



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
E TECNOLÓGICA**

**GLEIDSON DE OLIVEIRA SOUZA**

**EXPLORAÇÕES DE ESTUDANTES DO 9º ANO SOBRE O CONCEITO DE  
PROBABILIDADE COM O SOFTWARE *TINKERPLOTS 2.0***

**RECIFE  
2015**

**GLEIDSON DE OLIVEIRA SOUZA**

**EXPLORAÇÕES DE ESTUDANTES DO 9º ANO SOBRE O CONCEITO DE  
PROBABILIDADE COM O SOFTWARE *TINKERPLOTS 2.0***

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

**Orientador: Profª Drª Liliane Maria Teixeira  
Lima de Carvalho**

**RECIFE  
2015**

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S729e	<p>Souza, Gleidson de Oliveira. Explorações de estudantes do 9º ano sobre o conceito de probabilidade com o software TinkerPlots 2.0 / Gleidson de Oliveira Souza. – Recife: O autor, 2015. 151 f. ; 30 cm. Orientadora: Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2015. Inchi Referências e Apêndices.</p> <p>1. Matemática (ensino fundamental) - Estudo e Ensino. 2. Probabilidades. 3. Tecnologia educacional. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Carvalho, Liliane Maria Teixeira Lima de. II. Título.</p> <p>372.7 CDD (22. ed.)</p>	UFPE (CE2016-12)
-------	---	------------------

**GLEIDSON DE OLIVEIRA SOUZA**

**EXPLORAÇÕES DE ESTUDANTES DO 9º ANO SOBRE O CONCEITO DE  
PROBABILIDADE COM O SOFTWARE *TINKERPLOTS 2.0***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 15/05/2015.

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Profa. Dr<sup>a</sup>. Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho (Orientadora e Presidente)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Profa. Dr<sup>a</sup>. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Examinadora Interna)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Profa. Dr<sup>a</sup>. Irene Mauricio Cazorla (Examinadora Externa)  
Universidade Estadual de Santa Cruz

Aos meus amados pais, Cleudo Souza e Sandra Souza que são dignos de muita  
gratidão, mas as palavras me faltam para expressá-la.  
“Esqueci a palavra que tinha a dizer, e o meu pensamento, privado de sua  
substância, volta ao reino das sombras.” (Óssip Mandelstam)

## AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho foi possibilitada por múltiplas aprendizagens, em diversificados âmbitos, que se deram a partir das muitas interações, apoio e dedicação de muitos envolvidos.

Dessa forma, um simples, singelo, talvez mero gesto de reconhecimento fosse lembrar algumas pessoas, em algumas linhas, em tão pouco espaço e tempo.

No entanto, esse pouco espaço e a lembrança falha certamente não serão suficientes para descrever suas essências, valor e grande contributo concedido, em alguns momentos ou em vários momentos nos mais diversificados campos.

Agradeço primordialmente ao Nosso Soberano Senhor Jeová, Deus misericordioso e clemente, vagaroso em irar-se e abundante em amor. Pela vida e pela força que me concedeu em muitos momentos nessa trajetória e na vida. Meu pai, meu amigo, meu abrigo.

À minha família, em especial aos meus amados e estimados pais, Cleudo Souza e Sandra Souza por terem me concebido, cuidado, educado, passado valores morais tão em decadência no mundo atual. Por serem sempre meu suporte, força mantenedora e sustentáculo. Além de pais, amigos altamente confiáveis.

À colega Cláudia, por sempre está me ouvindo, auxiliando e incentivando a sempre ir em frente, não retroceder, e mesmo diante de dificuldades, enxergar as coisas à frente.

Aos estudantes da turma do Mestrado, pelos conhecimentos compartilhados, pelos novos significados adquiridos.

A professora Liliane por ter acreditado em meu potencial e de forma desprendida cooperado, no que estivesse ao seu alcance para o desenvolvimento dessa pesquisa e minha maturação como ser humano e profissional. Por ter ido até o fim, apesar das intempéries e percalços nessa trajetória, ajudando a superá-los.

As professoras Irene Cazorla e Verônica Gitirana por mostrarem disponibilidade em participar da minha banca. Por gentilmente terem me proporcionado um momento de discussão presencial acerca de meus experimentos e procedimentos metodológicos, tendo dessa forma concedido importantes contribuições para o desenvolvimento dessa pesquisa.

Ao professor Marcus Bessa, que na fase final dos estudos contribuiu com seu olhar, suas observações pertinentes e pontuais. E a Tamires pela ajuda no tempo certo quanto a aspectos de formatação de um texto acadêmico.

Ao Coordenador da Biblioteca do Centro de Educação, Adilson Ramos e a Andréia Alcântara por esclarecimentos referentes a normalização.

Aos professores do EDUMATEC pelo desprendimento, doação e envolvimento pessoal na promoção da educação. Também aos funcionários por sempre estarem disponíveis e ajudarem no que lhes cabia.

A *Cliff Konold* por responder prontamente nosso email concedendo as devidas informações dos tramites legais para que pudéssemos realizar esta investigação utilizando o *TinkerPlots 2.0*.

A todos integrantes dos grupos GPEME e GPEMCE pelas muitas discussões proporcionadas na esfera científica e que resultaram na motivação dessa investigação.

À direção da escola na qual realizamos a pesquisa, sobretudo a Diretora Ana Cláudia e a Coordenadora pedagógica Maria José que ofereceram todo o subsídio e condições para que esse trabalho fosse encaminhado.

Agradeço aos estudantes, que mediante autorização dos pais, participaram de forma voluntária desse processo investigativo. Dessa forma, permitiram que trouxéssemos essas reflexões, aqui assentadas por escrito.

## RESUMO

A probabilidade é um importante conteúdo e possui aplicações em outras áreas do conhecimento. Pesquisadores destacam a importância de conteúdos de probabilidade por possibilitar o desenvolvimento da criticidade e leitura de mundo pelos educandos, contudo realçam a escassez de estudos na área. Nesta pesquisa investigamos conhecimentos de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental sobre probabilidade com o uso da ferramenta *Sampler do TinkerPlots 2.0*. Buscou-se em específico, identificar conhecimentos prévios dos estudantes sobre probabilidade; descrever conhecimentos dos estudantes sobre probabilidade a partir de experimento aleatório não realizado e realizado no ambiente físico; e explorar a ferramenta *Sampler do TinkerPlots* para mobilizar conhecimentos dos estudantes sobre probabilidade. Quatro estudantes do 9º ano oriundos de uma escola pública do Recife participaram de quatro etapas de coleta de dados: 1) entrevista semi-estruturada com ênfase na investigação do perfil dos estudantes; 2) teste diagnóstico com questões sobre concepções e sobre experimento aleatório não realizado e realizado no ambiente físico. Nessas etapas iniciais os estudantes trabalharam individualmente. Em seguida, eles realizaram em duplas uma fase final do experimento realizado no ambiente físico; 3) na terceira etapa, subdividida em dois momentos, os estudantes em duplas, participaram de uma sessão de familiarização com o *TinkerPlots* para conhecer sua interface e ferramentas. Após esse contato inicial com o software eles participaram de uma sessão com o uso mais autônomo da ferramenta *Sampler*. Todo o processo ocorreu em dias alternados; 4) ao final da atividade de simulação com o *Sampler*, os estudantes realizaram novamente o teste diagnóstico administrado inicialmente, na segunda etapa, seguindo os mesmos procedimentos. Existem evidências de que as concepções iniciais dos estudantes estiveram mais voltadas para conhecimentos intuitivos sobre probabilidade. Ao longo das situações de pesquisa, mais particularmente no teste final, essas concepções foram ampliadas para incluir ideias de aleatoriedade, incerteza e chance. Seus conhecimentos sobre espaço amostral também foram se tornando mais explícitos a partir de suas reflexões sobre os experimentos aleatórios. O trabalho com a ferramenta *Sampler do TinkerPlots* permitiu que os estudantes realizassem simulações com tamanhos crescentes de amostras e verificassem as alterações nas representações gráficas produzidas. Esse processo foi realizado de forma dinâmica e mediado por diálogos e intervenções específicas do pesquisador. O *TinkerPlots*, por possibilitar a simulação de experimentos com tamanhos de amostras variadas pode ter contribuído para os estudantes refletirem melhor sobre a relação entre probabilidade teórica e probabilidade advinda da experimentação. Conclui-se que embora os estudantes não possuam conhecimentos formalizados sobre probabilidade, eles foram capazes de aprofundar suas ideias iniciais sobre aspectos cruciais desse conceito como é o caso de espaço amostral e da relação sobre probabilidade teórica e frequencial. Novas pesquisas devem ser feitas para investigar outras possibilidades do uso do software *TinkerPlots* para mobilizarem conhecimentos sobre probabilidades.

**Palavras chave:** Probabilidade; Experimento Aleatório; *Software TinkerPlots*; Ferramenta *Sampler*.

## ABSTRACT

The probability is an important discipline and has application in many branch of human knowledge. Researchers emphasize the importance of probability related disciplines for enhancement students critical thinking about the real world problems; however they also highlight the shortage of studies in the area. In this research we investigate students knowledge in 9<sup>th</sup> grade about probability with the support of the software tool *Sampler do TinkerPlots 2.0*. Specifically, we sought to identify prior knowledge of students about probability; describe students knowledge about probability based on experiments realized and not realized in physical environment; and to explore the Sampler tool of TinkerPlots in order to students enhance and apply their knowledge about probabilit. Four 9<sup>th</sup> grade students from a public school in Recife participated in the four data collection steps: 1) semi-structured interview with an emphasis on investigating the student profile; 2) diagnostic test with questions about concepts and random experiments realized both in physical environment and not physical environment. In these initial steps the students worked individually. Then they performed, in pairs, the final experiment phase in a physical environment; 3) in the third step, divided into two different moments, the pairs were introduced to the TinkerPlots interface and tools. After this initial contact with the software, they attended a session with more autonomous use of the *Sampler* tool. The whole process was performed on alternate days; 4) at the end of the activity involving simulation with the use of the *Sampler*, the students were submitted again to the diagnostic test administered initially in the second step, following the same procedures. There is evidence that the initial conceptions of the students were more focused on intuitive knowledge of probability. Over the situations found during the research, particularly in the final test, these conceptions were broadened in order to include ideas of randomness, uncertainty and chance. Students knowledge about sample space became more explicit after their reflections on experiments about randomness. The work with the Sampler tool of TinkerPlots allowed students to process simulations with an increasing number of sample and observe the changes in the graphs produced and its visual effect. This process was dynamically conducted and mediated by the researcher with dialogues and interventions. The TinkerPlots software, by allowing simulation experiments with different sample sizes, may have contributed to students reflection on the relationship between theoretical probability and probability arising from experimentation. We can conclude that although students may not have a formal knowledge of probability, they were able to deepen their initial ideas about crucial aspects of these concept such as sample space and the relationship between theoretical and frequency probability. New researches should be done in order to investigate other possibilities for the use of the software TinkerPlots improve students knowledge about probabilities.

**Keywords:** Probability; Random experiment; TinkerPlots software; Sampler tool.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Expectativas de aprendizagem em Estatística e Probabilidade para a Educação Básica em Pernambuco. ....	24
Figura 2 - Tela inicial do software TinkerPlots 2.0.....	37
Figura 3 - Localização do <i>Sampler</i> na barra de ferramenta do software <i>TinkerPlots</i> . .....	37
Figura 4 - Ilustração da tela do <i>TinkerPlots</i> com a Ferramenta <i>Sampler</i> acionada ...	38
Figura 5 - Principais aspectos funcionais da ferramenta <i>Sampler</i> do <i>TinkerPlots</i> 2.0. .....	39
Figura 6 - Visualização de uma simulação realizada com 100 repetições do “traço e ponto” na Tabela e no Gráfico.....	42
Figura 7 - Ilustração do Banco de dados “ <i>Sample Space</i> ” do <i>TinkerPlots</i> .....	61
Figura 8 - Resposta de Helena ao problema de concepção sobre experimento aleatório do teste diagnóstico.....	66
Figura 9 - Desenho de Helena nas respostas ao teste inicial .....	71
Figura 10 - Ação da dupla Luiz e Helen ao tentar acionar o dispositivo <i>Mixer</i> na familiarização .....	81
Figura 11 - Mudanças de dispositivos realizadas pela dupla Luiz e Helen na familiarização .....	82
Figura 12 - Mudanças dos dispositivos realizadas por Helena e Lucas na familiarização .....	83
Figura 13 - Ações de Helena e Lucas na familiarização após destaque do pesquisador.....	86
Figura 14 - Destaque do pesquisador para o <i>Menu</i> Opções da ferramenta <i>Sampler</i> . .....	87
Figura 15 - Sequência de ações na configuração do <i>Spinner</i> para simular o lançamento da moeda realizada por Luiz e Helen na familiarização.....	88
Figura 16 - Resultados da simulação do experimento com as moedas realizado por Luiz e Helen na familiarização.....	89
Figura 17 - Sequência de ações na configuração do <i>Spinner</i> para simular o lançamento da moeda por Helena e Lucas na familiarização .....	91
Figura 18 - Resultado da simulação do lançamento da moeda pelas duplas.....	95

Figura 19 - Dispositivo <i>Spinner</i> configurado e primeira simulação realizada por Luiz e Helen com o <i>Sampler</i> .....	98
Figura 20 - Dispositivo <i>Spinner</i> configurado por Luiz e Helen para realizar a simulação do experimento com traço e ponto com 16 repetições.....	99
Figura 21 - Construção do gráfico com 16 repetições com a ativação da ferramenta <i>Plot</i> pela dupla Luiz e Helen no processo de simulação .....	101
Figura 22 - Dispositivo <i>Spinner</i> configurado e primeira simulação realizada por Helena e Lucas com o <i>Sampler</i> . .....	102
Figura 23 - Gráfico construído por Helena e Lucas no <i>TinkerPlots</i> com a simulação de cinco repetições. ....	103
Figura 24 - Resultados da simulação do experimento realizada por Helena e Lucas .....	103
Figura 25 - Conhecimento de Lucas sobre probabilidade após Teste Final.....	121
Figura 26 - Respostas de Helen e de Lucas, respectivamente, ao tentarem quantificar a probabilidade teórica no Teste final. ....	123
Figura 27 - Quantificação da probabilidade realizada por Helena na 4ª questão do teste final.....	123
Figura 28 - Cálculo da probabilidade realizado por Luiz na 4ª questão do teste final. ....	124
Figura 29 - Estratégia de Helena para estimar probabilidades no Teste Final.....	126
Figura 30 - Respostas da dupla Luiz e Helen antes e após o processo de experimentação no ambiente físico e virtual via <i>Sampler</i> .....	131
Figura 31 - Respostas da dupla Helena e Lucas no Teste Final.....	132

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Especificações dos principais componentes da ferramenta <i>Sampler</i> .....	40
Quadro 2 - Descrição das utilizações dos dispositivos do <i>Sampler</i> .....	41
Quadro 3 - Tipos de problemas do teste da primeira etapa do estudo piloto .....	51
Quadro 4 - Perfil dos estudantes participantes da pesquisa. ....	55
Quadro 5 - Resumo do esboço metodológico da pesquisa.....	56
Quadro 6 - Problemas do Teste Diagnóstico.....	58
Quadro 7 - Conceitos e respostas esperadas das questões iniciais do Teste diagnóstico .....	59
Quadro 8 - Concepções dos estudantes sobre probabilidade.....	64
Quadro 9 - Respostas dos estudantes à questão sobre experimento aleatório não realizado.....	67
Quadro 10 - Categorias de análise das questões iniciais do experimento aleatório realizado no ambiente físico.....	68
Quadro 11 - Distribuição das respostas dos estudantes nos itens da questão 5 em função das categorias de respostas.....	69
Quadro 12 - Registros dos quatro estudantes dos resultados individuais e combinados do experimento no ambiente físico .....	73
Quadro 13 - Registros no gráfico das duplas .....	75
Quadro 14 - Respostas das duplas às questões iniciais após a experimentação .....	76
Quadro 15 - Respostas individuais e em dupla de Luiz e Helen às questões c-e-i antes e depois da realização do experimento no ambiente físico .....	77
Quadro 16 - Representações geradas das simulações de Luiz e Helen no <i>Sampler</i> com diferentes tamanhos de amostras .....	105
Quadro 17 - Novas representações geradas das simulações de Luiz e Helen no <i>Sampler</i> com tamanhos de amostras maiores .....	106
Quadro 18 - Representações geradas das simulações de Helena e Lucas no <i>Sampler</i> com diferentes tamanhos de amostras .....	108
Quadro 19 - Representações geradas das simulações de Helena e Lucas no <i>Sampler</i> com diferentes tamanhos de amostras com outros valores .....	109
Quadro 20 - Resultados das concepções dos estudantes antes e depois da simulação com o <i>Sampler</i> .....	118

Quadro 21 - Distribuição das respostas individuais dos estudantes aos itens da questão 5 em função das categorias de respostas após a experimentação .....	125
Quadro 22 - Registros dos quatro estudantes dos resultados individuais e combinados do experimento no ambiente físico .....	128
Quadro 23 - Registros no gráfico das duplas .....	129
Quadro 24 - Respostas das duplas aos itens da questão 5 no Teste Final .....	130

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITO DE PROBABILIDADE .....</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Probabilidade, Matemática e Estatística.....</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Abordagens sobre probabilidade.....</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>A probabilidade no currículo escolar .....</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Compreensão de probabilidade .....</b>	<b>26</b>
2.4.1	O uso de softwares como recurso para a compreensão de probabilidade ...	32
<b>3</b>	<b>O SOFTWARE TINKERPLOTS .....</b>	<b>36</b>
<b>3.1</b>	<b>A ferramenta <i>Sampler</i> .....</b>	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Pesquisas prévias com o <i>TinkerPlots</i> .....</b>	<b>44</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO .....</b>	<b>50</b>
<b>4.1</b>	<b>Estudo piloto.....</b>	<b>50</b>
<b>4.2</b>	<b>Estudo principal.....</b>	<b>53</b>
4.2.1	Local da pesquisa.....	53
4.2.2	Esboço metodológico .....	56
4.2.2.1	<i>Primeira etapa da pesquisa - Entrevista semi-estruturada .....</i>	<i>57</i>
4.2.2.2	<i>Segunda etapa da pesquisa - Teste diagnóstico mais experimento no ambiente físico .....</i>	<i>57</i>
4.2.2.3	<i>Terceira etapa da pesquisa - Familiarização e simulação com o TinkerPlots .....</i>	<i>61</i>
4.2.2.4	<i>Quarta Etapa – Teste final.....</i>	<i>63</i>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS DO TESTE DIAGNÓSTICO .....</b>	<b>64</b>
<b>5.1</b>	<b>Concepção dos estudantes sobre probabilidade .....</b>	<b>64</b>
<b>5.2</b>	<b>Experimento aleatório não realizado .....</b>	<b>66</b>
<b>5.3</b>	<b>Experimento aleatório realizado no ambiente físico .....</b>	<b>67</b>

5.3.1	Realização do experimento .....	71
5.3.2	Reflexões sobre a probabilidade teórica a partir da experimentação no ambiente físico .....	76
<b>6</b>	<b>RESULTADOS COM O SOFTWARE TINKERPLOTS .....</b>	<b>80</b>
6.1	Familiarização .....	80
6.2	Simulação com o <i>Sampler</i> .....	96
6.2.1	Escolha e configuração dos dispositivos .....	96
6.2.2	Simulações iniciais .....	98
6.2.3	Simulações com diferentes amostras .....	104
6.2.4	Comparando resultados das experimentações com as fichas e com o <i>Sampler</i> .....	111
<b>7</b>	<b>RESULTADOS DO TESTE FINAL.....</b>	<b>118</b>
7.1	<b>Concepções iniciais e finais dos estudantes sobre conceitos de probabilidade .....</b>	<b>118</b>
7.2	<b>Desempenho dos estudantes antes e depois no experimento não realizado .....</b>	<b>122</b>
7.3	<b>Desempenho dos estudantes antes e depois quanto a realização do experimento aleatório .....</b>	<b>124</b>
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>133</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>140</b>
	<b>APÊNDICES.....</b>	<b>144</b>

## 1 INTRODUÇÃO

---

A probabilidade, segundo Novaes e Coutinho (2009), diz respeito ao estudo dos fenômenos que envolvem a aleatoriedade, ou seja, a ação do acaso. Um exemplo bem conhecido é o de um lançamento de uma moeda. Ao lançarmos uma moeda para cima, sabemos que os possíveis resultados são de obtermos cara ou coroa, contudo não podemos determinar qual será o resultado precisamente; o possível resultado ou evento caberá ao acaso determinar. É denominado de probabilidade a essa medida de incerteza.

Segundo Coutinho (2013, p. 193), a probabilidade, na atualidade, consiste em um dos conteúdos mais importantes na Educação Básica devido tanto à sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento como também à sua contribuição para o desenvolvimento de uma postura crítica e leitura do mundo. Nesse sentido, a autora destaca também a relevância e o caráter utilitário de conteúdos de probabilidade pelo fato das pessoas precisarem, no convívio social, fazer inferências com base em informações qualitativas ou dados numéricos, bem como saber lidar com os conceitos de chance e de incerteza.

A relevância de conteúdos de probabilidade também é apontada pelo Guia do Livro Didático (BRASIL, 2010) que destaca a sua utilização em relação a conteúdos de Estatística uma vez que se encontram associados a questões relativas a dados da realidade física ou social, que precisam ser coletados, selecionados por amostragem, organizados, apresentados e interpretados criticamente.

Noções de Probabilidade, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, estão incluídas desde o Ensino Fundamental no âmbito do bloco de conteúdos do Tratamento da Informação, juntamente com conceitos estatísticos (BRASIL, 1997). Nos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), as expectativas de aprendizagem se encontram no bloco de Estatística e Probabilidade. A título de exemplo, espera-se que o ensino de probabilidade seja mais efetivo a partir do 6º ano do Ensino Fundamental e que, nessa etapa de escolarização, os estudantes participem de situações experimentais e de simulações que possam encorajá-los a desenvolver aspectos mais formais do conceito. No Ensino Médio, espera-se que o estudante amplie a ideia de probabilidade, no

sentido de ser capaz de estabelecer o modelo matemático que vai permitir determinar a probabilidade de ocorrência de um evento (PERNAMBUCO, 2012).

Essa relevância do tema tem contribuído para a constituição de grupos de pesquisas internacionais. A esse respeito, Coutinho (2013) destaca a “*Comission Inter- IREM de Probabilité et Statistique*”, na França; o grupo da Universidade de Granada, na Espanha, coordenado pela Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Carmen Batanero e a *International Association for Statistical Education* (IASE), que busca reunir pesquisadores da comunidade internacional na área de Didática da Estatística. A respeito dessa importância conceitual e dessa projeção internacional, pesquisas no Brasil relacionadas à probabilidade na escola são ainda insuficientes (COUTINHO, 2013).

No Brasil, é percebido o início de uma mobilização e sensibilização, mesmo que discreta. A esse respeito a autora faz menção aos pesquisadores em Educação Matemática que congregam seus trabalhos no GT12, de Probabilidade e Estatística, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Da mesma maneira, destaca a autora, no interior dos Programas de Pós-Graduação, novos grupos de pesquisa estão se organizando. (COUTINHO, 2013).

Contudo, muito ainda se tem a avançar neste campo de pesquisa. Santana (2011), por exemplo, afirma que existe uma complexidade na compreensão de professores sobre o conceito de probabilidade, sendo necessário o desenvolvimento de pesquisas voltadas à construção de estratégias que fomentem o trabalho com a ideia de aleatoriedade como forma de introdução do seu ensino na escola.

Com relação à inserção desse conteúdo em livros didáticos, Viali e Oliveira (2010), destacam que “a probabilidade é apresentada unicamente pela definição clássica. A definição frequencial não é explorada, nem tampouco a axiomática” (p. 100). Em um estudo similar, Coutinho (2013) também identificou que pouca atenção tem sido dispensada a definição frequencial em livros didáticos.

Um aspecto que vem ganhando força nos estudos sobre probabilidade é a relação entre os resultados de experimentos físicos com simulação computacional, isto é, aqueles realizados com o auxílio de softwares específicos. Nesse sentido, vários autores concordam que o trabalho a partir do ambiente computacional pode favorecer a potencialização do conhecimento acerca de conceitos de probabilidade (BATANERO, 2005; KAZAK; KONOLD, 2010; IRELAND; WATSON, 2009; KONOLD et al., 2011; SOUZA; LOPES; 2011; FERREIRA; KATAOCA; KARRER, 2013). Os autores destacam que conceitos como espaço amostral e variabilidade podem ser

facilmente percebidos ao se realizar experimentos aleatórios por meio dos simuladores. Destacam ainda que além de facilitar a coleta de muitos dados em um curto período de tempo, o que o ambiente papel e lápis não favorece, a simulação de um experimento aleatório com o auxílio do computador possibilita aos estudantes compreenderem que a estabilização da frequência relativa ( $fr_i$ ) pode ser concebida como uma estimativa da probabilidade teórica.

Como integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Estatística – GPEME tive a oportunidade de participar de variadas discussões sobre pesquisas desenvolvidas por integrantes do grupo explorando o software *Tinkerplots*. Esse *software* é voltado para o trabalho com exploração e análise de dados a partir da manipulação de diferentes representações pelos usuários. O *Sampler* foi inserido na versão 2.0 do software e possui uma potencialidade geral de simulação de uma experiência aleatória, permitindo a modelagem de eventos e a construção e execução de modelos de dados a partir dos quais é possível determinar a probabilidade (KAZAK; KONOLD, 2010). Esse potencial de trabalho da ferramenta *Sampler* com conceitos de probabilidade despertou nossa curiosidade e nos motivou a desenvolver este estudo para explorar seu uso por estudantes brasileiros.

Visando investigar essas potencialidades no uso do *Sampler* do *TinkerPlots*, o estudo que ora propomos foi norteado pela seguinte questão: que contribuições a ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots* pode oferecer para estudantes mobilizarem conhecimentos sobre probabilidade?

Com a intenção de responder a essa questão, elaboramos e desenvolvemos este estudo o qual tem como objetivo geral investigar conhecimentos de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental sobre probabilidade com o uso da ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots* 2.0. Em termos específicos buscou-se: identificar conhecimentos prévios dos estudantes sobre probabilidade; descrever conhecimentos dos estudantes sobre probabilidade a partir de experimento aleatório não realizado e realizado no ambiente físico; e explorar a ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots* para mobilizar conhecimentos de estudantes sobre probabilidade.

Além dessa introdução, apresentamos no capítulo dois, discussões teóricas sobre Probabilidade, situando as definições, complexidade do conceito, aspectos relacionados com a sua compreensão e relações entre experimentos físicos e realizados com a ajuda do computador. No capítulo três, descrevemos alguns

aspectos do software *TinkerPlots* 2.0, especificando a descrição dos componentes da ferramenta *Sampler* e algumas pesquisas já conduzidas envolvendo o seu uso.

Na sequência, no capítulo quatro apresentamos o método de trabalho, onde se encontra uma breve descrição do estudo piloto e das suas contribuições para o estudo principal, além de um detalhamento das etapas metodológicas realizadas.

Os resultados são apresentados nos capítulos cinco, seis e sete. No capítulo cinco apresentamos e discutimos os conhecimentos prévios dos estudantes sobre conceitos de probabilidade e sobre experimentos aleatórios. No capítulo seis, apresentamos e discutimos os resultados advindos do trabalho com o software *TinkerPlots* e analisamos algumas possibilidades do seu uso para ampliarem conhecimentos de probabilidade. No capítulo sete apresentamos os resultados do Teste Final.

Por último, são tecidas algumas considerações sobre o estudo proposto, ocasião em que retomamos os nossos objetivos propostos e respondemos à nossa questão de pesquisa.

## 2 CONCEITO DE PROBABILIDADE

---

A partir das leituras realizadas, observamos quatro aspectos fundamentais quanto a conceituação de Probabilidade: (1) Relação com a Matemática e Estatística; (2) Complexidade, requerendo diferentes abordagens para conceituação; (3) Inserção no currículo escolar e (4) Aspectos relacionados com sua compreensão, incluindo nesse tópico reflexões sobre a importância do auxílio de ambientes auxiliados pelo uso de programas de computador. Neste capítulo abordaremos nas subseções 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 cada um desses aspectos mencionados explicitando suas respectivas especificidades e importância para a definição de probabilidade.

### 2.1 Probabilidade, Matemática e Estatística

Bayer et al. (2005) afirmam que “a probabilidade é o ramo da matemática que estuda os fenômenos aleatórios” (p. 5). Nesse mesmo caminho, Novaes e Coutinho (2009, p. 132) concebem a probabilidade como sendo a “medida de incerteza na ocorrência de um evento resultante de uma experiência aleatória”.

Para Bayer et al. (2005) “os primeiros conceitos de probabilidade datam do século XVII , e os encontramos no interior da matemática. Era uma tentativa dos matemáticos da época de medir a incerteza” (p.2). Os autores, portanto, discutem a probabilidade associada com a estatística, uma vez que essa relação está bem presente na escola. Contudo, os autores destacam que historicamente nem sempre foi assim, sendo que a estatística é mais antiga que a probabilidade. Para exemplificar, chamam a atenção para o uso da estatística por povos de civilizações antigas, como: hebreus, egípcios e gregos. Desde aquela época, esses povos já coletavam dados sobre populações, colheita e impostos.

A associação da Probabilidade com a Estatística fica clara quando Bayer et al. (2005) afirmam que “a probabilidade é uma ferramenta indispensável em estudos estatísticos que envolvem inferências para uma população através de uma amostra” (p.2) e ainda que “a probabilidade constitui a base da estatística indutiva, permite tomar decisões e qualificar o erro cometido ao tomar decisões” (p. 2).

Lopes, Teodoro e Rezende (2010) vão de acordo com Bayer et al (2005) quando afirmam que a teoria de probabilidades “é o fundamento matemático que garante a validade dos procedimentos da inferência estatística” (p. 136).

O conceito de probabilidade, portanto, envolve uma discussão sobre áreas do conhecimento em que estejam associados.

Souza e Lopes (2011) fazem referência ao termo “Estocástica” para definir a inter-relação entre os conceitos de probabilidade, estatística e combinatória. Os autores destacam, contudo, que o uso desse termo é mais comum nas produções científicas da Educação Matemática europeia.

Conjecturamos que ao discutirmos os tipos de probabilidade, e compararmos a probabilidade clássica com a frequentista, podemos na realidade, estar confrontando os conhecimentos matemáticos e estatísticos, aproximando-os e explicitando as inter-relações entre eles.

Segundo Lopes, Teodoro e Rezende (2010), na atualidade, o cálculo de probabilidades não se resume a prever chances de vitória em determinados jogos de azar ou de baralho. As aplicações de teoria da probabilidade se dão em vários ramos da atividade humana, como por exemplo: Economia, Política, Medicina, dentre outras.

Novaes e Coutinho (2009) argumentam que as leis do acaso, estão presentes em nosso cotidiano e permeiam nossas tomadas de decisões, em especial as de caráter profissional. No comércio, por exemplo, os empreendedores devem considerar riscos na tomada de decisões quanto à comercialização de determinado produto devido ao possível grau de aceitação pelos consumidores. Aquelas autoras afirmam ainda que, embora eventos aleatórios ou dependentes do acaso não possam ter seus resultados calculados com precisão, pode-se determinar o grau de incerteza da sua ocorrência. Esse grau de incerteza é o que denominam de probabilidade. Nesse sentido, a probabilidade consiste em medida de incerteza na ocorrência de um evento resultante de uma experiência aleatória.

Cazorla e Oliveira (2010, p. 118) fazem uma distinção entre o significado dos termos fenômeno e experimento. Para os autores, fenômeno “é a definição de qualquer evento observável”; por exemplo, aspectos climáticos, geológicos ou biológicos. Os autores ainda distinguem fenômenos determinísticos, que são aqueles que podemos prever com certeza o resultado, daqueles aleatórios, sobre os quais não temos controle e não sabemos os resultados. Experimento, por sua vez,

consiste em “um estudo científico destinado à verificação de um fenômeno, realizado sob condições controladas, frequentemente fundamentados em hipóteses” (CAZORLA; OLIVEIRA, 2010, p. 118). Os autores também distinguem aqueles determinísticos, que repetidos nas mesmas condições conduz ao mesmo resultado, dos aleatórios, os quais não produzem os mesmos resultados, mesmo se repetido sob as mesmas condições.

A perspectiva de aleatoriedade é central para o entendimento de noções de probabilidade. Nesse sentido, as experimentações aleatórias podem ser de auxílio para estudantes na compreensão de probabilidade. De acordo com Bayer et al. (2005, p. 5), um experimento aleatório possui algumas características, as quais ele descreve como:

Não se conhece o resultado do experimento antes de realizá-lo; É possível listar um conjunto com todas as possibilidades do experimento aleatório - Espaço Amostral (S). Ao realizar um grande número de repetições do experimento aleatório, uma regularidade poderá surgir.

Nesta pesquisa, a noção de experimento aleatório é fundamental, perpassando todas as situações problemas do nosso estudo empírico. De acordo com os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012, p. 98), discutido mais adiante na subseção 2.3, a construção da ideia de probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental “deve apoiar-se em situações elaboradas de tal forma que o estudante possa experimentar e fazer simulações”.

Um aspecto central para a compreensão dos resultados de experimentos aleatórios é a análise, mesmo que intuitiva, da probabilidade frequentista e sua relação com a probabilidade teórica. Na próxima subseção discutimos essas diferentes abordagens sobre probabilidade.

## **2.2 Abordagens sobre probabilidade**

Vários autores destacam que a conceituação de probabilidade não é única; existem diferentes abordagens que podem conduzir a diferentes encaminhamentos de atividades (BAYER et al., 2005; NAGAMINE et al., 2011; BUSSAB; MORETTIN, 2002).

Na visão de Bussab e Morettin (2002), a partir de suposições adequadas, e sem observarmos diretamente o fenômeno aleatório de interesse, é possível criar um *modelo teórico* que reproduza de maneira razoável a distribuição das frequências quando o fenômeno é observado diretamente. Tais modelos são chamados modelos probabilísticos. Os autores ainda pontuam que esse modelo pode ser construído por meio de premissas.

Morgado *et al.* (1991, p. 128) afirmam que o modelo destinado ao estudo de um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática. Essa variação do modelo depende do fenômeno estudado. Além disso, os autores ainda destacam que tais modelos possuem ingredientes básicos comuns, como por exemplo, espaço amostral e probabilidade teórica.

A conceituação de probabilidade, na perspectiva de Bayer *et al.* (2005), é considerada a partir de três diferentes abordagens, quais sejam: Abordagem Clássica; Abordagem Frequentista e a Abordagem Axiomática.

Triola (2005, p. 93) concorda com aqueles autores quanto às duas primeiras ao destacar que há três diferentes maneiras de definir a probabilidade de um evento: abordagem clássica da probabilidade; aproximação da probabilidade pela aproximação da frequência relativa; e acrescenta a probabilidade subjetiva. O autor destaca que para a compreensão dessas abordagens, se faz necessário estabelecer alguma notação básica para a probabilidade, quais sejam:  $P$  representa a probabilidade;  $A$ ,  $B$  e  $C$  representam eventos específicos e  $P(A)$  que representa a probabilidade de o evento  $A$  ocorrer.

Segundo Triola (2005, p. 94) a abordagem clássica, por exemplo, requer resultados igualmente prováveis. A medida desta probabilidade é calculada a partir de uma fração que representa o número de maneiras como o evento  $A$  pode ocorrer e número de diferentes eventos simples ( $P(A) = s/n$ ). A abordagem frequentista, segundo esse autor é calculada a partir da frequência relativa. Realizando (ou observando) um experimento, tendo como base os resultados efetivos a probabilidade é *estimada* como a fração na qual temos o número de vezes em que  $A$  ocorreu e o número de vezes em que o experimento foi repetido ( $f_r(A) = n(A)/n$ ).

Na perspectiva de Coutinho (2013), o entendimento do conceito de probabilidade pode se dar a partir das duas primeiras abordagens: a clássica (Laplaciana) e frequentista. Além disso, a autora destaca que o ensino de probabilidade pode se dar a partir da abordagem frequentista.

Segundo Batanero (2005), existem alguns conceitos relacionados ao significado da probabilidade a partir de cada abordagem. Por exemplo, quanto à abordagem clássica (laplaciana) essa autora destaca os seguintes conceitos: esperança, equitabilidade, independência. No que diz respeito à abordagem frequentista, os conceitos mencionados são: frequência relativa, variável, aleatoriedade, distribuição de probabilidade.

Silva (2002) e Coutinho (1996) (apud GAFFURI, 2012) destacam que Kolmogorov, com uma publicação de 1933, buscando explicitar e esquematizar os axiomas já usados pelos matemáticos modernos, ainda que de forma implícita, para o cálculo de probabilidades, acabou dando uma grande contribuição a teoria da probabilidade, em particular do ponto de vista teórico. A abordagem axiomática tem como base a teoria axiomática que concedeu autonomia a probabilidade dentro da Matemática.

Se considerarmos  $P(A)$  como a probabilidade de ocorrência de um evento  $A$ , associada ao espaço amostral  $S$ ,  $P(A)$  deverá satisfazer os seguintes axiomas:

$$\text{Axioma 1: } 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\text{Axioma 2: } P(S) = 1$$

$$\text{Axioma 3: Se } A \cap B = \emptyset, \text{ então } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

No entendimento de Bayer *et al* (2005) “não há incompatibilidade entre as ideias de Kolmogorov e os conceitos clássico e frequentista”.

Segundo Batanero (2005), a abordagem axiomática, é muito utilizada para quantificar a incerteza de resultados em experimentos aleatórios abstratos. Alguns conceitos relacionados ao significado dessa abordagem, segundo a autora, são: espaço amostral, espaço de probabilidade e conjunto de Borel.

Nagamine *et al* (2011) apresentam uma sequência didática para ser trabalhada na escola, a qual discutiremos em mais detalhe na seção a seguir. Um aspecto importante dessa sequência é que os autores abordam as perspectivas frequentista e clássica (laplaciana) da probabilidade.

Essas diferentes abordagens sobre probabilidade possuem reflexo na forma como o currículo escolar de matemática encontra-se organizado em relação a esse tópico.

### 2.3 A probabilidade no currículo escolar

A relevância do estudo da probabilidade, segundo os Parâmetros para a Educação Básica Comum para as Redes Públicas de ensino de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) se dá pelo fato de termos que lidar com questões relativas a dados da nossa realidade, quer seja física, ou social, precisando coletar, selecionar, organizar, apresentá-los e interpretá-los criticamente. A importância do desenvolvimento dessas competências se fazem necessárias para que os estudantes possam fazer inferências com base em informações ao lidar com diversos conceitos como, por exemplo, o de chance.

Os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), destacam ainda a exigência de mudanças curriculares que deem novas ênfases aos processos de ensino e de aprendizagem.

Evidências da importância do trabalho com os conceitos ligados a probabilidade no âmbito do currículo escolar do Estado de Pernambuco podem ser notadas no que diz respeito às expectativas de aprendizagens (Figura 1).

**Figura 1 - Expectativas de aprendizagem em Estatística e Probabilidade para a Educação Básica em Pernambuco.**

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE												
Expectativas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Elaboração de questões de pesquisa.												
Coleta de dados.												
Classificação e organização de dados.												
Construção e interpretação de gráficos e tabelas.												
Identificação de frequências em gráficos e tabelas.												
Identificação de categorias em gráficos e tabelas.												
Comparação de conjuntos de dados.												
Associação entre tabelas e gráficos.												
População e amostra.												
Medidas de tendência central.												
Probabilidade. ←												
Elementos constitutivos de gráficos e tabelas.												
Amplitude, concentrações e dispersões de dados.												
Classificação de variáveis.												
Tabelas com dados agrupados.												
Medidas de dispersão.												

Fonte: Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012)

De acordo com a Figura 1, é possível identificar que os Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) apontam para a grande relevância do trabalho com o conteúdo de probabilidade, indicando que deve ser ensinado desde cedo. Adicionamos à imagem a seta azul para indicar a localização desse conteúdo. A gradação de cores indica que paulatinamente, as expectativas de aprendizagem vão aumentando e ficando mais relacionadas a conteúdos formalizados conforme o passar dos anos de escolarização. Podemos perceber que o trabalho com probabilidade deve acontecer desde o terceiro ano do Ensino Fundamental, 2º Ciclo, contudo, as expectativas de aprendizagem tornam-se mais associadas a formalizações a partir do 6º ano de escolarização pela exploração de situações-problema simples.

Subjacente à proposta curricular de Matemática de Pernambuco encontra-se a ideia de ampliação do conhecimento com o avanço da escolarização, rumo a uma aprendizagem mais formalizada.

Espera-se que nos anos finais do Ensino Fundamental, os estudantes avancem, consolidem e ampliem as aprendizagens adquiridas nos anos iniciais, mesmo sem usar, de forma adequada, a linguagem matemática. Um aspecto importante em relação à Matemática é os estudantes demonstrarem questionamentos sobre a utilidade de certos conceitos.

Com relação aos conteúdos de Estatística e Probabilidade, espera-se que os estudantes nos anos finais do Ensino Fundamental demonstrem competência para trabalhar com tabelas e gráficos.

O trabalho com tabelas e gráficos, nessa etapa de escolaridade deve ir além de atividades de leitura e interpretação, sendo ampliado para situações que propiciem ao estudante trabalhar com conjuntos de informações, elaborar conjecturas e destacar aspectos relevantes das informações apresentadas (PERNAMBUCO, 2012, p. 97).

Especificamente com relação à probabilidade, espera-se que a construção dessa ideia pelos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental deve apoiar-se em situações envolvendo experimentação e simulação, permitindo que em etapas posteriores, no Ensino Médio, eles possam “estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento” (PERNAMBUCO, 2012, p. 98).

Encontra-se nos parâmetros para a Educação do Estado de Pernambuco expectativas de aprendizagem para os conhecimentos de Estatística e Probabilidade para todos os níveis de escolarização. Como nesta pesquisa os participantes são estudantes do 9º ano, abordaremos de forma mais detalhada aquelas aprendizagens esperadas para o 4º Ciclo o qual inclui o 8º e o 9º ano.

Em termos gerais, nos parâmetros de Pernambuco, as aprendizagens esperadas para probabilidade estão mais especificadas para o 8º ano (e.g., representar a probabilidade de ocorrência de um evento por meio de uma fração ou porcentagem). Para o 9º ano os conteúdos fazem mais referência à Estatística (e.g., compreender intuitivamente a ideia de dispersão; usar a variabilidade para comparar dois ou mais conjuntos de dados). Com relação ao trabalho com gráficos e tabelas, espera-se que os estudantes ao finalizarem esse Ciclo, no 9º ano, tenham desenvolvido a competência para construir essas representações com o auxílio do computador e que elaborem conjecturas a partir dessas representações.

Um aspecto fundamental para o 9º ano é que se espera que os estudantes analisem dados estatísticos do cotidiano e que sejam capazes de fazer previsões, focalizando mais a ideia de inferência. Nesse sentido, conjectura-se que o esperado é que haja uma articulação entre Estatística e Probabilidade, embora esse aspecto não esteja explicitado nos parâmetros curriculares para o Estado de Pernambuco.

Coutinho (2013) destaca que em termos prescritivos, espera-se que os estudantes tenham já no final do terceiro ciclo do Ensino Fundamental, conhecimentos, habilidades e competências necessários à formação dos conceitos probabilísticos de base. Contudo, conforme essa autora aponta, a probabilidade como parte integrante do currículo da escola básica, requer mais pesquisas visando identificar as formas de compreensão de estudantes.

## **2.4 Compreensão de probabilidade**

A compreensão de probabilidade tem despertado o desenvolvimento de estudos e pesquisadores tem se debruçado em investigar como ocorre esse processo e quais os fatores influenciam a compreensão.

Watson, Collis e Moritz (1997) analisaram respostas de 1.014 estudantes de diferentes níveis de escolaridade, oriundos de escolas da Tasmânia, na Austrália,

sobre três itens de um questionário que explora a compreensão de estudantes sobre a medida de chances em relação à ideia de probabilidade formal. O estudo reportado no artigo é parte de um estudo maior e a pesquisa é baseada em dois fundamentos teóricos: modelo geral de como os estudantes compreendem conceitos complexos ao longo do tempo, em particular, durante a escolarização; formação de conceitos probabilísticos e estatísticos e nos componentes que se agregam para criar conceitos específicos.

Os autores desenvolveram uma análise das respostas dos estudantes tomando como base o modelo SOLO Multimodal que se baseia na taxonomia desenvolvida por Biggs e Collis (1982) e que foi ampliada por eles posteriormente (BIGGS; COLLIS, 1991; COLLIS; BIGGS, 1991 apud WATSON, COLLIS; MORITZ, 1997). Uma das bases desse modelo é que nele se reconhece o desenvolvimento continuado a partir de estágios iniciais de modos de funcionamento em relação com outros modos, situando-se de acordo com Watson, Collis e Moritz (1997) numa perspectiva neo-Piagetiana.

A análise dos autores das respostas dos estudantes com base nesse modelo remeteu a uma classificação que considera que a compreensão sobre medida de chance pode ser expressa por níveis de respostas que progridem numa hierarquia rumo a uma formalização mais conceitual. Um nível elementar de respostas situa-se naquelas denominadas preestrutural (P), que são mais intuitivas e com base em crenças, não envolvendo, portanto elementos necessários para identificar o que foi requerido na questão. Resposta uniestrutural (U), inclui em geral o uso de apenas um aspecto relevante da questão. Resposta multiestrutural (M), é aquela que apresenta vários aspectos relevantes da questão processados geralmente em sequência, só que tomados separadamente. Por último, a resposta relacional (R) expressa uma compreensão integrada das relações entre os diferentes aspectos da questão. Esses níveis de respostas apresentam uma ordem crescente de complexidade, desde uma abordagem mais intuitiva até uma mais formal.

Esse modelo proposto por Watson, Collis e Moritz (1997) contribui para uma análise de níveis de respostas de estudantes situando-as no campo do conhecimento probabilístico. Nesse sentido, a compreensão dos estudantes encontra-se atrelada a uma perspectiva cognitiva.

Em uma revisão da literatura em que aborda a compreensão de crianças sobre probabilidade, Nunes e Bryant (2012), apontam quatro principais demandas

cognitivas à compreensão do conceito de probabilidade. A primeira delas consiste em compreender a noção de aleatoriedade, a qual está presente na vida cotidiana das pessoas. A segunda envolve considerações sobre espaço amostral ou conjunto de todos os possíveis eventos. Os autores destacam a necessidade de ser reconhecida a importância de identificar todos os possíveis eventos e sequências de eventos que podem acontecer em uma dada situação como um primeiro passo a resolução de problemas de probabilidade. Comparar e quantificar probabilidades são considerados como terceira demanda cognitiva apontada pelos autores, pois:

Probabilidades são quantidades com base em razões, e é preciso se calcular estas razões para fazer a maioria (mas não todas) das comparações das probabilidades de dois ou mais eventos. Estas razões podem ser expressas em decimais, ou como frações (NUNES; BRYANT, 2012, p.04).

Uma quarta e última demanda cognitiva para compreender probabilidade consiste em compreender relações entre variáveis, ou correlação.

Uma associação entre dois tipos de eventos pode acontecer de forma aleatória ou, alternativamente, pode representar um relacionamento genuíno. Para descobrir se existe uma relação entre as variáveis aleatórias ou não, temos que atentar para a relação entre casos que confirmam e não confirmam a suposta relação e verificar se a frequência de casos que confirmam poderia ter acontecido por acaso. Isso significa que, a fim de entender as correlações, precisamos entender essas três ideias (NUNES; BRYANT, 2012, p. 04).

Um aspecto destacado por Nunes e Bryant (2012) sobre relações entre variáveis é a importância do trabalho com representações simbólicas, como em tabelas e gráficos.

Carvalho (2008) investigou se a forma de apresentar a informação afetava a interpretação sobre relações entre variáveis de estudantes do 8º ano de escolaridade oriundos de escolas públicas inglesas. A autora elaborou seis problemas de variáveis discretas fundamentando-se no tripé proposto por Vergnaud (1997 apud CARVALHO, 2008): invariantes – que no caso da sua pesquisa consistiu na ideia de relação entre variáveis que podem ser elaboradas a partir da quantificação de probabilidades, requerendo a análise e combinação de relações de casos favoráveis e casos possíveis de um mesmo conjunto de dados; situações – o trabalho com proporções duplas envolvendo problemas de produto de medidas com

o controle de valores das variáveis, considerando que a característica dos valores numéricos pode influenciar de alguma forma no raciocínio dos estudantes, e representações – gráficos de barras empilhadas, tabelas de dupla entrada e cartões manipuláveis.

Nesse experimento a pesquisadora solicitou que os estudantes resolvessem os mesmos problemas, na mesma ordem, individualmente, mudando apenas as formas em que foram apresentados (gráficos; tabelas; cartões). Os estudantes foram distribuídos de forma aleatória para trabalhar com uma das três formas de apresentação de dados usadas para representar os mesmos problemas.

Os resultados mostraram que os estudantes de escolas inglesas que resolveram os problemas por meio de tabelas e gráficos tiveram melhores desempenhos e deram justificações mais elaboradas

Os resultados desse experimento possibilitaram identificar que estudantes do 8º ano apresentam melhores desempenhos quando informações são apresentadas já organizadas em gráficos ou tabelas. A autora replicou esse experimento com estudantes brasileiros e observou que o desempenho e justificativas foram mais eficientes entre os que trabalharam com gráficos. O nível de dificuldade para o trabalho com cartões manipuláveis e tabelas foi similar entre os estudantes brasileiros.

A organização da informação em tabelas ou gráficos, segundo Carvalho (2008), é um passo relevante no trabalho com relações entre variáveis, consistindo em importante demanda cognitiva para se compreender o conceito de probabilidade. Contudo, a organização do currículo e a sua concretização nas escolas podem direcionar o estudante para compreender melhor determinados tipos de representação em detrimento de outras, configurando-se esta em importante aspecto para a compreensão das pessoas.

Gal (2002; 2004) expande a análise da compreensão de probabilidade por incluir além das demandas cognitivas outras demandas como as dimensões disposicionais. Segundo Gal (2004), a compreensão das pessoas sobre probabilidade é complexa e envolve uma dimensão do conhecimento por incluir ideias sobre variação, aleatoriedade, independência, preditibilidade/incerteza, assim como também os métodos utilizados para encontrar ou estimar a probabilidade de eventos; termos usados para comunicar sobre chance e que envolve a linguagem cujo repertório precisa ser considerado; e o contexto.

Essas dimensões podem influenciar na compreensão do papel e das implicações de resultados probabilísticos. Segundo Gal (2004), mensagens em diferentes contextos, como por exemplo, aquelas veiculadas na mídia ou oriundas de uma pesquisa, podem remeter a formas de compreensão específicas.

Esse pesquisador também chama a atenção para os aspectos disposicionais como é o caso de questões críticas que são aquelas para serem refletidas quando se lida com probabilidade. Além disso, Gal (2004) destaca também os conhecimentos prévios dos sujeitos e aspectos mais subjetivos tais como: postura crítica, crenças, atitudes e sentimentos pessoais sobre incerteza e risco (e.g., aversão ao risco).

Essas dimensões, de acordo com Gal (2004), estão relacionadas a uma espécie de letramento probabilístico e para que o sujeito seja considerado letrado faz-se necessário que apresente não apenas conhecimentos ou ideias conceituais, mas que também seja capaz de resolver problemas sobre probabilidade em diferentes contextos.

Essas ideias sobre a compreensão de probabilidade requerem estudos mais aprofundados que investiguem diferentes meios para auxiliar na compreensão desse conceito e que podem se tornar em recursos pedagógicos para o professor ensinar probabilidade na escola.

Neste estudo, concordamos com Gal (2004) por entendermos que a análise e compreensão do conhecimento probabilístico não podem ser explicadas apenas pela dimensão cognitiva, mas inclui também aspectos disposicionais como, por exemplo, aspectos das experiências prévias dos estudantes e das tarefas propostas.

Nagamine *et al* (2011, p. 471) analisaram uma sequência de atividades de ensino de probabilidade que partem de uma situação-problema. Organizada a partir de tarefas e subtarefas, a sequência visou conduzir os estudantes a desenvolver concepções “intuitivas de probabilidade, a probabilidade frequentista, decorrente da experimentação aleatória, e a probabilidade laplaciana (clássica), proveniente da modelagem matemática, por meio do diagrama de possibilidades.”

A sequência didática parte de uma situação-problema intitulada “Passeios aleatórios da Mônica”, proposta originalmente por Fernandez e Fernandez (1999) para o estudo da distribuição Binomial no Ensino Superior, e posteriormente adaptada por Cazorla e Santana (2006) para o ensino de Probabilidade na Educação *Básica*. Segundo Nagamine et al. (2011, p. 452) essa sequência permite:

Avaliar/trabalhar as noções elementares da teoria de probabilidades: experimento determinístico e aleatório, eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples e compostos; tabela de distribuição de frequência (TDF), gráfico de colunas; probabilidade frequentista (frequência relativa); probabilidade clássica a partir da árvore de possibilidades, padrões observados e esperados, dentre outros.

A sequência didática trata da visitação de Mônica aos amigos Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu os quais moram no mesmo bairro a uma mesma distância de quatro quarteirões. Cada jogada representa um quarteirão a ser percorrido, sendo necessário que Mônica lance a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos. A atividade se concretizou a partir de quatro sessões, iniciando com a seguinte situação problema “todos os amigos tem a mesma chance de ser visitados?”

Na primeira sessão, que trata do contexto, os estudantes teriam de fazer a leitura da história proposta e objetivava-se analisar as concepções intuitivas dos estudantes. Uma das subtarefas dessa sessão visava verificar o quanto os estudantes estão impregnados pela concepção de equiprobabilidade, pois eles teriam de decidir se todos os amigos tinham a mesma chance de ser visitados. A segunda sessão tratava respectivamente da experimentação aleatória (processo experimental – lançar moeda 30 vezes  $4 = 120$ ) e da organização dos resultados em dois tipos de registros: tabelas e gráficos. A organização dos resultados, nessa sessão, se daria também, por meio da sistematização dos resultados da experimentação na *Tabela de Distribuição de Frequência* fornecida. Nessa forma de organização dos resultados, era possível identificar e contar, calcular a frequência relativa ( $f_i$ ) obtida pela expressão  $f_i/n$  onde  $n$  é o total de repetições do experimento ( $n=30$ ), e transformar a frequência relativa em porcentagem.

Na terceira sessão, esperava-se que os estudantes recorressem a Modelagem matemática a partir da árvore de possibilidade, construindo, assim a noção de espaço amostral. Além disso, eles teriam de registrar o número de caminhos para cada amigo (probabilidade teórica), a qual é expressa em fração e decimal. A sequência também prevê a construção de um gráfico de colunas para representar a probabilidade clássica a partir da *Tabela de Distribuição de Frequência*. Por fim, na quarta sessão, foi proposta a comparação das duas formas de atribuir a probabilidade (frequentista e teórica).

A proposta de Nagamine *et al.* (2011) vai de encontro com o usual instituído nas escolas: a probabilidade clássica, ensinada puramente através de cálculo. Parte de uma situação-problema, de onde surgem as concepções intuitivas de probabilidade clássica e frequentista. A situação didática possibilitou também o trabalho com diferentes demandas cognitivas como é o caso dos registros em gráficos e tabelas. O contexto de resolução de problemas foi dinâmico, mas centrado na perspectiva do papel e lápis.

Contextos mais dinâmicos de resolução de problemas, envolvendo o uso do computador como auxílio na compreensão de probabilidade vêm se configurando em importante objeto de pesquisas.

#### 2.4.1 O uso de *softwares* como recurso para a compreensão de probabilidade

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), os computadores consistem em instrumento que trazem versáteis possibilidades ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Esse documento ainda nos chama à atenção para as muitas experiências educacionais que os computadores têm integrado, prevendo-se sua utilização para a educação, como recurso didático em maior escala em curto prazo. Esse aspecto do uso da tecnologia também é destacado pelos Parâmetros de Matemática para o estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), sendo inclusive parte das recomendações curriculares para o 9º ano, conforme já mencionado.

Integrar, portanto, o ensino e aprendizagem de matemática com a tecnologia seria um aspecto fundamental para desenvolver um processo mais dinâmico e que possibilite o desenvolvimento do raciocínio do educando.

Uma tendência crescente na Educação Matemática, em particular no ensino e aprendizagem da Probabilidade, Combinatória e Estatística, tem sido o uso de simuladores, muitas vezes aliados ao ambiente papel e lápis. Nesses contextos de resolução de problemas, tem-se notado uma maior ênfase às facilidades que o ambiente computacional oferece para a compreensão de diversos conceitos probabilísticos em um curto período de tempo, mediante as experimentações.

O trabalho com probabilidade pode se efetivar a partir de simulações de experimentos reais e virtuais. As possibilidades de programas de computadores para

o trabalho dinâmico com representações como tabelas e gráficos, podem auxiliar no processo de sistematização, organização, visualização e interpretação dos dados.

Konold et al (2011), destacam que o trabalho com objetos físicos tem suas limitações. Dados coletados em sala de aula muitas vezes não são suficientes para observar o fato de que nossas estimativas de probabilidade de amostras maiores tendem a ser menos variáveis do que as de amostras menores.

Nesse sentido, a vinculação de meios tecnológicos ao ensino e aprendizagem da probabilidade em diferentes níveis de escolaridade tem estimulado pesquisas (e.g. KAZAK; KONOLD, 2010; KONOLD et al, 2011; SOUZA; LOPES, 2011 e FERREIRA; KATAOKA; KARRER, 2013). Souza e Lopes (2011), por exemplo, não desconsideram a importância do trabalho com simulações de experimentos reais, no ambiente físico, bem como suas possíveis representações a partir do ambiente papel e lápis. Os autores destacam que o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória, Probabilidade e Estatística, desde o Ensino Fundamental, pode ser ampliado e se tornar significativo a partir do uso de computadores. Afirmam ainda que os computadores “podem auxiliar os estudantes a adquirir conhecimentos sobre a coleta de dados e sobre sua organização, análise e interpretação, e a utilizá-los para tomada de decisões” (p. 664).

Batanero et al. (2005), consideram as simulações com o computador fundamentais no campo da probabilidade e estatística. Pontuam ainda que as simulações permitem aos estudantes construir modelos e experimentos com fenômenos aleatórios e a realizarem previsões em longo prazo. Além disso, esse processo pode ser realizado em todos os níveis de ensino, mesmo no Ensino Fundamental.

Ferreira, Kataoka e Karrer (2013), realizaram um estudo para avaliar as potencialidades do software R (livre) para auxiliar estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, bem como gerar reflexões em torno do conceito de não equiprobabilidade (diferente probabilidade de ocorrência dos eventos). O referido estudo investigou a aprendizagem de conceitos probabilísticos por meio da aplicação do experimento de ensino “Passeios Aleatórios da Carlinha”, o qual foi desenvolvido nos ambientes papel e lápis e computacional. Suas análises se basearam na perspectiva do letramento probabilístico de Gal e do construcionismo de *Papert*. As atividades foram organizadas semelhantes à sequência didática proposta por Nagamine et al (2011) e já mencionada neste capítulo. Uma das

distinções é o enfoque da não-equiprobabilidade que Ferreira, Kataoka e Karrer (2013) dão no trabalho. As atividades foram norteadas pelo mesmo questionamento de Nagamine et al: todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados? Cabe destacar que um bloco de tarefas foi organizado com o objetivo de favorecer uma primeira aproximação com o *software* R para os estudantes se familiarizarem com suas ferramentas.

Inicialmente os autores apresentaram aos estudantes a estória com o objetivo de trazer à tona concepções prévias de probabilidade, utilizando o papel e o lápis, já que a estória trata de visitas pré-estabelecidas e posteriormente dadas ao acaso. Na sequência, na segunda sessão, os estudantes realizaram a simulação no ambiente computacional e organização dos resultados com ênfase na probabilidade frequentista. Num terceiro momento, os estudantes puderam construir a árvore de possibilidades utilizando o papel e lápis e organizaram os resultados a partir da probabilidade teórica/clássica utilizando papel e lápis e o ambiente *computacional*. Por fim, na última sessão, os estudantes compararam as diferentes formas de atribuir à probabilidade (teórica e frequentista) buscando gerar reflexões a partir do trabalho realizado no ambiente papel e lápis e na simulação.

Constatou-se, nesse estudo, que a possibilidade de trabalho a partir de uma ferramenta computacional serviu de auxílio para que os estudantes tivessem um olhar mais apurado relacionado à convergência quando retomaram esta questão com uma experimentação bem maior. Os resultados assinalam para a necessidade de maior exploração do conceito de não equiprobabilidade na educação básica, dado que as interpretações dos estudantes revelaram que o pensamento equiprovável está impregnado e é aceito como verdade absoluta, sem se questionar sobre os eventos não equiprováveis.

Cazorla; Kataoka e Maganime (2010, p. 5 apud FERREIRA; KATAOKA e KARRER, 2013) argumentam que a elaboração e desenvolvimento de um experimento utilizando o ambiente *computacional* permitem ao estudante o trabalho com diversos conceitos.

Espaço amostral, eventos, probabilidade de eventos simples; discutir as diferenças entre um experimento determinístico e um aleatório; estimar probabilidades por meio da frequência relativa; calcular a probabilidade teórica a partir da árvore de possibilidades; analisar padrões observados e esperados; além de construção de tabelas simples e de gráficos de barras.

Esses estudos mencionados nos permitem entender que experimentos realizados a partir do ambiente computacional, podem auxiliar os estudantes a entenderem e ampliarem suas compreensões acerca de noções de probabilidade. Os estudantes, ao simularem um experimento a partir do significado da probabilidade frequentista poderão ampliar seu entendimento de conceitos como frequência relativa, aleatoriedade e distribuição de probabilidade.

Além disso, os experimentos realizados no ambiente computacional, por possibilitarem um grande número de repetições, podem oferecer aos estudantes oportunidades de trabalhar situações-problema que possibilitem, por exemplo, entenderem a probabilidade teórica como sendo a tendência da frequentista, mesmo que em termos intuitivos.

Dessa forma, entendemos que noções de probabilidade podem ser trabalhadas desde cedo mediante o uso de ferramentas computacionais.

No capítulo que segue, apresentamos uma discussão do *software TinkerPlots 2.0*, que usamos em nossa pesquisa, especificando a ferramenta *Sampler* que consiste em um simulador de probabilidade.

### 3 O SOFTWARE TINKERPLOTS

---

O *software TinkerPlots* foi desenvolvido por Konold e Miller (2001) e consiste em um programa de computador que possibilita a exploração, organização e análise de dados, além do trabalho com noções de probabilidade. Trata-se de uma ferramenta complexa, cuja interface possibilita o desenvolvimento de atividades diversificadas e associadas com representações diversas, como é o caso de tabelas e gráficos. O ambiente do *TinkerPlots* é dinâmico e de fácil manipulação, propiciando aos seus usuários a criação de representações gráficas, interpretação e o trabalho com hipóteses.

O *Tinkerplots 2.0*, é uma versão ampliada do *TinkerPlots 1.0*. Essa nova versão incorpora o *Sampler*, que é direcionado ao trabalho com probabilidade.

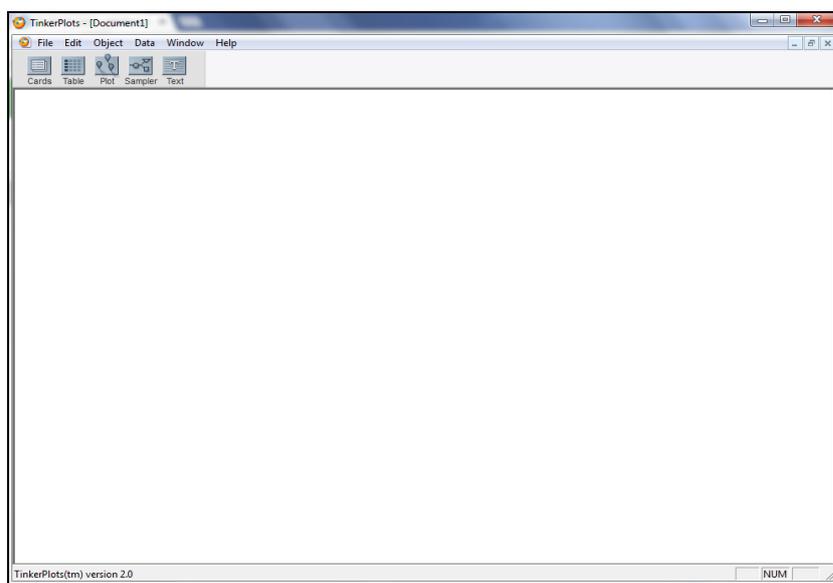
As versões inicial e atual do *TinkerPlots* vem sendo estudadas por pesquisadores integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Estatística – GPEME (e.g.) LIRA, 2010; ALVES, 2011; ASSEKER, 2011; EUGÊNIO, 2013; CAMPÊLO, 2014). O uso do *Sampler* foi especificamente estudado por Martins (2013). Nesse sentido, na discussão que segue, mencionamos os estudos iniciais realizados pelos elaboradores do *software* (e.g.) KAZAK; KONOLD, 2010; KONOLD *et al.*, 2011) e apenas o estudo de Martins (2013) por envolverem diretamente o trabalho com o *Sampler*.

#### 3.1 A ferramenta *Sampler*

O *Sampler* (amostrador) é um simulador de experimentos aleatórios que permite visualizar a construção de um plano amostral. A partir da simulação de um experimento, podemos visualizar o espaço amostral, que consiste no conjunto de todos os resultados do processo de experimentação.

Para Kasak e Konold (2010), essa ferramenta “permite aos estudantes construir um modelo, executar um grande número de repetições em vários testes, e exibir como os dados estão reunidos” (p. 5). Sua interface é similar à versão 1.0. Como todo aplicativo destinado a construção de objetos específicos, a tela inicial é branca, e o *Menu* é escrito na língua inglesa, conforme pode ser visto na Figura 2.

**Figura 2 - Tela inicial do software TinkerPlots 2.0.**

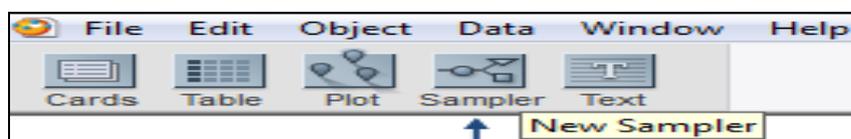


Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) adaptado do software *TinkerPlots Help* versão 2.0 (2012).

Antes de integrar a ferramenta *Sampler* à versão anterior do *TinkerPlots*, Kazak e Konold (2010) fizeram experimentos preliminares em sala de aula com simulações de probabilidade. As possíveis atividades com o uso dessa ferramenta foram projetadas, portanto, para contribuir com a construção do conhecimento dos estudantes a partir das suas intuições.

A ferramenta *Sampler* possui um mecanismo que permite ao usuário projetar e executar simulações de probabilidade. Seu ícone encontra-se na barra do *Menu* de ferramentas do *software*, localizado no canto superior esquerdo da tela do *TinkerPlots* (ver seta na Figura 3).

**Figura 3 - Localização do *Sampler* na barra de ferramenta do software *TinkerPlots*.**



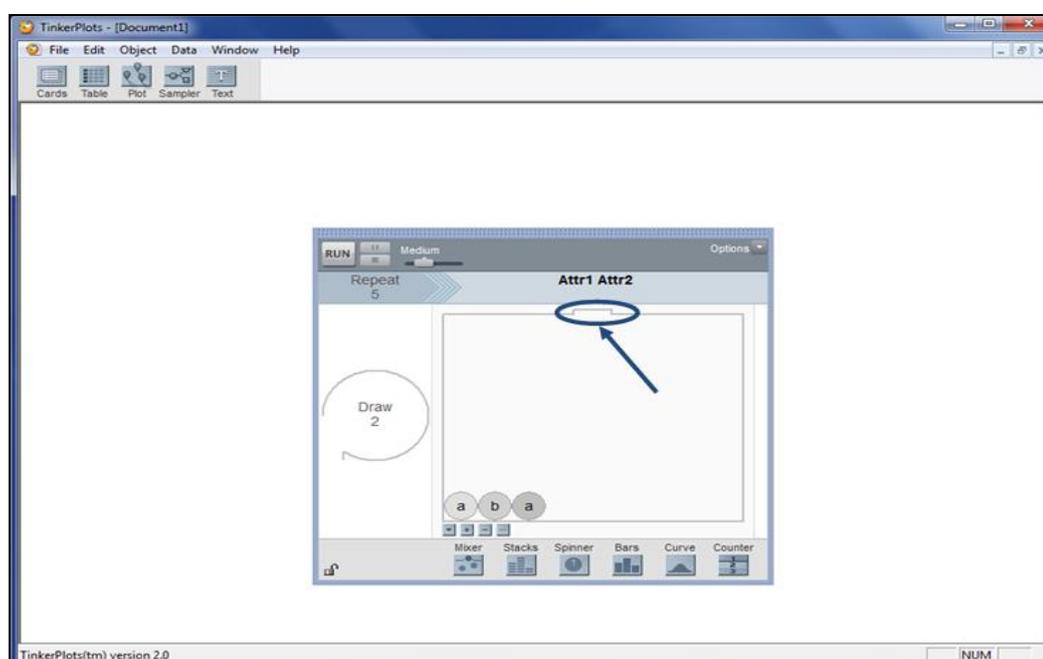
Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) adaptado do software *TinkerPlots Help* versão 2.0 (2012).

Além do ícone representando a ferramenta *Sampler* na Figura 3, são apresentados outros quatro ícones, indicando a existência de outras ferramentas quais sejam: *Cards*, *Table*, *Plot* e *Text*. No entanto, o foco do nosso trabalho será na ferramenta *Sampler*, mas também utilizaremos a ferramenta *Plot* por ela permitir

ao usuário visualizar a representação gráfica dos resultados da simulação de um experimento aleatório.

Para acionar o *Sampler* (amostrador) e explorá-lo para simular um experimento ativa-se esta ferramenta selecionando-a com o cursor na barra de ferramenta, arrastando e soltando em qualquer parte da área em branco. A ferramenta pode ser ampliada arrastando o canto inferior direito. A Figura 4 a seguir mostra a ferramenta *Sampler* acionada.

**Figura 4 - Ilustração da tela do *TinkerPlots* com a Ferramenta *Sampler* acionada**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) adaptado do software *TinkerPlots Help* versão 2.0 (2012).

Conforme visualizamos na Figura 4, inicialmente como padrão do *software*, a ferramenta *Sampler* (amostrador) aparece com o dispositivo *Mixer* com três elementos, rotulados com as letras: a, b, a. Além disso, ainda como parte do padrão da ferramenta, o *Draw* é fixado em dois (*Attr1* e *Attr2*); e a quantidade de repetições, é fixada em cinco (*Repeat*).

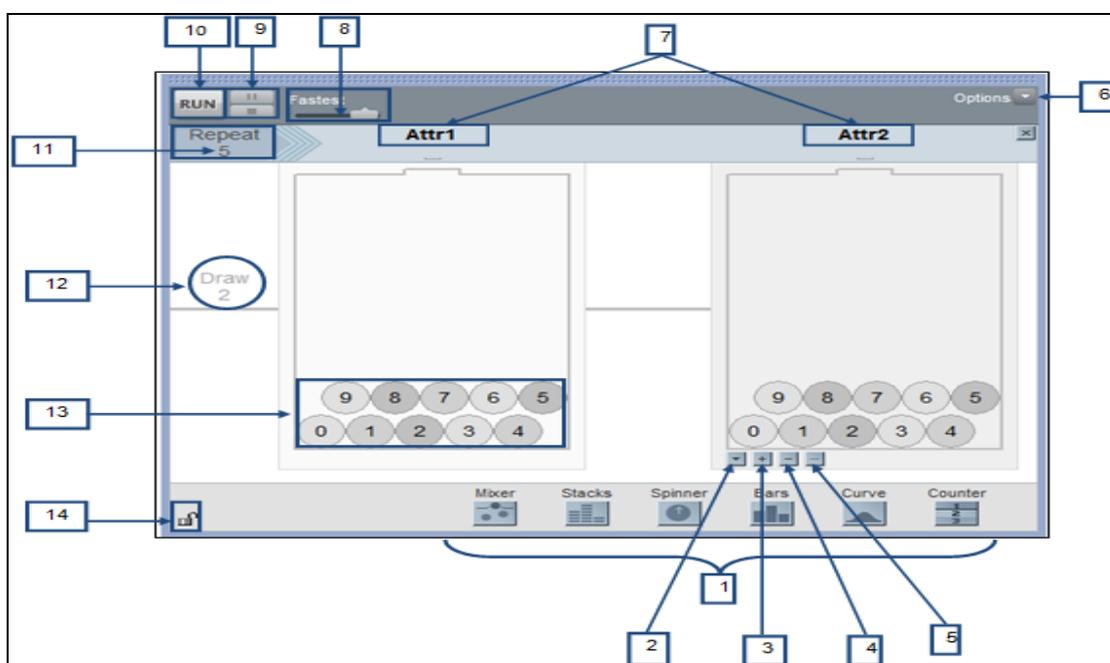
Notamos, ainda, que a parte superior do dispositivo *Mixer* está fechada (ver seta), indicando que o dispositivo está definido para que haja a substituição da amostra. No entanto, as configurações podem ser alteradas de acordo com o que se objetiva.

Cabe destacar que o usuário poderá também utilizar outro tipo de dispositivo, procedendo de forma semelhante ao acionar a ferramenta *Sampler*, isso é,

arrastando outro dispositivo sobre o já existente. Outra possibilidade é a combinação de dispositivos iguais ou diferentes, o que dependerá do que se objetiva ao utilizar o *software*.

Visando proporcionar uma melhor compreensão dos principais aspectos funcionais da ferramenta *Sampler*, apresentamos a Figura 5 com dois dispositivos *Mixer* interligados mostrando cada um desses aspectos e que serão detalhados no Quadro 1.

**Figura 5 - Principais aspectos funcionais da ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots* 2.0.**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) adaptado do software *TinkerPlots Help* versão 2.0 (2012).

Quanto aos dispositivos da ferramenta *Sampler* (1), que ficam na parte inferior, discutiremos separadamente tendo em vista fornecer maior clareza possível ao leitor devido as suas especificidades. O Quadro 1, como mencionado, tratará das especificidades da ferrameta *Sampler*.

**Quadro 1 - Especificações dos principais componentes da ferramenta *Sampler***

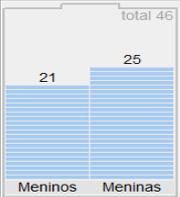
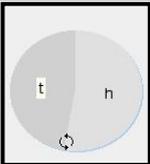
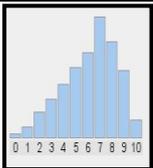
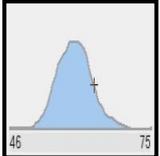
1	<p style="text-align: center;"><b>Dispositivos da ferramenta <i>Sampler</i></b></p> 
2	<p><b>Menu Opções</b> do dispositivo</p> <p>Funções: inclui, por exemplo, determinar a extração dos casos (eventos) com ou sem reposição, adicionar ou remover dispositivos, ver a proporção ou percentual, dentre outros. Algumas opções são de acordo com o dispositivo.</p>
3 e 4	<p><b>Add Device</b> - (+ e -)</p> <p>Funções: adicionar ou retirar elementos do dispositivo.</p>
5	<p><b>Range</b></p> <p>Função: determinar faixa de elementos.</p> <p>Por exemplo, se o usuário desejar rapidamente encher um dispositivo com um conjunto de elementos (por exemplo, os números 1 a 100, ou as letras A a Z): deverá manter o cursor sobre o dispositivo, em seguida, clicar no botão <i>Range</i> (...) abaixo do dispositivo. Em seguida, deverá digitar o intervalo desejado na caixa de diálogo, no formato "A-G" ou "A to G".</p>
6	<p><b>Menu Opções do <i>Sampler</i></b></p> <p>Funções: especificar uma condição para o experimento, determinar se a amostra será ou não substituída, como os resultados serão apresentados na tabela (combinados, somados), ver o histórico etc.</p>
7	<p><b>Attr</b></p> <p>Função: alterar o nome de um atributo.</p>
8	<p><b>Velocidade</b> - ( 9 velocidades - <i>Very Slow, Slow, Medium, Medium Fast, Fast +1, Fast +10, Fast +100, Fast +1000, Fastest</i>).</p> <p>Função: determinar a velocidade de extração dos casos que comporão amostra do experimento,.</p>
9	<p>Função: Pausar ou interromper uma simulação.</p>
10	<p><b>Run</b></p> <p>Função: iniciar a extração de casos (eventos) que comporão a amostra de um experimento.</p>
11	<p><b>Repeat Number</b></p> <p>Função: determinar quantos casos serão gerados a cada execução dos <i>Sampler</i>, ou seja, quantas unidades amostrais irão compor a amostra de um experimento. Pode ser configurado para substituir ou incluir casos.</p>
12	<p><b>Draw</b></p> <p>Função: determinar quantos atributos (por exemplo: propriedade ou característica) comporão uma amostra de um experimento.</p>
13	<p>Função: exibir elementos de acordo com cada dispositivo. Essa é a forma em que são mostrados os elementos no <i>Mixer</i>. Esses elementos representam os casos que comporão a amostra e podem ser editados clicando neles.</p>
14	<p><b>Lock the <i>Sampler</i></b></p> <p>Função: Bloquear o <i>Sampler</i>. Oculta o conteúdo do dispositivo e impossibilita alteração das configurações.</p>

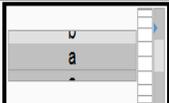
Fonte: Gleidson Souza (2015) adaptado de *TinkerPlots Help* versão 2.0 (2012)

No que se refere aos dispositivos, à ferramenta *Sampler* possui seis tipos que podem ser utilizados para o trabalho de simulação. Nos dispositivos encontram-se

diferentes formas de visualizar cada atributo e sua seleção mediante a simulação. No Quadro 2 apresentamos uma breve visão deles e de seus usos particulares.

**Quadro 2 - Descrição das utilizações dos dispositivos do *Sampler***

Nome/Ícone	Dispositivo	Utilização
<p><i>Mixer</i></p> 		<p>Utilizados para visualização elementos discretos. São úteis quando você tem um pequeno número de elementos. Ele também é útil quando você tem muitos elementos distintos, como listados pelo nome.</p>
<p><i>Stacks</i></p> 		<p>Utilizado para introduzir um grande número de elementos duplicados. Por exemplo, você pode determinar probabilidades associadas com os meninos e meninas de uma escola. Você pode escolher Mostrar Contagem a partir do menu Opções do dispositivo na parte esquerda inferior do dispositivo e, em seguida, editar o número que aparece acima de cada tipo de elemento.</p>
<p><i>Spinner</i></p> 		<p>Utilizados para a visualização de elementos que têm áreas ao invés de frequências. Você pode ajustar essas áreas, igualando-as ou não, arrastando diretamente no dispositivo ou selecionar Equalizar Angles (para <i>Spinners</i>). As opções do <i>Menu</i> do dispositivo possibilitam ver as áreas em percentual ou proporção, e editar os valores.</p>
<p><i>Bars</i></p> 		<p>São úteis quando você tem muitos elementos diferentes, com uma variedade de probabilidades. Por exemplo, suponha que você queira fazer uma distribuição do número de minutos que você precisava para esperar o próximo ônibus. Você pode inserir um intervalo de, por exemplo, de 0 a 10, que, inicialmente, será dado um conjunto de barras que são todos da mesma altura e, portanto tem uma distribuição uniforme, mas que podem ser alteradas clicando e arrastando com o cursor.</p>
<p><i>Curve</i></p> 		<p>Utilizado para representar apenas elementos contínuos, por exemplo a distribuição de alturas sobre algum intervalo. O dispositivo padrão aparece com uma variação de 0-100, que você pode ser editada. Você pode alterar a forma da distribuição usando o cursor como um dispositivo de desenho. Podemos ver aqui é uma distribuição de alturas variando de 46 a 75 polegadas que é mais ou menos normal.</p>

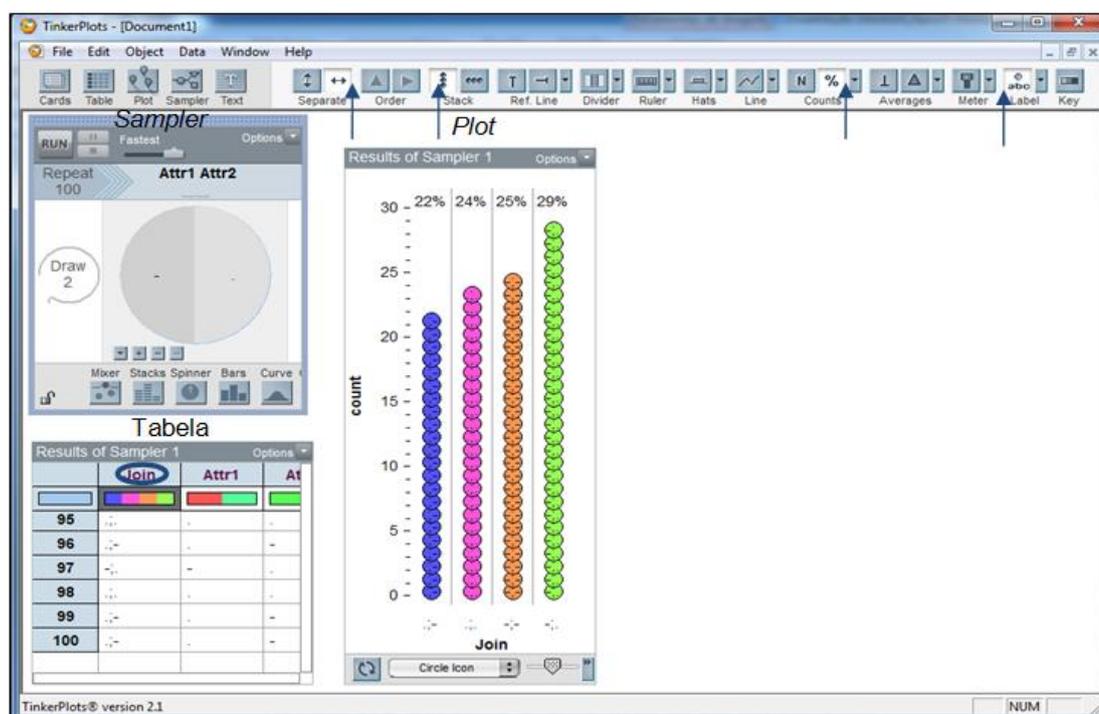
<p><i>Counter</i></p> 		<p>Considerando que os outros dispositivos selecionam elementos e valores aleatoriamente, esse dispositivo é utilizado para selecionar elementos sistematicamente. Isto pode ser útil na elaboração de modelos em que certas variáveis (ou atributos) não são determinadas aleatoriamente.</p>
---	---	--

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) adaptado do software *TinkerPlots Help* versão 2.0 (2012).

O Quadro 2 mostra os seis dispositivos: *Mixer*, *Stacks*, *Spinner*, *Bars*, *Curve* e *Counter*. Tais dispositivos ficam localizados na parte inferior direita do *Sampler* (ver Figura 5) e possuem diferentes funcionalidades no trabalho com probabilidade.

Esses dispositivos, permitem ao usuário configurar os experimentos e a probabilidade da ocorrência de eventos de maneiras diferentes. A amostragem a partir da simulação de um experimento pode ser visualizada pelos utilizadores de duas formas, o que adiciona flexibilidade ao programa, ampliando seu foco de dados estatísticos para incorporar probabilidade. Isso pode ser visto na Figura 6 a seguir.

**Figura 6 - Visualização de uma simulação realizada com 100 repetições do “traço e ponto” na Tabela e no Gráfico**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) adaptado do software *TinkerPlots Help* versão 2.0 (2012).

A Figura 6 mostra visualmente na tabela e no gráfico os resultados obtidos a partir da simulação com o *Sampler*. A visualização do gráfico é possibilitada por meio da ferramenta *Plot* que tem sua ativação semelhante a do *Sampler*. O *Sampler*

está com o dispositivo *Spinner*, com áreas iguais, dois elementos (casos que compõem a amostra) editados como “traço” e “ponto”. A execução da simulação está determinada com uma quantidade de 100 repetições (tamanho da Amostra).

Observamos ainda na Figura 6 que abaixo do *Sampler* encontra-se uma Tabela (parte do padrão da ferramenta), com o registro dos resultados da simulação do experimento, combinados (*Join*) e separados (*Attr1* e *Attr2*). Por fim, do lado direito visualizamos o *Plot*, que possui o seu próprio *Menu*, constituindo o Gráfico. A formação desse Gráfico se deu a partir de algumas possibilidades do *Plot*, a saber: após sua ativação os resultados combinados na Tabela foram arrastados e inseridos na horizontal do *Plot*, formando o Gráfico na vertical; recorre-se ao *Menu* do *Plot* as funções na seguinte ordem: Separar (*Separate*), Empilhar (*Stack*), Contagem - em percentual (*Counts – N ou %*) e Rótulo (*Label*) (setas azuis).

Dessa forma, entendemos que o *Plot* serve como importante auxílio à visualização e interpretação do conjunto de dados e de casos individuais de uma simulação a partir dos atributos inseridos.

A partir dos aspectos destacados e ilustrados do *Sampler*, acreditamos que o trabalho com essa ferramenta poderá auxiliar na compreensão do que é um experimento aleatório e suas especificidades. O trabalho a partir de um experimento, por sua vez, pode favorecer a compreensão do conceito de probabilidade, como por exemplo: espaço amostral, amostra, variabilidade, eventos (dependência e independência).

Como já destacado e fundamentado no capítulo anterior, há um imbricamento entre conceitos de Probabilidade, Estatística e Combinatória. A probabilidade é uma ferramenta indispensável nos estudos estatísticos que envolvem inferências ou induções, através de uma amostra, quando tratamos de uma população. A amostra, quando tende ao infinito ( $\infty$ ), há uma estabilização das frequências, algo que pode favorecer a compreensão dos estudantes podendo vir a estabelecer conexões a probabilidade teórica. Por meio da probabilidade frequentista, os estudantes poderão perceber que quanto maior a amostra, menor será a variação dos resultados, e estes se aproximarão da probabilidade teórica. Os estudantes podem vir a entender, também a probabilidade frequentista como sendo uma tendência da teórica.

O trabalho com a probabilidade frequencial e a probabilidade teórica também pode ser realizado ao se observar a distribuição esperada com base no espaço

amostral. Na seção a seguir apresentamos pesquisas que fizeram uso da ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots*, bem como seus resultados.

### 3.2 Pesquisas prévias com o *TinkerPlots*

Ireland e Watson (2009) identificaram, a partir de estudos prévios, a existência de poucas pesquisas que investigavam a conexão que crianças do Ensino Fundamental fazem entre as abordagens clássicas e frequentista da probabilidade. Destacam nesse estudo o contributo da tecnologia para a aprendizagem em sala de aula e utilizaram como foco a ferramenta *Sampler* (amostrador) do software *TinkerPlots* que estava em fase de desenvolvimento, sendo disponibilizada para tal. Um aspecto importante do uso dessa ferramenta e destacado no estudo é a possibilidade do *Sampler* imitar, no sentido de simular, o processo de fenômenos do “mundo real”.

Os pesquisadores desenvolveram o estudo em questão, norteados pela pergunta “Quais as conexões que os estudantes fazem entre a probabilidade experimental e teórica, depois do trabalho com materiais manipuláveis e com o auxílio do *Tinkerplots*?” O objetivo dessa investigação foi documentar o entendimento de probabilidade em uma série contínua do experimental ao teórico, incluindo a análise da interação de materiais manipuláveis, o simulador e a Lei dos Grandes números. Para avaliar os conhecimentos dos estudantes utilizaram o modelo SOLO de desenvolvimento cognitivo.

Tendo como base a teoria do desenvolvimento cognitivo de *Piaget*, escolheram estudantes dos graus 5 e 6 (10-12 anos, total de 43) por se encontrarem na transição do estágio das operações concretas para o estágio das operações formais (abstratas). Os já tinham experimentado aulas de probabilidade, por constar no currículo de matemática da Tasmânia. O trabalho incluiu atividades com dados, moedas e probabilidade básica e a classificação da probabilidade de eventos em suas vidas.

Ireland e Watson (2009), inicialmente, antes das aulas de probabilidade, administraram um Teste sobre probabilidade básica com perguntas abertas e fechadas, em algumas incluíram um pedido de explicação ou justificação. O primeiro autor, em conjunto com o professor administrou duas aulas como parte do currículo. A primeira lição na sala de aula versou sobre uma discussão estruturada de

probabilidade, que incluiu: o seu significado em termos de acontecimentos como o pôr do sol, a ordenação de expressões de chance e os significados de termos específicos como "variação" e "aleatório". Em seguida os foram introduzidos a probabilidade teórica a partir da previsão lançamento de uma moeda 10 vezes. Após esse procedimento debaterem a relação entre teórico e experimental e foram questionados sobre quantos ensaios seriam necessários para a probabilidade experimental para confirmar a probabilidade teórica.

Na sequência os estudantes, a partir de 10 lançamentos de uma moeda, foram solicitados a estimar e registrar suas estimativas em uma folha. Após realizarem os 10 lançamentos da moeda, constituíram um gráfico com etiquetas adesivas e registraram os resultados de cada face da moeda em forma de fração, comparando com o valor teórico para que a variação fosse ilustrada. Em seguida, combinaram os resultados com os colegas do lado para criar amostras maiores de 20, e em seguida 40, fazendo os registros em um gráfico na sala de aula. Ao final dessa primeira lição na sala de aula, desenvolveu-se uma discussão focada na proximidade dos resultados para a probabilidade teórica e o efeito do tamanho da amostra.

A lição seguinte teve o mesmo formato e envolveu o uso do *Sampler* do *TinkerPlots* para investigar a relação entre a probabilidade teórica e os resultados experimentais observados a partir de ensaios maiores de 100, 1000 e 10.000. Em toda a lição, os estudantes utilizaram o dispositivo *Mixer* para simular o lançamento de uma moeda. Os estudantes puderam visualizar a contagem de cada face da moeda (cara e coroa) na forma de um gráfico de barras, um gráfico de pontos, onde puderam monitorar a variação entre as faces e um gráfico de pontos empilhados que produziram ao acompanharem a simulação do lançamento de uma moeda.

Ao final dessa segunda lição, amostras do trabalho foram coletadas e os estudantes foram solicitados a responder a três perguntas: Qual é a probabilidade experimental? O que é a probabilidade teórica? Como elas estão conectadas? A partir destas respostas e do desempenho no pré-teste oito estudantes foram escolhidos para uma entrevista individual com o pesquisador. Durante a entrevista, os estudantes foram solicitados a explicar, generalizar, encontrar provas e aplicar o conhecimento atual de probabilidade de um dado.

Como parte do protocolo de entrevista, os estudantes foram expostos a três cenários envolvendo o simulador e um dado. O *Spinner* foi escolhido para simular o

dado por possibilitar maior flexibilidade na carga dos resultados. Três situações foram desenvolvidas: um sem carga, uma com uma grande carga, e uma com uma pequena carga. Estes carregamentos foram escondidos dos estudantes. Os estudantes puderam ver o *Spinner* (mas não o seu conteúdo), a tabela de resultados, e um gráfico de pontos empilhadas com decimais e a porcentagem dos resultados experimentais acima de cada coluna.

Ireland e Watson (2009), concluíram que o trabalho em um contexto de jogos com manipulativos e com grandes amostras em um ambiente de simulação, *Sampler do TinkerPlots*, é eficaz. Esse estudo identificou que os estudantes foram capazes de articular, em algum momento, durante a pesquisa, um nível básico de compreensão da relação entre a probabilidade experimental e a teórica. Os estudantes envolvidos foram capazes de conectar de forma adequada os resultados no simulador com a probabilidade teórica, demonstraram uma compreensão da Lei dos Grandes Números, raciocínio proporcional, e os conceitos teóricos subjacentes de justiça e resultados igualmente prováveis.

Kazak e Konold (2010), do mesmo modo, centrados na capacidade de simulação de probabilidade da ferramenta *Sampler* do software *TinkerPlots 2.0*, projetaram e desenvolveram um conjunto de atividades. Tais atividades objetivaram principalmente desenvolver compreensões de idéias sobre dados e chance.

Uma das atividades de ensino utilizada pelos autores foi o “Problema Piscadela” (*The Wink Problem*), envolvendo uma situação de jogo composto pelos desenhos de um ponto (.) e um traço (-) desenhados em duas fichas. Os pesquisadores sugerem aos estudantes que imaginem os desenhos como se fossem olhos aberto (.) ou fechado (-).

A investigação envolveu dois contextos: coleta da situação real com as fichas a serem retiradas, com reposição, de um saco e a modelagem da situação-problema com o uso do *Sampler* do software *TinkerPlots 2.0*.

Os autores fizeram, inicialmente um levantamento das previsões intuitivas dos estudantes sobre se o jogo era ou não “justo<sup>1</sup>”. A coleta inicial foi realizada manualmente e os autores argumentam que esse procedimento ajudaria os estudantes a entender o processo antes de modelá-lo no *TinkerPlots*. Demonstraram

---

<sup>1</sup> O termo “justo” é utilizado para se referir à equidade, ou seja, a chance igual de todos os eventos combinados ocorrerem. Injusto seria favorecer um dos jogadores, que é o caso da piscadela. Logo justo aqui é sinônimo de ter a mesma chance de ocorrência (de ganhar o jogo).

como o jogo se daria, retiraram a ficha, devolvendo-a ao saco fazendo nova retirada e registraram os resultados combinados, (-,•) piscadela (*Wink*); (-,-) piscar (*Blink*) e (•,•) olhar (*Stare*), e em seguida os estudantes jogaram o jogo, em pares, 12 vezes.

Em seguida, os pesquisadores fizeram um registro no quadro, em uma tabela, dos resultados dos 12 ensaios de cada dupla e o total de vitórias. Os estudantes começam a ter novas crenças, argumentando, por exemplo, que o jogo não era justo. Os autores destacam que os estudantes expressaram a crença de que se coletassem mais dados poderiam decidir com confiança se o jogo era “justo”. A partir dessa crença, os pesquisadores sugerem que as duplas joguem o jogo 100 vezes, o que gera um protesto. Então sugerem que a coleta dos dados seja realizada utilizando o *Sampler* do *TinkerPlots*.

Os estudantes alteraram a configuração padrão do *Sampler*, removendo elementos do *Mixer*, deixando apenas dois e rotularam com um traço ( - ) e um ponto ( . ). Executaram as 100 repetições e obtiveram os resultados exibidos em um gráfico para cada tipo de evento ((- , • ); (- , -); (• , •); (• , -)). Realizaram o experimento para produzir diferentes amostras, cinco sucessivas de 100, e em seguida a partir de 2500 repetições para comparar os resultados a partir da distribuição esperada com base no espaço amostral.

O trabalho com o *Sampler*, variando o tamanho das amostras possibilitou que os estudantes revissem suas conjecturas, passando a ter novas, encarando o jogo como não justo. Com essa nova percepção, eles concebem esses desvios como “ruído” (afastamento da probabilidade teórica), ou seja, variando o tamanho da amostra (pequenas amostras vs amostras grandes) os estudantes puderam observar o “ruído” aumentando ou diminuindo. Os autores afirmam ter introduzido o espaço amostral tanto como uma explicação para os resultados que viram, bem como base para prever o que eles veriam quando coletassem mais dados.

Nessas investigações, Kazak e Konold (2010) destacam que a ferramenta do computador desempenha um papel central. Sem o *software* não é possível reunir dados suficientes na sala de aula para observar resultados estabelecendo-se expectativas, pois o tamanho da amostra aumenta. Além disso, o *software* permite que os estudantes vejam isto acontecer de forma dinâmica, em tempo real.

Os principais aspectos do uso do *sampler* segundo as investigações dos autores encontram-se descritas em seguida:

- Construção de um modelo de uma situação, a partir da escolha dos vários dispositivos do *Sampler* pelos , tais como *Mix*, *Spinners*. Os estudantes geralmente podem construir um modelo adequado com pouco ou nenhum apoio. A escolha do dispositivo pode se dar a partir da preferência, por exemplo, da semelhança com a situação-problema.
- Usando o modelo construído no *Sampler* do *TinkerPlots*, os estudantes podem gerar grandes quantidades de dados rapidamente. Isso pode permitir que eles articulem seus conhecimentos informais sobre situações casuais e, em seguida, coloquem à prova.
- O ambiente do *TinkerPlots* facilita o raciocínio visual dos estudantes através de gráficos dinâmicos onde os resultados se acumulam à medida que são gerados novas extrações pelo *Sampler*. Através de observação dos dados de simulação de vários ensaios, juntamente com a atividade de desenhar, os estudantes podem explorar o ajuste entre a distribuição esperada com base no espaço amostral e o espaço dos dados empíricos. Como resultado destas observações, os estudantes começam a perceber dados como o sinal, pois revela o agregado relativamente estável das propriedades das distribuições e o ruído que é introduzido pelo acaso e variabilidade.

Esse *software* tem sido usado como objeto de estudo por alguns pesquisadores integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Estatística – GPEME (LIRA, 2010; ASSEKER, 2011; ALVES, 2011; EUGÊNIO, 2013; CAMPÊLO, 2014).

Pesquisas mais recentes tem investigado o *TinkerPlots* a partir de aspectos conceituais, como o conceito de média (EUGÊNIO, 2013) e o conceito de amostragem (MARTINS, 2013).

Destacamos o trabalho de Martins (2013), que investigou as compreensões de professores dos anos iniciais sobre amostragem, utilizando a ferramenta *Sampler* do *software TinkerPlots*. Ela notou que as professoras apresentaram dois níveis diferentes de Raciocínio sobre amostragem na entrevista inicial. Nas atividades exploratórias desenvolvidas no *TinkerPlots* foi notado que elas passaram a considerar aspectos da variação dos dados para determinar amostras representativas em duas das três atividades. As professoras também expressaram compreensão de que os procedimentos de amostragem interferem na representatividade. Por fim, observou-se que a possibilidade de selecionar amostras

maiores, analisá-las a partir de gráficos e observar estatísticas utilizando o *TinkerPlots*, pareceram contribuir para que as professoras avançassem em suas compreensões. Segundo a pesquisadora o trabalho com esse *software* pode favorecer a compreensão de professores sobre amostragem, mas que são necessárias situações prolongadas de intervenção visando melhores resultados.

Essa pesquisa possui relevância uma vez que utiliza o *Sampler* como meio dos professores compreenderem amostragem e representatividade. Contudo, pesquisas realizadas com estudantes ainda são necessárias. Nesta dissertação, desenvolvemos o trabalho com estudantes do 9º ano, cuja trajetória de pesquisa encontra-se descrita em seguida, no capítulo da metodologia.

## 4 MÉTODO

---

Como meio de atingir os objetivos propostos, utilizamos uma metodologia pautada na abordagem qualitativa, por sua preocupação central estar focada nos significados dos sujeitos participantes da pesquisa; além desse tipo de pesquisa caracterizar-se essencialmente pela ênfase no processo e não simplesmente nos resultados ou produto (TRIVIÑOS, 1987).

Neste capítulo descrevemos a nossa trajetória de pesquisa que inclui aspectos do estudo piloto e do estudo principal. A metodologia proposta, portanto, foi se configurando por etapas. Inicialmente pensamos em investigar os conhecimentos dos estudantes sobre probabilidade em diferentes contextos, como o de jogos e o da mídia. Nesse sentido, elaboramos as questões iniciais da entrevista com os estudantes, inserindo questões sobre probabilidade nesses diferentes contextos, e buscamos identificar os conhecimentos prévios dos estudantes. Numa etapa posterior focamos em problemas sobre experimentos aleatórios (não realizado, realizado no ambiente físico e com o *Sampler* do *TinkerPlots*).

### 4.1 Estudo piloto

Realizamos o estudo piloto com vistas à adequação das etapas, objetivos e questões propostas; além de testar os instrumentos de coleta de dados para o estudo principal. Apresentamos em seguida, a estrutura geral do estudo piloto e alguns encaminhamentos da banca de qualificação para o estudo principal.

O estudo piloto foi realizado com dois estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de ensino da cidade do Recife. Eles realizaram uma entrevista semi-estruturada e resolveram questões sobre probabilidade individualmente e realizaram experimento aleatório e manipulação com o *Sampler* do *TinkerPlots* em dupla.

Na entrevista, perguntamos sobre questões relativas ao perfil do estudante (ex., frequência e uso de computadores dentro e fora da escola) e questões gerais e específicas sobre probabilidade.

Eles responderam as questões sobre probabilidade diretamente em folhas A4 com os problemas impressos. Algumas dessas questões foram retiradas de livros

didáticos. Outras foram adaptadas. As questões gerais estiveram relacionadas com concepções dos sobre probabilidade. As questões específicas por sua vez envolveram situações de resolução de problemas situadas nos contextos da mídia impressa e jogos. Além dessas, introduziu-se também um problema no qual o estudante precisava realizar um experimento aleatório usando fichas.

A classificação dos problemas da pesquisa no estudo piloto foi baseada em critérios geral e específico, os quais levaram em consideração um maior ou menor envolvimento dos estudantes com aspectos conceituais. As questões gerais envolveram concepções e as específicas envolveram conceitos de probabilidade. Nessa altura dos nossos estudos tomamos como base para a definição de “contexto” o conteúdo dos problemas. Em nosso estudo, inserimos problemas situados no contexto da mídia, requerendo interpretação e comparação de probabilidades. O Quadro 3 apresenta os contextos, itens e tipos de problemas da etapa inicial dos nossos estudos.

**Quadro 3 - Tipos de problemas do teste da primeira etapa do estudo piloto**

Contexto	Itens	Tipos
Questões gerais	1, 2, 3	Concepção de probabilidade
Mídia impressa	4 (a, b)	Interpretação e cálculo da probabilidade
	5 (a, b, c)	Interpretação e comparação de probabilidade
	6 (a, b)	Interpretação e cálculo da probabilidade
Jogos	7 (a, b, c, d)	Experimento aleatório
	8	Experimento aleatório

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Por ocasião da nossa qualificação a banca analisou a proposta do teste diagnóstico e sugeriu que o número de problemas fosse reduzido e que os conceitos envolvidos fossem mais bem especificados. Paralelo ao aprofundamento sobre os aspectos teóricos e conceitual sobre probabilidade e sobre o *software TinkerPlots*, revisamos a nossa ideia de contexto no teste diagnóstico e decidimos focar em problemas de concepção e de experimento aleatório. Além disso, reduzimos a quantidade de problemas dessa etapa inicial da pesquisa.

A segunda etapa da pesquisa envolveu a familiarização com o *TinkerPlots*. Nessa etapa, os estudantes foram apresentados ao *software*, e o pesquisador

destacou a sua interface e principais ferramentas. Após apresentar a ferramenta *Sampler*, mostrando a sua localização na barra de ferramentas, os estudantes passaram ao processo de ativação da ferramenta. O pesquisador explicou o funcionamento dos dispositivos do *Sampler*, usando um banco de dados existente no *TinkerPlots* denominado “*Using the counter*” designado aqui como banco de dados dos “dígitos”. Esse banco de dados faz uso do dispositivo *Mix* do *Sampler*, possui forma de caixa/urna, é alimentado por dez dígitos de 0 a 9, podendo ser simulada as retiradas desses dígitos, determinando-se a quantidade de retiradas a partir da configuração, podendo as retiradas serem com reposição ou sem reposição.

O processo de familiarização ocorreu de forma dialogada com os estudantes. Foi chamada a atenção, durante a simulação, para as representações, a princípio da tabela e posteriormente do *Plot*. Algumas perguntas nortearam o processo, como por exemplo, qual dos dispositivos você acha que seria melhor para representar os dígitos? Focando sempre no uso de cada componente da ferramenta *Sampler*, na tabela e posteriormente no *Plot* e suas peculiaridades, desde o início, os estudantes foram encorajados durante a familiarização a manipular o *software* sempre mediado pelas intervenções do pesquisador.

Ainda durante o processo de Familiarização, utilizamos o exemplo de lançamento de uma moeda, objetivando que os estudantes conhecessem outros dispositivos, bem como a sua devida utilização de acordo com o que se deseja simular. O trabalho com essa situação foi possibilitada pelo banco de dados “*Sample Space*” do *TinkerPlots*. Esse banco de dados permite que os estudantes percebam que podem combinar um ou mais dispositivos, iguais ou diferentes.

Em seguida, os estudantes realizaram uma manipulação mais autônoma da ferramenta *Sampler* a partir de algumas proposições para então escolherem o dispositivo adequado à situação e realizar a simulação.

Para assegurarmos o devido registro de todos os aspectos que foram relevantes para a análise, videografamos toda a atividade realizada com o *TinkerPlots* por meio do *software free Camtasia Studio 8*, que permite captar, em vídeo de alta resolução, as falas e imagens dos estudantes, bem como todas as ações que eles realizaram no computador.

A banca de qualificação não questionou os procedimentos utilizados para o processo de familiarização com o *TinkerPlots*, contudo, solicitou uma descrição mais

detalhada do *software TinkerPlots* no corpo da pesquisa. Com relação à etapa de manipulação com o *software*, a banca sugeriu que fosse trabalhado apenas o experimento aleatório indicado como item oito no Quadro 3.

Com base nas sugestões da banca, decidimos manter para o estudo principal os procedimentos realizados na familiarização, mudando apenas o banco de dados “*Using the counter*” para o “*Sample Space*” que possibilita a simulação do lançamento de uma moeda. Acreditamos que essa situação ao incluir apenas duas possibilidades, cara ou coroa, se assemelharia mais àquela para ser usada na fase de manipulação.

Por último, os estudantes foram solicitados a responder novamente as questões do teste diagnóstico que eles resolveram na primeira etapa. Assim como na etapa inicial de pesquisa, os estudantes também responderam as questões diretamente com elas impressas em folhas A4 e todo o processo foi realizado individualmente.

Em síntese, o estudo piloto consistiu na base para o nosso estudo principal. As orientações da banca estiveram voltadas para a ampliação e aprofundamento da nossa compreensão dos aspectos conceituais da probabilidade assim como na objetivação do método. Alguns instrumentos como, por exemplo, o teste diagnóstico foi revisto para incluir apenas questões de concepção e de experimentos aleatórios. Além disso, a descrição dos aspectos conceituais envolvidos em cada problema foi mais especificada para o estudo principal e incluímos também no experimento do item oito (ver Quadro 3) a representação dos resultados do experimento por meio de gráficos, pois estava previsto o seu registro apenas por meio de quadro. O design do estudo principal, portanto, é resultante dessa trajetória e encontra-se descrito em detalhes na próxima subseção.

## **4.2 Estudo principal**

### **4.2.1 Local da pesquisa**

A escola campo de pesquisa é pública estadual e localizada no bairro das Graças em Recife - PE. A escolha dessa escola foi baseada em alguns critérios dentre os quais podemos citar: já termos a aceitação da realização da nossa pesquisa nessa escola por ocasião do estudo piloto; nossa acessibilidade à escola;

demonstração de interesse e disponibilidade dos gestores e docentes para que os seus estudantes participassem do estudo.

A escola é de grande porte, possuindo uma ampla infra-estrutura composta por 15 salas de aula, refeitório, biblioteca, dois laboratórios de informática e duas quadras de esportes. Atende aproximadamente a 1.800 estudantes, dentre os quais 300 são surdos; possui 110 professores. Quanto aos Níveis e Modalidades de Ensino, a escola atende ao Ensino Infantil (só para surdos), Ensino Fundamental (6º ao 9º Ano), sendo quatro turmas, só do 9º ano, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos. Quanto à organização pedagógica no Ensino Fundamental, e em particular no 4º ciclo onde estão os estudantes participantes da nossa pesquisa, a cada trimestre é promovida reunião com os pais, bem como contato individual com a Coordenadora Pedagógica para se discutir o desenvolvimento dos estudantes. Outro aspecto da organização pedagógica diz respeito ao fato de existir um professor de cada disciplina para cada ano escolar; por exemplo, existe apenas um professor de Matemática que ensina nas turmas do 9º ano.

No processo de nossa entrada na escola foram considerados e respeitados os procedimentos que guiam a conduta ética em pesquisa, podendo ser citado a esse respeito à entrega de carta (ver Apêndice A) à gestora da escola, explicitando os aspectos da pesquisa e solicitando permissão para que a mesma fosse realizada. É importante salientar que essa permissão nos foi dada por ocasião do estudo e não foi necessário reafirmá-la por ocasião do estudo principal. Com base nessa permissão para a condução da nossa pesquisa, iniciamos os procedimentos de produção dos dados mantendo contato com a coordenadora pedagógica e com a docente de matemática que ensina no 9º ano. Além disso, apresentamos um cronograma de coleta dos dados, o qual foi sendo ajustado pela professora de acordo com algumas situações vivenciadas na escola.

Para o estudo principal os estudantes foram autorizados pelos pais para participar da pesquisa (Ver Apêndice B).

A amostra foi composta de quatro estudantes do 9º ano, que constituíram as duas duplas, os quais foram encaminhados para o pesquisador pela professora de Matemática com base em nossa solicitação de que as duplas fossem formadas por um (a) estudante com um bom desempenho nessa disciplina e outro com médio desempenho. A ideia central dessa solicitação foi que tivéssemos duplas formadas a partir do princípio daquela que tem melhor desempenho com aquela com médio

desempenho, numa perspectiva da “Zona de Desenvolvimento Proximal” (Vygotsky, 1978).

O Quadro 4 apresenta o perfil dos quatro estudantes que participaram da pesquisa. Os dados foram oriundos da entrevista inicial que versava sobre questões tais como usos do computador pelos estudantes dentro e fora da escola (ver Apêndice C). Os quatro estudantes foram entrevistados individualmente. Para salvaguardar as suas identidades, utilizaremos nomes fictícios.

**Quadro 4 - Perfil dos estudantes participantes da pesquisa**

Nome	Idade	Costuma utilizar o computador?	Frequência de uso por semana?	Local de uso	Tipos de usos	Uso de software na escola?
Luiz	14	Sim	4-6 horas	Casa; Casa de parentes.	Redes sociais; Jogos.	Não
Lucas		Sim	0-2 horas	Casa.	Redes sociais; Estudar	Não
Helen	14	Sim	4-6 horas	Casa.	Redes sociais; Estudar	Não
Helena		Sim	2-4 horas	Casa.	Redes sociais; Estudar	Não

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Observa-se que os estudantes costumam usar o computador, sendo que esse uso se dá basicamente em casa, sendo destinado para acessar as redes sociais e estudar. Tanto Luiz quanto Helen utilizam o computador com maior frequência por semana, 4 a 6 horas.

Luiz e Lucas possuem bom desempenho em Matemática, eles fizeram dupla respectivamente com Helen e Helena as quais possuem médio desempenho.

A escolha de uma amostra pequena se explica pelo fato do problema de pesquisa ter visado compreender o fenômeno ao invés de buscar fazer generalizações. A esse respeito citamos Moroz e Gianfaldoni, segundo os quais:

Dependendo do problema e do tipo de pesquisa que está sendo realizada, a generalização dos resultados para a população não é o objetivo imediato e sim, por exemplo, a compreensão de determinado fenômeno; assim é possível o número de sujeitos ser bastante reduzido e sua escolha não seguirá a técnica estatística de amostragem (2002, p. 63).

Dessa maneira, buscou-se nesta pesquisa, ainda que de forma exploratória, investigar conhecimentos de probabilidade pelos estudantes a partir de suas manipulações com a ferramenta *Sampler*.

#### 4.2.2 Esboço metodológico

A coleta de dados consistiu de quatro etapas, as quais se encontram resumidas no Quadro 5 a seguir.

**Quadro 5 - Resumo do esboço metodológico da pesquisa**

<b>Primeira Etapa</b>	Entrevista semi-estruturada com ênfase no perfil dos . Realizada individualmente.
<b>Segunda Etapa</b>	Teste diagnóstico envolvendo atividades sobre probabilidade (concepção e experimentos aleatórios) para identificar os conhecimentos prévios dos estudantes. Parte realizada individualmente e o experimento foi realizado em dupla.
<b>Terceira Etapa</b>	Familiarização com o <i>software Tinkerplots</i> , com foco no <i>sampler</i> e no <i>plot</i> . Realizado em duplas. Simulação com o <i>Sampler</i> pelos . Realizado em duplas.
<b>Quarta Etapa</b>	Teste diagnóstico da segunda etapa. Parte realizado individualmente e parte em duplas.

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme mostra o Quadro 5, os foram entrevistados individualmente na fase inicial da pesquisa. No teste diagnóstico, segunda etapa da pesquisa, eles também responderam individualmente questões de concepções e questões relativas a um experimento aleatório não realizado<sup>2</sup> e a primeira parte de um experimento realizado no ambiente físico. A segunda parte desse experimento e as etapas realizadas com o *software TinkerPlots* foram realizadas em duplas. A quarta etapa foi realizada individualmente e em duplas.

Nesse sentido, o design da pesquisa previu que todos os estudantes participassem de todas as etapas da pesquisa, sendo essa participação individual em algumas etapas e em duplas em outras. Essa variação no processo de coleta de dados buscou identificar possíveis mudanças nas abordagens de estudantes sobre probabilidade, a partir das apropriações de cada um e em colaboração com um colega.

<sup>2</sup> Estamos denominando “experimento não realizado” àquele experimento que não foi experimentado pelos estudantes.

A coleta de dados ocorreu ao longo de três meses, sendo realizada de setembro a novembro de 2014. As entrevistas iniciais foram realizadas num tempo médio de 15 minutos para cada dupla, enquanto o teste diagnóstico foi concluído com um tempo médio de 70 minutos. A familiarização e a simulação com o *Sampler* requereram um tempo médio de 70 minutos cada. O Teste Final foi realizado pelas duplas com um tempo médio de 45 minutos de duração.

Nas seções apresentadas em seguida, detalhamos os procedimentos e instrumentos de pesquisa que foram utilizados em cada uma das etapas de pesquisa.

#### *4.2.2.1 Primeira etapa da pesquisa – Entrevista semi-estruturada*

Nessa etapa inicial da pesquisa, os estudantes foram submetidos a uma entrevista semi-estruturada na qual se contemplava questões relativas ao seu perfil e usos de computadores, tais como: acesso, frequência e tipos de uso na escola e fora da escola. Objetivamos identificar se o uso ou não do computador poderia ser de alguma influência na etapa 3 da pesquisa (Familiarização e Simulação - ver Quadro 5). Buscamos, também, identificar se os estudantes haviam utilizado algum *software* específico, a partir de alguma sugestão do professor da disciplina, para o trabalho com algum aspecto da Matemática. Essa entrevista é apresentada na sua totalidade no Apêndice C.

#### *4.2.2.2 Segunda etapa da pesquisa – Teste diagnóstico mais experimento no ambiente físico*

O teste foi composto de questões sobre concepções e questões sobre experimentos aleatórios. Os estudantes responderam as questões diretamente em folhas de papel A4 com os problemas impressos.

Colocamos questões em que os estudantes precisariam apresentar suas concepções sobre os conceitos intuitivos e formais de probabilidade, que são fundamentais para o entendimento desse campo conceitual (e.g., BAYER et al., 2005; NOVAES; COUTINHO, 2009).

O Quadro 6 a seguir descreve os problemas do teste diagnóstico explicitando os objetivos e noções de probabilidade que esperávamos fossem abordadas pelos.

**Quadro 6 - Problemas do Teste Diagnóstico**

<b>Contexto</b>	<b>Descrição</b>	<b>Objetivos e conceitos de probabilidade</b>
<b>Concepção</b>	1. Explique com suas palavras o que você entende por probabilidade. Dê um exemplo.	Identificar os significados atribuídos pelos estudantes ao conceito de probabilidade. Espera-se que suas repostas envolvam ideias intuitivas sobre probabilidade como é o caso, por exemplo, de sorte e destino.
	2. Em que situações usamos a probabilidade?	
	3. Explique com suas palavras o que você entende por experimento aleatório. Dê um exemplo.	
<b>Experimento Aleatório</b>	4. Uma pesquisa sobre peças com defeito foi realizada em uma fábrica de parafusos. Em um lote de 600 peças, constatou-se que 30 estavam com defeito. a) Sendo retirada uma peça desse lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha defeito? b) Sendo retirada uma peça do lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela não tenha defeito?	Identificar se as repostas envolverão ideias intuitivas fazendo alusão às noções de incerteza e imprevisibilidade.  Identificar se os estudantes atribuirão significados mais formais a partir de alguma abordagem da probabilidade, como por exemplo: ação do acaso, espaço amostral, evento e se as suas respostas seriam baseadas nos dados do experimento ou da probabilidade teórica.
	5. Você tem um saco contendo duas fichas, uma com o desenho de um ponto (•) e outra com o desenho de um traço (-). Retira-se uma ficha, anota-se o resultado e repõe-se no saco. A seguir retira-se uma segunda vez a ficha e anota-se o segundo resultado. (experimento aleatório nomeado de “jogo das fichas” realizado no ambiente físico)	

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Ao todo, portanto, os estudantes resolveram questões iniciais no teste diagnóstico sobre concepção e experimentos aleatórios. As questões 1 e 2 foram criadas para o Teste pelo pesquisador, enquanto a terceira questão foi adaptada do livro didático do 9º ano dos autores More e Onaga (2012). Quanto a questão 4, trata-se de um experimento adaptado de Dante (2013). O experimento aleatório realizado no ambiente físico (questão 5) foi adaptado de Kazak e Konold (2010) (subitem 3.2) e devido às suas especificidades, será tratado mais detalhadamente em seguida.

No geral, esperou-se que essas questões levassem os estudantes a expressarem suas compreensões sobre probabilidade, ainda que de forma intuitiva, ligadas a opinião ou crença, já que o ensino formalizado do conteúdo de

probabilidade só é introduzido no currículo escolar apenas no Ensino Médio (PERNAMBUCO, 2012).

O experimento, que aqui denominamos "Jogo das fichas", foi adaptado de uma situação didática proposta por Kazak e Konold (2010) "O problema da piscadela" (*The wink problem*). Esse problema foi realizado em etapas. Inicialmente apresentou-se 11 questões (a-k) que buscaram levar os estudantes a refletirem sobre a situação na perspectiva da probabilidade teórica. Nesse sentido, os quatro estudantes foram solicitados a determinar os eventos simples, considerando a reposição, os eventos combinados e suas respectivas probabilidades. Foram solicitados, ainda, a constituir o espaço amostral, levando em consideração a ordem das combinações. O Quadro 7 apresenta os conceitos de probabilidade requeridos e as respostas consideradas corretas para cada questão.

**Quadro 7 - Conceitos e respostas esperadas das questões iniciais do Teste diagnóstico**

<b>Experimento aleatório</b>	<b>Conceitos de probabilidade</b>	<b>Respostas corretas</b>
5. Você tem um saco contendo duas fichas, uma com o desenho de um ponto (•) e outra com o desenho de um traço (-). Retira-se uma ficha, anota-se o resultado e repõe-se no saco. A seguir retira-se uma segunda vez a ficha e anota-se o segundo resultado. (experimento aleatório nomeado de "jogo das fichas" realizado no ambiente físico).		
a) Quais são os resultados possíveis da primeira retirada?	Equiprobabilidade Eventos simples	Traço (-) ou Ponto (.) 50%, ½, metade cada
b) Quais são os resultados possíveis da segunda retirada?	Equiprobabilidade Eventos simples	Traço (-) ou Ponto (.) 50%, ½, metade cada
c) Quantos são os pares possíveis das duas retiradas?	Espaço amostral	Quatro $\Omega = ( (.; .); (-; -); (.; -); (-; .) )$
d) Quantos são os pares possíveis de retirar dois pontos (•; •)?	Evento combinado	Um
e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (•; •)?	Probabilidade teórica.	¼, um em quatro, 25% ou 0,25
f) Quantos são os pares favoráveis de retirar um traço e um ponto nesta ordem (-; •)?	Evento combinado	Um
g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; •)?	Probabilidade teórica	¼, um em quatro, 25% ou 0,25
h) Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (-;-)?	Evento combinado	Um
i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-;-)?	Probabilidade teórica	¼, um em quatro, 25% ou 0,25
j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (•; -)?	Evento combinado	Dois
k) Qual a probabilidade de se retirar um ponto e um traço (•; -)?	Probabilidade teórica.	½, 2/4, 50% ou 0,5 Metade

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Após os estudantes responderem a essas questões de a-k, eles foram solicitados a realizar o experimento no ambiente físico. Para tanto iniciaram as

retiradas totalizando em 32 (16 pares combinados). A cada retirada eles individualmente iam registrando em um quadro e em seguida, em um gráfico.

Após preencherem o quadro e o gráfico (ver apêndice D) com os resultados da experimentação no ambiente físico, os estudantes responderam novamente as questões postas inicialmente (questões a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k). Além disso, eles foram também solicitados a refletir sobre a experimentação realizada a partir das questões l, m, n descritas em seguida:

l) Se continuássemos a preencher o quadro com até 100 jogadas, o que você acha que iria acontecer? Justifique a sua resposta.

m) Quantos são os resultados possíveis de se obter um traço e um ponto sem importar a ordem, nas duas retiradas?

n) Qual é a probabilidade de se obter resultados diferentes nas duas retiradas?

Em seguida, em duplas, registraram os resultados das suas retiradas das fichas em um único gráfico e responderam novamente as questões a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m e n. Esse procedimento buscou identificar se os estudantes considerariam as frequências dos eventos e mudariam suas respostas após realizarem a experimentação no ambiente físico individualmente e trabalhando em duplas.

Esse experimento foi o foco da etapa de simulação com o *TinkerPlots*. Nossas escolhas de realização do experimento no ambiente físico (saco e fichas) e experimentação no *TinkerPlots* (simulação) se deram por considerarmos que essa sequência poderia contribuir para que os compreendessem melhor a relação entre a probabilidade teórica e a resultante do experimento aleatório, isso é a frequentista. Ou seja, ao realizarem o experimento repetidamente espera-se que eles percebam, mesmo que intuitivamente, e usando linguagem própria, a frequência relativa dos resultados se aproximarem da probabilidade teórica, ou que se expressem com uma estimativa da mesma.

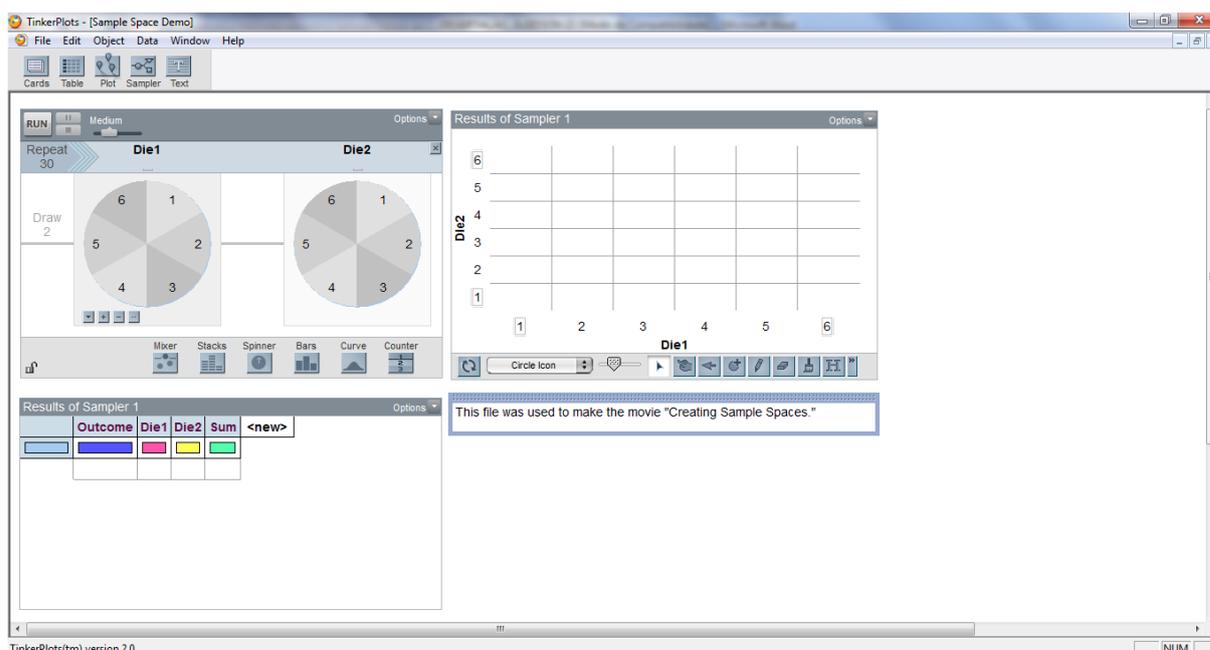
Contudo, esperamos que haja diferenças ao modelarem usando o “jogo das fichas” e no *TinkerPlots*, pois usando o ambiente virtual eles poderão aumentar o número de repetições para quantas vezes desejarem.

#### 4.2.2.3 Terceira etapa da pesquisa – Familiarização e simulação com o TinkerPlots

Na etapa de familiarização, os estudantes tiveram o primeiro contato com o *software* e com as ferramentas. Após um procedimento inicial, no qual o pesquisador destacou tratar-se de um *software* que inicia com uma tela em branco e que requer que a ferramenta a ser usada seja selecionada e inserida nessa tela, apresentamos aos estudantes a ferramenta *Sampler*. Nessa apresentação foi indicada sua localização na barra de ferramentas e seus principais componentes, a saber: dispositivos, elementos do dispositivo, *Menu* dos dispositivos e *Draw*.

O funcionamento dos dispositivos foi explicado, usando o banco de dados. É importante destacar que esse banco de dados foi utilizado apenas para ilustrar usos e aplicações de algumas funções do *Sampler*, não se procedendo simulações. Durante o processo de familiarização utilizou-se também o banco de dados “*Sample Space*” do *TinkerPlots* aqui denominado de espaço amostral. Esse banco de dados permitiu que os estudantes percebessem que podem trabalhar com proporções iguais além de poderem combinar um ou mais dispositivos, iguais ou diferentes (Figura 7).

**Figura 7 - Ilustração do Banco de dados “*Sample Space*” do *TinkerPlots***



Fonte: Dados obtidos do software *TinkerPlots* 2.0 (2012).

A partir desse banco de dados foi chamada a atenção dos estudantes, durante a simulação, para as representações, a princípio da Tabela e posteriormente

do *Plot*, que possibilita a visualização dos resultados da simulação em um gráfico. Durante o processo de familiarização o pesquisador esteve atento e dirigiu suas ações para os seguintes aspectos de uso do software: localização, ativação e seleção da ferramenta; seleção e ativação do dispositivo do *Sampler*; escolha e configuração do dispositivo; seleção, ativação e configuração do *Plot*.

Focando sempre no uso de cada componente da ferramenta *Sampler*, na Tabela e posteriormente no *Plot* e suas peculiaridades, desde o início, os estudantes foram encorajados e incentivados a manipular o *software* sempre mediado pelas intervenções do pesquisador.

Para cada dupla, o processo de familiarização foi realizado em um dia e o de utilização mais autônoma do software no dia subsequente.

A etapa de simulação com o *Sampler*, portanto, foi realizada no dia seguinte a familiarização. Nela, os estudantes realizaram uma manipulação mais autônoma da ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots 2.0*.

Antes de iniciar a experimentação com o *Sampler*, o pesquisador forneceu os resultados da dupla em um único Gráfico do experimento realizado no ambiente físico, buscando retomar com eles a ideia da experimentação realizada nesse ambiente. Os estudantes haviam realizado cada um, 32 retiradas do saco (experimento das fichas; ver Quadro 12), formando 32 pares, ao todo. Depois reuniram os resultados em um único Gráfico.

Utilizando como base o experimento realizado no ambiente físico com as fichas, representando “traço (-) e ponto” (.), portanto, eles iniciaram a experimentação no ambiente virtual a partir da ativação da ferramenta *Sampler*, e em seguida procederam com a escolha do dispositivo (*Mixer ou Spinner* – ambos indicados para o experimento). Nesse momento inicial, o pesquisador deixou os estudantes livres para decidirem quanto à escolha do dispositivo.

Após esse processo inicial de escolha dos dispositivos, eles configuraram a ferramenta *Sampler*, rotulandoos elementos com os símbolos e determinando a quantidade de atributos.

Após o processo de experimentação no ambiente virtual, a dupla foi solicitada a analisar os resultados obtidos nesse ambiente e naquele da experimentação no ambiente físico, sendo estimuladas a comparar os resultados do gráfico produzido em ambos os ambientes.

Para assegurarmos o devido registro de todos os aspectos relevantes para a análise das etapas 3 e 4, videografamos, por meio do *software free Camtasia Studio 8*, que permitiu captar, em vídeo de alta resolução, as falas e imagens dos estudantes, bem como todas as ações que eles realizaram no computador, a saber, a configuração ferramenta *Sampler* do *software Tinkerplots 2.0* a partir da situação-problema e o processo de experimentação. Esses dados foram transcritos e gerados protocolos para cada dupla.

#### *4.2.2.4 Quarta Etapa – Teste final*

Nesta etapa, os estudantes realizaram o teste diagnóstico apresentado na etapa inicial e que constou das questões de concepção, questões do experimento aleatório não realizado e realizado no ambiente físico. Seguiram-se os mesmos procedimentos utilizados e os estudantes inicialmente responderam as questões individualmente e a partir da experimentação no ambiente físico eles trabalharam em duplas.

O intuito dessa etapa final, foi identificar se após o trabalho com o *software TinkerPlots* eles iriam, por exemplo, considerar as frequências obtidas e relacioná-las de forma adequada com a probabilidade teórica. Os resultados de cada dupla em cada uma das etapas de pesquisa serão apresentados no Capítulo 5 que segue.

## 5 RESULTADOS DO TESTE DIAGNÓSTICO

O teste diagnóstico foi composto de problemas sobre probabilidade envolvendo concepção (problemas 1, 2 e 3), experimentos aleatórios, sendo um não realizado (problema 4) e outro realizado no ambiente físico (problema 5). Neste capítulo, discutimos as respostas dos estudantes a esses problemas e para tal organizamos os resultados a partir das seguintes categorias: concepções dos estudantes sobre probabilidade; experimento aleatório não realizado e experimento aleatório realizado no ambiente físico. Em cada categoria, analisamos os dados considerando a forma como eles foram gerados, se individual ou em duplas.

### 5.1 Concepção dos estudantes sobre probabilidade

O Quadro 8 apresenta a descrição das respostas dos estudantes sobre os problemas de concepção (problemas 1, 2 e 3).

**Quadro 8 - Concepções dos estudantes sobre probabilidade**

Problemas	Respostas dos
1. Explique com suas palavras o que você entende por probabilidade. Dê um exemplo	“Probabilidade é quando aconte-se varias coisas que corresponde dissendo que vai acontecer” (Luiz).
	“A probabilidade pra mim são porcentagens e medidas, tanto positiva como negativa. Ex: a probabilidade de votos entre Dilma e Aécio” (Helen).
	“Probabilidade seria que por um acaso algo não pudesse funcionar ou acontecer. Exemplo: Mariana quer ir ao show mais seus pais não possuem tanto dinheiro, porém eles podem pedir um emprestimo ao banco. Com isso Mariana tem uma probabilidade de ir ao show” (Helena).
	“Eu acho que a probabilidade é o estudo da matemática com lógica” (Lucas).
2. Em que situações usamos a probabilidade?	“Em graficos, pesquisas sobre números das eleições” (Luiz).
	“Numa situação de vendas, cálculos ou comparações de algo” (Helen).
	“Em situações como: em relação a peças de um determinado lote, em relação de espaço ou quantia” (Helena).
	“Usamos probabilidade para constatar coisas” (Lucas).
3 Explique com suas palavras o que você entende por experimento aleatório. Dê um exemplo.	“É textes feito com varias pessoas de forma diferente com cada uma” (Luiz).
	“Entendo pouco de mais, porém o exemplo é: a quantia de água no Brasil está diminuindo cada vez mais a porcentagem que supostamente poderia ser de 100% esta em 78%” (Helen)
	“Experimentar algo não identificável, tipo experimento com algum vírus novo (aleatório)” (Helena).
	“Eu entendo que são experimentos avulsos. Exemplo: faz uma coisa, depois outra diferente e assim vai...” (Lucas).

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Podemos observar no Quadro 8 que as concepções dos estudantes encontram-se relacionadas com diferentes conceitos de probabilidade. Luiz associa probabilidade à ideia de previsão. Tal análise se baseia principalmente em sua afirmativa de que “vai acontecer”. No que se refere às situações em que usamos a probabilidade, Luiz chama a atenção para as representações gráficas, associando-as, adequadamente, a pesquisas eleitorais, um fenômeno social, cujos resultados baseiam-se em opiniões públicas por amostragem (GAFURI, 2012). Quanto à noção de fenômeno aleatório, o estudante a explana associando-a com uma possível distribuição de grupos para a realização de um teste.

Helen, ao tentar exemplificar em que situações a probabilidade é usada, recorre a outros conhecimentos matemáticos, fazendo referência a “porcentagens e medidas, positivas ou negativas”. Ela exemplifica corretamente ao mencionar votos entre Dilma e Aécio que consiste em fenômeno social de opinião pública. Além disso, ela destaca de modo genérico, “situações de vendas, cálculos ou comparações de algo” como aquelas em que a probabilidade é usada. Quando se tratou de explicitar sua compreensão sobre o experimento aleatório, Helen apenas exemplifica, utilizando um fenômeno físico (chuva) que é aleatório, sendo adequado, portanto, para responder a questão.

Helena, por sua vez, ao definir probabilidade como se “algo não pudesse funcionar ou acontecer”, embora não tenha usado linguagem Matemática adequada, apresenta ainda que intuitivamente a ideia de “chance” de ocorrência ou não de um determinado evento. Esse entendimento é reforçado pelo exemplo que a estudante apresenta ao se expressar quanto às situações nas quais usamos a probabilidade; nesse sentido, a estudante menciona “peças de um determinado lote”, utilizando dessa forma como exemplo o tema do problema quatro do teste diagnóstico (experimento aleatório sobre peças com defeito). Quando menciona “quantia”, possivelmente Helena talvez entenda que a probabilidade pode servir para uso em um fenômeno de natureza da economia. Quando a estudante se expressou sobre o que entende por experimento aleatório (“Esperimentar algo não identificável”), pareceu refletir em certa medida sobre a questão da aleatoriedade, associando-a com a realização de “experimentos com algum vírus novo”. No seu exemplo, ela escreve o termo aleatório entre parêntesis (Figura 8).

**Figura 8 - Resposta de Helena ao problema de concepção sobre experimento aleatório do teste diagnóstico**

3. Explique com suas palavras o que você entende por experimento aleatório. Dê um exemplo.

*Experimentar algo não identificável, tipo experimentos com alguma coisa novo (aleatório)*

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Lucas entende a probabilidade como “o estudo da Matemática com lógica”, associando de certo modo esses significados. Na questão dois, ao situar o uso da probabilidade como meio de “constatar coisas”, talvez ele esteja se referindo à previsão e verificação do acontecimento de algo. O seu entendimento de experimento aleatório é relacionado a “experimentos avulsos”, dando como exemplo “faz uma coisa, depois outra diferente”. O significado de aleatório para ele remete à idéia de “avulso” que significa dentre outras coisas, isolado, desconexo (Aurélio online). Uma possível hipótese para essa sua resposta é que talvez ela envolva uma noção mesmo que intuitiva de eventos independentes.

Aparentemente, a concepção dos quatro estudantes, analisadas, a partir de suas respostas, está relacionada a opiniões e crenças, envolvendo, portanto, ideias mais intuitivas sobre a probabilidade (BATANERO, 2005). O uso de termos formais não foi identificado, salvo o que Helena usou, mas que já estava no enunciado da questão.

Esse resultado era esperado considerando que os estudantes, por ocasião da coleta de dados, não haviam ainda sido introduzidos formalmente ao ensino da probabilidade.

## 5.2 Experimento aleatório não realizado

A questão quatro (itens a e b) do teste diagnóstico versa sobre um experimento aleatório não realizado, onde se tinha a expectativa que os estudantes determinassem a probabilidade teórica a partir de estratégias envolvendo o uso da regra de três ou da relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis (razão ou proporção). As respostas corretas a esses itens são 5% e 95%, respectivamente.

As respostas dadas pelos quatro estudantes aos itens dessa questão encontram-se descritas no Quadro 9.

**Quadro 9 - Respostas dos estudantes à questão sobre experimento aleatório não realizado**

Questão	Respostas dos			
	Luiz	Helen	Helena	Lucas
Uma pesquisa sobre peças com defeito foi realizada em uma fábrica de parafusos. Em um lote de 600 peças, constatou-se que 30 estavam com defeito.				
a) Sendo retirada uma peça desse lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha defeito?	Menos de 1%	1%	Tem uma pequena probabilidade, pois de 600 peças apenas 30 estão com defeito, o mais provável é que esta peça esteja em ótimas condições.	Ela terá uns 10% de chances .
b) Sendo retirada uma peça do lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela não tenha defeito?	Mais de 99%	99%	Uma grande probabilidade, pois de 600 peças, 570 estão em condições favoráveis, o que significa que é pouco provável que ela esteja com defeito.	90% de chances .

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Podemos observar no Quadro 9 que embora os estudantes não tenham acertado as questões em termos da quantificação exata, suas respostas revelam um nível de compreensão adequada aos problemas postos.

Analizamos que em suas respostas os estudantes reconhecem que a probabilidade é desigual, menor para parafusos defeituosos, maior para os sem defeito, embora não quantifiquem corretamente a probabilidade. As respostas dadas por Helena expressam as variáveis do problema e que são relevantes na consideração da sua solução.

Os estudantes, portanto, conseguem imaginar a realização de um experimento mesmo que ele não esteja acontecendo de fato, revelando uma discussão lógica e coerente sobre a probabilidade teórica.

### 5.3 Experimento aleatório realizado no ambiente físico

Esse experimento foi realizado por etapas. Inicialmente, apresentou-se 11 questões (a-k) que buscaram levar os estudantes a refletirem sobre a probabilidade teórica. Nesse sentido, os quatro estudantes foram solicitados a determinar os

eventos simples, os eventos combinados e suas respectivas probabilidades. Foram solicitados ainda a constituir o espaço amostral, levando em consideração a ordem das combinações. Um aspecto fundamental na compreensão da probabilidade nesse experimento é que ele acontece com reposição.

Inicialmente as respostas dos estudantes foram categorizadas em certas ou erradas e usamos os códigos 1 e 0, respectivamente, para representá-las. Essas categorias, acerto e erro, surgiram da análise do desempenho dos estudantes sendo esse processo delimitado *a priori* pelo pesquisador com base nas respostas corretas (ver Quadro 6, p. 59). Além dessas, na análise das respostas dos estudantes, outras categorias foram adicionadas, como é o caso de acerto parcial e não respondeu. O Quadro 10 apresenta as categorias usadas para analisar essa questão e oferece exemplos extraídos dos protocolos dos estudantes.

**Quadro 10 - Categorias de análise das questões iniciais do experimento aleatório realizado no ambiente físico**

Categorias	Códigos	Exemplos
Errou a questão	0	c) Quantos são os pares possíveis das duas retiradas? <u>2</u> i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-; -)? <u>3%</u> (Helen)
Acerto total	1	a) Quais são os resultados possíveis da primeira retirada? <u>50% de cada um</u> g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; •)? <u>05%</u> (Helen)
Acerto parcial	2	k) Qual a probabilidade de se retirar ponto e traço (•; -)? <u>Apenas 2. Que são no primeiro e no segundo saca.</u> (Helena)
Não identificável	3	j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (•; -)? <u>no primeiro e no terceiro saca.</u> (Helena)
Não respondeu	4	e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (•; •)? _____ (Helen)

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme podemos observar no Quadro acima, Helen deveria ter considerado, na questão c, os eventos simples combinados, o que totalizaria quatro pares possíveis. No entanto, em sua resposta ela considerou apenas dois pares e, portanto, a sua resposta foi categorizada como errada. Na questão i, ela deveria ter considerado que a probabilidade de retirar dois traços seria  $\frac{1}{4}$  ou 0,25. Nos itens a e g, Helen acertou ao considerar que na primeira retirada poderia obter “50% de cada um”. Consideramos como acerto parcial a resposta de Helena à questão k por ela ter considerado os dois pares em termos da quantidade, embora não tenha apresentado em sua resposta a probabilidade. Na questão j não foi possível identificar a resposta de Helena.

O Quadro 11 apresenta a análise das respostas dos estudantes em função dessas categorias.

**Quadro 11 - Distribuição das respostas dos estudantes nos itens da questão 5 em função das categorias de respostas**

Itens da questão 5	Categorias de respostas dos			
	Luiz	Helen	Helena	Lucas
a) Quais são os resultados possíveis da primeira retirada?	1	1	0	0
b) Quais são os resultados possíveis da segunda retirada?	1	2	0	0
c) Quantos são os pares possíveis das duas retiradas?	0	0	0	0
d) Quantos são os pares possíveis de retirar dois pontos (•; •)?	0	1	1	0
e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (•; •)?	0	4	0	0
f) Quantos são os pares favoráveis de retirar um traço e um ponto nesta ordem (-; •)?	0	0	0	1
g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; •)?	0	1	0	0
h) Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (-;-)?	1	0	1	1
i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-;-)?	0	0	0	0
j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (•; -)?	1	1	3	0
k) Qual a probabilidade de se retirar um ponto e um traço (•; -)?	1	1	0	1
Total de acertos	5	5	2	3

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Podemos observar no Quadro 11, que Luiz e Helen obtiveram um maior índice de acertos (5 para cada) dos 11 itens da questão, enquanto Helena e Lucas acertaram 2 e 3 itens, respectivamente.

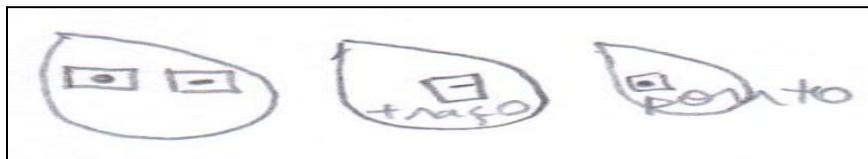
Os estudantes não responderam corretamente as questões **c-e-i**. A questão **c** possui um nível alto de complexidade, pois eles precisariam pensar nas retiradas das fichas como eventos combinados que juntos constituiriam o espaço amostral, independente da ordem e desigualdade dos símbolos. Luiz e Helen consideram que são apenas dois pares, Lucas afirma ser “um par” e Helena respondeu “nenhum”.

No item **e**, Luiz e Lucas, talvez tenham considerado os eventos como simples e separados, possivelmente se guiando pela representação entre parênteses no enunciado, pois eles responderam “50%”. Helen não responde e Helena afirma não haver “nenhuma” probabilidade. Com respeito ao item **i**, a nossa hipótese é que talvez Luiz e Lucas, tenham considerado de modo similar ao que fizeram na questão anterior, apenas dois pares, tratando o problema, portanto, como evento simples. Isso é reforçado por ambos terem atribuído à probabilidade de 50% a esse item. Helena afirma ser “Apenas 1” e Helen “3%”.

Um aspecto que ressaltamos nesse grupo de questões é o tipo de raciocínio que os estudantes utilizaram. Luiz parece ter raciocinado em função das fichas, explicitando mais claramente essa forma de abordagem no item b onde atribui “50% de tirar a mesma ficha”. Helen, assim como Luiz, também parece raciocinar em termos das fichas, sendo esse aspecto explicitado no item a (“pode-se sair qualquer uma das fichas”) e no b (“pode ser que saia a mesma ficha”). No segundo item consideramos a resposta de Helen correta parcialmente, pois entendemos que ela raciocinou em função da ficha que supostamente já havia sido retirada no item a e que foi repostada, tendo, portanto a mesma chance de ser retirada. É importante destacar que apenas Helen acertou a questão g, que requer que o estudante considere a ordem na retirada das fichas.

Helena, aparentemente não considera os eventos com reposição, raciocinando em função da existência de diferentes sacos. Por exemplo, na questão j a estudante responde que a quantidade de pares possíveis de se retirar ( $\bullet$ ;  $-$ ) seria “no primeiro e no terceiro saco”. Na última questão ela refere que “Apenas 2. Que são no primeiro e no segundo saco”. A estudante faz um desenho a lápis no canto superior da página do teste inicial que reforça essa análise (Figura 9).

**Figura 9 - Desenho de Helena nas respostas ao teste inicial**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

O raciocínio de Lucas também parece ter sido baseado nas fichas, embora ele não tenha explicitado essa abordagem em suas respostas. Um aspecto interessante na sua resposta à questão j é que ele escreve a resposta correta (“2 pares”), mas em seguida risca essa resposta e coloca em seu lugar a resposta “nenhum”. A resposta foi computada como errada, embora tenhamos percebido que ao computar a probabilidade no item k, ele responde corretamente “50%”.

Helen, Luiz e Lucas foram, nessa ordem, os estudantes que tiveram maior número de acertos nas questões iniciais do experimento e seus raciocínios estiveram baseados explicita ou implicitamente, com as análises das fichas. Uma hipótese que levantamos a esse respeito é que para esse experimento aleatório com reposição, raciocinar em termos das fichas talvez seja mais eficiente.

Com relação ao fato do experimento ser com reposição, remetendo à ideia de que as chances são as mesmas, os estudantes parecem não considerar esse aspecto. Essa análise toma como base os erros em relação ao item c, que requeria pensar nos eventos simples combinados para compor o espaço amostral.

Os estudantes, portanto, parecem considerar intuitivamente a probabilidade teórica sem uma reflexão mais aprofundada sobre a natureza do experimento ser com reposição. Contudo, os três estudantes que basearam suas respostas nas fichas parecem ter se aproximado mais da percepção inicial do caráter aleatório do experimento.

### 5.3.1 Realização do experimento

Após terem respondido as questões iniciais cujos resultados foram apresentados na seção 5.1, os quatro estudantes realizaram a experimentação no ambiente físico, utilizando uma sacola com duas fichas, sendo uma contendo o desenho de um ponto ( . ) e outra o desenho de um traço, constituindo o seguinte

espaço amostral: ( ( . ; .); (- ; -); ( . ; -) ; (- ; .) ). Os resultados da realização desse experimento são apresentados nessa subseção.

Considerando os dados do problema, existe maior chance de ocorrência para o evento simples da combinação do ponto e traço ( . ; -). Se a ordem não for considerada, esses dois eventos combinados (ponto e traço ou traço e ponto), ocorrerão numa razão de 2 em 4,  $\frac{1}{2}$  ou 50%. Os outros dois eventos (traço e traço; ponto e ponto) terão uma chance menor de ocorrer, sendo a probabilidade em ambos uma razão de um 1 em 4,  $\frac{1}{4}$ , ou 25%.

Foi solicitado então que os estudantes retirassem uma ficha por vez no saco e as colocasse de volta após cada retirada. Conforme previsto na metodologia, os estudantes, primeiro realizaram individualmente 32 retiradas das fichas, com reposição, resultando em 16 pares. Em seguida, a cada retirada, eles registraram os resultados, individuais e combinados, em um Quadro.

A nossa hipótese era a de que ao construírem as frequências de ocorrência dos eventos, eles pudessem desenvolver uma ideia de probabilidade e de chance de ocorrência a partir do seu engajamento e interpretação dos resultados da experimentação. Isso é pensarem na probabilidade teórica como sendo a tendência da probabilidade frequentista. No Quadro 12, observamos os registros individuais dos resultados da simulação com as fichas no Quadro e no Gráfico.

**Quadro 12 - Registros dos quatro estudantes dos resultados individuais e combinados do experimento no ambiente físico**

	Registros	Observações																																																																							
Luiz	<p>Quadro 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Jogadas (Experimento)</th> <th colspan="2">Resultados de cada retirada</th> <th>Resultados (Eventos combinados)</th> </tr> <tr> <th>1ª Retirada</th> <th>2ª Retirada</th> <th>Par</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1º Experimento</td><td>●</td><td>●</td><td>● ● ● ●</td></tr> <tr><td>2º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>3º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>4º Experimento</td><td>—</td><td>●</td><td>— ● ●</td></tr> <tr><td>5º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>6º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>7º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>8º Experimento</td><td>●</td><td>●</td><td>● ● ● ●</td></tr> <tr><td>9º Experimento</td><td>—</td><td>●</td><td>— ● ●</td></tr> <tr><td>10º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>11º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>12º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>13º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>14º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>15º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>16º Experimento</td><td>●</td><td>●</td><td>● ● ● ●</td></tr> </tbody> </table>	Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados)	1ª Retirada	2ª Retirada	Par	1º Experimento	●	●	● ● ● ●	2º Experimento	—	—	—	3º Experimento	●	—	● ● ●	4º Experimento	—	●	— ● ●	5º Experimento	—	—	—	6º Experimento	—	—	—	7º Experimento	●	—	● ● ●	8º Experimento	●	●	● ● ● ●	9º Experimento	—	●	— ● ●	10º Experimento	●	—	● ● ●	11º Experimento	—	—	—	12º Experimento	●	—	● ● ●	13º Experimento	●	—	● ● ●	14º Experimento	—	—	—	15º Experimento	●	—	● ● ●	16º Experimento	●	●	● ● ● ●	Faz os registros sem dificuldades; Escala do gráfico não é considerada.
Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados)																																																																						
	1ª Retirada	2ª Retirada	Par																																																																						
1º Experimento	●	●	● ● ● ●																																																																						
2º Experimento	—	—	—																																																																						
3º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
4º Experimento	—	●	— ● ●																																																																						
5º Experimento	—	—	—																																																																						
6º Experimento	—	—	—																																																																						
7º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
8º Experimento	●	●	● ● ● ●																																																																						
9º Experimento	—	●	— ● ●																																																																						
10º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
11º Experimento	—	—	—																																																																						
12º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
13º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
14º Experimento	—	—	—																																																																						
15º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
16º Experimento	●	●	● ● ● ●																																																																						
Helen	<p>Quadro 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Jogadas (Experimento)</th> <th colspan="2">Resultados de cada retirada</th> <th>Resultados (Eventos combinados)</th> </tr> <tr> <th>1ª Retirada</th> <th>2ª Retirada</th> <th>Par</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1º Experimento</td><td>—</td><td>●</td><td>— ●</td></tr> <tr><td>2º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>3º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>4º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>5º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>6º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>7º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>8º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>9º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>10º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>11º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>12º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>13º Experimento</td><td>—</td><td>●</td><td>— ●</td></tr> <tr><td>14º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>15º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>16º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> </tbody> </table>	Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados)	1ª Retirada	2ª Retirada	Par	1º Experimento	—	●	— ●	2º Experimento	—	—	—	3º Experimento	—	—	—	4º Experimento	—	—	—	5º Experimento	●	—	● ● ●	6º Experimento	—	—	—	7º Experimento	—	—	—	8º Experimento	—	—	—	9º Experimento	—	—	—	10º Experimento	—	—	—	11º Experimento	—	—	—	12º Experimento	—	—	—	13º Experimento	—	●	— ●	14º Experimento	—	—	—	15º Experimento	—	—	—	16º Experimento	—	—	—	Dificuldades no registro do gráfico.
Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados)																																																																						
	1ª Retirada	2ª Retirada	Par																																																																						
1º Experimento	—	●	— ●																																																																						
2º Experimento	—	—	—																																																																						
3º Experimento	—	—	—																																																																						
4º Experimento	—	—	—																																																																						
5º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
6º Experimento	—	—	—																																																																						
7º Experimento	—	—	—																																																																						
8º Experimento	—	—	—																																																																						
9º Experimento	—	—	—																																																																						
10º Experimento	—	—	—																																																																						
11º Experimento	—	—	—																																																																						
12º Experimento	—	—	—																																																																						
13º Experimento	—	●	— ●																																																																						
14º Experimento	—	—	—																																																																						
15º Experimento	—	—	—																																																																						
16º Experimento	—	—	—																																																																						
Helena	<p>Tabela 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Jogadas (Experimento)</th> <th colspan="2">Resultados de cada retirada</th> <th>Resultados (Eventos combinados)</th> </tr> <tr> <th>1ª Retirada</th> <th>2ª Retirada</th> <th>Par</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ● ●</td></tr> <tr><td>2º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>3º Experimento</td><td>—</td><td>●</td><td>— ● ●</td></tr> <tr><td>4º Experimento</td><td>—</td><td>●</td><td>— ● ●</td></tr> <tr><td>5º Experimento</td><td>—</td><td>●</td><td>— ● ●</td></tr> <tr><td>6º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>7º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>8º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>9º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>10º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>11º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>12º Experimento</td><td>—</td><td>●</td><td>— ● ●</td></tr> <tr><td>13º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>14º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>15º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>16º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> </tbody> </table>	Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados)	1ª Retirada	2ª Retirada	Par	1º Experimento	●	—	● ● ● ●	2º Experimento	—	—	—	3º Experimento	—	●	— ● ●	4º Experimento	—	●	— ● ●	5º Experimento	—	●	— ● ●	6º Experimento	—	—	—	7º Experimento	●	—	● ● ●	8º Experimento	●	—	● ● ●	9º Experimento	●	—	● ● ●	10º Experimento	—	—	—	11º Experimento	●	—	● ● ●	12º Experimento	—	●	— ● ●	13º Experimento	●	—	● ● ●	14º Experimento	—	—	—	15º Experimento	●	—	● ● ●	16º Experimento	—	—	—	Faz os registros sem dificuldades; Registro do gráfico considera convenções.
Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados)																																																																						
	1ª Retirada	2ª Retirada	Par																																																																						
1º Experimento	●	—	● ● ● ●																																																																						
2º Experimento	—	—	—																																																																						
3º Experimento	—	●	— ● ●																																																																						
4º Experimento	—	●	— ● ●																																																																						
5º Experimento	—	●	— ● ●																																																																						
6º Experimento	—	—	—																																																																						
7º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
8º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
9º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
10º Experimento	—	—	—																																																																						
11º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
12º Experimento	—	●	— ● ●																																																																						
13º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
14º Experimento	—	—	—																																																																						
15º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
16º Experimento	—	—	—																																																																						
Lucas	<p>Tabela 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Jogadas (Experimento)</th> <th colspan="2">Resultados de cada retirada</th> <th>Resultados (Eventos combinados)</th> </tr> <tr> <th>1ª Retirada</th> <th>2ª Retirada</th> <th>Par</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ● ●</td></tr> <tr><td>2º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>3º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>4º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>5º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>6º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>7º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>8º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>9º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>10º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>11º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>12º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>13º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>14º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>15º Experimento</td><td>●</td><td>—</td><td>● ● ●</td></tr> <tr><td>16º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> </tbody> </table>	Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados)	1ª Retirada	2ª Retirada	Par	1º Experimento	●	—	● ● ● ●	2º Experimento	—	—	—	3º Experimento	—	—	—	4º Experimento	●	—	● ● ●	5º Experimento	—	—	—	6º Experimento	—	—	—	7º Experimento	●	—	● ● ●	8º Experimento	●	—	● ● ●	9º Experimento	●	—	● ● ●	10º Experimento	—	—	—	11º Experimento	—	—	—	12º Experimento	—	—	—	13º Experimento	—	—	—	14º Experimento	—	—	—	15º Experimento	●	—	● ● ●	16º Experimento	—	—	—	Faz o registro do Quadro sem dificuldades, mas não consegue registrar os resultados no gráfico de acordo com convenções.
Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados)																																																																						
	1ª Retirada	2ª Retirada	Par																																																																						
1º Experimento	●	—	● ● ● ●																																																																						
2º Experimento	—	—	—																																																																						
3º Experimento	—	—	—																																																																						
4º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
5º Experimento	—	—	—																																																																						
6º Experimento	—	—	—																																																																						
7º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
8º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
9º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
10º Experimento	—	—	—																																																																						
11º Experimento	—	—	—																																																																						
12º Experimento	—	—	—																																																																						
13º Experimento	—	—	—																																																																						
14º Experimento	—	—	—																																																																						
15º Experimento	●	—	● ● ●																																																																						
16º Experimento	—	—	—																																																																						

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Os registros de Luiz e Helena deixam claro que eles compreenderam as propostas de anotações dos resultados das experimentações no Quadro e no Gráfico.

Quanto a Helen, apesar de ter entendido a proposta de registro no Quadro não conseguiu passar as frequências de cada evento do registro do Quadro para o Gráfico. Mesmo o pesquisador tendo incentivado a estudante nesse sentido, ela não conseguiu realizar o registro de forma satisfatória.

A estratégia de registro de Lucas, assim como a de Helen, não considera as convenções para apresentar as informações no gráfico. Lucas coloca os resultados combinados no gráfico na ordem em que eles ocorreram e aparentemente não considera o gráfico como forma de apresentação de dados.

Luiz e Helena apresentam competência para trabalhar com quadros e tabelas e de representar dados nesses registros de acordo com convenções. Helen e Lucas, todavia, apresentam dificuldades para elaborar essa atividade, demonstrando terem dificuldades em lidar com convenções relacionadas com a representação de gráficos. O trabalho com gráficos e tabelas é uma competência que se espera que estudantes do 9º ano já tenham desenvolvido, conforme os parâmetros de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). Contudo, a julgar por esse resultado, o desenvolvimento dessas competências pode estar atrelado à trajetória escolar de cada estudante, configurando-se em um processo subjetivo.

Conforme previsto na metodologia, no mesmo dia no qual realizaram os registros individuais no Quadro e no Gráfico, na sequência, os estudantes foram solicitados a realizar o registro do gráfico em duplas. O Quadro 13 apresenta esses registros.

**Quadro 13 - Registros no gráfico das duplas**

	Registros	Observações
Luiz e Helen		Registro não considera a escala do gráfico.
Helena Lucas		Registro considera as convenções.

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Observa-se que os registros no gráfico das duplas se assemelham aos registros individuais daqueles que o fizeram adequadamente sozinhos como é o caso de Luiz e Helena.

Os estudantes que compuseram cada dupla analisaram os registros um do outro. Após conversarem entre si com seus respectivos pares nas duplas, Helen e Lucas, que não conseguiram fazer de modo adequado os registros das frequências de cada evento, preferiram se guiar pelos registros do Gráfico dos seus colegas. Eles apenas recorreram a seus registros individuais nos Quadros, contabilizaram os resultados individuais e passaram essa informação para os colegas que assumiram esse registro em duplas.

### 5.3.2 Reflexões sobre a probabilidade teórica a partir da experimentação no ambiente físico

Ao final dos registros, as duplas foram solicitadas a responder novamente os itens a, b, c, d, e, f, g, h, i, j e k. Além das questões l, m e n, quais sejam:

l) Se continuássemos a preencher o quadro com até 100 jogadas, o que você acha que iria acontecer? Justifique a sua resposta.

m) Quantos são os resultados possíveis de se obter um traço e um ponto sem importar a ordem, nas duas retiradas?

n) Qual é a probabilidade de se obter resultados diferentes nas duas retiradas?

Essas questões foram inseridas com o objetivo de levar os estudantes a estimarem a probabilidade a partir de 100 experimentações.

Assim como já descrito na subseção 5.3, categorizamos as respostas dos estudantes em errada (0), acerto total (1), acerto parcial (2), não identificável (3) e não respondeu (4). O Quadro 14 apresenta os resultados de acordo com essa categorização.

**Quadro 14 - Respostas das duplas às questões iniciais após a experimentação**

Itens da questão 5	Categorias de respostas das duplas	
	Luiz e Helen	Helena e Lucas
a) Quais são os resultados possíveis da primeira retirada?	1	1
b) Quais são os resultados possíveis da segunda retirada?	1	0
c) Quantos são os pares possíveis das duas retiradas?	1	0
d) Quantos são os pares possíveis de retirar dois pontos (•; •)?	1	0
e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (•; •)?	1	0
f) Quantos são os pares favoráveis de retirar um traço e um ponto nesta ordem (-; •)?	1	0
g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; •)?	1	0
h) Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (-;-)?	1	0
i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-;-)?	1	0
j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (•; -)?	1	1
k) Qual a probabilidade de se retirar um ponto e um traço (•; -)?	0	0
l) Se continuássemos a preencher o quadro com até 100 jogadas, o que você acha que iria acontecer? Justifique a sua resposta.	1	1
m) Quantos são os resultados possíveis de se obter um traço e um ponto sem importar a ordem, nas duas retiradas?	1	0
n) Qual é a probabilidade de se obter resultados diferentes nas duas retiradas?	1	0
Total de acertos (incluindo os parciais)	13	3

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Notamos que a dupla formada por Luiz e Helen, após a realização do experimento com o saco e as fichas, melhorou significativamente o desempenho. Obtiveram 13 acertos das 14 questões, ou seja, 92,86%. Algo que chamou a atenção foi que eles acertaram as questões c-e-i que não foram respondidas corretamente por nenhum deles no teste apresentado pela primeira vez. O Quadro 15 mostra as respostas de Luiz e Helen a esses itens.

**Quadro 15 - Respostas individuais e em dupla de Luiz e Helen às questões c-e-i antes e depois da realização do experimento no ambiente físico**

Questões	Respostas individuais e em duplas		
	Luiz	Helen	Luiz e Helen
Questão c	2 pares	2	4
Questão e	50%	Deixa em branco	25%
Questão i	50%	3%	25%

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Na questão c, os estudantes, Luiz e Helen, em dupla, conseguiram determinar que o espaço amostral é constituído por quatro eventos ao invés de dois como haviam considerado em suas respostas individuais. Nas questões e-i, eles também conseguem identificar que a probabilidade de se retirar dois pontos ou dois traços, respectivamente, são 25%.

Por outro lado, Helena e Lucas não conseguiram acertar nenhum item. Uma análise mais cuidadosa das suas formas de abordagem individual e em dupla nessas questões deixou entrever a possibilidade deles estarem raciocinando não em função da probabilidade teórica, mas da probabilidade frequentista, sem, contudo fazer uma reflexão mais aprofundada das relações entre a probabilidade teórica e aquela advinda do experimento. Por exemplo, na questão h (Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (- ; .)?) eles respondem “4 pares” e que corresponde ao número de pares desse tipo registrado no gráfico da dupla. Essa tendência também foi observada nas questões i e j.

Embora esses estudantes (Helena e Lucas) tenham errado nas respostas à maioria das questões, suas abordagens evidenciaram um esforço em compreender as frequências relativas advindas das experimentações como uma estimativa da probabilidade teórica. Eles perceberam quais os eventos combinados foram mais ou

menos frequentes analisando os resultados absolutos no gráfico. Contudo, não conseguiram ampliar essa abordagem para incluir uma quantificação.

A dupla Luiz e Helen, ao responderem o item I, demonstram entender o caráter aleatório do experimento ao afirmarem que “as combinações iriam crescer diferenciadamente”. Todavia, apesar de recorrerem à probabilidade teórica para responder aos itens m e n, não o fazem corretamente, não expressando relações entre a probabilidade frequentista e teórica.

A resposta da dupla Lucas e Helena ao item I deixa claro o empenho dos estudantes em se reportarem as frequências obtidas no Gráfico para estimar o que poderia acontecer com 100 retiradas. Contudo, podemos inferir que a leitura que fazem do Gráfico é feita de forma global, considerando que o ponto (.) aparece em três dos quatro eventos combinados.

Podemos notar, que diferentemente das respostas dadas inicialmente ao Teste Diagnóstico, a vivência dos estudantes no experimento das fichas resultou em uma reflexão sobre a probabilidade Teórica. Luiz e Helen passaram a compreender que o espaço amostral é composto de quatro eventos combinados independente de serem ou não iguais.

Os estudantes compreenderam ainda que o aumento das jogadas pode resultar no aumento diferenciado das combinações. Suas respostas também dão indícios de que eles consideram a ordem das combinações, identificando que os eventos traço e ponto (- ; .) e ponto e traço (. ; -) passam a ter uma chance maior de ocorrência, ou seja, a razão de 1 para 2,  $\frac{1}{2}$ , 0,5 ou 50%, caso a ordem não fosse considerada como importante.

Como esperado, eles não parecem compreender a relação entre a probabilidade frequentista e a probabilidade teórica (estabilização da frequência relativa como uma estimativa da probabilidade teórica). Considerando os parâmetros de Pernambuco, esse conteúdo mais formalizado é parte das expectativas de aprendizagem de probabilidade para o Ensino Médio (PERNAMBUCO, 2012).

Um aspecto que talvez tenha dificultado a reflexão das duplas sobre a relação entre a probabilidade teórica e frequentista pode ter sido o fato das jogadas realizadas pelas duplas e registradas nos gráfico terem alguns resultados bem diferentes e distanciados da probabilidade teórica, algo inerente ao tamanho da amostra. O gráfico de Luiz e Helen, por exemplo, mostra que a quantidade de dois traços foi a maior em termos absolutos (em 22 jogadas a dupla obteve 11 pares),

enquanto as demais combinações ficaram bem próximas. No gráfico de Lucas e Helena, a combinação de dois traços foi a menor obtida, sendo a frequência de traço e ponto e ponto e ponto, respectivamente, as maiores.

A relação da probabilidade teórica com a frequentista realizada a partir do experimento no ambiente físico possuiu limitações, pois o estudante ao realizar um número reduzido de retiradas se depara com um quadro de distribuição das combinações bem diferente daquele que ele poderia obter a partir de um número maior de jogadas. Além disso, na questão I, eles apenas imaginam a possibilidade de 100 jogadas acontecerem, não as efetivando concretamente.

Destaca-se nesse sentido, que de certa forma os resultados das jogadas registradas no gráfico pelas duplas não as auxiliou a refletir de forma mais aprofundada sobre essa aproximação da probabilidade frequentista com a teórica.

Os dados advindos do trabalho dos estudantes em duplas com o *software TinkerPlots* encontram-se descritos no capítulo 6 e nele discutimos as possibilidades desse ambiente virtual para os estudantes realizarem reflexões mais efetivas das relações entre a probabilidade teórica e frequentista a partir de visualizações e discussões sobre o espaço amostral e simulações com diferentes tamanhos de amostra.

## 6 RESULTADOS COM O SOFTWARE TINKERPLOTS

---

Neste Capítulo apresentamos os dados oriundos da atividade realizada pelos estudantes com o software *TinkerPlots*. Como proposto na metodologia, inicialmente os estudantes passaram por uma etapa de familiarização com o software e com o *Sampler*, para no dia seguinte, manipularem de forma mais autônoma a ferramenta *Sampler*. Os resultados dessa etapa são apresentados nas seções 6.1 e 6.2, respectivamente, e nelas analisamos os dados obtidos para cada dupla.

### 6.1 Familiarização

O processo de familiarização com o *TinkerPlots* ocorreu a partir da apresentação do software pelo pesquisador a cada dupla as quais compartilharam um único computador.

Para cada dupla, o pesquisador iniciou o processo, destacando que o software inicia com uma tela em branco e que requer que sejam selecionadas ferramentas do menu para que sejam inseridas neste espaço. Focou na inserção da ferramenta *Sampler* ou *Plot*, alternadamente. Paralelamente solicitava que as duplas lessem os nomes dos ícones em inglês da barra de ferramentas e questionava seus significados. As duplas não tiveram dificuldades em traduzir os termos do inglês para o português, confirmando uma tendência já verificada na literatura (e.g., LIRA, 2010, EUGÊNIO; CARVALHO, 2013).

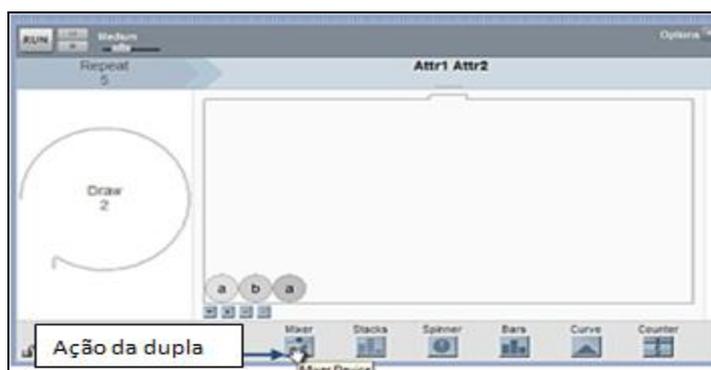
O pesquisador focando na ferramenta *Sampler*, estimulou os estudantes a acionar várias ferramentas do *Menu* para observarem o que acontecia e a usar o cursor para selecionar, arrastar e soltar a ferramenta na tela em branco. As duplas não apresentaram dificuldades em realizar esse tipo de inserção e nem de manipularem os dispositivos.

O pesquisador passa então à descrição dos dispositivos, salientando para que eles são utilizados a partir de exemplos e focaliza a atenção dos para os dispositivos *Mixer* e *Spinner* da ferramenta *Sampler*.

É importante salientar que ao acionar a ferramenta *Sampler* na tela em branco do *TinkerPlots*, ela aparece com o dispositivo *Mixer* ativado, configurando-se esse em padrão do software. Contudo, esse aspecto não é percebido por nenhuma

das duplas. A dupla Luiz e Helen, por exemplo, tenta inserir o dispositivo *Mixer* repetidas vezes no ambiente da ferramenta *Sampler*, mas sem obter êxito. A Figura 10 mostra esse movimento (sinalizado pela seta) seguido da intervenção do pesquisador na ocasião.

**Figura 10 - Ação da dupla Luiz e Helen ao tentar acionar o dispositivo *Mixer* na familiarização**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

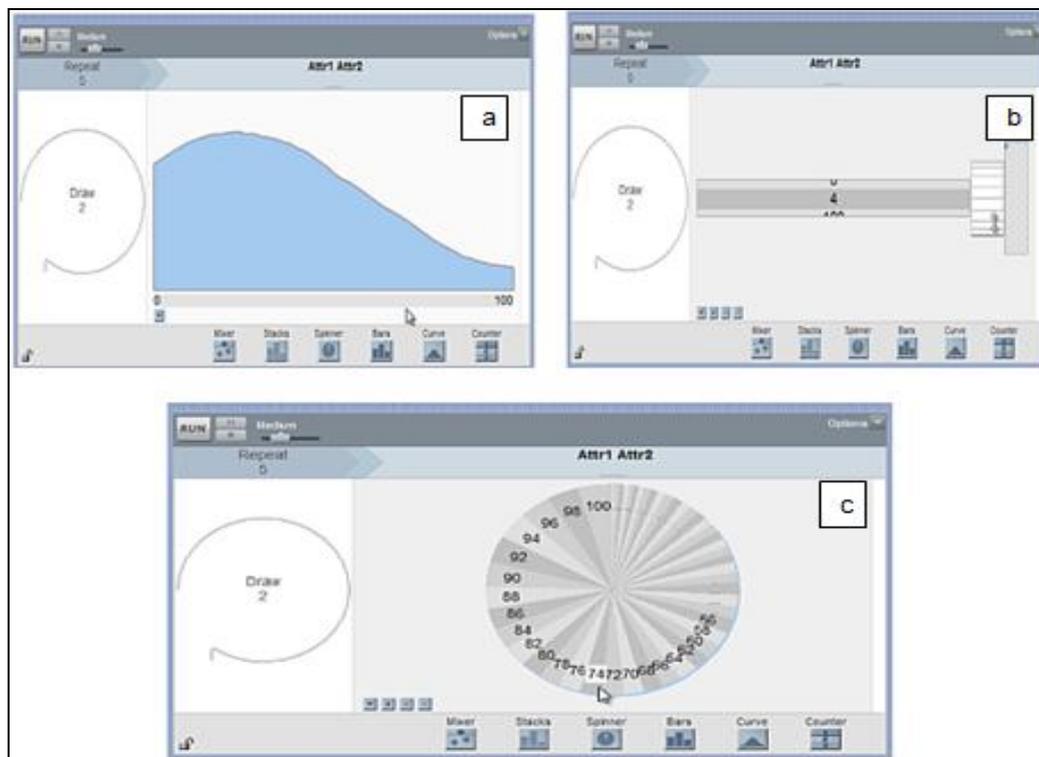
Pesquisador: Porque não mudou nada? Sabe por quê? Você o arrastou para ativá-lo? (referindo-se ao *Mixer*) Mas porque que não mudou nada? Por que inicialmente, já é o padrão dessa ferramenta. Já sair com o dispositivo *Mixer* ativado.

O pesquisador chamou a atenção das duplas para aspectos que são padrões fixados pelo software. Nesse sentido, explicou que o *Sampler*, inicialmente, aparece com os dispositivos associados às letras: a, b, a. Além disso, ampliou a explicação para mostrar todo o *layout* da ferramenta, incluindo número de atributos (*Attr*); *Draw* que é fixado em dois; e quantidade de repetições, fixada em cinco.

Outro aspecto destacado pelo pesquisador à dupla nessa ocasião foi que também é padrão do *Mixer* aparecer inicialmente com a parte superior fechada, sendo este um indicativo para que haja a substituição da amostra a medida em que os elementos são repostos.

A partir dessa explanação, as duplas, em cada momento com o pesquisador, passam a explorar os dispositivos do *Sampler*. Luiz e Helen, por exemplo, passam a clicar em outros dispositivos, substituindo o *Mixer*. A sequência de imagens da Figura 11 mostra as mudanças de dispositivos realizadas pela dupla, resultando na mudança do *Counter* pelo *Spinner*.

**Figura 11 - Mudanças de dispositivos realizadas pela dupla Luiz e Helen na familiarização**

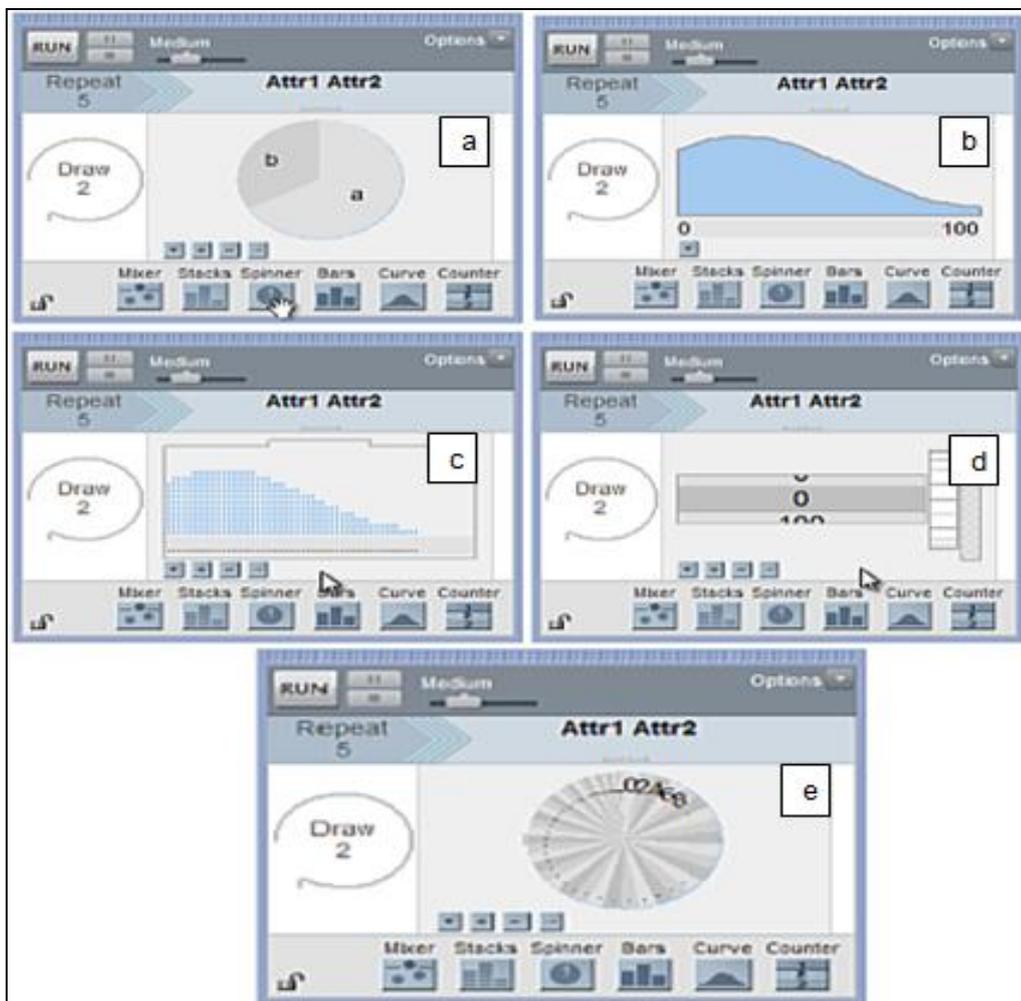


Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Como podemos observar acima, Luiz e Helen substituíram os dispositivos até chegarem ao *Spinner* na seguinte sequência: *Curve* (a), *Counter* (b) e *Spinner* (c).

Helena e Lucas, por sua vez realizaram as substituições de dispositivos mostradas na sequência de imagens da Figura 12, até retornarem ao dispositivo *Spinner*.

Figura 12 - Mudanças dos dispositivos realizadas por Helena e Lucas na familiarização



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Como podemos observar na Figura 3, Helena e Lucas foram substituindo os dispositivos na seguinte sequência: *Spinner* (a), *Curve* (b), *Stacks* (c), *Counter* (d) e novamente o *Spinner* (e). Observa-se que o *Spinner* inicialmente tem a sua área dividida em duas partes (a), sendo esse um padrão do *TinkerPlots*. O dispositivo *Curve* (b) ao ser acionado apresenta-se com uma escala de zero a 100 que também é uma configuração padrão. Nota-se na Figura 12 que a configuração final do *Spinner* apresenta a quantidade de setores advindo da configuração do dispositivo *Curve*.

Um aspecto interessante é que as duplas foram ativando e explorando os dispositivos sem se importar com a ordem na qual estão dispostos na ferramenta *Sampler*.

O pesquisador aproveitou o momento no qual a dupla Luiz e Helen substituiu o dispositivo *Counter* pelo *Spinner* e lhes faz uma pergunta, buscando esclarecer dúvidas levantadas sobre o dispositivo (ver extrato de fala).

Helen: Esse daqui pode servir pra que? (referindo-se ao *Spinner*)

Pesquisador: Você pode ver as áreas em percentual, em proporção esse gráfico, é muito comum, é conhecido como gráfico de setores. Então quando você quer trabalhar com áreas iguais, setores iguais ou desiguais, você pode utilizar ele. Por exemplo, se nos fossemos simular um lançamento de uma moeda. Quais seriam as características da moeda (referindo-se aos atributos *Attr*) quando você lança para saber um resultado? Para iniciar um jogo por exemplo.

Após cada dupla fixar o último dispositivo, o pesquisador propõe que simulem o lançamento de uma moeda, partindo da configuração do dispositivo. Antes o pesquisador buscou gerar reflexões com as duplas sobre aspectos da configuração do dispositivo, as características de um experimento e suas respectivas probabilidades (ver extrato de fala).

Pesquisador: Tá vendo aí, lá em baixo *Draw* (Referindo-se a circunferência grande com o nome *Draw* dentro) do lado esquerdo, *Draw...* você clicando no número, você pode mudar a quantidade de atributos. Vejam. Por exemplo, se fossemos simular o lançamento de uma moeda, seriam quantos atributos? Seria um mesmo?

Helen: Não, dois.

Pesquisador: E para representar a moeda, como a gente poderia fazer aí? No dispositivo, como é que estão as divisões? Como vocês acham que poderiam diminuir? Mexe aí para ver se vocês conseguem achar.

Luiz: Como assim, diminuir a quantidade?

Pesquisador: Vocês num querem deixar dois atributos? Qual a chance de cair cara ou coroa? O que é que vocês acham?

Luiz: Metade.

Conforme diálogo acima, percebemos que o pesquisador buscou na familiarização gerar reflexões sobre a configuração do dispositivo para a situação de simulação proposta (moeda), buscando levar as duplas a determinar a quantidade de atributos (*Attr*) a partir do botão *Draw*, determinando a quantidade de

elementos/casos, nomeando-os e inserindo um intervalo entre os casos, bem como refletirem sobre a probabilidade do experimento proposto antes de realizarem.

A dupla constituída por Helena e Lucas, do mesmo modo foi motivada a refletir sobre os mesmos aspectos (ver extrato de fala).

Pesquisador: Só que eu quero chamar a atenção para algumas coisas que vocês não perguntaram, mas isso é importante que vocês saibam. Por exemplo, tem a *Attr1* e *Attr2* ali em cima. Isso são alguns atributos. Atributos são o que? Características do experimento que você vai realizar. Se tiver uma ou duas características, por exemplo, se fôssemos fazer uma simulação de uma moeda, quantas características teriam?

Helena: Dois. Já tem dois atributos.

Pesquisador: Como é que a gente faria para parecer uma moeda aí? Para simbolizar cara e coroa. Vocês acham que teria que estar qual chance? Qual a probabilidade para uma moeda, de cair cara ou coroa?

Lucas: Sei lá...

Helena: De cair cara, eu acho mais fácil cair cara. Sempre cai cara comigo. Eu estou com dinheiro ali, prata, pra fazer! Como é que mexe nisso?

Lucas: Porcentagem né. Ele tá perguntando qual a probabilidade.

Helena: 47% de coroa. Porque não é metade. É mais provável.

Segundo o diálogo acima, percebemos que o pesquisador refletiu com Helena e Lucas sobre a configuração do dispositivo *Spinner* a partir de seu *Menu*, destacando vários aspectos, como por exemplo, a possibilidade de ver as divisões das áreas em percentual. O pesquisador buscou também, levar a dupla a determinar à quantidade de atributos (*Attr*) a partir do botão *Draw*, a quantidade de elementos/casos, nomeando-os e inserindo um intervalo entre os casos. A dupla foi levada a refletir sobre a probabilidade do experimento proposto antes de sua realização.

No entanto, para realizar a simulação do lançamento da moeda, os estudantes necessitariam compreender outras funções do dispositivo. O pesquisador, preocupado com esse aspecto após destacar que os dispositivos *Spinners* e *Bars* têm áreas ao invés de frequências volta à atenção das duplas para as opções do dispositivo *Spinner* (ver extrato de fala e Figura 13).

Pesquisador: Vocês podem aumentar ou diminuir a quantidade de elementos arrastando as áreas, direto do dispositivo ou por aqui (Indica os botões + e – na parte inferior esquerda do dispositivo). Arrastem para ver. Vocês acham que tem a mesma probabilidade de cair cara e coroa?

Helena: Não

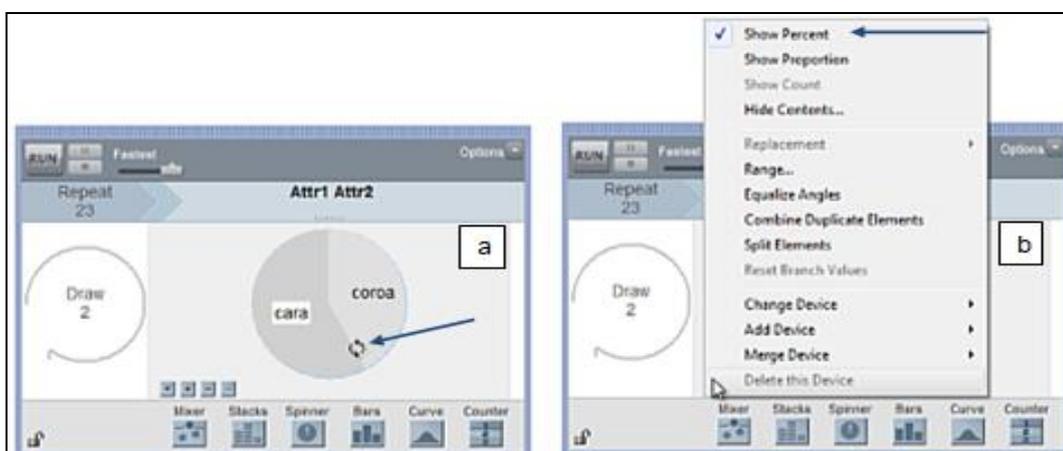
Lucas: A chance é de cair mais cara

Pesquisador: Aqui embaixo, estão as opções da ferramenta. Clique aí. Vejam o que vocês veem aí, de cima para baixo. (analisando Opções do dispositivo).

Helena: Pode apertar? (aperta em *Show Percent* e verifica que os elementos (setores) estão divididos meio a meio 50% e 50%)

Pesquisador: Quando os ângulos não estiverem igual, você pode mudar eles por aqui, arrastando as áreas, ou Igualar Ângulos (*Equalize Angles*). Você quer ver se estar certo e conferir, você seleciona Show de proporção ou de Percentual (*Show Percent*) (confere as áreas do *Spinner*). Aqui é se quiser adicionar dispositivos.

**Figura 13 - Ações de Helena e Lucas na familiarização após destaque do pesquisador**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Observamos no diálogo e na imagem (a - seta) o destaque no ajuste das áreas do *Spinner* que pode ser realizado arrastando diretamente no dispositivo ou a partir do Menu Opções do dispositivo (b – seta). Para tanto, eles teriam de selecionar a opção Igualar Ângulos (*Equalizar Angles*) para o dispositivo *Spinner* ou Igualar Alturas (*Equalize Heights*) para o dispositivo *Bars*. Foi destacado como conferir a igualdade dos elementos a partir do Menu, selecionando Mostrar

Percentual (*Show Percent*) ou Mostrar Proporção (*Show Proportion*) e modificá-los, de acordo com os valores desejados editando os valores.

Aspectos relacionados ao *Menu disposto na ferramenta Opções do Sampler* também foram enfatizados e destacados pelo pesquisador às duplas (ver extrato de fala e Figura 14).

Pesquisador: Aqui em cima estão às Opções do *Sampler* (no canto superior direito), vocês podem, por exemplo, determinar quantas repetições você quer que aconteça o experimento. Está vendo marcado em baixo, *Repeat?* Se você observar lá está Repeat (selecionado no quadro) se você desmarcar aí o que é que acontece... (mudança de ideia). Run é para iniciar a execução, a retirada dos elementos daqui. Se você desmarcar aí em cima onde está o cursor (*Replace Result Cases*) o que é que vai acontecer? Você vai, ai pede para repetir o experimento uma vez, das cinco, se você repete, vai acrescentar mais cinco, aí dez.

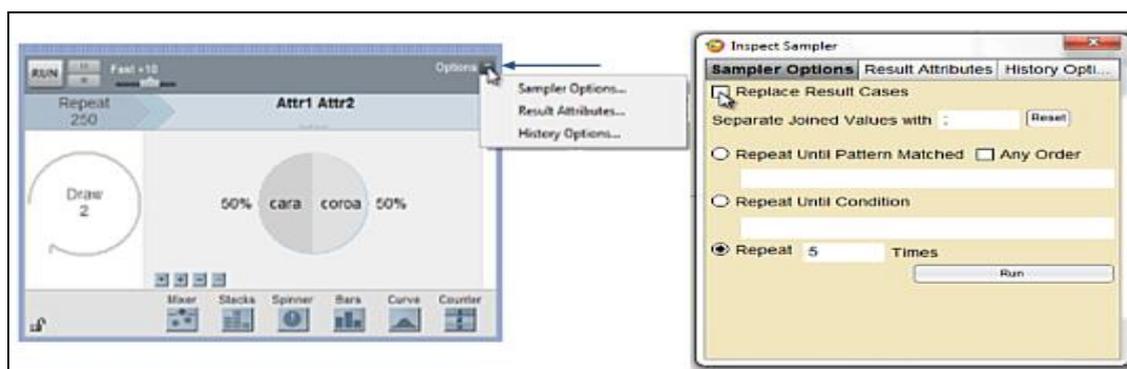
Helena: Cinco mais cinco (+5) (*Replace Result Cases*) (manipula desmarcando e marcando e descreve a ação).

Pesquisador: Querem ver? Inicie.

Helena: Aqui é? (ela coloca a seta do mouse em Run e clica)

Pesquisador: Pode ser por aí, ta vendo que ele começou (retiradas), ou até mesmo pela própria ferramenta. E também tem o Resultado dos atributos e o Opções do Histórico do que você vai fazendo...

**Figura 14 - Destaque do pesquisador para o Menu Opções da ferramenta *Sampler***



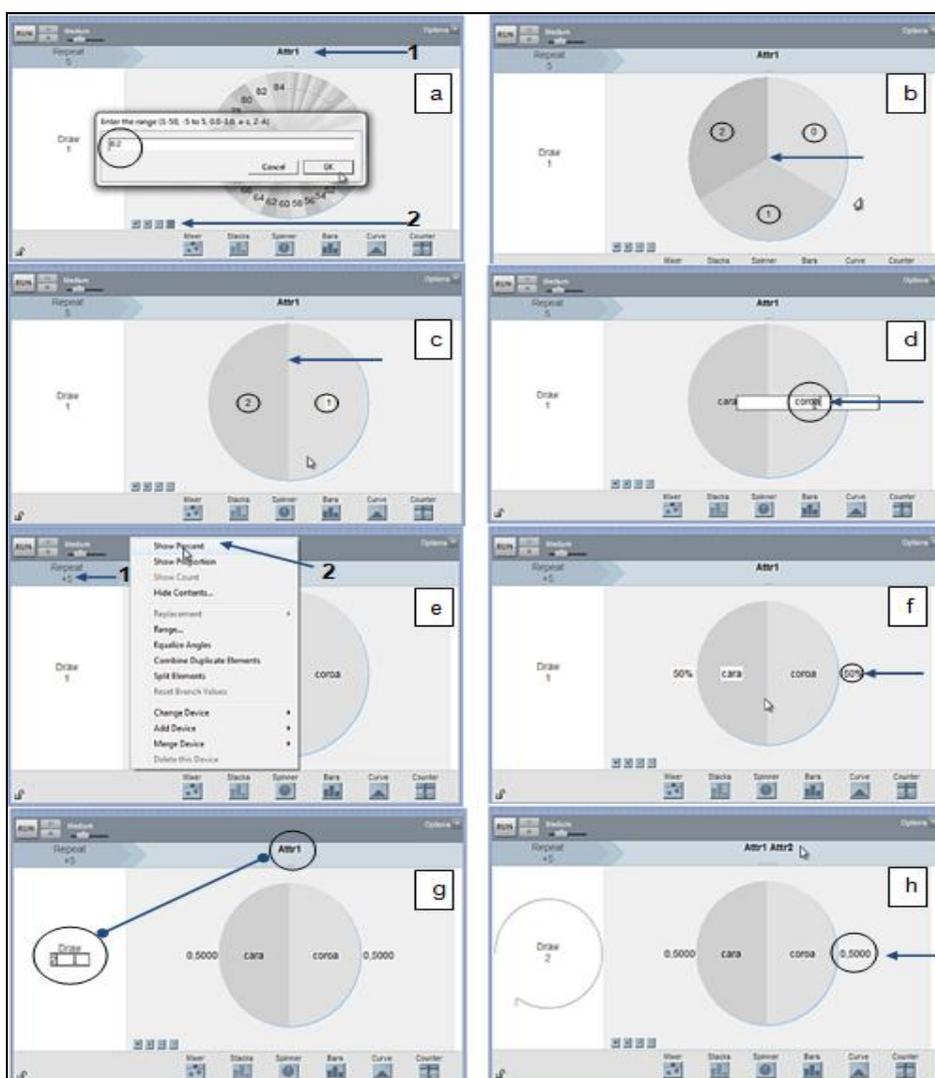
Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Podemos observar na fala e na Figura 14 que o pesquisador destacou, dentre outros aspectos, que a partir das Opções do *Sampler* (*Sampler Options*); as duplas poderiam optar para que a cada execução do experimento os resultados fossem substituídos ou não, determinar a quantidade de execução (*Repeat*), como os casos seriam separados (;) bem como o início da execução do processo de

experimentação (*Run*). Embora muitas dessas ações possam ser realizadas diretamente no dispositivo, essa outra opção foi concedida as duplas para facilitar as ações dos mesmos na fase posterior de simulação.

Luiz e Helen, motivados e auxiliados pelo pesquisador, configuraram o dispositivo *Spinner* para a simulação do lançamento da moeda conforme pode ser visto na sequência de imagens da Figura 15.

**Figura 15 - Sequência de ações na configuração do Spinner para simular o lançamento da moeda realizada por Luiz e Helen na familiarização**



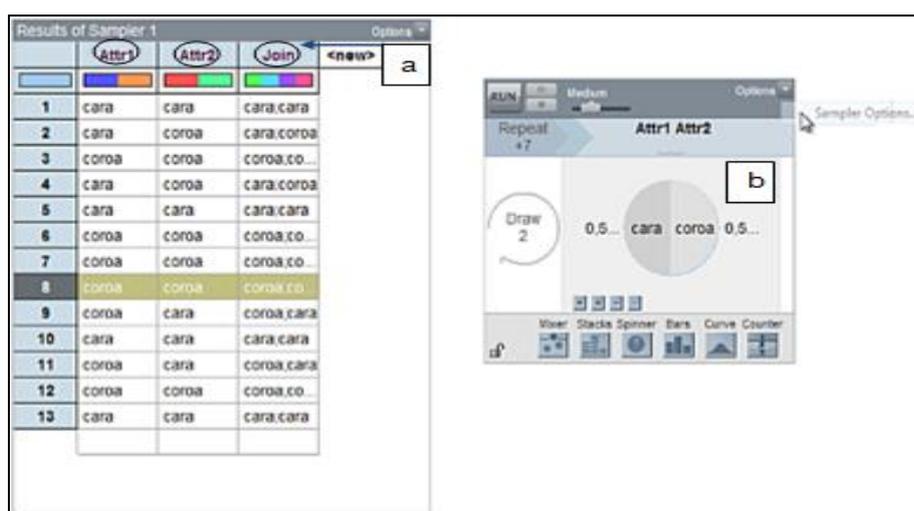
Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Notamos que inicialmente a dupla Luiz e Helen, deixa o dispositivo com apenas um atributo (a, seta - 1). Em seguida, recorre ao botão do dispositivo simbolizado por três pontos (... – seta a - 2), determina como o dispositivo será

dividido inserindo um intervalo de 0-2 (a – círculo preto) o que resulta na divisão do *Spinner* em três setores iguais (b). Na sequência, a dupla, adotando o mesmo procedimento, altera esse intervalo para 1-2 e obtendo o dispositivo com dois elementos (c), os quais nomeiam como cara e coroa (d). Em seguida (e – seta 1), recorre as Opções do *Sampler*, desmarcam a opção de substituição da amostra, dessa forma a cada execução do experimento a amostra será mantida e acrescentada (+5) a já existente decorrente de cada experimentação. Nas opções do dispositivo recorrem a opção do show de Percentual (e – seta 2), conferindo, assim a igualdade das áreas dos elementos (f). Percebemos que a dupla modificou a quantidade de atributos (g), no botão (*Draw*) para dois. Por fim em (h), a dupla recorre novamente às opções do dispositivo e escolhe a opção de ver os setores em proporção.

Após todo esse processo de configuração da ferramenta *Sampler*, o pesquisador solicitou as duplas, em cada momento com elas, que iniciassem o processo de simulação do experimento. Esse processo da simulação favoreceu o aparecimento de uma Tabela. Nessa Tabela ficam registrados os resultados da simulação, como pode ser visto na Figura 16 com o exemplo de Luiz e Helen.

**Figura 16 - Resultados da simulação do experimento com as moedas realizado Por Luiz e Helen na familiarização**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Podemos observar na Tabela (a) o registro de 13 experimentos na primeira coluna. Nas duas colunas seguintes, temos os resultados individuais (de acordo com a quantidade de atributos *Attr*). Por último, na quarta coluna, se encontram os

resultados combinados (*Join*) em cada retirada em ordem sequencial, conforme as retiradas.

Após a simulação, o pesquisador, buscou saber o que os estudantes entenderam da Tabela, como pode ser observado no diálogo a seguir com o exemplo de Luiz e Helen.

Pesquisador: O que é que vocês observaram? O que é que vocês estão vendo?

Luiz: Attr 1: cara, cara, coroa, cara, cara; Attr 2: cara, coroa, coroa, coroa, cara. Assim sendo, o Join ficou assim: 1º. Cara, cara; 2º. Cara, coroa; 3º. Coroa, coroa; 4º. Cara, coroa; 5º. Cara, cara.

Helen: Atributo 1, primeiro cara, segundo cara, terceiro coroa, quarto cara, quinto cara. No Atributo 2, deu primeiro cara, segundo coroa, terceiro coroa, quarto coroa, quinto cara. Join? Esse Join tava aonde?

Pesquisador: O que você observa em Join?

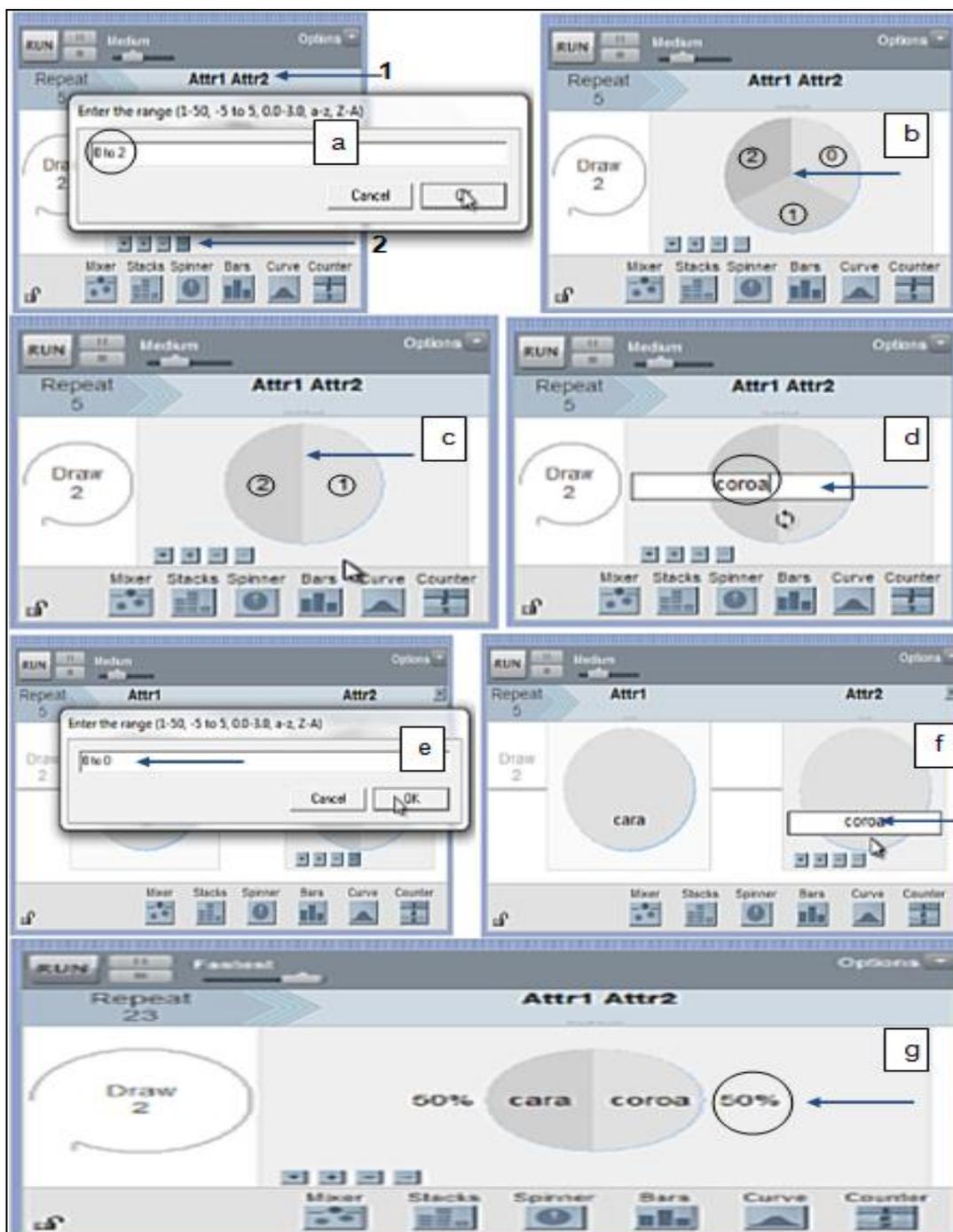
Luiz: Tem as duas é as duas juntas?

Helen: Ah, os resultados juntos.

O diálogo possibilita-nos identificar que os estudantes perceberam que a quantidade de atributos influencia na quantidade de elementos que foram selecionados em cada retirada. Isso fica evidente por eles destacarem como os resultados apareceram registrados na tabela.

Na Figura 17 podemos visualizar através da sequência de imagens como a dupla constituída por Helena e Lucas, motivados e auxiliados pelo pesquisador, configuraram o *Spinner* para a simulação do lançamento de uma moeda.

Figura 17 - Sequência de ações na configuração do *Spinner* para simular o lançamento da moeda por Helena e Lucas na familiarização



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Notamos que inicialmente a dupla (Helena e Lucas), diferentemente de Luiz e Helen, mantém o dispositivo com os dois atributos (a – seta 1). De maneira semelhante a Luiz e Helen, a dupla recorre ao botão do dispositivo simbolizado por três pontos (... – botão *Range*) – a - seta 2, determinam como o dispositivo será

dividido inserindo um intervalo de 0-2 (a – círculo preto) o que resulta na divisão do *Spinner* em três setores iguais (b). Na sequência (c e d), de modo semelhante a dupla Luiz e Helen, Helena e Lucas modificam esse intervalo para 1-2 e obtém o dispositivo com dois elementos, os quais nomeiam como coroa e cara. Em seguida (e, f), adicionam um novo *Spinner* e ao executarem o experimento com 5 repetições percebem que os resultados não variam (extrato de fala).

Helena: Por que não quer dar coroa e cara?

Lucas: E por que não quer dar coroa e cara?

Helena: Ou cara e cara, coroa, coroa?

Pesquisador: Sabe por que é que está acontecendo isso? É como se vocês tivessem duas moedas e cada uma só com um só lado.

Helena: Agente tem que parar. Bota em *Stop*.

Pesquisador: Como é que vocês poderiam fazer para simbolizar uma moeda com dois lados, de fato, cara e coroa?

Após essas simulações no *Sampler*, a dupla Helena e Lucas com a ajuda do pesquisador, logo percebem que o modo como configuraram o *Spinner* impossibilitou que outros resultados acontecessem, como: coroa-cara, cara-cara, coroa-coroa. Decidem então mudar as configurações (g), para tanto excluem um *Spinner*, configurando um único com dois elementos, com áreas iguais nomeando-os como cara e coroa. Essa é a configuração final da dupla, só sendo alterados a velocidades de execução das retiradas e quantidade de repetições.

Na sequência da familiarização com o *software* cada dupla, no seu momento com o pesquisador, explorou possibilidades de visualização dos dados de uma experimentação distribuídos em um Gráfico através da ferramenta *Plot* (ver extrato de fala).

Pesquisador: Além do *Sampler*, lembra qual é a outra ferramenta que eu disse a vocês que iriam trabalhar? Inclusive essa em específico quando é ativada tem seu próprio *Menu*, de várias opções de como você organizar e analisar os dados nela.

Helen: Das opções daqui? (apontando para o *Menu* de ferramentas).

Pesquisador: Ajuda ela Luiz.

Luiz: Foi o *Plot*.

Helen: *Plot* (indica onde fica o ícone e descreve como Lucas deve proceder para ativá-la).

Pesquisador: Ativa ele. (Eles foram à barra de ferramentas, selecionaram e acionaram o *Plot*). O que vocês perceberam quando vocês ativaram?

Luiz: Abre um monte de negócio para a gente mexer nele.

Esse diálogo nos permite observar que os estudantes conseguiram identificar, sem dificuldades a ferramenta *Plot* como possibilidade de visualização dos dados em um gráfico. Os estudantes, também perceberam a presença de um *Menu* próprio. O pesquisador destacou para os estudantes que para construírem o Gráfico no *Plot* deveriam selecionar arrastar os resultados dos casos, deixando-os na vertical ou horizontal.

Devido à importância que a manipulação do gráfico pode adquirir, o pesquisador mencionou as utilidades de algumas funções do *Plot* e discutir sobre a visualização (ver extrato de fala).

Pesquisador: Aqui é a linha de referência, só mostrando para vocês. Você pode construir acima dos dados, *Line*, você pode acionar a construções de colunas verticais. Você pode visualizar os valores N numéricos de uma escala. Você pode também interligar os resultados, você vê altura. E realizar contagens no N, na porcentagem... Por exemplo, veja o que acontece, clica no N.

Luiz: Em cima, do lado direito, lado direito (Guiando Helen para a opção N, ao clicar aparece o número 13, referente a os resultados gerados pelo programa, quanto ao lançamento de possibilidades de cara ou coroa).

Pesquisador: E aí de onde veio esse treze?

Luiz: aí é o número de bolinhas...

A partir do diálogo notamos que alguns aspectos de organização do Gráfico a partir da ferramenta *Plot* foram destacados pelo pesquisador. Podemos mencionar às funções do *Plot* que possibilitaram os estudantes visualizarem as alturas das colunas, através de uma linha (*Line*), valor numérico dos casos e em percentual (*N; % counts*), bem como separar (*Separate*), ordenar (*Order*) e empilhar (*Stack*).

Os aspectos destacados acerca do *Plot* foram também destacados para a dupla formada por Helena e Lucas (ver extrato de fala).

Pesquisador: Então. Apareceu um monte de bolinhas. Clica em uma. O que será que essas bolinhas significam?

Lucas: o número de vezes que...

Helen: Peraí. Cada bolinha é um número. Tá na... (ela vai clicando em cada bola do N, e assim vai selecionando um resultado diferente das retiradas)

Helena: Aí é a segunda (se referindo a ordem de retirada)

Lucas: O número de vezes que...

Pesquisador: estão ordenadas?

Lucas: Estão.

Helen: Não. Quem é a primeira? Essa é a sétima.

Pesquisador: como formar o Gráfico? Clica na combinação e arrasta, para a vertical ou horizontal do *Plot*.

Helena: Puxa e arrasta?

Pesquisador: É quando forma uma mãozinha é só arrastar. Aí tem as opções lá do *Menu* lá do *Plot* para organizar.

Helena: tenta esse daqui no *Line*.

Pesquisador: É para construir uma linha. É legal? Este ajudou?

Lucas: Não. Aciona *Separate*, *Stack* (horizontal).

Helena: Tenta a régua.

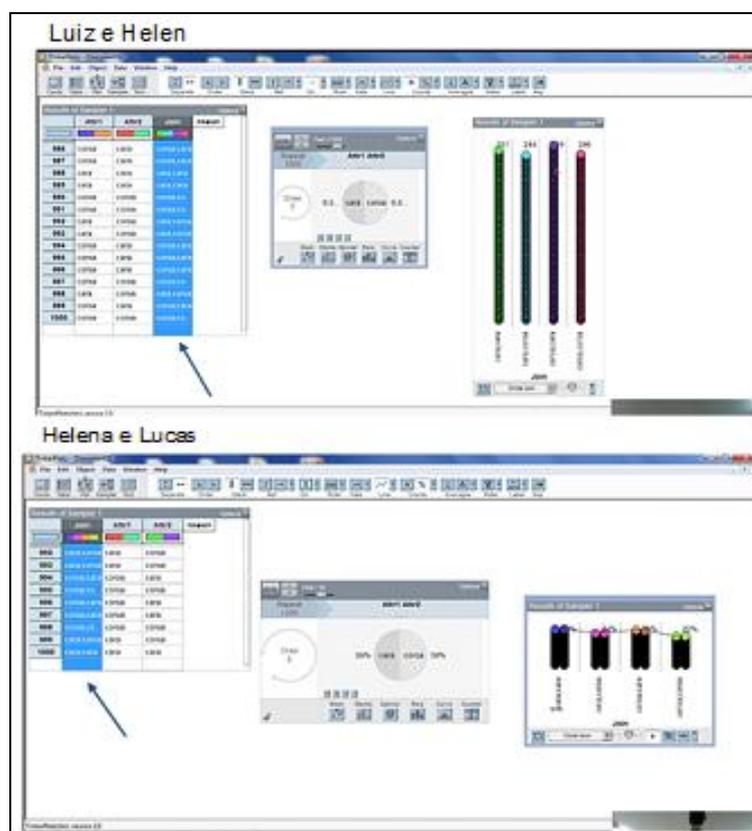
Pesquisador: Vocês querem saber o número ou a porcentagem?

Lucas: aciona a porcentagem (%).

Podemos observar nas falas, que o pesquisador, após a dupla ativar o *Plot*, destacou funções que facilitariam na organização do Gráfico. O pesquisador motivou as duplas a analisarem as bolinhas. A dupla, após clicar em várias, percebe que as bolas representam os casos da experimentação registrados na Tabela.

A seguir, na Figura 18, podemos observar exemplo da simulação do lançamento da moeda por cada dupla.

**Figura 18 - Resultado da simulação do lançamento da moeda pelas duplas**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

As setas indicam o momento em que cada dupla arrastou os resultados combinados da experimentação com 1000 repetições para o *Plot*, formando o Gráfico (lado direito). Notamos ainda, que as funções separar (*Separate*), empilhar (*Stack*) e número (*N*) foram utilizadas por Luiz e Helen.

Percebemos que nessa fase de familiarização que os estudantes não tiveram dificuldades aparentes. Quando elas emergiram foram sanadas pelo pesquisador mediante suas intervenções e participação efetiva. As duplas conseguiram chegar a uma configuração adequada do *Sampler* a partir da situação proposta, a saber, a simulação do lançamento da moeda. A compreensão dos estudantes das funções do *Plot*, para a constituição e visualização dos resultados da simulação a partir do Gráfico também se deu sem aparentes dificuldades, o que fica claro pelas aplicações vistas acima quando as duplas constituem o gráfico (Figura 18).

## 6.2 Simulação com o *Sampler*

Nesta etapa, realizada com cada dupla no dia subsequente ao da familiarização, os estudantes manipularam de forma mais autônoma a ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots 2.0*.

Como previsto na metodologia, objetivou-se que os estudantes retomassem a ideia da experimentação realizada no ambiente físico, comparando os resultados em ambos os ambientes, físico e virtual. Para tanto, lhes foi entregue o gráfico que eles produziram em duplas por ocasião da experimentação no ambiente físico (Quadro 13).

Nesta subseção, as trajetórias das duplas realizando simulações com o *Sampler* encontram-se descritas a partir das seguintes categorias: escolha e configuração dos dispositivos do *Sampler*; simulações iniciais; simulações com diferentes amostras; e comparação dos resultados das experimentações com as fichas e simulação com o *Sampler*.

### 6.2.1 Escolha e configuração dos dispositivos

O pesquisador instruiu as duplas para que ficassem livres na escolha do dispositivo que achassem mais pertinente para proceder com a simulação. Destacamos que essa escolha do dispositivo consistiu em uma ação que requereu várias subações, conforme detalhadas em seguida para cada dupla.

A dupla formada por Helen e Luiz tentou sem êxito adicionar o dispositivo *Mixer* no *Sampler*, reproduzindo uma ação já realizada na familiarização. Depois decidiram usar o *Spinner*. O pesquisador interveio visando ajudá-los a refletir sobre a escolha do dispositivo, conforme extrato de fala a seguir.

Pesquisador: Qual o dispositivo melhor... que vocês acham melhor para simular àquele experimento? Para colocar o traço e o ponto?

Luiz: Aquele das fichas!

Pesquisador: Inicialmente quando abre a ferramenta qual o dispositivo que vem ativo, já é padrão?

Helen: É esse (referindo-se ao *Spinner*).

Luiz: É esse (também referindo-se ao *Spinner*).

Pesquisador: Vocês acham melhor esse?

Luiz: Sim.

Helen: Hum hum.

Pesquisador: Quando realizarem o experimento os resultados sairão iguais? (referindo-se ao realizado com as fichas). Lembram que era numa sacola. Esse dispositivo tem essa aparência?

Helen: Dar para abrir outro. O outro. Pode abrir ele? (referindo-se ao *Plot*)

Pesquisador: Decidam primeiro o dispositivo.

Luiz: Acho que esse é o melhor porque ele roda e tipo, e dá como se a gente fosse tirar (refere-se à ação de tirar as fichas da sacola).

Conforme observamos, o pesquisador buscou levar os estudantes a perceberem que o *Mixer* talvez fosse mais indicado para a simulação com os dois elementos, pois além de já estar ativo, tem a semelhança de um saco. Contudo, a dupla ainda assim não mudou de opção, mantendo o *Spinner* como escolha.

Na sequência, Luiz e Helen passaram a desenvolver algumas ações no sentido de configurar o *Spinner* para simularem o experimento realizado no ambiente físico. Inicialmente, antes de realizarem a simulação, igualaram as áreas para a metade (50%) não modificando as cinco repetições. No entanto, não inseriram os elementos do experimento no ambiente físico, quais sejam: traço e ponto.

Helena e Lucas, embora tenham optado inicialmente pelo uso do dispositivo *Mixer*, tentaram configurá-lo sem êxito. Em seguida, decidem substituí-lo pelo *Spinner*.

Na configuração dos dispositivos, embora o pesquisador tivesse refletido sobre a possibilidade do uso do *Mixer*, e Helena e Lucas tivessem tentado usá-lo, as duplas mantiveram a preferência pelo uso do *Spinner*, reproduzindo-a para todas as simulações realizadas.

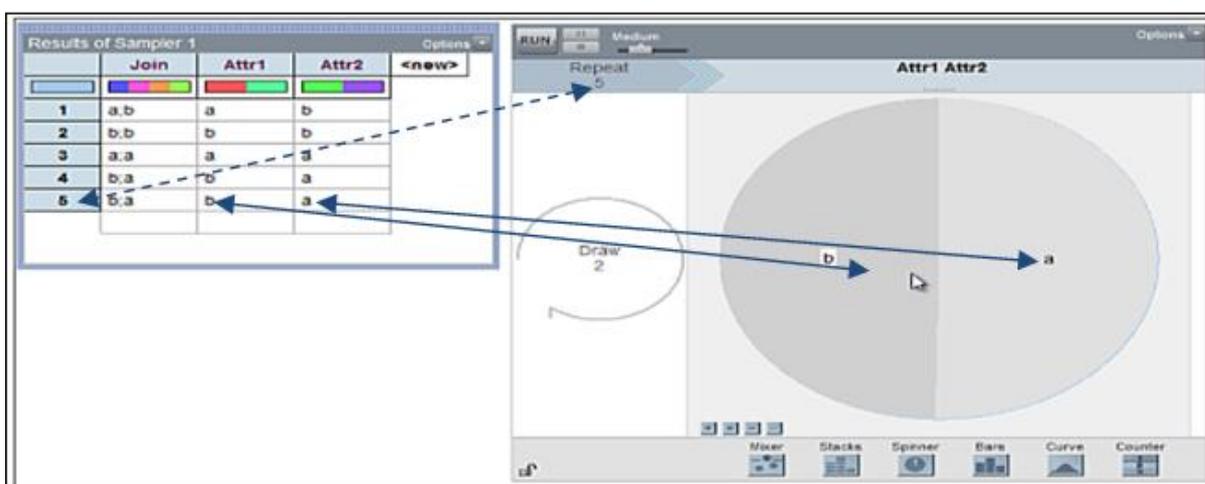
De acordo com Ireland e Watson (2009) no dispositivo *Mixer* a aleatoriedade é estimulada visualmente saltando as bolas em torno do saco e liberando um resultado para fora do saco. No *Spinner*, tem-se um modelo de área em que a aleatoriedade é estimulada visualmente por um ponteiro girando ao redor; este ponteiro eventualmente para, dando os resultados. Em ambos os dispositivos, contudo, considerando os atributos, que no caso da nossa pesquisa é traço e ponto, os resultados aparecem na tabela, individualmente e combinados.

Como as duplas só consideraram o *Spinner* para realizar as simulações suas considerações sobre aleatoriedade podem ter sido influenciadas pelo modelo de área e perpassado suas análises e trajetórias ao longo das simulações.

### 6.2.2 Simulações iniciais

Após igualar os setores do *Spinner* para a metade, Luiz e Helen procedem com a simulação de cinco repetições (Figura 19).

**Figura 19 - Dispositivo *Spinner* configurado e primeira simulação realizada por Luiz e Helen com o *Sampler***



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

A dupla, por iniciativa própria, realizou a simulação com cinco repetições (seta tracejada) acompanhando a configuração padrão do *TinkerPlots*. Além disso, manteve os elementos iniciais a e b oferecidos também como padrão pelo *software* (setas cheias).

O pesquisador, visando estimulá-los a inserir os elementos do experimento das fichas (traço e ponto), faz uma pergunta neste sentido, gerando o diálogo apresentado em seguida:

Pesquisador: E os elementos já estão no dispositivo? Vocês já colocaram? Para sair igual ao que vocês fizeram com as fichas? Os símbolos? Como é que vocês podem fazer?

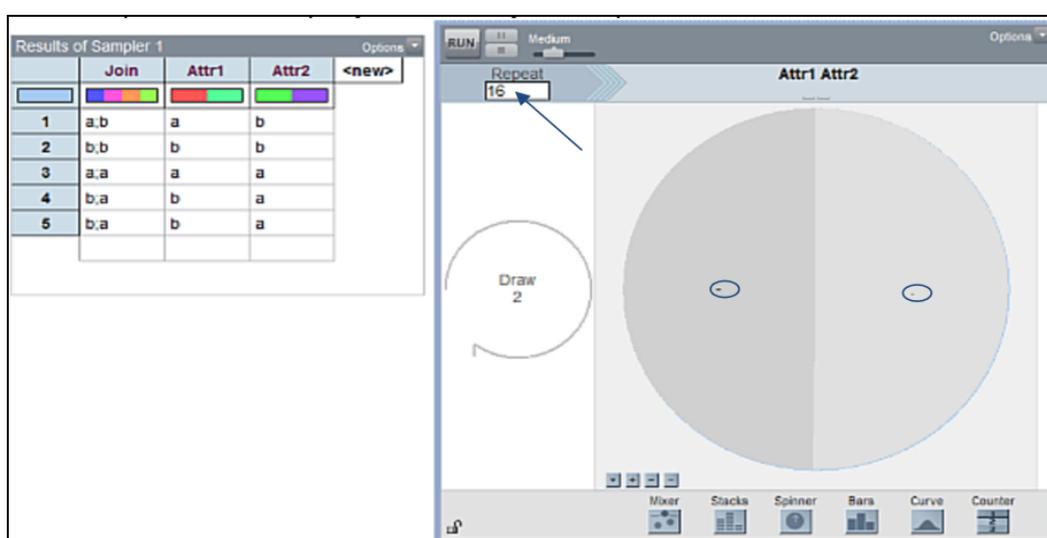
Helen: Cara e coroa que bota?

Luiz: Não, os da ficha. Coloca o traço e o ponto.

Embora esta dupla (Luiz e Helen) já estivesse de posse do gráfico que elaborou em conjunto a partir dos registros do experimento no ambiente físico, não introduz os elementos do experimento de forma espontânea, requerendo a intervenção do pesquisador.

A dupla então clica em cima de cada elemento (a, b) e os substituem pelos símbolos traço e ponto. Em seguida, determinam que o experimento deva ser executado 16 vezes, de modo similar à quantidade de retiradas do experimento realizado no ambiente físico (Figura 20).

**Figura 20 - Dispositivo *Spinner* configurado por Luiz e Helen para realizar a simulação do experimento com traço e ponto com 16 repetições**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Observa-se que embora o *Spinner* esteja configurado para executar a simulação do experimento com 16 repetições (seta) com dois elementos, traço e ponto (destacados pelas elipses), esses elementos ainda não estão apresentados na tabela, pois eles não ativaram ainda a função *Run* que permite que a simulação seja concretizada. A dupla então ativa o *Run* e realiza a simulação com 16 repetições.

Após esse processo de simulação com 16 repetições, como Luiz e Helen não tomaram a iniciativa de ativar o *Plot* para visualizarem os resultados com o auxílio do Gráfico, o pesquisador intervém (extrato de falas).

Pesquisador: Então vocês já têm os resultados aquele tipo de visualização. Tem outro tipo de visualização dos dados?

Helen: Hunhum (Ativa o *Plot*).

Pesquisador: Que ferramenta é essa?

Luiz: *Plot*.

Pesquisador: Ele serve para mostrar o que? Mostrar os resultados como o que?

Helen: Como um gráfico.

Pesquisador: E aí, como formar então esse Gráfico?

Luiz: Porcento não? (Nesse momento, ele guia Helen enquanto ela percorre e aciona vários recursos do *Menu* do *Plot*)

Pesquisador: Onde é que estão os resultados?

Helen: Aqui (aponta com o cursor para a Tabela).

Pesquisador: O que foi que vocês fizeram ontem para que os resultados fossem para o *Plot* e aparecesse? As colunas com cada resultado. Tem alguma relação com a tabela, não tem?

Luiz: Tem relação com a Tabela sim.

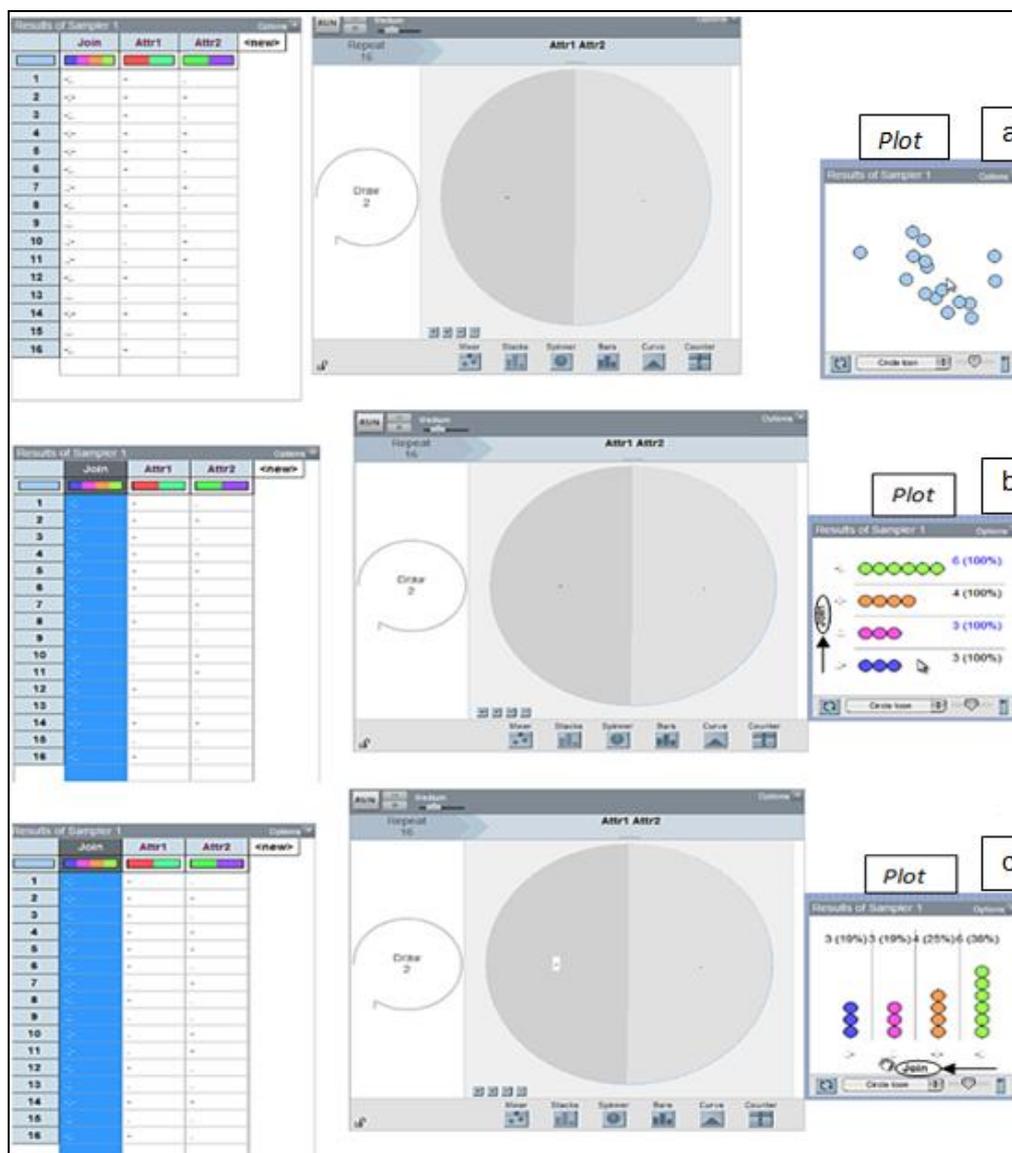
Pesquisador: Como faz para ter os resultados? O que é preciso fazer para ter os resultados?

Luiz: É puxar (referindo-se a coluna *Join*). Como foi que tu puxasses ontem Helen? (Luiz arrasta os resultados combinados da coluna *Join*) Tem que tá de lado.

Com o auxílio do pesquisador então a dupla resgata alguns conhecimentos procedimentais referentes ao uso da ferramenta *Plot*. Dessa forma, puderam ativar o *Plot* e inserir os resultados combinados (*Join*) da experimentação, contidos na Tabela.

Na sequência, a dupla inicialmente elabora o gráfico com os *Plots* misturados; em seguida, constroem o gráfico com o *Join* na vertical e na sequência com o *Join* na horizontal (ver letras a, b e c da Figura 21, respectivamente).

Figura 21 - Construção do gráfico com 16 repetições com a ativação da ferramenta *Plot* pela dupla Luiz e Helen no processo de simulação



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

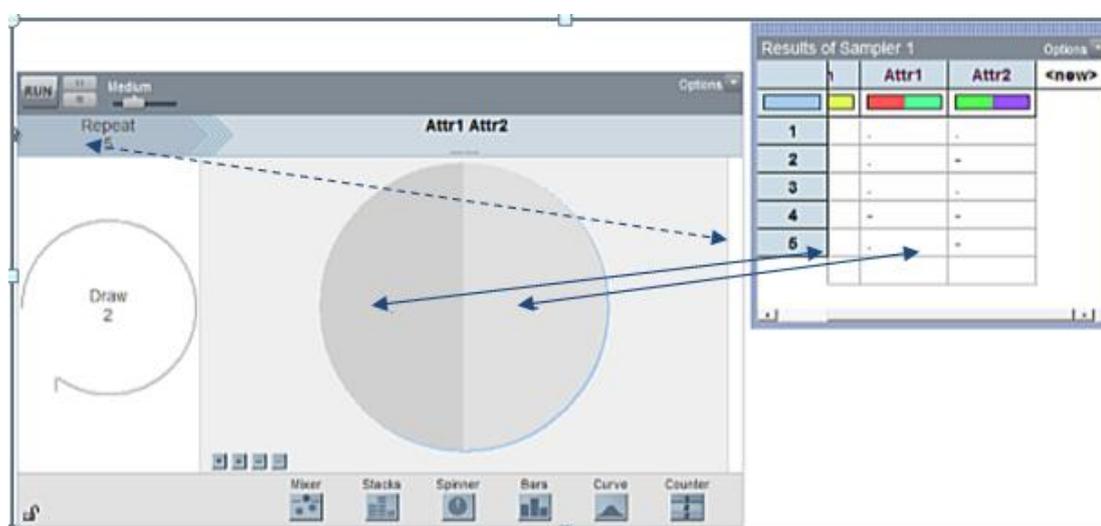
Conforme Figura 21 acima a dupla inseriu os dados na vertical (imagem b, indicado pela elipse e seta), e em seguida mudou essa representação obtendo o Gráfico na horizontal (imagem c, indicado pela elipse e seta). Na ação de ativar o *Plot*, a dupla utilizou algumas funções já vistas na familiarização, como: separar (*Separate*), empilhar (*Stack*), contar (*Counts – N e %*) para visualizarem a frequência de ocorrência dos eventos.

Conjecturamos que essa ação da dupla em situar o gráfico com o *Join* no eixo horizontal pode ter sido gerada pela necessidade de obter um gráfico semelhante

àquele registrado no papel e que foi resultante do experimento realizado no ambiente físico.

As simulações iniciais da dupla Helena e Lucas, também partiram de repetições de pequenas amostras. Após igualar os setores do *Spinner* para a metade, a dupla substituiu os elementos padrão apresentados no software pelos símbolos ponto e traço; em seguida realizam a simulação (Figura 22).

**Figura 22 - Dispositivo *Spinner* configurado e primeira simulação realizada por Helena e Lucas com o *Sampler***



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Assim como a dupla anterior, Helena e Lucas realizam a simulação com cinco repetições (seta tracejada) acompanhando a configuração padrão do *TinkerPlots*. Contudo, espontaneamente, eles já inserem os símbolos do experimento das fichas substituindo os elementos, padrão oferecido pelo *software* (setas cheias).

Além desses aspectos da configuração do *Sampler*, essa dupla também tomou a iniciativa de recorrer espontaneamente ao ícone da ferramenta *Plot*, ativando-o, conforme diálogo e o gráfico apresentado na Figura 23.

Helena: Pronto, aperta em *Plot*.

Lucas: Aonde?

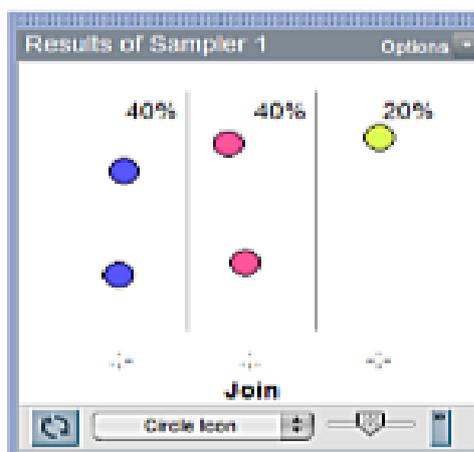
Helena: Aqui, trás pra cá (indicando na barra). Agora, faz de novo (referindo-se a execução da simulação). Agora aumenta a repetição. Pronto. Isso exatamente. Bota vinte (20).

Lucas: Deixa eu me lembrar aqui para organizar (referindo-se às funções do *Plot* para organizar o Gráfico).

Helena: Vinte. Pronto. Põe em porcentagem. Ah! Tinha que trazer o negocinho pra cá. Eu acho que é esse daqui (apontando para a coluna da ordem de retiradas).

Lucas: é *Join*, *Join*.

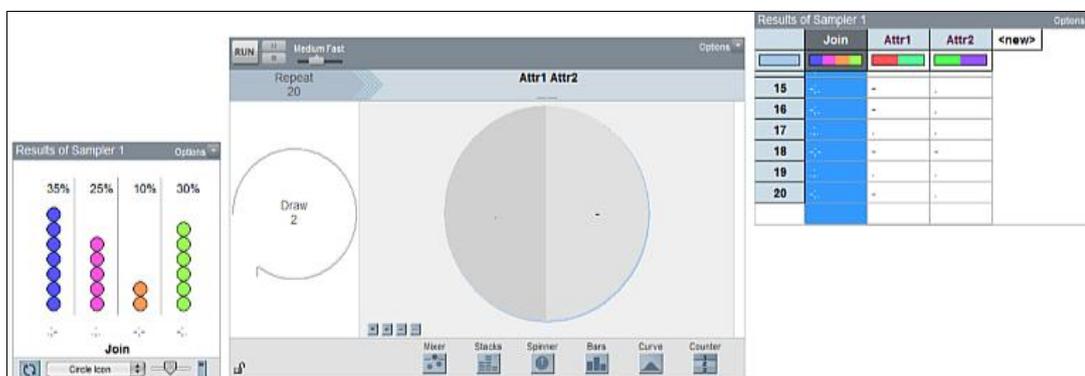
**Figura 23 - Gráfico construído por Helena e Lucas no *TinkerPlots* com a simulação de cinco repetições**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Após esse processo de simulação com cinco repetições, a dupla deu início a nova simulação do experimento com 20 repetições. Os resultados dessa simulação podem ser vistos na Figura 24.

**Figura 24 - Resultados da simulação do experimento realizada por Helena e Lucas**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Era esperado que Helena e Lucas executassem a simulação com 16 repetições, para obtenção do mesmo tamanho de amostra obtido com as fichas. Contudo, eles agilmente manipularam o *Sampler* e colocaram 20 repetições. Notamos, também, que os resultados dos eventos simples combinados (*Join*) estão no *Plot*.

O *Sampler* possui uma configuração padrão de a cada simulação, independente da quantidade de repetições os resultados serem zerados. O pesquisador estimulou as duplas também a pensarem na possibilidade de a cada experimentação acrescentar os casos, ao invés de zerá-los, incrementando o número das amostras a cada simulação (uso da Opção *Replace Result Cases* do *Sampler*).

Essa opção oferecida pelo *Sampler* e utilizada pelas duplas pode ser constatada, por exemplo, no diálogo estabelecido entre Helena e Lucas.

Helena: Aonde é que tem o negocinho do mais que agente apertava e continuava. Tú lembra.

Lucas: Não.

Helena: Coloca o + (símbolo) na frente. Vai que pega. Senão vai repetir tudo de novo. Era pra tu ter colocado +16 porque aí, depois ia ter o resultado do outro já. Pronto, mais dezesseis (+16).

Podemos notar, a partir das verbalizações de Helena e Lucas, que na simulação realizada a dupla optou pela não substituição dos casos da amostra a cada experimentação. Essa estratégia também foi utilizada por Luiz e Helen.

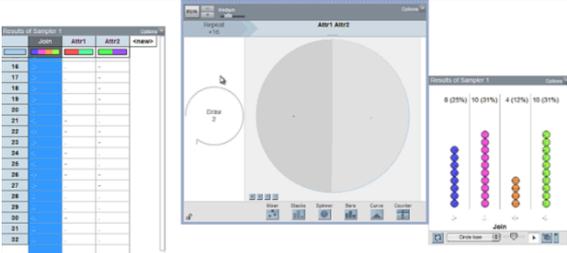
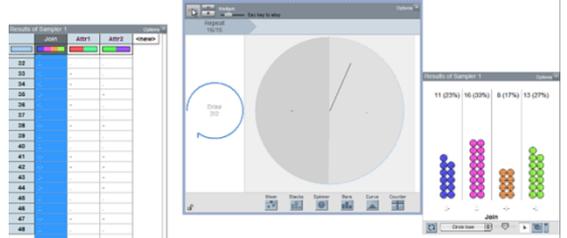
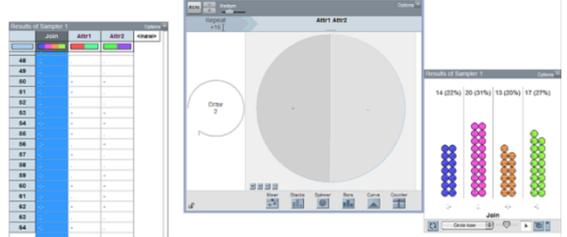
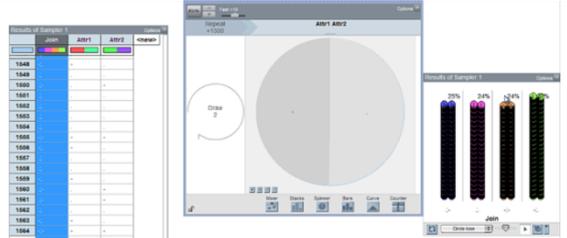
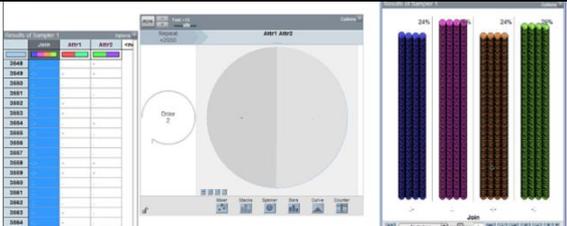
A obtenção de amostras maiores, a partir do acúmulo dos resultados, possibilitou que os estudantes fizessem comparações dos resultados obtidos da experimentação no ambiente físico com aqueles realizados com o *Sampler*. A subseção 6.2.4 tratará dessas comparações. No entanto, antes, descrevemos na subseção 6.2.3, a trajetória de simulações com diferentes amostras realizadas por cada dupla, apresentando as representações geradas.

### 6.2.3 Simulações com diferentes amostras

Além da simulação com 5 e 16 repetições, no caso de Luiz e Helen, e de 5 e 20 repetições em se tratando de Helena e Lucas, conforme descrito nas subseções anteriores, as duplas realizaram simulações com diferentes tamanhos das amostras.

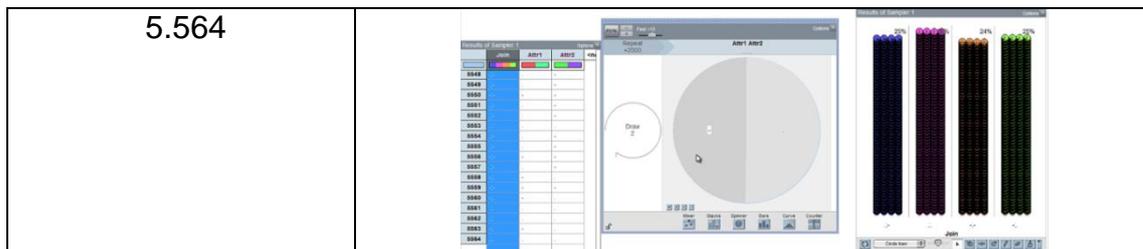
Luiz e Helen realizaram simulação com amostras de 32, 48, 64, 1.564, 3.564 e 5.564. Essas simulações foram realizadas pelo acréscimo das repetições dos valores das amostras anteriores. O Quadro 16 mostra as representações geradas dessas simulações.

**Quadro 16 - Representações geradas das simulações de Luiz e Helen no *Sampler* com diferentes tamanhos de amostras**

Tamanho da amostra	Representações
32	
48	
64	
1.564	
3.564	

CONTINUA...

CONTINUAÇÃO...



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Após a última representação resultante da simulação com amostra de 5.564 repetições, a dupla retornou ao tamanho da amostra com 16 repetições e a partir daí zerou os resultados e inseriu amostras com tamanhos maiores que os anteriores, gerando outras representações conforme mostra o Quadro 17.

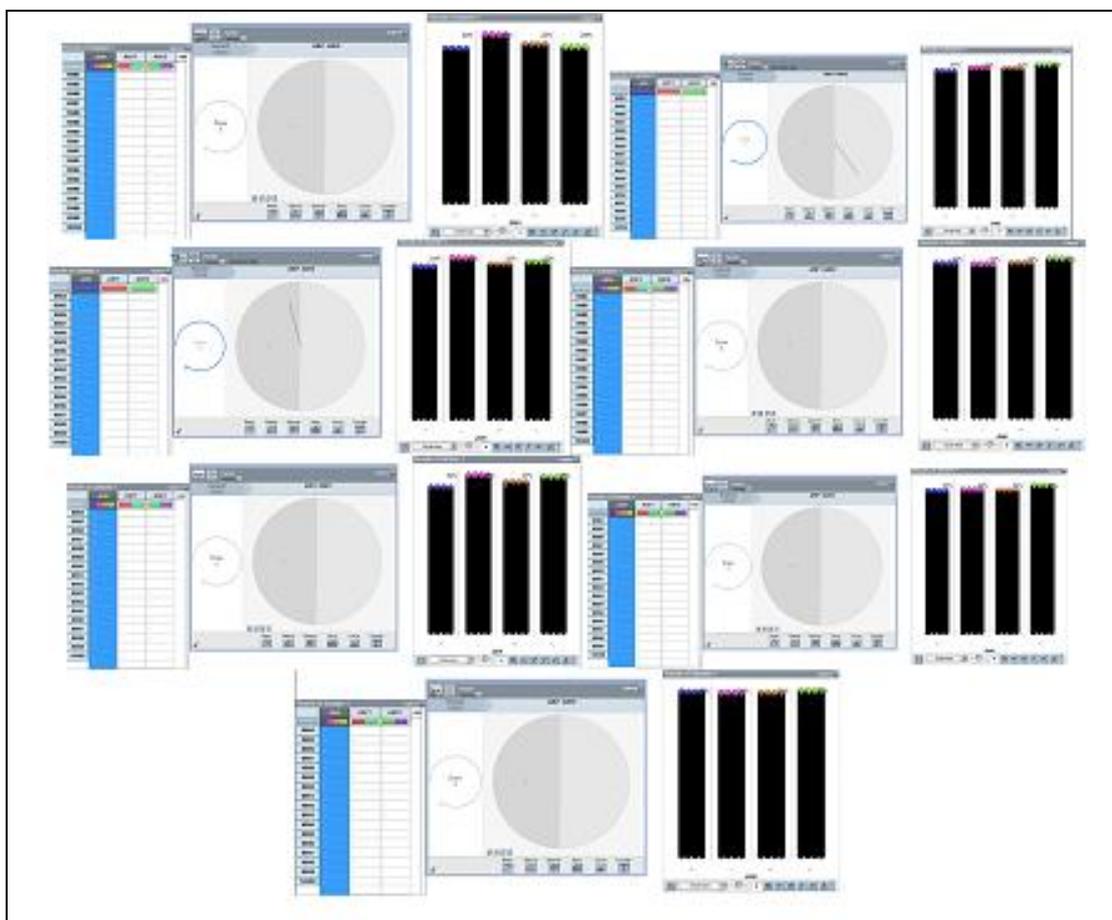
**Quadro 17 - Novas representações geradas das simulações de Luiz e Helen no *Sampler* com tamanhos de amostras maiores**

Tamanho da amostra	Representações
6.000	
8.000	
10.000	

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

A dupla, Luiz e Helen, repetiu a simulação com 10.000 por mais sete vezes, gerando em cada simulação diferente representação, conforme nos mostra a Figura 25.

**Figura 25 – Representações obtidas por Luiz e Helen em sete simulações com amostra de 10.000**

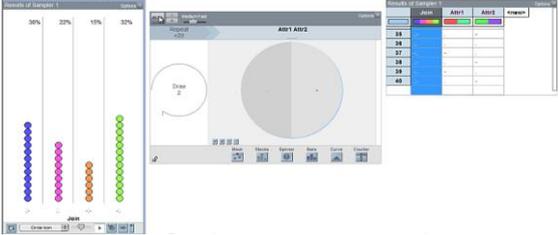
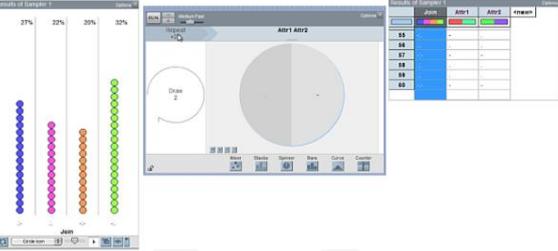
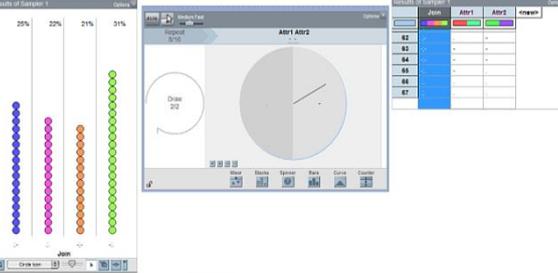


Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

O intuito da dupla foi verificar se os dados tendiam a se igualar no gráfico, conforme aspecto destacado pelo pesquisador em diálogos iniciais quando lhes chamava a atenção sobre a probabilidade teórica.

Helena e Lucas realizaram simulação com amostra de 40, 60 e 67. Os resultados dessas simulações foram acrescentados, sem zerar o processo, semelhante àquela atividade realizada pela dupla Luiz e Helen. O Quadro 18 mostra as representações geradas dessas simulações.

**Quadro 18 - Representações geradas das simulações de Helena e Lucas no *Sampler* com diferentes tamanhos de amostras**

Tamanho da amostra	Representações
40	
60	
67	

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

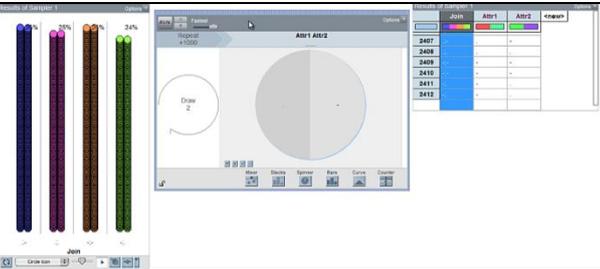
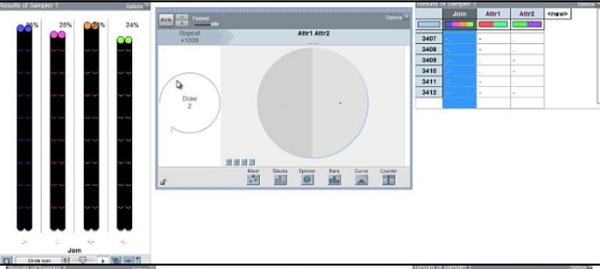
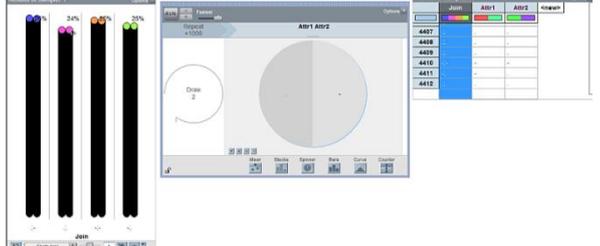
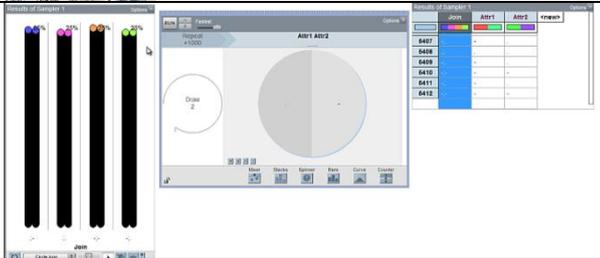
Após essas simulações com tamanhos crescentes das amostras, embora situados abaixo de 100, a dupla Helena e Lucas, zeram os resultados da última simulação e retornam à quantidade de 16 repetições. Em seguida, iniciam novas simulações utilizando a mesma estratégia de acrescentar o tamanho das amostras a cada simulação. O Quadro 19 mostra as representações geradas dessas simulações.

**Quadro 19 - Representações geradas das simulações de Helena e Lucas no *Sampler* com diferentes tamanhos de amostras com outros valores**

Tamanho das amostras	Representações
32	
132	
332	
692	
1.052	
1.412	

CONTINUA...

CONTINUAÇÃO...

Tamanho das amostras	Representações
2.412	
3.412	
4.412	
5.412	

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa utilizando o software *TinkerPlots 2.0* (2012)

Assim como a dupla Luiz e Helen, a dupla composta por Helena e Lucas também aumentou o tamanho da amostra para verificar se os casos combinados (Join) se diferenciavam ou se mantinham com a tendência a igualar em 25%, 25%, 25% e 25% para cada combinação.

Essas simulações com tamanhos grandes de amostras foram realizadas pelas duplas pelo acréscimo aleatório do número de casos e em algumas ocasiões foram permeadas por interações específicas do pesquisador com o objetivo de levá-los a pensar sobre as ideias de probabilidade teórica e aquela advinda dos experimentos, tanto situado ao nível do ambiente físico mediado pelas fichas como

das simulações com o *Sampler*. Algumas dessas passagens encontram-se discutidas na próxima subseção (6.2.4).

#### 6.2.4 Comparando resultados das experimentações com as fichas e com o *Sampler*

Ao longo das simulações, o pesquisador estimulou as duplas a refletirem sobre a probabilidade teórica e aquela advinda da simulação da experimentação no ambiente físico e obtida com o *Sampler*.

Antes de iniciarem a execução da simulação do experimento com 16 repetições para a obtenção de uma amostra menor, Luiz e Helen, por exemplo, se expressaram quanto à probabilidade teórica.

Pesquisador: Quais as chances que vocês acham que iriam ter separado? (referindo-se aos eventos simples traço e ponto).

Luiz: 50% por cento.

Pesquisador: E juntos?

Luiz: Como assim juntos?

Pesquisador: Os pares.

Luiz: 25% por cento.

Pesquisador: Por quê?

Luiz: Por que são quatro.

Notamos nas expressões de Luiz que o mesmo conseguiu determinar a probabilidade teórica dos eventos simples bem como a probabilidade dos eventos combinados para o experimento proposto.

Após a realização de simulação com tamanho da amostra de 16, igual ao do experimento realizado com as fichas no ambiente físico, o pesquisador retoma com essa dupla alguns aspectos concernentes à probabilidade teórica.

Pesquisador: E aí, confirmou o que você disse que iria acontecer para cada combinação?

Luiz: Não se confirmou agora porque tem poucos números, mas se eu botar mais vai.

Conforme observamos no diálogo, Luiz acredita que se continuar a repetir o experimento aumentando o tamanho da amostra, poderia chegar à sua conclusão

anterior de que os resultados combinados ficariam situados em 25%, 25%, 25% e 25%; referindo-se de forma implícita à probabilidade teórica. É importante destacar que Luiz foi o único estudante, dentre os demais participantes, que se referiu ao tamanho da amostra logo no início dos trabalhos com o *Sampler*.

Nesse momento, o pesquisador solicita a dupla que dobrem a quantidade de repetições, estimulando os estudantes a aumentar o tamanho da amostra e também que comparassem o resultado obtido no gráfico com aquele gráfico oriundo da experimentação no ambiente físico.

Pesquisador: Vamos lá. Se ficar do jeito que está aí zera. Como é que faz para ir acrescentando aos resultados que já tem?

Luiz: É só clicar nele e botar mais (referindo-se a quantidade de repetições).

Pesquisador: O que vocês estão observando?

Helen: Tá crescendo (referindo-se as colunas do Gráfico).

Observamos que de posse dos resultados da experimentação com as fichas no ambiente físico, a dupla observa o comportamento do gráfico e a tendência ao crescimento. Contudo, não fazem alusão ao gráfico do experimento físico, aparentando não estarem compreendendo esse aspecto solicitado pelo pesquisador. Helen especifica essa dificuldade no extrato de fala que segue.

Helen: Eu não sei. Mas tem a possibilidade de ficar tudo igual?

Pesquisador: O que é que você acha?

Helen: Não sei. Porque é aleatório. Pode dar qualquer coisa.

Pesquisador: Diminua a quantidade para ver. Refaça com o mesmo valor (16) que você realizou com as fichas.

Ao final das simulações, Luiz e Helen foram solicitados novamente a compararem os resultados obtidos no *Sampler* com aqueles resultados advindos da experimentação no ambiente físico (ver extrato de fala).

Pesquisador: Se compararem o Gráfico de vocês com o gerado pelo *software* o que vocês podem me dizer?

Helen: Não aconteceu o mesmo resultado.

Pesquisador: Porque acha isso?

Helen: Porqueeeeeeee, é, é aleatório. Pode sair um resultado do da gente. Quantas vezes a gente for tirar vai sair um resultado diferente.

Luiz: Isso mesmo, porque quando a gente roda dezesseis vezes aqui, deu esse resultado, se agente for rodar de novo vai dar outro resultado.

Pesquisador: Vamos ver (simulam de novo com mesma quantidade de repetições 16). Está parecendo com o que vocês realizaram aqui no papel?

Luiz: Está o jeito que ele tá sendo realizado, não o resultado, mas o jeito tá.

Helen: Bem diferente.

Segundo podemos observar Luiz e Helen, ao compararem os Gráficos dos resultados da experimentação do ambiente físico com o virtual, percebem que os resultados serão sempre diferentes, mesmo se repetidos nas mesmas condições, devido ao fato de serem aleatórios.

Na sequência, o pesquisador, visando identificar se Luiz e Helen estabeleceriam alguma relação entre probabilidade Teórica e a Frequentista, sugere a dupla que aumente o número de repetições e simulem novamente o experimento como pode ser visto no extrato de fala a seguir.

Pesquisador: Vamos aumentar.

Luiz: O número?

Pesquisador: Dobrem aí. Lembram-se das opções? ( rerefe-se a ir zerando todos os resultados da Tabela ou ir acrescentando) Como é que você preferem?

Helen: Acrescentar.

Pesquisador: Como é que faz para acrescentar aos resultados que já tem aí. Luiz mexe um pouco aí.

Podemos notar que o pesquisador estimula a dupla a configurar a ferramenta para produzir uma amostra maior. Estimula-os, também a lembrarem da possibilidade de manterem os casos a cada execução da simulação do experimento.

À medida que a amostra era aumentada o pesquisador retomava a probabilidade teórica como pode ser visto no extrato de fala a seguir.

Pesquisador: Está de acordo com que estimaram a princípio?

Luiz: Sim.

Pesquisador: O mesmo que vocês esperavam antes de realizar ele?

Helen: (Balança a cabeça para um lado e outro).

Pesquisador: Se aproxima se distancia.

Pesquisador: Nesse Gráfico aqui, se você fosse determinar a probabilidade de cada par (refere-se ao gráfico do papel).

Luiz: 25% pra cada par, a possibilidade.

Conforme observamos, Luiz, mesmo que de forma ainda discreta e implícita, parece compreender que há uma relação entre a probabilidade teórica e a advinda do experimento. Já Helen demonstra acreditar que há um grau de incerteza, talvez por estar comparando com uma pequena amostra, o que resulta em um distanciamento da Probabilidade teórica.

À medida que as amostras ficavam maiores, Luiz e Helen expressavam com mais clareza suas compreensões sobre a probabilidade teórica e a experimental e suas relações. Podemos observar isso no extrato de fala a seguir.

Pesquisador: Mas vamos aumentar, para ver se confirma aquela sua hipótese.

Luiz: Quanto mais, vão se igualando aos 25% (vinte e cinco por cento)

Luiz: É porque ele, como a gente esperava. Ele com um resultado pequeno ele vai sempre dar um pouco diferente, mas se nós aumentarmos bem mais o resultado, ele vai dar o que tava esperado.

Pesquisador: Vamos, aumenta aí pra ver se acontece o que vocês esperavam. E aí Helen que é que você acha?

Helen: Eu acho que pode se aproximar, mais igual, igual, 25, 25 25 e 25 não.

Luiz: Já deu quase a mesma coisa. Tá vendo? Como eu disse daí, quanto mais acrescenta, mais ele vai chegando próximo, vai chegando próximo.

Helen: Tá vendo já muda agente nunca vai chegar ao mesmo valor.

Luiz: Aí, deu 25%, 25%, 25% e 25%.

Helen: Como pode?

Luiz: Deu 100%. Olhe aí, deu 25%, 25%, 25% e 25%.

Helen: Eu sei que 25 vezes 4 dá 100. Mas se foi um giro aleatório, como chegou a esse resultado? 25, 25, 25 e 25. Se a gente fosse girar com a mão nunca ia dar um valor certo.

Pesquisador: A quantidade influencia.

Helen: Acho que sim.

Segundo o diálogo, percebemos que Luiz, embora não use termos formais, o que não se espera para essa etapa de escolaridade, entende que a frequência acumulada/relativa vai tender à probabilidade teórica. Helen por sua vez indica acreditar que pode haver uma aproximação entre a probabilidade teórica e a experimental, podendo a quantidade de experimentações influenciar, mas não parece acreditar totalmente nessa hipótese.

De modo similar, Helena e Lucas, de posse do Gráfico com os resultados da simulação realizada no ambiente físico, foram solicitados a comparar os resultados da simulação obtidos no ambiente físico e com o *Sampler*. Do mesmo modo, também, a dupla, logo nas primeiras simulações, foi incentivada pelo pesquisador a pensar sobre a probabilidade teórica (ver extrato de fala).

Pesquisador: Vão observando o Gráfico para ver como é que ele se comporta. Vamos aumentar e observem o que acontece Vocês acham que a probabilidade de ocorrer cada par é qual? Qual a probabilidade.

Helena: Não sei! Eu acho um pouco difícil.

Lucas: 25% pra cada um.

Notamos que o pesquisador, preocupou-se em estimular a dupla a atentarem a como o Gráfico se comportava a cada simulação. Podemos observar ainda, que Lucas, sem dificuldade aparente, consegue determinar a chance de cada evento ocorrer. O resgate dessa compreensão se deu com o objetivo de buscar identificar se eles estabeleceriam alguma relação com a probabilidade advinda do experimento à medida que aumentava as repetições para obtenção de uma amostra maior.

Ao realizarem a simulação para obtenção de um tamanho de amostra semelhante à obtida no ambiente físico (16), Helena e Lucas já evidenciam ficar intrigados com os resultados ao compararem e a solicitação de Helena para Lucas aumentar as repetições da simulação do experimento para 200 (ver extrato de fala).

Helena: Pronto, mais dezesseis (+16). Aqui traço e traço foi o menor (papel). Ponto e ponto foi?

Lucas: O maior.

Helena: E traço e ponto, foram os maiores.

Lucas: Aqui traço e ponto está menor.

Helena: Que rolo hein.

Pesquisador: Por que é que vocês acham que acontece isso? E aí, se confirmou a hipótese?

Helena: Não.

Em seguida, Helena sente a necessidade de comparar com uma amostra maior, solicitando a Lucas que realize o aumento das repetições da simulação do experimento (extrato de fala).

Helena: Bota 200. Olha quase, quase, quase. Tá quase. Quase ó. 25, 25, 24, 26. É melhor esperar (referindo-se ao término da simulação).

Helena: 26, 26, 25 e 23. Tá quase lá Lucas. Ó tem que colocar um aqui pra ficar 25, aí pega dois daqui e põe aqui

Pesquisador: o que vocês percebem a medida que vão aumentando a quantidade de repetições?

Helena: às vezes de ficar 25% ou não.

Pesquisador: Bota pra rodar mais um pouquinho.

Helena: 22, aí tira 2 do 27 que tá (durante a simulação com mais 360 repetições) Tava 27 antes. Lucas: Sei lá. Não é uma coisa correta, exata, aí não vai dar o mesmo resultado.

Helena: Tá aproximadamente. Mas não está dando o resultado que agente quer.

Lucas: Exato.

Segundo notamos nas falas, o aumento da amostra possibilita que a dupla comece a perceber a proximidade da probabilidade teórica. Isso fica ainda mais claro quando simulam o experimento para obtenção de uma amostra a partir de 2412 repetições (Extrato de fala).

Pesquisador: O que vocês observam? Que conclusão vocês podem tirar?

Lucas: Que quanto mais vezes fizerem mais...

Helena: Quanto mais vezes a gente repetir, mais a probabilidade de dar 25% é maior.

Podemos notar que a dupla destaca, de maneira adequada, a relação existente entre a probabilidade experimental e a teórica em se tratando da obtenção de uma amostra maior. Destacam que na realização da simulação do experimento com repetições maiores a tendência é haver uma aproximação entre ambas. Essa

compreensão fica consolidada quando realizam a última simulação com obtenção de uma amostra de 5412 repetições como se observa no diálogo a seguir.

Lucas: Aê, agora. Pronto.

Helena: 25, 25, 25 e 25.

Lucas: Tá todos 25.

Lucas: Aê, agora. Pronto.

Helena: 25, 25, 25 e 25.

Lucas: Tá todos 25.

Conforme observamos, a dupla enfatiza a obtenção de um resultado igual ao calculado a partir da probabilidade teórica e nessa ocasião apresentam certo entusiasmo.

De um modo geral, durante o processo de simulação as duplas apresentaram reflexões envolvendo o conceito de aleatoriedade, tamanho da amostra e puderam se envolver em discussões envolvendo a relação entre probabilidade teórica e frequentista. Essas reflexões foram ancoradas a partir do uso de linguagem própria e que foi sendo refinada ao longo dos processos de familiarização e simulação com o *TinkerPlots* e mediadas pelas intervenções do pesquisador.

Destaca-se, que embora não se tenha a garantia de que os estudantes estivessem conscientes de terem abordado aspectos do conceito de probabilidade eles tiveram a oportunidade de discutir essas ideias a partir de simulações e de discussões estimuladas pelo pesquisador. Nossa hipótese então é que a lógica das situações postas pelo pesquisador mediadas pelas simulações com o *software* contribuiu para a emergência de discussões sobre probabilidade que talvez não fosse possível de acontecer em uma aula comum sem o uso desse programa.

## 7 RESULTADOS DO TESTE FINAL

Neste Capítulo apresentamos os dados oriundos do teste diagnóstico que foi aplicado ao final da coleta de dados, após dez dias da realização da simulação com o *TinkerPlots*. O objetivo da aplicação novamente desse teste foi verificar se haveriam mudanças nas respostas dos estudantes após eles realizarem as atividades de familiarização e simulação com o *Sampler*.

Conforme descrito na metodologia, neste teste os estudantes responderam três questões de concepção e os problemas envolvendo o experimento não realizado (itens a e b) e os onze itens (a-k) relativos ao experimento no ambiente físico. Além disso, realizaram novamente o experimento no ambiente físico, registrando os resultados no quadro e no gráfico, individualmente e em duplas.

### 7.1 Concepções iniciais e finais dos estudantes sobre conceitos de probabilidade

O Quadro 20 apresenta as concepções iniciais dos sobre probabilidade e sobre experimento aleatório no teste diagnóstico aplicado no início da coleta de dados e no mesmo teste aplicado dez dias após o término do processo de simulação com o *Sampler*.

**Quadro 20 - Resultados das concepções dos estudantes antes e depois da simulação com o *Sampler***

Problemas	Respostas dos	
1. Explique com suas palavras o que você entende por probabilidade. Dê um exemplo.	I	“Probabilidade é quando aconte-se varias coisas que corresponde dissendo que vai acontecer” (Luiz).
	F	“É quando pode cair qualquer opção de forma aleatória. Ex: cara ou coroa tem 50% de cair qualquer uma das duas” (Luiz)
	I	“A probabilidade pra mim são porcentagens e medidas, tanto positiva como negativa. Ex: a probabilidade de votos entre Dilma e Aécio”. (Helen).
	F	“Probabilidade é usada para medir a porcentagem das coisas. Exemplo: Pode ser usado num Gráfico escolar, mostrando a porcentagem de estudantes com notas baixas e notas altas (Helen).”
	I	“Probabilidade seria que por um acaso algo não pudesse funcionar ou acontecer. Exemplo: Mariana quer ir ao show mais seus pais não possuem tanto dinheiro, porém eles podem pedir um emprestimo ao banco. Com isso Mariana tem uma probabilidade de ir ao show” (Helena).
	F	“Probabilidade seria, no determinado momento que você faz repetidas vezes o mesmo experimento, tem mais possibilidades de dar o mesmo resultado(Helena).”
	I	“Eu acho que a probabilidade é o estudo da matemática com lógica” (Lucas).
	F	“É uma forma de notificar um possível resultado (Lucas).”

CONTINUA...

## CONTINUAÇÃO...

2. Em que situações usamos a probabilidade?	I	"Em gráficos, pesquisas sobre números das eleições" (Luiz).
	F	<b>"sorteios, gráficos (Luiz)."</b>
	I	"Numa situação de vendas, cálculos ou comparações de algo" (Helen).
	F	<b>"Numa situação de urgência de uma empresa. Por exemplo; minha empresa está prestes a falir, mas qual a probabilidade de ela falir em um mês? (Helen)"</b>
	I	"Em situações como: em relação a peças de um determinado lote, em relação de espaço ou quantia" (Helena).
	F	<b>"Em situações com, um gráfico em que você pode usa determinados atributos e que você espera depois de um determinado momento obtenha o (mesmo) resultados iguais(Helena)."</b>
	I	"Usamos probabilidade para constatar coisas" (Lucas).
	F	<b>"Usamos a probabilidade para saber um possível resultado de uma coisa(Lucas)."</b>
3. Explique com suas palavras o que você entende por experimento aleatório. Dê um exemplo.	I	"É textos feito com varias pessoas de forma diferente com cada uma" (Luiz).
	F	<b>"Que pode cair qualquer uma das opção de acordo com a probabilidade. Ex: Jogamos a moeda pra cima pode cair qualquer um (Luiz)."</b>
	I	"Entendo pouco de mais, porém o exemplo é: a quantia de água no Brasil está diminuindo cada vez mais a porcentagem que supostamente poderia ser de 100% esta em 78%" (Helen)
	F	<b>"Nos votos por exemplo, mostrando o gráfico de barras de exemplos de votos entre Dilma e Aécio, eles tinha valores diferenciados, mas na margem de erros, a probabilidade de empate era grande (Helen).</b>
	I	"Experimentar algo não identificável, tipo experimento com algum vírus novo (aleatório)" (Helena).
	F	<b>"Experimento aleatório – Em uma sacolinha você ter alguns objetos e ter que experimentá-los de forma aleatória (Helena).."</b>
	I	"Eu entendo que são experimentos avulsos. Exemplo: faz uma coisa, depois outra diferente e assim vai..." (Lucas).
	F	<b>"São experimentos avulsos, onde ninguém sabe qual será o resultado(Lucas)."</b>

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme observamos no Quadro 20, Luiz, que antes associava a probabilidade à previsão refere-se no Teste Final, à probabilidade a partir de um experimento aleatório, cujos resultados são obtidos de forma aleatória e exemplifica com o lançamento de uma moeda. No que concerne aos usos da probabilidade, o estudante, a principio, exemplificou, de modo adequado, as eleições, associando seus resultados a um gráfico. Percebemos que o estudante ainda se mantém apegado à associação com representações gráficas, havendo uma discreta ampliação de sua compreensão evidenciada pelo exemplo dos usos da probabilidade nos sorteios. Luiz concebeu, em principio como experimento aleatório, testes realizados com grupos a partir de suas distribuições. No teste final sua

abordagem é ampliada para incluir a ideia de probabilidade associada à situação de lançamento de uma moeda.

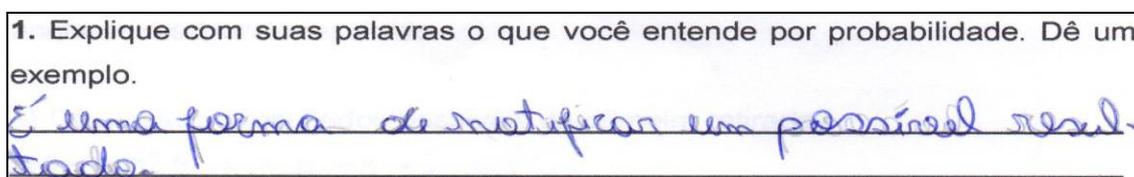
Helen, inicialmente, recorreu a outros conhecimentos matemáticos (forma de atribuir à probabilidade) para explicitar sua compreensão sobre probabilidade e exemplificou corretamente quando mencionou um fenômeno de opinião pública (votação). No Teste Final, destaca que “a probabilidade é usada para medir porcentagens”. Possivelmente, mesmo que de forma implícita, conjecturamos que talvez ela tenha se referido à constatação da probabilidade teórica a partir da estabilização das frequências. O exemplo inicial que Helen oferece sobre situação de uso da probabilidade envolve alusões a “situação de vendas, cálculos ou comparações de algo”. No Teste Final, a nossa hipótese é que Helen tenha feito alusão a chance, mesmo que essa ideia ainda não tenha sido explicitada. Seu conhecimento inicial a respeito do que seja um experimento aleatório envolveu a utilização do exemplo da chuva (fenômeno físico) que é aleatório, sendo, portanto, adequado. No entanto, no Teste Final, Helen introduz mesmo que intuitivamente a ideia de chance e incerteza ao se referir aos resultados da eleição a Presidente do Brasil.

Helena, por sua vez, apresentou, inicialmente, seu entendimento sobre probabilidade de forma sutil associando-a a ideia de “chance” (“algo não pudesse funcionar ou acontecer”). Sua abordagem passou a englobar a relação da probabilidade frequentista à teórica, destacando a possibilidade de igualdade entre ambas a partir de um aumento da amostra. No que se refere aos usos da probabilidade, à estudante, fez referência inicialmente à questão quatro do Teste Diagnóstico (experimento aleatório sobre peças com defeito). Possivelmente entenda que o uso da probabilidade sirva para um fenômeno econômico. Já no Teste Final, Helena não menciona de forma explícita situações onde se usa a probabilidade. No entanto, a estudante faz referência a aspectos da realização da simulação do experimento realizado com o *Sampler*, menciona uma forma de representação dos resultados, o “gráfico..., atributos...”, e que se “espera que depois de um determinado momento obtenha resultados iguais”. É provável que tenha se referido a situações de sorteios. Essas evidências reforçam nossa análise da questão um, de que a estudante reflete algum entendimento, embora não seja capaz de se expressar adequadamente por ainda não possuir elementos suficientes para tal. Inicialmente, Helena expressa seu entendimento sobre experimento aleatório,

parecendo refletir certo grau de entendimento acerca da questão da aleatoriedade, ou seja, a influência do acaso. No teste Final, a estudante reflete uma compreensão mais elaborada sobre o aspecto da aleatoriedade em um experimento, associando-a corretamente ao exemplo de uma sacola com objetos (“uma sacolinha”..., “alguns objetos e ter de experimentá-los de forma aleatória”).

Lucas, primeiro associou a probabilidade de modo amplo e genérico ao estudo da matemática com lógica, associando tais significados. Após trabalhos de simulação com o *Sampler*, o estudante especifica mais a sua perspectiva de probabilidade (ver Figura 25).

**Figura 25 - Conhecimento de Lucas sobre probabilidade após Teste Final**



Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Segundo observamos, a resposta de Lucas ao Teste Final sugere que para ele a probabilidade talvez envolva a quantificação de chance, embora ele não use termos formais. Lucas, inicialmente, situou o uso da probabilidade como meio de “constatar coisas”, associando esse entendimento, possivelmente fazendo referência à previsão e verificação de algo. De certo modo, sua compreensão sobre os usos da probabilidade foi estendida, embora não exemplifique. O estudante passa a integrar, ainda que de forma subentendida a referência à chance quando se refere a um “possível resultado”. Ao descrever sua compreensão sobre experimento aleatório, Lucas, primeiramente estabelece a relação com “experimentos avulsos” e tentou exemplificar, de forma não explícita, dizendo “faz uma coisa, depois outra diferente.” A partir de suas expressões, levantamos a possibilidade do estudante englobar a noção de independência. Seu conhecimento sobre experimento aleatório no Teste final ainda continua associado com a ideia de “experimentos avulsos”, embora ao dizer “ninguém sabe o resultado”, possivelmente de modo subentendido esteja presente o caráter aleatório de um experimento.

Essa análise comparativa das respostas dos estudantes (Teste diagnóstico Inicial e Final), após o término do processo de simulação com o *Sampler*, permite-

nos conjecturar que suas concepções sobre probabilidade, exprimem certo grau de clareza, embora eles não tenham usado termos formais e nem se esperava que isso ocorresse por tratar-se de estudantes do 9º ano.

Ainda que de forma implícita, seus conhecimentos sobre probabilidade foram ampliados. Podemos inferir, por exemplo, que se fizeram presentes em suas expressões, ainda que de modo subentendido e intuitivo, conceitos como: chance, aleatório (acaso), independência. Observamos também indícios de que os estudantes passaram a ampliar, ainda que de forma sutil, seus conhecimentos sobre probabilidade frequentista como tendência da teórica a partir da estabilização das freqüências.

Na seção 7.2 apresentamos uma análise comparativa das respostas dos estudantes ao experimento não realizado no Teste diagnóstico Inicial e Final.

## **7.2 Desempenho dos estudantes antes e depois no experimento não realizado**

Na resolução inicial dos itens a-b dessa questão, conforme discutido no capítulo 5 (seção 5.2, p. 66), os estudantes não os acertaram embora suas respostas tenham sido consideradas adequadas aos problemas postos.

No teste final realizado individualmente, Helen e Lucas mantiveram as mesmas respostas dadas inicialmente: 1% e 99%; 10% e 90%, respectivamente (ver Figura 26).

**Figura 26 - Respostas de Helen e de Lucas, respectivamente, ao tentarem quantificar a probabilidade teórica no Teste final**

<p>4. Uma pesquisa sobre peças com defeito foi realizada em uma fábrica de canetas. Em um lote de 600 peças, constatou-se que 30 estavam com defeito.</p> <p>a) Sendo retirada uma peça desse lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha defeito?  <u>1%</u></p> <p>b) Sendo retirada uma peça do lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela não tenha defeito?  <u>99%</u></p>
<p>4. Uma pesquisa sobre peças com defeito foi realizada em uma fábrica de canetas. Em um lote de 600 peças, constatou-se que 30 estavam com defeito.</p> <p>a) Sendo retirada uma peça desse lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha defeito?  <u>10%</u></p> <p>b) Sendo retirada uma peça do lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela não tenha defeito?  <u>90%</u></p>

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme observamos, Helen e Lucas continuam, portanto, reconhecendo diferenças nas probabilidades. No entanto, não conseguem quantificar corretamente.

Helena, por sua vez, tenta quantificar a probabilidade, estabelecendo relações quantitativas entre as variáveis do problema (Figura 27).

**Figura 27 - Quantificação da probabilidade realizada por Helena na 4ª questão do teste final**

<p>4. Uma pesquisa sobre peças com defeito foi realizada em uma fábrica de canetas. Em um lote de 600 peças, constatou-se que 30 estavam com defeito.</p> <p>a) Sendo retirada uma peça desse lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha defeito?  <u>Tinha uma probabilidade de 5%.</u></p> <p>b) Sendo retirada uma peça do lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela não tenha defeito?  <u>Tinha uma probabilidade de 95%.</u></p>	$\begin{array}{r} 600 \\ - 30 \\ \hline 570 \end{array}$ <p>1 → 600 peças → 1 - 570 = 30</p>
	$\begin{array}{r} 100 \\ - 5 \\ \hline 95 \end{array}$

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme podemos observar, Helena subtrai o número de peças defeituosas (casos favoráveis) do número total de peças (casos possíveis) e tenta descobrir a probabilidade, guiada pela intenção de identificar a proporção de uma peça com e sem defeito.

Essa abordagem de Helena vai além da análise das variáveis do problema que ela apresentou no teste inicial, configurando-se em uma resposta sofisticada e que envolveu a necessidade de quantificar a probabilidade.

A abordagem de Luiz aos itens dessa questão envolveu a quantificação das probabilidades teóricas de forma exata; sendo suas respostas 5% e 95%. Ele realizou um cálculo no caderno de respostas (Figura 28).

**Figura 28 - Cálculo da probabilidade realizado por Luiz na 4ª questão do teste final**

The image shows four stages of a handwritten calculation in blue ink. The first stage shows the fraction  $\frac{600}{300}$  with a horizontal line above the 600 and a '6' written to the right of the denominator. The second stage shows the simplified fraction  $\frac{30}{5}$  with a horizontal line above the 30 and a '6' written to the right of the denominator. The third stage shows the fraction  $\frac{600}{(000)300}$  with a horizontal line above the 600 and a '6' written to the right of the denominator. The fourth stage shows the fraction  $\frac{30}{(00)5}$  with a horizontal line above the 30 and a '6' written to the right of the denominator. Below these fractions, the numbers '300' and '5' are written, followed by the percentages '95%' and '5%'. A final calculation shows  $\frac{300}{-5}$  with a horizontal line above the 300, resulting in '(95%)' and '(5)%'.

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Observa-se que a estratégia de cálculo de Luiz envolveu uma simplificação do número total de casos favoráveis e possíveis de peças, passando a trabalhar com esse quantitativo e chegando a quantificação exata das probabilidades.

Na seção 7.3 apresentaremos uma análise comparativa, do Teste diagnóstico Inicial e Final das respostas dos estudantes antes e depois de serem submetidos a processo de execução do experimento aleatório.

### 7.3 Desempenho dos estudantes antes e depois quanto a realização do experimento aleatório

Nessa etapa, os estudantes receberam novamente a questão 5 (itens de a-k), iguais as do Teste Inicial, que buscou identificar seus sobre a probabilidade teórica.

A análise do desempenho dos estudantes se deu a partir das categorias elencadas e descritas na seção 5.3.

No Quadro 21 apresentamos análise das respostas dos estudantes em função das categorias elencadas e já descritas.

**Quadro 21 - Distribuição das respostas individuais dos estudantes aos itens da questão 5 em função das categorias de respostas após a experimentação**

Itens da questão 5	Categorias de respostas dos			
	Luiz	Helen	Helena	Lucas
a) Quais são os resultados possíveis da primeira retirada?	1	1	1	2
b) Quais são os resultados possíveis da segunda retirada?	1	1	1	2
c) Quantos são os pares possíveis das duas retiradas?	1	1	0	1
d) Quantos são os pares possíveis de retirar dois pontos (•; •)?	1	2	0	1
e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (•; •)?	1	1	0	1
f) Quantos são os pares favoráveis de retirar um traço e um ponto nesta ordem (-; •)?	1	1	0	1
g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; •)?	1	1	0	1
h) Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (-;-)?	1	1	0	1
i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-; -)?	1	1	0	1
j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (•; -)?	0	0	0	0
k) Qual a probabilidade de se retirar um ponto e um traço (•; -)?	0	0	0	0
Total de acertos	9	8	2	9

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Podemos notar, no Quadro 21, que Luiz, Helen e Lucas que no Teste Inicial acertaram 5, 5 e 3 dos 11 itens, respectivamente, aumentaram esse índice de acertos para 9, 8 e 9.

Um aspecto que enfatizamos quanto à probabilidade teórica, é que Luiz, Helen e Lucas evidenciaram um conhecimento mais ampliado após o processo de familiarização e simulação do experimento. Os três estudantes conseguiram determinar a quantidade de elementos do espaço amostral dos eventos simples, combinados e suas respectivas probabilidades, mesmo quando imposto uma condição.

Lucas que a princípio não havia respondido corretamente os itens **c-e-i**, passou a acertá-los no Teste Final. Isso evidencia que passou a compreender que o espaço amostral do experimento proposto e simulado é constituído de quatro elementos combinados, o que independe da ordem e desigualdade dos símbolos. Luiz, Helen e Lucas mantiveram respostas incorretas aos itens **j e k**, evidenciando não compreenderem que não foi imposta nenhuma condição (a ordem da combinação dos elementos), levando-os a desconsiderarem um evento do espaço amostral.

Helena, por sua vez, mantém a mesma quantidade de acertos, dois, os itens **d e h**. Após o processo de simulação os itens que foram acertados foram **a e b**. Helena determina apenas a quantidade de elementos do espaço amostral dos eventos simples, sem combinar. Embora com poucos acertos, as estratégias de Helena para responder a esses itens evidenciou um nível de sofisticação, pois aparentemente ela recorre àquelas 20 repetições (determinadas inicialmente pela dupla) na simulação com o *Sampler*. A estudante estimou a probabilidade teórica a partir da frequência de ocorrência de cada evento. Isso pode ser constatado pelo modo como ela distribuiu as probabilidades, que ao final, totalizaram 100 por cento (Figura 29).

**Figura 29 - Estratégia de Helena para estimar probabilidades no Teste Final**

*20 repetidas*

d) Quantos são os resultados possíveis de retirar dois pontos (\*; \*)?  
*provavelmente seria de 7 retiradas.*

---

e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (\*; \*)?  
*Probabilidade de 37%*

---

f) Quantos são os pares possíveis de retirar um traço e um ponto (-; \*) nesta ordem?  
*6 retiradas.*

---

g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; \*)?  
*35%*

---

h) Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (-; -)?  
*3 retiradas.*

---

i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-; -)?  
*18%*

---

j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (\*; -)?  
*4 retiradas.*

---

k) Qual a probabilidade de se retirar ponto e traço (\*; -)?  
*15%*

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme podemos observar na Figura 29, Helena faz um registro escrito de “20 retiradas” que é o mesmo número de repetições da primeira execução da simulação do experimento com o *Sampler* que totalizam 20 pares. Notamos que na distribuição que a estudante faz para os quatro eventos do espaço amostral (quatro pares), 7, 6, 3 e 4, respectivamente, o total é 20. A sua estratégia inicial esteve relacionada com o parâmetro de uso de sacos e que aparentemente não considerava a reposição. Embora Helena erre as questões do ponto de vista conceitual, seu conhecimento se amplia para a tentativa de estimar as probabilidades de cada evento a partir dessa distribuição, totalizando 100% (37%, 35%, 13% e 15%).

Após terem voltado a responder os itens de a-k referentes a questão 5, cujos resultados foram apresentados no Quadro 21, os quatro realizaram novamente a experimentação no ambiente físico com as fichas. Os resultados da realização desse experimento são apresentados registrados no Quadro e no Gráfico encontram-se no Quadro 22.

**Quadro 22 - Registros dos quatro estudantes dos resultados individuais e combinados do experimento no ambiente físico**

	Registros	Observações																																																																						
Luiz	<p>Quadro 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Jogadas (Experimento)</th> <th colspan="2">Resultados de cada retirada</th> <th rowspan="2">Resultados (Eventos combinados) Par</th> </tr> <tr> <th>1ª Retirada</th> <th>2ª Retirada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>2º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>3º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>4º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>5º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>—</td></tr> <tr><td>6º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>—</td></tr> <tr><td>7º Experimento</td><td>•</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>8º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>9º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>10º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>11º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>—</td></tr> <tr><td>12º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>13º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>14º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>15º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>16º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> </tbody> </table>	Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par	1ª Retirada	2ª Retirada	1º Experimento	•	•	••	2º Experimento	—	—	—	3º Experimento	•	•	••	4º Experimento	—	—	—	5º Experimento	—	•	—	6º Experimento	—	•	—	7º Experimento	•	—	—	8º Experimento	—	—	—	9º Experimento	•	•	••	10º Experimento	—	—	—	11º Experimento	—	•	—	12º Experimento	—	—	—	13º Experimento	—	—	—	14º Experimento	•	•	••	15º Experimento	•	•	••	16º Experimento	—	—	—	Faz os registros sem dificuldades; Escala do gráfico não é considerada.
Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par																																																																					
	1ª Retirada	2ª Retirada																																																																						
1º Experimento	•	•	••																																																																					
2º Experimento	—	—	—																																																																					
3º Experimento	•	•	••																																																																					
4º Experimento	—	—	—																																																																					
5º Experimento	—	•	—																																																																					
6º Experimento	—	•	—																																																																					
7º Experimento	•	—	—																																																																					
8º Experimento	—	—	—																																																																					
9º Experimento	•	•	••																																																																					
10º Experimento	—	—	—																																																																					
11º Experimento	—	•	—																																																																					
12º Experimento	—	—	—																																																																					
13º Experimento	—	—	—																																																																					
14º Experimento	•	•	••																																																																					
15º Experimento	•	•	••																																																																					
16º Experimento	—	—	—																																																																					
Helen	<p>Quadro 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Jogadas (Experimento)</th> <th colspan="2">Resultados de cada retirada</th> <th rowspan="2">Resultados (Eventos combinados) Par</th> </tr> <tr> <th>1ª Retirada</th> <th>2ª Retirada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>—</td></tr> <tr><td>2º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>3º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>4º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>5º Experimento</td><td>•</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>6º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>7º Experimento</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr> <tr><td>8º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>—</td></tr> <tr><td>9º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>—</td></tr> <tr><td>10º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>11º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>12º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>13º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>14º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>15º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>16º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> </tbody> </table>	Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par	1ª Retirada	2ª Retirada	1º Experimento	—	•	—	2º Experimento	•	•	••	3º Experimento	•	•	••	4º Experimento	•	•	••	5º Experimento	•	—	—	6º Experimento	—	—	—	7º Experimento	—	—	—	8º Experimento	—	•	—	9º Experimento	—	•	—	10º Experimento	•	•	••	11º Experimento	•	•	••	12º Experimento	•	•	••	13º Experimento	•	•	••	14º Experimento	•	•	••	15º Experimento	•	•	••	16º Experimento	•	•	••	Faz os registros sem dificuldades; Registro do gráfico considera convenções.
Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par																																																																					
	1ª Retirada	2ª Retirada																																																																						
1º Experimento	—	•	—																																																																					
2º Experimento	•	•	••																																																																					
3º Experimento	•	•	••																																																																					
4º Experimento	•	•	••																																																																					
5º Experimento	•	—	—																																																																					
6º Experimento	—	—	—																																																																					
7º Experimento	—	—	—																																																																					
8º Experimento	—	•	—																																																																					
9º Experimento	—	•	—																																																																					
10º Experimento	•	•	••																																																																					
11º Experimento	•	•	••																																																																					
12º Experimento	•	•	••																																																																					
13º Experimento	•	•	••																																																																					
14º Experimento	•	•	••																																																																					
15º Experimento	•	•	••																																																																					
16º Experimento	•	•	••																																																																					
Helena	<p>Quadro 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Jogadas (Experimento)</th> <th colspan="2">Resultados de cada retirada</th> <th rowspan="2">Resultados (Eventos combinados) Par</th> </tr> <tr> <th>1ª Retirada</th> <th>2ª Retirada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1º Experimento</td><td>•</td><td>—</td><td>•</td></tr> <tr><td>2º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>3º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>4º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>5º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>6º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>7º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>8º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>9º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>10º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>11º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>12º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>13º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>14º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>15º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>16º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> </tbody> </table>	Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par	1ª Retirada	2ª Retirada	1º Experimento	•	—	•	2º Experimento	—	•	•	3º Experimento	—	•	•	4º Experimento	—	•	•	5º Experimento	—	•	•	6º Experimento	•	•	••	7º Experimento	—	•	•	8º Experimento	—	•	•	9º Experimento	•	•	••	10º Experimento	•	•	••	11º Experimento	•	•	••	12º Experimento	•	•	••	13º Experimento	—	•	•	14º Experimento	—	•	•	15º Experimento	•	•	••	16º Experimento	•	•	••	Faz os registros sem dificuldades; Registro do gráfico considera convenções.
Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par																																																																					
	1ª Retirada	2ª Retirada																																																																						
1º Experimento	•	—	•																																																																					
2º Experimento	—	•	•																																																																					
3º Experimento	—	•	•																																																																					
4º Experimento	—	•	•																																																																					
5º Experimento	—	•	•																																																																					
6º Experimento	•	•	••																																																																					
7º Experimento	—	•	•																																																																					
8º Experimento	—	•	•																																																																					
9º Experimento	•	•	••																																																																					
10º Experimento	•	•	••																																																																					
11º Experimento	•	•	••																																																																					
12º Experimento	•	•	••																																																																					
13º Experimento	—	•	•																																																																					
14º Experimento	—	•	•																																																																					
15º Experimento	•	•	••																																																																					
16º Experimento	•	•	••																																																																					
Lucas	<p>Quadro 1</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Jogadas (Experimento)</th> <th colspan="2">Resultados de cada retirada</th> <th rowspan="2">Resultados (Eventos combinados) Par</th> </tr> <tr> <th>1ª Retirada</th> <th>2ª Retirada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1º Experimento</td><td>•</td><td>—</td><td>•</td></tr> <tr><td>2º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>3º Experimento</td><td>•</td><td>—</td><td>•</td></tr> <tr><td>4º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>5º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>6º Experimento</td><td>•</td><td>—</td><td>•</td></tr> <tr><td>7º Experimento</td><td>•</td><td>—</td><td>•</td></tr> <tr><td>8º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>9º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>10º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>11º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>12º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>13º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>14º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> <tr><td>15º Experimento</td><td>•</td><td>•</td><td>••</td></tr> <tr><td>16º Experimento</td><td>—</td><td>•</td><td>•</td></tr> </tbody> </table>	Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par	1ª Retirada	2ª Retirada	1º Experimento	•	—	•	2º Experimento	—	•	•	3º Experimento	•	—	•	4º Experimento	—	•	•	5º Experimento	—	•	•	6º Experimento	•	—	•	7º Experimento	•	—	•	8º Experimento	—	•	•	9º Experimento	•	•	••	10º Experimento	•	•	••	11º Experimento	—	•	•	12º Experimento	—	•	•	13º Experimento	—	•	•	14º Experimento	—	•	•	15º Experimento	•	•	••	16º Experimento	—	•	•	Faz os registros sem dificuldades; Registro do gráfico considera convenções.
Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par																																																																					
	1ª Retirada	2ª Retirada																																																																						
1º Experimento	•	—	•																																																																					
2º Experimento	—	•	•																																																																					
3º Experimento	•	—	•																																																																					
4º Experimento	—	•	•																																																																					
5º Experimento	—	•	•																																																																					
6º Experimento	•	—	•																																																																					
7º Experimento	•	—	•																																																																					
8º Experimento	—	•	•																																																																					
9º Experimento	•	•	••																																																																					
10º Experimento	•	•	••																																																																					
11º Experimento	—	•	•																																																																					
12º Experimento	—	•	•																																																																					
13º Experimento	—	•	•																																																																					
14º Experimento	—	•	•																																																																					
15º Experimento	•	•	••																																																																					
16º Experimento	—	•	•																																																																					

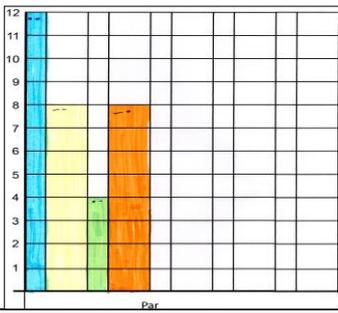
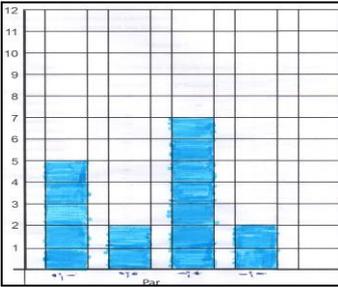
Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme observamos, os estudantes Luiz e Helena que já apresentavam competência no trabalho com Quadro e Tabela a mantiveram. Contudo, Luiz reproduziu uma ação inicial de não considerar a escala do Gráfico ao registrar os

resultados. Helen e Lucas, que inicialmente tiveram dificuldade em fazer o registro no Gráfico apresentaram no Teste Final o registro de acordo com as convenções.

Similar ao Teste inicial diagnóstico, os estudantes, em dupla, realizaram os registros individuais em um único Gráfico. Esse trabalho de registro das duplas encontra-se no Quadro 23.

**Quadro 23 - Registros no gráfico das duplas**

	Registros	Observações
Luiz e Helen		Escala do gráfico não é considerada.
Helena Lucas		Registro do gráfico considera convenções.

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme observamos, os registros das duplas sugerem ser uma negociação dos registros realizados individualmente. Luiz e Helen, embora tenham feito o registro correto não respeitam a escala do Gráfico, seguindo uma ação já evidenciada por Luiz, seu par. Helena e Lucas não apresentaram dificuldades aparentes, fazendo o registro devidamente, segundo as convenções.

Ainda em duplas, os estudantes voltaram a responder os itens a-k e também os itens l, m, n. A análise das respostas das duplas, de modo similar, foi pautada nas categorias elencadas e já mencionadas. No Quadro 24 a seguir podem ser vistas as distribuições das respostas das duplas a partir dessas categorias.

**Quadro 24 - Respostas das duplas aos itens da questão 5 no Teste Final**

Itens da questão 5	Categorias de respostas dos	
	Luiz e Helen	Helena e Lucas
a) Quais são os resultados possíveis da primeira retirada?	1	1
b) Quais são os resultados possíveis da segunda retirada?	1	1
c) Quantos são os pares possíveis das duas retiradas?	1	1
d) Quantos são os pares possíveis de retirar dois pontos (•; •)?	1	0
e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (•; •)?	1	0
f) Quantos são os pares favoráveis de retirar um traço e um ponto nesta ordem (-; •)?	1	0
g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; •)?	1	0
h) Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (-; -)?	1	0
i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-; -)?	1	0
j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (•; -)?	0	0
k) Qual a probabilidade de se retirar um ponto e um traço (•; -)?	0	0
l) Se continuássemos a preencher o quadro com até 100 jogadas, o que você acha que iria acontecer? Justifique a sua resposta.	1	0
m) Quantos são os resultados possíveis de se obter um traço e um ponto sem importar a ordem, nas duas retiradas?	0	1
n) Qual é a probabilidade de se obter resultados diferentes nas duas retiradas?	1	1
Total de acertos (incluindo os parciais)	11	5

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Segundo observamos, Luiz e Helen, que haviam obtido 13 acertos, passaram a obter, nessa fase final, 11. Helena e Lucas aumentaram discretamente os acertos de três para cinco.

Luiz e Helen e Helena e Lucas, haviam acertado o item **j**, inicialmente, nessa fase final, passaram a não acertá-lo. As duas duplas reproduziram o erro inicial ao analisarem o item **k**. Uma hipótese é que, diferentemente das letras **f** e **g**, nos itens **j** e **k**, não foi imposta uma condição, como a ordem de formação dos pares.

Podemos perceber que Luiz e Helen, embora tenham diminuído a quantidade de acertos, melhoraram o entendimento acerca da relação entre as probabilidades advindas de um experimento e a teórica como podemos ver na Figura 30 a seguir

que apresenta suas respostas iniciais e finais, após processo de simulação no ambiente físico e virtual.

**Figura 30 - Respostas da dupla Luiz e Helen antes e após o processo de experimentação no ambiente físico e virtual via *Sampler***

<p>l) Se continuássemos a preencher o quadro com até 100 jogadas, o que você acha que iria acontecer? Justifique a sua resposta.</p> <p><i>Só ia multiplicar a quantidade de jogadas e as combinações iam crescer diferenciadamente.</i></p>
<p>l) Se continuássemos a preencher o quadro com até 100 jogadas, o que você acha que iria acontecer? Justifique a sua resposta.</p> <p><i>iria cair um resultado dentro da probabilidade de 25% para cada par.</i></p>

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Conforme observamos, a dupla, antes da simulação com o *Sampler* entende que a ocorrência dos eventos iria acontecer de forma diferenciada a partir da quantidade de jogadas. Após o processo de simulação realizado com o *Sampler* e novamente com as fichas, conseguem entender que a probabilidade frequentista é a tendência da teórica. Isso fica evidente quando consideram relevante o aumento das jogadas, que segundo eles, resulta em uma aproximação do resultado teórico (25%).

Helena e Lucas, embora tenham errado a maioria dos itens, utilizaram como estratégia responder aos itens **e** e **l** estimando os valores numéricos e suas respectivas probabilidades a partir dos resultados do Gráfico. Isso evidencia um empenho em compreender as frequências relativas advindas dos resultados das experimentações. Eles perceberam quais foram os eventos combinados mais frequentes, dividiram o percentual tentando aproximá-lo de 100%, sem calcular, de acordo com as quantidades de cada evento. Isso pode ser evidenciado a partir da análise das suas respostas conforme Figura 31 a seguir.

**Figura 31 - Respostas da dupla Helena e Lucas no Teste Final**

d) Quantos são os resultados possíveis de retirar dois pontos (+; +)?	5.
e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (+; +)?	17%
f) Quantos são os pares possíveis de retirar um traço e um ponto (-; +) nesta ordem?	12.
g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; +)?	38%
h) Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (-; -)?	5
i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-; -)?	17%
j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (+; -)?	10
k) Qual a probabilidade de se retirar ponto e traço (-; -)?	32%

Fonte: Gleidson de Oliveira Souza (2015) a partir dos dados desta pesquisa.

Segundo observamos, Helena e Lucas, evidenciaram em suas respostas que recorreram à escala do Gráfico, identificaram a ocorrência de cada evento, o que guiou seus registros numéricos (5 ponto e ponto, 12 traço e ponto, 5 traço e traço e 10 ponto e traço, totalizando 32 pares). A determinação da probabilidade, também foi guiada por essa percepção da dupla (17% ponto e ponto, 38% traço e ponto, 17% traço e traço e 32% ponto e traço, o que totalizou 104%).

Notamos que Helena e Lucas demonstraram uma sutil tentativa de estabelecer uma relação entre os resultados da experimentação com a probabilidade teórica a partir dos resultados. Contudo, a dupla não conseguiu ampliar essa abordagem para incluir uma quantificação correta a partir da probabilidade teórica.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral proposto nesta pesquisa foi *investigar conhecimentos de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental sobre probabilidade com o uso da ferramenta Sampler do TinkerPlots 2.0*. Em termos específicos buscou-se: *identificar conhecimentos prévios dos estudantes sobre probabilidade; examinar conhecimentos dos estudantes sobre probabilidade a partir de problemas envolvendo experimentos aleatórios; explorar a ferramenta Sampler do TinkerPlots para mobilizar conhecimentos dos estudantes sobre probabilidade*.

Para responder aos nossos objetivos desenvolvemos uma revisão da literatura e um estudo empírico. Na revisão da literatura identificamos que os estudos já desenvolvidos sobre essa temática não são suficientes para explicar os conhecimentos de estudantes desse nível de escolarização sobre probabilidade. Além disso, estudos que incluam situações em que estudantes são solicitados a realizar simulações com o auxílio do *software TinkerPlots* são escassos no Brasil o que torna o nosso estudo em importante pesquisa desenvolvida na área da Educação Matemática e Tecnológica.

Em nossa trajetória de pesquisa articulamos a essa discussão teórica dois estudos empíricos (piloto e principal) os quais foram desenvolvidos na mesma escola pública que possui várias turmas do 9º ano. O estudo piloto foi importante para que pudéssemos aprofundar aspectos teóricos relacionados ao conceito de probabilidade, avaliar nossos instrumentos de coleta de dados, consolidar as etapas da pesquisa proposta e retomarmos a uma definição mais precisa dos nossos objetivos. Este estudo foi realizado com dois estudantes do 9º ano e os resultados indicaram que eles, mesmo não conhecendo o *software TinkerPlots*, não tiveram dificuldades em manipulá-lo e de realizarem simulações sobre experimentos aleatórios usando a ferramenta *Sampler*. É válido salientar, que o aprofundamento do estudo teórico do *software* aliado ao estudo dos aspectos conceituais da probabilidade nos ajudou a tornar mais claras algumas passagens das etapas do trabalho com o *TinkerPlots* para o estudo principal.

O estudo principal foi realizado com quatro estudantes do 9º ano e eles trabalharam em algumas etapas da pesquisa individualmente enquanto em outras o trabalho foi realizado em duplas. Os procedimentos metodológicos desse estudo envolveram entrevista semi-estruturada realizada inicialmente para identificar o perfil

dos e seus contatos iniciais com computadores e softwares; a realização de teste diagnóstico envolvendo problemas de concepção (sobre probabilidade, situações de uso de probabilidade e sobre experimento aleatório) e de problemas sobre experimentos aleatórios (não realizado e realizado no ambiente físico); o trabalho com o *software TinkerPlots* (familiarização e simulação com o *Sampler*); e reaplicação do teste diagnóstico.

No que se refere ao perfil dos estudantes, dois deles possuem desempenho acima da média em Matemática (Luiz e Lucas) e os outros dois possuem desempenho mediano (Helen e Helena). Eles costumam utilizar o computador em casa e basicamente o fazem para acessar redes sociais e também para estudar. Não costumam utilizar software na escola e nem conhecem o *software TinkerPlots*.

O *design* da pesquisa previu que os estudantes participassem de todas as etapas da pesquisa, sendo essa participação individual em algumas etapas e em duplas em outras. Essa variação no processo de coleta de dados buscou identificar possíveis mudanças sobre o conhecimento de probabilidade nas abordagens dos estudantes, a partir da apreensão de cada um e em colaboração com um colega. Na formação das duplas, buscou-se contribuir para potencializar negociações cognitivas mais equilibradas entre os estudantes à luz do que preconiza a Zona de Desenvolvimento Proximal discutida por Vygotsky (1978). Nesse sentido, as duplas foram formadas por estudante com desempenho acima da média e por estudante com desempenho médio em Matemática, resultando nas seguintes duplas: Luiz e Helen; Lucas e Helena. No entanto, não podemos afirmar que essa formação teve influência nos dados encontrados em nossa pesquisa.

As tarefas do teste diagnóstico envolveram problemas de concepção de probabilidade; resolução de problemas sobre experimento aleatório não realizado e realizado no ambiente físico. Nossa expectativa era propor tarefas que pudessem possibilitar que os participantes apresentassem expressões mais intuitivas sobre probabilidade, já que o ensino formalizado desse conteúdo só é introduzido no Ensino Médio, conforme proposta dos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). Um aspecto que também esperávamos é que os estudantes demonstrassem facilidade para realizar registro de dados em tabelas e gráficos, sendo essa uma expectativa de aprendizagem esperada para o 9º ano nos parâmetros de Pernambuco.

A partir dos dados apresentados no teste diagnóstico, percebemos que as concepções dos estiveram relacionadas com suas opiniões e crenças sobre probabilidade, envolvendo, portanto, ideias mais intuitivas. O uso espontâneo de termos formais sobre probabilidade não foram identificados. Com relação aos problemas sobre experimento aleatório não realizado (pesquisa sobre peças com defeito), os estudantes, embora não tenham acertado as questões em termos de uma quantificação exata, estimaram essa relação de forma adequada. Suas respostas, portanto, demonstraram que eles conseguem imaginar a realização de um experimento mesmo que este não esteja acontecendo de fato, revelando uma discussão lógica e coerente sobre a probabilidade teórica mesmo que intuitiva.

Abordagens intuitivas sobre a probabilidade teórica também são observadas nas 11 questões iniciais do experimento realizado no ambiente físico (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k). Nas respostas individuais a esses itens, Luiz e Helen acertaram 5 questões cada um, enquanto Helena e Lucas acertaram 2 e 3 itens, respectivamente. Uma possível explicação para os erros dos estudantes foi que eles consideraram intuitivamente a probabilidade teórica sem uma reflexão mais aprofundada sobre a natureza do experimento ser com reposição, pois a cada retirada da ficha do saco, ela era repostada. Um aspecto fundamental que tomamos para fundamentar essa análise é que os estudantes não conseguem acertar as questões c-e-i, que apresentam um nível maior de complexidade, pois requerem que eles pensem nos eventos simples como combinados para compor o espaço amostral (ponto/traço; ponto/ponto; traço/ponto; traço/traço).

Os estudantes não apresentaram dificuldades em realizar o experimento no ambiente físico, tendo compreendido o processo de forma adequada e realizado as jogadas uma após a outra, totalizando em 32. Eles apresentaram facilidade em realizar o registro dos resultados do experimento no quadro. No entanto, apenas Luiz e Helena transpuseram os dados do quadro para o gráfico de forma apropriada. Helena e Lucas não conseguiram realizar essa tarefa de acordo com convenções relativas a representação de dados em gráficos. No registro realizado em duplas, eles juntaram os resultados obtidos individualmente e os registraram em um único gráfico. Os gráficos elaborados apresentaram adequação quanto às convenções nas representações de dados e se configuram em evidência de que as duplas negociaram significados nesse processo de construção.

Após a realização do experimento usando o saco e as fichas, as duplas responderam aos 11 itens iniciais (a-k) e mais três questões (l, m, n) voltadas para reflexões sobre o aumento da amostra e sobre a probabilidade teórica. As respostas mostraram que a dupla formada por Luiz e Helen acertou 10 dos 11 itens iniciais (aproximadamente 91%), enquanto a dupla composta por Helena e Lucas acertou apenas dois itens (aproximadamente 18%). Luiz e Helen além de acertar os itens c-e-i considerados mais complexos, também acertaram os itens l-m-n. Em suas respostas em duplas é possível identificar que essa dupla consegue determinar que o espaço amostral é constituído por quatro eventos ao invés de dois como haviam considerado em suas respostas individuais. Helena e Lucas por sua vez não conseguiram acertar nenhum dos itens c-e-i. Suas respostas tanto individuais como em duplas ofereceram indícios de que seus raciocínios estiveram centrados nos resultados do experimento. Quanto aos itens finais eles acertaram apenas o item l que requeria que estimassem o que aconteceria com 100 jogadas. Em relação a esse item, eles se reportam às frequências obtidas no gráfico para estimar o que poderia acontecer com 100 jogadas. Embora essa forma de abordagem seja sofisticada por incluir a representação como base para o raciocínio, os dados do gráfico não os ajudam a refletir sobre a probabilidade teórica.

Por um lado, a vivência dos estudantes no experimento realizado no ambiente físico os auxiliou de certo modo a uma reflexão sobre a probabilidade teórica, sendo que esse processo foi mais efetivo pela dupla Luiz e Helen. Por outro lado, o número reduzido da amostra obtida com as jogadas no ambiente físico dificultou uma análise mais ampliada desse aspecto pelas duplas, principalmente a formada por Helena e Lucas.

Em termos gerais pode-se dizer que os conhecimentos iniciais dos estudantes no teste diagnóstico estiveram relacionados com suas intuições sobre probabilidade, convergindo esses resultados com as discussões sobre o conhecimento de probabilidade proposta por Batanero (2005) e Gal (2002) e com as expectativas de aprendizagem preconizadas pelos parâmetros de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012).

O desempenho de Luiz e Helen trabalhando em duplas foi superior àquele verificado quando eles trabalharam individualmente. No entanto, o mesmo não pode ser verificado em relação a Helena e Lucas, os quais mantiveram-se no mesmo patamar de números de acertos trabalhando sozinhos ou em duplas. Uma hipótese

para essas diferenças nos desempenhos das duplas pode estar situada na trajetória escolar de cada estudante, situando-se em um plano subjetivo, mas que não consistiu em objeto de nosso estudo, requerendo estudos futuros. De acordo com Gal (2002) a compreensão de probabilidade está relacionada não apenas com aspectos relacionados a conhecimentos estatísticos, matemáticos e do contexto, mas também com aspectos relacionados à postura crítica dos relativos a crenças e atitudes.

No trabalho com o software *TinkerPlots*, tanto na fase de familiarização como na de simulação mais autônoma do *Sampler*, as duplas não apresentaram dificuldades em manipular as ferramentas, entendendo suas funções e compreendendo os significados mesmo com a escrita dos nomes em inglês. Essa facilidade no manuseio do software também é reportada em pesquisas prévias (e.g, LIRA, 2010; EUGÊNIO; CARVALHO, 2013), reforçando a ideia de que o *TinkerPlots* se constitui em uma possibilidade para o trabalho com organização e análise de dados. É importante salientar que as dificuldades que emergiram na fase de familiarização foram trabalhadas pelo pesquisador a partir de uma relação dialogada com os estudantes, propiciando reflexões sobre diferentes aspectos da configuração e uso do *Sampler*.

Nas ações dos estudantes ao realizarem a etapa de simulação com o *Sampler* pudemos identificar três tipos de ações: escolha e configuração dos dispositivos; simulações iniciais; simulações com diferentes amostras; e comparação dos resultados das experimentações com as fichas e com o *Sampler*. As duas duplas escolheram o dispositivo *Spinner* para realizar a simulação com o experimento das fichas. Esse dispositivo, diferentemente do *Mixer*, estimula a visualização da aleatoriedade a partir de um modelo de área com um ponteiro girando ao redor. O dispositivo *Mixer*, por sua vez, estimula a visualização da aleatoriedade a partir de um modelo de bolas saltando em torno de um suposto saco e liberando o resultado para fora do saco. Como as duplas só consideraram o *Spinner* para realizar as simulações, suas considerações sobre aleatoriedade podem ter sido influenciadas por esse modelo e perpassado suas análises e trajetórias ao longo das simulações. Entendemos que em estudos futuros os estudantes possam trabalhar em situações envolvendo tanto esse dispositivo como o *Mixer* para identificarmos possíveis implicações dessas opções de simulação para a mobilização de conhecimentos de probabilidade com o *TinkerPlots*.

As duplas realizaram simulações iniciais com amostras pequenas e também acionaram a ferramenta *Plot*, gerando gráficos. A análise dos dados indica que a dupla formada por Helena e Lucas tomou a iniciativa de recorrer espontaneamente ao ícone da ferramenta *Plot*. A dupla, Luiz e Helen, precisou ser incentivada pelo pesquisador para fazer essa manipulação. Uma estratégia interessante dessa dupla foi mudar a representação, situada inicialmente com o *Join* (casos combinados) no eixo vertical do gráfico, para o gráfico com o *Join* no eixo horizontal do gráfico. Uma possível explicação para essa estratégia foi a intenção da dupla em assemelhar o gráfico gerado no *TinkerPlots* com aquele gerado na experimentação no ambiente físico. As duplas também realizaram as simulações iniciais substituindo o número de casos da amostra a cada processo realizado. Essa estratégia também foi realizada pelas duplas nas demais simulações realizadas com tamanhos de amostras maiores.

Um aspecto observado nas simulações realizadas pelas duplas com amostras maiores foi a necessidade que elas demonstravam em verificar se os dados tendiam a se igualar no gráfico, conforme aspecto destacado pelo pesquisador que lhes chamava a atenção sobre aspectos da comparação entre a probabilidade teórica e aquela advinda das simulações. Um exemplo dessa estratégia pode ser vista na Figura 25 (p. 107), a qual apresenta os registros das várias simulações com a amostra de 10.000 casos realizada pela dupla Luiz e Helen. Assim como essa dupla, Helena e Lucas também foram aumentando o tamanho da amostra e checando se os casos combinados (*Join*) se diferenciavam com amostras maiores ou se mantinham com a tendência de igualar em 25%, 25%, 25% e 25%. O Quadro 19 (p. 109) mostra as simulações realizadas por Helena e Lucas com tamanho crescente de amostras. Observa-se que eles passam de amostra com 32 casos para amostra com 5.412 casos. Essa facilidade em gerar simulações com diferentes tamanhos de amostras consistiu em aspecto crucial do uso do *Sampler* e coloca em evidência a importância do uso dessa ferramenta para mobilizar conhecimentos de probabilidade por estudantes mesmo que eles não estejam ainda inseridos no ensino formal de probabilidade. Esse aspecto também é convergente com as pesquisas realizadas por Ireland e Watson (2009).

Ao longo dessas simulações o pesquisador estimulou as duplas a pensarem sobre a probabilidade teórica e a compararem os gráficos gerados da simulação com o *Sampler* e aquele gerado da experimentação no ambiente físico.

De acordo com os dados obtidos, à medida que realizavam simulações com amostras maiores, as duplas expressavam com mais clareza seus entendimentos sobre a probabilidade teórica e a experimental, embora não usassem termos formais relacionados ao conceito. A dupla composta por Luiz e Helen, por exemplo, no teste final acertou 13 das 14 questões postas inicialmente no teste diagnóstico, demonstrando que de fato, essa vivência com o *software* os ajudou a mobilizar esse conhecimento. A dupla composta por Helena e Lucas, contudo, embora também tivesse demonstrado estar entendendo aspectos do conhecimento envolvendo probabilidade teórica e experimental durante o trabalho com *TinkerPlots*, não obteve um bom desempenho no teste final.

A partir dos dados obtidos no Teste Final, a nossa hipótese é a de que as respostas dos estudantes após os trabalhos de familiarização e simulação com o *Sampler* do *TinkerPlots* estão relacionadas de modo mais claro a alguns conceitos e situações que envolvem probabilidade como é o caso de aleatoriedade e sorteio. Esse aspecto difere de suas respostas ao Teste administrado no início da coleta de dados quando identificamos abordagens mais relacionadas a conhecimentos intuitivos. Além disso, eles passam a usar estratégias mais elaboradas, as quais mesmo que não resultem em respostas corretas oferecem indícios de raciocínios mais elaborados e relacionados com o trabalho realizado no *TinkerPlots*.

De um modo geral, os resultados dessa pesquisa apresentam algumas evidências sobre a possibilidade de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental desenvolverem conhecimentos mais ampliados sobre a relação entre probabilidade teórica e frequentista a partir de simulações realizadas com o ambiente do *software TinkerPlots*. No entanto, outras pesquisas devem ser realizadas para melhor entender os processos cognitivos e disposicionais envolvidos.

Assim, esperamos que nosso estudo possa contribuir para reflexões sobre a inserção de conteúdos de probabilidade para o 9º ano, auxiliando na implementação de reformas curriculares baseadas em evidências advindas de pesquisas.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, I. **A interpretação de gráficos em um ambiente computacional por estudantes de uma escola rural do município de Caruaru - PE**. Recife, 2011. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2011.
- ASSEKER, A. O uso do **TinkerPlots para a exploração de dados por professores de escolas rurais**. Recife, 2011. 156 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE2011.
- BAYER, Arno; BITTENCOURT, Hélio Radke; ROCHA, Josy; ECHEVESTE, Simone. **Probabilidade na Escola**. In: III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005, Canoas. III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005. v. 1. p. 1-12.
- BATANERO, C. et al. **Using simulation to bridge teacher's content and pedagogical knowledge in probability**. In: INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICS INSTRUCTION STUDY, 15th, 2005, Águas de Lindóia, Brazil. **Proceedings...** Águas de Lindóia: ICMI, 2005. p.1-6. <http://www.ugr.es/~batanero/>. Acesso: em 16 abr. 2014.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (5ª a 8ª série)**. Brasília, 1997.
- \_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2011: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, 2010. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12389&Itemid=672](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12389&Itemid=672)>. Acesso em: 05 maio. 2013.
- BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. **Estatística Básica**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.
- BRYANT, P.; NUNES, T. (2012). **Children's Understanding of Probability**. A literature review. Full report. Disponível em: [http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield\\_CuP\\_FULL\\_REPORT\\_FINAL.pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORT_FINAL.pdf) Acesso em 15 de mar de 2013.
- CAMPELO, Siquele. R. C. **Software educativo TinkerPlots 2.0: possibilidades e limites para a interpretação de gráficos por do ensino fundamental**. Recife: O Autor, 2014. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE 2014.

- CARVALHO, L.M.T.L. d. (2008) **O papel dos artefatos na construção de significados matemáticos por do ensino fundamental** (The role artifacts play when elementary school students construct mathematical meanings). Fortaleza – 2008. 239 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Fortaleza - CE 2008.
- CAZORLA, I. M. (Org.); SANTANA, E. R. dos S. (Org.). **Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico**. 1. ed. Itabuna: Via Litterarum, 2010. v. 1. 160p.
- CAZORLA, I.; KATAOKA, V, Y.; NAGAMINE, C.M.L. **Os passeios aleatórios da Carlinha**. Tutorial do AVALE. Disponível em: < <http://avale.uesc.br>>. Acesso em: 30 jun. 2014.
- COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Educação Estatística e os Livros Didáticos para Ensino Médio**. Educação Matemática em Foco (UEPB), v. 2, p. 68-86, 2013.
- DANTE, Luiz, R.; **Projeto Teláris: Matemática**, 9º ano. São Paulo: Ática 2012.
- EUGÊNIO, Robson, S.; **Explorações sobre a média no software Tinkerplots 2.0 por do ensino fundamental**. Recife: O Autor, 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2013.
- FERREIRA, Robson. S.; KATAOKA, Verônica Yumi; KARRER, M. **Passeios Aleatórios da Carlinha**: explorando o conceito de não equiprobabilidade. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. Anais do XI ENEM, 2013.
- GAL, Iddo. Dispositional aspects of coping with interpretive numeracy tasks. **Literacy & Numeracy Studies**, v. 11, n. 2, p. 47-62, 2002.
- GAL, Iddo. Towards “probability Literacy” for all citizens : building blocks and instructional Dilemmas. In: **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. Netherlands: Graham A. Jones and Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 43-70.
- GAFFURI, Stefane Layana. **Ensino e aprendizagem de probabilidade através da metodologia de resolução de problemas**. Santa Maria: O Autor, 2012. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria – RS, 2012.
- HOLANDA FERREIRA, Aurélio Buarque de. **Dicionário Aurélio**. Disponível em: <<http://www.dicionariodoaurelio.com/>>. Acesso em: 12 de jan 2015.
- IRELAND, Seth; WATSON, Jane.; Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Volume 4, Number 3, p. 340-370, October 2009.

KONOLD, C. et al. **Conceptual Challenges in Coordinating Theoretical and Data-centered Estimates of Probability**. Amherst, MA: University of Massachusetts, 2011.

KONOLD, C.; MILLER, C. **TinkerPlots**: dynamic data explorations. Emeryville, CA: Key Curriculum Press. 2001.

KONOLD, C.; MILLER, C. **Tinkerplots**: Dynamic data exploration. Tinkerplots Help Version 2.0, Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 2012. Disponível em <[www.srri.umass.edu/sites/srri/files/tinkerplots2help/index.html?device\\_options.htm](http://www.srri.umass.edu/sites/srri/files/tinkerplots2help/index.html?device_options.htm)> Acesso em 09 de maio 2014.

KAZAK, S.; KONOLD, C. Development of ideas in data and chance through the use of tools provided by computer-based technology. In: READING, C. (Ed.). Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8). **Anais eletrônicos...**(1CD-ROM). Ljubljana, Slovenia, 11-16 Jul. 2010.

LIRA, O. **O uso de ferramentas do software TinkerPlots para a interpretação de gráficos**. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE, 2010.

LOPES, José M.; TEODORO, João. V.; REZENDE, J. C. O ensino de probabilidade por meio de um jogo e da resolução de problemas. In: **Estudos e Reflexões em Educação Estatística**. LOPES, Celi Espasandin, COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva, ALMOULOU, Saddo Ag (Orgs). São Paulo: Mercado de Letras, p. 135-156, 2010.

MARTINS, Maria Niedja Pereira ; MONTEIRO, C. E. F. **Professores Desenvolvendo Compreensões sobre Amostragem com o Software TinkerPlots**, 2013. Disponível em: <[http://ftp://ftp.ifes.edu.br/cursos/Matematica/EBRAPEM/GDs/GD13/Sessao2/Sala\\_B3/1196-1879-1-PB.pdf](http://ftp://ftp.ifes.edu.br/cursos/Matematica/EBRAPEM/GDs/GD13/Sessao2/Sala_B3/1196-1879-1-PB.pdf)>. Acesso em: 01 abr. 2014.

MORGADO, A.C.O.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.; PINTO DE CARVALHO, P; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MORI. Iracema.; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática**: ideias e desafios, 9º ano. 17. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

MOROZ, Melania e GIANFALDONI, Mônica Helena T.A. **O processo de pesquisa**: iniciação. Brasília: Editora Plano, 2002, 108p.

NAGAMINE, C. M. L. ; HENRIQUES, A. ; UTSUMI, M. C ; Cazorla, I. M. . **Análise Praxeológica dos Passeios Aleatórios da Mônica**. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 24, p. 451/6-472, 2011.

NOVAES, D. V.; COUTINHO, C. Q. S. **Estatística para educação profissional**. São Paulo: Atlas, 2009.

PERNAMBUCO. Secretaria de educação do Estado de Pernambuco. **Parâmetros para a educação básica para o estado de Pernambuco**: Matemática. Pernambuco, 2012.

SANTANA, M. R. M. **O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental**. Recife: O Autor, 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2011.

SOUZA, L. O.; LOPES, C. E. **O Uso de Simuladores e a Tecnologia no Ensino da Estocástica**. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 24, n. 40, p. 659-677, dez. 2011.

TRIOLA, Mario F. **Introdução a estatística**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

VIALI, Lori. OLIVEIRA, Paulo Iorque Freitas de. Uma Análise de Conteúdos de Probabilidade em Livros Didáticos do Ensino Médio. In: **Estudos e Reflexões em Educação Estatística**. LOPES, Celi Espasandin, COUTIHO, Cileda de Queiroz e Silva, AMOLOUD, Saddo Ag (Orgs). São Paulo: Mercado de Letras, p. 85-103, 2010.

VYGOTSKY, L.S. **Mind in society**: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978.

WATSON, Jane. M, COLLIS, Kevin F.; MORITZ, Jonathan, B. The Development of Chance Measurement. *Mathematics Education Research Journal*, Volume 9, Number 1, p. 60-82, October 2007.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A - Carta de apresentação e solicitação de permissão da pesquisa



À Escola,

Solicitamos permissão para que **Gleidson de Oliveira Souza**, estudante do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, dessa Universidade realize nessa Instituição a coleta de dados da sua pesquisa de Mestrado intitulada: **EXPLORAÇÕES DE ESTUDANTES DO 9º ANO SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADE COM O SOFTWARE TINKERPLOTS 2.0**, sob a orientação da Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liliane M<sup>a</sup>. T. de Carvalho.

O objetivo da pesquisa é investigar noções de probabilidade de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental com o uso da ferramenta *Sampler* do TinkerPlots 2.0, que consiste em um simulador de probabilidade.

Para obtenção dos dados, o estudante precisará realizar algumas atividades de pesquisa na seguinte sequência: 1. Entrevista inicial com questões sobre concepções e questões de probabilidade; 2. Familiarização dos estudantes com o software; 3. Atividade de resolução de problemas sobre probabilidade com o *Sampler*; 4. Entrevista final.

Para tanto, o mestrando precisará realizar algumas visitas a essa Instituição entre os dias / / 2014 e / / 2014 para realizar as atividades de pesquisa com duas duplas de do 9º ano. Para a constituição das duplas, solicitamos que seja formada por um/uma estudante com bom desempenho em matemática e outro com desempenho regular. Os trabalhos, portanto, envolverão quatro. Em anexo apresentamos uma sugestão de cronograma como ponto de partida para a discussão sobre a viabilização dos dias das visitas.

Adiantamos que todo o processo será conduzido a partir de um procedimento ético em pesquisa e que a identidade dos participantes assim como dessa Instituição serão preservadas em qualquer publicação onde os dados coletados sejam apresentados.

Agradecemos antecipadamente e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos pelos emails: [lmtlcarvalho@gmail.com](mailto:lmtilcarvalho@gmail.com) e [gleidsonosouza@hotmail.com](mailto:gleidsonosouza@hotmail.com) / [gleidson2013souza@gmail.com](mailto:gleidson2013souza@gmail.com).

Atenciosamente,

Recife, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2014.

## APÊNDICE B - Solicitação de permissão dos pais da pesquisa



Ao Sr. \_\_\_\_\_, solicitamos permissão para que **Gleidson de Oliveira Souza**, estudante do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, dessa Universidade realize com o estudante (a) do 9º ano \_\_\_\_\_ dessa instituição a coleta de dados da sua pesquisa de Mestrado intitulada: **EXPLORAÇÕES DE ESTUDANTES DO 9º ANO SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADE COM O SOFTWARE TINKERPLOTS 2.0**, sob a orientação da Profª. Drª. Liliane Mª. T. de Carvalho.

O objetivo da pesquisa é analisar como estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, oriundos de redes públicas de ensino exploram noções de probabilidade no software *TinkerPlots* que possui um simulador de probabilidade denominado *Sampler*.

Para obtenção dos dados, o estudante precisará realizar algumas atividades de pesquisa na seguinte sequência:

1. Entrevista inicial com atividades sobre probabilidade;
2. Familiarização dos estudantes com o *software*;
3. Atividade de simulação de um experimento a partir de uma situação-problema sobre probabilidade com o *Sampler*;
4. Entrevista final com atividades sobre probabilidade.

Adiantamos que todo o processo será conduzido a partir de um procedimento ético em pesquisa e que a identidade dos participantes assim como dessa Instituição serão preservadas em qualquer publicação onde os dados coletados sejam apresentados.

Agradecemos antecipadamente e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos pelos emails: [Imtlcarvalho@gmail.com](mailto:Imtlcarvalho@gmail.com) e [gleidsonosouza@hotmail.com](mailto:gleidsonosouza@hotmail.com) / [gleidson2013souza@gmail.com](mailto:gleidson2013souza@gmail.com).

Atenciosamente,

Recife, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2014.

**APÊNDICE C – Entrevista Inicial (individual)**

Código do participante: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

Costuma utilizar o computador?    SIM (  )    NÃO (  )

Se sim, com que frequência de horas por semana?

(  ) 0-2 horas(  ) 2-4 horas(  ) 4-6 horas(  ) 6-8 horas(  ) outros (especifique)

Em que lugares costuma utilizar o computador?

(  ) Casa(  ) Casa de amigos(  ) *Lan House*(  ) Casa de parentes(  ) Escola(  ) Outros (especifique)\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Com qual (is) finalidade (s) utiliza o computador?

(  ) Redes sociais (Ex.: Facebook, Whatsap, Twitter...)(  ) Estudar(  ) Acessar e-mail(  ) Outros (especifique)\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_Já participou de alguma atividade na escola utilizando um software para o trabalho na disciplina de Matemática? (  ) SIM    (  ) NÃO

Em caso afirmativo, qual o software?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

O uso do software foi proposto por quem?

(  ) Escola(  ) Professor(  ) Estudantes(  ) outros (especifique)\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Qual foi a atividade trabalhada?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**APÊNDICE D – Teste diagnóstico (Individual)**

Código do participante: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

**1.** Explique com suas palavras o que você entende por probabilidade.

Dê um exemplo.

---

---

---

**2.** Em que situações usamos a probabilidade?

---

---

---

**3.** Explique com suas palavras o que você entende por experimento aleatório. Dê um exemplo.

---

---

**4.** Uma pesquisa sobre peças com defeito foi realizada em uma fábrica de canetas. Em um lote de 600 peças, constatou-se que 30 estavam com defeito.

a) Sendo retirada uma peça desse lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela tenha defeito?

---

---

b) Sendo retirada uma peça do lote ao acaso, qual a probabilidade de que ela não tenha defeito?

---

---

**5.** Você tem um saco contendo duas fichas, uma com o desenho de um ponto (•) e outra com o desenho de um traço (-). Retira-se uma ficha, anota-se o resultado e

repõe-se no saco. A seguir retira-se uma segunda vez a ficha e anota-se o segundo resultado.

a) Quais são os resultados possíveis da primeira retirada?

---

b) Quais são os resultados possíveis da segunda retirada?

---

c) Quantos são os pares possíveis das duas retiradas?

---

d) Quantos são os resultados possíveis de retirar dois pontos (•; •)?

---

e) Qual a probabilidade de retirar dois pontos (•; •)?

---

f) Quantos são os pares possíveis de retirar um traço e um ponto (-; •) nesta ordem?

---

g) Qual a probabilidade de retirar um traço e um ponto, nesta ordem (-; •)?

---

h) Quantos são os pares possíveis de retirar dois traços (-; -)?

---

i) Qual a probabilidade de retirar dois traços (-; -)?

---

j) Quantos são os pares possíveis de se retirar (•; -)?

---

k) Qual a probabilidade de se retirar ponto e traço (•; -)?

---

**Repita o experimento 32 vezes:**

1) Registre os resultados no Quadro e responda as questões que seguem.

2) Registre os resultados no Gráfico.



Quadro

Jogadas (Experimento)	Resultados de cada retirada		Resultados (Eventos combinados) Par
	1ª Retirada	2ª Retirada	
1º Experimento			
2º Experimento			
3º Experimento			
4º Experimento			
5º Experimento			
6º Experimento			
7º Experimento			
8º Experimento			
9º Experimento			
10º Experimento			
11º Experimento			
12º Experimento			
13º Experimento			
14º Experimento			
15º Experimento			
16º Experimento			

l) Se continuássemos a preencher o quadro com até 100 jogadas, o que você acha que iria acontecer? Justifique a sua resposta.

---



---



---

---

m) Quantos são os resultados possíveis de se obter um traço e um ponto (-; •) sem importar a ordem nas duas retiradas?

---

n) Qual é a probabilidade de se obter resultados diferentes nas duas retiradas?

---

---

### Gráfico

