



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E**  
**TECNOLÓGICA**  
**CURSO DE MESTRADO**

**FERNANDO TRANQUILINO MARQUES DOS SANTOS**

**EFEITOS DA UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE RÉGUA & COMPASSO**  
**NO AVANÇO DOS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE**  
**VAN-HIELE**

**Recife 2016**

**FERNANDO TRANQUILINO MARQUES DOS SANTOS**

**EFEITOS DA UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE RÉGUA & COMPASSO  
NO AVANÇO DOS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE  
VAN-HIELE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

**Orientador:** Prof. Drº Marcelo Câmara dos Santos.

**Recife 2016**

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S237e

Santos, Fernando Tranquilino Marques dos.

Efeitos da utilização do software Régua & Compasso no avanço dos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele / Fernando Tranquilino Marques dos Santos. – 2016.

162 f. ; 30 cm.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.

Inclui Referências.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Aprendizagem. 4. Ensino fundamental. 5. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marcelo Câmara dos. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.)

UFPE (CE2016-20)

FERNANDO TRANQUILINO MARQUES DOS SANTOS

**EFEITOS DA UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE RÉGUA&COMPASSO NO  
AVANÇO DOS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN-  
HIELE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em \_\_\_\_\_

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

\_\_\_\_\_  
Presidente e Orientador

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

UFPE

\_\_\_\_\_  
Examinador Externo

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes

UFCG

\_\_\_\_\_  
Examinador Interno

Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima

UFPE

Recife, 15 de fevereiro de 2016

Dedico esse trabalho aos Sonhadores, aos que acreditam que é possível vencer,  
aos que acreditam que a vida é feita de Sonhos, de força, garra e coragem para  
realizar cada um dos desejos.

## AGRADECIMENTOS

Sou Grato a Deus por tudo, pelo sonho de mudar minha vida, de mudar a minha história, de me tornar alguém melhor a cada dia, de poder vencer depois de ter morado por muito tempo numa ocupação dos sem teto e ter vencido.

Sou especialmente grato por ter sido orientado pelo Professor, Humilde, Simples e de um conhecimento imenso e incalculável, *Marcelo Câmara*, os meus sinceros agradecimentos por tudo.

Aos Professores do EDUMATEC que nos iluminaram com seus conhecimentos, experiência e incentivo ao estudo, a se dedicar, a não desistir nunca.

Aos professores dos Seminários Iranete Lima, Paula Baltar, Rosinalda, Paulo Figueiredo e o meu orientador *Marcelo Câmara dos Santos* pelas incalculáveis contribuições.

Ao meu companheiro de todas as horas, dias, noites e muitas vezes do meu estresse, *Roberto Lira*.

Aos meus Pais pela vida que me deram, pelo jeito simples e contido de mostrar que a Educação é o Melhor caminho, *Josélia Tranquilino e Adilson Marques*.

A Professora que muito tive a oportunidade de conhecer de perto, muito perto *Rilva Uchôa*, sempre iluminada e que muito me ensinou ao longo das madrugadas de seu Doutorado a entender o valor do estudo, da abdicação do compromisso, do amor em ajudar a todos que precisam.

Ao Professor *Jorge Henrique Duarte*, ser especial e de luz que sempre incentivou a buscar o melhor dos estudos e a nunca desistir.

Aos meus alunos, grandes incentivadores de me fazer buscar conhecimento para cada vez mais poder melhorar a sala de aula.

Ao Professor, Pierre Lucena, que sempre foi um líder, mas para mim, um coaching.

A meus amigos de muita luta, *Irani Oliveira, Aluísio Gondim*, que me fizeram crescer e amadurecer.

Ao Colégio que me abriu as portas para fazer a pesquisa de campo pela sua hospitalidade e solidariedade, meu muito obrigado.

A todos que que contribuíram direta ou indiretamente para realização desse Sonho, meu muito obrigado.

**A Deus eu peço iluminação e proteção de todos.**

*“Tudo é considerado impossível até acontecer”.*

***Nelson Mandela***

## RESUMO

Esta dissertação teve como objetivo geral verificar a influência do software “Régua e Compasso” na construção do conceito de quadriláteros no desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele em alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, partindo da Teoria de fases e níveis de aprendizagem de Pierre Marie Van Hiele e Dina Geldof Van Hiele, como base teórica. Como método a pesquisa foi realizada de forma empírica, utilizando o software Régua e Compasso em conjunto com o Atube Catcher para captação das construções realizadas na interface gráfica, seguindo da análise dos dados a partir da Teoria de Van Hiele. Foi utilizado como instrumento para identificar como os sujeitos da pesquisa estavam com conhecimentos geométricos dos quadriláteros, em seguida a aplicação da sequência didática dividida em três partes para contribuir e levar os sujeitos a avançar nos níveis de Van Hiele e por fim o pós-teste para identificar o avanço. Foi possível identificar que os sujeitos analisados no pré-teste estavam num nível bem abaixo do que representa o nível 1 de Van Hiele, porém com a aplicação da sequência didática foi possível levar os sujeitos a criar e desenvolver estratégias para construção dos quadriláteros, no pós-teste foi possível identificar que os sujeitos avançaram em função das parametrizações. Sendo assim foi identificado que os sujeitos avançaram nos conhecimentos geométricos dos quadriláteros apresentando em alguns momentos um avanço nos níveis de aprendizagem da teoria de Van Hiele. Ficando evidente que está num processo de reconhecimento e de transição para o nível de análise, o que nos faz inferir que possam existir subcategorias desse processo de desenvolvimento.

**Palavras-chave:** Níveis de Aprendizagem. Quadriláteros. Software. Sequência didática.

## ABSTRACT

This dissertation aimed to investigate the influence of "Compass and Ruler" software in building the concept of quadrilaterals as regards the development of Van Hiele's levels of geometric understanding applied to students in the 6th grade of elementary school, starting from the theory of phases and levels of learning from Pierre Marie Van Hiele and Dina Geldof Van Hiele as a theoretical basis. As for its method, the research was carried out empirically by using the Compass and Ruler software in conjunction with aTube Catcher as a means to capture the constructions carried out in the graphical interface. Afterwards, the analysis of data was provided using the Van Hiele Model as a tool to identify the geometric understanding of quadrilaterals of each individual participant in the research, then the application of the didactic sequence divided into three parts to contribute and lead the individuals to move forward in the levels of Van Hiele, and finally the post-test in order to identify the individual progress. It was possible to identify that the individuals analyzed in the pretest were at a much lower level as stated in Van Hiele's level 1. However, due to the application of the didactic sequence, it was possible to lead the individuals to create and develop strategies for building the quadrilaterals and, in the post-test, it was possible to identify that the individuals moved forward in accordance with the parameterization. As such, it was identified that the individuals enhanced the geometric understanding of quadrilaterals, presenting, at times, a breakthrough in the levels of learning according to Van Hiele theory. It is evident that they are in a process of recognition and transition to the level of analysis, which makes us infer that there may be subcategories of that development process.

**Key-words:** Learning Levels. Quadrilaterals. Software. Didactic Sequence.

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 01:</b> Tempo de filmagem.....	117
<b>Tabela 02:</b> Respostas para a própria figura.....	151
<b>Tabela 03:</b> Respostas para a figura do colega.....	151
<b>Tabela 04:</b> Reconhecimento dos retângulos na e fora da posição prototípica.....	153
<b>Tabela 05:</b> Reconhecimento do retângulo.....	153
<b>Tabela 06:</b> Reconhecimento do trapézio.....	154
<b>Tabela 07:</b> Não reconhecimento do trapézio.....	155
<b>Tabela 08:</b> Reconhecimento de algumas figuras como quadrilátero.....	155
<b>Tabela 09:</b> Reconhecimento da representação do quadrado.....	156
<b>Tabela 10:</b> Representação correta do paralelogramo.....	156
<b>Tabela 11:</b> alunos que reconheceram o losango.....	157
<b>Tabela 12:</b> Primeira figura.....	158
<b>Tabela 13:</b> Segunda figura.....	158

## LISTA DE QUADROS

<b>QUADRO 01:</b> Diferença nas teorias.....	17
<b>QUADRO 02:</b> Níveis de Compreensão do Modelo de Van Hiele.....	28
<b>QUADRO 03:</b> Principais características e descrição do modelo de Van Hiele.....	30
<b>QUADRO 04:</b> Fases de Aprendizagem do modelo de Van Hiele.....	31
<b>QUADRO 05:</b> Propriedades orientadoras do Modelo de Van Hiele.....	34

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 01:</b> Processo didático de ensino aprendizagem.....	22
<b>Figura 02:</b> Distinção do processo de construção de pensamentos.....	23
<b>Figura 03:</b> Interface do Software Régua e Compasso.....	47
<b>Figura 04:</b> Barra de ferramentas.....	47
<b>Figura 05:</b> Barra de ícones.....	48
<b>Figura 06:</b> Lista de objetos.....	49
<b>Figura 07:</b> Lista de objetos com as unidades de registro.....	50
<b>Figura 08:</b> Janela geométrica.....	51
<b>Figura 09:</b> Janela geométrica.....	52
<b>Figura 10:</b> Edição de um ponto geométrico.....	53
<b>Figura 11:</b> Edição de Reta, semirreta e Segmento.....	54
<b>Figura 12:</b> Ferramentas para construção geométrica do quadrado.....	57
<b>Figura 13:</b> Objetos Geométricos.....	64
<b>Figura 14:</b> Representação geométrica do ponto, reta e plano.....	69
<b>Figura 15:</b> Semirreta.....	69
<b>Figura 16:</b> Linha poligonal.....	69
<b>Figura 17:</b> Representação do triângulo.....	70
<b>Figura 18:</b> Representação de um Quadrilátero.....	71
<b>Figura 18:</b> Representação de um Quadrilátero.....	71
<b>Figura 19:</b> Representação dos Quadriláteros.....	72
<b>Figura 20:</b> Representação da soma dos ângulos internos de um quadrilátero.....	73
<b>Figura 21:</b> Representação do quadrado.....	73
<b>Figura 22:</b> Representação Retângulo.....	74
<b>Figura 23:</b> Representação do Losango.....	74
<b>Figura 24:</b> Representação do Trapézio. ....	75
<b>Figura 25:</b> Representação do Trapézio Isósceles. ....	75
<b>Figura 26:</b> Representação do Trapézio Escaleno.....	76
<b>Figura 27:</b> Representação do Trapézio Retângulo ....	76
<b>Figura 28:</b> Representação do paralelogramo.....	77
<b>Figura 29:</b> Ponto médio de um segmento.....	77
<b>Figura 30:</b> Mediatriz.....	78
<b>Figura 31:</b> Bissetriz de um ângulo.....	78

<b>Figura 32:</b> Perpendicularismo.....	79
<b>Figura 33:</b> Processo de análise dos dados qualitativos da pesquisa.....	90
<b>Figura 34:</b> Modelagem das análises.....	96

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>2. Dina Van Hiele Geldof e Pierre Marie Van Hiele: Um olhar sobre a didática</b> .....	17
<b>2.1 Os níveis de pensamento geométrico segundo Dina Van Hiele Geldof</b> .....	18
<b>2.2 Desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico</b> .....	24
<b>2.3 O processo de progresso nos níveis de Van Hiele</b> .....	29
<b>3.1 Tecnologia e o ensino de Geometria Dinâmica</b> .....	39
<b>5. Construtos Geométricos da Pesquisa</b> .....	59
<b>Ponto, reta, plano</b> .....	64
<b>Perpendicularidade</b> .....	66
<b>Estudo do triângulo</b> .....	66
<b>Quadriláteros</b> .....	67
<b>Estudo do quadrado</b> .....	70
<b>Estudo do retângulo</b> .....	70
<b>Estudo do losango</b> .....	71
<b>Estudo do trapézio</b> .....	71
<b>Trapézio isósceles</b> .....	72
<b>Trapézio escaleno</b> .....	72
<b>Trapézio retângulo</b> .....	73
<b>Estudo do paralelogramo</b> .....	73
<b>Ponto médio</b> .....	74
<b>Mediatriz</b> .....	74
<b>Bissetriz de um ângulo</b> .....	75
<b>6. Aspectos teórico metodológico</b> .....	76
<b>6.1 Análise da sequência didática construída no software Régua e Compasso</b> .....	88

<b>6.2</b>	<b>Análise da videografia realizada pelo software Atube Catcher.....</b>	<b>89</b>
<b>6.3</b>	<b>Análise prévia da sequência didática.....</b>	<b>91</b>
<b>6.4</b>	<b>Análise prévia do teste.....</b>	<b>91</b>
<b>6.5</b>	<b>Análise prévia da sequência didática.....</b>	<b>95</b>
	<b>Bloco A.....</b>	<b>96</b>
	<b>Bloco B.....</b>	<b>99</b>
	<b>Bloco C.....</b>	<b>103</b>
<b>7.</b>	<b>Análise dos dados.....</b>	<b>112</b>
<b>7.1</b>	<b>Análise da sequência didática.....</b>	<b>112</b>
	<b>ETAPA A.....</b>	<b>113</b>
	<b>ETAPA B.....</b>	<b>120</b>
	<b>ETAPA C.....</b>	<b>127</b>
<b>7.2</b>	<b>Análise do Pré-teste e do Pós-Teste.....</b>	<b>146</b>
<b>7.3</b>	<b>Análise da Q01.....</b>	<b>146</b>
<b>7.4</b>	<b>Análise da Q02.....</b>	<b>147</b>
<b>7.5</b>	<b>Análise da Q03.....</b>	<b>153</b>
<b>6.6</b>	<b>Análise da Q04.....</b>	<b>153</b>
<b>6.7</b>	<b>Análise da Q05.....</b>	<b>154</b>
<b>8.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>155</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>156</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Esta pesquisa surgiu da experiência que tive como professor do ensino fundamental, de alunos da educação infantil ao ensino médio de escolas públicas e privadas do Estado de Pernambuco.

Como professor da educação básica, percebia por diversas vezes e ficava muito preocupado, angustiado e até cheguei por muitas vezes a deixar a sala de aula por perceber que a cada ano que iniciava as atividades docente, as dificuldades eram maiores. A cada nova turma de 5ª série (atualmente 6º ano) a situação era mais difícil ainda, pois sempre que realizava um diagnóstico dos alunos, com objetivo de identificar em que nível de conhecimento se encontrava, as dificuldades eram muito elevadas. Em relação aos conhecimentos geométricos, mais precisamente as figuras geométricas, os alunos não sabiam ou nunca tinham visto em sala de aula aplicações de figuras geométricas.

Mesmo assim, não desistia e permanecia com esses alunos durante o ano inteiro. Realizei pequenos projetos de intervenção sobre a construção de poliedros, trabalhos de compreensão do conceito de área usando o tangram para entender um pouco mais dos conceitos geométricos.

Por conhecer a teoria de desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, e também por ter trabalhado algumas vezes com softwares de geometria, busquei entender um pouco mais e realizei uma pesquisa que pudesse apontar como estavam os níveis de aprendizagem de geometria em alunos do ensino fundamental. Para a realização desta pesquisa, foi elencado como problema central e norteador identificar em que medida a utilização do software Régua e Compasso utilizado por meio de uma sequência didática poderia vir a contribuir para que o aluno do 6º ano do Ensino Fundamental avançasse nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van-Hiele.

Havia uma necessidade de identificar em que níveis de aprendizagem geométrica se encontravam estes alunos, porém trabalhando com o software na perspectiva de verificar se existia uma interferência nessa aprendizagem.

Dessa forma, esta dissertação teve como objetivo geral verificar a influência do software “Régua e Compasso” na construção do conceito de quadriláteros no desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele em alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Como objetivos específicos adotamos:

- a) Identificar os níveis de pensamento geométrico de Van Hiele em que se encontravam os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental envolvidos na pesquisa;
- b) Aplicar e analisar uma sequência didática de geometria dos quadriláteros com o uso do software “Régua e Compasso”;
- c) Verificar se a utilização da sequência didática, juntamente com o software “Régua e Compasso”, contribuiu para um avanço dos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele;
- d) Observar os efeitos da utilização de um ambiente computacional por intermédio do software para a aprendizagem dos quadriláteros.
- e) Verificar se houve avanço dos alunos nos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele.

Como metodologia para realização desta pesquisa foi realizada a aplicação de um pré-teste em alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma Escola privada pertencente a cidade do Recife.

A partir desse momento foi realizada a aplicação de uma sequência didática com a ajuda do software “Régua e Compasso”.

A análise foi desenvolvida por meio do resgate das memórias, filmagem e registros memorizados no software utilizado pelos alunos.

Em nosso trabalho replicamos os instrumentos desenvolvidos por Câmara dos Santos (2001). O diferencial foi o software utilizado, pois enquanto o autor trabalhou com o “Cabri-Géomètre”, nós utilizamos o software “Régua e Compasso”. As demais diferenças são apontadas ao longo da pesquisa.

## 2. Dina Van Hiele Geldof e Pierre Marie Van Hiele: Um olhar sobre a didática.

Segundo Guimarães (2006 p.10) Dina Van Hiele Geldof e seu marido Pierre Marie Van Hiele, ambos educadores holandeses, propuseram, em seus trabalhos de Doutorado na Universidade de Utrecht, Holanda, uma teoria sobre o aprendizado de Geometria. A pesquisa desenvolvida por eles se baseou na observação de seus alunos resolvendo tarefas de Geometria. Em 1957, Pierre Van Hiele apresentou o artigo: “**O Pensamento da criança e a Geometria**” em um congresso de Educação Matemática na França. De acordo com Guimarães, esse artigo atraiu a atenção de pesquisadores soviéticos e americanos, foi quando a teoria se tornou conhecida universalmente.

De acordo com Câmara dos Santos (2001, 2008, 2009), Rodrigues (2007), Sant’ana (2009), Alves e Samapio (2010), Guimarães (2006), Machado (2011) e Corberan (1989) a teoria desenvolvida por Van Hiele apresenta um percurso em que o estudante deverá passar para poder desenvolver as habilidades cognitivas necessárias à compreensão dos conhecimentos geométricos.

Antes de trazer esses níveis, fases e propriedades da teoria do desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele, é importante mencionar que ela se diferencia da teoria de Piaget, muito embora Van Hiele tenha estudado a teoria piagetiana para poder desenvolver a sua.

A seguir apresentamos um quadro com as principais diferenças entre as duas teorias.

**QUADRO 01:** Diferença nas teorias

<b>PIAGET</b>	<b>VAN HIELE</b>
Foco no desenvolvimento cognitivo, operacional; Ligado ao social, ao mundo físico; Interação entre as pessoas Olhar voltado para a evolução dos estágios.	Foco no desenvolvimento da aprendizagem, a partir de fases; Foco nos níveis de compreensão; Olhar voltado para o método de ensino e não apenas para o conteúdo;

Fonte: (Piaget, 1999 p.37. 24ªed.)

O modelo de desenvolvimento da aprendizagem geométrica apontado por Van Hiele tem se apresentando em diversas pesquisas pelo mundo como um guia a ser seguido para melhorar o desenvolvimento dos estudantes em geometria, uma vez que eles se apresentam em diferentes níveis de aprendizagem e compreensão

geométrica, além de também compreender os conteúdos geométricos de forma totalmente diferente da que se espera que ele aprenda.

## 2.1 Os níveis de pensamento geométrico segundo Dina Van Hiele Geldof.

A teoria desenvolvida pelo casal holandês, surge em virtude de eles perceberem que havia, nas salas de aula, pouca preocupação com o aluno e suas aprendizagens. Van Hiele-Geldof (1957, Pág. 20) menciona que:

“[...] o professor deveria prestar mais atenção ao que ensina e ao que deveria ser ensinado. As pessoas estão enraizadas nas tradições, não deixam com que ocorram uma evolução. O professor não presta atenção nas dificuldades do aluno e por isso não faz essa intervenção [...]”<sup>1</sup> (**GENDOF VAN HIELE**, 1957 p. 20).

Van Hiele-Geldof (1957) enfatiza que realmente existe uma grande dificuldade dos docentes em abandonar a tradição, ou seja, modelos antigos e adotar novas posturas em sala de aula.

Machado e D'Ambrosio (2014 p. 42) mencionam que, em contrapartida, o aluno também possui muitas dificuldades e que algumas delas resultam de “[...] certas características implícitas na matemática. ”

No entanto nesse processo de desenvolvimento do pensamento geométrico, o professor é o principal protagonista, pois é por meio dele que o estudante será estimulado a avançar em seus conhecimentos.

Van Hiele-Geldof, menciona que existe uma falta de raciocínio lógico dedutivo no processo de aprendizagem do aluno, isso ocorre em diversos momentos em que ele está envolvido com a busca de conhecimento, que conscientemente quer desenvolver e aprender; isso ocorre devido a dois fatores: 1) O professor possui os métodos e modelos já estabelecidos, definidos para “transmitir” o conhecimento e; 2) O que o aluno tem são conceitos já estabelecidos, apresentando dessa forma grandes dificuldades para estabelecer um novo no lugar do anterior.

No entanto, vale ressaltar que, assim como em 1957 os Van Hiele mencionavam que existiam modelos tradicionais de ensino e de aprendizagem difíceis de serem

---

<sup>1</sup> However, I cannot help but feel that while doing so it is extremely difficult to withdraw from all kinds of deeply rooted traditions, so that one can hardly talk of a real drastic change. The result is that the often proclaimed and applied renewal of teaching is severely restrained in its course, but even more so in its impact.

quebrados, hoje em pleno século XXI, eles também existem. O que não difere nem de antes e nem de agora é que os alunos aprendem mais produzindo e praticando, realizando construções, do que seguindo uma atividade pronta, pré-estabelecida.

Van Hiele-Geldof menciona em sua tese que, por várias vezes, teve que conversar com os alunos, uma conversa motivacional, com o objetivo de estimular o aprendizado, e principalmente, a interação entre alunos, professor e objeto de conhecimento, que na ocasião eram os conhecimentos geométricos.

De acordo com Van Hiele-Geldof (1957, Pág. 21)<sup>2</sup>, existiriam três problemas que impedem a criança de desenvolver a aprendizagem:

Construção da estrutura lógica do pensamento; Aplicação dos conceitos matemáticos; Experimentação do conceito com as aplicações; (**VAN HIELE-GELDOF**, 1957, p. 21)

Ao estudar a teoria de desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, a partir da visão teoria de Dina Van Hiele Geldof (1957), percebe-se que o aluno e o professor são os centros de desenvolvimento do pensamento estratégico, e que isso ocorre mediante o trabalho em sequência didáticas, não de maneira formal, fechada.

A construção do pensamento geométrico depende de vários fatores e conhecimentos para que seja possível ao aluno elaborar as estratégias de resolução das situações de construção geométrica.

Van Hiele-Geldof (1957 Pág. 25) menciona que o papel do professor é fundamental para esse processo de crescimento e desenvolvimento do aluno. É fundamental que o docente tenha conhecimento sobre o que vai ensinar, para que não aconteça um ensino de forma desordenada, causando sérios impactos no desenvolvimento lógico dos alunos.

O pensamento geométrico para ser desenvolvido, de acordo com Van Hiele-Geldof (1957), necessita muito mais que a transmissão de conteúdo de uma série de exercícios.

Van Hiele-Geldof (1957) menciona que é necessário que seja utilizado sempre algum tipo de material que possa ilustrar a abstração geométrica, pois assim a compreensão dos alunos em relacionar com situações do cotidiano tornará mais enfático e compreensivo.

---

<sup>2</sup> The beginner, however, here encounters a difficult problem – the problem of motivation (De Grouot, I). Whether or not I succeeded with motivation for this subject, I cannot objectively assess. I took care to provide variety. First, a drawing is made according to specific instructions.

Como sabemos a geometria possui diversas propriedades, conceitos e axiomas, todos esses apresentam necessidades de representação figural para que o aluno compreenda o que é, o que significa e qual a sua aplicação.

Van Hiele-Geldof (1957, Pág. 34) relata que “[...] a definição deve ficar implícita e explícita na passagem de construção do conceito [...]”, significando que quanto mais próximos do concreto mais o pensamento traz o abstrato dos conhecimentos geométricos, maior será a possibilidade de aprendizagem pelos alunos.

Esse processo de figurar o conceito, permite também ao aluno realizar a conexão da figura com o mundo em sua volta, tornando possível fazer relações e compreender os conceitos corretamente.

Van Hiele-Geldof (1967, Pág. 35) menciona que “[...] a preparação de perguntas reflexivas acerca do conceito geométrico para que o aluno possa desenvolver novas habilidades e novos conceitos [...]”, são fundamentais no processo de desenvolvimento do aluno das propriedades geométricas, essa preparação reflexiva, precisa do docente em pleno domínio conceitual dos conhecimentos geométricos (quadriláteros) em jogo, podendo assim fazer uma forte.

É importante salientar que muito do desenvolvimento da aprendizagem ocorre com o estímulo do docente em processo de orientação com o aluno por meio de ferramentas, objetos ou situações que possam despertar a curiosidade do aluno a ponto de ser “exigido” criar uma estratégia de resolução do problema.

De acordo com Van Hiele-Geldof (1957, Pág. 50 e 51), o processo de desenvolvimento dos conceitos pode levar períodos de tempo diferenciados em virtude de não ser esse um fator determinante para a aprendizagem do aluno, mas sem os mecanismos, as estratégias e metodologias que são determinantes para que o aluno avance, não será possível desenvolver o pensamento geométrico.

Van Hiele-Geldof (1957 p. 55) menciona que:

Quando a linguagem matemática é usada muito cedo e quando o professor não usa linguagem cotidiana como um ponto de referência, a linguagem matemática é aprendida sem intuição matemática concomitante. Os alunos, então, usam um tipo de processo de analogia: eles trabalham por uma espécie de "sensação" e tentam adivinhar quais respostas são esperadas deles. Suas próprias atividades consistem de preencher regimes. A atividade de pensar, necessário compreender a fundo lógica dos esquemas, é inexistente. (VAN HIELE-GELDOF, 1957 p. 55)<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> When mathematical language is used too early and when the teacher does not use everyday speech as a point of reference, mathematical language is learned without concomitant mathematical insight.

Para Van Hiele-Geldof (1957, Pág. 57) “[...] os métodos tradicionais repetitivos não eram mais viáveis e nem eficazes<sup>4</sup>[...]”. Por este motivo o casal Van Hiele desenvolveu uma didática própria para que pudesse levar o aluno a despertar melhores estratégias e bons resultados nas avaliações.

Nessa fase de aprendizagem por parte dos alunos as propriedades geométricas dos quadriláteros tornam-se indispensáveis, fundamentais para que o aluno realize comparações e deduções. O eixo norteador para o desenvolvimento cognitivo do aluno é o tipo, a qualidade do estímulo que é dado ou ofertado para o aluno.

Van Hiele-Geldof, (1957 p. 57) aponta que os professores, no momento de produção do conhecimento dos alunos, devem construir argumentos que levem os alunos a perceberem o quanto o método utilizado no processo é importante.

Estes professores seguem a teoria da associação em seu método de trabalho. Eles constroem ideias complexas fora dos elementos através de síntese. Ao fazer isso, eles prestam atenção especial às conexões entre os elementos. Isso é feito considerando-se muitos métodos especiais para a resolução de problemas; estabelecendo assim muitos links. É evidente que este método de trabalho promove fortemente a existência de "aprendizes de aula". Ele não leva a uma integração de assunto, na maioria dos alunos, nem vai levar a uma integração de métodos para resolver. Eles permanecem pequenos métodos distintos com a função de resolver, certos problemas. A ênfase está completamente em reproduzir argumentos<sup>5</sup>. (**VAN HIELE-GELDOF**, 1957 p. 57).

Com esse método, os alunos poderão perceber que o que está sendo construído por eles poderá ser ampliado à medida que eles avançam em suas estratégias.

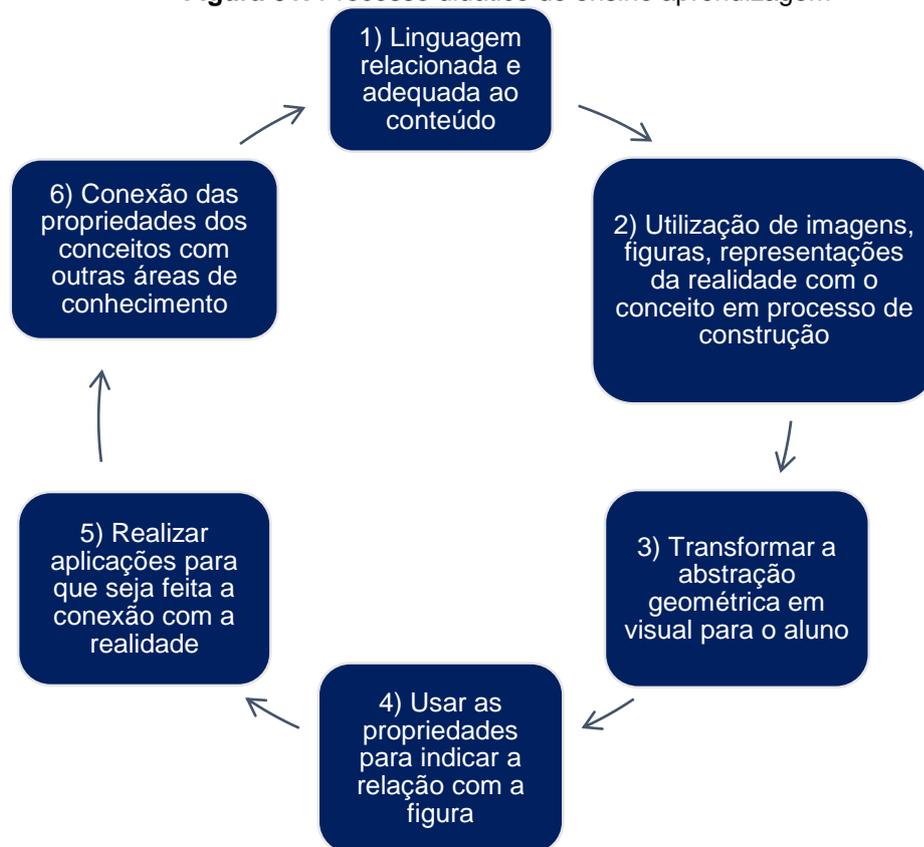
Van Hiele-Geldof (1957, Pág. 59) menciona um percurso interessante a ser seguido para realizar o processo de aprendizagem dos conhecimentos geométricos:

---

The pupils then use a kind of analogy process: they work by a sort of "feel" and they try to guess which answers are expected of them. Their own activities consist of filling out schemes. The thinking activity, necessary to understand the logical background of the schemes, is non-existent. (GELDOF VAN HIELE 1957 p. 55)

<sup>4</sup> repetitive traditional methods were no longer viable nor effective. (GELDOF VAN HIELE 1957 p. 57)

<sup>5</sup> These teachers follow the association theory in their working method. They build complex ideas out of the elements through synthesis. In doing this they pay special attention to connections between the elements. This is done by considering many special methods for solving problems; one thereby establishes many links. It is evident that this method of working strongly promotes the existence of "lesson learners". It does not lead to an integration of subject matter in most students, neither does it lead to an integration of methods for solving. They remain distinct Little methods with the function of solving, certain problems. The emphasis is completely on reproducing arguments.

**Figura 01:** Processo didático de ensino aprendizagem

**Fonte:** Arquivo Pessoal.

Van Hiele-Geldof (1957 p. 67) chama atenção para alguns pressupostos no desenvolvimento do pensamento geométrico.

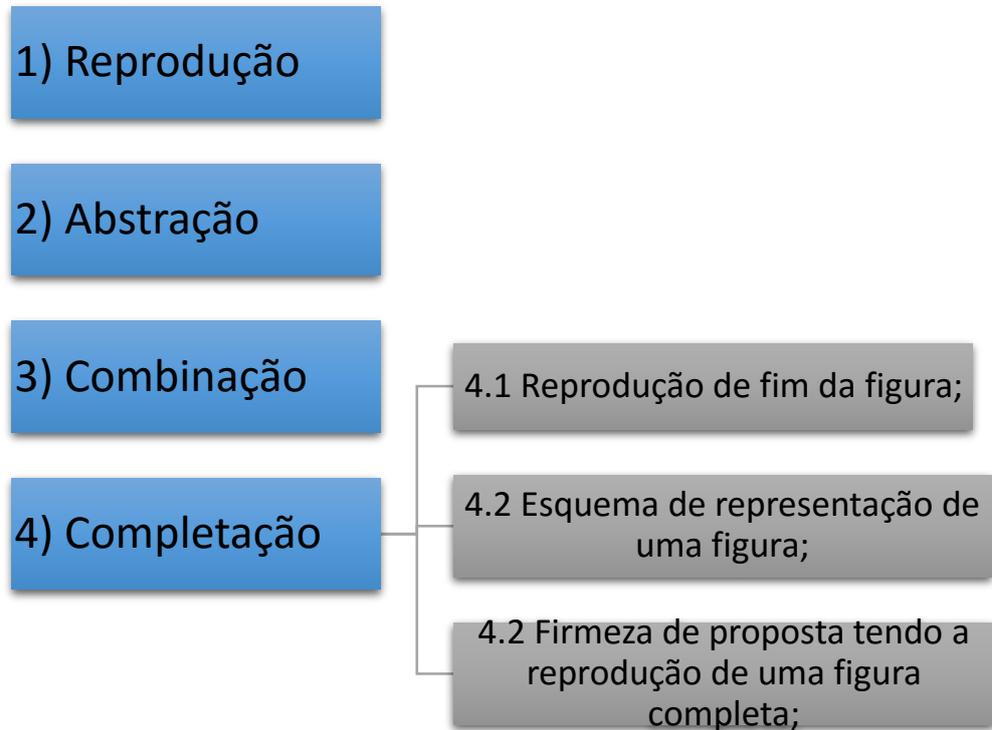
O patamar de representações gráficas, está diretamente relacionado com a percepção sensorial. O patamar mais alto, modelos mais proeminentes, informações gráficas sendo ordenado e relações mútuas estão sendo apurada. No patamar mais alta, o pensamento abstrato ocorre (ou seja, pensar em regimes, o pensamento não-gráfico em categorias), através do qual o mundo de conceitos está sendo ordenados de forma real e através do qual o objetivo direcionamento de pensar-se provocada<sup>6</sup>. (VAN HIELE-GELDOF 1957 p. 67)

É importante levar em consideração, que o pensamento geométrico se desenvolve a partir da percepção que o aluno tem, das situações didáticas envolvidas e do contexto em que está inserido.

Van Hiele-Geldof (1957, p. 64) chama a atenção para distinção dos seguintes pensamentos:

<sup>6</sup>The layer of graphic representations, is directly connected with sensory perception. In the higher layers, thinking more prominent, graphic information being ordered and mutual relationships are being ascertained. In the highest layer, abstract thinking occurs (i. e. thinking in schemes, non-graphic thinking in categories) through which the world of concepts is being ordered in a surveyable way and through which the goal-directedness of thinking-is brought about.

**Figura 02:** Distinção do processo de construção de pensamentos



**Fonte:** Arquivo pessoal

O tipo de pensamento que é voltado para a **reprodução**, refere-se à construção por meio do visual, do que já existe, ou seja, reconstruir o que já está pronto, porém não como está no mundo exterior, é feito nos moldes de quem reproduz.

No caso do tipo de pensamento da **abstração**, compreende-se que seja uma das fases mais complexas, pois trata-se do desenvolvimento conceitual das propriedades geométricas em representações de forma figurativa.

O tipo de pensamento que realiza as **combinações** trata de realizar as interligações entre o que foi reproduzido e representado, permitindo assim uma **completação** ou completude.

No último tipo de pensamento são pensamentos da **completação**. Trata-se por reprodução do fim, isto é, quando ocorre a construção de forma interligada com a realidade da construção de forma conectada com a realidade conceitual das propriedades geométricas.

Nesse processo, é necessário que, para ser de fato atendida e entendida a completude, o aluno tenha produzido um esquema de representação das figuras geométricas, ou seja, é possível perceber quando o aluno concluir ou não a construção do pensamento e quando é finalizada a representação da figura. Isso deve

ser levado em consideração quando a finalização ocorre por meio das considerações de conceitos e propriedades geométricas presentes.

Van Hiele-Geldof (1957 Pág. 68) menciona que o professor “[...] deve sempre buscar desenvolver a didática<sup>7</sup> [...] e para que isso ocorra, a teoria apresenta algumas considerações pertinentes para esse desenvolvimento:

- 1) Que os alunos possam construir estruturas de percepção em um sentido geométrico;
- 2) Que eles possam diagnosticar essa estrutura com componentes mais complexos;
- 3) Que eles possam expandir esta estranha estrutura tais quanto o contexto permite;
- 4) Que eles aprendam a reconhecer os elementos componentes em suas estruturas isomórficas<sup>8</sup>; (VAN HIELE-GELDOF, 1957 Pág. 68)

É necessário que ambos, alunos e professores, entendam que vários experimentos são necessários para que possam chegar à compreensão das propriedades dos conceitos geométricos. Esse conhecimento deve ser construído para que haja desenvolvimento.

## 2.2 Desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico.

O modelo de desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico de Pierre Marie Van Hiele tem sido tratado por muitos como teoria, sequência de aprendizagem, por fases, dentre outras. No entanto, será tratado nesta pesquisa como **teoria**, assim como é tratado pelo próprio autor.

Essa teoria se apresenta como uma metodologia que permite observar os fenômenos que ocorrem na sala de aula e, particularmente, com os estudantes nas aulas de geometria. A teoria de Van Hiele afirma que o desenvolvimento do pensamento geométrico ocorre de acordo com cinco níveis, ou fases de compreensão dos conhecimentos geométricos.

---

<sup>7</sup> [...] You should always seek to develop the teaching [...] Geldof Van Hiele (1957 Pág. 68)

<sup>8</sup> 1) that his pupils can build perception structures in ageometric sense;

2) that they will diagnose these structures as componentstructures of more complex ones;

3) that they will expand these structures in so far asthe context permits;

4) that they learn to recognize corresponding elementsin isomorphic structures.

Essa estrutura mencionada por Van Hiele busca explicar como se desenvolve o pensamento da criança para que ocorra aprendizagem.

Van Hiele define cinco níveis em que o aluno passa para desenvolver o pensamento geométrico e, para isso, cada um dos níveis tem uma estrutura.

O nível 1, conhecido com Nível de reconhecimento, se caracteriza por

O estudante opera em figuras geométricas, tais como triângulos e linhas paralelas através da identificação e atribuição de nomes e compará-los de acordo com sua aparência. A percepção é apenas visual. Um aluno que possui um raciocínio no nível 1 reconhece certas formas diferenciadas sem prestar atenção às suas partes componentes. Por exemplo, pode ser um retângulo reconhecido, porque parece "como uma porta" e não porque tem quatro lados retos e quatro ângulos retos como não há nenhuma apreciação dessas propriedades. Forma é importante e figuras pode ser identificado pelo nome<sup>9</sup>. (VAN HIELE, 1986 p.33)

Neste nível, o aluno reconhece as figuras pelo formato, pela aparência não realizando nenhuma correlação com conceitos ou propriedades. No entanto é possível que ele relacione as figuras a objetos do cotidiano, como a porta da sua casa, a janela ou uma mesa.

Nessa fase, o aluno não realiza comparações com as figuras que estão fora da posição prototípica, ou seja, se um retângulo está com seu maior lado para baixo, isso poderá não ser interpretado como uma representação da porta e sim de uma mesa. O que ocorre é que as crianças não fazem a correlação das figuras em virtude de suas posições, mas sim em função da sua comum representação, desta forma as propriedades também não são percebidas.

No nível 2 o aluno realiza uma análise das figuras geométricas, nessa fase ele passa a perceber a relação entre sistema figural e suas propriedades. Van Hiele menciona que:

O estudante descobre propriedades/regras de uma classe de formas empiricamente, tais como dobramento, medição, analisa figuras em termos de seus componentes e relacionamentos entre os componentes. A este nível, os componentes e seus atributos são usados para descrever e caracterizar as figuras. Por exemplo, um estudante que está raciocinando analiticamente diria que um quadrado tem quatro lados iguais "e" quatro cantos "quadrados".

---

<sup>9</sup> The student operates on geometric figures, such as triangles, and parallel lines by identifying, naming and comparing them according to their appearance. Perception is visual only. A student who is reasoning at level 1 recognises certain shapes wholistically without paying attention to their component parts. For example, a rectangle may be recognised because it looks "like a door" and not because it has four straight sides and four right angles as there is no appreciation of these properties. Shape is important and figures can be identified by name (VAN HIELE, 1986 p.33).

O mesmo estudante, no entanto, não pode acreditar que uma figura pode pertencer a diversas classes gerais e tem vários nomes, por exemplo, o aluno não pode aceitar que um retângulo é um paralelogramo. A figura a este nível se apresenta como uma totalidade de suas propriedades. Um estudante pode ser capaz de afirmar uma definição, mas não terá entendimento<sup>10</sup>. (VAN HIELE, 1986 p.33)

Nesse nível o aluno já passou pelo nível de reconhecimento das figuras geométricas, passando agora a comparar e analisar as figuras por meio das propriedades.

Nesse nível o aluno é capaz de distinguir suas propriedades, medidas e ângulos, porém ainda pode se deparar com a não aceitação de nomes diferentes para figuras iguais, ou seja, que todo quadrado é um retângulo, que todo retângulo é um paralelogramo.

O nível 3, o da ordenação das propriedades geométricas envolvidas no processo de construção da representação geométrica, Van Hiele discute que neste nível:

O estudante opera realizando as relações entre a representação figural com o que há dentro de uma figura e entre figuras relacionadas. Existem dois tipos de pensamento neste nível. Em primeiro lugar o aluno compreende as relações abstratas entre figuras, por exemplo, verifica as relações entre um retângulo e um paralelogramo, em segundo lugar o estudante pode usar dedução para justificar observações feitas no nível 2. O papel da definição das propriedades e da capacidade de construir provas formais não são compreendidas, embora nesse nível não é uma compreensão da essência da geometria<sup>11</sup>. (VAN HIELE, 1986 p.34)

Nesse nível, o aluno consegue fazer as correlações entre propriedades e distinguir o que difere nas figuras que possuem denominações diferentes com

---

<sup>10</sup> The student discovers properties/rules of a class of shapes empirically, such as folding, measuring, analysing figures in terms of their components and relationships among components. At this level component parts and their attributes are used to describe and characterise figures. For example, a student who is reasoning analytically would say that a square has four "equal" sides and four "square" corners. The same student, however, might not believe that a figure can belong to several general classes and have several names, eg, the student may not accept that a rectangle is a parallelogram. A figure at this level presents as a totality of its properties. A student may be able to state a definition but will not have understanding.

<sup>11</sup> The student operates with these relationships both within a figure and between related figures. There are two general types of thinking at this level. Firstly a student understands abstract relationships among figures, eg, the relationship between a rectangle and parallelogram and secondly a student can use deduction to justify observations made at level 2. The role of the definition and the ability to construct formal proofs are not understood at this level though there is a comprehension of the essence of geometry. (VAN HIELE, 1986 p.34)

propriedades semelhantes. O aluno que está nesse nível consegue perceber as relações entre as figuras, fazendo assim a distinção entre as figuras.

Dessa forma, o aluno consegue apresentar justificativas para o processo de desenvolvimento do raciocínio geométrico que está usando para realizar a resolução de um problema.

O nível 4, que trata da dedução formal, desenvolve outro olhar, nesse nível o aluno compreende as propriedades, combinando as aparências das figuras e relacionando-as para poder realizar as operações comprobatórias de suas propriedades. Van Hiele, menciona que nesse nível:

O estudante prova teoremas deduzindo e estabelecendo inter-relações entre redes de teoremas. O aluno pode manipular as relações desenvolvidas no nível 3. A necessidade de justificar os relacionamentos é compreendido e usado definições suficientes que podem ser desenvolvido. O raciocínio neste nível inclui o estudo da geometria como uma forma de sistema matemático ao invés de uma coleção de formas<sup>12</sup>. (VAN HIELE, 1986 p.34)

Os alunos nessa fase conseguem construir provas geométricas e realizá-las matematicamente, com resoluções figurais e demonstrativas a partir das construções geométricas, assim como de suas propriedades. Além disso, o aluno também consegue compreender o papel dos axiomas que estão presente dentre as propriedades e definições da geometria.

No nível 5, nível de rigor, a abstração está presente ao extremo, o aluno já domina as propriedades, realiza análise e desenvolve a construção conceitual. Van Hiele, menciona que:

O aluno estabelece teoremas em diferentes sistemas de postulados e análises e compara estes sistemas. O estudo da geometria no nível 5 é altamente abstrato e não envolve necessariamente modelos concretos ou pictóricos. A este nível, os postulados ou axiomas tornam-se objeto de intenso escrutínio rigoroso. A abstração é primordial<sup>13</sup>. (VAN HIELE, 1986 p.35)

---

<sup>12</sup> The student proves theorems deductively and establishes interrelationships among networks of theorems. The student can manipulate the relationships developed at level 3. The need to justify relationships is understood and sufficient definitions can be developed. Reasoning at this level includes the study of geometry as a formal mathematical system rather than a collection of shapes. (VAN HIELE, 1986 p.34)

<sup>13</sup> The student establishes theorems in different postulation systems and analyses and compares these systems. The study of geometry at level 5 is highly abstract and does not necessarily involve concrete or pictorial models. At this level the postulates or axioms themselves become the object of intense rigorous scrutiny. Abstraction is paramount. (VAN HIELE, 1986 p.35)

Nessa fase, o aluno realiza a demonstração das propriedades geométricas entendendo e comparando as propriedades com rigor, ou seja, realiza de forma conceitual as propriedades das figuras geométricas em jogo.

Os alunos neste nível entendem os aspectos formais da dedução geométrica e matemática, pois relacionam constantemente para poder obter o melhor resultado do processo de construção, o aluno ainda consegue realizar a comparação dentre sistemas matemáticos e geométricos complexos além de compreender aspectos da geometria não-Euclidiana.

Nasser, (2010 p.7) apresenta um esquema dos principais aspectos da teoria de Van Hiele:

**QUADRO 02:** Níveis de Compreensão do Modelo de Van-Hiele.

<b>NÍVEIS DE COMPREENSÃO</b>	<b>CARACTERÍSTICAS</b>
NÍVEL 1 - Visualização ou Reconhecimento	- Reconhece visualmente uma figura geométrica; - Tem condições de aprender o vocabulário geométrico; - Não reconhece ainda as propriedades de identificação de uma determinada figura;
NÍVEL 2 – Análise	- Identifica as propriedades de uma determinada figura; - Não faz inclusão de classes;
NÍVEL 3 - Dedução Informal ou Ordenação	- Já é capaz de fazer a inclusão de classes; - Acompanha uma prova formal, mas não é capaz de construir outra.
NÍVEL 4 - Dedução Formal	- É capaz de fazer provas formais; - Raciocina num contexto de um sistema matemático completo.
NÍVEL 5 – Rigor	- É capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas; - É neste nível que as geometrias não-euclidianas são compreendidas.

**Fonte:** Nasser, 2010 p.7.

Nasser (2010), ao abordar cada um dos níveis, aponta para características peculiares de cada uma das fases que o modelo de Van Hiele possui, deixando claro que em cada um desses níveis “os alunos precisam estar presentes em um nível de maturação, ou seja, cognitivamente bem desenvolvidos, isso apresentando conhecimentos humanos, sociais e categoriais para que possa existir uma compreensão do que cada uma dessas fases necessita do estudante” (p.9).

Câmara dos Santos (2008 p. 11), relata que no primeiro nível os alunos compreendem as figuras mediante a sua forma e, para este tipo de compreensão,

chama-o de “pragmático, em que a resposta do aluno faz referência apenas a sua aparência”.

No segundo nível as figuras passam a ser reconhecidas também pelas suas propriedades. Câmara dos Santos (2008 p.11) chama a este momento de reconhecimento como “categoria”, quer dizer que devido à junção das propriedades e da representação gráfica; no caso de “aplicação onde é privilegiada a definição usual da figura”, assim, percebe-se que a definição usual trata das interpretações gerais.

O terceiro nível, chamado de nível da ordenação lógica, leva em consideração as propriedades das figuras. Neste nível o aluno consegue ordenar as propriedades. Por exemplo, a partir da propriedade que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale  $180^\circ$ , ele consegue compreender que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero vale  $360^\circ$ .

No quarto nível, a geometria é entendida como um sistema dedutivo, de dedução lógica, nesse nível o aluno consegue compreender a ideia de demonstração. Passando assim a compreender as transformações.

No quinto nível, o de rigor, o estudante deve considerar que esta fase se trata do momento de utilização dos sistemas axiomáticos da geometria, é nesta fase em que o estudante utiliza as propriedades geométricas no sentido de desenvolver cada uma dessas em função da resolução do problema em questão.

### **2.3 O processo de progresso nos níveis de Van Hiele.**

Nasser (2010 p.7) menciona que, para o aluno, o “progresso nos níveis depende mais da aprendizagem do que da idade ou maturação. Cabe ao professor selecionar as atividades para que ele avance para o nível seguinte”.

Segundo Van Hiele, para ocorrer aprendizagem é necessário a existência de relação constante entre a linguagem da geometria e a linguagem própria do dia a dia, para que possa haver compreensão por parte dos alunos.

Nasser (2011) apresenta as principais características do modelo de Van Hiele que são de fundamental importância para a o aprendizado da geometria:

**QUADRO 03: Principais características e descrição do modelo de Van Hiele.**

<b>CARACTERÍSTICA</b>	<b>DESCRIÇÃO</b>
Hierárquica	Os níveis obedecem a uma hierarquia, isto é, para atingir certo nível é necessário passar antes por todos os níveis inferiores. Por exemplo, o aluno só consegue perceber a inclusão de classes de quadriláteros (nível de abstração) se distinguir as propriedades de cada uma dessas classes (nível de análise).
Linguística	Cada nível tem uma linguagem, conjunto de símbolos e sistemas de relações próprios. Por exemplo, não adianta falar em propriedade com os alunos que ainda estão no nível de reconhecimento, pois eles não conhecem ainda esse significado da palavra.
Conhecimentos intrínsecos	Em cada nível, o aluno tem conhecimentos que estão intrínsecos e eles não conseguem explicar. No nível seguinte é que esses conhecimentos serão explicados. Por exemplo o aluno no nível de reconhecimento é capaz de reconhecer um quadrado, sem conseguir explicar porque aquela figura é um quadrado. Só quando atingir o nível de análise é que será capaz de explicar, através da exploração dos componentes do quadrado e de suas propriedades.
Nivelamento	Não há entendimento entre duas pessoas que raciocinam em níveis diferentes, ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno. Por exemplo: Não adianta o professor pedir a um aluno que está relacionando no nível de análise para fazer deduções, pois neste nível ele não denomina ainda o processo dedutivo.
Avanço	O progresso entre os níveis depende da instrução oferecida, isto é, o aluno só progride para o nível seguinte depois de passar por atividades específicas, que o preparem para esse avanço.

**Fonte:** Nasser, 2010 p. 79.

Para que estas características seja desenvolvido, Van Hiele relata que o estudante tem que passar por cinco fases de aprendizagem, que se correlacionam com os seus respectivos níveis de sua teoria.

**QUADRO 04: Fases de Aprendizagem do modelo de van Hiele.**

<b>FASES DE APRENDIZAGEM</b>	<b>CARACTERÍSTICAS</b>
FASE 1 - Questionamento ou Informação	- Professor e aluno dialogam sobre o material de estudo; - Apresentação de vocabulário do nível a ser atingido; - O professor deve perceber quais os conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ser estudado.
FASE 2 - Orientação Direta	- Os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor; - As atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.
FASE 3 – Explicação	- O papel do professor é o de observador; - Os alunos trocam experiências, os pontos de vista diferentes e contribuirão para cada um analisar suas ideias.
FASE 4 -Orientação Livre	- Tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia.
FASE 5 – Integração	- O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas ou discordantes ideias.

**Fonte:** Nasser, 2010, p.7.

É importante salientar que Nasser (2010) relata que:

“fases delineadas no modelo de Van Hiele podem ocorrer de forma simultânea e em diversas ordens. Porém, a última fase só deve ser utilizada após o desenvolvimento das anteriores, é imprescindível que no trabalho de desenvolvimento das fases seja respeitado as ordens de desenvolvimento, para assim fornecer as estruturas de aprendizagem” (p.7).

Para D’Amore (2007) essas fases são os mesmos percursos que um aluno perpassa do que hoje chamamos de ensino fundamental, médio e superior para poder ter desenvolvido e avançado nos níveis de pensamento geométrico.

Na fase de questionamento ou informação, de acordo com D’Amore (2007 p. 88):

Trata-se de uma fase de contato inicial. O Professor deve informar seus alunos sobre o campo de estudo no qual começarão a trabalhar que tipos de problemas serão colocados, que material será utilizado e etc.. ao mesmo tempo, os estudantes aprenderão a manejar o material e adquirirão uma série de conhecimentos básicos necessários para poder começar o trabalho matemático propriamente dito. Essa é uma fase de conhecimento não só para os alunos, mas também para os professores, na medida em que permite verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema que está para ser iniciado. (**D’AMORE**, 2007 p. 88).

Na fase de orientação direta ou rígida, de acordo com D’Amore (2007 p. 89):

Nessa fase, os estudantes começam a explorar o campo de estudos por meio de investigações baseadas no material proposto. O principal objetivo dessa fase é conseguir que os estudantes descubram, compreendam, e aprendam quais são os conceitos, as propriedades, as figuras etc. Mais importantes na área do assunto que estão estudando. Nessa fase são construídos os elementos de base da rede de relações do novo nível. (**D’AMORE**, 2007 p. 89).

Na fase de explicitação de acordo com D’Amore (2007 p. 89-90):

Uma das primeiras finalidades da terceira fase é a de fazer com que os estudantes troquem suas próprias experiências, comentem as regularidades que observaram e expliquem como enfrentaram a atividade, tudo isso em um contexto de diálogo no grupo. É importante que surjam pontos de vista diferentes, uma vez que a tentativa de cada estudante em justificar suas próprias ideias (e aqueles de seus companheiros), ordená-las e exprimi-las com clareza. Esse diálogo faz com que, no decorrer dessa fase, se forme parcialmente a nova rede de relações. Essa mesma fase também tem o objetivo de fazer com que os estudantes terminem de aprender o novo vocabulário, correspondente ao novo nível de raciocínio que estão começando a utilizar. (**D’AMORE**, 2007 p. 89-90).

Nessa fase, os alunos passam a expor as suas ideias, a dialogar entre si, debater os seus pontos de vista sobre as situações didáticas propostas a eles. É importante que o professor leve os alunos a conversar também sobre suas respectivas experiências nas construções geométricas.

Na fase de orientação livre, de acordo com D'Amore (2007 p. 90):

Agora os alunos devem aplicar os conhecimentos e a linguagem que estão adquirindo em outras investigações, diferentes das anteriores. O campo de estudos é nesse momento, em grande parte conhecido pelos alunos, mas eles ainda devem aperfeiçoar os conhecimentos sobre o mesmo. Isso é obtido por parte dos professores colocando os problemas que preferivelmente, possam ser estudados de diversas formas ou que possam levar diferentes soluções. Nesses problemas serão colocados indicadores que mostrem o caminho a ser seguido, mas de modo tal que o estudante possa combiná-los de maneira adequada, aplicando os conhecimentos e as formas de raciocínio adquiridos nas fases antecedentes. (D'AMORE, 2007 p. 90).

Essa fase apresenta grandes contribuições para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois é nela que a ordenação dos pensamentos é fundamental. O aluno a partir de agora dá início à aplicação da teoria conjuntamente com suas representações.

É importante que seja trabalhado com o aluno a conexão da linguagem com os problemas matemáticos apresentados.

Na fase de orientação livre, de acordo com D'Amore (2007 p. 90):

Ao longo das fases 1, 2, 3 e 4, os estudantes adquiriram novos conhecimentos e habilidades, mas devem ainda atingir uma visão geral dos conteúdos e métodos que tem à disposição, com relação aos novos conhecimentos em outros campos que estudaram anteriormente. Trata-se de condensar, em um todo único, o domínio dos conhecimentos explorados na fase de 1 a 4, fazendo com que coincida com os conhecimentos já adquiridos. Nessa fase, o professor pode favorecer esse trabalho exigindo ou sugerindo compreensões globais mas é importante que essas compreensões não comportem mais novos conceitos ou novas propriedades para o estudante: nessa fase, deve-se tratar apenas de acumulação, confronto e combinação de coisas já conhecidas. (D'AMORE, 2007 p. 90).

O objetivo principal dessa fase é o professor guiar o aluno para um momento de síntese de desenvolvimento de ideias, porém sem realizar nenhuma crítica. O aluno nessa fase, poderá propor, desenvolver, criar e sintetizar novas propriedades e compará-las com exemplos sociais.

É importante saber que, o desenvolvimento dos níveis pode levar anos para acontecer e que não necessariamente o estudante vai progredir de fase rapidamente ou simplesmente avançar como se fosse um processo automático, sem apresentar nenhuma necessidade de conhecimentos anteriores.

Nas pesquisas anteriormente desenvolvidas por Câmara dos Santos (2001) com a utilização do software Cabri Géomètre, percebe-se que os estudantes apresentaram avanços significativos diante do processo de construção dos quadriláteros através do uso do software.

Nasser (2011 p. 80) chama atenção relatando que:

[...] o progresso de níveis não ocorre num período muito curto de tempo. É necessário o amadurecimento nas estratégias e objetos de estudo e linguagem características daquele nível. As pesquisas já desenvolvidas mostram que isso leva alguns meses. Mas é claro que isso é muito subjetivo: depende da experiência de cada aluno, de aspectos sociais, de inter-relacionamento entre alunos e entre estes e o professor, do número de aulas de geometria por semana, e, principalmente, se o ensino está adaptado ao nível de van Hiele correspondente (NASSER, 2011 p.80).

Segundo Crowley *apud* Guimarães (2006) Van Hiele enfatiza também algumas propriedades que podem orientar o trabalho do professor para que possa ser melhor conduzido o aluno na perspectiva de acontecer a evolução.

**QUADRO 05:** Propriedades orientadoras do Modelo de Van Hiele

PROPRIEDADE	CARACTERÍSTICAS
Sequencial	O aluno deve passar pelos níveis seguindo a sequência. Para mudar de um nível para outro, o aluno deve ter assimilado as estratégias dos níveis precedentes.
Avanço	Os Van Hiele afirmam que o progresso do aluno dependerá mais do conteúdo e dos métodos de ensino do que da idade, e que não se pode pular nenhum nível, apenas acelerar o avanço de acordo com o método de ensino empregado. Conforme o modelo proposto pelos Van Hiele, a simples memorização de fórmulas ou relações não garante que ocorra a compreensão.
Intrínseco e Extrínseco	Conceitos geométricos implícitos em um nível tornam-se explícitos em um nível superior.
Linguística	Haveria uma simbologia e uma linguagem própria para cada nível. Pierre Van-Hiele diz que cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos.
Combinação Inadequada	Aluno, curso e nível devem estar atrelados para que realmente haja aprendizado por parte do aluno; caso contrário, a aprendizagem não

	aconteceria. O nível em que se encontra o aluno e as linguagens próprias para esse nível devem ser levados em consideração pelo professor para que as combinações desses fatores proporcionem condições de levar os alunos para um nível imediatamente superior.
--	--

**Fonte:** Guimarães, 2006 p. 12-13.

Desta forma percebe-se que não é uma sequência fácil de ser desenvolvida uma vez que, o próprio casal ao pesquisar levou uma média de 50 encontros com a turma de alunos para poder perceber e constatar a mudança de nível, ou seja, não existe um tempo mensurado.

### 3. A tecnologia como mediação pedagógica e transformadora da educação.

Este capítulo aborda um olhar sobre a tecnológica voltada para o ensino de geometria no ensino fundamental. Nesse capítulo, poderá ser encontrado o pensar na tecnologia como mediação para o ensino e aprendizagem e não como salvador da educação. Será tratado também do como se faz a construção do conhecimento mediante o apoio de tecnológicas pensadas e voltadas para a educação.

Behrens (2010 p.26) menciona que [...] “paradigma é entendido como um modelo de pensar e ser capaz de engendrar determinadas teorias e linhas de pensamento dando certa homogeneidade a um modo de o homem ser no mundo, nos diversos momentos históricos”.

De fato, percebe-se que a tecnologia traz diversos benefícios para a educação, porém, por mais que tentamos implantar na sala de aula uma nova cultura escolar, é necessário que a sociedade se abra para entender que essa é uma das possibilidades que podem vir a contribuir para aprendizagem, não sendo em nenhum momento pretencioso ou colocando-a como salvadora da pátria.

Zippin Grinspun (2002 p. 57) conceitua a educação tecnológica com foco no indivíduo e no coletivo, sendo assim:

O conceito de Educação Tecnológica prende-se, evidentemente, aos conceitos específicos de sua expressão, mas na sua interação e integração diz respeito ou à formação do indivíduo para viver na era tecnológica, de uma forma mais crítica e mais humana ou à aquisição de conhecimentos necessários à formação profissional (tanto uma formação geral como específica), assim como às questões mais contextuais da tecnologia, envolvendo tanto a invenção como a inovação tecnológica. (**ZIPPIN GRINSPUN**, 2002 p. 57).

Dessa forma, é uma área da educação que se preocupa com a construção dos conhecimentos.

Sancho (1998 p. 84) relata que a “Aprendizagem organizada não se transforma automaticamente em desenvolvimento mental, mas põe em ação processos evolutivos que favorecem o salto qualitativo e assim garante a internalização do sujeito”. Isso leva a entender que a necessidade entre a forma que se planeja para a provocação no sujeito e a concepção de conhecimentos é levada em consideração para que ocorra o desenvolvimento do pensamento.

Dowbor (2008 p. 9) menciona que “A educação já não pode funcionar sem se articular com dinâmicas mais amplas que extrapolam a sala de aula”. Ou seja, é uma

necessidade constante, pois os alunos já o fazem, e dessa forma, tendo mais acesso as informações, bem como, as construções conjecturais que ele permite.

Já Zippin Grinspun (2002 p. 48), traz uma definição etimológica da palavra tecnologia, em que [...] tecnologia provém de técnica, como já vimos, cujo vocábulo latino *techné* quer dizer arte ou habilidade. Esta derivação mostra que a tecnologia é uma atividade voltada para a prática, enquanto a ciência é voltada para as leis a que cultura obedece”. Percebe-se que se exige técnica para poder mediar a aprendizagem dos alunos, pois não existem outras formas de desenvolver as habilidades.

O universo escolar deve proporcionar dinamismo, desafio constante e situações que levem o aluno a construir, não a decorar. É importante frisar que a tecnologia não é a ferramenta que irá salvar a educação. Muito pelo contrário, ela é apenas mais uma ferramenta na mão do docente.

Zippin Grinspun (2002 p. 12) faz uma reflexão sobre o estágio da tecnologia na educação, no qual relata que existe uma insipiência:

A tecnologia não é mais o simples saber como fazer da técnica. Ela exige, por parte de seus agentes, um profundo conhecimento do que e do como seus objetivos são alcançados. Além disso, exige da sociedade em que ela se instalou uma formulação de suas estruturas e metas, compatível com a utilização dos benefícios que trouxe. (**ZIPPIN GRINSPUN**, 2002 p. 12).

Compreende-se que nesse cenário o professor precisa estar em pleno domínio de conhecimento de sua respectiva área para poder utilizar a ferramenta que irá contribuir na mediação dos conhecimentos e assim construir o conceito conjuntamente com o aluno.

Dessa forma percebe-se que Zippin Grinspun (2002 p. 49), quando menciona que “O principal objetivo da tecnologia é aumentar a eficiência da atividade humana em todas as esferas, incluindo a produção”, quer dizer que é uma ferramenta para o uso, ou seja, precisa que seu manipulador e usuário saibam qual a sua serventia e como essa “ferramenta tecnológica” poderá contribuir para um determinado conhecimento.

Nessa perspectiva, Sancho (2006 p. 17) menciona que “Torna-se difícil negar a influência das tecnologias da informação e comunicação na configuração do mundo atual, mesmo que esta nem sempre seja positiva para todos os indivíduos e grupos”. Essa afirmação condiz com a realidade, uma vez que a tecnologia pode vir a contribuir para o desenvolvimento da aprendizagem.

Moran (2009 p. 23) menciona que:

Um dos grandes desafios para o educador é ajudar a tornar a informação significativa, a escolher as informações verdadeiramente importantes entre tantas possibilidades, a compreendê-las de forma cada vez mais abrangente e profunda e a torná-las parte do nosso referencial. Aprendendo melhor quando vivenciamos, experimentamos, sentimos. Aprendemos quando relacionamos, estabelecemos vínculos, laços, entre o que estava solto, caótico, disperso, integrando-o em um novo contexto, dando-lhes significado, encontrando um novo sentido. (**MORAN**, 2009 p.23)

Essa parceria entre possibilidades e motivos para que ocorra a compreensão do saber em jogo com a mediação da tecnologia, permite um novo olhar, uma nova visão sobre a produção de conhecimento.

Masetto (2009 p. 139) menciona ainda que:

Com efeito, a tecnologia apresenta-se como meio, como instrumento para colaborar no desenvolvimento do processo de aprendizagem. A tecnologia reveste-se de um valor relativo e dependente desse processo. Ela tem sua importância apenas como um instrumento significativo para favorecer a aprendizagem de alguém”. (**MASSETO**, 2009 P. 139).

Ou seja, não passará de uma ferramenta se não existir uma intenção na sua aplicação. É necessário que haja um novo olhar, um implantar de possibilidades para que haja desenvolvimento coletivo e que tenha como consequência a aprendizagem.

Borba (2010 p. 44) menciona que a tecnologia tem uma forte relação com o indivíduo e que sua contribuição para a sociedade depende da intenção que se usa e se aplica, ou seja, é necessário um objetivo. Dessa forma, ele ainda relata que [...] “a tecnologia está relacionada com o nosso posicionamento sobre o papel das mídias no processo de construção de conhecimento e baseia-se na perspectiva teórica que utilizamos para pensar a relação entre seres humanos e computador” [...] sendo assim, não existe uma consideração apenas que faça ocorrer a aprendizagem, mas sim o enfoque que se dá a ela.

No entanto, vale a pena ressaltar que a tecnologia também apresenta problemas e muitas dificuldades para seu uso, aplicação e compreensão por parte de quem se envolve. A fim de mudar o perfil de aprendizagem, Sancho (2006 p. 19) expõe que “A principal dificuldade para transformar os contextos de ensino com a incorporação de tecnologias diversificadas de informações e comunicação parece se encontrar no fato de que a tipologia de ensino dominante na escola é a centrada no professor”. O que se percebe é que o ensino não pode ter como centro o professor, como se apenas fosse um processo de passagem, transmissão de conhecimento,

mas sim uma parceria em que o professor é um mediador, o facilitador que conduz o aluno por uma passagem de construção de conhecimentos, de saberes.

Considerando que estamos na era do conhecimento, o sujeito é que conduz a sua própria forma de apreender o conhecimento, que constrói suas próprias estruturas de aprendizagem devido a sua interação com a tecnologia.

Sancho (2006 p. 88) ainda menciona que:

O uso das novas tecnologias é visto agora como um meio para fortalecer um estilo mais pessoal de aprender em que os estudantes estejam ativamente envolvidos na construção do conhecimento e na busca de respostas para seus problemas específicos. Ao mesmo tempo, estão usando sua habilidade para aprender como são utilizados os próprios meios tecnológicos. (**SANCHO**, 2006 p. 19)

As tecnologias vêm sendo utilizadas pela escola com objetivo de contribuir para o desenvolvimento do conhecimento em sala de aula com a mediação do professor. Garcia, Sehnem e Simões Júnior (2013 p. 3) mencionam que “A utilização das TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação) na educação já vem sendo amplamente debatida e sua importância já foi consolidada perante uma nova sociedade, globalizada e habitada por nativos digitais”.

É importante observar que mesmo nas grandes metrópoles temos ainda diversas escolas sem acesso à tecnologia ou professores interessados em utilizar a tecnologia.

Vale salientar que, a tecnologia, para agir sobre a natureza da situação didática, precisa [...] “ser contemplada na prática pedagógica do professor, de modo a instrumentalizá-lo a agir e interagir no mundo com critério, com ética e com visão transformadora”. Isso leva o docente para um universo onde a produção de conhecimento ocorre da interação entre os sujeitos da situação, onde a produção de conhecimento não fica para depois mais sim presente no agora.

Sendo assim, a tecnologia vem se caracterizando como uma ferramenta que possui diversas características, multiplicidade de aplicação. Zippin Grinspun (2002 p. 51) menciona que:

A tecnologia caracteriza-se, de uma maneira geral, como um conjunto de conhecimentos, informações e habilidades que provem de uma inovação ou invenção científica, que se operacionaliza através de diferentes métodos e técnicas [...] (**ZIPPIN GRINSPUN**, 2002 p. 51).

Percebe-se que a tecnologia é uma área que vem contribuindo consideravelmente para o desenvolvimento da educação, levando diversos pesquisadores a descobrir, criar, propor e fazer despertar novos conhecimentos, novas possibilidades de aprendizagem, e tudo isso para levar o sujeito a uma nova postura, a uma nova possibilidade de crescimento intelectual, a uma nova possibilidade de saber.

Masetto (2009) relata em seu texto que a tecnologia é um fator importante para a educação, contribuindo cada vez mais para que possa ser utilizada com objetivos e planejamento didático.

É importante não nos esquecermos de que a tecnologia possui um valor relativo: ela somente terá importância se for adequada para facilitar o alcance dos objetivos e se for eficiente para tanto. As técnicas não se justificarão por si mesmas, mas pelos objetivos que se pretenda que elas alcancem, que no caso serão de aprendizagem. (MASETTO, 2009 p. 144).

### **3.1 Tecnologia e o ensino de Geometria Dinâmica.**

A tecnologia vem contribuindo de forma ativa para o ensino da matemática, as salas de aula não têm sido as mesmas desde então, pois os processos de aprendizagem estão aos poucos sendo remodelados, os alunos já não se contentam com o simples copiar e responder, eles querem mais conhecimentos, mais interação pois isso é o diferencial.

A geometria é uma das áreas matemáticas que vem passando por essa reformulação. Baldin (2009 p. 1) menciona que:

As tecnologias, como auxiliar didático no ensino de Matemática, são cada vez mais adotadas por professores que têm acesso a laboratórios de informática em suas escolas, principalmente como meio de comunicação, e que também utilizam recursos computacionais para ilustrar, com vantagens, exemplos e problemas em suas exposições. (BALDIN, 2009 p. 1).

Compreende-se que a tecnologia é uma ferramenta importante para a educação matemática, a ponto de ser um diferencial entre o desenvolvimento da

aprendizagem e a compreensão de novos conceitos que sejam de importância para a construção da base conceitual do aluno.

Ferreira, Dias e Souza (2010 p. 1) relatam que “O uso da tecnologia no ensino é uma prática que pode proporcionar inúmeras vantagens no processo de ensino/aprendizagem, como por exemplo, a utilização do computador através de diversos softwares específicos que podem tornar as aulas mais dinâmicas”. Com base na afirmativa, entende-se que a tecnologia é um fator de contribuição para a educação e que pode levar o aluno a produzir cada vez mais conhecimento.

A tecnologia tem diversas possibilidades, mas uma delas é que permite ao aluno construir o conceito, não decorar o conceito. Nesse processo de construir, os softwares de geometria permitem ao aluno interagir com as ferramentas e sua interface amigável, podendo realizar a criação de suas estratégias para atender a uma atividade.

Baldin (2009 p. 3) discute que os softwares de geometria dinâmica, apresentam diversas possibilidades de aprendizagem, ele ainda coloca que:

Uma das características dos SGD<sup>14</sup> é o recurso de “arrasto” que pode modificar a atitude dos professores e alunos no ensino/aprendizagem de geometria, dentro do currículo escolar. Ele introduz elementos de teste e validação nas construções geométricas, de descoberta e exploração de propriedades, de conjecturar e explorar novos conceitos, entre outros, permitindo uma aprendizagem da Matemática por meio de experiências. O recurso de “arrasto” é um elemento chave no planejamento de atividades de geometria desde as mais elementares, quando se introduzem objetos básicos como pontos, retas, ângulos, círculos, triângulos, retângulos, etc. Deste modo, o professor e o aluno podem experimentar juntos a dimensão instrumental de um SGD 2- dimensional, enquanto desenvolvem os primeiros conceitos da geometria plana, e aprendem a abstrair os modelos da vida real por meio de figuras geométricas. (BALDIN, 2009 p. 3).

De acordo com Kaiber e Renz (2008 p. 3), “[...] na utilização de ferramentas computacionais é necessário saber manuseá-las, ter consciência de suas possibilidades, potencialidades e, principalmente, ter um planejamento didático adequado, para que se atinja o objetivo de constituí-las em um auxiliar na construção dos conhecimentos”.

Nessa visão, a aprendizagem dos alunos pode ocorrer de forma construtiva e dinâmica, levando-os a desenvolver estratégias de resolução de problemas que os permitam avançar nos níveis de aprendizagem de forma mais progressiva e rápida.

---

<sup>14</sup> SGD-Sistemas de Geometria Dinâmica.

Os softwares de geometria dinâmica têm diversas características do processo de construção em sua interface, e Oliveira (2012 p. 7) explica que os softwares de geometria dinâmica possuem:

Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que o definem. Uma vez construídos, os desenhos podem se movimentar conservando as propriedades geométricas atribuídas anteriormente. Assim, para um dado conceito ou teorema temos associada uma coleção de desenhos em movimento, e as características invariantes que surgem correspondem às propriedades em questão. (OLIVEIRA, 2012 p. 7)

Percebe-se ainda que o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio da intervenção da tecnologia ocorre de diferentes formas e, de acordo com Morelatti e Souza (2006 p. 274), é [...] “fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico e geométrico, uma vez que, por meio dele, os alunos puderam conjecturar, representar ideias estabelecer relações, comunicar-se, argumentar e validar suas hipóteses”.

Com a tecnologia sendo utilizada de forma programada e planejada em sala de aula, podemos levar o aluno a enxergar variáveis importantes do aprendizado que sem ela, talvez não fosse possível. Os softwares de geometria dinâmica, permitem ao estudante interagir com os objetos geométricos de sua interface, de forma a perceber e até mobilizar propriedades geométricas que sem a tecnologia não utilizaria.

De acordo com Meier e Silva (2015 p. 137), “a manipulação direta dos objetos construídos e que são colocados em movimento na tela do computador faz com que os alunos observem os resultados obtidos, inicialmente de forma empírica, porém após determinado tempo é possível estimular o desenvolvimento da argumentação, que visa explicar as regularidades percebidas”. Assim, é possível conduzir o aluno por uma aprendizagem mais significativa e mais plausível ao desenvolvimento intelectual do discente.

Esses micromundos virtuais, que estão acoplados nos softwares, permitem ao estudante mobilizar também as suas respectivas potencialidades, modelar estratégias e operações projetivas de como deve ficar a construção ao final.

Segundo Basso e Gravina (2011, p.14), os softwares devem: “a) ser instrumento para externar, consolidar e comunicar o saber matemático; b) ser instrumento que dá suporte aos pensamentos, mais especificamente aos processos cognitivos que produzem conhecimento matemático”.

Gravina (2011 p.14), menciona ainda que estes softwares têm interessantes recursos de equilíbrio sob ação de movimento. A interface interativa desses softwares de geometria dinâmica permite a criação de situações de aprendizagem que potencializam o desenvolvimento do pensamento matemático e contribuem para que o aluno interaja com as ferramentas e possibilidades que ele apresenta para que possa fazer diferentes construções geométricas.

De acordo com Assis (2011 p. 3), essa discussão nos faz refletir sobre a ótica de que a “utilização dos softwares em sala de aula deve ser norteadada por interesses pedagógicos, uma vez que o software em si não implica em nenhuma mudança no processo educacional”.

De acordo com Valeda (2014 p. 3):

Para que uma aula com a utilização de recursos tecnológicos seja um ambiente de aprendizagem é necessário que o professor estimule a investigação e a aprendizagem dos alunos. Mas para que isso ocorra são necessários o conhecimento e o domínio da ferramenta tecnológica utilizada, assim o “não saber como funciona” não atrapalhará ou prejudicará a aprendizagem dos alunos. (VALEDA, 2014 p. 3).

Vale salientar que o caminho para que ocorra a aprendizagem geométrica dos alunos é que exista uma integração coletiva de todos os envolvidos no processo e não apenas de um sujeito, o aluno, ou o professor, ou a escola, tem que haver esse interesse de todos.

#### 4. A geometria mediada pelo Software Régua e Compasso.

Este capítulo aborda a construção teórica do software Régua e Compasso, suas concepções, utilização e abordagem tecnológica de sua interface gráfica. Nesse capítulo, é possível identificar como o criador do software Régua e Compasso enxerga as construções geométricas identificando o grau de importância para o ensino de geometria.

O software “Régua e Compasso” foi escolhido dentre vários existentes a partir da observação de sua interface, usabilidade, manipulação de suas ferramentas e por percebermos que é um software simples, de fácil manipulação e utilização de seus ícones de tela pelo usuário. Esse software tem uma linguagem aberta, permitindo ao operador interagir e inserir combinações de conceitos e memorização de macro no próprio software.

O software “Régua e Compasso” foi desenvolvido pelo Professor René Grothmann da Universidade Católica de Berlim, na Alemanha, em 1999. No entanto, para o desenvolvimento dessa pesquisa, trabalhei e pesquisei com a versão 8.7, criada em 2007/2008.

De acordo com Grothmann (2014 p.1) o software Régua e Compasso foi iniciado:

[...] em 1988, iniciei um projeto de geometria dinâmica no meu velho Atari ST só para ver o que poderia ser feito com uma abordagem orientada a objeto. Este projeto foi portado para o OS/2 e Windows, e, finalmente, reescrito em Java. Naquela época, ele era novo e muitas pessoas se interessaram por ele. Esse foi o começo do C.a.R. (Compasso e Régua), também conhecido como Z.u.L em alemão. A ideia principal, no entanto, não foi muito profunda e havia software semelhante, começando com Cabri ou Geometer’s Sketchpad. Mais tarde veio a estrela dos programas de hoje na Europa, o Geogebra (GROTHMANN, 2014 p1).<sup>15</sup>

O software Régua e Compasso está escrito na linguagem Java, tem seu código fonte aberto, roda em qualquer plataforma e está disponível para *download gratuito*, o que facilita para as instituições de ensino utilizarem com seu alunos para pesquisa.

O software “Régua e Compasso” possui muitas características, dentre elas está a vantagem de funcionar na maioria das plataformas virtuais (Windows NT, 95 ou

---

<sup>15</sup> Nevertheless, In 1988 I started a project in dynamic geometry on my old Atari ST just to see what could be done with an object oriented approach. This project was ported to OS/2 and to Windows, and finally rewritten in Java. At that time, it was novel and many people got interested in it. That was the beginning of [C.a.R](#) (Compass and Ruler), aka Z.u.L. in German. The primary idea, however, was not very deep and similar software existed, starting with Cabri or Geometer’s Sketchpad. Later came the star of today’s programs in Europe [Geogebra](#).

superiores; Linux, Mac OS, Mac OSx, Sun Solaris e outros Unix) e ter o seu código-fonte aberto e livre. Com isso permite as instituições (professores, alunos, escolas) utilizar o software em aulas de geometria sem maiores restrições.

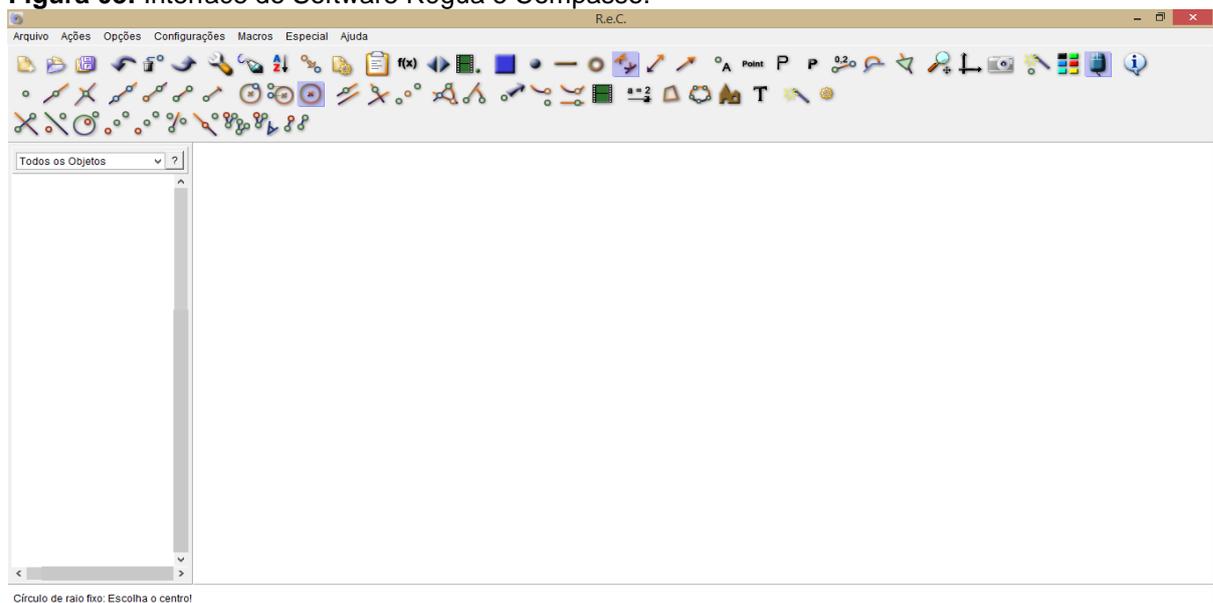
O referido software é composto por várias ferramentas e funções que abordam conceitos e demonstrações geométricas. Ele permite construir figuras geométricas que podem ser alteradas movendo-se um dos pontos básicos pertencentes à figura formada, contribuindo para que as suas propriedades originais sejam mantidas.

Depois de construir pontos, retas, semirretas e círculos, por exemplo, esses elementos podem ser deslocados na tela sem alterar as relações geométricas previamente estabelecidas (pertinência, paralelismo, etc.), permitindo, que o aluno possa investir nos detalhes da construção e suas respectivas propriedades juntamente com o professor. Outra vantagem do software sobre o instrumento físico é que, além de ganhar tempo, é possível conservar as propriedades das figuras por ocasião dos deslocamentos na tela, interface de construção geométrica, e assim se concentrar na associação existente entre esses objetos.

Além disso, diversos tópicos relacionados à Geometria Euclidiana e Analítica podem ser explorados.

A interface do software é simples e dedutiva. É dividida em quatro partes que apresentam as funcionalidades e ferramentas de desenvolvimento das atividades geométricas possíveis de serem realizadas por qualquer usuário.

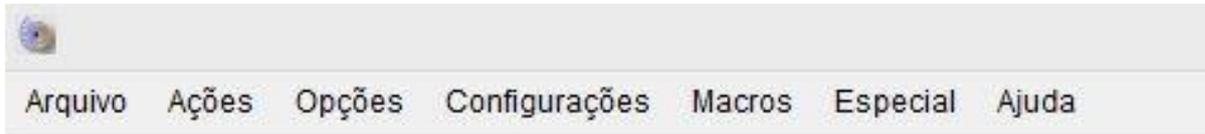
**Figura 03:** Interface do Software Régua e Compasso.



Fonte: Arquivo pessoal.

Na figura 04 podemos observar a barra de ferramentas, ela possui instrumentos de macro criação e implantação de novos códigos (possibilidades de construções geométricas que o software ainda não execute).

**Figura 04:** Barra de ferramentas.



Fonte: Arquivo pessoal.

Abaixo da barra de ferramentas fica a barra de ícones (Figura 05). Também é possível encontrar na barra de ferramentas os instrumentos de construção para animação de um ponto, uma ferramenta que permite tornar visível as distâncias entre dois pontos, localização do ponto, entre outras funcionalidades.

Abaixo da barra de ferramentas fica a barra de ícones (Figura 05). Ela é composta de diversos instrumentos e ferramentas para construção de representações geométricas planas e analíticas, assim como a criação de polígonos por meio do ícone , para construção de polígonos, ou através do ícone , ou realizar o rastreamento de um ponto em uma reta através do ícone .

**Figura 05:** Barra de ícones.



Fonte: Arquivo pessoal.

Esta barra de ícones apresenta ferramentas para a construção geométrica plana de qualquer natureza, assim como de construções analíticas, que possam demonstrar detalhadamente a aplicação dos conceitos geométricos e, permite que o usuário construa figuras e teste suas propriedades, por meio de ferramentas como definir ponto médio, perpendicularismo, raio de uma circunferência, ângulo e outros ícones presentes no software.

O software permite também a utilização de ferramentas como salvar , apagar , voltar , desfazer , editar objetos , implantação de macros (são

atalhos para passos de construção 🗑️, sub-rotinas como de linguagem de programação).

Nessa barra é possível ainda encontrar ícones para criação de reta 📏, semirreta, 📏 segmento de reta 📏, outra ferramenta que está presente é a de construção da circunferência de centro fixo 📏, a ferramenta do compasso, com a função de transferir medidas 📏 marcação de coordenadas no plano e ângulo 📏.

Abaixo dessa barra de ícones fica o campo que será utilizado para análise das estratégias utilizadas pelos alunos quando tiverem desenvolvido a construção das figuras geométricas por meio da sequência didática.

Essa barra de objetos é chamada de *lista de objetos* (Figura 06), e apresenta a sequência de funções localizadoras onde são realizadas as construções geométricas, ou seja, as unidades de registro da memória do software.

**Figura 06:** Lista de objetos.



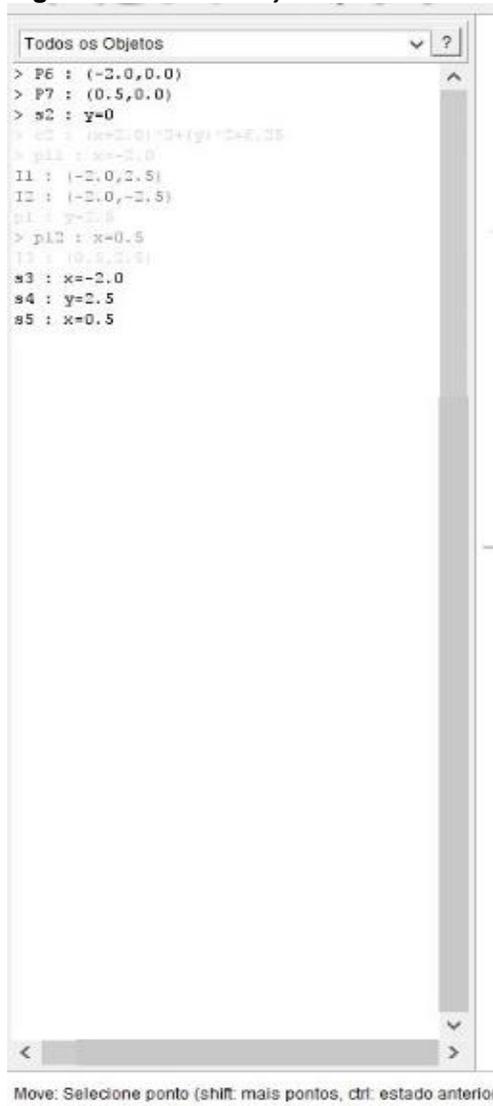
Fonte: Arquivo pessoal.

Na lista de objetos é possível identificar a sequência de localização das construções realizadas e as unidades de registro que é gerado a partir das construções gráficas realizadas na janela geométrica do software.

A partir dessa lista de objetos podemos identificar todo o percurso realizado pelo sujeito da pesquisa durante o processo de construção.

Como exemplo de funcionamento desse campo, apresentamos as unidades de registro da construção de um quadrado:

**Figura 07:** Lista de objetos com as unidades de registro.



Fonte: Arquivo pessoal.

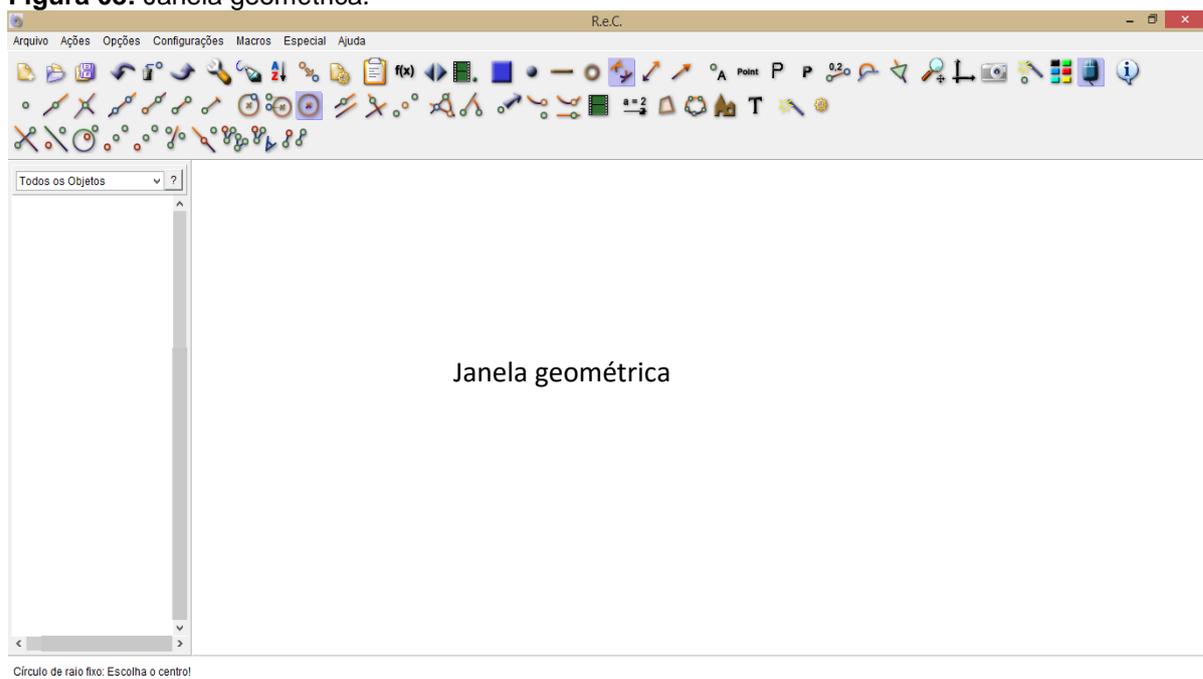
Como esta janela de apresentação das unidades de registro demonstra o processo de construção das figuras geométricas pode ser alterado ao longo da

construção (desde que esteja com permissão na caixa de configuração do software), por parte dos alunos.

Outra opção é deixar em oculto essa janela de objetos. No caso de nossa pesquisa, essa janela ficará em oculto durante todo o processo de construção da sequência didática e uso por parte dos alunos. Fizemos essa escolha para minimizar a possibilidade que o aluno tenha a sua atenção desviada da tela principal.

Ao lado da janela *lista de objetos*, fica a *janela geométrica*, assim apontada pelo seu criador, **René Grothmann**, (Figura 08). Nessa interface é realizada a construção das representações geométricas, que permite a criação e representação das propriedades geométricas.

**Figura 08:** Janela geométrica.



Fonte: Construções do pesquisador.

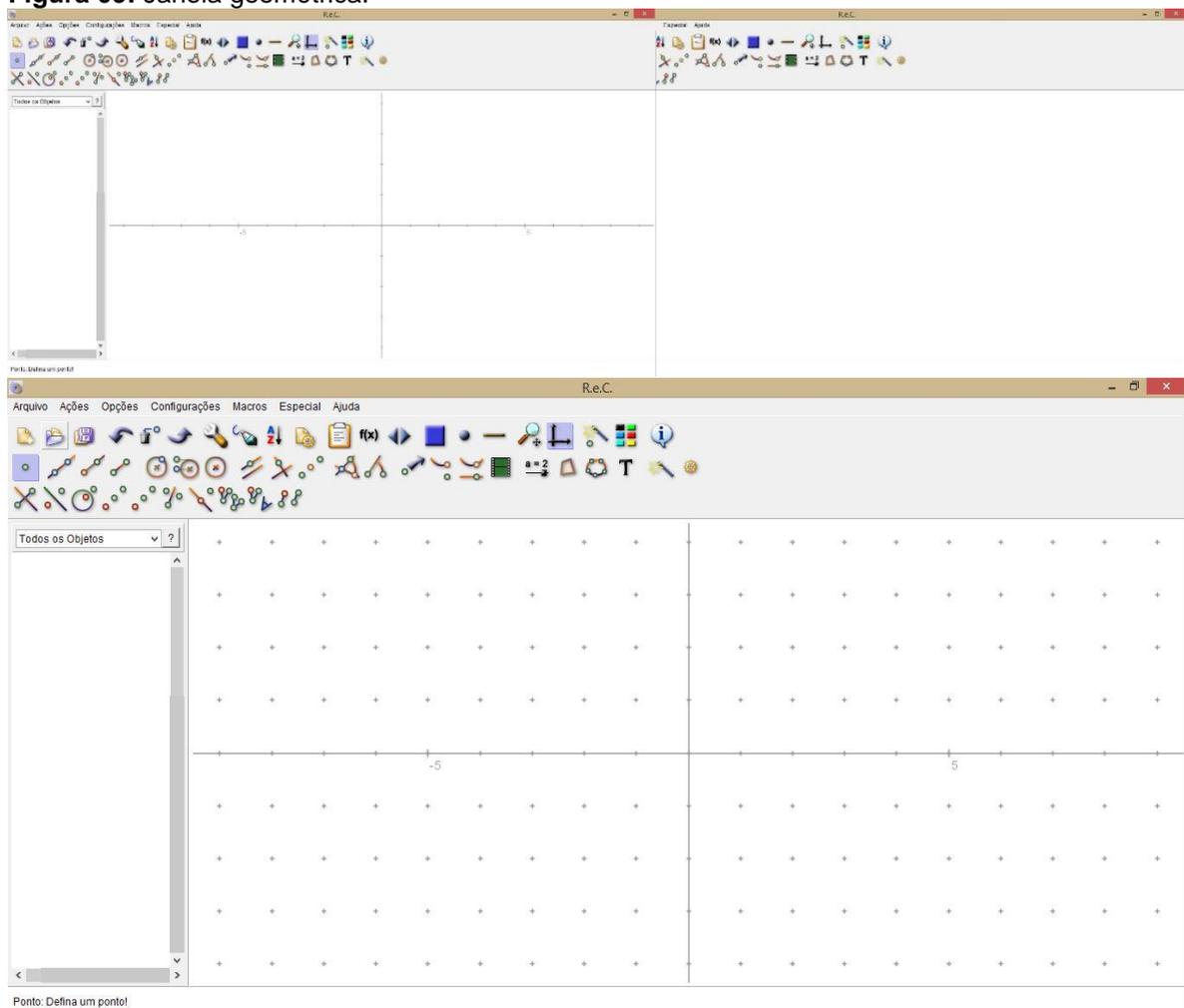
Nessa parte do software, as construções podem ser realizadas a partir de três tipos de janela. A primeira com o plano cartesiano, a segunda por representação de pontos equidistantes e a representação da janela livre. Todas essas janelas podem ser alteradas por meio do ícone *exibir grade* .

A decisão de aplicar as sequências didáticas A, B e C com a interface gráfica, chamada de janela geométrica, com sua interface livre, deve-se a permissão e possibilidade do aluno poder realizar as construções, criar as suas estratégias de construção dos quadriláteros e debater o processo de desenvolvimento das “respostas” as atividades.

Esta decisão foi tomada para evitar que o aluno utilize o recurso do plano cartesiano para projetar as construções geométricas. Sem esse recurso o aluno necessitará desenvolver o raciocínio geométrico e lógico para poder construir.

A (figura 09) está representada pelas três interfaces que segue respectivamente.

**Figura 09:** Janela geométrica.



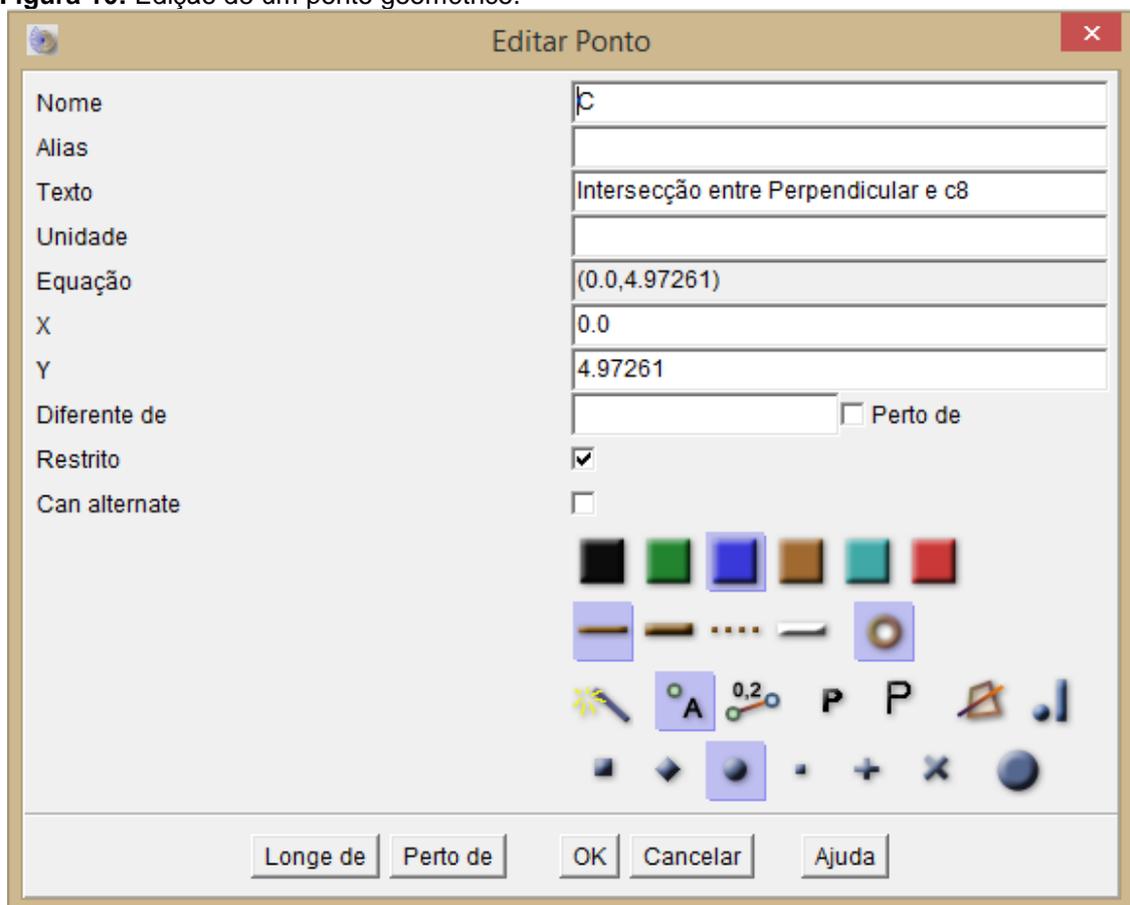
Fonte: Construções do pesquisador.

Funcionalidades importantes do software Régua e Compasso no processo de construção das representações Geométricas.

O software Régua e Compasso possui diversos recursos, tais como ferramentas para poder renomear  construções como ponto, reta, segmento de reta, semirreta, plano e a figuras geométricas já construídas. Essa ferramenta está presente na barra de ícones do software podendo ser utilizada a qualquer momento.

Para realizar a nomeação de um ponto, torná-lo visível na interface construída, apresentar as dimensões métricas de sua localização, será necessário clicar com o lado direito do mouse em cima do ponto, reta, ou plano e utilizar a ferramenta de editar.

**Figura 10:** Edição de um ponto geométrico.

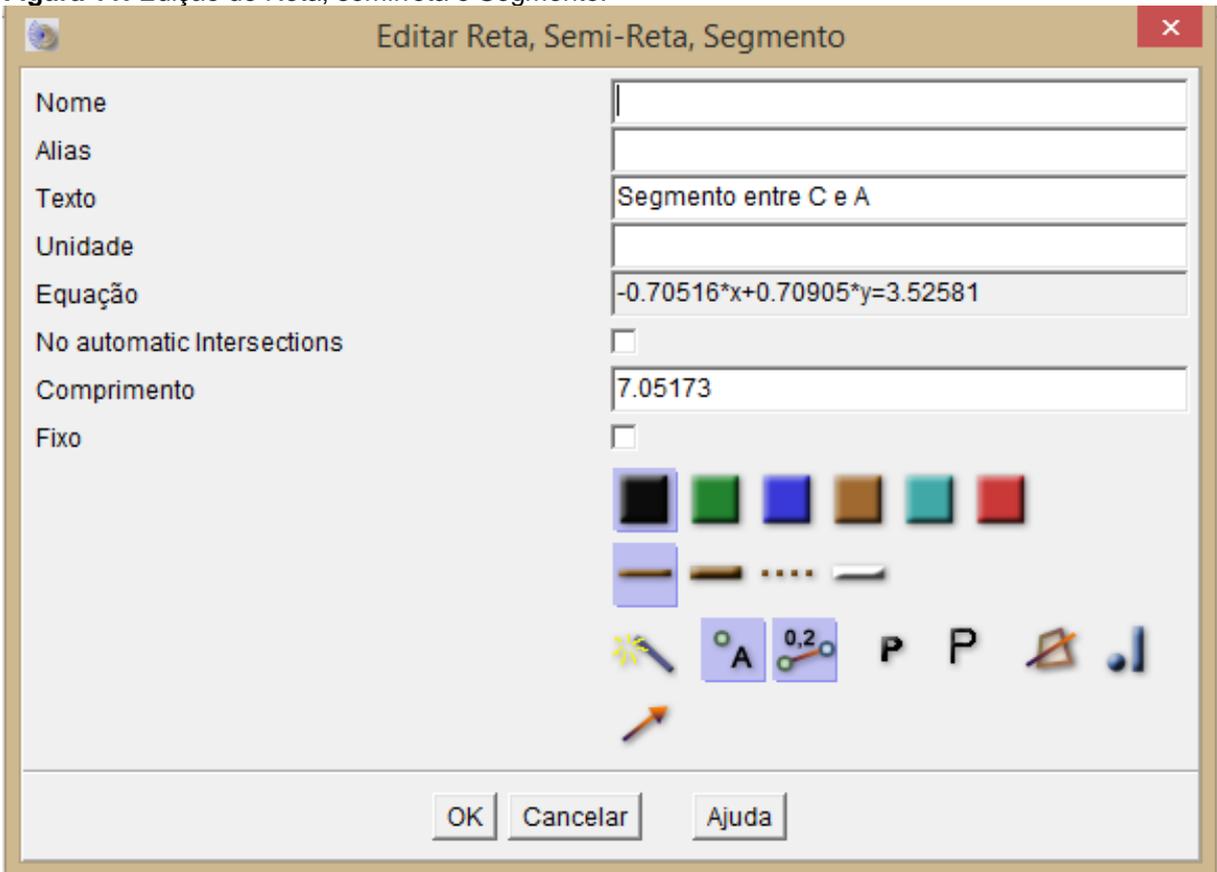


Fonte: Construções do pesquisador.

Nesse menu poderá ser realizada a mudança de cor, tornar os objetos (retas, segmentos de reta e semirreta) pontilhados ou contínuos, assim como é possível identificar os eixos em que estão localizadas os vértices das figuras, a descrição de onde está localizado a reta, segmento de reta ou ponto, a nomeação dos itens comentado e mudança dos localizadores das figuras (ponto, reta, quadrado,...)

Neste mesmo sentido de edição do ponto, segue o do segmento de reta com funcionalidades semelhantes ao processo de edição. Bastando clicar com o lado direito do mouse em cima do segmento que aparecerá uma tela de edição, assim como segue:

**Figura 11:** Edição de Reta, semirreta e Segmento.



Fonte: Construções do pesquisador.

Nessa tela de edição poderá ser realizada toda a edição da reta, semirreta ou segmento, assim como exibir a distância entre dois pontos e entre duas retas.

O software Régua e Compasso apresenta algumas ferramentas que são diferenciais em relação a outros softwares, como a Ferramenta de desenhar *círculos de forma parcial* .

Para que esta ferramenta de formação parcial funcione, é necessário o uso da circunferência, pois ambos funcionam em conjunto. Diante do exposto para que a ferramenta *círculos de forma parcial* funcione necessita que a circunferência esteja ativada. Essa ferramenta é utilizada apenas para traçar arcos de circunferência.

Para traçar o arco, será necessário a construção de dois pontos arbitrários para que seja inicialmente formada a circunferência e posteriormente ser utilizado a ferramenta de *círculos de forma parcial*, e assim ser traçada.

Outra ferramenta importante do software é a chamada de *Linhas parciais*. Para utilizar a ferramenta linhas parciais é necessário ativar ambas, exemplo: *reta* e *linhas parciais*, neste mesmo procedimento para os demais tipos de reta.

Uma importante ferramenta do Software Régua e Compasso, é o procedimento de construção de macros, processo de criação e memorização de uma construção geométrica, considerada importante. Essa ferramenta possui o seguinte ícone *macro* localizado na barra de ícones.

Um macro é um procedimento utilizado na geometria dinâmica para memorizar uma construção geométrica que posteriormente poderá ser utilizada.

As construções geométricas realizadas na interface do software, permitem a percepção e manipulação dos objetos geométricos, manipulando seus pontos geométricos sem alterar suas propriedades geométricas.

Para realizar a animação de um ponto localizado em uma circunferência, clicar no ícone *animação de um ponto* e, posteriormente, no ponto que se quer que aconteça a animação. Em seguida, dar dois cliques sobre a representação geométrica que queira que o ponto se desloque.

A janela geométrica do software é livre para construção de figuras geométricas, livre no sentido de não ter uma regra para construção, um parâmetro ou um local para iniciar a construção e onde terminar, isso do tipo, "*construa um ponto no eixo zero do plano cartesiano*".

No caso do Software Régua e Compasso, isso não existe. Todas as construções podem ser desenvolvidas a partir de um único ponto, posicionado em sua janela geométrica.

Uma importante ferramenta do software é o recurso de arrastar, esse que trata de "agarrar e arrastar" as figuras por meio de um ponto fixo. Silva e Silva (2010 p. 3) menciona que: "É um recurso marcante no software", pois isso possibilita despertar outras propriedades geométricas e perceber se a figura geométrica foi bem

desenvolvida, não perderá as suas propriedades geométricas e nem serão alteradas ao ser arrastadas.

Para a construção de pontos, o usuário pode ter três possibilidades: A primeira seria o *ponto livre*, em que ele pode desenhar um ponto em qualquer posição da área de trabalho. A segunda seria *ponto sobre objeto*, em que o ponto construído somente pode se deslocar sobre determinado objeto geométrico. Finalmente, a terceira opção a de *ponto de interseção* em que o software cria um ponto associado à interseção de duas linhas indicadas pelo usuário.

É importante perceber que o software apresenta sempre duas formas de se construir uma mesma representação geométrica, permitindo ao usuário escolher qual delas prefere. O usuário pode recuperar as figuras já construídas por intermédio das macros ou realizar a construção diretamente em sua interface. No caso de uso de ferramenta, podem ser utilizadas as ferramentas da barra de ícones ou as funções da barra de tarefas.

Para a construção de retas paralelas, o software apresenta o ícone  de fácil encontro que está presente em sua barra de ícones. O software Régua e Compasso apresenta esse ícone em sua barra de ferramentas o que contribui para a construção da representação geométrica de retas paralelas. Para a construção de uma reta paralela a outra, basta clicar com o lado direito do mouse em cima da reta e em um ponto fora dela, para que seja gerada uma outra reta paralela a anterior. Isso pode ser desenvolvido também com reta e semirreta.

No caso de encontrar o ponto médio, é possível utilizar a ferramenta de encontro de ponto médio, representada pelo ícone  que, ao selecionar e integrar com pelo menos dois pontos, surge o ponto médio.

Vamos exemplificar o uso das ferramentas de desenho do software Régua e Compasso com a construção de um quadrado a partir de um de seus lados, o segmento AB, por exemplo. É importante destacar que existem outras maneiras de construir o quadrado.

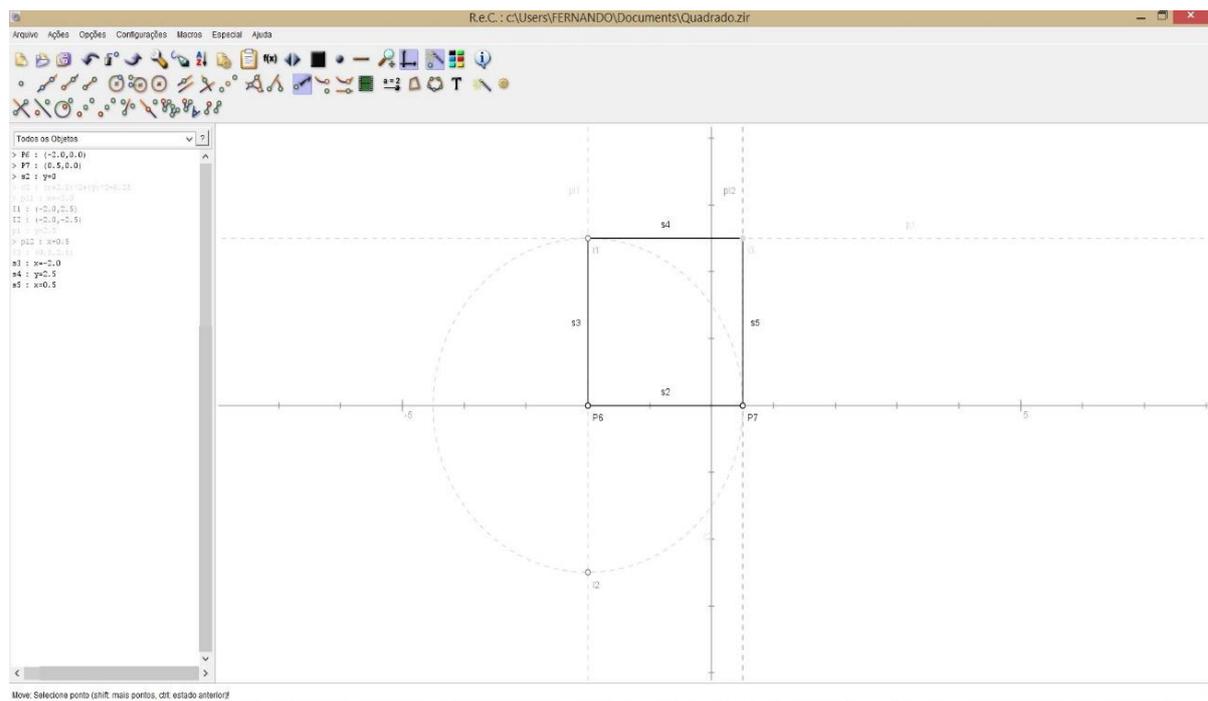
- 1) Construir a circunferência com centro em uma das extremidades do segmento e raio igual ao segmento AB. O terceiro vértice do quadrado estará na circunferência.

2) Construir uma reta perpendicular  ao ponto A (centro da circunferência, necessitando para isso apenas selecionar o ícone perpendicular e clicar no ponto A, para assim ser traçada automaticamente a reta.

3) Determinar a intersecção entre a reta perpendicular e a circunferência para assim, surgir o terceiro vértice. Para realizar esta intersecção existem duas formas, a primeira é selecionando o ícone intersecção na barra de ícones, e a outra é clicando em Ações (barra de ferramentas), *ponto*, *intersecção*. Em seguida, clicar na circunferência e na reta perpendicular ao lado do quadrado.

4) Com dois lados do quadrado já construídos, basta utilizar a ferramenta “retas paralelas” para determinar os outros dos lados.

**Figura 12:** Ferramentas para construção geométrica do quadrado.



**Fonte:** Construções do pesquisador.

Não existe uma única forma de chegar ao quadrado no Software Régua e Compasso, o software permite a construção do quadrado utilizando diferentes caminhos em virtude de existir cinco diferentes formas de construir o quadrado, como apontado por Carvalho (2005 p. 124-126).

A geometria dinâmica tem perpassado as diversas áreas da matemática, permitindo a academia testar suas hipóteses e mudar o contexto da sala de aula a partir de ferramentas que permitam a interação do aluno com ambientes virtuais.

Ponte, Brocado e Oliveira (2009 p. 83) mencionam que esses recursos têm provocado grandes avanços por parte dos alunos na sala de aula. Eles mencionam também que “[...] programas de geometria dinâmica, uma opção curricular atualmente bastante enfatizada. Esse suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal”.

Assim, é possível perceber que com esse recurso tecnológico os alunos podem ter um avanço significativo no processo de aprendizagem dos conteúdos geométricos.

O criador do Software Régua e Compasso, René Grothmann, menciona que sua criação foi realizada com o intuito de levar ao estudante possibilidades de manipular as propriedades geométricas, de forma que elas pudessem ser compreendidas, e não decoradas, como acontece muitas vezes.

Grothmann (2014 p.1) ainda menciona que a escola que existe hoje inevitavelmente terá que utilizar a tecnologia e, mais especificamente, softwares. O autor afirma que:

É claro que o software nas escolas é inevitável e necessário. É também claro que ele tem os seus problemas. A maioria deles estão relacionados ao hardware disponível e também ao software existente. Esses problemas podem ser resolvidos em um futuro muito próximo, pelos avanços tecnológicos. Mas outros problemas dizem respeito a currículos e ao próprio sistema escolar. Os testes são uma parte integrante do mesmo. Cinicamente, podemos dizer que a única competência que nossas crianças aprendem é responder a perguntas bem preparadas do teste sob pressão de tempo. O aprendizado autoguiado em equipe orientado para pesquisa tendo o computador como principal ferramenta não tem lugar neste sistema. (GROTHMANN, 2014 p.1)<sup>16</sup>

As características mais marcantes do Software Régua e Compasso que o diferenciam dos demais softwares de geometria dinâmica, e apontado por Grothmann, são:

---

<sup>16</sup> It is clear that software in schools is inevitable and necessary. It is also clear that it has its problems. Most of them are related to available hardware and also to the existing software. These problems might be resolved in a very near future by technological advances. But other problems concern the curricula and the school system itself. Tests are a central part of it. Cynically, we can say that the only competence our kids learn is to answer well prepared test questions under time pressure. A self guided, research driven team learning with the computer as the main tool has no place in this system.

- Geração automática de pontos e interseções por clique do usuário;
- Rastros automáticos, gerados pelo movimento de um ponto ao longo de um objeto;
- Curvas polares automáticas pertencentes a um conjunto de linhas;
- Pontos computados dependentes de fórmulas;
- Gráficos exportados com visualização dependendo da resolução e do tamanho da imagem;
- Transparência e outras características do objeto, dependendo das fórmulas computadas;
- Geração e apresentação de problemas de construção geométrica;
- Macro geração avançada com fórmulas e verificações de dependência;
- Geometria elíptica com o modelo de Poincaré implementado com macros;
- Exportação automática de construção em páginas da web (**GROTHMANN, 2014 p.2**)<sup>17</sup>.

Ao realizar as construções geométricas no software, torna-se possível compreender porque se torna um software amigável e implantado em muitas cidades do Brasil, para ser utilizado nas aulas de geometria.

Grothmann (2014 p.2) relata ainda que “A maioria dessas características está agora presente em outros programas”<sup>18</sup>.

O autor do Software relata também algumas limitações que o Régua e Compasso apresenta, tais como:

- [...] - Os professores estão mais interessados em Álgebra do que em Geometria agora.
- Java no navegador está morto. O sistema Android baseado em Java não pode nem mesmo exibir applets! Muita atenção foi colocada nos applets em C.a.R. em vão.
  - O C.a.R. tem suporte apenas rudimentar para 3D, usando suas características macro avançadas.
  - A interface de usuário do C.a.R. foi baseada em diálogos modais. Este problema foi sanado com o CarMetal. O seu desenvolvimento foi baseado em C.a.R., seguindo seus próprios passos agora. A interface é muito bem feita. Os arquivos não são completamente compatíveis, no entanto [...] (**GROTHMANN, 2014 p.2**)<sup>19</sup>

---

<sup>17</sup> - automatic generation of points and intersections by user click,

- automatic tracks, generated by a point moving along an object,
- automatic polar curves belonging to a set of lines,
- computed points depending on formulas,
- graphics export with preview depending on resolution and image size,
- transparency and other object features depending on computed formulas,
- generation and presentation of geometric construction problems,
- advanced macro generation with formulas and dependency checks,
- elliptic geometry with the Poincare model implemented with macros,
- automatic export of construction on web pages.

<sup>18</sup> Most of these are now present in other programs.

<sup>19</sup> - Teachers are more interested in Algebra than in Geometry now.

- Java in the browser is dead. The Java based Android system cannot even display applets! Much attention was put into applets in C.a.R. in vain.
- C.a.R. has only rudimentary support for 3D using its advanced macro features.

Muitos desses problemas têm sido resolvidos, devido ao fato de ser um software livre e por ter o código fonte aberto. Muitos pesquisadores vêm realizando intervenções, ampliando assim a área de atuação do software Régua e Compasso.

Mesmo com essas limitações, o software tem gerado bons resultados na aprendizagem escolar, como é apontada pela Rede Estadual de Educação de Curitiba, que adotou o software na educação básica (Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Para Grothmann (2014 p.2), “Software está sempre mudando. Ele vai morrendo quando novos sistemas nascem. Notavelmente, o C.a.R. foi útil ao longo de vários anos e ainda o é. Mas os novos desenvolvimentos em torno do JavaScript, dos navegadores e da rede apontam em outras direções<sup>20</sup>”. Com isso, percebemos que o software pode ser aplicado e que continua sendo muito atual e necessário para o desenvolvimento do ensino de Geometria.

Como dissemos anteriormente, nossa investigação foi uma replicação a partir do estudo realizado pelo Professor Câmara dos Santos (2001), que utilizou o software Cabri-Géomètre. Por isso, achamos importante destacar algumas diferenças entre o Cabri e o Régua e Compasso.

Esses softwares são ambos de geometria dinâmica, pertencendo a uma categoria de construções geométricas. Essas construções podem ocorrer por meio de macros e/ou inicialmente pontos geométricos.

Em relação ao Cabri-Géomètre, trata-se de um software que possui apenas versão demonstrativa, ou seja, não há versões gratuitas. Essa característica limita a sua utilização, enquanto o Software Régua e Compasso é gratuito e está disponível para download em diversos sites, além de estar traduzido em sete idiomas.

De acordo com Pereira Júnior e Souto Pereira (2004 p. 101), outra particularidade que limita o uso do Cabri, “é o fato que o programa é voltado para construções geométricas, onde ele nos fornece apenas desenhos geométricos e, apenas em alguns casos, consegue apresentar algumas equações e coordenadas dos pontos”, diferentemente do software Régua e Compasso.

---

- The user interface of C.a.R. was based on modal dialogs. This was remedied with CarMetal. Its development was based on C.a.R. going its own ways now. The interface is very nicely done. The files are not completely compatible, however.

<sup>20</sup> Software is changing. It is dying when new systems are born. Remarkably, C.a.R. was useful over so many years and it still is. But the new developments around JavaScript, the browsers, and the net point into other directions.

Ainda de acordo com Pereira Júnior e Souto Pereira (2004 p. 1102), “O Régua e Compasso tem a possibilidade de trabalhar com funções, ou seja, ele engloba tanto o desenho quanto as funções matemáticas representativas da figura geométrica construída. Isso garante ao usuário a verificação e constatação de como se desenvolve a construção geométrica e quais as funções que estão atreladas a localização de cada uma das unidades de registros da figura”.

## 5. Construtos Geométricos da Pesquisa

Este capítulo aborda o estudo dos quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo, trapézio, paralelogramo e losango). No entanto será tratada também a construção do triângulo, em virtude de ser uma figura que muito aparece na construção dos alunos de 6º ano, sendo importante para o trabalho com os quadriláteros. Antes, achamos importante iniciar com uma pequena discussão sobre o trabalho com a geometria escolar.

O estudo da geometria está ligado a diversas áreas de conhecimento, é possível perceber que a geometria está em tudo. Lima e Pitombeira (2010 p. 137) mencionam que:

Como todo saber humano, ele nasce e se desenvolve em um processo de interação com o contexto social. Hoje sabemos que as grandes civilizações antigas – chinesa, hindu, mesopotâmica, egípcia – possuíam muitas informações de natureza geométrica. E as aplicavam! Sabiam construir figuras planas e espaciais, conheciam relações entre as grandezas geométricas, calculavam comprimentos, áreas e volumes. (**LIMA e PITOMBEIRA**, 2010 p. 137).

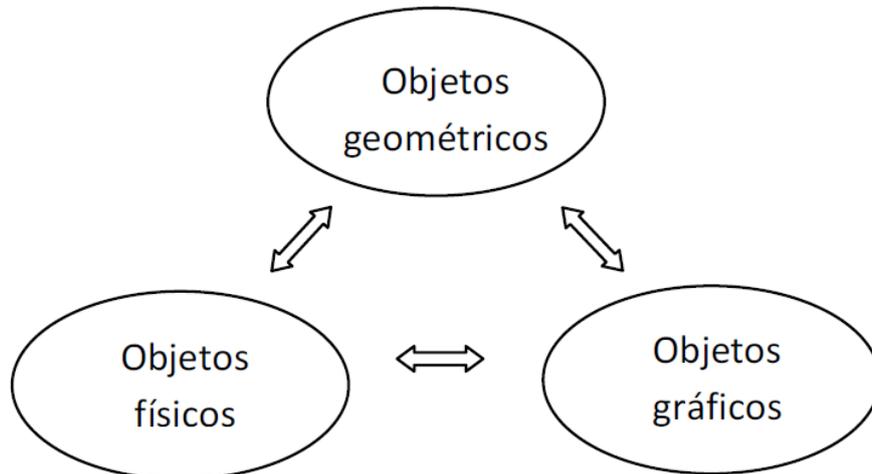
Nesse contexto percebe-se como era conduzido o ensino, levando os estudantes a construir os conceitos, a perceber a sua importância, a sua aplicação, suas correlações com outras áreas de conhecimento.

Lima e Pitombeira (2010 p. 140) chama atenção para as formas de condução do professor com os alunos com o concreto e o abstrato:

Professor, ao iniciar o estudo da geometria com seus alunos, procure valorizar a movimentação corporal, além de possibilitar o manuseio e a visualização de objetos do mundo físico. São também importantes as atividades que envolvam as representações gráficas – desenhos e imagens – desses objetos. (**LIMA e PITOMBEIRA**, 2010 p. 140).

Lima e Pitombeira (2010), demonstram essa relação da seguinte forma:

**Figura 13: Objetos Geométricos**



Fonte: BRASIL, 2010, p.140),

Nessa relação entre os objetos geométricos, os objetos físicos e os objetos gráficos, existe uma forte relação que desperta as seguintes proposições: Como o aluno desenvolve essa relação do abstrato com o objeto geométrico em jogo, sendo trabalhado pelo professor? Como se dá a passagem do meio (objeto) utilizado pelo professor para a concretização do pensamento geométrico? Esses são alguns questionamentos que mesmo existindo um desenvolvimento processual de construção, necessita de uma relação muito forte com a linguagem que está sendo empregada.

Assim, Lima e Pitombeira (2010 p. 141) mencionam que:

A passagem do físico, perceptível e palpável, para o abstrato, é um dos objetivos centrais do ensino e da aprendizagem da geometria, e isso nunca deve ser perdido de vista. Convém observar que os objetos gráficos – desenhos, imagens, diagramas, ícones – constituem-se em um importante nível intermediário de abstração entre os objetos físicos e as entidades puramente matemáticas. (LIMA e PITOMBEIRA, 2010 p. 141).

Nessa perspectiva, é possível fazer um trabalho de condução dos alunos a uma realidade que os faça desenvolver os mecanismos de construção do conhecimento geométrico, e não a ser decorado.

Essa preocupação com a construção do conceito geométrico relacionando o espaço físico, o abstrato, o gráfico existe devido às propriedades geométricas exigirem que a escola possa perceber que não é simplesmente uma questão de convenção, mas que durante as construções geométricas o aluno utiliza os diversos sentidos para poder entender e correlacionar as figuras.

Nesse aspecto, Lima e Pitombeira (2010 p. 145) discutem a importância da construção do pensamento geométrico por meio da visualização e tratam que “[...] as percepções provenientes dos movimentos e dos sentidos do tato e da visão cumprem uma função fundamental na constituição de nosso pensamento geométrico”.

Nessa dimensão de construção do pensamento geométrico, os autores (2010 p. 146) mencionam que existem duas capacidades estreitamente independentes para que ocorra essa construção:

De um lado, captar e interpretar as informações provenientes do mundo que nos cerca e que são mediadas pela visão humana, bem como constituir imagens mentais e ideias baseadas nessas informações. Por outro lado, traduzir as imagens mentais e as ideias em objetos visíveis. De forma simplificada, podemos dizer que a primeira é a capacidade de **ver** os objetos (físicos ou gráficos), o movimento e o espaço físico e de **gerar imagens mentais**. (LIMA e PITOMBEIRA, 2010 p. 146).

No processo de captação das informações pelo aluno, para que possa realizar uma interpretação em acordo com o mundo, permite enxergar diversas relações e correlações do mundo com as visões humanas. Dessa forma, a construção de mapas mentais por parte dos alunos, os conduzirá a um universo de construção do abstrato, só que agora com compreensão.

Nessa perspectiva, os autores mencionam que “A segunda capacidade é a de **tornar visíveis** nossas ideias e imagens mentais, por meio de objetos físicos ou de representações gráficas. ”

Assim, quando as aulas são conduzidas num formato que leve os alunos a construir o conceito, permite a cada um deles avançar incondicionalmente a níveis de aprendizagem.

O estudo da geometria tem fundamental importância para a educação, principalmente por ser um campo que permite compreender o espaço que nos cerca e como se dá a sua formação. Segundo Bicudo e Kluth (2010),

Na percepção do espaço que se dá na intuição de experiências vividas no cotidiano do mundo-vida, o espaço não é percebido como uma unidade, pois esta é fruto de uma elaboração lógica. A lógica não é fundamentação da percepção do espaço, mas a intuição do espaço é importante para o processo de (re) elaboração lógica do espaço percebido (**VIRGINIA BICUDO e SPERIDIÃO KLUTH**, 2010 p. 133).

Entretanto, ainda hoje pouca atenção é dada ao trabalho com a geometria na sala de aula. De acordo com Almouloud (2003 p.125), “Na prática, vem sendo dado à geometria menos atenção do que ao trabalho com outros temas e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o ensino de medidas”. É importante considerar que a geometria é uma das várias partes da matemática, tanto como objeto de estudo quanto como instrumento necessário ao desenvolvimento de outras áreas.

Buscando superar essa dificuldade, surgem os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL), 1998 que iniciaram um processo de norteamento para o ensino de diversas áreas da educação básica. De acordo com os PCN (1998 p. 51)

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (**BRASIL**, 1998 p. 51)

Na mesma direção surgem os Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco, compostos pelos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PCPE), Parâmetros de Sala de Aula (PSA) e Parâmetros de Formação Docente (PFD). De acordo com estes documentos, seu objetivo seria de “auxiliar o professor na elaboração, execução e avaliação de seu projeto de ensino” (**PERNAMBUCO**, 2013, p.15).

Assim, para o ensino de geometria no 6º do Ensino Fundamental, etapa de escolarização dos sujeitos de nossa investigação, o documento orienta que as expectativas de aprendizagem nessa fase são:

“Diferenciar polígonos de não polígonos; classificar polígonos como regulares e não regulares; reconhecer e nomear polígonos, considerando o número de lados (triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono, octógono etc.; identificar elementos de prismas e pirâmides (vértices, arestas e faces) ” (Pernambuco, 2013 p.32).

Os Parâmetros de sala de aula apresentam algumas orientações de como pode ser realizado o trabalho com a geometria em sala de aula. As orientações apresentam que:

É importante que inicialmente, o professor retome os conteúdos abordados nos anos anteriores, com o intuito de verificar as aprendizagens que o estudante já traz...O trabalho com as figuras geométricas planas deve vir associado ao trabalho com as figuras geométricas espaciais...É importante nomear as figuras geométricas, para facilitar a expressão de ideias...Em outro momento, o trabalho com as figuras geométricas espaciais pode explorar a planificação dos sólidos, desmontando e remontando as caixas...O trabalho com os sólidos geométricos, em uma próxima etapa, pode levar o estudante a construir maquetes com as caixas - casas, edifícios -, permitindo a identificação das figuras geométricas espaciais ao nosso redor, articulando, ainda com noções de proporcionalidades...A socialização das ideias, debates e exposição de todos os trabalhos e atividades realizadas é de fundamental importância em todo o processo de aprendizagem (Pernambuco, 2013 p. 32).

Além desses documentos, a proposta contempla também os Parâmetros de Formação Docente (PFD), que apresenta o que o professor precisa saber para um efetivo trabalho em sala de aula. Esse documento traz uma importante contribuição para o aprendizado das figuras geométricas na sala de aula e, particularmente, da representação dos quadriláteros, objeto de nossa investigação. Segundo os PFD, é importante que o aluno tenha possibilidade de:

Reconhecer que o retângulo se caracteriza por possuir seus quatro ângulos retos; o losango por possuir seus quatro lados congruentes (com a mesma medida) e o quadrado, por possuir seus quatro ângulos retos e seus quatro lados congruentes (com a mesma medida), sendo, portanto, um retângulo e um losango, ao mesmo tempo (PERNABUCO, 2014 P. 179).

Assim, percebe-se a necessidade de não só saber fórmulas, mas de principalmente construir os conceitos geométricos e assim poder reconhecer e aplicar suas propriedades. Os PFD (PERNAMBUCO, 2014 p. 181) mencionam ainda que o desenvolvimento dos conhecimentos pode ocorrer por meio de alguns mecanismos, tais como o uso de softwares de geometria dinâmica, apontando que “O uso de software de geometria dinâmica (como, por exemplo, Geogebra e o Tabulae) facilita

a compreensão, na medida em que as construções somente serão mantidas, se forem realizadas tomando por base suas propriedades”.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009 p. 82), “por todo o mundo têm vindo a ser perspectivadas recomendações curriculares para o ensino da geometria”.

Dessa forma, percebe-se que a aprendizagem é conduzida por meio de parâmetros relacionados entre o docente e o aluno, tudo num processo relacional. Câmara dos Santos (1997, p. 114) menciona que:

Uma das características da relação professor/aluno, no que concerne ao conhecimento é, justamente, a diferença entre eles dois na “cronogênese” do conhecimento em sala de aula, ou seja, o professor é aquele que sabe antes do aluno, que já sabe, que sabe mais (CÂMARA DOS SANTOS, 1997, p. 114).

Entende-se que nessa relação o desenvolvimento é inevitável, por mais curto que seja. O olhar está cada vez mais voltado para o aluno e o professor, pois o foco é que tenha cada vez mais qualidade no ensino e que tenha como consequência, a aprendizagem.

Isso vem ocorrendo devido à necessidade de ter um ensino com qualidade e melhores resultados na aprendizagem pelos alunos. Essa área de conhecimento da matemática é de fundamental importância à sociedade, tendo em vista que todos os dias nos servimos dela como segunda linguagem.

A seguir trataremos das figuras geométricas exploradas em nossa investigação.

### **Ponto, reta, plano.**

Não existem definições para esses conceitos, ou seja, não se definem. Modelamento de um ponto podem ser a marca que a ponta de um lápis faz numa folha de papel e a intervenção de dois segmentos de reta transversais.

A reta é um conceito primitivo da geometria, isto é, um conceito sem definição. Podemos interpretar uma parte da reta no mundo físico como a reta de uma mesa, um raio de luz, etc.

Da mesma forma que se atua sobre o ponto, podendo-se imaginar uma reta como sendo um fio de cabelo, uma linha de costurar, bem fininha.

E o plano também é um conceito primitivo. Porém existe a possibilidade de exemplificar com a superfície de um rio, do lago.

No mundo físico como parte de um plano como a superfície de uma mesa, e etc.

**Figura 14:** Representação geométrica do ponto, reta e plano.

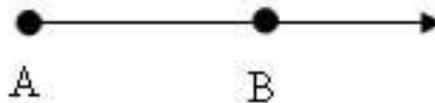


Fonte: Arquivo pessoal.

Nessa representação, o ponto é nomeado por letra maiúscula, a reta por letra minúscula e o plano por letras do alfabeto grego.

Diferentemente da reta, que não tem ponto de origem, uma semirreta tem origem em um ponto definido passando por outro.

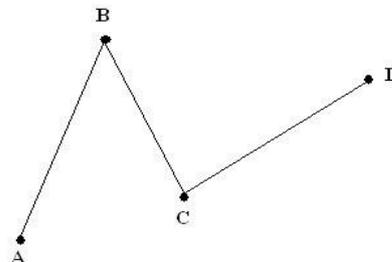
**Figura 15:** Semirreta



Fonte: Arquivo pessoal.

Abaixo temos a representação de um segmento de reta.

**Figura 16:** Linha poligonal

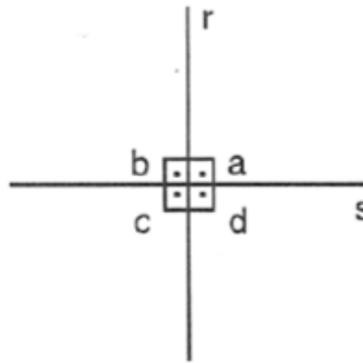


Fonte: Arquivo pessoal.

## Perpendicularidade

Dizemos que dois segmentos ou duas semi-retas são **perpendiculares** se, e somente se, formam quatro ângulos retos. Dessa forma, podemos dizer também que, nesse caso, cada uma delas é perpendicular à outra; pode-se indicar  $r \perp s$  ou  $s \perp r$ .

**Figura 32:** Perpendicularismo.

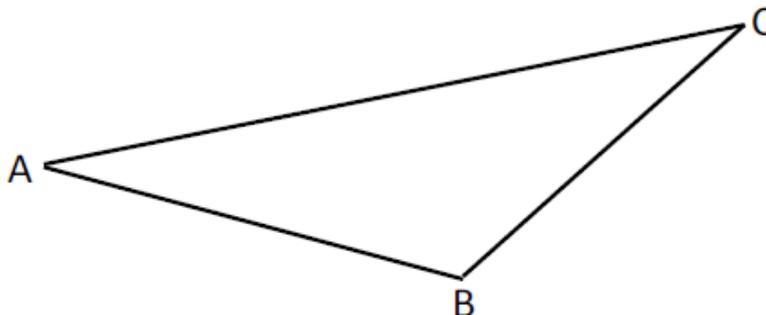


Fonte: Arquivo pessoal.

## Estudo do triângulo.

De acordo com Lima e Pitombeira (2010 p. 155), o triângulo é definido da seguinte forma: “Tomamos três pontos A, B e C, que não pertençam a uma mesma reta e os ligamos pelos três segmentos de reta AB, BC e CA. A reunião dos três segmentos é o que se chama um triângulo”.

**Figura 17:** Representação do triângulo



Fonte: Fonte: BRASIL, 2010, p.156),

Dessa forma, os autores definem que:

Sabemos que os pontos A, B e C são os vértices do triângulo e os segmentos de reta AB, BC e CA<sup>21</sup> são seus lados. Se imaginarmos as semirretas determinadas pelos **lados** do triângulo, obtemos o que se chamam os **ângulos** internos do triângulo, os quais, muitas vezes, denominamos, para simplificar, ângulos do triângulo. Para designar o triângulo exemplificado podemos escrever: triângulo ABC. Mas, é igualmente válido designá-lo utilizando os símbolos: BCA; CAB; ACB; CBA; e BAC. (LIMA e PITOMBEIRA, 2010 p. 156).

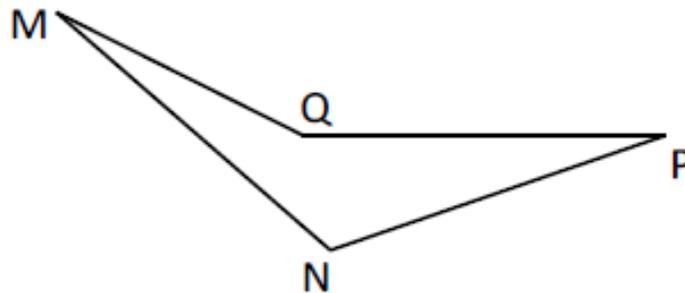
Dessa forma, é possível perceber que é necessário respeitar as propriedades.

## Quadriláteros

Para realizar a construção dos quadriláteros, Lima e Pitombeira (2010 p. 155), mencionam que para ser um quadrilátero deve-se:

Consideremos quatro pontos arbitrários em um plano, por exemplo, A, B, C, D, com a condição de que três quaisquer deles não estão em uma mesma reta. Chamamos quadrilátero ABCD<sup>22</sup> ao conjunto de pontos que estão nos segmentos de reta AB, BC, CD e DA. (LIMA e PITOMBEIRA, 2010 p. 156).

**Figura 18:** Representação de um quadrilátero.



**Fonte:** Fonte: BRASIL, 2010, p.156),

<sup>21</sup> Convém observar que um segmento de reta AB é o conjunto de pontos da reta definida pelos pontos A e B, constituído por A, B e todos os pontos entre A e B. Desta maneira, não importa a ordem dos pontos na representação do segmento. Em outras palavras, o segmento AB é o mesmo que o segmento BA. Se quisermos levar em conta a ordem desses pontos, temos um novo conceito: segmento de reta orientado, que não será considerado neste texto.

<sup>22</sup> Levando em conta a nota de rodapé do triângulo, convém observar que podemos também designar este quadrilátero por outras seqüências apropriadas dos símbolos A, B, C e D.

Os quadriláteros são divididos em nove tipos. O primeiro é o quadrado, possuindo lados iguais e ângulos retos; a segunda figura é o losango que possui os lados iguais entre si; o terceiro é o retângulo com quatro ângulos retos; O quarto é o paralelogramo, com dois pares de lados opostos paralelos entre si, O quinto é o trapézio possuindo dois lados opostos que são paralelos entre si.

Lima e Pitombeira (2010 p. 157) mencionam que:

Quando adotamos os critérios citados, que são os adotados na matemática mais avançada, podemos dizer que todo quadrado é, também, losango, retângulo, paralelogramo e trapézio. Em tal classificação, todo paralelogramo é, também, trapézio.

No entanto, no Ensino Fundamental é muito comum, e justificável, serem adotadas outras caracterizações:

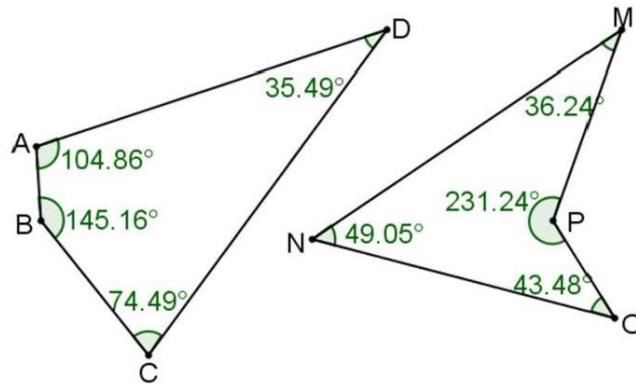
- quadrados – os lados são iguais entre si e os ângulos são retos;
- losangos – os lados são iguais entre si e os ângulos não são retos;
- retângulos – os ângulos são retos e há dois lados desiguais;
- paralelogramos – os dois pares de lados opostos são paralelos entre si;
- trapézios – apenas dois lados opostos são paralelos entre si. **(LIMA e PITOMBEIRA, 2010 p. 157).**

Os autores mencionam ainda que “[...] nesta última classificação, um quadrado não é retângulo, nem losango. Tampouco um paralelogramo é trapézio. Mas o professor não deve ficar confuso com essas possibilidades de diferentes definições. O importante é procurar manter a coerência interna, após fazer sua escolha, para não dificultar a aprendizagem do aluno. ”

Sendo assim, a construção sendo feita pelo aluno e ficando bem conduzida, permitirá levá-lo a produzir com qualidade o aprendizado e assim poder entender e saber como aplicar.

Sendo assim, Moura (2013 p. 18) define o quadrilátero como “Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos AB, BC, CD, e DA interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero. ”

**Figura 19:** Representação dos Quadriláteros



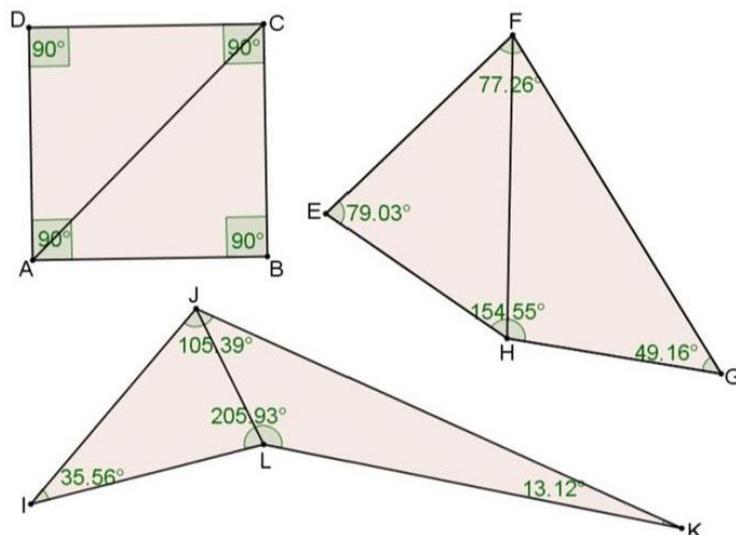
**Fonte:** Moura, 2013 p. 18.

A soma das medidas dos ângulos internos de cada um dos respectivos quadriláteros, ABCD e MNOP é  $360^\circ$ .

Uma das definições dos quadriláteros é apontada por Menezes (2004 p.44) que é muito encontrada nos livros didáticos é:

Dois lados de um quadrilátero são opostos, se não se interceptam. Dois ângulos são opostos, se não têm em comum um lado do quadrilátero. Dois lados são consecutivos, se têm um extremo comum. Dois ângulos são consecutivos, se têm em comum um lado do quadrilátero. Uma diagonal de um quadrilátero é um segmento determinado por dois vértices não consecutivos. (BESSA, 2004 p. 44).

**Figura 20:** Representação da soma dos ângulos internos de um quadrilátero.



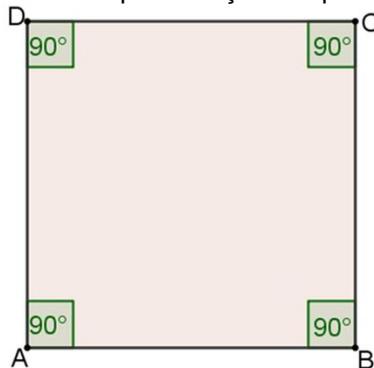
**Fonte:** Moura, 2013 p. 18.

Essas propriedades podem ser desenvolvidas tanto por meio da manipulação de objetos físicos quando por meio do software. No caso de ser construída no software é possível perceber outras variáveis e despertar novos aprendizados.

### Estudo do quadrado.

**Definição:** Um quadrilátero plano convexo (não definido) é um quadrado se, e somente se, possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes.

**Figura 21:** Representação do quadrado.



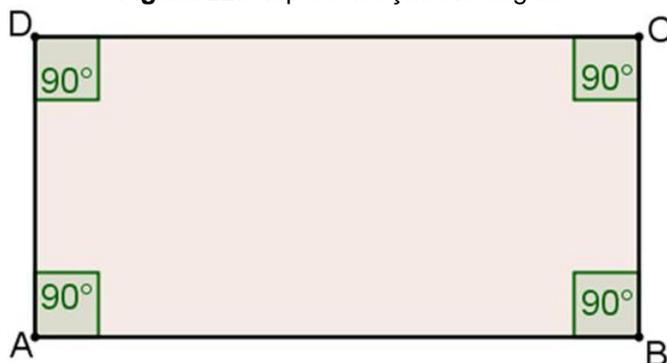
Fonte: Moura, 2013 p. 18.

Ou, ABCD é um quadrado  $\leftrightarrow AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$  e  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$ .

### Estudo do retângulo.

**Definição:** Um quadrilátero plano convexo (não definido) é um retângulo se, e somente, possui os quatro ângulos congruentes.

**Figura 22:** Representação Retângulo



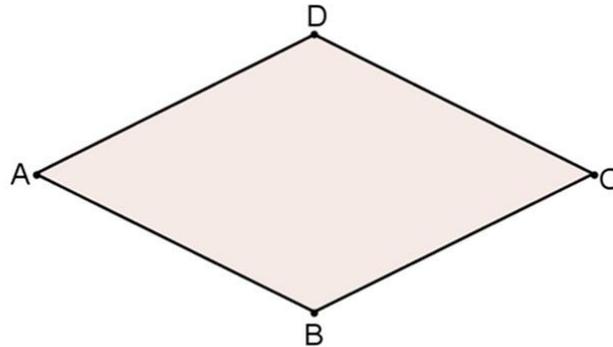
Fonte: Moura, 2013 p. 27.

Em outras palavras, ABCD é um retângulo  $\leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$ .

### Estudo do losango.

**Definição:** Um quadrilátero plano convexo (não definido) é losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.

**Figura 23: Representação do Losango**



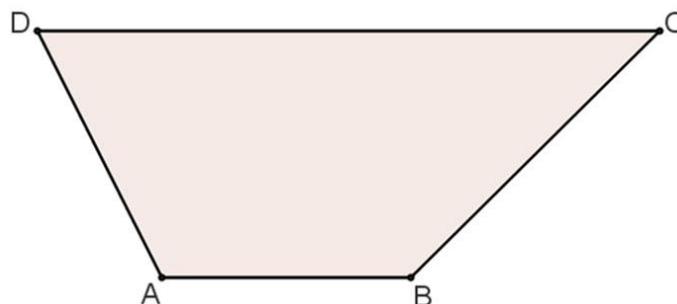
**Fonte:** Moura, 2013 p. 29.

Ou, ABCD é losango  $\leftrightarrow AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ .

### Estudo do trapézio.

**Definição:** Um quadrilátero plano convexo (não definido) é um trapézio se, e somente se possui apenas dois lados paralelos.

**Figura 24: Representação do Trapézio.**



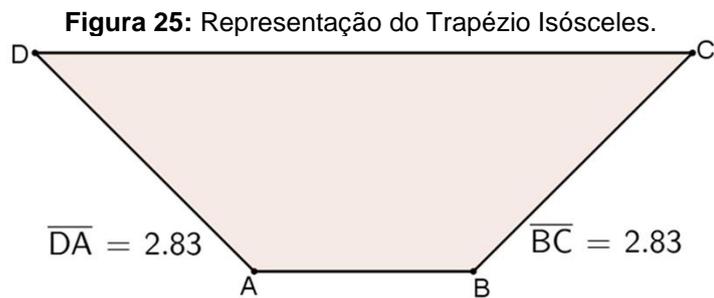
**Fonte:** Moura, 2013 p. 20.

Dessa forma, conclui-se que, se  $AB \parallel DC$  ou  $AD \parallel CB$ , então ABCD é um trapézio.

No entanto o trapézio é dividido em três tipos, isósceles, escaleno e retângulo.

### Trapézio isósceles:

Seja ABCD um quadrilátero em que  $AB \parallel DC$ , então ABCD é um trapézio.  
Se  $AD = BC$ , então ABCD é um trapézio isósceles. Temos ainda que se  $AB \parallel DC$  e  $AD = BC$ , então  $\widehat{DAB} \equiv \widehat{CBA}$  e  $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BCD}$ .

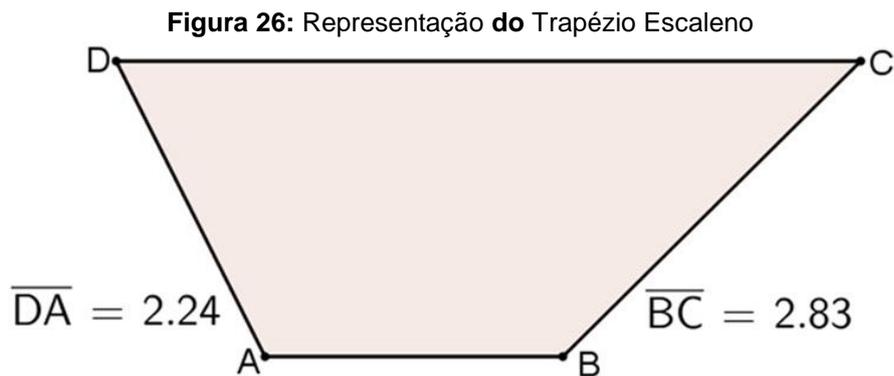


Fonte: Moura, 2013 p. 20.

### Trapézio escaleno.

Lados não paralelos não são congruentes.

Seja o trapézio ABCD, se  $AD \neq BC$ , então ABCD é um trapézio escaleno.

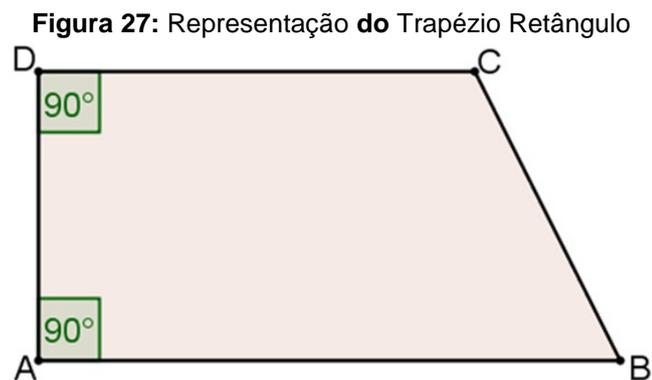


Fonte: Moura, 2013 p. 21.

### Trapézio retângulo.

Possui dois ângulos retos.

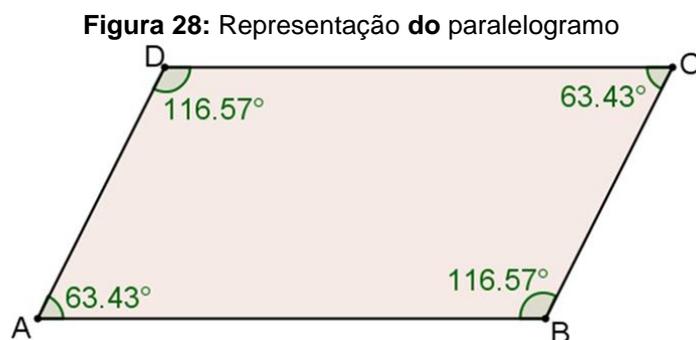
Seja  $ABDC$  um trapézio cujas bases são  $AB$  e  $CD$  e cuja medida dos ângulos  $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ , então  $ABCD$  é um trapézio retângulo.



Fonte: Moura, 2013 p. 21.

### Estudo do paralelogramo.

**Definição:** Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui lados opostos paralelos.



Fonte: Moura, 2013 p. 21.

Ou seja,  $ABCD$  é um paralelogramo  $\leftrightarrow AB \parallel CD$  e  $AD \parallel BC$ .

### Ponto médio.

De acordo com Moura (2013), um segmento de reta possui diversos pontos alinhados sobre um único segmento, porém, apenas um deles irá dividir o segmento em duas partes iguais.

**Figura 29:** Ponto médio de um segmento



Fonte: Moura, 2013 p.22.

O segmento de reta AB possui como ponto médio, o ponto M, dessa forma dividindo-o ao meio.

### Mediatriz.

Chama-se mediatriz de um segmento AB a reta  $m$  perpendicular à AB passando pelo seu ponto médio. Na figura, sendo  $AM = MB$  e  $m \perp AB$ , a reta  $m$  é mediatriz de AB.

Dizemos, neste caso, que cada um dos pontos A e B é simétrico do outro em relação à reta  $m$ .

**Figura 30:** Mediatriz



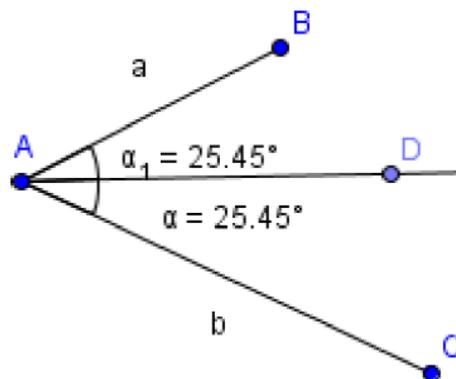
Fonte: Arquivo pessoal.

Para isso é necessário que, seja desenvolvido um segmento e cortado por outro para projetar um ângulo de  $90^\circ$ .

### Bissetriz de um ângulo.

Chama-se bissetriz de um ângulo a semirreta no interior do ângulo no ângulo, de origem em seu vértice, que o divide em dois ângulos congruentes. E, ainda, a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos lados do ângulo. Na figura a semirreta AD é bissetriz do ângulo A.

Figura 31: Bissetriz de um ângulo.



Fonte: Arquivo pessoal.

## 6. Aspectos teórico metodológico

Este capítulo aborda os procedimentos metodológicos desenvolvidos para realização da pesquisa, bem como sua qualificação quanto ao tipo, a forma de abordagem e o campo da sua aplicabilidade, o objetivo, as ferramentas e estratégias utilizadas para captar e desenvolver a estrutura dos dados encontrados. Também será apresentado o público alvo da pesquisa e o percurso de análise dos dados.

De acordo com Deslandes (2013 p. 14)

Entendemos por metodologia o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade. Ou seja, a metodologia inclui simultaneamente a teoria da abordagem (o método), os instrumentos de operacionalização do conhecimento (as técnicas) e a criatividade do pesquisador (sua experiência, sua capacidade pessoal e sua sensibilidade). A metodologia ocupa um lugar central no interior das teorias e está referida a elas (DESLANDES, 2013 p. 14).

Assim, entende-se que a construção do método pode se dar de forma diretiva, porém esquematizada para que possa ser seguida. No entanto, a metodologia depende da elaboração coerente das técnicas, mais do que isso, o processo de busca para encontrar respostas aos objetivos depende da criatividade constante do pesquisador em coletar e tratar esses dados.

Nessa visão de procedimentos metodológicos a pesquisadora, Edelwiss Bujes (2007 p. 19) menciona que “A opção por tratar de determinadas questões, segundo um enquadramento teórico específico, circunscreve possibilidades, indica caminhos, acaba por orientar as direções da investigação”. Percebe-se que isso permite ao pesquisador criatividade, que tenha a possibilidade de enxergar novos caminhos para dar conta de processos, que satisfaça ao problema e atenda o lócus da pesquisa.

Dessa forma, a metodologia dessa pesquisa passa por um olhar reflexivo que discute a teoria de Van Hiele, numa perspectiva da ação, formulação, validação e institucionalização da sequência didática desenvolvida pelos alunos.

De acordo com Lüdke (2009 p. 57),

A prática reflexiva resulta da visão que integra e relaciona os aspectos objetivos e subjetivo. Com a mudança das condições objetivas, altera-se o modo como algo é interpretado e conseqüentemente a maneira como as pessoas agem no mundo

externo (objetivo), evidenciando um processo dinâmico de reflexão e autoreflexão. (LÜDKE, 2009 p. 57).

O método utilizado nessa pesquisa ficou definido com uma pesquisa qualitativa e exploratória, pois trata-se de diversos olhares sendo investigados num processo de construção didática dos alunos do 6º ano.

Na busca por entender a coerência que deve existir da pesquisa com os dados, o método empregado e a relação com a teoria, Plaisance e Vergnaud (2003 p. 36) mencionam que “A orientação classificatória precedente causa o risco de insistir na cisão das perspectivas adotadas sobre os fatos educativos. Sem nenhuma dúvida consciente desse tipo de dificuldade, o mesmo autor analisa, simultaneamente, o que faz a unidade das ciências da educação”. Ou seja, numa perspectiva de identificar as variáveis foco da pesquisa, que possam identificar como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos, percebe-se que no processo de classificação, ocorre a preocupação com o método utilizado, sendo um risco para o problema e objetivo da pesquisa.

De acordo com Deslandes (2013 p. 16),

Entendemos por pesquisa a atividade básica da ciência na sua indagação e construção da realidade. É a pesquisa que alimenta a atividade de ensino e a atualiza frente à realidade do mundo. Portanto, embora seja uma prática teórica, a pesquisa vincula pensamento e ação. Ou seja, nada pode ser intelectualmente um problema, se não tiver sido, em primeiro lugar, um problema da vida prática. (DESLANDES, 2013 p. 16).

Para Triviños (1928) e Martins Junior (2013), a pesquisa qualitativa faz parte de um processo fenomenológico que investiga situações empíricas e que não delimita uma ordem para poder chegar a um denominar de resultados. Porém, utiliza diversas ferramentas para que isso ocorra.

De acordo com Triviños (1928 p. 117),

“As posições qualitativas baseiam-se especialmente na fenomenologia e no marxismo. Por isso, em geral podemos distinguir dois tipos de enfoques na pesquisa qualitativa, que correspondem a concepções ontológicas e gnosiológicas específicas, de compreender e analisar a realidade”: *Os enfoques subjetivas-compreensivistas*, [...] que privilegiam os aspectos conscienciais, subjetivos dos atores (percepções, processos de conscientização, de compreensão do contexto cultural da realidade que eles têm para o sujeito. *Os enfoques crítico-participativos com visão histórico-estrutural* – dialética da realidade social que parte da necessidade de conhecer (através de percepções, reflexão e intuição) a realidade para transformá-la em processos contextuais e dinâmicos complexos [...]. (TRIVIÑOS, 1928 p. 117)

As origens e os métodos desse tipo de pesquisa remontam, de acordo com Gatti e André (2011 p. 29), “aos séculos XVIII e XIX quando vários sociólogos, historiadores e cientistas sociais, insatisfeitos com o método de pesquisa das ciências físicas e naturais que servia de modelo para o estudo dos fenômenos humanos e sociais” Percebe-se que, dessa forma, a pesquisa qualitativa surge para contribuir com os estudos sociais e com foco em características fenomenológicas.

Com essa possibilidade de método de pesquisa, os países da Europa deram início ao estudo dos fenômenos educacionais e sociais que surgiam à medida que se investigava e se observava os fenômenos surgirem.

Posterior a Europa, o Brasil deu início também à utilização do método qualitativo, porém é importante lembrar que *ibidem* “[...] influência dos estudos desenvolvidos na área de avaliação de programas e currículos [...] (p.31)”. Assim percebe-se que a aplicação desse método permite enxergar e descobrir concepções, esclarecer fenômenos e responder questionamentos que ainda não se obteve resposta.

Compreende-se nessa pesquisa que a utilização desse método contribui para entender realidades que não são percebidas por quem está inserido.

Deslandes (2013 p. 21) menciona que:

A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela ocupa, nas Ciências Sociais, com um nível de realidade que não pode ou não deveria ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes. Esse conjunto de fenômenos humanos é entendido aqui como parte da realidade social, pois o ser humano se distingue não só por agir, mas por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e a partir da realidade vivida e partilhada com seus semelhantes. (DESLANDES, 2013 p. 21).

De acordo com Bauer e Gaskell (2008 p.23) [...] a pesquisa qualitativa evita números, lida com interpretações das realidades sociais, e é considerada pesquisa *soft*<sup>23</sup>.”.

Com esse método é possível identificar, não só as variáveis didáticas em jogo como também as estratégias (foco da pesquisa) que os alunos utilizaram para realizar as construções geométricas.

---

<sup>23</sup> Flexível.

Lüdke e André (2013 p. 3) mencionam que a pesquisa qualitativa está “situada entre as ciências humanas e sociais, o estudo dos fenômenos educacionais não poderia deixar de sofrer as influências das evoluções ocorridas naquelas ciências”.

Assim, observa-se que o fenômeno investigado nessa pesquisa, pertence a uma classe qualitativa que permite enxergar as diversas variáveis didáticas presentes na situação dialética da pesquisa.

Creswell (2010 p. 207) menciona que “A investigação qualitativa emprega diferentes concepções filosóficas; estratégias de investigação; e métodos de coleta, análise e interpretação dos dados”. Devido a permitir a utilização de diversas ferramentas e estratégias para identificar o que se deseja com a pesquisa é que se utilizou nessa pesquisa o método qualitativo.

O autor ainda menciona que [...] os procedimentos qualitativos baseiam-se em dados de texto e imagem, têm passos singulares na análise dos dados e se valem de diferentes estratégias de investigação”. Com essa visão, é possível que o pesquisador possa ousar em seus métodos de captação de dados, criando possibilidades de entender as verdadeiras vertentes da pesquisa que estão entrelaçadas com os objetivos e variáveis, além de poder compreender os diferentes insumos coletados.

Bicudo (2011 p. 24) salienta que a pesquisa qualitativa, “admite um leque diversificado de procedimentos, sustentados por diferentes concepções de realidade e de conhecimento”. Esses procedimentos da pesquisa qualitativa, se desenvolve a medida do aprofundamento teórico científico. Ao longo da metodologia, está exposto esse funcionamento.

O método qualitativo se divide em algumas fases, o que permite construir o *corpus* metodológico de forma coerente, objetiva e clara.

De acordo com Weller e Pfaff (2011 p. 44), “Primeiramente, é preciso afirmar que existe uma forte relação entre os pressupostos teóricos e metodológicos e os modelos e métodos de pesquisa a serem adotados”. Ou seja, esse alinhamento se dá por meio da identificação das categorias conceituais que estão sendo investigadas conjuntamente com os objetivos e problema da pesquisa.

Weller e Pfaff (2011 p. 44) mencionam ainda que:

A pesquisa qualitativa percebida como forma de descoberta de teorias em formação raramente segue um modelo de pesquisa no qual a coleta de dados, a interpretação

e o conhecimento resultante da análise estejam totalmente interligados. A busca de novos dados só termina quando uma saturação teórica das constatações sobre o tema da investigação é atingido. (WELLER e PFAFF, 2011 p. 44).

No entanto, existem várias características que podem ser observadas quando a pesquisa está voltada para fenômenos: situações sociais que necessitam de observações, de questionários, vídeografia dentre outras informações necessárias a identificação de estratégias criada pelos alunos quando irão realizar alguma construção ou resolução de problema.

Lüdke e André (2013 p. 12) mencionam que a pesquisa qualitativa possui cinco características, sendo que a primeira é que: “A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural com sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento”.

Nota-se que os agentes modificadores dessa situação e identificadores dos fenômenos corrente desse cenário é o pesquisador, sendo assim um interventor e modificador do fenômeno que se observa, e isso ocorre mesmo que não esteja diretamente fazendo alguma intervenção.

A visão do pesquisador nesse momento é importante para que possam ser mapeadas as diferentes concepções que emergem durante a investigação, claro que isso não ocorre apenas na investigação. Porém, se ocorre durante a análise permite identificar e propor modificações nesse espaço investigado.

Lüdke e André (2013 p. 13) mencionam que a segunda característica é que: “Os dados coletados são predominantemente descritivos”.

Essa fase é tratada com essas características devido existir a construção de muitos relatórios, transcrições dos fenômenos observados dentre outras variáveis que surgem no decorrer dessa característica.

Lüdke e André (2013 p. 13) citam que a terceira fase: “A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto”. Nessa fase da pesquisa qualitativa, a grande preocupação do pesquisador é identificar, estudar o fenômeno, verificar o problema as variáveis que se manifestam para satisfazer aos questionamentos e assim encontrar uma solução.

Deslandes (2013 p. 26), cita que:

A fase exploratória na produção do projeto de pesquisa e de todos os procedimentos necessários para preparar a entrada em campo. É o tempo dedicado

– é o que merece empenho e investimento – a definir e delimitar o objeto, a desenvolvê-lo teórica e metodologicamente a colocar hipóteses ou alguns pressupostos para seu encaminhamento, a escolher e a descrever os instrumentos de operacionalização do trabalho, a pensar o cronograma de ação e a fazer os procedimentos exploratórios para escolha do espaço e da amostra qualitativa. (DESLANDES, 2013 p. 26).

No decorrer da pesquisa, isso deve ocorrer sempre correlacionando as informações e fazendo com que os dados possam ser coerentes com a teoria base da pesquisa.

Para Deslandes (2013 p. 26), essa preocupação com o processo se caracteriza quando se está em campo, onde:

O trabalho de campo consiste em levar para a prática empírica a construção teórica elaborada na primeira etapa. Essa fase combina instrumentos de observação, entrevistas ou outras modalidades de comunicação e interlocução com os pesquisados, levantamento de material documental e outros. Ela realiza um momento relacional e prático de fundamental importância exploratória, de confirmação e refutação de hipóteses e de construção de teoria. (DESLANDES, 2013 p. 26).

É importante frisar que no processo de captação dos dados, a familiarização entre a teoria e a ferramenta devem estar coerentemente conectadas, para que assim não ocorra desconexão entre os dados pesquisados e os objetivos da pesquisa.

Lüdke e André (2013 p. 14) referem-se que a quarta fase se preocupa com: “O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são foco de atenção especial pelo pesquisador”.

Nessa discussão, a busca é por identificar perspectivas do sujeito que está envolvido para que assim possa ser feita alguma intervenção.

Lüdke e André (2013 p. 14) trazem na quinta fase que: “A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo”. Ou seja, nessa situação, são nos dados que estão sendo caracterizados as abstrações e é lá que ocorre a identificação das variáveis cognitivas e estratégias criada pelos alunos para fazer as construções geométricas, foco dessa pesquisa.

Nessa fase de análise dos dados, Deslandes (2013 p. 26-27) aponta para caminhos importantes para que ocorra uma análise fiel aos dados encontrados.

[...] Análise e tratamento do material empírico em documental, diz respeito ao conjunto de procedimentos para valorizar, compreender, interpretar os dados empíricos, articulá-los com a teoria que fundamentou o projeto ou com leituras teóricas interpretativas cuja necessidade foi dada pelo trabalho de campo. Podemos subdividir esse momento em três tipos de procedimentos: a ordenação dos dados, classificação dos dados e a análise propriamente dita. (DESLANDES, 2013 p. 26-27).

Nesse processo, a busca por identificação das variáveis e conhecimentos que possam ser entrelaçados com a teoria é fundamental. É importante saber que nessa fase existe, muitas vezes, a necessidade de codificar as variáveis para que elas possam ser analisadas de forma categórica.

Numa contribuição para entender a aplicação na pesquisa da indução, Gibbs (2009 p. 19) menciona que “A indução é a produção e a justificação de uma explicação geral com base no acúmulo de grandes quantidades de circunstâncias específicas, mas semelhantes”. Essas circunstâncias nessa pesquisa surgem principalmente durante o processo de aplicação da pesquisa, ou seja, no campo.

Nessa perspectiva o papel do observado é de fundamental importância, para poder identificar a relação entre os dados e os objetivos da pesquisa.

Lüdke e André (2013 p. 34) mencionam que “Os focos de observação nas abordagens qualitativas de pesquisa são determinados basicamente pelos propósitos específicos do estudo, que por sua vez derivam de um quadro teórico geral, traçado pelo pesquisador”.

Numa perspectiva de que no campo de pesquisa qualitativa existe a necessidade de se observar e descrever esse sujeito, Lüdke e André (2013 p. 35-36) descrevem alguns pontos que consideram importantes de serem considerados:

- 1) Descrição dos sujeitos. Sua aparência física, seus maneirismos, seu modo de vestir, de falar e de agir. Os aspectos que os distinguem dos outros devem ser também enfatizados.
- 2) Reconstrução dos diálogos. As palavras, os gestos, os depoimentos, as observações feitas entre os sujeitos ou entre estes e o pesquisador devem ser registrados. Na medida do possível devem-se utilizar as suas próprias palavras. As citações são extremamente úteis para analisar, interpretar e apresentar os dados.
- 3) Descrição de locais. O ambiente onde é feita a observação deve ser descrito. O uso de desenhos ilustrando a disposição dos móveis, o espaço físico, a apresentação visual do quadro de giz, dos cartazes, dos materiais de classe pode também ser elementos importantes a serem registrados.
- 4) Descrição de eventos especiais. As anotações devem incluir o que ocorreu, quem estava envolvido e como se deu esse envolvimento.
- 5) Descrição das atividades. Devem ser descritas as atividades gerais e os comportamentos das pessoas observada, sem deixar de registrar a sequência em que ambos ocorrem.
- 6) Os comportamentos do observador: Sendo o principal instrumento da pesquisa, é importante que o observador inclua nas suas anotações as suas atitudes, ações e observações com os participantes durante o estudo. (LÜDKE e ANDRÉ, 2013 p. 35-36).

Essas ferramentas de captação de dados e transcrição de informações a partir da observação do campo, tornam os resultados ainda mais confiáveis, podendo ser inferidos os conceitos e mensurar a correlação dos resultados com os objetivos.

Dessa forma podemos perceber que a construção qualitativa da pesquisa precisa perpassar por diversos momentos para que possa ser validada e, de acordo com Santos Filho (2013 p. 89),

[...] podemos argumentar que, na medida em que recuperamos outros elementos constitutivos do processo de produção do conhecimento, também relativizamos a importância do debate sobre as técnicas qualitativas ou quantitativas. Quando isso ocorre, ao denunciar um falso dualismo técnico, remetemos o debate sobre as alternativas da pesquisa aos enfoques epistemológicos. Esses enfoques, entendidas como lógicas reconstituídas, integram com maior ou menor coerência outros elementos, incluindo as técnicas, dentro de um todo que articula desde os instrumentos de coleta de dados até a visão de mundo e os interesses cognitivos que os pesquisadores exprimem no processo de construção do conhecimento. (SANTOS FILHO, 2013 p. 89)

Contudo, o dualismo da pesquisa existe devido ao processo de construção de seus resultados que acaba passando por uma seara de conhecimento que necessita de outras ferramentas para poder fechar as análises e assim poder mensurar os resultados.

Essa pesquisa foi desenvolvida com uma turma de alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pertencente à rede privada da Cidade do Recife, no estado de Pernambuco.

A coleta de dados foi realizada em três fases: o pré-teste, a aplicação da sequência de atividades (sequência didática) e o pós-teste.

O pré e o pós teste foram resolvidos individualmente. A sequência de atividades, ou sequência didática, foi trabalhada em duplas de alunos, permitindo a interação entre eles e a consequente verbalização das discussões, porém com registros pelo software que filma a área de trabalho do computador.

A sequência de atividades, ou sequência didática foi apresentada aos alunos por meio de fichas de atividades impressas, para que pudessem se familiarizar e realizar a resolução geométrica das questões utilizando o software.

Após a resolução e a finalização de cada atividade, foi realizado o recolhimento das fichas utilizadas pelos alunos.

Os instrumentos de coleta de dados que utilizamos foram: 1) um pré-teste, composto de 5 atividades abertas para que o aluno pudesse realizar a construção dos quadriláteros de forma manual utilizando apenas lápis, borracha e/ou instrumentos como régua, compasso, transferidor; 2) uma sequência didática composta de oito

atividades para realizar a construção dos quadriláteros no software; 3) O Software régua e compasso, objeto dessa pesquisa pra mediar a construção dos quadriláteros; 4) O Software Atube Catcher para poder filmar a interface gráfica do software enquanto é utilizado o outro software (régua e compasso) para construção dos quadriláteros; 5) um pós-teste (mesma sequência didática aplicada no pré-teste) composta de cinco questões.

Para realizar a análise dos dados, foi levado em consideração alguns construtos teóricos que permitiram tornar mais confiáveis os resultados de análise da pesquisa encontrados.

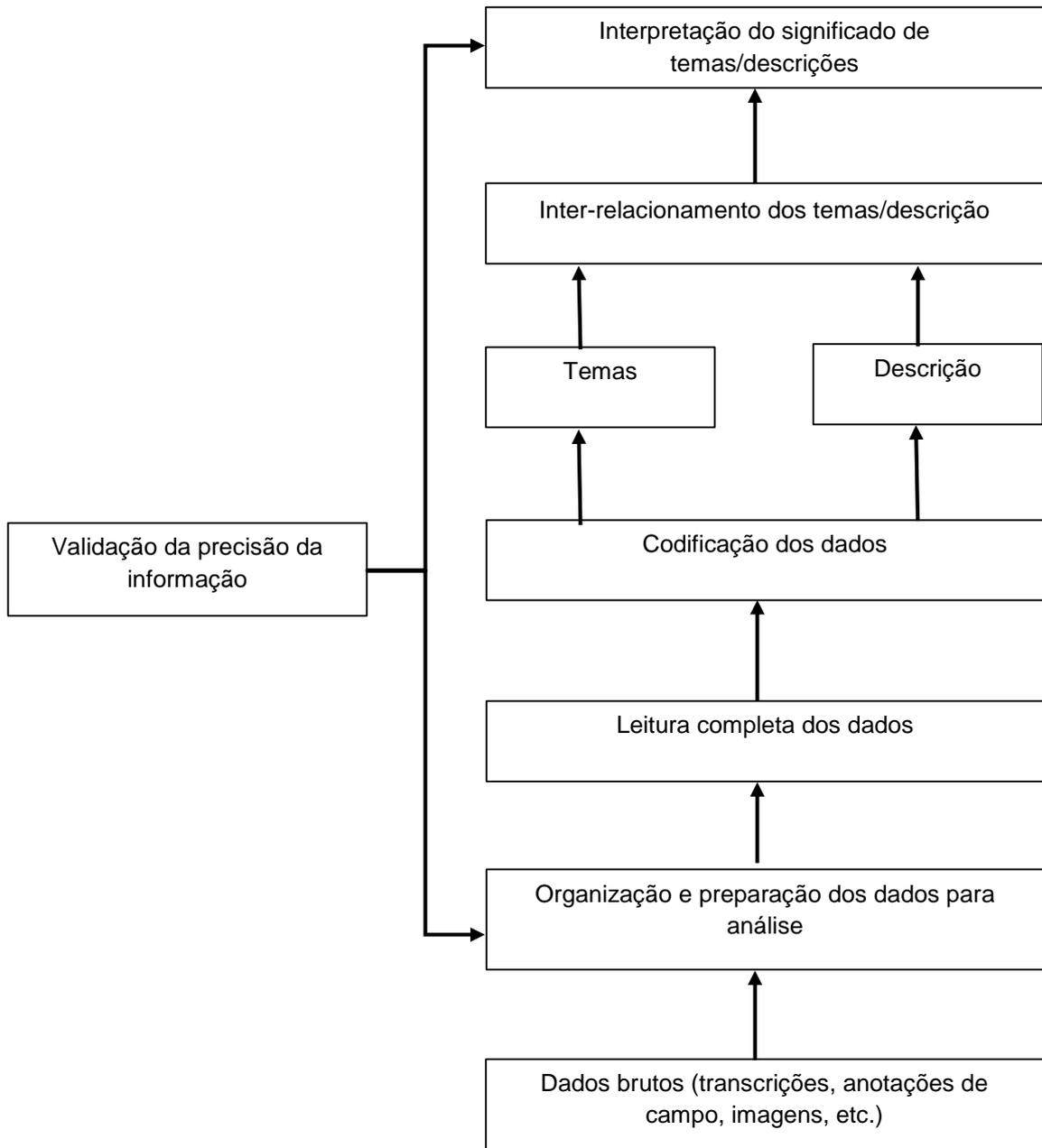
Existem diversos processos de análise dos dados, porém Creswell (2010 p. 216) menciona que:

O processo de análise dos dados envolve extrair sentido dos dados do texto e da imagem. Envolve preparar os dados para análise, conduzir diferentes análises, ir cada vez mais fundo no processo de compreensão dos dados representar os dados e realizar uma interpretação do significado mais amplo dos dados. (**CRESWELL**, 2010 p. 216).

É importante refletir que essa fase é um processo de reflexão, que necessita de constante questionamentos e pergunta aos dados, para que possam ser coerentemente interpretados. Durante o processo de análise as variáveis qualitativas emergem e precisam que, nessa fase, sejam minuciosamente tratadas para não ocorrer grandes perdas de dados.

Para realizar a validação dos dados, Creswell (2010 p. 218) apresenta um modelo de análise de dados qualitativos que contribui para a identificação das variáveis que são importantes para atender aos objetivos.

**Figura 33:** Processo de análise dos dados qualitativos da pesquisa



**Fonte:** Creswell, 2010 p. 218.

De posse desse esquema é possível que o pesquisador organize os dados de forma compassada para que possa analisar sem ter perdas ou prejuízo dos dados.

Nesse processo de análise qualitativa dos dados, a descrição, as anotações têm grande força e necessidade de haver fidelidade aos dados do campo, pois é através deles que se torna possível identificar as concepções de pensamento e processos de construção das estratégias por parte dos alunos.

De acordo com Martins Junior (2013 p. 139), é importante que a “Transcrição da resposta da maneira como o sujeito a proferiu”. Ou seja, é de fundamental importância que a transcrição seja fiel ao meio, ao cenário da pesquisa.

Nessa perspectiva, Creswell (2010) chama a atenção para três pontos importantes que devem ser motivo de preocupação no processo de análise dos dados; trata-se da confiabilidade, validade e generalizabilidade.

A categoria de confiabilidade menciona que o pesquisador possui a responsabilidade de analisar e realizar com cuidado a manipulação dos dados, verificar fielmente os dados transcritos para que seja o mais fiel possível à situação investigada; é importante que seja também verificado cada um dos códigos utilizados para que sejam atendidas as especificidades.

No caso da validade, é um dos momentos mais importantes dessa análise de tratamentos dos dados, pois trata-se de avaliar e validar as informações encontradas no campo de pesquisa.

Durante o processo de validação, Creswell (2010) menciona que existem oito principais estratégias que devem ser utilizadas para poder validar os dados, que são:

- 1) *Triangule* diferentes fonte de informação examinando as evidencias das fontes e utilizando-as para criar uma justificativa coerente para os temas.
- 2) Utilize a *verificação* dos membros para determinar a precisão dos resultados qualitativos retomando o relatório final ou as descrições ou os temas específicos aos participantes e determinando se esses participantes os consideram resultados.
- 3) Utilize uma *descrição* rica e densa para comunicar os resultados. Essa descrição pode transportar os leitores para o local e proporcionar à discussão um elemento de experiências compartilhadas.
- 4) Esclarecer o *viés* que o pesquisador traz para o estudo. Essa autorreflexão cria uma narrativa aberta e honesta a qual vai impressionar bem os leitores.
- 5) Apresente também *informações negativas* ou *discrepantes* as quais se opõem aos temas. Como a vida real é comporta de diferentes perspectivas que nem sempre se unem, discutir as informações contrárias aumenta a credibilidade de um relato.
- 6) Passe um *tempo prolongado* no campo.
- 7) Utilize a revisão por pares (*peer debriefing*<sup>24</sup>) para aumentar a precisão do relato.
- 8) Utilize um *auditor externo* para examinar todo o projeto. (CRESWELL, 2010 p. 226-227).

---

<sup>24</sup> Por pares.

A terceira etapa apontada por Creswell (2010) é a generalização qualitativa, não é o que o nome propõe, mas sim, de não levar os resultados para uma generalização de realidade, colocando os resultados do indivíduo como se fosse uma situação única.

Triviños (1928) relata que ao final de todas as coletas, análise e categorização dos dados, é importante a triangulação dos dados observando três eixos: a descrição, explicação e a compreensão. Nesse processo de triangulação, Triviños (1928 p. 138-139) aponta três categorias que devem ser levadas em consideração no processo de análise [...] em primeiro lugar *Processos e Produtos centrados no Sujeito*; em seguida, aos *Elementos Produzidos pelo meio do sujeito e que têm incumbência em seu desempenho na comunidade*, e por último, aos *Processos e Produtos originados pela estrutura sócio-econômica e cultural do macro organismo social no qual o está inserido o sujeito*.

Essas situações são formadas por elementos que constituem a situação de construção estratégica pelos alunos quando estão em processo de resolução de problemas. Esses elementos se caracterizam por estarem presentes durante o processo variáveis do ambiente (meio) e conhecimentos que os alunos possuem previamente para poder realizar as construções.

Triviños (1928 p.139) menciona que no primeiro aspecto da análise dos dados, deve-se direcionar as expectativas para as percepções do sujeito e principalmente para [...] os comportamentos e ações do sujeito, mediante, de forma fundamental, a observação livre [...]. Essas variáveis são extremamente importantes, pois contribuem para identificar como se desenvolve o pensamento geométrico.

Isso irá contribuir para identificar como se dá o processo de criação das estratégias de cada um dos alunos para realizar a construção dos quadriláteros.

Triviños (1928 p.139) menciona que o segundo aspecto que trata de “ângulo do enfoque” em que a preocupação é enxergar por meio dos documentos e do meio que contribui para a produção de conhecimentos estratégicos pelo aluno.

A terceira expectativa é que seja observado [...] as formas, as forças de relações e relações de produção, a propriedade dos meios de produção e as classes sociais [...]. Assim, isso irá caracterizar o sujeito e o método qualitativo que está é utilizado nessa pesquisa.

## **6.1 Análise da sequência didática construída no software Régua e Compasso.**

No caso de análise das unidades de registros e figuras geométricas construídas no software régua e compasso foram analisados os protocolos e os registros deixados pelos alunos na memória do software, a partir da construção da figura que foi elaborada por eles ao longo da aplicação da sequência didática.

Para analisar as imagens construídas pelos sujeitos foi feita a transcrição e posterior interpretação e categorização. Weller e Pfaff (2011 p. 115) chamam atenção para que “As imagens estão implícitas em todos os signos ou sistemas de significados. No sentido atribuído pela semiótica, um “significado” específico associado a um “significante” específico não é uma coisa, mas uma imagem mental”. Dessa forma, no processo de mapear as estratégias dos sujeitos utilizadas na construção das representações geométricas construídas.

Durante o processo de análise, buscou-se observar a diversidade e multiplicidade de respostas, uma vez que o software permite a construção geométrica por caminhos diferentes; assim, permitiu identificar como está o processo de construção das estratégias do aluno para resolução da atividade orientada na construção mediada pelo software em sequência didática.

Segundo Poupart (2012 p. 140), “A etapa da análise consiste em encontrar um sentido para os dados coletados e em demonstrar como eles respondem ao problema de pesquisa que o pesquisador formulou progressivamente” Para isso, os dados coletados estão focados em entender os dados e assim poder utilizá-los para poder inferir nos objetivos.

Para realizar a identificação de padrões de pensamento geométrico por meio das construções geométricas no software, a análise das unidades de registro, o percurso primeiramente foi o de categorizar posteriormente a transcrição.

Nessa perspectiva, Gibbs (2009 p.18-19) menciona que [...] na análise qualitativa ela é uma forma de organizar e controlar os dados”. Dessa forma é possível de controlar e preservar todos os dados, permitindo uma análise ainda mais convergente e precisa dos dados.

## 6.2 Análise da videografia realizada pelo software Atube Catcher.

Para contribuir com a recuperação dos dados memorizados no software “Régua e Compasso” (R&C), foi utilizado um terceiro instrumento, o software “Atube Catcher”, disponível para download no site de próprio nome.

Este software funciona com facilidade em qualquer computador, em virtude de ter sido programado numa linguagem simples. É um aplicativo gratuito e de simples manipulação, voltado para diversos públicos (estudantes, pessoas físicas e também para fins comerciais). É de fácil manuseio e permite a captura da tela de trabalho do computador ou de qualquer interface que esteja sendo utilizada. Este software foi utilizado com o intuito de garantir a captura do processo de construção da sequência didática e das demais informações referentes ao processo de desenvolvimento de estratégias.

A filmagem da interface das construções geométricas, durante o processo de desenvolvimento das atividades contribuiu para a identificação dos protocolos, unidades de registros criadas pelos alunos no processo de construção das representações geométricas no software Régua e Compasso. Isso permitiu perceber se o aluno, durante a construção de figuras geométricas, realizou alguma alteração das unidades de registro ou copiou uma macro construção já elaborada.

De acordo com Bauer e Gaskell (2008, p. 344), “nunca haverá uma análise que capte uma verdade única do texto”. É mencionada esta observação, pois, por mais que sejamos fieis à transcrição, a análise sempre estará impregnada pelas concepções daquele que analisa os dados. Porém, este instrumento permite enxergar muitos dados e cruzar com outros resultados. Os autores ainda avançam que

“Não há um modo de coletar, transcrever e codificar um conjunto de dados que seja “verdadeiro” com referência ao texto original. A questão, então, é ser o mais explícito possível, a respeito dos recursos que foram empregados pelos vários modos de transcrição e simplificação” (BAUER e GASKELL, 2008, p. 344).

Nessa fase foi realizada a transcrição de cada uma das videografias captadas pelo software Atube Catcher quando acionado durante o processo de construção das representações geométricas.

No caso da captação das falas, a transcrição é feita mediante a identificação de ações mobilizadas pelos alunos para construir a resolução de problema, identificando em seguida como ocorre a formulação das estratégias para resolução da sequência

didática, isso por atividade, e como o aluno realizou a validação de suas estratégias criadas. Ainda sobre as falas, a identificação e análise é feita por meio de categorias conceituais da geometria, a teoria de Van Hiele.

Lüdke e André (2013 p. 57) mencionam que “O primeiro passo nessa análise é a construção de um conjunto de categorias descritivas”. Com isso permite enxergar as variáveis didáticas que podem estar ocultas nas construções.

É importante observar que não existe ferramenta ou método eficiente que seja 100% fiel, pois no processo de transcrição já existe uma perda de dados devido à lente que está sendo utilizada para olhar.

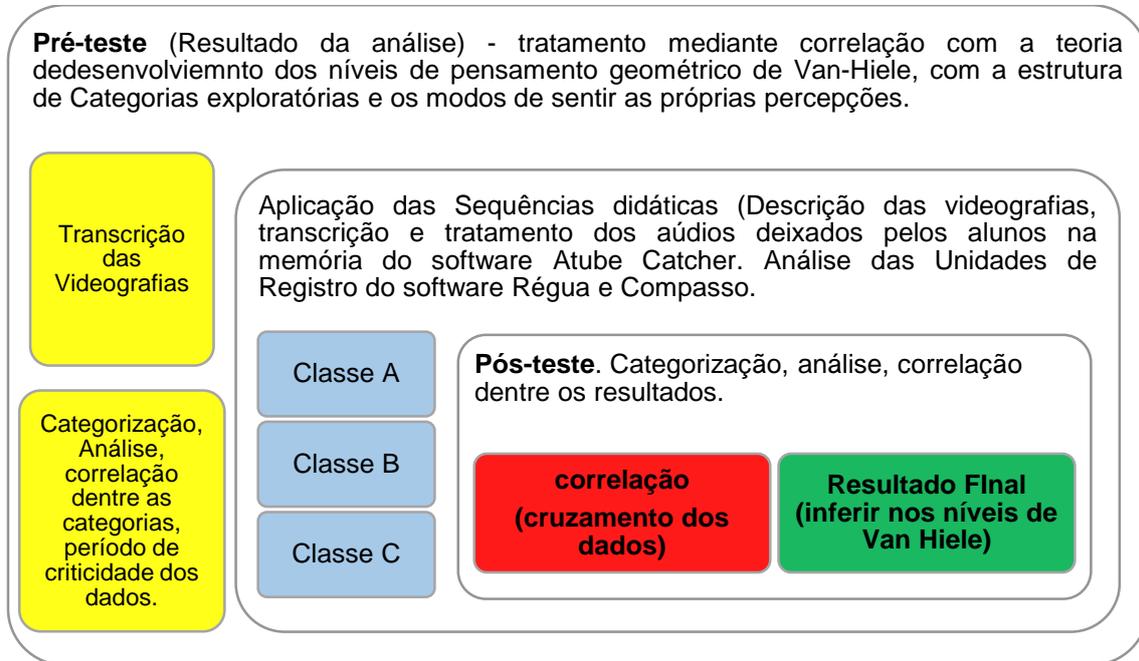
Nessa perspectiva, Lüdke e André (2013 p. 55) mencionam que:

Analisar os dados qualitativos significa “trabalhar” todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais informações disponíveis. A tarefa de análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados, buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado. (LÜDKE e ANDRÉ, 2013 p. 55).

Assim, os dados são todos analisados numa perspectiva de encontrar uma convergência para identificação das estratégias utilizadas pelos alunos para construção dos quadriláteros.

No processo de finalização das análises dos dados é feita a correlação dos resultados encontrados anteriormente e por seus respectivos instrumentos.

**Figura 34:** Modelagem das análises.



**Fonte:** Construção do pesquisador.

Todas essas fases de análise foram construídas para conduzir os dados por meio de uma microanálise, ou seja, para poder afunilar cada vez mais os dados encontrados no campo.

### 6.3 Análise prévia da sequência didática.

Nesse momento vamos tratar das análises prévias do pré-teste e pós teste, com intuito de prever as possíveis estratégias que o aluno poderá utilizar para realizar a resolução de cada uma das questões propostas. Apresentaremos também a análise prévia dos três blocos que compõem a sequência didática.

### 6.4 Análise prévia do teste.

No pré-teste o objetivo principal foi de identificar em que níveis de conhecimento geométrico eles se encontram.

Para realizar a previsão das possíveis estratégias que os alunos poderiam utilizar no processo de resolução do teste e das respectivas sequências didáticas A, B e C foi pontuado como poderia ser desenvolvido o pensamento deles no momento de resolução dos problemas.

O teste foi composto de cinco questões relativas a quadriláteros. Ele foi aplicado sem o uso do software e teve como objetivo identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, segundo o modelo de Van-Hiele.

A primeira questão teve por objetivo identificar que elementos o aluno considera para diferenciar um retângulo de um quadrilátero não retângulo.

Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega:

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:

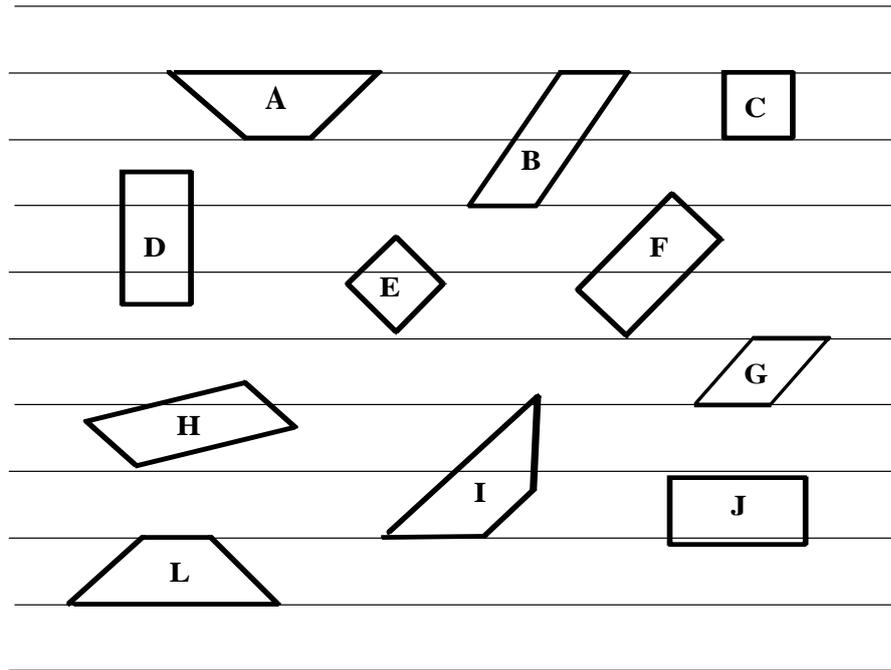
Justifique por quê?

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
_____	_____
_____	_____

A segunda questão tem por objetivo perceber se o aluno reconhece e classifica os quadriláteros. É importante ressaltar que algumas das figuras aparecem fora da posição prototípica<sup>25</sup>.

<sup>25</sup> Prototípica - Que possui características ou particularidades de um protótipo. Posição comum, usual.

Q02) Em uma folha de caderno estão desenhadas várias figuras de quatro lados:



Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	
Trapézios:	
Quadriláteros:	
Quadrados:	
Paralelogramos:	
Losangos:	

Nessa atividade a identificação é se o aluno faz a classificação hierárquica dos quadriláteros e se ele reconhece figuras fora da posição prototípica.

A terceira questão objetiva identificar que elementos o aluno considera para dizer que dois desenhos de quadrados são diferentes.

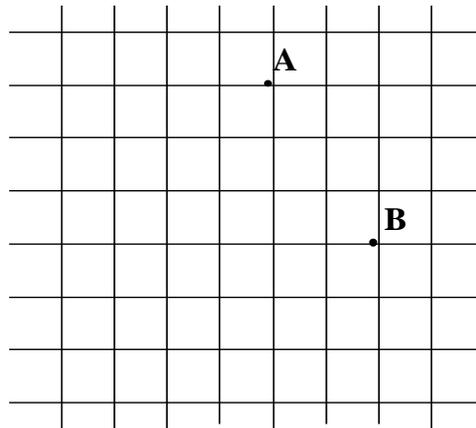
Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:

Para tanto analisamos, primeiramente, se ele desenha figuras que sejam parecidas com quadrados e se ele deixa marcas que possam indicar o uso de propriedades, o que

poderia indicar o trabalho no segundo nível de Van-Hiele. Em segundo lugar, analisamos que desenho o aluno realiza para a segunda figura. Caso a segunda figura seja um quadrado, identificamos se ele considera o quadrado diferente por uma rotação ou se por uma ampliação ou redução do primeiro quadrado.

A quarta questão objetiva identificar se o aluno consegue construir um losango dados dois de seus vértices em malha quadriculada. Para isso, ele precisaria mobilizar as propriedades das diagonais do losango, ou seja, que elas são perpendiculares e cortam-se no ponto médio.

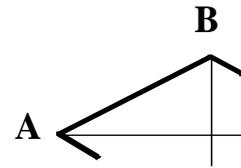
Q04) Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**:



Se o aluno não coloca os vértices C e D nos pontos adequados, podemos pensar que ele está se situando no nível da visualização. Um aluno que coloque os pontos C e D nos pontos adequados, mas não desenha as diagonais, provavelmente estará um pouco mais avançado no modelo de Van-Hiele. Já aquele que, além de colocar adequadamente os vértices que faltam, representar as diagonais do losango pode estar trabalhando no segundo nível, que é capaz de mobilizar propriedades de quadriláteros.

A quinta e última questão do teste também objetiva identificar se o aluno consegue mobilizar as propriedades das diagonais do losango, para reconstruir um losango que teve um pedaço apagado.

Q05) O losango **ABCD** teve um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?



Sim

Explique como:

---



---



---



---



---



---

Não

Porquê?

---



---



---



---



---



---

Diferentemente da questão anterior, aqui o aluno não tem o suporte da malha. Logo, para reconstituir corretamente o losango será preciso utilizar as propriedades das diagonais. Para tanto, será preciso prolongar os dois “pedaços de diagonais” já existentes e transferir, de alguma maneira, as medidas das semi-diagonais existentes para as outras duas semi-diagonais incompletas. Com isso, podemos pensar que esse aluno encontra-se trabalhando no segundo nível. Caso o aluno obtenha os vértices que estão faltando de maneira aleatória, provavelmente estará se situando no nível da visualização.

### 6.5 Análise prévia da sequência didática.

A sequência de atividades é composta de três blocos, denominados A, B e C. O primeiro bloco tem como objetivo permitir que o aluno se familiarizasse com o R&C. No segundo bloco ele deverá realizar algumas construções envolvendo conceitos que ele precisará utilizar nas atividades do bloco C, em que o trabalho será sobre a construção de quadriláteros.

A seguir apresentaremos as atividades de cada um dos blocos:

## Bloco A.

Esse bloco é formado por três atividades que, como dissemos anteriormente, servem de momento de familiarização dos alunos com o software.

### ATIVIDADE-1:

- 1) Construa o segmento **AB**;
- 2) Construa o ponto **M** no meio de **AB**;
- 3) Desloque o ponto **M** e certifique-se de que ele continua no meio do segmento **AB**;
- 4) Deslocar os pontos **A** e **B** e observar o que acontece. Escreva suas observações:

- 5) Construa um ponto **D**, fora do segmento **AB**
- 6) Construa uma reta paralela ao segmento **AB**, passando por **D**
- 7) Desloque os pontos **A**, **B** ou **D**, observando o que acontece.

- 8) Salve o arquivo com o nome A01

Essa primeira atividade tem como objetivo levar o aluno a perceber que as construções a serem realizadas no software precisam ser baseadas em propriedades geométricas. Propriedades delimitadas geométricas que esteja de acordo com a figura geométrica. Assim, se ele colocar o ponto M visualmente no meio do segmento, ao deslocar os pontos da construção o aluno irá perceber que o ponto não estará mais no meio do segmento; para ter sucesso, ele deverá usar a ferramenta “ponto médio” do R&C. Da mesma forma, se ele construir a paralela sem usar a ferramenta “reta paralela”, ao deslocar os pontos da figura a reta deixará de aparecer paralela para ele.

É possível que para realizar a resolução da atividade 1, o aluno inicie a construção dos pontos e segmento separadamente, tendo em vista que a visualização tanto do ponto livre quanto das ferramentas de reta, segmento de reta e semirreta ficam visíveis em sua interface.

Ao tentar deslocar os pontos inicialmente construídos no segmento, ele perceberá que não realizou a construção do ponto médio corretamente e assim irá

ficar solto na área geométrica, ou seja, sem está conectado com outras figuras da superfície geométrica.

Para realizar a construção do ponto fora do segmento é possível que o aluno realize a construção de forma arbitrária sem utilizar a ferramenta reta paralela. Como para realizar a construção de uma reta paralela não é necessário a construção de dois pontos, é possível que os alunos utilizem uma reta e a coloquem em cima do ponto D percebendo assim que existe dificuldades que podem tornar difícil de realizar a construção corretamente de uma reta paralela a AB sem antes fazer uma reta perpendicular. No entanto essa construção da reta paralela será construída apenas no olho pelo aluno sem a utilização das ferramentas e propriedades.

#### **ATIVIDADE-2:**

- 1) Crie os pontos **A** e **P**;
- 2) Construa a reta **r** que passa por **A** e **P**;
- 3) Construa um ponto **B** da reta **r**, de tal forma que a distância de **AP** seja a mesma de **PB**;
- 4) Aproxime o ponto **A** do ponto **P**;
- 5) O ponto **B** também se aproxima?
- 6) Se não, apague o ponto **B**, crie outro e tente outra vez.
- 7) Explique como você construiu o ponto **B**, para que ele satisfaça a condição solicitada:

- 8) Salve o arquivo com o nome A02

Nessa atividade o aluno deverá elaborar a ideia que para manter equidistâncias é preciso pensar na circunferência como lugar geométrico. Para isso, será preciso construir a circunferência de centro no ponto P e raio AP, obtendo o ponto B na interseção da reta com a circunferência.

Para realizar a construção do ponto B, os alunos poderão construir de forma arbitrária. Nesse caso o aplicador deverá movimentar os pontos para que ele veja que a equidistância não está sendo mantida.

Para que a equidistância seja mantida, o aluno poderá construir a circunferência de centro em P e raio de medida AP, obtendo o ponto B na interseção da circunferência com a reta. Nesse caso, ao deslocar quaisquer dos pontos a equidistância será mantida.

**ATIVIDADE-3:**

- 1) Crie os pontos **A** e **B**;
- 2) Construa a reta **s** que passa por **A** e **B**;
- 3) Construa as retas perpendiculares a **s**, que passem pelos pontos **A** e **B**;
- 4) Desloque os pontos **A** e **B**;
- 5) Qual a relação que existe entre as duas retas perpendiculares que você construiu?

--

- 6) Salve o arquivo com o nome A03

Nesse momento espera-se que o aluno já tenha incorporada a necessidade de utilizar as ferramentas do software para realizar as construções, caso contrário, as figuras não irão manter as suas propriedades. O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno elabore a propriedade que duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

É possível que para realizar a resolução da atividade 3, o aluno faça a construção dos pontos livres individualmente, pois na interface do software tem-se a figura do ponto com fácil visualização.

É possível que o aluno realize a construção dos pontos juntamente com o segmento de reta e já fazendo a unificação dos dois pontos. Pois, como existe essa possibilidade de construção no software, pode ser que o aluno realize de forma direta.

Existe grande chance de o aluno realizar a construção da reta perpendicular apenas utilizando a percepção visual, sem uso das propriedades dos quadriláteros, ou seja, utilizando a ferramenta segmento de reta e clicando em um dos pontos e posteriormente em qualquer ponto acima da reta AB construída anteriormente. Nesse caso, o aplicador deverá movimentar os pontos, para que o aluno perceba a necessidade de usar a ferramenta reta perpendicular.

## Bloco B.

Esse bloco de questões é formado por três atividades que têm como objetivo despertar no aluno os conceitos geométricos que serão necessários para a construção dos quadriláteros.

### ATIVIDADE-1:

- 1) Construa o segmento **AB**;
- 2) Pelo ponto **A**, construir a perpendicular ao segmento **AB**. Sobre essa reta construir o ponto **X**.
- 3) Pelo ponto **B**, construir a perpendicular ao segmento **AB**. Sobre essa reta construir o ponto **Y**
- 4) Desloque os pontos da figura e verifique se as retas continuam sendo perpendiculares ao segmento. Se não continuarem, recomeçar a construção.
- 5) Os ângulos **XÂB** e **YBA** são iguais? Quanto eles medem?

- 6) Construa um segmento **MN**.
- 7) Construa o ângulo **PMN** de tal forma que sua medida seja de  $45^\circ$ .
- 8) Desloque os elementos de sua figura, se o ângulo não continuar com  $45^\circ$ , refaça a figura.
- 9) Explique como você fez para obter o ângulo de  $45^\circ$ ?

- 10) Salve o arquivo com o nome B01

Nesta atividade o aluno será levado a construir a ideia de reta perpendicular e de segmentos paralelos, assim como a construir a ideia de existência de ângulo entre duas retas com origem em um único ponto. Essa atividade tem como objetivo provocar no aluno a ideia de construção de ângulos e fazê-lo compreender o caso de existência das retas perpendiculares.

O objetivo dessa atividade é levar o aluno a construir a ideia de bissetriz de um ângulo, na medida em que é solicitado que ele construa um ângulo de  $45^\circ$  a partir de um ângulo reto.

A primeira parte da atividade não deve gerar maiores problemas, pois trata-se de uma construção já realizada no bloco A. Para a segunda parte, um aluno que esteja trabalhando no nível da visualização poderá construir uma reta qualquer passando pelo ponto  $M$  e, sobre ela, colocar o ponto  $P$ . A partir daí, ajustar a posição da reta para que a medida do ângulo meça  $45^\circ$ . Nesse momento o aplicador deverá movimentar a reta, para desestabilizar a construção do aluno.

Já um aluno que esteja trabalhando no segundo nível, poderá construir a perpendicular a  $MN$  que passe por  $M$ , obtendo um ângulo reto. Em seguida, poderá usar a ferramenta bissetriz de um ângulo e, sobre essa bissetriz, colocar o ponto  $P$ .

### ATIVIDADE-2:

- 1) Construa uma reta  $r$  e um ponto  $P$  sobre ela.
- 2) Pelo ponto  $P$ , construir a perpendicular à reta  $r$ , que passe pelo ponto  $P$ . Chame essa reta de  $s$ .
- 3) Determinar sobre a reta  $r$ , dois pontos  $A$  e  $B$  de tal forma que a distância do ponto  $P$  ao ponto  $A$  seja a mesma do ponto  $P$  ao ponto  $B$  ( $PA=PB$ ).
- 4) Determinar sobre a reta  $s$ , dois pontos  $C$  e  $D$  de tal forma que ( $PA=PB=PC=PD$ ).
- 5) Movimente os pontos da figura e verifique se essa relação continua ocorrendo. Se não, recomeçar.
- 6) Determinar outros três pontos ( $E$ ,  $F$  e  $G$ ), que mantenham a mesma relação de distâncias ( $PA=PB=PC=.....PF=PG$ ).
- 7) O que você pode dizer sobre os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  e  $G$ , em relação ao ponto  $P$ ? Como poderíamos chamar a região do plano formada por todos os pontos que satisfaçam a mesma relação?

- 8) Salve o arquivo com o nome B02.fig

O objetivo dessa atividade é levar o aluno a elaborar a noção de mediatriz como um lugar geométrico.

Para realizar essa construção, o aluno poderá utilizar como estratégia mobilizar a ferramenta ponto livre e construir assim um ponto na área de construção geométrica.

É possível que o aluno realize a construção do ponto e da reta juntos, pois ele poderá perceber que esse recurso pode ser usado junto e em uma única ferramenta.

Para construir a reta perpendicular passando pelo ponto **P** é possível que o aluno utilize melhor visualização para construir de forma aleatória a reta perpendicular sobre esse ponto. Também é possível que exista um aluno que utilize a circunferência e coloque como centro da construção o ponto **P** e assim traçar uma reta por esse ponto como se fosse uma diagonal.

O aluno poderá utilizar como estratégia para construir a igualdade de distância entre os pontos **PA** e **PB** utilizando apenas o olhar, porém pode existir aquele aluno que perceberá, devido às atividades anteriores, que se utilizar o compasso virtual poderá realizar a construção das distâncias entre dois pontos com essa ferramenta.

Outra possibilidade que o aluno poderá utilizar é usando duas circunferências e colocando como interseção o ponto médio, percebendo assim que possui a mesma distância. É possível que o aluno ainda utilize a ferramenta de medição para poder identificar cada uma das medidas e, assim, constatar que possuem a mesma medida.

A estratégia que o aluno poderá utilizar para a construção da atividade 7, pode ser por meio da representação de três pontos construídos de forma aleatória, uma vez que é bem possível não conhecer as propriedades para construção de três pontos que mantenham a mesma distância. No entanto é possível que existam alunos que realizem a construção de forma a utilizar a representação de três circunferências no mesmo plano e realizar a interligação de seus raios e assim encontrar a ligação entre as suas respectivas medidas.

### **ATIVIDADE-3:**

- 1) Construa três pontos **A**, **B** e **C** não alinhados.
- 2) Determine o ponto **P**, que esteja à mesma distância dos pontos **A**, **B** e **C**.
- 3) Deslocar os pontos da figura e verificar se eles continuam mantendo a mesma distância. Se não, recomeçar.
- 4) Explique como você resolveu o problema.

--

5) Salve o arquivo com o nome B03.fig

Nessa atividade o objetivo é levar o aluno a determinar a circunferência que passa por três pontos não alinhados. Para isso, ele deverá elaborar a noção de que o centro da circunferência encontra-se no ponto de encontro das mediatrizes dos dois segmentos formados pelos três pontos.

É possível que o aluno para realizar a construção dos três pontos A, B e C a uma mesma distância de um quarto ponto P, não utilize a estratégia de construir de forma aleatória, ou seja, no olho. Sendo feito três pontos distantes um do outro como se fossem os vértices do triângulo, em seguida um ponto ao centro do triângulo como se fosse o incentro e, por fim, fizer as ligações entre os pontos A, B e C e posteriormente a ligação entre os pontos A, B e C ao ponto P.

No entanto na medição da distância entre esses pontos o aluno poderá utilizar o olhar para mensurar a distância dentre os pontos.

É possível que dentre os alunos também exista um que irá utilizar outras estratégias para realizar a construção dos pontos equidistantes utilizando as propriedades. O aluno pode construir de forma aleatória os pontos A, B e C nomeando respectivamente esses pontos com as nomenclaturas sinalizadas e assim passar uma semirreta por esses pontos, fazendo surgir assim um triângulo.

Posterior a essa fase, os alunos poderão fazer a construção de três circunferências, tendo como centro de cada uma delas os seus vértices A, B e C da representação do triângulo anteriormente construído. Seguindo assim para a construção de três retas, essas que são os raios da circunferência o que acarretará no encontro delas ao centro do triângulo, tornando o ponto P com a mesma distância dos demais pontos.

É possível que o aluno não tenha construído corretamente e será, no momento do deslocamento, observado se ele utilizou ou não as propriedades corretamente para realizar as construções geométricas.

**Bloco C.**

Este bloco de questões é composto de oito atividades envolvendo a construção de quadriláteros. Em cada uma delas, o aluno precisará mobilizar os conhecimentos elaborados anteriormente e, a partir deles, construir os conhecimentos relativos às propriedades dos quadriláteros.

**ATIVIDADE-1**

- 1) Construa três pontos **A**, **B** e **C** não alinhados.
- 2) Construa o paralelogramo **ABCD**.
- 3) Deslocar os vértices do paralelogramo. Se ele não permanece um paralelogramo, recomeçar a construção.
- 4) Medir os lados e os ângulos do paralelogramo **ABCD**.
- 5) Deslocar os vértices do paralelogramo, observando o que acontece.

- 6) Determinar o ponto **O**, centro do paralelogramo.
- 7) Construir e medir os segmentos **AO**, **BO**, **CO** e **DO**.
- 8) Deslocar os pontos do paralelogramo, observando o que acontece.

- 9) Salvar o arquivo com o nome C01.fig

Nessa atividade, os itens 1, 2 e 3 têm por objetivo fazer com que o aluno elabore a noção que em um paralelogramo os lados opostos são paralelos. Para isso, dados três pontos ele deverá construir retas paralelas. Ou seja, a partir da determinação dos segmentos AB e BC ele deverá construir a paralela ao lado AB que passe por C e a paralela ao lado BC que passe por A. O quarto vértice do paralelogramo estará na interseção dessas duas retas.

Os itens 4 e 5 têm como objetivo levar o aluno a construir a ideia que em um paralelogramo os lados e os ângulos opostos possuem a mesma medida.

Já os itens 6, 7 e 8 pretendem levar o aluno a elaborar a propriedade que em um paralelogramo as suas diagonais interceptam-se no ponto médio.

É possível que o aluno para realizar a construção de três pontos no mesmo plano, utilize apenas o olhar, sem usar as propriedades geométricas necessárias. Dessa forma, é possível que o aluno realize a construção clicando aleatoriamente na interface e posteriormente realizando a ligação entre os pontos por meio de uma reta, sem levar em consideração o tipo de reta, ou seja, se é um segmento de reta, semirreta ou uma reta.

É possível que no processo de construção do paralelogramo o aluno utilize os três pontos A, B e C anteriormente construídos como se fossem os vértices.

Para realizar a construção do paralelogramo, é possível que o aluno faça a construção de forma aleatória e sem levar em consideração as propriedades de ter lados iguais dois a dois, nem os ângulos iguais dois a dois.

No entanto é possível que existam, na mesma turma, alunos que percebam a relação entre as propriedades e utilizem as propriedades geométricas para construir o paralelogramo, utilizando estratégias próprias.

No processo de construção do ponto **O**, centro do paralelogramo, o aluno poderá realizar a construção de forma correta, realizando a construção de duas diagonais que assim se interceptam no centro. Isso poderá ocorrer, porém o aluno pode simplesmente colocar um ponto no centro do paralelogramo sem levar em consideração as propriedades geométricas.

Posteriormente à finalização do processo de construção, será possível perceber que no deslocamento da figura são mantidas as propriedades da figura mesmo quando aparenta deformidade.

## **ATIVIDADE-2**

- 1) Construir o segmento **AB**.
- 2) Construir o retângulo **ABCD**.

- 3) Deslocar os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Se a figura não continua sendo um retângulo, recomeçar a construção.
- 4) Explicar porque sua figura é um retângulo.

- 5) Salvar o arquivo com o nome C02.fig.

O objetivo dessa atividade é levar o aluno a elaborar a ideia que para construir o retângulo a partir de um dos lados, ele precisará construir duas perpendiculares a esse lado, passando pelos seus vértices. A partir daí, será preciso determinar um ponto em uma dessas perpendiculares e construir a paralela ao lado já determinado que passa por esse ponto, obtendo o quarto vértice do retângulo (aqui ele irá mobilizar uma propriedade elaborada nas atividades anteriores, que se duas retas são perpendiculares a uma terceira, então elas são paralelas entre si). Se isso não for feito, ao deslocar um dos vértices do quadrilátero ele deixará de ser retângulo. Com isso, será elaborada a noção que em um retângulo seus quatro ângulos são retos.

É provável que o aluno, no processo de construção do retângulo, não leve em consideração nenhuma propriedade ou regra de construção. Dessa forma, irá criar dois pontos A e B separadamente e posteriormente realizar a interligação entre eles, fazendo assim surgir um segmento de reta. Posteriormente, ao perceber que construiu um segmento, irá construir o retângulo apenas no olhar, ou seja, construindo mais dois pontos e mais três segmentos.

### ATIVIDADE-3

- 1) Construir o segmento **GH**.
- 2) Construir um retângulo de forma que **GH** seja sua diagonal.
- 3) Deslocar os pontos **G** e **H**. Se a figura não continua sendo um retângulo, recomeçar a construção.
- 4) Explicar porque sua construção é um retângulo.

5) Salvar o arquivo com o nome C03.fig

O objetivo da questão é criar no aluno um conflito em relação à atividade anterior, em que ele construiu um retângulo a partir de um de seus lados. Aqui o segmento fornecido inicialmente não é um lado, mas a sua diagonal. Para resolver a questão, ele deverá criar uma reta que passe por uma das extremidades da diagonal, que servirá de reta suporte a um dos lados do retângulo. A partir dessa ideia, o aluno poderá utilizar os mesmos procedimentos da atividade anterior.

Caso não seja construído pelo aluno, respeitando as propriedades geométricas, no momento de deslocamento dos pontos será observado que não é um retângulo devido a divergência nas propriedades.

Para realizar a construção do retângulo, é possível que inicialmente o aluno construa tudo no olho, ou seja, sem utilizar as propriedades ou ferramentas necessárias para construção das propriedades geométricas tais como: retas paralelas (duas a duas), retas perpendiculares, medidor de ângulos, com objetivo de perceber se a construção realizada está com os ângulos construídos corretamente, ou seja, com  $90^\circ$ .

#### ATIVIDADE-4

- 1) Construir o segmento **AB**.
- 2) Construir o quadrado **ABCD**.
- 3) Deslocar os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
- 4) Explicar porque sua figura é um quadrado.

5) Salvar o arquivo com o nome C04.fig.

Para construir o quadrado a partir de um de seus lados, o aluno deverá mobilizar as mesmas propriedades utilizadas na construção do retângulo. Entretanto, no caso do quadrado, o terceiro vértice não poderá ser colocado de maneira aleatória na reta

perpendicular construída. Para a obtenção desse vértice, o aluno deverá mobilizar a ideia da equidistância entre pontos, utilizando a circunferência como um lugar geométrico. Ele poderá, por exemplo, construir a circunferência de centro em A e raio AB obtendo, na interseção da circunferência com a reta perpendicular o terceiro vértice do quadrado. A partir daí, usando retas paralelas ou perpendiculares é possível obter o quarto vértice da figura.

É possível também que exista alunos que realizem a construção do quadrado, de forma aleatória e sem levar em consideração a necessidade de percepção das propriedades do quadrado, ou seja, realize a construção da seguinte forma: utilize a ferramenta ponto livre e construção quatro pontos distantes um do outro e faça a conexão entre os pontos utilizando segmentos. Por fim, fechando a construção do quadrado. O aluno perceberá que existe algum erro quando iniciar o processo de deslocamento de um dos pontos, pois acontecerá a percepção de que o quadrado foi desfeito devido a não utilização das propriedades.

#### **ATIVIDADE-5**

- 1) Construir o segmento **TC**.
- 2) Construir o quadrado **TOCA**, de modo que **TC** seja sua diagonal.
- 3) Deslocar os vértices do quadrado. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
- 4) Que conclusões você pode tirar de sua construção?

--

- 5) Salvar o arquivo com o nome C05.fig.

Nessa atividade espera-se novamente, gerar um conflito no aluno, na medida em que provavelmente ele buscará as mesmas estratégias utilizadas na construção de um retângulo dada a sua diagonal. Entretanto, essa estratégia só seria válida no caso do quadrado se a construção considerasse a diagonal como a bissetriz do ângulo reto.

Dessa forma, espera-se que a atividade leve o aluno a mobilizar propriedades das diagonais do quadrado, o que revelaria um trabalho em níveis mais avançados de

Van-Hiele. Por exemplo, ele poderia utilizar a propriedade que as diagonais de um quadrado são perpendiculares e cortam-se em seus pontos médios. Ele pode então, construir a mediatriz da diagonal obtendo um ponto  $X$  e, posteriormente, construir a circunferência com centro no pé da diagonal, o ponto  $X$ , e raio  $TX$ . O aluno obteria então os dois outros vértices do quadrado nas interseções da circunferência com a mediatriz da diagonal.

Caso não seja construído pelo aluno, respeitando as propriedades geométricas, no momento de deslocamento dos pontos será observado que não é um quadrado devido à divergência nas propriedades.

É possível que o aluno, para realizar a construção do quadrado, não utilize nenhuma estratégia geométrica e nenhuma propriedade, e que realize a construção de forma aleatória. Dessa forma, é possível que faça a construção de quatro pontos e nomeie com as letras,  $T$ ,  $O$ ,  $C$  e  $A$  e assim faça a ligação dos quatro pontos com segmentos. Finalizando a construção com a construção de um segmento  $TC$ , ou seja, a construção da diagonal.

#### **ATIVIDADE-6**

- 1) Construir os pontos **P** e **O**.
- 2) Construir o quadrado **PITA**, de modo que **P** seja um de seus vértices e **O** seja seu centro.
- 3) Deslocar os vértices do quadrado. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
- 4) Deslocando os pontos da figura, que conclusões você pode tirar?

--

- 5) Salvar o arquivo com o nome C06.fig.

Essa atividade amplia a atividade anterior, na medida em que a diagonal do quadrado não é fornecida. Assim, o aluno deverá, obrigatoriamente, recorrer às propriedades das diagonais do quadrado. Uma opção de resolução seria ele traçar a reta que passa pelos pontos  $P$  e  $O$  para, em seguida, traçar a circunferência de centro

em O e raio OP, obtendo o ponto T na interseção da reta com a circunferência. A partir daí ele poderá mobilizar as estratégias da atividade anterior, traçando uma perpendicular à reta, passando pelo ponto O e obtendo os outros dois vértices do quadrado na interseção da reta perpendicular com a circunferência.

É possível que o aluno construa de forma aleatória o quadrado, sem preocupação com as propriedades geométricas. Dessa forma, o aluno poderá fazer a construção do quadrado da seguinte maneira: utilizar a ferramenta ponto livre, que está disponível na barra de ícones do software e construir quatro pontos distintos na interface do software e posteriormente utilizar a ferramenta segmento de reta e unir os quatro pontos, formando assim um quadrado.

### **ATIVIDADE-7**

- 1) Construir os pontos **M** e **N**.
- 2) Construir o losango **MANO**.
- 3) Deslocar os pontos da figura. Ela continua sendo um losango?
- 4) Por quê?

- 5) Se ela não continua um losango, recomeçar a construção.
- 6) Explique por que sua figura é um losango.

- 7) Salvar o arquivo com o nome C07.fig.

É provável que a estratégia inicial do aluno nessa atividade seja considerar o segmento MN como um dos lados do losango, e não como uma de suas diagonais, em razão das atividades anteriores. Entretanto, aqui, ele deverá romper com essa ideia e mobilizar fortemente as propriedades das diagonais do losango.

Uma estratégia possível seria traçar a mediatriz do segmento MN, obtendo a reta suporte da outra diagonal do losango. A partir daí, bastaria determinar um ponto qualquer sobre essa mediatriz, que seria o terceiro vértice, e construir retas paralelas para obter o quarto vértice.

**ATIVIDADE-8**

- 1) Construir uma reta  $r$  e dois pontos  $L$  e  $O$ , fora da reta  $r$ .
- 2) Construir o losango **LOJA**, de modo que o ponto  $A$  esteja sobre a reta  $r$ .
- 3) Deslocar os pontos da figura. Se ela não continua sendo um losango, recomeçar a construção
- 4) Explique como você construiu o losango **LOJA**.

--

- 5) Salvar o arquivo com o nome C08.fig.

Nessa atividade, o item 1 tem por objetivo levar o aluno a resgatar as propriedades geométricas de construção de ponto livre anteriormente utilizada na resolução de outras questões e necessitando que no processo de construção, o aluno perceba que não existirá uma reta  $r$  sem ter no mínimo dois pontos presentes. (Caso do Software Régua e Compasso). O aluno necessitará também mobilizar na interface em que está acontecendo a construção do losango, a construção de dois pontos  $L$  e  $O$  distantes da reta  $r$ .

O objetivo da questão 2 e 3 é levar o aluno a perceber que para construir um losango com ponto  $A$  sobre a reta  $r$ , será necessário que um dos pontos mobilizados anteriormente para a construção da reta seja nomeado com a letra  $A$  e que por esse ponto passe uma circunferência tangente (será necessário o uso de propriedades anteriormente utilizadas como a de construção de circunferência com origem em um único ponto) a esse ponto, para assim, se tornar também um dos vértices do losango **LOJA**.

Outro objetivo da questão 2 para finalizar a construção do losango, será a de despertar no aluno a percepção de que o segmento que cortar a circunferência ao meio, diâmetro, deve ser perpendicular a reta  $r$ , anteriormente construída. O aluno precisará ter a ideia também de que será necessário encontrar o centro da circunferência por meio das ferramentas anteriormente utilizadas no software, isso ajudará no processo de construção da última reta perpendicular que passará por esse ponto no centro da circunferência cortando ao meio o segmento perpendicular construído ligando ao ponto  $A$ .

Assim, será necessário que o aluno perceba que para construir os lados será necessário encontrar a intersecção entre circunferência e segmento, surgindo assim, os pontos de intersecção L, O e J.

## 7. Análise dos dados

Este capítulo é formado pela análise dos dados coletado no pré-teste, na aplicação das sequencias didáticas (Séries A, B e C) e pós-teste. Esses testes, foram analisados identificando conhecimentos, níveis, percepções, mobilização de ferramentas para construção dos quadriláteros pelos sujeitos da pesquisa, identificação do avanço nos níveis e inferência de conhecimentos adquiridos devido a aplicação da metodologia.

### 7.1 Análise da sequência didática.

A sequência didática, com suas três etapas (A, B e C), foi aplicada em agosto de 2015 a um grupo de 8 alunos do 6º ano do ensino fundamental, com faixa de idade entre 9 e 11 anos.

A diferença de alunos que participaram da aplicação do pré-teste para a sequência didática, deve-se ao fato de na primeira fase ter sido aplicada no turno e sala do 6º ano manhã. Como não havia espaço para ser feito e nem liberação para acontecer na aula de matemática de nenhum professor, a escola ofertou o turno da tarde para a aplicação da sequência. Com isso, foi preciso contar com o apoio dos pais para liberação dos seus filhos em participar.

A tabela a seguir mostra o tempo de gravação da filmagem da interface gráfica do software Régua e compasso produzido pelos sujeitos, totalizando mais de 8 horas de gravação.

**Tabela 01:** Tempo de filmagem

(S) Sujeitos	Série A (Sequencia didática)	Série B (Sequencia didática)	Série C (Sequencia didática)
S01 e S02	44'06"	12"8"	47'35"
S03 e S04	21'27"	42'00"	29'55"
S05 e S06	32'11"	45'57"	57'33"
S07 e S08	37'31"	24'13"	53'28"
Total	135'15"	124'18"	188'31"

**Fonte:** Dados da pesquisa

## ETAPA A

Como dissemos anteriormente, essa fase teve como objetivo levar o estudante a se familiarizar com o software. Ela foi composta de três atividades. Para cada uma delas, sintetizamos as ações dos sujeitos em um quadro.

### ATIVIDADE – 1

- 1) Construa o segmento **AB**;
- 2) Construa o ponto **M** no meio de **AB**;
- 3) Desloque o ponto **M** e certifique-se de que ele continua no meio do segmento **AB**;
- 4) Desloque os pontos **A** e **B** e observe o que acontece. Escreva suas observações;
- 5) Construa um ponto **D**, fora do segmento **AB**;
- 6) Construa uma reta paralela ao segmento **AB**, passando por **D**;
- 7) Desloque os pontos **A**, **B** ou **D**, observando o que acontece.
- 8) Salve o arquivo com o nome A01.fig

### AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	Construiu dois pontos A e B; e o segmento ligando esses pontos.	Construiu dois pontos A e B; e o segmento ligando esses pontos.	Construiu dois pontos A e B e o segmento ligando esses pontos.	Construiu dois pontos A e B e o segmento ligando esses pontos.
2	Construiu o ponto M colocando de forma aleatória sobre a reta.	Construiu o ponto M, utilizando a ferramenta de construção, chamada <i>ponto médio</i> .	Construiu o ponto M, utilizando a ferramenta de construção, chamada <i>ponto médio</i> .	Construiu o ponto M, utilizando a ferramenta de construção, chamada <i>ponto médio</i> .
3	...o ponto construído sobre a reta AB fica “solto/livre” se movimentando de um lado para o outro...	...é possível perceber que o ponto M localizado entre os pontos A e B, fica com distâncias diferentes de um para o outro.	Ao finalizar a construção de um ponto no meio do segmento de forma livre, tentaram traçar uma reta para que se tornasse uma reta perpendicular.	...o aluno deixa o ponto M construído no segmento e fica testando os pontos e reta, fazendo a movimentação de um lado para o outro do ponto e do segmento.
4	...ao tentar movimentar os pontos livres do segmento de reta, observa-se que não há locomoção dos pontos...	Não foi realizado.	Percebe-se que o aluno, ao testar os pontos, movimentando-o para testar a construção, identifica que ocorre uma deformação na construção, ou seja, que não se mantém a construção inicialmente executada.	...é possível perceber quando se deslocou a reta.

5	Construiu o ponto D.	Construiu o ponto D.	Não construiu.	Não construiu.
6	...uma observação é que essa dupla para poder realizar a construção da reta paralela, precisou também utilizar dois pontos, ou seja, para realizar a construção do segmento no software era necessário a construção de dois pontos. Mas não usou a ferramenta retas paralelas.	...para poder construir as retas paralelas foi construído um novo ponto, chamado de D e um outro ponto para que pudesse construir a reta paralela". Mas não usou a ferramenta retas paralelas.	...a dupla para poder construir uma nova reta e que fosse paralela ao segmento AB, foi necessário criar dois novos pontos chamados de C e D para que assim existisse um novo segmento que fosse paralelo. Mas não usou a ferramenta retas paralelas.	Não construiu. Não usou as
7	Foi realizada a movimentação.	Foi realizada a movimentação.	Não foi realizada a movimentação dos pontos.	Foi realizada a movimentação.
8	Foi salvo.	Foi salvo.	Foi salvo.	Foi salvo.
FO				

Dessa forma, percebe-se que os sujeitos conseguiram realizar a construção do segmento AB, mas não usaram a ferramenta que permite construir diretamente o segmento; demonstraram a necessidade de construir dois pontos livres para, a partir daí, construir o segmento AB. Em seguida, realizaram a construção do ponto M, porém de forma aleatória, no olho, sem utilizar as propriedades. Durante o deslocamento dos pontos a figura foi desconstruída, uma vez que não haviam sido utilizadas as propriedades geométricas.

Durante o deslocamento da figura, observou-se que os sujeitos movimentaram os pontos, mas sem sucesso, pois a construção estava sem a utilização das propriedades, ou seja, construída de forma aleatória.

Percebe-se que construíram a reta paralela, usando como ponto de partida o ponto D e trazendo assim um novo elemento, a construção do ponto C, para deixar a nova reta paralela ao segmento AB. O software demanda dois pontos para traçar uma paralela, para o software o ponto em que ela deve passar (C) e a quem ela deve ser

paralela (AB). No entanto eles não fizeram isso, construíram um ponto auxiliar, construíram uma reta passando por esses dois pontos e tentaram colocar a reta visualmente paralela ao segmento.

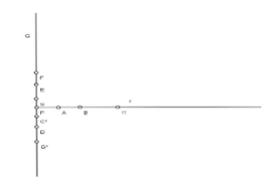
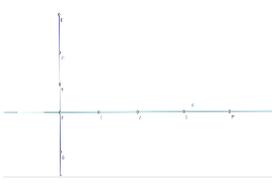
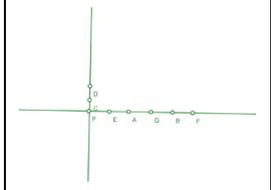
Durante o novo deslocamento ocorreu a desconstrução da figura que foi reconstruída, porém, ainda de forma aleatória.

## ATIVIDADE - 2

- 1) Crie os pontos **A** e **P**;
- 2) Construa a reta **r** que passa por **A** e **P**;
- 3) Construa um ponto **B** da reta **r**, de tal forma que a distância de **AP** seja a mesma de **PB**;
- 4) Aproxime o ponto **A** do ponto **P**;
- 5) O ponto **B** também se aproxima?
- 6) Se não, apague o ponto **B**, crie outro e tente outra vez.
- 7) Explique como você construiu o ponto **B**, para que ele satisfaça a condição solicitada:
- 8) Salve o arquivo com o nome A02.fig

## AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	Construiu dois pontos A e P; ligados por um segmento.	Construiu dois pontos A e P; ligados por um segmento.	Construiu dois pontos A e P; ligados por um segmento.	Construiu dois pontos A e P; ligados por um segmento.
2	Construiu a reta <b>r</b> ligando os respectivos pontos.	Construiu a reta <b>r</b> ligando os respectivos pontos.	Construiu a reta <b>r</b> ligando os respectivos pontos.	Construiu a reta <b>r</b> ligando os respectivos pontos.
3	Dessa forma o ponto B que seria o ponto médio, não ficou localizado corretamente no centro. É possível de perceber quando se deslocou a reta.	...as construções são realizadas, porém de forma aleatória e deixando de lado a construção...	Percebe-se que ao movimentar os pontos de um lado para o outro, o aluno realizou a construção do ponto B ao centro de A e P, tentando reproduzir como ponto médio. Sendo assim o sujeito não construiu a circunferência para encontrar o ponto médio.	Construiu a reta <b>r</b> ligando os respectivos pontos. "Percebe-se ainda que os sujeitos construíram o ponto ao centro do segmento, tentando representar como se fosse o ponto médio...
4	Os sujeitos fizeram a tentativa de verificar como se comporta o ponto ao modificar toda a construção.	Não foi realizado.	Os sujeitos ficam apenas deslocando os pontos e o segmento, movimentando-os para baixo e para cima.	Para identificar se o ponto está fixo ou não na reta, ocorre a movimentação do ponto, deixando em evidencia que o ponto não foi

				construído usando as propriedades geométricas.
5	Sim, ao movimentar se aproxima.	Sim, ao movimentar se aproxima.	Sim, ao movimentar se aproxima.	Não deu resposta.
6	Ele foi construído aleatoriamente pelos sujeitos.	Ele foi construído aleatoriamente pelos sujeitos.	Os sujeitos ainda realizaram o teste mexendo nos pontos para verificar se depois de toda a reconstrução ele estava no lugar e dentro das propriedades geométricas.	Houve um erro que ocasionou na perda da construção realizada até o momento. Posteriormente foi feita a reconstrução, porém agora apenas com os três pontos A, P e B finalizando com os testes de movimentos.
7	“Fui seguindo a atividade...”	Não deixou nada escrito na ficha.	Não deixou nada escrito na ficha.	Não deixou nada escrito na ficha.
8	Foi salvo.	Foi salvo.	Foi salvo.	Foi salvo.
FO				

Observa-se que os sujeitos realizaram a construção dos pontos A e P, seguido da construção da reta  $r$  passando pelos respectivos pontos. Entretanto, a construção foi realizada de forma aleatória, sem preocupação em manter as distâncias. Nessa atividade, como apresentamos na análise prévia, eles deveriam perceber que o ponto P deveria ser o ponto médio do segmento AB. Para isso, seria preciso construir a circunferência de raio PA e centro em P, para obter o ponto B na interseção da circunferência com a reta “ $r$ ”. Apesar de se tratar já da segunda atividade da sequência, os alunos ainda não se apropriaram da ideia que as construções devem ser feitas a partir das propriedades, ou seja, ainda não demonstram movimentação na direção de um nível de pensamento geométrico mais avançado.

Durante o processo de aproximação, observa-se que os sujeitos aproximaram, mas também os afastaram, deixando os respectivos pontos com distâncias diferentes.

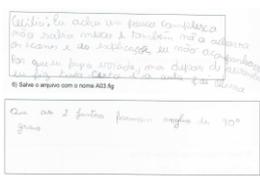
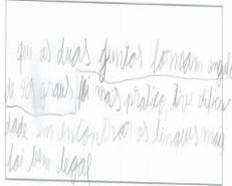
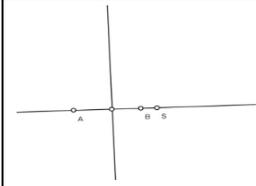
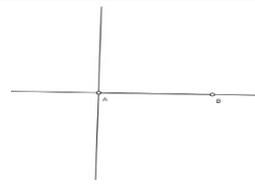
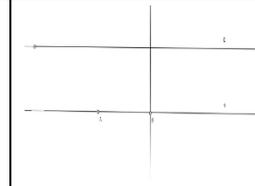
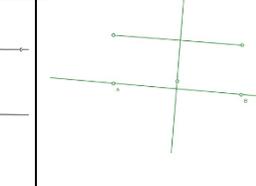
A aproximação e o afastamento dos pontos deixaram a construção sem distâncias iguais.

### ATIVIDADE - 3

- 1) Crie os pontos **A** e **B**;
- 2) Construa a reta **s** que passa por **A** e **B**;
- 3) Construa as retas perpendiculares a **s**, que passem pelos pontos **A** e **B**;
- 4) Desloque os pontos **A** e **B**;
- 5) Qual a relação que existe entre as duas retas perpendiculares que você construiu?
- 6) Salve o arquivo com o nome A03.fig

### AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	Os sujeitos construíram os pontos A e B.	Os sujeitos construíram os pontos A e B.	Os sujeitos construíram os pontos A e B.	Os sujeitos construíram os pontos A e B.
2	Eles construíram o segmento AB, usando a ferramenta de construção dos pontos livres, seguido do uso da ferramenta segmento de reta, ligando os dois pontos, porém não a nomeou como reta "s".	Eles construíram o segmento AB, usando a ferramenta de construção dos pontos livres, seguido do uso da ferramenta segmento de reta, ligando os dois pontos, porém não a nomeou como reta "s".	Eles construíram o segmento AB, usando a ferramenta de construção dos pontos livres, seguido do uso da ferramenta segmento de reta, ligando os dois pontos, porém não a nomeou como reta "s".	Eles construíram o segmento AB, usando a ferramenta de construção dos pontos livres, seguido do uso da ferramenta segmento de reta, ligando os dois pontos, porém não a nomeou como reta "s", ou seja, colocando uma reta sobre ele.
3	...o aluno inicialmente constrói um ponto B (feito aleatoriamente), fora da reta, em seguida ele selecionou a ferramenta "reta perpendicular" e colocou sobre o segmento de reta "s", passando por cima do ponto B.	Os sujeitos construíram a reta perpendicular a partir da construção de dois pontos, livres e conectados por uma reta, em seguida foi utilizado uma ferramenta de construção de retas perpendiculares.	Os sujeitos construíram apenas a os dois pontos, munidos de livres e conectados por uma reta, em seguida foi utilizado uma ferramenta de construção de retas perpendiculares.	Os sujeitos realizaram a construção de dois pontos, conectados por uma reta, seguido do uso da ferramenta <i>reta perpendicular</i> , <i>cruzando sobre a reta anteriormente construída</i> .
4	...percebe-se que os sujeitos ficaram realizando a	Foi feito em seguida uma manobra de afastamento,	Não há evidências de que foi movimentado	Não há evidências de que foi movimentado os

	construção e desconstrução da reta.	utilizando o mouse para afastar as retas em seguida sobrepondo-as.	os pontos ou qualquer outra figura.	pontos ou qualquer outra figura.
5	Não respondeu.		A figura construída pelos sujeitos não apresenta ligação com a pergunta.	
6	Sim, salvou.	Sim, salvou.	Sim, salvou.	Sim, salvou.
FO				

Fonte: análise dos dados - Dupla 1

É possível de observar que uma das duplas como mostra acima, em vez de nomear a reta “s” eles criaram um ponto e nomearam de S, criando assim retas perpendiculares entre si. O ponto de interseção das duas retas foi construindo a partir da interseção, mas sem a utilização das propriedades.

De acordo com a transcrição da dupla 3 e 4, identifica-se que a dupla não consegue compreender o que pede a atividade, deixando a impressão que estaria em um nível talvez até mesmo inferior ao primeiro nível de Van-Hiele.

A dupla 5 e 6 com a figura mostra que foi a construção da de uma reta vertical que passa por B foi construída usando a ferramenta “*reta perpendicular*” e colocada visualmente nessa posição. A dupla usou a ferramenta *reta perpendicular* do software, para poder realizar a construção. A reta “D” foi construída usando a ferramenta do software de construção de “*retas perpendiculares*”. Para isso foi necessário criar um ponto, que não foi nomeado pela dupla. Também aqui podemos perceber a dificuldade dos sujeitos em compreender o enunciado da atividade. No caso dessa atividade, a terceira reta foi construída como sendo perpendicular à segunda reta construída (perpendicular à “s” passando por B), e não perpendicular à reta s passando pelo ponto A. Dessa forma a propriedade que esperávamos que eles construíssem (que duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si) não teve sucesso.

A dupla 7 e 8 construiu uma reta que corta ao centro do segmento que passa por A e B, que também é uma reta perpendicular, construída a partir do uso da ferramenta segmento de reta. Percebe-se assim que a dupla apresenta dificuldades para compreender os enunciados e realizar assim a construção solicitada no enunciado da questão, nos levando a inferir que podem estar num nível de conhecimento geométrico muito mais baixo do que o nível 1 de Van Hiele.

Observa-se ainda que as duplas realizaram a construção dos pontos A e B, seguido da representação geométrica das retas ligando os respectivos pontos. Em seguida, observa-se que os sujeitos, utilizando a ferramenta reta perpendicular, construíram sobre o segmento AB a reta perpendicular.

Conclui-se que nessa atividade os sujeitos se apresentam em nível de conhecimento que se caracteriza bem abaixo do nível 1 de Van Hiele, pois apresentam dificuldades de compreender os enunciados, e continuam em um nível muito baixo no modelo de Van-Hiele.

De forma geral, os sujeitos demonstram como menciona a teoria de Van Hiele que estão avançando, pois do nível 1, o de identificação e reconhecimento das figuras, está bem definido, e o avanço denotado, deve-se ao fato da utilização de ferramentas de construção de ângulos retos, retas perpendiculares e paralelismo.

## ETAPA B

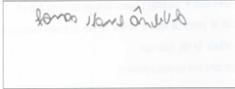
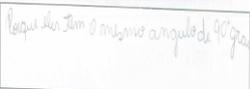
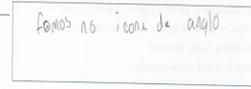
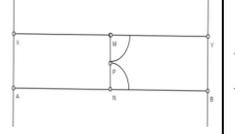
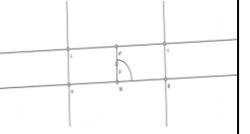
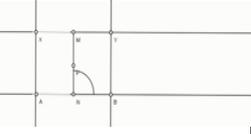
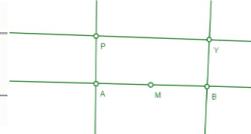
### ATIVIDADE - 1

- 1) Construa o segmento **AB**;
- 2) Pelo ponto **A**, construir a perpendicular ao segmento **AB**. Sobre essa reta construir o ponto **X**.
- 3) Pelo ponto **B**, construir a perpendicular ao segmento **AB**. Sobre essa reta construir o ponto **Y**
- 4) Desloque os pontos da figura e verifique se as retas continuam sendo perpendiculares aos segmentos. Se não continuarem, recomeçar a construção.
- 5) Os ângulos **XÂB** e **YBA** são iguais? Quanto eles medem?
- 6) Construa um segmento **MN**.
- 7) Construa o ângulo **PMN** de tal forma que sua medida seja de  $45^\circ$ .
- 8) Desloque os elementos de sua figura, se o ângulo não continuar com  $45^\circ$ , refaça a figura.
- 9) Explique como você fez para obter o ângulo de  $45^\circ$ ?
- 10) Salve o arquivo com o nome B01.fig

### AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	Construiu o segmento AB.	Construiu o segmento AB.	Construiu o segmento AB.	Construiu o segmento AB.
2	...consequentemente construiu dois segmentos de reta, onde cada um deles passavam por um respectivo ponto, A e B, criando ângulos de $90^\circ$ .	Em seguida, observa-se que os sujeitos construíram uma reta perpendicular, erra essa que teve sua intersecção nomeada por <b>x</b> e uma outra construída nomeada por <b>y</b> , o que se conclui que a construção foi feita de forma aleatória.	...seguindo da construção do segmento de reta...	...foi construído uma reta perpendicular, utilizando um segmento de reta e deixando-o passando pelo ponto A e outra pelo ponto B.
3	Percebe-se que os sujeitos deram início a um processo de construção utilizando ferramenta de retas paralelas que a partir disso, deu origem a retas perpendiculares ao segmento AB.	...percebem que realizou a construção fora do percurso que a sequência didática orienta e realiza a reconstrução, fazendo duas retas perpendiculares da seguinte forma, uma passando pelo ponto A e outra pelo ponto B.	Posteriormente foi apagado essa construção e feito duas novas construções, uma passando pelo ponto A e outra passando pelo ponto B, ambas as retas foram construídas de forma perpendicular aos respectivos pontos citados.	...foi construído uma reta perpendicular, utilizando um segmento de reta e deixando-o passando pelo ponto A e outra pelo ponto B.

4	Houve o deslocamento e a figura permaneceu perpendicular.	Observa-se ainda que os sujeitos ficam manipulando os vértices como a sequência didática orienta para ver o que acontece.	Percebe-se que ao longo da construção os sujeitos realizaram a movimentação dos pontos para identificar o que ocorria nesse processo de rotação, de ampliação e redução da figura.	É possível perceber que os sujeitos realizaram a movimentação dos pontos, vértices rotacionando, ampliando e reduzindo a figura construída, porém desconfigurando a sua formação de “retângulo”.
5	Em seguida os sujeitos fizeram a construção de dois pontos sobre essa reta paralela ao segmento AB, nomeando-a por XY. Então criaram indiretamente um retângulo com quatro ângulos retos, com dois lados iguais dois a dois...	...posteriormente realizaram a construção do ângulo de $90^\circ$ entre os respectivos pontos MNB.	Dando continuidade à construção da figura geométrica, percebe-se que os sujeitos realizaram a construção de mais dois pontos, sendo nomeado como <b>x</b> e <b>y</b> .	Não foi realizado a construção do ângulo.
6	...realizou a ligação dos respectivos pontos MN, apontando como se fosse os pontos médios dos respectivos segmentos.	...um entre os pontos A e B e outro entre os pontos X e Y, que passam a nomear por M e N, observando que eles foram construídos em paralelo.	Esses pontos foram construídos na reta anteriormente construída sobre os pontos A e B. Em seguida foi construído um segmento de reta passando e ligando os pontos <b>X</b> e <b>Y</b> . Surgindo assim um retângulo regular com lados iguais dois a dois.	Em seguida os sujeitos deram início a construção de um ponto médio entre X e Y e entre A e B, fazendo assim a ligação desses pontos por meio de um segmento de reta. Posteriormente a essa construção foi feito a localização do ponto médio entre M e N nomeando-o por P.
7	Não construiu ângulo de $45^\circ$ e sim de $90^\circ$ .	Não construiu ângulo de $45^\circ$ e sim de $90^\circ$ .	Observa-se ainda que os sujeitos realizaram a construção e medição dos ângulos utilizando a ferramenta de	Não, foi construído ângulos retos.

			ângulo. Esses Ângulos foram construído ligando os pontos PMB, PNY, AMP e BMP.	
8	Houve a movimentação, dos ângulos, mas não de 45° e sim dos de 90°.	Houve a movimentação, dos ângulos, mas não de 45° e sim dos de 90°.	Observa-se ainda que ao movimentar os pontos, a figura tem uma parte “desconfigurada”, o que nos permite inferir que não foi realizado a construção utilizando as propriedades geométricas para realizar a construção.	É possível perceber que os sujeitos realizaram a movimentação dos pontos, vértices rotacionando, ampliando e reduzindo a figura construída, porém desconfigurando a sua formação de “retângulo”.
9				
10	Figura salva.	Figura salva.	Figura salva.	Figura salva
FO				

O quadro acima destaca alguns extratos das atividades realizadas pelos sujeitos durante a construção das atividades, dessa forma, percebe-se que de acordo com os objetivos e as análises prévias que tinha como objetivo despertar no aluno os conceitos geométricos que serão necessários para construção dos quadriláteros.

Observa-se que a atividade despertou nos sujeitos propriedades como a de construção e representação do ângulo, a construção de retas paralelas (como fazer a construção), representação do ponto médio, nomeação dos vértices e a construir retas perpendiculares.

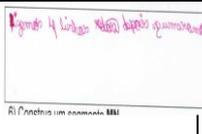
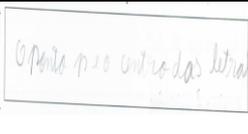
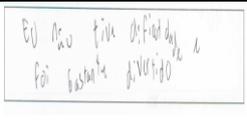
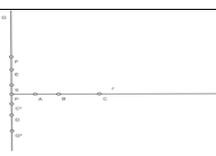
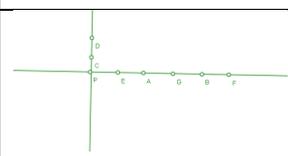
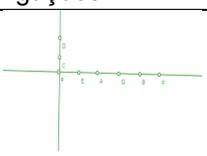
No entanto, os sujeitos não realizaram a construção de ângulos de 45°, porém conseguiram nomear os ângulos de 90° e assim os nomear. Percebe-se também que os sujeitos realizaram a construção da representação do retângulo, pois identificaram que entre duas retas paralela com duas retas perpendiculares poderia formar uma figura com quatro ângulos retos.

## ATIVIDADE - 2

- 1) Construa uma reta  $r$  e um ponto  $P$  sobre ela.
- 2) Pelo ponto  $P$ , construir a perpendicular à reta  $r$ , que passe pelo ponto  $P$ . Chame essa reta de  $s$ .
- 3) Determinar sobre a reta  $r$ , dois pontos  $A$  e  $B$  de tal forma que a distância do ponto  $P$  ao ponto  $A$  seja a mesma do ponto  $P$  ao ponto  $B$  ( $PA=PB$ ).
- 4) Determinar sobre a reta  $s$ , dois pontos  $C$  e  $D$  de tal forma que ( $PA=PB=PC=PD$ ).
- 5) Movimente os pontos da figura e verifique se essa relação continua ocorrendo. Se não, recomeçar.
- 6) Determinar outros três pontos ( $E$ ,  $F$  e  $G$ ), que mantenham a mesma relação de distâncias ( $PA=PB=PC=.....PF=PG$ ).
- 7) O que você pode dizer sobre os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  e  $G$ , em relação ao ponto  $P$ ? Como poderíamos chamar a região do plano formada por todos os pontos que satisfaçam a mesma relação?
- 8) Salve o arquivo com o nome B02.fig

## AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	Realizou a construção, mas não salvou.	...” os sujeitos construíram dois pontos, porém se utilizando já da construção do segmento, isso com um ponto de origem chamado de P.”	“...realizaram a construção dos respectivos pontos A e B, seguido da construção de um segmento de reta, que perpassou os pontos. “	Realizou a construção de forma aleatória sem as devidas ligações
2	Realizou a construção, mas não salvou.	Não realizou a construção dessa forma, o que foi feito, foi a organização de um outro modelo o que deixou toda a construção sobreposta.	Sim realizou.	Realizou a construção de forma aleatória sem as devidas ligações
3	Realizou a construção, mas não salvou.	Não realizou a construção dessa forma, o que foi feito, foi a organização de um outro modelo o que deixou toda a construção sobreposta.	Esses pontos foram construídos na reta anteriormente construída sobre os pontos A e B.	Realizou a construção de forma aleatória sem as devidas ligações
4	Realizou a construção, mas não salvou.	Não realizou a construção dessa forma, o que foi feito, foi a organização de um outro modelo o que deixou toda a construção sobreposta.	Em seguida foi construído os respectivos pontos C e D sobre o segmento de reta S fechando assim na representação do quadrado.	Realizou a construção de forma aleatória sem as devidas ligações
5	Realizou a construção, mas não salvou.	Não realizou a construção dessa forma, o que foi feito, foi a organização de um outro modelo o que	Percebe-se que ao longo da construção os sujeitos realizaram a movimentação dos pontos para identificar o que ocorria nesse processo	Realizou a construção de forma aleatória sem as devidas ligações

		deixou toda a construção sobreposta.	de rotação, de ampliação e redução da figura. Observa-se ainda que ao movimentar os pontos, a figura tem uma parte “desconfigurada”, o que nos permite inferir que não foi realizado a construção utilizando as propriedades geométricas para realizar a construção.	
6	Realizou a construção, mas não salvou.	É possível observar que o critério de ter a mesma distância foi construído apenas no olhar e não utilizado as propriedades.	É possível observar que o critério de ter a mesma distância foi construído apenas no olhar e não utilizado as propriedades.	Realizou a construção de forma aleatória sem as devidas ligações
7				
8	Realizou a construção, mas não salvou.	Salvo corretamente.	Salvo corretamente.	Realizou a construção de forma aleatória sem as devidas ligações
FO	Realizou a construção, mas não salvou.			

O Objetivo dessa atividade era levar os sujeitos a mobilizar conhecimentos geométrico para construção da mediatriz, dessa forma, observa-se que os sujeitos fizeram a utilização da ferramenta de construção do ponto médio assim como as ferramentas de construção de distância entre dois pontos e de reflexão.

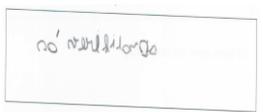
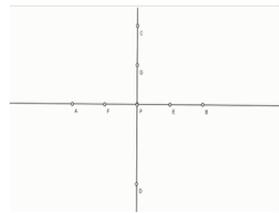
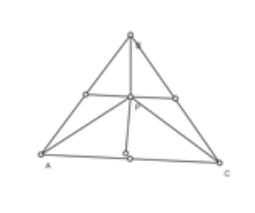
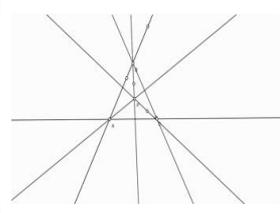
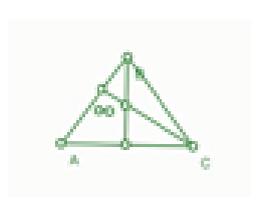
Dessa forma percebe-se também que os sujeitos construíram a mediatriz de dois segmentos, porém de forma aleatória, sem o uso das propriedades geométricas. Observa-se ainda que os sujeitos ao explorar um pouco mais o software para encontrar outras ferramentas que pudessem ajuda-los a construir uma nova abordagem, foi feito uma desconstrução e posterior construção. Isso permitiu aos sujeitos construir uma nova aparência de como a figura ficaria depois de finalizada.

### ATIVIDADE - 3

- 1) Construa três pontos **A**, **B** e **C** não alinhados.
- 2) Determine o ponto **P**, que esteja a mesma distância dos pontos **A**, **B** e **C**.
- 3) Deslocar os pontos da figura e verificar se eles continuam mantendo a mesma distância. Se não, recomeçar.
- 4) Explique como você resolveu o problema.
- 5) Salve o arquivo com o nome B03.fig

### AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	<p>...utilizaram a ferramenta <i>ponto livre</i> e construíram aleatoriamente três pontos distintos na <i>janela geométrica</i>... utilizaram a ferramenta <i>segmento de reta</i> e realizaram a ligação entre os pontos, formando uma cruz, deixando ao centro um ponto. Posteriormente, foi nomeado cada um desses pontos como A, B, C e D. “</p>	<p>Foi feito a construção de três pontos aleatórios, e em seguida nomeados os pontos por A, B e C.</p>	<p>Os sujeitos deram início a construção utilizando a ferramenta <i>ponto livre</i> e assim construindo três pontos não alinhados. Posteriormente foi nomeado por A, B e C.</p>	<p>...foi utilizado a ferramenta de construção <i>ponto livre</i>, construindo de forma aleatória os pontos A, B e C, nessa respectiva ordem.</p>
2	<p>Em seguida percebe-se que os sujeitos realizaram o cruzamento das retas, de dois segmentos, utilizando a interseção para ser o ponto P, nomeando-o assim.</p>	<p>Observa-se que para construir o ponto P, os sujeitos realizaram a ligação dos pontos por meio de um segmento de reta, que seguiu pelo encontro do ponto central médio. Posteriormente a isso, foi feita a ligação dos pontos, de forma transversa, ou seja, de forma a cruzar por dentro do triângulo, ligando o vértice ao ponto médio do segmento exterior e assim sucessivamente.</p>	<p>Para encontrar o ponto ao centro do triângulo, o ponto P e que tivesse a mesma distância dos demais pontos, os sujeitos utilizaram a ferramenta chamada de <i>ponto de reflexão</i>, que permite a construção de um ponto a mesma distância dos demais.</p>	<p>Em seguida os sujeitos utilizaram a mesma ferramenta que deu início ao cruzamento de retas passando de um lado para o outro conectando nas arestas do triângulo, como se fosse ao ponto médio do lado oposto, mas sem construir de fato o ponto médio, fazendo surgir assim um ponto no centro do triângulo.</p>
3	<p>Observa-se ainda que durante o</p>	<p>Observa-se ainda que os sujeitos</p>	<p>Por fim observa-se que os sujeitos</p>	<p>Percebe-se que os sujeitos ficaram</p>

	deslocamento dos pontos, a figura construída permaneceu sem alteração.	realizaram a movimentação dos pontos, dos vértices do triângulo, identificando que ao movimentar os pontos, a figura mudou de posição, se desconfigurando. Sendo assim os sujeitos ficaram tentando reconstruir.	ficaram brincando com a movimentação dos vértices, ampliando, reduzindo, rotacionando a figura.	rotacionando o triângulo, o que levou a desconfiguração.
4				Não deixou nenhum relato.
5	Salvo corretamente.	Salvo corretamente	Salvo corretamente	Salvo corretamente
FO				

Observa-se que os sujeitos ao realizar a construção e relacionando com as análises preliminares realizadas, percebe-se que os sujeitos não utilizaram a construção da circunferência para tal, o que nos leva a perceber que foi feito um triângulo, e com três arestas partindo dos respectivos vértices se conectando com ponto médio do lado oposto, fazendo assim a construção do ponto central do triângulo.

Observa-se ainda que os sujeitos mobilizaram nessa construção as seguintes propriedades geométricas: O ponto, reta, semirreta, segmento de reta, a construção do ponto médio e de retas perpendiculares.

Como as figuras anteriormente mostra, percebe-se que os sujeitos construíram em geral as figuras de forma aleatória, se o uso das propriedades, sem que fosse de forma ordenada.

## ETAPA C

### ATIVIDADE - 1

- 1) Construa três pontos **A**, **B** e **C** não alinhados.
- 2) Construa o paralelogramo **ABCD**.
- 3) Deslocar os vértices do paralelogramo. Se ele não permanece um paralelogramo, recomeçar a construção.
- 4) Medir os lados e os ângulos do paralelogramo **ABCD**.
- 5) Deslocar os vértices do paralelogramo, observando o que acontece.
- 6) Determinar o ponto **O**, centro do paralelogramo.
- 7) Construir e medir os segmentos **AO**, **BO**, **CO** e **DO**.
- 8) Deslocar os pontos do paralelogramo, observando o que acontece.
- 9) Salvar o arquivo com o nome C01.fig

### AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	...percebe-se que os sujeitos inicialmente utilizaram a ferramenta ponto livre e construíram um ponto na interface gráfica do software que posteriormente realizou a nomeação por A, posteriormente construíram os respectivos pontos C e D.	...os sujeitos utilizaram a ferramenta ponto livre e construíram de forma aleatória quatro pontos, nomeando-os por A, B, C e D seguindo da construção de suas respectivas ligações, isso por meio da ferramenta segmento de reta, fazendo surgir assim a representação do quadrado.	Não realizou a construção.	...os sujeitos utilizaram a ferramenta de construção de ponto livre, e assim deram início construindo três pontos distintos nomeados por A, B e C que posteriormente foi apagado e reconstruído.
2	...percebe-se que os sujeitos inicialmente utilizaram a ferramenta ponto livre e construíram um ponto na interface gráfica do software que posteriormente realizou a nomeação por A. Percebe-se que esse mesmo movimento ocorreu para realizar a construção dos respectivos pontos B, C e D.	...construíram de forma aleatória quatro pontos, nomeando-os por A, B, C e D seguindo da construção de suas respectivas ligações, isso por meio da ferramenta segmento de reta, fazendo surgir assim a representação do quadrado.	Não realizou a construção.	...foi feito a nomeação dos quatro pontos que se tornaram os quatro vértices do retângulo, por A, B, C e D.
3	...observa-se que os sujeitos realizam	Os sujeitos realizaram a	Não realizou a construção.	É possível perceber que os sujeitos

	<p>alguns testes movimentando os vértices do paralelogramo testando as propriedades e o que ocorre com a figura quando a movimenta. Posteriormente a movimentação, observa-se que os sujeitos realizam a tentativa de alinhamento entre os pontos e semirretas para que o paralelogramo fica dentro das propriedades.</p>	<p>movimentação da figura construída de forma que a cada movimento realizado, existia uma desconfiguração do quadrado, figura construída.</p>		<p>realizaram a manipulação dos vértices para testar e observar o que ocorreria com a construção e suas respectivas propriedades.</p>
4	<p>Os sujeitos não realizaram a medição dos ângulos, nem das diagonais e nem dos vértices.</p>	<p>Percebe-se na construção realizada que a os sujeitos não conseguiram realizar a medição das arestas do quadrado, ficando dessa forma, claro que as dificuldades dos sujeitos foram em encontrar uma ferramenta para realizar essa medição, não por culpa deles mais pela falta de tempo para aplicação.</p>	<p>Não realizou a construção.</p>	<p>Não foi feito a medição dos ângulos e nem das arestas do paralelogramo.</p>

5	<p>...observa-se que os sujeitos realizam alguns testes movimentando os vértices do paralelogramo testando as propriedades e o que ocorre com a figura quando a movimenta. Posteriormente a movimentação, observa-se que os sujeitos realizam a tentativa de alinhamento entre os pontos e semirretas para que o paralelogramo fica dentro das propriedades.</p>	<p>Durante o deslocamento dos vértices, observa-se que os sujeitos não conseguiram realizar a construção utilizando as propriedades geométricas, do paralelogramo o que ocasiona na reformulação da resolução.</p>	<p>Não realizou a construção.</p>	<p>É possível perceber que os sujeitos realizaram a manipulação dos vértices para testar e observar o que ocorreria com a construção e suas respectivas propriedades.</p>
6	<p>Observa-se na figura que o ponto central foi construído, porém não nomeado como ponto O. Dessa forma, é possível perceber que houve a compreensão da pergunta, porém houve o esquecimento da nomeação.</p>	<p>Não foi realizado a construção do ponto central da figura.</p>	<p>Não realizou a construção.</p>	<p>Não foi realizado a construção do ponto central da figura.</p>
7	<p>Posteriormente a construção, percebe-se que os sujeitos ficam fazendo a construção da representação do ângulo existente entre os vértices construindo suas diagonais por meio dos segmentos de reta, ligando todos os pontos. Observa-se que os sujeitos não realizaram as medições das arestas.</p>	<p>Não foi realizado a construção da medição dos vértices da figura. Possivelmente por não conseguirem acessar ou descobrir a ferramenta do software que contribui para fazer isso.</p>	<p>Não realizou a construção.</p>	<p>Não foi realizado a construção da medição dos vértices da figura. Possivelmente por não conseguirem acessar ou descobrir a ferramenta do software que contribui para fazer isso.</p>

<p>8</p>	<p>Sendo assim, percebe-se que os sujeitos realizam uma nova experiência em testar os vértices do paralelogramo movimentando-os para analisar o que ocorre ou se desfaz a construção da figura. Senso assim, observa-se que ao rotacionar a figura, ela teve suas medidas deslocadas.</p>	<p>...os movimentos realizados ocorreram, porém ocorreu a desconfiguração da figura...</p>	<p>Não realizou a construção.</p>	<p>É possível perceber que os sujeitos realizaram a manipulação dos vértices para testar e observar o que ocorreria com a construção e suas respectivas propriedades.</p>
<p>9</p>	<p>Salvo corretamente.</p>	<p>Salvo corretamente.</p>	<p>Salvo corretamente.</p>	<p>Salvo corretamente.</p>
<p>FO</p>				

Nessa atividade os alunos precisaram mobilizar os conhecimentos elaborados anteriormente e, a partir deles, construir os conhecimentos relativos as propriedades dos quadriláteros. Observa-se que os sujeitos nessa atividade utilizaram algumas propriedades geométricas para poder realizar a construção do paralelogramo, como o ponto, reta, semirreta, segmento de reta, construção de reta perpendicular.

Perceber-se que os sujeitos construíram não só um paralelogramo na posição prototípica, mas o retângulo também observando que os sujeitos realizaram essa construção nomeando os ângulos e construindo as medidas dos ângulos.

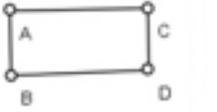
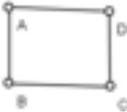
Vale salientar que as construções realizadas pelos sujeitos demonstram que foram construídas arbitrariamente, porém em alguns momentos percebe-se que os sujeitos utilizavam um mínimo de das propriedades.

## ATIVIDADE - 2

- 1) Construir o segmento **AB**.
- 2) Construir o retângulo **ABCD**.
- 3) Deslocar os pontos **A, B, C** e **D**. Se a figura não continua sendo um retângulo, recomeçar a construção.
- 4) Explicar porque sua figura é um retângulo.
- 5) Salvar o arquivo com o nome C02.fig.

## AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	Sim, construíu os dois pontos A e B, utilizando a ferramenta <i>ponto livre</i> , ligados por um <i>segmento de reta</i> .	Sim, construíu os dois pontos A e B, ligados por um segmento de reta.	Sim, construíu os dois pontos A e B, ligados por um segmento de reta.	Sim, construíu os dois pontos A e B, ligados por um segmento de reta.
2	...os sujeitos construíram uma representação geométrica do retângulo, nomeando cada ponto pelas letras A, B, C e D.	...os sujeitos utilizaram a ferramenta ponto livre e construíram de forma aleatória quatro pontos, nomeando-os por A, B, C e D seguindo da construção de suas respectivas ligações, isso por meio da ferramenta segmento de reta, fazendo surgir assim a representação do quadrado.	Essa construção ocorreu seguindo do posicionamento dos quatro pontos e posteriormente a ligação entre eles com o segmento de reta, nomeando-os por A, B, C e D construindo assim um quadrado.	Em seguida, observa-se que foi feito a nomeação de cada um dos vértices por A, B, C e D construindo assim um quadrado. Tendo em seguida a realização dos testes das propriedades.
3	Percebe-se que posteriormente a construção do retângulo, os sujeitos realizaram a movimentação dos pontos/vértices fazendo movimentos de rotação e translação, percebe-se ainda que os sujeitos realizaram a ampliação e redução do retângulo.	Os sujeitos realizaram a movimentação da figura construída de forma que a cada movimento realizado, existia uma desconfiguração do quadrado, figura construída.	Os sujeitos realizaram a movimentação dos pontos e arestas utilizando a ampliação e redução da figura.	Os sujeitos realizaram a manipulação da figura, mexendo com os vértices e suas respectivas arestas. Podendo assim observar o que ocorre com as propriedades ou a representação da figura...

4	<p>Porque todos eles são de 90° graus</p>	<p>Porque dois lados são iguais e os outros são diferentes dos outros e dois ângulos</p>	<p>Porque dois lados são iguais e os outros são diferentes dos outros e dois ângulos</p>	<p>Porque de um ponto</p>
5	Salvou a figura corretamente.	Salvou a figura corretamente.	Salvou a figura corretamente.	Salvou a figura corretamente.
FO				

O objetivo dessa atividade foi de levar os sujeitos a elaborar a construção do retângulo a partir de um dos lados, ele precisou mobilizar duas retas perpendiculares e em alguns casos foi de forma arbitrária, utilizando retas que passassem pelos vértices.

Observa-se que a partir de um ponto os sujeitos foram construindo e determinando a formação geométrica do retângulo. Os sujeitos utilizaram algumas propriedades geométricas como a mobilização do ponto, reta, semirreta, segmento de reta.

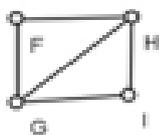
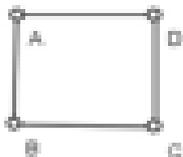
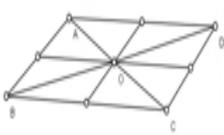
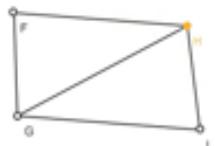
Porém, quando realizadas a comparação das análises prévias com as construções realizadas pelos sujeitos, percebe-se que os retângulos não foram construídos utilizando a circunferência, mas por meio de outros mecanismos de construção. Percebe-se ainda que os sujeitos ao movimentar os vértices das figuras, tinham as propriedades geométricas desconstruídas, permitindo concluir que os sujeitos não haviam utilizado as propriedades geométricas para realizar a construção do retângulo.

### ATIVIDADE – 3

- 1) Construir o segmento **GH**.
- 2) Construir um retângulo de forma que **GH** seja sua diagonal.
- 3) Deslocar os pontos **G** e **H**. Se a figura não continua sendo um retângulo, recomeçar a construção.
- 4) Explicar porque sua construção é um retângulo.
- 5) Salvar o arquivo com o nome C03.fig.

### AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	...construiu na janela geométrica dois pontos aleatórios, ligando-os por uma reta. Cada um desses pontos recebeu o nome de G e H.	Para realizar a construção da representação geométrica do quadrado, observa-se que os sujeitos utilizaram a ferramenta ponto livre e construirão quatro pontos livres nomeados por A, B, C e D, de forma aleatória, seguindo da conexão entre os pontos por meio do segmento de reta surgindo assim a figura do quadrado. Observa-se que os sujeitos não nomearam como atividade pede, porém, a construção está correta.	...os sujeitos utilizaram a ferramenta ponto livre e construirão quatro pontos livres nomeados por A, B, C e D, de forma aleatória, seguindo da conexão entre os pontos por meio do segmento de reta surgindo assim a figura do quadrado. Observa-se que os sujeitos não nomearam como atividade pede, porém, a construção está correta.	...os sujeitos utilizaram a ferramenta do ponto livre e construíram dois pontos, nomeados por G e H.
2	...a construção aleatória de quatro pontos, com suas respectivas diagonais e quatro vértices, nomeando-os por F, G, H e I dando origem assim a figura do retângulo.	...de forma aleatória, seguindo da conexão entre os pontos por meio do segmento de reta surgindo assim a figura do quadrado.	...os sujeitos construíram quatro novos pontos nomeando-os por A, B, C e D, criando a representação geométrica do retângulo no lugar de um quadrado.	Posteriormente a construção final da representação do retângulo, foi nomeado cada um dos vértices por F, G H e I, seguido da construção de uma diagonal, ligando os vértices G e H.
3	Observa-se que ao final, os sujeitos realizaram alguns	Porém observou-se que os sujeitos tiveram que	Em seguida os sujeitos realizaram a movimentação dos	Os sujeitos realizaram a movimentação dos

	testes para observar o que ocorria com a figura quando era movimentada, mobilizando assim os vértices G e H, de forma que suas localizações na janela geométrica ficaram menores e depois ampliadas, foi possível perceber ainda que as propriedades da figura eram alteradas à medida que era movimentada.	reconstruir a figura devido a construção anterior ter ficado desconfigurada.	pontos, dos vértices, assim como da própria figura, isso com o objetivo de identificar se ocorre alguma alteração das propriedades. Sendo assim, os sujeitos permanecem movimentando os vértices, porém agora com foco em ajustar e deixar a representação geométrica o mais próximo possível do retângulo.	vértices assim como das arestas, isso foi feito com ampliação e redução das figuras, rotacionando a também. Percebe-se que os sujeitos desconstruíram a figura tendo que reconstruir.
4	<p>5) Salvar o arquivo com o nome C03.fig.</p> 	<p>Ex: as propriedades e base uma linha não são definidas</p>	<p>com qual há, de pontos, e dos pontos, há</p>	<p>Porque contém segmento formado por 4 vértices</p>
5	Salvo corretamente.	Salvo corretamente.	Salvo corretamente.	Salvo corretamente.
FO				

Essa atividade tinha como objetivo levar o aluno a realizar a construção de uma figura de quatro lados, dessa forma, o aluno pode entrar em conflito e realizar as construções de forma a divergir das construções anteriores, o que nos leva a perceber que os mesmos realizaram a representação geométrica final, os sujeitos acarretaram numa construção de forma geral sem o uso das propriedades.

No entanto percebe-se que a construção de ponto médio, os lados do retângulo ou de suas diagonais foram construídas pelos sujeitos 1 e 2, 5 e 6 que tinha sido previsto nas análises preliminares. Observa-se ainda que durante o processo de construção foi utilizado algumas representações geométricas como o ponto, o segmento de reta, a diagonal ponto médio concluindo na construção do retângulo.

Os sujeitos realizaram a construção toda de forma arbitrária, o que para os níveis de Van Hiele demonstra que os sujeitos estão num processo de abstração da

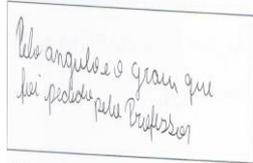
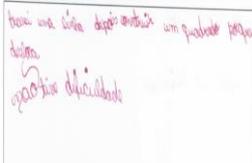
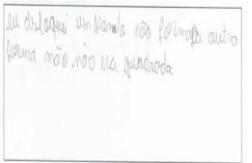
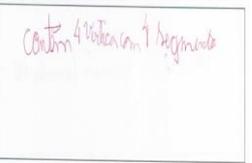
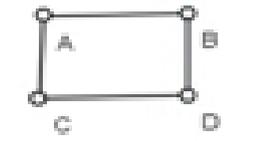
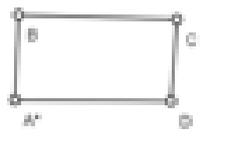
figura, identificando o seu eixo de formação e estruturação. Nessas construções, é possível de observar que os sujeitos estão num processo de identificação e uso das propriedades geométricas, o que caracteriza uma saída do processo de abstração para o das propriedades.

#### ATIVIDADE – 4

- 1) Construir o segmento **AB**.
- 2) Construir o quadrado **ABCD**.
- 3) Deslocar os pontos **A, B, C** e **D**. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
- 4) Explicar porque sua figura é um quadrado.
- 5) Salvar o arquivo com o nome C04.fig.

#### AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	...os sujeitos realizaram a construção de dois pontos livres, nomeando-os por A e B...	...os sujeitos realizaram a construção de dois pontos livres, nomeando-os por A e B... <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	...utilizando a ferramenta segmento para construir dois pontos ligados por esse segmento. Em seguida observa-se que os sujeitos construíram um retângulo, tendo como diagonal o segmento GH. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	...os sujeitos realizaram a construção de dois pontos livres, nomeando-os por A e B...
2	...em seguida foi realizada a construção de mais dois pontos nomeando por C e D, dando origem assim a figura do quadrado.	...segmentos, sendo que agora conectados e com o mesmo percurso que a construção anteriormente realizada. Passando a surgir a representação do retângulo com os seguintes vértices T,	Os vértices receberam a nomeação de G e H, porém não houve a nomeação dos outros dois vértices. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas</b>	A construção geométrica da atividade C04 foi iniciando pela ferramenta segmento de reta que construiu em sua interface gráfica simultaneamente quatro pontos distintos e suas

		O, A e C. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	<b>a nomeação foi errada.</b>	respectivas arestas, nomeando cada um desses pontos por A, B, C e D.
3	Percebe-se que os sujeitos realizaram a movimentação dos vértices e conseqüentemente da figura, percebendo assim que a figura foi desmontada, tendo que ser reconstruída.	É possível observar que os vértices da figura foi movimentando e colocado em rotação para testar as propriedades geométricas do quadrado.	Sendo assim, percebe-se que os sujeitos construíram a representação geométrica do retângulo realizando em seguida o teste de movimentar os vértices para identificar o que ocorre.	Observa-se ainda que os sujeitos posteriormente a construção realizaram alguns testes para observar o que ocorreria o movimentar os vértices usando a ampliação e redução da figura, observando assim a que a construção realizada não possuía as propriedades geométricas.
4				
5	A figura foi salva.	A figura foi salva.	A figura foi salva.	A figura foi salva.
FO				

Observa-se que no processo de construção do quadrado os sujeitos utilizaram inicialmente a mesma tática de construção do retângulo construindo a partir de quatro pontos arbitrária. Apenas uma dupla realizou a construção do quadrado utilizando como suporte a reta perpendicular. Porém, no caso de utilizar a circunferência, nenhum sujeito ou dupla utilizou.

É possível observar que de acordo com Dina e Pierre Van Hiele, a mudança de nível se dá no processo de mediação e estímulo para as construções, e no caso dos resultados acima, percebe-se que os sujeitos realizaram as construções do quadrado, usando como parâmetro o mesmo processo de construção do retângulo.

Com relação ao que foi previsto nas análises preliminares, os sujeitos apenas utilizaram as retas perpendiculares para realizar a construção do quadrado. Dessa forma, percebe-se que os sujeitos realizaram a construção por meio de um processo de visualização, de tentativa e erro.

Para realizar essas construções os sujeitos mobilizaram algumas propriedades geométricas como ponto, reta, segmento de reta e em alguns casos a utilização da reta perpendicular para construir os ângulos retos.

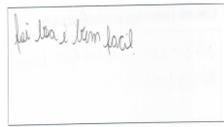
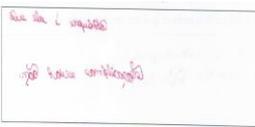
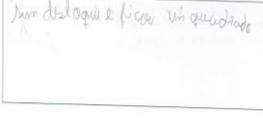
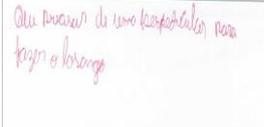
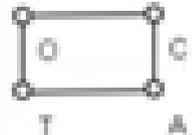
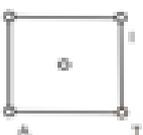
Vale mencionar que durante o processo de movimentação dos vértices das figuras construídas, os sujeitos percebiam a desconfiguração da figura e assim ficava tentando reorganizar para que voltasse à sua representação visual anterior, ou seja, a forma que aparentava estar construída corretamente e dentro das propriedades.

## ATIVIDADE – 5

- 1) Construir o segmento **TC**.
- 2) Construir o quadrado **TOCA**, de modo que **TC** seja sua diagonal.
- 3) Deslocar os vértices do quadrado. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
- 4) Que conclusões você pode tirar de sua construção?
- 5) Salvar o arquivo com o nome C05.fig.

## AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	...os sujeitos realizaram a construção de dois pontos livres, nomeando-os por T e C...	...os sujeitos realizaram a construção de dois pontos livres, nomeando-os por T e C...	...os sujeitos realizaram a construção de dois pontos livres, nomeando-os por T e C...	...os sujeitos realizaram a construção de dois pontos livres, nomeando-os por T e C...
2	Em seguida, percebe-se que os sujeitos realizaram a construção e nomeação de cada um dos vértices como O, C, T, A.	...foi construído os quatro vértices e assim formando a representação do quadrado, tendo a construção de um ponto ao centro do quadrado construído de forma aleatório. Observa-se que os	Em seguida, observa-se que os sujeitos realizaram a construção e nomeação dos vértices por T, O, C e A.	Em seguida foram ligados por suas respectivas arestas. Porém foram deletadas e reconstruídas agora com a utilização de retas perpendiculares formando quatro

		sujeitos posteriormente a construção foi realizado a nomeação dos vértices por T, O, C e A.		ângulos retos, quatro lados iguais, deixando claro a representação do quadrado nomeando-as por T, O, C e A.
3	Seguindo assim pelo uso da ferramenta de movimentação dos pontos para poder testar se as construções realizadas mantem as propriedades ao serem movimentadas.	Percebe-se que os sujeitos posteriormente a construção realizaram a movimentação dos vértices, testando as propriedades e observando que ao movimentar a figura do quadrado suas propriedades não são mantidas.	...teste de movimentar cada um deles para verificar as suas respectivas propriedades, que, no entanto, não foram mobilizadas pelos sujeitos para realizar a construção, foi feito tudo de forma aleatória, sem o uso de propriedades.	Os sujeitos 7 e 8 realizaram a movimentação dos vértices, porém a figura construída ficou toda desconfigurada. E na reconstrução os sujeitos não conseguiram deixá-lo atendendo as propriedades.
4				
5	Foi salva corretamente.	Foi salva corretamente.	Foi salva corretamente.	Foi salva corretamente.
FO				

Para realizar essas construções, os sujeitos não utilizaram propriedades ou critérios que demonstrassem que a partir da diagonal que o quadrado foi construído. No entanto, as construções realizadas pelos sujeitos demonstram que eles mobilizaram algumas propriedades geométricas tais como as retas perpendiculares se cruzando com outro segmento, formando ângulos de 90°. Nesse processo observa-se ainda que os sujeitos 3 e 4 construíram o ponto central da figura utilizando a ferramenta de ponto médio, ou seja, realizaram essa construção pegando como pontos de partida os vértices de uma diagonal, o que fez surgir assim o ponto central da figura.

Nas construções realizadas, foi possível identificar que algumas das propriedades geométricas necessárias para realização das construções foram

utilizadas com a das diagonais do quadrado e da circunferência, no entanto foi fortemente realizada a construção a partir das retas perpendiculares, do ponto, do segmento de reta, das retas paralelas, do ponto médio e uma certa preocupação, externada pelos sujeitos, com o ângulo de  $90^\circ$ .

Como previsto nas análises prévias, os alunos não utilizaram nenhuma estratégia para realizar a construção do quadrado, construíram de forma aleatória. Percebe-se que as nomeações dos vértices foram todas feitas, como previsto nas análises prévias.

## ATIVIDADE – 6

- 1) Construir os pontos **P** e **O**.
- 2) Construir o quadrado **PITA**, de modo que **P** seja um de seus vértices e **O** seja seu centro.
- 3) Deslocar os vértices do quadrado. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
- 4) Deslocando os pontos da figura, que conclusões você pode tirar?
- 5) Salvar o arquivo com o nome C06.fig.

## AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	...os sujeitos utilizaram a ferramenta ponto livre e construíram aleatoriamente dois pontos, nomeando por P e outro por O.	...os sujeitos utilizaram a ferramenta ponto livre e construíram aleatoriamente dois pontos, nomeando por M e outro por N. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	...os sujeitos utilizaram a ferramenta ponto livre e construíram dois pontos distintos na janela geométrica do software, nomeando cada um dos pontos por M e N. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação dos vértices foi errada.</b>	...construindo simultaneamente os quatro vértices e as arestas, em seguida foram construídas duas retas perpendiculares a esses segmentos para que pudesse representar regularmente os ângulos retos e assim poder construir corretamente a representação geométrica do quadrado. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a</b>

				<b>construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>
2	...em seguida construiu mais três pontos nomeando-os por I, T e A, de forma que representava geometricamente o quadrado, constando quatro vértices.	...os sujeitos realizaram a nomeação dos respectivos pontos, anteriormente construído por M e N deixando os demais vértices sem nomeação. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	...a construção da representação geométrica do losango, realizaram a nomeação dos vértices por M, A, N, O.	Depois da construção dos quatro vértices, das quatro arestas foi feito a nomeação dos vértices por T, O, C e A. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>
3	Observa-se que os sujeitos realizaram a movimentação dos pontos para testar e verificar o que ocorre com a construção geométrica depois de movimentada.	Percebe-se que os sujeitos realizaram a movimentação dos vértices observando que as propriedades utilizadas nas construções não foram desfeitas no processo de rotação, ampliação e redução.	...e realizaram a movimentação dos vértices para testar a construção, e assim identificar o que ocorria com a figura à medida que era movimentada. Então percebe-se que os sujeitos movimentaram a figura pelos vértices e ampliando, reduzindo e fazendo a rotação.	Em seguida os sujeitos ficaram testando as propriedades da figura construída por meio da ampliação, redução, rotação e translação.
4				
5	Foi salvo corretamente.	Foi salvo corretamente.	Foi salvo corretamente.	Foi salvo corretamente.
FO				

Nessa atividade observa-se que os sujeitos realizaram as construções utilizando como base as propriedades das diagonais, isso no caso dos sujeitos 3 e 4, que tiveram como premissa a construção a partir de um ponto. Percebe-se que os sujeitos 1 e 2, 3 e 4, 7 e 8 realizaram as construções utilizando muito do que foi previsto nas análises preliminares, como o uso do ponto, do segmento de reta, das retas perpendiculares, a preocupação em construir ângulos retos e no caso de uma das duplas, com as diagonais.

No entanto, observa-se que os sujeitos não demonstram ter utilizado nenhuma estratégia para realizar a construção do quadrado, o que nos permite inferir que, de acordo com Van Hiele, o estudante passa por um processo de entendimento e da representação da figura, ligando-a com coisas, artefatos do dia a dia e correlacionando com as informações e propriedades geométricas que a escola passa para ele.

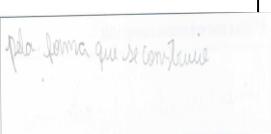
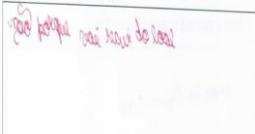
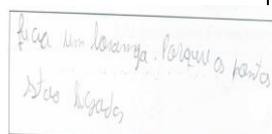
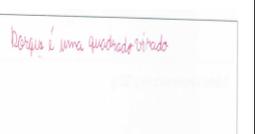
Dessa forma, observa-se que os sujeitos se encontram num processo de construção da imagem e da abstração das figuras, porém apresentam nas construções a preocupação em nomear os vértices e as retas.

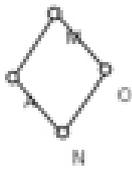
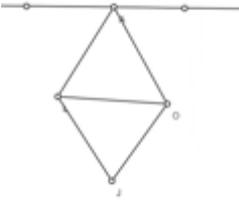
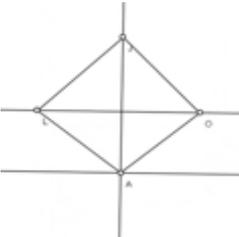
## ATIVIDADE - 7

- 1) Construir os pontos **M** e **N**.
- 2) Construir o losango **MANO**.
- 3) Deslocar os pontos da figura. Ela continua sendo um losango?
- 4) Por quê?
- 5) Se ela não continua um losango, recomeçar a construção.
- 6) Explique porquê sua figura é um losango.
- 7) Salvar o arquivo com o nome C07.fig.

## AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	Inicialmente foi construído dois pontos livres na janela geométrica, nomeado por M e N. Observa-se que os sujeitos realizaram a exploração de outras ferramentas,	...os sujeitos utilizaram a ferramenta segmento de reta e construíram de forma aleatória quatro pontos, sendo dois no segmento e dois outros pontos em	...os sujeitos utilizaram a ferramenta segmento de reta e construíram de forma aleatória os pontos L e O interligado por um segmento, que teve a construção de um	Inicialmente foi construído dois pontos livres na janela geométrica, nomeado por M e N. Observa-se que os sujeitos realizaram a exploração de outras ferramentas,

	porém não chegou a utilizar.	paralelo, nomeando-os por L e O. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	novo ponto, nomeado por R. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	porém não chegou a utilizar.
2	Posteriormente a construção dos respectivos pontos citados, os sujeitos realizaram a construção de mais dois pontos, nomeando por A e O ficando assim o quadrado com os seguintes vértices M, A, N e O.	Posteriormente a construção dos dois pontos, foi feito a construção de mais dois pontos, nomeados por J e A. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	Em seguida, os sujeitos conectaram esses pontos, fazendo surgir um losango com os vértices L, O, J e A. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	Posteriormente a construção dos respectivos pontos citados, os sujeitos realizaram a construção de mais dois pontos, nomeando por A e O ficando assim o quadrado com os seguintes vértices M, A, N e O.
3	Percebe-se que os sujeitos não realizaram a movimentação dos pontos, no entanto realizou os movimentos na figura como um todo.	Em seguida, observa-se que os sujeitos movimentaram os pontos livres para próximo dos pontos que foram construídos no segmento destacando a ampliação e redução da figura.	Observa-se que os sujeitos utilizaram a ferramenta de movimentação dos vértices e fizeram o processo de movimentação da figura por meio da ampliação, redução e rotação.	É possível perceber que os sujeitos movimentaram os pontos do losango rotacionando, ampliando e reduzindo o tamanho da figura.
4	Os sujeitos não deixaram argumentos.	Os sujeitos não deixaram argumentos.	Os sujeitos não deixaram argumentos.	Os sujeitos não deixaram argumentos.
5	Observa-se que ao movimentar a figura que perdeu a sua formação geométrica do quadrado, percebe-se que os sujeitos tentam reconstruir.	Depois da movimentação dos vértices que levou a desconfiguração da figura, tendo que realizar uma nova construção.	Depois da movimentação dos vértices que levou a desconfiguração da figura, tendo que realizar uma nova construção.	Depois da movimentação dos vértices que levou a desconfiguração da figura, tendo que realizar uma nova construção.
6				

7	Salvo corretamente.	Salvo corretamente.	Salvo corretamente.	Salvo corretamente.
FO				

Nessa atividade foi possível perceber que os sujeitos ao invés de romper com a estratégia de construção da atividade anterior, não foi o que aconteceu, apenas depois de realizar a construção do losango como um todo e perceber que o lado do losango não era MN e ter que desfazer e reconstruir deixando-os como diagonal.

Observa-se que alguns sujeitos não conseguiram entender como realizar essa construção, o que nos fez perceber que os sujeitos ainda não conseguiram distinguir as diagonais, ou seja identificar por meio de suas propriedades.

Os sujeitos utilizaram durante o processo de construção das figuras representações geométricas como o ponto, o segmento, as retas perpendiculares, o uso e construção das diagonais e nomeação dos vértices.

No entanto, como previsto, os sujeitos não utilizaram nenhuma estratégia para realizar essa nova construção, o que se percebe é que os sujeitos utilizaram as mesmas estratégias das construções de questões anteriores, ou seja, de forma aleatória.

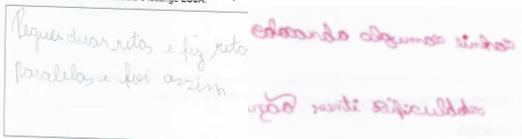
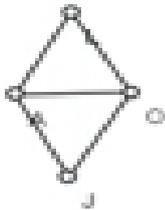
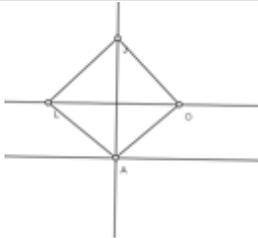
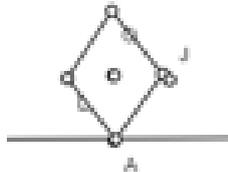
## ATIVIDADE - 8

- 1) Construir uma reta  $r$  e dois pontos  $L$  e  $O$ , fora da reta  $r$ .
- 2) Construir o losango  $LOJA$ , de modo que o ponto  $A$  esteja sobre a reta  $r$ .
- 3) Deslocar os pontos da figura. Se ela não continua sendo um losango, recomeçar a construção
- 4) Explique como você construiu o losango  $LOJA$ .
- 5) Salvar o arquivo com o nome C08.fig.

## AÇÕES REALIZADAS

Atv	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
1	Em seguida foi construído três pontos livres, cujo	Para realizar a construção do losango, os sujeitos	...os sujeitos realizar a construção os sujeitos utilizaram a	...os sujeitos utilizaram a ferramenta segmento

	nome do vértice foi L, O e J na interface geométrica do software formando um triângulo...	construíram inicialmente três pontos distintos, nomeando-os por A, B e C respectivamente. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	ferramenta de construção do ponto livre e assim fizeram a representação de dois pontos, P e O. ” <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	de reta e construíram em paralelo dois pontos distintos e uma reta passando por eles.
2	...seguindo da ligação dentre esses pontos formando assim um segundo triângulo, que juntos formaram a representação do losango, tendo os seus vértices nomeados por L, O, J e A.	Para realizar a construção do losango, os sujeitos construíram inicialmente três pontos distintos, nomeando-os por A, B e C respectivamente. Posteriormente, foi construído mais um ponto, nomeado em seguida por D. Em seguida percebe-se que os sujeitos utilizando a ferramenta segmento de reta unificando os pontos dando origem a um losango. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	Em seguida utilizaram a ferramenta <i>reta</i> para poder construir em paralelo mais dois pontos e assim formar o retângulo. Em seguida foi feita a nomeação dos pontos P, I, T e A. Sendo assim, observa-se que os sujeitos utilizaram a ferramenta do ponto médio e não realizaram a conexão como centro O do retângulo. <b>Observação: Os sujeitos realizaram a construção corretamente, mas a nomeação foi errada.</b>	Sendo assim, foi feita a ligação entre esses pontos pela ferramenta <i>reta</i> software, deixando surgir a representação do losango. Os vértices forma nomeados por L, O, J e A.
3	Observa-se que os sujeitos ficaram realizando os testes de movimentação dos pontos da representação geométrica do losango, testando assim as suas propriedades, porém percebe-se que os sujeitos não utilizaram nenhuma propriedade para	...observa-se que os sujeitos movimentaram a figura como um todo, não sendo desconfigurada com a movimentação. Observa-se ainda que os sujeitos ficaram realizando movimentos dos vértices, arestas e de toda a figura.	É possível observar que os sujeitos realizaram a movimentação dos pontos e deslocando as arestas.	É possível observar que os sujeitos realizaram a movimentação do losango, observando o que acontecia com a construção à medida que os movimentava.

	poder construir, tudo foi feito de forma aleatória.			
4				Os sujeitos 7 e 8 posteriormente a construção dos segmentos não apresentaram nenhum argumento na ficha que continha as questões.
5	Salvo corretamente.	Não salvou corretamente.	Salvo corretamente.	Salvo corretamente.
FO		Não salvou corretamente.		

Nessa atividade, que segue os parâmetros de construção geométrica de questões anteriores, necessitava que os sujeitos realizassem a construção resgatando algumas propriedades utilizadas nas atividades anteriores. Percebe-se que os sujeitos conseguiram identificar esse objetivo; sendo assim, é possível observar o uso de ferramentas como retas paralelas, transversais, retas perpendiculares e a nomeação dos vértices.

No entanto, também apresentam os mesmos problemas na construção do losango, o não uso das propriedades geométricas.

Nessa atividade, observa-se que os sujeitos realizaram as construções de forma arbitrária, ou seja, não realizaram a montagem de nenhuma estratégia de construção geométrica. No entanto, as construções realizadas abordam de forma muito clara a representação geométrica do losango, o que nos permite perceber que a compreensão de que o losango possui lados iguais os sujeitos demonstram ter.

Para a teoria de Van Hiele, os sujeitos permanecem na fase de conhecimento e reconhecimento geométrico da figura, caracterizando que não existe domínio ou conhecimento suficiente das propriedades geométricas dos quadriláteros para poder efetuar as construções.

## 7.2 Análise do Pré-teste e do Pós-Teste.

Essa análise é uma correlação entre o pré-teste e pós-teste, relacionando de forma qualitativa e quantitativa os avanços que os sujeitos tiveram (ou não). Os dados consideraram os 8 sujeitos que participaram de todos os momentos da pesquisa, o pré-teste aplicado em junho, a aplicação da sequência didática (A, B e C) e o pós-teste, aplicado depois da sequência didática, no mês de agosto.

## 7.3 Análise da Q01.

A primeira questão teve por objetivo identificar que elementos o aluno considera para diferenciar um retângulo de um quadrilátero não retângulo. O enunciado foi “Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega”. As respostas apresentadas pelos alunos estão mostradas nas tabelas a seguir.

**Tabela 02:** Respostas para a própria figura

Categorias	Pré-teste	Pós-teste
	(%)	(%)
Retângulo na posição prototípica	75%	89%
Retângulo fora da posição prototípica	25%	0%
Quadrado na posição prototípica	0%	11%
Total	100%	100%

**Fonte:** dados do autor

**Tabela 03:** Respostas para a figura do colega

Categorias	Pré-teste	Pós-teste
	(%)	(%)
Losango na posição prototípica	0%	11%
Quadrado na posição prototípica	100%	89%
Total	100%	100%

**Fonte:** dados do autor

No pré-teste, todos os alunos desenharam um retângulo como sendo a própria figura, sendo que três quartos deles o desenharam em posição prototípica. Já no pós-teste, 11% dos sujeitos desenharam um quadrado como sendo seu retângulo. Pela natureza do instrumento utilizado, não é possível identificar se eles passam a considerar o quadrado como sendo um retângulo, ou se apenas desenharam a figura que lhes é mais familiar, o quadrado.

Entretanto, no pré-teste, todos os alunos desenharam um quadrado para a figura de seu colega, que deveria ser uma figura de quatro lados que não fosse um retângulo. Isso parece indicar não somente a atração (relação) que eles sentem pelo quadrado, figura bastante familiar, mas também, que eles não conseguem reconhecer o quadrado como sendo um retângulo, indicando que esses sujeitos se situam no nível inicial (fase) de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Já no pós-teste, encontramos 11% dos sujeitos que associaram o losango a uma figura de quatro lados que não fosse um retângulo, o que talvez possa indicar um tímido avanço no reconhecimento de elementos constitutivos dos quadriláteros.

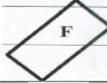
#### **7.4 Análise da Q02.**

Nessa questão foram apresentados 11 quadriláteros, em diferentes posições, e os alunos deveriam classificá-los em retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos. Em nossa análise, iremos identificar as respostas dos alunos para cada uma dessas figuras.

## Representação do retângulo

Desse conjunto de figuras, quatro podem ser classificadas como sendo retângulos. A tabela a seguir mostra os percentuais dos alunos que reconheceram essas figuras como sendo retângulos.

**Tabela 04:** Reconhecimento dos retângulos na e fora da posição prototípica.

Representação	Pré-teste	Pós-teste
	%	%
	4%	0%
	72%	89%
	88%	89%
	88%	100%

**Fonte:** dados do autor

Observa-se que o reconhecimento do retângulo fora de posição prototípica aumentou consideravelmente após a aplicação da sequência, particularmente se observarmos os percentuais do retângulo “F”. Em relação ao quadrado, no pós-teste, nenhum aluno o reconheceu como sendo um retângulo. Por outro lado, percebe-se um aumento considerável no percentual de alunos que associou paralelogramos quaisquer aos retângulos, como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 05:** Reconhecimento do retângulo

Representação	Pré-teste	Pós-teste
	%	%
	16%	44%
	20%	44%

**Fonte:** dados do autor.

Isso nos leva a considerar a hipótese que os alunos, no momento do pré-teste, poderiam se situar em um nível abaixo daquele considerado como o mais elementar pelo modelo de Van-Hiele. Estudos mais aprofundados seriam importantes para repensar a categorização do modelo, na medida em que temos encontrado sujeitos

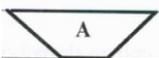
que não conseguem nem mesmo reconhecer as figuras geométricas por sua aparência geral.

Pela observação dos dados contidos nas duas tabelas anteriores, podemos pensar que, no pós-teste, os alunos estariam se aproximando do primeiro nível do modelo, mas ainda sem reconhecer o retângulo por seu aspecto geral. Nesse caso, eles estariam considerando também como retângulo figuras com aspecto mais “esticado”, o que justificaria o fato de quase metade dos alunos considerarem os paralelogramos “B” e “H” como retângulos.

### Representação do trapézio

No caso do trapézio, percebe-se que os sujeitos tiveram um avanço no reconhecimento, destacando que o maior avanço ocorreu com o trapézio fora da posição prototípica, como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 06:** Reconhecimento do trapézio.

Representação	Pré-teste	Pós-teste
	%	%
	72%	89%
	68%	78%
	60%	67%

**Fonte:** dados do autor.

De acordo com a Teoria de Van Hiele, esse avanço pode ser caracterizado pelo fato de o sujeito ter desenvolvido processos hierárquicos, linguísticos e principalmente os conhecimentos intrínsecos nele.

É possível perceber ainda na tabela a seguir que houve uma redução percentual considerável no não reconhecimento dos trapézios, o que demonstra que a intervenção do software e da sequência didática desenvolvida nele pode ter causado avanços.

**Tabela 07:** Não reconhecimento do trapézio.

Representação	Pré-teste	Pós-teste
	%	%
 A	28%	11%
 I	32%	22%
 L	40%	33%

Fonte: dados do autor.

## Representação dos quadriláteros

No caso dos quadriláteros, é possível observar que os sujeitos avançaram muito no processo de identificação das famílias dos quadriláteros. A tabela a seguir demonstra esse avanço, em identificar e reconhecer as figuras geométricas dos quadriláteros.

**Tabela 08:** Reconhecimento de algumas figuras como quadrilátero

Representação	Pré-teste	Pós-teste
	%	%
Apenas <b>F</b>	4%	0%
Apenas <b>C</b>	4%	0%
Apenas <b>G</b> e <b>F</b>	4%	0%
Apenas <b>A</b> , <b>L</b> , e <b>I</b> .	4%	0%
Apenas <b>B</b> , <b>H</b> e <b>G</b>	8%	0%
Apenas <b>C</b> , <b>D</b> , <b>E</b> , <b>F</b> e <b>J</b>	4%	0%
Apenas <b>C</b> e <b>G</b>	4%	0%
Apenas <b>G</b>	0%	11%
Todos os quadriláteros	60%	89%

Fonte: dados do autor.

É possível identificar que o aumento de 29 pontos percentuais em reconhecer toda a família dos quadriláteros foi exatamente em função de identificar que todas as figuras de quatro lados são quadriláteras e não apenas o quadrado ou o retângulo, como ocorreu no pré-teste.

Percebe-se assim que nesse nível de visualização e reconhecimento das figuras geométricas, os sujeitos estão diferenciando pela aparência, número de lados e formação dos ângulos.

**Representação do quadrado**

O conjunto de figuras contemplou dois quadrados (figuras C e E). Na tabela a seguir, é possível observar que houve um aumento de 16 pontos percentuais no reconhecimento dos quadrados, eles estando ou não na posição prototípica, o que nos leva a inferir que os sujeitos podem ter avançado em reconhecer a figura pela sua aparência.

**Tabela 09:** Reconhecimento da representação do quadrado.

Representação	Pré-teste	Pós-teste
	%	%
	40%	56%
	48%	44%
	4%	0%
	4%	0%
Todas	4%	0%

Fonte: dados do autor.

Esse avanço pode ter sido devido ao fato de as atividades da sequência demandarem frequentemente o trabalho com ângulos retos, na construção de perpendiculares.

**Representação do paralelogramo.**

No caso dos paralelogramos, haviam três paralelogramos quaisquer (figuras B, G e H) e cinco paralelogramos especiais (C, D, E, F e J). Das figuras do conjunto, apenas os três trapézios não estariam contemplados no conjunto dos paralelogramos. Os dados da tabela a seguir mostram que nenhum sujeito, em nenhum dos dois testes, conseguiu reconhecer os oito paralelogramos.

**Tabela 10:** Representação correta do paralelogramo

Representação	Pré-teste	Pós-teste
	%	%
	20%	22%

	20%	22%
	0%	11%

Fonte: dados do autor.

Por outro lado, 11% dos alunos passaram a desconsiderar o paralelogramo “B” no pós-teste. Como vimos anteriormente, esses alunos transferiram essa figura para a categoria dos retângulos, reforçando a hipótese que eles talvez tenham avançado de um nível inferior ao primeiro nível do modelo para o nível de visualização.

### Representação do losango.

Dentre as figuras apresentadas, apenas os quadrados C e E poderiam ser considerados losangos.

Os resultados mostram que, no pré-teste, apenas 8% dos sujeitos reconhece as duas figuras como sendo losangos. Esse percentual pouco avança no pós-teste (11%), indicando que os sujeitos continuam a não considerar os elementos que constituem as figuras geométricas, como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 11:** alunos que reconheceram o losango

Representação	Pré-teste	Pós-teste
	%	%
	44%	44%
	8%	11%
	4%	11%
	4%	11%
	24%	11%

Fonte: dados do autor.

De forma geral, quase metade dos sujeitos reconhece somente o losango em sua posição prototípica, nos dois testes. Isso mostra que o experimento não obteve sucesso em fazer os alunos avançarem para o segundo nível do modelo de Van-Hiele.

Por outro lado, um terço dos alunos passou a considerar a figura “G” na categoria dos losangos, considerando sua aparência global. Isso parece reforçar a

ideia de um nível inferior ao primeiro nível do modelo, na medida em que é possível que esses sujeitos, por ocasião do pré-teste, não conseguiram nem mesmo reconhecer a figura por seu aspecto geral.

### 7.5 Análise da Q03.

A terceira questão, com o enunciado “Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes”, teve como objetivo identificar que elementos o aluno considera para dizer que dois desenhos de quadrados são diferentes.

Os resultados são apresentados nas duas próximas tabelas, sendo a primeira relativa ao primeiro quadrado desenhado, e a segunda referente ao segundo quadrado.

**Tabela 12:** Primeira figura

<b>Categorização</b>	<b>Pré-teste %</b>	<b>Pós-teste %</b>
<i>Quadrado</i>	88%	67%
<i>Retângulo</i>	4%	22%
<i>Losango</i>	8%	11%

**Fonte:** dados do autor.

**Tabela 13:** Segunda figura

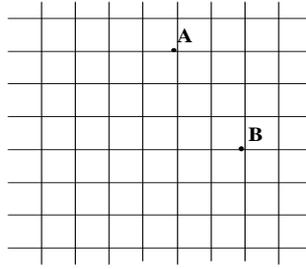
<b>Categorização</b>	<b>Pré-teste %</b>	<b>Pós-teste %</b>
<i>Quadrado</i>	60%	45%
<i>Retângulo</i>	12%	11%
<i>Quadrilátero qualquer</i>	0%	11%
<i>Losango</i>	24%	33%
<i>Cubo</i>	4%	0%
<b>Total</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>

**Fonte:** dados do autor.

Apesar de o comando da questão pedir o desenho de quadrados, observa-se que o percentual de alunos que considerou essa condição decresceu entre o pré e o pós-teste. Fica a dúvida se eles não leram com atenção o enunciado.

### 6.6 Análise da Q04.

A quarta questão teve o seguinte enunciado: “Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**”.



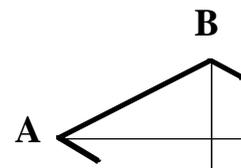
Ela teve como objetivo identificar se o aluno consegue construir um losango dados dois de seus vértices em malha quadriculada. Para isso, ele precisaria mobilizar as propriedades das diagonais do losango, ou seja, que elas são perpendiculares e cortam-se no ponto médio.

No pré-teste, pouco mais da metade dos sujeitos (52%) construiu corretamente o losango e, no pós-teste, todos os alunos conseguiram construir corretamente o losango, indicando um possível avanço de nível dentro do modelo.

**6.7 Análise da Q05.**

A questão 5 tinha o seguinte enunciado:

O losango **ABCD** teve um pedaço apagado.  
 Você pode reconstruí-lo?



Sim

Não

Explique como:

Porquê?

No pré-teste, 52% dos sujeitos construiu o losango, sendo que esse percentual sobe para 87% no pós-teste, indicando um possível avanço no pensamento geométrico.

Entretanto, não é possível afirmar que esse avanço foi de um nível para outro, na medida em que as construções foram realizadas por meio do prolongamento dos lados, não sendo representados os prolongamentos das diagonais.

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo buscou investigar como se desenvolvem os Níveis de pensamento geométrico de Van Hiele sobre a luz da teoria desenvolvida pelo casal holandês Pierre Mari Van Hiele e Dina Geldof Van Hiele.

Trata-se de uma pesquisa de replicação do trabalho de Câmara do Santos (2001), que investigou o desenvolvimento do pensamento geométrico dos quadriláteros com o software Cabri Geometre. Esta pesquisa, foi realizada usando como base a teoria de Van Hiele, fazendo uso do software Régua e Compasso para desenvolver as sequências didáticas, ao contrário do trabalho anterior, que utilizou o Cabri-Géomètre.

A base teórica utilizada versa sobre VAN HIELE-GELDOLF (1957), VAN HIELE (1957), CROWLEY (1994), CÂMARA DOS SANTOS (2001), GROTHMANN (2014), NASSER (2011), dentre outros teóricos.

A aplicação dessa pesquisa teve como objetivo geral verificar a influência do software “Régua e Compasso” na construção do conceito de quadriláteros no desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele em alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Os resultados mostram que os alunos pouco avançaram no desenvolvimento do pensamento geométrico. De maneira geral, não foi possível identificar alunos que tenham avançado para o segundo nível do modelo de Van-Hiele. Outro aspecto identificado e que necessita de estudos mais aprofundados, é que os sujeitos, no início do trabalho, parecem se situar em um nível anterior ao nível da visualização, não conseguindo nem mesmo reconhecer visualmente figuras geométricas planas familiares.

Além disso, embora não tenha sido possível identificar alunos que avançaram para o segundo nível, percebemos que alguns deles demonstraram certo avanço no pensamento geométrico, mesmo trabalhando em um mesmo nível. Isso nos leva a questionar em que medida poderia haver subníveis dentro do modelo de Van-Hiele.

Percebemos também que o software causou diversas influências nos sujeitos, assim como ficarem mais atentos ao processo de construção, por ser no computador, pelo software desafiá-los, pelo software necessitar de exploração e necessitar deles (alunos) para que a construção, a exploração ocorresse.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, George de Souza; SAMPAIO, Fábio Ferrentini. **O modelo de desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da Geometria dinâmica.** In: Revista de sistemas de informações da Fasma. Nº5. Pág. 69-76. 2010.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. **REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E COMPREENSÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS.** In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica.** São Paulo: Papyrus, 2003.
- BALDIN, Yuriko Yamamoto. **Utilização de programas de geometria dinâmica para melhorar a aprendizagem de geometria em nível fundamental.** Artigo. Departamento de Matemática, UFSCAR: 2009.
- BASSO, M. A., GRAVINA, M. A. **Mídias Digitais na Educação Matemática.** In: Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para a formação de professores de Matemática. Porto Alegre. Cap. 1, p.4-25. 2011.
- BAUER, Martin W; GASKELL, George; ALLM, Nicholas C. **Quantidade, qualidade e interesses do conhecimento.** BAUER, Martin W; GASKELL, George. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som.** Tradução: Pedrinho A. Guareschi. 7ª Edição. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.
- BAUER, W. Martins; AARTS, Bas. **A construção do Corpus: um princípio para a coleta de dados qualitativos.** BAUER, Martin W; GASKELL, George. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som.** Tradução: Pedrinho A. Guareschi. 7ª Edição. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.
- BEHRENS, Marilda Aparecida. **O paradigma emergente e a prática pedagógica.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

BICUDO, Maria A. V. e KLUTH, Verilda S. **Geometria e Fenomenologia**. In: Bicudo, Maria A. V. **Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologias, concepções, possibilidades didático pedagógico**. São Paulo: Editora Unesp, 2010.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa Qualitativa Segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 4ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução: Magda Lopes. 3ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. **Evoluindo nos níveis de pensamento Geométrico de Van Hiele**: utilizando o cabri-Géomètre na aprendizagem de quadriláteros. Universidade Federal de Pernambuco-UFPE: 2008.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O Cabri Geomètre e o pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. **A pesquisa em Educação Matemática**: repercções na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le développement Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpement de la pensée géométrique**. Anais do Congres International Cabri Géomètre, Montreal, QC, Canadá, 2001.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. **O professor e o tempo**. In: Revista Tópicos Educacionais. v.15. nº 1/2. Recife: Universitária/UFPE, 1997.

CORBERAN, R. M. **Didáctica e la geometria**: modelo de Van Hiele. Universitat de Valencia, 1989.

CROWLEY, Mary M. **O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do Pensamento Geométrico**. Dalhousie University, Halifax, Nova Escócia. In: LINDQUIST, Mary M; SHULTE, Alberto P. (Org.) **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMORE, Bruno. **Elementos da Didática da Matemática**. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DOWBOR, Ladislau. **Tecnologias do conhecimento: os desafios da educação**. 4ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

DESLANDES, Suely Ferreira. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Org. Maria Cecília de Souza e Minayo. 33ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

FERREIRA, Sérgio Eduardo. Dias, Adriana de Oliveira. SOUZA, Raquel F. de. **Ensino Geometria com o software Geogebra**. In: XXXIII-CNMAC-Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Águas de Lindoia-SP, 2010.

GARCIA, J. F.; SEHNEM, R.; SIMÕES JÚNIOR, R. Geogebra 3d: **uma nova possibilidade no ensino-aprendizagem da geometria**. Anais do IIIº Salão de iniciação científica e inovação tecnológica. IFRS, 2013.

GIBBS, Graham. **Análise dos dados qualitativos**. Tradução: Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GROTHMANN, René. **Compass and Ruler – C.a.R. – Geometry Software**. Eichstätt, Alemanha, 30 de dezembro de 2014. (Resposta). Disponível em: <  
<http://observations.rene-grothmann.de/compass-and-ruler-c-a-r-geometry-software/#respond>>

GROTHMANN, René. **Computadores nas Escolas: Passado, Presente e Futuro**. Universidade de Eichstätt, Alemanha. 2011. Disponível em: <

[http://www.ku.de/uploads/media/Computers in Schools -  
\\_Past Present and Future.pdf](http://www.ku.de/uploads/media/Computers_in_Schools_-_Past_Present_and_Future.pdf) >

GUIMARÃES, Rosangela de Resende. **Um estudo do pensamento geométrico de professores das séries iniciais do ensino fundamental segundo o modelo de Van Hiele**. In: Monografia. Universidade Federal de Minas Gerais-UFMG: 2006.

JÚNIOR, Jackson Pereira; PEREIRA, Daise Lago Souto. **Estudo do Potencial dos Softwares Geogebra, Cabri-geometrè e Régua e Compasso**. In: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. CNMAC, 2012.

LIMA, Paulo Figueiredo; PITOMBEIRA, João Bosco P. Fernandes de Carvalho. **Geometria**. In: Ministério da Educação. Matemática: Ensino Fundamental. Brasília, 2010.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2ª ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MACHADO, Nilson J. **Matemática e linguagem Materna: análise de uma impregnação mútua**. 6ª Ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MACHADO, Nílson José; D'Ambrosio, Ubiratan. **Ensino de Matemática: Pontos e contrapontos**. São Paulo: Summus, 2014.

MEIER, Melissa; SILVA, Rodrigo Sychocki. **O uso da geometria dinâmica em modelagens geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental**. Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM, Campo Mourão, Pr, v.4, n.6, p.136-156, jan.-jun. 2015.

MENEZES, Marcus Bessa de. **INVESTIGANDO O PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA: o caso dos quadriláteros**. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, Programa de Pós-Graduação em Educação. Recife, 2004.

MORAN, José Manuel; MASETTO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 16ª ed. Campinas-SP: Papirus, 2000.

MORELATTI, Maria Raquel Miotto; SOUZA, Luíz Henrique Gazeta de. **Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do Ensino Fundamental e as novas tecnologias**. Revista Educar, Curitiba: UFPR, 2006.

MOURA, Liliana Karla Jorge de. **Abordagem alternativa no estudo dos quadriláteros**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós Graduação em Matemática. Cuiabá, 2013.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2ªed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso básico de geometria - enfoque didático**. 1ªed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011.

OLIVEIRA, Antonio Elioneide Alves de. **Nova perspectivas para o ensino e aprendizagem de geometria: o auxílio didático do software cabri-Gèometrè**. In: IV FIPED-Fórum Internacional de Pedagogia: 2012, Parnaíba/PI-Brasil.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes públicas de Ensino de Pernambuco: Matemática**. Recife: SE, 2008.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Padrões de desempenho Estudantil em Matemática**. Recife: SE, 2014.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros curriculares**. Recife: SE, 2012.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros curriculares de matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** Recife: CE, 2012.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros na sala de aula, Matemática, Ensino Fundamental e Médio.** Recife: CE, 2013.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros de formação docente Ciências da Natureza e Matemática.** Recife: CE, 2014.

PIAGET, Jean. **Seis estudos de psicologia.** Tradução: Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. 24ª Ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1999.

PONTE, João. P; BROCADO, Joana e OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** 2ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

POUPART, Jean; DESLAURIERS, Jean-Pierre; GROULX, Lionel-H.; LAPERRIÈRE, Anne; MAYER, Robert; PIRES, Álvaro P. **A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos.** Tradução de Ana Cristina Nasser. 3ª Edição. Petrópolis – RJ: Vozes, 2012.

PLAISANCE, Éric; VERGNAUD, Gérard. **As ciências da Educação (*Les sciences de l'éducation*).** Edições Loyola. São Paulo-Br, 2003.

RODRIGUES, A. C.; ROCHA, V. **O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** Universidade Católica de Brasília: Brasília, 2007.

SANTOS FILHO, José Camilo dos; GAMBOA, Sílvio Sanches. **Pesquisa educacional: quantidade-qualidade.** 8ª Ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SANCHO, Juana M. **Para uma tecnologia educacional**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SANCHO, Juana M.; HERNÁNDEZ, Fernando. **Tecnologias para transformar a Educação**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

TRIVIÑOS, Augusto Nivaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. 1ª ed. 20ª imp. São Paulo: Atlas, 2011.

VALEDA, Gabriele Granada. **O SOFTWARE RÉGUA E COMPASSO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA PLANA**. In: EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática. UNESPAR – Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão-PR: 2014.

VAN HIELE, Pierre Marie. **De Problematiek van het inzicht**. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof. (Doctorate). University Utrecht, 1957.

VAN HIELE GELDOLF, Dina. **The didactics of geometry in the lowest class of secondary school**. (Doctorate). University Utrecht, 1957.

VAN HIELE, P. M. **Structure and Insight**. Academic Press Orlando, FL, USA, 1986.

WELLER, Wivan; PFAFF, Nicole. **Pesquisa qualitativa em educação: origens e desenvolvimentos**. In: WELLER, Wivan; PFAFF, Nicole. **Metodologias da Pesquisa qualitativa em Educação**. 2ª ed. Petropolis, RJ: Vozes, 2011.

ZIPPIN GRINSPUN, Mírian P.S. **Educação Tecnológica: Desafios e perspectivas**. 3ª ed. São Paulo: Cortez, 2002.