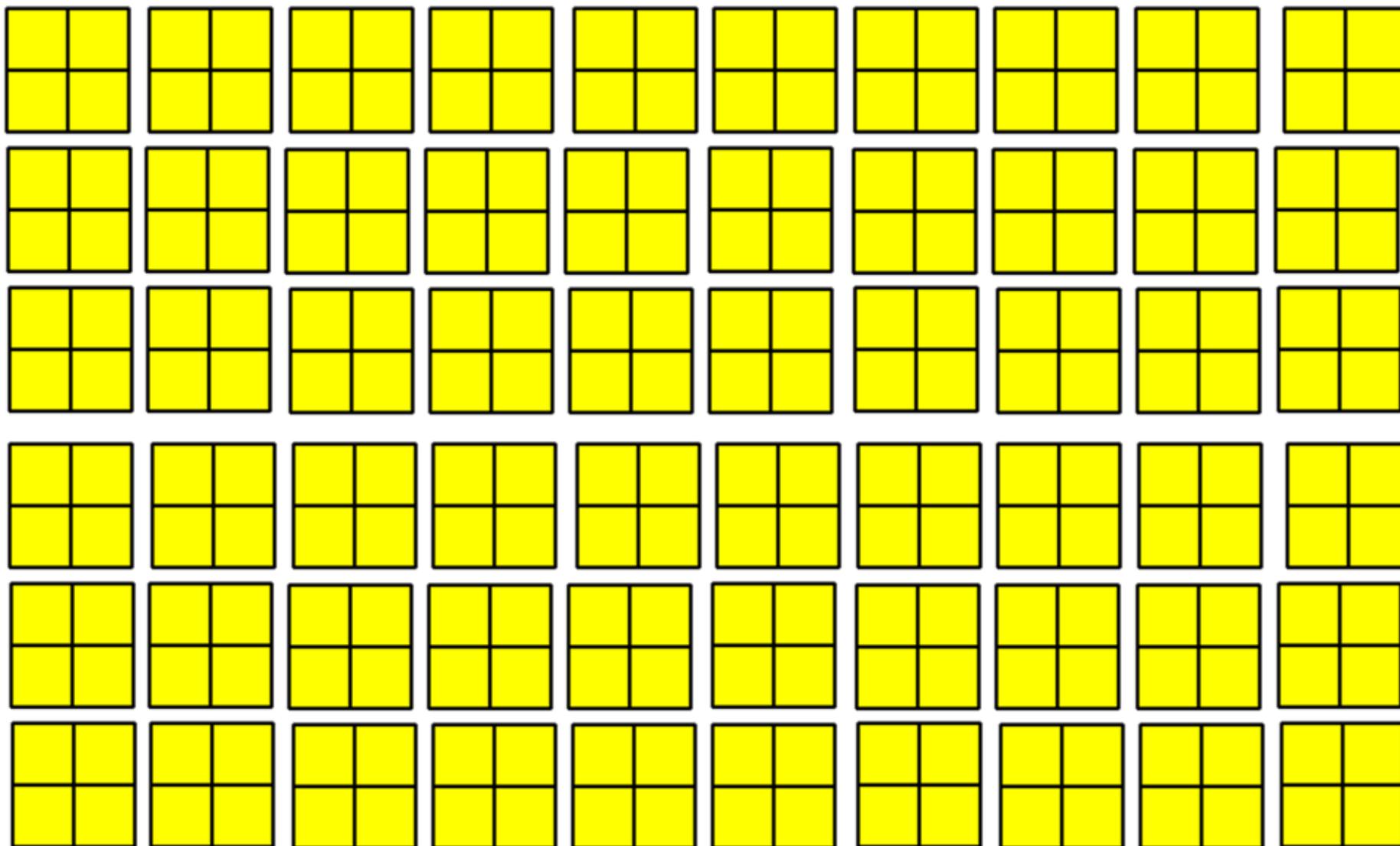
É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades (U e V) ? _____

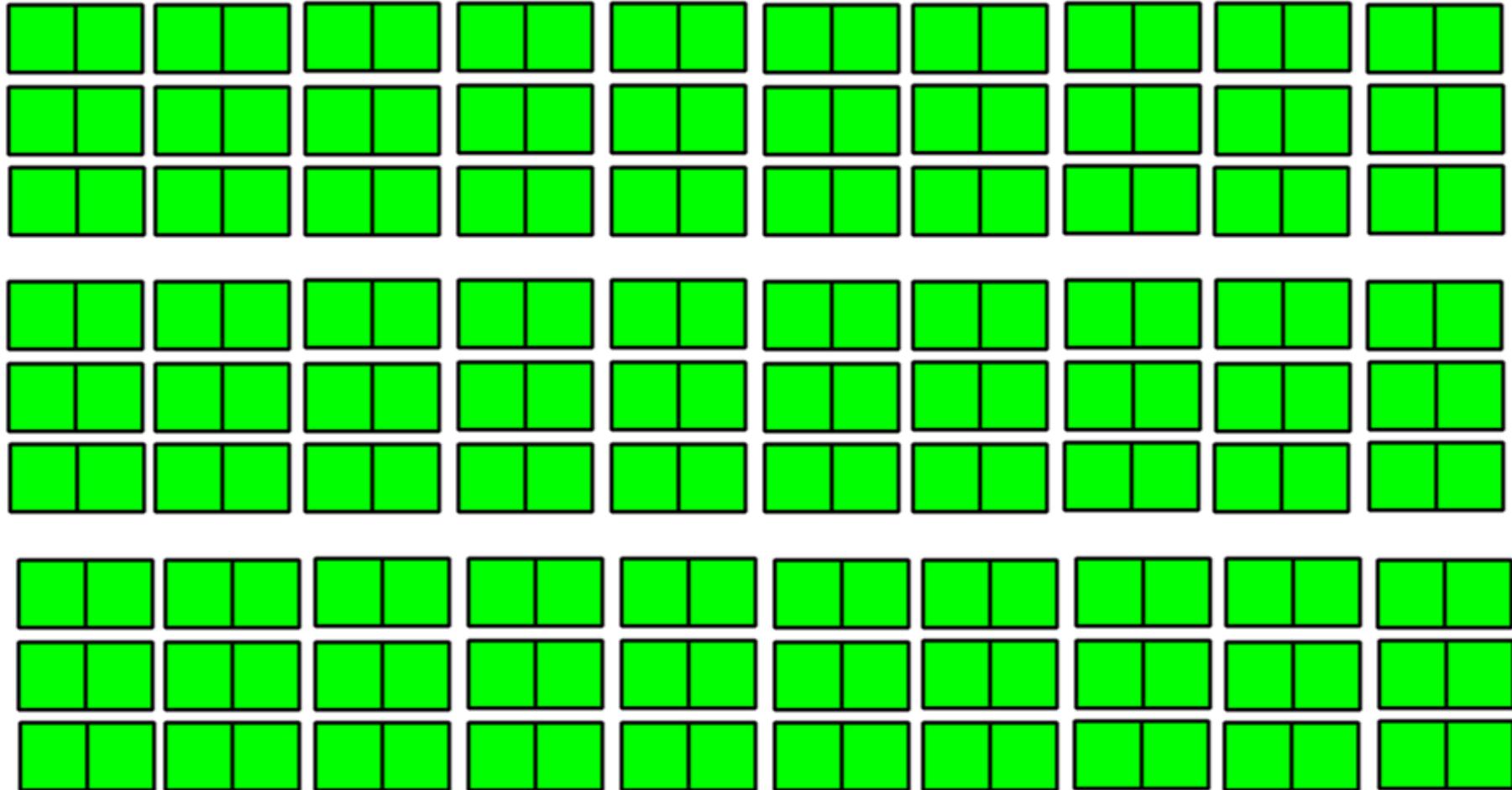
Justifique sua resposta:

Complete quando possível a tabela abaixo:

	Unidade  U	Unidade  V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A		
B		
C		

LADRILHOS SUFICIENTES ENTREGUES AOS ALUNOS DA TAREFA 4.

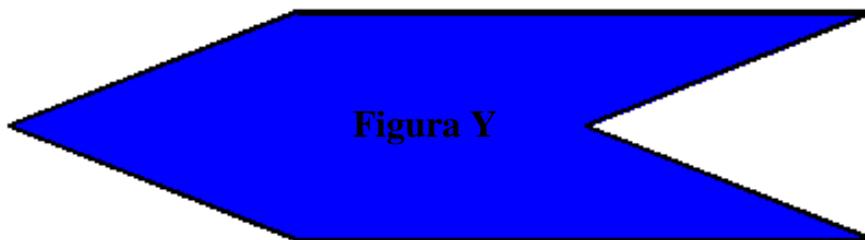


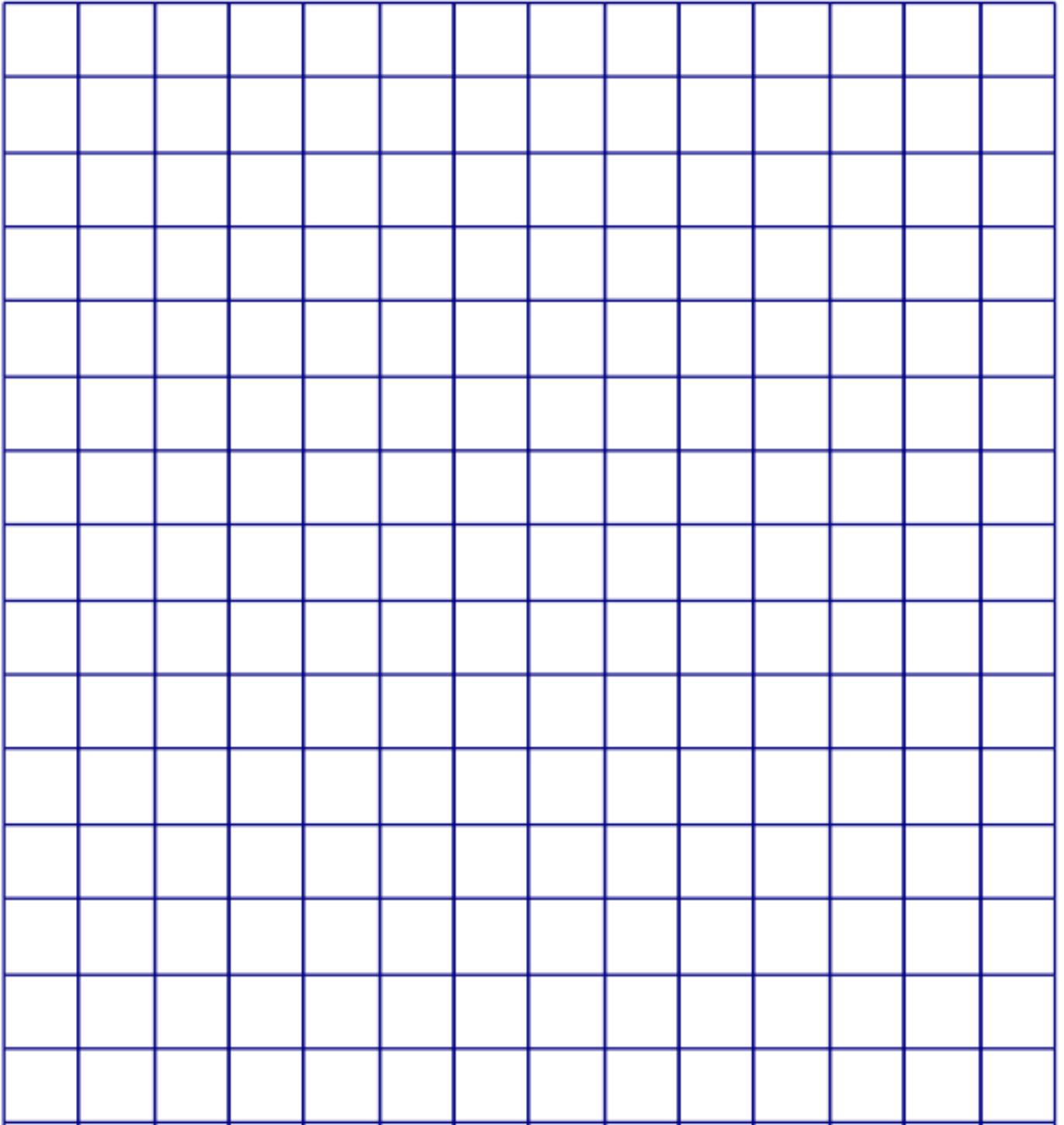


PRODUÇÃO DE SUPERFÍCIE-TAREFA 5

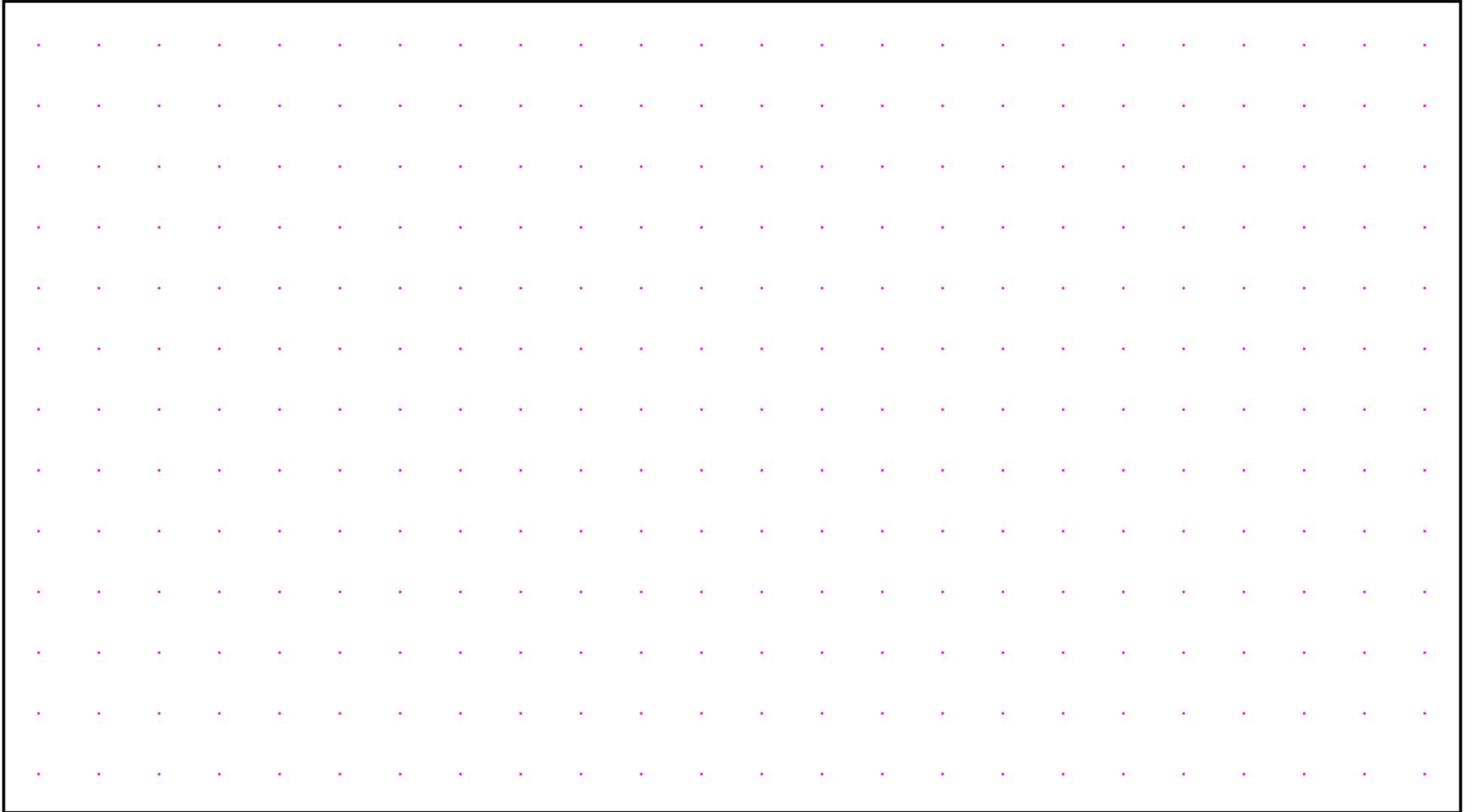
5- Dada a figura abaixo, desenhe utilizando a malha quadriculada e/ou o pontilhado quadriculado e/ou a malha isométrica o que se pede:

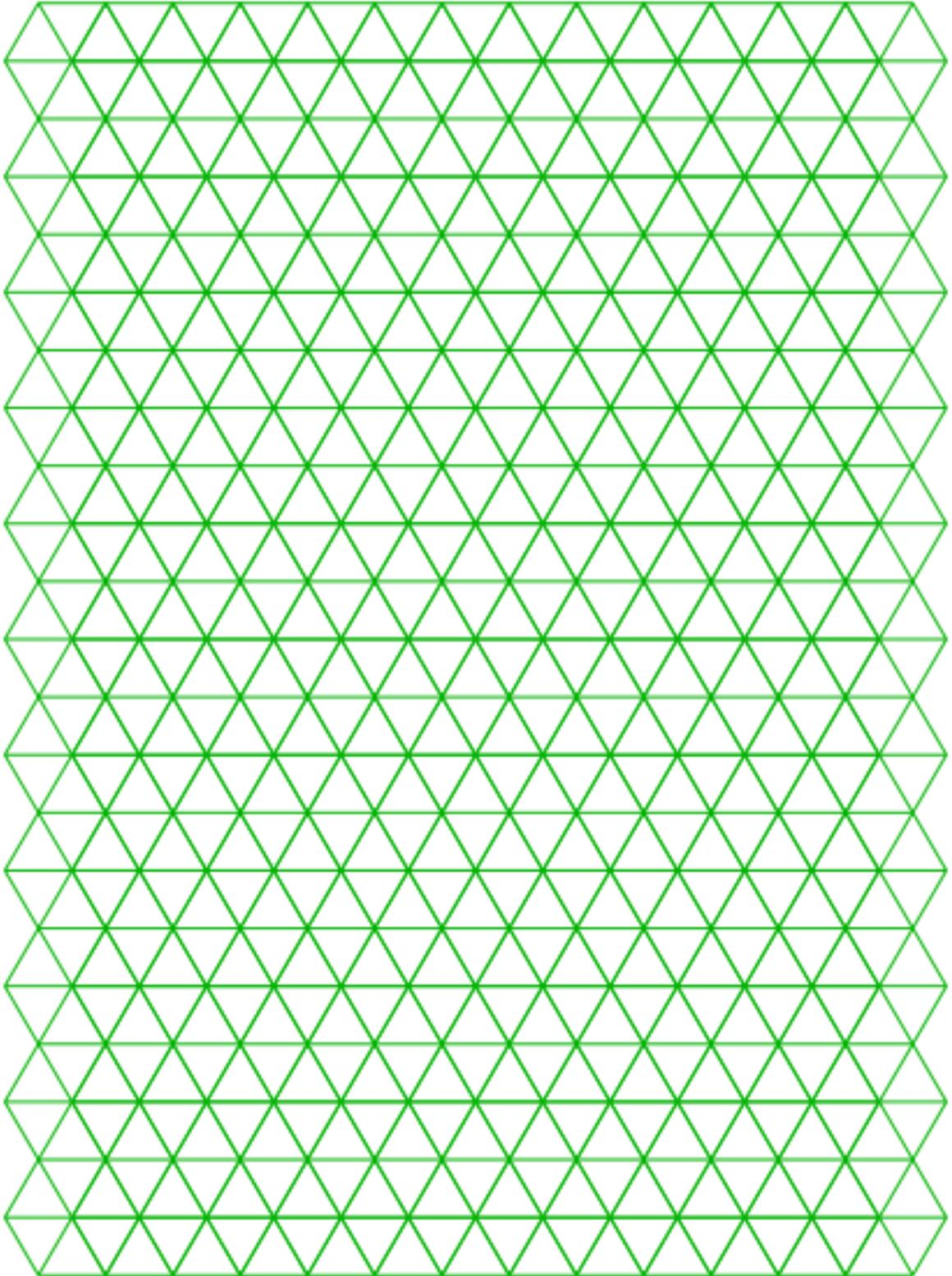
- Uma figura de área menor que a da figura dada;
- Uma figura que tenha área maior que a da figura dada;
- Uma figura de mesma área que a figura dada.



MALHA QUADRICULADA

PONTILHADO QUADRADO



MALHA ISOMÉTRICA



TAREFAS NO AMBIENTE PAPEL E LÁPIS

Escola: _____

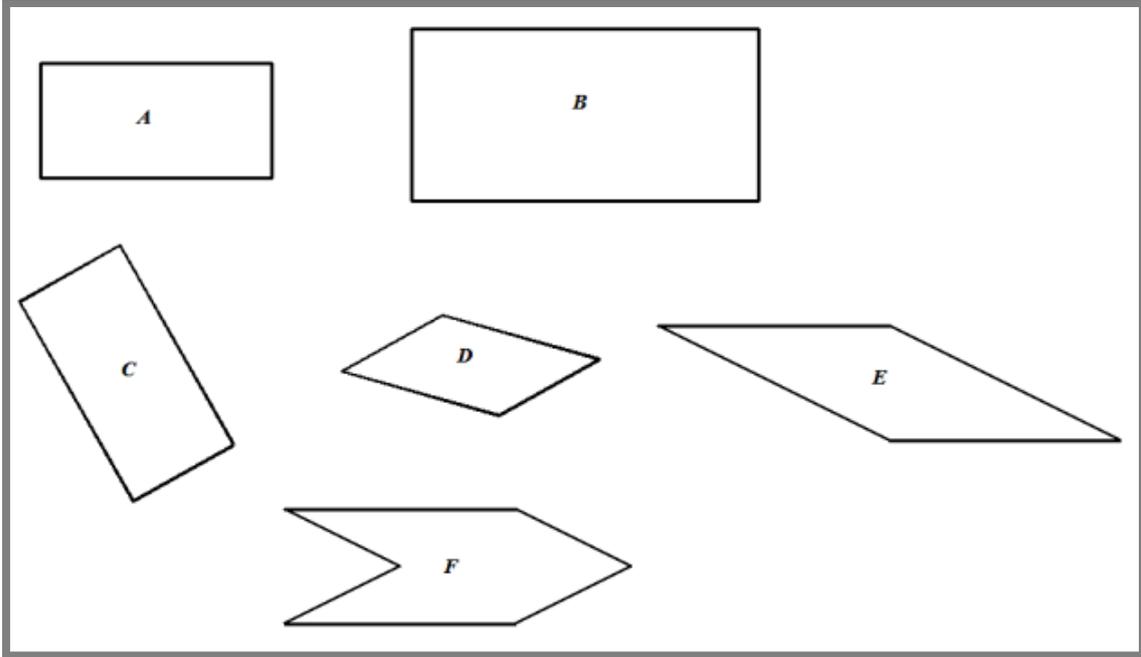
Série/ Ano: _____ Município: _____ UF _____

Aluno1 (a): _____ Idade: _____

Aluno 2 (a): _____ Idade: _____

TAREFA 1

1- Indique quais das figuras que têm mesma área que o retângulo A:

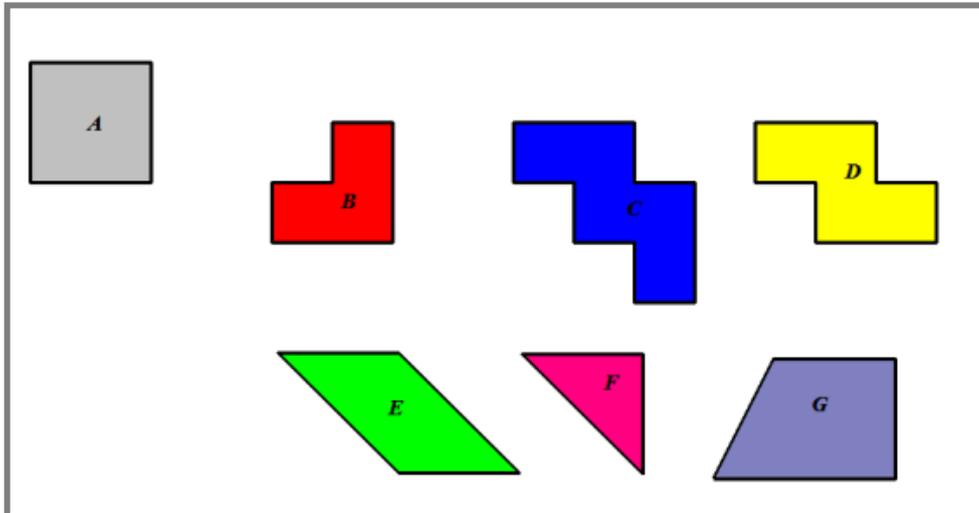


Resposta

Explique como você fez para responder essa tarefa:

TAREFA 2

2-Observe as figuras desenhadas abaixo:



Agora, responda cada uma das perguntas.

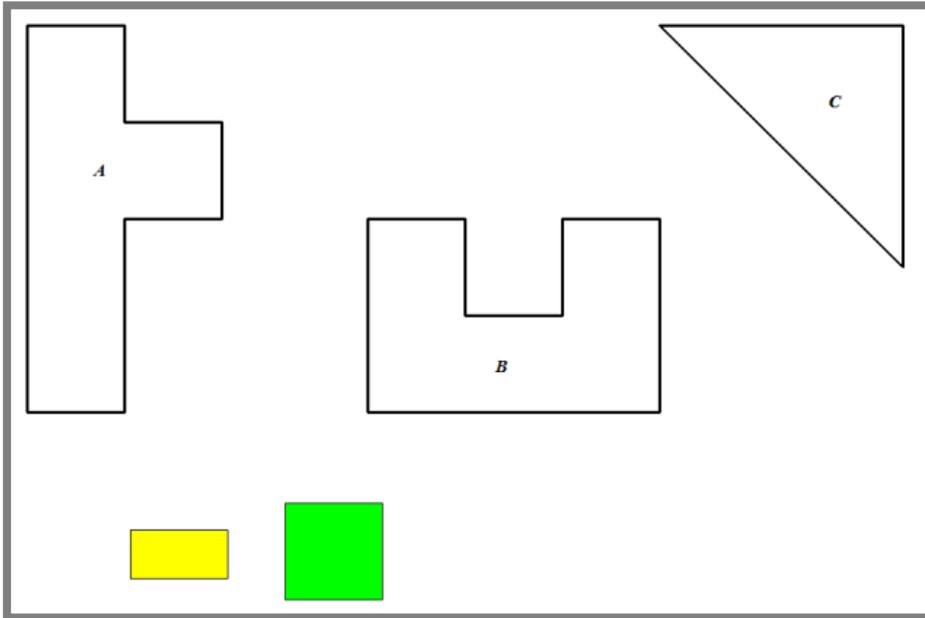
- d) Entre as figuras, quais possuem área maior que A? _____
 Explique como você fez:

- e) Entre as figuras, quais possuem área menor que A? _____
 Explique como você fez:

- f) Entre as figuras, quais possuem a mesma área que A? _____
 Explique como você fez:

TAREFA 4

4-Veja as figuras A, B e C, desenhadas abaixo:



Vamos chamar de “U”, a unidade de área definida pela figura

Vamos chamar de “V”, a unidade definida pela figura

É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades (U e V) ?

Justifique sua resposta: _____

Complete quando possível a tabela abaixo:

	Unidade U	Unidade V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A		
B		
C		

TAREFA 5

5-Observe a figura abaixo:



Agora, responda o que se pede:

- a) Desenhe uma figura de área menor que a da figura “Y”.

- b) Desenhe uma figura de área maior que a da figura “Y”.

- c) Desenhe uma figura de área igual a da figura “Y”.



TAREFAS COM O USO APPRENTI GÉOMÈTRE 2

Escola: _____

Série/ Ano: _____ Município: _____ UF _____

Aluno1 (a): _____ Idade: _____

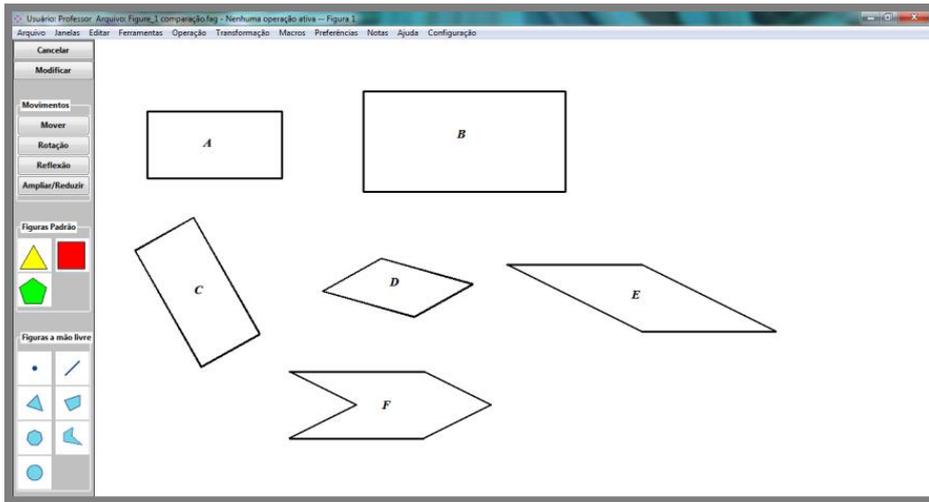
Aluno 2 (a): _____ Idade: _____



TAREFA 1

Abra o arquivo **“Tarefa Figure_1.fag”** que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seu nome, após esses procedimentos, você deve escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do **Apprenti Géomètre 2** necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br e clicar em OK.

1-Indique quais das figuras abaixo têm mesma área que o retângulo A:



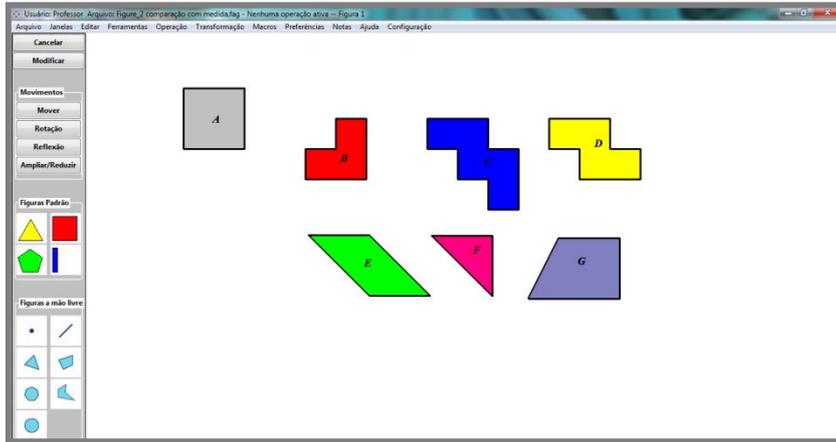
Resposta

Explique como você fez para responder essa tarefa:

TAREFA 2

Abra o arquivo “*Tarefa Figure_2.fag*” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, você deve escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br e clicar em OK.

2-Observe as figuras desenhadas abaixo:



Agora, responda cada uma das perguntas.

- g) Entre as figuras, quais possuem área maior que A? _____
 Explique como você fez:

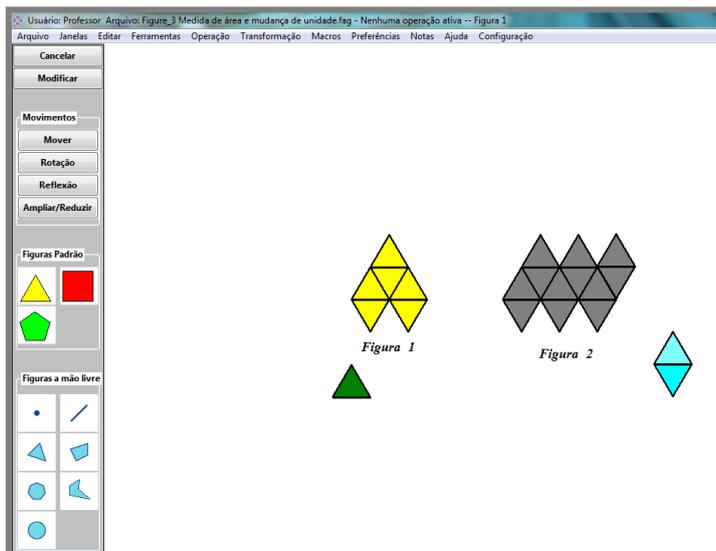
- h) Entre as figuras, quais possuem área menor que A? _____
 Explique como você fez:

- i) Entre as figuras, quais possuem a mesma área que A? _____
 Explique como você fez:

TAREFA 3

Abra o arquivo “*Tarefa Figure_3.fag*” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, você deve escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br e clicar em OK.

3-Observe as figuras 1 e 2 desenhadas abaixo:



Vamos chamar de “A”, a unidade de medida definida pelo triângulo 

Vamos chamar de “B”, a unidade de medida definida pelo losango 

Qual a área da figura 1 usando “A” como unidade de medida? _____

Qual a área da figura 2 usando “B” como unidade de medida? _____

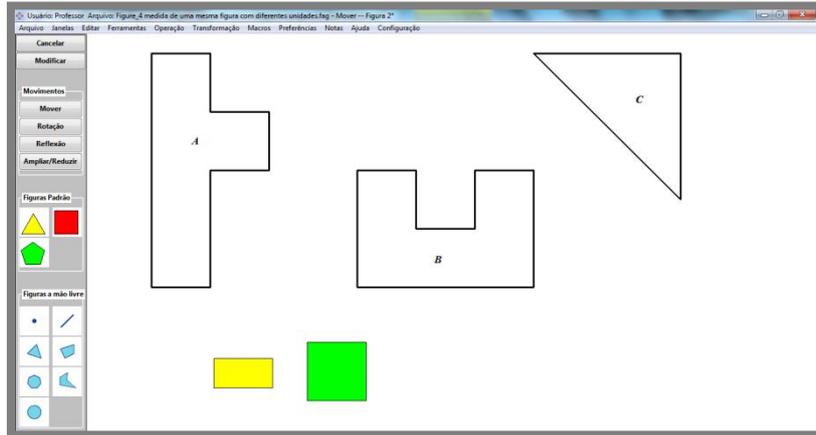
Pode-se dizer que essas figuras têm mesma área? _____

Justifique como você pensou:

TAREFA 4

Abra o arquivo “*Tarefa Figure_4.fag*” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, você deve escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br e clicar em OK.

4-Veja as figuras A, B e C, desenhadas abaixo:



Vamos chamar de “U”, a unidade de área definida pela figura

Vamos chamar de “V”, a unidade definida pela figura

É possível medir as áreas das figuras A, B e C utilizando cada uma das unidades (U e V) ? _____

Justifique sua resposta: _____

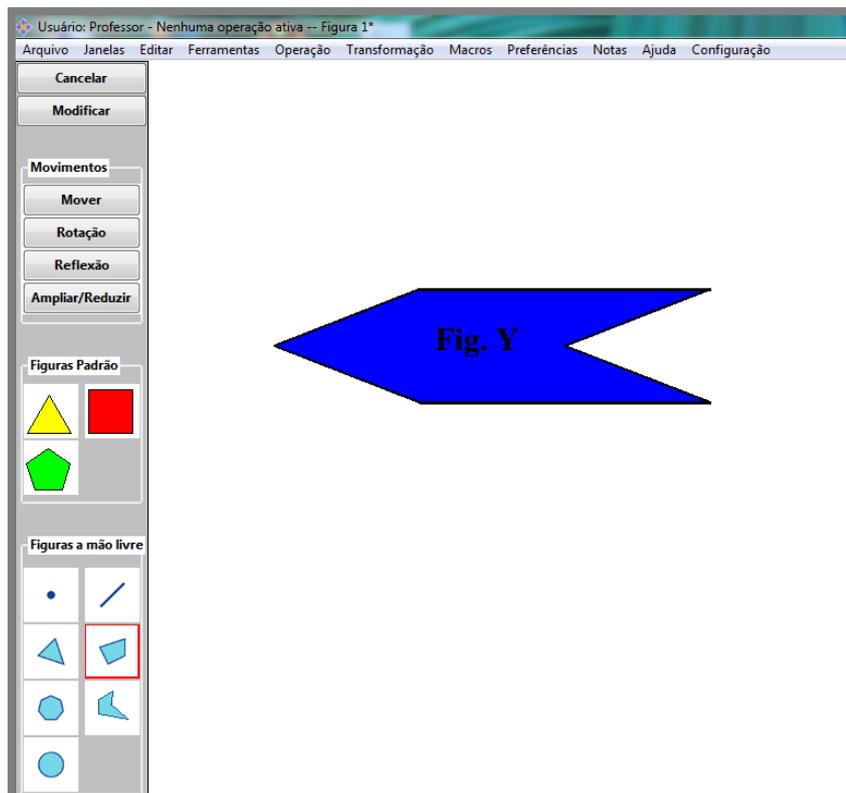
Complete quando possível a tabela abaixo:

	Unidade U	Unidade V
Figura	Medida de Área	Medida de Área
A		
B		
C		

TAREFA 5

Abra o arquivo “*Tarefa Figure_5.fag*” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, você deve escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br e clicar em OK.

5-Observe a figura abaixo, desenhada na interface do *Apprenti Géomètre 2* por meio do menu “figuras a mão livre”.



Dada a figura “Y” acima, utilizando as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, responda o que se pede:

- d) Desenhe uma figura de área menor que a da figura “Y”.
- e) Desenhe uma figura de área maior que a da figura “Y”.
- f) Desenhe uma figura de área igual a da figura “Y”.