



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MESSIAS VILBERT DE SOUZA SANTOS

CRITICALIDADE EM TAMANHO FINITO: PRESENÇA E
AUSÊNCIA DE COMPETIÇÃO ANISOTRÓPICA

Recife
2015

MESSIAS VILBERT DE SOUZA SANTOS

**CRITICALIDADE EM TAMANHO FINITO: PRESENÇA E
AUSÊNCIA DE COMPETIÇÃO ANISOTRÓPICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Marcelo de Moura Leite
Universidade Federal de Pernambuco

Recife
2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador CRB 4-572

S237c Santos, Messias Vilbert de Souza.
Criticalidade em tamanho finito: presença e ausência de competição anisotrópica / Messias Vilbert de Souza Santos. – Recife: O Autor, 2015. 266 f.: fig.

Orientador: Marcelo de Moura Leite.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2015.
Inclui referências e apêndices.

1. Fenômenos críticos. 2. Teoria de campos escalares. 3. I. Leite, Marcelo de Moura (Orientador). II. Título.

530.475 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2015-46

MESSIAS VILBERT DE SOUZA SANTOS

**CRITICALIDADE EM TAMANHO FINITO: PRESENÇA E
AUSÊNCIA DE COMPETIÇÃO ANISOTRÓPICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 23/10/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Presidente
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Carlos Alberto Batista da Silva Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa
Examinador Externo
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Jose Ricardo de Sousa
Examinador Externo
Universidade Federal do Amazonas

Resumo

Sistemas de tamanho finito confinados entre geometrias de placas planas e paralelas, cujas superfícies de contorno estão sujeitas a condições de contorno de Dirichlet e Neumann, e separados por uma distância L foram analisados no espaço dos momentos. Nós introduzimos uma representação modificada para as autofunções discretas e utilizamos campos escalares renormalizados em termos de partes de vértice $1PI$ (do inglês “one-particle irreducible”) sem massa e também massivos. Nós discutimos as multiplicidades nas regras de Feynman que surgem na construção dos diversos diagramas, o que é devido à escolha da representação das funções base, e apresentamos as condições de normalização modificadas. Para quase-momentos externos não nulos, provamos que as condições de contorno de Neumann e de Dirichlet podem ser unificadas em um único formalismo. Discutimos os regimes de *crossover* dimensionais para estes e mostramos a correspondência com as condições de contorno periódicas e antiperiódicas. Em particular, provamos que os efeitos de tamanho finito para Dirichlet e Neumann não requerem necessariamente termos de superfície, mas são implementados não-trivialmente nas regras de Feynman envolvendo apenas termos de *bulk* na Lagrangiana. Como uma aplicação, calculamos, via esquema diagramático, os expoentes críticos η e ν , pelo menos, até a ordem de dois *loops*. Mostramos que os índices críticos são os mesmos do sistema *bulk* (infinito), independentemente das condições de contorno. Em seguida, estendemos o nosso método de análise do tamanho finito para sistemas competitivos m -axiais no ponto crítico de Lifshitz. Em uma abordagem inicial, consideramos finita uma das direções ao longo do subespaço sem competição e observamos um comportamento semelhante com relação ao *crossover* dimensional de sistemas não-competitivos. Para L suficientemente grande, calculamos os expoentes críticos η_1 , ν_1 , η_2 e ν_2 até ordens de pelo menos dois *loops* com auxílio de uma aproximação especial para a regularização das integrais de Feynman. Tais expoentes são idênticos aos do sistema infinito. Por fim, analisamos sistemas competitivos arbitrários do tipo Lifshitz, os quais apresentam diversos eixos de competição e podem ser tratados pelo modelo *CECI*, que é o caso mais geral dentre os modelos que exibem o ponto de Lifshitz como característica. Para formular o problema das transições de fase nesses exemplos de sistemas complexos, introduzimos uma técnica de teoria de campo escalar de massa nula e aplicamos o método de subtração mínima, como meio de renormalização, para calcular, perturbativamente, os expoentes críticos do modelo *CECI*, no caso isotrópico ($d = m_n$). Para o caso isotrópico desse modelo, conseguimos calcular os expoentes críticos exatamente até $O(\epsilon_n^2)$ (até $O(\epsilon_n^3)$ para a dimensão anômala η_n).

Palavras-chave: Fenômenos críticos. Teoria de campo. Tamanho finito. Pontos de Lifshitz.

Abstract

Finite size systems confined between parallel plate geometries whose boundary surfaces are subject to Dirichlet and Neumann boundary conditions and separated by a distance L are analyzed in momentum space. We introduce a modified representation for the discrete eigenfunctions in a renormalized one-particle irreducible (1PI) vertex part scalar field-theoretic framework using either massless or massive fields. We discuss the appearance of multiplicities in the Feynman rules to construct diagrams due to this choice of representation of the basis functions and present the modified normalization conditions. For nonvanishing external quasi-momenta, we prove that Dirichlet and Neumann boundary conditions can be unified within a single formalism. We discuss the dimensional crossover regimes for these and show a correspondence with those from periodic and antiperiodic boundary conditions. In particular, we prove that finite size effects for Dirichlet and Neumann boundary conditions do not require surface terms necessarily but are implemented non-trivially from the Feynman rules involving only bulk terms in the Lagrangian. As an application, we compute the critical exponents η and ν at least up to two-loop level through diagrammatic means. We show that the critical indices are the same as those from the bulk (infinite) system irrespective of the boundary conditions. Next, we extend our finite-size method of analysis to m -axial competing systems at the Lifshitz critical point. In an initial approach, we consider as finite one of the directions along the non competitive subspace and we observe a similar behavior in comparison with the dimensional crossover for non competitive systems. For L great enough, we calculate the critical exponents η_1 , ν_1 , η_2 and ν_2 up to at least 2 loops order with the aid of a special approximation for regularizing the Feynman integrals. These exponents are identical to those obtained from infinite systems. At last, we analyze competitive systems of arbitrary Lifshitz type, which have different axes of competition and can be treated by the *CECI* model, which is the most general case among the models that exhibit a Lifshitz point critical behavior. In order to formulate the problem of phase transitions in these examples of complex systems, we introduce a technique for scalar field theory of zero mass and apply the method of minimal subtraction as a means of renormalization to calculate perturbatively the critical exponents of the *CECI* model for in the isotropic case ($d = m_n$). For the isotropic case of this model, we calculate the critical exponents exactly up to $O(\epsilon_n^2)$ (up to $O(\epsilon_n^3)$ for the anomalous dimension η_n).

Keywords: Critical phenomena. Field theory. Finite-size. Lifshitz points.

Lista de Figuras

1.1	Modelo ANNNI em uma rede cúbica tridimensional.	21
1.2	Diagrama de fase para o modelo ANNNI	22
1.3	<i>Exemplo simples do modelo CECI com interações competitivas entre segundos vizinhos como também acoplamento entre terceiros vizinhos. Este sistema tem três comprimentos de correlação independentes e apresenta o que chamamos de comportamento crítico de Lifshitz genérico do terceiro caráter.</i>	23
1.4	<i>Projeção do diagrama de fases para o comportamento crítico de Lifshitz genérico do terceiro caráter do modelo CECI. A linha contínua indica uma transição ordem-desordem e as linhas tracejadas indicam uma transição de primeira ordem entre as fases ordenadas (ferromagnética e moduladas). As fases ferromagnética e paramagnética continuam ocorrendo no ponto de Lifshitz genérico de terceiro caráter. Os parâmetros p_i e p_j estão associados a um conjunto de valores das razões J_L/J_1, J_{L-1}/J_1, $\dots$, J_2/J_1, e a uma temperatura crítica de Lifshitz (T_L).</i>	24
2.1	Diagramas de Feynman de ordem λ	38
2.2	Diagramas de ordem λ^2 para a função de correlação normalizada (2.62).	40
2.3	Contribuições de ordem λ para a função (2.63).	40
2.4	Contribuições de ordem λ^2 para a função (2.63).	40
2.5	Contribuições de ordem λ para a função (2.68).	42
2.6	Diagramas envolvidos na expansão da função de vértice $\Gamma^{(6)}$	46
2.7	Contribuições de ordem 2 loops para $\Gamma^{(4)}$	47

Sumário

1	Conceitos, definições e fenomenologia	10
2	Fenômenos críticos e teoria de campos	26
2.1	Introdução	26
2.2	Representação do modelo de Ising em termos de campos contínuos	27
2.2.1	Método heurístico	28
2.2.2	Construção por análise das simetrias	32
2.3	Funcional gerador e funções de correlação	34
2.4	Funções de vértice	43
2.5	Expansão no número de <i>loops</i>	47
2.6	Divergências dos diagramas $1PI$	49
2.6.1	Divergências e dimensionalidade	49
2.6.2	Regularização dimensional	53
2.7	Renormalização das funções de vértice	55
2.7.1	Teoria massiva	55
2.7.2	Teoria sem massa	58
2.8	Grupo de renormalização	59
2.8.1	Equações do grupo de renormalização	59
2.8.2	Equações de Callan-Symanzik	64
3	Tamanho finito e condições de contorno periódicas e antiperiódicas	66
3.1	Introdução	66
3.2	Condições de contorno periódicas e antiperiódicas na teoria massiva	68
3.3	Renormalização e equações de Callan-Symanzik para PBC e ABC	76
3.4	O método de Silva e Leite na teoria sem massa com PBC e ABC	78
4	Teoria $\lambda\phi^4$ com condições de contorno de Neumann e Dirichlet	81
4.1	Introdução	81
4.2	Diagramas em termos de integrais de Feynman com NBC e DBC	86
4.3	Multiplicidades na teoria massiva e não-massiva (<i>formalismo unificado</i>)	106
4.4	Regularização dimensional com os quase-momentos externos diferentes de zero	109

SUMÁRIO

4.4.1	Regularização dimensional na teoria massiva	110
4.4.2	Regularização dimensional na teoria sem massa	116
4.5	Diagramas em termos das soluções das integrais de Feynman	120
4.5.1	Diagramas na teoria massiva	120
4.5.2	Diagramas na teoria sem massa	123
4.6	Limites assintóticos do termo de correção de tamanho finito em NBC e DBC . .	125
4.6.1	Limites assintóticos na teoria massiva	126
4.6.2	Limites assintóticos na teoria sem massa	131
4.7	Renormalização na teoria massiva com <i>NBC</i> e <i>DBC</i>	134
4.7.1	Equações de Callan-Symanzik com NBC e DBC	136
4.7.2	Função β , ponto fixo e expoentes críticos na teoria massiva	137
4.8	Renormalização na teoria sem massa com <i>NBC</i> e <i>DBC</i>	144
4.8.1	Equações do grupo de renormalização com NBC e DBC	145
4.8.2	Função β , ponto fixo e expoentes críticos na teoria sem massa	145
5	Formalismo com quase-momentos externos nulos (o modo zero em NBC)	151
5.1	Introdução	151
5.2	Expoentes críticos na teoria massiva para o modo zero	157
5.3	Expoentes críticos na teoria sem massa em modo zero	163
5.4	Limites assintóticos em modo zero	168
6	Condições de Neumann e Dirichlet na criticalidade Lifshitz m-axial	170
6.1	Introdução	170
6.2	Formulação da teoria no ponto de Lifshitz m -axial com <i>NBC</i> e <i>DBC</i>	173
6.3	Integrais de Feynman sem massa: regularização e diagramas	179
6.4	Expoentes críticos para o modelo Lifshitz m -axial com <i>NBC</i> e <i>DBC</i>	188
6.5	Formulação da teoria na região crítica de Lifshitz m -axial com <i>NBC</i> e <i>DBC</i> . .	191
6.6	Integrais de Feynman massivas: regularização e diagramas	195
6.7	Funções de Wilson no caso Lifshitz m -axial massivo com <i>NBC</i> e <i>DBC</i>	203
7	Formulação de subtração mínima no ponto de Lifshitz do modelo <i>CECI</i>	206
7.1	Introdução	206
7.2	Relações de escala para o modelo <i>CECI</i> isotrópico	208
7.3	Subtração mínima para o caso isotrópico	210
7.4	Solução exata das integrais de Feynman para o caso isotrópico	213
7.5	Expoentes críticos do modelo <i>CECI</i> : caso isotrópico exato	215
8	Conclusões e perspectivas	222
	Referências	228
	Apêndice A	235

SUMÁRIO

Apêndice B	251
Apêndice C	264

Capítulo 1

Conceitos, definições e fenomenologia

Uma das características mais notáveis da matéria, que há muito chama a atenção da comunidade científica, é a sua capacidade de mudar de fase, ou seja, transicionar entre estados que possuem propriedades totalmente distintas. Tal capacidade é perceptível desde os eventos mais cotidianos, como a fusão e a ebulição da água, até aqueles que só podem ser observados em escala microscópica, como a reorientação molecular em cristais líquidos. Essa abrangência fenomenológica levou a um natural interesse por esse fenômeno da natureza, o qual não se deu apenas pelas intrigantes dúvidas advindas da simples observação de sua ocorrência, mas também pela possibilidade de sua utilização prática. Por exemplo, o notório salto evolutivo gerado pelo domínio da técnica de fundição de metais acarretou em soluções de problemas, tanto domésticos quanto sociais, o que levou a humanidade a conjecturar ideias e argumentos sobre tal fenômeno. É compreensível, portanto, o consequente surgimento de uma base teórica para explicar suas minúcias, fechando um ciclo contínuo, propício à pesquisa, baseado em observação, desenvolvimento e inovação.

A partir do desenvolvimento dos princípios e consequências da teoria termodinâmica, as transições de fase começaram a ser traduzidas matematicamente, trazendo à tona propriedades fundamentais comuns a diversos sistemas físicos. Ao longo da evolução dos conceitos referentes às transições de fase, algumas definições foram impostas pela própria fenomenologia observada. Uma dessas definições é a que as classifica em termos de transições de primeira e segunda ordem, onde o termo *primeira ordem* refere-se à descontinuidade, quando comparados os valores acima e abaixo da transição, de quantidades como a entropia, densidade da substância e magnetização, isto é, grandezas que correspondem a derivadas de primeira ordem da energia livre. No caso de uma transição de primeira ordem, tem-se a coexistência de duas fases distintas, *ordenada e desordenada*, no ponto de transição. Um exemplo simples desse tipo de transição é o fenômeno de vaporização da água a 100 °C e pressão de 1 atmosfera, onde líquido e gás ocorrem ao mesmo tempo em pontos diversos da amostra. Já o termo *transição de segunda ordem*, aplica-se às transições nas quais as derivadas primeiras do potencial termodinâmico variam de forma contínua quando o sistema muda de fase e a descontinuidade aparece em derivadas de ordem superior a um. Para esse tipo de transição a fase ordenada se transforma continuamente na

fase de alta temperatura e vice-versa. Neste caso, a fase ordenada torna-se indistinguível da fase desordenada em qualquer escala de observação. Entende-se por *fase ordenada* aquela de menor simetria, onde a quebra de simetria é causada pela diminuição da temperatura quando saímos de um valor de temperatura acima da temperatura onde ocorre a transição para uma temperatura abaixo desta. Por exemplo, no caso de um sistema ferromagnético, as duas fases em que o sistema pode ocorrer (*ferromagnética/paramagnética*) possuem diferentes simetrias espaciais, pois acima da temperatura de transição (*temperatura de Curie*), onde a magnetização é nula, o sistema é rotacionalmente invariante. Abaixo da temperatura de transição ocorre a chamada magnetização espontânea, que define uma direção preferencial no espaço, destruindo assim a invariância rotacional. Vemos com esse simples exemplo que a magnetização é uma medida da simetria do sistema e, por isso, pode ser chamada de *parâmetro de ordem*. Este parâmetro tem por propriedades gerais ser uma função contínua na fase ordenada e diminuir seu módulo continuamente até ser nulo no ponto de transição de segunda ordem (*ponto crítico*), fixando-se com o valor nulo na fase desordenada. No caso de uma transição líquido-gás de um fluido ordinário, pode-se verificar que o parâmetro de ordem associado à transição é a diferença de densidade entre as fases, possuindo todas as propriedades referidas, e que o ponto crítico desse sistema, ponto no qual a diferença de densidade se anula, situa-se no final da linha de transição de primeira ordem no diagrama de fases.

No desenrolar do tratamento das transições de fase, a primeira evidência experimental dos denominados fenômenos críticos foi datada em 1869 [1] com a descoberta do ponto crítico do dióxido de carbono. O termo “*crítico*” refere-se às propriedades termodinâmicas dos sistemas próximos à temperatura crítica T_c (*Temperatura de transição*) de uma transição de fase de segunda ordem. Desde então, diversos outros tipos de substâncias estudadas apresentaram um comportamento semelhante. Como exemplos podemos mencionar as misturas binárias de líquidos e as ligas binárias de metais nas quais, acima da temperatura crítica, os dois componentes formam uma fase homogênea, misturando-se em quaisquer proporções; materiais ferromagnéticos e ferroelétricos cujos pontos críticos são marcados pelo aparecimento de uma magnetização e polarização espontâneas, respectivamente; ^4He líquido que passa a ser composto tanto por um superfluido quanto por fluido normal abaixo do ponto lambda e materiais supercondutores, cuja resistência elétrica é nula abaixo da temperatura crítica. Para o leitor interessado em uma revisão detalhada sobre as descrições fenomenológicas e experimentais desses materiais indicamos as referências [2, 3].

Em termos gerais, as singularidades referidas acima ocorrem para valores críticos bem especificados, sendo comum a utilização de leis de potência para expressá-las e caracterizá-las. Os expoentes que surgem dessa abordagem, os quais são denominados *expoentes críticos*, determinam a natureza do comportamento crítico para um dado sistema. Dentro desse contexto, um fato bastante significativo sobre os expoentes críticos é que eles não dependem dos detalhes microscópicos do sistema em questão, o que implica dizer que sistemas aparentemente distintos podem possuir os mesmos expoentes críticos. De forma mais abrangente, a hipótese da universalidade nos diz que diversos sistemas físicos microscopicamente distintos podem exibir as mesmas propriedades críticas. O que os coloca no mesmo patamar é apenas o número d de di-

mensões espaciais e o número N de componentes do parâmetro de ordem. Esses dois parâmetros formam o que chamamos de *classe de universalidade* e quantidades como expoentes críticos e razões entre as amplitudes críticas são conhecidas como *grandezas universais*. Seguindo tal hipótese, podemos utilizar um determinado sistema como protótipo das transições de fase de segunda ordem, para construir uma linguagem apropriada e consequentemente descrever os demais sistemas pertencentes à mesma classe de universalidade. Por questões de simplicidade, abordaremos os sistemas magnéticos para elucidar essa linguagem.

Um modelo simples que nos permite entender os sistemas magnéticos, no que diz respeito às suas propriedades críticas, como também calcular os expoentes críticos, é o modelo de Ising [4]. Este modelo é de grande importância para a nossa fundamentação teórica, permitindo o paralelo entre os sistemas com e sem competição. Seu paradigma teórico consiste em spins que interagem entre si através de interações quânticas de troca. Átomos com spin resultante diferente de zero são localizados em pontos de uma rede cristalina regular em d dimensões denominados *sítios*, portanto, por serem distinguíveis, a estatística relevante no caso é a de *Maxwell-Boltzmann*. A cada sítio associamos uma variável de spin que pode assumir os valores ± 1 . Em consequência, realizações experimentais desse modelo devem, em princípio, ser procuradas em magnetos isolantes, por apresentarem elétrons desemparelhados, o que resulta num momento magnético efetivo nos sítios. A distância entre os sítios mais próximos é chamada de *parâmetro de rede* e somente as interações entre os spins desses sítios, que são denominados de *primeiros vizinhos*, são consideradas.

No modelo de Ising, as variáveis de spin só podem assumir valores que representam sentidos diferentes ao longo de uma mesma direção, portanto, o parâmetro de ordem M possui apenas uma componente. Porém, diversos sistemas físicos que exibem comportamento crítico tem o seu parâmetro de ordem com mais de uma componente. Esses sistemas, com $N > 1$ ($N \equiv$ número de componentes do parâmetro de ordem), podem ser descritos por alguns outros modelos que levam esse fato em consideração. Por exemplo, no modelo XY o parâmetro de ordem é caracterizado por possuir duas componentes, ou seja, $N = 2$. Já o modelo de Heisenberg descreve um sistema com um parâmetro de ordem com três componentes, $N = 3$. O modelo de Ising ($N = 1$) em $d = 2$ é um dos poucos modelos teóricos não-triviais que podem ser resolvidos exatamente (*temperatura crítica, todos os expoentes críticos, função de partição a campo zero, funções de correlação*) [5]. A solução exata para dimensões superiores a dois ainda não é conhecida e a melhor descrição disponível é dada pela teoria de Wilson [6–10], que se baseia no procedimento de dizimação apresentado originalmente por Kadanoff [11].

De modo a definirmos os expoentes necessários à descrição do fenômeno crítico, consideremos $F(T, h)$ como a energia livre de Gibbs dada em função da temperatura T e do campo magnético externo h . Por tratar-se de uma transição de fase de segunda ordem, as derivadas de primeira ordem de F , tais como a entropia $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ e a magnetização $M = -\frac{\partial F}{\partial h}$, serão contínuas na passagem de T pela temperatura crítica T_c . Por outro lado, quantidades calculadas em termos de derivadas segundas da energia livre, tais como a capacidade térmica $C = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$ e a susceptibilidade $\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}$ (V é o volume do sistema), apresentarão singularidades nas

vizinhanças de T_c . Como já mencionado, essas singularidades aparecem como leis de potências da temperatura T em torno de T_c , assim, uma grandeza que nos será útil é a temperatura reduzida t , definida como

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (1.1)$$

Por essa definição, a aproximação da temperatura crítica ocorrerá para valores de t que independem do material a ser estudado. Para t suficientemente pequeno, as seguintes leis de potência são válidas:

$$C \propto |t|^{-\alpha}, \quad (1.2a)$$

$$\chi \propto |t|^{-\gamma}, \quad (1.2b)$$

onde α e γ são os expoentes críticos associados às singularidades no calor específico e susceptibilidade, respectivamente. Note que utilizamos $|t|$ para denotar que os expoentes acima e abaixo de T_c são os mesmos, embora as constantes de proporcionalidade (*amplitudes críticas*) sejam diferentes, fato comprovado teórica e experimentalmente. Sendo a magnetização o nosso parâmetro de ordem, acima da temperatura crítica e com o campo magnético externo nulo, a magnetização será igual a zero. Já para $t < 0$, uma magnetização espontânea surgirá no sistema, sendo caracterizada pelo expoente crítico β , ou seja,

$$M \propto \begin{cases} 0, & t > 0, \\ |t|^\beta, & t < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

É interessante notar que as singularidades da susceptibilidade e do calor específico em ferromagnetos refletem diretamente as correlações de longo alcance das interações entre os spins. Nesse sentido, as funções de correlação são de grande utilidade no estudo das flutuações que ocorrem em tais sistemas. Seja, portanto, $\delta s(x_i) = s(x_i) - \langle s \rangle$ a flutuação do momento de spin $s(x_i)$ no sítio x_i em torno do valor médio $\langle s \rangle$. Definimos a função de correlação como

$$G(|x_i - x_j|) = \langle \delta s(x_i) \delta s(x_j) \rangle. \quad (1.4)$$

Observe que consideramos um sistema homogêneo e isotrópico, o que é traduzido pela invariância translacional e rotacional da função definida acima. A equação (1.4) mensura a relação condicional de que o spin em um determinado sítio aponte em uma certa direção dado que o spin numa origem definida também aponte na mesma direção. A extensão das correlações é medida através do comprimento de correlação ξ que está associado ao comportamento assintótico de (1.4). Definindo $R \equiv |x_i - x_j|$ em um espaço com d dimensões, podemos escrever o limite

$$G(R) \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \frac{\exp(-R/\xi)}{R^{d-2+\eta}}. \quad (1.5)$$

O limite $R \rightarrow \infty$ significa $R \gg a$, onde definimos a como sendo o *parâmetro de rede*. Em uma transição de primeira ordem, o comprimento de correlação é sempre finito, o que impede a

ocorrência, para esse tipo de transição, do que chamaremos posteriormente de *invariância por escala*. Porém, próximo ao ponto crítico de uma transição de segunda ordem, o comprimento de correlação, ou seja, o alcance das correlações entre as flutuações, diverge e sua forma assintótica para $t \rightarrow 0$ é caracterizada pelo expoente ν através de

$$\xi \propto |t|^{-\nu}. \quad (1.6)$$

Na temperatura crítica ($t = 0$), a equação (1.5) mostra que as correlações tomam a forma de uma lei de potência, $G(R) \sim R^{-(d-2+\eta)}$ onde η é um dos expoentes críticos, recebendo o nome de *dimensão anômala*, não sendo possível identificá-la por simples análise dimensional. Ainda na temperatura crítica, com o campo magnético externo h e a magnetização assumindo valores pequenos, a equação de estado do sistema é caracterizada pelo expoente δ , isto é,

$$M \propto h^{\frac{1}{\delta}}, \text{ para } t = 0. \quad (1.7)$$

Uma das mais fundamentais características físicas dos sistemas que exibem o comportamento crítico é, sem dúvida, a *invariância por escala*, ou seja, quando o sistema está no ponto crítico ($T = T_c$), ele apresenta as mesmas propriedades em qualquer escala de observação. Esta invarância ocorre porque tanto as flutuações, por exemplo, no parâmetro de ordem, ocorrem em todas as escalas de distância quando o sistema se aproxima do ponto crítico, como também o comprimento de correlação torna-se infinito, isto é, $\xi \rightarrow \infty$. Em uma transição de fase de primeira ordem não existe invariância por escala, pois as flutuações têm um alcance finito (tamanho típico das bolhas na transição líquido-gás). Já nos sistemas magnéticos próximos ao ponto crítico, observam-se domínios magnéticos desde a ordem do tamanho da amostra, até os tamanhos microscópicos.

Um exemplo interessante de um fenômeno associado à existência de um ponto crítico e a invariância por escala é a opalescência crítica, o qual pode ser observado numa transição líquido-gás, onde um fluido transparente torna-se branco como leite. Sabe-se que o efeito é causado pelo espalhamento da luz que passa através do fluido devido às flutuações na sua densidade quando $t \rightarrow 0$. Essas flutuações chegam até a ordem do comprimento de onda da luz visível, causando então uma grande variação no seu índice de refração, o que desencadeia a ocorrência do fenômeno [12].

Uma importante consequência do fenômeno de invariância por escala é que, como as correlações ocorrem em todas as escalas de distância, também as funções termodinâmicas de correlação do sistema devem ser invariantes por transformações de escala. Este fato provê os fundamentos das ideias do *grupo de renormalização*, a partir dos quais podemos construir procedimentos calculacionais para obter estimativas numéricas de parâmetros e expoentes críticos. Levando em consideração a propriedade de escala, Widom propôs em 1965 que a energia livre deveria ser uma função homogênea nas vizinhanças do ponto crítico e, dessa forma, os expoentes críticos podem ser expressos em termos do grau de homogeneidade dessa função [13]. Definindo a densidade de energia livre por $f = F/V$ e considerando ξ como o único comprimento relevante na criticalidade, podemos escrever [14]

$$f(t, h) = \xi^{-d} f_{\pm} (h \xi^{d_h}), \quad (1.8)$$

onde $d_h = \frac{1}{2}(d+2-\eta)$ e $f_{\pm}$ é uma função de escala adimensional. Os índices $+$ e $-$ referem-se a $t > 0$ e $t < 0$, respectivamente. Usando a lei de potência (1.6) e a expressão acima, calculamos o calor específico a partir de

$$C = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \propto |t|^{\nu d-2}. \quad (1.9)$$

Com o auxílio de (1.2), deduzimos a lei de escala de Josephson

$$\alpha = 2 - \nu d. \quad (1.10)$$

Realizando um procedimento semelhante, podemos derivar as demais leis de escala

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (\text{Fisher}), \quad (1.11a)$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (\text{Rushbrooke}), \quad (1.11b)$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad (\text{Widom}). \quad (1.11c)$$

Os seis expoentes críticos definidos aqui estão relacionados através das quatro equações acima, logo, basta que calculemos apenas dois deles para que todos os outros sejam determinados.

Os argumentos e relações apresentados tem sido coerentes com as verificações experimentais e estão de acordo com várias aproximações e modelos como por exemplo aproximações de campo médio. A aproximação de campo médio proposta por Landau tem como hipótese básica assumir que as interações do sistema podem ser trocadas por um campo externo efetivo. Embora essa abordagem não seja muito boa do ponto de vista quantitativo, pois despreza as importantes flutuações numa transição de fase de segunda ordem, normalmente, é um interessante guia qualitativo, além de fornecer um bom meio de comparação para as teorias mais sofisticadas que consideram tais flutuações. Os expoentes críticos que são obtidos via campo médio, a saber: $\alpha = 0$, o que caracteriza uma divergência logarítmica no calor específico; $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\delta = 3$ e $\eta = 0$, são considerados como um limite clássico para os expoentes críticos obtidos por teoria quântica de campos, e foram levados em consideração no decorrente trabalho como um dos argumentos de confiabilidade dos resultados obtidos.

A partir da contribuição de Wilson, com a introdução das equações do grupo de renormalização decorrentes de transformações de escala infinitesimais, as leis de escala puderam ser deduzidas rigorosamente, resultando também no cálculo aproximado para os expoentes críticos. Posteriormente, Brézin, Le Guillou e Zinn-Justin [15–17], apresentaram uma reformulação e simplificação da teoria de Wilson. Essa reformulação, por ser a base para os nossos desenvolvimentos, será apresentada, sucintamente, no capítulo 2. Analogias entre teoria de campos e mecânica estatística serão bastante abordadas no desenrolar dos próximos capítulos, por isso, no capítulo 2, começaremos descrevendo o modelo de Ising para o magnetismo e mostraremos como obter a descrição do modelo em termos de campos escalares e integrais funcionais. Nos concentraremos, portanto, em uma teoria de campo escalar Φ no espaço dos momentos com uma auto-interação do tipo Φ^4 como uma ferramenta essencial à descrição fenomenológica do comportamento crítico do sistema. Apresentaremos ainda no capítulo 2 tópicos importantes

de teoria de campos referentes ao problema. Por exemplo, veremos como as funções de Green e funções de vértice irredutíveis a uma partícula (1PI do inglês “one particle irreducible”), que denotam as funções de correlação, desempenham um papel fundamental na descrição das propriedades do sistema, estando relacionadas a uma das suas mais importantes características: as simetrias com relação às fases ordenada e desordenada. Tais funções serão expandidas em termos de diagramas de Feynman que, por sua vez, são expressos através de integrais de Feynman divergentes. A remoção dessas divergências, seguida pela análise das equações do grupo de renormalização, será realizada pela introdução das técnicas de renormalização, as quais, devidamente implementadas, nos permitirão extrair os infinitos que surgem no cálculo de diversas quantidades importantes no estudo. Com isso, determinaremos os expoentes críticos que são calculados perturbativamente em termos de expansões em potências do parâmetro dimensional $\epsilon = 4 - d$, onde d é o número de dimensões do sistema.

O cenário do tratamento teórico das transições de fase e fenômenos críticos torna-se atual e bem mais complexo ao introduzirmos uma delimitação espacial, o que pode ser modelado pela inclusão de condições de contorno ao problema. Amplamente utilizadas, as condições de contorno periódicas e antiperiódicas conduzem a diferentes tipos de ordenamento em diferentes temperaturas críticas durante a transição de fase [18]. Nesse trabalho, porém, estaremos interessados em aplicar as condições de contorno de Neumann e de Dirichlet, por refletirem um acoplamento distinto entre os spins das superfícies em relação à interação spin-spin no interior do sistema, o que as torna mais condizentes com a realidade física numa idealização para filmes finos. Uma forma natural de realizarmos uma primeira investigação consiste em considerarmos uma geometria de placas planas e paralelas em um espaço com d dimensões. O sistema estará, portanto, delimitado por duas hiper-superfícies em $d - 1$ dimensões, separadas por uma distância L finita. Definindo A como sendo a área das superfícies confinantes, vemos que o volume $V = AL$ do sistema permanece infinito. Dessa forma, todas as singularidades decorrentes das correlações de longo alcance ainda estarão presentes na criticalidade e poderemos usar a mesma linguagem dada em termos de expoentes críticos. Embora V permaneça infinito, vamos nos referir a esse tipo de configuração como um *sistema de tamanho finito*. No limite $L \rightarrow \infty$, é imperativo que voltemos a ter a geometria e todas as propriedades críticas do sistema de tamanho infinito para endossar nossos resultados.

Diversos sistemas físicos apresentam uma geometria de superfícies planas e paralelas. Dentre as realizações experimentais, temos as medidas das curvas de coexistência de filmes finos formados pela mistura de lutidina com água [19, 20] e as medidas do calor específico e densidade de superfluido do ^4He líquido confinado [21–23]. Do ponto de vista teórico, foram utilizadas teorias de campo para investigar os efeitos do tamanho finito em filmes finos formados por fenômenos de molhamento [24–26], assim como em ^4He [27]. Para filmes finos formados pelo molhamento de um determinado substrato por ^4He e pela mistura $^3\text{He} - ^4\text{He}$, o efeito Casimir evidenciado pela existência de forças, tanto atrativas quanto repulsivas, entre as interfaces líquido/substrato e líquido/vapor também foi estudado [28]. Outros exemplos teóricos referem-se ao estudo do limite imposto por superfícies planas e paralelas em teorias quânticas de campo em espaços-tempos curvos [29–35]. O cálculo, tanto da energia de vácuo, quanto das auto-

energias de tais teorias nesses tipos de espaços, conduz a novas realizações do efeito Casimir [29–33] e de mecanismos de geração topológica de massa [33, 34]. Vale também mencionar a conexão existente entre o estudo de sistemas com tamanho finito e a teoria quântica a temperatura finita [33, 36]. Nesse caso, o comprimento L é mapeado no parâmetro β (onde $\beta = \frac{1}{K_B T}$), com o campo satisfazendo condições de contorno periódicas ou antiperiódicas nesse parâmetro, dependendo de estarmos tratando de bósons ou férmions, respectivamente.

Um trabalho pioneiro envolvendo teoria de campo escalar no espaço dos momentos em sistemas com geometria de placas planas e paralelas, no contexto de fenômenos críticos, foi apresentado por Nemirovsky e Freed (NF) [37, 38]. Nesse estudo foram aplicadas, separadamente, as condições de contorno periódicas, antiperiódicas, de Neumann e de Dirichlet como restrição aos campos nas superfícies. NF utilizaram o formalismo do grupo de renormalização em uma teoria massiva ($t \neq 0$, ou seja, ξ finito) e obtiveram os mesmos expoentes críticos do sistema infinito (*bulk*) até ordem ϵ^1 , invalidando dessa forma a conjectura de Brézin [39] sobre a impossibilidade da realização da expansão em ϵ no limite $\epsilon \rightarrow 0$. As análises foram todas realizadas levando em consideração a hipótese de escalamento proposta por Fisher e Barber [40]. Tal hipótese afirma que os efeitos de tamanho finito só devem aparecer quando $\xi \sim L$. Por esta razão, NF usaram a variável de escala L/ξ para argumentar sobre a validade da expansão em ϵ na região determinada por $L/\xi > 1$. Por outro lado, para $L/\xi < 1$, eles conjecturaram que o cálculo perturbativo não era mais válido e os expoentes críticos passariam então a ser os correspondentes de um espaço com $d - 1$ dimensões, caracterizando com isso o *crossover* dimensional do sistema. Entretanto, estudos recentes mostraram a consistência da aplicação de uma teoria de campos com massa nula ($t = 0$, ou seja, ξ infinito) em sistemas submetidos a condições de contorno periódicas e antiperiódicas impostas aos campos nas superfícies limítrofes, considerando-se uma teoria $\lambda\phi^4$. Tal estudo complementou e estendeu a compreensão sobre o regime de *crossover* dimensional, ao evidenciar o parâmetro que, de fato, é relevante para que o fenômeno ocorra [41]. O novo regime de *crossover* estabelecido por Silva e Leite (SL) está associado apenas a pequenos valores do parâmetro L (da ordem do parâmetro de rede do sistema), não possuindo ligação com a divergência de ξ no ponto crítico, contrapondo-se ao regime de *crossover* apontado por NF. Para comprovar tais resultados, SL demonstraram a completa equivalência entre a aplicação da teoria massiva e não-massiva gerando também um avanço considerável no tratamento das representações das funções advindas do tamanho finito em uma das d dimensões do sistema. As conclusões de SL foram também confirmadas através do cálculo dos expoentes críticos até a ordem de 2 *loops* (3 *loops* para a dimensão anômala) numa expansão em ϵ .

Com o intuito de dar maior clareza à exibição dos novos resultados trazidos por este trabalho, os quais se referem, em parte, à aplicação de condições de contorno de Neumann e Dirichlet à teoria $\lambda\phi^4$, apresentaremos no capítulo 3, de forma “rápida”, os conceitos fundamentais do método de NF para campos massivos. Introduziremos também a discussão sobre o tamanho finito usando campos de massa nula. Nesse caso, sendo infinito o comprimento de correlação do sistema, ficará evidente o novo regime de *crossover* dimensional encontrado por SL. Em particular, poderemos observar que a variável de escala L/ξ é inadequada para demarcar os

limites de validade da expansão em ϵ . Contudo, veremos que as condições que validam a expansão e, por conseguinte, o cálculo dos expoentes críticos estão em perfeita concordância com a correspondente análise na teoria massiva.

A partir dos argumentos e direcionamento matemático apresentados no capítulo 3, poderemos ampliar o método de NF, no que diz respeito às condições de contorno de Neumann e Dirichlet, o que será feito no capítulo 4. Com o intuito de incluir o cálculo dos expoentes críticos para ordens mais elevadas em ϵ , o que, naturalmente, contemplará as ideias trazidas por SL para sistemas submetidos às condições de contorno periódicas e antiperiódicas, realizaremos um aprofundamento nos conceitos do formalismo. Para isso, introduziremos modificações substanciais na construção das expressões matemáticas representadas pelos diagramas de Feynman, que passarão a exibir uma constante de multiplicidade (degenerescência) própria da escolha das funções base em termos de exponenciais. Assim como NF e SL, faremos uso de uma teoria de campo escalar com auto-interação quártica representada no espaço dos momentos. Com a introdução de apenas um parâmetro ($\tau \equiv \pm 1$) chegaremos a uma descrição unificada para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann com os *quase-momentos externos* diferentes de zero, estes, surgindo devido à delimitação espacial imposta. Estudaremos, portanto, os efeitos do tamanho finito no comportamento crítico do modelo de Ising d -dimensional em uma geometria cujas superfícies delimitadoras são placas paralelas. Usaremos um parâmetro de ordem com simetria $O(N)$ sujeito a condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann ao longo das duas superfícies. Devido à necessidade de construir novas regras de Feynman, nos depararemos com o problema das multiplicidades no cálculo das grandezas físicas de interesse. O problema será sanado pela redefinição das condições de normalização, que levará em conta as constantes de multiplicidade, tornando o procedimento consistente. Ambas as formulações, com campos massivos e não-massivos, serão aplicadas a fim de obtermos os expoentes críticos respectivamente nos limites de escalamento ultravioleta e infravermelho, que são necessários à descrição das regiões de escala presentes em sistemas de tamanho finito. Investigaremos o regime de *crossover* dimensional existente no modelo, seguindo a prescrição já realizada quando o sistema é submetido a condições de contorno periódicas e antiperiódicas [41]. Determinaremos esse regime para conseguir evitá-lo e calcularemos os expoentes críticos do comprimento de correlação e da dimensão anômala, perturbativamente, até as ordens de dois e três *loops*, respectivamente. Calculados esses dois expoentes, poderemos encontrar todos os outros pela utilização das leis de escala.

Como consequência das condições de contorno que utilizaremos, o *modo zero* (quase-momentos externos iguais a zero), que fornece contribuições não nulas apenas para a condição de Neumann, será tratado separadamente por possuir uma multiplicidade distinta. Por isso, no capítulo 5, analisaremos essa possibilidade de forma isolada. Embora, ao final, os resultados sejam equivalentes, tal abordagem em separado é justificada, visto que não podemos levar uma na outra de forma trivial.

A descrição realizada até agora, e que será o foco dos estudos até o capítulo 5, leva em consideração apenas interações ferromagnéticas entre os primeiros vizinhos, onde os spins tendem a se alinhar paralelamente. Existem, contudo, consequências e resultados bastante interessantes

no desenvolvimento de um modelo que permita interações entre vizinhos mais distantes. Uma possibilidade plausível e que, de fato, gera novas propriedades físicas, é a introdução de interações antiferromagnéticas, que induzem a um alinhamento antiparalelo, intercaladas com as interações ferromagnéticas. Como resultado, teremos um sistema denominado *competitivo*, no qual, além das fases paramagnética e ferromagnética, podemos identificar uma fase com uma modulação periódica na magnetização. A confluência dessas três fases determina um ponto (*multicrítico*) no diagrama de fase conhecido como *ponto de Lifshitz*. Dois exemplos típicos de compostos magnéticos que exibem o comportamento do tipo Lifshitz são dados pelo MnP [42–46] e pelo $Mn_{0.9}Co_{0.1}P$ [47, 48]. Embora o estudo desse tipo de comportamento tenha sido iniciado no contexto de sistemas magnéticos, outros sistemas também possuem interações competitivas do tipo Lifshitz. Podemos identificar na literatura diversos outros exemplos incluindo semicondutores ferroelétricos [49–51], sais de transferência de carga [52, 53], alguns tipos especiais de cristais líquidos [54–59] e polímeros [60–63]. O comportamento do tipo Lifshitz ocorre quando um sistema crítico exhibe interações de curto alcance com sinais alternados. As direções espaciais ao longo das quais as interações alternadas ocorrem são chamadas de *eixos de competição*.

O principal representante de um semicondutor ferroelétrico exibindo competição é dado por $Sn_2P_2(S_{1-x}Se_x)_6$, cujas propriedades refrativas, acústico-ópticas e eletro-ópticas têm despertado bastante interesse. Nesse composto, a concentração x de selênio desempenha um papel fundamental na determinação do tipo de transição de fase observada. Para $x \lesssim 0,28$, haverá uma transição de segunda ordem entre a fase paraelétrica e a ferroelétrica. Já para $x \gtrsim 0,28$, essa transição ocorrerá entre a fase paraelétrica e a fase com uma modulação periódica no vetor de polarização. Se o comprimento de onda dessa modulação não é um múltiplo do parâmetro de rede, temos o que é comumente conhecido como fase incomensurável. Diminuindo ainda mais a temperatura, chegaremos a uma transição de primeira ordem dessa fase incomensurável para a ferroelétrica. O ponto de Lifshitz está então situado em $x \approx 0,28$ a uma temperatura de aproximadamente 281 K [51].

Sais de transferência de carga são constituídos por um certo número n de moléculas doadoras D que forneceram (cada uma conjuntamente) um elétron para uma molécula receptora A , resultando no composto A_nD . As moléculas doadoras são então empilhadas de modo que os orbitais moleculares se sobreponham e gerem um mecanismo de condução elétrica [64]. No entanto, a condutividade elétrica é perdida quando esse tipo de composto sofre uma transição metal-isolante. Tomando como exemplo o sal representado por TTF-TCNQ [52], ao diminuirmos a temperatura T até 54 K e mantendo a amostra sob pressão atmosférica, chegamos à transição de segunda ordem entre a fase metálica (condutora) e a fase isolante na qual a distribuição de cargas ρ segue a periodicidade da cadeia molecular (fase comensurável). Prosseguindo com a diminuição de T até 49 K à mesma pressão, teremos uma transição (também de segunda ordem) para uma fase incomensurável caracterizada pela modulação de ρ cujo vetor de onda cresce continuamente ao decrescemos T a partir da temperatura crítica. Na referência [52], é cogitada a possibilidade de um ponto de Lifshitz a uma pressão mais elevada e com uma temperatura no intervalo de 49 K a 54 K . Observamos que essa descrição é bastante simplificada,

pois o TTF-TCNQ pode conter vários pontos de Lifshitz [53].

Em cristais líquidos, os efeitos da competição aparecem em três fases esméticas (Sm), denominadas $Sm-A$, $Sm-C$ e $Sm-C^*$. Em uma fase esmética, as moléculas desse tipo de composto, geralmente alongadas e na forma de bastonetes, estão arranjadas em planos (planos esméticos) e alinhadas em uma direção bem definida, podendo se deslocar livremente nessas camadas conforme acontece em um líquido. Na fase $Sm-A$, as moléculas alinham-se paralelamente ao vetor normal $\hat{n}$ do plano esmético enquanto que na fase $Sm-C$, esse alinhamento ocorre de forma oblíqua, resultando em um ângulo φ em relação ao vetor $\hat{n}$. Quando o ângulo φ possui uma variação periódica ao longo da direção paralela a $\hat{n}$, temos a fase $Sm-C^*$. Se começarmos com um cristal líquido na fase $Sm-A$ e com um campo magnético externo h suficientemente fraco e paralelo aos planos esméticos, a diminuição da temperatura T resulta em uma transição de segunda ordem para a fase $Sm-C^*$. Aumentando h até um valor crítico h_c , a modulação periódica de φ desaparece e entramos na região da fase $Sm-C$. Caso tivéssemos começado com h acima do valor crítico e na fase $Sm-A$, a diminuição de T acarretaria em uma transição para a fase $Sm-C$. A confluência dessas três fases no diagrama T versus h determina o ponto de Lifshitz.

Pontos de Lifshitz também aparecem em misturas de copolímeros e homopolímeros. Diferentemente de um homopolímero, um copolímero é composto de dois (ou mais) tipos de monômeros. Um exemplo desse tipo de sistema é dado pela mistura de polietilenopropileno com polietileno [61]. Como resultado das interações repulsivas e atrativas entre os monômeros, podemos identificar novamente três fases confluindo para um ponto de Lifshitz no diagrama de fase temperatura T versus a concentração ϕ do homopolímero. Para T acima da temperatura crítica e ϕ pequeno, teremos a fase homogênea (desordenada). Com a diminuição de T e mantendo ϕ fixo, uma transição de segunda ordem ocorre na direção de uma fase lamelar na qual uma periodicidade estrutural pode ser observada. Aumentando a concentração ϕ , o comprimento de onda dessa fase cresce continuamente até o sistema exibir uma separação em duas fases. Uma transição para esse estado também ocorreria se tivéssemos partido com ϕ suficientemente grande e diminuindo apenas T a partir da fase desordenada.

Para tratar a realização microscópica de interações competitivas, usaremos novamente, por conveniência, a linguagem de sistemas magnéticos. Consideremos portanto o modelo ANNNI (*axial next-nearest-neighbour Ising*) introduzido por Elliot [65], que é uma extensão do modelo de Ising na qual interações antiferromagnéticas competem com interações ferromagnéticas. A figura 1.1 mostra o modelo ANNNI aplicado a uma rede cristalina cúbica em um espaço com três dimensões.

Em cada camada ao longo do plano xy , existem apenas interações ferromagnéticas com acoplamento $J_0 > 0$ entre os spins mais próximos, como é usual no modelo de Ising. A competição aparece apenas ao longo da direção z , onde dois tipos de acoplamento J_1 e J_2 estão presentes. O primeiro deles refere-se à interação ferromagnética na qual os spins interagem com os primeiros vizinhos e são forçados a um alinhamento paralelo. O segundo tipo de acoplamento representa a interação antiferromagnética entre um spin e o seu correspondente segundo vizinho, forçando-os a uma configuração antiparalela. Portanto, escrevemos $J_1 > 0$ e $J_2 < 0$. Considerando $S_{\rho,z}$

como a variável de spin em um sítio $\rho = (x, y)$ de uma camada na posição z , podemos então escrever a hamiltoniana do sistema

$$\mathcal{H} = -J_0 \sum_{x,y,z} [S_{(x,y),z} S_{(x+1,y),z} + S_{(x,y),z} S_{(x,y+1),z}] - \sum_{\rho,z} (J_1 S_{\rho,z} S_{\rho,z+1} + J_2 S_{\rho,z} S_{\rho,z+2}).$$

Vamos nos referir ao eixo z como *subespaço competitivo*. Por outro lado, o plano xy ao longo do qual não há competição, será denominado *subespaço não competitivo*.

A figura 1.2 mostra o diagrama de fases esquemático do modelo ANNNI obtido por Selke e Fisher através de simulação de Monte Carlo [66].

O ponto de Lifshitz é representado pelo par de coordenadas (p_L, T_L) , onde definimos $p \equiv -\frac{J_2}{J_1}$. Podemos observar que a variável p desempenha um papel crucial na descrição das transições de fase de um sistema exibindo competição. Para $p < p_L$, a interação ferromagnética é dominante e continuaremos tendo uma transição de segunda ordem entre a fase desordenada paramagnética e a fase ordenada ferromagnética ao longo da linha $T_c(p)$ referente à temperatura crítica. Já para $p > p_L$, a transição de segunda ordem é entre a fase desordenada e a modulada. Na fase modulada, a magnetização apresenta uma variação senoidal ao longo do subespaço competitivo, cujo vetor de onda tende continuamente a zero com a aproximação do ponto de Lifshitz. A fase modulada é dita incomensurável se o comprimento do vetor de onda da modulação não for um múltiplo do parâmetro de rede. Ainda na figura 1.2, observa-se que diminuindo a temperatura e mantendo $p > 0.5$, o sistema entra na região antifásica. Nessa região, o antiferromagnetismo passa a ser predominante e os spins apresentarão uma ordenação do tipo $\cdots \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow \cdots$. As linhas tracejadas representam transições de primeira ordem. O

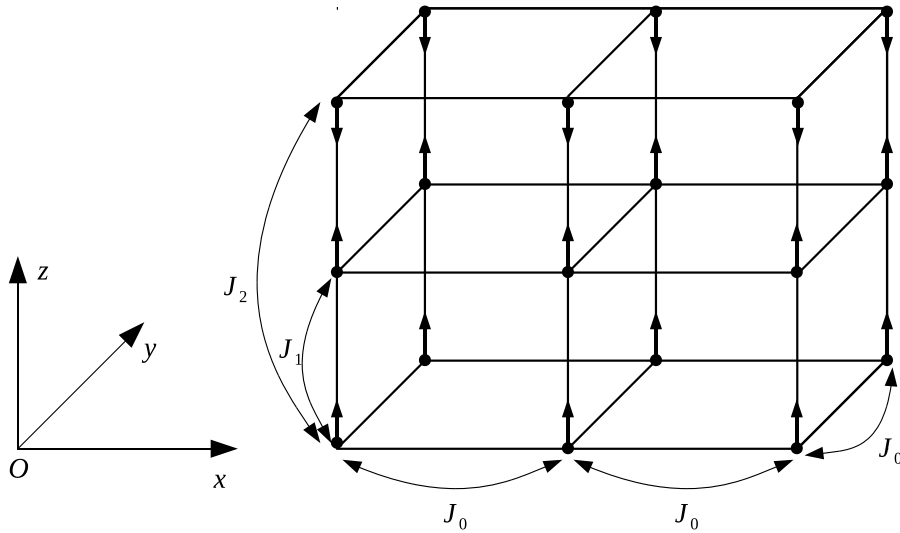


Figura 1.1: Modelo ANNNI em uma rede cúbica tridimensional.

leitor interessado em mais detalhes sobre as regiões de modulação e de antifase pode consultar a referência [67] para uma revisão sobre o assunto.

Uma intuitiva generalização do modelo *ANNI* pode ser implementada ao permitirmos que J_2 exista em m direções espaciais de um total d , isto é, teremos agora m direções competitivas. O sistema então apresentará um comportamento crítico do tipo *Lifshitz m -axial*, que possui dois tipos de comprimentos de correlação, um referente ao subespaço competitivo e o outro relacionado ao subespaço não competitivo. A figura 1.1, por exemplo, exhibe um modelo uniaxial ($m = 1$).

Ao tratarmos de universalidade, não estávamos levando em consideração sistemas que exibem competição, porém, verifica-se que o termo *classe de universalidade* igualmente se aplica nesse caso, sendo encontradas também, através da aplicação dos modelos, grandezas universais. Para um sistema submetido ao comportamento do tipo Lifshitz m -axial, a classe de universalidade sofrerá uma modificação, incluindo em sua especificação o número m de dimensões competitivas, sendo agora identificada por d , N e m . Os sistemas com os mesmos valores para d , N e m , ou seja, numa mesma classe de universalidade, terão os mesmos expoentes críticos e as mesmas razões entre amplitudes acima e abaixo da transição [68–73].

A existência de um subespaço contendo interações competitivas altera significativamente o comportamento crítico dos sistemas. Neste caso, as flutuações do parâmetro de ordem nas vizinhanças do ponto de Lifshitz terão uma natureza distinta no subespaço competitivo quando

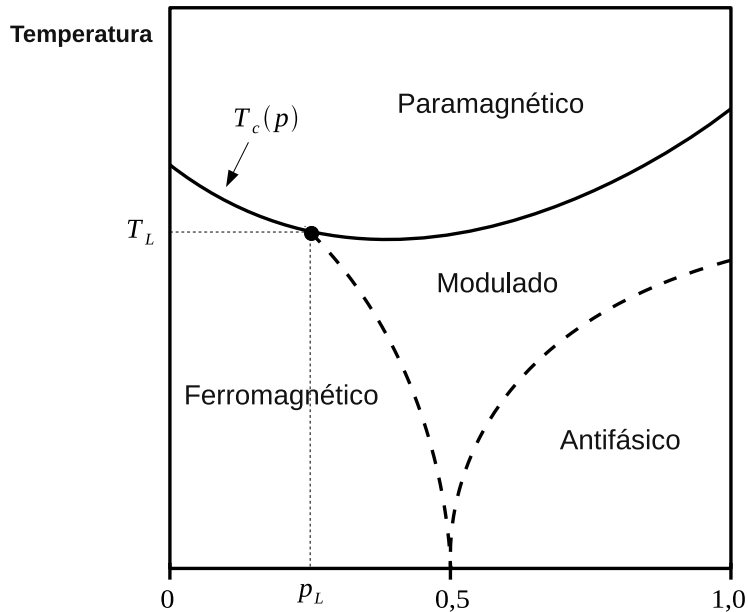


Figura 1.2: Diagrama de fase para um sistema com competição descrita pelo modelo ANNI (ref. [66]).

comparadas ao subespaço sem competição. A primeira análise desse tipo de problema utilizando uma descrição matemática em termos de campos escalares foi apresentada por Hornreich, Luban e Shtrikman [74] em 1975. Nessa descrição, o parâmetro dimensional ϵ , em relação ao qual os expoentes críticos são expandidos, é modificado para $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$, incluindo assim o número m de dimensões do subespaço competitivo. Em virtude da anisotropia do sistema, a função de correlação, análoga àquela definida em (1.4), tem um escalamento diferente para cada subespaço sob consideração. Portanto, temos dois tipos de comprimentos de correlação que chamaremos aqui de ξ_{L4} e ξ_{L2} para os subespaços com e sem competição, respectivamente. Além disso, novos expoentes críticos devem ser inseridos para descrever as singularidades da função e dos comprimentos de correlação na criticalidade. Temos então os expoentes η_{L4} e ν_{L4} para o subespaço competitivo enquanto η_{L2} e ν_{L2} para o subespaço não competitivo, em analogia às definições para η e ν realizadas em sistemas sem competição.

Existe ainda uma sutileza importante com respeito ao modelo Lifshitz m -axial, pois, se $d = m$, teremos o subespaço não competitivo ausente e o sistema será isotrópico, possuindo um único comprimento de correlação. Neste trabalho, no que diz respeito a aplicação de condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet em sistemas competitivos do tipo Lifshitz m -axial, estamos interessados apenas nos sistemas ditos anisotrópicos ($m < d$). O caso isotrópico não pode ser obtido a partir do anisotrópico ao aplicarmos o limite $d \rightarrow m$ [75].

No capítulo 6, vamos introduzir o mesmo formalismo construído para o modelo de Ising, descrito nos capítulos 4 e 5, para tratar os efeitos de tamanho finito em sistemas exibindo pontos de Lifshitz anisotrópicos m -axiais e submetidos a condições de contorno de Neumann ou de

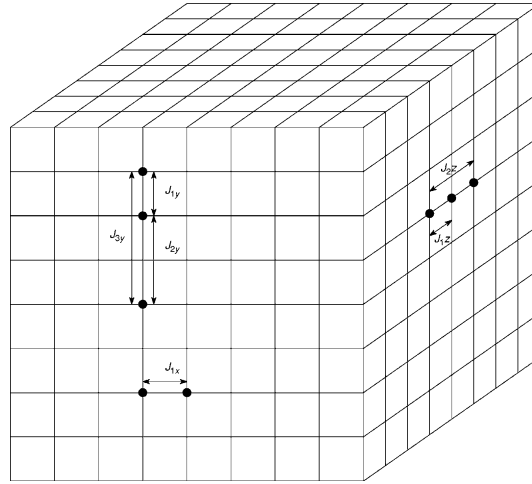


Figura 1.3: *Exemplo simples do modelo CECI com interações competitivas entre segundos vizinhos como também acoplamento entre terceiros vizinhos. Este sistema tem três comprimentos de correlação independentes e apresenta o que chamamos de comportamento crítico de Lifshitz genérico do terceiro caráter.*

Dirichlet. Começaremos com a formulação de campos sem massa e, em seguida, introduziremos a descrição em termos de campos massivos. Respeitando as condições de contorno impostas ao sistema, calcularemos os expoentes críticos quando a direção de tamanho finito é perpendicular aos m eixos de competição. Mostraremos que as condições para a validade da expansão em ϵ_L são similares àsquelas encontradas para os sistemas finitos sem competição. Mostraremos também a equivalência entre os nossos resultados para os expoentes críticos e aqueles obtidos para sistemas com o comportamento Lifshitz m -axial de tamanho infinito, uma vez que utilizaremos o mesmo método de aproximação para calcular as integrais de Feynman de ordens mais elevadas.

Com o intuito teórico de entendermos mais profundamente o que ocorre em sistemas com interações competitivas do tipo Lifshitz na região crítica, o que nos ajudará em futuras aplicações, passaremos agora a descrever um modelo mais geral que o m -axial, o qual será o foco das nossas investigações no sétimo capítulo. Nossa meta é calcular os expoentes críticos do modelo em sua configuração isotrópica por um método ainda não utilizado no caso que denominaremos como *isotrópico exato*. O termo *exato* refere-se ao cálculo sem aproximações das integrais de Feynman. Nesse estudo não aplicaremos condições de contorno, deixando esse passo na direção da

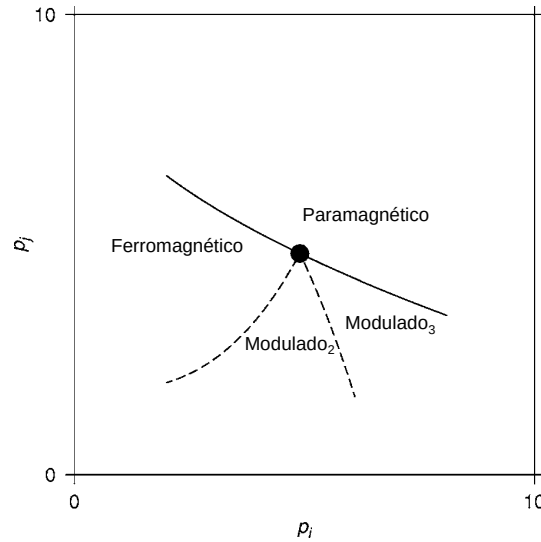


Figura 1.4: *Projeção do diagrama de fases para o comportamento crítico de Lifshitz genérico do terceiro caráter do modelo CECI. A linha contínua indica uma transição ordem-desordem e as linhas tracejadas indicam uma transição de primeira ordem entre as fases ordenadas (ferromagnética e moduladas). As fases ferromagnética e paramagnética continuam ocorrendo no ponto de Lifshitz genérico de terceiro caráter. Os parâmetros p_i e p_j estão associados a um conjunto de valores das razões J_L/J_1 , J_{L-1}/J_1 , $\dots$, J_2/J_1 , e a uma temperatura crítica de Lifshitz (T_L).*

compreensão dos sistemas competitivos mais gerais para trabalhos futuros. A ideia é incluímos no modelo de Ising original com d dimensões uma interação competitiva até segundos vizinhos em m_2 direções espaciais, outra, até terceiros vizinhos, em m_3 direções espaciais, perpendiculares ao subespaço com acoplamento apenas entre primeiros vizinhos e ortogonais ao subespaço de m_2 componentes, e assim por diante, incluindo dessa forma uma interação competitiva que atue até o L -ésimo vizinho em m_L direções. Esse modelo de interações arbitrárias é chamado de modelo *CECI* (*competing exchange coupling Ising model*) e pode ser utilizado tanto no caso anisotrópico quanto no isotrópico [76]. No cenário anisotrópico, cada subespaço dará origem a um distinto comprimento de correlação, ou seja, ξ_1 para as direções pertencentes ao subespaço não competitivo, ξ_2 para as direções pertencentes ao subespaço competitivo m_2 -dimensional, etc., e ξ_L caracterizando o subespaço m_L -dimensional. A figura 1.3 [76] representa um caso simples do modelo *CECI* em três dimensões, com $m_2 = m_3 = 1$ e $m_4 = \dots = m_L = 0$. Observe que existem dois subespaços competitivos e, portanto, três diferentes tipos de comprimento de correlação.

O diagrama de fases também acompanha essas notáveis mudanças, apresentando uma outra fase modulada (Figura 1.4) [76]. Note também que os modelos *ANNNI* e m -axial são casos particulares do modelo *CECI*.

A classe de universalidade do modelo *CECI* anisotrópico é identificada pelos parâmetros d , N , $m_2, \dots, m_L$. Para o caso isotrópico do modelo *CECI*, isto é, quando temos $m_n = d$, onde n representa qualquer valor de 1 a L , identificando o número fixo de vizinhos acoplados, observamos apenas um único comprimento de correlação e a classe de universalidade é identificada agora por N e $d = m_n$ ou, mais especificamente, N , d e n .

Sistemas competitivos arbitrários do tipo Lifshitz, descritos pelo modelo *CECI*, são exemplos de sistemas, que por apresentarem diversos tipos de eixos competitivos, exibem também múltiplos parâmetros de escala independentes. Para formular o problema das transições de fase nesses exemplos de sistemas complexos, foi introduzida uma técnica de teoria de campo escalar de massa nula com autointeração quártica para o campo (*parâmetro de ordem*) e com derivadas de ordem superior caracterizando cada eixo de competição. O objetivo nesse caso é determinar, perturbativamente, os expoentes críticos do caso isotrópico pela aplicação do método de *subtração mínima de pólos dimensionais* sem, no entanto, utilizar aproximações na resolução das integrais de Feynman. Vale ressaltar que o cálculo dos expoentes críticos por subtração mínima para o caso isotrópico exato do modelo *CECI* é, além do que será apresentado nos capítulos 4, 5 e 6, mais uma novidade trazida através deste trabalho.

Capítulo 2

Fenômenos críticos e teoria de campos

2.1 Introdução

Dentre as ferramentas matemáticas utilizadas para modelar teoricamente sistemas que se incorporam à chamada física da matéria condensada, a teoria de campos, inicialmente construída para descrever os fenômenos que só ocorrem em altas energias, tem demonstrado ser bastante eficaz no tratamento das transições de fase e fenômenos críticos. Podemos citar como principal exemplo disso os desenvolvimentos alcançados no que tange ao comportamento de quantidades universais provenientes das transições de fase de segunda ordem. Embora o tratamento dado a essa tão abrangente área da física através das construções da termodinâmica e mecânica estatística seja bem estabelecido, inclusive com inúmeras evidências experimentais em bom acordo com os modelos propostos, foi apenas após o trabalho de Wilson e colaboradores nos anos 70 [6], com a introdução das ideias sobre o grupo de renormalização (GR), que as leis de escala das funções de correlação puderam ser obtidas analiticamente, o que gerou um grande avanço no cálculo dos expoentes críticos, razões entre as amplitudes críticas das funções resposta e estabelecimento de classes de universalidade.

Neste capítulo, abordaremos de maneira sucinta, e, evidentemente, sem pretensões de descrever detalhes das deduções, o modelo de Ising e os elementos essenciais da teoria de campos envolvida na descrição dos fenômenos críticos do sistema de interesse. Mesmo que resumida, tal exposição nos dará o arcabouço necessário à concepção e implementação das futuras generalizações do modelo, pois a técnica pode ser aplicada em casos bem mais gerais, por exemplo, na descrição do comportamento crítico de sistemas com tamanho finito e tratamento das condições de contorno, o que será realizado no próximo capítulo. Através da descrição que se seguirá, estaremos aptos a desenvolver expansões perturbativas pela introdução do método de integrais funcionais onde utilizaremos o formalismo diagramático, seguindo assim o caminho indicado pela teoria de campos. Ao leitor interessado em mais detalhes, recomendamos as referências [15–17], sobre as quais se apoia esta explanação.

2.2 Representação do modelo de Ising em termos de campos contínuos

Para a construção do modelo de Ising para o magnetismo, consideraremos uma rede hipercúbica regular em d dimensões com espaçamento a (*parâmetro de rede*) entre seus vértices. Há de se frisar que os resultados para os expoentes críticos não são alterados pelo tipo de rede estudada, pois, sendo eles grandezas universais, não dependem de parâmetros geométricos específicos da rede e a escolha da rede hipercúbica é motivada por questões de simplicidade. A cada ponto $i = (1, 2, 3, \dots, N)$ dessa rede discreta, que denominamos de sítio, associamos uma variável s_i que pode assumir os valores também discretos $+1$ (para cima, “Up”) ou -1 (para baixo, “Down”). Se considerarmos que a variável s_i é uma variável de spin, para uma determinada configuração dos spins na rede, totalizando um conjunto com 2^N configurações possíveis (onde N é o número de sítios), poderemos escrever a energia do sistema como

$$E\{s_i\} = - \sum_{\langle i, j \rangle} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i, \quad (2.1)$$

onde $\langle i, j \rangle$ indica que a soma é realizada sobre os pares de vizinhos mais próximos, J_{ij} representa a interação entre os spins e h_i é o campo magnético externo aplicado que se acopla com o spin do sítio i de forma linear. Vemos a partir da equação (2.1) que, para J_{ij} positivo, a configuração com spins no mesmo sentido é favorecida (*acoplamento ferromagnético*), pois teremos mais baixa energia nessa situação; pelo mesmo motivo, para J_{ij} negativo, a configuração com spins antiparalelos é favorecida (*acoplamento antiferromagnético*).

A probabilidade de um estado ou configuração ocorrer é proporcional ao peso de Boltzmann definido como

$$P\{s_i\} = \exp[-\beta E\{s_i\}] = \exp\left(\sum_{\langle i, j \rangle} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i\right), \quad (2.2)$$

onde $\beta = (k_B T)^{-1}$, $K_{ij} \equiv \beta J_{ij}$ e $H_i \equiv \beta h_i$. Os símbolos k_B e T representam a constante de Boltzmann e a temperatura absoluta do sistema, respectivamente.

A função de partição é dada pela soma dos pesos de Boltzmann sobre as 2^N configurações, ou seja,

$$Z\{H_i\} = \sum_{\{s_i\}} \exp[-\beta E\{s_i\}] = \sum_{\{s_i\}} \exp\left[\sum_{\langle i, j \rangle} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i\right]. \quad (2.3)$$

A função $Z\{H_i\}$ acima tem a propriedade de gerar todas as funções de correlação do sistema. Isto significa que a partir dela temos acesso a todas as informações relevantes sobre o mesmo. Por exemplo, a magnetização média no sítio i é dada por

$$\mathcal{M}_i = \langle s_i \rangle_{H_i=0} = Z^{-1} \frac{\partial Z}{\partial H_i} \Big|_{H_i=0}. \quad (2.4)$$

A simetria da energia na troca de s_i por $-s_i$, quando $H_i = 0$, implica $\mathcal{M} = 0$ (*fase desordenada*). Também, se $J_{ij} = J_{i-j} = J_1$ (interações iguais para todos os primeiros vizinhos), quando $H_i = H$, o sistema é invariante por translação. Consequentemente $\langle s_i \rangle = \langle s \rangle$ e nós podemos escrever

$$\mathcal{M}(H) = \frac{1}{N} Z^{-1} \frac{\partial Z}{\partial H} = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle. \quad (2.5)$$

Os outros potenciais termodinâmicos que podem ser obtidos da função de partição não serão aqui explicitados e o leitor interessado é aconselhado a consultar a referência [17].

Passaremos agora a discutir dois procedimentos que permitem uma descrição do modelo de Ising em termos de campos escalares contínuos. É importante mencionar que o sistema discreto apresentado acima poderá ser modelado em termos de campos escalares contínuos pelo fato de seu comprimento de correlação ξ ser muito maior que a nas vizinhanças do ponto crítico (*região de interesse*), e por levarmos em consideração apenas distâncias grandes comparadas com a nas funções de correlação.

2.2.1 Método heurístico

O primeiro procedimento, embora heurístico, toma lugar de destaque aqui por possuir grande apelo didático, pois, com ele é possível identificar as constantes de proporcionalidade da lagrangiana de interesse em termos dos parâmetros característicos do sistema. Começando com a transformação de Hubbard - Stratonovich (*transformação gaussiana*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left(-\frac{1}{4} x_i V_{ij}^{-1} x_j + s_i x_i \right) = \text{Constante} \times \exp(s_i V_{ij} s_j), \quad (2.6)$$

onde os índices repetidos indicam uma soma e V_{ij} são os elementos de uma matriz simétrica positiva definida V , e impondo que os únicos elementos não nulos da matriz K_{ij} ocorram quando i e j forem primeiros vizinhos, a equação (2.3) pode ser reescrita como

$$Z\{H_i\} = \sum_{\{s_i\}} \exp(s_i K_{ij} s_j + H_i s_i) \propto \sum_{\{s_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N d\phi_i \exp \left[-\frac{1}{4} \phi_i K_{ij}^{-1} \phi_j + (\phi_i + H_i) s_i \right], \quad (2.7)$$

onde os campos auxiliares ϕ 's são as nossas variáveis contínuas. Usando a translação $\phi_i \equiv \phi(x_i) \rightarrow \phi_i - H_i$ na expressão (2.7) e definindo,

$$\mathcal{D}\phi \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N d\phi(x_i) \quad (2.8)$$

como a medida da integral, indicando que o sistema foi dividido em $N \rightarrow \infty$ cubos de volume a^d com cada coordenada x_i pertencente a um desses cubos, no que podemos chamar de aproximação hidrodinâmica (*onde a granulação do sistema não é levada em consideração*), chegamos a

$$Z\{H_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{4}(\phi_i - H_i)K_{ij}^{-1}(\phi_j - H_j) \right] \sum_{\{s_i\}} \exp(\phi_i s_i). \quad (2.9)$$

Podemos desenvolver o somatório acima da seguinte forma

$$\sum_{\{s_i\}} \exp(\phi_i s_i) = \prod_i [\exp(\phi_i) + \exp(-\phi_i)] = \prod_i 2(\cosh \phi_i) = Constante \times \exp \left[\sum_i \ln(\cosh \phi_i) \right]. \quad (2.10)$$

Aplicando agora a transformação linear, $\psi_i \equiv \frac{1}{2}K_{ij}^{-1}\phi_j$, nos campos, podemos escrever

$$Z\{H_i\} \propto \exp \left(-\frac{1}{4}H_i K_{ij}^{-1} H_j \right) \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\psi_i K_{ij} \psi_j + H_i \psi_i + \sum_i \ln[\cosh(2K_{ij}\psi_j)] \right\}. \quad (2.11)$$

Temos ainda que $(\ln \cosh x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \dots)$. Com isso podemos desenvolver o somatório em (2.11), ou seja,

$$\sum_i \ln[\cosh(2K_{ij}\psi_j)] = \sum_i \left[2(K_{ij})^2 - \frac{4}{3}(K_{ij}\psi_j)^4 + \dots \right]. \quad (2.12)$$

Conseguiremos simplificar ainda mais a nossa descrição se passarmos do espaço das coordenadas para o espaço dos momentos através da transformada de Fourier das quantidades envolvidas. Fazendo então

$$\psi_i \equiv \psi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \psi(\mathbf{k}), \quad (2.13a)$$

$$H_i \equiv H(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) H(\mathbf{k}), \quad (2.13b)$$

$$K_{ij} \equiv K(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \exp[(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j))] K(\mathbf{k}), \quad (2.13c)$$

e substituindo as expressões acima em (2.11), sabendo que para $K(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ real, $K(-k) = K^*(k)$, podemos reescrever o argumento da exponencial como

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{N} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} [K(\mathbf{k}) - 2|K(\mathbf{k})|^2] \psi(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) + H(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) \right\} + \\ & -\frac{4}{3N^2} \sum_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_4) K(\mathbf{k}_1) \psi(\mathbf{k}_1) \dots K(\mathbf{k}_4) \psi(\mathbf{k}_4). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Desenvolvendo agora a transformada de Fourier inversa para $K(\mathbf{k})$ e fazendo $R = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, temos

$$K(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} K(\mathbf{R}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) = \sum_{i,\alpha} K(\mathbf{R}_{i,\alpha}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{i,\alpha}), \quad (2.15)$$

onde o índice i indica a direção espacial e $\alpha = 1$ ou 2 , rotula os dois vizinhos mais próximos para cada direção. A expansão da exponencial em (2.15) em potências de $\mathbf{k}$ é dada por

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{i,\alpha}) = 1 - \frac{k_i^2 a^2}{2} + \dots, \quad (2.16)$$

onde o produto interno é dado por $(-1)^\alpha k_i a$, sendo a o parâmetro de rede e $|\mathbf{k}| = k$. Os termos ímpares não são levados em conta na expansão devido à simetria com respeito a α . Substituindo (2.16) em (2.15) ficamos com

$$K(\mathbf{k}) = \mathbf{K}_0(1 - \rho^2 k^2), \quad (2.17)$$

onde $\mathbf{K}_0 = 2d\beta J_1$, sendo que $2d$ é o número de vizinhos mais próximos em d dimensões, J_1 é a interação entre vizinhos mais próximos em qualquer direção, e

$$\rho = \frac{a}{(2d)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.18)$$

Substituindo agora (2.17) em (2.14) temos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{N} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{K}_0 [(1 - 2\mathbf{K}_0) + (4\mathbf{K}_0 - 1)\rho^2 k^2] \psi(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) + H(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) \right\} + \\ & -\frac{4\mathbf{K}_0^4}{3N^3} \sum_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}} \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \psi(\mathbf{k}_1) \dots \psi(\mathbf{k}_4), \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde consideramos até ordem k^2 para a parte quadrática nos campos e até ordem k^0 para a parte quártica, isto devido ao fato de que os outros termos são *irrelevantes* para o comportamento

crítico do sistema que estamos considerando. É interessante notar que para $\mathbf{K}_0 = \frac{1}{2}$, o termo independente de $\mathbf{k}$ na parte quadrática dos campos se anula, isso nos permite mensurar a temperatura crítica em uma aproximação de campo médio. Por essa aproximação vemos que $T_0 = 4dJ_1$. Vale ressaltar que a aproximação de campo médio não leva em conta as flutuações do campo. Expandindo agora $\mathbf{K}_0$ em torno de T_0 , podemos escrever

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2N} \left\{ \left(\frac{T - T_0}{T_0} + \rho^2 k^2 \right) \psi(-\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}) + H(-\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}) \right\} + \\ & - \frac{4}{3N^3} \left[1 - 4 \left(\frac{T - T_0}{T_0} \right) \right] \sum_{\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}} \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \psi(\mathbf{k}_1) \dots \psi(\mathbf{k}_4). \end{aligned} \quad (2.20)$$

No limite de volume infinito, podemos transformar as somas em $\mathbf{k}$ em integrais definindo as relações

$$\sum_{\mathbf{k}} f(k) = \frac{Na^d}{(2\pi)^d} \int d^d k, \quad (2.21a)$$

$$\delta_{\mathbf{k}}(k) = \frac{(2\pi)^d}{Na^d} \delta(k), \quad (2.21b)$$

onde em (2.21b) temos as funções delta de Kronecker e de Dirac, respectivamente. Redefinindo o campo ϕ como,

$$\phi(\mathbf{k}) \equiv \rho a^{\frac{d}{2}} \psi(\mathbf{k}), \quad (2.22)$$

teremos nesse limite que (2.20) se torna

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{T - T_0}{\rho^2 T_0} + k^2 \right) \phi(-\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}) + \rho^{-1} a^{-\frac{d}{2}} H(-\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}) + \\ & - \frac{d^2}{3a^{4-d}(2\pi)^{3d}} \left[1 - 4 \left(\frac{T - T_0}{T_0} \right) \right] \int d^d k_1 \dots d^d k_4 \delta_{\mathbf{k}} \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \phi(\mathbf{k}_1) \dots \phi(\mathbf{k}_4). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Podemos, através da transformada de Fourier inversa dos campos em (2.23), escrever

$$- \int \left[\left(\frac{1}{2} (|\nabla \phi|^2 + \mu^2 \phi^2) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi \right) \right] d^d x, \quad (2.24)$$

onde $\mu^2 \equiv \frac{T - T_0}{\rho^2 T_0}$, $\lambda \equiv \frac{8d^2}{a^{4-d}} \left[1 - 4 \left(\frac{T - T_0}{T_0} \right) \right]$ e $J \equiv \rho a^{\frac{d}{2}} H$. Este resultado é de fundamental importância, pois a analogia entre o tratamento para os fenômenos críticos, em mecânica estatística e teoria quântica de campos, se dá através do reconhecimento de que o argumento da

exponencial em (2.3) está escrito em (2.24) como o negativo da ação para uma teoria quântica de campo escalar com termos de interação e de fonte. Nesse caso específico, temos uma teoria de campos mapeada no espaço-tempo euclidiano através da rotação de Wick [77]. Com essa identificação temos que a função de partição é exatamente o funcional gerador de campos escalares, com ϕ sendo o análogo da magnetização. Temos ainda a massa μ , que como podemos ver, o seu quadrado é proporcional à diferença entre uma dada temperatura T e a temperatura de transição T_0 , ou seja, na temperatura crítica teremos uma teoria quântica de campo escalar não-massiva, e por fim, λ representando a constante de acoplamento, estando junto ao termo de interação ϕ^4 .

Podemos agora escrever o argumento da integral em (2.24) como sendo: $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_s$, onde

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(|\nabla\phi|^2 + \mu^2\phi^2), \quad (2.25)$$

é a densidade lagrangiana para o campo livre, isto é, sem interação entre os campos e sem fonte;

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (2.26)$$

é a densidade lagrangiana de interação e

$$\mathcal{L}_s = -J\phi, \quad (2.27)$$

é o termo de fonte.

É importante salientar, que o surgimento de um termo $|\nabla\phi|^2 \equiv |\nabla\mathcal{M}(x)|^2$ na densidade lagrangiana $\mathcal{L}'$, é uma característica desejável e importante dessa descrição. Por quanto este termo mede as flutuações (variações) no parâmetro de ordem $\mathcal{M}(x)$, flutuações essas que não podiam ser tratadas pelo modelo originalmente proposto por Landau. No modelo de Landau, a função de partição é escrita como a exponencial de um potencial termodinâmico, onde este, por sua vez, é função do parâmetro de ordem em torno do qual se faz uma expansão em série de potências. Esse tipo de expansão não pode, evidentemente, gerar um termo de derivada do parâmetro de ordem. Isto significa que o modelo despreza as flutuações do parâmetro de ordem na transição. Portanto, essa descrição torna-se “ruim”, do ponto de vista quantitativo, ao nos aproximarmos do ponto crítico, pois nessa região, que pode ser definida por $|\frac{T-T_0}{T_0}| \ll 1$, as flutuações tornam-se infinitamente grandes, e os termos de derivada do parâmetro de ordem tornam-se importantes.

2.2.2 Construção por análise das simetrias

A outra forma de obtermos a mesma densidade lagrangiana em (2.24), é definindo $\Phi_i(x)$ como um campo escalar com N componentes ($i = 1, 2, \dots, N$) e com coordenadas x em um espaço d dimensional como candidato a parâmetro de ordem (*magnetização*). Note que estamos tratando com N campos bosônicos ou um spin N dimensional. A partir disso, tendo como base

o campo e suas derivadas, podemos obter a densidade lagrangiana do sistema pela determinação das simetrias que devem ser obedecidas pelo campo para construir todos os possíveis invariantes com respeito ao grupo de simetria do sistema, levando em consideração, obviamente, as simetrias do espaço-tempo. No caso específico do modelo de Ising, como a interação entre dois pontos da rede só depende da distância entre eles, temos que, na fase desordenada, a densidade lagrangiana correspondente deve ter simetria interna $O(N)$ podendo ser escrita na seguinte forma

$$\mathcal{L}[\Phi(x)] = C_0(\nabla\Phi)^2 + C_1\Phi^2(x) + C_2\Phi^4(x), \quad (2.28)$$

onde

$$(\nabla\Phi)^2 = \sum_{i=1}^N \nabla\Phi_i(x) \cdot \nabla\Phi_i(x), \quad (2.29a)$$

$$\Phi^2(x) = \sum_{i=1}^N [\Phi_i(x)]^2, \quad (2.29b)$$

$$\Phi^4(x) = [\Phi^2(x)]^2 = F_{i,j,k,l} \Phi_i(x) \Phi_j(x) \Phi_k(x) \Phi_l(x), \quad (2.29c)$$

de onde determinamos o tensor

$$F_{i,j,k,l} = \frac{1}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (2.30)$$

Os índices repetidos em (2.29c) são somados de 1 a N . A partir de agora usaremos sempre essa convenção de soma para os índices repetidos, a não ser que digamos o contrário.

Apenas os três termos em (2.28) são relevantes na descrição do comportamento crítico do sistema. Quaisquer outros monômios com derivadas de ordens mais elevadas e potências maiores não contribuirão para as singularidades nos observáveis físicos, resultando em um mesmo comportamento crítico.

Os coeficientes C_0 , C_1 e C_2 que aparecem na lagrangiana de forma ainda indeterminada tem papel crucial no paralelo entre a mecânica estatística e a teoria de campos. Escolhendo C_0 como uma quantidade adimensional, vemos que C_1 deve ter dimensão de inverso de comprimento ao quadrado ou de momento ao quadrado. Em unidades naturais, C_1 passa então a ter dimensão de massa ao quadrado. Se fixarmos $C_0 = \frac{1}{2}$ e $C_1 = \frac{\mu^2}{2}$, poderemos entender μ como um parâmetro de massa em uma teoria quântica de campo escalar no espaço euclidiano [77]. No entanto, o nosso caso corresponde a uma descrição no contexto da termodinâmica de equilíbrio e portanto, é de se esperar que o campo $\Phi(x)$ não tenha dependência temporal. O próximo coeficiente a ser analisado é C_2 . Vemos que ele multiplica o termo quártico Φ^4 e, consequentemente, podemos entendê-lo como uma constante de acoplamento de um campo autointeragente. Aqui, escrevemos $C_2 = \frac{\lambda}{4!}$ onde o fator $\frac{1}{4!}$ entra como um artifício numérico no cancelamento dos fatores simetria dos diagramas de Feynman durante a expansão diagramática, o que será abordado posteriormente. Portanto, (2.28) escrita em termos da massa μ e da constante de acoplamento λ torna-se

$$\mathcal{L}[\Phi(x)] = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\Phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4(x) \quad (2.31)$$

A conexão da densidade lagrangiana acima com um sistema físico exibindo comportamento crítico é estabelecida fazendo μ^2 proporcional à temperatura reduzida $t = \frac{T-T_0}{T_0}$. A constante de proporcionalidade, como vimos, dependerá naturalmente de propriedades intrínsecas do sistema e dessa forma o paralelo entre os dois procedimentos fica estabelecido. Frisamos que as dependências de μ^2 e λ com um sistema em particular não serão importantes no decorrer do nosso estudo, desde que modelos construídos com (2.28) tendo $C_1 \sim t$ resultam sempre nos mesmos expoentes críticos.

2.3 Funcional gerador e funções de correlação

Voltando à função de partição (ou *funcional gerador*), podemos escrevê-la como

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \exp \left(- \int d^d x \{ \mathcal{L}[\Phi(x)] - \mathbf{J}(x)\Phi(x) \} \right)}{\int \mathcal{D}\Phi \exp \left(- \int \mathcal{L}[\Phi(x)] d^d x \right)}, \quad (2.32)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangiana sem o termo de fonte e o denominador é escrito para normalizar $Z[J]$, pois queremos que ele seja 1 para $J = 0$.

A função de green (*propagador*) do sistema livre é obtida através da equação de movimento abaixo

$$(\nabla_x^2 - \mu^2)G_0(x, y) = -\delta(x - y), \quad (2.33)$$

de onde já podemos escrever $G_0(x, y) = G_0(x - y) = G_0(y - x)$. Desse modo, sendo o termo de fonte linear no campo, podemos escrever (2.32) da seguinte maneira

$$Z[J] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ - \int \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) d^d x \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^d x d^d y J_i(x) G_0(x - y) J_i(y) \right\}, \quad (2.34)$$

já que as derivadas com respeito à fonte reconstituirão o termo de interação a sua forma original. Em (2.34), $\mathcal{N}^{-1}$ é o fator normalizador de Z , G_0 é o propagador da teoria livre, logo, a segunda exponencial é o funcional gerador da teoria livre, e será simbolizado aqui por $Z_0[J]$, ou seja,

$$Z[J] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ - \int \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) d^d x \right\} Z_0[J]. \quad (2.35)$$

Em termos de derivada funcional com respeito a J , nossa densidade lagrangiana de interação é escrita como

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \left[\frac{\delta}{\delta J(x)} \right]^4, \quad (2.36)$$

expandindo então a exponencial do termo acima, teremos

$$Z[J] = \mathcal{N}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{4!} \right)^n \int d^d x_1 \cdots d^d x_n \left[\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right]^4 \cdots \left[\frac{\delta}{\delta J(x_n)} \right]^4 Z_0[J]. \quad (2.37)$$

A partir de $Z[J]$ podemos definir

$$\begin{aligned} G_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}(x_1, \dots, x_E) &= \langle \Phi_{i_1}(x_1) \cdots \Phi_{i_E}(x_E) \rangle|_{J=0} \\ &= \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\Phi \Phi_{i_1}(x_1) \cdots \Phi_{i_E}(x_E) \exp \left(- \int dx \mathcal{L}[\Phi(x)] \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde $G_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}$ é denominada função de Green de E pontos da teoria que estamos descrevendo, a qual é a média dos campos $\Phi_{i_1}(x_1)$ a $\Phi_{i_E}(x_E)$. Em mecânica estatística temos como análogo das funções de Green de E pontos as funções de correlação, que são definidas a partir da função de partição. Devido à linearidade de $\mathcal{L}_s$ com o campo Φ , podemos escrever $G_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}$ como

$$G_{i_1, \dots, i_E}^{(E)}(x_1, \dots, x_E) = \frac{\delta^E Z[J]}{\delta J_{i_1}(x_1) \cdots \delta J_{i_E}(x_E)} \Big|_{J=0}. \quad (2.39)$$

Fazendo agora conexão com (2.4), a magnetização é obtida fazendo $E = 1$, ou seja, $\mathcal{M}_i(x) = \langle \Phi_i(x) \rangle|_{J=0} = G_i^{(1)}(x)$. A fase ordenada aparece quando $G_i^{(1)}(x) \neq 0$, com o surgimento de uma magnetização espontânea (*quebra espontânea de simetria*). O nosso estudo refere-se apenas à fase simétrica ($G_i^{(1)}(x) = 0$). Para $E = 2$, temos a função de correlação de 2 pontos, de onde podemos calcular o comprimento de correlação através da definição

$$\xi^2 = \frac{\int d^d(x_1 - x_2) (x_1 - x_2)^2 G_{i,i}^{(2)}(x_1, x_2)}{\int d^d(x_1 - x_2) G_{i,i}^{(2)}(x_1, x_2)}. \quad (2.40)$$

Note que estamos utilizando o formalismo da derivada funcional e, portanto, vamos explicitá-la rapidamente. Considerando uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Uma derivada funcional de $f(x)$ com relação a $f(y)$ tem a seguinte propriedade

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x - y). \quad (2.41)$$

o que é um resultado análogo a $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ no espaço das coordenadas. Portanto, a derivada de um funcional dado por

$$F[f] = \int d^d y g(y) f(y) \quad (2.42)$$

com relação a $f(x)$, resulta em

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} = g(x), \quad (2.43)$$

onde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em todo o espaço. Calcular as derivadas do funcional $Z_0[J]$ com relação a J é agora uma tarefa simples. Como exemplo, consideremos a expressão abaixo

$$G_{0i_1i_2}^{(2)}(x, y) = \frac{\delta^2 Z_0[h]}{\delta J_{i_1}(x) \delta J_{i_2}(y)} \Big|_{J=0} = \delta_{i_1 i_2} G_0(x - y). \quad (2.44)$$

Vemos que a função de correlação de 2 pontos na ausência de interação, ou seja, quando $\lambda = 0$, é exatamente igual ao propagador da teoria livre. O propagador da teoria livre no espaço das coordenadas é dado por

$$G_0(x_1, x_2) = G_0(x_1 - x_2) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\exp[ip(x_1 - x_2)]}{p^2 + \mu^2}. \quad (2.45)$$

As funções de Green até então consideradas são úteis no cálculo de quantidades como a magnetização, susceptibilidade e comprimento de correlação. Por outro lado, se quisermos calcular o calor específico ou a correlação da densidade de energia com a magnetização, devemos introduzir médias com o campo composto $\Phi^2(x)$

$$\begin{aligned} G_{i_1, \dots, i_E, j_1, \dots, j_L}^{(E, L)}(x_1, \dots, x_E, y_1, \dots, y_L) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-L} \langle \Phi_{i_1}(x_1) \dots \Phi_{i_E}(x_E) \Phi_{j_1}^2(y_1) \dots \Phi_{j_L}^2(y_L) \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-L} G_{i_1, \dots, i_E, j_1, j_1, \dots, j_L, j_L}^{(E+2L)}(x_1, \dots, x_E, y_1, y_1, \dots, y_L, y_L). \end{aligned} \quad (2.46)$$

De fato, usando o modelo de Ising em conjunção com a transformação de Hubbard-Stratonovich, pode-se mostrar que o calor específico está relacionado com o funcional gerador através da expressão

$$C = -\frac{1}{N} \left(\frac{\partial}{\partial \mu^2} \right)^2 \ln Z_0 = -\frac{1}{N} \left[\left\langle \frac{1}{2} \int \Phi^2(r) \frac{1}{2} \int \Phi^2(r) \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2} \int \Phi^2(r) \right\rangle^2 \right]. \quad (2.47)$$

Considerando então (2.46), o calor específico será dado por

$$C = - \int d(y_1 - y_2) [G^{(0,2)}(y_1, y_2) - G^{(0,1)}(y_1) G^{(0,1)}(y_2)]. \quad (2.48)$$

A equação (2.46) nos leva a concluir que este tipo de função também pode ser gerada, a partir do funcional gerador, pela adição de um termo na densidade lagrangiana (2.31). O termo é dado por

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N t_j(y) \Phi_j^2(y). \quad (2.49)$$

Podemos então expressar (2.46) da seguinte forma

$$G_{i_1, \dots, i_E, j_1, \dots, j_L}^{(E, L)}(x_1, \dots, x_E, y_1, \dots, y_L) = \frac{\delta^{E+L} Z[J, t]}{\delta J_{i_1}(x_1) \dots \delta J_{i_E}(x_E) \delta t_{j_1}(y_1) \dots \delta t_{j_L}(y_L)} \Big|_{t=0}^{J=0}. \quad (2.50)$$

A conexão entre as funções de Green que incluem operadores compostos, e as que possuem apenas operadores simples é dada pela expressão em (2.46), o que é bastante prático, pois sabendo os termos de uma podemos construir a outra. Um fato de fundamental importância aqui é que no limite no qual $t(y)$ torna-se independente de y , podemos considerá-lo como uma variação da massa, ou seja, da temperatura reduzida, visto que ele acompanha um operador Φ^2 assim como μ . Portanto, as funções $G^{(E,L)}$ podem ser usadas como coeficientes em uma expansão de $G^{(E)}$ em torno de um certo valor de temperatura, onde $G^{(E)}$ é a função de Green calculada com $\mu^2 + \delta t$ como coeficiente do termo quadrático na densidade lagrangiana (2.31).

Voltando às funções de Green de E pontos, podemos explorar a invariância translacional do sistema, sendo mais conveniente considerar a teoria no espaço dos momentos. A lei de conservação dos momentos proveniente dessa invariância tornará a nossa análise mais simples e direta durante a expansão em λ . Portanto, em termos das componentes de Fourier, reescrevemos (2.35) e $Z_0[J]$ como

$$Z[J] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left[-\frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \int d^d k_1 \cdots d^d k_4 \delta(k_1 + \cdots + k_4) \frac{\delta^4}{\delta J_{i_1}(-k_1) \cdots J_{i_4}(-k_4)} \right] Z_0[J], \quad (2.51)$$

$$Z_0[J] = \exp \left(\frac{1}{2} \int d^d k J_i(k) G_0(k) J_i(-k) \right), \quad (2.52)$$

onde definimos

$$G_0(k) = \frac{1}{k^2 + \mu^2}, \quad (2.53)$$

como a solução de (2.33) no espaço dos momentos. Além disso, a componente de Fourier das funções de correlação em (2.50) é dada por

$$G_{i_1, \dots, i_E, j_1, \dots, j_L}^{(E,L)}(k_1, \dots, k_E, p_1, \dots, p_L) = \frac{\delta^{E+L} Z[J]}{\delta J_{i_1}(-k_1) \cdots \delta J_{i_E}(-k_E) \delta t_{j_1}(-p_1) \cdots \delta t_{j_L}(-p_L)} \Big|_{t=0}^{J=0}. \quad (2.54)$$

Considerando a definição (2.40) também no espaço dos momentos com a função de correlação em ordem zero dada em (2.44), chegamos à expressão

$$\xi^2 = \left[-\frac{1}{G_0(k)} \frac{\partial}{\partial k^2} G_0(k) \right]_{k=0}. \quad (2.55)$$

Substituindo $G_0(k)$ apresentado em (2.53), calculamos

$$\xi = \sqrt{2} \mu^{-1} \propto t^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.56)$$

Comparando a expressão acima com (1.6), determinamos o expoente $\nu = \frac{1}{2}$ em ordem zero na teoria da perturbação. Observe que nessa ordem ν é igual ao resultado fornecido pela teoria de campo médio.

O resultado (2.44) corresponde ao termo de ordem zero em λ na expansão da função de Green de 2 pontos. Os demais termos são obtidos através da série de Taylor da função exponencial presente em (2.51). Podemos ver então que o n -ésimo termo dessa expansão (a menos da constante $\mathcal{N}^{-1}$) resultará de

$$\frac{\delta^2}{\delta J_{i_1}(-k_1)\delta J_{i_2}(-k_2)} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{4!}\right)^n \times \\ \times \left[F_{i_1, \dots, i_4} \int d^d q_1 \dots d^d q_4 \delta(q_1 + \dots + q_4) \frac{\delta^4}{\delta J_{i_1}(-q_1) \dots J_{i_4}(-q_4)} \right]^n Z_0[J] \Big|_{J=0} \quad (2.57)$$

No espaço dos momentos teremos, a partir de um certo par de derivadas aplicadas em $Z_0[J]$, um propagador do tipo $\delta(k+k')\delta_{ij}G_0(k)$. Uma simplificação interessante e apropriada no tratamento dos termos da expansão acima, são os diagramas de Feynman, os quais tem como regra básica associar a cada propagador G_0 , que aparece na expansão, uma linha que conecta os pontos especificados em seu argumento com o ponto especificado pela fonte. Cada propagador pode conter momentos externos (referentes a k_1 e k_2) e/ou momentos internos (referentes aos q 's da integração). A aplicação das derivadas fará com que os propagadores sejam combinados de todas as formas possíveis em seus momentos externos e internos, em acordo com o estabelecido pelo teorema de Wick. O resultado é uma gama muito grande de termos surgindo a cada ordem na expansão de tais funções. Os diagramas de Feynman aparecem nesse contexto como uma forma conveniente de representar cada um desses termos. A construção de tais diagramas possui regras bem específicas e apresentamos abaixo um roteiro básico a ser seguido:

1 - *Cada propagador é representado por uma linha:* —.

Propagadores com pelo menos um momento externo corresponderão a uma linha externa (*perna*) enquanto que propagadores com apenas momentos internos comporão uma linha interna.

2 - *Cada interação é representada por um vértice:* .

O número de linhas tracejadas indica quantos propagadores devem ser conectados a esse vértice. Para uma interação do tipo Φ^4 , temos sempre 4 propagadores.

3 - *Cada diagrama possui um fator de simetria.*

O fator de simetria refere-se ao número de possibilidades de combinações de linhas externas e internas com os vértices resultando em diagramas com a mesma estrutura topológica.

Para exemplificar, consideremos as duas contribuições resultantes de (2.57) para a função de Green de 2 pontos em ordem λ ($n = 1$) mostradas na figura (2.1).



Figura 2.1: Diagramas de Feynman de ordem λ .

Levando em consideração as regras acima, podemos escrever as seguintes representações

$$1 \text{---} 2 = \delta(k_1 + k_2) \delta_{i_1, i_2} G_0(k_1), \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 &= 12 \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, i_2, l, l} \int d^d q_1 \dots d^d q_4 \delta(q_1 + \dots + q_4) \delta(k_1 + q_1) G_0(k_1) \delta(k_2 + q_2) G_0(k_2) \times \\ &\times \delta(q_3 + q_4) G_0(q_3) = \frac{N+2}{6} \lambda \delta_{i_1 i_2} \delta(k_1 + k_2) [G_0(k_1)]^2 \int d^d q G_0(q), \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde usamos o fato que $G_0(q) = G_0(-q)$. Os índices 1 e 2 que rotulam os diagramas acima referem-se aos pares (k_1, i_1) e (k_2, i_2) , respectivamente. O fator 12 corresponde ao número de possibilidades de construirmos o segundo diagrama. Ou seja, temos inicialmente 4 possibilidades para ligar a primeira linha externa ao vértice, multiplicada por 3 possibilidades de ligar a segunda linha externa ao mesmo vértice e por último, uma única forma de conectar as linhas internas, formando assim o laço (*loop*). Além disso, temos um $\delta(k_1 + k_2)$ presente em todos os diagramas. Ele explicita a invariância translacional do sistema, traduzida no espaço dos momentos como uma lei de conservação dos momentos. Semelhantemente, para o diagrama 2.1(b), podemos escrever

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 &= 12 \frac{\lambda}{4!} F_{k, k, l, l} \delta_{i_1 i_2} \delta(k_1 + k_2) G_0(k_1) \int d^d q_1 \dots d^d q_4 \delta(q_1 + \dots + q_4) \delta(q_1 + q_2) G_0(q_1) \times \\ &\times \delta(q_3 + q_4) G_0(q_3) = \frac{N(N+2)}{6} \lambda \delta_{i_1 i_2} \delta(k_1 + k_2) G_0(k_1) \int d^d q_1 d^d q_2 G_0(q_1) G_0(q_2). \end{aligned} \quad (2.60)$$

É interessante observar que o diagrama acima é dado pelo simples produto de um propagador com o diagrama , denominado diagrama de vácuo por não possuir linhas externas.

Os diagramas de vácuo são eliminados naturalmente no decorrer da construção pela condição de normalização $Z[J=0] = 1$. Tal condição aplicada em (2.35) implica que devemos ter, até ordem λ , a seguinte expressão para $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} = 1 - \bigcirc \text{---} + O(\lambda^2). \quad (2.61)$$

Portanto, a função de Green de 2 pontos é dada diagramaticamente por

$$G_{i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2) = 1 \text{---} 2 + 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + O(\lambda^2), \quad (2.62)$$

sem a contribuição do diagrama da figura 2.1(b). É possível mostrar que todos os diagramas de vácuo são eliminados ordem a ordem na expansão em λ . Na figura 2.2, temos as contribuições de ordem λ^2 para (2.62) já sem os diagramas de vácuo.

As próximas funções a serem calculadas seriam as funções de correlação de 3 pontos, porém, estas são nulas, pois, de acordo com (2.39), haverá um número ímpar de derivadas aplicadas

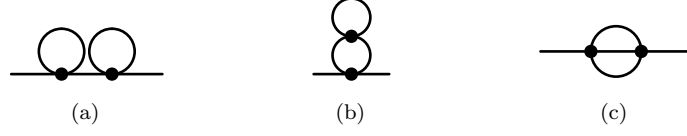


Figura 2.2: Diagramas de ordem λ^2 para a função de correlação normalizada (2.62).

em $Z_0[J]$ para $J = 0$. Cosequentemente, todas as funções com um número ímpar de pontos também serão nulas. Assim, a próxima função não nula será a de 4 pontos. Em ordem zero, teremos produtos de propagadores na forma $\delta(k_1 + k_2)G_0(k_1)\delta(k_3 + k_4)G_0(k_3)$, levando em conta a permutação dos índices, a expressão, em termos de diagramas, fica

$$G_{i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) = \frac{1}{2} \overline{\text{---}}_4^3 + \frac{1}{2} \overline{\text{---}}_3^4 + \frac{1}{3} \overline{\text{---}}_4^2 + O(\lambda) \quad (2.63)$$

As figuras 2.3 e 2.4, trazem as contribuições de ordens λ e λ^2 , respectivamente.



Figura 2.3: Contribuições de ordem λ para a função (2.63).

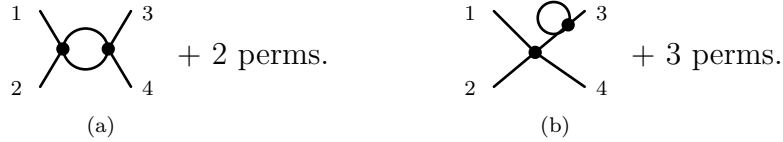


Figura 2.4: Contribuições de ordem λ^2 para a função (2.63).

A simbologia *perms.* acima indica permutações entre os números 1, 2, 3 e 4. Temos, por exemplo, que

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \times \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \text{---} \times \text{---} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = -\lambda F_{i_1, \dots, i_4} \delta(k_1 + \dots + k_4) G_0(k_1) \dots G_0(k_4). \quad (2.64)$$

Para exemplificar a utilidade da representação diagramática, vamos desenvolver o raciocínio para a construção da fórmula matemática do diagrama da figura 2.4(a). Embora este seja o caminho inverso, pois, como vimos, os diagramas originalmente surgiram das equações, com muita prática e conhecimento das regras para construção dos diagramas, pode-se fazer as expansões sem passar pelo estágio calculacional, o qual, dependendo da ordem de perturbação que se queira obter, torna-se um trabalho bastante extenso.

A construção da expressão a partir do diagrama segue o seguinte roteiro:

1 - *Análise do número de vértices de interação.*

Como o diagrama (figura 2.4(a)) possui dois vértices, conclui-se que este termo é de segunda ordem na expansão, portanto atribui-se a ele um fator de $(\frac{1}{2!})$ e cada vértice carrega um termo $(-\frac{\lambda}{4!})$ advindo da interação na teoria Φ^4 .

2 - Fator de Simetria.

O fator de simetria aqui segue a mesma regra já mencionada anteriormente. No caso do gráfico na figura 2.4(a) temos $(4!)^2$ possibilidades.

3 - Propagadores Externos (Pernas).

A cada perna associamos um propagador livre G_0 e estes não são integrados. O diagrama na figura 2.4(a) é de um termo da função de Green de 4 pontos, teremos então 4 propagadores livres, ou seja, $G_0(k_1)G_0(k_2)G_0(k_3)G_0(k_4)$.

4 - Fluxo de Momento.

Inicialmente, colocamos setas de momento entrando ou saindo de cada vértice arbitrariamente e definimos se o sentido positivo é saindo ou entrando no gráfico. Essa escolha também é arbitrária. Para cada vértice atribui-se um delta de Dirac cujo argumento é a soma dos momentos em cada vértice levando-se em conta o sentido escolhido para o sinal positivo e negativo. Essa é uma maneira de explicitar a conservação de momento em cada vértice. A mesma ideia é imposta aos índices i 's.

5 - Propagadores internos.

Também atribui-se a cada linha interna um propagador livre G_0 , sendo estes integrados, isto é, teremos uma integral para cada propagador interno, cuja integração é sobre o momento de cada propagador.

Assim, para a figura 2.4(a), após a utilização das propriedades da função delta de Dirac, temos a seguinte expressão matemática

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \lambda^2 \delta(k_1 + \dots + k_4) \frac{1}{18} [(N+4)\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + 2\delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 2\delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}] \times \\
 &G_0(k_1) \cdots G_0(k_4) \int d^d q G_0(q+k_1+k_2) G_0(q). \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

onde o fator δ em evidência indica a conservação do momento. O gráfico 2.4(a), dado como exemplo para essa construção, constitui-se como a peça principal no que diz respeito ao tratamento das divergências na teoria crítica. Os outros gráficos, que também serão utilizados para a descrição do problema proposto, divergirão, por possuírem o diagrama de Feynman acima como sub-diagrama.

Na seção anterior, definimos também as funções de correlação de campo composto. Aqui iremos considerar especificamente a função abaixo

$$G_{i_1, i_2, j}^{(2,1)}(x_1, x_2, y) = \frac{1}{2} G_{i_1, i_2, j, j}^{(4)}(x_1, x_2, y, y), \quad (2.66)$$

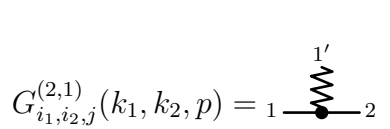
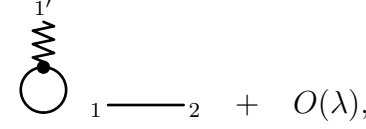
devido a sua importância no estudo da renormalização das quantidades físicas do sistema abor-

dados. No espaço dos momentos, podemos mostrar que

$$G_{i_1, i_2, j}^{(2,1)}(k_1, k_2, p) = \frac{1}{2} \int d^d q G_{i_1, i_2, j, j}^{(4)}(k_1, k_2, q, p - q). \quad (2.67)$$

Portanto, diagramaticamente, temos

$$G_{i_1, i_2, j}^{(2,1)}(k_1, k_2, p) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + O(\lambda), \quad (2.68)$$

no qual introduzimos as representações

$$\text{diagrama 1} = \delta(k_1 + k_2 + p) \delta_{i_1, j} \delta_{i_2, j} G_0(k_1) G_0(k_2) \quad \text{e} \quad \text{diagrama 2} = \frac{1}{2} \delta(p) \int d^d q G_0(q). \quad (2.69)$$

O índice $1'$ rotula o par (p, j) . **Não** estamos utilizando a convenção da soma dos índices repetidos nos resultados acima. Note que tudo se passa como se tivéssemos colapsado duas pernas de $G^{(4)}$ em apenas uma, para formar $G^{(2,1)}$. Em ordem λ , temos os diagramas mostrados na figura 2.5.

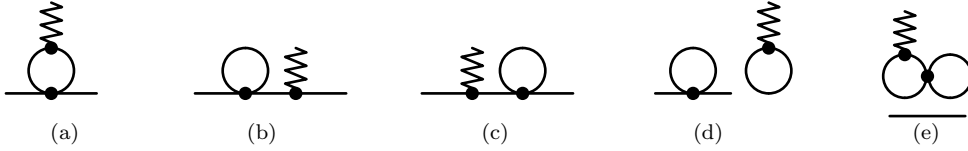


Figura 2.5: Contribuições de ordem λ para a função (2.68).

É importante mencionar que a maioria dos diagramas apresentados nesta seção exibem divergências para um determinado número d de dimensões espaciais. Tais diagramas tem pelo menos uma das seguintes integrais em sua estrutura

$$D_1(\mu) \equiv \int d^d q G_0(q) = \int \frac{d^d q}{q^2 + \mu^2}, \quad (2.70a)$$

$$I_2(k; \mu) \equiv \int d^d q G_0(q + k) G_0(q) = \int \frac{d^d q}{[(k + q)^2 + \mu^2](q^2 + \mu^2)}. \quad (2.70b)$$

Note que as integrais acima estão relacionadas aos diagramas expressos pelas equações (2.59) e (2.65), respectivamente.

2.4 Funções de vértice

As expansões diagramáticas realizadas na seção anterior podem ser simplificadas com a definição de novos tipos de funções de correlação. Consideremos para isso o funcional gerador que corresponde à energia livre de Helmholtz

$$F[J] = \ln Z[J]. \quad (2.71)$$

Definimos então as funções de Green conectadas através de

$$G_{c i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E) \equiv \frac{\delta^E F[J]}{\delta J_{i_1}(-k_1) \dots \delta J_{i_E}(-k_E)} \Big|_{J=0}, \quad (2.72)$$

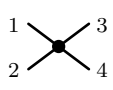
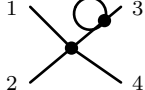
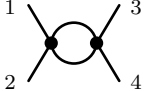
onde o rotulo c indica que se trata de uma função de Green conectada. Já vimos que na fase desordenada temos $\langle \Phi(x) \rangle|_{J=0} = 0$, podemos ver também que

$$G_{c i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2) = G_{i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2), \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} G_{c i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) &= G_{i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) - G_{i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2) G_{i_3, i_4}^{(2)}(k_3, k_4) \\ &\quad - G_{i_1, i_3}^{(2)}(k_1, k_3) G_{i_2, i_4}^{(2)}(k_2, k_4) - G_{i_1, i_4}^{(2)}(k_1, k_4) G_{i_2, i_3}^{(2)}(k_2, k_3). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Portanto, $G_{c i_1, i_2}^{(2)}(k_1, k_2)$ em (2.73) terá a mesma expansão diagramática da função de Green de 2 pontos. Por outro lado, as subtrações em (2.74) resultarão na remoção dos diagramas desconectados. Um exemplo de diagrama desconectado é dado na figura 2.3(b), composto simplesmente pelo produto de dois outros diagramas. Todos os termos de ordem λ^0 em (2.63) também são exemplos de diagramas desconectados. Portanto, (2.74) terá a seguinte expansão

$$\begin{aligned} G_{c i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + 3 \text{ perms.} \\ &\quad + \text{Diagram 3} + 2 \text{ perms.} + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (2.75)$$

A conservação dos momentos externos em todos os diagramas conectados resulta em um fator δ como aqueles presentes em (2.59) e (2.65). Logo, podemos escrever as funções de Green conectadas como

$$G_{c i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E) = \delta(k_1 + \dots + k_E) \overline{G}_{c i_1, \dots, i_E}^{(E)}(k_1, \dots, k_E), \quad (2.76)$$

onde o fator delta torna-se uma informação redundante, visto já estar implícito no processo de construção dos diagramas. A partir de agora, vamos nos referir a $\overline{G}_c^{(E)}$ como as funções de

Podemos definir ainda outra função de correlação a fim de tornar mais convenientes as expansões diagramáticas, o que está relacionado basicamente com a diminuição da quantidade de termos em cada ordem de expansão. O funcional gerador que corresponde à energia livre de Gibbs $\Gamma[\bar{\Phi}]$, obtida a partir de $F[J]$ através de uma transformada de Legendre, nos dará uma expansão ainda mais fundamental. Temos então

onde $\overline{\Phi}(x) \equiv \langle \Phi(x) \rangle$ corresponde à magnetização. Semelhantemente a (2.72), definimos as funções

denominadas *funções de vértice*. A conservação dos momentos também está presente nesse caso, ou seja, devemos ter

Se tomarmos $E = 2$, é possível mostrar a partir de (2.77) que a função de Green $G_c^{(2)}$ está relacionada com $\Gamma^{(2)}$ através de

Como resultado, teremos a fatoração

A função de vértice $\overline{\Gamma}^{(2)}$ é dada pela seguinte expansão diagramática

As linhas tracejadas nos diagramas acima indicam a ausência de linhas externas. Ou seja, cada propagador $G_0(k)$ em função de um momento externo (k_1 ou k_2) foi removido dos diagramas acima, resultando nas seguintes representações

$$\text{---}\bullet\text{---}\bigcirc\text{---}\bullet\text{---} = \lambda^2 \frac{(N+2)^2}{36} I_2(k=0; \mu) D_1(\mu), \quad (2.83b)$$

As integrais D_1 e I_2 já foram definidas em (2.70a) e (2.70b). Além disso, temos

As mesmas regras usadas na construção de (2.82) permanecem válidas para a função de vértice de 4 pontos. Apenas os diagramas nas figuras 2.3(a) e 2.4(a) são $1PI$ até ordem λ^2 e, portanto, teremos a expansão

$$\bar{\Gamma}^{(2,1)}(k, p) = \text{---}\bullet\text{---} + \text{---}\bullet\text{---} + O(\lambda^2), \quad (2.89)$$

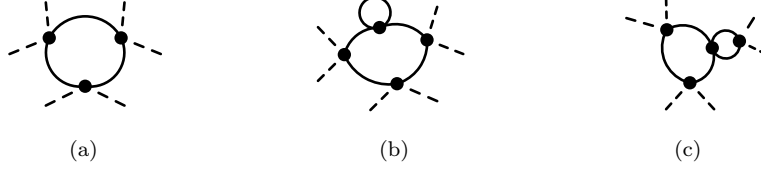


Figura 2.6: Diagramas envolvidos na expansão da função de vértice $\Gamma^{(6)}$.

com as representações dadas a seguir

$$\text{---}\bullet\text{---} \stackrel{p}{\text{---}} \text{---} = 1, \quad (2.90a)$$

$$\text{---}\bullet\text{---} \stackrel{p}{\text{---}} \text{---} = -\lambda \frac{N+2}{6} I_2(p; \mu). \quad (2.90b)$$

As funções $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$ e $\Gamma^{(2,1)}$ contêm as divergências fundamentais (*divergências primitivas*) da teoria Φ^4 quando a dimensão espacial é $d = 4$. Isso significa que as divergências em outras funções de correlação são resultantes da inserção de quaisquer diagramas presentes em (2.82), (2.85) ou (2.89). Tais singularidades são removidas através de constantes multiplicativas (*constantes de renormalização*) e da redefinição da massa e da constante de acoplamento. As únicas exceções a essa regra são dadas pelas funções $\Gamma^{(0,0)}$, $\Gamma^{(0,1)}$ e $\Gamma^{(0,2)}$, cujas expansões já são infinitas em primeira ordem, tais divergências só podem ser removidas aditivamente. Para o cálculo dos expoentes críticos não é necessário tratar dessas exceções e, por isso, vamos nos restringir apenas às funções de vértice que podem ser renormalizadas multiplicativamente. Para exemplificar como a renormalização de $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$ e $\Gamma^{(2,1)}$ está relacionada com a remoção das divergências nas demais funções de vértice, consideremos os três diagramas pertencentes à função de vértice de 6 pontos mostrados na figura 2.6.

O diagrama 2.6(a) corresponde ao primeiro termo da expansão de $\Gamma^{(6)}$, sendo finito em $d = 4$. Prosseguindo para ordens mais elevadas na expansão, chegamos aos diagramas 2.6(b) e 2.6(c). Todos eles são divergentes como resultado da inserção dos subdiagramas dados em (2.83a) e (2.86b), respectivamente. De uma forma geral, todos os infinitos presentes nessa expansão são devidos às inserções de diagramas *1PI* das funções de vértice de 2 e 4 pontos. Portanto, se removermos as divergências dessas funções, estaremos eliminando também os infinitos de todas as outras funções de vértice com um número maior de pontos. Podemos generalizar esse argumento para incluir também as funções de vértice de campo composto, nas quais a inserção dos diagramas de $\Gamma^{(2,1)}$ constitui também uma das fontes de divergência. Por esse motivo, as funções dadas em (2.82), (2.85) e (2.89), serão os principais objetos de estudo no procedimento de renormalização.

2.5 Expansão no número de *loops*

Antes de falarmos propriamente de renormalização, precisamos explicitar alguns detalhes sobre a expansão em *loops*. Ainda tratando sobre a expansão diagramática, verifica-se que se um diagrama (gráfico) possui I linhas internas (propagadores internos) e n vértices de interação, terá então I integrais de momento e n deltas de Dirac, dos quais, após manipulação matemática trivial, restará apenas um que explicitará a conservação do momento total no diagrama. Com isso, o número total de integrais de momento será

$$l = I - (n - 1), \quad (2.91)$$

onde l é o número de *loops* (laços) do diagrama. Ainda temos que, se E é o número de linhas externas (pernas) do diagrama, podemos obter

$$I = \frac{1}{2}(4n - E). \quad (2.92)$$

A expressão (2.92) traduz uma dependência natural, pois ao fixarmos o número de pernas externas, limitamos também o número de linhas internas, visto que cada vértice de interação aceita apenas um número fixo de propagadores conectados a ele. Substituindo agora (2.92) em (2.91), encontramos

$$l = n + 1 - \frac{E}{2}. \quad (2.93)$$

A equação (2.93) nos dá a ligação entre a expansão no número de vértices n , isto é, a ordem da constante de acoplamento, e a expansão no número de *loops*. Observe que para $E = 2$ (função de Green de 2 pontos) temos $l = n$. Isto implica que se quisermos uma expansão até a ordem l de *loops*, devemos ir até a ordem n na constante de acoplamento. Já para $E = 4$ (função de Green de 4-pontos), uma expansão até a ordem l de *loops* deve ser uma expansão até a ordem $n = l + 1$ na constante de acoplamento. Por exemplo, na função de vértice (2.82), temos o número de *loops* correspondendo à ordem em λ . Algo semelhante também acontece com (2.85), onde temos $l = n - 1$ para todas as ordens. A figura 2.7 mostra isso ocorrendo em ordem de 2 *loops*.

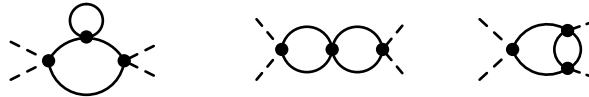


Figura 2.7: Contribuições de ordem 2 *loops* para $\Gamma^{(4)}$.

É interessante que para as funções de Green mais simples, podemos redefinir a interação por um fator multiplicativo e associá-lo à tão conhecida constante de Planck. Essa constante multiplicativa acompanhará todos os vértices de uma expansão em *loops*. Logo, a ordem zero dessa expansão pode descrever a teoria clássica, visto que não existem vértices nessa ordem (*teoria livre*), o que pode ser entendido em termos do teorema de Ehrenfest.

O conceito de expansão em *loops* é utilizado naturalmente no procedimento da renormalização. Como exemplo, consideremos a redefinição da massa μ da densidade lagrangiana (2.31). Podemos reescrevê-la em termos de uma nova massa m_1 até ordem de 2 *loops* da seguinte forma

$$\mu^2 = m_1^2 - \lambda \frac{N+2}{6} D_1(m_1) + \lambda^2 \frac{N+2}{18} D_3(k=0; m_1), \quad (2.94)$$

com as integrais D_1 e D_3 definidas respectivamente em (2.70a) e (2.84). Note que o segundo e o terceiro termos acima correspondem respectivamente aos diagramas representados em (2.83a) e (2.83c) com os propagadores calculados com a massa m_1 . Substituindo μ acima em (2.82), teremos o segundo e o terceiro termo removidos, resultando na expansão

$$\bar{\Gamma}^{(2)}(k; m_1) = k^2 + m_1^2 - \left(\text{diagrama } k \text{ com loop} - \text{diagrama } k=0 \text{ com loop} \right), \quad (2.95)$$

onde todos os propagadores são agora calculados com a massa m_1 . Procedendo da mesma maneira em (2.85), chegamos à

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{i_1, \dots, i_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4; m_1) = & \text{diagrama } \begin{matrix} 1 & & 3 \\ \diagdown & & \diagup \\ & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ 2 & & 4 \end{matrix} - \left(\text{diagrama } \begin{matrix} 1 & & 3 \\ \diagdown & & \diagup \\ & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ 2 & & 4 \end{matrix} - \text{diagrama } \begin{matrix} 1 & & 3 \\ \diagdown & & \diagup \\ & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ 2 & & 4 \end{matrix} + 2 \text{ perms.} \right) + \\ & + \text{diagrama } \begin{matrix} 1 & & 3 \\ \diagdown & & \diagup \\ & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ 2 & & 4 \end{matrix} + 5 \text{ perms.} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Os diagramas com 2 *loops* terão as seguintes representações

$$\begin{aligned} \text{diagrama } \begin{matrix} 1 & & 3 \\ \diagdown & & \diagup \\ & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ 2 & & 4 \end{matrix} = & \frac{\lambda^3}{324} [(N^2 + 6N + 12)\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \\ & + 4\delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + 4\delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}] [I_2(k_1 + k_2; m_1)]^2, \end{aligned} \quad (2.97a)$$

$$\begin{aligned} \text{diagrama } \begin{matrix} 1 & & 3 \\ \diagdown & & \diagup \\ & \bullet & \\ \diagup & & \diagdown \\ 2 & & 4 \end{matrix} = & \frac{\lambda^3}{162} [(3N + 10)\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \\ & + (N + 6)\delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + (N + 6)\delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}] I_4(k_1 + k_2, k_3; m_1), \end{aligned} \quad (2.97b)$$

onde I_2 foi definido em (2.70b) e a integral de Feynman I_4 é dada por

$$I_4(k, k'; m_1) = \int \frac{d^d q_1 d^d q_2}{[(q_1 - k)^2 + m_1^2][(q_2 + k')^2 + m_1^2](q_1^2 + m_1^2)(q_2^2 + m_1^2)}. \quad (2.98)$$

Aplicando o mesmo procedimento em (2.89), temos

$$\bar{\Gamma}^{(2,1)}(k, p) = \text{diagrama } \begin{matrix} p \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{matrix} + \text{diagrama } \begin{matrix} p \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{matrix} + \text{diagrama } \begin{matrix} p \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{matrix} + \text{diagrama } \begin{matrix} p \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{matrix}, \quad (2.99)$$

cujas representações são

$$\text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \text{---} \bullet \text{---} = \lambda^2 \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 [I_2(p; m_1)]^2 \quad (2.100a)$$

$$\text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \text{---} \bullet \text{---} = \lambda^2 \left(\frac{N+2}{6} \right) I_4(k, p; m_1). \quad (2.100b)$$

Podemos observar que a redefinição da massa removeu todos os diagramas com inserção do subdiagrama dado em (2.83a). Podemos agora definir m_1 como um parâmetro finito e proporcional à temperatura reduzida enquanto que μ em (2.94) passa a ser infinito. Dessa forma, as divergências geradas pela integral (2.70a) foram removidas e obtemos uma expansão diagramática com menos termos, o que na prática é uma vantagem calculacional. Demos, portanto, um primeiro passo para a renormalização da teoria, embora, outras divergências ainda persistam nas expansões.

2.6 Divergências dos diagramas 1PI

Para manipular os infinitos restantes de forma analítica, é convencional utilizar o conceito de regularização, ou seja, podemos definir um ou mais parâmetros tal que a integral divergente seja expressa em termos desses parâmetros. Depois desse procedimento, podemos estabelecer um método de subtração das partes potencialmente divergentes nos resultados das integrais, o que, tomando os limites apropriados, resultará em expressões finais finitas para a teoria. A sequência de passos descrita acima corresponde à regularização acompanhada de uma renormalização (*subtração das partes infinitas*). Existem dois métodos de regularização amplamente utilizados em teoria de campos: o método do “cutoff” (*corte*) nos momentos e o esquema de regularização dimensional. Com respeito ao primeiro método, não o abordaremos de maneira explícita, pois, em nossos cálculos, usaremos apenas a técnica de regularização dimensional, que será apresentada posteriormente. Porém, é interessante fazer menção ao método do “cutoff” para tentar elucidar de forma simples a conexão entre vários tipos de interação, dentre elas a interação Φ^4 , e o número de dimensões espaciais nas quais as teorias interagentes são renormalizáveis. Para isso, algumas considerações sobre dimensionalidade se fazem necessárias para que possamos ter o domínio do método que será utilizado posteriormente para a renormalização das funções de vértice 1PI.

2.6.1 Divergências e dimensionalidade

A regularização por “cutoff” se dá pela introdução de um corte Λ no limite superior das integrais de Feynman, o que está relacionado ao limite físico inferior na escala de comprimento (o parâmetro de rede a). Podemos então explicitar as divergências das integrais de Feynman

em termos de Λ através da análise dimensional das funções de vértice, visto que sua relação com o parâmetro de rede é $\Lambda \sim \frac{1}{a}$.

A dimensão do campo ϕ pode ser determinada da parte livre da densidade lagrangiana ao impormos que o termo dinâmico multiplicado pelo elemento de volume seja adimensional. No espaço dos momentos teremos

$$[\phi] = \mathcal{L}^{-(\frac{d}{2}-1)} = \Lambda^{\frac{d}{2}-1}, \quad (2.101)$$

onde $\mathcal{L}$ simboliza a dimensão de comprimento e Λ é o seu inverso ou ainda a dimensão de momento. Da mesma forma chegamos à conclusão que $[\mu^2] = \Lambda^2$, ou seja, a massa ao quadrado possui dimensão de momento ao quadrado. Continuando com a nossa análise, consideremos agora uma interação do tipo

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{r!} \lambda_r \phi^r. \quad (2.102)$$

Pelos argumentos já citados chegamos a

$$[\lambda_r] = \Lambda^{r+d-\frac{1}{2}rd} \equiv \Lambda^{\delta_r}, \quad (2.103)$$

onde λ_r é a constante de acoplamento para uma teoria ϕ^r . Para a teoria Φ^4 , a dimensão da constante de acoplamento é então

$$[\lambda_4] = \Lambda^{4-d}. \quad (2.104)$$

Vemos que numa teoria Φ^4 , λ_4 é adimensional em $d = 4$. Ainda dentro dessas considerações verifica-se que a dimensão das funções 1PI no espaço dos momentos é

$$[\bar{\Gamma}^{(E)}(k_i)] = \Lambda^{E+d-\frac{1}{2}Ed}, \quad (2.105)$$

onde o expoente de Λ em (2.105) é comumente chamado de *dimensão canônica*. Se considerarmos então uma expansão até a n -ésima ordem de perturbação de uma função de vértice $\Gamma^{(E)}$ em uma teoria interagente ϕ^r em d dimensões, cada termo da expansão terá a dimensão dada por

$$\Lambda^{-n\delta_r+(E+d-\frac{1}{2}Ed)} \equiv \Lambda^\delta, \quad (2.106)$$

onde o segundo termo no expoente é a dimensão canônica. Portanto, o primeiro termo é a contribuição da constante de acoplamento, com n representando a ordem da perturbação e δ_r sendo definido por (2.103).

Observando (2.106), chegamos à conclusão de que a condição necessária e suficiente para que as divergências sejam independentes da ordem da teoria de perturbação é tornar a constante de acoplamento adimensional. Temos então que encontrar a dimensão para a qual $\delta_r = 0$. Essa dimensão é conhecida como a *dimensão crítica* (d_c). É fácil verificar que

$$d_c = \frac{2r}{r-2} = 2 + \frac{4}{r-2}, \quad (2.107)$$

de onde podemos concluir que quanto maior o valor de r , menor é a dimensão crítica d_c , aproximando-se de 2 para $r \rightarrow \infty$. Também concluimos que para a teoria Φ^4 , $d_c = 4$, o que pode ser obtido também por (2.104).

Para $d = d_c$ a teoria é *renormalizável*, pois, nessa dimensão, podemos remover as divergências ultravioletas das integrais por métodos de renormalização. Para $d > d_c$ a teoria é dita *não-renormalizável* e para $d < d_c$ é dita *super-renormalizável*.

Em termos de operadores, um operador (*interação*) que possui a dimensão crítica que adimensionaliza a constante de acoplamento, chamamos de *operador mais relevante*. Esse operador carrega uma forte divergência infravermelha (*teoria sem massa*) e qualquer interação com maior valor de r terá, como vimos em (2.107), menor d_c que ele. Portanto, próximo ao número crítico de dimensões espaciais do operador mais relevante, interações com maior r não terão singularidades no regime infravermelho, possuindo apenas singularidades no ultravioleta, sendo então *operadores irrelevantes* para o problema, pois são as divergências infravermelhas que estão associadas à física do sistema quando este atinge o ponto crítico, onde ocorre a invariância por escala. Uma forma conveniente de identificarmos operadores irrelevantes é observar quais os operadores que possuem uma dimensão negativa para a constante de acoplamento, ao nos aproximarmos da dimensão crítica do operador mais relevante. Suponhamos, por exemplo, um termo dinâmico genérico do tipo

$$\mathcal{O} = k^s \phi^r. \quad (2.108)$$

A dimensão de $\mathcal{O}$ é dada por

$$[\mathcal{O}] = [\phi]^r \Lambda^s \Rightarrow [\mathcal{O}] = \Lambda^{\frac{rd}{2} - r + s}. \quad (2.109)$$

Então, para a constante de acoplamento $\mathcal{A}$ correspondente a esse termo, teremos

$$\mathcal{A} k^s \phi^r \Rightarrow [\mathcal{A}] = \Lambda^{d - s + r - \frac{rd}{2}}. \quad (2.110)$$

O termo em (2.108), será relevante se a dimensão de $\mathcal{A}$ for nula ou positiva.

Exemplo 1: Teoria Φ^4 em $d = d_c = 4$

$$[\mathcal{A}] = \Lambda^{d_c - (s - r + \frac{rd_c}{2})} = \Lambda^4 \cdot \Lambda^{-(s - r + 2r)}, \quad (2.111)$$

o que nos leva a seguinte condição

$$s + r \leq 4. \quad (2.112)$$

Logo, podemos ter apenas os seguintes termos: ϕ^2 , ϕ^4 e $k^2 \phi^2$. Esses são os operadores relevantes na teoria ϕ^4 . Os termos ímpares são eliminados pela simetria $\phi \rightarrow -\phi$ e pela invariância

translacional ($k \rightarrow -k$).

Exemplo 2: Teoria ϕ^6 em $d = d_c = 3$

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, obtemos a condição

$$2s + r \leq 6. \quad (2.113)$$

Com isso, os operadores relevantes numa teoria ϕ^6 são: ϕ^6 , ϕ^4 , ϕ^2 e $k^2\phi^2$, onde as outras possibilidades são eliminadas também pela simetria $\phi \rightarrow -\phi$ e pela invariância translacional.

Exemplo 3: Teoria ϕ^3 em $d = d_c = 6$

Da mesma forma, temos uma condição para os operadores relevantes

$$s + 2r \leq 6. \quad (2.114)$$

De acordo com a condição acima, os operadores relevantes para uma teoria ϕ^3 são: ϕ^3 , ϕ^2 , ϕ , $k^2\phi$, $k^2\phi^2$ e $k^4\phi$, onde impusemos aqui apenas a invariância translacional, por se tratar de uma teoria ϕ^3 . Observe ainda que o termo ϕ^2 está presente em todos os exemplos citados. Isto ocorre porque ϕ^2 é sempre um operador relevante, pois se incorpora à parte livre em qualquer teoria.

Uma outra questão importante a ser tratada antes de introduzirmos de fato os conceitos de renormalização é: Como reconhecer quais são os gráficos que possuem uma *divergência primitiva*? (Divergência primitiva é entendida nesse contexto, como aquelas que não surgem da inserção de uma outra função de vértice em um gráfico.) De (2.106) temos que

$$\delta = -n\delta_r + \left(E + d - \frac{1}{2}Ed \right). \quad (2.115)$$

Podemos responder a questão se fizermos $d = d_c$ em (2.115), o que nos dá

$$\delta \equiv \delta_c(E) = d_c \left(1 - \frac{1}{2}E \right) + E. \quad (2.116)$$

Se utilizarmos agora a condição para que $\Gamma^{(E)}$ seja primitivamente divergente em $d = d_c$, que é

$$\delta_c(E) \geq 0, \quad (2.117)$$

o que nos leva a

$$E \leq \frac{2d_c}{d_c - 2} = r. \quad (2.118)$$

Então, para uma teoria Φ^4 no nível de 1 e 2 *loops*, apenas $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(4)}$ possuem divergências primitivas. Logo, uma vez que as tenhamos renormalizado, o cancelamento das divergências devido às inserções torna-se simples. Verifica-se que os argumentos levantados até agora são

também estendidos para as funções de vértice com operadores compostos e, por semelhante análise, podemos concluir que $\Gamma^{(2,1)}$ também possui divergência primitiva.

2.6.2 Regularização dimensional

Como já dissemos, não trabalharemos de forma explícita com o corte finito nos momentos, pelo contrário, tomaremos o limite $\frac{\Lambda}{\mu} \rightarrow \infty$ e faremos a continuação analítica da dimensão espacial d . Teremos então as integrais de Feynman regularizadas em termos do parâmetro dimensional $\epsilon = 4 - d$. Note que este parâmetro determina a dimensão canônica da constante de acoplamento, medindo o desvio em relação à dimensão crítica d_c . As divergências ultravioletas serão agora mapeadas em polos em ϵ , cujos infinitos são obtidos com a proximidade da dimensão crítica ($\epsilon \rightarrow 0$). Após a remoção de todos os polos através da renormalização das funções de correlação, quantidades universais como os expoentes críticos, além dos ingredientes necessários a sua obtenção, serão calculados em termos de expansões em potências de ϵ .

Como exemplo de regularização dimensional, calcularemos a integral (2.70b)

$$I_2(k; \mu) = \mu^{-\epsilon} \int \frac{d^d q}{[(q+k)^2 + 1](q^2 + 1)}. \quad (2.119)$$

Aqui, os momentos foram reescalados por $k \rightarrow \frac{k}{\mu}$ e $q \rightarrow \frac{q}{\mu}$. Todas as demais integrais de diagramas com ordem além de 1 *loop* são obtidas em termos de $I_2(k; \mu)$, logo, ela é o ponto de partida para a resolução de todas as outras. O primeiro passo consiste em expressar os denominadores referentes a cada propagador em termos de um único denominador. Faremos isso através dos chamados *parâmetros de Feynman*, os quais possuem a seguinte representação integral [78]

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{[xa_1 + (1-x)a_2]^{\alpha_1+\alpha_2}}, \quad (\text{Re } \alpha_1 > 0 \text{ e } \text{Re } \alpha_2 > 0) \quad (2.120)$$

O símbolo Γ na representação anterior corresponde à função Gamma de Euler. A partir de (2.120) reescrevemos (2.119) como

$$I_2(k; \mu) = \mu^{-\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(q^2 + 2xk \cdot q + xk^2 + 1)^2} \quad (2.121)$$

A integral em q acima é conhecida e, de uma forma geral, temos

$$\int \frac{d^d q}{(q^2 + 2p \cdot q + m^2)^\alpha} = \frac{S_d}{2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - p^2)^{\frac{d}{2} - \alpha} \quad (2.122)$$

onde S_d corresponde à área de uma esfera de raio unitário no espaço d -dimensional. Logo, se identificarmos $p = xk$, $m^2 = xk^2 + 1$ e $d = 4 - \epsilon$, ficamos com

$$I_2(k; \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)k^2 + 1]^{-\frac{\epsilon}{2}} \quad (2.123)$$

O polo em ϵ está presente na função $\Gamma(\frac{\epsilon}{2})$, o que pode ser visto através da identidade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Nosso interesse é na expansão em potências de ϵ . Para isso, utilizaremos as seguintes expansões

$$z^\epsilon = e^{\epsilon \ln z} = 1 + \epsilon \ln z + O(\epsilon^2), \quad (2.124a)$$

$$\frac{\Gamma(1 + \alpha_1 \epsilon) \dots \Gamma(1 + \alpha_m \epsilon)}{\Gamma(1 + \beta_1 \epsilon) \dots \Gamma(1 + \beta_n \epsilon)} = 1 + O(\epsilon^2), \quad (2.124b)$$

quando os coeficientes α 's e β 's satisfazem

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j = 0. \quad (2.125)$$

Portanto, a expansão em ϵ da integral (2.123) é dada por

$$I_2(k; \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dx \ln[x(1-x)k^2 + 1] \right\} + O(\epsilon). \quad (2.126)$$

É interessante notar como o polo simples em ϵ na expressão acima está relacionado com uma divergência *logarítmica* ultravioleta, visto que por uma simples análise dimensional verificamos que $I_2(k; \mu, \Lambda) \sim \Lambda^{d-4}$, sendo divergente para $d = 4$ quando $\Lambda \rightarrow \infty$.

Como estamos interessados em estudar também os expoentes críticos como um resultado da invariância de escala de um sistema no ponto crítico, precisaremos calcular as mesmas integrais com a massa $\mu \propto \sqrt{t} = 0$, ou seja, analisaremos também a teoria não-massiva. Nesse contexto, a escala de massa μ é perdida e devemos inserir uma nova escala de momento que representaremos por κ . Os momentos da integral (2.70b) passam a ser escalados da seguinte forma: $k \rightarrow \frac{k}{\kappa}$ e $q \rightarrow \frac{q}{\kappa}$. Podemos então escrever

$$I_2(k; \kappa) = \kappa^{-\epsilon} \int \frac{d^d q}{(q+k)^2 q^2}. \quad (2.127)$$

Para $d \leq 4$, além da divergência no limite ultravioleta da integral acima, também teremos divergência no limite infravermelho para $k \rightarrow 0$. Essa última divergência é um reflexo do comportamento físico das funções de correlação no ponto crítico. De fato, as correlações de longo alcance são traduzidas no espaço dos momentos como grandes contribuições dos componentes de Fourier das funções de correlação no limite $k \rightarrow 0$.

A regularização dimensional de (2.127) é realizada seguindo os mesmos passos aplicados na teoria massiva. Chegamos então ao seguinte resultado

$$I_2(k; \kappa) = \kappa^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dx \ln[x(1-x)k^2] \right\} + O(\epsilon). \quad (2.128)$$

As demais integrais de Feynman dadas em (2.84) e (2.98), relacionadas a ordens mais altas em *loops*, estão regularizadas em [17] e não repetiremos esses cálculos aqui. Voltaremos a tratar do cálculo de integrais de Feynman no próximo capítulo, onde consideraremos também os efeitos de uma restrição espacial no sistema.

2.7 Renormalização das funções de vértice

Todas as divergências presentes nas expansões diagramáticas podem ser eliminadas ao redefinirmos adequadamente os parâmetros da lagrangiana do modelo estudado. Podemos fazer isso considerando o sistema no ponto crítico (teoria não-massiva) ou próximo a esse ponto (teoria massiva).

2.7.1 Teoria massiva

Focando inicialmente na teoria massiva, temos que os parâmetros μ e λ na densidade lagrangiana (2.31) podem ser arbitrários, inclusive infinitos. Ao aplicarmos um procedimento de renormalização desejamos transformar esses parâmetros em grandezas finitas, as quais podem ser chamadas de massa renormalizada m e de constante de acoplamento renormalizada g . As divergências restantes na teoria podem ser eliminadas facilmente através de um conjunto simples de operações, ao expressarmos os observáveis físicos em função de m e g , resultando em uma teoria condizente com a física do sistema.

Queremos ilustrar como uma teoria renormalizada, ou seja, livre de divergências, pode ser construída a partir de uma teoria não-renormalizada. Para tornar claro o procedimento, nos utilizaremos do corte Λ (limite superior nas integrais de Feynman) nos argumentos das funções de vértice analisadas a fim de discutir as divergências de forma abstrata.

Consideremos portanto μ e λ expressos funcionalmente em termos da massa m e da constante de acoplamento g renormalizadas, assim como do corte Λ da seguinte forma

$$\mu = \mu(m, g, \Lambda) \quad \text{e} \quad \lambda = \lambda(m, g, \Lambda). \quad (2.129)$$

Por construção, as novas grandezas m e g são agora finitas, enquanto que μ e λ passam a ter uma dependência em Λ , divergindo no limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Essas redefinições ainda não são suficientes para extrair todos os infinitos da teoria. Elas tratam apenas das divergências quadráticas e logarítmicas devido a $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(4)}$, respectivamente. É necessário ainda eliminar divergências logarítmicas restantes. Podemos fazer isso através de constantes de renormalização multiplicativas. Em geral, escrevemos a função de vértice $\Gamma_R^{(E,L)}$ renormalizada multiplicativamente como

$$\Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; m, g) = Z_\Phi^{E/2} Z_{\Phi^2}^L \Gamma^{(E,L)}(k_i, p_j; \mu, \lambda, \Lambda). \quad (2.130)$$

Os índices i e j em (2.130) rotulam os momentos de Φ e do campo composto Φ^2 , respectivamente. Z_Φ e Z_{Φ^2} são as constantes de renormalização multiplicativa e, assim como μ e λ , possuem as seguintes dependências

$$Z_\Phi = Z_\Phi(m, g, \Lambda) \quad \text{e} \quad Z_{\Phi^2} = Z_{\Phi^2}(m, g, \Lambda). \quad (2.131)$$

Podemos notar que elas também divergem com Λ .

Efetivamente, para remover os infinitos em (2.130) procedemos da seguinte forma. Fazemos uma expansão de λ , Z_Φ e Z_{Φ^2} em potências de g com os coeficientes escritos simbolicamente

$$B_3 = m_1^{3\epsilon} \frac{(N+2)(N+8)}{108} \left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_5(k; m_1) \right|_{k=0}. \quad (2.136b)$$

Para a função de vértice de 4 pontos, a expansão (4.32) permite que escrevamos, até 2 *loops*, a expressão abaixo

$$\Gamma^{(4)}(0; m_1, u_0) = m_1^\epsilon u_0 \left[1 - A_1 u_0 + \left(A_2^{(1)} + A_2^{(2)} \right) u_0^2 \right], \quad (2.137)$$

onde os coeficientes A_1 , $A_2^{(1)}$ e $A_2^{(2)}$ são dados por

$$A_1 = m_1^\epsilon \frac{N+8}{6} I_2(0; m_1), \quad (2.138a)$$

$$A_2^{(1)} = m_1^{2\epsilon} \frac{N^2 + 6N + 20}{36} [I_2(0; m_1)]^2, \quad (2.138b)$$

$$A_2^{(2)} = m_1^{2\epsilon} \frac{5N + 22}{9} I_4(0; m_1). \quad (2.138c)$$

Por fim, para a função $\Gamma^{(2,1)}$, a expansão (4.33) resulta em

$$\Gamma^{(2,1)}(0; m_1, u_0) = 1 - C_1 u_0 + \left(C_2^{(1)} + C_2^{(2)} \right) u_0^2, \quad (2.139)$$

com os coeficientes C_1 , $C_2^{(1)}$ e $C_2^{(2)}$ dados por

$$C_1 = m_1^\epsilon \frac{N+2}{6} I_2(0; m_1), \quad (2.140a)$$

$$C_2^{(1)} = m_1^{2\epsilon} \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 [I_2(0; m_1)]^2, \quad (2.140b)$$

$$C_2^{(2)} = m_1^{2\epsilon} \frac{N+2}{6} I_4(0; m_1). \quad (2.140c)$$

Os coeficientes das expansões em (2.135), (2.137) e (2.139) ainda possuem divergências. Para retirá-las, as constantes de renormalização u_0 , Z_Φ e Z_{Φ^2} precisam ser determinadas. Vamos então expandí-las em potências de g e a partir disso calcularemos os coeficientes dessa expansão de modo que as condições de normalização (2.132b) a (2.132d) sejam satisfeitas. Escrevemos então

$$u_0 = u + a_1 u^2 + a_2 u^3, \quad (2.141a)$$

$$Z_\Phi = 1 + b_2 u^2 + b_3 u^3, \quad (2.141b)$$

$$\overline{Z}_{\Phi^2} = 1 + c_1 u + c_2 u^2. \quad (2.141c)$$

onde, $u = m_1^{-\epsilon} g$, faz o papel de constante de acoplamento renormalizada adimensional. Note que não temos um coeficiente b_1 em (2.141b). O fato é que não existem polos cujo resíduo seja linear em u na função de 2 pontos. Definimos também

$$\overline{Z}_{\Phi^2} = Z_\Phi Z_{\Phi^2}, \quad (2.142)$$

por razões de conveniência para a utilização da condição (2.132d). Substituindo agora (2.141a) nas expansões (2.135), (2.137) e (2.139) e usando o resultado obtido, juntamente com (2.141b) e (2.141c), nas condições de normalização, chegamos aos coeficientes

$$a_1 = A_1, \quad (2.143a)$$

$$a_2 = 2(A_1)^2 - (A_2^{(1)} + A_2^{(2)}) - 2b_2, \quad (2.143b)$$

$$b_2 = B_2, \quad (2.143c)$$

$$b_3 = 2B_2a_1 - B_3, \quad (2.143d)$$

$$c_1 = C_1, \quad (2.143e)$$

$$c_2 = (a_1 + c_1)C_1 - (C_2^{(1)} + C_2^{(2)}). \quad (2.143f)$$

Assim, determinamos todas as constantes de renormalização utilizando (2.130).

Todo o processo de renormalização realizado até agora foi para o sistema acima da temperatura crítica ($m^2 > 0$). Por outro lado, queremos também obter a descrição das funções de vértice exatamente no ponto crítico. Ambas as formulações deverão nos levar aos mesmos expoentes críticos. Essa equivalência torna-se extremamente importante, uma vez que fornecerá a base para uma interpretação confiável sobre a variável de escala, introduzida naturalmente na descrição do *crossover* dimensional, de um sistema delimitado por placas paralelas separadas por uma distância L , o que será abordado nos próximos capítulos.

2.7.2 Teoria sem massa

Na teoria sem massa, dois tipos diferentes de divergências são percebidos. O primeiro tipo, refere-se às divergências relacionadas ao regime ultravioleta, já estudadas na teoria massiva e, como vimos, podem ser removidas através do procedimento de renormalização. O outro tipo de divergência, já mencionado ao tratarmos de operadores relevantes, tem origem física e está relacionada com o limite infravermelho ($k \rightarrow 0$). Portanto, numa teoria sem massa, as condições de normalização não podem ser feitas em momentos externos nulos. Como agora $m = 0$, uma nova escala de momento deve ser introduzida. Essa nova escala será representada por κ . Os momentos externos são então colocados em termos de κ e as condições dadas em (2.132a - 2.132d) apresentam agora o seguinte formato

$$\Gamma_R^{(2)}(k = 0; 0, g) = 0, \quad (2.144a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k; 0, g) \right|_{k^2 = \kappa^2} = 1, \quad (2.144b)$$

$$\left. \Gamma_R^{(4)}(k_i; 0, g) \right|_{PS} = g, \quad (2.144c)$$

$$\left. \Gamma_R^{(2,1)}(k_1, k_2, p; 0, g) \right|_{\overline{PS}} = 1. \quad (2.144d)$$

Os pontos simétricos PS e $\overline{PS}$, nos quais os momentos externos são agora calculados, são definidos pela equação

$$k_i \cdot k_j = \frac{\kappa^2}{4}(4\delta_{ij} - 1). \quad (2.145)$$

Em PS , temos que $k_i^2 = \frac{3}{4}\kappa^2$ e $(k_i + k_j)^2 = \kappa^2$, para $i \neq j$. Já para $\overline{PS}$, temos também que: $p^2 = (k_1^2 + k_2^2) = \kappa^2$. Observe que em (2.144a) fixamos $k = 0$. Podemos fazê-lo porque $\Gamma^{(2)}$ não apresenta divergências no limite infravermelho. Isso pode ser visto a partir de (2.95). Apesar dos diagramas presentes naquela expansão terem divergências infravermelhas, as subtrações cancelam tais infinitos e portanto a equação (2.144a) é bem definida.

Como agora temos $m = 0$, as constantes λ , Z_Φ e Z_{Φ^2} serão apresentadas em função de κ , g e Λ . Como resultado, teremos a equação (2.130) com as seguintes modificações

$$\Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; \kappa, g) = Z_\Phi^{E/2} Z_{\Phi^2}^L \Gamma^{(E,L)}(k_i, p_j; \lambda, \Lambda). \quad (2.146)$$

As constantes de renormalização são então calculadas seguindo os mesmos passos descritos na teoria massiva. As integrais de Feynman $D_3(k; m)$, $I_4(k, k'; m)$ e $D_5(k; m)$ devem ser calculadas com $m = 0$, como fizemos para $I_2(k; m)$ no caso sem massa. Verifica-se que apenas as singularidades subdominantes e termos regulares em ϵ são diferentes daqueles obtidos com $m \neq 0$.

2.8 Grupo de renormalização

Vimos que as condições de normalização são arbitrárias. Por exemplo, na teoria sem massa, a única restrição imposta às constantes de renormalização é que elas devem tornar a equação (2.146) finita, ou seja, podemos escolher qualquer valor para κ em (2.144a - 2.144d). Essa arbitrariedade na escolha do valor da escala de momento resulta em diferentes versões da teoria renormalizada. Entretanto, teremos sempre na teoria original, apesar dessa liberdade de escolha, os parâmetros λ e Λ inalterados. Tal invariância permite-nos estabelecer transformações entre essas diversas versões da teoria renormalizada, dando origem ao que é conhecido como *grupo de renormalização*. Considerando variações infinitesimais em κ , podemos obter equações diferenciais para as funções de vértice que conduzem a resultados fundamentais para a descrição do comportamento dos observáveis físicos no ponto crítico.

2.8.1 Equações do grupo de renormalização

Para ilustrar o que dissemos acima, tomemos a equação (2.146). Observando que os valores de λ e Λ permanecem fixos e que podemos variar κ , derivamos a expressão com relação a $\ln \kappa$ e obtemos

$$\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[Z_\Phi^{-E/2} Z_{\Phi^2}^{-L} \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; \kappa, g) \right]_{\lambda, \Lambda} = 0. \quad (2.147)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, chegamos às *equações do grupo de renormalização*

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi}(u) + L \gamma_{\Phi^2}(u) \right] \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; u, \kappa) = 0, \quad (2.148)$$

onde definimos

$$\beta(u) \equiv -\epsilon \left(\frac{\partial \ln u_0}{\partial u} \right)^{-1}; \quad (2.149a)$$

$$\gamma_{\Phi}(u) \equiv \beta(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi}}{\partial u}; \quad (2.149b)$$

$$\gamma_{\Phi^2}(u) \equiv -\beta(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2}}{\partial u}. \quad (2.149c)$$

As expressões acima são conhecidas como *funções de Wilson*. A variável u corresponde à constante de acoplamento renormalizada adimensional ($g = \kappa^\epsilon u$). Paralelamente, temos que $\lambda = \kappa^\epsilon u_0$. Embora u_0 , Z_{Φ} e Z_{Φ^2} sejam divergentes quando $\Lambda \rightarrow \infty$, as funções de Wilson são finitas no mesmo limite.

A equação (2.148) é uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem. A solução de tais equações é bastante conhecida e advinda da teoria de equações diferenciais, portanto não a reproduziremos aqui. Estamos, contudo, interessados em relacionar os expoentes críticos com as funções de Wilson, encontrando assim uma forma de calculá-los a partir das ferramentas de teoria de campos apresentadas nas seções anteriores. A partir da equação (2.148), podemos identificar como as funções de vértice mudam com o reescalamento $k_i \rightarrow \rho k_i$ dos momentos externos. Para isso, faremos uma simplificação tomando $L = 0$ em (2.148) para economizar nas equações, já que o que existe de essencial para a análise da solução não será afetado. A solução de (2.148) com $L = 0$ pode ser escrita como

$$\Gamma_R^{(E)}(k_i; u, \kappa) = \exp \left[-\frac{E}{2} \int_1^\rho \gamma_{\phi}(u(x)) \frac{dx}{x} \right] \Gamma_R^{(E)}(k_i; u(\rho), \kappa \rho), \quad (2.150)$$

onde a equação característica é

$$\rho \frac{du(\rho)}{d\rho} = \beta(u(\rho)), \quad (2.151)$$

com a condição inicial $u(\rho = 1) = u$. Vemos de (2.151) e de (2.149a) que $\beta(u)$ na verdade mede a variação da constante de acoplamento com respeito a uma variação da escala de momento. Utilizando análise dimensional, podemos extrair de $\Gamma_R^{(E)}$ a dependência em $\kappa \rho$ na solução. A equação (2.150) pode ser reescrita então como

$$\Gamma_R^{(E)}(k_i; u, \kappa) = (\kappa \rho)^{(E+d-\frac{1}{2}Ed)} \exp \left[-\frac{E}{2} \int_1^\rho \gamma_{\phi}(u(x)) \frac{dx}{x} \right] \Gamma_R^{(E)} \left(\frac{k_i}{\kappa \rho}; u(\rho), 1 \right). \quad (2.152)$$

Substituindo agora k_i por ρk_i , ou seja, fazendo uma mudança na escala de momento, obtemos

$$\Gamma_R^{(E)}(\rho k_i; u, \kappa) = \rho^{(E+d-\frac{1}{2}Ed)} \exp \left[-\frac{E}{2} \int_1^\rho \gamma_\phi(u(x)) \frac{dx}{x} \right] \Gamma_R^{(E)}(k_i; u(\rho), \kappa). \quad (2.153)$$

Podemos observar de (2.153) que o efeito de uma mudança na escala de momento é equivalente a multiplicar a função original pela escala elevada à dimensão canônica, como também leva a uma mudança específica na constante de acoplamento, a qual flui com (2.151), tendo β como função velocidade. Além disso, temos um fator exponencial adicional complicado. Existe, no entanto, uma circunstância especial na qual um comportamento mais simples pode ser obtido. Esse comportamento ocorre se a constante de acoplamento chegar a um valor, tal que, qualquer mudança na escala de momento não a afete. Esses valores podem ser obtidos se fizermos

$$\beta(u) = 0. \quad (2.154)$$

Os valores de u que satisfazem (2.154) são chamados de pontos fixos, os quais podem ser estáveis ou instáveis. A estabilidade desses pontos pode ser verificada pela análise das derivadas de β com respeito a u . O reescalamento no limite infravermelho ($\rho \rightarrow 0$) induz um fluxo de u no espaço das constantes de acoplamento que tenderá a um ponto fixo u^* . Evidentemente, utilizaremos em nossos cálculos o ponto fixo estável, pois variações em torno desse ponto tenderão a fluir para ele e, conseqüentemente, as soluções do grupo de renormalização tenderão às soluções nesse ponto, o qual tem por condições

$$\beta(u^*) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\beta(u)}{du} \right|_{u=u^*} > 0. \quad (2.155)$$

Nesse caso, u^* é conhecido como ponto fixo estável no regime infravermelho. No ponto fixo, a teoria é invariante por escala e as funções de vértice passam então a escalar de forma homogênea.

Para podermos calcular os expoentes críticos devemos ainda entender a conexão existente entre estes, o ponto fixo u^* e as funções de Wilson. Considere novamente (2.148) com $L = 0$ em um ponto fixo $u = u^*$, temos então

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{1}{2} E \gamma_\phi(u^*) \right] \Gamma_R^{(E)}(k_i; u^*, \kappa) = 0. \quad (2.156)$$

A solução de (2.156), após alterarmos a escala de momento, é

$$\Gamma_R^{(E)}(\rho k_i; u^*, \kappa) = \rho^{(E+d-\frac{1}{2}Ed)-\frac{1}{2}E\gamma_\phi(u^*)} \Gamma_R^{(E)}(k_i; u^*, \kappa). \quad (2.157)$$

Note que a solução (2.157) é uma simples propriedade de escala e homogeneidade das funções de vértice. Em particular $\Gamma_R^{(2)}$ comporta-se como

$$\Gamma_R^{(2)}(\rho k) = \rho^{2-\gamma_\phi(u^*)} \Gamma_R^{(2)}(k), \quad (2.158)$$

de onde identificamos o expoente crítico η como

$$\eta = \gamma_\phi(u^*). \quad (2.159)$$

O expoente crítico η também é chamado de dimensão anômala do campo ϕ , visto que não o obtemos por simples análise dimensional.

Fora do ponto crítico, mas ainda na teoria simétrica, isto é, $T > T_c$, podemos obter uma equação do grupo de renormalização para esse estado através da aplicação, sobre as funções de vértice, do operador diferencial

$$\mathcal{O} = \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} E \gamma_\phi(u) + \gamma_{\phi^2}(u) t \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.160)$$

onde t é a temperatura reduzida. Efetuando a aplicação obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \Gamma^{(E)}(k_i, \dots, k_E; t, u, \kappa) &= \lim_{p_i \rightarrow 0} \mathcal{O} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{L!} t^L \Gamma^{(E,L)}(k_i, p_i; u, \kappa) \\ &= \lim_{p_i \rightarrow 0} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{t^L}{L!} \left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} E \gamma_\phi + L \gamma_{\phi^2} \right] \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_i; u, \kappa). \end{aligned} \quad (2.161)$$

Temos então uma teoria massiva em termos de uma expansão em torno de $t = 0$, ou seja, em termos de uma teoria sem massa. Assim, cada termo da soma se anula, pois $\Gamma_R^{(E,L)}$ satisfaz a equação do grupo de renormalização. Portanto nós temos

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} E \gamma_\phi(u) + \gamma_{\phi^2}(u) t \frac{\partial}{\partial t} \right] \Gamma_R^{(E)}(k_i; t, u, \kappa) = 0. \quad (2.162)$$

No ponto fixo, a equação a ser resolvida é

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{1}{2} E \eta + \gamma_{\phi^2}^* t \frac{\partial}{\partial t} \right] \Gamma_R^{(E)}(k_i; t, u^*, \kappa) = 0, \quad (2.163)$$

onde $\gamma_{\phi^2}^*$ é o valor de $\gamma_{\phi^2}(u)$ no ponto fixo u^* . A solução de (2.163) é

$$\Gamma_R^{(E)}(k_i; t, \kappa) = \rho^{d + \frac{E}{2}(2-d-\eta)} \kappa^{\frac{1}{2} E \eta} F^{(E)}(\rho^{-1} k_i; (\rho^{-1} \kappa)(\rho^{-2} t)^{\frac{1}{-\gamma_{\phi^2}^*}}). \quad (2.164)$$

Sendo ρ arbitrário, nós podemos escolhê-lo de forma a satisfazer

$$(\rho^{-1} \kappa)(\rho^{-2} t)^{\frac{1}{-\gamma_{\phi^2}^*}} = 1, \quad (2.165)$$

ou seja,

$$\rho = \kappa \left(\frac{t}{\kappa^2} \right)^{\frac{1}{-\gamma_{\phi^2}^*}}. \quad (2.166)$$

Com isso a função de vértice torna-se

$$\Gamma_R^{(E)}(k_i; t, \kappa) = \kappa^{d + \frac{E}{2}(2-d)} (\kappa^{-2}t)^{\frac{d + \frac{E}{2}(2-d-\eta)}{-\gamma_{\phi^2}^* + 2}} F^{(E)}\left(\kappa^{-1}k_i(\kappa^{-2}t)^{-\frac{1}{-\gamma_{\phi^2}^* + 2}}\right). \quad (2.167)$$

A função de vértice depende apenas da combinação de $k_i\xi$, ou seja,

$$\xi \propto t^{-\frac{1}{-\gamma_{\phi^2}^* + 2}}. \quad (2.168)$$

Mas temos que o comportamento assintótico do comprimento de correlação ξ , com a diferença de temperatura em relação ao ponto crítico, é regido pelo expoente crítico ν da seguinte forma

$$\xi \propto |t|^{-\nu}. \quad (2.169)$$

Por comparação, chegamos a

$$\nu^{-1} = 2 - \gamma_{\phi^2}^*. \quad (2.170)$$

Se definirmos agora

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) \equiv -\beta(u) \frac{\partial \ln(Z_{\phi^2} Z_{\phi})}{\partial u} = -\beta(u) \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}}{\partial u}, \quad (2.171)$$

segue que

$$\nu^{-1} = 2 - \bar{\gamma}_{\phi^2}^* - \eta, \quad (2.172)$$

onde $\bar{\gamma}_{\phi^2}^* \equiv \bar{\gamma}_{\phi^2}(u^*)$.

As outras leis de escala podem ser obtidas utilizando argumentos semelhantes, os quais não serão reproduzidos aqui. O fato é que podemos obter todas as relações de escala listadas em (1.10) e (1.11). Temos portanto todos os ingredientes necessários para o cálculo dos expoentes críticos, pois todos os outros podem ser calculados a partir de relações de escala com η e ν .

Devido às relações obtidas acima, vemos ser necessário ao cálculo dos expoentes críticos a obtenção explícita das funções: $\beta(u)$, para encontrarmos o ponto fixo u^* , assim como as funções γ_{ϕ}^* e $\bar{\gamma}_{\phi^2}^*$. Substituindo as expansões (2.141a - 2.141c) para as constantes de renormalização em (2.149a), (2.149b) e (2.171), obtemos que as funções de Wilson são dadas simbolicamente por

$$\beta(u) = -\epsilon u \left[1 - a_1 u + 2(a_1^2 - a_2) u^2 \right], \quad (2.173a)$$

$$\gamma_{\Phi}(u) = -\epsilon u \left[2b_2 u + (3b_3 - 2b_2 a_1) u^2 \right], \quad (2.173b)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) = \epsilon u \left[c_1 + (2c_2 - c_1^2 - a_1 c_1) u \right]. \quad (2.173c)$$

Ao realizarmos a regularização dimensional, os coeficientes a_1 , b_2 e c_1 apresentam polos simples em ϵ , os quais serão cancelados pelo fator ϵ das funções acima. Da mesma forma, os polos duplos presentes em a_2 , b_3 e c_2 serão todos removidos pelas subtrações nos termos de ordem u^3 e u^2 ,

restando apenas polos simples a serem cancelados então pelo mesmo fator ϵ . Consequentemente, as funções de Wilson serão todas finitas.

A função $\beta(u)$ dada em (2.173a) é um polinômio de terceiro grau em u e, portanto, podemos ter três raízes. Uma dessas raízes é $u = 0$. Abaixo da dimensão crítica ($\epsilon > 0$), temos $\left. \frac{d\beta(u)}{du} \right|_{u=0} < 0$ e $u = 0$ o que não caracteriza um ponto fixo estável no infravermelho. O ponto fixo estável no infravermelho corresponde à raiz na qual $u^* = O(\epsilon)$. Ou seja, quando nos aproximamos da dimensão crítica ($\epsilon \rightarrow 0$), u^* tende a zero e a teoria passa a ter uma constante de acoplamento nula, tornando-se assintoticamente livre.

2.8.2 Equações de Callan-Symanzik

Outra forma de obtermos as leis de escala para as funções de vértice consiste em considerar o sistema acima da temperatura do ponto crítico. Na teoria massiva, a massa renormalizada passa a ser o parâmetro livre nas condições de normalização enquanto que λ e Λ permanecem fixos. Portanto, semelhantemente ao realizado na teoria sem massa, derivamos a expressão (2.130) com relação a $\ln m$ mantendo λ e Λ fixos

$$\left(m \frac{\partial}{\partial m} \right)_{\lambda, \Lambda} \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; m^2, g) = \left(m \frac{\partial}{\partial m} \right)_{\lambda, \Lambda} \left[Z_\Phi^{E/2} Z_{\Phi^2}^L \Gamma^{(E,L)}(k_i, p_j; \mu^2, \lambda, \Lambda) \right]. \quad (2.174)$$

É importante lembrar que o lado direito da expressão acima depende implicitamente de m . Após algumas manipulações matemáticas, chegamos nas *equações de Callan-Symanzik*

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_\Phi(u) + L \gamma_{\Phi^2}(u) \right] \Gamma_R^{(E,L)}(k_i, p_j; u, m) = m^2 [2 - \gamma_\Phi(u)] \Gamma_R^{(E,L+1)}(k_i, p_j, 0; u, m). \quad (2.175)$$

As funções de Wilson são novamente dadas pelas equações (2.149a-2.149c). Porém, u_0 , Z_Φ e Z_{Φ^2} são obtidos através das condições (2.132a-2.132d) e estão em função de m , u e Λ , como visto anteriormente.

As equações de Callan-Symanzik são o equivalente massivo das equações do grupo de renormalização na teoria sem massa. No entanto, a homogeneidade, como podemos perceber, foi perdida devido à presença da função $\Gamma^{(E,L+1)}$ no lado direito da equação. Consequentemente, não teremos mais a invariância de escala no limite infravermelho, como acontece na teoria sem massa. Por outro lado, se considerarmos o limite ultravioleta ($\frac{k_i}{m} \rightarrow \infty$), podemos fazer (2.175) homogênea e teremos uma equação análoga a (2.148). De fato, como os diagramas em $\Gamma^{(E,L+1)}$ possuem um propagador a mais do que $\Gamma^{(E,L)}$, podemos desprezar $\Gamma^{(E,L+1)}$ no segundo termo de (2.175) no limite ultravioleta. Isso é uma consequência do teorema de Weinberg, o qual afirma que quando os momentos externos tendem uniformemente a infinito, diagramas com um propagador a mais decaem mais rapidamente do que aqueles sem o correspondente propagador.

Portanto, no limite ultravioleta, teremos a equação (2.175) na sua forma homogênea. Vale ressaltar que a inserção de campo composto que aparece em $\Gamma^{(E,L+1)}$ ocorre em momento externo nulo.

As funções de Wilson são novamente calculadas através de (2.149a-2.149c), cujos coeficientes são agora dados em termos das integrais de Feynman calculadas com os momentos nulos e a massa m diferente de zero. No entanto, o novo ponto fixo u_∞ obtido através de $\beta(u_\infty) = 0$ não possui mais a mesma estabilidade do seu correspondente u^* na teoria sem massa. A invariância de escala no regime ultravioleta da teoria é obtida apenas com a constante de acoplamento exatamente no ponto fixo ($u = u_\infty$). Os expoentes críticos η e ν são então obtidos através da substituição de u_∞ nas equações (2.159) e (2.172), isto é,

$$\eta = \gamma_\Phi(u_\infty) = \frac{(N+2)}{2(N+8)^2} \epsilon^2 \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}. \quad (2.176)$$

Temos também que

$$\nu^{-1} = 2 - \bar{\gamma}_{\Phi^2}(u_\infty) - \eta. \quad (2.177)$$

Sendo assim, temos

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3} \epsilon^2. \quad (2.178)$$

Ressaltamos que pelas relações de escala da teoria podemos obter todos os outros expoentes críticos a partir desses dois. Note também que para $\epsilon = 0$, recaímos nos expoentes críticos calculados pela teoria de campo médio.

É importante mencionar que, apesar dos diferentes valores entre u^* e u_∞ , e as diferenças entre as funções de Wilson nas teorias massiva e sem massa, o que é devido às diferentes soluções das integrais de Feynman nos dois casos, os resultados para η e ν são os mesmos, o que podemos expressar da seguinte forma

$$[\gamma_\Phi(u)_{(Sem\ massa)}]_{u=u^*} = [\gamma_\Phi(u)_{(Massivo)}]_{u=u_\infty}, \quad (2.179)$$

e,

$$[\bar{\gamma}_{\Phi^2}(u)_{(Sem\ massa)}]_{u=u^*} = [\bar{\gamma}_{\Phi^2}(u)_{(Massivo)}]_{u=u_\infty}. \quad (2.180)$$

As igualdades acima trazem à tona uma certa insatisfação com respeito à conjectura de que a teoria massiva pode ser aplicada em sistemas finitos e a teoria sem massa não. Como veremos a partir do próximo capítulo, essa impossibilidade de utilização da teoria sem massa não ocorre.

Capítulo 3

Tamanho finito e condições de contorno periódicas e antiperiódicas

3.1 Introdução

Ao introduzir uma restrição espacial através do confinamento de um campo em um volume delimitado por superfícies planas e paralelas separadas por uma distância L , é possível observar modificações significativas no comportamento crítico do sistema, quando comparado com o sistema no limite $L \rightarrow \infty$ (sistema infinito). Esses efeitos se manifestam principalmente na forma de uma mudança na temperatura crítica, na alteração da amplitude de quantidades termodinâmicas (calor específico, susceptibilidade, etc) e na forma como os expoentes críticos mudam a sua dependência com a dimensão espacial d [40, 79].

Em meados da década de 80, Nemirovsky e Freed (NF) introduziram o formalismo de teoria de campos no espaço dos momentos para descrever fenômenos críticos em sistemas com pelo menos uma dimensão espacial finita [37, 38]. Tal trabalho foi de grande importância na área teórica da física da matéria condensada, pois, até então, era disseminada a ideia da impossibilidade da aplicação de métodos perturbativos para tratar fenômenos críticos em sistemas finitos [39]. No entanto, NF mostraram que quantidades universais, como por exemplo os expoentes críticos, podem, de fato, ser escritas em termos de expansões em $\epsilon = 4 - d$, onde d é a dimensão do sistema e $d = 4$ é a dimensão crítica na teoria $\lambda\phi^4$.

A realização mais simples do sistema estudado por NF em um espaço com d dimensões, o qual será também o nosso ponto de partida, consiste no modelo de Ising d dimensional delimitado por duas hiper-superfícies planas de extensão infinita em um subespaço com $d - 1$ dimensões e separadas por uma distância L . O sistema é descrito por uma teoria de campos escalares com simetria $O(N)$ e interação Φ^4 , da mesma forma como aquele modelado pela densidade lagrangiana tradicional de Φ^4 (2.31). Cada componente do parâmetro de ordem está então sujeita a restrições nas superfícies na forma de condições de contorno que podem ser periódicas, antiperiódicas, de Dirichlet ou de Neumann, ou até mesmo mistas. Convém observar

que, sendo o volume do sistema ainda infinito, podemos continuar falando em transições de fase com expoentes críticos descrevendo as singularidades do comprimento de correlação, calor específico, etc, da mesma maneira que descrevemos no capítulo 2.

Na formulação original de NF com campos massivos, o limite de massa nula não era bem compreendido. A origem do problema foi a atribuição de um papel central à variável de escala $y = \frac{L}{\xi}$, onde ξ é o comprimento de correlação no caso de tamanho infinito (*bulk*). Como a teoria sem massa tem $\xi \rightarrow \infty$, no caso de L finito ($L \ll \xi$), $y \rightarrow 0$. A interpretação atribuída à variável y , como sendo o observável fundamental que caracteriza as várias situações físicas envolvendo o tamanho finito, “reduziu” o problema do cálculo perturbativo de grandezas universais a três regiões de escala, a saber:

- (i) $y > 1$, métodos perturbativos podem ser usados e os expoentes críticos são calculados em termos de expansões em ϵ , correspondendo aos mesmos obtidos para o sistema infinito ($L \rightarrow \infty$) no espaço d -dimensional;
- (ii) $y \sim 1$, os expoentes críticos não podem mais ser calculados perturbativamente. Há uma “quebra” (perda de controle) na expansão em ϵ , ou seja, nesse regime, a correção do tamanho finito tem a mesma ordem do pólo em ϵ ;
- (iii) $y < 1$, a tradicional expansão em $\epsilon = 4 - d$ é substituída agora por uma expansão em $\epsilon' = 4 - (d - 1)$. Em outras palavras, os expoentes críticos passam a ser aqueles calculados em um espaço com $d - 1$ dimensões.

No item (iii), a mudança de d para $d - 1$ dimensões na descrição do comportamento crítico do sistema é conhecida como *crossover* dimensional.

A conjectura que levou à proposição das três regiões de escala tinha como base argumentos heurísticos e indícios fenomenológicos conhecidos na época. Esta conjectura não tinha, entretanto, uma base matemática rigorosamente satisfatória. Ao comparar com o sistema infinito correspondente, fica difícil estabelecer uma analogia, uma vez que, para este último, grandezas universais obtidas utilizando o formalismo de campos sem massa ou massivos são perfeitamente concordantes.

De acordo com a hipótese fenomenológica, que desembocou na suposta existência das três regiões de escala acima descritas, é impossível acessar as regiões (ii) e (iii) em uma expansão perturbativa tradicional usando campos sem massa, pois no primeiro caso $L \rightarrow \infty$ ($L \sim \xi$), enquanto que no segundo L é fixo e $\xi \rightarrow \infty$, o que levaria à quebra da expansão ϵ ($\epsilon = 4 - d$) e, portanto, tais regiões seriam descritas de uma maneira desconhecida. Esta interpretação proibiria a comparação entre a técnica de grupo de renormalização usando campos massivos e sem massa, pois os dois regimes corresponderiam a situações físicas irreconciliáveis. Isto difere completamente do que ocorre em sistemas infinitos, já que os dois limites de massa produzem grandezas universais idênticas. Portanto, se quisermos estabelecer uma analogia com sistemas infinitos, deveríamos encontrar uma interpretação matematicamente rigorosa dos resultados obtidos da expansão diagramática para o cálculo de grandezas universais em sistemas finitos

e verificar se o que emerge das correções perturbativas produz resultados consistentes para campos massivos e sem massa.

Novas investigações, com resultados publicados em 2012 [41, 80], mostraram a consistência da aplicação de uma teoria de campos sem massa em sistemas que podem ser tratados pelo modelo de Ising com uma dimensão finita, estando esta submetida a condições de contorno. No trabalho citado foram consideradas apenas as condições de contorno periódicas ($PBC \equiv$ periodic boundary condition) e antiperiódicas ($ABC \equiv$ antiperiodic boundary condition) impostas ao campo nas superfícies delimitadoras do sistema. Tal estudo levou a uma extensão do entendimento sobre o regime de *crossover* dimensional, caracterizando o parâmetro relevante para a ocorrência do fenômeno, o qual **não** está relacionado à divergência de ξ , contrariando o que foi proposto a respeito da variável de escala y . Esse estudo ampliou a região (i) para incluir y até o limite $y \rightarrow 0$ sem qualquer “quebra” da expansão em ϵ , desde que sejam considerados valores suficientemente grandes para L .

Em concordância com a alteração da região de validade para a variável de escala y , a equivalência completa entre a aplicação da teoria massiva e não massiva também foi estabelecida por Silva e Leite (SL) no mesmo trabalho, de forma totalmente analítica, o que levou a um grande avanço no que diz respeito ao tratamento das representações das funções que surgem devido ao tamanho finito, como também devido a aplicação de PBC ou ABC ao longo das superfícies delimitadoras em uma das d dimensões do sistema. Isto possibilitou o cálculo dos expoentes críticos até a ordem de 2 *loops* (3 *loops* para a dimensão anômala) em termos de uma expansão perturbativa em ϵ .

As análises anteriores feitas por NF se restringiram às funções de Green de 2 e 4 pontos até a ordem de 1 *loop* em uma teoria massiva. Em contra partida, SL utilizaram o formalismo com funções de vértice irreduzíveis a uma partícula (1PI do inglês “one particle irreducible”), na teoria massiva e não-massiva, até ordens de pelo menos 2 *loops*, devido ao seu caráter mais fundamental com relação às divergências no regime ultravioleta. Esse estudo referente às contribuições de NF e, principalmente de SL, servirá de base para os próximos capítulos. Ambos os trabalhos fundamentam o que foi desenvolvido nesta tese e, portanto, como uma forma de tornar mais evidente as novidades trazidas através do presente trabalho, abordaremos neste capítulo o mesmo sistema modelado pela densidade lagrangiana (2.31) com o parâmetro de ordem restrito às condições de contorno impostas, isto é, PBC ou ABC , mas nos referiremos às condições de Dirichlet e Neumann quando necessário, visto serem essas as condições de contorno de interesse neste trabalho.

3.2 Condições de contorno periódicas e antiperiódicas na teoria massiva

Como exemplificado no capítulo anterior, a teoria massiva nos remete ao sistema acima da temperatura crítica, dessa forma, o comprimento de correlação é mantido finito, ou seja, estamos

descrevendo o sistema na região (i). O parâmetro de ordem estará sujeito apenas a condições de contorno periódicas ou antiperiódicas. Tais condições não quebram a invariância translacional do sistema e, por isso, a representação das funções de vértice no espaço dos momentos é a mais conveniente.

A restrição espacial imposta ao parâmetro de ordem conduz a integrais de Feynman cujo resultado da regularização dimensional pode ser decomposto em termos com divergência no regime ultravioleta, idênticas àquelas calculadas para o sistema totalmente infinito, mais termos com dependência em L (*termos de correção devido ao tamanho finito*). A representação integral utilizada por NF para os termos de correção não é conveniente em cálculos perturbativos para ordens mais altas em *loops* [35]. Por outro lado, do ponto de vista analítico, SL utilizaram uma representação mais viável para esses termos de correção. Esta última abordagem conseguiu avançar na direção do cálculo das integrais de ordens mais elevadas em *loops*. Usaremos em nosso estudo com *DBC* e *NBC* a mesma representação utilizada por SL.

No intuito de explicitar a abordagem inicialmente feita por NF, observamos que a descrição do modelo com uma geometria de superfícies planas e paralelas pode ser realizada, de forma simples, separando o sistema de coordenadas em $\mathbf{x} = (\vec{\rho}, z)$. O vetor $\vec{\rho}$ representa as coordenadas do campo no subespaço com $d - 1$ dimensões, no qual as superfícies estão inseridas, e z corresponde à coordenada axial perpendicular às superfícies. Por simplicidade fixaremos uma das superfícies em $z = 0$ e a outra em $z = L$. A densidade lagrangiana dada em (2.31) pode ser reescrita então da seguinte forma

$$\mathcal{L}(\Phi) = \frac{1}{2}(\nabla_{d-1}\Phi)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu^2}{2}\Phi^2(\vec{\rho}, z) + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4(\vec{\rho}, z) \quad (3.1)$$

A restrição de tamanho finito L é imposta na teoria através das condições de contorno atuando sobre o parâmetro de ordem. Aqui utilizaremos PBC, dada por

$$\Phi(\vec{\rho}, 0) = \Phi(\vec{\rho}, L), \quad (3.2)$$

enquanto que as condições de contorno antiperiódicas (ABC) são representadas por

$$\Phi(\vec{\rho}, 0) = -\Phi(\vec{\rho}, L). \quad (3.3)$$

O fato do sistema ainda ser infinito ao longo do subespaço das superfícies implica em componentes de Fourier para o parâmetro de ordem dado em termos de momentos contínuos em $d - 1$ dimensões. A homogeneidade do sistema ao longo desse subespaço garante a conservação dos momentos nos propagadores e nos vértices de interação, conforme o exposto no capítulo anterior para o sistema totalmente infinito em d dimensões. Por outro lado, o domínio compacto da coordenada z restringe os momentos ao longo da direção perpendicular às superfícies, os quais apresentarão agora apenas valores discretos (*quase-momentos*) ao longo dessa direção. Portanto, podemos expandir o campo Φ em termos de componentes (*modos*) de Fourier, da seguinte forma

$$\Phi_i(\rho, z) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}k e^{ik \cdot \rho} u_j(z) \phi_i(k, j), \quad (3.4)$$

onde o índice $i = 1, 2, \dots, N$ refere-se à simetria interna do parâmetro de ordem. Já o índice j está relacionado com os quase-momentos ao longo da direção z . Note que as funções base $u_j(z)$ estão associadas às condições de contorno de Φ_i . Para determinarmos essas funções, vamos considerar o campo Φ_i acima como uma solução da teoria livre obtida a partir da equação de Klein-Gordon no espaço euclidiano

$$(\nabla^2 - \mu^2)\Phi_i = 0.$$

Nesse caso, Φ_i é usado na construção do propagador livre da teoria. Logo, vemos que $u_j(z)$ é solução da equação de autofunções

$$\frac{d^2}{dz^2}u_j(z) = -\kappa_j^2 u_j(z), \quad (3.5)$$

onde o autovalor κ_j corresponde ao quase-momento, satisfazendo a condição $k^2 + \kappa_j^2 + \mu^2 = 0$. As condições de contorno (3.2) ou (3.3), agora aplicadas em $u_j(z)$, determinarão a dependência de κ_j em j . Além disso, as constantes resultantes da solução geral da equação acima podem ser fixadas através da condição de ortonormalidade

$$\int_0^L dz u_i(z) u_j^*(z) = \delta_{ij}. \quad (3.6)$$

Temos também que a relação de completeza é satisfeita

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j(z) u_j^*(z') = \delta(z - z'). \quad (3.7)$$

Podemos agora investigar como as regras de Feynman, descritas para o sistema totalmente infinito no capítulo 2, serão modificadas para incluir o efeito de tamanho finito. Para essa análise consideremos a energia livre do sistema dada pelo funcional $F[\Phi] = \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \mathcal{L}[\Phi(\rho, z)]$ presente na definição da função de partição (2.32). A fim de termos uma representação no espaço dos momentos para $F[\Phi]$, comecemos pela parte livre da teoria. A partir de (3.1) e (3.4), podemos escrever

$$\begin{aligned} F_0[\Phi] &= \frac{1}{2} \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \left[(\nabla_{d-1}\Phi)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 \Phi^2(\rho, z) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}k \int_0^L dz \left[(k^2 + \mu^2) u_{j_1}(z) u_{j_2}(z) + \frac{du_{j_1}}{dz} \frac{du_{j_2}}{dz} \right] \phi_i(k, j_1) \phi_i(-k, j_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Note que o índice i acima está sendo somado de 1 a N de acordo com a convenção da soma para índices repetidos. O produto de derivadas de $u_j(z)$ pode ser reescrito como

$$\frac{du_{j_1}}{dz} \frac{du_{j_2}}{dz} = \frac{d}{dz} \left(u_{j_1} \frac{du_{j_2}}{dz} \right) - u_{j_1} \frac{d^2 u_{j_2}}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left(u_{j_1} \frac{du_{j_2}}{dz} \right) + \kappa_{j_2}^2 u_{j_1}(z) u_{j_2}(z), \quad (3.9)$$

onde usamos a equação (3.5) na última igualdade. Condições de contorno periódicas (anti-periódicas) implicam em $u_j(z)$ e $\frac{du_j}{dz}$ periódicos (antiperiódicos). Portanto, o produto $u_j(z)\frac{du_j}{dz}$ será sempre periódico e a integral $\int_0^L dz \frac{d}{dz} \left(u_{j_1} \frac{du_{j_2}}{dz} \right)$ será nula. Substituindo os resultados acima em (3.8), podemos escrever

$$F_0[\Phi] = \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}k (k^2 + \kappa_{j_2}^2 + \mu^2) S_{j_1, j_2} \phi_i(k, j_1) \phi_i(-k, j_2), \quad (3.10)$$

onde definimos o tensor

$$S_{j_1, j_2} \equiv \int_0^L u_{j_1}(z) u_{j_2}(z) dz. \quad (3.11)$$

Aplicando o mesmo tipo de análise para a parte interagente da energia livre temos

$$\begin{aligned} F_{int}[\Phi] &= \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \Phi_{i_1}(\rho, z) \cdots \Phi_{i_4}(\rho, z) \\ &= \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \sum_{j_1, \dots, j_4 = -\infty}^{\infty} S_{j_1, \dots, j_4} \frac{1}{(2\pi)^{3(d-1)}} \int d^{d-1}k_1 \cdots d^{d-1}k_4 \delta^{d-1}(k_1 + \cdots + k_4) \times \\ &\quad \times \phi_{i_1}(k_1, j_1) \cdots \phi_{i_4}(k_4, j_4), \end{aligned} \quad (3.12)$$

com a definição do tensor

$$S_{j_1, j_2, j_3, j_4} \equiv \int_0^L u_{j_1}(z) u_{j_2}(z) u_{j_3}(z) u_{j_4}(z) dz. \quad (3.13)$$

Novamente usamos a convenção da soma para os índices do campo em (3.12). Cada índice do tensor totalmente simétrico $F_{i_1, \dots, i_4}$ (ver 2.30) aparece somado com o correspondente índice repetido do campo Φ .

Dessa discussão, vemos claramente que o tamanho finito também é implementado como uma simetria interna. De fato, a estrutura tensorial é agora do tipo $O(N) \times (\text{tamanho finito})$, o que nos permite tratar separadamente os diferentes “grupos de simetria”, uma vez que as representações de $O(N)$ e de *tamanho finito* não se misturam. Os tensores, S_{j_1, j_2} e S_{j_1, j_2, j_3, j_4} , associados ao tamanho finito, são originados das condições de contorno e seus índices assumem valores que também dependem destas condições. Diferentemente dos índices de simetria interna $O(N)$, os índices da “*simetria interna do tamanho finito*” têm um alcance de variação infinito. Consequentemente, não usaremos a convenção de soma para os índices repetidos associados ao tamanho finito, incluindo, portanto, a soma sobre os mesmos explicitamente.

Em (2.51) apresentamos a função de partição escrita convenientemente em termos de componentes de Fourier do propagador e da parte interagente da teoria. Aqui ela será modificada para incluir os modos referentes aos quase-momentos. Logo, baseado nos resultados (3.10) e

(3.12), escrevemos

$$Z[h] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left[-\frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \sum_{j_1, \dots, j_4 = -\infty}^{\infty} S_{j_1, \dots, j_4} \int d^{d-1} k_1 \dots d^{d-1} k_4 \delta^{d-1}(k_1 + \dots + k_4) \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta^4}{\delta h_{i_1}(k_1, j_1) \dots \delta h_{i_4}(k_4, j_4)} \right] Z_0[h], \quad (3.14)$$

com a função de partição da teoria livre dada por

$$Z_0[h] = \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = -\infty}^{\infty} \int d^{d-1} k S_{j_1, j_2} G_0(k, j_2) h_i(k, j_1) h_i(-k, j_2) \right). \quad (3.15)$$

Nas duas equações acima $\mathbf{h}(k, j)$ corresponde, por exemplo, ao componente de Fourier do campo magnético externo em função também dos índices j 's dos quase-momentos. Os momentos contínuos agora têm seu fluxo restrito ao subespaço com $(d-1)$ dimensões e o delta de Dirac em (3.14) implica na conservação desses momentos em cada vértice de interação dos diagramas de Feynman. Além disso, os índices de simetria interna do campo são somados da mesma maneira que na teoria $\lambda\phi^4$ convencional e teremos, portanto, os mesmos fatores de simetria encontrados no capítulo 2 para os diagramas de Feynman.

As únicas mudanças fundamentais nas funções de partição acima são as presenças dos tensores S_{j_1, j_2} e S_{j_1, j_2, j_3, j_4} , além do propagador livre $G_0(k, j)$ modificado para incluir o quase-momento κ_j . Escrevemos então

$$G_0(k, j) = \frac{1}{k^2 + \kappa_j^2 + \mu^2}. \quad (3.16)$$

Note nos resultados (3.14) e (3.15) que o tensor S_{j_1, j_2, j_3, j_4} aparece compondo o vértice de interação e S_{j_1, j_2} aparece multiplicando o propagador livre. Como resultado, as regras de Feynman para os diagramas serão modificadas, de modo que cada linha e ponto de vértice de interação representarão agora as seguintes expressões, respectivamente

$$1 \text{---} 2 = \delta^{d-1}(k_1 + k_2) \delta_{i_1, i_2} S_{j_1, j_2} G_0(k_2, j_2), \quad (3.17)$$

$$\begin{array}{c} 1 \diagdown \quad 3 \\ \bullet \\ 2 \diagup \quad 4 \end{array} = -\frac{\lambda}{4!} F_{i_1, i_2, i_3, i_4} S_{j_1, j_2, j_3, j_4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), \quad (3.18)$$

onde podemos observar as diferenças em relação às expressões dadas em (2.58) e (2.86a). Os índices (modos) j 's desempenham um papel semelhante ao dos índices do campo ϕ_i e estão sob as mesmas regras de combinação, permutação, soma, etc.

Toda a informação referente às condições de contorno está contida nos tensores dados em (3.11) e (3.13), e no propagador em (3.16). Consideremos agora como esses elementos podem ser representados em PBC e ABC . A solução da equação (3.5), satisfazendo ambas as condições de contorno, é expressa por

$$u_j^{(\tau')}(z) = A \exp(i\kappa_j^{(\tau')} z), \quad (3.19)$$

onde devemos ter $\kappa_j^{(\tau')} = \frac{2\pi}{L}(j + \tau')$ para $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. O índice τ' identifica a condição de contorno usada, isto é: PBC ($\tau' = 0$); ABC ($\tau' = \frac{1}{2}$). A constante A é fixada através da condição (3.6), resultando em $A = \frac{1}{\sqrt{L}}$. Desse modo, os tensores definidos em (3.11) e (3.13) tornam-se

$$S_{j_1, j_2}^{(\tau')} = \delta_{j_1 + j_2, 0}; \quad (3.20)$$

$$S_{j_1, j_2, j_3, j_4}^{(\tau')} = \frac{1}{L} \delta_{j_1 + j_2 + j_3 + j_4, 0}, \quad (3.21)$$

sem qualquer distinção entre as condições de contorno consideradas. Os deltas de Kronecker acima introduzem uma espécie de conservação dos quase-momentos da mesma forma que o delta de Dirac em (3.14) implica na conservação dos momentos contínuos no subespaço com $(d-1)$ dimensões em cada vértice de interação. Como PBC e ABC não quebram a invariância translacional do sistema, as integrais de Feynman se apresentarão de forma análoga às do sistema infinito, explorado no capítulo anterior, diferenciando-se em cada *loop* pela seguinte substituição

$$\int d^d k \longrightarrow \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} k, \quad (3.22)$$

com $\sigma = \frac{2\pi}{L}$ correspondendo a uma escala de momento produzida naturalmente pelo tamanho finito do sistema. Note que no limite $L \rightarrow \infty$, o somatório em j acima pode ser identificado como uma integral de Riemann e estabelecemos então a correspondência inversa para a integral de *loop* para um sistema infinito em d dimensões

$$\sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} k \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int d^d k.$$

Dessa forma, para os diagramas necessários ao cálculo dos expoentes críticos do modelo, podemos escrever

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \frac{N+8}{18} \lambda^2 I_2^{(\tau')}(k, j; \sigma, \mu); \quad (3.23)$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \frac{N^2 + 6N + 20}{108} \lambda^3 [I_2^{(\tau')}(k, j; \sigma, \mu)]^2, \quad (3.24)$$

onde,

$$I_2^{(\tau')}(k, j; \sigma, \mu) \equiv \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q}{[(q+k)^2 + \sigma^2(l+j+\tau')^2 + \mu^2][q^2 + \sigma^2(l+\tau')^2 + \mu^2]}. \quad (3.25)$$

Ainda para a função de vértice de 4 pontos temos

$$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \frac{5N+22}{54} \lambda^3 I_4^{(\tau')}(k, k', j, j'; \sigma, \mu) \quad (3.26)$$

onde,

$$I_4^{(\tau')}(k, k', j, j'; \sigma, \mu) \equiv \sigma^2 \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 - k)^2 + \sigma^2(l_1 - j + \tau')^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau')^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(q_1 + q_2 + k')^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j' + \tau')^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau')^2 + \mu^2]}. \quad (3.27)$$

Agora para os diagramas da função de vértice de 2 pontos temos

$$\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = \frac{N+2}{18} \lambda^2 D_3^{(\tau')}(k, j; \sigma, \mu), \quad (3.28)$$

onde,

$$D_3^{(\tau')}(k, j; \sigma, \mu) \equiv \sigma^2 \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j + \tau')^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau')^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau')^2 + \mu^2]}. \quad (3.29)$$

Temos também

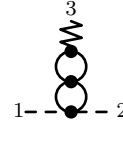
$$\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \lambda^3 D_5^{(\tau')}(k, j; \sigma, \mu) \quad (3.30)$$

onde,

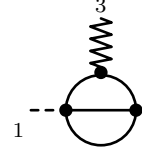
$$D_5^{(\tau')}(k, i; \sigma, \mu) \equiv \sigma^3 \sum_{l_1, l_2, l_3=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2 d^{d-1}q_3}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j + \tau')^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(q_1 + q_3 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + l_3 + j + \tau')^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2(l_1 + \tau')^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[q_2^2 + \sigma^2(l_2 + \tau')^2 + \mu^2][q_3^2 + \sigma^2(l_3 + \tau')^2 + \mu^2]}. \quad (3.31)$$

Agora para os diagramas referentes à inserção de campo composto temos

$$\begin{array}{c} 3 \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = \frac{N+2}{6} \lambda I_2^{(\tau')}(k, j; \sigma, \mu); \quad (3.32)$$



$$1- \text{---} 2 = \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \lambda^2 [I_2^{(\tau')}(k, j; \sigma, \mu)]^2 \quad (3.33)$$



$$1- \text{---} 2 = \frac{N+2}{6} \lambda^2 I_4^{(\tau')}(k, k', j, j'; \sigma, \mu) \quad (3.34)$$

Com a prescrição acima, temos todos os ingredientes para prosseguirmos com a renormalização (teoria massiva e sem massa), através da definição de condições de normalização próprias para o sistema submetido a condições de contorno e, conseqüentemente, com a regularização das integrais de Feynman em *PBC* e *ABC*. Essas integrais apresentam uma dificuldade a mais em relação aos seus paralelos no sistema totalmente infinito, devido à soma nos quase-momentos. Com relação à regularização dimensional das integrais de Feynman, sua aplicação será realizada apenas quando tratarmos de *NBC* e *DBC*, pois todas as sutilezas que surgem de *PBC* e *ABC* também aparecem em *NBC* e *DBC*, entretanto em maior grau de complexidade para estes últimos. Nos limitaremos, portanto, a escrever os resultados obtidos por SL para a regularização das integrais acima. Dessa forma poderemos verificar as diferenças e semelhanças destes resultados em relação às condições de contorno de Neumann e Dirichlet.

Na teoria massiva, em momento e quase-momento nulos, as expansões em ϵ das várias integrais citadas até aqui podem ser listadas da seguinte forma

$$I_2^{(\tau')}(0; r) = \frac{\mu^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} f_{\frac{1}{2}}(\tau', r^{-1}) \right]; \quad (3.35a)$$

$$I_4^{(\tau')}(0; \mu, r) = \frac{\mu^{-2\epsilon}}{2\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon f_{\frac{1}{2}}(\tau', r^{-1}) \right]; \quad (3.35b)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_3^{(\tau')}(k, j=0; \mu, r) \right|_{k^2=0} = -\frac{\mu^{-2\epsilon}}{8\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W_0^{(\tau')}(r) \right]; \quad (3.35c)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_5^{(\tau')}(k, j=0; \mu, r) \right|_{k^2=0} = -\frac{\mu^{-3\epsilon}}{6\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2}\epsilon W_0^{(\tau')}(r) \right]. \quad (3.35d)$$

Embora as funções $f_{\frac{1}{2}}(\tau', r^{-1})$ e $W_0^{(\tau')}(r)$ sejam importantes nesse estudo, deixaremos suas definições explícitas para o contexto de *NBC* e *DBC* (próximo capítulo), onde elas aparecerão num formato mais geral, surgindo naturalmente nos cálculos. É importante frisar porém que as expressões acima possuem uma estrutura similar às integrais do sistema totalmente infinito, diferenciando-se pelo acréscimo dos termos $f_{\frac{1}{2}}(\tau', r^{-1})$ e $W_0^{(\tau')}$, que denominamos de *correção de tamanho finito*.

Antes de passarmos ao tratamento com *NBC* e *DBC*, se faz necessário alguns comentários sobre a renormalização em *PBC* e *ABC*, para entendermos como as divergências presentes nas

integrais de Feynman para $\epsilon \rightarrow 0$ podem ser removidas da teoria nesses casos específicos. Esta discussão será ampliada posteriormente, e teremos a oportunidade de discutir estes conceitos para as condições de Neumann e Dirichlet.

3.3 Renormalização e equações de Callan-Symanzik para PBC e ABC

As divergências no regime ultravioleta que foram descritas no capítulo 2, também estão presentes em teorias de campos confinados entre duas superfícies. Tais divergências continuam sendo associadas ao mesmo número finito de divergências primitivas na dimensão crítica. Portanto, para remover esses infinitos é necessário um número também finito de constantes de renormalização e o procedimento de renormalização ocorrerá de forma similar ao apresentado na equação (2.130). Logo, teremos o seguinte formato de equação para as funções de vértice $1PI$ renormalizadas a partir de suas versões não renormalizadas

$$\Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; g, \mu) = \left(Z_{\Phi}^{(\tau')} \right)^{\frac{E}{2}} \left(Z_{\Phi^2}^{(\tau')} \right)^M \Gamma^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \lambda, \mu_0, \Lambda), \quad (3.36)$$

onde o índice $l = 1, 2, \dots, E$ rotula tanto o momento externo k_l quanto o modo j_l do quase momento, ambos associados com o campo Φ e $l' = 1, \dots, M$ rotula tanto o momento externo $p_{l'}$ quanto o modo $j_{l'}'$ do quase momento, ambos associados com o campo composto Φ^2 . Apesar da dependência das funções de vértice nas condições de contorno, não incluiremos o índice τ' nessas funções para simplificar a notação. Explicitaremos essa dependência apenas nas constantes de renormalização multiplicativas $Z_{\Phi}^{(\tau')}$ e $Z_{\Phi^2}^{(\tau')}$.

As constantes de renormalização na equação (3.36) podem ser determinadas por condições de normalização semelhantes àsquelas consideradas em (2.132). A diferença é que agora elas devem refletir os diferentes valores das funções de vértice de acordo com a condição de contorno considerada. Portanto, com o intuito de fazer a massa renormalizada μ independente das condições de contorno, SL propuseram o seguinte conjunto de condições de normalização para as funções de vértice

$$\Gamma_R^{(2)}(k = 0, j = 0; g, \mu) = \mu^2 + (\sigma\tau')^2, \quad (3.37a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, j = 0; g, \mu) \right|_{k^2=0} = 1, \quad (3.37b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_l = 0, j_l = 0; g, \mu) = g, \quad (3.37c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k = 0, j = 0, p = 0, j' = 0; g, \mu) = 1, \quad (3.37d)$$

onde os quase-momentos externos também foram tomados iguais a zero. Como demonstrado por SL, as condições acima são consistentes com o procedimento de renormalização e não perdem generalidade ao fazermos os quase-momentos externos nulos, pois, as constantes de

renormalização provenientes dessas condições específicas continuam renormalizando a função de vértice $\Gamma^{(2)}$ mesmo quando $j \neq 0$. Adiantamos que no caso de DBC e NBC , dentro de uma perspectiva que unifique as duas condições de contorno, escolher os quase-momentos externos iguais a zero não será uma opção viável.

O parâmetro μ pode ser escolhido livremente nas condições acima. Essa liberdade de escolha para λ e Λ fixos resulta nas equações de Callan-Symanzik associadas às transformações infinitesimais do grupo de renormalização em uma teoria massiva, conforme mencionamos na seção 2.8. Dentro desse contexto, também foi investigado por SL como as equações de Callan-Symanzik refletem as modificações nas condições de normalização dadas em (3.37). A partir da equação (3.36), podemos escrever

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_{\lambda, \Lambda} \Gamma_R^{(E, M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \mu^2, g) = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_{\lambda, \Lambda} \left[\left(Z_{\Phi}^{(\tau')}\right)^{E/2} \left(Z_{\Phi^2}^{(\tau')}\right)^M \times \right. \\ \left. \times \Gamma^{(E, M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \mu_0^2, \lambda, \Lambda) \right]. \quad (3.38)$$

Após a realização da derivada, obtemos

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta^{(\tau')} \frac{\partial}{\partial g} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi}^{(\tau')} + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau')}\right) \Gamma_R^{(E, M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \mu, g) = \\ = \mu \left(\frac{\partial \mu_0^2}{\partial \mu}\right)_{\lambda, \Lambda} \left(Z_{\Phi}^{(\tau')}\right)^{-1} \Gamma_R^{(E, M+1)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}', 0, 0; \mu, g), \quad (3.39)$$

onde as funções de Wilson são definidas por: $\beta^{(\tau')} \equiv \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}$, $\gamma_{\Phi}^{(\tau')} \equiv \mu \frac{\partial \ln Z_{\Phi}^{(\tau')}}{\partial \mu}$ e $\gamma_{\Phi^2}^{(\tau')} \equiv -\mu \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2}^{(\tau')}}{\partial \mu}$, além disso também utilizamos

$$\Gamma_R^{(E, M+1)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}', 0, 0; \mu_0, \lambda, \Lambda) = \frac{\partial}{\partial \mu_0^2} \Gamma_R^{(E, M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \mu_0, \lambda, \Lambda).$$

Note que a inserção de campo composto ocorre em momento e quase-momento nulo. Tomando agora $E = 2$ e $M = 0$, usando também as condições (3.37a) e (3.37d), podemos determinar o coeficiente que multiplica $\Gamma_R^{(E, M+1)}$, ou seja,

$$\mu \left(\frac{\partial \mu_0^2}{\partial \mu}\right)_{\lambda, \Lambda} \left(Z_{\Phi}^{(\tau')}\right)^{-1} = \left[2 - \tilde{\gamma}_{\Phi}^{(\tau')}\right] \mu^2, \quad (3.40)$$

onde definimos

$$\tilde{\gamma}_{\Phi}^{(\tau')} \equiv \gamma_{\Phi}^{(\tau')} \left[1 + \left(\frac{\sigma \tau'}{\mu}\right)^2\right]. \quad (3.41)$$

Em termos das constantes de acoplamento u e u_0 adimensionalizadas através de $g = \mu^\epsilon u$ e $\lambda = \mu^\epsilon u_0$, podemos reescrever (3.39), com auxílio do resultado (3.40), no formato final

encontrado para as equações de Callan-Symanzik

$$\begin{aligned} \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta^{(\tau')}(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi}^{(\tau')}(u) + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau')}(u) \right] \Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \mu, u) = \\ = \mu^2 \left[2 - \tilde{\gamma}_{\Phi}^{(\tau')}(u) \right] \Gamma_R^{(E,M+1)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}', 0, 0; \mu, u). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora todas as funções de Wilson presentes na equação anterior são descritas em termos de parâmetros adimensionais, a saber:

$$\beta^{(\tau')}(u) = -\epsilon \left(\frac{\partial \ln u_0^{(\tau')}}{\partial u} \right)^{-1}, \quad (3.43a)$$

$$\gamma_{\Phi}^{(\tau')}(u) = \beta^{(\tau')}(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi}^{(\tau')}}{\partial u}, \quad (3.43b)$$

$$\gamma_{\Phi^2}^{(\tau')}(u) = -\beta^{(\tau')}(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2}^{(\tau')}}{\partial u}. \quad (3.43c)$$

Exceto pela dependência nas condições de contorno e tamanho finito L , essas funções são escritas na mesma forma das equações dadas em (2.149).

A única diferença entre (3.42) e a correspondente para o sistema infinito (2.175) é a presença da função $\tilde{\gamma}_{\Phi}^{(\tau')}(u)$ que, de acordo com (3.41), é essencialmente uma versão reescalada de $\gamma_{\Phi}^{(\tau')}(u)$. No limite $L \rightarrow \infty$ ($\sigma \rightarrow 0$), recuperamos as equações de Callan-Symanzik do sistema infinito.

De acordo com a argumentação apresentada na seção 2.8, quando consideramos os momentos externos no regime ultravioleta ($\frac{k_l}{\mu} \rightarrow \infty$), o lado direito da equação (3.42) pode ser desprezado ordem a ordem na expansão diagramática. Nesse regime, a teoria massiva será então invariante por escala desde que a constante de acoplamento seja colocada no ponto fixo não trivial $u_{\infty}^{(\tau')}$, dependente agora das condições de contorno e de L . Portanto, as soluções de (3.42) serão obtidas de forma análoga àquelas para um sistema infinito e as leis de escala provenientes dessas soluções permitirão o cálculo dos expoentes críticos através das equações (2.159) e (2.172), pela utilização do ponto fixo $u_{\infty}^{(\tau')}$ associado ao regime ultravioleta, o qual é obtido da condição $\beta^{(\tau')}(u_{\infty}^{(\tau')}) = 0$.

3.4 O método de Silva e Leite na teoria sem massa com *PBC* e *ABC*

Vamos analisar agora o mesmo tipo de sistema com geometria de superfícies planas e paralelas separadas por uma distância L no qual a massa do propagador é nula. Nesse caso, estamos exatamente no ponto crítico e o comprimento de correlação é infinito. Mantendo L finito, nos

deparamos com uma situação completamente nova. No início da formulação da teoria de escala em sistemas com tamanho finito, acreditava-se na impossibilidade de utilizar o método perturbativo devido ao fato de ξ ser muito maior que L . Porém, SL mostraram que o método perturbativo permanece válido na teoria de campos sem massa para valores não tão pequenos de L . Com isso podemos de fato ampliar o limite da variável $\frac{L}{\xi}$ em relação às regiões de escala, dentro das quais o *crossover* dimensional foi conjecturado.

Algumas características tornam a teoria não-massiva vantajosa em relação à massiva. No caso do sistema submetido à *PBC* ou *ABC*, a primeira delas refere-se a maior facilidade técnica para calcular as integrais de Feynman, o que não é necessariamente verdadeiro para *DBC* e *NBC*, como veremos.

Aplicando $\mu = 0$ nas integrais dadas em (3.25), (3.27), (3.29) e (3.31), as expansões em ϵ das mesmas tornam-se

$$I_{2PS}^{(\tau')}(\sigma) = \frac{1}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau')}(1, 0; \sigma) \right]; \quad (3.44a)$$

$$I_{4PS}^{(\tau')}(\sigma) = \frac{1}{2\epsilon^2} \left[1 + \frac{3\epsilon}{2} + \epsilon F_0^{(\tau')}(1, 0; \sigma) \right]; \quad (3.44b)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_3^{(\tau')}(k, j=0; \sigma) \right|_{PS} = -\frac{1}{8\epsilon} \left[1 + \frac{5\epsilon}{4} - 2\epsilon W_0^{(\tau')}(\sigma) \right]; \quad (3.44c)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_5^{(\tau')}(k, j=0; \sigma) \right|_{PS} = -\frac{1}{6\epsilon^2} \left[1 + 2\epsilon - 3\epsilon W_0^{(\tau')}(\sigma) \right], \quad (3.44d)$$

onde todas as integrais foram calculadas com os quase-momentos externos nulos, mas, diferentemente do caso massivo, o momento foi tomado no ponto simétrico ($k^2 = \kappa^2 = 1$). As expansões acima são similares às correspondentes expansões sem massa para o sistema infinito, diferenciando-se agora pelo acréscimo dos termos $F_0^{(\tau')}(1, 0; \sigma)$ e $W_0^{(\tau')}(\sigma)$, cujas definições deixaremos para o capítulo seguinte.

Uma segunda característica, que também ocorre para *NBC* e *DBC*, é o ponto fixo atrativo no regime infravermelho. Na seção 2.8, evidenciamos que a estabilidade do ponto fixo u^* faz com que a teoria seja sempre invariante por escala no regime infravermelho, ou seja, independentemente do valor inicial da constante de acoplamento u , o escalamento dos momentos no limite infravermelho induz um fluxo em u com $u \rightarrow u^*$. Outro ponto positivo é que podemos comparar os resultados obtidos através da teoria sem massa com os da teoria massiva.

As condições de normalização serão tomadas agora com os momentos externos das funções de vértice colocados no ponto simétrico. A equação (2.145) continua sendo uma escolha conveniente para a construção desse ponto de simetria em termos da nova escala de momento κ . Como não existe perda de generalidade, manteremos ainda os quase-momentos externos nulos. As condições dadas em (2.144a-2.144d) para funções de vértice multiplicativamente renormalizáveis serão portanto aplicadas aqui com algumas pequenas modificações, ou seja,

$$\Gamma_R^{(2)}(k=0, j=0; g, 0) = (\sigma\tau')^2, \quad (3.45a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, j=0; g, 0) \right|_{k=0} = 1, \quad (3.45b)$$

$$\left. \Gamma_R^{(4)}(k_l, i_l=0; g, 0) \right|_{PS} = g, \quad (3.45c)$$

$$\left. \Gamma_R^{(2,1)}(k_1, i_1=0, k_2, i_2=0, p, j'=0; g, 0) \right|_{PS} = 1. \quad (3.45d)$$

Note como a primeira dessas condições foi modificada para refletir os diferentes valores da função de vértice de 2 pontos de acordo com a condição de contorno. Além disso, o ponto simétrico PS está sendo aplicado apenas no subespaço com $(d-1)$ dimensões. Na direção perpendicular às superfícies, podemos tomar os quase-momentos iguais a zero sem o aparecimento de quaisquer divergências no infravermelho. É importante frisar que as constantes de renormalização provenientes das condições acima continuam renormalizando as funções de vértice quando os quase-momentos são diferentes de zero.

Implementando o procedimento de renormalização multiplicativa em termos do corte ultravioleta Λ nos momentos, escrevemos as funções de vértice renormalizadas nos mesmos moldes de (2.146)

$$\Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \kappa, g) = (Z_\Phi^{(\tau')})^{E/2} (Z_{\Phi^2}^{(\tau')})^M \Gamma^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; \lambda, \Lambda), \quad (3.46)$$

onde usamos a mesma notação empregada na equação (3.36).

O fato da teoria não renormalizada ser insensível à escolha da escala de momento κ conduz a uma equação do tipo dado em (2.147), onde agora as constantes de renormalização $Z_\Phi^{(\tau')}$ e $Z_{\Phi^2}^{(\tau')}$ serão dependentes das condições de contorno e do tamanho finito L . Podemos mostrar que as equações do grupo de renormalização resultantes desse tipo de invariância tem a seguinte forma

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta^{(\tau')}(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_\Phi^{(\tau')}(u) + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau')}(u) \right] \Gamma_R^{(E,M)}(k_l, j_l, p_{l'}, j_{l'}'; u, \kappa) = 0, \quad (3.47)$$

onde as únicas modificações com relação ao sistema infinito aparecem na dependência em τ' e L das funções de Wilson escritas de forma análoga àsquelas dadas na equação (3.43) para o caso massivo. O ponto fixo u^* é novamente obtido a partir da condição $\beta^{(\tau')}(u^*) = 0$ e calculamos os expoentes críticos η e ν com a substituição de u^* nas equações (2.159) e (2.172).

Capítulo 4

Teoria $\lambda\phi^4$ com condições de contorno de Neumann e Dirichlet

4.1 Introdução

No capítulo anterior, vimos, de maneira sucinta, as contribuições de NF e SL no tratamento do grupo de renormalização e expansão em ϵ para o modelo de Ising submetido a *PBC* ou *ABC*. Vamos agora utilizar os conceitos introduzidos naquele capítulo para construirmos a expansão diagramática das partes de vértice *1PI* para parâmetros de ordem com simetria $O(N)$ confinados em uma geometria de placas planas e paralelas submetidas a condições de contorno de Neumann (*NBC*) ou de Dirichlet (*DBC*).

As equações de movimento são obtidas pela variação da ação com respeito ao campo e não dependem das condições de contorno. Portanto, para *NBC* ou *DBC*, temos que

$$(\nabla^2 - \mu^2)\Phi_i(\rho, z) = 0, \quad (4.1)$$

onde ρ é o vetor que representa as coordenadas do campo Φ no subespaço com $d - 1$ dimensões; z é a coordenada axial perpendicular às superfícies limitantes (*placas paralelas*) e $i = 1, 2, \dots, N$ é o índice de simetria interna do campo (*modelo N vetorial*).

As condições de contorno serão introduzidas impondo que o campo Φ obedeça a uma das duas equações abaixo

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\rho, z) \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\rho, z) \right|_{z=L} = 0 \quad (NBC); \quad (4.2)$$

$$\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, L) = 0 \quad (DBC), \quad (4.3)$$

onde temos novamente que L é a distância entre as placas.

Podemos reescrever o campo Φ através de suas componentes de Fourier da seguinte forma

$$\Phi_i(\rho, z) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \sum_j \int d^{d-1}k e^{ik \cdot \rho} u_j(z) \phi_i(k, j). \quad (4.4)$$

Substituindo agora a expressão acima em (4.1) chegamos a

$$\frac{d^2 u_j(z)}{dz^2} = -\kappa_j^2 u_j(z), \quad (4.5)$$

onde $k^2 + \kappa_j^2 + \mu^2 = 0$.

A solução geral para $u_j(z)$ é dada por

$$u_j(z) = A e^{i\kappa_j z} + B e^{-i\kappa_j z}, \quad (4.6)$$

onde A e B são constantes que devem ser determinadas pela aplicação das condições de contorno já mencionadas, assim como pela condição de ortonormalidade das funções base $u_j(z)$ expressa por

$$\int_0^L dz u_i(z) u_j^*(z) = \delta_{ij} \quad (4.7)$$

Após a aplicação de (4.2) e (4.3) em (4.6) encontramos $A = \tau B$, onde τ será o parâmetro indicador da condição de contorno que estamos utilizando, ou seja: NBC ($\tau = 1$); DBC ($\tau = -1$). Utilizando também (4.7), obtemos

$$u_j^{(\tau=1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\kappa_j z) \quad (NBC); \quad (4.8)$$

$$u_j^{(\tau=-1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\kappa_j z) \quad (DBC), \quad (4.9)$$

onde $\kappa_j = \frac{\pi}{L}j$, independentemente da condição de contorno. O quase-momento j nas expressões acima deve ser um inteiro positivo. Mas, por simples inspeção podemos identificar que: $j \in Z_+^*$ em DBC , e $j \in Z_+$ em NBC , ou seja, as expressões acima não abrangem a contribuição de $j = 0$ para NBC , a qual chamaremos de *modo zero*. Em relação à essa exclusão momentânea, queremos frisar que nossa intenção inicial é unificar as duas condições de contorno num único formalismo, por isso, o modo zero ($j = 0$), que só dá resultados não nulos para NBC , não será levado em consideração agora. Abordaremos como incluir e tratar o modo zero a posteriori.

Vamos agora apresentar as modificações nas regras de Feynman causadas por NBC e DBC . Temos que a energia livre é dada por

$$F[\Phi^{(\tau)}] = \int d^{d-1}\rho \int_0^L dz \mathcal{L}[\Phi^{(\tau)}(\rho, z)], \quad (4.10)$$

onde a densidade lagrangiana ($\mathcal{L}$) é dada por

$$\mathcal{L}[\Phi^{(\tau)}] = \frac{1}{2}(\nabla_{d-1}\Phi^{(\tau)})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi^{(\tau)}}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu^2}{2}(\Phi^{(\tau)})^2 + \frac{\lambda}{4!}(\Phi^{(\tau)})^4. \quad (4.11)$$

Levando em conta apenas a parte livre da lagrangiana acima, após algumas manipulações, podemos escrever

$$F_0[\Phi^{(\tau)}] = \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2} \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}k (k^2 + \kappa_{j_2}^2 + \mu^2) S_{j_1, j_2}^{(\tau)} \phi_i^{(\tau)}(k, j_1) \phi_i^{(\tau)}(-k, j_2), \quad (4.12)$$

onde,

$$S_{j_1, j_2}^{(\tau)} \equiv \int_0^L dz u_{j_1}^{(\tau)}(z) u_{j_2}^{(\tau)}(z) \quad (4.13)$$

Para a parte interagente temos

$$F_{int}[\Phi^{(\tau)}] = \frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \sum_{j_1, \dots, j_4} \frac{S_{j_1, \dots, j_4}^{(\tau)}}{(2\pi)^{3(d-1)}} \int d^{d-1}k_1 \dots d^{d-1}k_4 \delta^{d-1}(k_1 + \dots + k_4) \times \\ \times \phi_{i_1}^{(\tau)}(k_1, j_1) \dots \phi_{i_4}^{(\tau)}(k_4, j_4), \quad (4.14)$$

onde $F_{i_1, \dots, i_4}$ é um tensor simétrico em todos os índices associado à simetria interna dos campos e $S_{j_1, \dots, j_4}^{(\tau)}$ é dado por

$$S_{j_1, \dots, j_4}^{(\tau)} \equiv \int_0^L dz u_{j_1}^{(\tau)}(z) \dots u_{j_4}^{(\tau)}(z). \quad (4.15)$$

Fazendo a comparação com a teoria infinita em todas as dimensões, temos

$$Z^{(\tau)}[\mathbf{h}] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left[-\frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} \sum_{j_1, \dots, j_4} S_{j_1, \dots, j_4}^{(\tau)} \int d^{d-1}k_1 \dots d^{d-1}k_4 \delta^{d-1}(k_1 + \dots + k_4) \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta^4}{\delta h_{i_1}(k_1, j_1) \dots \delta h_{i_4}(k_4, j_4)} \right] Z_0^{(\tau)}[\mathbf{h}], \quad (4.16)$$

onde $Z^{(\tau)}[\mathbf{h}]$ é a função de partição da teoria, sendo $Z_0^{(\tau)}[\mathbf{h}]$, o gerador da parte livre, dado por

$$Z_0^{(\tau)}[\mathbf{h}] = \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2} \int d^{d-1}k S_{j_1, j_2}^{(\tau)} G_0(k, j_2) h_i(k, j_1) h_i(-k, j_2) \right), \quad (4.17)$$

onde, $h(k, j)$ corresponde, por exemplo, à componente de Fourier do campo magnético externo em função também dos índices j 's dos quase-momentos.

O propagador livre é dado por

$$G_0(k, j) = \frac{1}{k^2 + \sigma^2 j^2 + \mu^2}, \quad (4.18)$$

onde agora $\sigma \equiv \frac{\pi}{L}$. Note que, ao contrário de *PBC* e *ABC*, o propagador livre não depende do parâmetro τ que diferencia as condições de contorno, ou seja, temos o mesmo propagador tanto para *NBC* quanto para *DBC*.

As diferenças fundamentais nas regras de Feynman ocorrem devido à presença dos tensores $S_{j_1, j_2}^{(\tau)}$ e $S_{j_1, \dots, j_4}^{(\tau)}$. Temos, portanto, as seguintes representações

$$1 \text{---} 2 = \delta^{d-1}(k_1 + k_2) \delta_{i_1, i_2} S_{j_1, j_2}^{(\tau)} G_0(k_2, j_2), \quad (4.19)$$

$$\begin{array}{c} 1 \text{---} \diagdown \\ \diagup \text{---} 3 \\ 2 \text{---} \diagdown \quad \bullet \quad \diagup \\ \diagup \text{---} 4 \end{array} = -\frac{\lambda}{4!} F_{i_1, \dots, i_4} S_{j_1, \dots, j_4}^{(\tau)} \delta^{d-1}(k_1 + \dots + k_4). \quad (4.20)$$

A maioria dos argumentos levantados acima já existiam no trabalho de Nemirovsky-Freed. A novidade começa a surgir quando queremos calcular os tensores $S_{j_1, j_2}^{(\tau)}$ e $S_{j_1, \dots, j_4}^{(\tau)}$ de forma explícita para a construção dos diagramas de Feynman até a ordem de no mínimo 2 *loops*. O que ocorre é que as representações (4.8) e (4.9) para as funções base não são as mais convenientes e por isso vamos utilizar a seguinte representação

$$u_j^{(\tau=1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \left[\frac{1}{2} (e^{i\sigma j z} + e^{-i\sigma j z}) \right] \quad (NBC); \quad (4.21)$$

$$u_j^{(\tau=-1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \left[\frac{1}{2i} (e^{i\sigma j z} - e^{-i\sigma j z}) \right] \quad (DBC), \quad (4.22)$$

ou ainda, de forma unificada,

$$u_j^{(\tau)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\tau L}} \left[\frac{1}{2} (e^{i\sigma j z} + \tau e^{-i\sigma j z}) \right]. \quad (4.23)$$

A representação das funções base para *NBC* e *DBC* em termos de exponenciais complexas tem seus prós e contras com respeito à representação em termos de senos e cossenos. A principal objeção seria o aumento no número de termos no cálculo dos tensores $S_{j_1, j_2}^{(\tau)}$ e $S_{j_1, \dots, j_4}^{(\tau)}$, o que acarreta no aparecimento de multiplicidades nos diagramas de Feynman, ausentes nos casos de *PBC*, *ABC* e *bulk*. A grande vantagem em adotar essa estratégia é que não precisaremos apelar em nenhum momento para a paridade das funções base, o que nos permite unificar o tratamento de *NBC* e *DBC* para quase-momentos externos não-nulos. Além disso, a comparação imediata com o tratamento de *PBC* e *ABC* mais do que compensam as sutilezas provocadas pelo aparecimento das multiplicidades nos diagramas, como mostraremos explicitamente no presente capítulo.

Por motivos que ficarão óbvios no decorrer da nossa discussão no presente capítulo, vamos adiar a abordagem da teoria com os quase-momentos externos nulos (*modo zero*) para *NBC*. No entanto, essa restrição não existe para os quase-momentos internos, ou seja, na construção dos diagramas, a soma nos quase-momentos internos deve ser feita de $j = 1$ a ∞ para *DBC* e de $j = 0$ a ∞ para *NBC*. Apresentaremos, portanto, todas as possibilidades para os tensores.

Utilizando as representações (4.21) e (4.22) em conjunto com (4.13) e (4.15), podemos escrever

$$S_{j_1, j_2}^{(\tau)} = \delta_{j_1 - j_2, 0} \equiv \delta(j_1 - j_2). \quad (4.24)$$

O último delta na expressão acima está de acordo com a notação que utilizaremos para o delta de Kronecker a partir de agora. Note que não existe diferença entre *NBC* e *DBC* nesse caso ($j_1, j_2 \in Z_+^*$). Temos também

$$\begin{aligned} S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)} = \frac{1}{2L} & [\delta(i_1 + i_2 + i_3 + i_4) + \tau\delta(i_1 - i_2 + i_3 + i_4) + \tau\delta(i_1 + i_2 - i_3 + i_4) + \\ & + \tau\delta(i_1 + i_2 + i_3 - i_4) + \delta(i_1 - i_2 - i_3 + i_4) + \delta(i_1 - i_2 + i_3 - i_4) + \\ & + \delta(i_1 + i_2 - i_3 - i_4) + \tau\delta(i_1 - i_2 - i_3 - i_4)]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Uma aspecto interessante a ser notado na expressão acima é que o fator τ só aparece nos termos em que a quantidade de sinais negativos é um número ímpar. O resultado acima é válido para *NBC* e *DBC* apenas quando todos os índices são inteiros positivos.

Definindo agora: $i_{\pm} \equiv i_1 \pm i_2$ e $j_{\pm} \equiv i_3 \pm i_4$, podemos escrever a expressão (4.25) de uma forma bem mais elegante e sucinta, ou seja,

$$S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)} = \frac{1}{2L} \sum_{\substack{\alpha_1 = \pm 1 \\ \alpha_2 = \pm 1 \\ \beta = \pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} \delta(i_{\alpha_1} + \beta j_{\alpha_2}). \quad (4.26)$$

Levando em conta agora o modo zero para *NBC*, temos

$$S_{0,0}^{(\tau=1)} = 1, \quad S_{j,0}^{(\tau=1)} = S_{0,j}^{(\tau=1)} = 0 \text{ para } j \in Z_+^*. \quad (4.27)$$

Temos também que

$$S_{0, i_1, i_2, i_3}^{(\tau=1)} = \frac{1}{\sqrt{2}L} [\delta(i_1 + i_2 + i_3) + \delta(i_1 - i_2 + i_3) + \delta(i_1 + i_2 - i_3) + \delta(i_1 - i_2 - i_3)], \quad (4.28)$$

$$S_{0,0, i_1, i_2}^{(\tau=1)} = \frac{1}{L} [\delta(i_1 + i_2) + \delta(i_1 - i_2)], \quad (4.29)$$

$$S_{0,0,0,0}^{(\tau=1)} = \frac{1}{L}, \quad S_{0,0,0, i_1}^{(\tau=1)} = 0 \text{ para } i_1 \in Z_+^*. \quad (4.30)$$

A partir dos tensores em sua forma explícita e das regras básicas dadas em (4.19) e (4.20) podemos construir os diagramas de Feynman. Como vimos no capítulo 2, para o sistema infinito, e no capítulo 3 para PBC ou ABC , os diagramas necessários para o cálculo dos expoentes críticos ν , até ordem de 2 *loops*, e η até ordem de 3 *loops*, são os apresentados nas expansões abaixo

$$\Gamma^{(2)}(k, j; \mu) = k^2 + \sigma^2 j^2 + \mu^2 + \text{diagrama 1} - \text{diagrama 2} \quad (4.31)$$

$$\Gamma_{j_1, \dots, j_4}^{(4)}(k_1, \dots, k_4; i_1, \dots, i_4; \mu) = \text{diagrama 1} - \left(\text{diagrama 2} - \text{diagrama 3} + 2 \text{ perms.} \right) + \text{diagrama 4} + 5 \text{ perms.} \quad (4.32)$$

$$\Gamma^{(2,1)}(k_1, k_2, p, i_1, i_2, j; \mu) = \text{diagrama 1} - \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} \quad (4.33)$$

A conclusão de que apenas os diagramas acima são necessários para o cálculo dos expoentes críticos não é trivial no caso de NBC ou DBC , o que decorre da complexa estrutura tensorial dos índices de quase-momento. Porém, antes de levantarmos os argumentos que comprovem tal afirmação, vamos nos deter na construção das expressões matemáticas destes diagramas, as quais serão dadas em termos das integrais de Feynman.

4.2 Diagramas em termos de integrais de Feynman com NBC e DBC

Iniciemos a construção das expressões para os diagramas de Feynman com o diagrama da função de 4 pontos em 1 *loop*. Utilizando então as formas básicas dadas em (4.19) e (4.20), podemos escrever

$$\text{diagrama 1} = \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \sum_{l_1, l_2} S_{i_1, i_2, l_1, l_2}^{(\tau)} S_{l_1, l_2, i_3, i_4}^{(\tau)} \int d^{d-1} q G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2). \quad (4.34)$$

É importante observar que, para simplificar a notação, evidenciamos no diagrama apenas os índices de quase-momento externo, pois, embora os índices referentes à simetria interna dos campos e os vetores referentes aos momentos contínuos também façam parte do diagrama, as

alterações na construção (em relação ao que é conhecido para a teoria $\lambda\phi^4$ em d dimensões infinitas) serão causadas apenas pelos quase-momentos, ficando esses outros elementos com os mesmos resultados exibidos no capítulo 2. Note que já está explícito o fator de simetria do diagrama, assim como o momento contínuo $k = k_1 + k_2$ dentro da integral.

Para uma melhor compreensão da construção, faremos aqui, especialmente para o diagrama acima, o desenvolvimento das expressões separando NBC de DBC , assim poderemos observar como escrever os resultados de cada caso num único formato. Começemos, portanto, com NBC ($\tau = 1$). Utilizando então as expressões (4.24-4.30), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} i_3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \int d^{d-1}q \left\{ \frac{1}{L^2} [\delta(i_+) + \delta(i_-)] [\delta(j_+) + \delta(j_-)] G_0(q+k, 0) G_0(q, 0) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2L^2} \sum_{l_1=1}^{\infty} [\delta(i_+ + l_1) + \delta(i_+ - l_1) + (i_+ \rightarrow i_-)] [\delta(j_+ + l_1) + \delta(j_+ - l_1) + (j_+ \rightarrow j_-)] G_0(q+k, l_1) G_0(q, 0) + \\
 &+ \frac{1}{2L^2} \sum_{l_2=1}^{\infty} [\delta(i_+ + l_2) + \delta(i_+ - l_2) + (i_+ \rightarrow i_-)] [\delta(j_+ + l_2) + \delta(j_+ - l_2) + (j_+ \rightarrow j_-)] G_0(q+k, 0) G_0(q, l_2) + \\
 &+ \frac{1}{4L^2} \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_1=1}}^{\infty} [\delta(i_+ + l_1 + l_2) + \delta(i_+ + l_1 - l_2) + \delta(i_+ - l_1 + l_2) + \delta(i_+ - l_1 - l_2) + (i_+ \rightarrow i_-)] \times \\
 &\times [\delta(j_+ + l_1 + l_2) + \delta(j_+ + l_1 - l_2) + \delta(j_+ - l_1 + l_2) + \delta(j_+ - l_1 - l_2) + (j_+ \rightarrow j_-)] G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2) \Big\}, \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

onde a notação: $(i_+ \rightarrow i_-)$ e $(j_+ \rightarrow j_-)$, indica que temos também as mesmas parcelas com a substituição de i_+ por i_- e j_+ por j_- , respectivamente.

Devido à invariância da função de Green sob $k \rightarrow -k$, a segunda e terceira parcelas podem ser escritas como uma só. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} i_3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \int d^{d-1}q \left\{ \frac{1}{L^2} [\delta(i_+) \delta(j_+) + \delta(i_+) \delta(j_-) + \delta(i_-) \delta(j_+) + \delta(i_-) \delta(j_-)] \times \right. \\
 &\times G_0(q+k, 0) G_0(q, 0) + \frac{1}{L^2} \sum_{l \neq 0}^{\infty} [\delta(i_+ + l) + (i_+ \rightarrow i_-)] [\delta(j_+ + l) + \delta(j_+ - l) + (j_+ \rightarrow j_-)] \times \\
 &\times G_0(q+k, 0) G_0(q, l) + \frac{1}{4L^2} \sum_{\substack{l_2 \neq 0 \\ l_1 \neq 0}}^{\infty} [\delta(i_+ + l_1 + l_2) + (i_+ \rightarrow i_-)] [\delta(j_+ + l_1 + l_2) + \delta(j_+ + l_1 - l_2) + \\
 &+ \delta(j_+ - l_1 + l_2) + \delta(j_+ - l_1 - l_2) + (j_+ \rightarrow j_-)] G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2) \Big\}, \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

onde utilizamos as combinações de deltas e sua paridade para escrever os somatórios abrangendo todos os inteiros menos o zero, por isso a notação explícita (l , l_1 e $l_2 \neq 0$). Note agora que a primeira e segunda parcelas são exatamente as contribuições de l_1 e l_2 iguais a zero que faltam no último termo. Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ i_3 \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \frac{\lambda^2}{4L^2} \int d^{d-1}q \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} [\delta(i_+ + l_1 + l_2) + (i_+ \rightarrow i_-)] [\delta(j_+ + l_1 + l_2) + \\ &+ \delta(j_+ + l_1 - l_2) + \delta(j_+ - l_1 + l_2) + \delta(j_+ - l_1 - l_2) + (j_+ \rightarrow j_-)] G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2). \end{aligned} \quad (4.37)$$

A expressão acima ainda pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ i_3 \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \frac{\lambda^2}{4L^2} \sum_{\substack{\alpha_1 = \pm 1 \\ \alpha_2 = \pm 1 \\ \beta = \pm 1}} \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q [\delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 + l_2 + \beta j_{\alpha_2}) + \\ &+ \delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 - l_2 + \beta j_{\alpha_2})] G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Deixemos a expressão acima como está, por enquanto, para desenvolver o raciocínio de construção em *DBC* ($\tau = -1$). A partir de (4.34) podemos escrever

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ i_3 \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \frac{\lambda^2}{4L^2} \sum_{l_1, l_2 = 1}^{\infty} \int d^{d-1}q [\delta(i_+ + l_1 + l_2) - \delta(i_+ + l_1 - l_2) - \delta(i_+ - l_1 + l_2) + \\ &+ \delta(i_+ - l_1 - l_2) + (i_+ \rightarrow i_-)] [\delta(l_1 + l_2 + j_+) - \delta(l_1 - l_2 + j_+) - \delta(-l_1 + l_2 + j_+) + \delta(-l_1 - l_2 + j_+) + \\ &+ (j_+ \rightarrow j_-)] G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Em decorrência da equação (4.25), o sinal positivo ou negativo na frente dos deltas em *DBC* está associado à quantidade, par ou ímpar, respectivamente, de sinais negativos para os quase-momentos. Assim, ao realizarmos as trocas ($i_+ \rightarrow i_-$) e ($j_+ \rightarrow j_-$), devemos alterar também os sinais dos deltas. Levando em consideração os sinais negativos, é fácil observar que se qualquer um dos quase-momentos for nulo, toda a expressão torna-se nula.

Podemos reduzir a expressão (4.39) escrevendo

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ i_3 \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \frac{\lambda^2}{4L^2} \sum_{\substack{\alpha_1 = \pm 1 \\ \alpha_2 = \pm 1 \\ \beta = \pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2) \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q [\delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 + l_2 + \beta j_{\alpha_2}) + \\ &- \delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 - l_2 + \beta j_{\alpha_2})] G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Comparando então (4.40) com (4.38), podemos observar que as duas expressões são muito similares, com as somas nos quase-momentos internos indo de $-\infty$ a ∞ . Tendo em vista que o sinal negativo em frente aos deltas, e os fatores multiplicativos α_1 e α_2 só aparecem em *DBC* ($\tau = -1$), podemos escrever uma única expressão para as duas condições de contorno, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} i_3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \frac{\lambda^2}{4L^2} \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q [\delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 + l_2 + \beta j_{\alpha_2}) \\ &+ \tau \delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 - l_2 + \beta j_{\alpha_2})] G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2). \end{aligned} \quad (4.41)$$

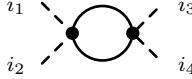
Visando uma comparação direta com os diagramas construídos para *PBC* e *ABC*, redefiniremos a constante de acoplamento λ por um fator multiplicativo de forma a gerar a constante $\sigma = \frac{\pi}{L}$ correspondente em *NBC* e *DBC*, isto é: $\lambda = 2\pi \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right) \equiv 2\pi \lambda' \rightarrow 2\pi \lambda$. Essa redefinição é apenas uma questão de conveniência e será realizada em todos os diagramas. Note que essa mesma redefinição poderia ter sido realizada em $S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)}$, o que daria o mesmo efeito, pois sempre que temos um λ temos um $S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)}$. Para simplificar, podemos aplicar a regra mnemônica: para cada λ multiplicamos um fator de 2π . Utilizando a regra citada, a expressão acima fica

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} i_3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \sigma^2 \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q [\delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 + l_2 + \beta j_{\alpha_2}) \\ &+ \tau \delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 - l_2 + \beta j_{\alpha_2})] G_0(q+k, l_1) G_0(q, l_2). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aplicando um dos deltas, ficamos com

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} i_3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} &= \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \sigma^2 \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} \times \\ &\times \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q [\delta(i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}) G_0(q+k, l_2 + \beta j_{\alpha_2}) G_0(q, l_2) + \\ &+ \tau \delta(2l_2 + i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}) G_0(q+k, l_2 - \beta j_{\alpha_2}) G_0(q, l_2)]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Observe que, além da restrição de que os quase-momentos sejam inteiros, o segundo termo em (4.43) só é diferente de zero quando $i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}$ é um número inteiro e par, pois $2l_2$ é sempre par. Essa propriedade se repetirá nos próximos diagramas da função de 4 pontos. Utilizando agora o último delta, assim como a paridade das funções de Green, chegamos à expressão final para o diagrama com *NBC* ou *DBC*, isto é,



$$= \frac{N+8}{18} \lambda^2 \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} [\delta(i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}) I(k, i_{\alpha_1}; \sigma, \mu) + \\ + \tau I' \left(k, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right)] , \quad (4.44)$$

onde,

$$I(k, i; \sigma, \mu) \equiv \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + \sigma^2(l+i)^2 + \mu^2][q^2 + \sigma^2 l^2 + \mu^2]} \quad (4.45)$$

e,

$$I'(k, i, j; \sigma, \mu) \equiv \sigma \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + \sigma^2 i^2 + \mu^2][q^2 + \sigma^2 j^2 + \mu^2]} . \quad (4.46)$$

Vale observar que a integral I possui a mesma estrutura funcional da integral $I_2^{(\tau'=0)}$ dada em (3.25), obtida em um sistema com condições de contorno periódicas, diferenciando-se pela definição de σ . Podemos verificar, a partir de (4.44), que a multiplicidade da qual falamos anteriormente é exibida pela soma em α_1 , α_2 e β . Outro ponto importante é que, como o propagador livre é o mesmo, tanto para *NBC* quanto para *DBC*, como pode ser visto em (4.18), as integrais para as duas condições de contorno também são as mesmas, a diferença está no parâmetro τ externo a elas. Por isso, embora NF tenham utilizado apenas o símbolo τ para as quatro condições de contorno, diferenciamos aqui τ' de τ , pois seu papel não é o mesmo para *NBC* e *DBC*. Podemos observar também o aparecimento de um σ a mais, o qual deverá se incorporar à condição de normalização da função de vértice de 4 pontos, assim como a multiplicidade.

Da equação (4.41) podemos observar que ao combinar $S_{i_1, i_2, l_1, l_2}^{(\tau)} S_{l_1, l_2, i_3, i_4}^{(\tau)}$ em um somatório nos índices l_1 e l_2 , teremos sempre a estrutura

$$\sum_{l_1, l_2} S_{i_1, i_2, l_1, l_2}^{(\tau)} S_{l_1, l_2, i_3, i_4}^{(\tau)} f(l_1, l_2) = \frac{1}{4L^2} \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} [\delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 + l_2 + \beta j_{\alpha_2}) + \\ + \tau \delta(i_{\alpha_1} + l_1 + l_2) \delta(l_1 - l_2 + \beta j_{\alpha_2})] f(l_1, l_2), \quad (4.47)$$

onde $f(l_1, l_2)$ é qualquer função par em l_1 e l_2 . Observamos que o fator τ surge no segundo termo como resultado de um número ímpar de sinais negativos. A relação acima é uma ferramenta importante na construção dos diagramas em *loops* mais altos, pois expressa a contração de dois fatores $S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)}$ já em uma configuração que unifica *NBC* com *DBC*.

Nos limitaremos agora a escrever as expressões para os diagramas restantes já de maneira unificada. O próximo diagrama da função de 4 pontos é dado por

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} i_3 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_4 \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_4 \end{array}
 \end{array} = \frac{N^2 + 6N + 20}{108} \lambda^3 \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} \left[\delta(i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}) I^2(k, i_{\alpha_1}; \sigma, \mu) + \right. \\
 + \tau I(k, i_{\alpha_1}; \sigma, \mu) I' \left(k, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) + \\
 + \tau I' \left(k, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) I(k, \beta j_{\alpha_2}; \sigma, \mu) + \\
 \left. + \sum_{l=-\infty}^{\infty} I' \left(k, l + \frac{i_{\alpha_1}}{2}, l - \frac{i_{\alpha_1}}{2}; \sigma, \mu \right) I' \left(k, l + \frac{\beta j_{\alpha_2}}{2}, l - \frac{\beta j_{\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) \right]. \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

Confrontando a expressão acima com seu paralelo em PBC (3.24), vemos que neste caso há o surgimento de vários outros elementos devido à imposição de NBC ou DBC . Temos ainda para função de 4 pontos

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} i_3 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_4 \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ i_4 \end{array}
 \end{array} = \frac{5N + 22}{54} \lambda^3 \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} \left[\delta(i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}) I_4(k, k', i_{\alpha_1}, -\beta i_3; \sigma, \mu) + \right. \\
 + \tau I_4' \left(k, k', \frac{i_{\alpha_1} + \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{-\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) + \\
 + \tau I_4'' \left(k, k', i_{\alpha_1}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{-\alpha_2}}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) + \\
 \left. + I_4'' \left(k, k', i_{\alpha_1}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j_{-\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) \right], \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 I_4(k, k', i, j; \sigma, \mu) \equiv \sigma^2 \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q_1 d^{d-1} q_2}{[(q_1 - k)^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2(l_1 - i)^2 + \mu^2]} \times \\
 \times \frac{1}{[(q_1 + q_2 + k')^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j)^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2 l_2^2 + \mu^2]}, \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

$$I'_4(k, k', i, j, l; \sigma, \mu) \equiv \sigma^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 - k)^2 + \sigma^2 i^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2 j^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(q_1 + q_2 + k')^2 + \sigma^2(m + l)^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2 m^2 + \mu^2]}, \quad (4.51)$$

$$I''_4(k, k', i, j, l; \sigma, \mu) \equiv \sigma^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 - k)^2 + \sigma^2(m - i)^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2 m^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(q_1 + q_2 + k')^2 + \sigma^2(m - j)^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2 l^2 + \mu^2]}. \quad (4.52)$$

Comparando agora (4.49) com (3.26), podemos observar que não existe análogo para as integrais I'_4 e I''_4 em *PBC* ou *ABC*. Tais integrais correspondem às correções de tamanho finito devido às condições de Neumann ou Dirichlet nas flutuações. Estes termos extras são, por conseguinte, um efeito não trivial inerente a *NBC* ou *DBC*.

Os diagramas da expansão da função de 2 pontos são dados por

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{N+2}{18} \lambda^2 \left[\delta(i_-) D_3(k, i_1; \sigma, \mu) + 3\tau D'_3 \left(k, \frac{i_+}{2}, \frac{i_-}{2}; \sigma, \mu \right) + \right. \\ \left. + \tau \delta(i_+) D_3(k, i_1; \sigma, \mu) + 3D'_3 \left(k, \frac{i_-}{2}, \frac{i_+}{2}; \sigma, \mu \right) \right], \quad (4.53)$$

onde,

$$D_3(k, i; \sigma, \mu) = \sigma^2 \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + i)^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[q_1^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2 l_2^2 + \mu^2]}, \quad (4.54)$$

e,

$$D'_3(k, i, j; \sigma, \mu) = \sigma^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(l + i)^2 + \mu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[q_1^2 + \sigma^2 l^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2 j^2 + \mu^2]}. \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \overline{D}_5''(k, i, j; \sigma, \mu) \equiv & \sigma^3 \sum_{l_1, l_3=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2 d^{d-1}q_3}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu^2]} \times \\ & \times \frac{1}{[(q_1 + q_3 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + l_3 + i)^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2(l_1 - j)^2 + \mu^2]} \times \\ & \times \frac{1}{[q_2^2 + \sigma^2 i^2 + \mu^2][q_3^2 + \sigma^2 l_3^2 + \mu^2]}, \quad (4.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_5'''(k, i, j; \sigma, \mu) \equiv & \sigma^3 \sum_{l_1, l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2 d^{d-1}q_3}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu^2]} \times \\ & \times \frac{1}{[(q_1 + q_3 + k)^2 + \sigma^2(l_1 + i)^2 + \mu^2][q_1^2 + \sigma^2(l_1 + l_2 + j)^2 + \mu^2]} \times \\ & \times \frac{1}{[q_2^2 + \sigma^2 l_2^2 + \mu^2][q_3^2 + \sigma^2(l_2 + i)^2 + \mu^2]}. \quad (4.61) \end{aligned}$$

Assim como ocorreu para os outros diagramas, há o surgimento de integrais que não possuem paralelo em PBC ou ABC como pode ser visto em (3.30), isto é, as integrais D_5' , D_5'' , $\overline{D}_5''$ e D_5''' só aparecem devido a aplicação de NBC ou DBC ao sistema. Ressaltamos porém que as integrais I , D_3 , I_4 e D_5 são idênticas às encontradas para condições de contorno periódicas ($\tau' = 0$) a menos do σ que para PBC é dado por $\frac{2\pi}{L}$.

A representação integral para os diagramas de campo composto $(\Phi^{(\tau)}(\rho, z))^2$ apresentados em (4.33) segue um critério semelhante ao adotado até agora. Aplicando o operador $(\nabla^2 - \mu^2)$ em $(\Phi^{(\tau)}(\rho, z))^2$ e utilizando (4.1), concluímos que o campo composto deve satisfazer

$$(\nabla^2 - 2\mu^2)(\Phi^{(\tau)}(\rho, z))^2 = 2(\nabla\Phi^{(\tau)}(\rho, z)) \cdot (\nabla\Phi^{(\tau)}(\rho, z)), \quad (4.62)$$

além da condição de contorno

$$(\Phi^{(\tau=-1)}(\rho, 0))^2 = (\Phi^{(\tau=-1)}(\rho, L))^2 = 0, \quad (4.63)$$

ou,

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (\Phi(\rho, z)^{(\tau=1)})^2 \right|_{z=0 \text{ ou } z=L} = 2\Phi^{(\tau=1)}(\rho, z) \frac{\partial}{\partial z} (\Phi^{(\tau=1)}(\rho, z)) \Big|_{z=L \text{ ou } z=L} = 0. \quad (4.64)$$

Assim como fizemos para $\Phi^{(\tau)}(\rho, z)$, podemos representar o campo composto por uma série de Fourier, ou seja,

devemos “acoplar” o diagrama  no propagador interno de , o que, algebricamente, lê-se

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} \sum_{l_1, l_2} \delta(i_{\alpha_1} + \beta(l_1 + \alpha_2 l_2)) \times \\
 &\times [\delta(l_1 - l_2 - j) + \tau \delta(l_1 + l_2 - j) + \delta(l_1 - l_2 + j) + \tau \delta(l_1 + l_2 + j)] \int d^{d-1} q G_0(q, l_1) G_0(q+p, l_2),
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

onde p é o momento externo associado à inserção de campo composto.

Para chegarmos a uma estrutura mais conveniente, comecemos com a condição de contorno de Dirichlet ($\tau = -1$)

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2) \sum_{l_1, l_2=1}^{\infty} \delta(i_{\alpha_1} + \beta(l_1 + \alpha_2 l_2)) \times \\
 &\times [\delta(l_1 - l_2 - j) - \delta(l_1 + l_2 - j) + \delta(l_1 - l_2 + j) - \delta(l_1 + l_2 + j)] \int d^{d-1} q G_0(q, l_1) G_0(q+p, l_2).
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Sendo o valor de j fixado pela escolha de i_1 e i_2 , vemos que a primeira parcela do vértice de campo composto complementa a terceira, assim como a segunda parcela complementa a última. Desse modo, aplicando os deltas para suprimir a soma em l_1 , podemos escrever simplesmente

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1 \alpha_2) \times \\
 &\times \sum_{l_2=1}^{\infty} \left\{ \delta(i_{\alpha_1} + \beta[(\alpha_2 + 1)l_2 + j]) \int d^{d-1} q G_0(q, l_2 + j) G_0(q+p, l_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta(i_{\alpha_1} + \beta[(\alpha_2 - 1)l_2 + j]) \int d^{d-1} q G_0(q, -l_2 + j) G_0(q+p, l_2) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

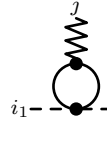
Realizando a soma em α_2 , ficamos com

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1) \times \\
 &\times \sum_{l_2=1}^{\infty} \left\{ [\delta(i_{\alpha_1} + \beta(2l_2 + j)) - \delta(i_{\alpha_1} + \beta j)] \int d^{d-1}q G_0(q, l_2 + j) G_0(q + p, l_2) + \right. \\
 &\quad \left. + [-\delta(i_{\alpha_1} + \beta j) + \delta(i_{\alpha_1} + \beta(-2l_2 + j))] \int d^{d-1}q G_0(q, -l_2 + j) G_0(q + p, l_2) \right\}. \quad (4.74)
 \end{aligned}$$

Os termos que diferem entre si apenas pelo sinal de l_2 , podem ser condensados numa única parcela se tomarmos a soma em l_2 de $-\infty$ a ∞ , com exceção de $l_2 = 0$. Assim, temos

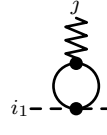
$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1) \times \\
 &\times \sum_{l_2 \neq 0} \left\{ \delta(i_{\alpha_1} - \beta(2l_2 - j)) \int d^{d-1}q G_0(q, -l_2 + j) G_0(q + p, l_2) + \right. \\
 &\quad \left. - \delta(i_{\alpha_1} + \beta j) \int d^{d-1}q G_0(q, -l_2 + j) G_0(q + p, l_2) \right\}. \quad (4.75)
 \end{aligned}$$

Somando e subtraindo os termos com $l_2 = 0$, obtemos



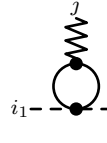
$$\begin{aligned}
i_1 - \text{---} \bullet \text{---} i_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1) \times \\
&\times \left\{ \sum_{l_2 \neq 0} \delta(i_{\alpha_1} - \beta(2l_2 - j)) \int d^{d-1}q G_0(q, -l_2 + j) G_0(q + p, l_2) + \right. \\
&\quad + \delta(i_{\alpha_1} + \beta j) \int d^{d-1}q G_0(q, j) G_0(q + p, 0) \} + \\
&\quad - \delta(i_{\alpha_1} + \beta j) \int d^{d-1}q G_0(q, j) G_0(q + p, 0) \} + \\
&\quad \left. - \delta(i_{\alpha_1} + \beta j) \sum_{l_2 \neq 0} \int d^{d-1}q G_0(q, -l_2 + j) G_0(q + p, l_2) \right\}. \quad (4.76)
\end{aligned}$$

Absorvendo os termos com $l_2 = 0$ nas somas, chegamos a



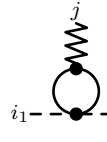
$$\begin{aligned}
i_1 - \text{---} \bullet \text{---} i_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sigma \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1) \times \\
&\times \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta(i_{\alpha_1} - \beta(2l_2 - j)) \int d^{d-1}q G_0(q, -l_2 + j) G_0(q + p, l_2) + \right. \\
&\quad \left. - \delta(i_{\alpha_1} + \beta j) \int d^{d-1}q G_0(q, -l_2 + j) G_0(q + p, l_2) \right\}. \quad (4.77)
\end{aligned}$$

Aplicando os deltas em suas respectivas expressões; lembrando que a função de Green é par em seus argumentos e que $\beta^2 = 1$, podemos reescrever o resultado acima como



$$\begin{aligned}
i_1 - \text{---} i_2 = & -\frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1) \times \\
& \times \left\{ \delta(i_{\alpha_1} - \beta j) \sigma \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q G_0(q+p, i_{\alpha_1} + l_2) G_0(q, l_2) + \right. \\
& \left. - \sigma \int d^{d-1}q G_0 \left(q+p, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j}{2} \right) G_0 \left(q, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j}{2} \right) \right\}. \quad (4.78)
\end{aligned}$$

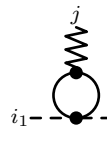
Em termos das integrais definidas em (4.45) e (4.46), escrevemos



$$\begin{aligned}
i_1 - \text{---} i_2 = & -\frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1) [\delta(i_{\alpha_1} - \beta j) I(p, i_{\alpha_1}; \mu, \sigma) + \\
& - I' \left(p, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j}{2} \right)] \quad (4.79)
\end{aligned}$$

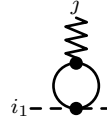
onde as integrais I e I' estão definidas em (4.45) e (4.46), respectivamente.

Através de uma construção similar, chegamos à seguinte expressão para a condição de Neumann



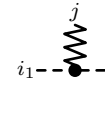
$$\begin{aligned}
i_1 - \text{---} i_2 = & \frac{1}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} [\delta(i_{\alpha_1} - \beta j) I(p, i_{\alpha_1}; \mu, \sigma) + \\
& + I' \left(p, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j}{2} \right)] \quad (4.80)
\end{aligned}$$

Portanto, podemos unificar as duas expressões com o auxílio do rótulo τ , isto é,



$$i_1 - \text{loop} - i_2 = \frac{\tau}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1)^{\frac{1-\tau}{2}} [\delta(i_{\alpha_1} - \beta j) I(k, i_{\alpha_1}; \sigma, \mu) + \tau I' \left(k, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j}{2}; \sigma, \mu \right)] . \quad (4.81)$$

Um ponto importante, para a construção dos próximos diagramas com inserção de campo composto, fica estabelecido ao escrevermos de maneira mais econômica a identidade diagramática dada em (4.70)



$$i_1 - \text{loop} - i_2 = \frac{\tau}{2} \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1)^{\frac{1-\tau}{2}} \delta(i_{\alpha_1} + \beta j). \quad (4.82)$$

É fácil notar a semelhança da expressão acima com a equação (4.26). Vemos com isso que, assim como ocorre quando o sistema é totalmente infinito, também podemos construir as expressões para os diagramas de $\Gamma^{(2,1)}$ a partir de $\Gamma^{(4)}$. A correspondência nesse caso se dá pelas regras abaixo:

1 - *Suprimimos a soma em α_2 na equação (4.26), ou seja, $j_{\alpha_2} \rightarrow j$.*

Tudo se passa como se duas das pernas externas dos diagramas de $\Gamma^{(4)}$, por exemplo i_3 e i_4 , se juntassem formando a perna em “zigue-zague” que representa o campo composto.

2 - *Multiplicamos a expressão resultante por τL .*

Com esses dois passos, levamos o tensor $S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)}$ na interação específica para o campo composto (equação (4.82)).

Agora, para os diagramas já construídos temos:

3 - *Explicitamos o fator de 2π inserido na redefinição da constante de acoplamento.*

Temos que lembrar que cada $S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)}$ utilizado na construção dos diagramas está associado a um λ e que, para cada λ em $\Gamma^{(4)}$, associamos um fator de 2π que deve ser levado em consideração agora.

4 - *Multiplicamos os diagramas de $\Gamma^{(4)}$ por $\frac{\pi\tau}{\lambda\sigma}$.*

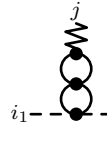
Esse fator multiplicativo surge porque os diagramas de $\Gamma^{(2,1)}$, nessa correspondência, estão relacionados a diagramas de $\Gamma^{(4)}$ com uma potência mais alta em λ .

5 - *Fator de simetria.*

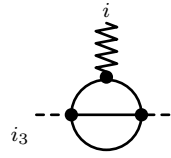
O fator de simetria para os diagramas de campo composto em NBC ou DBC são os mesmos que na teoria para o sistema totalmente infinito, pois esse fator está relacionado à quantidade de

formas de se fazer o mesmo diagrama e à simetria interna dos campos, não possuindo relação com o tratamento dos quase-momentos. Basta lembrar que a estrutura tensorial é do tipo $O(N) \times (\text{tamanho finito})$.

Seguindo os passos descritos acima, vemos que o diagrama em (4.81) pode de fato ser obtido a partir do diagrama em (4.44). Utilizando as mesmas regras construímos também



$$\begin{aligned}
 i_1 \text{---} i_2 = & \frac{\tau}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \lambda^2 \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_1)^{\frac{1-\tau}{2}} \left[\delta(i_{\alpha_1} - \beta j) I^2(k, i_{\alpha_1}; \sigma, \mu) + \right. \\
 & + \tau I(k, i_{\alpha_1}; \sigma, \mu) I' \left(k, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j}{2}; \sigma, \mu \right) + \\
 & + \tau I' \left(k, \frac{i_{\alpha_1} + \beta j}{2}, \frac{i_{\alpha_1} - \beta j}{2}; \sigma, \mu \right) I(k, \beta j; \sigma, \mu) + \\
 & \left. + \sum_{l=-\infty}^{\infty} I' \left(k, l + \frac{i_{\alpha_1}}{2}, l - \frac{i_{\alpha_1}}{2}; \sigma, \mu \right) I' \left(k, l + \frac{\beta j}{2}, l - \frac{\beta j}{2}; \sigma, \mu \right) \right]; \quad (4.83)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 i_3 \text{---} i_4 = & \frac{\tau}{2} \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda^2 \sum_{\substack{\alpha_2=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} (\alpha_2)^{\frac{1-\tau}{2}} \left[\delta(i - \beta j_{\alpha_2}) I_4(k, k', i, -\beta i_3; \sigma, \mu) + \right. \\
 & + \tau I'_4 \left(k, k', \frac{i + \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i - \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i - \beta j_{-\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) + \\
 & + \tau I''_4 \left(k, k', i, \frac{i - \beta j_{-\alpha_2}}{2}, \frac{i - \beta j_{\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) + \\
 & \left. + I''_4 \left(k, k', i, \frac{i - \beta j_{\alpha_2}}{2}, \frac{i - \beta j_{-\alpha_2}}{2}; \sigma, \mu \right) \right]. \quad (4.84)
 \end{aligned}$$

Nesse último diagrama, ao invés de $j_{\alpha_2} \rightarrow j$, fizemos $i_{\alpha_1} \rightarrow i$ para sermos coerentes com as definições utilizadas para os quase-momentos externos. Temos, portanto, todos os diagramas necessários aos nossos cálculos em termos das integrais de Feynman.

Como pode ser facilmente observado, as partes de vértice dependem das condições de contorno impostas, mesmo assim, não há ambiguidade para definir o algoritmo de renormalização simultaneamente para ambas as condições de contorno. Ainda não é o momento adequado para discutirmos o esquema de renormalização explicitamente, mas já é possível apresentar

os argumentos para utilizarmos apenas esses poucos diagramas no processo de tornar a teoria finita.

No interesse de obtermos o número mínimo de diagramas para o cálculo dos expoentes críticos com *NBC* e *DBC*, resumiremos os argumentos encontrados em [81], para o caso massivo de um sistema infinito, e explicitaremos apenas o que há de novo em nosso caso devido às condições de contorno. Em primeiro lugar, defini-se a massa não-renormalizada μ em três *loops* em termos da massa não-renormalizada μ_0 em *nível de árvore* (zero *loop*) como: $\tilde{\Gamma}^{(2)}(k = 0, i, \sigma, \mu_0, \lambda) \equiv \mu^2 = \Gamma^{(2)}(k = 0, i, \sigma, \mu_0, \lambda) - \sigma^2 i^2$. A subtração de $\sigma^2 i^2$ é conveniente, pois assim o procedimento inicial torna-se similar ao que seria realizado para um sistema infinito. Podemos então inverter a equação anterior para obtermos a massa μ_0 em nível de árvore em termos da massa μ em três *loops*. Impondo o momento externo igual a zero em todos os diagramas que entram na redefinição da massa, eliminamos todos os *tadpoles* (*loops* que dependem da massa, mas não do momento externo). Depois, expandindo $\mu_0 = \mu_0(\mu, \lambda)$ em cada parte de vértice primitivamente divergente até a primeira ordem em λ , eliminamos todos os gráficos remanescentes que contêm 1 *loop* de inserção de massa (*tadpole*). Este último passo gera mais um dos resultados não triviais que surge da imposição de *NBC* ou *DBC* e, por isso, vamos discutir alguns detalhes no que segue.

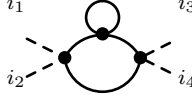
O conjunto de passos que acabamos de descrever nos permite escrever

$$\mu_0^2 = \mu^2 - \frac{\lambda}{2} \text{---}\bigcirc\text{---}. \quad (4.85)$$

Note que, quando essa expansão for implementada em qualquer integral de um diagrama arbitrário, uma complicação ocorrerá: os diagramas de *tadpole* têm agora índices relacionados com o tamanho finito (tipo de “simetria interna”) que devem conectar-se a um propagador de uma linha interna do mesmo diagrama. Assim, esses índices devem tomar lugar no gráfico sendo contraídos com o conjunto original de índices do diagrama. Por exemplo, considere o diagrama de 4 pontos em 2 *loops*, sendo um dos *loops* uma inserção de massa.

$$\begin{aligned} \text{Diagrama de 4 pontos em 2 loops} &= \frac{(N+8)(N+2)}{54} \lambda^3 (2\pi)^3 \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4 \geq 0}^{\infty} S_{i_1, i_2, l_1, l_2}^{(\tau)} S_{l_1, l_3, l_4, l_4}^{(\tau)} S_{l_2, l_3, i_3, i_4}^{(\tau)} \times \\ &\times \int d^{d-1} q_1 d^{d-1} q_2 G_0(q_1 + k, l_1) G_0(q_1 + k, l_3) G_0(q_1, l_2) G_0(q_2, l_4). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Como o intuito é explicitar apenas a sutileza que ocorre com os índices de quase-momento devido à expansão (4.85), não será necessário chegarmos a uma expressão fechada em termos das integrais já mencionadas anteriormente, por isso, utilizaremos uma notação ainda mais condensada: $S_{i_1, i_2, l_1, l_2}^{(\tau)} \equiv \sigma[i_1, i_2, l_1, l_2]_{\tau}$, para tornar mais conveniente a visualização e manipulação. Com isso, podemos simplificar a expressão (4.86) para

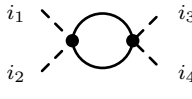


$$= \frac{(N+8)(N+2)}{54} \lambda^3 \sigma^3 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} [\delta(i_1 + i_2 + l_1 + l_2) + \tau \delta(i_1 - i_2 + l_1 + l_2)] \times$$

$$\times \int d^{d-1} q_1 G_0(q_1 + k, l_1) G_0(q_1, l_2) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{l_3, l_4 \geq 0}^{\infty} [i_3, i_4, l_2, l_3]_{\tau} G_0(q_1 + k, l_3) \int d^{d-1} q_2 [l_1, l_3, l_4, l_4]_{\tau} G_0(q_2, l_4) \right\}. \quad (4.87)$$

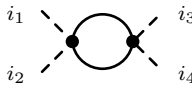
Em termos da mesma notação, o diagrama de 1 *loop* da função de 4 pontos pode ser reescrito como



$$= \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} [\delta(i_1 + i_2 + l_1 + l_2) + \tau \delta(i_1 - i_2 + l_1 + l_2)] [i_3, i_4, l_2, l_3]_{\tau} \times$$

$$\times \int d^{d-1} q G_0(q + k, l_1) G_0(q, l_2). \quad (4.88)$$

Vamos agora aplicar a expansão dada em (4.85) em (4.88) para compará-lo com (4.87). Para isso, devemos lembrar que os propagadores em (4.88) estão escritos em termos da massa não-renormalizada (*bare*) em nível de árvore como: $G_0(q+k, l_1) = [(q+k)^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu_0^2]^{-1}$. Expandindo apenas este propagador na expressão acima como uma função de μ^2 , obtemos



$$= \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} [\delta(i_1 + i_2 + l_1 + l_2) + \tau \delta(i_1 - i_2 + l_1 + l_2)] [i_3, i_4, l_2, l_3]_{\tau} \times$$

$$\times \int d^{d-1} q_1 \frac{G_0(q_1, l_2)}{[(q_1 + k)^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu^2]} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \frac{\text{tadpole diagram}}{[(q_1 + k)^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu^2]} \right]^{-1}. \quad (4.89)$$

Quando expandimos o último termo até $\mathcal{O}(\lambda)$, o *tadpole* (inserção de massa) é alterado com a seguinte peculiaridade: o índice l_1 é transformado em l_3 com outro somatório em l_3 incluído ao mesmo tempo, já que o *tadpole* entra, inicialmente, com l_1 e l_3 como modos “externos”. Além disso, o propagador que multiplica o *tadpole* dentro do colchete também muda para l_3 . Utilizando essa prescrição, encontramos

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ i_3 \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} = \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} [\delta(i_1 + i_2 + l_1 + l_2) + \tau \delta(i_1 - i_2 + l_1 + l_2)] [i_3, i_4, l_1, l_2]_{\tau} \times \\
& \times \int d^{d-1} q_1 \frac{G_0(q_1, l_2)}{[(q_1 + k)^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu^2]} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{N+8}{18} \right) \lambda^2 \sigma^2 \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} [\delta(i_1 + i_2 + l_1 + l_2) + \tau \delta(i_1 - i_2 + l_1 + l_2)] \times \\
& \times \sum_{l_3 \geq 0}^{\infty} [i_3, i_4, l_3, l_2]_{\tau} \int \frac{d^{d-1} q_1 G_0(q_1, l_2)}{[(q_1 + k)^2 + \sigma^2 l_1^2 + \mu^2][(q_1 + k)^2 + \sigma^2 l_3^2 + \mu^2]} \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right]_{l_1, l_3}, \quad (4.90)
\end{aligned}$$

com,

$$\left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right]_{l_1, l_3} = \frac{N+2}{3} \sigma \sum_{l_4 \geq 0}^{\infty} [l_1, l_3, l_4, l_4]_{\tau} \int d^{d-1} q_2 G_0(q_2, l_4). \quad (4.91)$$

O termo de correção em dois *loops* devido à expansão da massa é idêntico ao encontrado em (4.87), a menos de um fator $1/2$. Essa diferença decorre do fato de aplicarmos a expansão apenas em um dos propagadores. Devido à simetria do diagrama, os dois propagadores da função de 4 pontos em 1 *loop* contribuem igualmente quando os expandimos em termos da nova massa μ para correção em $\mathcal{O}(\lambda)$. Dessa forma, podemos escrever uma importante identidade diagramática

$$\left[\begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ i_3 \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} \right]_{\mu_0} = \left[\begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ i_3 \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} + \lambda \begin{array}{c} i_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ i_3 \\ \diagdown \\ i_4 \end{array} \right]_{\mu} \quad (4.92)$$

Seguindo a mesma prescrição, todas as partes de vértice primitivamente divergentes com inserção de massa são eliminadas. Não é difícil checar que o que discutimos acima também nos leva à seguinte identidade

$$\left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right]_{\mu_0} = \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} + \frac{3\lambda}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \right]_{\mu}$$

É fácil concluir que uma identidade similar é válida para os operadores compostos $\Gamma^{(2,1)}$ devido às suas similaridades com $\Gamma^{(4)}$. Apesar da estrutura tensorial aparentemente complicada dessa formulação teórica de campos em tamanho finito, as inserções de massa são canceladas para modos de quase-momentos externos arbitrários como exemplificado acima.

As partes de vértice resultantes agora dependem exclusivamente de μ e λ . De forma que as expansões diagramáticas em termos de um número mínimo de gráficos são exatamente as expostas nos capítulos 2 e 3 e reescritas em (4.31), (4.32) e (4.33).

A fim de nos livrarmos dos *tadpoles* e dos diagramas com inserção de *tadpole* numa teoria sem massa, podemos seguir um caminho semelhante ao caso massivo, com duas diferenças cruciais: *i*) as expansões feitas a partir de (4.85), depois de eliminados os *tadpoles*, devem ser tomadas em $k^2 = \kappa^2$ e não em $k^2 = 0$ por conta das divergências do regime infravermelho na teoria sem massa; *ii*) no final do processo, devemos fazer $\mu = 0$.

Embora o argumento acima faça todo o sentido do ponto de vista da mecânica estatística, onde a massa é identificada com a temperatura reduzida, ou seja, a massa é interpretada como um deslocamento na temperatura crítica do sistema infinito, o leitor pode se sentir desconfortável por começarmos com uma massa *bare* diferente de zero, definí-la em termos de uma massa *bare* em três *loops* e então impor que essa nova massa seja nula. Portanto, é válido desenvolvermos um argumento mais tradicional, do ponto de vista de teoria de campos, no qual a massa é zero em todas as ordens na teoria de perturbação como descreveremos agora.

Começando com $\mu_0 = 0$ temos: $\tilde{\Gamma}^{(2)}(k = 0, \mu_0 = 0, j, \lambda) = 0$, conseqüentemente, encontramos a seguinte expressão diagramática até ordem de três *loops*

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{6} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Big|_{k=0} - \frac{\lambda^3}{4} \left(\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Big|_{k=0} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Big|_{k=0} \right) = \\ & = \frac{\lambda}{2} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \frac{\lambda^2}{4} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \lambda^3 \left[\frac{1}{8} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \right] \end{aligned}$$

No lado direito da equação acima estão todos os diagramas de *tadpole* até a referida ordem. Como os *tadpoles* não dependem do momento externo, a substituição dessa expressão na expansão diagramática da função de 2 pontos elimina todos os *tadpoles*, mas ainda sobrevivem os diagramas com inserção: último termo do lado esquerdo na figura anterior; e seu correspondente com $k \neq 0$. Porém, na ordem de 1 *loop*, a condição, na teoria sem massa: $\tilde{\Gamma}^{(2)}(k = 0, \mu_0, i, \lambda) = 0 = \frac{\lambda}{2} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$, implica que as contribuições com inserção do diagrama de *tadpole* que ainda estão na expansão diagramática são identicamente nulas. Utilizando todos os argumentos levantados, encontramos

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(k; \mu_0, i, \lambda) = k^2 - \frac{\lambda^2}{6} \left(\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Big|_{k=0} \right) + \frac{\lambda^3}{4} \left(\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \Big|_{k=0} \right). \quad (4.93)$$

A situação é completamente similar ao caso massivo, pois temos os mesmos diagramas, apenas o ponto de simetria é escolhido diferentemente. Da mesma maneira ocorre para as funções de vértice $\Gamma^{(4)}$ e $\Gamma^{(2,1)}$.

4.3 Multiplicidades na teoria massiva e não-massiva (*formalismo unificado*)

Antes de partirmos para a regularização dimensional das integrais de Feynman presentes nos diagramas, e a partir disso expressar as funções necessárias (*funções de Wilson*) para o cálculo dos expoentes críticos, temos que determinar os quase-momentos externos que “entram e saem” dos diagramas, definindo assim o valor da multiplicidade para cada diagrama. A escolha é arbitrária e não é influenciada pela massa, ou seja, podemos fazer a mesma escolha tanto na teoria massiva quanto na sem massa, o que é importante para mostrarmos a equivalência entre as duas teorias. Para que os diagramas não sejam nulos, a escolha dos quase-momentos externos deve obedecer apenas às restrições geradas pelos deltas de Kronecker associados aos diagramas com interação λ e de campo composto. Sendo assim, visto que os resultados para os expoentes críticos não devem depender dos quase-momentos externos, podemos fazer a seguinte escolha para a função de 2 pontos: $i_1 = i_2 = i$, com $i \in Z_+^*$. Por exemplo, temos

$$S_{i_1, i_2}^{(\tau)}(k^2 + \sigma i_1^2 + \mu^2) = \delta(i_1 - i_2)[k^2 + \sigma i_1^2 + \mu^2] \longrightarrow (k^2 + \sigma^2 i^2 + \mu^2). \quad (4.94)$$

Para utilizarmos a expressão acima na teoria sem massa basta aplicarmos $\mu = 0$.

Agora, para a função de vértice de 4 pontos, podemos escolher: $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i$. Para o vértice de interação, por exemplo, temos

$$\begin{array}{c} i \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad i \end{array} = 3\sigma\lambda. \quad (4.95)$$

Note que o fator 3 está relacionado à quantidade de deltas de Kronecker na equação (4.25) que dão resultado diferente de zero para a escolha que fizemos. Outras escolhas poderiam ser aplicadas dando uma multiplicidade distinta, por exemplo: $i_1 = i_2 = i$ e $i_3 = i_4 = j$, porém, neste caso, teríamos que nos preocupar com a simetria do diagrama, ou seja, com a quantidade de formas para a construção do diagrama com os quase-momentos assim definidos. Esse problema não existe ao escolhermos todos os quase-momentos iguais a i e temos uma completa simetria do diagrama com relação aos quase-momentos externos.

No caso dos diagramas com inserção de campo composto, ao escolhermos $i_1 = i_2 = i$ na equação (4.70), temos três possibilidades para j : $j = 0$, $j = 2i$ e $j = -2i$, pois $j \in Z$. Ficamos então com

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} j=0 \\ \text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---}\bullet\text{---} \end{array} & \begin{array}{c} j=2i \\ \text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---}\bullet\text{---} \end{array} & \begin{array}{c} j=-2i \\ \text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---}\bullet\text{---} \\ \text{---}\bullet\text{---} \end{array} \\ i & i & i \end{array} = 1; \quad \frac{\tau}{2}; \quad \frac{\tau}{2}. \quad (4.96)$$

Todas as possibilidades descritas em (4.96) são consistentes do ponto de vista das restrições estabelecidas pelos deltas e com o paralelo em relação à função de 4 pontos. Note que nos diagramas de 4 pontos todas essas possibilidades estão incluídas ao somarmos os quase-momentos externos de duas “pernas”. Assim, não podemos descartar nenhuma das possibilidades se quisermos um formalismo geral para todas as funções de vértice. Observe também que $j = 2i$ e

$j = -2i$ são possibilidades com o mesmo “peso”, o que nos leva à seguinte redefinição para a construção da função de vértice com inserção de campo composto

$$\frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} 2i \\ \text{---} \bullet \text{---} i \\ \text{---} \bullet \text{---} i \end{array} + \begin{array}{c} -2i \\ \text{---} \bullet \text{---} i \\ \text{---} \bullet \text{---} i \end{array} \right) + \tau \begin{array}{c} 0 \\ \text{---} \bullet \text{---} i \\ \text{---} \bullet \text{---} i \end{array} = \frac{3}{2} \tau, \quad (4.97)$$

ou simplesmente

$$\begin{array}{c} 2i \\ \text{---} \bullet \text{---} i \\ \text{---} \bullet \text{---} i \end{array} + \tau \begin{array}{c} 0 \\ \text{---} \bullet \text{---} i \\ \text{---} \bullet \text{---} i \end{array} = \frac{3}{2} \tau. \quad (4.98)$$

Em suma, para todos os diagramas de 2 pontos escolheremos $i_1 = i_2 = i$; para todos os diagramas de 4 pontos escolheremos $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i$; mas, para os diagramas com inserção de campo composto usaremos a regra de construção exemplificada acima devido à consistência das três opções possíveis.

Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \bullet \diagup \\ i \end{array} \begin{array}{c} i \\ \diagup \bullet \diagdown \\ i \end{array} = \frac{N+8}{18} \lambda^2 \sigma [I(k, 2i; \sigma, \mu) + 2I(k, 0; \sigma, \mu) + 2\tau I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \\ + 2\tau I'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + 4I'(k, i, i; \sigma, \mu)], \quad (4.99)$$

onde utilizamos o fato de que: $I'(k, i, j; \sigma, \mu) = I'(k, j, i; \sigma, \mu)$. Note também que para utilizar a expressão acima na teoria sem massa, basta fazer $\mu = 0$ e usar as soluções para as integrais correspondentes a esse caso, o que ocorrerá para todos os outros diagramas.

Temos também

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \bullet \diagup \\ i \end{array} \begin{array}{c} i \\ \diagup \bullet \diagdown \\ i \end{array} = \frac{N^2 + 6N + 20}{108} \lambda^3 \sigma \left\{ I^2(k, 2i; \sigma, \mu) + 2I^2(k, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ + 4\tau I(k, 0; \sigma, \mu) I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 4\tau I(k, 2i; \sigma, \mu) I'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + \\ + 4I(k, 0; \sigma, \mu) I'(k, i, i; \sigma, \mu) + 4I(k, 2i; \sigma, \mu) I'(k, i, i; \sigma, \mu) + \\ + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [2(I'(k, l, l; \sigma, \mu))^2 + 4\tau I'(k, l, l; \sigma, \mu) I'(k, l+i, l-i; \sigma, \mu) + \\ \left. + 2(I'(k, l+i, l-i; \sigma, \mu))^2] \right\}. \quad (4.100)$$

O próximo diagrama nessa construção é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= \frac{5N+22}{54} \lambda^3 \sigma [I_4(k, 2i, i; \sigma, \mu) + 2I_4(k, 0, i; \sigma, \mu) + 2\tau I'_4(k, 0, 0, i; \sigma, \mu) + \\
&+ \tau I'_4(k, 2i, 0, i; \sigma, \mu) + \tau I'_4(k, 0, 2i, i; \sigma, \mu) + 3I'_4(k, i, i, 0; \sigma, \mu) + I'_4(k, i, i, 2i; \sigma, \mu) + \\
&+ 2I''_4(k, 2i, 0, i; \sigma, \mu) + 2I''_4(k, 2i, 2i, i; \sigma, \mu) + 2\tau I''_4(k, 2i, i, 0; \sigma, \mu) + 2\tau I''_4(k, 2i, i, 2i; \sigma, \mu) + \\
&+ 4I''_4(k, 0, 0, i; \sigma, \mu) + 4\tau I''_4(k, 0, i, 0; \sigma, \mu)] . \quad (4.101)
\end{aligned}$$

onde fizemos uso da paridade das funções de Green que compõem as integrais.

Para a função de dois pontos, temos

$$\text{Diagram} = \frac{N+2}{18} \lambda^2 [D_3(k, i; \sigma, \mu) + 3D'_3(k, 0, i; \sigma, \mu) + 3\tau D'_3(k, i, 0; \sigma, \mu)] , \quad (4.102)$$

onde temos que: $D'_3(k, 0, i; \sigma, \mu) \neq D'_3(k, i, 0; \sigma, \mu)$.

Lembrando que estamos interessados na derivada da função de vértice de 2 pontos em relação a k^2 , temos

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \left(\text{Diagram} \right) \right|_{k^2} = \frac{N+2}{18} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_3(k, i; \sigma, \mu) + 3D'_3(k, 0, i; \sigma, \mu) + 3\tau D'_3(k, i, 0; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2} . \quad (4.103)$$

Para a teoria massiva tomamos a derivada em $k^2 = 0$ e para a teoria sem massa em $k^2 = \kappa^2$, exatamente como realizado no capítulo 2.

Ainda para a função de 2 pontos, a derivada do diagrama em 3 *loops* é reescrito como

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \left(\text{Diagram} \right) \right|_{k^2} &= \frac{(N+2)(N+8)}{108} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_5(k, i; \sigma, \mu) + D'_5(k, 0, i; \sigma, \mu) + \right. \\
&+ \tau D'_5(k, i, 0; \sigma, \mu) + 4D''_5(k, i, 0; \sigma, \mu) + 4\tau D''_5(k, 0, i; \sigma, \mu) + \\
&\left. + 2D'''_5(k, 0, i; \sigma, \mu) + 2\tau D'''_5(k, i, i; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2} . \quad (4.104)
\end{aligned}$$

Para os diagramas com inserção de campo composto, seguindo a descrição que definimos em (4.97), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\text{Diagram}_1 + \text{Diagram}_2 \right) + \tau \text{Diagram}_3 &= \frac{N+2}{6} \frac{\lambda}{2} [\tau I(k, 2i; \sigma, \mu) + 2\tau I(k, 0; \sigma, \mu) + \\
&+ 2I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 2I'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + 4\tau I'(k, i, i; \sigma, \mu)] . \quad (4.105)
\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\text{diagrama } 2i + \text{diagrama } -2i \right) + \tau \text{diagrama } 0 = \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \tau I^2(k, 2i; \sigma, \mu) + 2\tau I^2(k, 0; \sigma, \mu) + \right. \\
& + 4I(k, 0; \sigma, \mu)I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 4I(k, 2i; \sigma, \mu)I'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + \\
& + 4\tau I(k, 0; \sigma, \mu)I'(k, i, i; \sigma, \mu) + 4\tau I(k, 2i; \sigma, \mu)I'(k, i, i; \sigma, \mu) + \\
& + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [2\tau(I'(k, l, l; \sigma, \mu))^2 + 4I'(k, l, l; \sigma, \mu)I'(k, l+i, l-i; \sigma, \mu) + \\
& \left. + 2\tau(I'(k, l+i, l-i; \sigma, \mu))^2] \right\}. \quad (4.106)
\end{aligned}$$

Por último, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\text{diagrama } 2i + \text{diagrama } -2i \right) + \tau \text{diagrama } 0 = \frac{N+2}{6} \frac{\lambda^2}{2} [\tau I_4(k, 2i, i; \sigma, \mu) + \\
& + 2\tau I_4(k, 0, i; \sigma, \mu) + 2I'_4(k, 0, 0, i; \sigma, \mu) + I'_4(k, 2i, 0, i; \sigma, \mu) + I'_4(k, 0, 2i, i; \sigma, \mu) + \\
& + 3\tau I'_4(k, i, i, 0; \sigma, \mu) + \tau I'_4(k, i, i, 2i; \sigma, \mu) + 2\tau I''_4(k, 2i, 0, i; \sigma, \mu) + 2\tau I''_4(k, 2i, 2i, i; \sigma, \mu) + \\
& + 2I''_4(k, 2i, i, 0; \sigma, \mu) + 2I''_4(k, 2i, i, 2i; \sigma, \mu) + 4\tau I''_4(k, 0, 0, i; \sigma, \mu) + 4I''_4(k, 0, i, 0; \sigma, \mu)]. \quad (4.107)
\end{aligned}$$

Em relação às integrais acima que apresentam uma dependência nula nos quase-momentos, vale salientar que isso ocorre pela combinação dos quase-momentos no diagrama e não por termos feito $i = 0$, o que não é permitido nessa construção.

A partir de agora precisaremos especificar em qual teoria (massiva ou não-massiva) estamos trabalhando, pois as soluções das integrais são distintas.

4.4 Regularização dimensional com os quase-momentos externos diferentes de zero

Embora o grau de divergência (*polos em ϵ*) das integrais de Feynman não seja alterado ao aplicarmos os quase-momentos externos iguais a zero, tal escolha leva ao completo cancelamento das parcelas dos diagramas restritos a *DBC*. Sendo assim, no intuito de podermos utilizar as mesmas de forma unificada e, posteriormente, para o modo zero, os resultados da regularização dimensional das integrais serão apresentados para um valor qualquer de quase-momento externo.

4.4.1 Regularização dimensional na teoria massiva

Começando pela teoria massiva, a primeira integral a ser regularizada refere-se ao diagrama de 1 *loop* da função de 4 pontos que é dada por

$$I(k, i; \sigma, \mu) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + \sigma^2(l+i)^2 + \mu^2][q^2 + \sigma^2 l^2 + \mu^2]}. \quad (4.108)$$

Reescalando os momentos de acordo com $\frac{q}{\mu} \rightarrow q$ e $\frac{k}{\mu} \rightarrow k$, definindo também $r \equiv \frac{\sigma}{\mu}$ e aplicando um parâmetro de Feynman (ver (2.120)), podemos escrever

$$I(k, i; r, \mu) = r\mu^{-\epsilon} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx \int \frac{d^{d-1}q}{\{q^2 + 2xk \cdot q + xk^2 + r^2[(l+xi)^2 + x(1-x)i^2] + 1\}^2}, \quad (4.109)$$

onde $\epsilon = 4 - d$.

Um resultado típico e apropriado utilizado na regularização dimensional é expresso pela seguinte fórmula

$$\int \frac{d^d q}{(q^2 + 2k \cdot q + m^2)^\alpha} = \frac{S_d}{2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})(m^2 - k^2)^{\frac{d}{2}-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (4.110)$$

onde S_d é a área de uma esfera de raio unitário em d dimensões. Utilizando a expressão acima podemos escrever

$$I(k, i; r, \mu) = r\mu^{-\epsilon} \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d-1}{2}\right) \times \\ \times \int_0^1 dx \sum_{l=-\infty}^{\infty} [r^2(l+xi)^2 + x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1]^{\frac{d-1}{2}-2}. \quad (4.111)$$

Fatorando r^2 , podemos identificar o somatório no resultado acima com uma generalização da função térmica [82]

$$D_\alpha(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(n+a)^2 + b^2]^{-\alpha}, \quad (4.112)$$

onde estabelecemos a correspondência

$$a(x) = xi, \quad (4.113a)$$

$$b(x) = r^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1}, \quad (4.113b)$$

Podemos observar que no limite $n \rightarrow \infty$, o termo dentro da soma em (4.112) comporta-se como $n^{-2\alpha}$. Consequentemente, o somatório converge para $\alpha > \frac{1}{2}$. A ideia então é utilizar

uma continuação analítica para $D_\alpha(a, b)$ na qual a divergência no limite $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$ tenha uma representação conveniente no contexto da regularização dimensional [35, 83, 84]. Temos então

$$D_\alpha(a, b) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) b^{1-2\alpha} + f_\alpha(a, b) \right]. \quad (4.114)$$

A divergência de (4.112) no limite $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$ está agora presente no polo em $\alpha = \frac{1}{2}$ da função $\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$, ao passo que a função $f_\alpha(a, b)$ é regular nesse mesmo limite. A função $f_\alpha(a, b)$ pode ser representada de diferentes maneiras. Por exemplo, Nemirovsky e Freed utilizaram a expressão dada em [35], a qual pode ser escrita aqui da seguinte forma

$$f_\alpha(a, b) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_b^\infty du (u^2 - b^2)^{-\alpha} \operatorname{Re} \left[e^{2\pi(u+ia)} - 1 \right]^{-1}. \quad (4.115)$$

Não é difícil constatar que a maneira como os parâmetros a e b aparecem no resultado acima dificulta bastante a aplicação da equação (4.114), tornando-a inviável no cálculo das integrais de Feynman em ordens de *loops* mais elevados. Em contrapartida, utilizaremos uma representação alternativa que é dada por

$$f_\alpha(a, b) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi ma) \left(\frac{\pi m}{b} \right)^{\alpha-\frac{1}{2}} K_{\alpha-\frac{1}{2}}(2\pi mb), \quad (4.116)$$

onde $K_\nu(z)$ é a função de Bessel modificada de segunda espécie.

Tal representação foi deduzida por Boschi-Filho e Farina [84] com o objetivo de generalizar o resultado obtido por Ambjorn e Wolfram [83]. O fato de termos uma representação para $f_\alpha(a, b)$ envolvendo uma função especial de Bessel, cujas propriedades já são bem conhecidas [78], facilitará consideravelmente as nossas análises.

Voltando ao resultado (4.111), usaremos (4.114), juntamente com (4.113) para reescrever

$$\begin{aligned} I(k, i; r, \mu) &= \mu^{-\epsilon} \frac{S_{d-1}}{2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \sqrt{\pi} \times \\ &\quad \times \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) [x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1]^{-\frac{\epsilon}{2}} + f_{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}(a, b) \right\} \end{aligned} \quad (4.117)$$

Sabendo que $S_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$, podemos escrever

$$\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) S_d = \pi^{\frac{d}{2}} = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) S_{d-1} \quad (4.118)$$

e realizando uma expansão em ϵ no argumento da função Γ , chegamos ao seguinte resultado

$$I(k, i; r, \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1]^{-\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(k, i; r) \right], \quad (4.119)$$

onde definimos

$$F_{\alpha}^{(\tau')}(k, i; r) \equiv r^{-2\alpha} \int_0^1 dx f_{\frac{1}{2}+\alpha}(\tau' + xi, h(k, i, r)), \quad (4.120)$$

com

$$h(k, i, r) \equiv r^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1}. \quad (4.121)$$

Salientamos que estamos diferenciando τ' de τ devido aos seus papéis diferenciados com respeito às condições de contorno. Nesse caso específico, fazer $\tau' = 0$ em $F_{\alpha}^{(\tau')}(k, i; r)$ indica que temos a mesma expressão definida na integral $I_2^{(\tau')}$ para condições de contorno periódicas ($\tau' = 0$) e, portanto, toda a análise realizada no contexto de *PBC* para esse termo de correção com $i = 0$ também é válida aqui, inclusive no que diz respeito aos limites $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Voltaremos a tratar desses limites assintóticos, também para $i \neq 0$, quando formos analisar explicitamente o papel do comprimento finito L nas funções de correção (seção 4.6.1).

Expandindo agora o resultado (4.119) até $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ e aplicando $k = 0$, visto que estamos com uma teoria massiva, podemos escrever

$$I(0, i; r, \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dx \ln[x(1-x)r^2 i^2 + 1] + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau'=0)}(0, i; r) \right\}, \quad (4.122)$$

A próxima integral a ser regularizada também está relacionada ao diagrama de 1 *loop* da função de 4 pontos. Temos então

$$I'(k, i, j; \sigma, \mu) = \sigma \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + \sigma^2 i^2 + \mu^2][q^2 + \sigma^2 j^2 + \mu^2]}. \quad (4.123)$$

Ao contrário da integral I , I' não possui a soma no quase-momento, mas sim dois quase-momentos externos livres (i e j). Reescalando os momentos, como realizado em I , podemos escrever

$$I'(k, i, j; r, \mu) = \mu^{-\epsilon} r \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + r^2 i^2 + 1][q^2 + r^2 j^2 + 1]}. \quad (4.124)$$

Utilizando um parâmetro de Feynman podemos escrever

$$I'(k, i, j; r, \mu) = \mu^{-\epsilon} r \int_0^1 dx \int \frac{d^{d-1}q}{\{q^2 + 2q \cdot (xk) + xk^2 + r^2[x(i^2 - j^2) + j^2] + 1\}^2}. \quad (4.125)$$

Aplicando agora a expressão (4.110), fazendo $k = 0$ e expandindo em ϵ até $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ chegamos finalmente a

$$I'(i, j; r, \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d r}{2} \int_0^1 dx [xr^2 i^2 + (1-x)r^2 j^2 + 1]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.126)$$

Com o resultado acima vemos que I' é regular para $\epsilon \rightarrow 0$. Podemos observar também que o grau de divergência dessa integral, em relação à divergência líder do diagrama, foi alterado

devido à ausência da soma no quase-momento interno. A integral restante em (4.126) é simples de resolver, mas como i e j estão relacionados às combinações distintas dos quase-momentos externos no diagrama em (4.44) é mais conveniente, por enquanto, deixar a expressão como está.

Nos deteremos agora apenas às soluções das integrais restantes, deixando suas resoluções para o apêndice A.

A partir da expressão para a integral D_3 dada em (4.54), podemos identificar a inserção da integral I para escrever

$$D_3(k, i; r, \mu) = \mu^{2-2\epsilon} r \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{I(q+k, j+i; r, 1)}{(q^2 + r^2 j^2 + 1)}, \quad (4.127)$$

onde os momentos já foram reescalados de acordo com o realizado anteriormente.

Estamos interessados aqui na derivada de $D_3(k, i; r, \mu)$ em relação a k^2 em $k^2 = 0$. Assim, a solução que nos interessa é dada por

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_3(k, i; r, \mu) \right|_{k^2=0} = -\mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{8\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W_0^{(\tau'=0)}(i; r) \right], \quad (4.128)$$

onde definimos: $W_0^{(\tau'=0)}(i; r) \equiv G_0^{(\tau'=0)}(i; r) + H_0^{(\tau'=0)}(i, r) - 4F_0'^{(\tau'=0)}(i; r)$. Observe que temos um μ associado a derivada por termos reescalado o momento k (isto é, $\frac{k}{\mu} \rightarrow k$). Novamente, o rótulo $\tau' = 0$ indica que temos a mesma expressão encontrada em $\tilde{P}BC$, sendo que lá o quase-momento i é tomado igual a zero. Ainda temos que

$$G_0^{(\tau'=0)}(i; r) \equiv -2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \ln \left[y(1-y)i^2 + yr^{-2} + \frac{(1-y)}{x(1-x)} r^{-2} \right] - \frac{1}{2}; \quad (4.129a)$$

$$H_0^{(\tau'=0)}(i; r) \equiv 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y f_{\frac{1}{2}} \left((1-y)i, r^{-1} \sqrt{y(1-y)r^2 i^2 + y + \frac{(1-y)}{x(1-x)}} \right); \quad (4.129b)$$

$$F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(i; r) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial k^2} F_{\alpha,1}^{(\tau'=0)}(k, i; r) \right|_{k^2=0}, \quad (4.129c)$$

onde definimos de forma generalizada

$$F_{\alpha,\beta}^{(\tau')}(k, i, r) \equiv \frac{1}{S_d} r \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{F_{\alpha}^{(\tau')}(q+k, j+i; r)}{[q^2 + r^2 j^2 + 1]^{\beta}}. \quad (4.130)$$

As expressões definidas em (4.129a-4.129c) são bem comportadas, desde que não tomemos o limite $r^{-1} \rightarrow 0$. Respeitada essa condição, as expansões em ϵ são bem definidas e podemos usar a teoria de perturbação para calcular os observáveis físicos. Os argumentos para essa

conclusão serão apontados quando analisarmos o comportamento da função $F_\alpha^{(\tau'=0)}(k, i, r)$ nos limites $L \rightarrow \infty$ e $L \rightarrow 0$.

Vamos agora apresentar a solução da integral D'_3 dada em (4.55). Essa integral pode ser reescrita como

$$D'_3(k, i, j; r, \mu) = \mu^{2-2\epsilon} r \int d^{d-1} q \frac{I(q+k, i; r, 1)}{(q^2 + r^2 j^2 + 1)}. \quad (4.131)$$

Assim como em D_3 os momentos foram reescalados. Temos então que a regularização dimensional para derivada de D'_3 em relação a k^2 , tomando depois $k^2 = 0$, é dada por

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D'_3(k, i, j; r, \mu) \right|_{k^2=0} = -\mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 r}{4} \left[\mathcal{P}(i, j; r) - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(i, j; r) \right], \quad (4.132)$$

onde definimos,

$$\mathcal{P}(i, j; r) \equiv \int_0^1 dx dy (1-y) \left\{ y \left[\frac{1}{x(1-x)} - 1 \right] + yr^2 i^2 + (1-y)r^2 j^2 + 1 \right\}^{-\frac{1}{2}}; \quad (4.133a)$$

$$\mathcal{L}'_\alpha(i, j; r) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial k^2} \mathcal{L}_{\alpha,1}(k, i, j; r) \right|_{k^2=0}, \quad (4.133b)$$

com

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(k, i, j; r) \equiv \frac{r}{S_d} \int d^{d-1} q \frac{F_\alpha^{(\tau'=0)}(q+k, i; r)}{[q^2 + r^2 j^2 + 1]^\beta}. \quad (4.134)$$

A próxima integral, definida em (4.50), pode ser reescrita como

$$I_4(k, k', i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{I(q+k', l+j; r, 1)}{[(q-k)^2 + r^2(l-i)^2 + 1][q^2 + r^2 l^2 + 1]}, \quad (4.135)$$

onde vemos novamente a inserção da integral I na expressão acima. A regularização de I_4 é dada por

$$I_4(i; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} - \epsilon \int_0^1 dz \ln[z(1-z)r^2 i^2 + 1] + \epsilon F_0^{(\tau'=0)}(i; r) \right\}. \quad (4.136)$$

Observe que $I_4(i, j; r, \mu) = I_4(i; r, \mu)$, ou seja: o segundo índice de quase-momento externo não influencia no resultado da regularização dimensional.

É fácil verificar que a integral I'_4 , definida em (4.51), também pode ser reescrita em termos de I como segue

$$I'_4(k, k', i, j, l; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} r \int d^{d-1} q \frac{I(q+k', l; r, 1)}{[(q-k)^2 + r^2 i^2 + 1][q^2 + r^2 j^2 + 1]}. \quad (4.137)$$

Podemos escrever sua solução como

$$I'_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 r}{2\epsilon} \int_0^1 dy [yr^2 i^2 + (1-y)r^2 j^2 + 1]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.138)$$

de onde vemos que $I'_4(i, j, l; r, \mu) = I'_4(i, j; r, \mu)$.

Visando o enfoque nas grandezas relevantes, deixaremos a apresentação da solução da integral I''_4 , definida em (4.52), apenas para o apêndice A, visto ser ela regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, não possui papel fundamental nesse contexto.

Em se tratando da ordem de três *loops*, a primeira integral que contribue com essa ordem para a função de vértice de 2 pontos é dada em (4.57). Em termos da integral I , podemos escrevê-la como

$$D_5(k, i; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{[I(q, l; r, 1)]^2}{[(q-k)^2 + r^2(l-i)^2 + 1]}. \quad (4.139)$$

Lembrando que para a renormalização na teoria massiva precisamos da derivada da função de 2 pontos em $k^2 = 0$, a regularização dimensional da integral acima lê-se

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_5(k, i; r, \mu) \right|_{k^2=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{6\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2} \epsilon W_0^{(\tau'=0)}(i; r) \right]. \quad (4.140)$$

A próxima contribuição para o diagrama em 3 *loops* da função de 2 pontos vem da integral D'_5 apresentada em (4.58). Reescalando os momentos e identificando a inserção da integral I , como feito anteriormente, obtemos

$$D'_5(k, i, j; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} r \int d^{d-1} q \frac{[I(q, i; r, 1)]^2}{[(q-k)^2 + r^2 j^2 + 1]}. \quad (4.141)$$

Assim, como resultado final para a derivada dessa integral em $k^2 = 0$, escrevemos

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D'_5(k, i, j; r, \mu) \right|_{k^2=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 r}{2\epsilon} \left[\mathcal{P}(i, j; r) - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(i, j; r) \right], \quad (4.142)$$

onde $\mathcal{P}(i, j; r)$ e $\mathcal{L}'_0(i, j; r)$ estão definidos em (4.133a) e (4.133b).

Temos ainda a integral dada em (4.59), a qual, em termos de I e com o reescalamiento de seus momentos, pode ser representada como

$$D''_5(k, i, j; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} r \int \frac{d^{d-1} q_1}{(q_1^2 + r^2 i^2 + 1)} \times \\ \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q_2 \frac{I(q_1 + q_2, l + i; r, 1)}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + r^2(l + j)^2 + 1][q_2^2 + r^2 l^2 + 1]}, \quad (4.143)$$

cuja regularização dimensional é dada por

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_5''(k, i, j; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 r}{4\epsilon} \left[\mathcal{P}(j, i; r) - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(j, i; r) \right]. \quad (4.144)$$

Note que uma das diferenças em relação a D_5' é o fator $\frac{1}{4}$ ao invés de um fator $\frac{1}{2}$. Outra diferença muito importante é a troca de i por j nos argumentos de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L}'_0$ em relação ao mesmo argumento em D_5' dadas as definições (4.133a), (4.133b) e (4.134). Essa troca, que surge naturalmente, é não-comutativa e é imprescindível para o cálculo dos expoentes críticos, pois possibilita os cancelamentos necessários no processo de renormalização das funções de vértice. Outro ponto a ser evidenciado aqui é que a integral $\overline{D}_5''$ possui a mesma solução de D_5'' , pois a diferença entre elas só aparece em ordem ϵ^0 ou superior. Assim,

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} \overline{D}_5''(k, i, j; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 r}{4\epsilon} \left[\mathcal{P}(j, i; r) - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(j, i; r) \right]. \quad (4.145)$$

A última contribuição do diagrama em 3 *loops* vem da integral D_5''' . Porém, assim como a integral I_4'' , D_5''' é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, só será exibida no apêndice A, uma vez que não influencia no cálculo dos expoentes críticos. Isso finaliza a nossa discussão sobre a regularização na teoria massiva. A seguir discutiremos a regularização no caso de campos de massa nula.

4.4.2 Regularização dimensional na teoria sem massa

Com o parâmetro de massa μ igual a zero e com os momentos externos no ponto simétrico (ver (2.145)), a escala de momento κ , que surge naturalmente por estarmos numa teoria sem massa, tem valor arbitrário, mas não pode ser feita igual a zero. O mais comum é fazer $\kappa = 1$, mas isso não é de fato necessário. Deixaremos, portanto, a escala κ aparecer explicitamente no resultado das integrais. O propagador livre, na teoria sem massa, é obtido a partir da equação (4.18) com $\mu = 0$, enquanto que os tensores $S_{i_1, i_2}^{(\tau)}$ e $S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)}$ permanecem os mesmos. Portanto, o análogo não-massivo da integral (4.45) é dado por

$$I(k, i; \sigma, \mu = 0) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + \sigma^2(l+i)^2][q^2 + \sigma^2 l^2]}. \quad (4.146)$$

Podemos utilizar agora um parâmetro de Feynman e o resultado (4.110) para resolver a parte integral nos momentos contínuos. A soma nos quase-momentos é realizada através da representação da função térmica generalizada dada em (4.114). Depois de usarmos a identidade (4.118) e expandirmos parcialmente em ϵ , a contribuição dessa integral para o diagrama em 1 *loop* para a função de vértice de 4 pontos torna-se

$$I(k, i; \sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)(k^2 + \sigma^2 i^2)]^{-\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) \right\}, \quad (4.147)$$

onde definimos

$$F_{\alpha}^{(\tau')}(k, i; \sigma) \equiv \sigma^{-2\alpha} \int_0^1 dx f_{\frac{1}{2}+\alpha}(\tau' + xi, h'(k, i, \sigma)), \quad (4.148)$$

$$h'(k, i, \sigma) \equiv \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + \sigma^2 i^2)}. \quad (4.149)$$

No ponto simétrico, a expressão (4.147) fica

$$I_{PS}(\kappa, i; \sigma) = \kappa^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)(1 + \bar{r}^2 i^2)]^{-\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right\}, \quad (4.150)$$

onde $\bar{r} \equiv \frac{\sigma}{\kappa}$. Expandindo em ϵ e permitindo termos até $O(\epsilon^0)$ finalmente encontramos

$$I_{PS}(\kappa, i; \sigma) = \kappa^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \ln[1 + \bar{r}^2 i^2] + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right\}. \quad (4.151)$$

O análogo não-massivo da integral (4.46) é dado por

$$I'(k, i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \int \frac{d^{d-1}q}{[(q+k)^2 + \sigma^2 i^2][q^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (4.152)$$

Aplicando um parâmetro de Feynman e resolvendo a integral em q através de (4.110), ficamos com

$$I'(k, i, j; \sigma) = \sigma \frac{S_d}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \{x(1-x)k^2 + \sigma^2[x(i^2 - j^2) + j^2]\}^{-(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2})} \quad (4.153)$$

Expandindo em ϵ e colocando a expressão no ponto simétrico, obtemos

$$I'_{PS}(\kappa, i, j; \bar{r}) = \kappa^{-\epsilon} \frac{S_d \bar{r}}{2} \int_0^1 dx [x(1-x) + x\bar{r}^2 i^2 + (1-x)\bar{r}^2 j^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.154)$$

Nos limitaremos agora em apresentar os resultados finais da regularização dimensional para as próximas integrais. Deixamos para o apêndice B a resolução das mesmas.

Na sequência da regularização dimensional das integrais de Feynman sem massa, consideremos a integral dada em (4.54) com $\mu = 0$. Em termos de I , escrevemos

$$D_3(k, i; \sigma, \mu = 0) = \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I(q+k, j+i; \sigma)}{(q^2 + \sigma^2 j^2)}. \quad (4.155)$$

Assim como na teoria massiva, estamos interessados na derivada de $D_3(k, i; \sigma)$ em relação a k^2 , mas agora em $k^2 = \kappa^2$. Logo, a solução que nos interessa é dada por

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_3(k, i; \sigma) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{8\epsilon} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right], \quad (4.156)$$

onde: $W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv \frac{1}{2} \ln(1 + \bar{r}^2 i^2) - \bar{F}_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) + 2F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r})$. Temos ainda as seguintes definições

$$\bar{F}_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv \int_0^1 dy y f_{\frac{1}{2}} \left((1-y)i, \bar{r}^{-1} \sqrt{y(1-y)(1 + \bar{r}^2 i^2)} \right), \quad (4.157a)$$

$$F_\alpha^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv \frac{\partial}{\partial k^2} F_{\alpha,1}^{(\tau'=0)}(k, i; \bar{r}) \Big|_{k^2=\kappa^2}, \quad (4.157b)$$

com o análogo de (4.130) definido por

$$F_{\alpha,\beta}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) \equiv \frac{\sigma}{S_d} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{F_\alpha^{(\tau'=0)}(q+k, j+i; \sigma)}{(q^2 + \sigma^2 j^2)^\beta}. \quad (4.158)$$

O rótulo $\tau' = 0$ indica que as mesmas definições podem ser encontradas em *PBC*, embora lá seja mais conveniente defini-las com $i = 0$. Esse paralelo já é um indicativo de que as definições acima são bem comportadas para $\alpha = 0$. Os argumentos para essa conclusão serão detalhados ao analisarmos os limites assintóticos da função $F_\alpha^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma)$ para $L \rightarrow \infty$ e $L \rightarrow 0$ (ver seção 4.6.2).

Vamos agora para o resultado da regularização, na teoria sem massa, da integral D'_3 dada em (4.55). Em termos de I podemos escrever

$$D'_3(k, i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \int d^{d-1} q \frac{I(q+k, i; \sigma)}{(q^2 + \sigma^2 j^2)}. \quad (4.159)$$

Assim como para D_3 , queremos a derivada de D'_3 em relação a k^2 em $k^2 = \kappa^2$. Dessa forma

$$\frac{\partial}{\partial k^2} D'_3(k, i, j; r, \mu) \Big|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 \bar{r} \pi}{8} \left[\bar{\mathcal{P}}(i, j; \bar{r}) - \frac{4}{\bar{r} \pi} \mathcal{M}'_0(\kappa, i, j; \bar{r}) \right], \quad (4.160)$$

onde definimos

$$\bar{\mathcal{P}}(i, j; \bar{r}) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^1 dy (1-y) [y(1-y) + y\bar{r}^2 i^2 + (1-y)\bar{r}^2 j^2]^{-\frac{1}{2}}; \quad (4.161a)$$

$$\mathcal{M}'_\alpha(\kappa, i, j; \sigma) \equiv \frac{\partial}{\partial k^2} \mathcal{M}_{\alpha,1}(k, i, j; \sigma) \Big|_{k^2=\kappa^2}, \quad (4.161b)$$

com

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}(k, i, j; \sigma) \equiv \frac{\sigma}{S_d} \int d^{d-1} q \frac{F_\alpha^{(\tau'=0)}(q+k, i; \sigma)}{[q^2 + \sigma^2 j^2]^\beta}. \quad (4.162)$$

A próxima contribuição para a função de 4 pontos é dada por

$$I_4(k, k', i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{I(q+k', l+j; \sigma)}{[(q-k)^2 + \sigma^2 (l-i)^2][q^2 + \sigma^2 l^2]}. \quad (4.163)$$

A regularização da integral acima até $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ pode ser transcrita como

$$I_{4PS}(\kappa, i; \bar{r}) = \kappa^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left[1 + \frac{3}{2}\epsilon - \epsilon \ln(1 + \bar{r}i^2) + \epsilon F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right]. \quad (4.164)$$

Temos ainda uma contribuição singular em ϵ para a função de 4 pontos dada pela integral expressa em (4.51) com $\mu = 0$. A integral I'_4 na teoria sem massa pode ser reescrita como

$$I'_4(k, k', i, j, l; \sigma) = \sigma \int d^{d-1}q \frac{I(q + k', l; \sigma)}{[(q - k)^2 + \sigma^2 i^2][q^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (4.165)$$

Como resultado da regularização, obtemos

$$I'_{4PS}(\kappa, i, j; \bar{r}) = \kappa^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 \bar{r}}{2\epsilon} \int_0^1 dy [y(1 - y) + y\bar{r}^2 i^2 + (1 - y)\bar{r}^2 j^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.166)$$

Assim como na teoria massiva, a integral I''_4 é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e, por isso, não iremos exibir sua regularização dimensional aqui.

Continuando com a apresentação dos resultados para a regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria não-massiva, vemos que em termos da integral I , podemos escrever (4.57) como

$$D_5(k, i; \sigma, \mu = 0) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{[I(q, l; \sigma)]^2}{[(q - k)^2 + \sigma^2(l - i)^2]}. \quad (4.167)$$

Cuja derivada em relação a k^2 em $k^2 = \kappa^2$ lê-se

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_5(k, i; \bar{r}) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{6\epsilon^2} \left[1 + 2\epsilon - 3\epsilon W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right], \quad (4.168)$$

A próxima contribuição para o diagrama em três *loops* da função de 2 pontos vem da integral D'_5 apresentada em (4.58). Na teoria sem massa podemos reescrevê-la como

$$D'_5(k, i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \int d^{d-1}q \frac{[I(q, i; \sigma)]^2}{[(q - k)^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (4.169)$$

Como resultado final para a derivada da integral acima em $k^2 = \kappa^2$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D'_5(k, i, j; \bar{r}) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 \bar{r} \pi}{4\epsilon} \left[\bar{\mathcal{P}}(i, j; \bar{r}) - \frac{4}{\pi \bar{r}} \mathcal{M}'_0(\kappa, i, j; \bar{r}) \right], \quad (4.170)$$

Ainda temos a integral dada em (4.59), a qual, em termos de I , na teoria sem massa, pode ser escrita como

$$D''_5(k, i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \int \frac{d^{d-1}q_1}{(q_1^2 + \sigma^2 i^2)} \times \\ \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q_2 \frac{I(q_1 + q_2, l + i; \sigma)}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(l + j)^2][q_2^2 + \sigma^2 l^2]}. \quad (4.171)$$

Assim,

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_5''(k, i, j; \bar{r}) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 \bar{r} \pi}{8\epsilon} \left[\bar{\mathcal{P}}(j, i; \bar{r}) - \frac{4}{\pi \bar{r}} \mathcal{M}'_0(\kappa, j, i; \bar{r}) \right]. \quad (4.172)$$

Note agora que, na teoria sem massa, uma das diferenças de D_5'' em relação à integral D_5' é o fator $\frac{1}{8}$, ao invés de um fator $\frac{1}{4}$. Observe também que, assim como ocorreu na teoria massiva, há a troca de i por j nos argumentos de $\bar{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{M}'_0$ em relação ao mesmo argumento em D_5' , dadas as definições (4.161b) e (4.161a). Ressaltamos que essa troca, que é não-comutativa, possibilitará os devidos cancelamentos no processo de renormalização das funções de vértice.

Em concordância com a teoria massiva, a integral $\bar{D}_5''$ possui a mesma solução de D_5'' , logo

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \bar{D}_5''(k, i, j; \bar{r}) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 \bar{r} \pi}{8\epsilon} \left[\bar{\mathcal{P}}(j, i; \bar{r}) - \frac{4}{\pi \bar{r}} \mathcal{M}'_0(\kappa, j, i; \bar{r}) \right]. \quad (4.173)$$

A contribuição da integral D_5''' na teoria sem massa também é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, pode ser desprezada.

4.5 Diagramas em termos das soluções das integrais de Feynman

Nesta seção utilizaremos os resultados encontrados na regularização da integrais de Feynman, para reescrever os diagramas expressos simbolicamente na seção 4.3 em termos dessas soluções.

4.5.1 Diagramas na teoria massiva

Substituindo os resultados (4.122) e (4.126), encontrados para as integrais massivas I e I' em (4.99) e absorvendo os fatores S_d numa redefinição da constante de acoplamento, ficamos com

$$\begin{aligned} \text{Diagrama} &= \frac{N+8}{18} \lambda^2 \sigma \left\{ \frac{\mu^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dx \ln[x(1-x)r^2(2i)^2 + 1] + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau'=0)}(0, 2i; r) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\mu^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1}) \right] + 2\tau \mu^{-\epsilon} \frac{r}{2} + 2\tau \mu^{-\epsilon} \frac{r}{2} \int_0^1 dx [xr^2(2i)^2 + 1]^{-\frac{1}{2}} + 4\mu^{-\epsilon} \frac{r}{2\sqrt{r^2 i^2 + 1}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.174)$$

Reorganizando a expressão acima, podemos escrever

$$\text{Diagrama} = (3\sigma\lambda) \frac{N+8}{18} \lambda \left\{ \frac{\mu^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}, \quad (4.175)$$

onde definimos,

$$\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \equiv \frac{1}{3} \left\{ 2r\tau + 2r\tau \int_0^1 dx [xr^2(2i)^2 + 1]^{-\frac{1}{2}} + \frac{4r}{\sqrt{r^2 i^2 + 1}} + 2f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1}) + \right. \\ \left. + F_0^{(\tau'=0)}(0, 2i; r) - \int_0^1 dx \ln[x(1-x)r^2(2i)^2 + 1] \right\}. \quad (4.176)$$

Em relação às expressões acima, é importante notar que a multiplicidade da equação (4.175) é a mesma que em (4.95). Outro ponto interessante é que, a menos do fator 3σ , a equação (4.175) é simbolicamente idêntica ao resultado encontrado em PBC (ver (3.23) e (3.35a)), sendo que para condições de contorno periódicas a função $\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}$, que denominamos de *correção de tamanho finito*, reduz-se apenas à função $f_{\frac{1}{2}}$. A função $\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}$ carrega toda a informação referente às condições de contorno de Neumann ($\tau = 1$) ou de Dirichlet ($\tau = -1$) e o seu comportamento terá fundamental importância quando tratarmos dos limites assintóticos $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$.

Utilizando agora as mesmas soluções para I e I' na expressão (4.100), encontramos

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} = (3\sigma\lambda) \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} \lambda^2 \left\{ \frac{\mu^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}^2. \quad (4.177)$$

Como I' é regular para $\epsilon \rightarrow 0$, as parcelas em $O(\epsilon^0)$ que surgem do termo $\sum I'I'$ em (4.48) já foram desprezadas na construção da expressão acima.

Ainda para a função de vértice de 4 pontos, temos que, ao utilizar os resultados (4.136) e (4.138) em (4.101), desprezando também as contribuições regulares da integral I_4'' , chegamos a

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} = (3\sigma\lambda) \frac{5N + 22}{54} \lambda^2 \left\{ \frac{\mu^{-2\epsilon}}{2\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}, \quad (4.178)$$

onde vemos também a mesma multiplicidade dos outros dois diagramas da função de 4 pontos.

Agora, para a derivada da função de vértice de 2 pontos em 2 *loops*, substituindo (4.128) e (4.132) em (4.103) para $k^2 = 0$, obtemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \left(\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \right) \right|_{k^2=0} = \frac{N+2}{18} \lambda^2 \left\{ \frac{-\mu^{-2\epsilon}}{8\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}, \quad (4.179)$$

onde,

$$\tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) \equiv W_0^{(\tau'=0)}(i; r) + 6r \left\{ [\mathcal{P}(0, i; r) + \tau \mathcal{P}(i, 0; r)] - \frac{2}{r} [\mathcal{L}'_0(0, i; r) + \tau \mathcal{L}'_0(i, 0; r)] \right\}. \quad (4.180)$$

Frisamos que a expressão em (4.179) está escrita exatamente da mesma maneira que em PBC (ver (3.28) e (3.35c)), sendo que para condições de contorno periódicas o termo $\tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r)$, que carrega toda a informação do tamanho finito nesse caso, reduz-se simplesmente a $W_0^{(\tau'=0)}(i; r)$. Logo, a segunda parcela em (4.180) surge, unicamente, pela imposição de NBC ou de DBC às superfícies do sistema. Note também que, mesmo para DBC , ou seja, $\tau = -1$, esse termo não se anula pois: $\mathcal{P}(0, i; r) \neq \mathcal{P}(i, 0; r)$ e $\mathcal{L}'_0(0, i; r) \neq \mathcal{L}'_0(i, 0; r)$.

Ainda para a função de 2 pontos, substituindo (4.140), (4.142), (4.144) e (4.145) em (4.104) e descartando os termos regulares oriundos da integral D'''_5 , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \left(\text{diagrama} \right) \Big|_{k^2=0} = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \lambda^3 \left\{ \frac{-\mu^{-3\epsilon}}{6\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2} \epsilon \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}, \quad (4.181)$$

onde os comentários feitos em relação ao gráfico em 2 *loops*, também valem para o gráfico em 3 *loops* acima.

Temos ainda os diagramas com inserção de campo composto. Substituindo as soluções para I e I' em (4.105), ficamos com

$$\frac{1}{2} \left(\text{diagrama } 2i + \text{diagrama } -2i \right) + \tau \text{diagrama } 0 = \left(\frac{3}{2} \tau \right) \frac{N+2}{6} \lambda \left\{ \frac{\mu^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}. \quad (4.182)$$

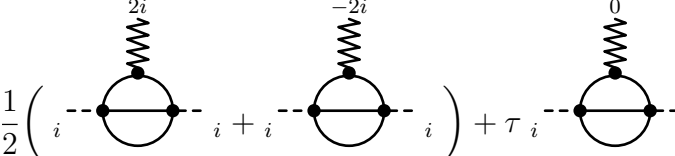
Observe que a multiplicidade da construção acima é a mesma encontrada em (4.97) e que, fora isso, a expressão tem seu paralelo com PBC confirmado (ver (3.32) e (3.35a)), com $\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)} \rightarrow f_{\frac{1}{2}}$.

Temos também que

$$\frac{1}{2} \left(\text{diagrama } 2i + \text{diagrama } -2i \right) + \tau \text{diagrama } 0 = \left(\frac{3}{2} \tau \right) \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \lambda^2 \left\{ \frac{\mu^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}^2, \quad (4.183)$$

onde substituímos as soluções para I e I' em (4.106) deixando de fora as parcelas em $O(\epsilon^0)$ que surgem do termo $\sum I'I'$ em (4.83).

Por último, temos que, ao substituir os resultados encontrados para I_4 e I'_4 em (4.107), rejeitando os termos que vêm da integral I''_4 , encontramos

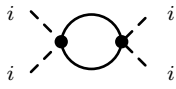


$$\frac{1}{2} \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right) + \tau \text{diagram 3} = \left(\frac{3}{2} \tau \right) \frac{N+2}{6} \lambda^2 \times \left\{ \frac{\mu^{-2\epsilon}}{2\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}. \quad (4.184)$$

Todos os diagramas estão agora numa representação conveniente para procedermos com a renormalização e cálculo dos expoentes críticos na teoria massiva.

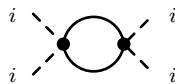
4.5.2 Diagramas na teoria sem massa

Substituindo os resultados (4.151) e (4.154), encontrados para as integrais não-massivas I e I' em (4.99), e redefinindo a constante de acoplamento para absorver a constante S_d , chegamos a



$$= \frac{N+8}{18} \lambda^2 \sigma \left\{ \frac{\kappa^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \ln[\bar{r}^2(2i)^2 + 1] + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 2i; \bar{r}) \right] + \right. \\ \left. + 2 \frac{\kappa^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \bar{r}) \right] + 2\tau \kappa^{-\epsilon} \frac{\bar{r}}{2} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + 2\tau \kappa^{-\epsilon} \frac{\bar{r}}{2} \int_0^1 dx [x(1-x) + x\bar{r}^2(2i)^2]^{-\frac{1}{2}} + 4\kappa^{-\epsilon} \frac{\bar{r}}{2} \int_0^1 dx [x(1-x) + x\bar{r}^2 i^2 + (1-x)\bar{r}^2 i^2]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.185)$$

Reorganizando a expressão acima, podemos escrever



$$= (3\sigma\lambda) \frac{N+8}{18} \lambda \left\{ \frac{\kappa^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}, \quad (4.186)$$

onde definimos no caso sem massa

$$\bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv \frac{1}{3} \left\{ 2\tau \bar{r} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}} + 2\tau \bar{r} \int_0^1 dx [x(1-x) + x\bar{r}^2(2i)^2]^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + 4\bar{r} \int_0^1 dx [x(1-x) + x\bar{r}^2 i^2 + (1-x)\bar{r}^2 i^2]^{-\frac{1}{2}} + 2F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \bar{r}) + \right. \\ \left. + F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 2i; \bar{r}) - \ln[4\bar{r}^2 i^2 + 1] \right\}. \quad (4.187)$$

Assim como ocorreu no caso massivo, verificamos que a multiplicidade da expressão em (4.186) é a mesma que em (4.95). Em condições de contorno periódicas, a função $\bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}$, que denominamos também de *termo de correção de tamanho finito* para o caso sem massa, reduz-se apenas à função $F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \bar{r})$. Lembramos que um dos nossos objetivos, tanto no caso massivo quanto no sem massa, é entender o que ocorre com a função de correção nos limites assintóticos $L \rightarrow \infty$ e $L \rightarrow 0$, para conectar a validade da expansão em ϵ com a ocorrência do *crossover* dimensional.

Efetuada agora a substituição das expressões para I e I' da teoria sem massa em (4.100), encontramos

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ i \end{array} = (3\sigma\lambda) \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} \lambda^2 \left\{ \frac{\kappa^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}^2, \quad (4.188)$$

onde também descartamos as parcelas provenientes do termo $\sum I'I'$ por conta de sua regularidade. O outro diagrama não-trivial em 2 *loops* da função de 4 pontos tem a seguinte expressão regularizada

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ i \end{array} = (3\sigma\lambda) \frac{5N + 22}{54} \lambda^2 \left\{ \frac{\kappa^{-2\epsilon}}{2\epsilon^2} \left[1 + \frac{3}{2}\epsilon + \epsilon \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}, \quad (4.189)$$

onde foram desprezadas as contribuições regulares da integral I_4'' .

Para a derivada da função de vértice de 2 pontos em 2 *loops* temos

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \left(\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ i \end{array} \right) \Big|_{k^2=\kappa^2} = \frac{N+2}{18} \lambda^2 \left\{ \frac{-\kappa^{-2\epsilon}}{8\epsilon} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon \bar{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}, \quad (4.190)$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) - \frac{3}{2} \bar{r} \pi \{ [\bar{\mathcal{P}}(0, i; \bar{r}) + \tau \bar{\mathcal{P}}(i, 0; \bar{r})] + \\ - \frac{4}{\bar{r} \pi} [\mathcal{M}'_0(\kappa, 0, i; \bar{r}) + \tau \mathcal{M}'_0(\kappa, i, 0; \bar{r})] \}. \end{aligned} \quad (4.191)$$

É importante notar que a expressão (4.190) exibe um perfeito paralelo com a teoria sem massa para *PBC*, sendo que para condições de contorno periódicas o termo $\bar{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r})$, que carrega toda a informação do tamanho finito nesse caso, reduz-se simplesmente a $W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r})$, com $i = 0$ e $\kappa = 1$. Logo, a segunda parcela em (4.191) surge também aqui pela imposição de *NBC* ou de *DBC* às superfícies que delimitam o sistema. Note também que, assim como no caso massivo, esse termo não se anula para $\tau = -1$ pois: $\bar{\mathcal{P}}(0, i; \bar{r}) \neq \bar{\mathcal{P}}(i, 0; \bar{r})$ e $\mathcal{M}'_0(\kappa, 0, i; \bar{r}) \neq \mathcal{M}'_0(\kappa, i, 0; \bar{r})$.

Ainda para a função de 2 pontos, em termos das soluções das integrais não massivas, verificamos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \left(\text{diagrama} \right) \right|_{k^2=\kappa^2} = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \lambda^3 \left\{ \frac{-\kappa^{-3\epsilon}}{6\epsilon^2} \left[1 + 2\epsilon - 3\epsilon \overline{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}. \quad (4.192)$$

onde também descartamos as contribuições que surgem da integral D_5''' .

Para os diagramas com inserção de campo composto, procedendo com a rotina já bem definida no caso massivo, obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\text{diagrama } 2i + \text{diagrama } -2i \right) + \tau \text{diagrama } 0 = \left(\frac{3}{2} \tau \right) \frac{N+2}{6} \lambda \left\{ \frac{\kappa^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \overline{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}; \quad (4.193a)$$

$$\frac{1}{2} \left(\text{diagrama } 2i + \text{diagrama } -2i \right) + \tau \text{diagrama } 0 = \left(\frac{3}{2} \tau \right) \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \lambda^2 \left\{ \frac{\kappa^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \overline{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}^2; \quad (4.193b)$$

$$\frac{1}{2} \left(\text{diagrama } 2i + \text{diagrama } -2i \right) + \tau \text{diagrama } 0 = \left(\frac{3\tau}{2} \right) \frac{N+2}{6} \lambda^2 \times \left\{ \frac{\kappa^{-2\epsilon}}{2\epsilon^2} \left[1 + \frac{3}{2}\epsilon + \epsilon \overline{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}. \quad (4.193c)$$

Com isso explicitamos todos os diagramas necessários ao cálculo dos expoentes críticos em termos das soluções das integrais de Feynman também na teoria sem massa.

4.6 Limites assintóticos do termo de correção de tamanho finito em NBC e DBC

Neste ponto estamos interessados em descobrir qual o limite de validade da expansão em ϵ quando fazemos L (*distância de separação entre as placas delimitadoras do sistema*) tender a valores muito grandes ou muito pequenos. Sabemos que o diagrama que gera divergências em todos os outros diagramas na teoria $\lambda\phi^4$ é o da função de 4 pontos em 1 *loop*, sendo assim, basta analisarmos o seu termo de correção.

4.6.1 Limites assintóticos na teoria massiva

Na teoria massiva obtivemos

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \bullet \begin{array}{c} i \\ \diagup \end{array} = (3\sigma\lambda) \frac{N+8}{18} \lambda \left\{ \frac{\mu^{-\epsilon}}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}. \quad (4.194)$$

Com o auxílio da referência [78], o termo de correção de tamanho finito definido em (4.176) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) = \frac{1}{3} \left\{ 2r\tau + \frac{4r\tau}{1 + \sqrt{4r^2 i^2 + 1}} + \frac{4r}{\sqrt{r^2 i^2 + 1}} + 2f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1}) + \right. \\ \left. + F_0^{(\tau'=0)}(0, 2i; r) - 2 \left[\frac{\sqrt{1 + r^2 i^2}}{ri} \operatorname{arcsinh}(ri) - 1 \right] \right\}, \quad (4.195) \end{aligned}$$

Para entendermos o que acontece com a expressão anterior, para $L \rightarrow \infty$ e $L \rightarrow 0$, é necessário primeiro analisarmos as funções $f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1})$ e $F_0^{(\tau'=0)}(0, 2i; r)$, cujas representações gerais são dadas em (4.116) e (4.120), respectivamente. É importante lembrar que $r^{-1} = \frac{\mu}{\sigma} \propto \frac{L}{\xi}$ corresponde à variável de escala y .

Começemos nossa análise pelas definições (4.116) e (4.120), que nos levam a

$$\begin{aligned} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau')}(k, i; r) = 4r^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \cos[2\pi n(\tau' + ix)] \left[\frac{\pi n}{r^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi n r^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1} \right). \quad (4.196) \end{aligned}$$

Note primeiro que

$$F_{\alpha}^{(\tau')}(0, 0; r) = r^{-2\alpha} f_{\frac{1}{2}+\alpha}(\tau', r^{-1}), \quad (4.197)$$

de onde obtemos

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau')}(0, 0; r) = 4r^{-\frac{\epsilon}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n \tau') (\pi n)^{\frac{\epsilon}{2}} K_{\frac{\epsilon}{2}}(2\pi n r^{-1}). \quad (4.198)$$

A expressão (4.198) mostra claramente que não há polos, quando $\epsilon \rightarrow 0$, para a função $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau')}(0, 0; r)$. No limite $r^{-1} \rightarrow \infty$, podemos usar em (4.198) a expansão assintótica da função de Bessel na forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_{\alpha}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

Dessa forma, podemos escrever

$$F_0^{(\tau')}(0, 0; r) \approx \frac{2}{r^{-\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n \tau') \frac{e^{-2\pi n r^{-1}}}{\sqrt{n}}. \quad (4.199)$$

Utilizando agora uma simples desigualdade, podemos mostrar que o termo acima se anula no limite requerido, isto é,

$$\lim_{r^{-1} \rightarrow \infty} \frac{2}{r^{-\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n \tau') \frac{e^{-2\pi n r^{-1}}}{\sqrt{n}} < \lim_{r^{-1} \rightarrow \infty} \frac{2}{r^{-\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n \tau') e^{-2\pi n r^{-1}} \rightarrow 0. \quad (4.200)$$

Para o nosso caso específico temos $\tau' = 0$, o que não altera a nossa conclusão. Portanto, a função $f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1})$ tende a zero no limite $L \rightarrow \infty$.

Observe agora que, mesmo para a função $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau')}(k, i; r)$, podemos fazer diretamente $\epsilon = 0$ sem que qualquer divergência seja observada. Sendo assim, voltando agora a (4.196), para $\epsilon = 0$, $k = 0$ e $\tau' = 0$, temos

$$F_0^{(\tau'=0)}(0, i; r) = 4 \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \cos[2\pi n i x] K_0 \left(2\pi n r^{-1} \sqrt{x(1-x)r^2 i^2 + 1} \right). \quad (4.201)$$

Como a integral em x é limitada ao intervalo $0 < x < 1$, podemos tomar o limite $r^{-1} \rightarrow \infty$, e utilizar novamente a expansão da função de Bessel nesse limite. Com isso obtemos

$$F_0^{(\tau'=0)}(0, i; r) \approx 2 r^{\frac{1}{2}} \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n i x)}{\sqrt{n}} \exp \left(-\frac{2\pi n \sqrt{1 - r^2 i^2 x(x-1)}}{r} \right). \quad (4.202)$$

Vemos então que, na soma, o modo $n = 1$ é o que mais contribui. Dessa forma, embora a função cosseno seja oscilante no intervalo, a exponencial domina, indo a zero para $r \rightarrow 0$ ($L \rightarrow \infty$).

Logo, $\lim_{L \rightarrow \infty} F_0^{(\tau'=0)}(0, 2i; r) \rightarrow 0$.

Ainda, em (4.195), observamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + r^2 i^2}}{r i} \operatorname{arcsinh}(r i) = 1, \quad (4.203)$$

e assim, a última parcela naquela expressão é identicamente nula. Não é difícil verificar que todos os outros termos em (4.195) também se anulam no mesmo limite, fato que independe da condição de contorno. Dessa forma, podemos escrever um resultado crucial para nossa análise

$$\lim_{r \rightarrow 0} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \rightarrow 0, \quad (4.204)$$

ou seja, no limite $L \rightarrow \infty$, recuperamos todos os resultados conhecidos da teoria massiva para o sistema totalmente infinito.

Agora para $r \rightarrow \infty$ ($L \rightarrow 0$), as correções de tamanho finito ficam cada vez maiores à medida que L diminui a ponto de terem a mesma ordem do polo ϵ^{-1} em (4.194), modificando a singularidade dominante da função de correlação de 4 pontos. Para vermos mais claramente como isso ocorre, vamos considerar a seguinte identidade [78]

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(nw) \cos(nwt) &= \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{w}{4\pi} \right) + \frac{\pi}{2w\sqrt{1+t^2}} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{w^2 + (2n\pi + tw)^2}} - \frac{1}{2n\pi} \right] + \\ &+ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{w^2 + (2n\pi - tw)^2}} - \frac{1}{2n\pi} \right], \quad (4.205) \end{aligned}$$

válida para valores positivos de w . γ é a constante de Euler-Mascheroni dada por $0.577216\dots$. Através das identificações: $w = 2\pi r^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1}$ e $t = \frac{2\pi(\tau' + ix)}{w}$, podemos escrever (4.196), com $\tau' = 0$, como

$$\begin{aligned} F_0^{(\tau'=0)}(k, i; r) &= 2\gamma + 2 \int_0^1 dx \ln \left[\frac{r^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1}}{2} \right] + \\ &+ \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{(ix)^2 + r^{-2}[x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1]}} + \\ &+ \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(n - ix)^2 + r^{-2}[x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1]}} - \frac{1}{n} \right] + \\ &+ \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(n + ix)^2 + r^{-2}[x(1-x)(k^2 + r^2 i^2) + 1]}} - \frac{1}{n} \right]. \quad (4.206) \end{aligned}$$

Note que, de acordo com (4.197), ao fazer $k = 0$ e $i = 0$ em (4.206) teremos uma expressão correspondente para $f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1})$, a saber

$$f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1}) = 2\gamma + 2 \ln \left(\frac{r^{-1}}{2} \right) + r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + r^{-2}}} - \frac{1}{n} \right]. \quad (4.207)$$

Ao analisar a expressão (4.207), podemos perceber facilmente que para $r^{-1} = 0$ o somatório se anula. Assim, no limite $r^{-1} \rightarrow 0$, restam apenas a divergência linear em r e a logarítmica com $\ln(r^{-1})$. Entretanto, em (4.206), a coisa é um pouco mais complexa, pois, fazendo $i \rightarrow 2i$, $k = 0$ e tomando o limite $r^{-1} \rightarrow 0$, seus dois últimos termos tornam-se

$$\begin{aligned} \lim_{r^{-1} \rightarrow 0} \int_0^1 dx \left(\sum_{n=1}^{\infty} [\dots] + \sum_{n=1}^{\infty} [\dots] \right) &= \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 4i(i-n)x}} - \frac{1}{n} \right] + \\ &+ \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 4i(i+n)x}} - \frac{1}{n} \right] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \zeta(2n+1), \end{aligned} \quad (4.208)$$

onde $\zeta(2n+1)$ é a função Zeta de Riemann que pode ser definida pela seguinte série: $\zeta(s) = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-s}$ para $Re(s) > 1$.

É evidente que a série resultante em (4.208) diverge para $i \geq 1$, o que vem a ser, à primeira vista, um inconveniente, dado que estamos interessados em compreender o limite de validade da expansão ϵ quando $L \rightarrow 0$. Porém, esse termo divergente é artificial, isto é, não é dotado de relevância física para o problema. Note que ele surge devido à escolha que fizemos para os quase-momentos externos no sentido de unificar *NBC* com *DBC*. Por exemplo, em *PBC* também temos a função (4.206), mas a escolha $i = 0$ elimina este número divergente. Da mesma forma, para *NBC* com $i = 0$ essa divergência não ocorre, como veremos no próximo capítulo ao tratarmos o modo zero. Embora a opção $i = 0$ para *DBC* não seja apropriada, esse número divergente também é irrelevante nesse caso, pois, como concluiremos ao final do capítulo, as grandezas físicas que serão calculadas não dependem do quase-momento externo i , o que é natural, pois qualquer dependência desse tipo seria fisicamente inconsistente. Assim, como a série não depende de r , no que diz respeito à análise do limite físico da teoria, ela pode ser considerada regular no limite requerido em comparação com os polos em ϵ .

Voltando à (4.206), aplicando também $k = 0$ e $i \rightarrow 2i$, encontramos

$$\int_0^1 dx \ln \left[\frac{\sqrt{x(1-x)(2i)^2 + r^{-2}}}{2} \right] = -1 + \frac{\sqrt{1+r^2i^2}}{ri} \operatorname{arcsinh}(ri) - \ln(2r), \quad (4.209)$$

Tal expressão nos leva a um resultado finito quando $r \rightarrow \infty$, visto que nesse limite

$$\frac{\sqrt{1+r^2i^2}}{ri} \operatorname{arcsinh}(ri) \sim \ln(r). \quad (4.210)$$

Temos ainda que

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{(2ix)^2 + x(1-x)(2i)^2 + r^{-2}}} = \frac{-1 + \sqrt{1+4r^2i^2}}{2ri^2}. \quad (4.211)$$

O resultado acima também é finito para $r \rightarrow \infty$.

A partir dos resultados acima, podemos escrever a seguinte expressão para a função de correção de tamanho finito no limite $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \sim \frac{1}{3} \left\{ 2r(1 + \tau) - 2 \left[\frac{\sqrt{1 + r^2 i^2}}{ri} \operatorname{arcsinh}(ri) \right] + 4 \ln \left(\frac{r^{-1}}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \zeta(2n + 1) + \text{termos finitos} \right\}. \quad (4.212)$$

Vemos então que, para $\tau = 1$, o termo dominante em (4.212) é linear com r , sendo proporcional a $(\frac{L}{\epsilon})^{-1}$. Assim, temos

$$\lim_{L \rightarrow 0} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau=1)}(i; r) \sim \frac{4\pi}{3\mu} \frac{1}{L} \rightarrow \infty. \quad (4.213)$$

Observe que em (4.212) também aparecem termos divergentes proporcionais a $\ln(r^{-1})$. No entanto, essa divergência é mais fraca se comparada à divergência linear para $L \rightarrow 0$. Temos, portanto, o mesmo regime encontrado em *PBC*. Assim, todas as análises realizadas na referência [41] com respeito à quebra da expansão em ϵ devido a singularidade no termo de correção em *PBC* podem ser reproduzidas aqui para *NBC*.

Por outro lado, para $\tau = -1$ (*DBC*), a divergência linear é cancelada e, portanto, ficamos com

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau=-1)}(i; r) \sim \frac{1}{3} \left\{ -2 \left[\frac{\sqrt{1 + r^2 i^2}}{ri} \operatorname{arcsinh}(ri) \right] + 4 \ln \left(\frac{r^{-1}}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \zeta(2n + 1) + \text{termos finitos} \right\}. \quad (4.214)$$

Utilizando agora (4.210), chegamos a

$$\lim_{L \rightarrow 0} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau=-1)}(i; r) \sim 2 \ln(\mu L) \rightarrow -\infty. \quad (4.215)$$

Sendo assim, o regime de *crossover* dimensional para *DBC* é equivalente ao encontrado em *ABC*, visto que os dois ocorrem para uma divergência logarítmica quando $L \rightarrow 0$. No limite ultravioleta, o mapeamento entre a regularização dimensional e a regularização pelo corte Λ nos momentos nos leva à seguinte correspondência: $\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \ln \frac{\Lambda}{\mu}$. Portanto, podemos inferir que o termo de correção de tamanho finito torna-se comparável à singularidade dominante do diagrama de 4 pontos em 1 *loop* quando $\ln \frac{\Lambda}{\mu} \sim -\ln(r^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{\mu L}\right)$, ou seja, quando $L\Lambda \sim 1$. Em termos do parâmetro de rede a temos $\Lambda \sim \frac{1}{a}$, o que implica em $L \sim a$.

Em resumo, a redução de L (com $\mu^2 \propto t$, fixo) até magnitudes próximas do parâmetro de rede a produz dois tipos de comportamentos singulares dependentes da condição de contorno

imposta. Esses dois comportamentos, linear (*NBC*) e logarítmico (*DBC*), geram o mesmo tipo de *crossover* dimensional observado por SL para *PBC* e *ABC* [41], respectivamente, onde a correção de tamanho finito domina sobre o polo em ϵ^{-1} . Assim, para que a teoria seja consistente, gerando os expoentes críticos corretos, é necessário evitar esse limite de *crossover* dimensional que ocorre quando $L \sim a$.

4.6.2 Limites assintóticos na teoria sem massa

Na análise realizada acima, não consideramos o limite $t \rightarrow 0$, visto que ele é inconsistente na teoria massiva (ver seção 2.7). Para podermos acessar a região $r^{-1} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow 0$, devemos utilizar a teoria sem massa, onde esse limite é consistente por construção. Lembramos que na teoria sem massa $\xi = \infty$ e temos invariância por escala no regime infravermelho.

Ao calcularmos as integrais restantes em (4.187), podemos reescrever o termo de correção na teoria sem massa como

$$\bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) = \frac{1}{3} \left\{ 2\bar{r}\pi\tau + 8\bar{r} \arctan\left(\frac{1}{2\bar{r}i}\right) + 4\tau\bar{r} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{4\bar{r}^2 i^2 + 1}}\right) + 2F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \bar{r}) + F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 2i; \bar{r}) - \ln[4\bar{r}^2 i^2 + 1] \right\}, \quad (4.216)$$

onde $\bar{r} = \frac{\sigma}{\kappa} = \frac{\pi}{\kappa L}$. Similarmente ao caso massivo podemos escrever

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau')}(k, i; \sigma) = 4\sigma^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \cos[2\pi n(\tau' + ix)] \left[\frac{\sigma\pi n}{\sqrt{x(1-x)(k^2 + \sigma^2 i^2)}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi n \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + \sigma^2 i^2)} \right). \quad (4.217)$$

Observe agora que, diferentemente da teoria massiva, o termo com raiz quadrada em (4.217) diverge nos limites de integração $x = 0$ e $x = 1$. Porém, na referência [41], foi verificado que $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau')}(k, i = 0; \sigma)$ não possui nenhum polo associado ao limite $\epsilon \rightarrow 0$, inclusive no regime ultravioleta. De forma similar, apresentamos no apêndice B uma prova para a validade dessa regularidade quando $i \neq 0$, onde tomamos por base a seguinte desigualdade

$$\bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) \equiv 4\sigma^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi n}{\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + \sigma^2 i^2)}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi n \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(k^2 + \sigma^2 i^2)} \right) > F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma). \quad (4.218)$$

Aplicando então $\epsilon \rightarrow 0$, de acordo com o que está descrito no apêndice B, podemos escrever a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) = \frac{8\sigma}{\pi(k^2 + \sigma^2 i^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\cosh(\pi n \sigma^{-1}(k^2 + \sigma^2 i^2)^{\frac{1}{2}}) \text{shi}(\pi n \sigma^{-1}(k^2 + \sigma^2 i^2)^{\frac{1}{2}}) + \\ - \sinh(\pi n \sigma^{-1}(k^2 + \sigma^2 i^2)^{\frac{1}{2}}) \text{chi}(\pi n \sigma^{-1}(k^2 + \sigma^2 i^2)^{\frac{1}{2}})]. \end{aligned} \quad (4.219)$$

onde as funções $\text{shi}(z)$ e $\text{chi}(z)$, definidas no apêndice B (ver expressões (B.62) e (B.63)), são conhecidas como o seno e o cosseno hiperbólicos integrais, respectivamente. Sabendo agora que, para z real, temos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [\cosh(z) \text{shi}(z) - \sinh(z) \text{chi}(z)] \approx \frac{1}{z} + O(z^{-2}), \quad (4.220)$$

podemos escrever

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) \approx \frac{8}{L^2 k^2 + \pi^2 i^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (4.221)$$

Vemos então que, no limite $L \rightarrow \infty$, a função $F_0^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma)$ tende a zero, o mesmo valendo quando $i = 0$. Vale observar que, colocar as funções no ponto simétrico $k^2 = \kappa^2$, onde κ pode ser feito igual a 1, não altera os resultados acima. Todos os outros termos em (4.216) também se anulam para $L \rightarrow \infty$, o que independe da condição de contorno. Dessa forma, podemos escrever para a teoria sem massa que

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \rightarrow 0. \quad (4.222)$$

Portanto, assim como no caso massivo, temos que, para $L \rightarrow \infty$, recuperamos o mesmo resultado do sistema totalmente infinito.

Para entender o que acontece no outro extremo ($L \rightarrow 0$), usaremos a identidade (4.205). Através das substituições $w = 2\pi\sigma^{-1}\sqrt{x(1-x)(\kappa^2 + \sigma^2 i^2)}$ e $t \rightarrow \frac{2\pi(\tau' + ix)}{w}$, podemos reescrever $F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 2i; \sigma)$ como

$$\begin{aligned} F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 2i; \sigma) = 2\gamma + 2 \int_0^1 dx \ln \left[\frac{\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(\kappa^2 + \sigma^2 (2i)^2)}}{2} \right] + \\ + \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{(2ix)^2 + \sigma^{-2}[x(1-x)(\kappa^2 + \sigma^2 (2i)^2)]}} + \\ + \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{[n - (2ix)]^2 + \sigma^{-2}[x(1-x)(\kappa^2 + \sigma^2 (2i)^2)]}} - \frac{1}{n} \right] + \\ + \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{[n + (2ix)]^2 + \sigma^{-2}[x(1-x)(\kappa^2 + \sigma^2 (2i)^2)]}} - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned} \quad (4.223)$$

Temos também que

$$F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \sigma) = 2\gamma + 2 \int_0^1 dx \ln \left[\frac{\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)\kappa^2}}{2} \right] + \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{\sigma^{-2}x(1-x)\kappa^2}} + \\ + 2 \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + \sigma^{-2}x(1-x)\kappa^2}} - \frac{1}{n} \right]. \quad (4.224)$$

No limite $L \rightarrow 0$ ($\sigma^{-1} \rightarrow 0$), o somatório no último termo em (4.224) é nulo e, desde já, não nos preocuparemos com ele. Porém, em (4.223), os dois últimos termos nos dão como resultado: $2 \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \zeta(2n+1)$; sendo este o mesmo termo encontrado no caso massivo. Dessa forma, o mesmo argumento utilizado na seção anterior é válido aqui, onde ressaltamos que a dependência em i pode ser eliminada por uma escolha conveniente dos quase-momentos externos.

Voltando aos termos restantes, ao analisar a função $F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 2i; \sigma)$, encontramos

$$\int_0^1 dx \ln \left[\frac{\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(\kappa^2 + \sigma^2(2i)^2)}}{2} \right] = -1 + \ln \left[\frac{\sqrt{\kappa^2 + 4\sigma^2 i^2}}{2\sigma} \right], \quad (4.225)$$

cujos resultados são finitos para $\sigma \rightarrow \infty$. Temos também que

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{(2ix)^2 + \sigma^{-2}[x(1-x)(\kappa^2 + \sigma^2(2i)^2)]}} = 2 \left(\frac{\sigma}{\kappa} \right) \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{4 \left(\frac{\sigma}{\kappa} \right)^2 i^2 + 1}} \right], \quad (4.226)$$

resultado também finito para $\sigma \rightarrow \infty$.

Focando agora na função $F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \sigma)$, encontramos

$$\int_0^1 dx \ln \left[\frac{\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)\kappa^2}}{2} \right] = -1 + \ln \left(\frac{\kappa}{2\sigma} \right) = -1 + \ln \left(\frac{\bar{\tau}^{-1}}{2} \right). \quad (4.227)$$

Temos também que

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{\sigma^{-2}x(1-x)\kappa^2}} = \pi \left(\frac{\sigma}{\kappa} \right) = \pi \bar{\tau}. \quad (4.228)$$

Os dois últimos resultados acima são divergentes para $\bar{\tau} \rightarrow \infty$. Dessa forma podemos escrever para o caso sem massa

$$\lim_{\bar{\tau} \rightarrow \infty} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{\tau}) \sim \frac{1}{3} \left\{ 2\pi \bar{\tau}(1 + \tau) + 6 \ln(\bar{\tau}^{-1}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \zeta(2n+1) + \text{termos finitos} \right\}. \quad (4.229)$$

Temos, portanto, um comportamento similar ao do caso massivo. Note que o termo logarítmico também está presente em (4.229), como na teoria massiva. Entretanto, para *NBC* ($\tau = 1$), a lei de potência L^{-1} é dominante, nos levando ao mesmo regime de *crossover* da teoria massiva, o qual é equivalente ao encontrado em *PBC*, ou seja,

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau=1)}(\kappa, i; \bar{r}) \sim \frac{4\pi^2}{3\kappa} \frac{1}{L} \rightarrow \infty. \quad (4.230)$$

Observe que as únicas diferenças em relação ao caso massivo (ver (4.213)), é a presença de um fator multiplicativo π a mais, que surge devido à integração do parâmetro de Feynman, e o aparecimento da escala κ no lugar da massa μ , o que já era esperado. A equivalência massivo/não-massivo continua a ocorrer para *DBC* ($\tau = -1$), pois nesse caso a divergência linear também é cancelada. Temos portanto

$$\lim_{L \rightarrow 0} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau=-1)}(\kappa, i; \bar{r}) \sim 2 \ln(\kappa L) \rightarrow -\infty. \quad (4.231)$$

Vemos então que o resultado acima é totalmente equivalente ao encontrado na teoria massiva e, conseqüentemente, o paralelo com *ABC* também é satisfeito em todos os aspectos. Desse modo, completamos a nossa análise para diferentes valores de L em ambas as condições de contorno (*NBC* e *DBC*). A equivalência entre as teorias massiva e não-massiva é portanto estabelecida no que diz respeito ao *crossover* dimensional.

Na nossa análise para o caso não-massivo, acessamos as regiões (ii) e (iii) da variável de escala $\frac{L}{\xi}$ ao fazer L variar de infinito a valores finitos seguindo a prescrição já realizada por SL em *PBC* e *ABC*. Vimos então a persistência de termos de correção em L mesmo no limite $\frac{L}{\xi} \rightarrow 0$. Contanto que evitemos valores pequenos para L , a expansão em ϵ ainda permanece válida nesse limite. Portanto, não consideraremos mais, para *NBC* e *DBC*, a conjectura fenomenológica para as três regiões de escala. Para L suficientemente grande, podemos variar $\frac{L}{\xi}$ de zero a infinito sem invalidar o método perturbativo. Os termos de correção permanecerão bem comportados e, portanto, não existe nenhuma inconsistência na utilização da regularização dimensional com a expansão em ϵ no cálculo das integrais de ordens 2 e 3 *loops*.

4.7 Renormalização na teoria massiva com *NBC* e *DBC*

As divergências no regime ultravioleta que vimos no capítulo 2, e que persistiram no tratamento com *PBC* e *ABC*, também são encontradas ao impormos *NBC* ou *DBC* aos campos. Temos ainda um número finito de divergências primitivas na dimensão crítica $d_c = 4$. Portanto, um número também finito de constantes de renormalização serão necessárias e o procedimento de renormalização é o mesmo apresentado no capítulo anterior. Temos então que

$$\Gamma_R^{(E,M)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l; g, \mu) = \left(Z_{\Phi}^{(\tau)}\right)^{\frac{E}{2}} \left(Z_{\Phi^2}^{(\tau)}\right)^M \Gamma^{(E,M)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l; \lambda, \mu_0, \Lambda), \quad (4.232)$$

onde os índices $l = 1, 2, \dots, E$ e $l' = 1, \dots, M$ rotulam os momentos externos k_l e $k_{l'}$, assim como os modos i_l e $i_{l'}$ dos quase-momentos associados com o campo ϕ e o campo composto ϕ^2 , respectivamente. Não incluiremos o índice τ nas funções Γ para simplificar a notação.

As constantes de renormalização multiplicativas $\left(Z_{\Phi}^{(\tau)}\right)$ e $\left(Z_{\Phi^2}^{(\tau)}\right)$ podem ser determinadas por condições de normalização semelhantes àsquelas consideradas em (2.132), e devem refletir os diferentes valores das funções de vértice de acordo com a condição de contorno considerada. Portanto, embora a massa renormalizada μ já seja independente das condições de contorno, visto que τ não aparece explicitamente na função de vértice de 2 pontos, é interessante torná-la também independente do quase-momento externo i . Ao mesmo tempo, devemos incluir nessas novas condições de normalização as multiplicidades que surgem nesse formalismo. Propomos então o seguinte conjunto de condições de normalização para as funções de vértice

$$\Gamma_R^{(2)}(k=0, i; g, \mu) = \mu^2 + \sigma^2 i^2 = \mu^2(1 + r^2 i^2); \quad (4.233a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, i; g, \mu) \right|_{k^2=0} = 1; \quad (4.233b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k=0, i; g, \mu) = 3\sigma g; \quad (4.233c)$$

$$\bar{\Gamma}_R^{(2,1)}(k=0, i, k'=0, j; g, \mu) = \frac{3}{2}\tau, \quad (4.233d)$$

onde, seguindo a estrutura de construção apontada anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_R^{(2,1)}(k, i, k', j; g, \mu) \equiv & \frac{1}{2} \left[\Gamma_R^{(2,1)}(k, i, k', 2i; g, \mu) + \Gamma_R^{(2,1)}(k, i, k', -2i; g, \mu) \right] + \\ & + \tau \Gamma_R^{(2,1)}(k, i, k', 0; g, \mu). \end{aligned} \quad (4.234)$$

Para cada uma das funções $\Gamma_R^{(2,1)}$ descritas acima temos

$$\Gamma_R^{(2,1)}(0, i, 0, 2i; g, \mu) = \Gamma_R^{(2,1)}(0, i, 0, -2i; g, \mu) = \frac{\tau}{2}; \quad (4.235a)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(0, i, 0, 0; g, \mu) = 1. \quad (4.235b)$$

Um detalhe importante nas condições acima é que a única função de vértice que possui o propagador da inserção (perna em “zigue-zague”) com momento e quase-momento nulo é $\Gamma_R^{(2,1)}(0, i, 0, 0; g, \mu)$.

Mesmo com o sistema submetido a condições de contorno de Neumann ou Dirichlet, temos liberdade na escolha do parâmetro μ para λ e Λ fixos, o que nos remete às equações de Callan-Symanzik associadas as transformações infinitesimais do grupo de renormalização em uma teoria massiva. Podemos investigar então como as equações de Callan-Symanzik refletem as modificações nas condições de normalização dadas em (4.233) para NBC ou DBC , nesse formalismo unificado.

4.7.1 Equações de Callan-Symanzik com *NBC* e *DBC*

A partir da equação (4.232), podemos escrever

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_{\lambda, \Lambda} \Gamma_R^{(E, M)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l; \mu^2, g) = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_{\lambda, \Lambda} \left[\left(Z_\Phi^{(\tau)}\right)^{E/2} \left(Z_{\Phi^2}^{(\tau)}\right)^M \times \right. \\ \left. \times \Gamma^{(E, M)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l; \mu_0^2, \lambda, \Lambda) \right]. \quad (4.236)$$

Após realizarmos a derivada, obtemos

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta^{(\tau)} \frac{\partial}{\partial g} - \frac{E}{2} \gamma_\Phi^{(\tau)} + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau)}\right) \Gamma_R^{(E, M)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l; \mu, g) = \\ = \mu \left(\frac{\partial \mu_0^2}{\partial \mu}\right)_{\lambda, \Lambda} \left(Z_\Phi^{(\tau)}\right)^{-1} \Gamma_R^{(E, M+1)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l, 0, 0; \mu, g), \quad (4.237)$$

onde as funções de Wilson são definidas por: $\beta^{(\tau)} \equiv \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}$, $\gamma_\Phi^{(\tau)} \equiv \mu \frac{\partial \ln Z_\Phi^{(\tau)}}{\partial \mu}$ e $\gamma_{\Phi^2}^{(\tau)} \equiv -\mu \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2}^{(\tau)}}{\partial \mu}$, além disso, também utilizamos

$$\Gamma^{(E, M+1)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l, 0, 0; \mu_0, \lambda, \Lambda) = \frac{\partial}{\partial \mu_0^2} \Gamma^{(E, M)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l; \mu_0, \lambda, \Lambda),$$

lembrando que a derivada acima implica numa inserção de campo composto em momento e quase-momento nulo. Tomando agora $E = 2$ e $M = 0$, usando também as condições (4.233a) e (4.233d), podemos determinar o coeficiente que multiplica $\Gamma_R^{(E, M+1)}$, ou seja,

$$\mu \left(\frac{\partial \mu_0^2}{\partial \mu}\right)_{\lambda, \Lambda} \left(Z_\Phi^{(\tau)}\right)^{-1} = \left[2 - \hat{\gamma}_\Phi^{(\tau)}\right] \mu^2, \quad (4.238)$$

onde definimos para *NBC* e *DBC*

$$\hat{\gamma}_\Phi^{(\tau)} \equiv \gamma_\Phi^{(\tau)} \left[1 + \left(\frac{\sigma i}{\mu}\right)^2\right]. \quad (4.239)$$

Em termos das constantes de acoplamento u e u_0 adimensionalizadas através de $g = \mu^\epsilon u$ e $\lambda = \mu^\epsilon u_0$, podemos reescrever (4.237), com auxílio do resultado (4.238), no formato conhecido para as equações de Callan-Symanzik (ver (2.175))

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta^{(\tau)}(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_\Phi^{(\tau)}(u) + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau)}(u)\right] \Gamma_R^{(E, M)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l; \mu, u) = \\ = \mu^2 \left[2 - \hat{\gamma}_\Phi^{(\tau)}(u)\right] \Gamma_R^{(E, M+1)}(k_l, i_l, k'_l, i'_l, 0, 0; \mu, u). \quad (4.240)$$

Temos agora todas as funções de Wilson presentes na equação anterior descritas em termos de parâmetros adimensionais, a saber:

$$\beta^{(\tau)}(u) = -\epsilon \left(\frac{\partial \ln u_0^{(\tau)}}{\partial u} \right)^{-1}, \quad (4.241a)$$

$$\gamma_{\Phi}^{(\tau)}(u) = \beta^{(\tau)}(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi}^{(\tau)}}{\partial u}, \quad (4.241b)$$

$$\gamma_{\Phi^2}^{(\tau)}(u) = -\beta^{(\tau)}(u) \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2}^{(\tau)}}{\partial u}. \quad (4.241c)$$

Exceto pela dependência nas condições de contorno através do parâmetro τ , essas funções são muito similares às equações dadas em (2.149).

A única diferença entre (4.240) e a correspondente para o sistema infinito (2.175) é a presença da função $\hat{\gamma}_{\Phi}^{(\tau)}(u)$ que, de acordo com (4.239), é essencialmente uma versão reescalada de $\gamma_{\Phi}^{(\tau)}(u)$, como ocorre em *PBC* e *ABC* (ver (3.41)). No limite $L \rightarrow \infty$ ($\sigma \rightarrow 0$), recuperamos as equações de Callan-Symanzik do sistema infinito.

É importante lembrar que o mesmo argumento que foi utilizado em relação à expressão (3.42), para o sistema submetido a *PBC*, também é válido aqui, ou seja, quando consideramos os momentos externos no regime ultravioleta ($\frac{k_l}{\mu} \rightarrow \infty$), o lado direito da equação (4.240) também pode ser desprezado ordem a ordem na expansão diagramática. Logo, a teoria massiva será invariante por escala desde que a constante de acoplamento seja colocada no ponto fixo não trivial $u_{\infty}^{(\tau)}$, dependente agora das condições de contorno de Dirichlet ou Neumann e de L . Portanto, as soluções de (4.240) serão obtidas de forma análoga às aquelas para um sistema infinito e as leis de escala provenientes dessas soluções permitirão o cálculo dos expoentes críticos através das equações (2.159) e (2.172), pela utilização do ponto fixo $u_{\infty}^{(\tau)}$ associado ao regime ultravioleta.

4.7.2 Função β , ponto fixo e expoentes críticos na teoria massiva

Vamos agora calcular explicitamente os expoentes críticos para o nosso sistema na teoria massiva. Seguiremos de perto os passos realizados para o caso do sistema infinito descrito no capítulo 2, pois, em termos de equações simbólicas, existem poucas diferenças em relação ao nosso caso.

Vimos que as condições de normalização foram modificadas em relação às condições impostas em *PBC* para incluir as multiplicidades que surgem no formalismo. As quatro condições de normalização dadas em (4.233) são suficientes para determinarmos g (*constante de acoplamento renormalizada*), $Z_{\phi}^{(\tau)}$ e $Z_{\phi^2}^{(\tau)}$. É importante lembrar que apesar de continuarmos utilizando o símbolo μ para a massa, esta já está renormalizada e a equação (4.233a) é uma reafirmação da redefinição da massa.

Voltando às equações de Callan-Symanzik, já no limite ultravioleta (equação homogênea), vemos que as principais funções a serem calculadas são as funções de Wilson dadas em (4.241). Assim como no caso do sistema infinito é conveniente definir

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u) \equiv -\beta^{(\tau)}(u) \left(\frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}^{(\tau)}}{\partial u} \right), \quad (4.242)$$

onde $\bar{Z}_{\phi^2}^{(\tau)} \equiv Z_{\phi}^{(\tau)} Z_{\phi^2}^{(\tau)}$.

Inicialmente, vamos expandir a constante de acoplamento não renormalizada adimensional $u_0^{(\tau)}$, e as constantes de renormalização $Z_{\phi}^{(\tau)}$ e $\bar{Z}_{\phi^2}^{(\tau)}$ em termos da constante de acoplamento renormalizada adimensional u da seguinte forma

$$u_0^{(\tau)} = u(1 + a_1^{(\tau)}u + a_2^{(\tau)}u^2); \quad (4.243a)$$

$$Z_{\phi}^{(\tau)} = 1 + b_2^{(\tau)}u^2 + b_3^{(\tau)}u^3; \quad (4.243b)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2}^{(\tau)} = 1 + c_1^{(\tau)}u + c_2^{(\tau)}u^2. \quad (4.243c)$$

Não estamos usando o símbolo τ para u para que a notação não fique muito carregada, o que não acarretará nenhum problema no prosseguimento dos cálculos.

A partir de (4.233b), vemos que é necessário calcular

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k, i; \lambda, \mu) \right|_{k^2=0} = 1 - B_2^{(\tau)}u_0^2 + B_3^{(\tau)}u_0^3, \quad (4.244)$$

onde, comparando com (4.31), podemos escrever

$$B_2^{(\tau)} = \mu^{2\epsilon} \left(\frac{N+2}{18} \right) \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_3(k, i; \sigma, \mu) + 3D_3'(k, 0, i; \sigma, \mu) + 3\tau D_3'(k, i, 0; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}. \quad (4.245)$$

Utilizando a expressão (4.179), chegamos a

$$B_2^{(\tau)} = -\frac{N+2}{144\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) \right]. \quad (4.246)$$

Também temos que

$$B_3^{(\tau)} = \mu^{3\epsilon} \frac{(N+2)(N+8)}{108} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_5(k, i; \sigma, \mu) + D_5'(k, 0, i; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + \tau D_5'(k, i, 0; \sigma, \mu) + 4D_5''(k, i, 0; \sigma, \mu) + 4\tau D_5''(k, 0, i; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}. \quad (4.247)$$

De acordo com (4.181), ficamos com:

$$B_3^{(\tau)} = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \left\{ -\frac{1}{6\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2}\epsilon \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}. \quad (4.248)$$

Agora, para a função de 4 pontos não-renormalizada podemos escrever

$$\Gamma^{(4)}(k=0, i; \lambda, \sigma, \mu) = \sigma \mu^\epsilon [3u_0 - A_1^{(\tau)} u_0^2 + (A_2^{(1)(\tau)} + A_2^{(2)(\tau)}) u_0^3], \quad (4.249)$$

onde, comparando com (4.32), escrevemos

$$A_1^{(\tau)} = \mu^\epsilon \left(\frac{N+8}{6} \right) \left[I(k, 2i; \sigma, \mu) + 2I(k, 0; \sigma, \mu) + 2\tau I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 2\tau I'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + 4I'(k, i, i; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}, \quad (4.250)$$

Utilizando agora (4.175), encontramos

$$A_1^{(\tau)} = 3 \left\{ \frac{N+8}{6\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}, \quad (4.251)$$

onde podemos ver que a multiplicidade aparece explicitamente.

Utilizando (4.32), é possível mostrar que

$$A_2^{(1)(\tau)} = \mu^{2\epsilon} \left(\frac{N^2 + 6N + 20}{36} \right) \left[I^2(k, 2i; \sigma, \mu) + 2I^2(k, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 4\tau I(k, 0; \sigma, \mu) I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 4\tau I(k, 2i; \sigma, \mu) I'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 4I(k, 0; \sigma, \mu) I'(k, i, i; \sigma, \mu) + 4I(k, 2i; \sigma, \mu) I'(k, i, i; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}. \quad (4.252)$$

Do cálculo das integrais acima e da construção exibida em (4.177), obtemos

$$A_2^{(1)(\tau)} = 3 \left(\frac{N^2 + 6N + 20}{36} \right) \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}^2. \quad (4.253)$$

Da equação (4.32), podemos concluir ainda que

$$A_2^{(2)(\tau)} = \mu^{2\epsilon} \frac{5N+22}{9} \left[I_4(k, 2i; \sigma, \mu) + 2I_4(k, 0; \sigma, \mu) + 2\tau I_4'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 2\tau I_4'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + 4I_4'(k, i, i; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}, \quad (4.254)$$

Pela utilização de (4.178), encontramos

$$A_2^{(2)(\tau)} = 3 \left\{ \frac{5N+22}{18\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}. \quad (4.255)$$

Já para a função de vértice com inserção de campo composto, escrevemos a seguinte expansão simbólica

$$\bar{\Gamma}^{(2,1)}(k=0, i, j; \lambda, \sigma, \mu) = \frac{3}{2}\tau - C_1^{(\tau)}u_0 + (C_2^{(1)(\tau)} + C_2^{(2)(\tau)})u_0^2, \quad (4.256)$$

Comparando a última equação com (4.33), obtemos

$$C_1^{(\tau)} = \frac{\tau}{2}\mu^\epsilon \left(\frac{N+2}{6} \right) \left[I(k, 2i; \sigma, \mu) + 2I(k, 0; \sigma, \mu) + 2\tau I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 2\tau I'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + 4I'(k, i, i; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}, \quad (4.257)$$

que com o uso de (4.182), reduz-se a

$$C_1^{(\tau)} = \frac{3}{2}\tau \left\{ \frac{N+2}{6\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}, \quad (4.258)$$

Além disso, temos que

$$C_2^{(1)(\tau)} = \frac{\tau}{2}\mu^{2\epsilon} \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \left[I^2(k, 2i; \sigma, \mu) + 2I^2(k, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 4\tau I(k, 0; \sigma, \mu)I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 4\tau I(k, 2i; \sigma, \mu)I'(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 4I(k, 0; \sigma, \mu)I'(k, i, i; \sigma, \mu) + 4I(k, 2i; \sigma, \mu)I'(k, i, i; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}. \quad (4.259)$$

Empregando agora (4.183), concluimos que

$$C_2^{(1)(\tau)} = \frac{3}{2}\tau \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}^2. \quad (4.260)$$

Finalmente, o último coeficiente de $\Gamma^{(2,1)}$ pode ser escrito na forma

$$C_2^{(2)(\tau)} = \frac{\tau}{2}\mu^{2\epsilon} \frac{N+2}{6} \left[I_4(k, 2i; \sigma, \mu) + 2I_4(k, 0; \sigma, \mu) + 2\tau I'_4(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 2\tau I'_4(k, 2i, 0; \sigma, \mu) + 4I'_4(k, i, i; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}. \quad (4.261)$$

Fazendo uso de (4.184), resulta na seguinte expressão

$$C_2^{(2)(\tau)} = \frac{3}{2}\tau \left\{ \frac{N+2}{12\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}. \quad (4.262)$$

Note que os coeficientes A e C carregam explicitamente a multiplicidade introduzida pela troca da representação das funções base de senos e cossenos por exponenciais para condições de contorno de Neumann e Dirichlet.

Utilizando as condições de normalização e lembrando que, de um modo geral, temos $\Gamma_R^{(E,L)} = Z_\phi^{\frac{E}{2}} Z_{\phi^2}^L \Gamma^{(E,L)}$, chegamos às seguintes expressões para os coeficientes em (4.243)

$$a_1^{(\tau)} = \frac{A_1^{(\tau)}}{3}; \quad (4.263a)$$

$$a_2^{(\tau)} = 2 \left(\frac{A_1^{(\tau)}}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} (A_2^{(1)(\tau)} + A_2^{(2)(\tau)}) - 2b_2^{(\tau)}; \quad (4.263b)$$

$$b_2^{(\tau)} = B_2^{(\tau)}; \quad (4.263c)$$

$$b_3^{(\tau)} = 2B_2^{(\tau)}a_1^{(\tau)} - B_3^{(\tau)}; \quad (4.263d)$$

$$c_1^{(\tau)} = \frac{2}{3\tau} C_1^{(\tau)} \quad (4.263e)$$

$$c_2^{(\tau)} = \frac{2}{3\tau} (a_1^{(\tau)} + c_1^{(\tau)}) C_1^{(\tau)} - \frac{2}{3\tau} (C_2^{(1)(\tau)} + C_2^{(2)(\tau)}). \quad (4.263f)$$

Repare que a maioria das expressões simbólicas acima **não** correspondem perfeitamente ao que é encontrado em PBC ou ABC . Isto é devido à redefinição das condições de normalização para absorver as multiplicidades que surgem no desenvolvimento da técnica. Ressaltamos porém que essa é apenas uma aparente discordância pois, a partir das expressões acima encontramos

$$a_1^{(\tau)} = \frac{N+8}{6\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right]; \quad (4.264)$$

$$a_2^{(\tau)} = \left(\frac{N+8}{6\epsilon} \right)^2 - \frac{(N^2 + 21N + 86)}{36\epsilon} + \frac{N+2}{72\epsilon} + \frac{(N^2 + 16N + 64)}{36\epsilon} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r), \quad (4.265)$$

onde descartamos os termos regulares que ainda persistiam em $a_2^{(\tau)}$.

Temos agora

$$b_2^{(\tau)} = -\frac{N+2}{144\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) \right]; \quad (4.266)$$

$$b_3^{(\tau)} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon^2} \left[1 - \frac{7}{4}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right]. \quad (4.267)$$

Observe que em $b_3^{(\tau)}$ o termo $\tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r)$ já foi cancelado.

Temos ainda

$$c_1^{(\tau)} = \frac{N+2}{6\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right]; \quad (4.268)$$

$$c_2^{(\tau)} = \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon^2} - \frac{(N+2)(2N+13)}{72\epsilon} + \frac{(N^2+7N+10)}{36\epsilon} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r). \quad (4.269)$$

De fato, todos os coeficientes mantêm uma estrutura inteiramente análoga aos seus correspondentes em condições de contorno periódicas ou antiperiódicas. A diferença está nas expressões explícitas dos termos de correção de tamanho finito, isto é, $\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r)$ e $\tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r)$, os quais são dados por

$$\begin{aligned} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) = \frac{1}{3} \left\{ 2r\tau + \frac{4r\tau}{1 + \sqrt{4r^2i^2 + 1}} + \frac{4r}{\sqrt{r^2i^2 + 1}} + 2f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1}) + \right. \\ \left. + F_0^{(\tau'=0)}(0, 2i; r) - 2 \left[\frac{\sqrt{1 + r^2i^2}}{ri} \operatorname{arcsinh}(ri) - 1 \right] \right\}; \quad (4.270) \end{aligned}$$

$$\tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) \equiv W_0^{(\tau'=0)}(i; r) + 6r \left\{ [\mathcal{P}(0, i; r) + \tau \mathcal{P}(i, 0; r)] - \frac{2}{r} [\mathcal{L}'_0(0, i; r) + \tau \mathcal{L}'_0(i, 0; r)] \right\}, \quad (4.271)$$

onde temos $\tau = 1$ para NBC e $\tau = -1$ para DBC .

Queremos calcular agora as funções de Wilson. Lembrando que elas estão relacionadas a $u_0^{(\tau)}$, $Z_\phi^{(\tau)}$ e a $Z_{\phi^2}^{(\tau)}$ e que estes estão relacionados a $u^{(\tau)}$ e aos coeficientes dados acima, podemos escrever

$$\beta^{(\tau)}(u) = -\epsilon u \{ 1 - a_1^{(\tau)} u + 2[(a_1^{(\tau)})^2 - a_2^{(\tau)}] u^2 \}; \quad (4.272a)$$

$$\gamma_\phi^{(\tau)}(u) = -\epsilon u [2b_2^{(\tau)} u + (3b_3^{(\tau)} - 2b_2^{(\tau)} a_1^{(\tau)}) u^2]; \quad (4.272b)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u) = \epsilon u \{ c_1^{(\tau)} + [2c_2^{(\tau)} - (c_1^{(\tau)})^2 - a_1^{(\tau)} c_1^{(\tau)}] u \}. \quad (4.272c)$$

Assim, substituindo os coeficientes encontrados chegamos a

$$\beta^{(\tau)}(u) = -\epsilon u + \frac{N+8}{6} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] u^2 - \frac{(3N+14)}{12} u^3. \quad (4.273)$$

$$\gamma_\phi^{(\tau)}(u) = \frac{(N+2)}{72} u^2 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) - \frac{N+8}{6} \left[1 + \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r) - \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] u \right\}. \quad (4.274)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u) = \frac{N+2}{6} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] u - \frac{(N+2)}{12} u^2. \quad (4.275)$$

Note que todas as funções de Wilson são regulares para $\epsilon \rightarrow 0$, embora ainda dependam dos termos de correção de tamanho finito.

A condição para encontrarmos o ponto fixo da teoria é dada por: $\beta^{(\tau)}(u_\infty^{(\tau)}) = 0$, onde $u_\infty^{(\tau)}$ é o ponto fixo na teoria massiva. Assim, o ponto fixo não trivial no regime ultravioleta é dado por

$$u_\infty^{(\tau)} = \frac{6\epsilon}{N+8} \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r) \right] \right\}. \quad (4.276)$$

Note que o ponto fixo ainda exibe uma dependência na condição de contorno.

O expoente crítico η denominado de *dimensão anômala* pode ser calculado através da expressão

$$\gamma_\phi^{(\tau)}(u_\infty^{(\tau)}) = \eta = \frac{(N+2)}{2(N+8)^2} \epsilon^2 \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}, \quad (4.277)$$

onde observamos a completa independência das condições de contorno. A expressão acima é a mesma encontrada para o sistema totalmente infinito em d dimensões, assim como o mesmo encontrado em PBC e ABC , o que reafirma o caráter universal desse expoente crítico.

Ainda temos que:

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u_\infty^{(\tau)}) = \frac{(N+2)}{(N+8)} \epsilon \left[1 + \frac{6N+18}{(N+8)^2} \epsilon \right]. \quad (4.278)$$

Note que $\bar{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u_\infty^{(\tau)})$ já não depende do termo de correção que surge da condição de contorno de Dirichlet ou de Neumann. Podemos então encontrar o expoente crítico do comprimento de correlação (ν) utilizando a seguinte relação de escala

$$\nu^{-1} = 2 - \bar{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u_\infty^{(\tau)}) - \eta. \quad (4.279)$$

Sendo assim, temos

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3} \epsilon^2. \quad (4.280)$$

O expoente crítico acima também é idêntico ao expoente encontrado para o sistema totalmente infinito em d dimensões e em PBC e ABC , logo, pelas relações de escala entre os expoentes, todos os outros também serão os mesmos, ou seja, totalmente independentes das condições de contorno impostas as placas delimitadoras do sistema.

4.8 Renormalização na teoria sem massa com NBC e DBC

Nesta seção, abordaremos o mesmo tipo de sistema com geometria de superfícies planas e paralelas separadas por uma distância L com o campo nas superfícies submetido a condição de Neumann ou de Dirichlet. Entretanto, tomaremos agora a massa do propagador como sendo nula. Com $\mu = 0$, estamos exatamente no ponto crítico e, conseqüentemente, o comprimento de correlação é infinito ($\xi \sim \mu^{-1}$). Como é próprio da teoria sem massa, dois tipos de divergências aparecem. O primeiro tipo está ligado ao regime ultravioleta. Tais divergências já foram abordadas na seção anterior e, como vimos, podem ser removidas através da renormalização. O outro tipo de divergência é de caráter físico e está associado ao regime infravermelho. Dessa forma, as condições de normalização na teoria sem massa não devem ser tomadas em momento externo nulo. Ressaltamos que isto não impede que os *quase-momentos* externos sejam nulos. A restrição para os quase-momentos externos está associada à condição de contorno e não ao regime infravermelho, o que é confirmado por SL em [41], onde todas as condições de normalização são tomadas em quase-momento externo nulo para condições de contorno periódicas e antiperiódicas.

De acordo com a prescrição já realizada para o sistema infinito (Capítulo 2), com a massa nula, uma nova escala de momento é introduzida (κ) e devemos calcular as funções no ponto simétrico definido em (2.145). Porém, ao contrário do sistema infinito e diferentemente de PBC ou ABC , as condições de normalização são modificadas para

$$\Gamma_R^{(2)}(k = 0, i; g, \mu = 0) = \sigma^2 i^2; \quad (4.281a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, i; g) \right|_{k^2 = \kappa^2} = 1; \quad (4.281b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k = \kappa, i; g) = 3\sigma g; \quad (4.281c)$$

$$\bar{\Gamma}_R^{(2,1)}(k = \kappa, i, j; g) = \frac{3}{2}\tau, \quad (4.281d)$$

onde, similarmente ao caso massivo, definimos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_R^{(2,1)}(k, i, k', j; g) \equiv & \frac{1}{2} \left[\Gamma_R^{(2,1)}(k, i, k', 2i; g) + \Gamma_R^{(2,1)}(k, i, k', -2i; g) \right] + \\ & + \tau \Gamma_R^{(2,1)}(k, i, k', 0; g). \end{aligned} \quad (4.282)$$

Para cada uma das funções $\Gamma_R^{(2,1)}$ descritas acima, temos

$$\Gamma_R^{(2,1)}(\kappa, i, 2\kappa, 2i; g) = \Gamma_R^{(2,1)}(\kappa, i, -2\kappa, -2i; g) = \frac{\tau}{2}; \quad (4.283a)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(\kappa, i, 0, 0; g) = 1. \quad (4.283b)$$

As características básicas que diferenciavam a teoria sem massa da teoria massiva no sistema infinito, com relação às suas constantes de renormalização, continuam válidas; mesmo com a imposição de condições de contorno ao sistema. Como resultado, assim como ocorreu em *PBC* e *ABC*, teremos uma pequena modificação na equação (2.130), isto é,

$$\Gamma_R^{(E,M)}(k_l, i_l, p_{l'}, i_{l'}; \kappa, g) = (Z_\Phi^{(\tau)})^{E/2} (Z_{\Phi^2}^{(\tau)})^M \Gamma^{(E,M)}(k_l, i_l, p_{l'}, i_{l'}; \lambda, \Lambda), \quad (4.284)$$

onde usamos a mesma notação empregada na equação (3.36).

As constantes de renormalização podem ser calculadas seguindo passos semelhantes aos da teoria massiva. Porém, as constantes λ , $Z_\Phi^{(\tau)}$, $Z_{\Phi^2}^{(\tau)}$ dependem agora de κ e não de μ . As soluções das integrais de Feynman que devem ser empregadas são aquelas calculadas com $\mu = 0$ e com os momentos externos no ponto simétrico. Um fato interessante nesse formalismo em relação às soluções das integrais de Feynman, é que apenas as singularidades subdominantes e termos regulares em ϵ são diferentes daqueles obtidos com $\mu \neq 0$.

4.8.1 Equações do grupo de renormalização com *NBC* e *DBC*

O efeito da aplicação de condições de contorno de Neumann ou Dirichlet aos campos nas superfícies confinantes não altera o fato de que as condições de normalização são arbitrárias. Por conseguinte, a única restrição para tais condições é tornar a equação (4.284) finita. Assim, podemos variar κ deixando λ e Λ fixos. Considerando variações infinitesimais em κ , obtemos equações diferenciais para as funções de vértice que conduzem à descrição do comportamento dos observáveis físicos no ponto crítico. Lembramos que o quase-momento externo i também é fixo e podemos associar qualquer valor inteiro positivo para ele.

Derivando a equação (4.284) em relação a $\ln \kappa$ para λ e Λ fixos, após algumas manipulações algébricas, chegamos às equações do grupo de renormalização para o nosso caso

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta^{(\tau)}(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E}{2} \gamma_\Phi^{(\tau)}(u) + M \gamma_{\Phi^2}^{(\tau)}(u) \right] \Gamma_R^{(E,M)}(k_l, i_l, p_{l'}, i_{l'}; u, \kappa) = 0, \quad (4.285)$$

onde as únicas modificações com relação ao sistema infinito aparecem na dependência em τ e L das funções de Wilson escritas de forma análoga às aquelas dadas na equação (4.241) para o caso massivo.

4.8.2 Função β , ponto fixo e expoentes críticos na teoria sem massa

De acordo com o que foi visto, as expressões simbólicas para as funções de Wilson continuarão as mesmas se utilizarmos as equações em sua forma adimensional, ou seja, através da adimensionalização da constante de acoplamento. Além disso, no caso sem massa devemos fazer $\mu = 0$ e $k^2 = \kappa^2$. Assim, o que de fato mudará serão as expressões explícitas, já que as

soluções das integrais sem massa são diferentes das massivas. Portanto, as expansões dadas em (4.243) continuam válidas nos permitindo escrever

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k, i; \lambda) \right|_{k^2=\kappa^2} = 1 - B_2^{(\tau)} u_0^2 + B_3^{(\tau)} u_0^3, \quad (4.286)$$

onde,

$$B_2^{(\tau)} = \kappa^{2\epsilon} \frac{N+2}{18} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_3(k, i; \sigma) + 3D'_3(k, 0, i; \sigma) + 3\tau D'_3(k, i, 0; \sigma) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (4.287)$$

$$B_3^{(\tau)} = \kappa^{3\epsilon} \frac{(N+2)(N+8)}{108} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_5(k, i; \sigma) + D'_5(k, 0, i; \sigma) + \right. \\ \left. + \tau D'_5(k, i, 0; \sigma) + 4D''_5(k, i, 0; \sigma) + 4\tau D''_5(k, 0, i; \sigma) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (4.288)$$

Utilizando (4.190) e (4.192) obtemos, respectivamente

$$B_2^{(\tau)} = -\frac{N+2}{144\epsilon} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon \overline{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right]. \quad (4.289)$$

$$B_3^{(\tau)} = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \left\{ -\frac{1}{6\epsilon^2} \left[1 + 2\epsilon - 3\epsilon \overline{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}. \quad (4.290)$$

Agora, para a função de 4 pontos não-renormalizada podemos escrever

$$\Gamma^{(4)}(k = \kappa, i; \lambda, \sigma) = \sigma \kappa^\epsilon [3u_0 - A_1^{(\tau)} u_0^2 + (A_2^{(1)(\tau)} + A_2^{(2)(\tau)}) u_0^3], \quad (4.291)$$

onde,

$$A_1^{(\tau)} = \kappa^\epsilon \frac{N+8}{6} \left[I(k, 2i; \sigma) + 2I(k, 0; \sigma) + 2\tau I'(k, 0, 0; \sigma) + \right. \\ \left. + 2\tau I'(k, 2i, 0; \sigma) + 4I'(k, i, i; \sigma) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (4.292)$$

$$A_2^{(1)(\tau)} = \kappa^{2\epsilon} \frac{N^2 + 6N + 20}{36} \left[I^2(k, 2i; \sigma) + 2I^2(k, 0; \sigma) + \right. \\ \left. + 4\tau I(k, 0; \sigma) I'(k, 0, 0; \sigma) + 4\tau I(k, 2i; \sigma) I'(k, 2i, 0; \sigma) + \right. \\ \left. + 4I(k, 0; \sigma) I'(k, i, i; \sigma) + 4I(k, 2i; \sigma) I'(k, i, i; \sigma) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (4.293)$$

$$A_2^{(2)(\tau)} = \kappa^{2\epsilon} \frac{5N+22}{9} \left[I_4(k, 2i; \sigma) + 2I_4(k, 0; \sigma) + 2\tau I'_4(k, 0, 0; \sigma) + \right. \\ \left. + 2\tau I'_4(k, 2i, 0; \sigma) + 4I'_4(k, i, i; \sigma) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (4.294)$$

A partir de (4.186), (4.188) e (4.189), chegamos respectivamente aos resultados simplificados abaixo

$$A_1^{(\tau)} = 3 \left\{ \frac{N+8}{6\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}, \quad (4.295)$$

$$A_2^{(1)(\tau)} = 3 \left(\frac{N^2 + 6N + 20}{36} \right) \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}^2. \quad (4.296)$$

$$A_2^{(2)(\tau)} = 3 \left\{ \frac{5N+22}{18\epsilon^2} \left[1 + \frac{3}{2}\epsilon + \epsilon \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}. \quad (4.297)$$

Já para a função de vértice com inserção de campo composto no caso sem massa temos

$$\bar{\Gamma}^{(2,1)}(k = \kappa, i, j; \lambda, \sigma) = \frac{3}{2}\tau - C_1^{(\tau)}u_0 + (C_2^{(1)(\tau)} + C_2^{(2)(\tau)})u_0^2, \quad (4.298)$$

onde,

$$C_1^{(\tau)} = \frac{\tau}{2}\kappa^\epsilon \frac{N+2}{6} \left[I(k, 2i; \sigma) + 2I(k, 0; \sigma, \mu) + 2\tau I'(k, 0, 0; \sigma) + \right. \\ \left. + 2\tau I'(k, 2i, 0; \sigma) + 4I'(k, i, i; \sigma) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}, \quad (4.299)$$

$$C_2^{(1)(\tau)} = \frac{\tau}{2}\kappa^{2\epsilon} \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \left[I^2(k, 2i; \sigma) + 2I^2(k, 0; \sigma) + \right. \\ + 4\tau I(k, 0; \sigma)I'(k, 0, 0; \sigma) + 4\tau I(k, 2i; \sigma)I'(k, 2i, 0; \sigma) + \\ \left. + 4I(k, 0; \sigma)I'(k, i, i; \sigma) + 4I(k, 2i; \sigma)I'(k, i, i; \sigma) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (4.300)$$

$$C_2^{(2)(\tau)} = \frac{\tau}{2}\kappa^{2\epsilon} \frac{N+2}{6} \left[I_4(k, 2i; \sigma) + 2I_4(k, 0; \sigma) + 2\tau I'_4(k, 0, 0; \sigma) + \right. \\ \left. + 2\tau I'_4(k, 2i, 0; \sigma) + 4I'_4(k, i, i; \sigma) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (4.301)$$

De acordo com (4.193a), (4.193c) e (4.193c), encontramos, respectivamente

$$C_1^{(\tau)} = \frac{3}{2}\tau \left\{ \frac{N+2}{6\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}, \quad (4.302)$$

$$C_2^{(1)(\tau)} = \frac{3}{2}\tau \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}^2. \quad (4.303)$$

$$C_2^{(2)(\tau)} = \frac{3}{2}\tau \left\{ \frac{N+2}{12\epsilon^2} \left[1 + \frac{3}{2}\epsilon + \epsilon \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}. \quad (4.304)$$

É fácil ver que as multiplicidades em todas os diagramas são mesmas observadas no caso massivo.

Podemos agora substituir as expressões acima nas equações dadas em (4.263), para obter com isso os seguintes coeficientes

$$a_1^{(\tau)} = \frac{N+8}{6\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right]; \quad (4.305)$$

$$a_2^{(\tau)} = \left(\frac{N+8}{6\epsilon} \right)^2 + \frac{(2N^2 + 23N + 86)}{72\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{N+8}{6} \right)^2 \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}). \quad (4.306)$$

$$b_2^{(\tau)} = -\frac{N+2}{144\epsilon} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon \bar{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right]; \quad (4.307)$$

$$b_3^{(\tau)} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon^2} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right]. \quad (4.308)$$

Observe que em $b_3^{(\tau)}$ o termo $\bar{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r})$ já foi cancelado. Agora,

$$c_1^{(\tau)} = \frac{N+2}{6\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right]; \quad (4.309)$$

$$c_2^{(\tau)} = \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon^2} + \frac{(2N^2 + 11N + 14)}{72\epsilon} + \frac{(N^2 + 7N + 10)}{36\epsilon} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}). \quad (4.310)$$

Podemos observar que, assim como ocorreu na teoria massiva, todos os coeficientes são análogos aos seus correspondentes em PBC ou ABC , diferindo pela definição dos termos de correção de tamanho finito, os quais são dados aqui por

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) = \frac{1}{3} \left\{ 2\bar{r}\pi\tau + 8\bar{r} \arctan \left(\frac{1}{2\bar{r}i} \right) + 4\tau\bar{r} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{4\bar{r}^2 i^2 + 1}} \right) + 2F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \bar{r}) + \right. \\ \left. + F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 2i; \bar{r}) - \ln[4\bar{r}^2 i^2 + 1] \right\}. \end{aligned} \quad (4.311)$$

$$\begin{aligned} \overline{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) - \frac{3}{2}\bar{r}\pi \{ [\overline{\mathcal{P}}(0, i; \bar{r}) + \tau \overline{\mathcal{P}}(i, 0; \bar{r})] + \\ - \frac{4}{\bar{r}\pi} [\mathcal{M}'_0(\kappa, 0, i; \bar{r}) + \tau \mathcal{M}'_0(\kappa, i, 0; \bar{r})] \}. \end{aligned} \quad (4.312)$$

Utilizando os coeficientes acima podemos escrever as funções de Wilson na teoria sem massa, ou seja,

$$\beta^{(\tau)}(u) = -\epsilon u + \frac{N+8}{6} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \overline{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] u^2 - \frac{(3N+14)}{12} u^3. \quad (4.313)$$

$$\gamma_\phi^{(\tau)}(u) = \frac{(N+2)}{72} u^2 \left\{ 1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon \overline{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) - \frac{N+8}{12} \left[1 - 4\overline{W}_0^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) - 2\overline{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] u \right\}. \quad (4.314)$$

$$\overline{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u) = \frac{N+2}{6} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \overline{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] u - \frac{(N+2)}{12} u^2. \quad (4.315)$$

Note que, assim como ocorreu na teoria massiva, todas as funções de Wilson são regulares para $\epsilon \rightarrow 0$, embora ainda dependam dos termos de correção de tamanho finito.

A condição para encontrarmos o ponto fixo nesse caso é dada por: $\beta^{(\tau)}(u^{*(\tau)}) = 0$, onde $u^{*(\tau)}$ é o ponto fixo da teoria não massiva. Assim, aplicando a condição acima, encontramos que o ponto fixo não trivial estável no regime infravermelho em NBC e DBC é dado por

$$u^{*(\tau)} = \frac{6\epsilon}{N+8} \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \overline{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(\kappa, i; \bar{r}) \right] \right\}. \quad (4.316)$$

Note que o ponto fixo ainda exibe uma dependência da condição de contorno.

O expoente crítico η na teoria sem massa pode ser calculado através da relação

$$\gamma_\phi^{(\tau)}(u^{*(\tau)}) = \eta = \frac{(N+2)}{2(N+8)^2} \epsilon^2 \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}. \quad (4.317)$$

Resultado idêntico àquele do sistema infinito.

A função $\overline{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u^{*(\tau)})$ pode ser expandida em ϵ , o que fornece o seguinte resultado

$$\overline{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u^{*(\tau)}) = \frac{(N+2)}{(N+8)} \epsilon \left[1 + \frac{6N+18}{(N+8)^2} \epsilon \right], \quad (4.318)$$

o qual é idêntico ao caso massivo. Podemos então encontrar o expoente crítico do comprimento de correlação (ν) utilizando a seguinte relação de escala

$$\nu^{-1} = 2 - \overline{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u^{*(\tau)}) - \eta, \quad (4.319)$$

resultando na expressão

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)}\epsilon + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3}\epsilon^2. \quad (4.320)$$

Note que todos os expoentes são idênticos àqueles da teoria massiva, e concordam com os resultados obtidos para o sistema de tamanho infinito. É importante perceber que todos os expoentes são independentes das condições de contorno.

Através dos resultados acima, vemos que a teoria sem massa é completamente equivalente à teoria massiva também para um sistema restrito a condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet. Não temos motivos para inferir que em *loops* mais altos essa equivalência não ocorra. Além disso, ambas as formulações nos levam aos mesmos expoentes críticos com a mesma classe de universalidade (d, N) do sistema infinito, assim como ocorre para *PBC* ou *ABC*.

Outro ponto importante refere-se à variável de escala $\frac{L}{\xi}$. Devido à equivalência que acabamos de constatar, vemos que, de fato, a região que mencionamos no capítulo anterior, definida por $\frac{L}{\xi} \leq 1$, não deve ser considerada inacessível para o método perturbativo. Vimos que, mesmo na temperatura crítica (teoria sem massa) o escalamento de sistemas com uma geometria de placas planas e paralelas, quando $\frac{L}{\xi} \rightarrow 0$ para L finito, é consistente e bem comportado.

Capítulo 5

Formalismo com quase-momentos externos nulos (o modo zero em NBC)

5.1 Introdução

Através do formalismo unificado para *NBC* e *DBC* apresentado no capítulo anterior, fomos capazes, não só de encontrar os expoentes críticos para o sistema abordado, mas também de estabelecer a equivalência entre a teoria massiva e não-massiva. Porém, para construí-lo, deixamos de lado o modo zero referente à imposição de que todos os quase-momentos externos sejam iguais a zero. Cabe agora, por completeza, aplicar tal restrição, que só dá resultados diferentes de zero para a condição de contorno de Neumann ($\tau = 1$), e assim analisar quais são as suas implicações, principalmente com respeito aos limites assintóticos do termo de correção do tamanho finito.

Começemos o tratamento do modo zero analisando a função base para *NBC*, isto é:

$$u_j^{(\tau=1)}(z) = D_j \cos\left(\frac{\pi}{L} j z\right), \quad (5.1)$$

onde $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. Assim, para o modo zero, vemos que:

$$u_0^{(\tau=1)}(z) = D_0. \quad (5.2)$$

Logo, um valor “plausível” para D_0 pode ser encontrado impondo a condição de ortonormalidade (4.7), ou seja:

$$\int_0^L dz |u_0^{(\tau=1)}(z)|^2 = 1, \quad (5.3)$$

o que nos dá: $D_0 = \sqrt{\frac{1}{L}}$. Enquanto que, para $j \neq 0$, como visto anteriormente, temos:

$$u_j^{(\tau=1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{L} j z\right). \quad (5.4)$$

Com respeito à constante D_0 , vale ressaltar que o valor encontrado pela aplicação da condição de ortonormalidade não tem relevância física, pois nenhuma interpretação de caráter probabilístico relacionada a partículas se faz necessária nesse contexto. Sendo assim, qualquer outro valor mais conveniente pode ser adotado para D_0 , o que equivalerá apenas a uma translação da função constante $u_0^{(\tau=1)}(z)$. Redefiniremos, portanto, o modo zero por:

$$u_0^{(\tau=1)}(z) = D_0 \equiv \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (5.5)$$

Note que a escolha acima é conveniente pois, ao fazermos agora $j = 0$ em $u_j^{(\tau=1)}(z)$, recuperamos o valor redefinido para o modo zero. Dessa forma podemos escrever:

$$u_j^{(\tau=1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{L} j z\right); \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

Portanto, adotado esse novo valor para $u_0^{(\tau=1)}(z)$, todas as construções feitas anteriormente são agora válidas para esse caso específico. Logo, podemos aplicar diretamente o valor zero para qualquer índice dos quase-momentos externos nos tensores dados em (4.13) e (4.15).

Lembrando agora que:

$$S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau=1)} = \frac{1}{2L} \sum_{\substack{\alpha_1 = \pm 1 \\ \alpha_2 = \pm 1 \\ \beta = \pm 1}} \delta(i_{\alpha_1} + \beta j_{\alpha_2}), \quad (5.7)$$

onde: $i_{\pm} = i_1 \pm i_2$ e, $j_{\pm} = i_3 \pm i_4$. Ao fazermos um dos índices da expressão acima igual a zero, obtemos:

$$S_{0, i_1, i_2, i_3}^{(\tau=1)} = \frac{1}{L} [\delta(i_1 + i_2 + i_3) + \delta(i_1 - i_2 + i_3) + \delta(i_1 + i_2 - i_3) + \delta(i_1 - i_2 - i_3)]. \quad (5.8)$$

Note a diferença entre a constante ($\frac{1}{L}$) na expressão acima em relação à equação dada em (4.28).

Temos também que:

$$S_{0,0,i_1,i_2}^{(\tau=1)} = \frac{2}{L} [\delta(i_1 + i_2) + \delta(i_1 - i_2)], \quad (5.9)$$

$$S_{0,0,0,0}^{(\tau=1)} = \frac{4}{L}, \quad S_{0,0,0,i_1}^{(\tau=1)} = 0 \text{ para } i_1 \in Z_+^*. \quad (5.10)$$

É importante observar que, embora as expressões com resultados não nulos tenham mudado por um fator constante, elas mantiveram a mesma dependência em L , assim como a sua estrutura com relação aos deltas, comprovando que podemos alterar o valor de $u_0^{(\tau=1)}(z)$ sem perder a consistência física do problema. Portanto, de acordo com os resultados acima, podemos utilizar o formalismo já construído para os quase-momentos externos diferentes de zero também para o

caso onde todos os quase-momentos externos são tomados iguais a zero. A diferença principal é que o valor da multiplicidade será alterado devido à redefinição de $u_0^{(\tau=1)}(z)$, mas, como mostrado no capítulo anterior, a multiplicidade não é dotada de significado físico, sendo possível absorvê-la nas condições de normalização sem maiores dificuldades.

Outro ponto importante refere-se ao tensor $S_{i_1, i_2}^{(\tau=1)}$, que, de uma forma mais geral, pode ser escrito como:

$$S_{i_1, i_2}^{(\tau=1)} = \delta(i_1 - i_2) + \delta(i_1 + i_2). \quad (5.11)$$

De fato, quando tratamos os quase-momentos diferentes de zero, utilizamos simplesmente $S_{i_1, i_2}^{(\tau=1)} = \delta(i_1 - i_2)$, pois naquele caso a outra possibilidade era sempre nula. Agora, para os quase-momentos externos iguais a zero, as duas possibilidades indicadas em (5.11) são consistentes, já que, nessa construção, não especificamos o valor dos quase-momentos, incluindo assim o caso $i_1 = i_2 = 0$ como possibilidade. Frisamos porém que, dentro do formalismo abordado no capítulo anterior, todas as possibilidades de “fluxo” de quase-momentos já são contadas desde o princípio, sendo assim, a possibilidade inserida acima, especificamente no tensor de dois índices, já está inserida nos tensores de 4 índices ao construirmos os diagramas naquele contexto (ver (4.29), (4.35) e (5.9)). A única ressalva é com relação ao primeiro termo da função de vértice de 2 pontos que, por não possuir vértice de interação, a segunda possibilidade referente ao modo zero ainda não está incluída na contagem. Então, para que o formalismo seja consistente também nesse caso, devemos escrever:

$$S_{i_1, i_2}^{(\tau=1)}(k^2 + \sigma^2 i^2 + \mu^2) = [\delta(i_1 - i_2) + \delta(i_1 + i_2)](k^2 + \sigma^2 i^2 + \mu^2), \quad (5.12)$$

onde $\sigma = \frac{\pi}{L}$. Para $i_1 = i_2 = 0$ (*modo zero*), obtemos:

$$S_{i_1, i_2}^{(\tau=1)}(k^2 + \sigma^2 i^2 + \mu^2) = 2(k^2 + \mu^2). \quad (5.13)$$

A partir de (5.13) vemos que a multiplicidade que surge para a função de 2 pontos em 0 *loop* é dada pelo fator multiplicativo 2. Lembramos que na construção do formalismo unificado (*quase-momentos externos diferentes de zero*) não foi necessário alterar a condição de normalização para a derivada da função de 2 pontos. Porém, agora, assim como em (5.13), deve aparecer naturalmente um fator global de 2 em todos os diagramas da função de vértice de 2 pontos, que é a multiplicidade referente a $S_{i_1, i_2}^{(\tau=1)}$ para o modo zero, ao aplicarmos $i_1 = i_2 = 0$. Sendo assim, a condição de normalização para a derivada da função de 2 pontos também sofrerá alteração para absorver essa multiplicidade.

Levando em consideração a expressão dada em (4.53) com $\tau = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{N+2}{18} \lambda^2 \left[\delta(i_-) D_3(k, i_1; \sigma, \mu) + 3D'_3 \left(k, \frac{i_+}{2}, \frac{i_-}{2}; \sigma, \mu \right) + \right. \\ \left. + \delta(i_+) D_3(k, i_1; \sigma, \mu) + 3D'_3 \left(k, \frac{i_-}{2}, \frac{i_+}{2}; \sigma, \mu \right) \right]. \quad (5.14) \end{aligned}$$

Podemos ver que as duas primeiras parcelas na expressão acima estão relacionadas com $\delta(i_1 - i_2)$ e as duas últimas com $\delta(i_1 + i_2)$, o que gerará a multiplicidade correta ao fazermos $i_1 = i_2 = 0$. Desse modo, chegamos a:

$$\text{---} \circ \text{---} = 2 \left(\frac{N+2}{18} \right) \lambda^2 [D_3(k, 0; \sigma, \mu) + 3D'_3(k, 0, 0; \sigma, \mu)]. \quad (5.15)$$

Ainda, para a função de 2 pontos em 3 *loops*, temos que:

$$\begin{aligned} \text{---} \circ \text{---} = & \frac{(N+2)(N+8)}{108} \frac{\lambda^3}{2} \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \alpha_2=\pm 1}} [\delta(\alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2) D_5(k, \alpha_1 i_1; \sigma, \mu) + \\ & + D'_5 \left(k, \frac{\alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2}{2}, \frac{\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2}{2}; \sigma, \mu \right) + \\ & + 2D''_5 \left(k, \frac{\alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2}{2}, \frac{\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2}{2}; \sigma, \mu \right) + \\ & + 2\bar{D}''_5 \left(k, \frac{\alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2}{2}, \frac{\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2}{2}; \sigma, \mu \right) + \\ & + 2D'''_5 \left(k, \frac{\alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2}{2}, \alpha_1 i_1; \sigma, \mu \right)]. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Agora, para $i_1 = i_2 = 0$, obtemos:

$$\text{---} \circ \text{---} = 2 \frac{(N+2)(N+8)}{108} \lambda^3 [D_5(k, 0; \sigma, \mu) + D'_5(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 2D''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 2\bar{D}''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 2D'''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu)]. \quad (5.17)$$

Os dois diagramas acima concordam perfeitamente em relação à multiplicidade exibida em (5.13). Note que utilizamos a mesma construção com os quase-momento externos diferentes de zero.

Para os diagramas da função de vértice de 4 pontos, fazendo $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 0$ em (5.7), encontramos:

$$\text{---} \circ \text{---} = 8\sigma\lambda. \quad (5.18)$$

A partir da expressão (4.44) com $\tau = 1$; fazendo todos os quase-momentos externos iguais a zero, chegamos a:

$$\text{---} \circ \text{---} = (8\sigma\lambda) \frac{N+8}{18} \lambda [I(k, 0; \sigma, \mu) + I'(k, 0, 0; \sigma, \mu)]. \quad (5.19)$$

Realizando o mesmo procedimento com a expressão dada em (4.48), obtemos:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \end{array} = (8\sigma\lambda) \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} \lambda^2 \left\{ I^2(k, 0; \sigma, \mu) + 2I(k, 0; \sigma, \mu) I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [I'(k, l, l; \sigma, \mu)]^2 \right\}. \quad (5.20)$$

Da expressão (4.49), encontramos, ainda para a função de vértice de 4 pontos:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 0 \end{array} = (8\sigma\lambda) \frac{(5N + 22)}{54} \lambda^2 [I_4(k, k', 0, 0; \sigma, \mu) + I'_4(k, k', 0, 0, 0; \sigma, \mu) + 2I''_4(k, k', 0, 0, 0; \sigma, \mu)]. \quad (5.21)$$

Para o caso dos diagramas com inserção de campo composto, temos:

$$i_1 \text{---} \overset{j}{\text{---}} i_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha_1=\pm 1 \\ \beta=\pm 1}} \delta(i_{\alpha_1} + \beta j). \quad (5.22)$$

Aplicando $i_1 = i_2 = j = 0$ em (5.22), obtemos:

$$0 \text{---} \overset{0}{\text{---}} 0 = 2. \quad (5.23)$$

Vale ressaltar que, no modo zero, o valor das multiplicidades está diretamente ligado ao fato de aplicarmos os quase-momentos externos iguais a zero nos diagramas construídos especificamente para o formalismo unificado, ou seja, são multiplicidades artificiais no sentido de que se construíssemos novamente os diagramas, fazendo, desde o princípio, os quase-momentos externos nulos, essas multiplicidades não seriam as mesmas. Um bom exemplo disso é a expressão dada em (5.19), que possui uma multiplicidade 8, mas se construída com os quase-momentos externos nulos desde o princípio, apresentaria multiplicidade 2. Outro importante exemplo está relacionado à inserção de campo composto pois, se considerássemos os quase-momentos externos iguais a zero desde o começo, a expressão (4.69), que nos permitiu definir o vértice devido à inserção, seria dada por:

$$(\Phi^{(\tau=1)}(k, 0))^2 = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}k_1 d^{d-1}k_2 \delta^{d-1}(k - k_1 - k_2) [\mathbf{1}] \Phi^{(\tau=1)}(k_1, 0) \Phi^{(\tau=1)}(k_2, 0). \quad (5.24)$$

Logo, comparando a expressão acima com (4.69), vemos que a parte relacionada aos quase-momentos fica reduzida ao número 1, assim:

$$0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 = 1 \quad (5.25)$$

que é o mesmo resultado encontrado para o sistema totalmente infinito [17], assim como para *PBC* e *ABC*. O resultado acima é importante para mostrar tanto a consistência da teoria em relação a resultados bem conhecidos, quanto para reafirmar que a multiplicidade que surge pela utilização do formalismo unificado não possui relevância física. Sendo assim, para que haja compatibilidade entre os diagramas de campo composto e as expressões para os diagramas das outras funções de vértice, utilizaremos a mesma construção dada em (4.97) fazendo todos os quase-momentos externos iguais a zero, em conjunto com (5.23), ou seja:

$$\frac{1}{2} \left(0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 + 0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 \right) + 0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 = 4. \quad (5.26)$$

Vemos então que, assim como ocorreu nos outros casos, podemos utilizar a mesma construção do formalismo unificado, mas, teremos uma multiplicidade diferente. Para os diagramas de campo composto, a multiplicidade tem valor 4, ao invés de $\frac{3}{2}$ quando os quase-momentos externos são diferentes de zero. Assim, para os próximos diagramas, utilizando o mesmo fator de conversão $(\frac{\pi}{\sigma\lambda})$, podemos levar a função $\Gamma^{(4)}$ em $\Gamma^{(2,1)}$ de maneira similar ao realizado no capítulo anterior. Tomando por base as expressões dadas em (4.81), (4.83) e (4.84), ficamos com:

$$\frac{1}{2} \left(0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 + 0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 \right) + 0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 = 4 \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda [I(k, 0; \sigma, \mu) + I'(k, 0, 0; \sigma, \mu)]; \quad (5.27a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 + 0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 \right) + 0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 = 4 \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \lambda^2 \{ I^2(k, 0; \sigma, \mu); + \\ + 2I(k, 0; \sigma, \mu)I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [I'(k, l, l; \sigma, \mu)]^2 \}; \quad (5.27b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 + 0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 \right) + 0 \text{---} \overset{0}{\text{---}\bullet\text{---}} 0 = 4 \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda^2 [I_4(k, k', 0, 0; \sigma, \mu) + \\ + I'_4(k, k', 0, 0, 0; \sigma, \mu) + 2I''_4(k, k', 0, 0, 0; \sigma, \mu)]. \quad (5.27c) \end{aligned}$$

5.2 Expoentes críticos na teoria massiva para o modo zero

Como, do ponto de vista simbólico, a alteração que ocorre nas equações de Callan-Symanzik para o modo zero é dada apenas por: $\hat{\gamma}_{\Phi}^{(\tau)} \rightarrow \gamma_{\Phi}^{(\tau)}$, as funções de Wilson encontradas em (4.240) continuam sendo definidas por:

$$\beta^{(\tau=1)}(u) = -\epsilon \left(\frac{\partial \ln u_0^{(\tau=1)}}{\partial u} \right)^{-1}; \quad (5.28a)$$

$$\gamma_{\phi}^{(\tau=1)}(u) = \beta^{(\tau=1)}(u) \left(\frac{\partial \ln Z_{\phi}^{(\tau=1)}}{\partial u} \right); \quad (5.28b)$$

$$\gamma_{\phi^2}^{(\tau=1)}(u) = -\beta^{(\tau=1)}(u) \left(\frac{\partial \ln Z_{\phi^2}^{(\tau=1)}}{\partial u} \right). \quad (5.28c)$$

Aqui também podemos definir:

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau=1)}(u) = -\beta^{(\tau=1)}(u) \left(\frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}^{(\tau=1)}}{\partial u} \right), \quad (5.29)$$

onde novamente temos: $\bar{Z}_{\phi^2}^{(\tau=1)} \equiv Z_{\phi}^{(\tau=1)} Z_{\phi^2}^{(\tau=1)}$. Como neste capítulo só trataremos com NBC , não explicitaremos mais o índice τ nas equações.

De acordo com as expansões dadas em (4.243), temos também que:

$$\beta(u) = -\epsilon u \{1 - a_1 u + 2[(a_1)^2 - a_2]u^2\}; \quad (5.30a)$$

$$\gamma_{\phi}(u) = -\epsilon u [2b_2 u + (3b_3 - 2b_2 a_1)u^2]; \quad (5.30b)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) = \epsilon u \{c_1 + [2c_2 - (c_1)^2 - a_1 c_1]u\}. \quad (5.30c)$$

As mudanças fundamentais relacionadas às multiplicidades do modo zero serão refletidas nas condições de normalização que, no caso massivo, serão dadas agora por:

$$\Gamma_R^{(2)}(k=0, i=0; g, \mu) = 2\mu^2; \quad (5.31a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, i=0; g, \mu) \right|_{k^2=0} = 2; \quad (5.31b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k=0, i=0; g, \mu) = 8\sigma g; \quad (5.31c)$$

$$\bar{\Gamma}_R^{(2,1)}(k=0, i=0, j=0; g, \mu) = 4, \quad (5.31d)$$

onde, seguindo a estrutura de construção apontada anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_R^{(2,1)}(k=0, i=0, j=0; g, \mu) &\equiv \frac{1}{2} \left[\Gamma_R^{(2,1)}(k=0, i=0, j=0; g, \mu) + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_R^{(2,1)}(k=0, i=0, j=0; g, \mu) \right] + \Gamma_R^{(2,1)}(k=0, i=0, j=0; g, \mu). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Em paralelo ao realizado no capítulo anterior, vamos considerar que a expansão da derivada da função de 2 pontos não renormalizada é dada simbolicamente por:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k, i=0; \lambda, \mu) \right|_{k^2=0} = 2 - B_2 u_0^2 + B_3 u_0^3, \quad (5.33)$$

onde,

$$B_2 = 2\mu^{2\epsilon} \frac{N+2}{18} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_3(k, 0; \sigma, \mu) + 3D'_3(k, 0, 0; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}, \quad (5.34)$$

e,

$$\begin{aligned} B_3 = 2\mu^{3\epsilon} \frac{(N+2)(N+8)}{108} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_5(k, 0; \sigma, \mu) + D'_5(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \right. \\ \left. + 2(D''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \bar{D}''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 2D'''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu)) \right] \Big|_{k^2=0}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Agora, para a função de 4 pontos não-renormalizada podemos escrever:

$$\Gamma^{(4)}(k=0, i=0; \lambda, \sigma, \mu) = \sigma \mu^\epsilon [8u_0 - A_1 u_0^2 + (A_2^{(1)} + A_2^{(2)}) u_0^3], \quad (5.36)$$

onde,

$$A_1 = 8\mu^\epsilon \frac{N+8}{6} \left[I(k, 0; \sigma, \mu) + I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}; \quad (5.37a)$$

$$\begin{aligned} A_2^{(1)} = 8\mu^{2\epsilon} \frac{(N^2 + 6N + 20)}{36} \left\{ I^2(k, 0; \sigma, \mu) + 2I(k, 0; \sigma, \mu) I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) \right. \\ \left. + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [I'(k, l, l; \sigma, \mu)]^2 \right\} \Big|_{k^2=0}; \end{aligned} \quad (5.37b)$$

$$A_2^{(2)} = 8\mu^{2\epsilon} \frac{(5N+22)}{9} \left[I_4(k, 0; \sigma, \mu) + I'_4(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 2I''_4(k, 0, 0; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}. \quad (5.37c)$$

Já para a função de vértice com inserção de campo composto em quase-momento zero temos:

$$\bar{\Gamma}^{(2,1)}(k=0, i=0, j=0; \lambda, \sigma, \mu) = 4 - C_1 u_0 + (C_2^{(1)} + C_2^{(2)}) u_0^2, \quad (5.38)$$

onde,

$$C_1 = 4\mu^\epsilon \frac{N+2}{6} \left[I(k, 0; \sigma, \mu) + I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}; \quad (5.39a)$$

$$C_2^{(1)} = 4\mu^{2\epsilon} \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \left\{ I^2(k, 0; \sigma, \mu) + 2I(k, 0; \sigma, \mu) I'(k, 0, 0; \sigma, \mu) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [I'(k, l, l; \sigma, \mu)]^2 \right\} \Big|_{k^2=0}; \quad (5.39b)$$

$$C_2^{(2)} = 4\mu^{2\epsilon} \frac{N+2}{6} \left[I_4(k, 0; \sigma, \mu) + I'_4(k, 0, 0; \sigma, \mu) + 2I''_4(k, 0, 0; \sigma, \mu) \right] \Big|_{k^2=0}. \quad (5.39c)$$

Precisamos explicitar agora os resultados das integrais massivas para o modo zero em $k^2 = 0$ para substituí-los nas expressões acima. Isto se torna uma tarefa muito simples ao lembrarmos que já temos os resultados das mesmas para os quase-momentos externos diferentes de zero. Logo, basta tomar os quase-momentos nulos nas soluções finais das integrais apresentadas no capítulo anterior. Dessa forma, ficamos com:

$$I(k=0, i=0; r, \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} f_{\frac{1}{2}}(0, r^{-1}) \right]. \quad (5.40)$$

A solução acima difere do resultado encontrado para *PBC* apenas pela definição de r , pois aqui temos: $r \equiv \frac{\pi}{\mu L}$, e em *PBC* temos: $r \equiv \frac{2\pi}{\mu L}$. A próxima integral é dada por:

$$I'(k=0, i=0, j=0; r, \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d r}{2}. \quad (5.41)$$

Para a derivada de D_3 , obtemos:

$$\frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_3(k, i=0; r, \mu) \Big|_{k=0} = -\mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{8\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W_0^{(\tau'=0)}(i=0; r) \right], \quad (5.42)$$

onde a função $W_0^{(\tau'=0)}(i; r)$ está definida após a expressão (4.128). A solução acima também é idêntica ao resultado em *PBC*, diferindo pela definição do fator r . Na sequência, temos uma integral que não possui paralelo em *PBC*:

$$\frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D'_3(k, i=0, j=0; r, \mu) \Big|_{k=0} = -\mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 r}{4} \left[\mathcal{P} - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(r) \right], \quad (5.43)$$

com $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(i=0, j=0; r)$ e $\mathcal{L}'_0(r) \equiv \mathcal{L}'_0(i=0, j=0; r)$.

No caso dos diagramas de $\Gamma^{(2)}$ ainda temos as derivadas das seguintes integrais:

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_5(k, i=0; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{6\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2} \epsilon W_0^{(\tau'=0)}(i=0; r) \right]. \quad (5.44)$$

As duas próximas integrais são dadas por:

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D'_5(k, i=0, j=0; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 r}{2\epsilon} \left[\mathcal{P} - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(r) \right], \quad (5.45)$$

e,

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D''_5(k, i=0, j=0; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 r}{4\epsilon} \left[\mathcal{P} - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(r) \right]. \quad (5.46)$$

Lembramos que a solução para $\bar{D}''_5$, até a ordem em ϵ pretendida, é igual à solução para D''_5 e que D'''_5 é regular para $\epsilon \rightarrow 0$, sendo então desprezada para o cálculo dos expoentes críticos.

Continuando com a apresentação das soluções das integrais para o modo zero, temos:

$$I_4(k=0, i=0; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon f_{\frac{1}{2}}(0; r^{-1}) \right], \quad (5.47)$$

A próxima integral é dada por:

$$I'_4(k=0, i=0, j=0; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 r}{2\epsilon}. \quad (5.48)$$

A integral I''_4 , que aparece na construção dos diagramas, é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, pode ser desprezada. Outro ponto importante é que, seguindo o que foi realizado no capítulo anterior, a constante de acoplamento será redefinida para absorver os fatores de S_d que aparecem nas integrais.

Substituindo as soluções das integrais I , I' , I_4 e I'_4 , nos coeficientes da expansão para a função de vértice não-renormalizadas de 4 pontos (5.36), obtemos:

$$A_1 = 8 \left\{ \frac{N+8}{6\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] \right\}, \quad (5.49a)$$

$$A_2^{(1)} = 8 \left(\frac{N^2 + 6N + 20}{36} \right) \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] \right\}^2; \quad (5.49b)$$

$$A_2^{(2)} = 8 \left\{ \frac{5N+22}{18\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] \right\}, \quad (5.49c)$$

onde definimos:

$$\zeta_{\frac{1}{2}}(r) \equiv \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau=1)}(i=0; r) = r + f_{\frac{1}{2}}(0; r^{-1}). \quad (5.50)$$

Pela substituição das mesmas integrais nos coeficientes da expansão em (5.38), temos:

$$C_1 = 4 \left\{ \frac{N+2}{6\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] \right\}, \quad (5.51a)$$

$$C_2^{(1)} = 4 \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] \right\}^2. \quad (5.51b)$$

$$C_2^{(2)} = 4 \left\{ \frac{N+2}{12\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] \right\}. \quad (5.51c)$$

Substituindo agora as soluções das integrais D_3 , D'_3 , D_5 , D'_5 e D''_5 , nos coeficientes da expansão em (5.33), obtemos:

$$B_2 = -2 \frac{N+2}{144\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon \tilde{W}_0(r) \right]; \quad (5.52a)$$

$$B_3 = 2 \frac{(N+2)(N+8)}{108} \left\{ -\frac{1}{6\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2} \epsilon \tilde{W}_0(r) \right] \right\}, \quad (5.52b)$$

onde,

$$\tilde{W}_0(r) \equiv \tilde{W}_0^{(\tau=1)}(i=0; r) = W_0^{(\tau'=0)}(r) + 6r \left[\mathcal{P} - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(r) \right]. \quad (5.53)$$

Utilizando as condições de normalização, lembrando que $\Gamma_R^{(E,L)} = Z_{\phi}^{\frac{E}{2}} Z_{\phi^2}^L \Gamma^{(E,L)}$, chegamos as seguintes expressões simbólicas:

$$a_1 = \frac{A_1}{8}; \quad (5.54a)$$

$$a_2 = 2 \left(\frac{A_1}{8} \right)^2 - \frac{1}{8} (A_2^{(1)} + A_2^{(2)}) - 2b_2; \quad (5.54b)$$

$$b_2 = \frac{B_2}{2}; \quad (5.54c)$$

$$b_3 = 2 \left(\frac{B_2}{2} \right) a_1 - \frac{B_3}{2}; \quad (5.54d)$$

$$c_1 = \frac{C_1}{4}; \quad (5.54e)$$

$$c_2 = (a_1 + c_1) \frac{C_1}{4} - \frac{1}{4} (C_2^{(1)} + C_2^{(2)}). \quad (5.54f)$$

Substituindo agora as expressões explícitas para os coeficientes, encontramos:

$$a_1 = \frac{N+8}{6\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right]; \quad (5.55a)$$

$$a_2 = \left(\frac{N+8}{6\epsilon} \right)^2 - \frac{(N^2 + 21N + 86)}{36\epsilon} + \frac{N+2}{72\epsilon} + \frac{(N^2 + 16N + 64)}{36\epsilon} \zeta_{\frac{1}{2}}(r); \quad (5.55b)$$

$$b_2 = -\frac{N+2}{144\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon \tilde{W}_0(r) \right]; \quad (5.55c)$$

$$b_3 = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon^2} \left[1 - \frac{7}{4}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right]; \quad (5.55d)$$

$$c_1 = \frac{N+2}{6\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right]; \quad (5.55e)$$

$$c_2 = \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon^2} - \frac{(N+2)(2N+13)}{72\epsilon} + \frac{(N^2 + 7N + 10)}{36\epsilon} \zeta_{\frac{1}{2}}(r). \quad (5.55f)$$

Podemos observar que todos os coeficientes estão escritos de maneira similar aos seus correspondentes em *PBC*, assim como no formalismo para os quase-momentos diferentes de zero com *DBC* e *NBC*. Sendo assim, a partir de (5.30), podemos escrever diretamente:

$$\beta(u) = -\epsilon u + \frac{N+8}{6} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] u^2 - \frac{(3N+14)}{12} u^3; \quad (5.56a)$$

$$\gamma_\phi(u) = \frac{(N+2)}{72} u^2 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon \tilde{W}_0(r) - \frac{N+8}{6} \left[1 + \tilde{W}_0(r) - \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] u \right\}; \quad (5.56b)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) = \frac{N+2}{6} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] u - \frac{(N+2)}{12} u^2. \quad (5.56c)$$

Note que a estrutura das funções $\beta(u)$, $\gamma_\phi(u)$ e $\bar{\gamma}_{\phi^2}(u)$, é a mesma encontrada para *NBC* no formalismo unificado.

O ponto fixo não trivial na teoria massiva pode ser obtido pela utilização da condição: $\beta(u_\infty) = 0$. Dessa forma temos:

$$u_\infty = \frac{6\epsilon}{N+8} \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \right] \right\}. \quad (5.57)$$

Logo, lembrando que: $\eta = \gamma_\phi(u_\infty)$, podemos escrever a dimensão anômala, até $\mathcal{O}(\epsilon^3)$, como:

$$\eta = \frac{(N+2)}{2(N+8)^2} \epsilon^2 \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}. \quad (5.58)$$

Note que a expressão acima é independente do termo de correção de tamanho finito.

Temos também que: $\nu^{-1} = 2 - \bar{\gamma}_{\phi^2}^{(\tau)}(u_\infty^{(\tau)}) - \eta$, e que:

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u_\infty) = \frac{(N+2)}{(N+8)} \epsilon \left[1 + \frac{6N+18}{(N+8)^2} \epsilon \right]. \quad (5.59)$$

Também independente da condição de contorno. Assim, temos:

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)}\epsilon + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3}\epsilon^2. \quad (5.60)$$

O expoente crítico acima também é idêntico ao expoente encontrado para o sistema totalmente infinito em d dimensões, logo, pelas relações de escala entre os expoentes, todos os outros também serão os mesmos. Concluimos então que para o modo zero, na teoria massiva, todos os expoentes críticos também são totalmente independentes das condições de contorno impostas às placas delimitadoras do sistema, o que reafirma a universalidade dos expoentes críticos do *bulk*.

5.3 Expoentes críticos na teoria sem massa em modo zero

Com o intuito de completar a correspondência entre a teoria massiva e sem massa, deixando evidente que não há “quebra” na expansão perturbativa em ϵ no ponto crítico ($\mu = 0$), desde que a distância entre as placas (L) não seja tão pequena, apresentamos abaixo as condições de normalização da teoria sem massa:

$$\Gamma_R^{(2)}(k=0, i=0; g, \mu=0) = 0; \quad (5.61a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, i=0; g, \mu=0) \right|_{k^2=\kappa^2} = 2; \quad (5.61b)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k=\kappa, i=0; g, \mu=0) = 8\sigma g; \quad (5.61c)$$

$$\bar{\Gamma}_R^{(2,1)}(k=\kappa, i=0, j=0; g, \mu=0) = 4, \quad (5.61d)$$

onde, seguindo a estrutura construída no capítulo anterior, escrevemos:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_R^{(2,1)}(k=\kappa, i=0, j=0; g) \equiv \frac{1}{2} \left[\Gamma_R^{(2,1)}(k=\kappa, i=0, j=0; g) + \Gamma_R^{(2,1)}(k=\kappa, i=0, j=0; g) \right] \\ + \Gamma_R^{(2,1)}(k=\kappa, i=0, j=0; g). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Como pode ser observado, as condições de normalização sofreram algumas modificações em relação ao caso massivo. Por exemplo, a escala de momento agora é κ ao invés da massa μ , que é tomada como zero. Ainda assim, as funções de Wilson, em sua representação adimensional, e os coeficientes das expansões das funções de vértice não sofrem alteração. O que mudará serão as soluções das integrais de Feynman. Portanto, podemos reiterar que:

$$\beta(u) = -\epsilon \left(\frac{\partial \ln u_0}{\partial u} \right)^{-1}; \quad (5.63a)$$

$$\gamma_\phi(u) = \beta(u) \left(\frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial u} \right); \quad (5.63b)$$

$$\gamma_{\phi^2}(u) = -\beta(u) \left(\frac{\partial \ln Z_{\phi^2}}{\partial u} \right). \quad (5.63c)$$

De forma conveniente, definimos também

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) \equiv -\beta(u) \left(\frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}}{\partial u} \right), \quad (5.64)$$

onde $\bar{Z}_{\phi^2} \equiv Z_\phi Z_{\phi^2}$. Lembrando que estamos omitindo o índice indicativo da condição de contorno (τ) pois, em modo zero, só precisamos tratar com NBC ($\tau = 1$).

Podemos expressar u_0 , Z_ϕ e $\bar{Z}_{\phi^2}$ em termos de uma expansão na constante de acoplamento renormalizada adimensional u escrevendo:

$$u_0 = u(1 + a_1 u + a_2 u^2); \quad (5.65a)$$

$$Z_\phi = 1 + b_2 u^2 + b_3 u^3; \quad (5.65b)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2} = 1 + c_1 u + c_2 u^2. \quad (5.65c)$$

Com isso, as expressões simbólicas para as funções de Wilson tornam-se:

$$\beta(u) = -\epsilon u \{1 - a_1 u + 2[(a_1)^2 - a_2]u^2\}; \quad (5.66a)$$

$$\gamma_\phi(u) = -\epsilon u [2b_2 u + (3b_3 - 2b_2 a_1)u^2]; \quad (5.66b)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) = \epsilon u \{c_1 + [2c_2 - (c_1)^2 - a_1 c_1]u\}. \quad (5.66c)$$

As funções de vértice não-renormalizadas escritas em termos de uma expansão em u_0 redundam em:

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k, i = 0; \lambda) \Big|_{k^2 = \kappa^2} = 2 - B_2 u_0^2 + B_3 u_0^3, \quad (5.67a)$$

$$\Gamma^{(4)}(k = \kappa, i = 0; \lambda, \sigma) = \sigma \kappa^\epsilon [8u_0 - A_1 u_0^2 + (A_2^{(1)} + A_2^{(2)})u_0^3], \quad (5.67b)$$

$$\bar{\Gamma}^{(2,1)}(k = \kappa, i = 0, j = 0; \lambda, \sigma) = 4 - C_1 u_0 + (C_2^{(1)} + C_2^{(2)})u_0^2, \quad (5.67c)$$

onde, por conformidade com a expansão diagramática, verifica-se que:

$$B_2 = 2\kappa^{2\epsilon} \frac{N+2}{18} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_3(k, 0; \sigma, \mu = 0) + 3D'_3(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) \right] \Big|_{k^2 = \kappa^2}; \quad (5.68a)$$

$$B_3 = 2\kappa^{3\epsilon} \frac{(N+2)(N+8)}{108} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[D_5(k, 0; \sigma, \mu = 0) + D'_5(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) + \right. \\ \left. + 2(D''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) + \overline{D}''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) + 2D'''_5(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0)) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}; \quad (5.68b)$$

$$A_1 = 8\kappa^\epsilon \frac{N+8}{6} \left[I(k, 0; \sigma, \mu = 0) + I'(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}; \quad (5.68c)$$

$$A_2^{(1)} = 8\kappa^{2\epsilon} \frac{(N^2 + 6N + 20)}{36} \left\{ I^2(k, 0; \sigma, \mu = 0) + 2I(k, 0; \sigma, \mu = 0)I'(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) \right. \\ \left. + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [I'(k, l, l; \sigma, \mu = 0)]^2 \right\} \Big|_{k^2=\kappa^2}; \quad (5.68d)$$

$$A_2^{(2)} = 8\kappa^{2\epsilon} \frac{(5N+22)}{9} \left[I_4(k, 0; \sigma, \mu = 0) + I'_4(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) + 2I''_4(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}; \quad (5.68e)$$

$$C_1 = 4\kappa^\epsilon \frac{N+2}{6} \left[I(k, 0; \sigma, \mu = 0) + I'(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}; \quad (5.68f)$$

$$C_2^{(1)} = 4\kappa^{2\epsilon} \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \left\{ I^2(k, 0; \sigma, \mu = 0) + 2I(k, 0; \sigma, \mu = 0)I'(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) + \right. \\ \left. + \sum_{l=-\infty}^{\infty} [I'(k, l, l; \sigma, \mu = 0)]^2 \right\} \Big|_{k^2=\kappa^2}; \quad (5.68g)$$

$$C_2^{(2)} = 4\kappa^{2\epsilon} \frac{N+2}{6} \left[I_4(k, 0; \sigma, \mu = 0) + I'_4(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) + 2I''_4(k, 0, 0; \sigma, \mu = 0) \right] \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (5.68h)$$

Vamos agora explicitar os resultados das integrais para o modo zero com $k^2 = \kappa^2$, ou seja, no ponto simétrico. Utilizando as soluções finais das integrais sem massa com os quase-momentos externos diferentes de zero, e aplicando $i = j = 0$, obtemos:

$$I_{PS}(\sigma) = \kappa^{-\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \sigma) \right]. \quad (5.69)$$

Note que a solução acima difere do resultado encontrado para *PBC* apenas pela definição de σ , visto que nesse caso $\sigma \equiv \frac{\pi}{L}$, já em *PBC* verifica-se $\sigma \equiv \frac{2\pi}{L}$. A outra integral que contribui para o diagrama da função de 4 pontos em 1 *loop* é dada por:

$$I'_{PS}(\bar{r}) = \kappa^{-\epsilon} \frac{S_d \bar{r} \pi}{2}, \quad (5.70)$$

onde $\bar{r} = \frac{\sigma}{\kappa}$.

Procedendo da mesma maneira com as integrais referentes aos diagramas da função de vértice de 2 pontos, é fácil constatar que:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_3(k, i=0; \sigma) \right|_{PS} = -\kappa^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{8\epsilon} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon W_0^{(\tau'=0)}(\kappa; \sigma) \right], \quad (5.71)$$

onde definimos: $W_0^{(\tau'=0)}(\kappa; \sigma) \equiv W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i=0; \sigma) = -\bar{F}_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i=0; \sigma) + 2F_0'^{(\tau'=0)}(\kappa, i=0; \sigma)$. É interessante ver que a solução acima é idêntica ao resultado em *PBC*, diferindo pela definição do fator σ . Em contraste com a identificação com *PBC* observada em (5.71), escrevemos:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D'_3(k, i=0, j=0; \bar{r}) \right|_{PS} = -\kappa^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 \bar{r} \pi}{8} \left[1 - \frac{4}{\bar{r} \pi} \mathcal{M}'_0(\bar{r}) \right], \quad (5.72)$$

com $\bar{\mathcal{P}} \equiv \bar{\mathcal{P}}(i=0, j=0; \bar{r}) = 1$ e $\mathcal{M}'_0(\bar{r}) \equiv \mathcal{M}'_0(i=0, j=0; \bar{r})$.

Para os diagramas de $\Gamma^{(2)}$ ainda temos as derivadas das seguintes integrais:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_5(k, i=0; \sigma) \right|_{PS} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{6\epsilon^2} \left[1 + 2\epsilon - 3\epsilon W_0^{(\tau'=0)}(\kappa; \sigma) \right]; \quad (5.73)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D'_5(k, i=0, j=0; \bar{r}) \right|_{PS} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 \bar{r} \pi}{4\epsilon} \left[1 - \frac{4}{\bar{r} \pi} \mathcal{M}_0'^{(\tau'=0)}(\bar{r}) \right]; \quad (5.74)$$

e,

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D''_5(k, i=0, j=0; \bar{r}) \right|_{PS} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 \bar{r} \pi}{8\epsilon} \left[1 - \frac{4}{\bar{r} \pi} \mathcal{M}_0'^{(\tau'=0)}(\bar{r}) \right]. \quad (5.75)$$

Ratificamos que a solução para $\bar{D}_5''$, até a ordem em ϵ pretendida, é igual à solução para D_5'' , e que D_5''' é regular para $\epsilon \rightarrow 0$, sendo então desprezada para o cálculo dos expoentes críticos.

Os próximos resultados são relativos às integrais divergentes dos diagramas da função de 4 pontos em 2 *loops* em modo zero. Ao aplicar $i=j=0$ nas soluções encontradas no capítulo anterior, obtemos:

$$I_{4PS}(\sigma) = \kappa^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{2\epsilon^2} \left[1 + \frac{3}{2}\epsilon + \epsilon F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, 0; \sigma) \right]; \quad (5.76)$$

$$I'_{4SP}(\bar{r}) = \kappa^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 \bar{r} \pi}{2\epsilon}. \quad (5.77)$$

A integral I_4'' , que aparece na construção dos diagramas, é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, vamos negligenciá-la.

Recordando que as expressões simbólicas dadas em (5.54) também são válidas nesse cenário, e de posse dos últimos resultados, encontramos, após absover os fatores S_d numa redefinição da constante de acoplamento:

$$a_1 = \frac{N+8}{6\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_0(\bar{r}) \right]; \quad (5.78a)$$

$$a_2 = \left(\frac{N+8}{6\epsilon} \right)^2 + \frac{(2N^2 + 23N + 86)}{72\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{N+8}{6} \right)^2 \bar{\zeta}_0(\bar{r}); \quad (5.78b)$$

$$b_2 = -\frac{N+2}{144\epsilon} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon \bar{W}_0(\bar{r}) \right]; \quad (5.78c)$$

$$b_3 = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon^2} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon \bar{\zeta}_0(\bar{r}) \right]; \quad (5.78d)$$

$$c_1 = \frac{N+2}{6\epsilon} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_0(\bar{r}) \right]; \quad (5.78e)$$

$$c_2 = \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon^2} + \frac{2N^2 + 11N + 14}{72\epsilon} + \frac{(N^2 + 7N + 10)}{36\epsilon} \bar{\zeta}_0(\bar{r}), \quad (5.78f)$$

onde definimos:

$$\bar{\zeta}_0(\bar{r}) \equiv \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau=1)}(i=0; \bar{r}) = \pi \bar{r} + F_0^{(\tau'=0)}(\bar{r}); \quad (5.79a)$$

$$\bar{W}_0(\bar{r}) \equiv \bar{W}_0^{(\tau=1)}(i=0; \bar{r}) = W_0^{(\tau'=0)}(\bar{r}) - \frac{3}{2}\bar{r}\pi \left[1 - \frac{4}{\bar{r}\pi} \mathcal{M}_0'^{(\tau'=0)}(\bar{r}) \right]. \quad (5.79b)$$

Mais uma vez, todos os coeficientes apresentam-se com a mesma estrutura encontrada no formalismo unificado para *DBC* e *NBC* e, por consequência, a mesma estrutura encontrada em *PBC* ou *ABC*. Por conseguinte, é imediato escrever:

$$\beta(u) = -\epsilon u + \frac{N+8}{6} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_0(\bar{r}) \right] u^2 - \frac{(3N+14)}{12} u^3. \quad (5.80)$$

$$\gamma_\phi(u) = \frac{(N+2)}{72} u^2 \left\{ 1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon \bar{W}_0(\bar{r}) - \frac{N+8}{12} \left[1 - 4\bar{W}_0(\bar{r}) - 2\bar{\zeta}_0(\bar{r}) \right] u \right\}. \quad (5.81)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) = \frac{N+2}{6} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \bar{\zeta}_0(\bar{r}) \right] u - \frac{(N+2)}{12} u^2. \quad (5.82)$$

Note que, assim como ocorreu na teoria massiva, todas as funções de Wilson são regulares para $\epsilon \rightarrow 0$, embora ainda dependam dos termos de correção de tamanho finito.

O ponto fixo é determinado ao utilizarmos a condição: $\beta(u^*) = 0$. Dessa maneira:

$$u^* = \frac{6\epsilon}{N+8} \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \bar{\zeta}_0(\bar{r}) \right] \right\}. \quad (5.83)$$

Consequentemente,

$$\eta = \gamma_\phi(u^*) = \frac{(N+2)}{2(N+8)^2} \epsilon^2 \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}, \quad (5.84)$$

onde verificamos a completa concordância com a teoria massiva.

Para o expoente ν temos a relação: $\nu^{-1} = 2 - \bar{\gamma}_{\phi^2}(u^*) - \eta$. Sendo que $\bar{\gamma}_{\phi^2}(u^*)$ é dado por

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u^*) = \frac{(N+2)}{(N+8)} \epsilon \left[1 + \frac{6N+18}{(N+8)^2} \epsilon \right], \quad (5.85)$$

obtemos como resultado

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3} \epsilon^2. \quad (5.86)$$

O que mostra que a teoria sem massa é totalmente equivalente à teoria massiva no que diz respeito ao cálculo de quantidades universais, como é o caso dos expoentes críticos, também para o modo zero.

5.4 Limites assintóticos em modo zero

No que se refere aos limites assintóticos ($L \rightarrow \infty$ ou $L \rightarrow 0$), no modo zero é necessário analisar as seguintes expressões:

$$\zeta_{\frac{1}{2}}(r) = r + f_{\frac{1}{2}}(0; r^{-1}); \quad (5.87)$$

$$\bar{\zeta}_0(\bar{r}) = \pi \bar{r} + F_0^{(\tau'=0)}(\bar{r}), \quad (5.88)$$

as quais representam o termo de correção do diagrama em 1 *loop* da função de 4 pontos no caso massivo e sem massa, respectivamente.

De acordo com as subseções 4.6.1 e 4.6.2, as funções $f_{\frac{1}{2}}(0; r^{-1})$ e $F_0^{(\tau'=0)}(\bar{r})$ vão a zero quando $L \rightarrow \infty$, assim como r e $\bar{r}$. Em vista disso, o termo de correção correspondente a cada teoria (massiva e sem massa) anula-se no referido limite. O efeito percebido pela aplicação do limite $L \rightarrow \infty$ nos remete aos resultados encontrados para um sistema infinito em d dimensões, o que vem a ser uma demonstração de consistência da teoria.

No outro extremo, isto é, no limite $L \rightarrow 0$, conforme as subseções supracitadas, é de fácil identificação que:

$$\lim_{L \rightarrow 0} \zeta_{\frac{1}{2}}(r) \sim 2r + 2 \ln(r^{-1}) + \text{termos finitos}; \quad (5.89)$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} \bar{\zeta}_0(\bar{r}) \sim 2\pi \bar{r} + 2 \ln(\bar{r}^{-1}) + \text{termos finitos}, \quad (5.90)$$

onde utilizamos as equações (4.207) e (4.224) para produzir os resultados em (5.89) e (5.90), respectivamente.

Segundo os limites acima, a divergência dominante é dada por r na teoria massiva e por $\bar{r}$ na teoria sem massa, pois ambos os termos são proporcionais a $\frac{1}{L}$. Logo, a equivalência de NBC com PBC , no que diz respeito aos limites assintóticos, é claramente confirmada. Consequentemente, o mesmo regime de *crossover* dimensional é obtido, evidenciando assim a completa concordância entre o formalismo unificado (quase-momentos externos diferentes de zero) e o tratamento específico apresentado para o modo zero.

Através da análise realizada neste capítulo, verifica-se também a completa independência da escolha dos quase-momentos externos para o cálculo de grandezas universais, respeitando-se, obviamente, as restrições que a condição de contorno impõe. É notório que os expoentes críticos calculados, tanto neste, quanto no capítulo anterior, exibem apenas uma dependência em N (número de componentes do parâmetro de ordem Φ) e em d (dimensão do sistema, $d = 4 - \epsilon$). De fato, a classe de universalidade encontrada para o sistema completamente infinito corresponde exatamente ao par (N, d) , sendo a mesma obtida em PBC e ABC e agora, como conclusão dos nossos resultados, esse mesmo par caracteriza o sistema submetido a NBC ou DBC .

Capítulo 6

Condições de Neumann e Dirichlet na criticalidade Lifshitz m -axial

6.1 Introdução

No presente capítulo, passaremos a considerar, como objeto de estudo, sistemas que exibem interações competitivas do tipo Lifshitz m -axial. Abordaremos, portanto, os efeitos do tamanho finito com a aplicação de condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet em tais sistemas. Faremos nossa análise exatamente no ponto crítico de Lifshitz (*teoria sem massa*) assim como em sua vizinhança (*teoria massiva*). Em contraste com o modelo estudado nos capítulos anteriores, o Lifshitz m -axial é composto por dois subespaços. Em um dos subespaços não permitiremos a competição, impondo apenas interações do tipo Ising em suas $d - m$ direções espaciais. Já no outro subespaço, nas m dimensões restantes, além da tradicional interação J_1 entre os primeiros vizinhos, um acoplamento J_2 , de sinal contrário a J_1 , é permitido entre os segundos vizinhos gerando a competição entre os possíveis estados de orientação dos spins na rede.

Uma descrição fenomenológica em termos de campos contínuos para sistemas sem competição foi apresentada no capítulo 2. Naquele contexto, vimos que apenas os três monômios $((\nabla\Phi)^2, \Phi^2$ e Φ^4) presentes na densidade lagrangiana (2.28) são relevantes para descrever as singularidades dos observáveis físicos desse tipo de sistema na criticalidade. Contudo, sistemas competitivos no ponto de Lifshitz exigem termos com derivadas de ordem superior para serem adequadamente descritos. Esses termos passam a ser relevantes na teoria e a densidade lagrangiana, ainda em termos de uma teoria $\lambda\phi^4$, deve ser modificada para [74]:

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma_0}{2}(\nabla_m^2 \Phi)^2 + \frac{\delta_0}{2}(\nabla_m \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_{(d-m)} \Phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4. \quad (6.1)$$

Estamos novamente considerando o parâmetro de ordem Φ como sendo um vetor de N componentes com simetria $O(N)$. Note que os três últimos termos acima descrevem a parte não competitiva do sistema. A massa μ continua dependendo da temperatura reduzida t através de

$\mu^2 \sim t$ e λ mantém o seu papel de constante de acoplamento. Já os dois primeiros termos estão relacionados com a competição ao longo do subespaço m -dimensional. O coeficiente δ_0 depende da razão J_2/J_1 . Para um determinado valor dessa razão, δ_0 se anula, o que especifica e define a região crítica para o comportamento Lifshitz m -axial [74]. O ponto de Lifshitz é caracterizado então por $\delta_0 = 0$ e $\mu = 0$ ($T = T_L$), onde T_L é a temperatura crítica de Lifshitz. Observe ainda que, na região crítica ($\delta_0 = 0$), ocorre a completa separação do subespaço competitivo do não competitivo, os quais ficam totalmente identificados por $(\nabla_m^2 \Phi)^2$ e $(\nabla_{(d-m)}^2 \Phi)^2$ [85], respectivamente. Essa separação é traduzida matematicamente pelo desacoplamento dos momentos paralelos e perpendiculares aos eixos competitivos nas integrais de Feynman. Note ainda que a contribuição das derivadas de ordens diferentes para a dimensão da densidade lagrangiana, também deve ser diferente. Em relação a esse fato, percebemos a grande importância do coeficiente σ_0 , fazendo com que o primeiro termo à direita em (6.1) tenha a mesma dimensão que os outros termos. Porém, podemos tornar a contribuição do coeficiente σ_0 desnecessária, ao fazermos uma redefinição dimensional ao longo dos eixos competitivos. Utilizaremos, portanto, a proposta de Albuquerque e Leite [86], ao considerarmos σ_0 como um parâmetro adimensional fixado em $\sigma_0 = 1$. Assim, a dimensão dos momentos ao longo das direções paralelas aos eixos competitivos deverá ser a metade da dimensão dos momentos perpendiculares a esses eixos. O propagador livre no espaço dos momentos passa então a ser dado por:

$$G_0(k, p) = \frac{1}{(k^2)^2 + p^2 + \mu^2}, \quad (6.2)$$

onde k e p são os momentos pertencentes aos subespaços recíprocos competitivo e não-competitivo, respectivamente.

A redefinição dimensional dos momentos ao longo dos eixos onde há competição pode ser explicitada pela condição $[k] = [p]^{1/2} = \Lambda^{1/2}$, onde k simboliza a escala de momento ao longo das m direções competitivas e p representa a escala de momento ao longo das $d - m$ direções restantes. Com essa definição, o elemento de volume no espaço dos momentos terá sua dimensão dada por $[d^{d-m} q d^m k] = \Lambda^{d - \frac{m}{2}}$. Uma análise semelhante à realizada na seção 2.6 mostra que no ponto de Lifshitz a constante de acoplamento tem dimensão $[\lambda] = \Lambda^{4 + \frac{m}{2} - d}$, onde Λ é uma escala de momento arbitrária. Logo, a dimensão crítica até a qual a teoria pode ser renormalizada é dada por $d_c = 4 + \frac{m}{2}$ e o parâmetro usado na expansão dos expoentes críticos passa a ser $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$.

Seguindo o que foi realizado na seção 2.6, podemos verificar que, no subespaço competitivo, devido à adimensionalização de σ_0 , a condição dada em (2.112) passa a ser

$$\frac{s}{2} + r \leq 4, \quad (6.3)$$

onde s é o expoente de um termo dinâmico qualquer no subespaço competitivo e r é o expoente do campo. Através da condição acima, torna-se fácil verificar que os operadores relevantes para o modelo Lifshitz m -axial são os descritos em (6.1).

A anisotropia produzida pela presença do primeiro termo em (6.1) induz dois tipos de escalamento no sistema. Cada um deles relacionado a um subespaço com um determinado comprimento de correlação. Portanto, denominaremos ξ_{L4} e ξ_{L2} como os comprimentos de correlação ao longo do subespaço competitivo e não-competitivo, respectivamente. Os expoentes críticos η_{L4} e ν_{L4} estarão associados ao primeiro subespaço enquanto que η_{L2} e ν_{L2} ao segundo. A dependência em m dos expoentes críticos calculados perturbativamente em termos de potências de ϵ_L introduz uma nova classe de universalidade representada pelo conjunto de parâmetros (N, d, m) .

A análise que foi feita acima para o caso anisotrópico ($d > m$) também pode ser realizada para o caso isotrópico. Para esse caso temos $d = m$, então o terceiro termo à direita em (6.1) não aparece. Consequentemente, nos propagadores relacionados, não teremos a escala de momento p , referente ao subespaço não competitivo, já que agora todo o espaço possui interações competitivas. Também verifica-se que o elemento de volume terá a dimensão $[d^m k] = \Lambda^{m/2}$. A fim de investigar de modo mais geral o efeito do tamanho finito nos dois tipos de subespaços, consideraremos neste trabalho apenas o caso anisotrópico ($d > m$).

Uma formulação na qual o escalamento dos momentos em ambos os subespaços é realizada de forma independente foi apresentada por Leite [75]. Dois conjuntos de condições de normalização e equações de grupo de renormalização foram propostos e as leis de escala para os expoentes críticos foram obtidas independentemente em cada subespaço. Recorrendo a uma aproximação especial, realizada em cada *loop* para o caso anisotrópico, foi possível calcular as integrais de Feynman analiticamente e determinar os expoentes críticos em termos de expansões em ordens de ϵ_L .

Abordaremos no restante deste trabalho os métodos decritos anteriormente para analisar o *crossover* dimensional, devido à uma limitação espacial, e cálculo dos expoentes críticos de sistemas competitivos no ponto de Lifshitz (teoria sem massa), assim como em suas proximidades (teoria massiva). Consideraremos novamente uma geometria do tipo filme fino determinada pela delimitação espacial do sistema por duas superfícies planas e paralelas separadas por uma distância L . O parâmetro de ordem estará sujeito a condições de contorno de Neumann (*NBC*) ou de Dirichlet (*DBC*) em ambas as superfícies. Para simplificar essa primeira investigação dos efeitos causados por *NBC* ou *DBC* no modelo Lifshitz m -axial, vamos considerar finita apenas uma das dimensões do sistema. Mesmo com essa simplificação, existem duas possibilidades de introduzirmos o tamanho finito L , pois podemos impor que:

Configuração 1 - *A delimitação espacial de uma das dimensões do sistema é realizada no subespaço não-competitivo;*

ou,

Configuração 2 - *A delimitação espacial de uma das dimensões do sistema é realizada no subespaço competitivo.*

Em ambos os casos, teremos ainda os subespaços competitivo ou não-competitivo infinitos, respectivamente.

A primeira configuração é mais simples de ser estudada, pois, com algumas pequenas modificações, todos os elementos empregados na análise de sistemas finitos sem competição perma-

necerão úteis e por esse motivo, vamos nos concentrar apenas nesta no presente capítulo. Já a segunda configuração exige uma generalização para a função térmica (4.112), na qual aparecem não apenas potências quadráticas, mas também potências quárticas no índice j do somatório. Isto ocorre devido à existência de um quase-momento quártico nos propagadores. Deixaremos essa tarefa para futuras investigações do modelo Lifshitz m -axial com NBC e DBC . É importante mencionar que Silva e Leite deduziram uma nova representação para a função térmica mais geral e a aplicaram na regularização das integrais de Feynman do modelo submetido a condições de contorno periódicas (PBC) e antiperiódicas (ABC) utilizando também a segunda configuração. Fizeram também a análise do *crossover* dimensional e cálculo dos expoentes críticos [87]. Tal trabalho, que possibilitou o cálculo exato dos expoentes críticos até ordem de 2 *loops*, permite-nos conjecturar que a aplicação da técnica por eles desenvolvida também é aplicável no caso de NBC e DBC .

Voltando à primeira configuração, começaremos a abordá-la utilizando a teoria não-massiva (ξ_{L4} e ξ_{L2} infinitos) e analisaremos como o *crossover* dimensional ocorre para valores pequenos de L . O cálculo dos expoentes críticos seguirá de forma análoga ao realizado em [75]. Em seguida, usaremos a correspondente versão massiva da teoria apresentada por Carvalho e Leite [88]. Nosso intuito é demonstrar a equivalência entre as duas teorias também nesse caso e com isso verificar se o *crossover* dimensional é ditado apenas pelo limite $L \rightarrow 0$, e não pelas variáveis de escala $\frac{L}{\xi_{L2}}$ e $\frac{L}{\xi_{L4}^2}$, sendo consistente com a descrição realizada no capítulo 4 para sistemas sem competição.

6.2 Formulação da teoria no ponto de Lifshitz m -axial com NBC e DBC

Consideremos a densidade lagrangiana (6.1) no ponto de Lifshitz, o qual é caracterizado por $\delta_0 = 0$ e $\mu = 0$ ($T = T_L$). De acordo com a primeira configuração, apenas o subespaço não-competitivo apresenta uma dimensão compacta de extensão L . Assim, torna-se conveniente reescrever (6.1) da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla_m^2 \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_{(d-m-1)} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \Phi(x', \rho, z) \right)^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi^4(x', \rho, z), \quad (6.4)$$

onde z é a coordenada ao longo da dimensão compacta e ρ é um vetor perpendicular ao eixo z . As superfícies limítrofes serão colocadas, por conveniência, em $z = 0$ e em $z = L$. As coordenadas do subespaço competitivo são representadas por x' .

O efeito do tamanho finito L será estudado através das condições de contorno de Dirichlet (DBC):

$$\Phi(x', \rho, 0) = \Phi(x', \rho, L) = 0,$$

ou de Neumann (NBC):

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x', \rho, z) \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x', \rho, z) \right|_{z=L} = 0.$$

De maneira equivalente ao abordado no capítulo 4, podemos utilizar a representação da teoria no espaço dos momentos para expressar as grandezas físicas relevantes. Devido à imposição de um domínio compacto (coordenada z), teremos, ao longo do eixo que o representa no espaço recíproco, o aparecimento de momentos discretos (quase-momentos).

Seguindo o que foi apresentado na seção 4.1, o campo Φ pode ser decomposto em termos de componentes de Fourier de forma análoga ao exibido na equação (4.4). A representação das funções base $u_j^{(\tau)}(z)$ em termos de exponenciais ainda é conveniente nesse caso e, portanto, utilizaremos os resultados advindos de sua aplicação. A identificação do rótulo τ com a condição de contorno aplicada permanece, a saber: $\tau = 1 \equiv NBC$ e $\tau = -1 \equiv DBC$. As regras básicas para a construção dos vários diagramas de Feynman permanecem idênticas àquelas apresentadas nas equações (4.19) e (4.20), com os tensores $S_{i_1, i_2}^{(\tau)}$ e $S_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{(\tau)}$ dados em (4.24) e (4.26). Esse nível de equivalência no tratamento do sistema competitivo ocorre porque ainda temos uma estrutura tensorial do tipo $O(N) \times (\text{tamanho finito})$. Isto significa que teremos também as mesmas multiplicidades que apareceram nos diagramas do capítulo 4, o que, de fato pode ser corrigido ao definirmos as condições de normalização. Deixaremos de lado, por equanto, a aplicação, no modelo Lifshitz m -axial, do modo zero referente a NBC .

A diferença crucial em relação ao que foi estudado nos capítulos 4 e 5 surge no propagador livre da teoria, o qual passa a incluir o momento quártico do subespaço competitivo como segue:

$$G_0(k, p, j) = \frac{1}{(k^2)^2 + p^2 + \sigma^2 j^2}, \quad (6.5)$$

onde $\sigma = \frac{\pi}{L}$. Comparando a equação acima com (4.18), podemos observar que nada muda com respeito ao quase-momento σj , sendo $j \in Z_+^*$.

Em relação aos diagramas com inserção de campo composto, a descrição exibida na seção 4.2, a partir da equação (4.62), continua sendo válida, porém, os propagadores devem ser alterados, como descrito em (6.5), para incluir também o momento quártico referente ao subespaço competitivo. Por conseguinte, o tensor relacionado aos quase-momentos, específico para a inserção de campo composto, é dado por (4.82).

As expansões diagramáticas das funções de vértice $1PI$ expressas em (4.31), (4.32) e (4.33) não são alteradas devido às mudanças no propagador, pois ainda estamos considerando uma teoria com interação $\lambda \phi^4$. Como estamos tratando inicialmente da versão sem massa da teoria, devemos renormalizar as funções de vértice com os momentos externos diferentes de zero em pelo menos um dos subespaços a fim de evitar as divergências no regime infravermelho. No capítulo 4, definimos tais momentos no ponto simétrico construído a partir de uma escala arbitrária κ . Devido à anisotropia do sistema, caracterizada agora no espaço recíproco pela presença do momento quártico, introduziremos escalas de momento diferentes para cada subespaço.

Podemos definir então κ_1 e κ_2 como as escalas nos subespaços não-competitivo e competitivo, respectivamente. Para remover de forma independente as divergências no regime ultravioleta presentes em cada subespaço dois conjuntos de condições de normalização são necessários para as funções de vértice [75]. No primeiro conjunto, tomamos os momentos externos p_i ao longo do subespaço não-competitivo no ponto simétrico PS_1 determinado a partir de $p_i \cdot p_j = \frac{\kappa_1^2}{4}(4\delta_{ij} - 1)$, enquanto escolhemos $k_i = 0$ no subespaço competitivo. Os quase-momentos externos, como antes, podem ser escolhidos convenientemente como: $i_1 = i_2 = i$ para $\Gamma^{(2)}$ e $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i$ para $\Gamma^{(4)}$. Para os diagramas referentes ao campo composto Φ^2 , podemos fazer também $i_1 = i_2 = i$ como em $\Gamma^{(2)}$, mas, devemos levar em conta a construção apresentada em (4.97), que é motivada pela observação das três possibilidades para j : $j = 0$, $j = 2i$ e $j = -2i$. Dessa forma, o primeiro conjunto de condições de normalização é dado por:

$$\Gamma_{R(1)}^{(2)}(0, i; g_1) = \sigma^2 i^2, \quad (6.6a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{R(1)}^{(2)}(k = 0, p, i; g_1) \right|_{p^2 = \kappa_1^2} = 1, \quad (6.6b)$$

$$\Gamma_{R(1)}^{(4)}(k_i = 0, p_i, i; g_1) \Big|_{PS_1} = 3\sigma g_1, \quad (6.6c)$$

$$\bar{\Gamma}_{R(1)}^{(2,1)}(p_1, p_2, p', i, j; g_1) \Big|_{\overline{PS}_1} = \frac{3}{2}\tau, \quad (6.6d)$$

onde definimos:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{R(1)}^{(2,1)}(p_1, p_2, p', i, j; g_1) \equiv & \frac{1}{2} \left[\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(p_1, p_2, p', i, 2i; g_1) + \Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(p_1, p_2, p', i, -2i; g_1) \right] + \\ & + \tau \Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(p_1, p_2, p', i, 0; g_1). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Para cada uma das funções $\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}$ descritas acima temos:

$$\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(\kappa_1, \kappa_1, 2\kappa_1, i, 2i; g_1) = \Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(\kappa_1, \kappa_1, -2\kappa_1, i, -2i; g_1) = \frac{\tau}{2}; \quad (6.8a)$$

$$\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(\kappa_1, \kappa_1, 0, i, 0; g_1) = 1. \quad (6.8b)$$

O ponto simétrico $\overline{PS}_1$ inclui o momento externo p' referente ao campo composto Φ^2 obedecendo a: $p'^2 = (p_1 + p_2)^2 = \kappa_1^2$.

O segundo conjunto de condições de normalização é construído de forma análoga. Definimos inicialmente o ponto simétrico PS_2 através de $k_i \cdot k_j = \frac{\kappa_2^2}{4}(4\delta_{ij} - 1)$. Nesse caso, os momentos do subespaço não-competitivo podem ser feitos iguais a zero. Portanto, fazendo a mesma escolha para os quase-momentos, levando em consideração também as condições de contorno, escrevemos:

$$\Gamma_{R(2)}^{(2)}(0, i; g_2) = \sigma^2 i^2, \quad (6.9a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial(k^2)^2} \Gamma_{R(2)}^{(2)}(k, p=0, i; g_2) \right|_{k^2=\kappa_2^2} = 1, \quad (6.9b)$$

$$\Gamma_{R(2)}^{(4)}(k_i, p_i=0, i; g_1) \Big|_{PS_2} = 3\sigma g_2, \quad (6.9c)$$

$$\bar{\Gamma}_{R(2)}^{(2,1)}(k_1, k_2, k', i, j; g_2) \Big|_{\overline{PS}_2} = \frac{3}{2}\tau, \quad (6.9d)$$

onde temos analogamente $(k'^2)^2 = [(k_1 + k_2)^2]^2 = \kappa_2^4$ na última equação. Assim, temos as mesmas definições listadas em (6.76) com a troca de κ_1 por κ_2 .

Segue da separação em dois conjuntos de condições de normalização que as constantes de renormalização $Z_{\Phi(n)}^{(\tau)}$, $Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}$ e, conseqüentemente, $\bar{Z}_{\Phi^2(n)}^{(\tau)} = Z_{\Phi(n)}^{(\tau)} Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}$ devem ser distintas, onde o índice n identifica o subespaço tratado. Quando $n = 1$, estaremos nos referindo às constantes de renormalização do subespaço sem competição enquanto que $n = 2$ refere-se às constantes do subespaço competitivo. É importante mencionar que as constantes de acoplamento, representadas agora por g_n , também são consideradas distintas para cada subespaço.

O procedimento para determinação das constantes de renormalização segue os mesmos passos delineados na seção 2.7. Definimos Λ_n como os cortes nos momentos em termos dos quais as divergências no ultravioleta são expressas no subespaço não-competitivo ($n = 1$) e competitivo ($n = 2$). Portanto, o correspondente à equação (2.146) e (4.284) será aqui escrito como:

$$\Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; \kappa_n, g_n) = \left(Z_{\Phi(n)}^{(\tau)} \right)^{\frac{E}{2}} \left(Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)} \right)^M \Gamma_{(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; \lambda_n, \Lambda_n), \quad (6.10)$$

onde $q_{l(n)}$ ($l = 1, \dots, E$) e $Q_{l'(n)}$ ($l' = 1, \dots, M$) estão associados aos momentos externos devido a uma função de vértice de E pontos e à inserção de M campos compostos Φ^2 , respectivamente. A mesma correspondência também está sendo usada para os índices de quase-momento j_l e $J_{l'}$. Chamamos atenção para o fato de que $q_{l(1)}(Q_{l'(1)})$ refere-se aos $l(l')$ momentos ao longo do subespaço não-competitivo enquanto que $q_{l(2)}(Q_{l'(2)})$ são os $l(l')$ momentos ao longo do subespaço m -dimensional.

A função de vértice renormalizada ($\Gamma_{R(n)}^{(E,M)}$) em (6.10) é escrita em termos de uma expansão em potências da constante de acoplamento renormalizada (g_n). Na prática, devemos escrever expansões semelhantes àsquelas em (4.243)

$$u_{0n}^{(\tau)} = u_n(1 + a_{1n}^{(\tau)}u_n + a_{2n}^{(\tau)}u_n^2); \quad (6.11a)$$

$$Z_{\Phi(n)}^{(\tau)} = 1 + b_{2n}^{(\tau)}u_n^2 + b_{3n}^{(\tau)}u_n^3; \quad (6.11b)$$

$$\bar{Z}_{\Phi^2(n)}^{(\tau)} = 1 + c_{1n}^{(\tau)}u_n + c_{2n}^{(\tau)}u_n^2. \quad (6.11c)$$

Não estamos usando o símbolo τ para u_n ou g_n para simplificar a notação, já que a discussão a seguir não apresenta ambigüidades. As escalas de momento κ_1 e κ_2 foram utilizadas para adimensionalizar as constantes de acoplamento através de $g_n = \kappa_n^{n\epsilon_L} u_n$ e $\lambda_n = \kappa_n^{n\epsilon_L} u_{0n}$. A

substituição de (6.11) em (6.10) e a subsequente aplicação das condições de normalização (6.6) e (6.9) permitem a determinação dos coeficientes a_{in} , b_{in} e c_{in} ordem a ordem na expansão em u_n . Os resultados dessa manipulação algébrica são, simbolicamente, os mesmos encontrados em (4.263), onde devemos acrescentar apenas o índice n visto que os momentos externos das integrais de Feynman estão sendo colocados nos pontos simétricos PS_1 ($n = 1$) ou PS_2 ($n = 2$). Mostraremos os resultados explicitamente quando formos calcular os expoentes críticos do modelo.

Em contraste com as condições de normalização para uma teoria sem competição, temos duas escalas de momento diferentes que podem ser escolhidas livremente. Tal liberdade de escolha produz dois conjuntos de equações de grupo de renormalização análogas àsquelas dadas em (2.147). Usando novamente o índice n para distinguir um subespaço do outro, podemos condensar esses dois conjuntos da seguinte forma:

$$\kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} \left[\left(Z_{\Phi(n)}^{(\tau)} \right)^{-E/2} \left(Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)} \right)^{-M} \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; \kappa_n, g_n) \right]_{\lambda_n, \Lambda_n} = 0. \quad (6.12)$$

Realizando a derivação com relação a $\ln \kappa_n$ e mantendo os parâmetros λ_n e Λ_n fixos, obtemos as equações do grupo de renormalização:

$$\left[\kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} + \beta_n^{(\tau)}(g_n) \frac{\partial}{\partial g_n} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(g_n) + M \gamma_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(g_n) \right] \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; \kappa_n, g_n) = 0, \quad (6.13)$$

onde definimos as funções de Wilson como:

$$\beta_n^{(\tau)}(g_n) = \left(\kappa_n \frac{\partial g_n}{\partial \kappa_n} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}, \quad (6.14a)$$

$$\gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(g_n) = \left(\kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} \ln Z_{\Phi(n)}^{(\tau)} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}, \quad (6.14b)$$

$$\gamma_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(g_n) = \left(\kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} \ln Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n}. \quad (6.14c)$$

A equação (6.13) está relacionada com transformações infinitesimais do grupo de renormalização e através dela podemos determinar como as funções de vértice escalam com os momentos externos. Tal escalamento gera dois fluxos nas constantes de acoplamento (um para g_1 e outro para g_2) os quais são controlados pela função $\beta_n^{(\tau)}(g_n)$. No regime infravermelho, as constantes g_n fluem para os pontos fixos g_n^* dados pela condição $\beta_n^{(\tau)}(g_n^*) = 0$. Além disso, as funções de vértice escalam de forma homogênea, fornecendo uma teoria invariante por escala e de onde podemos extrair os expoentes η_{L2} e ν_{L2} para o subespaço sem competição e os correspondentes η_{L4} e ν_{L4} para o subespaço competitivo.

Para os nossos objetivos de cálculo, é mais conveniente escrever as equações dadas em (6.13) em termos das constantes de acoplamento u_n adimensionais. Portanto, usando $g_n = \kappa_n^{n\epsilon_L} u_n$, podemos reescrevê-las como:

$$\left[\kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} + \beta_n^{(\tau)}(u_n) \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n) + M \gamma_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(u_n) \right] \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \kappa_n) = 0, \quad (6.15)$$

onde as funções de Wilson passam a ser escritas de uma forma semelhante àquelas dadas em (4.241):

$$\beta_n^{(\tau)}(u_n) = -n\epsilon_L \left(\frac{\partial \ln u_{0n}^{(\tau)}}{\partial u_n} \right)^{-1}, \quad (6.16a)$$

$$\gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n) = \beta_n^{(\tau)}(u_n) \frac{\partial \ln Z_{\Phi(n)}^{(\tau)}}{\partial u_n}, \quad (6.16b)$$

$$\gamma_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(u_n) = -\beta_n^{(\tau)}(u_n) \frac{\partial \ln Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}}{\partial u_n}. \quad (6.16c)$$

Além disso, a fim de obter os expoentes ν_{L2} e ν_{L4} , é interessante definir:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(u_n) \equiv -\beta_n^{(\tau)}(u_n) \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}}{\partial u_n} \quad (6.17)$$

Substituindo as expansões dadas em (6.11) nas definições (6.16a-b) e (6.17), chegamos aos seguintes resultados:

$$\beta_n^{(\tau)}(u_n) = -n\epsilon_L u_n \{1 - a_{1n}^{(\tau)} u_n + 2[(a_{1n}^{(\tau)})^2 - a_{2n}^{(\tau)}] u_n^2\}; \quad (6.18a)$$

$$\gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n) = -n\epsilon_L u_n [2b_{2n}^{(\tau)} u_n + (3b_{3n}^{(\tau)} - 2b_{2n}^{(\tau)} a_{1n}^{(\tau)}) u_n^2]; \quad (6.18b)$$

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(u_n) = n\epsilon_L u_n \{c_{1n}^{(\tau)} + [2c_{2n}^{(\tau)} - (c_{1n}^{(\tau)})^2 - a_{1n}^{(\tau)} c_{1n}^{(\tau)}] u_n\}. \quad (6.18c)$$

Podemos observar a grande semelhança das expressões acima com as equações dadas em (4.272), exceto que a função $\beta_n^{(\tau)}(u_n)$, assim como as demais funções de Wilson, agora dependem explicitamente do subespaço no qual as transformações do grupo de renormalização estão sendo realizadas. Entretanto, é necessário frisar que as integrais de Feynman de 1 e 2 *loops* que contribuem para a função de vértice de 4 pontos e geram, portanto, os coeficientes $a_{1n}^{(\tau)}$ e $a_{2n}^{(\tau)}$ não possuem dependência em n nos seus propagadores (ver (6.5)). Além disso, como os resultados devem ser calculados nos pontos simétricos $PS1$ ou $PS2$, sendo que a escala de momento κ_n é arbitrária, podemos aplicar $\kappa_n = 1$ e, conseqüentemente, os resultados dessas integrais nos pontos simétricos serão iguais. Logo, os pontos fixos em ambos os subespaços, antes vistos como distintos, terão o mesmo valor, pois a dependência de $\beta_n^{(\tau)}(u_n)$ em n é cancelada ao utilizarmos

a condição para o ponto fixo ($\beta_n^{(\tau)}(u_n^*) = 0$). Na próxima seção mostraremos de fato como tal procedimento ocorre ao calcularmos as integrais citadas.

Depois que obtivermos o ponto fixo não trivial da teoria, poderemos calcular os expoentes críticos relacionados com os comprimentos e funções de correlação a partir de equações análogas às listadas em (2.159) e (2.172), ou seja:

$$\eta_n = \gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n^*), \quad (6.19a)$$

$$\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\Phi^2 n}^{(\tau)}(u_n^*). \quad (6.19b)$$

Nas equações acima utilizamos a notação: $\eta_1 = \eta_{L2}$; $\eta_2 = \eta_{L4}$ e $\nu_1 = \nu_{L2}$; $\nu_2 = \nu_{L4}$. Segue também da análise das equações em (6.15), todo o conjunto de relações entre os demais expoentes críticos [75]. Para cada subespaço podemos escrever leis de escala semelhantes as de um sistema sem competição. Empregando o índice n para distinguir um subespaço do outro, temos as expressões:

$$\alpha_n = 2 - n \left(d - \frac{m}{2} \right) \nu_n, \quad (6.20a)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2} \nu_n \left[n \left(d - \frac{m}{2} \right) - 2n + \eta_n \right], \quad (6.20b)$$

$$\delta_n = \frac{n \left(d - \frac{m}{2} \right) + 2n - \eta_n}{n \left(d - \frac{m}{2} \right) - 2n + \eta_n}, \quad (6.20c)$$

$$\gamma_n = \nu_n (2n - \eta_n). \quad (6.20d)$$

Antes de calcularmos explicitamente η_n até ordem ϵ_L^3 e ν_n e os demais expoentes listados acima até ordem ϵ_L^2 , vamos regularizar dimensionalmente as integrais de Feynman e analisar sob quais condições podemos computar os expoentes críticos perturbativamente sem a existência do *crossover* dimensional.

6.3 Integrais de Feynman sem massa: regularização e diagramas

Como já apontado, em virtude de estarmos fixando o tamanho finito em uma das direções do subespaço não-competitivo, as regras de Feynman que tratam dos quase-momentos não são alteradas. O que de fato muda relaciona-se com os momentos contínuos, onde devemos generalizar a conservação destes para incluir o subespaço competitivo utilizando, portanto, o propagador dado em (6.5) nas integrais já referidas no capítulo 4. Assim, a contribuição mais relevante para a função de vértice de 4 pontos em 1 *loop* dada pela integral de Feynman (4.146) será modificada, com a inclusão da integração sobre os momentos quárticos do subespaço m -dimensional, para:

$$I_L(K', P, j; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(k + K')^2]^2 + (q + P)^2 + \sigma^2(l + j)^2\}[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 l^2]}, \quad (6.21)$$

onde adicionamos o rótulo L para fazer menção ao modelo Lifshitz, distinguindo-a da integral I estudada em capítulos anteriores.

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na construção da integral I_L , podemos reescrever também, com as devidas modificações, a integral dada em (4.123) para o caso Lifshitz m -axial, ou seja:

$$I'_L(K', P, i, j; \sigma) = \sigma \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(k + K')^2]^2 + (q + P)^2 + \sigma^2 i^2\}[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (6.22)$$

As duas integrais acima são elementos fundamentais na manipulação das integrais de ordens mais elevadas no números de *loops*, porquanto, estas últimas podem ser reescritas em termos de I_L e I'_L . Em consequência disso, I_L e I'_L são o ponto de partida para o estudo do limite que leva ao *crossover* dimensional. Sendo assim, nos deteremos agora ao cálculo, primeiro de I_L e depois de I'_L , no intuito de encontrar uma expansão em termos do parâmetro perturbativo ϵ_L . Para que tal expansão seja útil para as integrais em *loops* mais altos, consideraremos inicialmente todos os momentos externos arbitrários, e só ao final aplicaremos os pontos simétricos.

Observando a integral I_L em (6.21), vemos que o momento quártico traz uma dificuldade adicional, pois agora o resultado dado em (4.110) não mais se aplica. No entanto, Leite [75] propôs a denominada aproximação ortogonal que consiste em considerar os momentos pertencentes ao subespaço competitivo como sendo ortogonais entre si. Assim, devemos fazer $k \cdot K' = 0$ em cada loop de integração e dessa maneira todas as potências ímpares em k e K' são removidas do termo $[(k + K')^2]$ que passa agora a ser aproximado por:

$$[(k + K')^2]^2 \approx (k^2)^2 + 2k^2 K'^2 + (K'^2)^2.$$

É importante dizer que a aproximação ortogonal para o modelo Lifshitz m -axial é ainda a única forma de calcular analiticamente a integral I_L , assim como as demais integrais do modelo. A homogeneidade nos momentos externos das funções diagramáticas é mantida após a aplicação dessa aproximação. Além disso, os resultados, para um caso particular da segunda configuração ($m = 1$) com condições de contorno periódicas e antiperiódicas, são exatos até ordem de 1 *loop* [87]. Nessa situação, onde o tamanho finito é imposto na única direção competitiva permitida no sistema, a integral no momento quártico, que não possui solução exata, transforma-se num somatório de um quase-momento quártico, o que, com a nova representação encontrada por Silva e Leite para a função térmica generalizada, é factível. No limite de $L \rightarrow \infty$ para o resultado exato, obtem-se o mesmo resultado encontrado por Leite com o uso da aproximação ortogonal até ordem de 1 *loop*.

Utilizando, portanto, a aproximação ortogonal e introduzindo a parametrização de Feynman dada pela equação (2.120), podemos reescrever (6.21) de forma conveniente como:

$$I_L(K', P, j; \sigma) = \sigma \int_0^1 dx \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q \times \\ \times \int \frac{d^m k}{\{(k^2)^2 + 2k^2(xK'^2) + x(K'^2)^2 + q^2 + 2q \cdot (xP) + xP^2 + \sigma^2(l^2 + 2xlj + xj^2)\}^2}. \quad (6.23)$$

A integral em q e o somatório em l seguem os mesmos princípios adotados na subseção 4.4.2. Já para a integral no momento k podemos fazer uso do resultado deduzido na ref. [75], isto é:

$$\int \frac{d^m k}{[(k^2)^2 + 2ak^2 + b^2]^\beta} = \frac{S_m}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\beta - \frac{m}{4}\right)}{\Gamma(\beta)} (b^2 - a^2)^{-\beta + \frac{m}{4}}, \quad (6.24)$$

onde S_m corresponde à área de uma esfera de raio unitário em um espaço com m dimensões. Portanto, podemos reescrever (6.23) como:

$$I_L(K', P, j; \sigma) = \frac{S_m}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \int_0^1 dx \times \\ \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q}{\{q^2 + 2q \cdot (xP) + xP^2 + \sigma^2(l^2 + 2xlj + xj^2) + x(1-x)(K'^2)^2\}^{2-\frac{m}{4}}}. \quad (6.25)$$

Aplicando agora o resultado (4.110), no qual devemos fazer $d \rightarrow d-m-1$, e usando a identidade

$$\Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) S_{d-m} = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-m-1}{2}\right) S_{d-m-1} \quad (6.26)$$

obtida a partir de (4.118) e a definição $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$, podemos resolver a integral em q . Esse procedimento nos fornece o seguinte resultado:

$$I_L(K', P, j; \sigma) = \frac{S_m S_{d-m}}{8\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_L}{2}\right) \times \\ \times \int_0^1 dx \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{\sigma^2(l+jx)^2 + x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2]\}^{-\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_L}{2}}. \quad (6.27)$$

Chegamos agora ao ponto de utilizar a representação para a função térmica generalizada dada em (4.114) para o solucionar o somatório acima. Dessa forma temos:

$$I_L(K', P, j; \sigma) = \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d-m}{2}\right) \times \\ \times \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} [(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + F_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau'=0)}(K', P, j; \sigma) \right\}, \quad (6.28)$$

onde ampliamos a definição dada em (4.148) para incluir a contribuição referente ao momento K' do subespaço competitivo:

$$F_{\nu}^{(\tau')}(K', P, j; \sigma) \equiv \sigma^{-2\nu} \int_0^1 dx f_{\frac{1}{2}+\nu} \left(\tau' + xj, \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2]} \right), \quad (6.29)$$

com $f_{\frac{1}{2}+\nu}(a, b)$ definido em (4.116). Lembramos que a indicação $\tau' = 0$ em (6.28) significa que a mesma expressão é encontrada no tratamento com condições de contorno periódicas [87]. A

fim de realizarmos a expansão de (6.28) no parâmetro dimensional ϵ_L de maneira consistente, reescrevemos $\frac{d-m}{2} = 2 - \frac{m}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}$ e usamos a seguinte expansão para a função Gama:

$$\Gamma(a + bx) = \Gamma(a) [1 + bx\psi(a) + O(x^2)], \quad (6.30)$$

com $\psi(x)$ correspondendo à função dilogarítmica. Desse modo, já é possível realizar uma expansão parcial em termos de ϵ_L aplicável nas integrais de *loops* superiores que são dependentes de I_L , temos então:

$$I_L(K', P, j; \sigma) = \frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \frac{1}{\epsilon_L} \left\{ (1 + [i_2]_m \epsilon_L) [(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + \frac{\epsilon_L}{2} F_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau'=0)}(K', P, j; \sigma) \right\}, \quad (6.31)$$

onde definimos:

$$[i_2]_m = 1 + \frac{1}{2} \left[\psi(1) - \psi\left(2 - \frac{m}{4}\right) \right]. \quad (6.32)$$

O fator multiplicativo $\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)$ em (6.31) acompanha a quantidade de *loops* de integração, isto é, se uma integral contribui para um diagrama com l *loops*, estará associado a ela o mesmo fator elevado a l . Portanto, podemos absorvê-lo numa redefinição da constante de acoplamento u_n , pois, conforme vimos no capítulo 2, se a interação é do tipo $\lambda \phi^4$, uma expansão no número de *loops* corresponde a uma expansão em potências de u_n . Daqui por diante estaremos sempre utilizando essa propriedade, mesmo sem mencionar, para removermos esse fator de cada integral de Feynman.

Desprezando termos de ordem ϵ_L ou superior em (6.31), podemos escrever:

$$I_L(K', P, j; \sigma) = \frac{1}{\epsilon_L} \left\{ 1 + [i_2]_m \epsilon_L - \frac{\epsilon_L}{2} \ln [(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2] + \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau'=0)}(K', P, j; \sigma) \right\}. \quad (6.33)$$

Para utilizarmos as condições de normalização exibidas em (6.6) e (6.9), precisamos calcular o resultado anterior nos pontos simétricos PS_1 e PS_2 . Assim, para o primeiro conjunto de condições, fazemos $P^2 = \kappa_1^2$ e $K' = 0$, enquanto que, para o segundo conjunto de condições, aplicamos $(K'^2)^2 = \kappa_2^4$ e $P = 0$. Nos dois casos, deixamos ainda o quase-momento associado a j com valor arbitrário. Sem perda de generalidade, podemos fixar as escalas de momento em $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, cujo efeito é fazer com que (6.33) tenha o mesmo resultado nos dois pontos de simetria:

$$I_{LPS_1}(j; \sigma) = I_{LPS_2}(j; \sigma) = \frac{1}{\epsilon_L} \left[1 + [i_2]_m \epsilon_L - \frac{\epsilon_L}{2} \ln(1 + \sigma^2 j^2) + \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau'=0)}(1, 0, j; \sigma) \right]. \quad (6.34)$$

Um ponto importante, no que diz respeito à análise do *crossover* dimensional para o modelo Lifshitz m -axial, é que a definição (6.29) reduz-se a (4.148) quando utilizamos os pontos simétricos. Desse modo, $F_0^{(\tau'=0)}(1, 0, j; \sigma)$, exibido em (6.34), é igual àquele apresentado em

(4.151) com $\kappa = 1$. Logo, no que depende desse termo de correção, nada muda em relação ao que foi visto no capítulo 4. Além disso, podemos observar em (6.34) que, nos pontos de simetria, há ainda uma completa separação entre os termos associados ao *bulk* e os termos de correção de tamanho finito. Note também que $[i_2]_m$ surge como efeito das interações competitivas. Para $m = 0$, ou seja, na ausência do subespaço competitivo, a definição (6.32), que não deve ser confundida ou associada com os quase-momentos, resulta em $[i_2]_0 = 1/2$, o que recupera a expansão conhecida para a integral $I_{PS}(\kappa = 1, i; \sigma)$ apresentada em (4.151).

Vamos agora proceder com o desenvolvimento da integral I'_L apresentada em (6.22). Utilizando a aproximação ortogonal, podemos escrever:

$$I'_L(K', P, i, j; \sigma) = \sigma \int_0^1 dx \int d^{d-m-1} q \times \\ \times \int \frac{d^m k}{\{(k^2)^2 + 2k^2(xK'^2) + x(K'^2)^2 + q^2 + 2q \cdot (xP) + xP^2 + \sigma^2[x(i^2 - j^2) + j^2]\}^2}. \quad (6.35)$$

Resolvendo a integral em k através de (6.24), obtemos:

$$I'_L(K', P, i, j; \sigma) = \frac{S_m}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \int_0^1 dx \times \\ \times \sigma \int \frac{d^{d-m-1} q}{\{q^2 + 2q \cdot (xP) + xP^2 + \sigma^2[x(i^2 - j^2) + j^2] + x(1-x)(K'^2)^2\}^{2-\frac{m}{4}}}. \quad (6.36)$$

Recorrendo agora à expressão (4.110) para resolver a integral em q , encontramos:

$$I'_L(K', P, i, j; \sigma) = \frac{S_m S_{d-m}}{8\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_L}{2}\right) \times \\ \times \sigma \int_0^1 dx \{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2] + \sigma^2[x(i^2 - j^2) + j^2]\}^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon_L}{2}}. \quad (6.37)$$

Realizando as devidas expansões e desprezando os termos lineares em ϵ_L , podemos escrever:

$$I'_L(K', P, i, j; \sigma) = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 dx \{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2] + x\sigma^2 i^2 + (1-x)\sigma^2 j^2\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.38)$$

Ainda precisamos calcular o resultado anterior nos pontos simétricos PS_1 e PS_2 . Temos então:

$$I'_{LPS_1}(i, j; \sigma) = I'_{LPS_2}(i, j; \sigma) = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 dx [x(1-x) + x\sigma^2 i^2 + (1-x)\sigma^2 j^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.39)$$

Comparando o lado direito da expressão acima com (4.154), vemos que, ao aplicar os pontos simétricos em I'_L , o resultado é o mesmo encontrado para a integral I' do caso sem competição. Isso evidencia que a integral I'_L , assim como a integral I' , surge estritamente como resposta às

condições de contorno aplicadas, não sendo afetada pelas interações competitivas. Portanto, os resultados apresentados na subseção 4.6.2, com respeito aos limites do termo de correção de tamanho finito quando $L \rightarrow \infty$ e $L \rightarrow 0$, continuam válidos nesse novo contexto. Logo, desde que evitemos valores pequenos para L , podemos usar o método perturbativo para calcular os expoentes críticos em termos de expansões em ϵ_L .

Todas as outras integrais de Feynman em 2 e 3 *loops* podem ser escritas para o caso Lifshitz pela mesma extensão aplicada à integral (4.146) para encontrar (6.21), ou seja, adicionando os respectivos momentos quárticos (externos e internos) nos propagadores e integrando sobre os momentos quárticos internos. Dessa forma, de posse das expansões para I_L e I'_L em termos de ϵ_L , e com o auxílio do apêndice B, a resolução dessas integrais segue de forma semelhante. Por isso, nos limitaremos à apresentação dessas integrais e dos resultados finais da regularização dimensional.

As contribuições de 2 *loops* para a função de vértice de 2 pontos podem ser determinadas a partir da generalização de (4.155) e (4.159). Escrevemos portanto:

$$D_{3L}(K', P, i; \sigma) = \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q d^m k \frac{I_L(k + K', q + P, j + i; \sigma)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2]}; \quad (6.40)$$

$$D'_{3L}(K', P, i, j; \sigma) = \sigma \int d^{d-1} q d^m k \frac{I_L(k + K', q + P, i; \sigma)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (6.41)$$

Devido às condições de normalização (6.6) e (6.9), estamos interessados nas derivadas das integrais acima com relação a P^2 e $(K'^2)^2$ nos pontos de simetria. Definindo:

$$\partial_{\kappa_1} D_{3L}(i; \sigma) \equiv \left. \frac{\partial D_{3L}(K' = 0, P, i; \sigma)}{\partial P^2} \right|_{P^2=1};$$

$$\partial_{\kappa_1} D'_{3L}(i, j; \sigma) \equiv \left. \frac{\partial D'_{3L}(K' = 0, P, i, j; \sigma)}{\partial P^2} \right|_{P^2=1},$$

e,

$$\partial_{\kappa_2} D_{3L}(i; \sigma) \equiv \left. \frac{\partial D_{3L}(K', P = 0, i; \sigma)}{\partial (K'^2)^2} \right|_{(K'^2)^2=1};$$

$$\partial_{\kappa_2} D'_{3L}(i, j; \sigma) \equiv \left. \frac{\partial D'_{3L}(K', P = 0, i, j; \sigma)}{\partial (K'^2)^2} \right|_{(K'^2)^2=1},$$

podemos expressar essas derivadas de maneira geral por:

$$\partial_{\kappa_n} D_{3L}(i; \sigma) = -\frac{1}{8\epsilon_L} \left[1 + \frac{\epsilon_L}{4} + 2[i_2]_m \epsilon_L - 2\epsilon_L W_0^{(\tau'=0)}(i; \sigma) \right], \quad (6.42)$$

$$\partial_{\kappa_n} D'_{3L}(i, j; \sigma) = -\frac{\sigma\pi}{8} \left[\overline{\mathcal{P}}(i, j; \sigma) - \frac{4}{\sigma\pi} \mathcal{M}'_0(i, j; \sigma) \right]. \quad (6.43)$$

Observe que não há diferença entre os resultados para $n = 1$ e $n = 2$. A única mudança em (6.42) com relação aos resultados correspondentes no capítulo 4 é o fator $[i_2]_m$ associado ao *bulk*. Dessa forma temos que:

$$W_0^{(\tau'=0)}(i; \sigma) = \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma^2 i^2) - \overline{F}_0^{(\tau'=0)}(i; \sigma) + 2F_0^{(\tau'=0)}(i; \sigma).$$

Devido à definição (6.29) e à alteração no propagador livre, ampliamos também a definição dada em (4.157b) para incluir o momento do subespaço competitivo, ou seja:

$$F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(i; \sigma) \equiv \partial_{\kappa_1} F_{\alpha,1}^{(\tau'=0)}(K' = 0, P, i; \sigma) = \partial_{\kappa_2} F_{\alpha,1}^{(\tau'=0)}(K', P = 0, i; \sigma), \quad (6.44)$$

onde, em analogia com (4.158), definimos:

$$F_{\alpha,\beta}^{(\tau'=0)}(K', P, i; \sigma) \equiv \frac{\sigma}{\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)} \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(K' + k, P + q, j + i; \sigma)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2]^{\beta}}. \quad (6.45)$$

Os termos $\overline{\mathcal{P}}(i, j; \sigma)$ e $\mathcal{M}'_0(i, j; \sigma)$ em D'_{3L} são os mesmos que aparecem em (4.160) para $\kappa = 1$, sendo que a definição em (4.161b) é também ampliada para:

$$\mathcal{M}'_{\alpha}(i, j; \sigma) \equiv \partial_{\kappa_1} \mathcal{M}_{\alpha,1}(K' = 0, P, i, j; \sigma) = \partial_{\kappa_2} \mathcal{M}_{\alpha,1}(K', P = 0, i, j; \sigma), \quad (6.46)$$

onde temos:

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}(K', P, i, j; \sigma) \equiv \frac{\sigma}{\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(K' + k, P + q, i; \sigma)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2]^{\beta}}. \quad (6.47)$$

Ainda, para a função de vértice de 2 pontos, as contribuições relevantes do diagrama em 3 *loops* para o cálculo dos expoentes críticos são dadas em termos das seguintes integrais:

$$D_{5L}(K', P, i; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{[I_L(k, q, l; \sigma)]^2}{\{[(k - K')^2]^2 + (q - P)^2 + \sigma^2(l - i)^2\}}, \quad (6.48)$$

$$D'_{5L}(K', P, i, j; \sigma) = \sigma \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{[I_L(k, q, i; \sigma)]^2}{\{[(k - K')^2]^2 + (q - P)^2 + \sigma^2 j^2\}}, \quad (6.49)$$

$$D''_{5L}(K', P, i, j; \sigma) = \sigma \int d^{d-m-1} q_1 d^m k_1 \frac{1}{[(k_1^2)^2 + q_1^2 + \sigma^2 i^2]} \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q_2 d^m k_2 \frac{I_L(k_1 + k_2, q_1 + q_2, l + i; \sigma)}{\{[(k_1 + k_2 + K')^2]^2 + (q_1 + q_2 + P)^2 + \sigma^2(l + j)^2\} [(k_2^2)^2 + q_2^2 + \sigma^2 l^2]}. \quad (6.50)$$

Para sermos “econômicos” com as equações, não iremos exibir a integral $\overline{D}_{5L}''$, visto que ela difere de D_{5L}'' por $j \rightarrow -j$, o que não acarreta alteração no resultado até a ordem requerida. A integral D_{5L}'' para o caso Lifshitz m -axial, que corresponde a D_5''' dada em (4.61) para o sistema sem competição, não contribui para o cálculo dos expoentes críticos, pois é regular no limite $\epsilon_L \rightarrow 0$ e, portanto, torna-se desnecessária sua apresentação aqui.

As expansões em ϵ_L para as derivadas das integrais acima nos pontos simétricos foram deduzidas através da utilização da aproximação ortogonal e são dadas, respectivamente, por:

$$\partial_{\kappa_n} D_{5L}(i; \sigma) = -\frac{1}{6\epsilon_L^2} \left[1 + \frac{\epsilon_L}{2} + 3[i_2]_m \epsilon_L - 3\epsilon_L W_0^{(\tau'=0)}(i; \sigma) \right], \quad (6.51)$$

$$\partial_{\kappa_n} D'_{5L}(i, j; \sigma) = -\frac{\sigma\pi}{4\epsilon_L} \left[\overline{\mathcal{P}}(i, j; \sigma) - \frac{4}{\pi\sigma} \mathcal{M}'_0(i, j; \sigma) \right], \quad (6.52)$$

$$\partial_{\kappa_n} D''_{5L}(i, j; \sigma) = -\frac{\sigma\pi}{8\epsilon_L} \left[\overline{\mathcal{P}}(j, i; \sigma) - \frac{4}{\pi\sigma} \mathcal{M}'_0(j, i; \sigma) \right]. \quad (6.53)$$

Verificamos novamente que, nos pontos de simetria, as soluções independem do subespaço tratado.

As contribuições relevantes, em ordem de 2 *loops*, para a função de vértice de 4 pontos podem ser obtidas de (4.163) e (4.165) pela inclusão dos momentos quárticos, o que resulta em:

$$I_{4L}(K, K', P, P', i, j; \sigma) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(K' - k)^2]^2 + (q - P)^2 + \sigma^2(l - i)^2\}} \times \\ \times \frac{I_L(K + k, P' + q, l + j; \sigma)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 l^2]} \quad (6.54)$$

$$I'_{4L}(K', K, P, P', i, j, l; \sigma) = \sigma \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k I_L(K + k, q + P', l; \sigma)}{\{[(K' - k)^2]^2 + (q - P)^2 + \sigma^2 i^2\} [(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (6.55)$$

As integrais acima são calculadas usando novamente a aproximação ortogonal. Nesse caso, devemos ter $K \cdot k = K' \cdot k = 0$. Suas expansões finais em ϵ_L , já nos pontos simétricos, são dadas, respectivamente, por:

$$I_{4L PS_n}(i; \sigma) = \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon_L}{2} + 2[i_2]_m \epsilon_L - \epsilon_L \ln(1 + \sigma^2 i^2) + \epsilon_L F_0^{(\tau'=0)}(i; \sigma) \right\}. \quad (6.56)$$

$$I'_{4L PS_n}(i, j; \sigma) = \frac{\sigma}{2\epsilon_L} \int_0^1 dy [y(1 - y) + y\sigma^2 i^2 + (1 - y)\sigma^2 j^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.57)$$

A integral I''_{4L} , que corresponde à I''_4 em (4.52), não será escrita aqui devido à sua regularidade para $\epsilon_L \rightarrow 0$, o que a torna desnecessária para o cálculo dos expoentes críticos que será apresentado na próxima seção.

onde, analogamente às definições dadas em (4.187) e (4.191), temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \equiv & \frac{1}{3} \left\{ 2\tau\sigma \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}} + 2\tau\sigma \int_0^1 dx [x(1-x) + x\sigma^2(2i)^2]^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ & + 4\sigma \int_0^1 dx [x(1-x) + x\sigma^2 i^2 + (1-x)\sigma^2 i^2]^{-\frac{1}{2}} + 2F_0^{(\tau'=0)}(0; \sigma) + \\ & \left. + F_0^{(\tau'=0)}(2i; \sigma) - \ln[4\sigma^2 i^2 + 1] \right\}. \quad (6.59a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_0^{(\tau)}(i; \sigma) \equiv & W_0^{(\tau'=0)}(i; \sigma) - \frac{3}{2}\sigma\pi \left\{ [\bar{\mathcal{P}}(0, i; \sigma) + \tau\bar{\mathcal{P}}(i, 0; \sigma)] + \right. \\ & \left. - \frac{4}{\sigma\pi} [\mathcal{M}'_0(0, i; \sigma) + \tau\mathcal{M}'_0(i, 0; \sigma)] \right\}. \quad (6.59b) \end{aligned}$$

A expressão em (6.59a), após a resolução das integrais restantes, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) = & \frac{1}{3} \left\{ 2\sigma\pi\tau + 8\sigma \arctan\left(\frac{1}{2\sigma i}\right) + 4\tau\sigma \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{4\sigma^2 i^2 + 1}}\right) + 2F_0^{(\tau'=0)}(0; \sigma) + \right. \\ & \left. + F_0^{(\tau'=0)}(2i; \sigma) - \ln[4\sigma^2 i^2 + 1] \right\}. \quad (6.60) \end{aligned}$$

Vale ressaltar que, mesmo com a inclusão do subespaço competitivo, as funções que contribuem para o termo de correção de tamanho finito não foram alteradas, dados os resultados da regularização dimensional exibidos aqui para as integrais de Feynman e pela comparação direta de (6.60) com (4.216). Sendo assim, todas as manipulações delineadas para o sistema sem competição, no que diz respeito ao tamanho finito e às condições de contorno, são apropriadas e podem ser utilizadas nesse cenário, pois, apenas o termo de *bulk* foi alterado. Portanto, é suficiente considerar $\sigma = \frac{\pi}{L}$ finito para garantir a validade da expansão em ϵ_L .

6.4 Expoentes críticos para o modelo Lifshitz m -axial com NBC e DBC

A partir dos diagramas expressos em termos das soluções da regularização dimensional, podemos calcular os expoentes críticos usando a estrutura apresentada na seção 6.2. Para chegarmos ao nosso objetivo, vamos primeiramente calcular as funções de Wilson. Os coeficientes $a_{1n}^{(\tau)}$ e $a_{2n}^{(\tau)}$ podem ser obtidos de expressões como (4.263a-b), sendo que devemos substituir as integrais que constituem $A_1^{(\tau)}$, $A_2^{(1)(\tau)}$, $A_2^{(2)(\tau)}$ e $B_2^{(\tau)}$ pelas respectivas integrais correspondentes do caso Lifshitz calculadas na seção anterior. Portanto, implementando as modificações pelo uso dos resultados dados em (6.58), obtemos as seguintes expressões:

$$a_{1n}^{(\tau)} = \frac{N+8}{6\epsilon_L} \left[1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right]; \quad (6.61a)$$

$$a_{2n}^{(\tau)} = \left(\frac{N+8}{6\epsilon_L} \right)^2 - \frac{3N+14}{24\epsilon_L} + \frac{2}{\epsilon_L} \left(\frac{N+8}{6} \right)^2 \left[[i_2]_m + \frac{1}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right]. \quad (6.61b)$$

Como podemos observar, os coeficientes acima não dependem do subespaço tratado. Substituindo os resultados anteriores na equação (6.18a), escrevemos a função beta de Wilson como:

$$\beta_n^{(\tau)}(u_n) = -nu_n \left\{ \epsilon_L - \frac{N+8}{6} \left[1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right] u_n + \frac{3N+14}{12} u_n^2 \right\}. \quad (6.62)$$

Aplicando agora a condição para o ponto fixo ($\beta_n^{(\tau)}(u_n^*) = 0$), obtemos:

$$u_n^* = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left[1 + \frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} \epsilon_L - [i_2]_m \epsilon_L - \frac{\epsilon_L}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right]. \quad (6.63)$$

Podemos observar claramente que a dependência em n na expressão anterior não existe. Portanto, a condição que utilizamos para determinar o ponto fixo não-trivial da teoria fornece um resultado independente do subespaço no qual estamos aplicando as condições de normalização. Dessa forma, vemos que o reescalamento no infravermelho faz com que as constantes de acoplamento u_1 e u_2 convirjam para um mesmo valor dado pelo ponto fixo estável expresso em (6.63). Sendo assim, podemos definir simplesmente que $u_n^* \equiv u^*$, para caracterizar essa propriedade.

Considerando a função de Wilson exposta em (6.18b), devemos calcular os coeficientes $b_{2n}^{(\tau)}$ e $b_{3n}^{(\tau)}$ através das equações (4.263b-c). Nestas, recolocamos $B_2^{(\tau)}$ e $B_3^{(\tau)}$ em termos das expressões (6.58d) e (6.58e) associadas ao caso Lifshitz m -axial. Seguindo tal procedimento, chegamos a:

$$b_{2n}^{(\tau)} = -\frac{N+2}{144\epsilon_L} \left\{ 1 + \frac{\epsilon_L}{4} - 2\epsilon_L \left[-[i_2]_m + \bar{W}_0^{(\tau)}(i; \sigma) \right] \right\}, \quad (6.64a)$$

$$b_{3n}^{(\tau)} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon_L^2} \left[1 - \frac{\epsilon_L}{4} + 3[i_2]_m \epsilon_L + \frac{3}{2} \epsilon_L \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right]. \quad (6.64b)$$

Substituindo $b_{2n}^{(\tau)}$ e $b_{3n}^{(\tau)}$ em (6.18b), obtemos:

$$\gamma_{\Phi n}^{(\tau)}(u_n) = n \frac{N+2}{72} u_n^2 \left\{ 1 + \frac{\epsilon_L}{4} - 2\epsilon_L [X_0^{(\tau)}(i, \sigma)]_m + \right. \\ \left. - \frac{N+8}{12} \left[1 - 4[X_0^{(\tau)}(i, \sigma)]_m - 4[i_2]_m - 2\bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right] u_n \right\}, \quad (6.65)$$

onde, por conveniência algébrica, definimos: $[X_0^{(\tau)}(i, \sigma)]_m \equiv -[i_2]_m + \bar{W}_0^{(\tau)}(i; \sigma)$.

Realizando procedimento análogo ao anterior, encontramos para os coeficientes $c_{1n}^{(\tau)}$ e $c_{2n}^{(\tau)}$, constituintes da função de Wilson dada em (6.18c), as seguintes expressões:

$$c_{1n}^{(\tau)} = \frac{N+2}{6\epsilon_L} \left[1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right], \quad (6.66a)$$

$$c_{2n}^{(\tau)} = \frac{N^2 + 7N + 10}{36\epsilon_L^2} - \frac{N + 2}{24\epsilon_L} + \frac{N^2 + 7N + 10}{18\epsilon_L} \left[[i_2]_m + \frac{1}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right]. \quad (6.66b)$$

Usando $c_{1n}^{(\tau)}$ e $c_{2n}^{(\tau)}$ na equação (6.18c), calculamos a última função de Wilson que pode ser expressa por:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2 n}^{(\tau)}(u_n) = n \frac{N + 2}{6} \left[1 + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \bar{\zeta}_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; \sigma) \right] u_n - n \frac{N + 2}{12} u_n^2. \quad (6.67)$$

Observe que, embora o ponto fixo não dependa de n , as funções de Wilson $\gamma_{\Phi n}^{(\tau)}(u_n)$ e $\bar{\gamma}_{\Phi^2 n}^{(\tau)}(u_n)$ dependem explicitamente do parâmetro que distingue o subespaço sem competição ($n = 1$) do subespaço competitivo ($n = 2$).

Os expoentes críticos podem ser obtidos então pelo uso das equações dadas em (6.19). Substituindo, portanto, o ponto fixo $u_n^* = u^*$ relacionado em (6.63) no resultado (6.65), obtemos, para o caso Lifshitz m -axial:

$$\eta_1 = \frac{\eta_2}{2} = \frac{N + 2}{2(N + 8)^2} \epsilon_L^2 \left[1 - \frac{\epsilon_L}{4} + \frac{6(3N + 14)}{(N + 8)^2} \epsilon_L \right]. \quad (6.68)$$

Substituindo agora u^* em (6.67), calculamos:

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2 n}^{(\tau)}(u^*) = n \frac{N + 2}{N + 8} \epsilon_L \left[1 + \frac{6(N + 3)}{(N + 8)^2} \epsilon_L \right]. \quad (6.69)$$

A partir de (6.19), podemos calcular ν_1 e ν_2 até ordem ϵ_L^2 :

$$\nu_1 = 2\nu_2 = \frac{1}{2} + \frac{N + 2}{4(N + 8)} \epsilon_L + \frac{(N + 2)(N^2 + 23N + 60)}{8(N + 8)^3} \epsilon_L^2. \quad (6.70)$$

Os demais expoentes listados em (6.20) podem ser calculados pela substituição dos resultados (6.68) e (6.70). Obtemos portanto:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{4 - N}{2(N + 8)} \epsilon_L - \frac{(N + 2)(N^2 + 30N + 56)}{4(N + 8)^3} \epsilon_L^2, \quad (6.71a)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(N + 8)} \epsilon_L + \frac{(N + 2)(2N + 1)}{2(N + 8)^3} \epsilon_L^2, \quad (6.71b)$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 3 + \epsilon_L + \frac{N^2 + 14N + 60}{2(N + 8)^2} \epsilon_L^2, \quad (6.71c)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 + \frac{N + 2}{2(N + 8)} \epsilon_L + \frac{(N + 2)(N^2 + 22N + 52)}{4(N + 8)^3} \epsilon_L^2. \quad (6.71d)$$

É importante perceber que os fatores relacionados com o índice n foram cancelados, resultando, ao contrário do que ocorreu com η_n e ν_n , em expoentes críticos idênticos nos dois subespaços.

Essa igualdade é coerente, visto que esses expoentes críticos estão associados às funções resposta, que mensuram características do sistema como um todo, por exemplo, a capacidade térmica. Duas outras características dos expoentes resultantes da teoria no ponto de Lifshitz m -axial merecem destaque aqui. Em primeiro lugar, os expoentes críticos calculados não possuem dependência tanto nas condições de contorno quanto no tamanho finito L . O outro ponto importante, o qual surge em consequência do primeiro, refere-se à igualdade dos nossos resultados com aqueles encontrados na referência [75], calculados para um sistema infinito, assim como os encontrados na referência [87], desenvolvidos para um sistema submetido a condições de contorno periódicas e antiperiódicas. Tal equivalência nos mostra que a presença de uma dimensão compacta no sistema não altera a classe de universalidade caracterizada pelo conjunto de parâmetros (N, d, m) , mesmo que o sistema esteja submetido a condições de contorno mais “rígidas”, como é o caso das condições de contorno de Neumann ou Dirichlet. Frisamos porém que as conclusões e características abordadas acima só são válidas se estivermos fora da região de *crossover* dimensional, associada a pequenos valores de L .

6.5 Formulação da teoria na região crítica de Lifshitz m -axial com NBC e DBC

Prosseguindo com a nossa análise sobre o efeito do tamanho finito no *crossover* dimensional e na classe de universalidade para sistemas do tipo Lifshitz m -axial, vamos agora considerar o sistema acima da temperatura crítica, isto é, uma teoria massiva. Estamos ainda na região crítica de Lifshitz pois, embora tenhamos nesse caso $\mu^2 > 0$, manteremos $\delta_0 = 0$ na lagrangiana (6.1). Mesmo com a massa μ diferente de zero, a instabilidade causada pela condição $\delta_0 = 0$ no espaço dos momentos elimina os termos quadráticos dos m eixos competitivos e permite a redefinição da escala de momento ao longo desses eixos com dependência quártica [75].

Para abordarmos o problema do tamanho finito e da aplicação das condições de contorno de Neumann e Dirichlet na teoria massiva, iremos nos basear no trabalho de Carvalho e Leite [88], os quais propuseram um método de renormalização e análise das equações de Callan-Symanzik para a teoria de campos massivos para descrever sistemas competitivos na linha crítica de Lifshitz. Nessa situação, dois conjuntos de condições de renormalização, semelhantes a (6.6) e (6.9), continuam sendo necessários para a remoção das divergências no regime ultravioleta em ambos os subespaços competitivo e não-competitivo.

Com o desenvolvimento das seções anteriores, vimos que, na teoria sem massa, duas escalas de momento (κ_1 e κ_2) foram utilizadas na construção dos pontos simétricos PS_1 e PS_2 , nos quais as funções de vértice foram renormalizadas, sendo que, sem perda de generalidade, fizemos nulo o vetor momento externo do subespaço que não estava sob o processo de renormalização. Tal aplicação produziu uma natural separação em dois conjuntos independentes de partes de vértice $1PI$ renormalizadas. Em consequência, a teoria com parâmetros finitos (renormalizados) para os dois subespaços com dois comprimentos de correlação distintos (ξ_{L2} e ξ_{L4}), puderam se

originar da mesma lagrangiana. No contexto da teoria massiva as escalas κ_1 e κ_2 perdem a utilidade, pois, como feito no caso sem competição, a renormalização se dará com todos os momentos externos nulos. Logo, é imprescindível definirmos consistentemente novas escalas de momento.

Para constituirmos dois novos parâmetros que dêem conta das sutilezas de cada subespaço, podemos estender o procedimento realizado para o caso sem massa. Nesse intuito, Carvalho e Leite introduziram uma componente vetorial a mais no espaço dos momentos e utilizaram um procedimento denominado de *redução dimensional*. Com isso, as escalas desejadas entram naturalmente na teoria em termos dos parâmetros de massa μ_1 (no subespaço sem competição) e μ_2 (no subespaço competitivo). A redução dimensional mencionada consiste num método de geração de massa (μ_0) a partir de um vetor momento p de dimensão mais alta. Esse procedimento nos permite fazer $p^2 \rightarrow p^2 + \mu_0^2$, onde a última parte está agora numa dimensão mais baixa. Esse tipo de redução dimensional está implícito nos capítulos anteriores ao utilizarmos o parâmetro de massa. Entretanto, em sistemas com subespaços inequivalentes, como é o caso de sistemas competitivos do tipo Lifshitz, temos uma sutileza a mais, devido ao aparecimento da combinação $P^2 + (K'^2)^2$. Nesse caso específico, para aplicarmos a redução dimensional devemos primeiro aumentar o alcance do índice n de um vetor momento $p_{(n)}$ e atribuímos ao índice extra o valor “ $-1(n)$ ”; identificamos a massa como sendo essa nova componente do momento, ou seja, $p_{-1(n)} = \mu_n$ e introduzimos fatores extras da unidade imaginária $\mathbf{i}$ para estabelecer essa nova componente como real, assim, $\partial_{-1(n)} = \mathbf{i}p_{-1(n)} = \mathbf{i}\mu_n$. Dessa maneira, o parâmetro de massa pode ser incorporado a um vetor do tipo $P^2 + (K'^2)^2$ de duas formas: ao longo do subespaço com $n = 1$ ($p_{-1(1)} = \mu_1$), ou ao longo do subespaço com $n = 2$ ($p_{-1(2)} = \mu_2$). No primeiro caso temos $P^2 + (K'^2)^2 \rightarrow P^2 + (K'^2)^2 + \mu_1^2$. Já no segundo caso tal conclusão não é tão simples por conta do momento quártico, visto que, por analogia devemos ter $(K'^2 + p_{-1(2)}^2)^2$, sendo assim, $P^2 + (K'^2)^2 \rightarrow P^2 + K'^4 + \mu_2^4$ com a condição adicional $\{K'^2, p_{-1(2)}^2\} = 0$, onde tomamos emprestado a notação de anticomutação, geralmente utilizada para números de Grassmann, na última equação. Contudo, podemos definir o produto escalar para o índice “ $-1(2)$ ” como sendo simplesmente $K'^4 + p_{-1(2)}^4$ e assim chegarmos à mesma redução dimensional no subespaço competitivo. Portanto, aplicando essa construção, μ_1 e μ_2 terão naturalmente a mesma dimensão canônica dos respectivos momentos em cada subespaço. Denominando então M como uma escala de massa arbitrária, podemos escrever $[\mu_1] = M$ e $[\mu_2] = M^{\frac{1}{2}}$. Consequentemente, esses parâmetros devem entrar na densidade lagrangiana com potências diferentes para refletir a redefinição na escala de massa ao longo do subespaço competitivo. Definindo μ_{0n} ($n = 1, 2$) como o correspondente não-renormalizado de μ_n , reescrevemos a densidade lagrangiana encontrada em [88] da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2}(\nabla_m^2 \Phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_{(d-m-1)} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \Phi \right)^2 + \frac{1}{2} \mu_{0n}^{2n} \Phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda_n \Phi^4, \quad (6.72)$$

onde separamos a derivada em z para enfatizar que o tamanho finito está ao longo do eixo z no subespaço não-competitivo. Observamos também que estamos considerando constantes de

acoplamento λ_1 e λ_2 distintas, similarmente ao realizado no caso sem massa.

Com a escolha de 1 ou 2 para o índice n , determinamos quais são os parâmetros originais na densidade lagrangiana (6.72). De fato, para construirmos a teoria no subespaço não-competitivo com a massa μ_1 e a constante de acoplamento g_1 renormalizadas, devemos começar com μ_{01} e λ_1 . Devido à liberdade de escolha no parâmetro de massa μ_1 , a transformação do grupo de renormalização para esse subespaço se apresentará análoga a encontrada no caso sem competição, e, portanto, poderemos determinar os expoentes críticos associados com o comprimento de correlação ξ_{L2} . A temperatura reduzida $t_L \equiv \frac{T-T_L}{T_L}$ entra na teoria através de $\mu_1^2 \sim t_L$, o que em ordem zero no número de *loops* nos dá $\xi_{L2} = \sqrt{2}\mu_1^{-1} \propto t_L^{-\frac{1}{2}}$. Em contrapartida, quando $n = 2$, estaremos considerando inicialmente os parâmetros μ_{02} e λ_2 o que resultará numa teoria finita com os correspondentes parâmetros μ_2 e g_2 renormalizados e expoentes críticos associados com ξ_{L4} . Neste caso, temos $\mu_2^4 \sim t_L$ e $\xi_{L4} = \sqrt{2}\mu_2^{-1} \propto t_L^{-\frac{1}{4}}$ em zero *loop*. Note que, a dimensão de ξ_{L4} é de comprimento elevado a um meio.

O método de Carvalho e Leite foi inicialmente utilizado em sistemas do tipo Lifshitz sem restrições espaciais, mas, com os novos resultados desenvolvidos a partir do capítulo 4, poderemos ampliá-lo para incluir o tamanho finito L através das condições de contorno de Neumann ($\tau = 1$) ou Dirichlet ($\tau = -1$), assim como fizemos no caso sem massa. Novamente, temos que para cada valor de n na teoria *bare*, divergências quadráticas e logarítmicas no regime ultravioleta ocorrerão, as quais podem ser escritas em termos do corte Λ_n nos momentos. Tais divergências serão removidas através da redefinição da massa e da constante de acoplamento, além das constantes de renormalização multiplicativas $Z_{\Phi(n)}^{(\tau)}$ e $Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}$. Desse modo, as funções de vértice multiplicativamente renormalizáveis são expressas em termos das funções e dos parâmetros originais não-renormalizados na seguinte forma:

$$\Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \mu_n) = \left(Z_{\Phi(n)}^{(\tau)}\right)^{\frac{E}{2}} \left(Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}\right)^M \Gamma_{(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; \mu_{0n}, \lambda_n, \Lambda_n), \quad (6.73)$$

onde os argumentos $q_{l(n)}$, $Q_{l(n)}$, j_l e $J_{l'}$ possuem os mesmos significados apresentados no tratamento da teoria sem massa. Começando pelas condições de normalização no subespaço rotulado por $n = 1$, escrevemos:

$$\Gamma_{R(1)}^{(2)}(0, i; \mu_1, g_1) = \mu_1^2 + \sigma^2 i^2, \quad (6.74a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{R(1)}^{(2)}(k=0, p, i; \mu_1, g_1) \right|_{p=0} = 1, \quad (6.74b)$$

$$\Gamma_{R(1)}^{(4)}(0, i; \mu_1, g_1) = 3\sigma g_1, \quad (6.74c)$$

$$\bar{\Gamma}_{R(1)}^{(2,1)}(0, i, j; \mu_1, g_1) = \frac{3}{2}\tau, \quad (6.74d)$$

onde a função $\bar{\Gamma}_{R(1)}^{(2,1)}$ está definida de acordo com as expressões (6.7) e (6.76), ou seja:

$$\bar{\Gamma}_{R(1)}^{(2,1)}(0, i, j; \mu_1, g_1) \equiv \frac{1}{2} \left[\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(0, i, 2i; \mu_1, g_1) + \Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(0, i, -2i; \mu_1, g_1) \right] + \tau \Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(0, i, 0; \mu_1, g_1), \quad (6.75)$$

onde, para as funções $\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}$ descritas acima, temos:

$$\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(0, i, 2i; \mu_1, g_1) = \Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(0, i, -2i; \mu_1, g_1) = \frac{\tau}{2}; \quad (6.76a)$$

$$\Gamma_{R(1)}^{(2,1)}(0, i, 0; \mu_1, g_1) = 1. \quad (6.76b)$$

As variáveis k e p em (6.74b) simbolizam os momentos nos subespaços competitivo e não-competitivo, respectivamente. Nas outras equações já aplicamos $k = p = 0$. Com o conjunto de condições de normalização (6.74) só é possível remover as divergências ultravioletas das integrais de Feynman relacionadas ao subespaço sem competição. Assim, para eliminarmos as divergências que surgem das integrais associadas ao subespaço competitivo, o conjunto de condições a ser considerado é:

$$\Gamma_{R(2)}^{(2)}(0, i; \mu_2, g_2) = \mu_2^4 + \sigma^2 i^2, \quad (6.77a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial (k^2)^2} \Gamma_{R(2)}^{(2)}(k, p = 0, i; \mu_2, g_2) \right|_{k=0} = 1, \quad (6.77b)$$

$$\Gamma_{R(2)}^{(4)}(0, i; \mu_2, g_2) = 3\sigma g_2, \quad (6.77c)$$

$$\bar{\Gamma}_{R(2)}^{(2,1)}(0, i, j; \mu_2, g_2) = \frac{3}{2}\tau, \quad (6.77d)$$

onde a potência quártica de μ_2 em (6.77a) reflete diretamente a redefinição da escala de massa no subespaço competitivo. A definição (6.75) e, conseqüentemente, (6.76) são válidas em (6.77d) ao trocarmos $n = 1$ por $n = 2$.

Sendo os parâmetros de massa μ_1 e μ_2 arbitrários, podemos nos valer da liberdade na escolha dos mesmos para construirmos as equações de Callan-Symanzik associadas às transformações infinitesimais das duas escalas nos distintos subespaços. A partir de (6.73), levando em consideração que os parâmetros λ_n e Λ_n são independentes de μ_n , podemos escrever o análogo da equação (4.236) para o caso Lifshitz m -axial, isto é:

$$\begin{aligned} & \left(\mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n} \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \mu_n) = \\ & = \left(\mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} \right)_{\lambda_n, \Lambda_n} \left[\left(Z_{\Phi(n)}^{(\tau)} \right)^{E/2} \left(Z_{\Phi^2(n)}^{(\tau)} \right)^M \Gamma_{(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; \mu_{0n}, \lambda_n, \Lambda_n) \right]. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Após realizarmos a derivação com respeito a μ_n , seguindo de perto o que foi feito na subseção 4.7.1, e procedermos com a adimensionalização da constante de acoplamento renormalizada (não-renormalizada) através de: $g_n = \mu_n^{n\epsilon_L} u_n$ ($\lambda_n = \mu_n^{n\epsilon_L} u_{0n}$), onde u_n e u_{0n} são as respectivas constantes de acoplamento adimensionais, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[\mu_n \frac{\partial}{\partial \mu_n} + \beta_n^{(\tau)}(u_n) \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{E}{2} \gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n) + M \gamma_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(u_n) \right] \Gamma_{R(n)}^{(E,M)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}; g_n, \mu_n) \\ & = \mu_n^{2n} \left[2n - \hat{\gamma}_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n) \right] \Gamma_{R(n)}^{(E,M+1)}(q_{l(n)}, j_l, Q_{l'(n)}, J_{l'}, 0, 0; g_n, \mu_n), \quad (6.79) \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\gamma}_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n) \equiv \gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n) \left[1 + \frac{\sigma^2 i^2}{\mu_n^{2n}} \right].$$

As funções de Wilson $\beta_n^{(\tau)}(u_n)$, $\gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n)$ e $\gamma_{\Phi^2(n)}^{(\tau)}(u_n)$ em (6.79) apresentam-se idênticas às expressões escritas em (6.16). Note que, assim como ocorreu no caso sem competição, a função $\hat{\gamma}_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n)$ é, simplesmente, uma versão reescalada de $\gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n)$. No limite $L \rightarrow \infty$, ou seja, $\sigma \rightarrow 0$, vemos que $\hat{\gamma}_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n) \rightarrow \gamma_{\Phi(n)}^{(\tau)}(u_n)$, o que faz com que a equação (6.79) corresponda à encontrada por Carvalho e Leite para um sistema com as d dimensões infinitas [88]. Independentemente do subespaço tratado, o lado direito das equações de Callan-Symanzik pode ser desprezado quando os momentos externos são tomados no regime ultravioleta, o que torna a equação homogênea e a teoria invariante por escala no ponto fixo $u_{\infty n}$, o qual consideraremos, em princípio, dependente do subespaço.

Para o cálculo dos expoentes críticos na teoria massiva, utilizaremos o mesmo procedimento registrado nas seções anteriores. As representações simbólicas para as funções de Wilson, dadas em (6.18), continuam úteis nesse caso. Sendo assim, é necessário ainda expressar e regularizar as integrais de Feynman massivas relevantes a esse cálculo, para com isso encontrar os coeficientes $a_n^{(\tau)}$'s, $b_n^{(\tau)}$'s e $c_n^{(\tau)}$'s. De posse desses coeficientes poderemos determinar, explicitamente, as funções de Wilson para o caso massivo, assim como o ponto fixo $u_{\infty n}$ e, naturalmente, calcular os expoentes críticos pela substituição de u_n^* por $u_{\infty n}$ em (6.19).

6.6 Integrais de Feynman massivas: regularização e diagramas

A partir das integrais de Feynman apresentadas para o caso sem massa na seção 6.3, torna-se simples escrever seus correspondentes massivos, pois os propagadores livres em cada subespaço são alterados simplesmente pelo acréscimo da massa a eles relacionada. Assim, as contribuições

relevantes, incluindo já os dois subespaços através do parâmetro n , podem ser escritas como:

$$I_L(K', P, j; \sigma, \mu_n) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(k+K')^2]^2 + (q+P)^2 + \sigma^2(l+j)^2 + \mu_n^{2n}\}} \times \frac{1}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 l^2 + \mu_n^{2n}]}; \quad (6.80a)$$

$$I'_L(K', P, i, j; \sigma, \mu_n) = \sigma \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(k+K')^2]^2 + (q+P)^2 + \sigma^2 i^2 + \mu_n^{2n}\} [(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2 + \mu_n^{2n}]}; \quad (6.80b)$$

$$D_{3L}(K', P, i; \sigma, \mu_n) = \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q d^m k \frac{I_L(k+K', q+P, j+i; \sigma, \mu_n)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2 + \mu_n^{2n}]}; \quad (6.80c)$$

$$D'_{3L}(K', P, i, j; \sigma, \mu_n) = \sigma \int d^{d-1} q d^m k \frac{I_L(k+K', q+P, i; \sigma, \mu_n)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2 + \mu_n^{2n}]}; \quad (6.80d)$$

$$D_{5L}(K', P, i; \sigma, \mu_n) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{[I_L(k, q, l; \sigma, \mu_n)]^2}{\{[(k-K')^2]^2 + (q-P)^2 + \sigma^2(l-i)^2 + \mu_n^{2n}\}}; \quad (6.80e)$$

$$D'_{5L}(K', P, i, j; \sigma, \mu_n) = \sigma \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{[I_L(k, q, i; \sigma, \mu_n)]^2}{\{[(k-K')^2]^2 + (q-P)^2 + \sigma^2 j^2 + \mu_n^{2n}\}}; \quad (6.80f)$$

$$D''_{5L}(K', P, i, j; \sigma, \mu_n) = \sigma \int d^{d-m-1} q_1 d^m k_1 \frac{1}{[(k_1^2)^2 + q_1^2 + \sigma^2 i^2 + \mu_n^{2n}]} \times \\ \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q_2 d^m k_2 \frac{I_L(k_1+k_2, q_1+q_2, l+i; \sigma, \mu_n)}{\{[(k_1+k_2+K')^2]^2 + (q_1+q_2+P)^2 + \sigma^2(l+j)^2 + \mu_n^{2n}\}} \times \\ \times \frac{1}{[(k_2^2)^2 + q_2^2 + \sigma^2 l^2 + \mu_n^{2n}]}; \quad (6.80g)$$

$$I_{4L}(K, K', P, P', i, j; \sigma, \mu_n) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(K'-k)^2]^2 + (q-P)^2 + \sigma^2(l-i)^2 + \mu_n^{2n}\}} \times \\ \times \frac{I_L(K+k, P'+q, l+j; \sigma, \mu_n)}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 l^2 + \mu_n^{2n}]}; \quad (6.80h)$$

$$I'_{4L}(K', K, P, P', i, j, l; \sigma, \mu_n) = \sigma \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k I_L(K+k, q+P', l; \sigma, \mu_n)}{\{[(K'-k)^2]^2 + (q-P)^2 + \sigma^2 i^2 + \mu_n^{2n}\}} \times \\ \times \frac{1}{[(k^2)^2 + q^2 + \sigma^2 j^2 + \mu_n^{2n}]}. \quad (6.80i)$$

Devido à fundamental importância das contribuições I_L e I'_L , tanto para a análise do *crossover* dimensional quanto para a regularização das demais integrais, exibiremos aqui apenas a regularização destas. Começando pela integral I_L , podemos reescalar todos os seus momentos em termos do parâmetro μ_n para reescrevê-la da seguinte forma:

$$I_L(K', P, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} r_n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(k+K')^2]^2 + (q+P)^2 + r_n^2(l+j)^2 + 1\}} \times \frac{1}{[(k^2)^2 + q^2 + r_n^2 l^2 + 1]}, \quad (6.81)$$

onde definimos $r_n \equiv \frac{\sigma}{\mu_n^n}$. O reescalonamento mencionado é dado por: $\frac{K'}{\sqrt{\mu_n^n}} \rightarrow K'$ e $\frac{P}{\mu_n^n} \rightarrow P$, para o subespaço competitivo e não-competitivo, respectivamente. Aplicando um parâmetro de Feynman em (6.81) seguido da aproximação ortogonal, obtemos:

$$I_L(K', P, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} r_n \int_0^1 dx \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q \times \int \frac{d^m k}{\{(k^2)^2 + 2k^2(xK'^2) + x(K'^2)^2 + q^2 + 2q \cdot (xP) + xP^2 + r_n^2(l+xj)^2 + x(1-x)r_n^2 j^2 + 1\}^2}. \quad (6.82)$$

A integral no momento k pode ser realizada com o auxílio de (6.24), o que nos dá:

$$I_L(K', P, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} r_n \frac{S_m}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \int_0^1 dx \times \times r_n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-m-1} q}{\{q^2 + 2q \cdot (xP) + xP^2 + x(1-x)[(K'^2)^2 + r_n^2 j^2] + r_n^2(l+xj)^2 + 1\}^{2-\frac{m}{4}}}. \quad (6.83)$$

Integrando em q através do uso da equação (4.110) e utilizando (6.26) em conjunto com a definição $\epsilon_L = 4 + \frac{m}{2} - d$, chegamos ao seguinte resultado:

$$I_L(K', P, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} \frac{S_m S_{d-m}}{8\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_L}{2}\right) \times \times \int_0^1 dx r_n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{r_n^2(l+xj)^2 + x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + r_n^2 j^2] + 1\}^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon_L}{2}}. \quad (6.84)$$

Utilizando a representação da função térmica generalizada dada em (4.114) para o solucionar o somatório, encontramos:

$$I_L(K', P, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} \frac{S_m S_{d-m}}{8} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \times \times \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \int_0^1 dx \{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2] + 1\}^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + F_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau'=0)}(K', P, j; r_n) \right\}, \quad (6.85)$$

onde ampliamos a definição dada em (4.120), incluindo o momento K' do subespaço competitivo, ou seja

$$F_{\beta}^{(\tau')}(K', P, j; r_n) \equiv r_n^{-2\beta} \int_0^1 dx f_{\frac{1}{2}+\beta} \left(\tau' + xj, r_n^{-1} \sqrt{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + r_n^2 j^2] + 1} \right). \quad (6.86)$$

Utilizando a expressão (6.30) para expandir a função gama, podemos escrever um resultado parcial para I_L , em termos de ϵ_L , aplicável nas integrais de *loops* superiores. Temos portanto:

$$I_L(K', P, j; r_n, \mu_n) = \frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \times \\ \times \frac{\mu_n^{-n\epsilon_L}}{\epsilon_L} \left\{ (1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L) \int_0^1 dx \left\{ x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2 + \sigma^2 j^2] + 1 \right\}^{-\frac{\epsilon_L}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_L}{2} F_{\frac{\epsilon_L}{2}}^{(\tau'=0)}(K', P, j; r_n) \right\}, \quad (6.87)$$

onde $[i_2]_m$ é o mesmo definido em (6.32). Realizando agora as últimas expansões, admitindo apenas termos até ordem ϵ_L^0 , e anulando os momentos externos K' e P , obtemos:

$$I_L(0, 0, j; r_n, \mu_n) = \frac{\mu_n^{-n\epsilon_L}}{\epsilon_L} \left\{ 1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L - \frac{\epsilon_L}{2} \int_0^1 dx \ln[x(1-x)r_n^2 j^2 + 1] + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_L}{2} F_0^{(\tau'=0)}(0, 0, j; r_n) \right\}. \quad (6.88)$$

Note que o fator multiplicativo $\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)$ já foi removido da expressão anterior tendo em vista que podemos redefinir a constante de acoplamento para absorvê-lo, o que será feito em todas as outras integrais. Deixaremos os comentários sobre a dependência do resultado acima no parâmetro n para quando tratarmos do diagrama da função de 4 pontos em 1 *loop*, onde aparecerá o termo de correção de tamanho finito em sua forma completa.

Para atestarmos a compatibilidade, no que diz respeito aos termos de correção de tamanho finito, da teoria massiva e não-massiva, é necessário ainda a regularização da integral I'_L . A referida integral, exibida em (6.80b), pode ser reescrita através do reescalamento dos momentos, como feito em I_L , do seguinte modo:

$$I'_L(K', P, i, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} r_n \int \frac{d^{d-m-1} q d^m k}{\{[(k + K')^2]^2 + (q + P)^2 + r_n^2 i^2 + 1\}[(k^2)^2 + q^2 + r_n^2 j^2 + 1]}. \quad (6.89)$$

Utilizando um parâmetro de Feynman seguido da aproximação ortogonal, podemos escrever:

$$I'_L(K', P, i, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} r_n \int_0^1 dx \int d^{d-m-1} q \times \\ \times \int \frac{d^m k}{\{(k^2)^2 + 2k^2(xK'^2) + x(K'^2)^2 + q^2 + 2q \cdot (xP) + xP^2 + r_n^2[x(i^2 - j^2) + j^2] + 1\}^2}. \quad (6.90)$$

Integrando em k com a ajuda de (6.24), obtemos:

$$I'_L(K', P, i, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} r_n \frac{S_m}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right) \int_0^1 dx \times \\ \times \int \frac{d^{d-m-1}q}{\{q^2 + 2q \cdot (xP) + xP^2 + x(1-x)(K'^2)^2 + r_n^2[x(i^2 - j^2) + j^2] + 1\}^{2-\frac{m}{4}}}. \quad (6.91)$$

Utilizando agora a expressão (4.110) para resolver a integral em q e realizando as devidas expansões, onde desprezamos os termos lineares em ϵ_L , encontramos:

$$I'_L(K', P, i, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} \frac{r_n}{2} \int_0^1 dx \{x(1-x)[(K'^2)^2 + P^2] + r_n^2[x(i^2 - j^2) + j^2] + 1\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.92)$$

Pelo fato de estarmos tratando de uma teoria massiva podemos aplicar $K' = P = 0$, o que resulta em:

$$I'_L(0, 0, i, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-n\epsilon_L} \frac{r_n}{2} \int_0^1 dx [xr_n^2 i^2 + (1-x)r_n^2 j^2 + 1]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.93)$$

A regularização das outras integrais massivas segue os mesmos passos descritos no apêndice A, exceto pela inclusão dos momentos quárticos. Aplicando então a aproximação ortogonal, da mesma forma como realizado para I_L e I'_L acima, o procedimento torna-se similar. Portanto, nos limitaremos agora em listar os resultados da regularização das demais integrais. Para as derivadas das integrais da função de 2 pontos em 2 e 3 *loops* escrevemos:

$$\partial_{k_n} D_{3L}(i; r_n, \mu_n) = -\mu_n^{-2n\epsilon_L} \frac{1}{8\epsilon_L} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon_L + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L W_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) \right], \quad (6.94a)$$

$$\partial_{k_n} D'_{3L}(i, j; r_n, \mu_n) = -\mu_n^{-2n\epsilon_L} \frac{r_n}{4} \left[\mathcal{P}(i, j; r_n) - \frac{2}{r_n} \mathcal{L}'_0(i, j; r_n) \right], \quad (6.94b)$$

$$\partial_{k_n} D_{5L}(i; r_n, \mu_n) = -\mu_n^{-3n\epsilon_L} \frac{1}{6\epsilon_L^2} \left[1 - \frac{7}{4}\epsilon_L + 3[i_2]_m \epsilon_L + \frac{3}{2}\epsilon_L W_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) \right], \quad (6.94c)$$

$$\partial_{k_n} D'_{5L}(i, j; r_n, \mu_n) = -\mu_n^{-3n\epsilon_L} \frac{r_n}{2\epsilon_L} \left[\mathcal{P}(i, j; r_n) - \frac{2}{r_n} \mathcal{L}'_0(i, j; r_n) \right], \quad (6.94d)$$

$$\partial_{k_n} D''_{5L}(i, j; r_n, \mu_n) = -\mu_n^{-3n\epsilon_L} \frac{r_n}{4\epsilon_L} \left[\mathcal{P}(j, i; r_n) - \frac{2}{r_n} \mathcal{L}'_0(j, i; r_n) \right], \quad (6.94e)$$

onde definimos para o caso massivo:

$$\partial_{k_1} D_{3L}(i; r_n, \mu_n) \equiv \left. \frac{\partial D_{3L}(K' = 0, P, i; r_n, \mu_n)}{\partial P^2} \right|_{P^2=0};$$

$$\begin{aligned}
\partial_{k_1} D'_{3L}(i, j; r_n, \mu_n) &\equiv \left. \frac{\partial D'_{3L}(K' = 0, P, i, j; \sigma)}{\partial P^2} \right|_{P^2=0}; \\
\partial_{k_2} D_{3L}(i; r_n, \mu_n) &\equiv \left. \frac{\partial D_{3L}(K', P = 0, i; r_n, \mu_n)}{\partial (K'^2)^2} \right|_{(K'^2)^2=0}; \\
\partial_{k_2} D'_{3L}(i, j; r_n, \mu_n) &\equiv \left. \frac{\partial D'_{3L}(K', P = 0, i, j; \sigma)}{\partial (K'^2)^2} \right|_{(K'^2)^2=0}.
\end{aligned}$$

Em análogo para as integrais em 3 *loops*. Temos ainda que:

$$W_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) = G_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) - H_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) - 4F_0^{(\tau'=0)}(i; r_n),$$

onde as funções $G_0^{(\tau'=0)}(i; r_n)$ e $H_0^{(\tau'=0)}(i; r_n)$ são dadas por:

$$G_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) \equiv -\frac{1}{2} - 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \ln \left[y(1-y)i^2 + yr_n^{-2} + \frac{(1-y)}{x(1-x)} r_n^{-2} \right]; \quad (6.95a)$$

$$H_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) \equiv 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y f_{\frac{1}{2}} \left((1-y)i, r_n^{-1} \sqrt{y(1-y)r_n^2 i^2 + y + \frac{(1-y)}{x(1-x)}} \right). \quad (6.95b)$$

As expressões acima são equivalentes às que foram definidas em (4.129) para o caso sem competição.

Devido à definição (6.86) e à alteração no propagador livre, ampliamos também a definição dada em (4.129c) para incluir o momento do subespaço competitivo, ou seja:

$$F_\alpha^{(\tau'=0)}(i; r_n) \equiv \partial_{k_n} F_{\alpha,1}^{(\tau'=0)}(i; r_n), \quad (6.96)$$

onde, em analogia com (4.130), definimos:

$$\begin{aligned}
F_{\alpha,\beta}^{(\tau'=0)}(K', P, i; r_n) &\equiv \frac{r_n}{\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)} \times \\
&\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{F_\alpha^{(\tau'=0)}(K' + k, P + q, j + i; r_n)}{[(k^2)^2 + q^2 + r_n^2 j^2 + 1]^\beta}. \quad (6.97)
\end{aligned}$$

Os termos $\mathcal{P}(i, j; r_n)$ e $\mathcal{L}'_0(i, j; r_n)$ são os correspondentes dos apresentados em (4.133a) e (4.133b), respectivamente, sendo que a definição em (4.133b) é também ampliada para:

$$\mathcal{L}'_\alpha(i, j; r_n) \equiv \partial_{k_n} \mathcal{L}_{\alpha,1}(i, j; r_n) \quad (6.98)$$

onde temos:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(K', P, i, j; r_n) \equiv \frac{r_n}{\frac{S_m S_{d-m}}{4} \Gamma\left(\frac{m}{4}\right) \Gamma\left(2 - \frac{m}{4}\right)} \int d^{d-m-1} q d^m k \frac{F_\alpha^{(\tau'=0)}(K' + k, P + q, i; r_n)}{[(k^2)^2 + q^2 + r_n^2 j^2 + 1]^\beta}. \quad (6.99)$$

Por último, temos as contribuições relevantes para a função de vértice de 4 pontos em 2 loops, isto é:

$$I_{4L}(i; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-2n\epsilon_L} \frac{1}{2\epsilon_L^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2}\epsilon_L + 2[i_2]_m \epsilon_L - \epsilon_L \int_0^1 dz \ln[z(1-z)r_n^2 i^2 + 1] + \right. \\ \left. + \epsilon_L F_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) \right\}; \quad (6.100a)$$

$$I'_{4L}(i, j; r_n, \mu_n) = \mu_n^{-2n\epsilon_L} \frac{r_n}{2\epsilon_L} \int_0^1 dy [yr_n^2 i^2 + (1-y)r_n^2 j^2 + 1]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.100b)$$

Temos agora todos os elementos necessários para expressar, de forma conveniente, os diagramas de Feynman em termos de uma expansão em ϵ_L . Portanto, utilizando os resultado da regularização dimensional de I_L e I'_L para o caso massivo, podemos escrever:

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} i \\ \diagup \end{array} = (3\sigma\lambda_n) \frac{N+8}{18} \lambda_n \left\{ \frac{\mu_n^{-n\epsilon_L}}{\epsilon_L} \left[1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}, \quad (6.101)$$

onde, analogamente à (4.176), definimos:

$$\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \equiv \frac{1}{3} \left\{ 2r_n \tau + 2r_n \tau \int_0^1 dx [xr_n^2 (2i)^2 + 1]^{-\frac{1}{2}} + \frac{4r_n}{\sqrt{r_n^2 i^2 + 1}} + 2f_{\frac{1}{2}}(0, r_n^{-1}) + \right. \\ \left. + F_0^{(\tau'=0)}(2i; r_n) - \int_0^1 dx \ln[x(1-x)r_n^2 (2i)^2 + 1] \right\}. \quad (6.102)$$

A expressão acima, após a resolução das integrais restantes, pode ser reescrita como:

$$\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) = \frac{1}{3} \left\{ 2r_n \tau + \frac{4r_n \tau}{1 + \sqrt{4r_n^2 i^2 + 1}} + \frac{4r_n}{\sqrt{r_n^2 i^2 + 1}} + 2f_{\frac{1}{2}}(0, r_n^{-1}) + \right. \\ \left. + F_0^{(\tau'=0)}(2i; r_n) - 2 \left[\frac{\sqrt{1 + r_n^2 i^2}}{r_n i} \operatorname{arcsinh}(r_n i) - 1 \right] \right\}. \quad (6.103)$$

Em relação à dependência do diagrama acima em n , chamamos a atenção para a irrelevância do fator multiplicativo $\mu_n^{-n\epsilon_L}$, o qual será naturalmente cancelado devido à adimensionalização da constante de acoplamento. Ainda assim, o resultado (6.101) mostra-se dependente do subespaço, o que fica explícito pelo parâmetro r_n em $\zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n)$. Essa dependência relaciona-se com os comprimentos de correlação em cada subespaço por: $r_1^{-1} = \frac{\mu_1}{\sigma} \propto \frac{L}{\xi_{L2}}$ e $r_2^{-1} = \frac{\mu_2}{\sigma} \propto \frac{L}{\xi_{L4}^2}$. Entretanto, na teoria massiva, temos como fixos ξ_{L2} e ξ_{L4} enquanto variamos L , de modo que podemos escolher valores finitos para r_n^{-1} livremente. O resultado dessa liberdade é, de forma prática, o mesmo de escolhermos $\mu_n = 1$ desde o começo, ou seja $r_n \rightarrow \sigma$. Dessa forma, a

dependência em n observada não impõe qualquer efeito fundamental e, conseqüentemente, as funções $F_0^{(\tau'=0)}(0,0,j;r_n)$ e $f_{\frac{1}{2}}(0,r_n^{-1})$ tornam-se totalmente equivalentes às apresentadas em (4.195), possuindo os mesmos limites assintóticos quando $L \rightarrow \infty$ ou $L \rightarrow 0$, o mesmo podendo ser dito sobre todos os outros termos em (6.103). Pelo mesmo motivo, podemos afirmar que a integral I'_L surge, também no caso massivo, como resposta às condições de contorno aplicadas, não sendo afetada pelas interações competitivas. Em resumo, a existência de dois subespaços distintos é, de fato, sentida apenas pelo *bulk* que é alterado pelo aparecimento de $[i_2]_m$, sendo um resultado compatível com o sistema sem competição para $m = 0$.

Comparativamente ao caso sem massa, vemos que a inclusão do subespaço competitivo não tem efeito relevante sobre o termo de correção de tamanho finito. Todos os cálculos apresentados na subseção 4.6.1, no que diz respeito ao tamanho finito e condições de contorno, são igualmente válidos. Dessa forma, fica estabelecido, também para o caso Lifshitz m -axial, a completa equivalência entre as teorias massiva/não-massiva com relação ao *crossover* dimensional e cálculo de quantidades universais, sendo suficiente considerar $\sigma = \frac{\pi}{L}$ finito para garantir a validade da expansão em ϵ_L .

Voltando à exibição dos demais diagramas em termos das soluções das integrais de Feynman, listamos:

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} = (3\sigma\lambda_n) \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} \lambda_n^2 \left\{ \frac{\mu_n^{-n\epsilon_L}}{\epsilon_L} \left[1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}^2; \quad (6.104a)$$

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} i \\ \diagdown \end{array} = (3\sigma\lambda_n) \frac{5N + 22}{54} \lambda_n^2 \left\{ \frac{\mu_n^{-2n\epsilon_L}}{2\epsilon_L^2} \left[1 - \frac{3}{2}\epsilon_L + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}; \quad (6.104b)$$

$$\partial_{k_n} \left(\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \right) = \frac{N + 2}{18} \lambda_n^2 \left\{ \frac{-\mu_n^{-2n\epsilon_L}}{8\epsilon_L} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon_L + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}; \quad (6.104c)$$

$$\begin{aligned} \partial_{k_n} \left(\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \right) &= \frac{(N + 2)(N + 8)}{108} \lambda_n^3 \times \\ &\times \left\{ \frac{-\mu_n^{-3n\epsilon_L}}{6\epsilon_L^2} \left[1 - \frac{7}{4}\epsilon_L + 3[i_2]_m \epsilon_L + \frac{3}{2}\epsilon_L \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}; \quad (6.104d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} 2i \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} -2i \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \right) + \tau \begin{array}{c} 0 \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} &= \left(\frac{3}{2}\tau \right) \frac{N + 2}{6} \lambda_n \times \\ &\times \left\{ \frac{\mu_n^{-n\epsilon_L}}{\epsilon_L} \left[1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}; \quad (6.104e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\text{diagram with spring } 2i \text{ and } -2i \text{ and } 0 \right) + \tau \text{diagram with spring } 0 \\
& = \left(\frac{3}{2} \tau \right) \left(\frac{N+2}{6} \right)^2 \lambda_n^2 \times \\
& \times \left\{ \frac{\mu_n^{-n\epsilon_L}}{\epsilon_L} \left[1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}^2; \quad (6.104f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\text{diagram with spring } 2i \text{ and } -2i \text{ and } 0 \right) + \tau \text{diagram with spring } 0 \\
& = \left(\frac{3\tau}{2} \right) \frac{N+2}{6} \lambda_n^2 \times \\
& \times \left\{ \frac{\mu_n^{-2n\epsilon_L}}{2\epsilon_L^2} \left[1 - \frac{3}{2} \epsilon_L + 2[i_2]_m \epsilon_L + \epsilon_L \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}, \quad (6.104g)
\end{aligned}$$

onde definimos analogamente à expressão dada em (4.180):

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r_n) & \equiv W_0^{(\tau'=0)}(i; r_n) + \\
& + 6r_n \left\{ [\mathcal{P}(0, i; r_n) + \tau \mathcal{P}(i, 0; r_n)] - \frac{2}{r_n} [\mathcal{L}'_0(0, i; r_n) + \tau \mathcal{L}'_0(i, 0; r_n)] \right\}. \quad (6.105)
\end{aligned}$$

6.7 Funções de Wilson no caso Lifshitz m -axial massivo com NBC e DBC

Com os resultados explícitos para os diagramas de Feynman, podemos agora encontrar as funções de Wilson e, conseqüentemente, o ponto fixo associado ao caso massivo. Os coeficientes nas expansões das funções de Wilson, podem ser obtidos utilizando ainda as equações simbólicas dadas em (4.263), sendo que devemos substituir as soluções dos diagramas que constituem cada termo pelas respectivas soluções correspondentes do caso Lifshitz massivo. Portanto, implementando essas modificações pelo uso dos resultados encontrados na seção anterior, obtemos as seguintes expressões:

$$a_{1n}^{(\tau)} = \frac{N+8}{6\epsilon_L} \left[1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right]; \quad (6.106a)$$

$$a_{2n}^{(\tau)} = \left(\frac{N+8}{6\epsilon_L} \right)^2 - \frac{4N^2 + 73N + 298}{72\epsilon_L} + \frac{(N+8)^2}{18\epsilon_L} \left[[i_2]_m + \frac{1}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right]. \quad (6.106b)$$

Substituindo os resultados anteriores na equação (6.18a), escrevemos a função beta de Wilson massiva como:

$$\beta_n^{(\tau)}(u_n) = -nu_n \left\{ \epsilon_L - \frac{N+8}{6} \left[1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right] u_n + \frac{3N+14}{12} u_n^2 \right\}. \quad (6.107)$$

Aplicando agora a condição para o ponto fixo ($\beta_n^{(\tau)}(u_{\infty n}) = 0$), obtemos:

$$u_{\infty n} = \frac{6\epsilon_L}{N+8} \left\{ 1 + \left[\frac{3(3N+14)}{(N+8)^2} + 1 - [i_2]_m - \frac{1}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right] \epsilon_L \right\}. \quad (6.108)$$

Como podemos escolher livremente valores finitos para r_n , a dependência do ponto fixo em n é irrelevante e, portanto, podemos fazer $u_{\infty n}$ independente do subespaço sob consideração, ou seja, $u_{\infty n} \equiv u_{\infty}$. Logo, a teoria invariante por escala no regime ultravioleta é obtida fazendo as duas constantes de acoplamento renormalizadas adimensionais u_1 e u_2 iguais a u_{∞} .

Temos ainda:

$$b_{2n}^{(\tau)} = -\frac{N+2}{144\epsilon_L} \left\{ 1 - \frac{5}{4}\epsilon_L + 2\epsilon_L \left[[i_2]_m + \frac{1}{2} \tilde{W}_0^{(\tau)}(i; r_n) \right] \right\}, \quad (6.109a)$$

$$b_{3n}^{(\tau)} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon_L^2} + \left(\frac{13}{48} \right) \frac{(N+2)(N+8)}{108\epsilon_L} - \frac{(N+2)(N+8)}{432\epsilon_L} \left[[i_2]_m + \frac{\epsilon_L}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right], \quad (6.109b)$$

$$c_{1n}^{(\tau)} = \frac{N+2}{6\epsilon_L} \left[1 - \epsilon_L + [i_2]_m \epsilon_L + \frac{\epsilon_L}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right], \quad (6.109c)$$

$$c_{2n}^{(\tau)} = \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon_L^2} - \frac{4N^2 + 31N + 46}{72\epsilon_L} + \frac{(N+2)(N+5)}{18\epsilon_L} \left[[i_2]_m + \frac{1}{2} \zeta_{\frac{1}{2}}^{(\tau)}(i; r_n) \right]. \quad (6.109d)$$

Utilizando as expressões acima e o ponto fixo u_{∞} calculamos:

$$\gamma_{\Phi n}^{(\tau)}(u_{\infty}) = n \frac{N+2}{2(N+8)^2} \epsilon_L^2 \left\{ 1 + \epsilon_L \left[\frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}; \quad (6.110a)$$

$$\bar{\gamma}_{\Phi^2 n}^{(\tau)}(u_{\infty}) = n \frac{N+2}{N+8} \epsilon_L \left[1 + \frac{6(N+3)}{(N+8)^2} \epsilon_L \right]. \quad (6.110b)$$

Comparando os resultados encontrados acima para as funções de Wilson no ponto fixo u_{∞} com as equações (6.68) e (6.69), vemos que são idênticos aos encontrados para o caso sem massa e, como estes são resultados suficientes para o cálculo dos expoentes η_n e ν_n , todos os expoentes críticos são exatamente os mesmos nas formulações massiva e não-massiva da teoria para $n = 1$ ou $n = 2$. Esse resultado reafirma o princípio da universalidade, sendo este, portanto, aplicável também em sistemas com interações competitivas do tipo Lifshitz. Note que o conjunto de parâmetros (N, d, m) , que caracteriza a classe de universalidade para o modelo Lifshitz m -axial com d dimensões infinitas, não é alterado pelo fato de termos uma dimensão compacta, visto que as contribuições de tamanho finito foram totalmente canceladas no cálculo das grandezas universais. Outro ponto importante a ser mencionado é que, como introduzimos uma dimensão finita apenas ao longo do subespaço sem competição, os termos de correção de tamanho finito, relacionados à aplicação das condições de contorno de Neumann ($\tau = 1$) ou de Dirichlet ($\tau = -1$), permaneceram iguais aos encontrados no capítulo 4 e, portanto, o *crossover*

dimensional manifesta-se, também nesse caso, em termos do limite do mesmo parâmetro L , isto é, para pequenos valores de L .

Tendo em vista a grande quantidade de informações e equações trazidas por este trabalho, e evitando tornarmo-nos enfadonhos desnecessariamente, nos limitaremos em fazer menção a alguns resultados da teoria massiva e não-massiva com os quase-momentos externos nulos (modo zero). A primeira coisa a ser dita, e que corrobora com o fato de ser excessivo reproduzir os cálculos também nesse contexto, é que, a regularização dimensional das integrais sem massa e massivas, para o modo zero em Lifshitz m -axial, são facilmente obtidas ao aplicarmos os quase-momentos externos iguais a zero nas soluções das integrais já exibidas nas seções 6.3 e 6.6, respectivamente.

Dada a prescrição realizada no capítulo 5 para o modo zero, onde lembramos que este modo fornece resultados não nulos apenas para NBC ($\tau = 1$), é fácil notar que todos os métodos que foram lá utilizados são completamente aplicáveis nesta situação e, portanto, as multiplicidades que aparecem naquele capítulo são as mesmas para o caso Lifshitz em modo zero. Além disso, nenhuma alteração relevante ocorre em relação ao que já foi apresentado neste capítulo para o modelo Lifshitz m -axial, o que implica que o termo de *bulk* é alterado da mesma maneira. Devemos lembrar que as soluções das integrais dos casos com e sem competição, em modo zero ou não, diferem sobretudo nesse termo, onde a inclusão de $[i_2]_m$ caracteriza a mudança. Portanto, os resultados obtidos para os expoentes críticos de um sistema competitivo do tipo Lifshitz m -axial, assim como o regime para a ocorrência do *crossover* dimensional continuam os mesmos em modo zero.

Por fim, frisando as similaridades, é pertinente lembrar que, no caso onde os quase-momentos externos são diferentes de zero (sistema com ou sem competição), as contribuições referentes a esses elementos discretos foram completamente canceladas. Também, as contribuições de tamanho finito em modo zero no caso não-competitivo foram eliminadas ao calcularmos as grandezas universais. Não é de se admirar, portanto, que o mesmo ocorra para o modo zero do modelo Lifshitz m -axial. Assim, no que diz respeito à classe de universalidade e *crossover* dimensional, todas as conclusões expressas nas seções anteriores são válidas também neste caso, o que denota a eficácia do método aplicado.

Capítulo 7

Formulação de subtração mínima no ponto de Lifshitz do modelo *CECI*

7.1 Introdução

No presente capítulo, estamos interessados em calcular os expoentes críticos para o caso isotrópico do modelo *CECI* por subtração mínima. É importante lembrar que o modelo *CECI* isotrópico corresponde a um modelo de rede, em d dimensões, com interações ferro/antiferromagnéticas alternadas até um número n de vizinhos em todas as direções. No entanto, para alcançarmos esse objetivo, algumas considerações e modificações, em relação ao modelo m -axial, se fazem necessárias, uma vez que abordaremos o comportamento crítico de Lifshitz mais geral. Vamos então, em princípio, generalizar os principais conceitos discutidos no capítulo 6 sobre o modelo m -axial, o que nos permitirá descrever e tratar adequadamente o modelo *CECI*.

Já vimos no capítulo anterior que as interações competitivas são caracterizadas por derivadas de ordens mais altas do campo (parâmetro de ordem). Estamos aptos então, estendendo o que foi feito até agora, a descrever o modelo *CECI*. Seja m_n o número de direções espaciais cujas interações competitivas vão até o n -ésimo vizinho. O subespaço competitivo m_n -dimensional será então representado na densidade lagrangiana por potências (*ordem da derivada*) do gradiente indo até a ordem $2n$, agindo sobre o campo escalar ϕ , o que generaliza o que fizemos para o modelo m -axial. Levando isso em consideração, assim como as simetrias referentes ao dado sistema, podemos generalizar (6.1). Temos, portanto, que a densidade lagrangiana para o modelo *CECI* é

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2} |\nabla_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \phi|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^L \sigma_n |\nabla_{m_n}^n \phi|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^L \delta_{0n} |\nabla_{m_n} \phi|^2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{L-1} \sum_{n'=2}^{n-1} \tau_{nn'} |\nabla_{m_n}^{n'} \phi|^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

O comportamento crítico de Lifshitz do modelo *CECI* é traduzido, em semelhança ao caso *m*-axial, quando aplicamos a condição $\delta_{0n} = \tau_{nn'} = 0$, que será utilizada daqui por diante. Uma grande simplificação ocorre devido a essa condição, pois todos os subespaços tornam-se ortogonais entre si. Desse modo, os diferentes subespaços passam a ser caracterizados por diferentes potências de momento. Por exemplo, o subespaço m_n , na região crítica, será caracterizado pela potência de momento $K_{(n)}^{2n}$. O ponto de Lifshitz é atingido ao fazermos a massa $\mu = 0$, ou seja, $T = T_L$, onde T_L é a temperatura crítica do sistema. Temos também que todas as potências pares de momento até $2L$ ($L \equiv$ número máximo de vizinhos acoplados) são relevantes para a descrição do sistema, o que ocorre devido à redefinição dos momentos para cada subespaço quando fazemos σ_n adimensional. Essa redefinição está diretamente ligada ao conceito de operadores relevantes descrito inicialmente no capítulo 2 e revisitado no capítulo 6. Observamos que a construção da lagrangiana apresentada em (7.1), assim como a descrição geral de seus parâmetros, pode ser encontrada em [76].

Embora o nosso interesse esteja voltado para o caso isotrópico do modelo, o que é conseguido ao fixarmos um único valor (de 1 a L) para n , podemos extrair informações importantes do caso anisotrópico ao fazermos uma análise similar a do caso *m*-axial. Encontramos, por exemplo, que a dimensão crítica, para o caso anisotrópico nesse modelo geral, é dada por

$$d_c = 4 + \sum_{n=2}^L \left[\frac{(n-1)}{n} \right] m_n, \tag{7.2}$$

e, portanto, podemos definir o parâmetro perturbativo como

$$\epsilon_L = d_c - d = 4 + \sum_{n=2}^L \left[\frac{(n-1)}{n} \right] m_n - d. \tag{7.3}$$

Prosseguindo, agora para o caso isotrópico ($d = m_n$), temos que a dimensão crítica é

$$d_c = 4n, \tag{7.4}$$

e, por conseguinte, o parâmetro perturbativo é dado por

$$\epsilon_n = 4n - d = 4n - m_n. \tag{7.5}$$

Temos ainda que o propagador livre para o modelo *CECI* anisotrópico da teoria crítica (massa nula) é dado por

$$G_0 = \frac{1}{\sum_{n=2}^L [(k_{(n)})^2]^n + q^2}. \quad (7.6)$$

Observe que o propagador do caso isotrópico pode ser encontrado facilmente da equação (7.6) ao ajustarmos a escala de momento q em $q = 0$ e fixarmos, na soma, um único valor $n = n'$, fazendo $[(k_{(n)})^2]^n = \delta_{nn'} [(k_{(n')})^2]^{n'}$, o que nos dá

$$G_0 = \frac{1}{(k_{(n')})^{n'}}. \quad (7.7)$$

Como as integrais de Feynman dependem fundamentalmente dos propagadores, podemos perceber que as mesmas se apresentarão de maneira distinta do que vimos até agora. Porém, todos os outros objetos matemáticos descritos no capítulo 2, tais como os diagramas de Feynman, funções de Green e funções de vértice *1PI*, são facilmente generalizados para descrever o modelo *CECI* e, dessa forma, teremos os mesmos diagramas com as mesmas divergências primitivas. Também, toda a discussão acerca do grupo de renormalização e da renormalizabilidade das partes de vértice primitivamente divergentes, a partir das constantes de renormalização, é válida e pode ser aplicada nesse caso [76]. Com isso em mente, podemos dirigir a nossa atenção para as relações de escala que, como vimos anteriormente, são resultados que podem ser extraídos pela aplicação do grupo de renormalização.

7.2 Relações de escala para o modelo *CECI* isotrópico

Recorrendo às constantes de renormalização multiplicativas, temos que as partes de vértice renormalizadas, com exceção de $\Gamma_{R(n)}^{(0,2)}$, são dadas por

$$\Gamma_{R(n)}^{(N,M)}(p_{i(n)}, Q_{j(n)}, g_n, \kappa_n) = Z_{\phi(n)}^{N/2} Z_{\phi(n)}^M \Gamma_{(n)}^{(N,M)}(p_{i(n)}, Q_{j(n)}, \lambda_n, \Lambda_n). \quad (7.8)$$

O leitor deve estar atento ao fato de que, embora a expressão acima seja semelhante à equação (6.10), não temos aqui os quase-momentos, pois não estamos impondo nenhuma condição de contorno, ou seja, trata-se de um sistema infinito. Outra diferença é que, como no caso isotrópico o n é fixo, temos um único comprimento de correlação para o sistema, como também um valor único para a dimensão anômala, visto que todas as direções possuem agora o mesmo tipo de interação competitiva.

Podemos definir novamente g_n e λ_n em termos de u_n e u_{0n} , mas devemos incorporar a possibilidade de interações além dos segundos vizinhos, assim temos: $g_n = u_n (\kappa_n^{2n})^{\epsilon_n/2}$ e $\lambda_n = u_{0n} (\kappa_n^{2n})^{\epsilon_n/2}$, onde $\epsilon_n = 4n - m_n$. Então, em termos de u_n e u_{0n} , a equação do grupo de renormalização fica

$$\left(\kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} + \beta_{(n)} \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi_{(n)}}(u_n) + M \gamma_{\phi_{(n)}^2}(u_n) \right) \Gamma_{R_{(n)}}^{(N,M)} = 0, \quad (7.9)$$

onde temos ainda que

$$\beta_{(n)} = \left(\kappa_n \frac{\partial u_n}{\partial \kappa_n} \right), \quad (7.10)$$

$$\gamma_{\phi_{(n)}}(u_n) = \beta_{(n)} \frac{\partial \ln Z_{\phi_{(n)}}}{\partial u_n} \quad (7.11)$$

e

$$\gamma_{\phi_{(n)}^2}(u_n) = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln Z_{\phi_{(n)}^2}}{\partial u_n}, \quad (7.12)$$

são as funções de Wilson para o caso isotrópico do modelo *CECI*. A função $\beta_{(n)}$ pode ser reescrita em termos de quantidades adimensionais na forma

$$\beta_{(n)} = -\epsilon_n \left(\frac{\partial \ln u_{0n}}{\partial u_n} \right)^{-1}. \quad (7.13)$$

Observe que a função $\beta_{(n)}$, em (7.13), não possui o fator n que está presente em (6.16) que é seu paralelo no caso m -axial (anisotrópico). Essa peculiaridade vem à tona através das transformações do grupo de renormalização do caso isotrópico.

Resolvendo a equação do grupo de renormalização no ponto fixo da teoria ($\beta_{(n)}(u_n^*) = 0$), encontramos as relações de escala do modelo *CECI* isotrópico. Os meandros da obtenção dessas relações podem ser encontrados em [75, 76]. Temos, portanto, que o nosso primeiro expoente crítico do caso isotrópico é dado por

$$\eta_n = \gamma_{\phi_{(n)}}(u^*). \quad (7.14)$$

Também temos que

$$\nu_n^{-1} = 2n - \gamma_{\phi_{(n)}}(u^*), \quad (7.15)$$

ou ainda, por conveniência

$$\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u^*), \quad (7.16)$$

onde temos definido $\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n)$ por

$$\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n) = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln(Z_{\phi_{(n)}^2} Z_{\phi_{(n)}})}{\partial u_n} = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi_{(n)}^2}}{\partial u_n}. \quad (7.17)$$

Ainda temos que

$$\gamma_n = \nu_n(2n - \eta_n), \quad (7.18)$$

$$\alpha_n = 2 - m_n \nu_n, \quad (7.19)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2} \nu_n(m_n - 2n + \eta_n) \quad (7.20)$$

e

$$\delta_n = \frac{m_n + 2n - \eta_n}{m_n - 2n + \eta_n}. \quad (7.21)$$

Manipulando as expressões acima, chegamos também às seguintes relações entre os expoentes críticos: $\gamma_n = \beta_n(\delta_n - 1)$ e $\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n = 2$.

É fácil verificar que as leis de escala para o modelo *CECI* isotrópico se reduzem àquelas do comportamento crítico usual, ou seja, àquele descrito por uma teoria de campo escalar ϕ^4 , ao aplicarmos $n = 1$. Logo, podemos abranger o comportamento crítico usual dentro do universo dos sistemas que exibem o ponto de Lifshitz, denominando-o de *comportamento crítico de Lifshitz isotrópico do primeiro caráter*, sendo esse, por consequência, o caso particular mais simples.

7.3 Subtração mínima para o caso isotrópico

O método de renormalização por subtração mínima de pólos dimensionais, introduzido por 't Hooft e Veltman [89], é uma maneira elegante de extrairmos as divergências das funções $1PI$ no caso sem massa, após termos procedido com a regularização dimensional das integrais divergentes. Desde que, em subtração mínima, não fixemos o momento externo, o que não ocorre, por exemplo, na renormalização por *condições de normalização*, a identificação dos termos que devem ser cancelados para obtermos uma função de vértice renormalizada é automática. Outra vantagem, é que os coeficientes que aparecem nas equações do grupo de renormalização apresentam uma forma particularmente simples. Além disso, a própria função $\Gamma^{(2)}$ é utilizada como condição para a renormalização e não sua derivada.

Considerando a teoria interagente ϕ^4 N -vetorial, vamos escrever as constantes de renormalização, as quais dependem de u_{0n} e ϵ_n , em termos de uma expansão na constante de acoplamento adimensional renormalizada u_n , ou seja,

$$u_{0n} = u_n[1 + a_{1n}(\epsilon_n)u_n + a_{2n}(\epsilon_n)u_n^2], \quad (7.22)$$

$$Z_{\phi(n)} = 1 + b_{1n}(\epsilon_n)u_n + b_{2n}(\epsilon_n)u_n^2 + b_{3n}(\epsilon_n)u_n^3 \quad (7.23)$$

e

$$\overline{Z}_{\phi_{(n)}^2} = 1 + c_{1n}(\epsilon_n)u_n + c_{2n}(\epsilon_n)u_n^2. \quad (7.24)$$

Podemos agora utilizar as expressões acima para obtermos as funções de Wilson ($\beta_{(n)}$, $\gamma_{\phi_{(n)}}$ e $\gamma_{\phi_{(n)}^2}$), referentes ao caso isotrópico, em termos da expansão em u_n . Temos então

$$\beta_{(n)}(u_n) = -\epsilon_n u_n [1 - a_{1n}u_n + 2(a_{1n}^2 - a_{2n})u_n^2], \quad (7.25)$$

$$\gamma_{\phi_{(n)}}(u_n) = -\epsilon_n u_n [2b_{2n}u_n + (3b_{3n} - 2b_{2n}a_{1n})u_n^2], \quad (7.26)$$

$$\overline{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n) = \epsilon_n u_n [c_{1n} + (2c_{2n} - c_{1n}^2 - a_{1n}c_{1n})u_n]. \quad (7.27)$$

Já vimos que as funções de vértice $1PI$ a serem renormalizadas são $\Gamma_{(n)}^{(2)}$, $\Gamma_{(n)}^{(4)}$ e $\Gamma_{(n)}^{(2,1)}$, o que nos leva a

$$Z_{\phi_{(n)}} \Gamma_{(n)}^{(2)}(k_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = \Gamma_{R_{(n)}}^{(2)}(k_{(n)}; u_n, \kappa_n), \quad (7.28)$$

$$Z_{\phi_{(n)}^2} \Gamma_{(n)}^{(4)}(k_{i_{(n)}}; u_{0n}, \kappa_n) = \Gamma_{R_{(n)}}^{(4)}(k_{i_{(n)}}; u_n, \kappa_n), \quad (7.29)$$

$$\overline{Z}_{\phi_{(n)}^2} \Gamma_{(n)}^{(2,1)}(k_{1_{(n)}}, k_{2_{(n)}}, p_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = \Gamma_{R_{(n)}}^{(2,1)}(k_{1_{(n)}}, k_{2_{(n)}}, p_{(n)}; u_n, \kappa_n), \quad (7.30)$$

onde, simbolicamente, temos

$$\Gamma_{(n)}^{(2)}(k_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = k_{(n)}^{2n} (1 - B_{2n}u_{0n}^2 + B_{3n}u_{0n}^3), \quad (7.31)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(4)}(k_{i_{(n)}}; u_{0n}, \kappa_n) = \kappa_n^{n\epsilon_n} u_{0n} [1 - A_{1n}u_{0n} + (A_{2n}^{(1)} + A_{2n}^{(2)})u_{0n}^2], \quad (7.32)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(2,1)}(k_{1_{(n)}}, k_{2_{(n)}}, p_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = 1 - C_{1n}u_{0n} + (C_{2n}^{(1)} + C_{2n}^{(2)})u_{0n}^2. \quad (7.33)$$

Dadas as expressões acima, obtemos

$$A_{1n} = \frac{N+8}{18} \kappa_n^{n\epsilon_n} \left[I_2 \left(\frac{k_{1_{(n)}} + k_{2_{(n)}}}{\kappa_n} \right) + I_2 \left(\frac{k_{1_{(n)}} + k_{3_{(n)}}}{\kappa_n} \right) + I_2 \left(\frac{k_{2_{(n)}} + k_{3_{(n)}}}{\kappa_n} \right) \right], \quad (7.34)$$

$$A_{2n}^{(1)} = \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} \kappa_n^{2n\epsilon_n} \left[I_2^2 \left(\frac{k_{1_{(n)}} + k_{2_{(n)}}}{\kappa_n} \right) + 2permut. \right], \quad (7.35)$$

$$A_{2n}^{(2)} = \frac{(5N + 22)}{54} \kappa_n^{2n\epsilon_n} \left[I_4 \left(\frac{k_{1_{(n)}}}{\kappa_n}, \frac{k_{2_{(n)}}}{\kappa_n}, \frac{k_{3_{(n)}}}{\kappa_n}, \frac{k_{4_{(n)}}}{\kappa_n} \right) + 5permut. \right], \quad (7.36)$$

$$B_{2n} = \frac{(N+2)}{18} \kappa^{2n\epsilon_n} I_3 \left(\frac{k_{(n)}}{\kappa_n} \right), \quad (7.37)$$

$$B_{3n} = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \kappa^{3n\epsilon_n} I_5 \left(\frac{k_{(n)}}{\kappa_n} \right), \quad (7.38)$$

$$C_{1n} = \frac{N+2}{18} \kappa^{n\epsilon_n} \left[I_2 \left(\frac{k_{1(n)} + k_{2n}}{\kappa_n} \right) + 2\textit{permut.} \right], \quad (7.39)$$

$$C_{2n}^{(1)} = \frac{(N+2)^2}{108} \kappa^{2n\epsilon_n} \left[I_2^2 \left(\frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2\textit{permut.} \right], \quad (7.40)$$

$$C_{2n}^{(2)} = \frac{N+2}{36} \kappa^{2n\epsilon_n} \left[I_4 \left(\frac{k_{1(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{2(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{3(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{4(n)}}{\kappa_n} \right) + 5\textit{permut.} \right]. \quad (7.41)$$

As integrais I_2 , I_3 , I_4 e I_5 do caso isotrópico têm suas formas explícitas dadas por

$$I_2 = \int \frac{d^{m_n} k}{[(k+k')^2]^n (k^2)^n}, \quad (7.42)$$

$$I_3 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2}{[(k_1 + k_2 + k')^2]^n (k_1^2)^n (k_2^2)^n}, \quad (7.43)$$

$$I_4 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2}{(k_1^2)^n [(k' - k_1)^2]^n (k_2^2)^n [(k_1 + k_2 + k'_3)^2]^n} \quad (7.44)$$

e

$$I_5 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2 d^{m_n} k_3}{[(k_1 + k_2 + k')^2]^n [(k_1 + k_3 + k')^2]^n (k_1^2)^n (k_2^2)^n (k_3^2)^n}. \quad (7.45)$$

Observe que, como não foram fixados os momentos externos, algumas das integrais acima admitem *permutações* desses momentos, o que precisa ser levado em conta, por isso a indicação *permut.*

Tudo o que foi feito nesse capítulo até agora não discrimina a utilização ou não de aproximações nas soluções das integrais, pois o algoritmo para o cálculo dos expoentes críticos, assim como as leis de escala obtidas através do grupo de renormalização, não depende do resultado das integrais de Feynman. Assim, um passo importante para entendermos a novidade desse estudo, é, antes de continuarmos a descrição do método de subtração mínima, calcular a integral de Feynman I_2 do caso isotrópico sem aproximação.

7.4 Solução exata das integrais de Feynman para o caso isotrópico

Começemos utilizando os parâmetros de Feynman em (7.42), o que nos leva a

$$I_2 = \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} \int \frac{d^{m_n} k}{(k^2 + 2xk'k + xk'^2)^{2n}}. \quad (7.46)$$

A expressão entre parênteses no denominador da integral em k acima, pode ser reescrita por

$$k^2 + 2xk'k + (xk')^2 + xk'^2 - (xk')^2 = (k + xk')^2 + x(1-x)k'^2. \quad (7.47)$$

Fazendo agora a mudança de variável

$$q \equiv k + xk', \quad (7.48)$$

obtemos

$$I_2 = \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} \int \frac{d^{m_n} q}{[q^2 + x(1-x)k'^2]^{2n}}. \quad (7.49)$$

Utilizando a relação (2.122) em (7.49), podemos escrever ainda

$$I_2 = \frac{1}{2} S_{m_n} \frac{\Gamma(\frac{m_n}{2})\Gamma(2n - \frac{m_n}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} [x(1-x)k'^2]^{\frac{m_n}{2}-2n}. \quad (7.50)$$

Sabemos porém que $m_n = 4n - \epsilon_n$, o que nos leva a

$$I_2 = \frac{1}{2} S_{m_n} \frac{\Gamma(2n - \frac{\epsilon_n}{2})\Gamma(\frac{\epsilon_n}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} [x(1-x)k'^2]^{-\frac{\epsilon_n}{2}}. \quad (7.51)$$

Podemos escrever a integral em x como uma expansão em ϵ_n , da seguinte forma

$$\int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} [x(1-x)k'^2]^{-\frac{\epsilon_n}{2}} = \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} - \frac{\epsilon_n}{2} L_n(k') + \mathcal{O}(\epsilon_n^2), \quad (7.52)$$

onde

$$L_n(k') = \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} \ln[x(1-x)k'^2]. \quad (7.53)$$

Observe que a integral acima depende explicitamente do valor de n , mas não precisamos calculá-la, pois uma outra vantagem do método de subtração mínima é que as integrais desse tipo são naturalmente canceladas no processo de renormalização. O primeiro termo à direita em (7.52) é a forma integral da função especial beta, que possui solução em termos das funções gama, ou seja,

$$\mathcal{B}(n, n) = \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}. \quad (7.54)$$

Fazendo o uso da expansão

$$\Gamma(a + bx) = \Gamma(a)[1 + bx\psi(a) + \mathcal{O}(x^2)], \quad (7.55)$$

onde $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ e $\psi(2n) = \psi(1) + \sum_{p=1}^{2n-1} 1/p$, e substituindo (7.52) em (7.51), chegamos ao nosso resultado final para a integral I_2

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_n}{2} \left[\psi(2n) - \psi(1) + \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} L_n(k') \right] \right\}, \quad (7.56)$$

onde redefinimos a constante de acoplamento para absorver o fator S_{m_n} .

As outras integrais têm suas soluções exatas, dadas por

$$I_3 = k'^{2n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{4\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[B_n - \frac{L_{3n}(k')}{A_n} \right] \right\}, \quad (7.57)$$

onde

$$A_n = \frac{\Gamma(2n)\Gamma(n)}{\Gamma(3n)}, \quad (7.58)$$

$$B_n = D(n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \quad (7.59)$$

e

$$D(n) = \frac{1}{2} \psi(2n) - \psi(n) + \frac{1}{2} \psi(1). \quad (7.60)$$

Ainda temos que

$$L_{3n}(k') = \int_0^1 dy y^{2n-1} (1-y)^{n-1} \ln[y(1-y)k'^2], \quad (7.61)$$

que também depende do valor de n .

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \left[D(n) - \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} L_n(k') \right] \epsilon_n - \epsilon_n \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} \right\}, \quad (7.62)$$

onde a integral $L_n(k')$ está definida em (7.53). Temos ainda que

$$I_5 = k'^{2n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[C_n - \frac{3L_{3n}(k')}{2A_n} \right] \right\}, \quad (7.63)$$

onde

$$C_n = 2D(n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} + \frac{3}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \quad (7.64)$$

e a integral $L_{3n}(k')$ está definida em (7.61). A resolução exata dessas integrais encontra-se no apêndice C.

7.5 Expoentes críticos do modelo *CECI*: caso isotrópico exato

Para calcularmos os expoentes críticos, precisamos conhecer os coeficientes das expansões (7.22), (7.23) e (7.24). A fim de encontrarmos tais coeficientes, utilizaremos as equações (7.28), (7.29) e (7.30). As funções de vértice *1PI* não renormalizadas são dadas por (7.31), (7.32) e (7.33), onde devemos substituir u_{0n} por sua expansão em termos de u_n . Por exemplo, para $\Gamma_{R(n)}^{(2)}$, após termos realizado essas substituições, ficamos com

$$\Gamma_{R(n)}^{(2)} = k_{(n)}^{2n} [1 + b_{1n}u_n + (b_{2n} - B_{2n})u_n^2 + (b_{3n} - 2a_{1n}B_{2n} + B_{3n} - b_{1n}B_{2n})u_n^3], \quad (7.65)$$

de onde concluímos que $b_{1n} = 0$, ou seja, não existem pólos cujo resíduo é linear em u_n ; $b_{2n} = [B_{2n}]_S$, onde o subscrito S , indica que tomaremos apenas a parte singular de B_{2n} e $b_{3n} = [2a_{1n}B_{2n} - B_{3n}]_S$, onde já utilizamos o fato de que $b_{1n} = 0$. Note que a principal diferença desse método para condições de normalização está no fato de tomarmos só a parte singular para os coeficientes, e por isso chama-se de *subtração mínima*. Para os outros coeficientes, temos

$$a_{1n} = [A_{1n}]_S, \quad (7.66)$$

$$a_{2n} = [-2b_{2n} + 2a_{1n}A_{1n} - A_{2n}^{(1)} - A_{2n}^{(2)}]_S, \quad (7.67)$$

$$c_{1n} = [C_{1n}]_S, \quad (7.68)$$

$$c_{2n} = [a_{1n}C_{1n} + c_{1n}C_{1n} - C_{2n}^{(1)} - C_{2n}^{(2)}]_S. \quad (7.69)$$

Utilizando então (7.57), chegamos a

$$b_{2n} = \frac{(N+2)}{18} \left\{ I_3 = (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{4\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} [1 + \mathcal{O}(\epsilon_n)] \right\}_S. \quad (7.70)$$

Admitindo apenas a parte singular, obtemos

$$b_{2n} = (-1)^n \frac{(N+2)}{72} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}. \quad (7.71)$$

Para a_{1n} temos

$$a_{1n} = [A_{1n}]_S = \frac{(N+8)}{18} \left\{ \left[I_2 = \frac{1}{\epsilon_n} [1 + \mathcal{O}(\epsilon_n)] \right] + 2\text{permut.} \right\}_S, \quad (7.72)$$

onde utilizamos o resultado de I_2 dado por (7.56). Note que as permutações possuem a mesma parte singular, o que nos dá um fator de 3 no total. Com isso temos

$$a_{1n} = \frac{N+8}{6} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}. \quad (7.73)$$

O coeficiente b_{3n} pode ser encontrado ao impormos que a parte singular referente à $\mathcal{O}(u_n^3)$ em (7.65) se anule por subtração mínima, ou seja, $b_{3n} = [2a_{1n}B_{2n} - B_{3n}]_S$. Isto nos leva a

$$b_{3n} = \left\{ \frac{(N+8)}{3\epsilon_n} \cdot \frac{(N+2)}{72} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left[1 + \epsilon_n \left(B_n - \frac{1}{A_n} L_{3n} \left(\frac{k_{(n)}}{\kappa_n} \right) \right) \right] \right\} + \\ - \frac{(N+2)(N+8)}{108} \left\{ (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} \left[1 + \epsilon_n \left(C_n - \frac{3}{2A_n} L_{3n} \left(\frac{k_{(n)}}{\kappa_n} \right) \right) \right] \right\}_S. \quad (7.74)$$

Vale ressaltar que não podemos, nesse caso, simplesmente desprezar a parte em $\mathcal{O}(\epsilon_n^0)$ da integral B_{2n} , pois o coeficiente a_{1n} carrega consigo o fator $1/\epsilon_n$, o que torna toda a expressão singular. Note ainda que a integral B_{3n} só possui termos singulares, dado o fator de $1/\epsilon_n^2$ em sua expressão. Rearranjando a equação acima, ficamos com

$$b_{3n} = \frac{1}{\epsilon_n} \left[L_{3n} \left(\frac{k_{(n)}}{\kappa_n} \right) \right] \cdot \left[\frac{(N+8)(N+2)}{216A_n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} (1-1) \right] + \\ + \frac{1}{\epsilon_n^2} \left[(N+8)(N+2)(-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \left(\frac{1}{216} - \frac{1}{324} \right) \right] + \\ + \frac{1}{\epsilon_n} \left[(N+8)(N+2)(-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \left(\frac{B_n}{216} - \frac{C_n}{324} \right) \right]. \quad (7.75)$$

Observando (7.75), notamos que o primeiro termo, que carrega a integral logarítmica, é identicamente nulo, o que justifica o fato de não precisarmos calcular essa integral. Então, para b_{3n} , temos

$$b_{3n} = \frac{(-1)^n(N+8)(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{648\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left[\frac{1}{\epsilon_n} - \left(D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right) \right]. \quad (7.76)$$

Utilizando agora a expressão (7.67) para o coeficiente a_{2n} , encontramos

$$\begin{aligned}
 a_{2n} = & \frac{1}{\epsilon_n} \left[L_n \left(\frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2permut. \right] \times \\
 & \times \left[\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \left(\frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} + \frac{(5N + 22)}{54} - \frac{(N + 8)^2}{108} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{\epsilon_n^2} \left[\frac{(N + 8)^2}{18} - \frac{(N^2 + 6N + 20)}{36} - \frac{(5N + 22)}{18} \right] + \\
 & + \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{(N + 2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n + 1)} + \frac{(N^2 + 6N + 20)}{36} [\psi(2n) - \psi(1)] + \right. \\
 & \left. - \frac{(N + 8)^2}{36} [\psi(2n) - \psi(1)] - \frac{(5N + 22)}{18} \left[D(n) - \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.77}$$

Note que aqui também o primeiro termo é nulo, o que implica no cancelamento das integrais logarítmicas. Então, com mais algumas passagens algébricas, chegamos a

$$a_{2n} = \frac{(N + 8)^2}{36} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} + \frac{1}{18} \left[(-1)^{n+1} \frac{(N + 2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{2\Gamma(3n)\Gamma(n + 1)} - (5N + 22)D(n) \right] \frac{1}{\epsilon_n}. \tag{7.78}$$

Como o coeficiente $c_{1n} = [C_{1n}]_S$ e $C_{1n} = \frac{N+2}{18} \left[\frac{3}{\epsilon_n} + \mathcal{O}(\epsilon_n^0) \right]$, vemos facilmente que

$$c_{1n} = \frac{N + 2}{6} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}. \tag{7.79}$$

Por último, temos que c_{2n} é dado por

$$\begin{aligned}
 c_{2n} = & \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left[L_n \left(\frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2permut. \right] \times \\
 & \times \left[\frac{(N + 2)^2}{108} + \frac{(N + 2)}{36} - \frac{(N^2 + 10N + 16)}{216} - \frac{(N + 2)^2}{216} \right] + \\
 & + \frac{1}{\epsilon_n^2} \left[\frac{(N^2 + 10N + 16)}{36} - \frac{(N + 2)}{12} \right] + \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ [\psi(2n) - \psi(1)] \left[\frac{(N + 2)^2}{36} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(N + 2)}{12} - \frac{(N + 2)(N + 8)}{72} - \frac{(N + 2)^2}{72} \right] - \frac{(N + 2)}{12} D(n) \right\},
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

onde podemos verificar novamente o cancelamento do termo que carrega as integrais logarítmicas. Podemos então reescrever c_{2n} como

$$c_{2n} = \frac{(N+2)(N+5)}{36} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} - \frac{(N+2)D(n)}{12} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}. \quad (7.81)$$

Levando em conta todos esses coeficientes, podemos escrever

$$u_{0n} = u_n \left\{ 1 + \frac{(N+8)}{6\epsilon_n} u_n + \left[\frac{(N+8)^2}{36\epsilon_n^2} + \frac{1}{18\epsilon_n} \left((-1)^{n+1} \frac{(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (5N+22)D(n) \right) \right] u_n^2 \right\}, \quad (7.82)$$

$$Z_{\phi(n)} = 1 + \left[(-1)^n \frac{(N+2)}{72} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \right] u_n^2 + \\ + \left\{ \frac{(-1)^n(N+8)(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{648\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left[\frac{1}{\epsilon_n} - \left(D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right) \right] \right\} u_n^3, \quad (7.83)$$

$$\bar{Z}_{\phi(n)}^2 = 1 + \frac{N+2}{6\epsilon_n} u_n + \left\{ \frac{(N+2)}{12\epsilon_n} \left[\frac{(N+5)}{3\epsilon_n} - D(n) \right] \right\} u_n^2. \quad (7.84)$$

Temos ainda que as funções de Wilson são agora dadas explicitamente por

$$\beta_{(n)}(u_n, \epsilon_n) = -u_n \left\{ \epsilon_n - \frac{(N+8)}{6} u_n + \frac{1}{9} \left[(5N+22)D(n) + (-1)^n \frac{(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] u_n^2 \right\}, \quad (7.85)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = \frac{(-1)^{n+1}(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{36\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \left[u_n^2 - \frac{(N+8)}{6} \left(D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right) u_n^3 \right], \quad (7.86)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}(u_n) = \frac{(N+2)}{6} u_n [1 - D(n)u_n]. \quad (7.87)$$

Podemos obter agora, através da condição $\beta_{(n)}(u_n^*) = 0$, que o único ponto fixo estável no regime infravermelho é dado por

$$u_n^* = \frac{6}{N+8} \epsilon_n + 12 \left[\frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] \epsilon_n^2. \quad (7.88)$$

Substituindo então o ponto fixo em (7.86), obtemos

$$\begin{aligned}
\eta_n = \gamma_{\phi_{(n)}}(u_n^*) &= \frac{(-1)^{n+1}(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{36\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \left\{ \left[\frac{6}{N+8}\epsilon_n + \right. \right. \\
&+ 12 \left(\frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right) \epsilon_n^2 \Big]^2 + \\
&- \frac{(N+8)}{6} \left(D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right) \left[\frac{6}{N+8}\epsilon_n + \right. \\
&\left. \left. + 12 \left[\frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] \epsilon_n^2 \right]^3 \right\}, \tag{7.89}
\end{aligned}$$

o que nos leva à forma final para o expoente crítico η_n até $\mathcal{O}(\epsilon_n^3)$, ou seja,

$$\eta_n = \frac{(-1)^{n+1}(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \epsilon_n^2 [1 + \epsilon_n \mathcal{F}(N, n)], \tag{7.90}$$

onde $\mathcal{F}(N, n)$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(N, n) &\equiv \frac{4}{(N+8)^2} \left[\frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] + \\
&- \left(D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right). \tag{7.91}
\end{aligned}$$

Sabemos ainda que $\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n^*)$. Fazendo então a substituição do ponto fixo dado por (7.88) na expressão (7.87) e considerando apenas os termos até $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$, encontramos

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n^*) &= \frac{(N+2)}{N+8} \epsilon_n - \frac{6(N+2)}{(N+8)^2} D(n) \epsilon_n^2 + \\
&+ 2(N+2) \left[\frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] \epsilon_n^2. \tag{7.92}
\end{aligned}$$

Substituindo então (7.92) e (7.90) na expressão para ν_n^{-1} e considerando aqui também apenas os termos até $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\nu_n &= \frac{1}{2n} + \frac{(N+2)}{4n^2(N+8)} \epsilon_n + \\
&+ \frac{(N+2)}{2n^2(N+8)^2} \left[(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} + \frac{(N+2)}{4n} - 3D(n) + \mathcal{F}(N, n) \right] \epsilon_n^2, \tag{7.93}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{J}(N, n) \equiv \left[\frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right]. \quad (7.94)$$

Podemos obter agora o comportamento assintótico de η_n e ν_n para $n \gg 1$, através da utilização das seguintes expressões

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}(z)^{z-\frac{1}{2}} \exp(-z) \left[1 + \frac{1}{12z} + \mathcal{O}(1/z^2) \right] \quad (7.95)$$

e

$$\psi(z) \sim \ln(z) - \frac{1}{2z} + \mathcal{O}(1/z^2), \quad (7.96)$$

onde estamos considerando $z \gg 1$ nas expressões acima. Aplicando então (7.95) e (7.96) em (7.90) e (7.93), ficamos com

$$\eta_n \sim (-1)^{n+1} \frac{(N+2)}{(N+8)^2} \left[\frac{3}{2n} \left(\frac{16}{27} \right)^n \right] \epsilon_n^2 \left[1 - \frac{(20N+88)}{(N+8)^2} \ln(n) \epsilon_n \right] \quad (7.97)$$

e

$$\nu_n \sim \frac{1}{2n}. \quad (7.98)$$

Observe que tanto η_n , quanto ν_n vão à zero para $n \rightarrow \infty$.

Encontrados os expoentes críticos η_n e ν_n , torna-se fácil obtermos os outros expoentes críticos através das relações de escala. Sabemos que $\gamma_n = \nu_n(2n - \eta_n)$, portanto

$$\gamma_n = 1 + \frac{(N+2)}{2n(N+8)} \epsilon_n + \frac{(N+2)}{n(N+8)^2} \left[\frac{(N+2)}{4n} - 3D(n) + \mathcal{J}(N, n) \right] \epsilon_n^2. \quad (7.99)$$

Temos também que $\alpha_n = 2 - m_n \nu_n$. Mas, $m_n = 4n - \epsilon_n$, o que nos leva a

$$\alpha_n = 2 + \epsilon_n \nu_n - 4n \nu_n. \quad (7.100)$$

Utilizando então a relação (7.100), obtemos

$$\alpha_n = \frac{(4-N)}{2n(N+8)} \epsilon_n - \frac{(N+2)}{n(N+8)^2} \left[(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} + \frac{(N-4)}{4n} - 6D(n) + 2\mathcal{J}(N, n) \right] \epsilon_n^2. \quad (7.101)$$

Temos agora que $\beta_n = \frac{1}{2} \nu_n (m_n - 2n + \eta_n)$, ou ainda

$$\beta_n = 1 - \frac{1}{2} (\alpha_n + \gamma_n). \quad (7.102)$$

Substituindo então (7.99) e (7.101) em (7.102), chegamos à conclusão que o expoente crítico β_n é dado por

$$\beta_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2n(N+8)}\epsilon_n + \frac{(N+2)}{2n(N+8)^2} \left[(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} - 3 \left(\frac{1}{2n} + D(n) \right) + \mathcal{J}(N, n) \right] \epsilon_n^2. \quad (7.103)$$

Para finalizarmos, temos ainda que o último expoente crítico (δ_n) é dado por (7.21), o que pode ser reescrito como

$$\delta_n = \frac{6n - \epsilon_n - \eta_n}{2n - \epsilon_n + \eta_n}. \quad (7.104)$$

Utilizando a expressão acima, indo até $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$, obtemos

$$\delta_n = 3 + \frac{1}{n}\epsilon_n - \frac{1}{n} \left[2(-1)^{n+1} \frac{(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} - \frac{1}{2n} \right] \epsilon_n^2. \quad (7.105)$$

O nosso objetivo nesse capítulo foi então alcançado, pois temos todos os expoentes críticos do modelo *CECI* isotrópico, calculados pelo esquema de subtração mínima, sem fazer uso de aproximações na resolução das integrais até a ordem ϵ_n^2 (para o expoente crítico η_n fomos até $\mathcal{O}(\epsilon_n^3)$). É de fácil verificação que os expoentes do caso exato nos dão o resultado para o modelo sem competição quando fazemos $n = 1$.

Vale salientar que os expoentes críticos listados acima já tinham sido calculados pela técnica de condições de normalização na referência [76], sendo idênticos aos obtidos aqui por subtração mínima, embora os cálculos intermediários, incluindo: ponto fixo e funções de Wilson, sejam distintos. Essa equivalência entre os expoentes calculados por dois esquemas de renormalização, nos dá confiança sobre os resultados obtidos. Nossos resultados podem ser encontrados na referência [90].

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

Os expoentes críticos para sistemas delimitados por superfícies planas e paralelas foram calculados até ordens de pelo menos 2 *loops*, usando a descrição fenomenológica da teoria de campos escalares. Para isso, definimos um formalismo de partes de vértice *1PI*, o que, por si só, está além do quadro teórico anterior para condições de contorno de Neumann (*NBC*) e de Dirichlet (*DBC*). Através destas condições, impostas ao parâmetro de ordem, o comprimento L , referente à separação entre as superfícies, foi introduzido nas nossas análises. Tanto a formulação massiva quanto a não-massiva da teoria foram empregadas nesse estudo. Um fato já bem estabelecido no estudo de fenômenos críticos em sistemas infinitos é a independência dos observáveis físicos em relação a esses dois tipos de formulação, o que dá suporte à hipótese da universalidade. Mostramos, portanto, que essa equivalência ainda persiste em sistemas de tamanho finito com geometria de superfícies planas e paralelas, através da obtenção dos mesmos valores para os expoentes críticos em ambas as formulações. Desse modo, conseguimos também estabelecer novos critérios para a determinação do *crossover* dimensional.

Abordamos três tipos de sistemas neste trabalho. No primeiro deles, tínhamos apenas interações ferromagnéticas (usando novamente a linguagem do magnetismo) enquanto que no segundo, o sistema apresentava um subespaço no qual as interações ferromagnéticas e antiferromagnéticas competem entre si, conforme ilustrado de forma simples pelo modelo *ANNNI*. Para o terceiro sistema não aplicamos condições de contorno, em contrapartida, suas interações competitivas foram estabelecidas até um número n de vizinhos num espaço com d dimensões. Na abordagem do último sistema, trabalhamos o caso isotrópico ($d = m_n$), onde m_n é o número de direções competitivas, com o cálculo exato das integrais de Feynman. A aplicação de condições de contorno a esse tipo de modelo vem a ser uma perspectiva natural para futuros trabalhos.

Para o tratamento de sistemas sem competição, partimos de uma densidade lagrangiana escrita em termos do parâmetro de ordem Φ com interação do tipo Φ^4 e simetria $O(N)$, onde N é o número de componentes de Φ . Seguimos então com a extensão do procedimento empregado por Nemirovsky e Freed (NF), no qual computamos as funções de vértice *1PI* de 2 e 4 pontos até ordens de 3 e 2 *loops*, respectivamente. O aparecimento de multiplicidades, assim como de integrais de Feynman que não ocorrem para outros tipos de condições de contorno mais simples,

na construção dos diagramas de Feynman, foram trabalhados de forma original. Além disso, foi possível, exceto para o caso de quase-momentos nulos, unificar as condições de contorno dentro de um mesmo escopo formal. A estrutura tensorial das partes de vértice também sofreu profundas modificações, apresentando uma simetria do tipo $O(N) \times (\text{tamanho finito})$. Mesmo nessas condições, o trabalho foi realizado sem a necessidade de inclusão de termos de superfície. Tal inclusão só se justificaria se não fosse possível a renormalização das partes de vértice da maneira usual, ou seja, se partes de vértice do tipo *tadpole* não fossem canceladas naturalmente, o que de fato não ocorreu, embora os argumentos para isso tenham sido mais complexos que no sistema infinito equivalente ou mesmo em condições de contorno periódicas ou antiperiódicas.

Na formulação massiva da teoria, o comprimento de correlação ξ é mantido finito e todas as integrais de Feynman foram expressas em termos de uma parte singular (polos em ϵ) mais outro termo de correção dependente da variável de escala L/ξ . A parte singular corresponde à mesma obtida para um sistema infinito. Esse fato foi consistentemente confirmado ao observarmos que o termo de correção tende a zero no limite $L/\xi \rightarrow \infty$. O outro extremo do limite assintótico ($L/\xi \rightarrow 0$) também foi analisado e pudemos checar o mesmo tipo de *crossover* dimensional relatado por NF em consequência da correção de tamanho finito ser proporcional a $(L/\xi)^{-1}$ em *NBC* e a $\ln(L/\xi)$ em *DBC*. É de fato interessante perceber que, embora os termos de correção encontrados para *NBC* e *DBC* sejam bastante distintos dos encontrados para condições de contorno periódicas (*PBC*) e antiperiódicas (*ABC*), existe uma equivalência, quanto ao limite assintótico $L \rightarrow 0$, a saber: *NBC* com *PBC* e *DBC* com *ABC*. No entanto, o limite $\xi \rightarrow \infty$ é inconsistente com a teoria massiva devido às divergências no limite infravermelho e as nossas análises nesse caso restringiram-se apenas a $L \rightarrow 0$.

A fim de acessar a região $L/\xi \rightarrow 0$ com L finito, recorremos à formulação não-massiva da teoria na qual já temos $\xi = \infty$. Novamente, as integrais de Feynman possuem uma parte singular mais um termo de correção dependente de L . Para L finito, mostramos que esse termo é regular e nenhum *crossover* dimensional ocorre, em contraste com as previsões da conjectura de escalamento em tamanho finito quando $L/\xi \rightarrow 0$. Porém, no limite $L \rightarrow 0$, obtivemos um comportamento similar ao do caso massivo, com o termo de correção variando, respectivamente, como L^{-1} para *NBC* e $\ln L$ para *DBC*. Portanto, concluímos que o *crossover* dimensional decorre apenas de valores pequenos para L . Uma comparação entre *NBC* e *DBC* mostra que tais valores são ainda menores em *DBC*, sendo da mesma ordem de grandeza do parâmetro de rede do sistema. Mantendo L finito, obtivemos os mesmos expoentes críticos de sistemas infinitos.

Longe dos regimes de *crossover*, a equivalência completa entre os expoentes críticos, ao utilizarmos as formulações de campos massivos e sem massa, demonstraram pela primeira vez para *NBC* e *DBC*, no presente trabalho, que a conjectura fenomenológica que apontava para a falha da expansão ϵ , resultando na região de escala $L/\xi \rightarrow 0$, é incorreta. Tal conclusão reafirma o que foi colocado por Silva e Leite com respeito a *PBC* e *ABC*: “O papel privilegiado dado à variável L/ξ como o indicador da validade dos resultados obtidos da expansão ϵ não é mais aceitável”. O fato de ser apenas L o parâmetro importante a ser levado em conta, emerge de forma natural de nossas discussões.

O segundo tipo de sistema de nosso interesse correspondeu àqueles com interações competitivas exibindo um ponto crítico de Lifshitz. Com a finalidade de calcular os expoentes críticos referentes a esse tipo transição de fase, consideramos novamente uma teoria de campos escalares com interação Φ^4 seguida de uma nova extensão do método de NF. Diferentemente de sistemas sem competição, as derivadas segundas do parâmetro de ordem ao longo do subespaço competitivo passam a ser necessárias para uma descrição satisfatória do problema na região crítica de Lifshitz. Já no subespaço não-competitivo, continuamos com os mesmos termos relevantes ao estudo de sistemas sem competição. Devido a essa anisotropia espacial, as funções de vértice escalam de forma distinta em cada subespaço, resultando em diferentes comprimentos de correlação ξ_{L2} e ξ_{L4} .

Há, pelo menos, duas maneiras de introduzirmos o tamanho finito nesse tipo de sistema. A mais simples delas, e que foi de fato implementada, consiste em tornar finita uma das dimensões ao longo do subespaço não-competitivo. A partir daí, com o arcabouço gerado no capítulo 4, regularizamos as integrais de Feynman até ordens de 3 *loops* com auxílio da aproximação ortogonal e as expressamos em termos de uma parte singular (com polos em ϵ_L) mais outra regular, correspondendo aos termos de correção de tamanho finito. Os resultados decorrentes dessa análise são inteiramente equivalentes aos de sistemas sem competição, tanto no que se refere à obtenção dos expoentes críticos, quanto ao *crossover* dimensional. Desde que evitemos valores pequenos de L , podemos calcular os expoentes críticos em termos de expansões em ϵ_L .

A outra maneira de analisarmos o tamanho finito em sistemas com competição, o que também incluímos como perspectiva, consiste em compactar uma das dimensões ao longo do subespaço competitivo. A fim de simplificar esse estudo, podemos considerar, inicialmente, apenas a conjuntura uniaxial. Nesse caso, as regras de Feynman devem ser modificadas para incluir os quase-momentos quárticos ao longo do eixo competitivo. Com essa finalidade, um novo procedimento para representar de forma conveniente os somatórios nos quase-momentos deve ser implementado. Para condições de contorno periódicas (*PBC*) ou antiperiódicas (*ABC*) já existem representações que dão conta de alguns casos particulares, as quais são dadas em termos de integrais de Mellin-Barnes, usualmente empregadas na análise de funções especiais. De posse dessas representações, vemos ser factível, ao menos a investigação do problema mais simples de forma sistemática, sendo uma possibilidade a regularização das integrais de Feynman de forma exata até a ordem de 2 *loops*. Sendo assim, poderemos expressá-las novamente em termos de uma parte singular mais o termo de correção. No caso específico de *PBC* ou *ABC*, o estudo já realizado por Silva e Leite, com respeito ao termo de correção, tanto na formulação massiva quanto na não-massiva, mostrou que o *crossover* dimensional é novamente regido apenas por valores pequenos para L e que, evitada essa região, os expoentes críticos η_{L2} e ν_{L2} até a ordem ϵ_L^2 podem ser calculados perturbativamente. Desse modo, a extensão do estudo realizado nesse trabalho, no sentido da aplicação de *NBC* e *DBC* dentro de um formalismo unificado, está também alinhado com o nosso panorama de possibilidades.

O nosso objetivo neste trabalho foi investigar como o confinamento de um campo escalar entre duas superfícies planas e paralelas pode alterar os valores dos expoentes críticos. Para isso, consideramos apenas as condições de contorno de Neumann e de Dirichlet. Outras restrições

espaciais mais complexas, como condições mistas, onde aplicamos *NBC* em uma superfície e *DBC* na outra, podem ser utilizadas com as ideais trazidas pela presente tese. Como as condições de contorno que foram utilizadas são mais condizentes com a realidade física, por exemplo, de filmes finos, pois refletem um acoplamento distinto entre os spins das superfícies em relação à interação spin-spin no interior do sistema, até mesmo uma investigação experimental de nossas conclusões torna-se plausível.

Ao mencionarmos interações competitivas no capítulo 6, nos referimos apenas a acoplamentos antiferromagnéticos $J_2 < 0$, entre spins com seus segundos vizinhos intercalados por acoplamentos ferromagnéticos, e $J_1 > 0$, entre spins mais próximos, compondo o modelo m -axial. Porém, a generalização desse modelo ao incluir outra interação ferromagnética $J_3 > 0$, entre terceiros vizinhos ao longo da mesma direção com uma determinada combinação de valores para as razões $-J_2/J_1$ e J_3/J_1 , origina uma região crítica de Lifshitz no diagrama de fases, dentro da qual temos um ponto multicrítico conhecido como ponto de Lifshitz de terceiro caráter [91]. Se os acoplamentos J_2 e J_3 são estendidos a subespaços com, respectivamente, m_2 e m_3 dimensões de um sistema d -dimensional ($d \geq m_2 + m_3$), teremos um sistema m_3 -axial com um ponto de Lifshitz de terceiro caráter genérico e uma nova classe de universalidade caracterizada pelo conjunto de parâmetros (N, d, m_2, m_3) . Não é difícil imaginar a extensão do procedimento para incluir um número L de acoplamentos $J_1, J_2, \dots, J_L$ cujos sinais são alternados ($J_1 > 0, J_2 < 0, J_3 > 0, \dots$), de modo que as interações ferromagnéticas e antiferromagnéticas sejam intercaladas entre si [92–94]. A construção mais geral que podemos ter consiste em estender cada uma dessas interações J_n para um subespaço m_n -dimensional, onde $\sum_{n=1}^L m_n = d$. O sistema pode ser, portanto, chamado de m_L -axial, com um ponto de Lifshitz de L -ésimo caráter genérico (modelo *CECI*), cuja classe de universalidade é dada por $(N, d, m_1, m_2, \dots, m_L)$. A descrição fenomenológica em termos de campos escalares também pode ser aplicada a esses tipos de sistemas. Nesse caso, a região crítica de Lifshitz é tal que, para um dado subespaço com m_n dimensões, o termo dinâmico não-nulo mais relevante na densidade lagrangiana corresponde a $(\nabla_{m_n}^n \Phi)^2$. Observamos que as dimensões canônicas dos momentos de ordens mais elevadas foram redefinidas de modo que o termo dinâmico assim definido e, conseqüentemente, os propagadores são dimensionalmente consistentes, conforme ilustramos no capítulo 7, onde utilizamos apenas a configuração mais simplificada ($d = m_n$).

A discussão sobre a descrição mais geral de sistemas com interações competitivas, que é representada por um modelo simples de rede denominado modelo *CECI*, pode ser encontrada na referência [76]. Este modelo consiste numa modificação do modelo de Ising, incluindo os modelos *ANNNI* e m -axial como casos particulares. O comportamento crítico genérico de Lifshitz do L -ésimo caráter, evidentemente, estende a compreensão do comportamento crítico do segundo caráter m -axial [75], que por sua vez é uma extensão do modelo *ANNNI*.

Os expoentes críticos calculados no último capítulo deste trabalho são também exemplos de grandezas que exibem um caráter universal, ou seja, são independentes das características microscópicas dos sistemas considerados. Vimos que, na verdade, o fator determinante na diferenciação dos sistemas que podem ser descritos pelo modelo *CECI* é a classe de universalidade que, para o caso isotrópico, é dada por N e $d = m_n$. A propriedade de universalidade dos expo-

entes críticos é uma consequência natural da aplicação das técnicas do grupo de renormalização aos sistemas que exibem transições de fase, o que abrange também os sistemas com interações competitivas do tipo Lifshitz de L -ésimo caráter, também objeto do nosso estudo.

Através das analogias existentes entre a teoria de campos e a mecânica estatística, conseguimos calcular os expoentes críticos isotrópicos exatos do modelo *CECI* até $O(\epsilon_n^2)$ (até $O(\epsilon_n^3)$ para o expoente crítico η_n) aplicando, para isso, o método de subtração mínima como meio de tornar a teoria renormalizada. Também utilizamos regularização dimensional para expressar as integrais de Feynman em termos de polos dimensionais. Tais integrais foram calculadas exatamente. É importante frisar que o método de subtração mínima não tinha ainda sido aplicado para encontrar os expoentes críticos exatos do modelo *CECI*, embora esses mesmos expoentes já tenham sido calculados pela técnica de condições de normalização [76]. Vale ressaltar também que os expoentes críticos do caso isotrópico exato, calculados aqui [90], são idênticos àqueles das referências citadas acima.

Existem algumas vantagens na utilização do método de subtração mínima em relação ao método de condições de normalização [17]. A primeira e notável vantagem é o fato de não precisarmos calcular as integrais logarítmicas que aparecem no processo de resolução, pois estas são canceladas no decorrer do cálculo. Outra vantagem é que como, por construção, sabemos que tais integrais devem ser canceladas, torna-se fácil e imediato a verificação de erros algébricos, o que é muito importante, dado a quantidade de expressões que devem ser obtidas até o resultado final, o que traz ainda mais confiabilidade nos coeficientes obtidos para as expansões e, consequentemente, no resultado para os expoentes críticos. Outra vantagem está ligada a não especificação, em subtração mínima, da escala de momento κ . Com isso não precisamos inserir o conceito de ponto simétrico como é feito em condições de normalização. Ainda temos que o processo de renormalização é realizado pelo isolamento apenas dos termos divergentes, o que deixa explícito quais são os únicos termos que devem ser subtraídos (*subtração mínima*), para que a teoria seja renormalizada.

O tratamento de sistemas m_L -axiais com tamanho finito sujeitos a *PBC*, *ABC*, *NBC* e *DBC*, pode ser visto como uma consequência natural das nossas análises para sistemas mais simples, a ser realizado posteriormente com o auxílio das formulações de Leite e Carvalho [76, 95, 96]. O primeiro caso a ser considerado é análogo ao realizado no capítulo 6, porém, por simplicidade, é conveniente começar com *PBC* ou *ABC*. Fazendo uma das dimensões finitas ao longo do subespaço sem competição m_1 -dimensional e aplicando *PBC* ou *ABC*, teremos o componente z do vetor k_1 discreto (quase-momento). As integrais de Feynman relacionadas com o propagador referente a k_1 podem ser regularizadas com o auxílio da aproximação ortogonal e o somatório nos quase-momentos, resultante desse procedimento, pode ser identificado com (4.112). Os expoentes críticos seriam então calculados em termos de expansões em potências de um novo parâmetro dimensional $\epsilon_L = 4 + \sum_{n=2}^L [(n-1)/n]m_n - d$.

Outra perspectiva desse trabalho, relaciona-se com a possibilidade de tornar compacta uma das dimensões do segundo subespaço, no qual já existem interações competitivas. Nesse caso, é o componente z do vetor k_2 que passa a ser discreto. Utilizando novamente a aproximação ortogonal, podemos resolver as integrais em todos os momentos contínuos para cada *loop* nos

diagramas de Feynman e chegaremos a um somatório nos quase-momentos correspondente a uma generalização de (4.112), a qual inclui quase-momentos quárticos. Essa generalização já foi proposta e utilizada por Silva e Leite no caso m -axial com PBC e ABC . É importante dizer que condições de contorno em subespaços com índice $n > 2$ conduzem a somatórios bem mais complexos, cujas representações não dispomos no momento. Um dos nossos objetivos para trabalhos futuros consiste em também desenvolver novas representações para esses tipos de somatórios, o que pode gerar aplicações em várias áreas onde o estudo de limitações espaciais se insere.

Referências

- [1] Th. Andrews. On the Continuity of the Gaseous and Liquid States of Matter. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 159:575, 1869.
- [2] M. E. Fisher. The Theory of Equilibrium Critical Phenomena. *Reports on Progress in Physics*, 30:615, 1967.
- [3] P. Heller. Experimental Investigations of Critical Phenomena. *Reports on Progress in Physics*, 30:731, 1967.
- [4] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 31:253, 1925.
- [5] L. Onsager. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*, 65:117, 1944.
- [6] K. G. Wilson. Renormalization Group and Critical Phenomena I. Renormalization Group and The Kadanoff Scaling Picture. *Physical Review B*, 4:3174, 1971.
- [7] K. G. Wilson. Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior. *Physical Review B*, 4:3184, 1971.
- [8] K. G. Wilson and M. E. Fisher. Critical Exponents in 3.99 Dimensions. *Physical Review Letters*, 28:240, 1972.
- [9] K. G. Wilson. Feynman-Graph Expansion for Critical Exponents. *Physical Review Letters*, 28:548, 1972.
- [10] K. G. Wilson and J. Kogut. The Renormalization Group and the ϵ Expansion. *Physics Reports*, 12:75, 1974.
- [11] L. P. Kadanoff. Scaling Laws for Ising Models Near T_c . *Physics*, 2:263, 1966.
- [12] C. Garrod. *Statistical Mechanics and Thermodynamics*. Oxford University Press, 1995.
- [13] B. Widom. Equation of State in the Neighborhood of the Critical Point. *Journal of Chemical Physics*, 43:3898, 1965.

-
- [14] Shang-Keng Ma. *Modern Theory of Critical Phenomena*. Perseus Publishing, 2000.
 - [15] E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin. Field Theoretical Approach to Critical Phenomena. In C. Domb and M. S. Green, editors, *Phase Transition and Critical Phenomena*, volume 6. Academic Press, 1976.
 - [16] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 4th edition, 2002.
 - [17] D. J. Amit and V. Martín-Mayor. *Field Theory, The Renormalization Group and Critical Phenomena*. World Scientific, 3rd edition, 2005.
 - [18] M. N. Barber. Finite-Size Scaling. In C. Domb and J. L. Lebowitz, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 8. Academic Press, 1983.
 - [19] B. A. Scheibner, M. R. Meadows, R. C. Mockler, and W. J. O’Sullivan. Critical Phenomena in Fluid Films: Scaling Crossover and Law of Corresponding States. *Physical Review Letters*, 43:590, 1979.
 - [20] M. R. Meadows, B. A. Scheibner, R. C. Mockler, and W. J. O’Sullivan. Critical Phenomena in Fluid Films: Critical-Temperature-Shift, Crossover-Temperature, and Coexistence-Curve-Amplitude Exponents, and a Fluid-Boundary Interaction. *Physical Review Letters*, 43:592, 1979.
 - [21] T. P. Chen and F. M. Gasparini. Scaling of the Specific Heat of Confined Helium Near T_λ . *Physical Review Letters*, 40:331, 1978.
 - [22] F. M. Gasparini, G. Agnolet, and J. D. Reppy. Failure of Bulk-Correlation-Lentgh Scaling for the Superfluid Density of Confined ^4He . *Physical Review B*, 29:138, 1984.
 - [23] F. M. Gasparini, M. O. Kimball, K. P. Mooney, and M. Diaz-Avila. Finite-Size Scaling of ^4He at the Superfluid Transition. *Reviews of Modern Physics*, 80:1009, 2008.
 - [24] M. Krech and S. Dietrich. Finite-Size Scaling for Critical Films. *Physical Review Letters*, 66:345, 1991.
 - [25] M. Krech and S. Dietrich. Free Energy and Specific Heat of Critical Films and Surfaces. *Physical Review A*, 46:1886, 1992.
 - [26] M. Krech and S. Dietrich. Specific Heat of Critical Films, the Casimir Force and Wetting Films Near Critical End Points. *Physical Review A*, 46:1922, 1992.
 - [27] W. Huhn and V. Dohm. Possible Resolution of the Finite-Size Scaling Problem in ^4He . *Physical Review Letters*, 61:1368, 1988.

-
- [28] A. Maciolek, A. Gambassi, and S. Dietrich. Critical Casimir Effect in Superfluid Wetting Films. *Physical Review E*, 76:031124, 2007.
- [29] B. S. Kay. Casimir Effect in Quantum Field Theory. *Physical Review D*, 20:3052, 1979.
- [30] L. H. Ford. Quantum Vacuum Energy in General Relativity. *Physical Review D*, 11:3370, 1975.
- [31] L. H. Ford. Casimir Effect for a Self-Interacting Scalar Field. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 368:305, 1979.
- [32] L. H. Ford. Vacuum Polarization in a Nonsimply Connected Spacetime. *Physical Review D*, 21:933, 1980.
- [33] D. J. Toms. Casimir Effect and Topological Mass. *Physical Review D*, 21:928, 1980.
- [34] L. H. Ford and T. Yoshimura. Mass Generation by Self-Interaction in Non-Minkowskian Spacetimes. *Physics Letters A*, 70:89, 1979.
- [35] N. D. Birrel and L. H. Ford. Renormalization of Self-Interacting Scalar Field Theories in a Nonsimply Connected Spacetime. *Physical Review D*, 22:330, 1980.
- [36] M. B. Kislinger and P. D. Morley. Collective Phenomena in Gauge Theories. II. Renormalization in Finite-Temperature Field Theory. *Physical Review D*, 13:2771, 1976.
- [37] A. M. Nemirovsky and K. F. Freed. Renormalization Group Treatment of Finite Size Scaling with ϵ Expansion. *Journal of Physics A*, 18:L319, 1985.
- [38] A. M. Nemirovsky and K. F. Freed. Surface and Finite Size Effects in Critical Phenomena. *Nuclear Physics B*, 270:423, 1986.
- [39] E. Brezin. An Investigation of Finite Size Scaling. *J. Physique*, 43:15, 1982.
- [40] M. E. Fischer and M. N. Barber. Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region. *Physical Review Letters*, 28:1516, 1972.
- [41] J. B. da Silva Jr. and M. M. Leite. Critical Exponents from Parallel Plate Geometries Subject to Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Physics*, 53:43303, 2012.
- [42] Y. Shapira, C. C. Becerra, N. F. Oliveira Jr, and T. S. Chang. Phase Diagram, Susceptibility and Magnetostriction of MnP : Evidence for a Lifshitz Point. *Physical Review B*, 24:2780, 1981.
- [43] C. C. Becerra, Y. Shapira, N. F. Oliveira, and T. S. Chang. Lifshitz Point in MnP . *Physical Review Letters*, 44:1692, 1980.

-
- [44] C. C. Becerra, H. J. Brumatto, and N. F. Oliveira Jr. Line of Multicritical Lifshitz Points in the Phase Diagram of MnP . *Physical Review B*, 54:15997, 1996.
 - [45] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas. Theoretical Interpretation for the Occurrence of a Lifshitz Point in MnP . *Physical Review B*, 24:5430, 1981.
 - [46] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas. Spin-Localized Model for the Lifshitz Point in MnP . *Physical Review B*, 29:6341, 1984.
 - [47] A. Zięba, C. C. Becerra, H. Fjellvåg, N. F. Oliveira Jr, and A. Kjekshus. $Mn_{0.9}Co_{0.1}P$ in an External Field: Lifshitz Point and Irreversibility Behavior of Disordered Incommensurate Phases. *Physical Review B*, 46:3380, 1992.
 - [48] T. Plackowski, M. Matusiak, and J. Sznajd. Isothermal Magnetocaloric Effect in the Vicinity of the Lifshitz Point in $Mn_{0.9}Co_{0.1}P$. *Physica Status Solidi B*, 249:158, 2012.
 - [49] Yu. M. Vysochanskii and V. Yu. Slivka. Lifshitz Point on the State Diagram of Ferroelectrics. *Soviet Physics Uspekhi*, 35:123, 1992.
 - [50] R. M. Yevych, Yu M. Vysochanskii, M. M. Khoma, and S. I. Perechinskii. Lattice Instability at Phase Transitions Near the Lifshitz Point in Proper Monoclinic Ferroelectrics. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 18:4047, 2006.
 - [51] A. Oleaga, A. Salazar, A. A. Kohutych, and Yu. M. Vysochanskii. Critical Behavior Near the Lifshitz Point in $Sn_2P_2(S_{1-x}Se_x)_6$ Ferroelectric Semiconductors from Thermal Diffusivity Measurements. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23:25902, 2011.
 - [52] E. Abrahams and I. E. Dzyaloshinskii. A Possible Lifshitz Point for TTF-TCNQ. *Solid State Communications*, 23:883, 1977.
 - [53] C. Hartzstein, V. Zevin, and M. Weger. Landau Theory of Phase Transitions in TTF-TCNQ. *Journal de Physique*, 41:677, 1980.
 - [54] A. Michelson. Physical Realization of a Lifshitz Point in Liquid Crystals. *Physical Review Letters*, 39:464, 1977.
 - [55] I. Mušević, B. Žekš, R. Blinc, Th. Rasing, and P. Wyder. Phase Diagram of a Ferroelectric Chiral Smectic Liquid Crystal Near the Lifshitz Point. *Physical Review Letters*, 48:192, 1982.
 - [56] S. B. Rananavare, V. G. K. M. Pisipati, and E. W. Mong. Smectic-A — Smectic-C — Smectic-C* Multicritical Point in Ferroelectric Liquid Crystals. *Physical Review Letters*, 72:3558, 1994.

-
- [57] A. E. Jacobs and L. Benguigui. Landau Theory of the Helicoidal C* Phase in Smectic Liquid Crystals: Re-entrance of the Smectic-C* Phase and Order of the Smectic-C - Smectic-C* Transition. *Physical Review A*, 39:3622, 1989.
- [58] B. Zalar, A. Gregorovič, M. Simsič, A. Zidanšek, and R. Blinc. Anisotropy of the Critical Magnetic Field in a Ferroelectric Liquid Crystal. *Physical Review Letters*, 80:4458, 1998.
- [59] M. Škarabot, R. Blinc, and I. Muševič. Lifshitz Point in the Phase Diagram of a Ferroelectric Liquid Crystal in an External Magnetic Field. *Physical Review E*, 61:3961, 2000.
- [60] G. H. Fredrickson and S. T. Milner. Thermodynamics of Random Copolymer Melts. *Physical Review Letters*, 67:835, 1991.
- [61] F. S. Bates, W. Maurer, T. P. Lodge, M. F. Schulz, and M. W. Matsen. Isotropic Lifshitz Behavior in Block Copolymer-Homopolymer Blends. *Physical Review Letters*, 75:4429, 1995.
- [62] R. R. Netz and M. Schick. Liquid-Crystalline Phases of Semiflexible Diblock Copolymer Melts. *Physical Review Letters*, 77:302, 1996.
- [63] F. S. Bates, W. M. Maurer, P. M. Lipic, M. A. Hillmyer, K. Almdal, K. Mortensen, G. H. Fredrickson, and T. P. Lodge. Polymeric Bicontinuous Microemulsions. *Physical Review Letters*, 79:849, 1997.
- [64] J. Singleton. Why do Physicists Love Charge-Transfer Salts? *Journal of Solid State Chemistry*, 168:675, 2002.
- [65] R. J. Elliot. Phenomenological Discussion of Magnetic Ordering in the Heavy Rare-Earth Metals. *Physical Review*, 124:346, 1961.
- [66] W. Selke and M. E. Fisher. Spatially Modulated Phase in Ising Models with Competing Interactions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 15:403, 1980.
- [67] W. Selke. Spatially Modulated Structures. In C. Domb and J. L. Lebowitz, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 15. Academic Press, 1992.
- [68] C. Bervillier. Universal relations among critical amplitude. calculations up to order ϵ^2 for systems with continuous symmetry. *Phys. Rev. B*, 14:4964–4975, Dec 1976.
- [69] V. Bindilatti, C. C. Becerra, and N. F. Oliveira. Specific-heat exponent and critical-amplitude ratio at the Lifshitz multicritical point. *Phys. Rev. B*, 40:9412–9415, Nov 1989.
- [70] V. Privman, P. C. Hohenberg, and A. Aharony. *Universal critical-point amplitude relations*, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 4. Academic Press, 1991.

-
- [71] Marcelo M. Leite. Susceptibility amplitude ratio near a Lifshitz point. *Phys. Rev. B*, 61:14691–14693, Jun 2000.
- [72] Marcelo M. Leite. Specific-heat amplitude ratio for anisotropic Lifshitz critical behaviors. *Phys. Rev. B*, 68:052408, Aug 2003.
- [73] C. F. F. Farias. Amplitudes de susceptibilidade para o ponto de Lifshitz m -axial. Master’s thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.
- [74] R. M. Hornreich, M. Luban, and S. Shtrikman. Critical Behavior at the Onset of k –Space Instability on the λ Line. *Physical Review Letters*, 35:1678, 1975.
- [75] M. M. Leite. Renormalization-Group Picture of the Lifshitz Critical Behavior. *Physical Review B*, 67:104415, 2003.
- [76] M. M. Leite. Critical Behavior of Generic Competing Systems. *Physical Review B*, 72:224432, 2005.
- [77] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [78] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 7th edition, 2007.
- [79] M. E. Fischer and A. E. Ferdinand. Interfacial, Boundary and Size Effects at Critical Points. *Physical Review Letters*, 19:169, 1967.
- [80] J. B. da Silva Jr. and M. M. Leite. Parallel Plates and Critical Exponents for Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions. In *NSTI-Nanotech*, volume 2, page 137, 2011.
- [81] Paulo R. S. Carvalho and Marcelo M. Leite. Unconventional minimal subtraction and bogoliubov-parasyuk-hepp-zimmermann method: Massive scalar theory and critical exponents. *Journal of Mathematical Physics*, 54(9):093301, 2013.
- [82] G. W. Gibbons. Thermal Zeta Functions. *Physics Letters A*, 60:385, 1977.
- [83] J. Ambjorn and S. Wolfram. Properties of Vacuum. I. Mechanical and Thermodynamic. *Annals of Physics*, 147:1, 1983.
- [84] H. Boschi-Filho and C. Farina. Generalized Thermal Zeta-Functions. *Physics Letters A*, 205:255, 1995.
- [85] Marcelo M. Leite. Renormalization-group picture of the lifshitz critical behavior. *Phys. Rev. B*, 67:104415, Mar 2003.
- [86] L. C. de Albuquerque and M. M. Leite. Anisotropic Lifshitz Point at $O(\epsilon_L^2)$. *Journal of Physics A*, 34:L327, 2001.

-
- [87] J. B. da Silva Jr. Tamanho finito em criticalidade lifshitz m -axial. Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2012.
 - [88] P. R. S. Carvalho and M. M. Leite. Callan-Symanzik Method for m -Axial Lifshitz Points. *Annals of Physics*, 324:178, 2009.
 - [89] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman. *Diagrammar*. CERN, Geneva, 1973.
 - [90] Messias V. S. Santos and Marcelo M. Leite. Minimal subtraction formulation of massless fields for generic competing systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 490, 2014.
 - [91] W. Selke. Critical Behavior Near Lifshitz Points. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 9:7, 1978.
 - [92] J. F. Nicoll, T. S. Chang, and H. E. Stanley. Exact and Approximate Differential Renormalization-Group Generators. *Physical Review A*, 13:1251, 1976.
 - [93] J. F. Nicoll, G. F. Tuthill, T. S. Chang, and H. E. Stanley. Renormalization Group Calculation for Critical Points of Higher Order with General Propagator. *Physics Letters A*, 58:1, 1976.
 - [94] W. Selke. Lifshitz Points of Higher Character. *Physics Letters A*, 61:443, 1977.
 - [95] M. M. Leite. New Universality Classes for Generic Higher Character Lifshitz Points. *Physics Letters A*, 326:281, 2004.
 - [96] P. R. S. Carvalho and M. M. Leite. Callan-Symanzik-Lifshitz Approach to Generic Competing Systems. *Annals of Physics*, 325:151, 2010.

Apêndice A

Regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria massiva

Como as integrais I e I' massivas já foram calculadas explicitamente no capítulo 4, passaremos à regularização dimensional das contribuições da ordem de 2 *loops* da função de vértice de 4 pontos. Vamos começar com a integral I_4 dada em (4.50) e que pode ser reescrita aqui como

$$I_4(k, k', i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I(q + k', l + j; r, 1)}{[(q - k)^2 + r^2(l - i)^2 + 1][q^2 + r^2l^2 + 1]}. \quad (\text{A.1})$$

Como a integral é massiva podemos fazer desde já $k = k' = 0$, simplificando a expressão para:

$$I_4(0, 0, i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I(q, l + j; r, 1)}{[q^2 + r^2(l - i)^2 + 1][q^2 + r^2l^2 + 1]}. \quad (\text{A.2})$$

Novamente, a vantagem de termos identificado a integral (4.108) no integrando acima deve-se ao fato de já termos a regularização dela em (4.119). Portanto, podemos escrever:

$$I_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} S_d \left[\frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \int_0^1 dx \, r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[q^2 + r^2(l - i)^2 + 1]} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{(q^2 + r^2l^2 + 1)\{x(1 - x)[q^2 + r^2(l + j)^2] + 1\}^{\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{1}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}, 2}^{(\tau'=0)}(i, j; r) \right], \quad (\text{A.3})$$

onde,

$$F_{\frac{\epsilon}{2}, 2}^{(\tau'=0)}(i, j; r) \equiv \frac{r}{S_d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, l + j; r, 1)}{[q^2 + r^2(l - i)^2 + 1][q^2 + r^2l^2 + 1]}. \quad (\text{A.4})$$

As singularidades (polos em ϵ) da integral (A.3) originam-se do primeiro termo, enquanto que o segundo produz apenas termos regulares (de ordem ϵ^0), podendo, portanto, ser desprezado na nossa análise. A fim de mostrarmos a regularidade desse termo, consideremos inicialmente a definição (4.120), juntamente com (4.116)

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r) = 4r^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m j x) \left[\frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1} \right). \quad (\text{A.5})$$

Da expressão acima, segue imediatamente que

$$\tilde{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r) \equiv 4r^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1} \right) > F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r). \quad (\text{A.6})$$

Como o integrando é simétrico em torno de $x = \frac{1}{2}$ nós podemos escrever

$$\tilde{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r) = 8r^{-\epsilon} \int_0^{\frac{1}{2}} dx \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1} \right). \quad (\text{A.7})$$

No limite $q \rightarrow \infty$, escolhemos um parâmetro real $\lambda \ll 1$ tal que ainda tenhamos $\lambda q^2 \rightarrow \infty$. A ideia é dividir os limites de integração em duas partes: na primeira, integraremos no intervalo $(0, \lambda)$, considerando os argumentos das funções até ordem x e, na segunda, a integral será sobre o intervalo $(\lambda, \frac{1}{2})$. Desde que r seja finito, podemos usar a expansão assintótica da função de Bessel na segunda parte

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \tilde{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r) = 8r^{-\epsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^{\lambda} dx \left(\frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{x(q^2 + r^2 j^2) + 1}} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi m r^{-1} \sqrt{x(q^2 + r^2 j^2) + 1} \right) + \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} dx \left(\frac{\pi m}{r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1}} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \left. \times \sqrt{\frac{\pi}{4\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1}}} \exp \left(-2\pi m r^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + r^2 j^2) + 1} \right) \right]. \quad (\text{A.8})$$

O segundo termo pode ser desprezado no limite considerado, pois ele decai muito mais rapidamente que o primeiro termo. Realizando a mudança de variável $y = 1 + x(q^2 + r^2 j^2)$, simplificamos o resultado acima para

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \tilde{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r) = \frac{8r^{-\frac{\epsilon}{2}}}{q^2 + r^2 j^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{\frac{\epsilon}{2}} \int_1^{\infty} dy y^{-\frac{\epsilon}{4}} K_{\frac{\epsilon}{2}}(2\pi m r^{-1} \sqrt{y}). \quad (\text{A.9})$$

Usando a seguinte identidade encontrada em [78]

$$\int_1^{\infty} dx x^{-\frac{\nu}{2}} (x-1)^{\mu-1} K_{\nu}(a\sqrt{x}) = \Gamma(\mu) 2^{\mu} a^{-\mu} K_{\nu-\mu}(a), \quad (\text{A.10})$$

e considerando que estamos fora da região de *crossover* dimensional, isto é, $r < \infty$, chegamos ao seguinte resultado

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \tilde{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r) = \frac{8r^{1-\frac{\epsilon}{2}}}{q^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{\frac{\epsilon}{2}-1} K_{\frac{\epsilon}{2}-1}(2\pi m r^{-1}), \quad (\text{A.11})$$

o qual é claramente regular para $\epsilon = 0$. como $\tilde{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r) > F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; r)$, vemos que a integral na definição (A.4) não possui divergências no limite ultravioleta, podendo de fato ser desprezado em $I_4(i, j, r, \mu)$. Assim, podemos escrever a expressão (A.3) na forma

$$I_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} S_d \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{(q^2 + r^2 l^2)[q^2 + r^2(l-i)^2 + 1] \left[q^2 + r^2(l+j)^2 + \frac{1}{x(1-x)}\right]^{\frac{\epsilon}{2}}} \quad (\text{A.12})$$

Introduzindo dois parâmetros de Feynman em sequência, reescrevemos o resultado anterior como

$$I_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} S_d \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(2 + \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dz \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \\ \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{\left[q^2 + y(1-z)r^2 l^2 + yzr^2(l-i)^2 + (1-y)r^2(l+j)^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)}\right]^{2+\frac{\epsilon}{2}}}. \quad (\text{A.13})$$

A integração no momento q resulta em

$$I_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{2\sqrt{\pi\epsilon}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \epsilon) \Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dz \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[y(1-z)r^2 l^2 + yzr^2(l-i)^2 + (1-y)r^2(l+j)^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{-\frac{1}{2}-\epsilon}. \quad (\text{A.14})$$

Antes de realizarmos a soma podemos simplificar a expressão anterior notando que na integral em y temos um polo devido ao termo $(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1}$ para $\epsilon \rightarrow 0$. Sendo assim podemos fazer $y = 1$ no argumento da soma, o que é o mesmo que fazer uma expansão em torno de $y = 1$ e pegar apenas o primeiro termo da expansão. Aplicando o que foi descrito e utilizando (4.114) chegamos a seguinte expressão

$$I_4(i; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} S_d^2 \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(\epsilon)}{2\epsilon \Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \right. \\ \times \int_0^1 dz [z(1-z)r^2 i^2 + 1]^{-\epsilon} + \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{2\epsilon \Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \\ \left. \times r^{-2\epsilon} \int_0^1 dz f_{\frac{1}{2}+\epsilon} \left(zi, r^{-1} \sqrt{z(1-z)r^2 i^2 + 1} \right) \right\}. \quad (\text{A.15})$$

Note que agora I_4 não depende mais de j . Expandindo em ϵ e desprezando termos a partir de ϵ^0 , chegamos ao resultado

$$I_4(i; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{1}{2\epsilon^2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} - \epsilon \int_0^1 dz \ln[z(1-z)r^2 i^2 + 1] + \epsilon F_0^{(\tau'=0)}(i; r) \right\}. \quad (\text{A.16})$$

Vamos agora resolver a integral expressa em (4.51). A integral I'_4 pode ser reescrita como:

$$I'_4(k, k', i, j, l; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} r \int d^{d-1} q \frac{I(q + k', l; r, 1)}{[(q - k)^2 + r^2 i^2 + 1][q^2 + r^2 j^2 + 1]}. \quad (\text{A.17})$$

Por se tratar de uma integral massiva, podemos desde já fazer $k = k' = 0$. Ficamos então com:

$$I'_4(i, j, l; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} r \int d^{d-1} q \frac{I(q, l; r, 1)}{[q^2 + r^2 i^2 + 1][q^2 + r^2 j^2 + 1]}. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (4.108) na expressão acima encontramos:

$$I'_4(i, j, l; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} S_d \left\{ \frac{r}{\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int \frac{d^{d-1} q}{(q^2 + r^2 i^2 + 1)(q^2 + r^2 j^2 + 1)} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\left[q^2 + r^2 l^2 + \frac{1}{x(1-x)}\right]^{\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{r}{2} \int d^{d-1} q \frac{F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, l; r)}{(q^2 + r^2 i^2 + 1)(q^2 + r^2 j^2 + 1)} \right\}. \quad (\text{A.19})$$

A última integral da expressão anterior é regular para $\epsilon \rightarrow 0$, o que pode ser percebido em comparação com o que ocorreu com I_4 e, portanto, o último termo pode ser desprezado. Note também que nas integrais restantes podemos aplicar diretamente $\epsilon = 0$ como uma forma de

simplificar os cálculos, visto que estamos em busca apenas dos termos divergentes (Obs: *Essa simplificação não se aplica à teoria sem massa por conta da escala κ*). Assim temos

$$I'_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} S_d \frac{r}{\epsilon} \int \frac{d^{d-1}q}{(q^2 + r^2 i^2 + 1)(q^2 + r^2 j^2 + 1)}. \quad (\text{A.20})$$

Observe que a dependência em l desapareceu. Utilizando um parâmetro de Feynman temos:

$$I'_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} S_d \frac{r}{\epsilon} \int_0^1 dy \int \frac{d^{d-1}q}{[q^2 + (1-y)r^2 j^2 + yr^2 i^2 + 1]^2}. \quad (\text{A.21})$$

Integrando agora em q chegamos à:

$$I'_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} S_d^2 \frac{r}{2\sqrt{\pi}\epsilon} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dy [yr^2 i^2 + (1-y)r^2 j^2 + 1]^{-\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}}. \quad (\text{A.22})$$

Expandindo em ϵ , novamente notamos que precisamos apenas do primeiro termo. Ficamos então com:

$$I'_4(i, j; r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{r}{2\epsilon} \int_0^1 dy [yr^2 i^2 + (1-y)r^2 j^2 + 1]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.23})$$

onde utilizamos $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ e absorvemos o fator S_d numa redefinição da constante de acoplamento, como realizado em todos os outros casos.

Agora, vamos mostrar que a integral I''_4 não possui polos em ϵ e, por isso, foi descartada, desde o capítulo 4, no cálculo dos expoentes críticos. Para isso, é suficiente trabalharmos com os quase-momentos externos iguais a zero, visto que, o grau de singularidade exibida pelas integrais calculadas aqui independe desse fator. O grau de singularidade está, em primeira instância, relacionado com a quantidade de propagadores. Lembramos que o fato de não podermos aplicar os quase momentos externos iguais a zero nos capítulos 4 e 6 vem da condição de contorno de Dirichlet, o que é materializado como um fator externo às integrais. Começando com a expressão dada em (4.52), fazendo todos os quase-momentos externos nulos, podemos escrever

$$I''_4(r, \mu) = \mu^{-\epsilon} r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I'(q, m; r, \mu)}{[q^2 + r^2 m^2 + 1]^2}. \quad (\text{A.24})$$

Um ponto importante a ser mencionado, e que já indica a regularidade da expressão acima, é que a integral I''_4 está escrita em termos da integral regular I' , ao contrário de I'_4 , que é escrita em termos de I , que por sua vez é divergente.

A partir da expressão dada em (4.124), não é difícil ver que

$$I'(q, m; r, \mu) = \mu^{-\epsilon} \frac{S_d r}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)q^2 + r^2 x m^2 + 1]^{-\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}}. \quad (\text{A.25})$$

Aplicando o resultado acima em I''_4 , assim como, um parâmetro de Feynman, obtemos

$$I_4''(r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d r^2}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \times$$

$$\int_0^1 dy y(1-y)^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{1}{\left\{q^2 + \left[y\left(1 - \frac{1}{(1-x)}\right) + \frac{1}{(1-x)}\right] r^2 m^2 + \frac{1-y}{x(1-x)} + y\right\}^{\frac{5}{2}+\frac{\epsilon}{2}}}.$$
(A.26)

Resolvendo a integral em q acima, ficamos com

$$I_4''(r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 r^2}{4\pi} \Gamma^2\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma(1 + \epsilon) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \times$$

$$\times \int_0^1 dy y(1-y)^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[y\left(1 - \frac{1}{(1-x)}\right) + \frac{1}{(1-x)} \right] r^2 m^2 + \frac{1-y}{x(1-x)} + y \right\}^{-(1+\epsilon)}.$$
(A.27)

Realizando agora a soma chegamos no resultado

$$I_4''(r, \mu) = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2 r^2}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \times$$

$$\times \left[\frac{r^2(xy-1)}{x-1} \right]^{-(1+\epsilon)} \left[\left(r^{-1} \sqrt{\frac{[x(x-1)+1]y-1}{x(xy-1)}} \right)^{-(1+2\epsilon)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)} f_{1+\epsilon} \left(0, r^{-1} \sqrt{\frac{[x(x-1)+1]y-1}{x(xy-1)}} \right) \right].$$
(A.28)

Observando a expressão acima, fica explícito que nenhum termo em I_4'' é divergente para $\epsilon \rightarrow 0$. Assim, como queríamos confirmar, a integral I_4'' não contribui para a parte singular das funções de vértice, podendo ser desprezada. Tal conclusão é válida inclusive para a integral I_4'' sem massa, pois, fazer a massa nula não influencia no grau da divergência, mas sim nas constantes de proporcionalidade dos termos sublíderes das integrais.

Continuando com a regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria massiva, temos a seguinte integral

$$D_3(k, i; \sigma, \mu) = \sigma^2 \sum_{j_1, j_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q_1 d^{d-1}q_2}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(j_1 + j_2 + i)^2 + \mu^2]} \times$$

$$\times \frac{1}{[q_1^2 + \sigma^2 j_1^2 + \mu^2][q_2^2 + \sigma^2 j_2^2 + \mu^2]},$$
(A.29)

A integral acima tem seu paralelo em PBC e podemos identificar a inserção de I no integrando de modo que podemos escrever:

$$D_3(k, i; r, \mu) = \mu^{2-2\epsilon} r \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{I(q+k, j+i; r, 1)}{(q^2 + r^2 j^2 + 1)}. \quad (\text{A.30})$$

Note que os momentos já foram reescalados de acordo com o realizado para I e I' . Substituindo o resultado (4.119), a expressão acima torna-se:

$$D_3(k, i; r, \mu) = \mu^{2-2\epsilon} \frac{S_d}{\epsilon} \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} r \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q}{(q^2 + r^2 j^2 + 1)} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\left[(q+k)^2 + r^2(j+i)^2 + \frac{1}{x(1-x)}\right]^{\frac{\epsilon}{2}}} + S_d \frac{\epsilon}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau'=0)}(k, i; r) \right], \quad (\text{A.31})$$

onde definimos de forma generalizada:

$$F_{\alpha, \beta}^{(\tau'=0)}(k, i, r) \equiv \frac{1}{S_d} r \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \frac{F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(q+k, j+i; r)}{[q^2 + r^2 j^2 + 1]^{\beta}}. \quad (\text{A.32})$$

Depois de inserir mais um parâmetro de Feynman, resolver a integral no momento q e utilizar a identidade (4.118), semelhantemente ao que fizemos com a integral I , obtemos o seguinte resultado para D_3 :

$$D_3(k, i; r, \mu) = \mu^{2-2\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \epsilon)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy (1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \right. \\ \left. \times r \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[y(1-y)k^2 + r^2[yj^2 + (1-y)(j+i)^2] + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{\frac{1}{2}-\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau'=0)}(k, i; r) \right\}. \quad (\text{A.33})$$

Nosso interesse é na derivada de $D_3(k, i; r, \mu)$ com relação ao módulo quadrado do momento externo k , tomando em seguida $k = 0$. Lembrando que o momento está escalado com a massa μ (ou seja, $\frac{k}{\mu} \rightarrow k$), realizamos a derivação da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_3(k, i; r, \mu) \Big|_{k=0} = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \epsilon)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \right. \\ \left. \times \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} r \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[r^2[yj^2 + (1-y)(j+i)^2] + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{-\frac{1}{2}-\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(i; r) \right\}, \quad (\text{A.34})$$

onde definimos:

$$F'_\alpha{}^{(\tau'=0)}(i; r) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial k^2} F_{\alpha,1}^{(\tau'=0)}(k, i; r) \right|_{k=0}. \quad (\text{A.35})$$

Empregando a representação (4.114) no somatório em j da expressão acima, e expandindo o argumento das funções Γ em ϵ com a omissão dos termos de ordem ϵ^1 , chegamos a:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_3(k, i; r, \mu) \right|_{k=0} &= -\mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{4\epsilon} r^{-2\epsilon} (1-\epsilon) \left\{ \int_0^1 dx dy y (1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} + \right. \\ &\quad - \epsilon \int_0^1 dx dy y (1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} \ln \left[y(1-y)i^2 + yr^{-2} + \frac{(1-y)}{x(1-x)} r^{-2} \right] + \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dx \ln[x(1-x)] \int_0^1 dy y (1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} + \\ &\quad + \epsilon \int_0^1 dx dy y (1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} f_{\frac{1}{2}+\epsilon} \left((1-y)i, \sqrt{y(1-y)i^2 + yr^{-2} + \frac{(1-y)}{x(1-x)} r^{-2}} \right) + \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^{-2\epsilon}(1-\epsilon)} 2\epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}}'^{(\tau'=0)}(i; r) \right\}. \quad (\text{A.36}) \end{aligned}$$

Notando que todos os termos que estão multiplicados por um fator ϵ podem ser calculados em $\epsilon = 0$ e que $F_{\frac{\epsilon}{2}}'^{(\tau'=0)}(i; r)$ é regular em $\epsilon = 0$ para r finito, podemos simplificar a expressão acima para:

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_3(k, i; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-2\epsilon} \frac{1}{8\epsilon} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon W_0^{(\tau'=0)}(i; r) \right], \quad (\text{A.37})$$

onde definimos: $W_0^{(\tau'=0)}(i; r) \equiv G_0^{(\tau'=0)}(i; r) + H_0^{(\tau'=0)}(i, r) - 4F_0'^{(\tau'=0)}(i; r)$, além de:

$$G_0^{(\tau'=0)}(i; r) \equiv -2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \ln \left[y(1-y)i^2 + yr^{-2} + \frac{(1-y)}{x(1-x)} r^{-2} \right] - \frac{1}{2}, \quad (\text{A.38a})$$

$$H_0^{(\tau'=0)}(i; r) \equiv 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy y f_{\frac{1}{2}} \left((1-y)i, r^{-1} \sqrt{y(1-y)r^2 i^2 + y + \frac{(1-y)}{x(1-x)}} \right), \quad (\text{A.38b})$$

Vamos agora calcular a integral D'_3 dada em (4.55) que pode ser reescrito como:

$$D'_3(k, i, j; r, \mu) = \mu^{2-2\epsilon} r \int d^{d-1} q \frac{I(q+k, i; r, 1)}{(q^2 + r^2 j^2 + 1)}. \quad (\text{A.39})$$

Assim como em D_3 os momentos foram reescalados. Depois de substituir o resultado (4.119), inserir um parâmetro de Feynman e resolver a integral no momento q utilizando a identidade (4.118), a expressão acima torna-se:

$$D'_3(k, i, j; r, \mu) = \mu^{2-2\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \frac{r}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \epsilon)}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \times \int_0^1 dy y^{\frac{\epsilon}{2}-1} \left[y(1-y)k^2 + y \left(\frac{1}{x(1-x)} - 1 \right) + (1-y)r^2 j^2 + yr^2 i^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}-\epsilon} + \\ \left. + \frac{\epsilon}{2} \mathcal{L}_{\frac{\epsilon}{2},1}(k, i, j; r) \right\}, \quad (\text{A.40})$$

onde definimos,

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(k, i, j; r) \equiv \frac{r}{S_d} \int d^{d-1} q \frac{F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(q+k, i; r)}{[q^2 + r^2 j^2 + 1]^{\beta}}. \quad (\text{A.41})$$

Assim como para D_3 precisamos da derivada de D'_3 em relação à k^2 , tomando depois $k = 0$. Dessa forma temos:

$$\frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D'_3(k, i, j; r, \mu) \Big|_{k=0} = \mu^{-2\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \frac{r}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) (1 - 2\epsilon) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \epsilon)}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \times \right. \\ \times \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y^{\frac{\epsilon}{2}} (1-y) \left[y \left(\frac{1}{x(1-x)} - 1 \right) + (1-y)r^2 j^2 + yr^2 i^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}-\epsilon} + \\ \left. + \frac{\epsilon}{2} \mathcal{L}'_{\frac{\epsilon}{2}}(i, j; r) \right\}, \quad (\text{A.42})$$

onde temos,

$$\mathcal{L}'_{\alpha}(i, j; r) \equiv \frac{\partial}{\partial k^2} \mathcal{L}_{\alpha,1}(k, i, j; r) \Big|_{k=0}. \quad (\text{A.43})$$

Desprezando termos a partir de ordem ϵ^1 ficamos com:

$$\frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D'_3(k, i, j; r, \mu) \Big|_{k=0} = -\mu^{-2\epsilon} \frac{r}{4} \left[\mathcal{P}(i, j; r) - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(i, j; r) \right], \quad (\text{A.44})$$

com $\mathcal{P}(i, j; r)$ definido por:

$$\mathcal{P}(i, j; r) \equiv \int_0^1 dx dy (1-y) \left\{ y \left[\frac{1}{x(1-x)} - 1 \right] + yr^2 i^2 + (1-y)r^2 j^2 + 1 \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.45})$$

Continuando com a regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria massiva, vamos calcular agora a primeira das integrais que contribuem com a ordem de 3 *loops* para a

função de vértice de dois pontos dada em (4.57). Em termos da integral I , podemos escrevê-la como:

$$D_5(k, i; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{[I(q, l; r, 1)]^2}{[(q-k)^2 + r^2(l-i)^2 + 1]}. \quad (\text{A.46})$$

Substituindo (4.147) na integral acima e mantendo apenas as duas primeiras ordens na expansão em ϵ , obtemos:

$$D_5(k, i; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon^2} \left\{ (1-\epsilon)r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q-k)^2 + r^2(l-i)^2 + 1]} \times \right. \\ \left. \times \left[\int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)(q^2 + r^2 l^2) + 1]^{\frac{\epsilon}{2}}} \right]^2 + \epsilon S_d F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau'=0)}(k, i; r) + O(\epsilon^2) \right\}. \quad (\text{A.47})$$

Não é uma tarefa difícil mostrar que:

$$\left[\int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)(q^2 + r^2 l^2) + 1]^{\frac{\epsilon}{2}}} \right]^2 = (1+2\epsilon) \int_0^1 \frac{dx}{[q^2 + r^2 l^2 + \frac{1}{x(1-x)}]^{\epsilon}} + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.48})$$

Portanto, podemos escrever:

$$D_5(k, i; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon^2} \left\{ (1+\epsilon) \int_0^1 dx r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q-k)^2 + r^2(l-i)^2 + 1]} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{[q^2 + r^2 l^2 + \frac{1}{x(1-x)}]^{\epsilon}} + \epsilon S_d F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau'=0)}(k, i; r) + O(\epsilon^2) \right\}. \quad (\text{A.49})$$

Novamente, introduzimos um parâmetro de Feynman e resolvemos a integral em q , seguido da identidade (4.118), produzindo o resultado:

$$D_5(k, i; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\epsilon)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon)} (1+\epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1-y)^{\epsilon-1} \times \right. \\ \left. \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[y(1-y)k^2 + yr^2(l-i)^2 + (1-y)r^2 l^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\epsilon} + \epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau'=0)}(k, i; r) \right\} \quad (\text{A.50})$$

Calculando a derivada com relação a k^2 , obtemos:

$$\frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_5(k, i; r, \mu) \Big|_{k=0} = \mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ -\frac{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\epsilon)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon)} (1+\epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy y(1-y)^{\epsilon} \times \right. \\ \left. \times r^{-3\epsilon} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[(l-yi)^2 + y(1-y)i^2 + r^{-2}y + r^{-2} \frac{(1-y)}{x(1-x)} \right]^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\epsilon} + \epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(i; r) \right\}. \quad (\text{A.51})$$

Realizando agora o somatório em l através da representação da função térmica generalizada, a expressão acima torna-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_5(k, i; r, \mu) \right|_{k=0} &= -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{2\epsilon\Gamma(\epsilon)} (1 + \epsilon) \int_0^1 dx \int_0^1 dy y(1 - y)^\epsilon \times \right. \\ &\quad \times r^{-3\epsilon} \left\{ \Gamma\left(\frac{3\epsilon}{2}\right) \left[y(1 - y)i^2 + r^{-2}y + r^{-2} \frac{(1 - y)}{x(1 - x)} \right]^{-\frac{3}{2}\epsilon} + \right. \\ &\quad \left. \left. + f_{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\epsilon} \left(-yi, r^{-1} \sqrt{y(1 - y)r^2 i^2 + y + \frac{(1 - y)}{x(1 - x)}} \right) \right\} - \epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(i; r) \right\}. \quad (\text{A.52}) \end{aligned}$$

Finalmente, realizamos a expansão em ϵ e identificamos os termos resultantes com as funções paramétricas (A.38a) e (A.38b). Dessa forma, chegamos a:

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D_5(k, i; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{1}{6\epsilon^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{4} + \frac{3}{2} \epsilon W_0^{(\tau'=0)}(i; r) \right]. \quad (\text{A.53})$$

A próxima contribuição para o diagrama em três *loops* da função de 2 pontos vem da integral D'_5 apresentada em (4.58). Reescalando os momentos e identificando a inserção da integral I , como feito anteriormente, podemos reescrevê-la como:

$$D'_5(k, i, j; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} r \int d^{d-1} q \frac{[I(q, i; r, 1)]^2}{[(q - k)^2 + r^2 j^2 + 1]}. \quad (\text{A.54})$$

Substituindo (4.119) e utilizando (A.48) em (A.54) chegamos à:

$$\begin{aligned} D'_5(k, i, j; r, \mu) &= \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^2}{\epsilon^2} \left\{ (1 + \epsilon) r \int_0^1 dx \int \frac{d^{d-1} q}{[(q - k)^2 + r^2 j^2 + 1] \left[q^2 + r^2 i^2 + \frac{1}{x(1-x)} \right]^\epsilon} + \right. \\ &\quad \left. + r \epsilon \int d^{d-1} q \frac{F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, i; r)}{[(q - k)^2 + r^2 j^2 + 1]} \right\}. \quad (\text{A.55}) \end{aligned}$$

Aplicando um parâmetro de Feynman ao primeiro termo e integrando em q obtemos:

$$\begin{aligned} D'_5(k, i, j; r, \mu) &= \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{(1 + \epsilon) \Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \frac{3\epsilon}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon)} r \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1 - y)^{\epsilon-1} \times \right. \\ &\quad \times \left[y(1 - y)k^2 + yr^2 j^2 + (1 - y)r^2 i^2 + y + \frac{1 - y}{x(1 - x)} \right]^{\frac{1}{2} - \frac{3\epsilon}{2}} + \epsilon \mathcal{L}_{\frac{\epsilon}{2}, 1}(k, i, j; r) \left. \right\}. \quad (\text{A.56}) \end{aligned}$$

Para utilizarmos condições de normalização precisamos da derivada de D'_5 em relação à k^2 fazendo depois $k = 0$. Temos então:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D'_5(k, i, j; r, \mu) \right|_{k=0} &= -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{(1+\epsilon)\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon)} r \int_0^1 dx \int_0^1 dy y(1-y)^\epsilon \times \right. \\ &\quad \times \left[yr^2j^2 + (1-y)r^2i^2 + y + \frac{1-y}{x(1-x)} \right]^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2}\right)} - \epsilon \mathcal{L}'_{\frac{\epsilon}{2}}(i, j; r) \left. \right\}. \quad (\text{A.57}) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}'_{\frac{\epsilon}{2}}(i, j; r)$ está definido em (A.43). O termo $\mathcal{L}'_{\frac{\epsilon}{2}}(i, j; r)$ não possui polos para $\epsilon \rightarrow 0$, sendo regular nesse limite. As integrais restantes também são regulares para $\epsilon \rightarrow 0$. Como só precisamos dos termos divergentes, temos como resultado final para a derivada dessa integral em $k = 0$:

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D'_5(k, i, j; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{r}{2\epsilon} \left[\mathcal{P}(i, j; r) - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(i, j; r) \right], \quad (\text{A.58})$$

onde $\mathcal{P}(i, j; r)$ está definido em (A.45).

Temos ainda que resolver a integral dada em (4.59), a qual, em termos de I e com o reescalamento de seus momentos, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} D''_5(k, i, j; r, \mu) &= \mu^{2-3\epsilon} r \int \frac{d^{d-1}q_1}{(q_1^2 + r^2i^2 + 1)} \times \\ &\quad \times r \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q_2 \frac{I(q_1 + q_2, l + i; r, 1)}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + r^2(l + j)^2 + 1][q_2^2 + r^2l^2 + 1]}. \quad (\text{A.59}) \end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos utilizados para a resolução das outras integrais relacionadas a função de 2 pontos, ou seja: substituição de I , com a posterior aplicação de parâmetros de Feynman; integração nos momentos internos e resolução da soma nos quase-momentos internos; derivação em relação a k^2 em $k = 0$; expansão em ϵ onde desprezamos termos em ϵ^0 , chegamos a seguinte expressão:

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} D''_5(k, i, j; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{r}{4\epsilon} \left[\mathcal{P}(j, i; r) - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(j, i; r) \right]. \quad (\text{A.60})$$

Um ponto a ser evidenciado aqui é que a integral $\overline{D}''_5$ possui a mesma solução de D''_5 , assim temos:

$$\left. \frac{\partial}{\mu^2 \partial k^2} \overline{D}''_5(k, i, j; r, \mu) \right|_{k=0} = -\mu^{-3\epsilon} \frac{r}{4\epsilon} \left[\mathcal{P}(j, i; r) - \frac{2}{r} \mathcal{L}'_0(j, i; r) \right]. \quad (\text{A.61})$$

Ainda temos a integral D'''_5 a ser resolvida. Assim como a integral I''_4 , D'''_5 é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, foi descartada desde o capítulo 4, pois não influencia no cálculo dos expoentes

críticos. Para confirmar essa afirmação, vamos agora delinear os passos mais importantes de sua resolução em termos de uma expansão em ϵ . A partir de sua forma mais básica dada em (4.61) podemos reescrever a integral D_5''' do seguinte modo

$$D_5'''(k; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} r^2 \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q_3}{[q_3^2 + r^2 l_2^2 + 1]} \times \\ \times r \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q_1}{[(q_1 + q_3 + k)^2 + r^2 l_1^2 + 1][q_1^2 + r^2(l_1 + l_2)^2 + 1]} \times \\ \times \int \frac{d^{d-1} q_2}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + r^2 l_1^2 + 1][q_2^2 + r^2 l_2^2 + 1]}. \quad (\text{A.62})$$

Note que, na expressão acima, já fizemos todos os quase-momentos externos iguais a zero (ver argumentação para I_4''). Podemos perceber que a integral acima não possui uma representação em termos das integrais mais básicas I e I' . Aplicando um parâmetro de Feynman no argumento da última integral e integrando em q_2 , podemos escrever

$$D_5'''(k; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d r^2}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q_3}{[q_3^2 + r^2 l_2^2 + 1]} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \\ \times r \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q_1}{[(q_1 + q_3 + k)^2 + r^2 l_1^2 + 1][q_1^2 + r^2(l_1 + l_2)^2 + 1]} \times \\ \times \frac{1}{\left\{(q_1 + k)^2 + \frac{r^2}{x(1-x)}[x(l_1^2 - l_2^2) + l_2^2] + \frac{1}{x(1-x)}\right\}^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}}. \quad (\text{A.63})$$

Utilizando agora outros dois parâmetros de Feynman em sequência e integrando em q_1 , obtemos

$$D_5'''(k; r, \mu) = \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d r}{4\pi} \Gamma^2\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma(1 + \epsilon) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1-z)^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \\ \times r \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q_3}{[q_3^2 + r^2 l_2^2 + 1]} r \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \left\{ (1-z)k^2 + zy(q_3 + k)^2 + z(1-y)r^2(l_1 + l_2)^2 + zyr^2 l_1^2 + \right. \\ \left. + \frac{r^2(1-z)}{x(1-x)}[x(l_1^2 - l_2^2) + l_2^2] + \frac{(1-z)}{x(1-x)} + z - [zy(q_3 + k) + (1-z)k]^2 \right\}^{-1-\epsilon}. \quad (\text{A.64})$$

Computando a soma em l_1 , chegamos a

$$\begin{aligned}
D_5'''(k; r, \mu) = & \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^2 r}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2 \left(2 - \frac{\epsilon}{2} \right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1-z)^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \times \\
& \times \left[r^2 \left(z(1-y) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right) \right]^{-1-\epsilon} \left\{ \Gamma \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) r^2 \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} q_3}{[q_3^2 + r^2 l_2^2 + 1]} \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{\left(z(1-y) + \frac{(1-z)}{x} \right) l_2^2}{\left(z(1-z) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right)} \right) - \left(\frac{z(1-y)l_2}{\left(z(1-z) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right)} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \left(z(1-z) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right)} \right. \\
& \times \left. \left. \left((1-z)k^2 + zy(q_3+k)^2 + \frac{(1-z)}{x(1-x)} + z - [zy(q_3+k) + (1-z)k]^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}-\epsilon} + \right. \\
& \left. \left. + r^2 \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q_3 \frac{f_{1+\epsilon}(a, b)}{[q_3^2 + r^2 l_2^2 + 1]} \right\}, \quad (\text{A.65})
\end{aligned}$$

onde a e b são dados por

$$a \equiv \frac{z(1-y)l_2}{\left(z(1-z) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right)}; \quad (\text{A.66})$$

$$\begin{aligned}
b \equiv & \left[\left(\frac{\left(z(1-y) + \frac{(1-z)}{x} \right) l_2^2}{\left(z(1-z) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right)} \right) - \left(\frac{z(1-y)l_2}{\left(z(1-z) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right)} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \left(z(1-z) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right)} \right. \\
& \times \left. \left((1-z)k^2 + zy(q_3+k)^2 + \frac{(1-z)}{x(1-x)} + z - [zy(q_3+k) + (1-z)k]^2 \right) \right]. \quad (\text{A.67})
\end{aligned}$$

Utilizando um novo parâmetro de Feynman, obtemos

$$\begin{aligned}
D_5'''(k; r, \mu) = & \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^2 r}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2 \left(2 - \frac{\epsilon}{2} \right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1-z)^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \times \\
& \times \left[r^2 \left(z(1-y) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right) \right]^{-1-\epsilon} \left\{ \Gamma \left(\frac{3}{2} + \epsilon \right) \int_0^1 dw (1-w)^{-\frac{1}{2}+\epsilon} \times \right. \\
& \left[w + \frac{(1-w)}{r^2 c} zy(1-zy) \right]^{-\frac{3}{2}-\epsilon} r^2 \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q_3 \left\{ q_3^2 + 2q_3 \frac{k}{\bar{a}} \left[\frac{(1-w)}{r^2 c} z^2 y(1-y) \right] + \right. \\
& \left[\frac{(1-w)}{r^2 c} z(1+y[z(2-y)-1]-z) \right] \frac{k^2}{\bar{a}} + \frac{w}{\bar{a}} (1+r^2 l_2^2) + \\
& \left. \frac{(1-w)}{\bar{a}c} \left[z(1-y)(1-z(1-y)) + \frac{(1-z)}{x} \right] l_2^2 + \frac{(1-w)}{\bar{a}r^2 c} \left[z + \frac{(1-z)}{x(1-x)} \right] \right\}^{-\frac{3}{2}-\epsilon} + \\
& \left. + r^2 \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q_3 \frac{f_{1+\epsilon}(a, b)}{[q_3^2 + r^2 l_2^2 + 1]} \right\}, \quad (\text{A.68})
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\bar{a} \equiv \left[w + \frac{(1-w)}{r^2 c} zy(1-zy) \right]; \quad (\text{A.69})$$

$$c \equiv z(1-y) + zy + \frac{1-z}{1-x}. \quad (\text{A.70})$$

O último termo da integral acima é regular para $\epsilon \rightarrow 0$, assim como $\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})$ e as integrais paramétrica em x , y e z . Portanto, o último termo já pode ser omitido dos cálculos, visto que o nosso objetivo é obter os termos divergentes.

Resolvendo a primeira integral em q_3 , ficamos com

$$\begin{aligned}
D_5'''(k; r, \mu) = & \mu^{2-3\epsilon} \frac{S_d^3 r}{8\pi} \Gamma^3 \left(2 - \frac{\epsilon}{2} \right) \Gamma \left(\frac{3}{2} \epsilon \right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1-z)^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \times \\
& \times \left[r^2 \left(z(1-y) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right) \right]^{-1-\epsilon} \int_0^1 dw (1-w)^{-\frac{1}{2}+\epsilon} \left[w + \frac{(1-w)}{r^2 c} zy(1-zy) \right]^{-\frac{3}{2}-\epsilon} \times \\
& \times r^2 \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(1-w)}{r^2 c} z(1+y[z(2-y)-1]-z) \right] \frac{k^2}{\bar{a}} + \frac{w}{\bar{a}} (1+r^2 l_2^2) + \right. \\
& + \frac{(1-w)}{\bar{a}c} \left[z(1-y)(1-z(1-y)) + \frac{(1-z)}{x} \right] l_2^2 + \\
& \left. + \frac{(1-w)}{\bar{a}r^2 c} \left[z + \frac{(1-z)}{x(1-x)} \right] - \frac{k^2}{\bar{a}^2} \left[\frac{(1-w)}{r^2 c} z^2 y(1-y) \right]^2 \right\}^{-\frac{3}{2}-\epsilon}. \quad (\text{A.71})
\end{aligned}$$

Antes de realizarmos a soma em l_2 , podemos derivar a expressão em relação a k^2 e, por ser uma teoria massiva, aplicar, depois do processo, $k^2 = 0$. Assim temos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 D_5'''}{\mu^2 \partial k^2}(k; r, \mu) \right|_{k^2=0} &= -\mu^{-3\epsilon} \frac{S_d^3 r}{8\pi} \Gamma^3 \left(2 - \frac{\epsilon}{2} \right) \Gamma \left(1 + \frac{3}{2} \epsilon \right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy \times \\
&\times \int_0^1 dz z(1-z)^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \left[r^2 \left(z(1-y) + zy + \frac{(1-z)}{(1-x)} \right) \right]^{-1-\epsilon} \int_0^1 dw (1-w)^{-\frac{1}{2}+\epsilon} \times \\
&\times \left[w + \frac{(1-w)}{r^2 c} zy(1-zy) \right]^{-\frac{3}{2}-\epsilon} \left(\frac{1}{\bar{a}} \left[\frac{(1-w)}{r^2 c} z(1+y[z(2-y)-1]-z) \right] + \right. \\
&- \frac{1}{\bar{a}^2} \left[\frac{(1-w)}{r^2 c} z^2 y(1-y) \right]^2 \Big) r^2 \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{w}{\bar{a}} (1+r^2 l_2^2) + \frac{(1-w)}{\bar{a} c} [z(1-y)(1-z(1-y)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-z)}{x}] l_2^2 + \frac{(1-w)}{\bar{a} r^2 c} \left[z + \frac{(1-z)}{x(1-x)} \right] \right\}^{-1-\frac{3}{2}\epsilon}. \quad (\text{A.72})
\end{aligned}$$

Vemos então que, para $\epsilon \rightarrow 0$, $\left. \frac{\partial^2 D_5'''}{\mu^2 \partial k^2}(k; r, \mu) \right|_{k^2=0}$ é regular. Logo, podemos descartar sua contribuição. Sendo assim, temos regularizado todas as integrais massivas necessárias aos nossos cálculos.

Apêndice B

Regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria sem massa

Seguiremos passos semelhantes aos realizados na teoria massiva para regularizarmos as integrais de Feynman com o parâmetro de massa μ igual a zero e com os momentos externos no ponto simétrico. Assim, nessa sequência de regularização dimensional das integrais de Feynman, temos agora a seguinte integral a ser resolvida

$$I_4(k, k', i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I(q + k', l + j; \sigma)}{[(q - k)^2 + \sigma^2(l - i)^2][q^2 + \sigma^2 l^2]}. \quad (\text{B.1})$$

Substituindo o resultado (4.147) na integral acima e introduzindo uma parametrização de Feynman, podemos reescrevê-la como

$$I_4(k, k', i, j; \sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \sigma \int_0^1 dz \times \right. \\ \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[q^2 + 2q \cdot (-zk) + zk^2 + (1 - z)\sigma^2 l^2 + z\sigma^2(l - i)^2][(q + k')^2 + \sigma^2(l + j)^2]^{\frac{\epsilon}{2}}} + \\ \left. + \frac{S_d}{2} G_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(k, k', i, j; \sigma) \right\}, \quad (\text{B.2})$$

onde definimos:

$$G_{\alpha}^{(\tau'=0)}(k, k', i, j; \sigma) = \frac{\sigma}{S_d} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(q + k', l + j; \sigma)}{[(q - k)^2 + \sigma^2(l - i)^2][q^2 + \sigma^2 l^2]}. \quad (\text{B.3})$$

Assim como no caso massivo, divergências no regime ultravioleta da integral acima podem ser estudadas considerando o limite $q \rightarrow \infty$ do integrando. Analisando a função $F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(q + k', j; \sigma)$, vemos que uma desigualdade análoga a do caso massivo pode ser escrita aqui como

$$\bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) > F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma), \quad (\text{B.4})$$

onde, nesse caso, temos

$$\bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) \equiv 4\sigma^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\pi m}{\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + \sigma^2 j^2)}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi m \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + \sigma^2 j^2)} \right). \quad (\text{B.5})$$

Sendo assim, seguindo os mesmos passos delineados no apêndice anterior, não é difícil mostrar que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) = \frac{8\sigma^{-\frac{\epsilon}{2}}}{q^2 + \sigma^2 j^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{\frac{\epsilon}{2}} \int_1^{\infty} dy y^{-\frac{\epsilon}{4}} K_{\frac{\epsilon}{2}}(2\pi m \sigma^{-1} \sqrt{y}), \quad (\text{B.6})$$

onde a variável y agora é dada por $y = x(q^2 + \sigma^2 j^2)$. Considerando que estamos fora da região de *crossover* dimensional, isto é, $\sigma < \infty$, chegamos ao seguinte resultado para $q \rightarrow \infty$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) = \frac{8\sigma^{1-\frac{\epsilon}{2}}}{q^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{\frac{\epsilon}{2}-1} K_{\frac{\epsilon}{2}-1}(2\pi m \sigma^{-1}), \quad (\text{B.7})$$

o qual é claramente regular para $\epsilon = 0$. Como $\bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) > F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma)$, vemos que a integral na definição (B.3) não possui divergências no limite ultravioleta, podendo, de fato, ser omitida na sequência da regularização de $I_4(k, k', i, j; \sigma)$.

Avançando para o próximo passo no cálculo de (B.2), empregaremos outra parametrização de Feynman e reescreveremos a integral como:

$$I_4(k, k', i, j; \sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \frac{\Gamma(2 + \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dz \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1} q \times \\ \frac{1}{\{q^2 + 2q[(1-y)k' - yzk] + yzk^2 + (1-y)k'^2 + y(1-z)\sigma^2 l^2 + yz\sigma^2(l-i)^2 + (1-y)\sigma^2(l+j)^2\}^{2+\frac{\epsilon}{2}}}. \quad (\text{B.8})$$

A integral em q é realizada com auxílio de (4.110) e depois de usarmos a identidade (4.118), chegamos ao seguinte resultado:

$$I_4(k, k', i, j; \sigma) = \frac{S_d^2}{2\sqrt{\pi}\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \epsilon)}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dz \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \\ \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{ [yzk^2 + (1-y)k'^2] - [(1-y)k' - yzk]^2 + y(1-z)\sigma^2 l^2 + yz\sigma^2(l-i)^2 + (1-y)\sigma^2(l+j)^2 \}^{-\frac{1}{2}-\epsilon}. \quad (\text{B.9})$$

Existe um polo em $y = 1$ no integrando quando $\epsilon = 0$. Portanto, tal como fizemos para a integral I_4 massiva, podemos tomar $y = 1$ no termo entre chaves no somatório e desse modo estaremos considerando apenas as ordens ϵ^{-2} e ϵ^{-1} da expansão. Identificando o somatório com a representação da função térmica generalizada em (4.114), realizando a expansão em ϵ , desprezando os termos de ordem ϵ^0 e calculando a expressão no ponto simétrico, obtemos:

$$I_{4PS}(\kappa, i; \bar{r}) = \frac{\kappa^{-2\epsilon}}{2\epsilon^2} \left[1 + \frac{3}{2}\epsilon - \epsilon \ln(1 + \bar{r}i^2) + \epsilon F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right], \quad (\text{B.10})$$

Vamos agora resolver a integral expressa em (4.51) com $\mu = 0$. A integral I'_4 na teoria sem massa pode ser reescrita como:

$$I'_4(k, k', i, j, l; \sigma) = \sigma \int d^{d-1}q \frac{I(q + k', l; \sigma)}{[(q - k)^2 + \sigma^2 i^2][q^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (\text{B.11})$$

Substituindo (4.147) na expressão acima encontramos:

$$I'_4(k, k', i, j, l; \sigma) = \sigma \frac{S_d}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \int \frac{d^{d-1}q}{[(q - k)^2 + \sigma^2 i^2][q^2 + \sigma^2 j^2][(q + k')^2 + \sigma^2 l^2]^{\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{\sigma}{2} S_d \int d^{d-1}q \frac{F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q + k', l; \sigma)}{[(q - k)^2 + \sigma^2 i^2][q^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (\text{B.12})$$

A última integral da expressão anterior é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e portanto pode ser desprezada desde já. Utilizando dois parâmetros de Feynman em sequência, temos:

$$I'_4(k, k', i, j, l; \sigma) = \sigma \frac{S_d}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \frac{\Gamma(2 + \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dy \int_0^1 dz z(1 - z)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \int \frac{d^{d-1}q}{\{q^2 + 2q[(1 - z)k' - yzk] + yzk^2 + (1 - z)k'^2 + yz\sigma^2 i^2 + z(1 - y)\sigma^2 j^2 + (1 - z)\sigma^2 l^2\}^{2+\frac{\epsilon}{2}}}. \quad (\text{B.13})$$

Integrando agora em q e observando que temos também aqui um polo para $z = 1$ em $\epsilon \rightarrow 0$, podemos fazer $z = 1$ na integral em y chegando a:

$$I'_4(k, i, j; \sigma) = \frac{S_d^2}{2\sqrt{\pi}\epsilon} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \epsilon) \Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dz z(1 - z)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \int_0^1 dy [y(1 - y)k^2 + y\sigma^2 i^2 + (1 - y)\sigma^2 j^2]^{-\frac{1}{2}-\epsilon}. \quad (\text{B.14})$$

Note que a dependência em k' e em l desapareceu, como no caso massivo. Expandindo em ϵ e calculando no ponto simétrico ficamos com:

$$I'_{4PS}(\kappa, i, j; \bar{r}) = \kappa^{-2\epsilon} \frac{\bar{r}}{2\epsilon} \int_0^1 dy [y(1 - y) + y\bar{r}^2 i^2 + (1 - y)\bar{r}^2 j^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.15})$$

Assim como na teoria massiva a integral I_4'' é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, não precisamos calculá-la.

Continuando com a regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria não-massiva, vamos calcular agora a primeira das integrais que contribuem com a ordem de 2 *loops* para a função de vértice de dois pontos dada em (A.29) com $\mu = 0$. Em termos de I , escrevemos:

$$D_3(k, i; \sigma, \mu = 0) = \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{I(q+k, j+i; \sigma)}{(q^2 + \sigma^2 j^2)}. \quad (\text{B.16})$$

Substituindo o resultado (4.147) para a integral de 1 *loop*, obtemos:

$$D_3(k, i; \sigma) = \frac{S_d}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \left. \times \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{(q^2 + \sigma^2 j^2)[(q+k)^2 + \sigma^2(j+i)^2]^{\frac{\epsilon}{2}}} + \frac{\epsilon}{2} S_d F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) \right\}, \quad (\text{B.17})$$

onde definimos o análogo de (A.32) através de:

$$F_{\alpha, \beta}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) \equiv \frac{\sigma}{S_d} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(q+k, j+i; \sigma)}{(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\beta}}. \quad (\text{B.18})$$

A aplicação da parametrização de Feynman e a realização subsequente da integral em q com o utilização da identidade (4.118) conduzem a:

$$D_3(k, i; \sigma) = \frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \epsilon)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy (1-y)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \times \right. \\ \left. \times \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{y(1-y)k^2 + \sigma^2[yj^2 + (1-y)(j+i)^2]\}^{\frac{1}{2}-\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}, 1}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) \right\} \quad (\text{B.19})$$

A função acima deve ser derivada com relação a k^2 e depois tomamos $k^2 = \kappa^2$. Em seguida, usamos a representação (4.114), resultando em:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D_3(k, i; \sigma) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \kappa^{-2\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2})}{2\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y(1-y)^{\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left[\Gamma(\epsilon) [y(1-y)\bar{r}^2 i^2 + y(1-y)]^{-\epsilon} + \bar{r}^{-2\epsilon} f_{\frac{1}{2}+\epsilon}((1-y)i, \bar{r}^{-1} \sqrt{y(1-y)\bar{r}^2 i^2 y(1-y)}) \right] \right. \\ \left. - \frac{\epsilon}{2} F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right\}, \quad (\text{B.20})$$

onde definimos:

$$F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv \frac{\partial}{\partial k^2} F_{\alpha,1}^{(\tau'=0)}(k, i; \bar{r}) \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (\text{B.21})$$

A definição acima é bem comportada para $\alpha = 0$. Logo, podemos tomar $\epsilon = 0$ no termo $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r})$ do resultado anterior. Além disso, se definirmos

$$\bar{F}_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv \int_0^1 dy y f_{\frac{1}{2}} \left((1-y)i, \bar{r}^{-1} \sqrt{y(1-y)(1+\bar{r}^2 i^2)} \right) \quad (\text{B.22})$$

e realizarmos a expansão em ϵ , chegaremos ao seguinte resultado:

$$\frac{\partial}{\partial k^2} D_3(k, i; \sigma) \Big|_{k^2=\kappa^2} = -\frac{\kappa^{-2\epsilon}}{8\epsilon} \left[1 + \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right], \quad (\text{B.23})$$

onde definimos $W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \equiv \frac{1}{2} \ln(1 + \bar{r}^2 i^2) - \bar{F}_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) + 2F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r})$.

Vamos agora calcular a integral D'_3 dada em (4.55) na teoria não-massiva ($\mu = 0$). D'_3 pode ser reescrita como:

$$D'_3(k, i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \int d^{d-1} q \frac{I(q+k, i; \sigma)}{(q^2 + \sigma^2 j^2)}. \quad (\text{B.24})$$

Depois de substituir o resultado (4.147), inserir um parâmetro de Feynman e resolver a integral no momento q utilizando a identidade (4.118), a expressão acima torna-se:

$$D'_3(k, i, j; \sigma) = \frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \epsilon)}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 dy y^{\frac{\epsilon}{2}-1} [y(1-y)k^2 + (1-y)\sigma^2 j^2 + y\sigma^2 i^2]^{\frac{1}{2}-\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \mathcal{M}_{\frac{\epsilon}{2},1}(k, i, j; \sigma) \right\}, \quad (\text{B.25})$$

onde definimos,

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}(k, i, j; \sigma) \equiv \frac{\sigma}{S_d} \int d^{d-1} q \frac{F_{\alpha}^{(\tau'=0)}(q+k, i; \sigma)}{[q^2 + \sigma^2 j^2]^{\beta}}. \quad (\text{B.26})$$

Assim como para D_3 precisamos da derivada de D'_3 em relação à k^2 , tomando depois $k^2 = \kappa^2$. Dessa forma temos:

$$\frac{\partial}{\partial k^2} D'_3(k, i, j; \sigma) \Big|_{k^2=\kappa^2} = \frac{S_d^2}{\epsilon} \left\{ \frac{\sigma}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) (1-2\epsilon) \frac{\Gamma(2 - \frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2} + \epsilon)}{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})} \times \right. \\ \times \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{2}} \int_0^1 dy y^{\frac{\epsilon}{2}} (1-y) [y(1-y)\kappa^2 + (1-y)\sigma^2 j^2 + y\sigma^2 i^2]^{-\frac{1}{2}-\epsilon} + \\ \left. + \frac{\epsilon}{2} \mathcal{M}'_{\frac{\epsilon}{2}}(\kappa, i, j; \sigma) \right\}, \quad (\text{B.27})$$

onde temos,

$$\mathcal{M}'_\alpha(\kappa, i, j; \sigma) \equiv \frac{\partial}{\partial k^2} \mathcal{M}_{\alpha,1}(k, i, j; \sigma) \Big|_{k^2=\kappa^2}. \quad (\text{B.28})$$

Desprezando termos a partir de ordem ϵ^1 ficamos com:

$$\frac{\partial}{\partial k^2} D'_3(k, i, j; r, \mu) \Big|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-2\epsilon} \frac{\bar{r}\pi}{8} \left[\bar{\mathcal{P}}(i, j; \bar{r}) - \frac{4}{\bar{r}\pi} \mathcal{M}'_0(\kappa, i, j; \bar{r}) \right], \quad (\text{B.29})$$

com $\bar{\mathcal{P}}(i, j; \bar{r})$ definido por:

$$\bar{\mathcal{P}}(i, j; \bar{r}) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^1 dy (1-y) [y(1-y) + y\bar{r}^2 i^2 + (1-y)\bar{r}^2 j^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.30})$$

Partindo agora para a ordem de 3 *loops*, a partir da expressão escrita em (4.57), podemos escrever para $\mu = 0$, em termos da integral I , a seguinte equação

$$D_5(k, i; \sigma, \mu = 0) = \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q \frac{[I(q, l; \sigma)]^2}{[(q-k)^2 + \sigma^2(l-i)^2]}. \quad (\text{B.31})$$

Substituindo (4.147) na integral acima e mantendo apenas as duas primeiras ordens na expansão em ϵ , obtemos:

$$D_5(k, i; \sigma) = \frac{S_d^2}{\epsilon^2} \left\{ \sigma(1+\epsilon) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}q}{[(q-k)^2 + \sigma^2(l-i)^2][q^2 + \sigma^2 l^2]^\epsilon} + \right. \\ \left. + \epsilon S_d F_{\frac{\epsilon}{2},1}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) + O(\epsilon^2) \right\}. \quad (\text{B.32})$$

Novamente, introduzindo um parâmetro de Feynman e resolvendo a integral em q , seguido da identidade (4.118), chegamos ao seguinte resultado:

$$D_5(k, i; \sigma) = \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} (1+\epsilon) \frac{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2})}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^1 dy (1-y)^{\epsilon-1} \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} [y(1-y)k^2 + \sigma^2(l-yi)^2 + y(1-y)\sigma^2 i^2]^{\frac{1}{2}-\frac{3\epsilon}{2}} + \epsilon F_{\frac{\epsilon}{2},1}^{(\tau'=0)}(k, i; \sigma) \right\}. \quad (\text{B.33})$$

Calculando a derivada com relação a k^2 no ponto simétrico, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial k^2} D_5(k, i; \sigma) \Big|_{k^2=\kappa^2} = \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} (1+\epsilon) \frac{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2})}{\Gamma(\epsilon)} \left(\frac{1}{2} - \frac{3\epsilon}{2} \right) \int_0^1 dy y(1-y)^\epsilon \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} [y(1-y)\kappa^2 + \sigma^2(l-yi)^2 + y(1-y)\sigma^2 i^2]^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2}\right)} + \epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \sigma) \right\}. \quad (\text{B.34})$$

Realizando agora o somatório em l através da representação da função térmica generalizada, a expressão acima torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k^2} D_5(k, i; \sigma) \Big|_{k^2=\kappa^2} &= -\frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\sigma^{-3\epsilon} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right)}{2\epsilon \Gamma(\epsilon)} (1 + \epsilon) \Gamma\left(\frac{3\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dy y(1-y)^\epsilon \times \right. \\ &\times \left[[y(1-y)i^2 + \sigma^{-2}y(1-y)\kappa^2]^{-\frac{3\epsilon}{2}} + \frac{f_{\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2}}\left(-yi, \sqrt{y(1-y)i^2 + \sigma^{-2}y(1-y)\kappa^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\epsilon}{2}\right)} \right] + \\ &\left. - \epsilon F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \sigma) \right\}. \quad (\text{B.35}) \end{aligned}$$

Finalmente, realizamos a expansão em ϵ chegando a:

$$\frac{\partial}{\partial k^2} D_5(k, i; \bar{r}) \Big|_{k^2=\kappa^2} = -\frac{\kappa^{-3\epsilon}}{6\epsilon^2} \left[1 + 2\epsilon - 3\epsilon W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) \right], \quad (\text{B.36})$$

onde novamente temos: $W_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) = \frac{1}{2} \ln(1 + \bar{r}^2 i^2) - \bar{F}_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r}) + 2F_0^{(\tau'=0)}(\kappa, i; \bar{r})$.

A próxima contribuição para o diagrama em três *loops* da função de 2 pontos vem da integral D'_5 apresentada em (4.58). Na teoria sem massa podemos reescrevê-la como:

$$D'_5(k, i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \int d^{d-1}q \frac{[I(q, i; \sigma)]^2}{[(q-k)^2 + \sigma^2 j^2]}. \quad (\text{B.37})$$

Substituindo (4.147) em (B.37) chegamos a:

$$\begin{aligned} D'_5(k, i, j; \sigma) &= \frac{S_d^2}{\epsilon^2} \left\{ \sigma(1 + \epsilon) \int \frac{d^{d-1}q}{[(q-k)^2 + \sigma^2 j^2] [q^2 + \sigma^2 i^2]^\epsilon} + \right. \\ &\left. + \epsilon \sigma \int d^{d-1}q \frac{F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, i; \sigma)}{[(q-k)^2 + \sigma^2 j^2]} \right\}. \quad (\text{B.38}) \end{aligned}$$

Aplicando um parâmetro de Feynman ao primeiro termo e integrando em q obtemos:

$$\begin{aligned} D'_5(k, i, j; \sigma) &= \frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\sigma(1 + \epsilon) \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{3\epsilon}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(\epsilon)} \int_0^1 dy y^{\epsilon-1} \times \right. \\ &\times \left[y(1-y)k^2 + y\sigma^2 i^2 + (1-y)\sigma^2 j^2 \right]^{\frac{1}{2} - \frac{3\epsilon}{2}} + \epsilon \mathcal{M}_{\frac{\epsilon}{2}, 1}(k, i, j; \sigma) \left. \right\}. \quad (\text{B.39}) \end{aligned}$$

Para utilizarmos condições de normalização precisamos da derivada de D'_5 em relação à k^2 fazendo depois $k^2 = \kappa^2$. Temos então:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D'_5(k, i, j; \sigma) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\frac{S_d^3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{\sigma(1+\epsilon)\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon)} \int_0^1 dy (1-y)y^\epsilon \times \right. \\ \left. \times [y(1-y)\kappa^2 + y\sigma^2 i^2 + (1-y)\sigma^2 j^2]^{-(\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2})} - \epsilon \mathcal{M}'_{\frac{\epsilon}{2}}(\kappa, i, j; \sigma) \right\}. \quad (\text{B.40})$$

onde $\mathcal{M}'_{\frac{\epsilon}{2}}(\kappa, i, j; \sigma)$ está definido em (B.28). O termo $\mathcal{M}'_{\frac{\epsilon}{2}}(\kappa, i, j; \sigma)$ não possui polos para $\epsilon \rightarrow 0$, sendo regular nesse limite. As integrais restantes também são regulares para $\epsilon \rightarrow 0$. Como só precisamos dos termos divergentes, temos como resultado final para a derivada dessa integral em $k^2 = \kappa^2$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D'_5(k, i, j; \bar{r}) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{\bar{r}\pi}{4\epsilon} \left[\bar{\mathcal{P}}(i, j; \bar{r}) - \frac{4}{\pi\bar{r}} \mathcal{M}'_0(\kappa, i, j; \bar{r}) \right], \quad (\text{B.41})$$

onde $\bar{\mathcal{P}}(i, j; r)$ está definido em (B.30).

Temos ainda que resolver a integral dada em (4.59), a qual, em termos de I na teoria sem massa pode ser escrita como:

$$D''_5(k, i, j; \sigma, \mu = 0) = \sigma \int \frac{d^{d-1}q_1}{(q_1^2 + \sigma^2 i^2)} \times \\ \times \sigma \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^{d-1}q_2 \frac{I(q_1 + q_2, l + i; \sigma)}{[(q_1 + q_2 + k)^2 + \sigma^2(l + j)^2][q_2^2 + \sigma^2 l^2]}. \quad (\text{B.42})$$

Seguindo os mesmos passos utilizados para a resolução das outras integrais relacionadas a função de 2 pontos, ou seja: substituição de I , com a posterior aplicação de parâmetros de Feynman; integração nos momentos internos e resolução da soma nos quase-momentos internos; derivação em relação a k^2 fazendo depois $k^2 = \kappa^2$; expansão em ϵ onde desprezamos termos em ϵ^0 , chegamos a seguinte expressão:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} D''_5(k, i, j; \bar{r}) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{\bar{r}\pi}{8\epsilon} \left[\bar{\mathcal{P}}(j, i; \bar{r}) - \frac{4}{\pi\bar{r}} \mathcal{M}'_0(\kappa, j, i; \bar{r}) \right]. \quad (\text{B.43})$$

Assim como na teoria massiva, a integral $\bar{D}''_5$ possui a mesma solução de D''_5 , assim temos:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k^2} \bar{D}''_5(k, i, j; \bar{r}) \right|_{k^2=\kappa^2} = -\kappa^{-3\epsilon} \frac{\bar{r}\pi}{8\epsilon} \left[\bar{\mathcal{P}}(j, i; \bar{r}) - \frac{4}{\pi\bar{r}} \mathcal{M}'_0(\kappa, j, i; \bar{r}) \right]. \quad (\text{B.44})$$

Ainda temos a integral D'''_5 a ser resolvida, porém, assim como mostrado no caso massivo, a derivada da integral D'''_5 é regular para $\epsilon \rightarrow 0$ (fazer $\mu = 0$ não altera o grau da divergência) e, portanto, pode ser omitida, pois, esta não influencia no cálculo dos expoentes críticos. Sendo assim, temos já todas as integrais sem massa, necessárias aos nossos cálculos, regularizadas.

Agora queremos observar o comportamento da função $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma)$ quando $L \rightarrow \infty$. Nesse caso, como foi dito no capítulo 4, não podemos fazer $\epsilon = 0$ diretamente. Ainda assim, é possível mostrar que essa função vai a zero nesse limite. Partindo da definição de $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma)$, ou seja

$$F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) = 4\sigma^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n j x) \left[\frac{\pi n}{\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + \sigma^2 j^2)}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi n \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + \sigma^2 j^2)} \right), \quad (\text{B.45})$$

já vimos que a seguinte desigualdade pode ser estabelecida

$$\bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) \equiv 4\sigma^{-\epsilon} \int_0^1 dx \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi n}{\sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + \sigma^2 j^2)}} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi n \sigma^{-1} \sqrt{x(1-x)(q^2 + \sigma^2 j^2)} \right) > F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma). \quad (\text{B.46})$$

Vamos, portanto, nos concentrar no comportamento da função $\bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma)$ para $\sigma^{-1} \rightarrow \infty$. Temos então

$$\bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) = 8\sigma^{-\frac{\epsilon}{2}} (q^2 + \sigma^2 j^2)^{-\frac{\epsilon}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^{\frac{\epsilon}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{4}} \times \\ \times K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi n \sigma^{-1} (q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{x(1-x)} \right), \quad (\text{B.47})$$

onde usamos a propriedade do integrando ser simétrico em torno de $x = \frac{1}{2}$. Definindo uma nova variável de integração através de $x(1-x) = \frac{y}{2}$ e reescrevendo $\nu = \frac{\epsilon}{2}$ e $b = 2\pi n \sigma^{-1} (q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}$, reduzimos a integral em x da seguinte maneira:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx [x(1-x)]^{-\frac{\nu}{2}} K_{\nu} \left(b \sqrt{x(1-x)} \right) = 2^{\nu-1} \int_0^1 dy y^{1-\nu} (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} K_{\nu} \left(\frac{b y}{2} \right). \quad (\text{B.48})$$

Na expressão acima, a integral à direita já foi previamente estudada [78] e de uma forma generalizada, temos

$$\int_0^1 dy y^{1-\nu} (1-y^2)^{\mu} K_{\nu}(cy) = 2^{-\nu-2} c^{\nu} (\mu+1)^{-1} \Gamma(-\nu)_1 F_2 \left(1; \nu+1, \mu+2; \frac{c^2}{4} \right) + \\ + \pi 2^{\mu-1} c^{-(\mu+1)} \text{cosec}(\pi \nu) \Gamma(\mu+1) I_{\mu-\nu+1}(c), \quad (\text{B.49})$$

para $\text{Re } \mu > -1$ e $\text{Re } \nu < 1$. ${}_1F_2$ corresponde à função hipergeométrica gaussiana, enquanto que $I_{\mu-\nu+1}$ é a função de Bessel modificada do primeiro tipo. Tomando $\mu = -\frac{1}{2}$, podemos reescrever a função hipergeométrica em termos da função de Struve [78]:

$${}_1F_2 \left(1; \nu + 1, \frac{3}{2}; \frac{b^2}{16} \right) = 2^{2\nu} \sqrt{\pi} \Gamma(1 + \nu) b^{-\nu-\frac{1}{2}} L_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{2} \right). \quad (\text{B.50})$$

A partir da identidade $\Gamma(1 + \nu)\Gamma(-\nu) = -\pi \text{cosec}(\pi\nu)$ e do resultado anterior, obtemos:

$$\int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\nu}{2}} K_\nu \left(b\sqrt{x(1-x)} \right) = 2^{\nu-1} \pi^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}} \text{cosec}(\pi\nu) \left[I_{\frac{1}{2}-\nu} \left(\frac{b}{2} \right) - L_{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{2} \right) \right] \quad (\text{B.51})$$

A função $\text{cosec}(\pi\nu)$ possui um polo em ν . Portanto, para calcularmos essa integral em $\nu = \frac{\epsilon}{2} = 0$, realizaremos expansões em ν nas funções de Bessel e Struve acima. Começemos pela primeira delas, na qual consideramos a seguinte representação integral [78]:

$$I_{\frac{1}{2}-\nu}(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2} \right)^{\frac{1}{2}-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1-\nu)} \int_0^1 (1-t^2)^{-\nu} \cosh(z t) dt. \quad (\text{B.52})$$

Usando as expansões $a^\nu = 1 + \nu \ln a + O(\nu^2)$, $\Gamma(1-\nu) = 1 - \nu\psi(1) + O(\nu^2)$ e desprezando os termos de ordem ν^2 , depois de algumas manipulações, chegamos a:

$$I_{\frac{1}{2}-\nu}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \nu\psi(1) - \nu \ln \left(\frac{z}{2} \right) \right] \left[\frac{1}{z} \sinh z - \nu \frac{1}{z} \ln 2 \sinh z + \right. \\ \left. + \nu \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{\sinh(z t)}{1+t} dt - \nu \int_0^1 \cosh(z t) \ln(1-t) dt \right]. \quad (\text{B.53})$$

A última integral acima pode ser colocada em uma formato mais apropriado. Consideremos primeiramente o objeto $f_z(\lambda) = \int_0^1 \ln t e^{\lambda z t} dt$. Derivando com relação a λ e integrando por partes, obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} f_z(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} f_z(\lambda) + \frac{1}{\lambda^2 z} (1 - e^{\lambda z}).$$

Resolvendo a equação diferencial, encontramos $\lambda f_z(\lambda) = \frac{1}{z} \int_0^\lambda (1 - e^{tz}) \frac{dt}{t}$, de modo que podemos escrever:

$$\int_0^1 \cosh(z t) \ln(1-t) dt = \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{\sinh[z(1-t)] - \sinh z}{t} dt. \quad (\text{B.54})$$

Substituindo esse resultado na função de Bessel modificada e continuando com a expansão em ν , vemos que:

$$I_{\frac{1}{2}-\nu}(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi z}} \left[\sinh z + \nu \sinh z [\psi(1) - \ln z - \ln(2)] + \nu \int_0^1 \frac{\sinh(z t)}{1+t} dt + \right. \\ \left. - \nu \int_0^1 \frac{\sinh[z(1-t)] - \sinh z}{t} dt \right]. \quad (\text{B.55})$$

Seguiremos um procedimento semelhante para a função de Struve, cuja representação integral é dada por [78]:

$$L_\alpha(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sinh[z \cos \phi] (\sin \phi)^{2\alpha} d\phi, \quad (\text{B.56})$$

com $\text{Re } \alpha > -\frac{1}{2}$. Realizando a mudança de variável $\cos \phi = t$ e pondo $\alpha = \nu - \frac{1}{2}$, podemos reescrever a integral acima como:

$$L_{\nu-\frac{1}{2}}(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1} \sinh(z t) dt. \quad (\text{B.57})$$

Um procedimento similar ao executado para a representação da função de Bessel modificada (B.52) conduz a:

$$L_{\nu-\frac{1}{2}}(z) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \nu [1 + \nu(\ln z - \ln 2 - \psi(1))] \left[\sinh z \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1} dt + \int_0^1 \frac{\sinh(z t) - \sinh z}{1-t^2} (1-t^2)^\nu dt \right]. \quad (\text{B.58})$$

A primeira integral acima pode ser resolvida através da mudança de variável $t^2 = t'$, de onde identificamos a representação para a função beta de Euler [78]. Expandindo em ν e mantendo apenas os termos até ordem ν^0 , obtemos:

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1} dt = \frac{1}{2\nu} \left[1 + \nu \left(\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) \right]. \quad (\text{B.59})$$

O primeiro termo da expansão em ν da segunda integral em (B.58) é de ordem ν^0 e já podemos tomar $\nu = 0$. Depois de algumas manipulações algébricas, podemos reescrever essa integral como:

$$\int_0^1 \frac{\sinh(z t) - \sinh z}{1-t^2} (1-t^2)^\nu dt \Big|_{\nu=0} = \frac{1}{2} \left[-\ln 2 \sinh z + \int_0^1 \frac{\sinh(z t)}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{\sinh[z(1-t)] - \sinh z}{t} dt \right]. \quad (\text{B.60})$$

A substituição desses dois últimos resultados em (B.58) resulta na seguinte expansão em ν para a função de Struve:

$$L_{\nu-\frac{1}{2}}(z) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\frac{\sinh z}{2} \left(1 + \nu \ln z - 2\nu \ln 2 - \nu \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) + \nu \int_0^1 \frac{\sinh(z t)}{1+t} dt + \nu \int_0^1 \frac{\sinh[z(1-t)] - \sinh z}{t} dt \right]. \quad (\text{B.61})$$

Utilizando a referência [78] e combinando os resultados (B.55) e (B.61) com a integral (B.51), além de usarmos $\nu = \frac{\epsilon}{2}$ e $b = 2\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}$, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon}{4}} K_{\frac{\epsilon}{2}} \left(2\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{x(1-x)} \right) &= 2^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\pi\epsilon}{2\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}} \times \\ &\times \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi\epsilon}{2} \right) \left[\cosh[2\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}] \int_0^{\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sinh t}{t} dt + \right. \\ &\left. - \sinh[\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}] \left(\gamma + \ln[\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}] + \int_0^{\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\cosh t - 1}{t} dt \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

onde usamos as relações $\gamma = -\psi(1)$ e $\gamma = -2\ln 2 - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$ para a constante de Euler-Mascheroni. A primeira integral do lado direito do resultado acima é definida como a *integral seno hiperbólico* cujo símbolo é $\operatorname{shi}(\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}})$. Já o termo entre parênteses multiplicando $\sinh(\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}})$ é definido como a *integral cosseno hiperbólico*, sendo representada por $\operatorname{chi}(\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}})$. Usando a expansão $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\pi\epsilon} + \frac{\pi\epsilon}{12} + O(\epsilon^2)$, vemos que a expressão acima é regular no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, podemos tomar $\epsilon = 0$ na função de correção (B.47) e escrever:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) &= \frac{8\sigma}{\pi(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\cosh(\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}) \operatorname{shi}(\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}) + \\ &\quad - \sinh(\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}) \operatorname{chi}(\pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}})]. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

Para analisar o limite $\sigma^{-1} \rightarrow \infty$, vamos reescrever o termo entre colchetes acima (definindo $z = \pi n\sigma^{-1}(q^2 + \sigma^2 j^2)^{\frac{1}{2}}$) em um formato apropriado:

$$\cosh z \operatorname{shi} z - \sinh z \operatorname{chi} z = \frac{e^z}{2} (\operatorname{shi} z - \operatorname{chi} z) + \frac{e^{-z}}{2} (\operatorname{shi} z + \operatorname{chi} z). \quad (\text{B.64})$$

Se usarmos a representação da função gama incompleta $\Gamma(0, z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$, podemos reduzir a expressão anterior para:

$$\cosh z \operatorname{shi} z - \sinh z \operatorname{chi} z = \frac{e^z}{2} \Gamma(0, z) - \frac{e^{-z}}{2} \Gamma(0, -z). \quad (\text{B.65})$$

O primeiro termo da expansão assintótica de $\Gamma(0, z)$ é dado por $\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(0, z) \approx \frac{e^{-z}}{z}$. Desse modo, obtemos:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\cosh z \operatorname{shi} z - \sinh z \operatorname{chi} z) \approx \frac{1}{z}, \quad (\text{B.66})$$

que corresponde ao limite $\sigma^{-1} \rightarrow \infty$ ($L \rightarrow \infty$). Portanto, concluimos que:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \bar{f}_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma) \approx \frac{8}{L^2(q^2 + \sigma^2 j^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (\text{B.67})$$

Logo, como queríamos demonstrar, $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma)$ vai a zero no limite requerido. Assim, todas as outras funções dependentes de $F_{\frac{\epsilon}{2}}^{(\tau'=0)}(q, j; \sigma)$, que surgiram no cálculo dos expoentes críticos, também possuem o mesmo limite.

Apêndice C

Regularização dimensional das integrais de Feynman na teoria sem massa do modelo *CECI* (caso isotrópico exato)

Como a integral I_2 já foi solucionada no capítulo 7, passaremos direto para a integral I_3 que pode ser escrita em termos de I_2 como

$$I_3 = \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n} I_2(k_1 + k'). \quad (\text{C.1})$$

Utilizando na integral acima a expressão (7.51), tendo resolvido a integral em x da mesma através de sua identificação com a forma integral da função especial beta, ficamos com

$$I_3 = \frac{1}{\epsilon_n} [1 + D(n)\epsilon_n] \int \frac{d^{m_n} k_1}{[(k_1 + k')^2]^{\epsilon_n/2} (k_1^2)^n}, \quad (\text{C.2})$$

onde $D(n)$ é dado por (7.60). Aplicando agora os parâmetros de Feynman; integrando sobre k_1 e fazendo $m_n = 4n - \epsilon_n$, encontramos

$$I_3 = \frac{S_{m_n}}{2\epsilon_n} [1 + D(n)\epsilon_n] \frac{\Gamma(2n - \epsilon_n/2)\Gamma(-n + \epsilon_n)}{\Gamma(n)\Gamma(\epsilon_n/2)} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/2-1} (1-y)^{n-1} [y(1-y)k'^2]^{n-\epsilon_n}. \quad (\text{C.3})$$

Expandindo a integral em y , assim como as funções gama, até $\mathcal{O}(\epsilon_n)$ e absorvendo o fator S_{m_n} através de uma redefinição da constante de acoplamento, obtemos

$$I_3 = k'^{2n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{4\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[B_n - \frac{L_{3n}(k')}{A_n} \right] \right\}, \quad (\text{C.4})$$

onde A_n , B_n e $L_{3n}(k')$ estão definidos pelas expressões (7.58), (7.59) e (7.61), respectivamente.

A integral I_4 , que está explicitamente escrita em (7.44), pode ser expressa em termos da integral I_2 da seguinte forma

$$I_4 = \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n [(k' - k_1)^2]^n} I_2(k_1 + k'_3). \quad (\text{C.5})$$

Assim, obtemos

$$I_4 = \frac{1}{\epsilon_n} [1 + D(n)\epsilon_n] \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n [(k' - k_1)^2]^n [(k_1 + k'_3)^2]^{\epsilon_n/2}}. \quad (\text{C.6})$$

Aplicando agora dois parâmetros de Feynman sucessivos; resolvendo a integral em k_1 , pela utilização de (2.122) e fazendo ainda $m_n = 4n - \epsilon_n$, chegamos a

$$I_4 = \frac{S_{m_n}}{2} f_n(\epsilon_n) \frac{\Gamma(2n - \epsilon_n/2)\Gamma(\epsilon_n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)\Gamma(\epsilon_n/2)} \int_0^1 dy y^{2n-1} (1-y)^{\epsilon_n/2-1} \times \\ \times \int_0^1 dz z^{n-1} (1-z)^{n-1} \{zyk'^2 + (1-y)k_3'^2 - (zyk')^2 - 2zy(1-y)k'k'_3 - (1-y)^2 k_3'^2\}^{-\epsilon_n}. \quad (\text{C.7})$$

A integral em z pode ser reescrita por

$$\int_0^1 dz z^{n-1} (1-z)^{n-1} \left[\{z(1-z)k'^2\}^{-\epsilon_n} - \epsilon_n \ln \left(\frac{\{\dots\}}{z(1-z)k'^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon_n^2) \right], \quad (\text{C.8})$$

onde

$$\{\dots\} \equiv \{zyk'^2 + (1-y)k_3'^2 - (zyk')^2 - 2zy(1-y)k'k'_3 - (1-y)^2 k_3'^2\}. \quad (\text{C.9})$$

Observe que somamos e subtraímos o valor do argumento da integral em z para $y = 1$, o que elimina o problema da singularidade da integral em y para $y = 1$, quando fazemos $\epsilon_n = 0$, assim como retira a dependência em k'_3 da integral I_4 . Com isso, redefinindo a constante de acoplamento para absorver o fator S_{m_n} , obtemos

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \left[D(n) - \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} L_n(k') \right] \epsilon_n - \epsilon_n \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} \right\}, \quad (\text{C.10})$$

onde $L_n(k')$ está definido em (7.53).

Por último, temos a integral I_5 dada por (7.45), que pode ser reescrita em termos de I_2 como

$$I_5 = \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n} [I_2(k_1 + k')]^2, \quad (\text{C.11})$$

o que nos leva a

$$I_5 = \frac{1}{\epsilon_n^2} [1 + 2D(n)\epsilon_n] \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n [(k_1 + k')^2]^{\epsilon_n}}. \quad (\text{C.12})$$

Utilizando então os parâmetros de Feynman, a expressão (2.122), para resolver a integral em k_1 ; realizando as devidas expansões em termos de ϵ_n e absorvendo o fator S_{m_n} através de uma redefinição da constante de acoplamento, finalmente obtemos

$$I_5 = k'^{2n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[C_n - \frac{3L_{3n}(k')}{2A_n} \right] \right\}, \quad (\text{C.13})$$

onde C_n está definido em (7.64).