UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: DIDÁTICA DA MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO

ANDRÉ PEREIRA DA COSTA

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana

RECIFE
2016

ANDRÉ PEREIRA DA COSTA

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – Centro de Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Didática da Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

RECIFE

2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

C837c Costa, André Pereira da.
A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana / André Pereira da Costa. – Recife: O autor, 2016.
242 f. ; 30 cm.
Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.
Inclui Referências, Apêndices e Anexos.

1. Matemática - Estudo e Ensino. 2. Ensino fundamental. 3. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marcelo Câmara dos. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2016-08)

ANDRÉ PEREIRA DA COSTA

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – Centro de Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 15/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Externa)
Universidade de Pernambuco

____
Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

Aos meus pais, **Francisca e José**, meus primeiros educadores, que sempre me mostraram desde criança, o papel da educação, como o único caminho para concretizar meus sonhos e ainda para tornar-me uma pessoa melhor. Que me apoiaram e me incentivaram em todas as circunstâncias neste itinerário da minha vida, não me deixando desistir, jamais!

As sertanejas, **Maria e Terezinha**, pelas renúncias que fizeram durante sua juventude para a educação de seus filhos. A vocês, minhas avós, o meu reconhecimento!

As queridas, **Maria de Tio Darinha** e **Joana de Tio João Bosco**, pelo amor e consideração a mim depositados, enquanto estiveram conosco. Agora no céu, vocês brilham muito mais!

A vocês, DEDICO esta obra!

AGRADECIMENTOS

A Deus, Doutor do céu e da terra,

Pelo dom da vida, pela energia em todas as circunstâncias, por tudo o que sou hoje, e por me possibilitar chegar até aqui.

A minha família, Doutora em afeto,

Pela luz nos momentos difíceis, pelo amor incondicional, que foram fundamentais para que eu continuasse, sem receio e com esperança, o itinerário acadêmico que iniciei. Pelas diferenças enquanto pessoas e pelas belezas enquanto seres humanos, tornando-se fios condutores para que eu buscasse uma vida melhor a cada amanhecer.

Ao Professor Doutor Marcelo Câmara dos Santos,

Pela sabedoria, dedicação e paciência em suas orientações. Por tudo que me ensinou durante esse longo e árduo itinerário vanhieliano. Por compartilhar comigo todas as etapas da pesquisa, e pela amizade, apoio e confiança. Por acreditar que seria possível trabalhar com a teoria de Van-Hiele, diante de todas as críticas que recebemos. Por me tornar o pesquisador que sou hoje. Também, pelas novas parceiras que construiremos no doutorado.

A Professora Doutora Fatima Maria Leite Cruz,

Pela felicidade que tive em ser seu estagiário à docência na disciplina Avaliação da Aprendizagem. Pelo profissionalismo, pela humanização, pela mãe que foi ao me mostrar os melhores itinerários para a docência no ensino superior. Pela referência que passa a ser em minha vida enquanto pessoa e professor.

A banca examinadora,

Professor Doutor Paulo Figueiredo Lima e Professor Doutor Marcus Bessa de Menezes, que participaram desde a qualificação, pelas significativas contribuições no aperfeiçoamento dessa obra.
Professora Doutora Marilene Rosa dos Santos, pela participação na banca, pelos questionamentos e valiosas sugestões necessárias à melhoria desse trabalho.

As Professoras Doutoras Lilian Nasser e Kátia Maria de Medeiros,

Pela disponibilidade em me enviar material sobre Van-Hiele, pelas discussões norteadas nos cafés vanhielianos e pela amizade.

Aos Queridos Elielson Sales, Elvira Teixeira e Valéria Borba,

Pelas contribuições, sugestões e comentários em meu pré-projeto submetido à seleção do mestrado, e pela amizade.

As queridas Carolina Ramos e Luisa de Marillac,

Pelo apoio durante todo o processo de seleção do mestrado.

Ao IFPB Campus Cajazeiras e ao CFP/UFCG,

Pela minha formação em nível de graduação, que foi fundamental para o desenvolvimento dessa pesquisa. Pelas amizades que construí durante o período em que fui aluno do ensino superior em Cajazeiras-Paraíba.

Aos docentes do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica,

Profa. Dra. Iranete Lima, Profa. Paula Baltar e Profa. Dra. Rosinalda Teles, pelas contribuições em minha pesquisa em todos os Seminários da Linha de Didática da Matemática, pela convivência e pela amizade.

Profa. Dra. Ana Selva, Profa. Dra. Auxiliadora Padilha, Prof. Dr. Carlos Monteiro, Profa. Dra. Liliane Teixeira, Profa. Dra. Patrícia Smith, Prof. Dr. Sérgio Abranches, Profa. Dra. Verônica Gitirana, pelos conhecimentos construídos, discussões traçadas nas disciplinas, pela convivência e pela amizade.

Profa. Dra. Cristiane Pessoa, por me apresentar o EDUMATEC no 3º SIPEMAT em Fortaleza. Pela amizade e pela convivência.

Profa. Dra. Gilda Guimarães, Profa. Dra. Rute Borba e Profa. Dra. Thelma Panerai pela amizade e convivência nas reuniões do Colegiado do EDUMATEC.

Aos técnicos administrativos e estagiários do EDUMATEC,

Clara e Mário, sobretudo, pelas contribuições em minha coleta de dados. Pela paciência e pela amizade. Vocês são "*simply the best*".

Wanessa, Anderson e Sourou, pela paciência, pela ajuda e pela convivência.

Aos meus colegas e amigos de turma

Ailson Lopes, Alice Monteiro, Aline Malta, Almir Serpa, Amanda Amorim, Amanda Rodrigues, Ana Paula Barros, Anderson Douglas, César Thiago, Cláudia Albuquerque, Emanuella França, Fabiana Marilha, Flávia Andréa, Giselly Karina, Itatiane Borges, Juliana Gomes, Lygia Assis, Luciana Máximo, Marcia Girlene, Monalisa Cardoso, Núbia Souza, Paula Cabral, Priscila Lima, Rayanne Santos, Ricardo Tibúrcio, Rita Batista, Romerita Farias, Sérgia Andréa e Valdir Francisco, pela confiança em mim depositado, enquanto representante discente, pelo afeto e pelo respeito. Por compartilharem comigo suas histórias, suas angústias, seus sonhos, suas alegrias, seus conhecimentos, suas ideias, seus pensamentos e suas amizades ao longo desse itinerário edumatequiano.

Aos demais discentes do EDUMATEC,

Lucicleide Bezerra, Betânia Evangelista, Eber Gustavo, Rosilângela Lucena, Ana Paula Lima, Herman do Lago, Pablo Egídio, Deise France, Dayse Rodrigues, Jucinete Pereira, Josué Ferreira, Jonh Kenedy, Sivonaldo Sales, Nana Ximenes, Fábia Fragoso, Jociano Coelho, Charliel Lima, Regina Lima, Dorghisllany Holanda, Natália Amorim, Cristiane Rocha, Etiane Valetim, Claudia Simone, Ynah Nascimento, Roberto Mariano, pela convivência, amizade e pelas discussões construídas nesse itinerário edumatequiano.

As hiperlindas bunitas,

Alice, Aline, Flávia, Priscila e Rita pela amizade verdadeira, por tudo o que representam em minha vida. Vocês foram muito importantes para a concretização desse sonho, me dando força em todos os momentos, nesse itinerário acadêmico.

Aos Grupos de Pesquisas:

Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática,

Marilene Rosa, Regina Celi, Abraão Juvêncio, Aldinete Lima, Jadilson Almeida, Fernanda Andréa, Luciana Santos, Diógenes Maclyne, Marcos Melo, Mônica Melo, Vladimir Andrade, Lúcia Araújo, e tantos outros que contribuíram com comentários importantes para a construção desse estudo.

Pró-Grandezas: ensino e aprendizagem das grandezas e medidas,

Yara Leal, Lúcia Durão, Alexandre Barros, Walenska Santana, Ademilson Rodrigues, Sônia Leitão, e vários outros, pelos questionamentos fundamentais para o meu amadurecimento intelectual.

A Escola Ernest Huet,

Professor de Matemática e estudantes do 6º ano, participantes da minha pesquisa, pela disponibilidade e pela confiança depositada.

As queridas Luciana Ferreira e Raíza Mello,

Por compartilharem comigo experiências enriquecedoras durante meu estágio à docência. Pela companhia e pela amizade.

Aos amigos das viagens acadêmicas,

Rita (*Paola Bracho*), Priscila (*La usurpadora*), Rosi (*A ninja mexicana*), Ariana (*Thalia*), Marilene (*A mãe pernambucana*), Carol (*Gabriela, Morena Tropicana, La belle du jour*), Ana Paula, Aldinete, Sivonaldo, Alice, Sônia, Jociano, Valéria, Gilberto, Ielton, Almir, pelos bons momentos vivenciados e pelas amizades edificadas.

Aos amigos e irmãos da terrinha paraibana,

Evandy, Gaby, Helder, Erivaneide, Henrique, Weskley Kayque, Rachel, Ciana, Andrécia, Aniércia, Andréia, Clenilda, Odair, Altair, Aldair, Janileide, Gutierrez, Giuliana, Albanete, Darinha, Neta, Jussara, Hellen, Jacinta, Daladier, Maysa, Diego, Nina, Jair, Marlon, Sula, que de longe e de perto, contribuíram significativamente para o desenvolvimento dessa dissertação, com suas amizades, me apoiando sempre. A vocês, o meu reconhecimento!

A Recife,

Que foi minha casa durante esses dois anos do mestrado. Pela possiblidade em conhecer sua cultura tão rica e conviver com um povo tão arretado, que é o povo pernambucano. Que no doutorado, essa cidade continue sendo umas de minhas inspirações, e que eu possa continuar provando seus sabores, a exemplo, da tapioca recheada e do guaraná do amazonas.

A CAPES,

Pelo financiamento, me possibilitando uma maior dedicação a essa dissertação.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos vocês, o meu MUITO OBRIGADO!

Paraíba, joia rara

Aqui o sol nasce primeiro,
e tão desinibido.
E a lua exibe um estrelado
com tanta beleza.
Que até o algodão se empolga
e já vem colorido.
Exibições inexplicáveis
da mãe natureza...

Aqui até os dinossauros
fizeram morada.
E a gente pode ao som de Jackson,
pandeirear.
Ouvir a voz que na bandeira
ficou estampada.
Dar frutos,
que o tempo e a história
não irão apagar...

Eu sou da Paraíba,
é meu esse lugar.
A cara desse povo
tem a minha cara.
Encanto de beleza,
que me faz sonhar.
Lugar tão lindo assim,
para mim, é joia rara.

Que bom estar no ponto
mais oriental.
Astrologicamente,
ser um ariano.
Rimar como um augusto,
tão angelical...
Eu sou muito feliz,
eu sou paraibano!

(Ton Oliveira).

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 242f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo analisar os efeitos de uma sequência didática para a construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático. O estudo, que compreendeu uma replicação de pesquisa do trabalho de Câmara dos Santos (2001), foi desenvolvido com 30 estudantes de uma turma do sexto ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública da cidade de Recife, capital do Estado de Pernambuco, Brasil. Nesse sentido, utilizamos como sustentação teórica a teoria de Van-Hiele (1957) para o desenvolvimento do pensamento geométrico, por apresentar uma articulação adequada com o nosso objeto de estudo, ou seja, com o conceito de quadriláteros notáveis. Considerando o objetivo que se buscou alcançar, analisamos os dados obtidos, isto é, as produções dos alunos, que compreendeu as atividades propostas na sequência didática, os documentos escritos (as fichas de atividades), as gravações realizadas no GeoGebra e os resultados da pré e pós-testagem. Além disso, estes testes se efetuaram em dois momentos: no primeiro, antes da aplicação da sequência didática, e no segundo, após o término do trabalho com a sequência. Dessa forma, no que se refere ao desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, considerando a teoria de Van-Hiele (1957), verificamos um progresso importante nesse processo, pois parte considerável dos estudantes participantes avançou entre os níveis iniciais, por meio da sequência didática (sendo verificado entre 17% do total de alunos). Observamos, também, que alguns alunos não alcançaram a passagem do primeiro para o segundo nível, mas, esses alunos progrediram significativamente dentro do próprio nível, deixando-os bem próximos do nível seguinte (43% dos estudantes). Além disso, nos foi possível identificar alunos trabalhando nos dois níveis ao mesmo tempo (40% dos alunos), tal fato é um indício de que podem existir faixas de transição entre os níveis vanhielianos, como foi verificado por Câmara dos Santos (2001). Nessa pesquisa, o GeoGebra mostrou-se um importante recurso didático aos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria, sobretudo, para o desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico no 6º ano do ensino fundamental, tendo a teoria vanhieliana como sustentação.

Palavras-chave: GeoGebra. Van-Hiele. Quadriláteros notáveis. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This present dissertation aimed to investigate the effects of a didactic sequence for notable quadrilaterals concept construction, using the GeoGebra Dynamic Geometry software as a didactical resource. The study, that is a replication of Câmara dos Santos (2001) research and it was developed in a class with 30 students of sixth grade class of elementary public school in Recife city, capital of Pernambuco State, Brazil. In this sense, we used as theoretical support the Van-Hiele (1957) theory for the development of geometric thinking by presenting appropriate links with our object of study, this is, with the concept of notable quadrilaterals. By considering the objective that we sought to achieve, we analyzed the obtained data, that is, the productions of the students, which included the activities proposed in the didactic sequence, written documents (worksheets), GeoGebra recordings and the results of pre and post-testing. Besides, these tests were performed in two stages: first, before didactic sequence application of, and, secondly, after the final work with the sequence. In this way, which regard to the development of levels of geometric thinking, considering Van-Hiele (1957) theory, we verified an important progress in this process, because a considerable part of the participating students had advanced among initial levels, through didactic sequence (being checked around 17% of the total of students). We also observed some students did not reach the passage from first to second level, but, these students had a significantly progress inside their own level, what made them being close to the next level (43% of students). Futhermore, was possible to identify students working on two levels at the same time (40% of students), this fact indicates that may exist transition zones between vanhielians' levels, as Câmara dos Santos (2001) verified. In this research, GeoGebra was an important didactical resource for geometry teaching and learning process, mostly, for the development of levels of geometric thinking in the 6th grade of elementary school, having the Van-Hiele theory as support.

Keywords: GeoGebra. Van-Hiele. Notable quadrilaterals. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SAEPE	Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco
PE	Pernambuco
EFEH	Escola de Ensino Fundamental Ernest Huet

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos a problemática investigada em nosso estudo, e também, a estrutura da obra.

1. 1 Buscando iniciar a discussão

Este estudo tratou-se de uma pesquisa de mestrado cujo objetivo principal foi analisar os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando como recurso didático o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental em uma escola da rede pública do munícipio de Recife – Pernambuco, Brasil.

Essa dissertação consistiu ainda numa replicação de pesquisa, pois utilizamos os instrumentos de coleta de dados elaborados e aplicados por Câmara dos Santos (2001), em uma pesquisa semelhante desenvolvida também em uma escola pública de Recife. Nesse sentido, aplicamos a sequência didática e o pré-teste e pós-teste produzidos pelo mencionado pesquisador.

Para dar sustentação ao estudo, consideramos como referencial teórico principal a teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, desenvolvida em 1957, pelos educadores matemáticos holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geodolf.

A relevância da Geometria para o homem, no que diz respeito ao seu desenvolvimento humano e à constituição de sua cidadania, é difícil de ser avaliada, tendo em vista que a Geometria é empregada em inúmeras situações, desde utilizações mais cotidianas até mesmo em aplicações mais sofisticadas, dentro e fora da sala de aula. Para tanto, faz-se necessário refletir sobre o modo como esse conhecimento matemático está sendo tratado nos mais diversos espaços de escolarização, em todos os seus níveis, que se constituem ambientes importantes para a introdução dos estudantes no conhecimento geométrico (BORBA; COSTA, 2013).

É importante ressaltar que a Geometria, durante anos, foi excluída da abordagem dos conteúdos matemáticos escolares, ficando, também, ausente nos livros didáticos, nos guias de orientação curricular e nos cursos de formação de professores de Matemática. Tal fato gerou a ausência de embasamento geométrico em alunos e professores (LORENZATO, 1995; PEREIRA, 2001; CÂMARA DOS SANTOS, 2009). Na realidade, o desenvolvimento dos atos de observar, experimentar e construir, propiciados pelo conhecimento geométrico, em geral, parecem que não ocorrem, de modo adequado no ensino básico brasileiro (ITACARAMBI; BERTON, 2008).

Na estrutura curricular das instituições brasileiras de ensino, a Geometria enfrentou mudanças influenciadas pelo formalismo derivado da tendência lógica e dedutiva do raciocínio, especialmente nos anos de 1960, pela ênfase do “algebrizar” geométrico, consequência do Movimento da Matemática Moderna, e pela ilustração de aspectos e operações da Álgebra, fatores esses que favoreceram a *omissão geométrica*[1] no ensino da Matemática (ITACARAMBI; BERTON, 2008). Por outro lado, tal fato é um cenário do passado que vem sendo superado, principalmente a partir das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), que passaram a enfatizar o trabalho com a Geometria, somando-se às diversas pesquisas da área de Educação Matemática, em especial as que se relacionam ao uso das tecnologias no ensino da Geometria, que surgem a cada dia.

No entanto, apesar das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN de Matemática (BRASIL, 1998), dos progressos com as pesquisas na área educacional e, sobretudo, da importância do conhecimento geométrico, tanto em aspectos intuitivos[2], que nos possibilitam refletir sobre

---

[1] Cf. LORENZATO (1995).

[2] Aspectos referentes à intuição, isto é, a aprendizagem da Geometria contribui com o desenvolvimento da intuição da criança, por exemplo, por meio da resolução de problemas que envolvem tal conhecimento (ITACARAMBI; BERTON, 2008).

circunstâncias do cotidiano, quanto pela perspectiva de se ter um conhecimento mais elaborado, a Geometria não é utilizada como uma das orientadoras da construção do conhecimento matemático (MOCROSKY; MONDINI; ESTEPHAN, 2012). Tal fenômeno pode ser justificado pela ausência de conexão entre os estudos educacionais no campo geométrico e o curso diário das classes de Matemática.

Um dos fatores que influencia o *distanciamento progressivo*[3] entre as pesquisas em Educação Matemática e a realidade da sala de aula é a dificuldade de transposição das experiências vivenciadas nas pesquisas com a sua aplicação, do ponto de vista prático, no cotidiano escolar. Como consequência, a aprendizagem da Geometria pode ser afetada e comprometida (CÂMARA DOS SANTOS, 2009).

Além disso, avaliações em larga escala, a exemplo do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE[4]), têm evidenciado que a maioria dos estudantes está completando os primeiros anos do ensino fundamental com um saldo negativo em determinadas expectativas de aprendizagem que abrangem a Matemática. Na Geometria, por exemplo, quase 15% dos alunos, que estavam concluindo o quinto ano em 2011, conseguiam associar objetos do dia a dia às suas formas geométricas (OLIVEIRA; ALMEIDA, 2012). Tal sistema de avaliação tem evidenciado que os estudantes do ensino básico apresentam dificuldades de compreensão dos conceitos geométricos, sobretudo os quadriláteros notáveis, quando tais conceitos são abordados em situações-problema (PERNAMBUCO, 2012a).

Dessa forma, os baixos desempenhos apresentados pelos discentes nessas avaliações podem constituir um forte indício de que a Geometria continua sendo trabalhada de forma inadequada nas aulas de Matemática, isto é, que pouca importância é dada a Geometria pelas escolas, o que significa que esse conhecimento é ensinado de forma que não possibilita uma aprendizagem significativa. Tal fato tem feito com que vários pesquisadores no país se debrucem

---

[3] Cf. CÂMARA DOS SANTOS (2001).
[4] Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco, desenvolvido para realizar monitoramento do padrão de qualidade do ensino e apoiar as iniciativas de promoção da igualdade de oportunidades educacionais (Fonte: http://www.saepe.caedufjf.net).

sobre o ensino de Geometria, buscando situações que facilitem o trabalho do professor em sala de aula, proporcionando aprendizagem aos alunos.

É importante destacar que além do modo como certo conteúdo é abordado em sala de aula ou o fato de não ser abordado, existem outros fatores que contribuem para que o aluno apresente dificuldades conceituais e de aprendizagem. Algumas das dificuldades podem surgir em decorrência da natureza dos objetos que estão em evidência, de entraves específicos que, em geral, não são analisados em profundidade. Ao refletir sobre as prováveis explicações para erros e entraves conceituais e de aprendizagem, faz-se necessário discutir acerca de o que surge da própria especificidade daquele objeto de conhecimento e que pode ser intensificado ou deixar de ser estabilizado, pelo modo como é vivenciado no ambiente escolar e o que por sua particularidade não é complexo, todavia, pode estar em falta ou é evidenciado de modo reduzido ou sem coerência.

Segundo os PCN de Matemática (BRASIL, 1998), o conceito matemático de quadriláteros notáveis deve ser abordado na educação básica já nos anos iniciais do ensino fundamental, porém, no sexto ano, deve ser realizada a sistematização desse conceito pelos alunos. Da mesma forma, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012b) também orientam que quadriláteros notáveis (dentro do conteúdo Figuras Geométricas) devem ser trabalhados nos anos iniciais do ensino fundamental, de modo que leve o aluno a realizar identificação de propriedades comuns e diferentes entre as figuras geométricas, mas, sem enfatizar suas denominações. No sexto ano, o aluno deverá reconhecer e nomear os quadriláteros notáveis e demais tipos de polígonos, além de conhecer as propriedades dos quadriláteros notáveis e utilizá-las para classificá-los. Assim, é evidente que de acordo com os dois documentos oficiais, os discentes do sexto ano já deveriam ter consolidado esse objeto matemático.

Conceição e Oliveira (2014) desenvolveram uma pesquisa, que tinha por finalidade analisar o nível de conhecimento geométrico dos professores de Matemática das escolas estaduais do município de São Vicente Ferrer (Pernambuco). Esses pesquisadores observaram que os docentes apresentam várias lacunas conceituais no que diz respeito aos quadriláteros notáveis, que é um dado muito preocupante, pois são esses professores que ensinam Geometria aos nossos discentes no ensino básico. Os autores ainda argumentam que essas lacunas apresentadas pelos docentes parecem influenciar os resultados apresentados pelo SAEPE.

Já Benites (2010), por exemplo, em sua pesquisa realizada com estudantes do sexto ano do ensino fundamental em Dourados – Mato Grosso do Sul, discute que esses estudantes apresentam várias dificuldades na compreensão de definições e conceitos geométricos, principalmente, no que se refere ao estudo dos quadriláteros notáveis, no qual, eles conseguem apenas reconhecê-los pelas suas aparências globais. Assim, os dados de Benites (2010) corroboram com os achados de Usiskin (1994), no sentido de que ao término deste nível de ensino, o conhecimento geométrico dos alunos resume-se ao conhecimento de algumas figuras.

Tal contexto analisado é bastante inquietante, tendo em vista a importância da Geometria no desenvolvimento do estudante e, também, na solução de inúmeros problemas da humanidade, no passado e nos dias atuais. Para tanto, necessita-se investigar sobre o fenômeno, buscando meios adequados para minimizá-lo, favorecendo, desse modo, a aprendizagem geométrica dos estudantes do ensino básico.

Um caminho possível é o desenvolvimento de pesquisas sobre a utilização de *softwares* no ensino da Matemática. Igualmente, considerando essa lógica, Motta (2008), Gitirana (2009), Costa e Lacerda (2012), em suas investigações, mostraram que o uso de *softwares* educativos pode ser um mecanismo relevante para a melhoria do ensino da Matemática, sobretudo na construção de conhecimento pelo aluno, levando-o a refletir sobre a importância das tecnologias presentes na atualidade.

Motta (2008) investigou a contribuição do *software* SuperLogo para a aprendizagem geométrica de 20 estudantes do sétimo ano do ensino fundamental de uma escola da rede particular de Vitória – Espírito Santo, além de analisar o comportamento dos estudantes durante o uso do *software*. Por meio dos registros das produções dos estudantes nas diversas atividades realizadas, o pesquisador observou que o *software* favoreceu a aprendizagem de conceitos geométricos (figuras geométricas planas e espaciais, ângulos e polígonos), além de estimular a interação entre os estudantes, contribuindo com o seu desenvolvimento cognitivo.

Gitirana (2009) pesquisou sobre a utilização de *softwares* educacionais (*Function Machine, DynaGraph* e o DG Paralelo e o DG cartesiano) em sala de aula, focando seus efeitos na aprendizagem do conceito de função real de variável real. A autora trabalhou com alunos brasileiros do 2º ano do ensino médio, organizados em quatro duplas. Os alunos, em grupo, desenvolveram um conjunto de atividades utilizando os *softwares* disponibilizados. Os resultados do estudo apresentaram que os *softwares* educacionais utilizados favoreceram a compreensão do conceito de função, além de favorecer os estudantes a refletirem sobre elementos matemáticos.

Costa e Lacerda (2012) em sua pesquisa analisaram o impacto do GeoGebra na aprendizagem de alguns conceitos geométricos (triângulos e ângulos) em uma turma do oitavo ano do ensino fundamental, formada por 30 estudantes, em uma escola pública estadual de um município do Alto Sertão da Paraíba. Nesse sentido, eles aplicaram um conjunto de atividades organizadas em oficinas, que foram desenvolvidas por 15 estudantes da turma no Laboratório de Informática da escola. Em seguida, foi aplicado um teste com toda a turma, incluindo os alunos que participaram das oficinas e os que não participaram (que tiveram aula convencional). Os resultados da análise do teste mostraram que o grupo que utilizou o GeoGebra apresentou melhor desempenho do que o outro grupo (que usou o papel e o lápis). Assim, esses autores concluíram que o GeoGebra contribui com a aprendizagem de conceitos geométricos.

No ensino de Geometria, por exemplo, existe um número considerável de *softwares* que podem ser utilizados nos processos de ensino e de aprendizagem, como é o caso do GeoGebra, que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e uma equipe de programadores na *University of Salzburg* (Áustria) e na *University of Florida Atlantic* (Estados Unidos). Este é um *software* que trata a Geometria de forma dinâmica (mas que também reúne a Álgebra e o Cálculo) e que pode ser empregado no desenvolvimento de várias tarefas educativas, para o favorecimento da aprendizagem dos estudantes (LOPES, 2011). Dessa forma, na Matemática, o GeoGebra pode ser utilizado como um recurso importante na realização de diversas atividades de análise e de investigação.

Além disso, outro aspecto que pode contribuir com a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria é a aplicação, em sala de aula, de sequências didáticas, considerando a teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. De acordo com essa teoria, o aluno avança em seu pensamento geométrico segundo níveis hierárquicos, por meio de atividades de ensino organizadas, de modo adequado, pelo professor.

Em seus estudos, Santos (2007), Moraco e Pirola (2007) e Bueno e Guérios (2010) comprovaram que por meio do desenvolvimento de sequências didáticas, em sala de aula do ensino básico, sustentadas pela teoria vanhieliana, há uma melhoria consideravelmente da aprendizagem dos estudantes, isto é, na compreensão do conceito de figuras planas, especialmente no caso dos quadriláteros notáveis.

Diante deste contexto, buscamos nesta proposta investigativa de mestrado, analisar os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático para o desenvolvimento dos níveis iniciais[5] de pensamento geométrico, nos estudantes do 6º ano do ensino fundamental.

1.2 Estrutura da obra

A presente dissertação é constituída por um total de sete capítulos. No primeiro capítulo, já anunciado, iniciamos a discussão sobre a pesquisa, e apresentamos nossa justificativa sobre o tema escolhido.

---

[5] Os níveis iniciais de Van-Hiele correspondem aos dois primeiros níveis. Nesse sentido, a finalidade do estudo foi que os estudantes evoluam do primeiro nível para o segundo, por meio da sequência didática.

No segundo capítulo, abordamos algumas considerações sobre Ensino de Geometria e Tecnologia. Nesse sentido, apresentamos um panorama do atual ensino de Geometria no Brasil e também sobre a utilização das tecnologias no ensino desse ramo de conhecimento da Matemática. Discutimos sobre Geometria Dinâmica e descrevemos o *software* GeoGebra, que foi o recurso didático utilizado para o desenvolvimento da sequência didática em nossa pesquisa. Ainda, mostramos semelhanças e diferenças entre o GeoGebra e o Cabri-Géomètre.

No terceiro capítulo, discutimos alguns conceitos de Geometria Plana no contexto da Matemática, sobretudo, no que se refere aos quadriláteros notáveis, que compõem o objeto matemático de interesse dessa dissertação.

No quarto capítulo, apresentamos o referencial teórico que é a sustentação para a análise do pensamento geométrico dos estudantes do ensino básico, em especial, em relação aos níveis iniciais de pensamento. Tendo o estudo de Van-Hiele (1957) como referência principal, apresentamos no capítulo uma discussão sobre os níveis de pensamento geométrico, as propriedades e as características da teoria vanhieliana, além das fases de aprendizagem.

No quinto capítulo, discorremos sobre a abordagem metodológica dessa dissertação. Nele, caracterizamos a pesquisa, apresentamos os participantes do estudo, mostramos uma análise refinada da sequência didática e do pré-teste e pós-teste, além de descrevermos as etapas do estudo e seus respectivos objetivos.

No sexto capítulo, apresentamos a análise e interpretação dos dados produzidos nesse estudo, e posteriormente, no sétimo capítulo, discorremos as conclusões construídas a partir dos resultados encontrados.

CAPÍTULO II

2 TECENDO ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE ENSINO DE GEOMETRIA E TECNOLOGIA

Neste capítulo, discorremos acerca da problemática do Ensino de Geometria no Brasil. Também, refletimos sobre algumas questões referentes à tecnologia educacional, à geometria dinâmica e ao *software* GeoGebra.

2.1 O Ensino de Geometria no Brasil

Nos últimos anos, podemos observar o grande progresso com as pesquisas no âmbito da Educação Matemática no Brasil, em especial, no campo do ensino da Geometria. Tal progresso tem proporcionado melhorias evidentes no contexto da sala de aula da Matemática, auxiliando o professor em seu trabalho pedagógico na organização de situações didáticas que favoreçam a aprendizagem dos estudantes.

Apesar de todos esses avanços, parece que a Geometria continua sendo explorada de forma equivocada na educação básica, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, o que tem gerado uma grande inquietação tanto em professores quanto em pesquisadores no contexto da Educação Matemática, favorecendo, assim, para um amplo debate acerca do assunto em diversas regiões do país (QUARTIERI; REHFELDT, 2007; ALENCAR, 2010; BEZERRA; BARBOSA, 2013).

Dentre os fatores que influenciam este abandono, podemos mencionar os problemas com a formação de professores de Matemática, tendo em vista que os docentes, enquanto licenciandos, tiveram poucas vivências com a Geometria (CÂMARA DOS SANTOS, 2009). Nessa mesma linha de estudo, pesquisadores como Lorenzato (1995) e Barbosa (2011), afirmam que os nossos professores se veem diante de um dilema: ensinar Geometria sem conhecê-la ou não ensiná-la? Na maioria das vezes, escolhem a segunda opção, abordando, assim, apenas a Aritmética e a Álgebra nas suas aulas.

Hoje, é possível perceber que os atuais livros didáticos já apresentam uma abordagem coerente dos conteúdos geométricos trazendo, inclusive, exemplos que articulam os outros conteúdos/conceitos matemáticos relacionados à Geometria. No entanto, na maioria das vezes, muitos docentes acabam não abordando a Geometria em suas aulas ou abordam-na de maneira incoerente, por apresentarem várias dificuldades conceituais desse campo da Matemática (BARBOSA, 2011). Então, a Geometria não encontra espaço no ensino da Matemática, ficando como um *apêndice curricular*[6], passando a ideia de que se trata de um conteúdo difícil ou sem importância para a aprendizagem dos alunos. Assim, parece que os estudantes têm contato somente com o que os livros abordam, deixando de construírem de forma adequada um novo saber (PEREIRA, 2001; CÂMARA DOS SANTOS, 2009).

O Movimento da Matemática Moderna também contribuiu com a atual condição de abandono do ensino da Geometria na escola brasileira. Esse movimento, que surgiu na década de 60 no Brasil, evidenciou as estruturas que constituem o conhecimento matemático baseado na Álgebra, na Lógica e na Topologia, destacando a Teoria dos Conjuntos.

Tal proposta, de algebrizar a Geometria, entra em declínio no fim da década de 70, porém, provocou a eliminação do paradigma antecedente, que era marcado pela lógica e dedução, com demonstrações (BRASIL, 1998; MACCARINI, 2010; RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012). “Desta forma, caminhamos durante quase quarenta anos sem um modelo que restabeleça o lugar do ensino da geometria no nosso sistema educacional” (CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p.179).

No final dos anos de 1970, surgem projetos fundamentados nas vivências dos estudantes, abrangendo o trabalho com figuras planas e espaciais e atividades de acordo com um viés mais dinâmico, por meio de composições, decomposições, diminuições, expansões e análise de simetrias. Neste período, também surgem várias experiências baseadas na teoria de Van-Hiele e na utilização de materiais

[6] Cf. Câmara dos Santos (2009).

manipuláveis, numa tentativa de resgatar a Geometria em sala de aula (RÊGO; RÊGO, VIEIRA, 2012).

Outro fator que também contribuiu para a negligência com a Geometria foi a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus de 1971, a lei 5.692/71. A partir desse período, tal lei concedeu autonomia aos estabelecimentos de ensino do país a elaborarem os programas dos diversos componentes curriculares, concedendo a muitos professores a possibilidade de excluir a Geometria de suas abordagens de conteúdo em sala de aula, que não se sentiam preparados para abordar conteúdos geométricos em seus programas. Além disso, entre os professores que a consideravam em seus planejamentos pedagógicos, colocavam a abordagem desse campo no fim do ano letivo, num ensaio inconsciente para não ensiná-la, isto é, os conteúdos e conceitos geométricos acabavam sendo abandonados, considerando como justificativa a grande extensão dos tópicos e quantidade insuficiente de aulas (PAVANELLO, 1993).

É importante destacar que não há consenso entre os professores de Matemática sobre quais conteúdos e conceitos da Geometria devem ser abordados na educação básica, nem como devem ser esta abordagem e o seu tempo de duração. “Não há uma concordância com respeito não só aos detalhes, mas também à natureza da geometria que deveria ser ensinada, desde a escola elementar até a faculdade” (USISKIN, 1994, p. 25).

Partindo do pressuposto de que a Geometria está presente em vários contextos da sociedade, como por exemplo, na arquitetura, nas artes plásticas, no *design*, na topografia, na indústria, no meio ambiente, nos objetos que utilizamos, nas brincadeiras das crianças, entre outros; podemos observar que por meio de conhecimentos geométricos (paralelismo, perpendicularismo, etc.), o ser humano conseguiu solucionar inúmeros problemas do dia a dia, desde os mais simples, até os mais complexos (SANTOS, 2007; ITACARAMBI; BERTON, 2008; RÊGO, RÊGO, VIEIRA, 2012).

Além disso, alguns estudos indicam que a aprendizagem da Geometria é fundamental ao desenvolvimento das crianças, pois esse conhecimento estimula os esquemas cognitivos, favorecendo o avanço do estágio operatório concreto para o operatório formal. Nesse sentido, o conhecimento geométrico contribui com o desenvolvimento da visualização do espaço, da verbalização e da intuição necessária à resolução de problemas (FAINGUELERNT, 1995).

Dessa forma, na compreensão dos conhecimentos geométricos pelos estudantes no ambiente de sala de aula, o método de resolução de problemas, que leva o aluno a uma postura em relação ao conhecimento matemático, e o de situação-problema, que leva o discente a construção do conhecimento a partir de um novo conceito matemático, trazem uma contribuição bastante significativa para a aprendizagem, no que diz respeito à construção do conhecimento matemático pelo aluno, e de seu desenvolvimento intelectual (CÂMARA DOS SANTOS, 2002).

Indubitavelmente, há inúmeros outros motivos para abordar a Geometria no ensino da Matemática que não mencionamos aqui. No entanto, ressaltamos que por meio da Geometria, a criança compreende o ambiente onde está inserida e que é relevante promover situações de aprendizagem que abordem tal conhecimento. Desse modo, por meio de intervenções pedagógicas adequadas, que utilizem, por exemplo, sequências didáticas fundamentadas na teoria vanhieliana, o professor poderá contribuir para que seus alunos avancem entre os níveis de pensamento geométrico.

2.2 O uso das Tecnologias no Ensino de Geometria

Nos últimos anos, em decorrência da globalização e do avanço tecnológico, podemos verificar que as tecnologias estão cada vez mais presentes na nossa sociedade, sendo utilizadas em diversas situações, em especial no dia a dia das pessoas. Essa presença tem favorecido transformações sociais consideráveis, por exemplo, nas maneiras de organização, de produção de bens, de comercialização, de diversão, de ensino, de aprendizagem, e até mesmo na maneira pela qual as pessoas se relacionam umas com as outras (MORAN, 2012).

Novas demandas da sociedade pressionam, fortemente, a escola a tomar uma nova postura diante de sua função como formadora, isto é, atribuições que conduzem a escola, a preparar os cidadãos para uma convivência adequada em uma sociedade do conhecimento e da tecnologia (SOUZA, 2010), ou como diria Bauman (2003) para a convivência na modernidade líquida[7].

Contudo, notamos que essas exigências nas escolas têm aparecido de maneiras diversas. Enquanto algumas escolas entendem que a adequação às tendências da sociedade atual passa pela inclusão de uma disciplina de informática no currículo, de modo que possibilite aos alunos a aprendizagem dos recursos, tais como, *softwares* e acesso à *internet*, outras escolas entendem que basta que se utilize o computador no ensino dos diferentes componentes curriculares, como, por exemplo, o uso do computador no ensino de Geometria (PENTEADO, 1999).

Apesar de algumas escolas brasileiras já fazerem uso de algumas tecnologias (computadores, projetor multimídia, TV, etc.) e de certa infraestrutura (como por exemplo, o laboratório de Informática), apenas um número muito pequeno de docentes emprega esses recursos e esse ambiente em sua prática pedagógica, tanto no planejamento quanto na organização das intervenções pedagógicas a serem desenvolvidas nas aulas de Geometria, "abrindo mão" de suas contribuições para a aprendizagem desse conhecimento (BITTENCOURT; BITTENCOURT, 2010).

É importante destacar que também há escolas que não apresentam infraestrutura e também não dispõem desses recursos tecnológicos por diversos fatores, que aqui não cabe mencioná-los, pois não foi objetivo deste trabalho discuti-los. Nesse sentido, essas ausências de infraestrutura e de tecnologias inviabilizam o uso pedagógico das tecnologias nas aulas de Geometria.

As tecnologias podem ser bons aliados nas intervenções pedagógicas e nas situações de construção das aprendizagens dos alunos. Não como o ponto central,

[7] O título "modernidade líquida" deriva da modernidade da sociedade que passa por diversos avanços em todos os campos, mas, discutível em relação aos seus comportamentos e à sua realidade enquanto meio social. Ao sugerir a questão da liquidez, Bauman faz referência aos próprios líquidos que não apresentam um formato, pois se adaptam de acordo com o reservatório no qual é colocado. Tal fato não ocorre com os sólidos, tendo em vista sua dureza, sendo necessário receber algum tipo de pressão para se adequar a novos formatos (BAUMAN, 2003).

mas, como um recurso que tem a capacidade de oferecer condições para os processos de ensino e de aprendizagem. Todavia, essa capacidade só será utilizada plenamente se a tecnologia for pensada didaticamente. Para isso, é necessário que o professor tenha definido as finalidades de aprendizado dos estudantes, considerando, nessa perspectiva, as expectativas e temáticas que se objetiva alcançar e, também, os percursos a serem trilhados para que os estudantes aprendam (PADILHA, 2010).

É relevante mencionar que o professor de Matemática, ao ministrar aulas com tecnologias, precisa fazer uma reflexão sobre seu uso didático, analisando sua complexidade no planejamento pedagógico. Dessa forma, será possível utilizar as tecnologias como recursos nos quais o estudante é o ator na construção do conhecimento, e o professor é o protagonista na elaboração das situações didáticas e das intervenções pedagógicas a serem exploradas em sala de aula.

Aqui também destacamos a importância do papel da gestão escolar e da equipe pedagógica nesse processo, apoiando o professor de forma efetiva acerca do uso das tecnologias na classe de Matemática. Sem a contribuição desses profissionais, o trabalho docente pode ficar comprometido.

Assim, nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria, o aluno é o sujeito ativo, que constrói sua própria aprendizagem; a tecnologia o suporte didático, o recurso que auxilia o trabalho do professor e do aluno; o docente o mediador, promovendo condições para que esses processos ocorram (GIANCATERINO, 2009).

2.3 O que é Geometria Dinâmica?

Geometria Dinâmica pode ser compreendida como um atributo dinâmico e interativo de ambientes computacionais, que podem ser utilizados como recursos para os processos de ensino e de aprendizagem de Geometria. Inicialmente, esse termo foi utilizado pelos americanos Nick Jackiw e Steve Rasmussen no final dos anos de 1980, funcionários da empresa Key Curriculum Press, para diferenciar *softwares* de Geometria Dinâmica (GD) de outros *softwares* de Geometria (ZULLATO, 2002).

Os primeiros *softwares* de GD produzidos no final dos anos de 1980 foram o *Cabri Géomètre* e *Geometer's Sketchpad* (BELLEMAIN, 2000). Atualmente, há uma grande diversidade de *softwares* de Geometria Dinâmica (*Cinderella, Dr. Geo, Euklid, Régua e Compasso, Geometry Interventor, Geometric Supposers, Geometric SuperSupposer, GeoGebra*, etc.), que apresentam diferentes lógicas estruturais, diversas possibilidades de acesso (livre ou comprado), que exploram não apenas a Geometria Plana, mas também as Geometrias Espacial e Discreta, Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral. Para Neri (2012), esse fato permite se falar hoje em *Matemática Dinâmica*, não se limitando apenas em Geometria Dinâmica.

Os *softwares* de GD possibilitam realizar construções e manejos de representações de objetos geométricos na tela do computador. Nesse aspecto, o desenho produzido pelo estudante pode ser arrastado e modificado por meio do *mouse*, sendo que suas propriedades podem ser alteradas ou não. Na sala de aula de Matemática, esses ambientes podem tornar-se relevantes apoios ao ensino e à aprendizagem, tendo em vista que promovem a potencialização do estudo das propriedades geométricas, permitindo a formação de conceitos (MARQUES; BAIRRAL, 2012).

Na Matemática, a palavra "dinâmica" remete às noções de movimentação e de transformação, logo, por meio das construções nos *softwares* de GD, o estudante visualizará diferentes formatos geométricos, auxiliando-o a compreender de forma mais adequada a natureza dos objetos geométricos. Após os processos de produção, os desenhos de pontos, de segmentos de reta, de circunferências, etc., poderão ser arrastados, e o aluno poderá analisar, combinar e relacionar as propriedades, estabelecer conjecturas, criando novos horizontes de busca (BORBA; SILVA; GADANIDIS,2014).

Nasser e Tinoco (2010a, p. VIII) destacam que:

> Muitos experimentos mostram que esta postura dinâmica ajuda a sanar a dificuldade na aprendizagem de geometria. Na era da imagem e do

> movimento, a geometria não pode continuar a ser a ensinada de forma estática, seguindo estilo introduzido por Euclides. Em geral, os alunos não manipulam os objetos geométricos, estando habituados apenas a ver as figuras nos livros. Neste caso, os conceitos geométricos são apresentados apenas através de figuras bem regulares e simétricas, com lados paralelos às bordas das páginas do livro. Como consequência, as crianças podem formar uma imagem incompleta de determinado conceito.

Nesse pensamento, Borba, Silva e Gadanidis (2014) apontam para outra contribuição da Geometria Dinâmica em relação à Geometria Estática (GE)[8], que reside na diferença entre *construção* e *desenho*. Segundo esses autores, na GE, não há significado nas distinções entre desenho e construção, todavia, na GD, por meio do recurso *arrastar* dos *softwares*, essas diferenças ganham sentido para os estudantes.

Dessa forma, em um processo de construção, “a figura sempre preserva suas propriedades fundamentais quando um dos elementos móveis que a compõem é arrastado” (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p.24). Agora, “se arrastarmos uma figura e ela não mantiver suas propriedades fundamentais, a figura é apenas um desenho” (IBIDEM).

Assim, as tarefas que levam os estudantes a construírem objetos por meio de *softwares* de Geometria Dinâmica produzem situações de reflexão nas aulas de Matemática. Um dos *softwares* que contribui para o alcance desse objetivo é o GeoGebra, como evidenciam inúmeros estudos. Tal ambiente de GD foi empregado neste trabalho, em especial, no desenvolvimento da sequência didática.

2.4 GeoGebra: um *software* dinâmico à Geometria

O *software* GeoGebra foi produzido em 2001 pelo austríaco Markus Hohenwanter, pesquisador da Universidade de Salzburg (Áustria). No entanto, logo depois desse período, o *software* passou a ser aprimorado e melhorado por um grupo de programadores da Universidade de Florida Atlantic (Estados Unidos), sob a

[8] Geometria trabalhada apenas por meio de livro, caderno, lápis, régua e compasso.

coordenação de Markus Hohenwanter e Judith Hohenwanter. O nome do *software* surgiu a partir da fusão dos termos ***Geo***_metria_ e _Á_***lgebra***.

Para Hohenwanter e Hohenwanter (2009, p.6), o GeoGebra é “[...] um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas [...]” Nesse sentido, esse *software* não se limita apenas ao ensino da Geometria, podendo ser utilizado no ensino de outras áreas do conhecimento matemático. Logo, além de dinâmico, também é um programa didático, podendo ser baixado gratuitamente na *internet* em escolas, como também na própria casa do estudante.

O GeoGebra apresenta tanto os recursos tradicionais de um *software* de Geometria Dinâmica (como pontos, retas, segmentos de reta, semirretas, etc.), como também é possível inserir, de forma direta, equações e coordenadas. Dessa forma, esse *software* apresenta a possibilidade de analisar um mesmo objeto matemático por meio de três diferentes perspectivas, isto é, a partir de três representações: algébrica, geométrica e gráfica, que mantêm um diálogo dinâmico entre si (CATTAI, 2007; HOHENWANTER; HOHENWANTER; LAVICZA, 2008).

Além disso, o GeoGebra foi desenvolvido por meio da programação Java, podendo ser executado em diferentes sistemas operacionais, desde o *Microsoft Windows*, *Linux*, até o *Macintosh* (HOHENWANTER 2009).

No *software* é possível construir pontos, retas, segmentos de reta, semirretas, vetores, seções cônicas, funções. As funções podem ser modificadas dinamicamente, mesmo que já tenham sido concluídas pelo estudante. Assim, é possível estabelecer propriedades dos objetos de estudo (COSTA; LACERDA, 2012). A Figura 1 apresenta o *slogan* do GeoGebra.

Figura 1 – *Slogan* do GeoGebra.

Fonte: HOHENWANTER, 2009.

Nesse *software* é possível construir representações de figuras geométricas de forma bem simples, utilizando apenas o *mouse* do computador. Mesmo sendo concluídas as construções dos objetos geométricos, o estudante pode mover e manipular de diferentes formas, por meio do recurso *arrastar*. Também, é possível realizar medições de áreas, de comprimentos, de perímetros, de ângulos, de distâncias, de inclinações, etc.; e modificar os objetos produzidos, sendo que a atualização das medições ocorre de forma imediata.

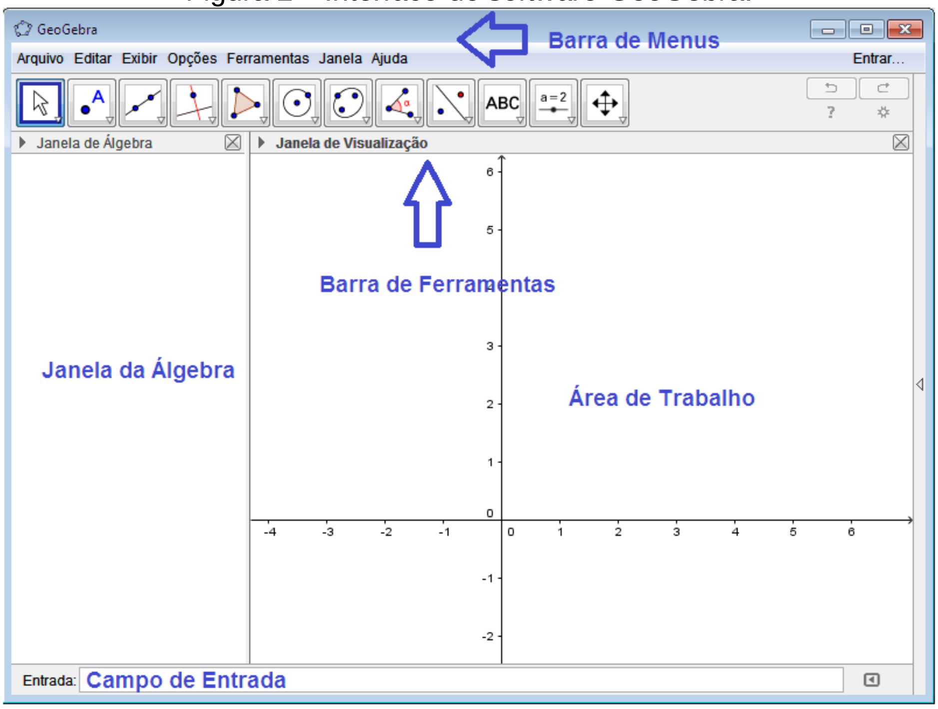
De acordo com Baldini (2004, p. 31-32), em um *software* de GD:

> [...] é possível criar e construir figuras que podem ser transformadas a partir do deslocamento de seus elementos primitivos (vértices, centros, lados etc), conservando as propriedades. Essas transformações são visíveis em tempo real, fato que é impossível com a utilização do lápis e papel, a menos que se faça uma infinidade de construções sucessivas o que certamente levaria qualquer um à exaustão. Ele permite aos alunos visualizarem, na tela do computador, diferentes desenhos correspondentes a uma mesma descrição. Possibilita, ainda, a manipulação e observação dos objetos construídos, aspectos esses importantes na construção dos conceitos geométricos, bem como na construção da percepção espacial.

Todas as características mencionadas por esse autor podem ser evidenciadas no GeoGebra, que consiste em um *software* de fácil utilização, podendo contribuir com a aprendizagem dos estudantes, além de incentivar a discussão e a socialização de informação entre eles. O professor de Matemática pode usar o GeoGebra em diversas atividades de sala de aula, em especial, na construção de representações de figuras. Portanto, pode ser um relevante recurso para os estudantes registrarem suas aprendizagens, servindo, assim, como um instrumento de avaliação por parte do docente.

No que se refere à *interface* do GeoGebra, podemos observar que ela está organizada em cinco partes. A primeira corresponde à *janela da Álgebra*, que apresenta equações das figuras produzidas pelo estudante, além de coordenadas e valores das medições. A segunda é a *barra de menus*, que é a região que apresenta janelas com funções específicas, por meio das quais, o estudante pode abrir arquivos, salvar, fechar arquivos, configurar ferramentas, etc. A terceira é a *barra de ferramentas*, que possui as ferramentas a serem empregas na produção dos objetos de estudo. A quarta compreende a *área de trabalho*, exibindo pontos, segmentos de reta, vetores, seções cônicas e funções elaboradas pelo estudante. Por fim, como quinta parte do *software*, encontramos um *campo de entrada*, funcionando como um espaço para o aluno escrever coordenadas de pontos, funções e comandos. A Figura 2 apresenta a *interface* do *software* GeoGebra.

Figura 2 – *Interface* do *software* GeoGebra.

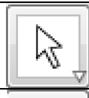
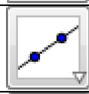
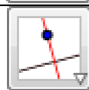
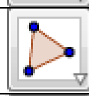
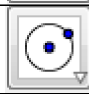
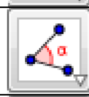
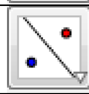
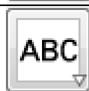
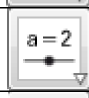
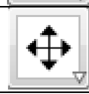


Fonte: *Software* GeoGebra versão 5.2

Como é possível observar na Figura 2, o GeoGebra apresenta uma quantidade considerável de ferramentas, que possibilitam o estudante realizar diversos tipos de construções de objetos geométricos. O Quadro 1 apresenta algumas dessas ferramentas e suas respectivas funções.

É importante destacar que o GeoGebra não se limita apenas a essas ferramentas apresentadas no quadro. Em cada ícone há a opção de o estudante escolher outras ferramentas, como por exemplo, no ícone referente à "*Reta Perpendicular*", existem as seguintes opções: "*Reta Paralela*", "*Mediatriz*", "*Bissetriz*", "*Reta Tangente*", "*Reta Polar ou Diametral*", "*Reta de Regressão Linear*" e "*Lugar Geométrico*".

Quadro 1 – Ferramentas do GeoGebra

FERRAMENTA	FUNÇÃO	REPRESENTAÇÃO
Mover	Move os objetos construídos	
Ponto	Cria um novo ponto	
Reta	Cria uma reta a partir de dois pontos	
Reta Perpendicular	Cria uma reta perpendicular	
Polígono	Cria um polígono	
Círculo	Cria um círculo a partir do centro e de um de seus pontos	
Elipse	Cria uma elipse	
Ângulo	Cria um ângulo	
Reflexão	Estabelece a reflexão em relação a uma reta	
Texto	Insere texto na área de trabalho	
Controle Deslizante	Estabelece controle deslizante	
Mover Janela	Move janela de visualização	

Fonte: *Software* GeoGebra versão 5.2

2.5 GeoGebra e Cabri-Géomètre: uma breve comparação

Como nosso trabalho consistiu em reaplicar uma sequência didática que foi construída para ser desenvolvida no *software* Cabri-Géomètre, porém, utilizando outro *software* de GD, no caso, o GeoGebra, destacamos a importância de apresentar um breve tópico, discutindo sobre alguns pontos em comum e em divergência entre os dois programas.

No que se referem às aproximações, ambos os *softwares* apresentam uma área de trabalho, na qual os estudantes constroem as representações das figuras geométricas, e também se dispõe de um grande número de recursos. Por meio do *mouse* do computador, o aluno pode exercer uma interação com as suas construções. Esse recurso, denominado por arrastar, é o aspecto central de aproximação entre o GeoGebra e o Cabri (LOPES, 2011).

Entre as divergências, enquanto que o Cabri-Géomètre é um *software* licenciado, o GeoGebra é um *software* livre, sendo bem mais acessível do que o primeiro. Além disso, o Cabri é um *software* centrado em construções geométricas, sendo que oferece somente figuras geométricas, mas, em algumas vezes, permite gerar coordenadas de pontos, equações e gráficos de certas funções. No caso do GeoGebra, é possível trabalhar em duas perspectivas, a primeira geométrica e a segunda algébrica. Assim, nesse segundo *software* é possível realizar construções geométricas e articulá-las com a parte algébrica, com equações, funções, gráficos, etc. (PEREIRA JÚNIOR; SOUTO PEREIRA, 2009).

CAPÍTULO III

3 DISCUTINDO ALGUNS CONCEITOS DE GEOMETRIA PLANA NO CONTEXTO DA MATEMÁTICA

Neste tópico, discutiremos sobre os quadriláteros notáveis, que foi o objeto matemático investigado em nosso estudo. No entanto, mesmo que de forma breve, discorreremos também sobre outros conceitos importantes do campo da Geometria Plana, que são explorados na sequência didática: reta, segmento de reta, semirreta e triângulos. Nesse sentido, apresentaremos as características desses elementos, como sua definição, sua representação e suas propriedades.

Decidimos por discutir sobre esses elementos, pois são conceitos a serem mobilizados pelos estudantes na resolução das atividades referentes ao conceito dos quadriláteros notáveis, e também por estarem relacionados ao campo conceitual[9] desse conceito.

3.1 Retas

Segundo Barbosa (2006), em um plano[10], as figuras geométricas básicas são os pontos e as retas. Assim, consideremos que o plano é composto por pontos, sendo as retas definidas como subconjuntos distinguidos de pontos do plano. A Figura 3 exibe a representação de uma reta *r*, qualquer.

Ainda de acordo com esse autor, os pontos e as retas em um plano apresentam as seguintes propriedades:

---

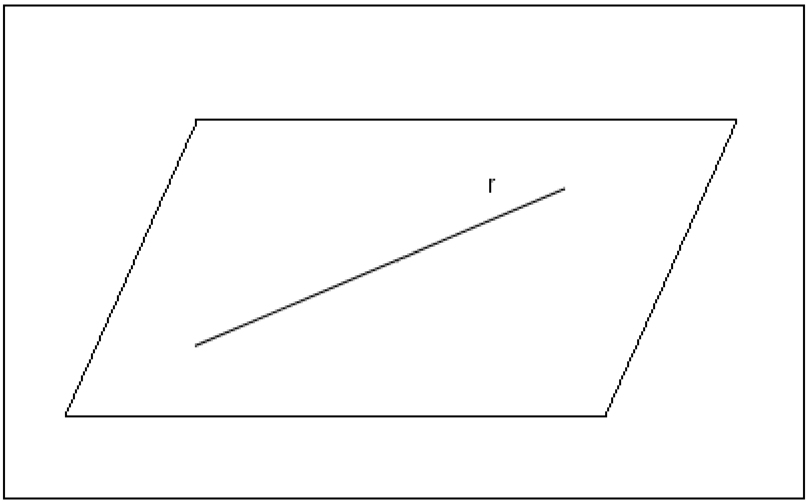
[9] Segundo o psicólogo francês Gerárd Vergnaud, os conceitos matemáticos se desenvolvem dentro de campos conceituais, nos quais, esses conceitos estabelecem uma inter-relação, não sendo isolados. Nesse sentido, nos processos de ensino e de aprendizagem de certo conceito é necessário analisar as relações intrínsecas dele com outros conceitos (BORBA, 2009, p.59). Por exemplo, o campo conceitual dos quadriláteros notáveis abrange os conceitos de: reta, segmento de reta, semirreta, ângulos e triângulos.

[10] Imaginamos um plano como a superfície de uma folha de papel que se estende infinitamente em todas as direções. Nela um ponto é representado por uma pequena marca produzida pela ponta de um lápis, quando pressionada sobre o papel (BARBOSA, 2006, p.2).

a) Dada uma reta qualquer *a*, então, existem pontos que pertencem a essa reta e outros pontos que não pertencem;
b) Consideremos dois pontos quaisquer distintos *M* e *N*, logo, há uma reta *b*, única, que os contém.
c) Dadas duas retas *a* e *b*, distintas, então, elas se intersectam em um único ponto *P*, desse modo, essas retas apresentam um ponto em comum.
d) Consideremos as retas *c* e *d*, distintas, logo, elas se cortam em um único ponto *Q*, ou, elas não se cortam em nenhum ponto[11].
e) Sejam *M*, *N* e *P*, três pontos dados em uma reta *a*, portanto, apenas um desses pontos encontra-se localizado entre os demais pontos.

Além disso, toda reta é designada por uma letra minúscula do nosso alfabeto.

Figura 3 – Representação de uma reta *r* qualquer, em um plano



Fonte: Autoria própria.

3.1.1 Posições relativas

De acordo com o posicionamento em que estejam em um plano, as retas podem ser classificadas em dois tipos: paralelas e concorrentes.

---

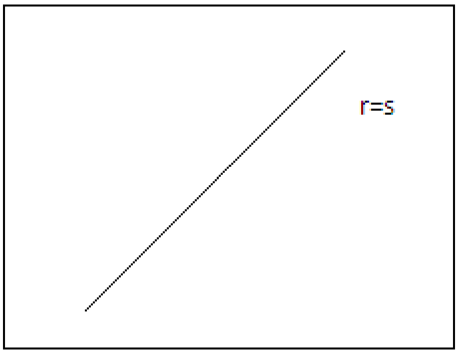
[11] Caso a interseção dessas retas ocorra em dois pontos, então, elas coincidiriam.

As retas paralelas são retas coplanares, isto é, retas incluídas no mesmo plano, podendo ser encontradas de dois modos:

a) quando apresentam todos os pontos em comum (logo, são retas coincidentes), como mostrado na Figura 4;

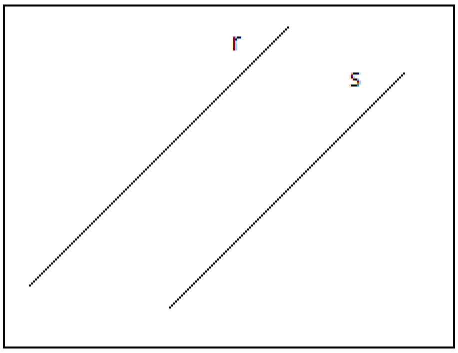
b) quando não apresentam nenhum ponto em comum, então, não são coincidentes (Figura 5).

Figura 4 – Representação de retas paralelas coincidentes



Fonte: Autoria própria.

Figura 5 – Representação de retas paralelas não coincidentes

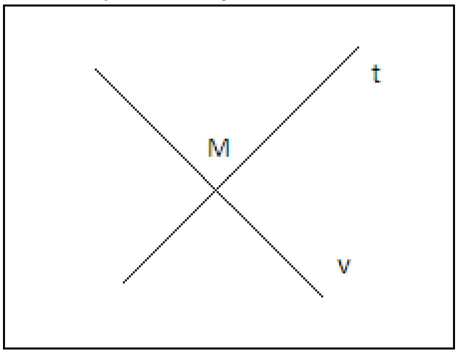


Fonte: Autoria própria.

Nesse sentido, podemos afirmar que em um plano duas retas são paralelas, se e somente se, coincidirem, compondo apenas uma reta, ou não coincidirem, não apresentando pontos em comum.

Em relação às retas concorrentes, duas retas *t* e *v* são consideradas concorrentes quando elas apresentam um único ponto em comum (Figura 6).

Figura 6 – Representação de duas retas concorrentes

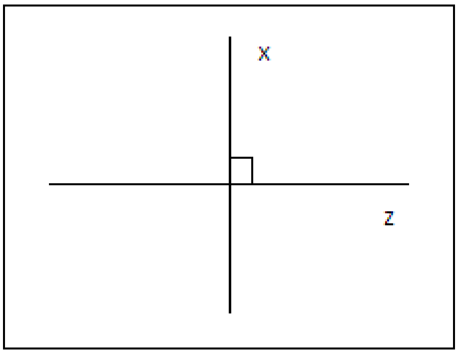


Fonte: Autoria própria.

Além disso, existe um caso particular de retas concorrentes, chamadas retas perpendiculares.

No que se refere às retas perpendiculares, consideremos duas retas concorrentes *x* e *z* em um plano, dizemos que elas são perpendiculares quando formam um ângulo reto, isto é, um ângulo[12] que possui uma medida de 90º (Figura 7).

Figura 7 – Representação de duas retas perpendiculares



Fonte: Autoria própria.

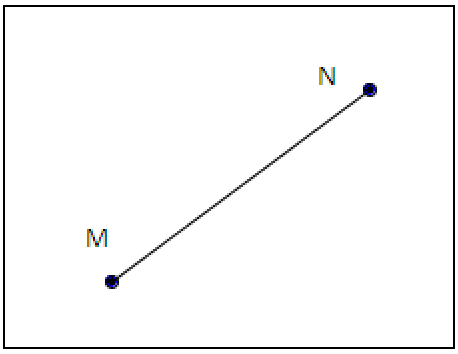
3.2 Segmento de reta e semirreta

Um segmento de reta *MN* é o conjunto de pontos da reta estabelecida pelos pontos *M* e *N*, composto por *M* e *N* e todos os pontos entre *M* e *N*. Nesse sentido, a

[12] Nesse trabalho, também apresentamos uma discussão sobre o conceito de ângulo.

ordem dos pontos representados no segmento de reta não interessa, ou seja, o segmento de reta *MN* também é o segmento de reta *NM* (Figura 8). Todavia, se a ordem dos pontos for um diferencial, o mais adequado seria tratarmos o segmento como segmento de reta orientado (LIMA; CARVALHO, 2010). Além disso, os pontos *M* e *N* são chamados por extremidades ou extremos do segmento.

Figura 8 – Representação do segmento *MN*



Fonte: Autoria própria.

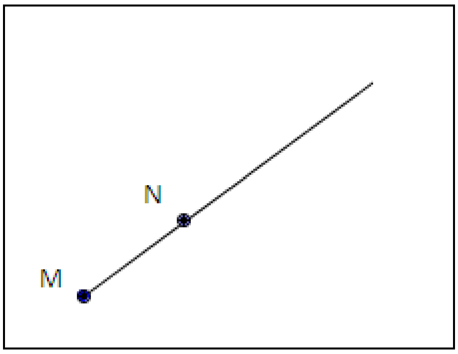
Podemos utilizar os segmentos de reta para formar várias figuras planas, a exemplo do triângulo, que é constituído por três pontos que não estão vinculados a uma mesma reta e pelos três segmentos definidos por esses pontos (BARBOSA, 2006)[13]. Além disso, como veremos mais adiante, nos triângulos, os três pontos são denominados de vértices e os segmentos são os lados.

Para representar um segmento de reta fazemos uso dos seguintes símbolos: $\overline{MN}$ ou MN.

Agora, uma semirreta é o conjunto formado pelos pontos do segmento *MN* e por todos os pontos *P*, de tal forma que *N* está entre *M* e *P*, sendo *M* e *N* pontos distintos da reta. Assim, o ponto *M* é chamado origem da semirreta (Figura 9). As semirretas podem ser designadas por S_{MN}.

[13] Aqui fazemos uma ressalva, pois, esse autor não considerou nessa definição do triângulo, o interior da figura. Nesse sentido, outra definição correta para triângulo é considerá-lo como a porção do plano delimitada por três segmentos de reta.

Figura 9 – Representação da semirreta de origem *M*



Fonte: Autoria própria.

Aqui chamamos atenção para o fato de que dois pontos *M* e *N* podem estabelecer duas semirretas, que possuem o segmento *MN* (a primeira pode ser a semirreta de origem *M*, e a segunda, a semirreta de origem *N*).

3.3 Ângulos

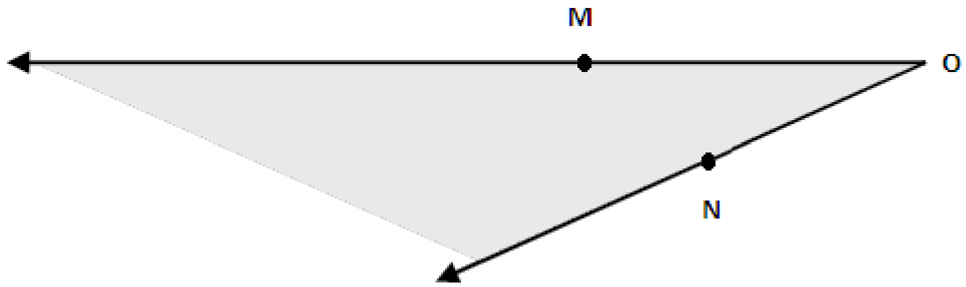
Na maioria das vezes, a definição mais utilizada para ângulo é a que segue: "chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem" (BARBOSA, 2006, p.29).

Todavia, há dois modos de pensar o ângulo: como uma grandeza, quando se trata da medida; e como um ente matemático[14], quando se refere à sua representação.

Enquanto grandeza geométrica, o ângulo é considerado como uma característica de objetos, podendo ser comparados a outros objetos semelhantes, tendo como referência a igualdade ou a desigualdade (BELLEMAIN; LIMA, 2002). Nessa perspectiva, acreditamos que uma definição possível e mais adequada para esse conceito seria considerá-lo como um atributo de uma região delimitada por duas semirretas, distintas e não opostas, com uma mesma origem[15]. A Figura 10 apresenta a representação de um ângulo.

[14] Ente matemático é um objeto matemático que permite a produção de outros objetos.
[15] Chamamos atenção para o fato de que essas duas semirretas formam dois tipos de ângulos: a) o ângulo interno a região delimitada pelas semirretas; b) o ângulo externo a essa mesma região.

Figura 10 – Representação de um ângulo



Fonte: Autoria Própria.

Não queremos aqui dizer que a definição utilizada por Barbosa (2006) esteja incorreta, pois se fosse realizado um estudo matemático sobre as duas versões, chegaríamos à conclusão de que as duas são válidas, no entanto, possivelmente, acreditamos que a nossa está mais adequada e articulada com o campo das grandezas. Porém, em sala de aula, se o uso das duas definições não for trabalhado de modo adequado, tal fato pode gerar incompreensões e incertezas nos estudantes do ensino básico.

Analisando a Figura 10, podemos observar que as semirretas S_{OM} e S_{ON} constituem os lados do ângulo, e o ponto O é a origem comum e o vértice do ângulo. Há diferentes modos de designar um ângulo. No caso dessa figura, podemos representá-lo por $M\hat{O}N$, $N\hat{O}M$, $\hat{O}$, ou simplesmente por uma letra do alfabeto grego.

O ângulo pode apresentar diferentes unidades de medida, entre elas, podemos mencionar o grau e o radiano. Em nosso dia a dia, encontramos com mais frequência o uso da unidade de medida grau. Enquanto que o radiano e o pi são trabalhados em contextos mais formais da Matemática, a exemplo do seus usos no círculo trigonométrico.

Dessa forma, tendo como parâmetro a sua medida em grau, o ângulo pode ser classificado em:

a) ângulo agudo – quando sua medida é menor que 90º;
b) ângulo reto – ângulo que tem medida igual a 90º;

c) ângulo obtuso – quando sua medida é superior a 90º e inferior a 180º.

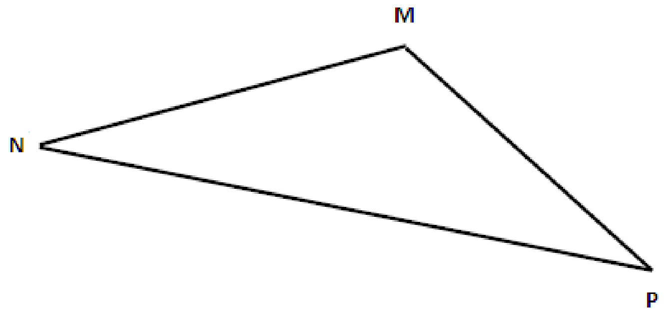
Além disso, há os ângulos complementares e os ângulos suplementares. Quando a soma das medidas de dois ângulos é igual a 90º, esses ângulos são ditos complementares. Agora, quando a soma entre suas medidas for igual a 180º, eles são chamados de ângulos suplementares.

3.4 Triângulos

Certamente, os triângulos constituem uma das figuras geométricas mais relevantes, sendo considerados os elementos básicos para a produção de diversas outras figuras, que fazem parte dos estudos da Geometria no ensino básico. Apesar de apresentarem uma aparência bem simples, dispõem de uma diversidade de características e propriedades no âmbito da Matemática, logo, em consonância com os documentos curriculares oficiais, recomendamos que o trabalho com os triângulos sejam iniciados nos anos iniciais do ensino fundamental.

Nessa perspectiva, para os estudantes do 6º ano do ensino fundamental, a definição de triangulo parece não ser desconhecida. Consideremos três pontos distintos *M, N* e *P*, e que não estão na mesma reta. Em seguida, façamos as ligações entre os segmentos de reta *MN*, *NP* e *MP*. Assim, podemos chamar a união de todos esses segmentos e a porção do plano formada por eles de triângulo. Analisamos pela Figura 11, que a extremidade é o elemento em comum que existe entre dois dos segmentos quaisquer do triângulo (LIMA; CARVALHO, 2010).

Figura 11 – Representação de um triângulo



Fonte: Autoria própria.

Pela Figura 11, verificamos que os segmentos de reta *MN, MP* e *NP* são os lados do triângulo e os pontos *M, N* e *P* são os seus vértices. Carvalho e Lima (2010) argumentam que se concebermos as semirretas estabelecidas pelos lados do triângulo, encontraremos os ângulos internos do triângulo.

Agora, na representação de um triângulo, podemos empregar *MNP, MPN, NPM, NMP, PNM,* e *PMN*.

3.4.1 Elementos dos triângulos

Além dos vértices, ângulos internos e lados, os triângulos apresentam outros elementos, como a bissetriz, a mediana e a altura. O Quadro 2 apresenta uma síntese explicativa sobre esses novos elementos.

Quadro 2 – Outros elementos do triângulo

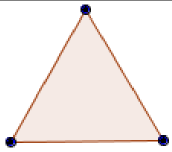
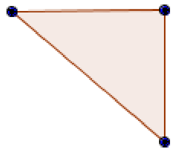
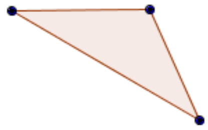
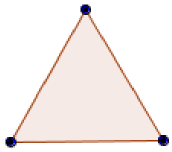
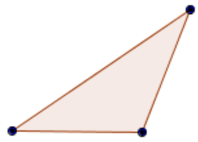
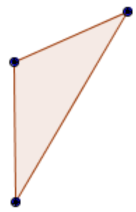
ELEMENTOS	DESCRIÇÃO
Bissetriz	Bissetriz de um triângulo é um segmento que liga o vértice de um ângulo desse triângulo ao lado oposto a ele, dividindo esse ângulo em dois ângulos de medidas congruentes. No estudo dos ângulos, a bissetriz de um ângulo é uma semirreta que parte do vértice do ângulo e o divide em dois ângulos de medidas congruentes.
Mediana	Mediana de um triângulo é um segmento que liga um de seus vértices ao ponto médio do lado oposto.
Altura	Altura de um triângulo é o segmento que liga um vértice do triângulo ao lado oposto ou a seu prolongamento, sendo perpendicular a este.

Fonte: NASSER; TINOCO (2010a, p.56; 2010b, p.37).

3.4.2 Classificação dos triângulos

Segundo Dolce e Pompeo (2005), os triângulos podem ser classificados a partir de dois parâmetros: o primeiro, em relação a medida dos seus ângulos; e o segundo, no que se refere ao comprimento dos seus lados. O Quadro 3 mostra tal classificação.

Quadro 3 – Classificação dos triângulos

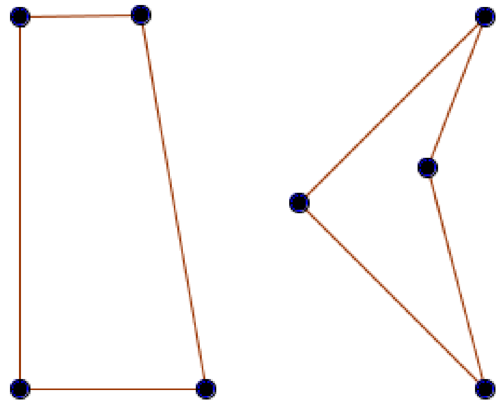
PARÂMETROS DE CLASSIFICAÇÃO	TIPOS DE TRIÂNGULOS	DESCRIÇÃO	REPRESENTAÇÃO
Com base na medida dos ângulos do triângulo	Acutângulo	Os três ângulos do triângulo têm medidas menores que 90º (chamados ângulos agudos)	
	Retângulo	Apresenta apenas um ângulo reto (que possui medida de 90º)	
	Obtusângulo	Possui um dos ângulos com medida maior que 90º (ângulo obtuso)	
De acordo com a medida do comprimento dos lados do triângulo	Equiláteros	Os três lados do triângulo possuem a mesma medida de comprimento (são congruentes)	
	Isósceles	Apenas dois lados do triângulo apresentam a mesma medida de comprimento (congruência).	
	Escalenos	Os três lados do triângulo têm medidas diferentes de comprimentos.	

Fonte: Autoria própria.

3.5 Quadriláteros

Para a definição dos quadriláteros, vamos considerar quatro pontos quaisquer em um plano, os pontos *M, N, P, Q*, mas, com o requisito de que três deles não devem estar contidos em uma mesma reta. Logo, denominamos de quadrilátero *MNPQ* o conjunto de pontos pertencentes aos segmentos de reta *MN, NP, PQ e QM* (LIMA; CARVALHO, 2010) e também a porção do plano formada por todos esses segmentos de reta. A Figura 12 apresenta dois exemplos de representações de quadriláteros.

Figura 12 – Exemplos de quadriláteros



Fonte: Autoria própria.

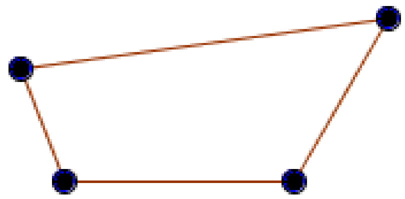
No campo da Geometria, podemos encontrar duas famílias de quadriláteros, a dos quadriláteros notáveis e a dos quadriláteros não notáveis. Os notáveis são formados pelos paralelogramos e pelos trapézios, enquanto que os não notáveis, são constituídos pelos quadriláteros que não pertencem às famílias dos paralelogramos e dos trapézios. Nesse sentido, fazem parte do grupo dos quadriláteros não notáveis, os quadriláteros não convexos.

Dessa forma, na Figura 12, o quadrilátero do lado esquerdo é do grupo dos notáveis (um trapézio), já o da direita é da família dos não notáveis (um quadrilátero não convexo). Além disso, segundo Januário (2013), os quadriláteros apresentam as seguintes propriedades:

- em todo quadrilátero, a soma dos ângulos internos é igual a 360º;
- todo quadrilátero apresenta somente duas diagonais;
- todo quadrilátero possui quatro vértices, quatro ângulos internos e quatro lados.

Outro exemplo de quadrilátero não notável é a trapezoide, que consiste num quadrilátero sem lados opostos paralelos, como representado na Figura 13.

Figura 13 – Representação de uma trapezoide



Fonte: Autoria própria

Aparentemente, a trapezoide lembra um trapézio (quadrilátero notável), no entanto, não o é, pois como veremos mais adiante, para ser trapézio, é necessário que ela tenha um único par de lados opostos paralelos (o que não é possível de ser verificado).

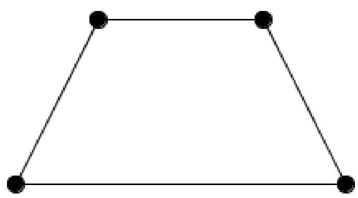
3.5.1 Quadriláteros notáveis

Fazem parte da família dos quadriláteros notáveis o trapézio e o paralelogramo, sendo que este último inclui também o retângulo, o losango e o quadrado. A seguir, apresentamos cada um deles.

3.5.1.1 Trapézio

Concordamos com Nasser e Tinoco (2010b) ao afirmarem que o trapézio é um quadrilátero notável que apresenta exatamente um par de lados opostos paralelos, esses lados são comumente chamados de bases do trapézio. A Figura 14 apresenta um exemplo de representação de um trapézio.

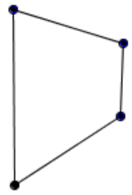
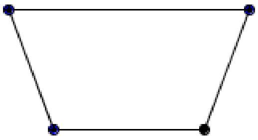
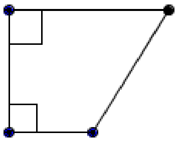
Figura 14 – Representação de um trapézio



Fonte: Autoria própria

Como é apresentado no Quadro 4, os trapézios podem, ainda, ser classificados em três tipos.

Quadro 4 – Tipos de trapézios

TIPOS DE TRAPÉZIOS	DESCRIÇÃO	REPRESENTAÇÃO
Trapézio escaleno	Trapézio que não apresenta congruência entre as medidas dos comprimentos dos lados opostos não paralelos	
Trapézio isósceles	Trapézio que apresenta os lados opostos não paralelos iguais (são congruentes)	
Trapézio retângulo	Trapézio com dois ângulos retos	

Fonte: Autoria própria.

Em relação às propriedades, os trapézios isósceles apresentam diagonais congruentes; os trapézios retângulos apresentam dois ângulos internos retos. Além disso, em qualquer trapézio os ângulos adjacentes a um mesmo lado transverso são suplementares.

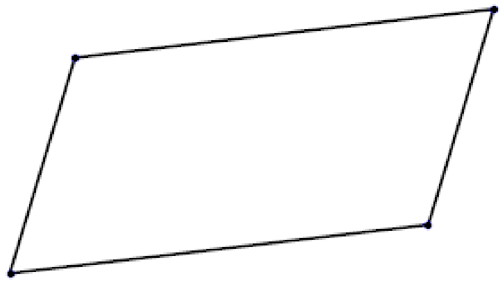
Outra propriedade que é válida não apenas aos trapézios, mas para todos os quadriláteros, é a de apresentarem duas diagonais.

3.5.1.2 Paralelogramo

Podemos definir o paralelogramo como sendo um quadrilátero notável que apresenta os dois pares de lados opostos paralelos entre si (BARBOSA, 2006). Na Figura 15, observamos um exemplo de representação de um paralelogramo.

O paralelogramo apresenta algumas propriedades, entre elas, podemos mencionar: a) possui lados opostos iguais (congruentes); b) os ângulos internos opostos são congruentes; c) dois ângulos internos vizinhos quaisquer são suplementares; d) suas diagonais se cortam ao meio, em seus respectivos pontos médios. Dessa forma, se um quadrilátero notável apresentar essas propriedades, então, ele é um paralelogramo.

Figura 15 – Representação de um paralelogramo



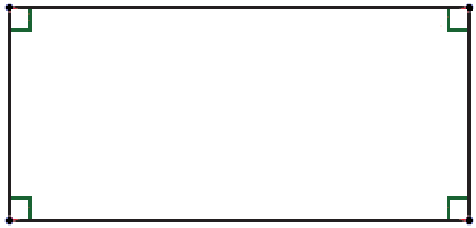
Fonte: Autoria própria.

3.5.1.3 Retângulo

Segundo Tinoco (1999), o retângulo é um quadrilátero notável que possui os quatro ângulos internos de medidas congruentes, logo, são retos (medem 90º). A Figura 16 exibe um exemplo de representação de um retângulo.

Os retângulos são considerados como paralelogramos, pois, também apresentam as seguintes propriedades: os seus lados opostos são congruentes; os ângulos internos opostos são congruentes; e as diagonais cortam-se ao meio. Nessa perspectiva, poderíamos também definir que retângulo é todo paralelogramo que tem ângulos internos retos.

Figura 16 – Representação de um retângulo



Fonte: Autoria própria.

Além disso, as medidas das diagonais dos retângulos são congruentes (o que não é observado em alguns casos de paralelogramos, isto é, nos paralelogramos que não possuem ângulos retos).

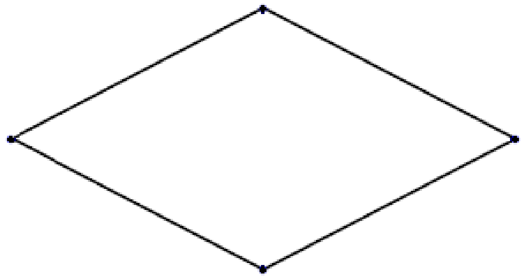
3.5.1.4 Losango

O losango é um quadrilátero notável que apresenta todos os lados de medidas iguais, logo, são congruentes entre si (NASSER; TINOCO, 2010a). Na Figura 17 há a representação de um losango.

Os losangos também são incluídos no grupo dos paralelogramos, porque seus lados opostos são iguais, os seus ângulos internos opostos possuem a mesma medida, suas diagonais cortam-se ao meio. Assim, consideramos que os losangos são todos os paralelogramos que apresentam todos os lados congruentes.

Todavia, os losangos apresentam duas propriedades que não são evidenciadas em alguns paralelogramos quaisquer: as diagonais são perpendiculares entre si, e também estão localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos.

Figura 17 – Representação de um losango

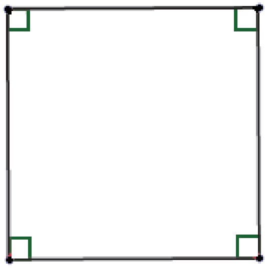


Fonte: Autoria própria.

3.5.1.4 Quadrado

O quadrado é um quadrilátero notável que possui todos os lados iguais entre si e todos os ângulos internos congruentes (LIMA; CARVALHO, 2010). A Figura 18 mostra um exemplo de um quadrado.

Figura 18 – Representação de um quadrado



Fonte: Autoria própria

Da mesma forma como nos casos dos retângulos e dos losangos, os quadrados apresentam dois lados opostos paralelos, os ângulos internos opostos apresentam congruência, e as diagonais se cortam ao meio, então, são vinculados ao grupo dos paralelogramos. Os quadrados também são retângulos e losangos, pois apresentam propriedades iguais. Nesse sentido, dizemos que quadrado é todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Além disso, as diagonais dos quadrados são congruentes entre si, perpendiculares e ainda são as bissetrizes dos ângulos internos.

Na página a seguir, representamos por meio de um diagrama de Venn (Figura 19), os grupos dos quadriláteros notáveis definidos nesse texto.

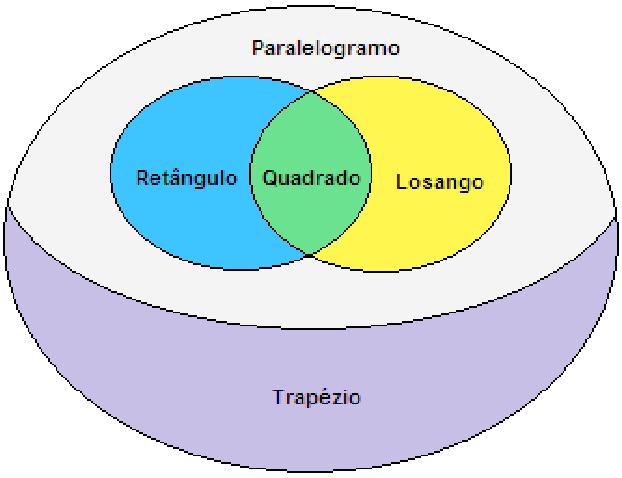
Chamamos atenção para o fato de que é importante, em sala de aula, o professor realizar um trabalho sistemático sobre o estudo dos quadriláteros notáveis, fazendo uso de diversas atividades que explorem essas figuras em seus diversos formatos e posições. Dessa forma, o estudante não apresentará dificuldades, como por exemplo, em compreender que um quadrado também é paralelogramo, retângulo e losango, não ficando "preso" às figuras prototípicas[16].

Nossas pesquisas desenvolvidas na pós-graduação (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b) têm evidenciado que estudantes de diferentes anos (séries) escolares têm dificuldades de identificar esses quadriláteros em posições diferentes das que foram vivenciadas nas aulas de Matemática. É importante discutir

[16] Figuras prototípicas são representações que correspondem a uma organização regular de contorno, orientação e forma (CLEMENTE; TORREGROSA; LLINARES, 2015, p.2), enquanto que figuras desenhadas em posição prototípica são, geralmente, figuras com o lado maior paralelo as bordas horizontais da folha de papel.

que independentemente da forma ou do posicionamento das figuras geométricas planas, suas propriedades permanecem as mesmas (se isso não ocorresse, ao mudarmos, por exemplo, a posição do sofá em nossa sala, ele deixaria de ser um sofá).

Figura 19 – Representação dos grupos dos quadriláteros notáveis



Fonte: Autoria própria.

O trabalho do professor é fundamental para romper com esses estereótipos acerca dos quadriláteros notáveis, isso, por meio da exploração da Geometria Dinâmica.

CAPÍTULO IV

4 A TEORIA DE VAN-HIELE

Neste tópico expomos a nossa sustentação teórica, discutindo a teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Decidimos por essa opção teórica para fundamentar nosso estudo, por consistir a teoria desenvolvimentista mais coerente ao nosso objeto matemático de interesse, isto é, ao estudo do conceito de quadriláteros notáveis.

4.1 A teoria vanhieliana para o progresso do pensamento geométrico

Inspirados pela teoria da Epistemologia Genética de Jean Piaget, os pesquisadores holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geodolf desenvolveram a teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, como o produto de suas teses de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais pela Universidade Real de Utrecht, na Holanda.

Esses professores observaram que seus alunos do ensino básico apresentavam várias dificuldades no que se refere à aprendizagem da Geometria, desse modo, se enveredaram a estudar as causas desse fato (SALVADOR *et al.*, 1989), e o resultado foi a "*A teoria vanhieliana para o progresso do pensamento geométrico*". No entanto, com a morte de Dina, logo após o término de sua tese, foi Pierre que promoveu a reformulação e o aperfeiçoamento da teoria (KALEFF *et al*, 1994), discutindo sobre a função da intuição no ensino da Geometria (CÂMARA DOS SANTOS, 2001).

A partir das discussões de Piaget sobre a evolução da inteligência, Van-Hiele (1957) percebeu a existência de diferentes níveis de pensamento sobre os conceitos de Geometria, explicando que o estudante avança por diversos níveis de pensamento no seu desenvolvimento, iniciando pelo reconhecimento das figuras geométricas a partir de suas aparências físicas e concluindo no estudo abstrato da

Geometria (OLIVEIRA, 2012).

Todavia, diferentemente de Piaget (1999), que estabeleceu intervalos de idades mais ou menos próximas para estágios de progresso da inteligência, Van-Hiele (1957) observa que os níveis de progresso do pensamento geométrico são influenciados pela educação e incentivo norteados pela escola e não pela maturação biológica e pela idade do sujeito.

O principal aspecto que diferencia a teoria piagetiana da teoria vahieliana é que enquanto a primeira é uma teoria do desenvolvimento cognitivo, isto é, do desenvolvimento da inteligência, a segunda é uma teoria da aprendizagem, especificamente da aprendizagem geométrica. Piaget estava preocupado em entender os mecanismos mentais que o sujeito emprega para compreender a realidade, investigando também o processo de construção do conhecimento. Nesse sentido, ele identificou quatro elementos que influenciam no desenvolvimento da inteligência: maturidade biológica, experiência com a realidade física, práticas sociais e equilibração, sendo o primeiro e o último os mais determinantes para a mudança de estágios de desenvolvimento cognitivo (PIAGET, 1999). Van-Hiele voltou seu trabalho para as estruturas do pensamento geométrico do indivíduo, preocupando-se em analisar o que ocorre com essas estruturas durante a aprendizagem da Geometria pelo estudante. Assim, percebeu que a instrução e o estímulo recebidos são determinantes para que o indivíduo alcance certo nível de desenvolvimento do seu pensamento geométrico (VAN-HIELE, 1957).

Nesse sentido, as experiências de ensino, as metodologias, as intervenções pedagógicas, os recursos didáticos empregados, os instrumentos avaliativos adotados e as temáticas trabalhadas em sala de aula, constituem aspectos fundamentais dos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria. Além disso, o docente deve considerar o nível de pensamento do estudante no processo de organização, planejamento e de construção desses aspectos nas situações didáticas.

Desse modo, Van-Hiele (1957) organizou uma teoria capaz de funcionar como uma orientadora de aprendizagem geométrica, servindo ainda para analisar as expectativas de aprendizagem dos estudantes acerca desse campo do conhecimento matemático. Para tanto, Van-Hiele (1957) considerou duas questões importantes na construção de sua teoria: a) a meta do ensino da Geometria é proporcionar que o estudante produza uma teia de conexões favorecendo que pensamentos sejam expressos. Nessa teia, as conexões estão relacionadas por meio de uma estrutura que apresenta um formato lógico e dedutivo; b) o estudante deverá produzir essa teia de conexões, nesse sentido, não caberia ao docente produzir essa teia e entregá-la pronta ao estudante.

Câmara dos Santos (2009) discute algumas razões para que essa teia de relações não seja oferecida pronta aos estudantes, mas que seja construída por eles:

- Em primeiro lugar, esta teia pronta a ser empregada não permitiria ao estudante entender essas conexões, pois elas não têm relações com as próprias experiências. Desse modo, rapidamente o estudante esqueceria os conceitos ensinados.
- Em segundo lugar, a teia não apresentaria qualquer articulação com a realidade próxima do estudante, tendo em vista que ela seria produzida em pequenas porções e o estudante não teria a capacidade de articular o que aprendeu recentemente com as conexões da teia prontamente introduzida. Por fim, muito embora o estudante obtenha êxito ao utilizar essa teia acabada, ele não será capaz de elaborar uma teia com um arcabouço relacional dedutivo em um campo diferente, isto é, em momentos diferentes das situações que geraram o aprendizado.

Ainda segundo esse autor, a construção dessa teia relacional dedutiva demanda um extenso caminho em que se podem verificar distintos níveis de pensamento geométrico. Além disso, todos esses níveis possuem especificidades, nos quais os objetos matemáticos admitem também posições diferentes.

Apesar de ter sido elaborada nos anos de 1950, apenas na década seguinte (década de 60) foi que a teoria vanhieliana começou a despertar interesse em outros países, muito provavelmente pela dificuldade de tradução do idioma em que foi escrito (holandês). Inicialmente, na União Soviética modificou-se o currículo de Geometria ainda nos anos de 1960, para se ajustar à teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico proposta por Van-Hiele. Em seguida, na década de 70, a teoria ganha uma maior atenção no cenário internacional, após as traduções da obra para o inglês pelo norte-americano Izaak Wirsup, professor da Universidade de Chicago (Estados Unidos), em 1976. Além disso, em 1973, Hans Freudenthal, professor da Universidade Real de Utrecht, destacou o trabalho vanhieliano no seu livro intitulado *Mathematics as an Educational Task*[17] (CROWLEY, 1994; ALVES; SAMPAIO, 2010; OLIVEIRA, 2012).

A teoria de Van-Hiele consiste em uma teoria preconizando que os estudantes evoluem na aprendizagem em Geometria segundo níveis hierárquicos de pensamento; assim, um estudante não consegue alcançar um nível mais avançado sem antes ter passado por níveis anteriores menos avançados. Para tanto, essa teoria pode contribuir com a prática pedagógica do professor de Matemática, no sentido que favorece a análise das dificuldades apresentadas pelos alunos, além de possibilitar um olhar mais detalhado acerca das suas expectativas de aprendizagem (USISKIN, 1994).

4.1.1 Os níveis vanhielianos

Como pode ser observada na Figura 20, a teoria está organizada em cinco níveis de desenvolvimento, de modo que, ao mesmo instante em que os estudantes estudam Geometria, eles evoluem a partir de uma sequência hierárquica desses níveis de aprendizagem de conceitos, em que cada nível possui sua especificidade, marcada por um elo entre a linguagem e os objetos de estudo (VAN DE WALLE, 2009). Assim, o aluno se move do nível inicial (primeiro nível) até o mais avançado (quinto nível), por intermédio de situações educacionais adequadas, organizadas pelo professor (CROWLEY, 1994).

Além disso, a ascensão de um nível para outro depende das vivências

[17] Tradução: Matemática como tarefa educacional.

desenvolvidas na escola, por meio de atividades apropriadas propostas em sala de aula. Assim, dito de outra forma, Van-Hiele sugere, de acordo com sua teoria, a mudança de um nível "menos avançado" para um nível "mais avançado" depende mais de uma aprendizagem coerente do que da idade ou da maturação biológica do estudante (NASSER; SANT'ANNA, 2010).

Figura 20 – Níveis do pensamento geométrico, segundo Van-Hiele

Fonte: Autoria própria.

É importante destacarmos que nesta dissertação, optamos por chamar os níveis de Van-Hiele por: primeiro nível, segundo nível, terceiro nível, quarto nível e quinto nível. Tal escolha se sustenta na existência do uso de diferentes termos aos níveis de pensamento geométrico vanhieliano, que identificamos nas literaturas nacional e internacional. Acreditamos que esses termos utilizados nas pesquisas para os níveis não são sinônimos, diferenciando-se em seus significados. Contudo, não é objetivo de nosso estudo discutir sobre isso na dissertação, todavia, não descartamos a possiblidade de realizamos futuramente um estudo teórico mais refinado sobre essa temática.

Para Van-Hiele (1957), no primeiro nível, os alunos reconhecem as figuras geométricas pelas suas aparências ou formas globais e não por suas propriedades ou características próprias, isto é, o pensamento ocorre, geralmente, por meio de considerações visuais. Assim, os objetos da Geometria são considerados em sua totalidade, sem considerações claras sobre as propriedades dos seus elementos. Então, as figuras geométricas são distinguidas pelo aspecto global, sendo possível chamá-las de triângulo, quadrado, entre outros, no entanto, os estudantes não compreendem as propriedades, que possibilitam a sua identificação.

O aluno consegue, por exemplo, identificar um quadrado ou um retângulo e, inclusive, os construir sem falhas, mas um quadrado não é considerado como um retângulo, tendo em vista que divergem em suas aparências. Desse modo, as atividades propostas em sala de aula pelo professor devem promover a evolução para o segundo nível, no qual os estudantes reconhecem as figuras pelas suas propriedades.

Assim, no próximo nível, o aluno irá distinguir um losango pelas suas propriedades (lados com medidas iguais, diagonais perpendiculares que se interceptam no ponto médio) e não por sua aparência física. Van-Hiele (1957) discute ainda que na transição do primeiro nível para o segundo, a manipulação de figuras leva o estudante à elaboração de uma estrutura mental que desenvolve o seu pensamento, promovendo a passagem entre os dois níveis. É típico do primeiro nível, que os alunos utilizem de um vocabulário geométrico, realizem a identificação de determinadas formas e a reprodução de certa figura (KALEFF *et al*, 1994).

No segundo nível, o aluno não reconhece mais as figuras pelas suas aparências, mas sim, por suas propriedades gerais. Dessa forma, elas são consideradas como portadoras de propriedades. Assim, se o estudante desenha mesmo com falhas, um quadrilátero notável em seu caderno e se essa figura apresenta todos os ângulos retos, então ele é capaz de considerar o quadrilátero notável como um retângulo. Todavia, nessa fase, o aluno ainda não consegue ordenar logicamente as propriedades das figuras o que faz com que, por exemplo, um quadrado não seja reconhecido como um losango (CÂMARA DOS SANTOS, 2009).

Novamente, Van-Hiele (1957) recomenda que se o professor possibilitar a manipulação[18] de figuras geométricas pelo aluno, tal fato promoverá o avanço do estudante para o próximo nível de pensamento geométrico, que é definido pela ordenação lógica das propriedades das figuras, isto é, pelo estabelecimento de relações entre as características das figuras geométricas.

Várias pesquisas fundamentadas pela teoria de Van-Hiele mostram por meio de diversos testes sobre os níveis vanhielianos, que muitos alunos e parte dos professores de Matemática da educação básica encontram-se até os dois primeiros níveis da teoria de Van-Hiele, apresentando várias dificuldades de aprendizagem em Geometria (INOUNE, 2004; SANTOS, 2007; BENITES, 2010; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2012; COSTA; CONCEIÇÃO; OLIVEIRA, 2014; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b).

Inoue (2004), em sua pesquisa, buscou analisar o processo de produção do conceito de quadriláteros notáveis por meio de uma sequência didática e analisar a evolução dos níveis de pensamento geométrico de uma turma do sétimo ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública municipal de Itajaí – Santa Catarina. Nesse sentido, a pesquisadora aplicou uma sequência didática baseada nos níveis vanhielianos, mas também fez uso de um pré e pós-teste para verificar os avanços do pensamento geométrico de 28 alunos, participantes do estudo. No pré-teste, que contou com a participação de 24 sujeitos, a pesquisadora observou que apenas 83,33% se encontravam no primeiro nível vanhieliano, os demais estudantes ainda não conseguem reconhecer as figuras geométricas pela sua aparência.

Santos (2007) realizou uma pesquisa que contou com a participação de 28 alunos do quinto ano de uma escola pública da rede municipal de Paulista – PE. Em um primeiro momento, a pesquisadora aplicou um pré-teste para analisar as lacunas e dificuldades sobre Geometria, sobretudo, o tópico referente à categorização e à

[18] Essa manipulação compreende desde a manipulação de materiais concretos produzidos, por exemplo, no laboratório de Matemática, até mesmo a manipulação de objetos representados em *softwares* de Geometria Dinâmica.

nomeação de figuras geométricas. A questão analisada nesse trabalho solicitava que os estudantes identificassem dentre cinco figuras geométricas apresentadas, as que eram triângulos, isso, segundo a autora, considerando o aspecto global da figura, característica do primeiro nível vanhieliano. Entre as figuras exibidas, três eram triângulos (um equilátero, um escaleno e um isósceles), um era um trapézio e a outra uma figura qualquer com seis lados.

Com base nos resultados, Santos (2007) percebeu que a maior parte dos discentes do quinto ano não era capaz de reconhecer perfeitamente o triângulo: apenas 4% reconheceram todos os três triângulos, 92% reconheceram parcialmente (identificando um ou dois triângulos) e 4% dos participantes do estudo não identificaram nenhum dos triângulos. Nesse sentido, esses primeiros resultados mostram que os alunos se encontram no primeiro nível de Van-Hiele.

Benites (2010) analisou em qual nível proposto por Van-Hiele se encontravam 26 estudantes do sexto ano do ensino fundamental de uma escola pública da rede estadual do munícipio de Ponta Porã – Mato Grosso do Sul. Nesse sentido, esses alunos foram solicitados a responderem uma avaliação diagnóstica constituída por nove atividades referentes aos três primeiros níveis vanhielianos. Os resultados obtidos na pesquisa mostram que a maioria dos alunos se encontra no primeiro nível de Van-Hiele, no qual ocorre o reconhecimento das figuras geométricas pela aparência.

Oliveira e Almeida (2012) analisaram de forma pedagógica os dados apresentados pelo Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), em 2011, na área de Matemática pelos estudantes do quinto ano do ensino fundamental. Entre os inúmeros resultados expressos nos relatórios do SAEPE, esses autores perceberam que menos de 15% dos alunos, que cursavam o quinto ano do ensino fundamental em 2011, eram capazes de estabelecer associações entre objetos do cotidiano e as figuras geométricas, que é uma característica do primeiro nível vanhieliano.

Conceição e Oliveira (2014) analisaram o nível de pensamento geométrico de sete professores de Matemática de duas escolas da rede estadual do município de

Vicente Ferrer - PE. Nessa pesquisa, os autores aplicaram dois testes relacionados aos níveis de Van-Hiele. O primeiro teste era composto por cinco questões referentes ao reconhecimento de figuras geométricas pela sua aparência, e o segundo, também formado por cinco quesitos, explorava o uso das propriedades das figuras. Entre os resultados, esses autores observaram que apenas um professor se encontrava no segundo nível de Van-Hiele, os demais ainda estavam no primeiro, apresentando pouca compreensão dos conceitos geométricos trabalhados nos testes.

Diante disso, Conceição e Oliveira (2014) conjecturam que essa defasagem se transpõe para as aulas de Matemática do ensino básico, nas quais, é dada pouca ênfase à Geometria, sendo que, em geral, os professores confundem o seu ensino com o ensino de Grandezas e Medidas. Tal fato tem contribuindo para que os alunos apresentem dificuldades com relação à compreensão dos conceitos geométricos.

Costa e Câmara dos Santos (2015a) desenvolveram um primeiro estudo que contou com a participação de 300 estudantes do ensino médio do Estado de Pernambuco, que abrangeu os municípios de Recife, Limoeiro e Cabo de Santo Agostinho. Para cada série (ano) dessa etapa da educação básica participaram 100 sujeitos. Esses alunos tiveram que responder a um problema sobre os quadriláteros notáveis, no qual foi solicitado a construção de duas figuras geométricas, a primeira deveria ser um retângulo e a segunda uma figura de quatro lados que não se constituísse com um retângulo. A atividade tinha a intenção de analisar se os estudantes consideravam a especificidade das figuras, isto é, se eles faziam referência às propriedades na diferenciação entre elas. Os resultados mostraram que quase dois terços dos alunos não reconheceu o quadrado como retângulo, o que é uma evidência do primeiro nível vanhieliano, isto é, esses alunos não são capazes ainda de reconhecer os quadriláteros notáveis como detentoras de propriedades.

Em um segundo estudo, Costa e Câmara dos Santos (2015b) analisaram os níveis de pensamento geométrico de 22 estudantes de uma turma do 6º ano do ensino fundamental, também em uma escola pública de Recife – PE, a partir do teste de sondagem aplicado na primeira pesquisa. Esses autores verificaram que, em média, 10% dos estudantes participantes do estudo não conseguiram identificar os quadriláteros notáveis por meio de sua aparência global.

No terceiro nível de Van-Hiele, o aluno consegue ordenar logicamente as propriedades das figuras, percebendo que elas se deduzem umas nas outras, isto é, que elas podem se articular. Desse modo, ao assinalar as características das figuras geométricas, o estudante desenvolve observações e experimentações, como exemplo disso, destacamos o estabelecimento de propriedades empregadas para reconhecer formas e classes (BARBOSA, 2011). Então, nesse nível, o sujeito é capaz, por exemplo, de estabelecer uma relação entre a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer (que diz que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º) com outra propriedade, que é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero notável qualquer (na qual a soma das medidas desses ângulos é igual a 360º). Além disso, o estudante reconhece um quadrado como um losango, pois percebe que, em certa situação, esses quadriláteros apresentam as mesmas propriedades. Todavia, ele ainda não compreende o significado próprio da demonstração (CÂMARA DOS SANTOS, 2001).

No quarto nível, o aluno é capaz de compreender a dedução como um meio de situar a teoria da Geometria no contexto de um sistema axiomático, além de entender o significado intrínseco da demonstração. A correlação e a função de termos não definidos, definições, axiomas, postulados e teoremas também são compreendidos. Desse modo, consegue construir vários tipos de demonstrações por diversos caminhos, além de estabelecer a distinção entre uma proposição e sua recíproca, motivo pelo qual as definições e os axiomas são essenciais, sendo possível distinguir quando uma condição é suficiente e também quando é necessária. Tais aspectos são características do processo dedutivo. Ainda nesse nível, o estudante é capaz de reconhecer um paralelogramo que tem quatro lados congruentes como um losango (ONTARIO, 2006).

No quinto nível, que é definido por processos basicamente matemáticos, o discente consegue compreender diferentes sistemas axiomáticos, bem como construir a diferença entre uma propriedade e sua recíproca. Existe uma análise das diferenças e ligações entre sistemas axiomáticos distintos. Como exemplo, podemos citar a Geometria Esférica, que possui seu próprio grupo de teoremas e axiomas e se norteia em linhas delineadas sobre uma esfera, ao invés de um plano. Nesse sentido, o estudante é capaz de trabalhar com geometrias não euclidianas. Além disso, o sujeito desenvolve um olhar abstrato do campo geométrico. No quinto nível, o aluno é um especialista em Matemática em nível de graduação, que estuda Geometria como área do conhecimento matemático (VAN DE WALLE, 2009).

Para Van-Hiele (1957), o progresso do pensamento geométrico não está relacionado apenas à maturidade ou à idade do sujeito, mas sim às atividades educativas e às situações didáticas organizadas pelo professor. O Quadro 5, elaborado por Ontário (2006) e traduzido e adaptado do francês para o português pelo autor desta dissertação, apresenta um resumo dos níveis vanhielianos. O quadro original de Ontario (2006) pode ser observado no Anexo I.

Quadro 5 – Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele

Descrição	Comportamentos observáveis	Exemplo de afirmação
Primeiro nível Percepção e classificação de figuras geométricas pela aparência.	- usa vocabulário geométrico; - reconhece, nomeia, compara e reproduz figuras geométricas de acordo com sua aparência global; - apresenta dificuldades em representar mentalmente uma figura geométrica (as figuras são observadas, mas não conceituadas; cada uma é percebida globalmente, como uma entidade); - as classes ou grupos de figuras geométricas são iguais.	"É um quadrado, pode ser visto claramente... seus lados são todos iguais e isso é certo".
Segundo nível A partir da análise das figuras geométricas pode-se descobrir as propriedades.	- reconhece algumas das propriedades comuns e distintas das figuras geométricas; - nomeia propriedades de figuras geométricas, mas não em subclasses dentro de uma família de polígonos; - generaliza as propriedades de uma figura geométrica para todas as figuras geométricas da mesma família; - classifica as figuras geométricas com base em suas propriedades.	"Esta figura é um quadrado porque apresenta quatro vértices, quatro ângulos retos, quadro lados iguais e dois pares de lados paralelos"
Terceiro nível Estabelecimento de ligações entre as figuras geométricas e entre as propriedades de uma dada figura geométrica.	- deduz algumas das propriedades de uma figura geométrica; - reconhece e estabelece subclasses de figuras geométricas; - elabora e verifica certas hipóteses; - compreende e utiliza as relações de inclusão e exclusão; - desenvolve listas de propriedades que são necessárias e suficientes para descrever uma figura geométrica qualquer; - formula argumentos matemáticos claros e suficientes usando o vocabulário causal (p. ex., por que, porque, assim) e consequência lógica (p. ex. se... então... desde que... então...).	"É um quadrado, mas também um losango, porque a propriedade que descreve o losango é, todos os lados são congruentes entre si. Então eu acho que o quadrado é uma espécie de losango".
Quarto nível Estudo das definições, das provas, dos teoremas, axiomas e postulados.	- apresenta evidências, não se limitando a memorização; - prova um enunciado de diferentes maneiras; - inclui subclasses de figuras geométricas e suas relações.	"Um paralelogramo com dois lados adjacentes congruentes deve ser um losango".
Quinto nível Estudo da Geometria Abstrata.	- utiliza sistemas dedutivos abstratos; - trabalha com Geometria Não-Euclidiana; - faz ligações entre os conceitos e desenvolve, às vezes, novos postulados.	

Fonte: ONTÁRIO, 2006, p. 13-14.

4.1.2 Propriedades da teoria

Van-Hiele (1957) também verificou a existência de algumas propriedades que especificam a sua teoria, além de conceber um entendimento do que existe de particular em todos os níveis do pensamento geométrico. Nesse sentido, essas propriedades são muito importantes para guiar os professores na organização das intervenções pedagógicas, a serem desenvolvidas em sala de aula. Segundo Crowley (1994), foram identificadas cinco propriedades, que são mencionadas a seguir:

a) Sequencial – como toda teoria do desenvolvimento, um sujeito deverá obrigatoriamente se deslocar pelos diversos níveis, gradativamente. Um estudante que passa de um nível “menos avançado” para um “mais avançado”, deverá incorporar as lógicas dos níveis anteriores.

b) Avanço – a passagem de um nível para outro só ocorrerá se os conteúdos escolares e as opções metodológicas de ensino adotadas forem adequados, e não da idade do estudante. Não existe uma metodologia capaz de levar o estudante a “saltar” um nível, o que existe são metodologias que favorecem o avanço e outras que atrasam ou ainda que impossibilitem a progressão de um nível para outro.

c) Intrínseco e extrínseco – os objetos matemáticos assumem *status* diferentes em cada nível. Tomemos como exemplo os níveis iniciais vanhielianos, isto é, o primeiro e o segundo níveis. No primeiro, as figuras geométricas são percebidas apenas pela sua aparência global ou forma, enquanto que no segundo, elas são analisadas e percebidas como detentoras de propriedades.

d) Linguística – cada nível apresenta símbolos linguísticos específicos e também sistemas de relações particulares que conectam esses símbolos. Nesse sentido, uma relação que é considerada adequada em um determinado nível pode ser alterada em outro nível. Como exemplo, podemos mencionar o caso do quadrado. Uma figura geométrica pode apresentar diversos nomes, no caso do quadrado, ele também é um paralelogramo, um retângulo e um losango. No entanto, um estudante que esteja nos níveis iniciais não consegue compreender e perceber essa relação. Apenas no terceiro nível de Van-Hiele, ele terá condições de realizar essa acomodação.

e) Combinação inadequada – ocorre quando o estudante está em determinado nível e o curso que ele frequenta se encontra em outro nível, dessa forma, a aprendizagem e a evolução pretendidas podem não ocorrer. Ou seja, o docente, o material didático adotado, o assunto abordado e a linguagem utilizada em sala de aula, se tudo isso se apresentar em um nível mais elevado que o estudante, consequentemente, ele não terá condições de conduzir as estruturas de pensamento aplicadas do nível.

4.1.3 Fases de aprendizagem

Como foi discutido anteriormente, para Van-Hiele (1957) a evolução sequencial dos níveis ocorrerá diante de situações educacionais adequadas e não da maturação e da idade do aluno. Nesse sentido, a metodologia e o planejamento pedagógico adotado no curso, incluindo outros elementos como o conteúdo a ser trabalhado, o material didático utilizado, constituem consideráveis campos de interesse pedagógico. Diante disso, Van-Hiele propôs também uma sequência de fases de aprendizagem que, se consideradas pelo projeto pedagógico a ser desenvolvido em sala de aula, possibilita o avanço dos níveis de pensamento geométrico. De acordo com Nasser e Sant'anna (2010), foram propostas cinco fases, que são citadas a seguir:

a) Interrogação ou informação – nessa fase, docente e discente dialogam e realizam tarefas que abrangem os objetos de interesse do referente nível. São realizadas observações, questionamentos e é principiada uma linguagem própria do nível. São típicos dessa fase os seguintes questionamentos: O que é um quadrado? O que é um losango? Quais suas diferenças? O que têm em comum? É possível que um quadrado seja um losango? O inverso poderá ocorrer? Por qual motivo? Com esses questionamentos o docente toma conhecimento das atuais aprendizagens dos estudantes acerca de determinado assunto, e os estudantes tomam ciência do direcionamento dos trabalhos em sala de aula.

b) Orientação dirigida – os estudantes trabalham o conteúdo por meio do material didático disponibilizado e organizado sequencialmente pelo docente. Tais tarefas mostrarão pouco a pouco aos estudantes a lógica específica do nível. Nesse sentido, a proposta pedagógica consistirá na aplicação de curtas atividades com a intenção de provocar soluções particulares. Como exemplo, o docente solicitaria aos estudantes que utilizassem o *software* GeoGebra para produzir um losango que apresenta diagonais iguais, depois, para produzir um maior e outro menor.

c) Explicação – nessa fase, o estudante explicita e socializa seu ponto de vista acerca das lógicas analisadas, se fundamentando em suas práticas vivenciadas em outros momentos antecedentes. A função do docente é reduzida, ficando apenas responsável pela orientação dos estudantes e a utilização de um vocabulário mais coerente e definido. No decorrer dessa fase, observa-se o processo de ligações de níveis. Nessa fase os estudantes discutem uns com os outros e também com o docente sobre as figuras geométricas e suas propriedades que são exploradas nas tarefas anteriores.

d) Orientação livre – nessa fase, o estudante desenvolve atividades mais difíceis, ganhando prática ao observar suas estratégias de resolução dos problemas. Além disso, os objetos de interesse ficam evidentes para os estudantes. É durante esta fase que, por exemplo, o estudante discute o motivo de a medida da área de um losango qualquer ser obtida a partir da metade do produto das medidas dos comprimentos das suas diagonais.

e) Integração – nessa fase, o estudante revisa e extrai as aprendizagens construídas anteriormente com a finalidade de estabelecer um olhar global da nova teia de objetos e ligações. Nesse sentido, o docente tem o papel de oferecer condições para que o estudante desenvolva essa perspectiva geral. Ao término dessa fase, o estudante desenvolverá uma nova estrutura em seu pensamento geométrico.

4.2 Características da teoria vanhieliana

A teoria vanhieliana pode ser considerada tanto uma teoria da aprendizagem como também uma teoria do ensino. No primeiro caso, como teoria da aprendizagem, ela descreve os níveis de pensamento geométrico; no segundo, como teoria de ensino, ela orienta a prática pedagógica do docente, considerando o progresso das fases de aprendizagem. Nesse sentido, a teoria de Van-Hiele consegue dar conta dos processos educacionais, isto é, dos processos de ensino e de aprendizagem (OLIVEIRA, 2012).

Diante desta constatação, é possível elencar algumas características da teoria de Van-Hiele, que a tornam uma relevante teoria educacional. O Quadro 6 apresenta uma síntese dessas características, que foram descritas por Usiskin (1982), traduzida e adaptada pelo autor desta dissertação.

Quadro 6 – Características da teoria de Van-Hiele[19].

CARACTERÍSTICA	DESCRIÇÃO
Caráter científico	A teoria é capaz de relatar e prenunciar o comportamento do estudante e ainda e designar as ações para se obter os níveis de pensamento.
Elegância	A estrutura apresenta uma lógica estruturante muito simples. A passagem de um nível “menos avançado” para um nível “mais avançado” obedece aos mesmos preceitos elementares, apresentando o aspecto elegante das formas.
Alcance	A teoria possui grande alcance, pois se preocupa tanto com a questão da aprendizagem geométrica, buscando tanto compreender as dificuldades de aprendizagem do estudante, como também suas possíveis soluções.
Ampla aplicabilidade	A teoria apresenta uma ampla e simples aplicabilidade, pois proporcionou mudanças substanciais nos currículos escolares de Geometria em diferentes nações como a antiga União Soviética, os Estados Unidos da América e a Holanda.

Fonte: USISKIN, 1982, p. 6-8.

[19] O original desse texto encontra-se no Anexo II.

CAPÍTULO V

5 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Neste capítulo apresentamos o delineamento metodológico traçado para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Nesse sentido, iniciamos com os objetivos do estudo, e em seguida, o caracterizamos. Posteriormente, anunciamos os sujeitos participantes, o campo da pesquisa e suas respectivas etapas de desenvolvimento. Por fim, centramos nosso olhar para os instrumentos de coleta de dados, isto é, realizamos uma análise refinada da sequência didática e do pré-teste e pós-teste.

5.1 Objetivos do estudo

Como já mencionamos, o objetivo geral desse estudo consistiu em analisar os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático para o desenvolvimento dos níveis iniciais de pensamento geométrico nos estudantes do 6º ano do ensino fundamental.

Para tanto, essa pesquisa também apresentou os seguintes objetivos específicos:

- identificar os níveis de pensamento geométrico em que se encontram os alunos participantes do estudo (antes e após a aplicação da sequência didática);
- verificar as estratégias utilizadas pelos alunos na realização das atividades propostas pela sequência didática;
- verificar os avanços de níveis de pensamento geométrico dos alunos (do primeiro nível para o segundo nível).

5.2 Caracterização da pesquisa

O presente estudo consistiu em uma replicação de pesquisa, tendo em vista que utilizamos os mesmos instrumentos de coleta de dados da pesquisa desenvolvida por Câmara dos Santos (2001), isto é, aplicamos os pré-teste e pós-teste e a sequência didática elaborados por esse pesquisador na sua investigação.

Para Lennan e Avrichir (2013, p. 41-42), replicar "significa pesquisar novamente com a finalidade de observar, investigar, experimentar, comparar os resultados, validar e definir claramente as teorias [...]". Assim, segundo essas autoras, a replicação de um estudo é realizada de forma a analisar se os resultados do estudo inicial são possíveis de se reproduzirem:

> [...] a replicação pode consolidar a generalização dos resultados da pesquisa original. Como consequência, os cientistas sociais poderiam alicerçar o conhecimento em fundamentos sólidos e fazer significativos progressos, pois as descobertas seriam específicas e reproduzíveis [...]. A extensão da nova pesquisa poderia modificar o desenho do estudo original, como na definição das variáveis dependentes e independentes. Isso se justificaria pelo objetivo de averiguar se os resultados prévios são válidos e podem ser extrapolados para outras populações, categorias de produtos, períodos de tempo, novas localizações geográficas ou se são somente idiossincrasias ou peculiaridades localizadas [...] (LENNAN; AVRICHIR, 2013, p.42).

Em seu estudo, Câmara dos Santos (2001) buscou analisar as implicações didáticas do *software* Cabri-Géomètre no progresso dos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele. O pesquisador fez um recorte nos níveis vanhielianos, centrando a pesquisa para os níveis iniciais do pensamento geométrico. Para isso, elaborou uma sequência didática fazendo uso da noção de situação-problema, além de um pré-teste e pós-teste para verificar se houve ou não avanço na aprendizagem geométrica dos estudantes.

A sequência didática foi aplicada em duas turmas do sexto do ensino fundamental de uma escola pública da rede federal na cidade de Recife – Pernambuco. Além disso, os participantes da pesquisa eram alunos do próprio pesquisador, que já desenvolvia um trabalho sistemático na escola.

É importante destacar que a sequência didática foi construída considerando as especificidades do Cabri-Géomètre, ou seja, a sequência foi organizada para ser desenvolvida com auxílio do mencionado *software*.

O que nos motivou a realizar a replicação desses instrumentos foi o fato de estarmos interessados em analisar se o que pode promover o desenvolvimento do pensamento geométrico é a sequência didática e não o *software* de Geometria Dinâmica, como observou Câmara dos Santos (2001) em sua pesquisa.

Assim, a nossa finalidade também é verificar se a sequência pode ser utilizada para outro tipo de *software* de Geometria Dinâmica, ou se necessitará realizar alguma modificação nela para tornar viável sua aplicação, e também analisar se ela pode promover avanços (ou não) no pensamento geométrico dos estudantes do ensino básico.

Desse modo, o que basicamente diferencia a nossa pesquisa do estudo de Câmara dos Santos (2001) é que, enquanto, aqui estávamos interessados em analisar os efeitos da sequência didática nos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele, o pesquisador Câmara dos Santos se interessou em investigar os efeitos do *software* no pensamento geométrico vanhieliano.

Para tanto, decidimos também utilizar uma variável didática diferente da empregada por Câmara dos Santos (2001), que consistiu no *software* de Geometria Dinâmica, no caso da nossa pesquisa, utilizamos o GeoGebra, que apresenta pontos comuns e diferenças com o Cabri-Géomètre, que foi empregado no estudo de Câmara dos Santos.

Além disso, decidimos utilizar o GeoGebra entre os vários tipos de *softwares* de Geometria Dinâmica como recurso para o desenvolvimento da sequência didática, por dois motivos. Em primeiro lugar por se tratar de um *software* livre, sendo possível baixá-lo na *internet* facilmente, e em segundo lugar, por observamos, por meio de um levantamento de produções científicas, que em várias pesquisas sobre o ensino de Geometria, há uma ampla discussão sobre o uso desse *software* nos processo de ensino e de aprendizagem da Matemática (HOHENWARTER; HOHENWARTER; LAVICZA, 2008; ARAÚJO; GOMES, 2011; LOPES, 2011;

CATANEO, 2012; COSTA; LACERDA, 2012). Tais pesquisas mostram ainda que o GeoGebra contribui com a aprendizagem geométrica dos estudantes do ensino básico. Então, foram esses dois aspectos que nos motivaram a utilizar o GeoGebra em nossa pesquisa.

Diante desse contexto, neste trabalho, o caminho metodológico, que compreendeu uma abordagem qualitativa, buscou por meio de uma sequência didática promover o progresso do pensamento geométrico de estudantes do sexto ano do ensino fundamental.

Dessa forma, concordamos com Triviños (1987) que discute que a pesquisa qualitativa busca analisar e compreender um fenômeno social em sua complexidade, sendo que no campo educacional, esse fenômeno é denominado de fenômeno educacional.

É importante salientar que neste estudo não deixamos de apresentar uma perspectiva quantitativa, pois acreditamos que ela discrimina os dados produzidos na pesquisa de forma mais refinada (SANTOS FILHO, 2013).

5.3 Sujeitos participantes e campo da pesquisa

A questão central desta pesquisa foi analisar os efeitos gerados pela vivência dos estudantes com uma sequência didática. Nosso objetivo foi analisar os efeitos da sequência na construção do conceito de quadriláteros notáveis, por meio do percurso desenhado pelas discussões norteadas em nosso referencial teórico.

Nesse contexto, escolhemos estudantes do sexto ano não apenas por se tratar de uma replicação de pesquisa, mas pelo fato de, atualmente, várias pesquisas, entre elas, a de Costa e Câmara dos Santos (2015b) e também avaliações de larga escala, a exemplo do SAEPE (2010), como já foi discutido no capítulo da introdução desse trabalho, mostrarem que os alunos do sexto ano apresentam dificuldades de aprendizagem com relação ao conceito de quadriláteros notáveis, demostrado nos baixos desempenhos nesses testes avaliativos.

No entanto, alunos de outros níveis escolares, como os do ensino médio também apresentam essas dificuldades. Em um estudo que realizamos recentemente (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a), no qual aplicamos as questões do pré-teste e pós-teste de Câmara dos Santos (2001), com 300 alunos do ensino médio, do 1º ao 3º ano, do Estado de Pernambuco, observamos, por exemplo, que aproximadamente dois terços dos estudantes não reconhecem o quadrado com sendo um retângulo, sendo que os alunos do 1º e 3º anos foram os que apresentaram os piores desempenhos no teste. Esse dado é bastante preocupante, pois de acordo com os PCN de Matemática (BRASIL, 1998) é no sexto ano, que deve ser formalizado o conceito de quadriláteros notáveis.

O campo de pesquisa deste estudo foi uma turma do sexto ano da Escola da rede pública de Ensino Fundamental e Médio Ernest Huet (EFEH)[20] situada no município de Recife – PE. Na época da coleta de dados, a turma era constituída por 30 estudantes, sendo 15 meninas e 15 meninos, com faixa etária que variava entre 10 e 11 anos.

A EFEH oferece a educação básica do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio desde o final dos anos de 1960 no referido município. Sua infraestrutura compreende: 14 salas de aula, biblioteca, laboratório de Informática, laboratório de Química, laboratório de Física, laboratório de Biologia, miniauditório e quadra poliesportiva. Dessa forma, a coleta de dados foi realizada no laboratório de Informática da escola supracitada. Além disso, a escola possui cinco professores de Matemática, desse total, apenas um leciona no sexto ano do ensino fundamental.

É importante destacar que na análise dos dados, para preservarmos a identidade dos participantes, cada estudante recebeu um código, formado por uma letra e dois números. A letra escolhida foi a “A”, em referência à palavra aluno. Os números variavam entre 01 e 30, que corresponde à quantidade de estudantes da turma. Desse modo, a turma investigada era composta pelos alunos: A01, A02, A03,..., A30.

[20] Esse nome é fictício para proteger a identidade da instituição.

Além disso, os alunos já apresentavam certa familiaridade com o GeoGebra, pois o professor já tinha trabalhado com eles algumas atividades referente a Álgebra.

5.4 Etapas do estudo

O estudo foi realizado em três etapas. Na primeira, aplicamos o pré-teste com os estudantes do 6º ano, que tinha por objetivo identificar os níveis de pensamento geométrico em que se encontram os alunos participantes do estudo antes da aplicação da sequência didática. Assim, o pré-teste foi aplicado no dia 22 de março de 2015, sendo que os alunos levaram em média 30 minutos para respondê-lo.

A seguir, foi realizada a aplicação da sequência didática com o GeoGebra, versão 5.2, no laboratório de Informática da escola. Os estudantes foram organizados em dupla, nesse sentido, no total foram 15 duplas formadas nesse momento.

A sequência didática foi aplicada pelo professor titular da turma analisada e não pelo pesquisador, autor do estudo. Decidimos por não aplicar a sequência, pois havia grande probabilidade de que os estudantes se sentissem mais a vontade com o seu professor e também com o contrato didático[21] já estabelecido por ele, ao desenvolverem as atividades propostas pela sequência. Dessa forma, esse docente foi orientado previamente pelo pesquisador acerca da aplicação da sequência com seus alunos.

Decidimos que as atividades seriam realizadas em dupla, devido dois fatores. O primeiro, em decorrência da importância das discussões e das reflexões estabelecidas entre os membros de cada dupla durante a vivência da sequência, favorecendo a construção do conhecimento. Nesse sentido, o

[21] Estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, quer seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar quer seja na dimensão mais ampla do sistema educativo. No nível de sala de aula, o contrato didático diz respeito às obrigações mais imediatas e recíprocas que se estabelecem entre o professor, os alunos (PAIS, 2011, p.77) e o saber em jogo. Para um maior aprofundamento sobre o tema, recomendamos a leitura do texto de Brousseau (1988).

pesquisador/observador/professor consegue identificar como os estudantes resolveram as atividades no trabalho em grupo (MELO, 2009).

Leal (2005) discute que no trabalho em dupla, os estudantes constroem hipóteses, debatem e discorrem acerca de suas ideias de modo mais frequente, sem a necessidade de realizar disputa com os demais grupos sobre o discurso. Dessa forma, a frequência da circulação do docente entre as duplas é bem menor do que quando estão organizados em equipes. Todavia, ao circular entre as duplas, ele tem melhores oportunidades de compreender as estratégias empregadas pelo estudante e de realizar de forma mais direta suas intervenções pedagógicas, orientando o aluno a refletir sobre o seu percurso de resolução.

Como segundo fator determinante, consideramos que as atividades desenvolvidas em dupla podem favorecer a permuta de informações, a apresentação e a discussão sobre as atividades vivenciadas entre os estudantes. Além disso, no trabalho em dupla, os pares comungam as deliberações estabelecidas, sendo os protagonistas da qualidade do que é construído em dupla, de acordo com suas perspectivas e esforços (DAMIANI, 2008).

Durante o desenvolvimento das atividades, os estudantes foram orientados a gravarem suas produções em uma pasta contida na área de trabalho do computador, que apresentava o nome da dupla. Além disso, essas duplas receberam uma ficha de atividades, por meio da qual, deveriam fazer registros de suas produções acerca da sequência. A finalidade aqui era verificar as estratégias utilizadas pelos alunos na realização das atividades propostas pela sequência didática, por exemplo, se eles faziam referência (ou não) às propriedades das figuras geométricas em seus registros.

Além disso, realizamos a filmagem e gravação de uma das duplas, cujo objetivo foi analisar a forma como os alunos discutiam as atividades e também as estratégias de resolução utilizadas. Todavia, não foi possível utilizar a filmagem e a gravação em nossa pesquisa porque a turma investigada fez muito barulho, o que impossibilitou de realizamos a análise desses dados.

É importante destacar que tanto a filmagem como a gravação só foi possível por meio da permissão registrada dos pais dos estudantes a partir de um termo de livre consentimento e esclarecimento (ver Apêndice IV).

A turma investigada estudava no turno da manhã e semanalmente tinha cinco aulas de Matemática, com duração de 50 minutos cada, distribuídas em três dias. Desse modo, eram duas aulas seguidas na segunda-feira, com duração de uma hora e trinta minutos (07h20min às 09h), duas aulas geminadas na quarta-feira, novamente com duração de uma hora e trinta minutos (07h20min às 09h), e uma aula na quinta-feira, com duração de cinquenta minutos (10h10min às 11h).

No total, foram 09 aulas utilizadas para a aplicação da sequência didática, logo, foram 7,5 horas de dados filmados e gravados. Nesse sentido, a sequência foi aplicada durante duas semanas, em especial, entre os dias 08 de junho e 17 de junho de 2015.

Enquanto pesquisador, buscamos o máximo possível que nossa presença no laboratório não interviesse os trabalhos com a sequência didática. Todavia, em certos momentos, o professor nos consultava para tirar algumas dúvidas sobre as atividades. O mesmo ocorreu com os estudantes, que ora nos chamavam por “*professor*”, ora por “*tio*”. Tal fato é uma comprovação de que o trabalho com as tecnologias na Educação, e no caso de nossa pesquisa, do uso do computador nas aulas de Matemática não é algo tão simples, o exige um grande esforço do professor, sendo necessário, em diversas situações didáticas, o apoio de um professor auxiliar, que apoie o seu trabalho docente.

Por fim, aplicamos o pós-teste com os estudantes no dia 01 de julho de 2015 em uma única aula de Matemática, que objetivou identificar os níveis de pensamento geométrico em que se encontram os alunos participantes do estudo após a aplicação da sequência, e ainda, verificar os avanços de níveis de pensamento geométrico dos alunos (do primeiro nível para o segundo nível).

Nesse sentido, é possível evidenciar que os dados da pesquisa foram produzidos por meio de diversos métodos, entre eles, pode-se mencionar: análise de registros escritos (fichas de atividades), análise dos pré-teste e pós-teste e análise da sequência didática.

5.5 A sequência didática

As atividades propostas na sequência didática consistem em situações-problema, por meio das quais os alunos puderam construir suas próprias estratégias na resolução dos problemas indicados, fazendo uso (manipulação) do GeoGebra para legitimar (validar) suas produções.

Todas as atividades propostas pela sequência foram testadas previamente pelo pesquisador do estudo, fazendo uso do *software* GeoGebra. A intenção era analisar se seria necessário realizar alguma adaptação nos problemas, pois como discutidos anteriormente, a sequência foi elaborada para ser desenvolvida no Cabri-Géomètre, considerando suas especificidades.

Realizamos algumas adaptações na sequência didática, mas que não modificaram sua lógica. As alterações consistiram em mudanças no enunciado das atividades, como por exemplo, o primeiro item da primeira atividade da primeira fase da sequência didática que solicita "*Construa o segmento **AB***" modificamos para "*Considere um segmento de reta MN"*. Ou seja, apesar de o enunciado da questão ter sido alterado, o sentido semântico do item não foi modificado. A sequência didática original pode ser observada no Anexo III, enquanto que a sequência didática com modificações encontra-se no Apêndice I.

A sequência didática foi aplicada utilizando como recurso o *software* GeoGebra. Desse modo, a sequência foi divida em três fases: a) introdutória, b) intermediária e c) avançada. Em todas essas fases, os estudantes tiveram a liberdade de elaborar seus próprios caminhos de solução. Em cada fase, também, os alunos foram orientados a analisarem as estratégias elaboradas por eles na realização de cada atividade, refletindo sobre o seu desempenho. Assim, a sequência possibilitou a reflexão do estudante acerca de suas construções, configurando-se um importante recurso analítico.

Na conclusão de cada fase, os estudantes foram orientados a entregar ao aplicador da sequência (o professor da disciplina), as fichas de atividades, que continham os seus registros escritos. É importante destacar que o GeoGebra possui a opção de gravar (salvar) as ações realizadas pelos alunos. Então, as atividades de cada aluno foram gravadas (salvas) em dispositivo portátil de armazenamento (*HD externo*), ação que nos possibilitou fazer um acompanhamento e uma apreciação das produções dos estudantes no desenvolvimento das atividades.

Para analisar o progresso dos alunos, no que diz respeito aos seus níveis de pensamento geométrico, utilizamos um pré-teste e um pós-teste, objetivando verificar em quais níveis de pensamento geométrico estavam os estudantes antes da pesquisa, e também, depois dela. Tal teste será explicitado mais a frente.

Para ajudar na análise das ações das duplas de alunos, foram realizados registros de filmagem das atividades propostas no laboratório de Informática, desenvolvidas por uma dupla de alunos, nas diversas situações de aprendizagem. Como dito anteriormente, não foi possível analisamos os dados produzidos pelas filmagens e pelas gravações, em decorrência do barulho da turma investigada.

A seguir, discutiremos sobre as atividades referentes às três fases da sequência didática. Destacamos que consideramos também a análise realizada por Câmara dos Santos (2001) sobre a sequência didática.

5.5.1 Primeira fase – introdutória

Essa fase, constituída por três atividades, objetiva promover a manipulação dos componentes do GeoGebra, sendo que os conceitos abordados são: ponto médio, paralelismo e perpendicularismo. A finalidade aqui é a familiarização dos estudantes com o *software* supracitado.

Atividade 01 – Ponto Médio e Paralelismo

a) Considere um segmento de reta *MN*.

b) Considere um ponto *P* na metade do segmento de reta *MN*.
c) Mova o ponto *P*, e verifique se ele permanece na metade do segmento de reta *MN*.
d) Mova os pontos *M* e *N* e analise o que ocorre. Registre suas considerações:

e) Escolha um ponto *Q*, fora do segmento de reta *MN*.
f) Escolha uma reta paralela ao segmento de reta *MN*, passando por *Q*.
g) Mova os pontos *M*, *N* e *Q*, analisando o que ocorre.

h) Grave o arquivo como A01.pf

A atividade 01 tem por finalidade introduzir o estudante no GeoGebra, além de construir a noção de ponto médio como um componente que surge por meio de propriedades geométricas, e iniciá-lo na construção de paralelas. Desse modo, a orientação de se ter o ponto *P* na metade do segmento de reta *MN,* objetiva não levar o estudante a procurar o recurso ponto médio na barra de *menu*, mas possibilitar que o aluno construa o ponto, posicionando em um local de modo que visualmente ele aparenta estar na metade do segmento de reta *MN*.

O item *c* da questão pretende validar o que o estudante construíra anteriormente. Para tanto, ao determinar o ponto médio por meio do aspecto visual, ao mover esse ponto, o aluno não conseguirá estabelecer a equidistância entre os extremos do segmento de reta, pois o ponto marcado muda de posição em relação aos extremos *M* e *N*. No entanto, se o estudante estabelecer esse ponto por meio de uma propriedade não visual, o deslocamento não ocorrerá.

O item *f* objetiva promover familiaridade do estudante com a construção de paralelas, por meio do uso deste recurso na barra de menu. O item *g* possibilita que o aluno verifique sua construção, possibilitando que ele realize alguma correção que julgar ser necessária. Isso é válido, pois se a construção da reta paralela não tiver ocorrido por meio de uma relação com o ponto *Q*, a reta paralela construída não manterá as propriedades almejadas.

Atividade 02 – Simétrico de um ponto em relação a outro

a) Considere os pontos *M* e *Q*.
b) Considere a reta *a* que passa por *M* e *Q*.
c) Escolha um ponto *N* da reta *a* diferente de *M*, de modo que a distância de *M* até *Q* seja a mesma de *Q* até *N*.
d) Aproxime o ponto *M* do ponto *Q*.
e) O ponto *N* se aproxima também?
f) Em caso negativo, elimine o ponto *N*, considere outro e tente novamente.
g) Comente como você criou o ponto *N*, de modo que atenda a condição necessária:

h) Grave o arquivo como A02.pf

A Atividade 02 pretende iniciar o aluno na noção de ponto simétrico em relação a outro ponto, sendo que essa noção será empregada para analisar se as diagonais dos paralelogramos se interceptam ao meio. No item (c) busca-se que os estudantes façam a representação do ponto *N* por meio do aspecto visual, mantendo distâncias visuais iguais. Assim, o item (d) e o item (e) pretendem desequilibrar os discentes, gerando um conflito, possibilitando que elaborem outro caminho de resolução. Agora, para analisar a equidistância entre o ponto *N* e os pontos *M* e *Q*, os estudantes devem fazer uso da noção de ponto médio, que foi discutida na Atividade 01.

Atividade 03 – Perpendicularismo e Paralelismo

a) Considere os pontos *M* e *N*.
b) Considere uma reta *b* que passa por *M* e *N*.
c) Trace retas perpendiculares *a* e *b*, que passem por *M* e *N*.
d) Mova os pontos *M* e *N*.

e) O que se pode observar nas retas perpendiculares que foram construídas? Que relação há entre elas?

f) Grave o arquivo como A03.pf

A atividade 03 objetiva rever a discussão sobre paralelas e perpendiculares, além de possibilitar que o estudante analise que se duas retas são perpendiculares a uma terceira reta, então, essas retas perpendiculares são paralelas entre si. Esse aspecto é de grande relevância no estudo com os quadriláteros notáveis, do tipo retângulo e quadrado.

No término da primeira fase, na sala de aula, e no caso específico dessa pesquisa, no laboratório de Informática, é relevante que o docente sistematize o que foi trabalhado e discutido nas aulas, sobretudo da propriedade analisada na Atividade 03. Além disso, os estudantes ainda precisam observar que o aspecto visual não é suficiente para construir figuras adequadas.

5.5.2 Segunda fase – intermediária

Essa fase, composta por três atividades, pretende explorar a noção de ângulos e de construção de circunferências, auxiliando a terceira fase.

Atividade 01 – Ângulos e bissetrizes

a) Escolha um segmento de reta *MN*.
b) Considere uma reta perpendicular ao segmento de reta *MN,* pelo ponto *M*. Em seguida, trace um ponto *K* na reta construída.
c) Considere uma reta perpendicular ao segmento de reta *MN,* pelo ponto *N*. Depois, trace um ponto *W* nessa reta.

d) Mova os pontos da figura e analise se as retas permanecem perpendiculares ao segmento *MN*. Reinicie a construção se não permanecerem como perpendiculares.

e) Que relação há entre os ângulos $K\hat{M}N$ e $W\hat{N}M$? Eles são iguais? Qual a medida deles?

f) Escolha um segmento de reta *AB*.

g) Crie o ângulo *PÂB* de modo que ele meça 45º.

h) Mova os componentes de sua figura, se a medida do ângulo modificar, reconstrua a figura.

i) Comente como você fez para ter o ângulo de 45º.

j) Grave o arquivo como B01.sf

A atividade 01 da segunda fase objetiva explorar a construção de ângulos e suas medidas, além de iniciar a noção de bissetriz. A opção das perpendiculares se justifica pelo evento de explorar-se, sobretudo, com ângulos retos, no caso dos quadrados e dos retângulos. Além disso, a noção de bissetriz abordada nos itens *f*, *g* e *h*, ainda nasce por meio do ângulo reto, servindo então como apoio para se obter o ângulo de 45º ao se construir o ângulo de 90º.

É importante destacar que ao orientar os alunos a moverem as figuras da tarefa, o que se pretende obter é a validação do que foi construído a partir das propriedades, além de romper com a compreensão presente de que dos ângulos são iguais se somente estiverem na mesma posição, no que se refere à borda da folha de papel.

Atividade 02 – Noção de circunferência

a) Crie um ponto *K* e uma reta *a,* passando por ele.

b) A partir do ponto *K*, crie a reta perpendicular à reta *a*, passando pelo ponto *K*. Nomeie a reta construída por *b*.

a) Na reta *a*, estabeleça dois pontos *M* e *N* de modo que a distância do ponto *K* até o ponto *M* seja igual à distância do Ponto *K* ao ponto *N* (*KM=KN*).

b) Sobre a reta *b*, estabeleça dois pontos *P* e *Q* de modo que (*KM=KN=KP=KQ*).

c) Desloque os pontos da figura e analise a relação estabelecida entre eles. O que ocorre com essa relação? Há alguma modificação? Em caso positivo, reinicie.

d) Considere outros três pontos (*R, S* e *T*) de modo que a relação de distâncias (*KM=KN=KP= ... =KS=KT*) seja mantida.

e) O que se pode afirmar acerca dos pontos *M, N, P, Q, R, S* e *T,* em referência ao ponto *K*? Observe a região do plano formada por todos esses pontos. Como poderíamos chamá-la de modo que a relação de distâncias seja satisfeita?

f) Grave o arquivo como B02.sf

O objetivo dessa atividade é trabalhar a construção da noção de circunferência como o lugar geométrico dos pontos que estabelece a relação de equidistância com um dado ponto. Em geral, a ideia de circunferência é explorada com os alunos, no entanto, a relação de equidistância é pouco trabalhada em sala de aula, evidenciando-se a questão visual do formato da circunferência. Essa noção de circunferência é essencial para o trabalho com construções de quadrados e losangos, por meio de seus lados.

No término da tarefa, no ambiente de sala de aula, é importante que o docente trabalhe a construção o conceito de circunferência, considerando a noção estabelecida acima.

Atividade 03 - Equidistância

a) Crie três pontos *M, N* e *P* não alinhados.
b) Considere o ponto *K*, de modo que ele esteja à mesma distância dos pontos *M, N* e *P*.
c) Mova os pontos da figura e analise se eles permanecem com a mesma distância. Em caso negativo, reinicie.
d) Justifique sua resolução do problema.

e) Grave o arquivo como B03.sf

O objetivo dessa atividade é fazer que o estudante determine o centro de uma circunferência por meio de três pontos dela. A noção de ponto médio, determinada na Atividade 01 da primeira fase, contribui para retomar o conceito de mediatriz. Dito de outra forma, o estudante deverá estabelecer a equidistância dados os pontos determinados, considerados dois a dois, ponderando que todos os pontos que estão sobre cada uma das mediatrizes possuem a mesma distância.

Além disso, ao término da tarefa, em situação de sala de aula, é fundamental que o docente sistematize a aquisição do centro de uma circunferência pelo encontro de duas mediatrizes.

5.5.3 Terceira fase – avançada

A terceira fase, que é formada por um total de oito atividades do tipo situações-problema, compreende a exploração efetiva dos quadriláteros notáveis (retângulo, quadrado, losango, paralelogramo e trapézio), bem como de suas propriedades. As atividades propostas nesse momento exigem do docente um especial cuidado, no sentido de incentivar os estudantes a procurarem suas próprias resoluções para as tarefas. Além disso, o docente deve estimular os estudantes a empregarem o GeoGebra para validarem suas construções, a partir da movimentação dos pontos das figuras.

Atividade 01 – Paralelogramo

a) Crie três pontos *M, N* e *P* não alinhados.
b) Crie o paralelogramo *MNPQ*.
c) Mova os vértices do paralelogramo. Observe se ele permanece um paralelogramo, e em caso negativo, reinicie a construção.
d) Determine a medida dos lados e dos ângulos do paralelogramo *MNPQ*.
e) Mova os vértices do paralelogramo, analisando o que ocorre.

f) Considere o ponto *C*, centro do paralelogramo.
g) Crie e determine as medidas dos segmentos *MC, NC, PC* e *QC*.
h) Mova os pontos do paralelogramo, analisando o que ocorre.

i) Grave o arquivo como C01.tf

Essa atividade pretende construir o paralelogramo por meio de três de seus vértices, que em geral, pode não representar grandes dificuldades para o estudante. Na alternativa *f* é apresentado um momento de conflito, por meio do qual os estudantes devem compreender que o centro do paralelogramo se localiza no ponto de intersecção de suas diagonais.

Além disso, essa etapa é um momento de constatação, no qual o estudante averiguará que "*as diagonais de um paralelogramo interceptam-se ao meio, para todo paralelogramo*", isso por meio da determinação das medidas e da movimentação dos pontos.

Um estudante que esteja no segundo nível vanhieliano, isto é, que seja capaz de reconhecer as figuras geométricas como detentoras de propriedades, poderá responder a questão da seguinte forma: primeiramente, o aluno cria os três pontos solicitados (*M, N* e *P*). Em seguida, por meio do recurso "Reta definida por dois pontos", ele constrói a reta *a* que passa pelos pontos *M* e *N*. Com o recurso "Reta perpendicular" cria a reta *b*, que passa pelos pontos *N* e *P*, perpendicular a reta *a*. A seguir, por meio do “Reta paralela”, o estudante estabelece a reta *c*, paralela à reta *a,* e que passa pelo ponto *P*; e também a reta *d*, paralela à reta *b*, que passa pelo ponto *M,* e corta a reta *c* no ponto *Q*. No resultado dessa construção temos o paralelogramo *MNPQ*.

Em seguida, por meio dos recursos “Distância, comprimento ou perímetro” e “Ângulos”, o aluno determina as medidas dos comprimentos dos lados e dos ângulos do paralelogramo *MNPQ*. Nesse momento, o aluno poderá mobilizar algumas propriedades do paralelogramo, como “*os seus lados opostos são paralelos*”, “*os seus lados opostos são congruentes*”, “*os seus ângulos opostos são congruentes*”, etc. Uma importante propriedade dos quadriláteros, que o estudante também poderá observar, é que “a soma dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360º”.

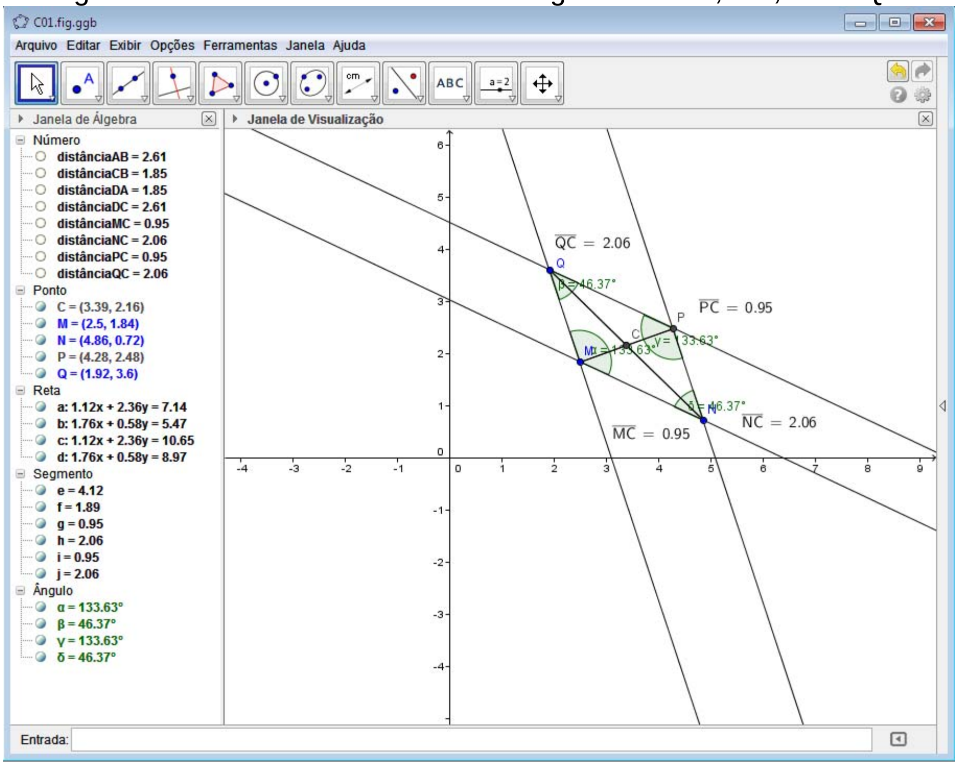
Posteriormente, para determinar o ponto *C*, centro do paralelogramo, o aluno estabelecerá as diagonais desse quadrilátero notável, por meio do recurso “Segmento definido por dois pontos”, e em seguida, determinará o ponto *C* a partir do “Interseção de dois objetos”.

Finalmente, medirá os comprimentos dos lados *MC, NC, PC* e *QC* com o recurso “Distância, comprimento ou perímetro”. Nesse momento, o aluno concluirá que o centro do paralelogramo se encontra na intersecção das diagonais, e a partir da medição dos segmentos, ele verificará que “*em todo paralelogramo, as diagonais cortam-se ao meio*”, como apresentado pela Figura 21.

Agora, um aluno que esteja no primeiro nível de Van-Hiele, ou seja, que reconhece as figuras geométricas apenas em função de suas aparências e não por suas propriedades, poderá responder o problema do seguinte modo: inicialmente, o aluno constrói os três pontos dados (*M, N* e *P*). Em seguida, ele cria o ponto *Q* e liga os pontos, formando o paralelogramo *MNPQ*.

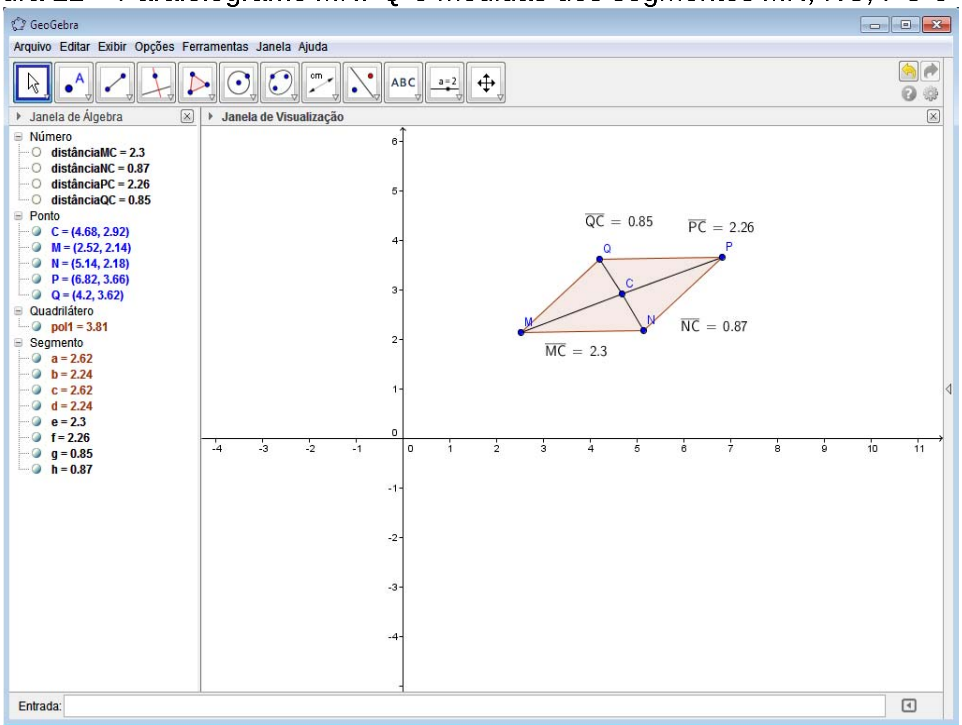
Dando continuidade à construção, o estudante determina o ponto *C*, centro do paralelogramo, e posteriormente, cria os segmentos *MC, NC, PC* e *QC* (Figura 22) por meio do recurso “Segmento” do *software*, ligando os pontos. No final, esses segmentos são medidos a partir do recurso “Distância, comprimento ou perímetro”.

Figura 21 – Ponto *C* e medidas dos segmentos *MC, NC, PC* e *QC*



Fonte: Autoria própria.

Figura 22 – Paralelogramo *MNPQ* e medidas dos segmentos *MN, NC, PC* e *QC*



Fonte: Autoria própria.

É importante reforçar que nesse caso, o aluno considerou como parâmetro, para a construção, a aparência do paralelogramo, que corresponde ao primeiro nível vanhieliano. Van-Hiele (1957) discute que nesse nível a criança é capaz, por exemplo, de reconhecer um quadrado ou um retângulo, e até de reproduzi-los sem falhas, porém, um quadrado não é reconhecido como um retângulo.

Assim, no caso do paralelogramo, o aluno pode reconhecê-lo e reproduzi-lo sem erros, mas, por exemplo, ele ainda não consegue perceber que "*em todo paralelogramo, as diagonais cortam-se ao meio*".

Ainda no primeiro nível de Van-Hiele, se o estudante não for capaz de reconhecer o paralelogramo pela sua aparência, ele poderá produzir outro tipo de quadrilátero notável ou até mesmo outra figura geométrica que não corresponde a um quadrilátero notável. Tal fato foi observado nas pesquisas desenvolvidas por Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b).

Nesse sentido, o aluno poderá construir um trapézio ou um quadrado, considerando essas figuras como paralelogramo. Desconsideramos aqui que o aluno construiria um retângulo ou um losango, pois aparentemente é um paralelogramo[22].

O estudante também poderá construir outra figura que não se configura como paralelogramo. Nesse sentido, poderá produzir um triângulo, uma circunferência ou um polígono com cinco ou mais lados. Tal fato exige um estudo mais refinado para compreender o que levou o aluno a desenvolver tais construções.

Atividade 2 – Retângulo I

a) Crie um segmento de reta *MN*.
b) Crie um retângulo *MNPQ*.
c) Mova os pontos *M, N, P* e *Q*. Observe se ele permanece um retângulo, e em caso negativo, reinicie a construção.
d) Justifique por que a figura construída é um retângulo.

---

[22] Se analisamos as propriedades do retângulo e do losango, veremos que eles são paralelogramos.

e) Grave o arquivo como C02.tf

Essa atividade consiste em uma tarefa clássica de construção de retângulos por meio da construção de perpendiculares e paralelas, que geralmente não representa grandes dificuldades para o estudante. Na letra *d*, o estudante pode apelar para a definição clássica de retângulo, pela existência de quatro ângulos retos, para explicar a sua produção.

Se o aluno estiver no segundo nível de Van-Hiele, ou seja, é capaz de reconhecer o retângulo por meio de suas propriedades, ele poderá responder o problema do seguinte modo: primeiramente, o aluno constrói os dois pontos solicitados (*M* e *N*) e, em seguida traça o segmento *MN* por meio do recurso “Segmento definido por dois pontos”. Depois, a partir do “Reta perpendicular”, ele constrói as retas perpendiculares *a* e *b* que passam pelos pontos *M* e *N*, respectivamente. Posteriormente, o aluno traça a reta *c*, paralela ao segmento de reta *MN*, que intercepta as retas *a* e *b* nos pontos *Q* e *P*, respectivamente. Como resultado dessa construção tem-se o retângulo *MNPQ* (Figura 23).

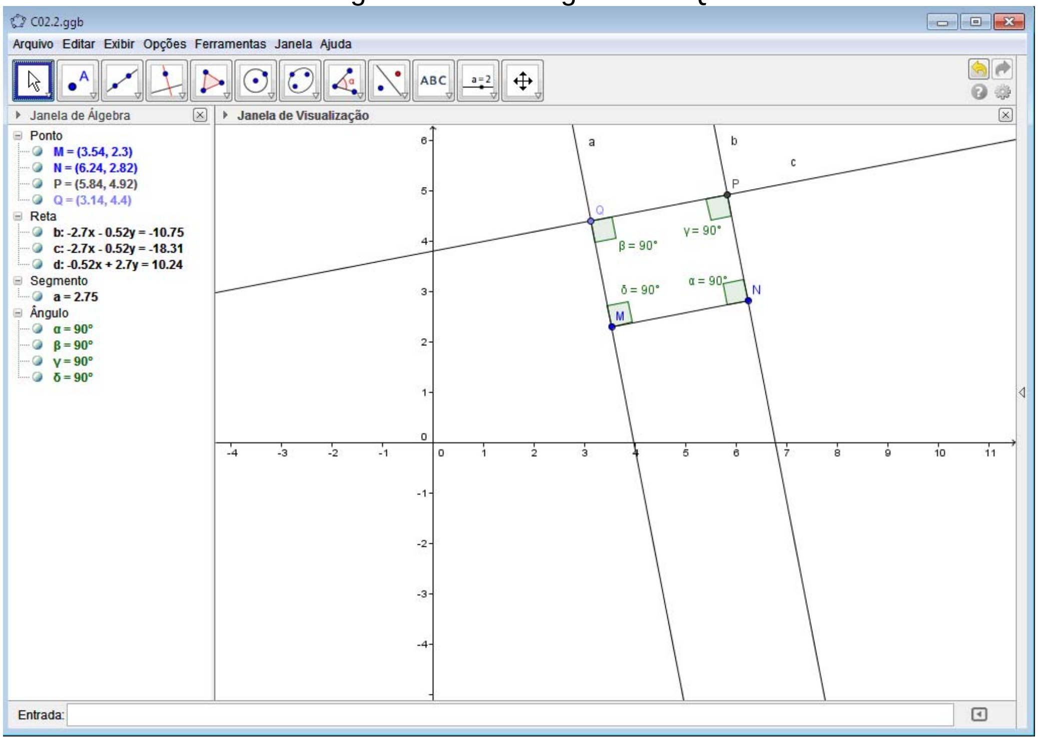
Nessa construção do retângulo, o aluno utilizará, além da definição de retângulo (que apresenta quatro ângulos retos), a construção de perpendiculares e paralelas. Isso é válido, pois o aluno encontra-se no segundo nível de Van-Hiele.

Um aluno que esteja no primeiro nível da teoria de Van-Hiele, isto é, que reconhece o retângulo por sua aparência, poderá responder esse problema da seguinte forma:

Inicialmente, o estudante constrói os dois pontos dados (*M* e *N*) e, em seguida, cria os pontos *N* e *P*. Depois, ele liga os pontos, formando um retângulo, o *MNPQ* (Figura 24).

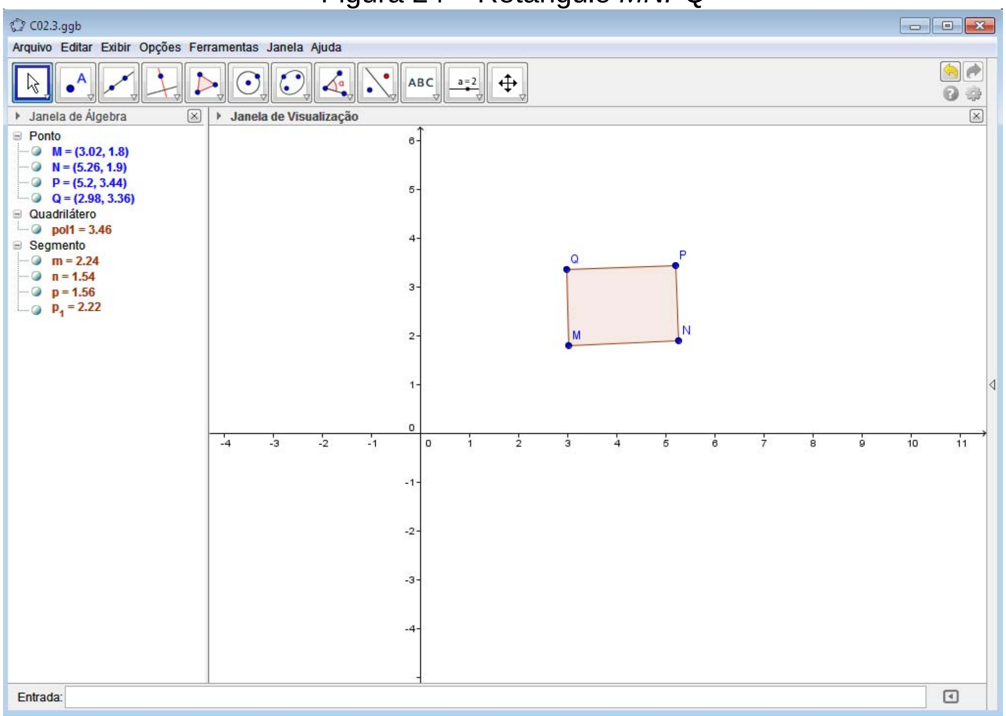
Também no primeiro nível vanhieliano, se o aluno não for capaz de reconhecer o retângulo pela sua aparência, ele poderá construir outro tipo de quadrilátero notável ou ainda outra figura geométrica que não corresponda a um quadrilátero notável.

Figura 23 – Retângulo *MNPQ*



Fonte: Autoria própria

Figura 24 – Retângulo *MNPQ*



Fonte: Autoria própria

Dificilmente o aluno construirá um quadrado, pois segundo Van-Hiele (1957), o aluno que reconhece um quadrado como um retângulo está no terceiro nível da sua teoria, no qual ocorre a ordenação das propriedades das figuras geométricas. Nesse caso, o aluno poderá produzir um losango ou um paralelogramo. Isso decorre de esses quadriláteros notáveis também apresentarem quatro lados, assim como o retângulo. O trapézio também poderá ser considerado retângulo pelo estudante, por apresentar a mesma característica mencionada.

O aluno ainda poderá construir outra figura que seja um quadrilátero notável. Assim, poderá construir um triângulo, uma circunferência ou um polígono com cinco ou mais lados. Da mesma forma como no caso do paralelogramo (questão anterior), tal fato necessita um estudo mais aprofundado para entender o que fez o estudante a realizar essas produções.

Atividade 03 – Retângulo II

a) Crie um segmento de reta *RS*.
b) Considere um retângulo de modo que *RS* seja sua diagonal.
c) Mova os pontos *R* e *S*. Observe se a figura permanece um retângulo, e em caso negativo, reinicie a construção.
d) Justifique por que sua produção é um retângulo.
e) Grave o arquivo como C03.tf

Essa atividade busca promover um desequilíbrio, por meio de uma situação em que os estudantes demonstram determinada disposição a produzir o segmento de reta *RS* na posição horizontal, de acordo com o nível de evolução do pensamento geométrico em que estejam. Tal fato pode fazer com que alguns estudantes reconheçam *RS* com um dos lados do retângulo, ao invés de sua diagonal.

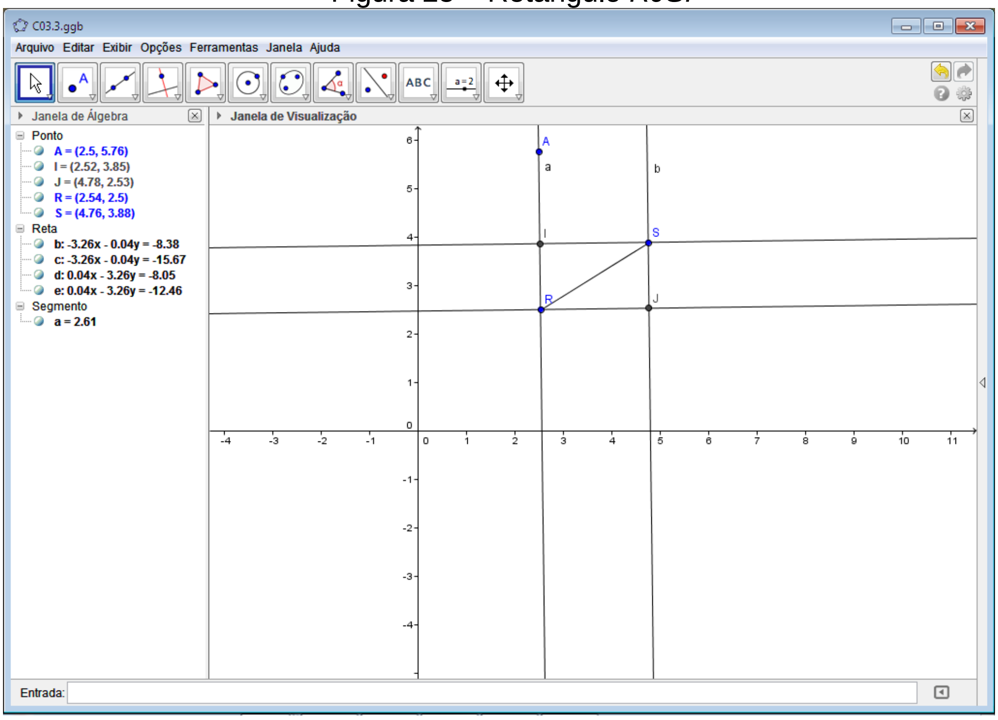
A resolução desse problema necessita a construção de um ângulo reto fora do segmento de reta construído *RS*. Nesse sentido, o estudante deve criar uma reta qualquer passando por um dos pontos fornecidos para, depois, estabelecer a paralela a essa reta contendo o outro ponto criado.

Estando no segundo nível vanhieliano, o estudante é capaz de solucionar problema da seguinte forma:

Após construir os pontos *R* e *S*, o aluno constrói uma reta *a*, por um dos pontos fornecidos, por exemplo, no ponto *R*. Em seguida, ele desenha a paralela a essa reta, reta *b*, que passa pelo outro ponto construído, o ponto *S*.

Posteriormente, o aluno traça duas retas perpendiculares às retas *a* e *b*, formando o retângulo *RJSI* (Figura 25).

Figura 25 – Retângulo *RJSI*



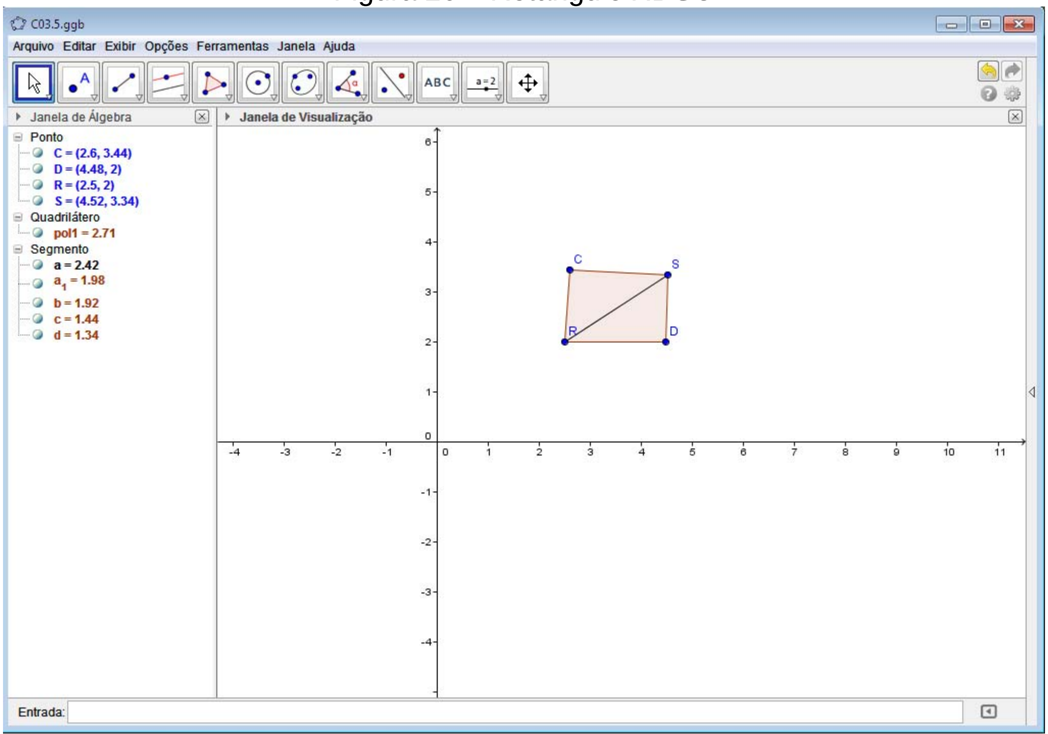
Fonte: Autoria própria

Um estudante que esteja no primeiro nível de Van-Hiele poderá resolver essa questão do seguinte modo: primeiramente, o estudante constrói os dois pontos solicitados (*R* e *S*), e em seguida, produz os pontos *C* e *D*. Depois, ele liga os pontos *R, D, S* e *C* (construindo os segmentos relativos aos lados), formando o retângulo *RDSC* (Figura 26).

O aluno também confundir a diagonal com um dos lados do retângulo. Nesse sentido, ele pode resolver a questão de duas formas: a) sem utilizar a construção de perpendiculares e paralelas (Figura 27) e b) com a utilização de perpendiculares e paralelas (Figura 28).

O aluno pode desenhar outros tipos de quadriláteros notáveis, considerando-os como retângulos no que se refere à aparência. Além disso, podem confundir a diagonal com um dos seus lados. Entre esses quadriláteros notáveis, mencionamos: paralelogramo, losango, quadrado e o trapézio.

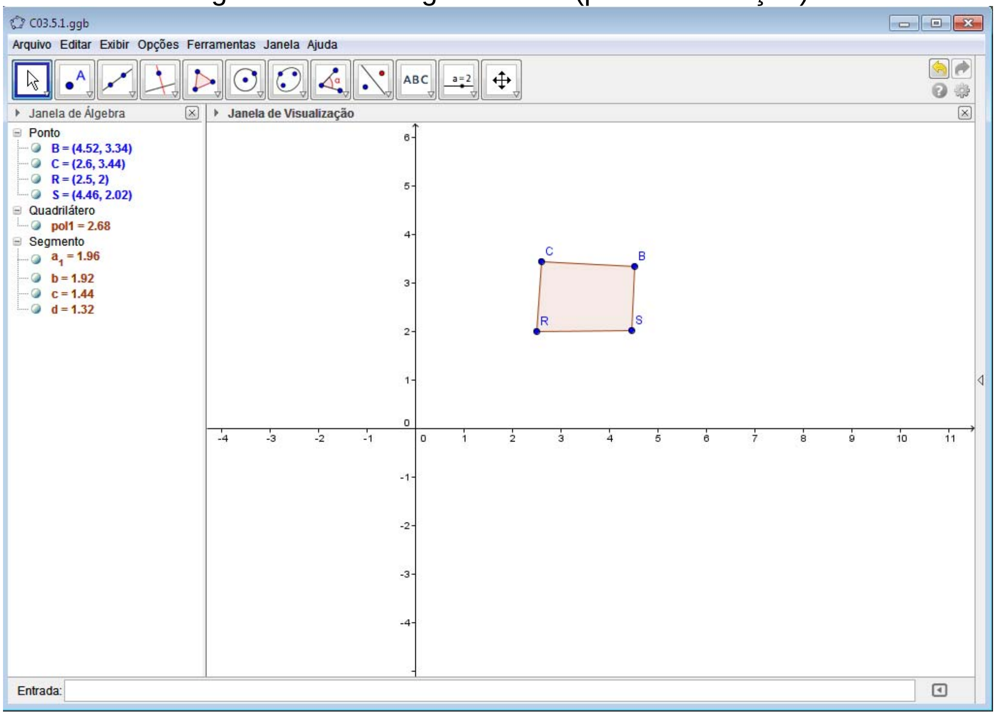
Figura 26 – Retângulo *RDSC*



Fonte: Autoria própria

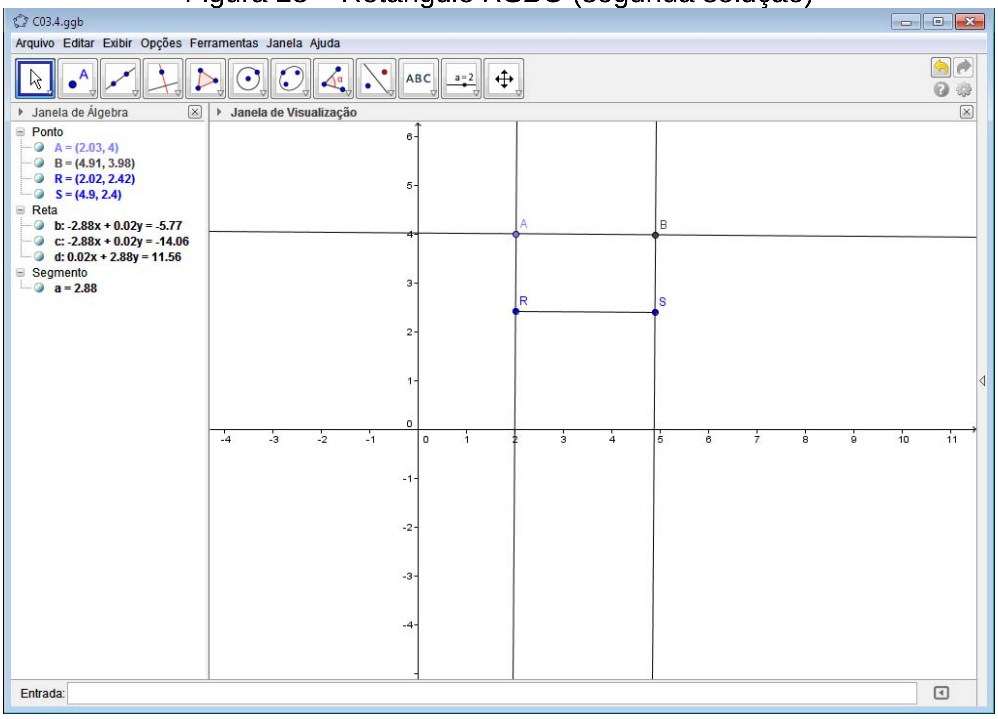
Além disso, o aluno ainda poderá construir outras figuras geométricas que não se configuram como quadriláteros notáveis, como o triângulo, a circunferência e um polígono com cinco ou mais lados. Do mesmo modo como nos casos anteriores, ele poderá confundir a diagonal com um dos lados da figura.

Figura 27 – Retângulo *RSBC* (primeira solução)



Fonte: Autoria própria

Figura 28 – Retângulo *RSBC* (segunda solução)



Fonte: Autoria própria

Atividade 04 – Quadrado I

a) Crie um segmento de reta *MN*.
b) Considere um quadrado *MNPQ*.
c) Mova os pontos *M, N, P* e *Q*. Observe se a figura permanece um quadrado, e em caso negativo, reinicie a construção.
d) Justifique por que sua produção é um quadrado.

e) Grave o arquivo como C04.tf

Nessa atividade, a definição do quadrado produzida na escola, "*de que um quadrado é um paralelogramo que apresenta os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos*", é aceitável para a solução do problema. Além disso, os conceitos de perpendiculares, paralelas e de circunferência, trabalhados nas duas primeiras fases da sequência, são explorados nessa tarefa.

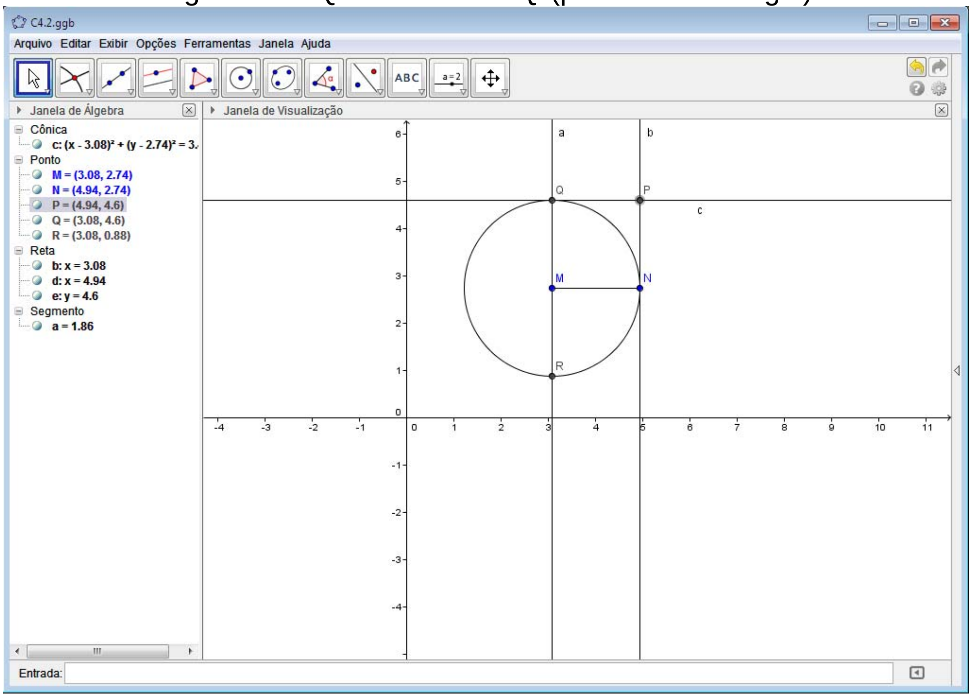
Estando no segundo nível da teoria de Van-Hiele, o aluno poderá resolver a atividade por meio de duas estratégias. Na primeira estratégia, o estudante explora, primeiramente, as noções de congruência de dois lados e de ângulo reto.

Após construir um segmento de reta *MN*, o aluno estabelece a circunferência de centro *M* e raio *MN* (congruência de lados), por meio do recurso "Círculo dados centro e um de seus pontos" do GeoGebra. Em seguida, o estudante constrói as retas:

- *a*, perpendicular ao segmento de reta *MN*, que passa pelo ponto *M* (ângulo reto $N\hat{M}Q$) e que corta a circunferência nos pontos *Q* e *R*;
- *b,* também perpendicular a *MN*, mas, passando pelo ponto *N*.

Depois, ele estabelece a reta *c*, paralela ao segmento *MN*, que passa pelo ponto *Q* e intercepta a reta *b* no ponto *P*, formando assim o quadrado *MNPQ* (Figura 29).

Figura 29 – Quadrado *MNPQ* (primeira estratégia)



Fonte: Autoria própria

Na segunda estratégia, o aluno mobiliza as noções de congruência de três lados (*MN, MQ* e *NP*) e de dois ângulos retos ($N\hat{A}Q$ e $M\hat{N}P$).

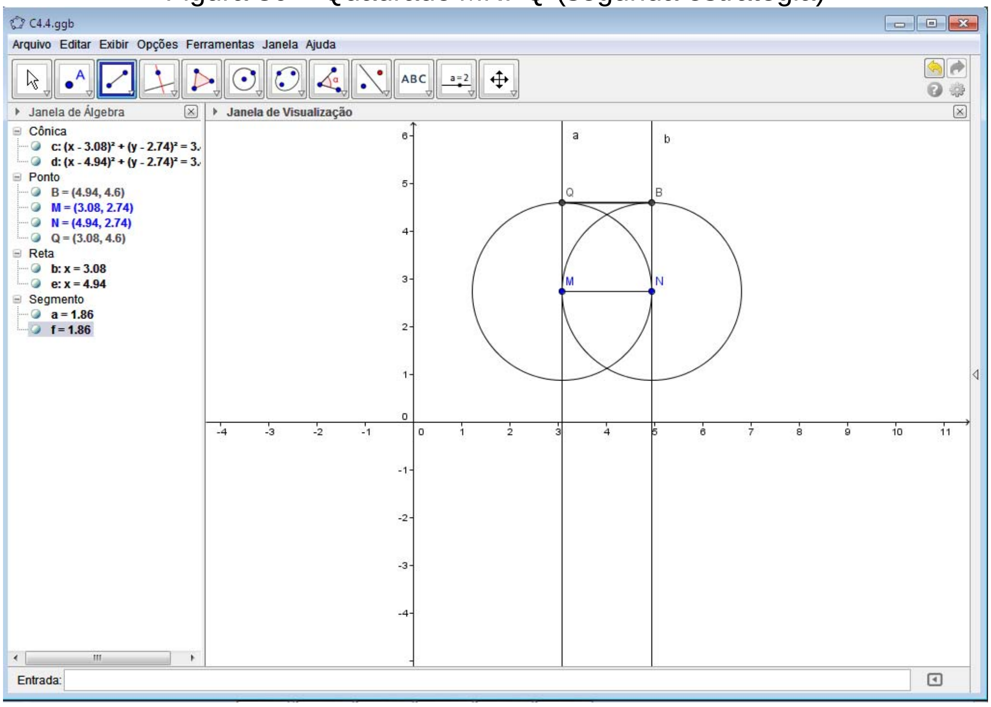
A partir do segmento *MN*, ele constrói a circunferência de centro *M* e raio *MN* e a circunferência de centro *N* e raio *NM*. Posteriormente, o estudante estabelece as retas *a* e *b*, que são perpendiculares ao segmento de reta *MN*, passando pelos pontos *M* e *N*, respectivamente, e cortando as duas circunferências nos pontos *Q* e *P*. Finalmente, ele cria o segmento de reta *PQ* para formar o quadrado *MNPQ* (Figura 30).

Um aluno que esteja no primeiro nível vanhieliano, que reconhece o quadrado apenas pela sua aparência, poderá resolver esse problema da seguinte forma:

Inicialmente, o aluno estabelece o segmento de reta dado *MN,* e em seguida, cria os pontos *P* e *Q*. Para finalizar o trabalho, ele liga os pontos *M, N, P* e *Q*, gerando o quadrado *MNPQ* (Figura 31).

Caso o aluno não reconheça ainda o quadrado pela sua aparência, ele poderá construir outros tipos de quadriláteros notáveis, como o trapézio, o retângulo, o losango e o paralelogramo. Também, poderá criar outras figuras geométricas que não se constituem quadriláteros notáveis, como o triângulo, a circunferência ou um polígono com cinco ou mais lados.

Figura 30 – Quadrado *MNPQ* (segunda estratégia)

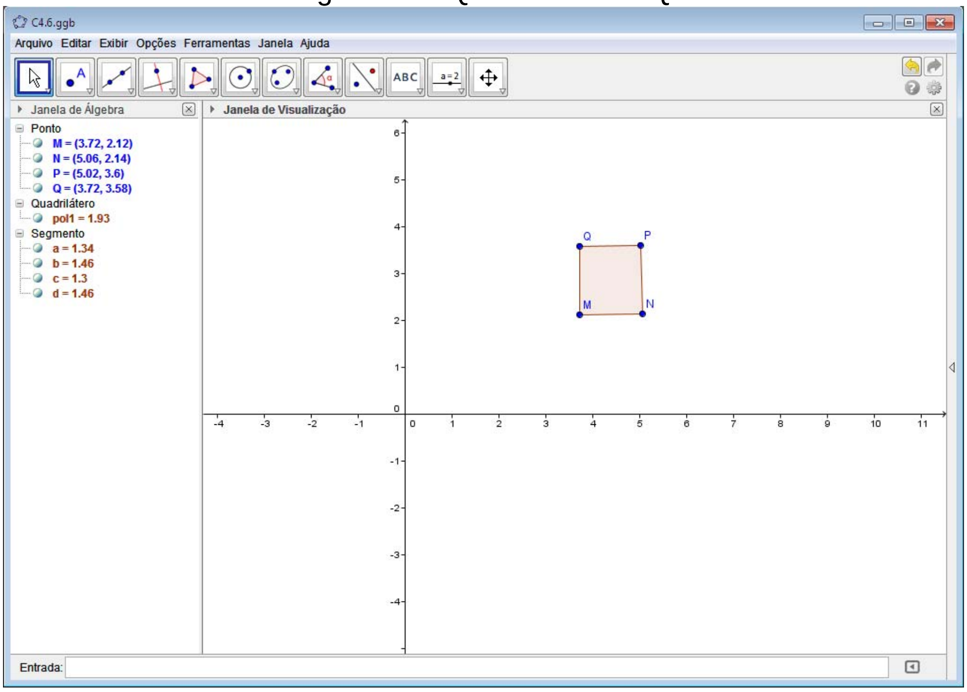


Fonte: Autoria própria

Van-Hiele discute que se o aluno considerar o quadrado como um retângulo, ou como losango ou paralelogramo, ele não estará mais no primeiro nível do modelo, pois é capaz de ordenar logicamente as propriedades desses quadriláteros notáveis, estabelecendo relações entre elas (característica do terceiro nível).

Nesse sentido, um aluno do primeiro nível, que ao ser solicitado para construir um quadrado, produz outro quadrilátero notável (um retângulo ou um losango ou um paralelogramo ou um trapézio), então, ele ainda não é capaz de reconhecer visualmente essa figura. Dessa forma, sua produção pode ser resultado, por exemplo, de um “chute”. Assim, é necessário um estudo mais refinado, para se compreender os reais motivos que levaram esse aluno a realizar tal construção.

Figura 31 – Quadrado *MNPQ*



Fonte: Autoria própria

Atividade 05 – Quadrado II

a) Crie um segmento de reta *MN*.

b) Considere um quadrado *MONA*, de maneira que *MN* seja sua diagonal.

c) Mova os vértices do quadrado. Observe se a figura permanece um quadrado, e em caso negativo, reinicie a construção.

d) O que se pode afirmar acerca de sua produção?

e) Grave o arquivo como C05.tf

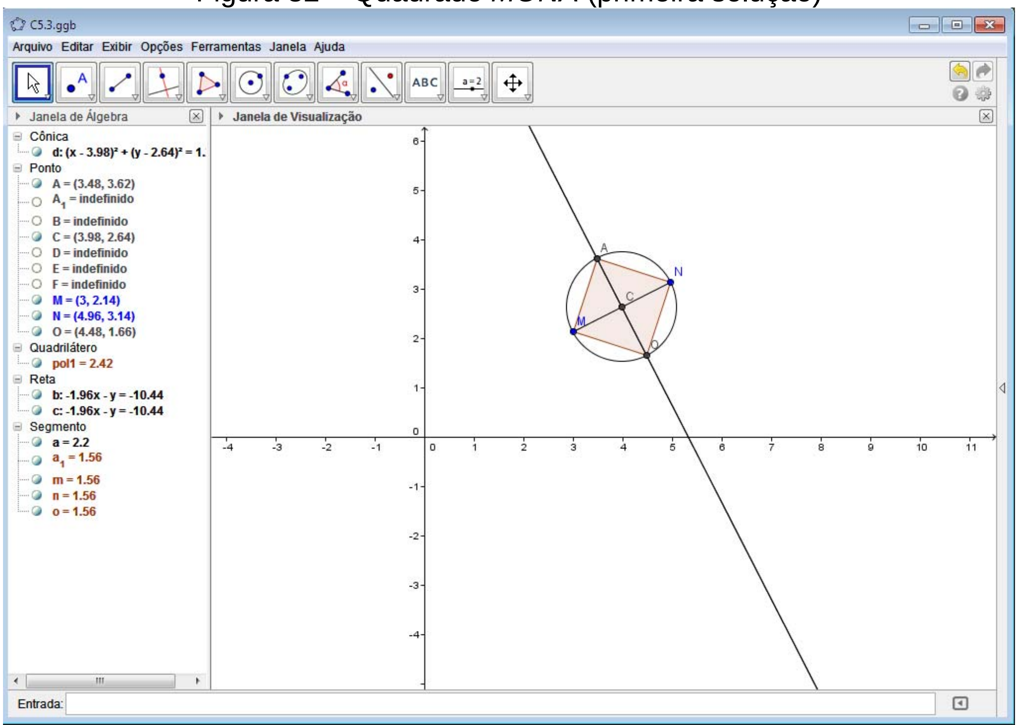
Um estudante que esteja no segundo nível vanhieliano poderá solucionar essa atividade por meio da seguinte estratégia:

Após construir o segmento de reta dado *MN*, o estudante obtém a mediatriz desse segmento de reta, como a finalidade de mobilizar a perpendicularidade das diagonais do quadrado. Nesse sentido, por meio do recurso “Ponto médio ou centro", ele estabelece o ponto médio do segmento de reta *MN*, o ponto *C*, no qual traça a reta perpendicular *a.* Em seguida, constrói a circunferência de centro *C* e raio *CN* (ou raio *CM*).

Observemos que a circunferência construída corta a reta *a* nos pontos *O* e *A*, que correspondem aos outros vértices do quadrado. Dessa forma, o segmento *AO* consiste na outra diagonal do quadrado.

Para finalizar a tarefa, o aluno estabelece o quadrado *MONA* (Figura 32), ligando os pontos *M, O, N* e *A*, por meio do recurso "Polígonos".

Figura 32 – Quadrado *MONA* (primeira solução)



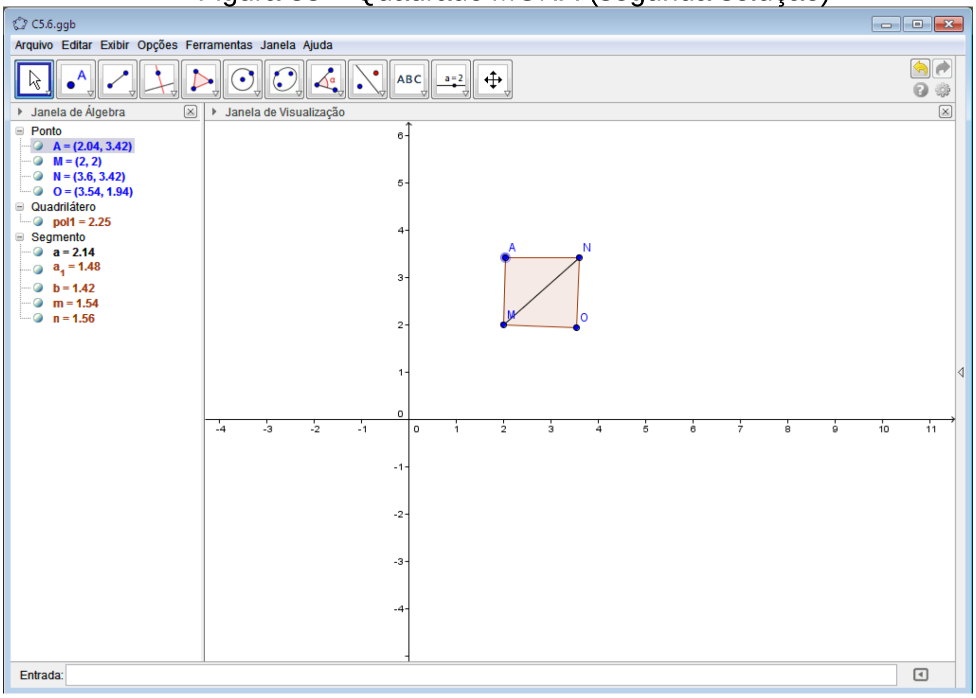
Fonte: Autoria própria

É importante destacar que, por meio dessa estratégia, o estudante explora as propriedades das diagonais do quadrado como recurso para a solução da tarefa.

Estando no primeiro nível da teoria de Van-Hiele, o aluno poderá apresentar a seguinte estratégia de resolução de problema:

No início, após estabelecer o segmento de reta *MN*, o aluno cria os pontos *O* e *A*, de modo que eles, quando ligados, formam a outra diagonal do quadrado. Em seguida, o aluno obtém o quadrado *MONA* (Figura 33).

Figura 33 – Quadrado *MONA* (segunda solução)



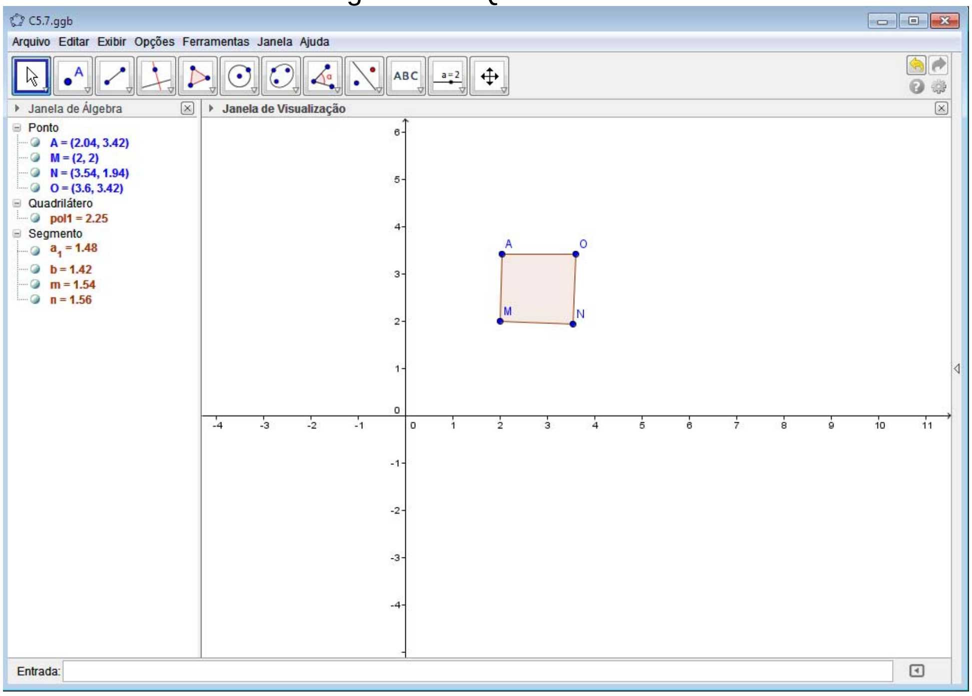
Fonte: Autoria própria

O aluno também poderá confundir a diagonal do quadrado com um dos seus lados, nesse sentido, poderá apresentar a produção ilustrada na Figura 34.

O estudante poderá construir outros tipos de quadriláteros notáveis, considerando-os como quadrados no que se refere à aparência. Além disso, podem confundir a diagonal com um dos lados do quadrilátero notável. Entre esses quadriláteros notáveis, citamos: paralelogramo, losango, retângulo e o trapézio.

O estudante também poderá produzir outras figuras geométricas que não se constituem como quadriláteros notáveis, a exemplo do triângulo, da circunferência e de um polígono com cinco ou mais lados. Além disso, ele poderá confundir a diagonal com um dos lados da figura. Outra estratégia de resolução que pode ser verificada, mas que diverge das condições determinadas no enunciado é a seguinte:

Figura 34 – Quadrado *MNOA*

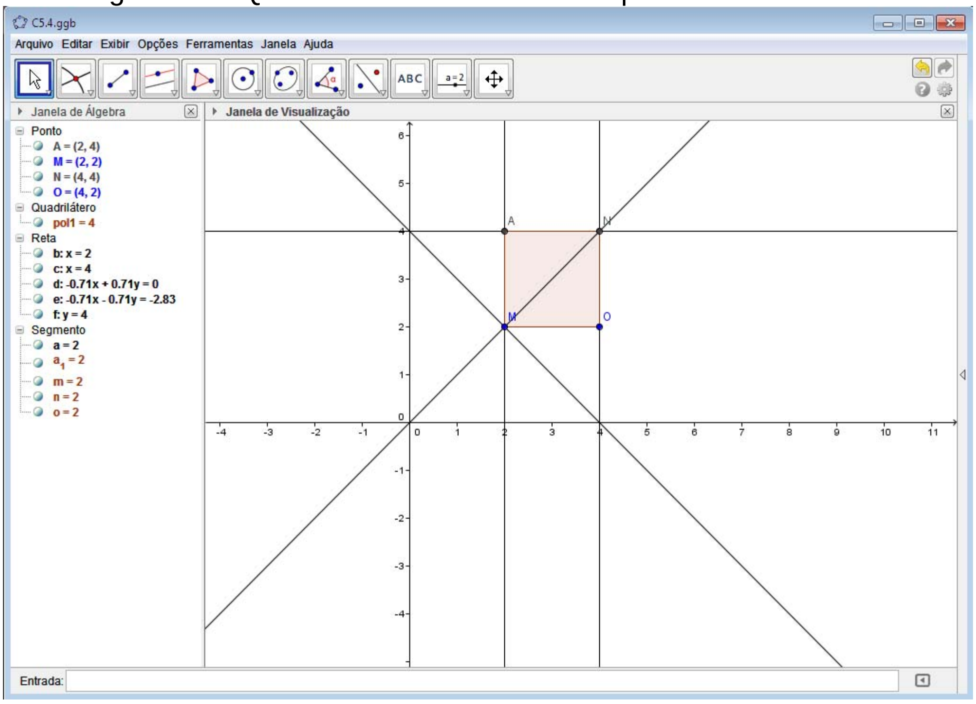


Fonte: Autoria própria

Partindo da identificação da diagonal do quadrado como a bissetriz do ângulo reto, o aluno inicia a construção pelo lado *MO* e pela bissetriz do ângulo reto $A\hat{M}O$ (Figura 35). Desse modo, ele não inicia a produção pela determinação da diagonal do quadrado. Aqui ressaltamos que apesar de essa estratégia de resolução apresentar coerência, o aluno que fizer uso dela ainda encontra-se no primeiro nível de pensamento geométrico, pois parece que ainda não consegue estabelecer a diferença entre a diagonal e o lado do quadrado.

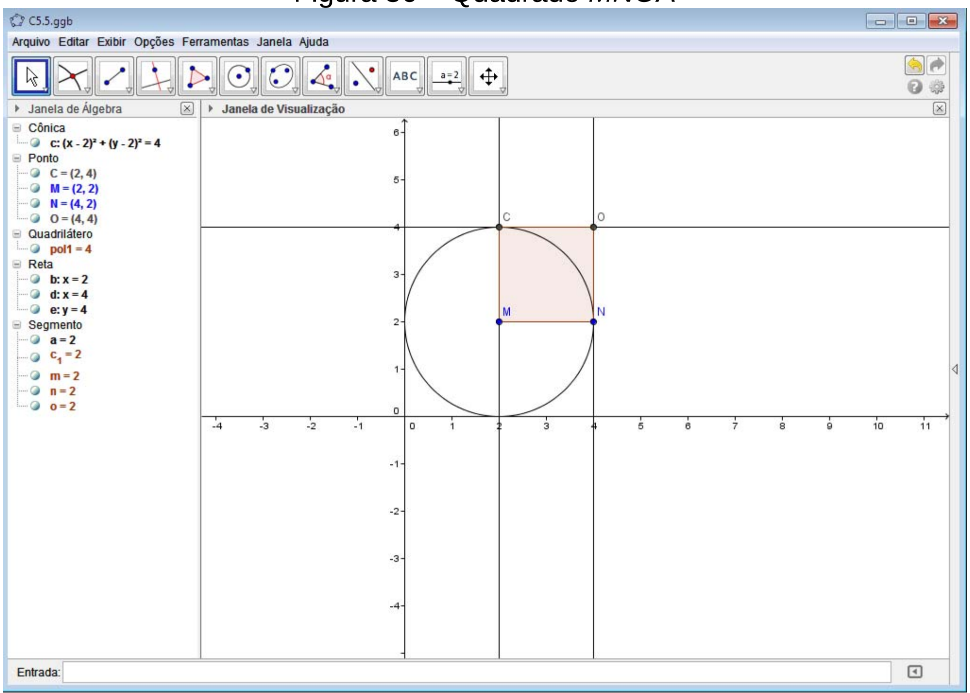
Além disso, como o aluno já havia experimentado a produção de um retângulo por meio de sua diagonal, era de se esperar que ele não empregasse o percurso de pôr o segmento de reta *MN* na horizontal e considerá-lo como um dos lados do quadrado. É possível observar, contudo, que há casos que o aluno considera ainda a aparência da figura. Assim, o aluno poderá construir o quadrado ilustrado na Figura 36. Nesse caso, é bastante evidente a necessidade de pôr em realce que o quadrado construído deverá ser denominado como *MNOA* e não como *MONA* (como solicitado no enunciado).

Figura 35 – Quadrado *MONA* construído por meio da bissetriz



Fonte: Autoria própria

Figura 36 – Quadrado *MNOA*



Fonte: Autoria própria

Atividade 06 – Quadrado III

a) Crie os pontos *R* e *C*.
b) Considere um quadrado *ROSA*, de maneira que *R* seja um dos seus vértices e *C* seja seu centro.
c) Mova os vértices do quadrado. Observe se a figura permanece um quadrado, e em caso negativo, reinicie a construção.
d) Movendo os pontos da figura, o que se pode afirmar?

e) Grave o arquivo como C06.tf

Nessa atividade, o simples emprego da definição de quadrado, comumente apresentada na escola, não consegue dar conta da produção da figura, como nos quadrados das tarefas antecedentes. Nesse sentido, é importante que o estudante estabeleça as conexões das propriedades das diagonais do quadrado, isto é, deve-se reconhecer a congruência e a perpendicularidade das diagonais, e também, que elas se interceptam em seu ponto médio, que corresponde ao centro do quadrado.

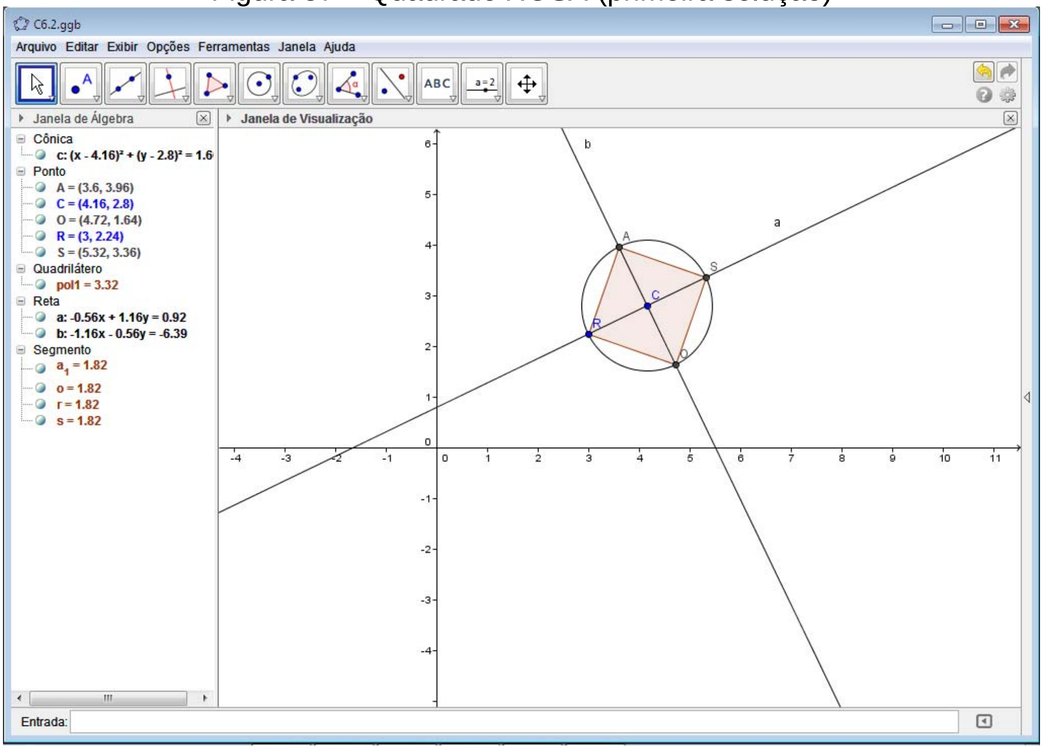
Um aluno que esteja no segundo nível de Van-Hiele e que é capaz de estabelecer as relações das propriedades das diagonais do quadrado, reconhecendo que elas são congruentes, perpendiculares e que se interceptam no ponto médio, centro do quadrado, poderá apresentar a seguinte estratégia de resolução do problema:

A estratégia a ser utilizada consiste em determinar os três outros vértices do quadrado por meio do corte da reta perpendicular à reta *RC* que passa pelo ponto *C*, e da circunferência de centro *C* e raio *RC*.

Então, inicialmente, após estabelecer os pontos solicitados *R* e *C*, o aluno constrói uma circunferência de centro *C* e raio *CR*. Em seguida, ele determina uma reta *a*, que passa pelos pontos *R* e *C*, dividindo a circunferência ao meio, interceptando-a, assim, nos pontos *R* e *S*.

Para finalizar o trabalho, o aluno define uma reta *b*, perpendicular à reta *a* e que passa pelo centro *C* da circunferência, cortando-a nos pontos *O* e *A*, que correspondem aos outros dois vértices do quadrado. Em seguida, ele liga os pontos *R, O, S* e *A* por meio do recurso “Polígono” do GeoGebra, formando, assim, o quadrado *ROSA* (Figura 37).

Figura 37 – Quadrado *ROSA* (primeira solução)



Fonte: Autoria própria

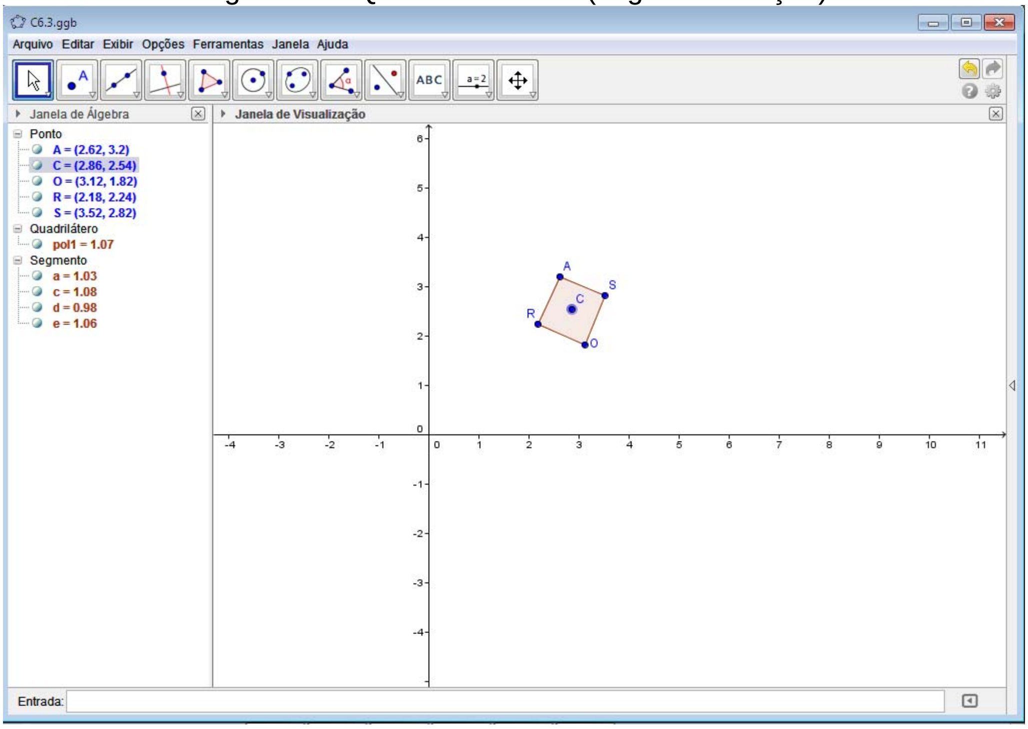
É importante ressaltar que uma variante desse percurso consiste em obter o vértice *S* como o simétrico do ponto *R* em referência ao ponto *C,* e depois, encontrar os outros vértices pelo mesmo processo, isto é, pelo estabelecimento do simétrico de *A* ou de *O*.

Estando no primeiro nível da teoria de Van-Hiele, o estudante poderá resolver o problema do seguinte modo:

No início, após definir os pontos *R* e *C*, ele estabelece os vértices *O, S* e *A,* e em seguida, obtém-se o quadrado *ROSA* (Figura 38).

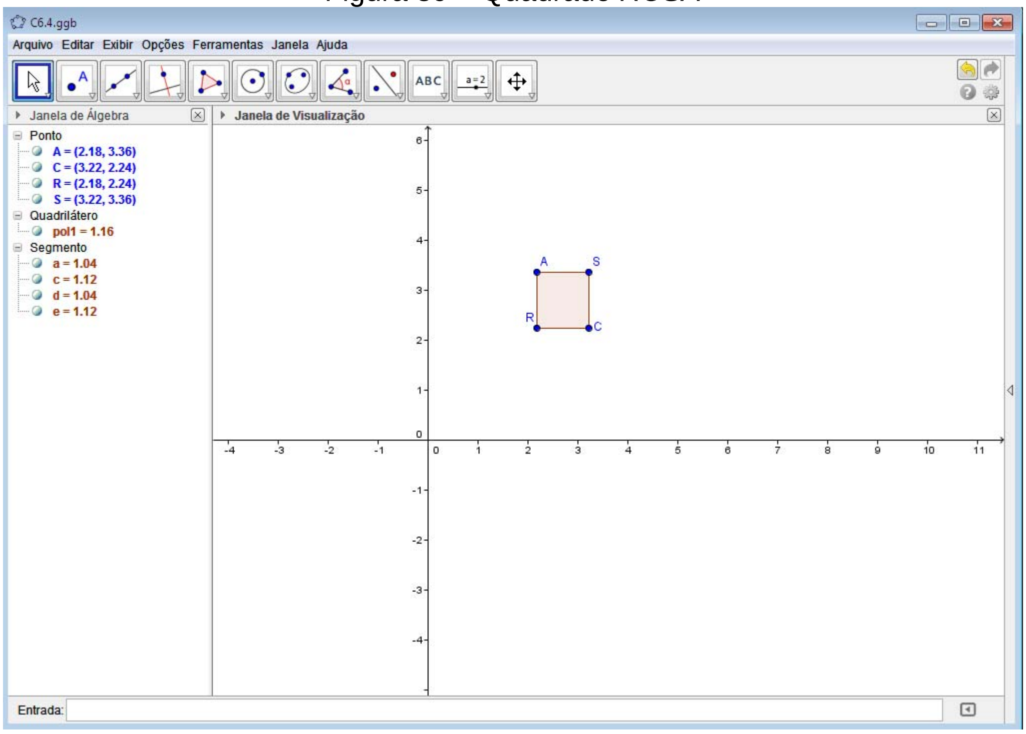
Também, o estudante poderá confundir o centro do quadrado com um dos seus vértices, desse modo, poderá apresentar a construção delineada na Figura 39.

Figura 38 – Quadrado *ROSA* (segunda solução)



Fonte: Autoria própria

Figura 39 – Quadrado *RCSA*



Fonte: Autoria própria

O aluno poderá produzir outros tipos de quadriláteros notáveis, tratando-os como quadrados no que se refere à aparência. Além disso, podem confundir o centro do quadrado com um dos seus vértices. Entre esses quadriláteros notáveis, referimos: paralelogramo, losango, retângulo e trapézio.

O aluno ainda poderá produzir outras figuras geométricas que divergem dos quadriláteros notáveis, como o triângulo, a circunferência e o polígono com cinco ou mais lados. Além disso, ele poderá confundir o centro do quadrado com um dos seus vértices.

Atividade 07 – Losango I

a) Considere os pontos *T* e *C*.
b) Considere dois outros pontos *I* e *A*, tais que *TICA* seja um losango*.*
c) Mova os pontos da figura. Ela permanece sendo um losango?
d) Justifique.

e) Caso a figura não permanece um losango, reinicie a construção.
f) Justifique por que sua figura é um losango.
g) Grave o arquivo como C07.tf

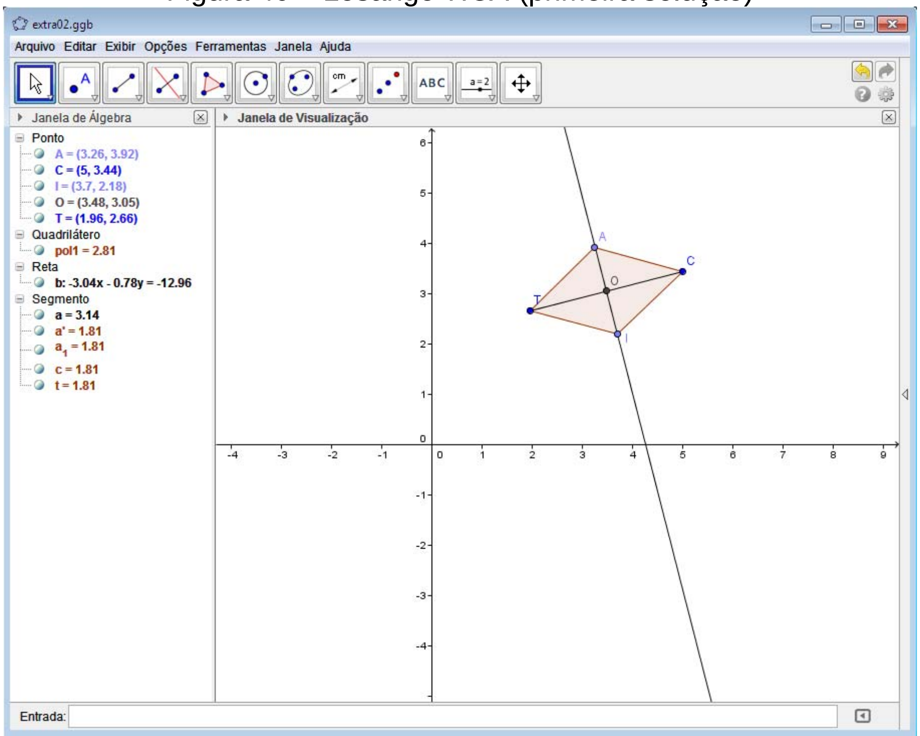
Nesse problema é pedido que o estudante produza um losango a partir de dois vértices opostos dados. Assim, a medida do comprimento do lado não possibilita solucionar o problema, logo, é imprescindível aplicar as propriedades das diagonais desse quadrilátero notável. Para tanto, pode-se resumir ao fato de que as diagonais do losango interceptam-se ao meio perpendicularmente, e explorar a noção de ponto médio. Além disso, a noção de ponto médio é mobilizada por meio da noção de circunferência e pela identificação de pontos simétricos.

No segundo nível da teoria de Van-Hiele, o estudante que é capaz de recorrer às propriedades das diagonais do losango, consegue estabelecer que as diagonais desse quadrilátero notável se cortam ao meio e que são perpendiculares, poderá utilizar a seguinte estratégia de resolução: inicialmente, após criar os pontos solicitados *T* e *C,* e estabelecer o segmento de reta *TC*, formado por esses pontos, o estudante constrói a mediatriz desse segmento de reta (por meio do recurso "Mediatriz" do *software*), que o corta no ponto *O*. Além disso, ele perceberá que os pontos *T* e *C* são simétricos entre si em relação ao ponto *O*. Tal fato será determinante na resolução do problema.

Em seguida, o estudante escolhe um ponto *A* na mediatriz, que corresponde a um dos vértices do losango. Depois, por meio do recurso "Reflexão em relação a um ponto", ele determina o simétrico do vértice *A* em relação ao ponto médio, que é o ponto *I*. Para finalizar o trabalho, o estudante liga os pontos *T, I, C* e *A,* por meio do recurso "Polígono", formando, assim, o losango *TICA* (Figura 40).

É importante ressaltar que nessa estratégia, o estudante explora a identificação de pontos simétricos e a noção de circunferência.

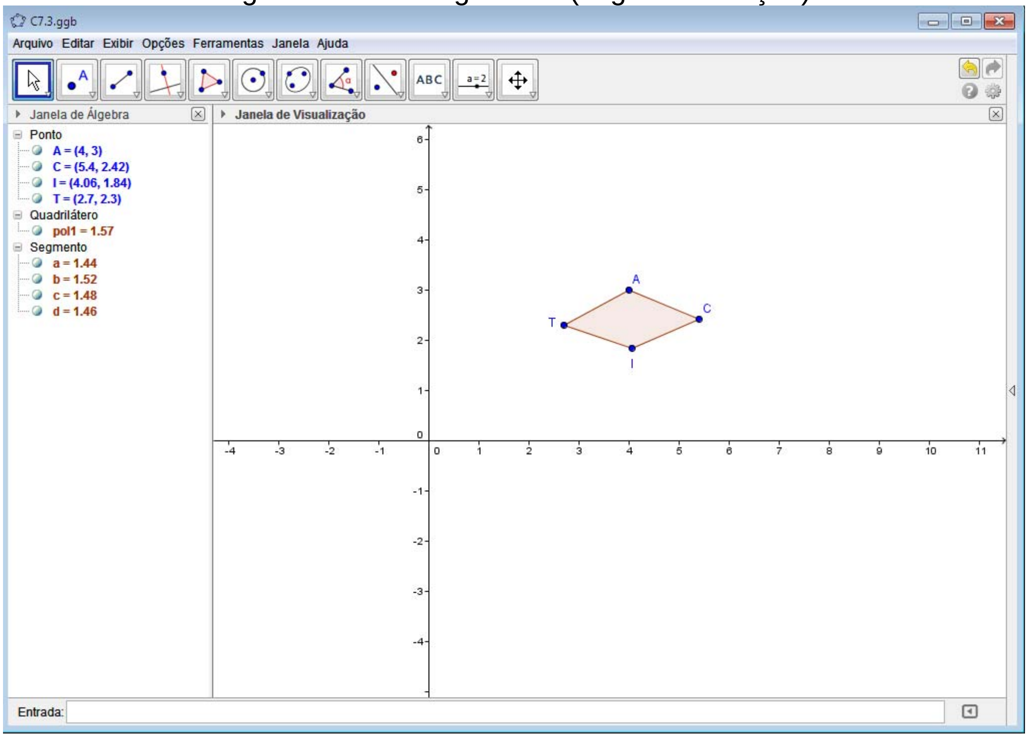
Figura 40 – Losango *TICA* (primeira solução)



Fonte: Autoria própria

No primeiro nível vanhieliano, o aluno poderá resolver o problema da seguinte forma: inicialmente, após criar os pontos *T* e *C*, ele determina os pontos *I* e *A,* e em seguida, define o losango *TICA* (Figura 41).

Figura 41 – Losango *TICA* (segunda solução)



Fonte: Autoria própria

O aluno poderá construir outros tipos de quadriláteros notáveis, como o trapézio, o retângulo, o quadrado e o paralelogramo. Além disso, poderá produzir outras figuras geométricas que não são quadriláteros notáveis, como o triângulo, a circunferência ou um polígono com cinco ou mais lados.

Atividade 08 – Losango II

a) Estabeleça uma reta *a* e dois pontos *G* e *A*, fora da reta *a*.
b) Considere o losango *GABI*, de maneira que o ponto *I* esteja sobre a reta *a.*
c) Mova os pontos da figura. Observe se a figura permanece um losango, e em caso negativo, reinicie a construção.

d) Explicite como você produziu o losango G*ABI.*

e) Grave o arquivo como C08.tf

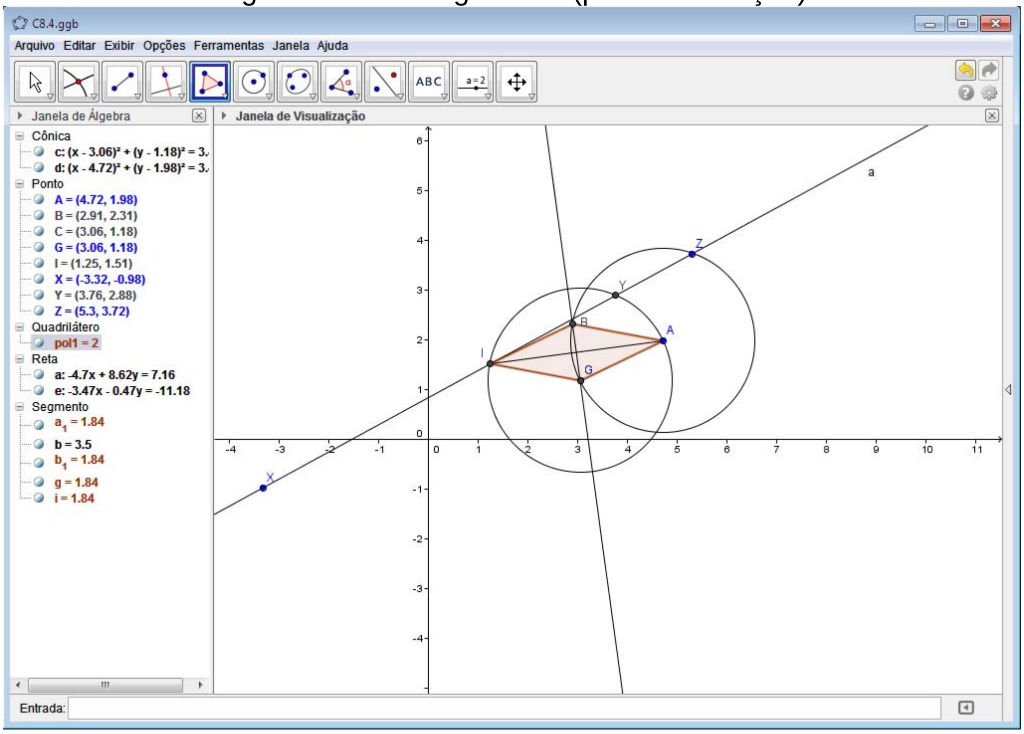
Neste caso, enfatiza-se a congruência de seus lados como principal propriedade mobilizada. O percurso de resolução mais coerente compreende em estabelecer a circunferência de centro em *G* e raio *GA*. O outro vértice do losango é determinado pela intersecção dessa circunferência com a reta *a*.

Um aluno que esteja no segundo nível da teoria de Van-Hiele poderá realizar a seguinte estratégia de solução da questão: inicialmente, o aluno constrói a reta *a* e os dois pontos *G* e *A*. Em seguida, ele estabelece duas circunferências: a primeira, com centro em *G* e raio *GA,* e a segunda, com centro *A* e raio *AG*. Observemos que para cada circunferência, a reta *a* foi cortada em dois pontos: a) a circunferência com centro em *G*, nos pontos *I* e *Y*; b) a circunferência com centro em *A*, nos pontos *B* e *Z*.

Posteriormente, o aluno traça o segmento de reta *IA,* que consiste em uma das diagonais do losango procurado. Em seguida, ele estabelece uma reta perpendicular a essa diagonal, passando pelo ponto médio de *IA*. Essa reta perpendicular corresponde a segunda diagonal do losango, que corta a circunferência de centro *A* e raio *AG* nos pontos *G* e *B* (que são os outros vértices desse quadrilátero notável). E para finalizar o trabalho, o aluno estabelece o losango *GABI* (Figura 42) por meio do recurso “Polígono”.

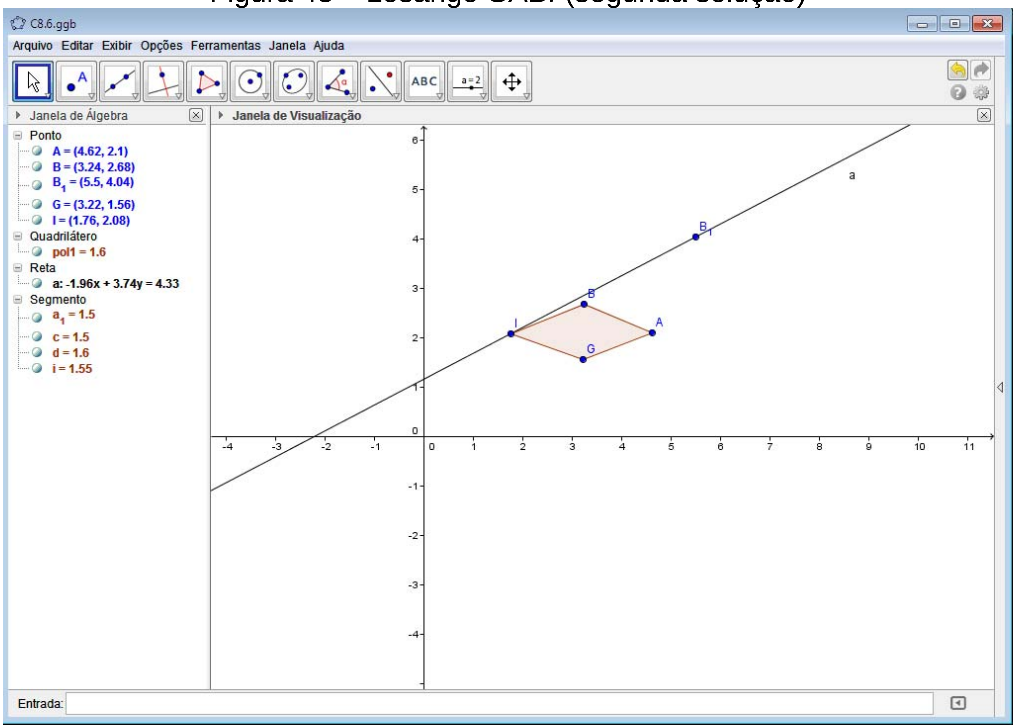
Estando no primeiro nível vanhieliano, um estudante poderá apresentar o seguinte percurso de resolução: primeiramente, o estudante traça a reta a e, após estabelecer os pontos *G, I, B* e *A*, liga-se esses pontos, gerando o losango solicitado (Figura 43). O estudante poderá criar outros tipos de quadriláteros notáveis, como o trapézio, o retângulo, o quadrado e o paralelogramo. Ainda, poderá construir outras figuras geométricas que não se constituem quadriláteros notáveis, como o triângulo, a circunferência ou um polígono com cinco ou mais lados.

Figura 42 – Losango *GABI* (primeira solução)



Fonte: Autoria própria

Figura 43 – Losango *GABI* (segunda solução)



Fonte: Autoria própria

5.6 O pré-teste e pós-teste

Para analisar como os estudantes avançaram (ou não) nos níveis de pensamento geométrico, aplicamos um pré-teste e um pós-teste. O teste pretendia analisar em que nível de pensamento geométrico estavam os estudantes antes e depois da intervenção pedagógica.

Diferentemente da pesquisa de Câmara dos Santos (2001), na qual o intervalo de tempo entre a aplicação entre o pré-teste e o pós-teste foi de cerca de quatro meses, em nosso estudo, o intervalo foi de três meses. Além disso, o teste é formado por cinco quesitos, que exploram a construção de quadriláteros notáveis.

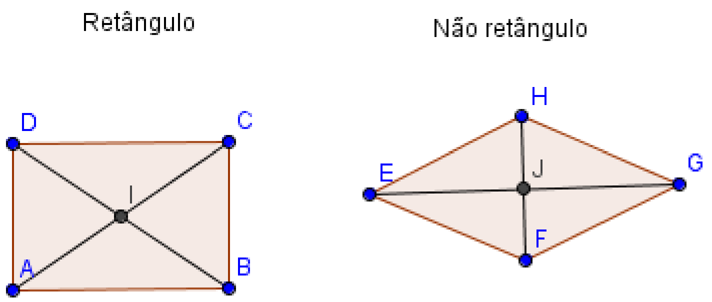
O primeiro quesito é formado por duas situações. Na primeira situação, pede-se que o estudante produza um retângulo, e em seguida, uma figura que não seja um retângulo (ao lado do retângulo construído inicialmente). Na segunda situação, o estudante é orientado a explicitar sua produção por escrito.

A questão de o estudante ter que construir uma figura que não se constituía um retângulo fundamenta-se na hipótese de que ao se produzir de modo intencional uma figura que não disponha de determinadas propriedades, uma “figura incorreta”, o estudante é movido a justificar sua compreensão dessas propriedades (CÂMARA DOS SANTOS, 2001).

Um estudante que esteja no segundo nível de Van-Hiele, que é capaz de reconhecer as figuras geométricas por suas especificidades (propriedades), poderá construir um losango (Figura 44) e um trapézio (Figura 45) como “não retângulos”. Se analisarmos, por exemplo, as propriedades do retângulo e do losango, veremos que as diagonais do losango são sempre perpendiculares e se cortam em seu ponto médio, o que nem sempre é observado com o retângulo (suas diagonais também podem não ser perpendiculares). Comparando o retângulo com o trapézio, observaremos, por exemplo, que enquanto as diagonais do primeiro quadrilátero notável se cortam em seu ponto médio, esse aspecto não é verificado com as diagonais do segundo (nesse caso, o trapézio).

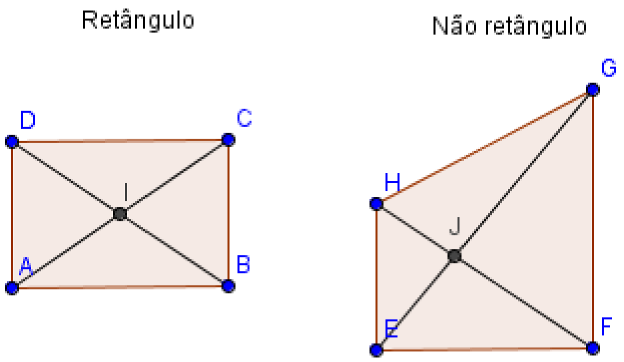
Entre as possíveis figuras consideradas como "não retângulo" que um aluno do primeiro nível vanhieliano poderá construir, destacamos o quadrado, o retângulo em posição não *prototípica*[23], o paralelogramo, o losango, o trapézio, o triângulo, a circunferência e um polígono de cinco ou mais lados. Aqui destacamos que o parâmetro a ser utilizado na diferenciação das figuras é a sua aparência ou sua forma, ou seja, os alunos consideram que as figuras divergem por apresentarem aparência e formas diferentes.

Figura 44 – Losango considerado como não retângulo



Fonte: Autoria própria

Figura 45 – Trapézio considerado como não retângulo



Fonte: Autoria própria

Na análise das justificativas dos estudantes referentes à segunda situação, utilizaremos a categoria traçada por Câmara dos Santos (2001). Nesse estudo, o pesquisador classificou as explicações dos estudantes em três categorias:

[23] Posição prototípica: com o lado maior paralelo às bordas horizontais da folha de papel.

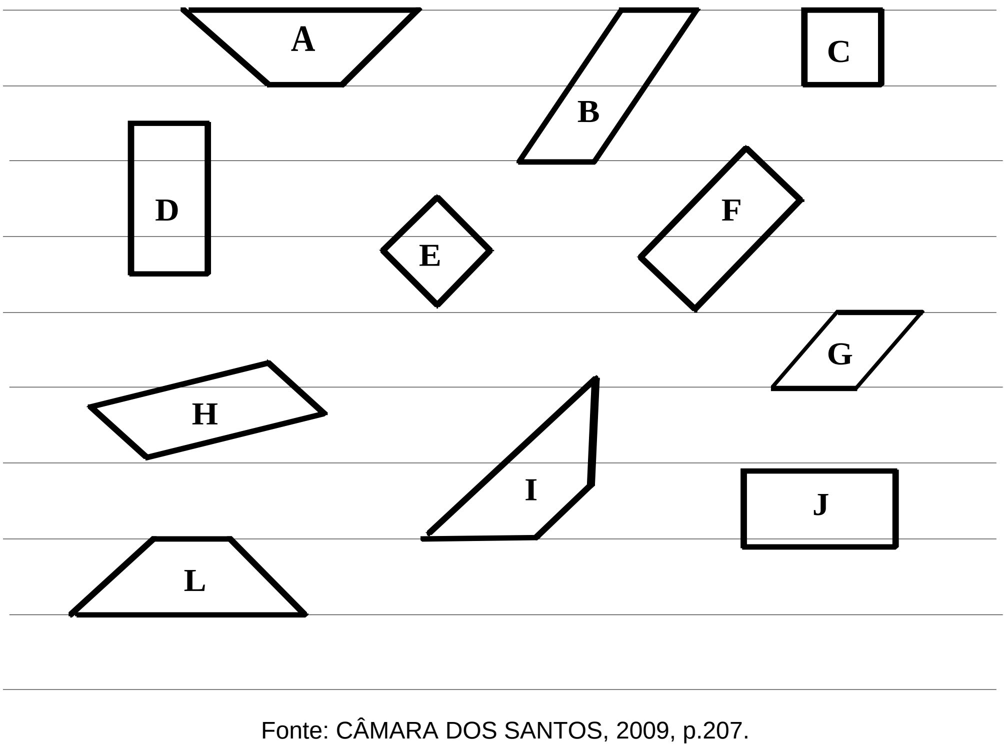
a) pragmática – o estudante faz uso apenas da forma ou aparência da figura na justificativa (exemplo: o aluno pode afirmar que o retângulo e o quadrado são diferentes, pois possuem formas diferentes);

b) aplicativa – o aluno utiliza a definição comum da figura na explicação (exemplo: o aluno pode argumentar que o retângulo apresenta quatro ângulos internos congruentes e que o losango tem quatro lados congruentes);

c) relacional – o estudante emprega as propriedades das figuras na explicitação (exemplo: o aluno pode dizer que o retângulo e o losango são diferentes, porque as diagonais do primeiro são concorrentes, e as do segundo são perpendiculares).

No segundo quesito é apresentada ao estudante uma relação de onze quadriláteros notáveis distintos (Figura 46) e em posições diferentes. A atividade busca classificar esses quadriláteros notáveis em diversas famílias (retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos).

Figura 46 – Quadriláteros utilizados no segundo item no teste



Fonte: CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p.207.

Um aluno do segundo nível vanhieliano poderá, por exemplo, apresentar a classificação ilustrada no Quadro 7.

Quadro 7 – Classificação realizada por um aluno do segundo nível

	FIGURAS
Retângulos	C, D, E, F, H, J
Trapézios	A, I, L
Quadriláteros	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L
Quadrados	C, E
Paralelogramos	B, C, D, E, F, G, H, J
Losangos	C, E

Fonte: Autoria própria

Neste tipo de resposta, o estudante buscará características intrínsecas às figuras, bem como de suas propriedades, como parâmetro para a categorização.

Um estudante que esteja no primeiro nível de Van-Hiele poderá classificar os quadriláteros como está delineado no Quadro 8.

Quadro 8 – Classificação realizada por um aluno do primeiro nível

	FIGURAS
Retângulos	D, J
Trapézios	A, D, F, J
Quadriláteros	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L
Quadrados	C
Paralelogramos	B
Losangos	G, E

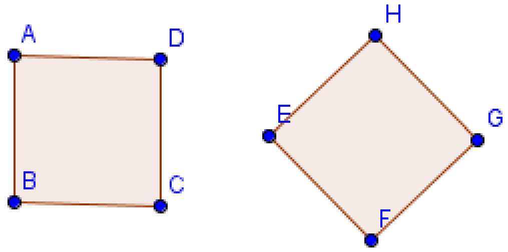
Fonte: Autoria própria

Podemos perceber nesse tipo de resposta que o aluno se baseia fortemente na percepção global da figura. Além disso, no caso das figuras que foram categorizadas em outras famílias, como alguns retângulos classificados como trapézios, tal fato ocorre, pois o aluno ainda não é capaz de reconhecer as figuras pelas suas aparências.

No terceiro quesito, o estudante é orientado a produzir dois quadrados diferentes entre si. A finalidade dessa atividade é analisar se os estudantes mobilizam as propriedades das duas figuras para distingui-las.

Um aluno do segundo nível de Van-Hiele poderá distinguir as duas figuras pelo seu posicionamento na folha de papel, a exemplo de produzir um losango (Figura 47) e considerá-lo um quadrado em posicionamento distinto.

Figura 47 – Losango considerado um quadrado em posição diferente



Fonte: Autoria própria

Um estudante do primeiro nível vanhieliano poderá diferenciar as duas produções apenas pelo seu tamanho. Ele também poderá produzir outros tipos de quadriláteros notáveis, a exemplo do paralelogramo, do trapézio e do retângulo, mas, considerando-os diferente do quadrado por apresentarem aparências diferentes. Tal fato exige um estudo mais aprofundando, que busque compreender os reais motivos que levam o estudante a essas produções.

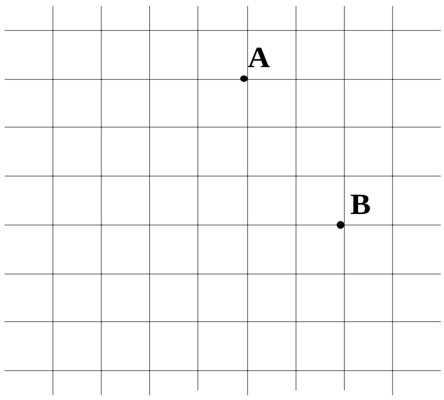
É importante ressaltar que todo quadrado se configura como um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado. Nesse sentido, se a questão solicitasse que o aluno produzisse dois retângulos diferentes e na construção, ele fizesse um retângulo “padrão” e um quadrado, seria uma evidência de que o aluno era capaz de reconhecer um quadrado como um retângulo.

Esse fenômeno representaria um avanço em seu pensamento geométrico, pois o aluno seria capaz de perceber que as propriedades das figuras se deduzem umas nas outras (característica do terceiro nível vanhieliano).

No caso específico do quesito proposto (produzir dois quadrados diferentes), se o aluno criar um quadrado e um retângulo “padrão”, tal produção não seria adequada, logo, esse estudante ainda não é capaz de articular as propriedades desses quadriláteros notáveis.

No quarto quesito é pedido que o aluno construa um losango *ABCD,* dados dois pontos *A* e *B* indicados em dois nós de uma malha quadriculada, como ilustrado na Figura 48. Essa tarefa objetiva analisar os critérios utilizados pelo aluno, e se ele faz uso das propriedades das diagonais do losango na produção.

Figura 48 – Vértices *A* e *B* marcados na malha quadriculada



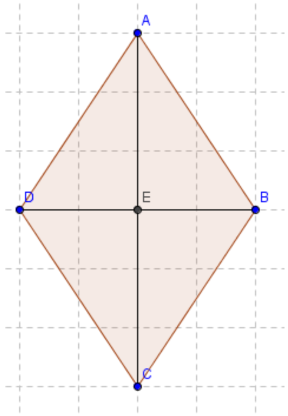
Fonte: CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p.208.

Um estudante do segundo nível de Van-Hiele utilizará as propriedades das diagonais do losango na construção da figura. Nesse sentido, partindo dos vértices *A* e *B,* ele estabelecerá as diagonais, que são perpendiculares, e chegando à definição do seu ponto médio, o ponto *E*, o estudante estabelecerá os simétricos dos vértices disponibilizados na questão (*A* e *B*). Para finalizar, ele ligará os pontos *A, B, C* e *D*, formando o losango *ABCD* (Figura 49).

Um aluno do primeiro nível de Van-Hiele responderá a questão fazendo uso de sua percepção sobre a aparência do losango, como exibido na Figura 50.

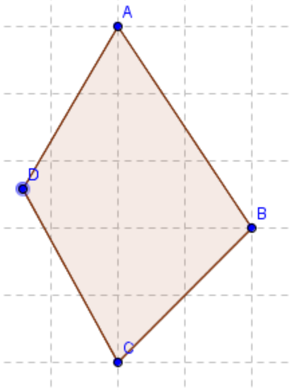
Além do losango, o aluno poderá produzir outras figuras, como o trapézio, o paralelogramo, o retângulo e o triângulo. Essas construções constituem uma forte constatação de que o aluno apresenta dificuldades em entender o que é um losango, e ainda, de suas características, o que necessita uma pesquisa mais aprofundada.

Figura 49 – Losango *ABCD*



Fonte: Autoria própria

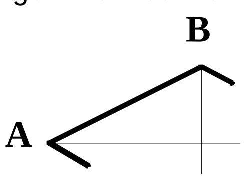
Figura 50 – Losango *ABCD* construído pela percepção



Fonte: Autoria própria

O sexto quesito exibe um losango que teve um pedaço apagado (Figura 51), e o aluno deverá analisar se é possível reconstituí-lo (ou não). Além disso, ele deverá explicitar sua resposta. O objetivo da atividade foi verificar se o aluno mobiliza as propriedades das diagonais do losango na construção.

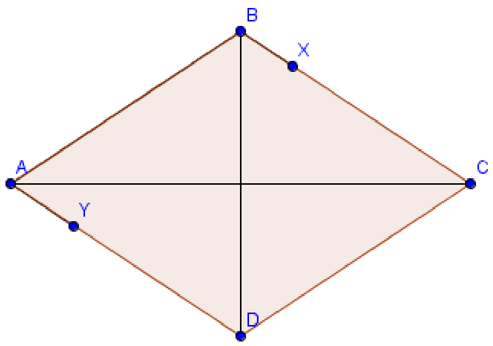
Figura 51 – Losango *ABCD* com um pedaço apagado



Fonte: CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p.209.

Um aluno do segundo nível vanhieliano fará uso das propriedades das diagonais do losango na produção da figura, como desenhado na Figura 52. Dessa forma, pelo ponto médio das diagonais já disponibilizado no problema, o aluno definirá os simétricos dos vértices *A* e *B,* que são os pontos *C* e *D*, para em seguida, estabelecer o losango *ABCD* por meio da ligação dos seus vértices.

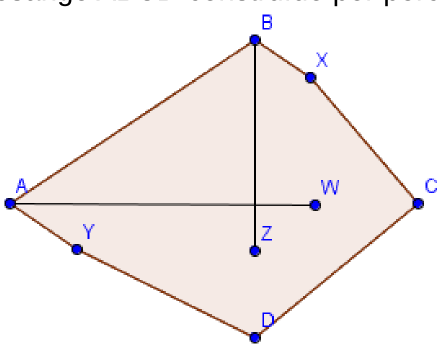
Figura 52 – Losango *ABCD*



Fonte: Autoria própria

Um estudante do primeiro nível vanhieliano responderá o problema utilizando a percepção global da figura, como ilustrado pela Figura 53. O estudante poderá também construir outras figuras além do losango, entre elas: o trapézio, o paralelogramo e outros polígonos com cinco ou mais lados. Novamente, esse fato é uma forte evidência de que o estudante apresenta dificuldades em compreender o que é um losango.

Figura 53– Losango *ABCD* construído por percepção global



Fonte: Autoria própria

CAPÍTULO VI

6 ANALISANDO E INTERPRETANDO OS DADOS PRODUZIDOS

6.1 Análise da sequência didática

Como já mencionamos anteriormente, a sequência didática foi composta por três fases, sendo a primeira destinada para o estudante se familiarizar com o GeoGebra, a segunda trabalhou os conceitos de ângulos e de circunferências, auxiliando a terceira fase, que por sua vez, consistiu em explorar os conceitos de quadriláteros notáveis.

No desenvolvimento da sequência no Laboratório de Informática da escola, a turma foi organizada em duplas, assim, como ela (a turma) era composta por 30 estudantes, obtivemos 15 duplas. O professor de Matemática da turma investigada foi o responsável por escolher e organizar/montar as duplas. O Quadro 9 apresenta a distribuição dos alunos em duplas.

Quadro 9 – Distribuição dos alunos investigados em duplas

Duplas	**Estudantes**
D01	A03 e A22
D02	A20 e A23
D03	A01 e A27
D04	A06 e A18
D05	A15 e A25
D06	A19 e A24
D07	A04 e A09
D08	A16 e A30
D09	A02 e A08
D10	A10 e A14
D11	A12 e A26
D12	A05 e A13
D13	A07 e A11
D14	A17 e A21
D15	A28 e A29

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, apresentamos a análise dos dados produzidos em cada fase da sequência didática. É importante destacar que realizamos uma análise mais refinada apenas da terceira fase da sequência didática, pois foi a etapa que explorou de forma efetiva o conceito de quadriláteros notáveis e também de suas propriedades.

6.1.1 Primeira fase

A primeira fase da sequência didática é constituída por três atividades, nas quais, foram abordados os seguintes conceitos: ponto médio, paralelismo, simétrico de um ponto em relação a outro e perpendicularismo.

6.1.1.1 Primeira atividade

A primeira atividade dessa fase teve por objetivo introduzir os conceitos de ponto médio e paralelismo. Nesse sentido, em um primeiro momento, a atividade solicitava que os estudantes construíssem um segmento de reta *MN*, em seguida, ele deveria considerar um ponto *P*, na metade desse segmento de reta. Em seguida, deveriam mover o ponto *P*, verificando se permanece na metade do segmento de reta *MN*. Ainda, os alunos deveriam mover os pontos *M* e *N*, analisando o que ocorre.

A atividade não apresenta nenhuma complexidade, dessa forma, nenhuma das duplas apresentaram dificuldades em realizar as construções.

No GeoGebra, o segmento de reta *MN* pôde ser obtido diretamente pelo recurso “Segmento”, mas também pelo recurso “Ponto”, na qual, o estudante estabelece inicialmente os pontos *M* e *N*, para depois, traçar o segmento de reta formado por esses pontos, por meio do recurso “Segmento”.

O ponto *P* pôde ser construído tanto pelo “Ponto” como pelo “Ponto Médio ou Centro”. O ponto *Q* foi produzido por meio do “Ponto”, enquanto que a reta paralela ao segmento de reta *MN* pôde ser estabelecida pela ferramenta “Reta Paralela” (sendo essa primeira mais adequada para a construção) ou pelo “Reta”.

Quatro duplas (D01, D02, D11 e D14), ao moverem o ponto *P*, perceberam que ele não permanecia mais na metade do segmento de reta. Isso deve ter ocorrido, pois essas duplas utilizaram o recurso “Ponto” do GeoGebra para estabelecer o ponto *P* na metade do segmento de reta *MN* (que não fixa o ponto, permitindo-o que se movimente ao longo do segmento de reta), ao invés de usarem ferramenta “Ponto Médio ou Centro” do GeoGebra para estabelecer o ponto *P* na metade do segmento de reta *MN* (que fixa o ponto).

Dez duplas (D01, D02, D04, D05, D06, D08, D10, D11, D12 e D15) afirmaram que ao deslocarem os pontos *M* e *N*, o ponto *P* também se moveu, mas sempre permanecendo no meio do segmento, isto é, *P* continuava sendo o ponto médio do segmento de reta. Tal fato pode ser verificado se *P* tiver sido estabelecido tanto por meio de “Ponto” como por “Ponto Médio ou Centro” do GeoGebra. Aqui há indícios que esses estudantes conseguiram estabelecer a equidistância entre os extremos do segmento de reta, provavelmente por ter estabelecido o ponto *P* por meio de uma relação de equidistância.

Para uma dupla de alunos (D07), não foi possível mover o ponto *P*, provavelmente por terem o construído a partir do “Ponto Médio ou Centro”, nesse sentido, essa dupla não conseguiu verificar a equidistância entre os extremos do segmento de reta. Ela ainda afirma que se fosse possível mover o ponto *P*, ele “*ficaria na metade do segmento de reta de todo jeito*” (D07), provavelmente, por perceber que ele é o ponto médio.

A dupla D09 argumentou que “*a reta se movimenta e P deixa de ficar entre o segmento*” (D09). Enquanto que a dupla D13 justificou que “*os pontos M e N, quando movidos, alteram a direção do segmento de reta*” (D13).

No segundo momento da atividade, os estudantes foram solicitados a estabelecerem um ponto *Q*, fora do segmento de reta *MN*. Em seguida, deveriam estabelecer uma reta paralela a esse segmento de reta, passando por *Q*. Por fim, teriam que mover os pontos *M*, *N* e *Q*, e analisar o que ocorreria.

Para quatro duplas de alunos (D01, D03, D04 e D09), o ponto *Q* se moveu ao longo da reta paralela construída, e ao moverem os pontos *M* e *N*, o segmento de reta *MN* não ficava mais paralelo à nova reta. Tal fato pode ter ocorrido porque essas duplas construíram a reta paralela a partir do recurso “Reta” do GeoGebra, ao invés do recurso “Reta Paralela”, além de não terem estabelecido uma relação da reta paralela com o ponto *Q*.

Cinco duplas (D07, D10, D12, D13 e D15) afirmaram que ao moverem os pontos *M, N* e *Q*, o segmento de reta e a nova reta continuam sendo paralelos entre si, provavelmente por terem estabelecido uma relação de equidistância da reta paralela com o ponto *Q*, além de terem utilizado o “Reta Paralela” na construção. Enquanto que a dupla D11 registrou que “*Quando movemos os pontos M e N, a reta paralela continua sendo paralela. Quando movemos o ponto Q, dependendo do movimento, [a reta] deixa de ser paralela*” (D11).

A dupla D02 explicou que “*o ponto Q saiu da reta ao ser movido; e movendo os pontos M e N, o ponto O continuou no meio do segmento de reta*” (D02). Já a dupla D05 justificou que “*os pontos continuaram no mesmo lugar, mas o segmento de reta mudou de tamanho*” (D05). Aqui fica evidente que essas duplas ainda se preocuparam apenas com o que ocorreria com o segmento de reta, não analisando a relação de paralelismo com a reta que continha o ponto *Q*.

Além disso, mais duas duplas não fizeram referência ao paralelismo, que foram D06 e D08. A dupla D06 observou que “*o ponto Q não entra no segmento de reta MN, e os pontos M, N e Q não se mechem*” (D06), e a dupla D08 afirmou “*o ponto Q está fora do segmento*” (D08).

6.1.1.2 Segunda atividade

A segunda atividade da primeira sequência buscou introduzir o estudante na noção de ponto simétrico em relação a outro ponto. Dessa forma, inicialmente, solicitou que os estudantes construíssem dois pontos *M* e *Q*, e uma reta *a*, passando por esses dois pontos. Em seguida, deveriam escolher um ponto *N* da reta *a*, diferente de *M*, sendo a distância entre *M* e *Q* igual à distância entre *Q* e *N*.

Após realizarem essas construções, os alunos deveriam aproximar o ponto *M* do ponto *Q*, e analisar o que ocorre, isto é, verificar se o ponto *N* também se aproxima. Caso contrário, eles deveriam refazer as construções, e por fim, comentar como estabeleceram o ponto *N*, de modo que a condição seja atendida.

No GeoGebra, os pontos *M* e *Q* podem ser criados a partir do recurso "Ponto", e a reta *a* por meio do recurso "Reta". Em seguida, o ponto *N*, diferente de *M* (*MQ=QN*) pode ser estabelecido pelo "Ponto", sendo que na análise da equidistância entre o ponto *N* e os pontos *M* e *Q*, é necessário utilizar a ideia de ponto médio. Nesse sentido, o ponto *Q* seria o ponto médio do segmento de reta *MN*.

Para quatro duplas de alunos (D01, D02, D09 e D14), ao se aproximar o ponto *M* do ponto *Q*, o ponto *N* não se aproximou do ponto *Q*, afirmando que o *N* ficou parado, sem mexer: "*quando nós movimentamos o ponto M, o ponto N não se mexeu*" (D09); "*O ponto M e Q, vamos dizer que é a origem da reta, e assim para manter a mesma distância, o N se move quando movemos o ponto M, porém o ponto N quando movemos o ponto M não se mexe*" (D14).

A dupla D01, ao refazer o ponto *N*, fez uso do recurso "Reflexão em Relação a uma Reta" do GeoGebra para analisar a equidistância entre os pontos, explicando: "*Nós colocamos reflexão em relação ao ponto, M era o objeto e Q o centro da reflexão. Então um ponto N surgiu em simetria ao ponto M, de modo que, se movêssemos o ponto M, o ponto N também se moveria*" (D01). A dupla D04 também fez uso da ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta", desenvolvendo o mesmo percurso da dupla D01.

Três duplas (D02, D07 e D15) fizeram referência ao ponto médio na solução da atividade, fazendo uso do "Ponto Médio ou Centro" do GeoGebra: "*usando o ponto médio ou centro*" (D02); "*Selecionamos o ponto médio ou centro e criamos o ponto M e N e o ponto do centro e o ponto Q*" (D07); "*Fazendo o ponto N ser o centro de Q e M, o ponto médio*" (D15).

Duas dessas duplas verificaram que o ponto *N* também se aproxima do ponto *Q*, quando o ponto *M* é movido em direção ao ponto *Q*: "*Quando aproximamos o* *ponto M do ponto Q, o ponto N se aproxima também, mas ele fica parado*” (D07); “*N se aproxima, pois ele é o ponto médio*” (D15).

Outras cinco duplas (D03, D05, D06, D08 e D13) também perceberam que o ponto *N* se aproxima de *Q*, quando o ponto *M* é movido. Em suas justificativas relacionadas à equidistância dos pontos, tais duplas fazem referência à medida dos segmentos *MQ* e *QN* como meio para a solução da atividade: **“***Antes de fazermos o ponto N, medimos a distância com a mão (M e Q), marcamos essa distância, criando o ponto N. Quando mexemos o ponto M, o N também se movimenta*” (D05); “*Nós vimos que dava a mesma distância e botamos o ponto N*” (D06); “*Aproximei o M para o Q e o N ficou na mesma distância de M e Q*” (D08); “*Nós colocamos o ponto N na reta a, com a mesma distância entre MQ e QN*” (D13).

Duas duplas (D10 e D12), que observaram que o ponto *N* se aproximava do ponto *Q*, quando o ponto *M* era movimentado, utilizaram a malha quadriculada do GeoGebra como meio para analisar a equidistância entre os pontos: “*Colocando a reta na malha quadriculada é possível saber a distância de M e Q e de Q e N*” (D10); “*Consideramos na malha que um quadradinho= 1cm. Colocamos M numa distância de 19cm de Q e 19 cm de Q a N*” (D12).

Além disso, a dupla D11 fez referência às medidas dos eixos dos segmentos de reta *MQ* e *QN* em sua justificativa para a construção do ponto *N*: “*Criamos o ponto N de acordo com as medidas dos eixos*” (D11).

6.1.1.3 Terceira atividade

A terceira atividade da primeira fase da sequência didática trabalhou construções de paralelas e perpendiculares, de modo que os estudantes compreendam que duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas entre si. Para tanto, a atividade solicitou que os estudantes construíssem dois pontos *M* e *N*, e uma reta *b* que passa por esses pontos. Em seguida, eles deveriam produzir duas retas perpendiculares a *b*, passando pelos pontos *M* e *N*.

Depois de realizarem essas construções, os alunos deveriam mover os pontos *M* e *N*, e analisar o que ocorre com as retas perpendiculares, estabelecendo a relação que existe entre elas.

No *software* GeoGebra, os pontos *M* e *N* podem ser produzidos por meio do recurso “Ponto”, e a reta *b* a partir de “Reta”. Enquanto que as retas perpendiculares podem ser traçadas pelo recurso “Reta Perpendicular”.

Seis duplas (D01, D07, D09, D10, D11, D14) de estudantes conseguiram estabelecer que duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas entre si, representando um importante avanço em seu pensamento geométrico: “*Quando movemos os pontos, as retas a e c também se moveram, de modo que continuaram perpendiculares. Elas são paralelas entre si*” **(**D01); “*Quando movemos M e N as retas A e B podem se juntar ou se aproximar, ou se distanciar. Elas são paralelas entre si*” (D07); “*Em relação a reta B elas são perpendiculares mas em relação a e c elas são paralelas*” (D09); “*Que mesmo mexendo os pontos, as retas continuam sendo perpendiculares. Entre elas há uma relação de paralelismo (A e B) e de perpendicularismo (A e C, B e C)*” (D10); “*Quando movemos continua sendo retas perpendiculares. Que as retas perpendiculares A e B são paralelas*” (D11); “*As retas, ao mover os pontos M e N, se movem, continuando a formar um ângulo de 90º. Mas também percebi que as retas a e b, não só são retas perpendiculares (em relação a M e N), como também são paralelas entre si (A e B)*” (D14).

Quatro duplas (D06, D08, D13 e D15) verificaram que as retas continuam perpendiculares a uma terceira reta, no entanto, não verificaram que elas são paralelas entre si: “*Quando se movem elas continuam sendo perpendiculares*” (D06); “*As retas perpendiculares a e b continuam sendo perpendiculares à reta b1, q que está com os pontos M e N*” (D08); “*Sempre formará um ângulo de 90º”* (D13); “*Continua perpendicular, continuando em cima dos pontos*” (D15).

Duas duplas centraram-se em apenas observar o que ocorria com os pontos *M* e *N* ao serem movidos, não estabelecendo, dessa forma, a relação entre as retas perpendiculares: **“***Ao mover o M tudo se move menos os pontos A, B e N e ao* *mover N acontece o mesmo*" (D02); "*Quando mexemos o ponto M, duas retas se mexem ao mesmo tempo, assim como o ponto N*" (D05).

Uma dupla (D03) observou que as retas perpendiculares são concorrentes com a reta que contem os pontos *M* e *N*: "*Elas tem uma relação de retas concorrentes*" (D03); outra dupla afirmou que as retas perpendiculares sempre se encontram com a reta que estabelecem a relação de perpendicularismo: "*Estarão sempre se encontrando com a reta b*" (D12).

Além disso, uma dupla notou apenas que os pontos *M* e *N* não se movem, provavelmente por terem fixado os pontos na reta *b*: "*Não se movem pois construíram uma perpendicular que não pode sair de seu local de criação*" (D04).

6.1.2 Segunda fase

A segunda fase da sequência didática é composta por três atividades, que exploram os conceitos de ângulo, circunferência e equidistância.

6.1.2.1 Primeira atividade

A primeira atividade da segunda fase da sequência didática explorou a produção de ângulos e suas medidas, além de trabalhar o conceito de bissetriz. Dessa forma, em um primeiro momento, a atividade pediu que os estudantes construíssem um segmento de reta *MN*, duas retas perpendiculares ao segmento de reta.

A primeira reta perpendicular deveria passar pelo ponto *M*, na qual ainda deveria ser traçado um ponto *K*, e a segunda reta perpendicular passaria por *N*, na qual também seria estabelecido um ponto *W*. Em seguida, os alunos foram solicitados a moverem os pontos da figura e observar se as retas permanecem perpendiculares ao segmento de reta *MN*, caso contrário, deveriam refazer a construção. Além disso, deveriam estabelecer a relação entre os ângulos $K\hat{M}N$ e $W\hat{N}M$.

Em um segundo momento da atividade, os alunos foram orientados a produzirem um segmento de reta *AB*, e a construírem o ângulo *PÂB* com medida de 45º. Depois, eles (os estudantes) deveriam mover os componentes da figura, analisar o que ocorre com a medida do ângulo, e explicar como construíram *PÂB.*

No GeoGebra, o segmento de reta pode ser construído por meio do recurso "Segmento", e as duas retas perpendiculares a partir do "Reta Perpendicular". Os pontos *K* e *W* podem ser estabelecidos pelo recurso "Ponto".

Do mesmo modo, o segmento de reta *AB* pode ser obtido a partir do recurso "Segmento". Para obter o ângulo *PÂB* era necessário que os estudantes construíssem, por meio do recurso "Reta Perpendicular", duas retas perpendiculares ao segmento *AB*, a primeira passando por *A* e a segunda por *B.* A seguir, com o recurso "Bissetriz", os alunos construíram a bissetriz do ângulo Â, que corta, no ponto *P,* a reta perpendicular que passa por *B,* obtendo, assim, o ângulo *PÂB* com medida igual a 45º.

No primeiro momento da atividade, cinco duplas de alunos (D01, D02, D08, D11 e D14) perceberam que as retas construídas permanecem perpendiculares ao segmento de reta *MN*: "*Movemos os pontos e as retas continuam perpendiculares*" (D01); "*As retas continuam sendo perpendiculares*" (D02); "*As retas continuam paralelas (retas do KM e do WN) e continuam perpendiculares (reta b e segmento MN) e (reta c e segmento MN)*" (D08); "*Já as retas perpendiculares são paralelas e também são finitas. Quando nós mechemos elas continuaram perpendiculares*" (D11); "*Percebemos que como as retas são paralelas, e permanecem formando um ângulo de 90º graus com M e N. se fecharmos os pontos K e W, com M e N formaríamos um retângulo*" (D14).

Aqui chamamos atenção para o fato de que as duplas D08, D11 e D14, na atividade analisada, estabeleceram que duas retas perpendiculares a uma terceira reta, então, elas são paralelas entre si. Além disso, D14 evidenciaram que os pontos *M, N, K* e *W* podem formar um retângulo.

Doze duplas (D01, D03, D05, D06, D07, D08, D09, D10, D11, D13, D14 e D15) perceberam que os ângulos $K\hat{M}N$ e $W\hat{N}M$ são iguais e medem 90º: "*Os dois são ângulos retos, iguais e de 90º*" (D01); "*Os ângulos KMN e WNM são retos, ou seja, tem 90º*" (D03); "*Os dois são de 90º e eles são iguais*" (D05); "*São retos*" (D06); "*São ângulos retos*" (D07); "*A relação é que eles são iguais e perpendiculares*" (D08); "*Os ângulos são retos e possuem 90º*" (D09); "*Que os dois estão ligados ao mesmo segmento de reta (M e N) e que eles tem a mesma medida (90º) ângulo reto*" (D10); "*São retos (ângulo reto) e iguais*" (D11); "*São ângulos retos, sim, 90º*" (D13); "*Sim, eles são iguais, pois, [...] permanecem formando um ângulo de 90º graus com M e N*" (D14); "*São pontos em forma de 90º. Podem ser chamados de pontos perpendiculares*" (D15).

Além disso, houve três duplas de alunos (D02, D04 e D12) que afirmaram que os ângulos não são iguais, provavelmente por terem construído as retas perpendiculares por meio do recurso "Reta", ao invés do recurso "Reta Perpendicular": "*Não são iguais*" (D02); "*Eles não se completam. Eles não são iguais*" (D04); "*Estarão sempre se cruzando. Não são iguais*" (D12).

No segundo momento da atividade, referente à construção do ângulo com medida de 45º, três duplas dos estudantes (D01, D06 e D14) construíram um quadrado, e a partir de sua diagonal (que divide os ângulos internos ao meio), conseguiram obter o ângulo *PÂB:* "*Movemos os componentes da figura, de modo que o ângulo não mudou. Pensamos que 45 é metade de 90, então usamos o quadrado para calcular a metade do espaço que usaríamos para fazer um ângulo de 90º*" (D01); "*Nós colocamos o ponto C na diagonal do ponto A*" (D06); "*Selecionamos três pontos, A B e P, com isso fazemos um ângulo de PAB. Como 45º graus é: a metade de um quadrado, assim podemos aumentar e diminuir o ângulo que não irá mudar sua medida*" (D14).

Três duplas (D04, D07 e D13) fizeram uso do recurso "Ângulo com Amplitude Fixa" para construir o *PÂB.* Tal recurso permite o estudante construir um ângulo sem esforços a partir de dois pontos, apenas digitando (preenchendo) o valor da medida do ângulo desejado em uma janela que surge na tela do GeoGebra: "*Usando o ângulo com amplitude fixa, escolhendo os pontos B, A e criamos o P*" (D04); "*Eu primeiro selecionei 3 pontos e depois usei a ferramenta ângulo com amplitude fixa*" (D07); "*Nós colocamos na aba de ângulos e escolhemos a opção ângulo com amplitude fixa*" (D13).

Duas duplas (D09 e D12) fizeram uso da malha quadriculada do GeoGebra para a construção do ângulo, o que também pode facilitar consideravelmente a produção: "*Utilizamos a malha e fizemos a metade de um ângulo de 90º*" (D09); "*Retirei a malha e formei um triângulo. Depois movi os pontos B e P*" (D12).

Quatro duplas (D02, D03, D11 e D15) construíram retas perpendiculares aos pontos *A* e *B*, respectivamente. Em seguida, a partir do ângulo $\hat{A}$ formado pelo segmento de reta *AB* e a perpendicular que passa por *A* (com medida de 90º), criaram um segmento de reta até o ponto *P*, que dividiu o ângulo $\hat{A}$ pela metade: "*Vimos onde era o ângulo de 90º graus e dividimos na metade*" (D02); "*Nós sabíamos o que era um ângulo de 90º, mas não sabíamos o que era de 45º. Percebemos que 45 é a metade de 90, então fizemos a metade de 90º*" (D03); "*Nós conseguimos fazer o ângulo 45º por um auxílio de uma reta e do eixo que formava um ângulo reto (90º), daí nós pegamos a metade desse ângulo que formou um ângulo de 45º. Quando mechemos o ponto A o ângulo ficou o mesmo, quando mechemos os pontos P e B o tamanho do ângulo mudou*" (D11); "*Primeiro se constroe um segmento de reta depois construímos um ponto de 45º do segmento e assim faz um ângulo*" (D15).

Ainda, três duplas (D05, D08 e D10) construíram o ângulo apenas por meio da aparência visual: "*Nós movemos o ponto P, até termos 45º*" (D05); "*Criamos os pontos A, B, P, e ligamos eles assim: Desenho. Colocamos o ângulo e ficou assim: desenho. Clicamos em mover e formamos 45º*" (D08); "*Nós fizemos a figura e tentamos medir seu ângulo e o mudamos para 45º*" (D10).

6.1.2.2 Segunda atividade

A segunda atividade da segunda fase da sequência didática buscou explorar o conceito de circunferência. Assim, em um primeiro momento, a atividade solicitou que os alunos criassem um ponto *K* e uma reta *a*, passando por esse ponto. Em seguida, a partir do ponto *K*, eles deveriam produzir uma reta perpendicular à reta *a* (chamada reta *b*), passando em *K*. Ainda na reta *a*, os estudantes deveriam traçar dois pontos *M* e *N* de forma que a distância do ponto *K* até o ponto *M* seja a mesma distância entre o ponto *K* e o ponto *N*, isto é, satisfazendo a condição de *KM=KN.*

Depois, sobre a reta *b*, os alunos deveriam construir dois pontos *P* e *Q*, de modo que *KM=KN=KP=KQ*. A seguir, a atividade pedia que eles (alunos) deslocassem os pontos das figuras e analisassem a relação estabelecida entre os eles. Se houve alguma modificação, os estudantes deveriam refazer a questão.

Em um segundo momento da atividade, os estudantes deveriam produzir outros três pontos R, S e T, de forma que a relação de distâncias fosse mantida (*KM=KN=KP= ... =KS=KT*). Na atividade, era questionado ainda sobre a relação dos pontos *M, N, P, Q, R, S* e *T* com o ponto *K*, e também sobre a região do plano estabelecida por todos esses pontos.

No *software* GeoGebra, o ponto *K* pode ser criado por meio do recurso “Ponto”, enquanto que a reta *a* pelo recurso “Reta”. A reta *b*, perpendicular à reta *a*, pode ser traçada pelo recurso “Reta Perpendicular”, e os pontos *M* e *N* a partir do “Ponto” ou pelo recurso “Ponto Médio ou Centro”.

Por sua vez, os pontos *P* e *Q* podem ser produzidos por meio do recurso “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”, nesse caso, *K* seria o centro do círculo, e *M* ou *N* um dos seus pontos. O círculo construído, que consiste em uma circunferência, corta a reta *b* em dois pontos, que são os pontos *P* e *Q*.

Para obter os pontos *R*, *S* e *T*, podemos utilizar o recurso “Bissetriz”, produzindo duas retas perpendiculares entre si, que passam na bissetriz do ângulo $\hat{K}$. Tais retas cortam o círculo nos pontos *R, S* e *T*.

No primeiro momento da atividade, ao deslocarem os pontos, quatro duplas de alunos (D01, D02, D07 e D14) observaram a relação de equidistância (*KM=KN=KP=KQ*): "*Deslocamos os pontos e eles continuaram na mesma distância*" (D01); "*Não modifica*" (D02); "*Todos os pontos tem, todas as medidas iguais mesmo modificando o lugar*" (D07); "*Quando movemos o ponto K para o lado, é como se as retas aumentassem de modo que os pontos continuam iguais a antes (com a mesma distância de K)*" (D14).

Três duplas analisaram apenas a relação de perpendicularismo entre os segmentos de reta (*KM, KN, KP e KQ*), se tal relação permaneceu ou não com o deslocamento dos pontos: "*Eles não ficaram mais perpendiculares e não tem mais a mesma distância*" (D06); "*Se mexermos o ponto M ou K as retas continuam perpendiculares, mas se mexermos as outras (N, Q, P) elas deixam de ser perpendiculares*" (D10); "*A relação que continua perpendicular*" (D15).

Uma dupla (D11) observou apenas o movimento entre as retas, não fazendo referência também à relação entre os pontos que foram deslocados: "*As retas não se desgrudam, mas não ficam unidas no ponto K. Quando mechemos uma reta a outra meche também, mas o ponto K não é mais o centro*" (D11).

No segundo momento da atividade, doze duplas (D01, D02, D03, D05, D06, D08, D09, D10, D11, D12, D13 e D14) perceberam que os pontos *M, N, P, Q, R, S* e *T* apresentavam a mesma distância em relação ao ponto *K*, isto é, perceberam que são pontos equidistantes: "*Todos tem a mesma distancia*" (D01); "*Que tem a mesma distância*" (D02); "*Todos têm a mesma distância para K*" (D03); "*A distância da reta MK é a mesma de QK*" (D05); "*Tem a mesma distância*" (D06); "*Todos os pontos tem a mesma distância*" (D07); "*O ponto K é o meio e os outros pontos tem a mesma distância do ponto K*" (D08); "*Possuem a mesma distância ao ponto K*" (D09); "*Que eles tem a mesma distância em relação ao ponto K*" (D10); "*Que todos tem a mesma distância em relação ao ponto K*" (D11); "*Estão todos 2cm de distância de K*" (D12); "*Todos tem a mesma distância*" (D13); "*Estão todos 2 cm de distância do ponto K (contamos pelos quadrados da malha)*" (D14).

Apenas duas duplas (D04 e D13) observaram que a região do plano formada por todos esses pontos pode ser chamada de circunferência: "*Formam uma circunferência, circulo*" (D04); "*Circunferência*" (D13). Sete duplas apresentaram outras nomenclaturas para essa região: "*Setor circuncircular*" (D01); "*Ponto central*" (D02); "*seria parecido com um octógono*" (D06); "*Polígono*" (D07); "*poderíamos chama-la de hexágono*" (D11); "*forma quadricular*" (D12); "*Todos formam uma forma quadrangular*" (D14). Aqui fica evidente que apesar desses estudantes terem utilizado o conceito de circunferência na atividade, eles têm dificuldades em reconhecê-la pelo nome "circunferência", o que comprova que não é um conceito tão simples de se trabalhar no ensino básico.

6.1.2.3 Terceira atividade

A terceira atividade da segunda fase da sequência didática buscou fazer com que os estudantes determinassem o centro de uma circunferência por meio de três pontos. Nesse sentido, a atividade, inicialmente, solicitou que os estudantes criassem três pontos *M*, *N* e *P* de forma que eles (os pontos) sejam não alinhados. Em seguida, deveriam construir o ponto *K*, de maneira que ele esteja à mesma distância dos outros pontos (*M, N* e *P*).

Depois, os alunos deveriam mover os pontos construídos e analisar o que ocorreria, isto é, se os pontos permaneciam com a mesma distância, e caso contrário, deveriam refazer a atividade. Por fim, era necessário justificar a solução do problema.

No GeoGebra, os três pontos *M, N* e *P* podem ser determinados a partir da construção de um triângulo qualquer, por meio do recurso "Polígono", sendo esses pontos, os vértices do triângulo. Dessa forma, o ponto *K* seria o circuncentro desse triângulo, possuindo, assim a mesma distância dos pontos *M, N* e *P*.

Para estabelecer o ponto *K*, ou seja, o circuncentro do triângulo, devemos determinar as mediatrizes de cada lado do triângulo, por meio de retas perpendiculares a cada lado do triangulo, passando no ponto médio dos segmentos de reta *MN*, *NP* e *PM* (mas antes, é necessário definir os pontos médios desses segmentos de reta a partir do recurso “Ponto Médio ou Centro”). Podemos produzir as retas perpendiculares por meio do recurso “Reta Perpendicular”. Essas retas (as mediatrizes do triângulo) se interceptam no ponto *K* (circuncentro do triângulo), que é equidistante aos pontos *M, N* e *P* (vértices do triângulo).

Além disso, a partir das medianas do triângulo, é obtido o centro da circunferência inscrita nesse triângulo.

Apenas uma dupla de estudantes (D05) fez uso da construção de um triângulo, como explicado anteriormente, nessa atividade: “*Nós criamos um triângulo e no seu meio colocamos um ponto K, que possuía a mesma distância dos outros 3 pontos/vértices. Quando movemos o polígono, os 4 pontos se mexeram juntos*” (D05).

Após traçar os pontos *M, N* e *P*, uma dupla (D01) construiu uma circunferência a partir desses pontos, fazendo uso também do ponto médio na produção: “*Colocamos 3 pontos, depois círculo definido por 3 pontos, por último utilizamos ponto médio ou centro*” (D01).

Cinco duplas (D02, D03, D06, D07 e D13) fizeram referência apenas à circunferência na construção, mas não mencionando o ponto médio: “*Os pontos sempre continuarão com a mesma medida, pois em qualquer ponto da circunferência tem a mesma distância*” (D02); “*Mexa ele como se estivesse fazendo um círculo que a distância irá permanecer*” (D03); “*Movemos, mas se mexeram. Movemos denovo e não conseguimos. Depois conseguimos fazendo um círculo*” (D06); “*Nós selecionamos a ferramenta: círculo dado centro e um de seus pontos, e depois acrescentamos 2 pontos*” (D07); “*Nós fizemos um círculo, pois o raio tem sempre a mesma medida*” (D13). É importante destacar que D02, D03, D06 e D13 centraram-se em analisar o que ocorreu com os pontos da figura ao serem movidos, isto é, observaram que a equidistância entre os pontos permaneceu mesmo quando eles eram movimentados.

Uma dupla (D12) fez menção à diagonal da figura: "*Para conseguirmos o resultado, os pontos estavam à direita, em baixo e a diagonal do ponto central para não se alinharem e cada um tinha 1cm de distância do ponto central*" (D12).

Uma dupla (D14) utilizou vários recursos do GeoGebra, buscando revalidar sua construção: "*Tentamos fazer usando o ponto médio ou centro, e o Reflexão e relação de um ponto, mas não deu certo. Também tentamos usar Distância, comprimento e perímetro, mas não conseguimos. Nesta atividade não obtemos um bom resultado. Porém achamos que tem algo a ver com polígonos regulares*" (D14). Apesar de esses alunos terem utilizado diferentes recursos do *software*, eles afirmam que não conseguiram solucionar a atividade.

Uma dupla (D15) observou a relação de equidistância entre os pontos: "*Permanece a mesma distancia, pois K e o ponto médio dos três, caso contrario iria ficar desregula*" (D15). No entanto, três duplas (D09, D10 e D11) não conseguiram verificar essa relação: "*No momento em que movemos esses pontos sua distancia até o ponto K muda*" (D09); "*Que, eles não ficam com a mesma distância, quando mexemos eles*" (D10); "*A medida do ponto K aos outros pontos é de 3.7. quando mechemos a medida mudou, mas os pontos M, N e P ficaram imóveis, pois utilizamos um segmento para medirmos com um auxilio de instrumento do Geogebra*" (D11).

Por fim, duas duplas não conseguiram mover os pontos da figura, provavelmente por terem construído o triângulo por meio do recurso "Polígono Rígido" do GeoGebra, que só permite mover o triângulo como um todo: "*Eles se movem, pois não estão alinhados*" (D04); "*Porque os pontos não estão ligados*" (D08).

6.1.3 Terceira fase

A terceira fase da sequência didática é composta por oito atividades, que trabalham de forma efetiva o conceito de quadriláteros notáveis.

6.1.3.1 Primeira atividade

A primeira atividade da terceira fase da sequência didática objetivou construir um paralelogramo a partir de três de seus vértices. Dessa forma, em um primeiro momento, a atividade solicitou que os estudantes criassem três pontos *M, N* e *P* não alinhados e, em seguida, um paralelogramo *MNPQ*. Após a construção, os alunos deveriam mover os vértices do paralelogramo e observar o que ocorre. Se a figura não permanecesse um paralelogramo, eles deveriam refazer a produção.

A atividade solicitou ainda que os estudantes determinassem a medida dos comprimentos dos lados e a medida dos ângulos do paralelogramo *MNPQ*, além de mover novamente os vértices, analisando o que ocorreria. A finalidade aqui era fazer com que eles (os alunos) percebem algumas propriedades desse quadrilátero notável, como: *(i) lados opostos congruentes* e *(ii) ângulos internos opostos congruentes*.

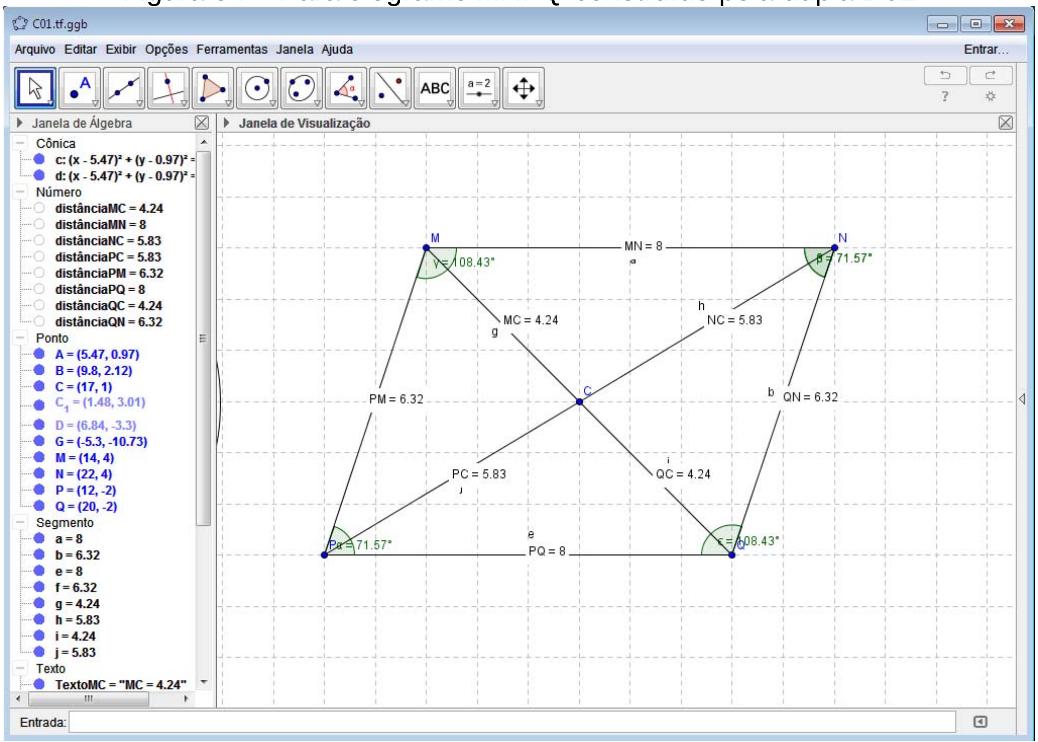
Em um segundo momento, a atividade orientou que os participantes da pesquisa construíssem um ponto *C*, de modo que esse ponto fosse o centro do paralelogramo. Depois, os estudantes deveriam criar e determinar as medidas dos segmentos de reta *MC, NC, PC* e *QC*, e também mover os pontos da figura, verificando o que ocorreria. Nesse sentido, eles poderiam evidenciar que: *(iii) as diagonais de todo paralelogramo se cortam ao meio*.

No item 5.5.3 dessa dissertação vimos como os estudantes podem resolver a atividade no *software* GeoGebra, estando no primeiro nível ou no segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Analisando as produções das duplas de alunos no GeoGebra, verificamos que quatro duplas (D01, D02, D13 e D14) apresentaram construções características do segundo nível de Van-Hiele conforme o item 5.5.3, no qual, ocorre o reconhecimento das figuras geométricas por meio de suas propriedades. Na Figura 54 encontramos um exemplo para esse tipo de produção (dupla D02).

Assim, verificamos que a dupla D02 construiu o paralelogramo considerando suas propriedades (*(i) lados opostos congruentes*, *(ii) ângulos internos opostos* *congruentes* e *(iii) as diagonais de todo paralelogramo se cortam ao meio*), assim, nessa atividade, ela trabalhou no segundo nível de pensamento geométrico vanhieliano. Aqui os estudantes utilizaram o recurso da malha quadriculada do GeoGebra, que pode ter contribuído para eles terem êxito na atividade.

Figura 54 – Paralelogramo *MNPQ* construído pela dupla D02

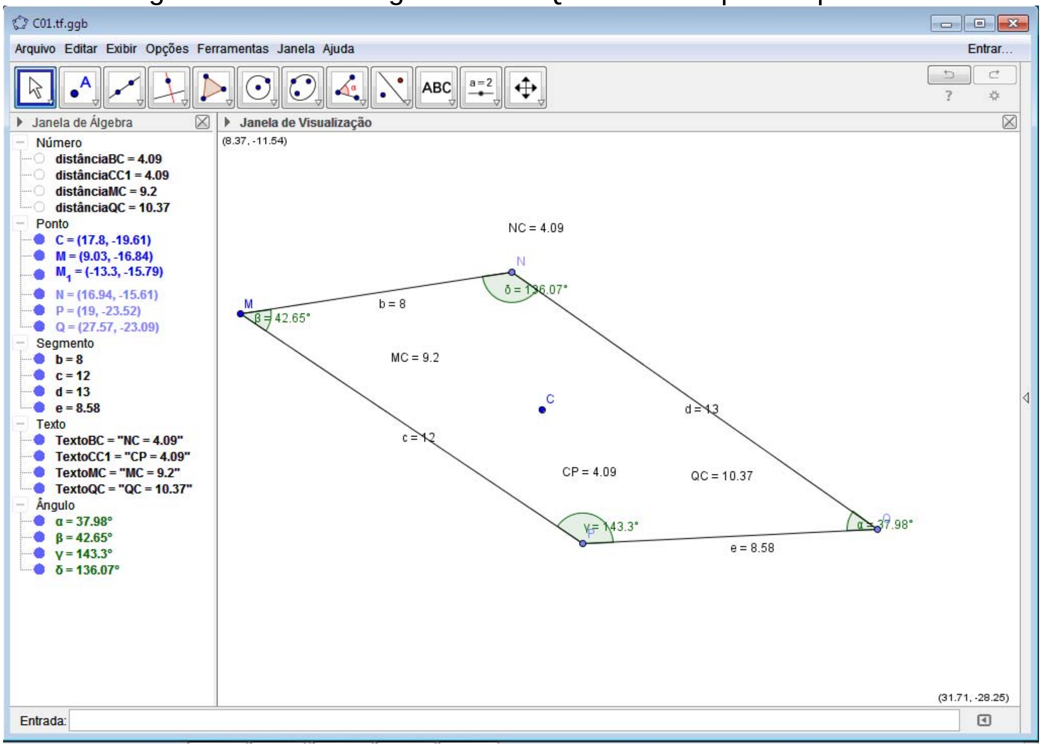


Fonte: Dados da pesquisa

Seis dessas duplas (D03, D05, D07, D09, D10 e D15) apresentaram produções típicas do primeiro nível vanhieliano, isto é, que construíam o paralelogramo a partir do seu aspecto global, como previsto no item 5.5.3. Na Figura 55 encontramos uma ilustração para esse caso, apresentando a produção da dupla D10.

Nesse caso, observamos que apesar da facilidade do GeoGebra em determinar as medidas dos comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos do paralelogramo, possibilitando que o estudante realizasse correções no desenho, de forma que suas propriedades fossem respeitadas, a dupla D10 construiu o paralelogramo apenas considerando sua aparência física. Tal fato pode ser verificado pelos lados opostos desse quadrilátero notável, que não são congruentes, e pelos ângulos internos opostos, que não também não são iguais. Logo, essa dupla ainda não reconhece o paralelogramo a partir de suas propriedades (por exemplo: *(i) lados opostos congruentes* e *(ii) ângulos internos opostos congruentes*), estando no primeiro nível de Van-Hiele.

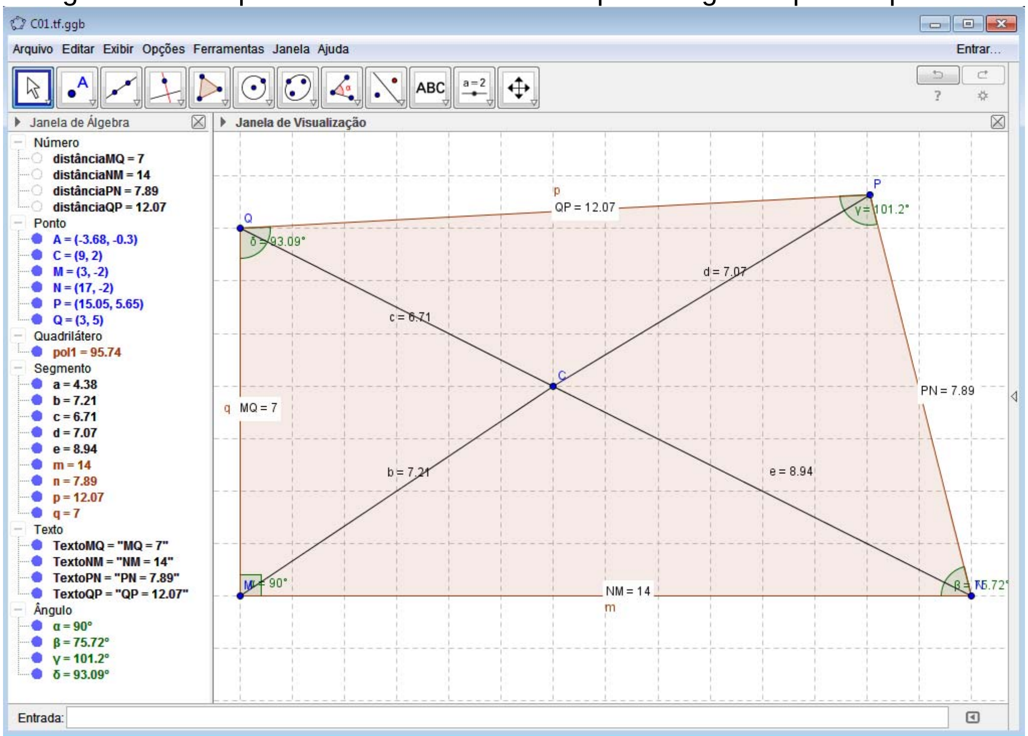
Figura 55 – Paralelogramo *MNPQ* construído pela dupla D10



Fonte: Dados da pesquisa.

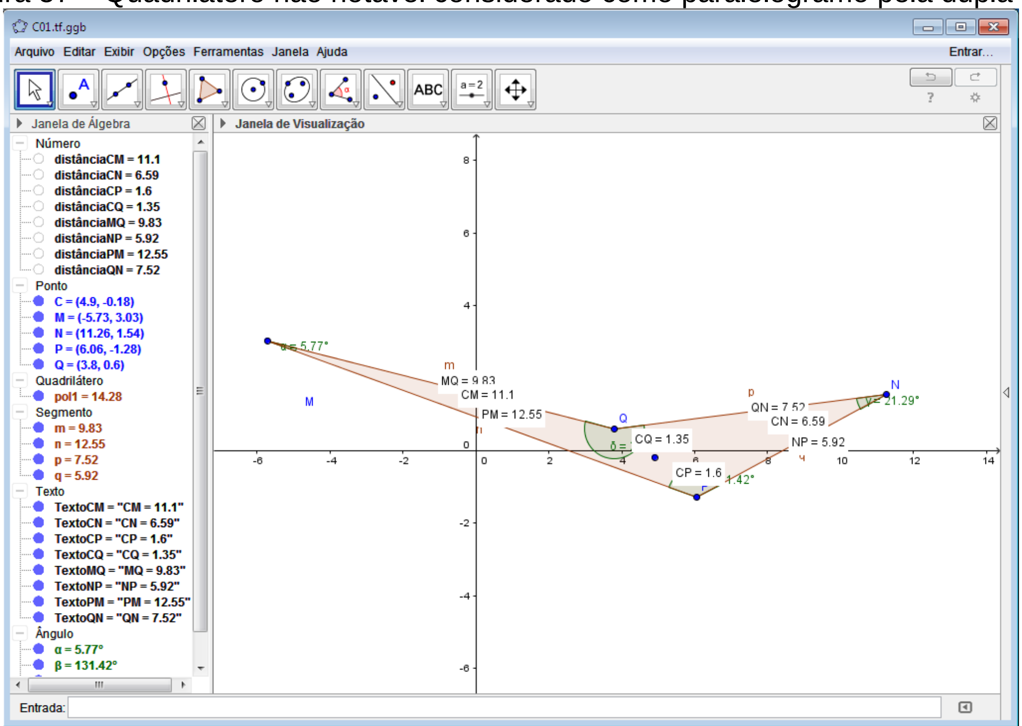
Como previsto no capítulo V (item 5.5.3), identificamos duplas de estudantes (cinco no total) que não produziram paralelogramos, pois ainda não conseguem reconhecer esse quadrilátero notável nem pelo seu aspecto global, como também pelas suas propriedades. É o caso das duplas D04, D06, D11 e D12 que construíram trapezoides, e a dupla D08 que fez um quadrilátero não notável. As Figuras 56 (dupla D12) e 57 (dupla D08) ilustram esses dois tipos de produções.

Figura 56 – Trapezoide considerado como paralelogramo pela dupla D12



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 57 – Quadrilátero não notável considerado como paralelogramo pela dupla D08



Fonte: Dados da pesquisa

As produções das duplas de estudantes D12 e D8 evidenciam que eles apresentam dificuldades em compreender o conceito de paralelogramo, o que exige a necessidade do professor de Matemática realizar um trabalho mais sistemático em sala de aula.

Agora, analisando os registros dos estudantes nas fichas de atividades, notamos que nenhuma das duplas de alunos fez referência explícita às propriedades *(i)* e *(ii)* do paralelogramo, se centrando em apenas observar se o quadrilátero notável deixava de ser paralelogramo ou não, ao moverem os seus vértices.

Desse modo, quatro duplas de alunos (D01, D11, D14 e D15) verificaram que movendo os vértices da figura, ela continua sendo um paralelogramo: "*Criamos o paralelogramo MNPQ, movemos suas vértices e ele continuou um paralelogramo. Colocamos as medidas e os ângulos dele. E quando movemos os pontos os ângulos se autocorrigem*" (D01); "*O paralelogramo permanece um paralelogramo. M=obtuso, Q=obtuso, P=agudo, N=agudo*" (D11); "*Ao fazer um polígono regular, sendo um paralelogramo, assim, se movermos os vértices não deixará de ser um paralelogramo. Determinamos a medida dos ângulos e lados, sendo eles, os lados cada um de 3.16 e os ângulos 90º. Ao movermos os vértices, os lados mudam, mas as medidas de cada lado são iguais. Já os ângulos não*" (D14); "*Ele continua um paralelogramo, com outro formato, mas continua*" (D15).

Duas duplas (D02 e D03) afirmaram que a figura deixa de ser paralelogramo ao terem seus vértices deslocados: "*Ele não permanece um paralelogramo. P=71,57º/N=71,57º/M=108,43º/Q=108,43º. Ao movermos um vértice, todos os ângulos mudam menos o oposto*" (D02); "*Se mexer só um lado ele não é mais um paralelogramo. Mas se mexer todos os lados é possível. Mas se fizermos retas paralelas, funciona*" (D03).

Sete duplas (D05, D06, D08, D09, D10, D12 e D13) observaram se as medidas dos comprimentos dos lados ou se as medidas dos ângulos alteravam com o movimento dos vértices da figura: "*O tamanho de 2 arestas aumenta/diminui, depende para que lugar você mexe o vértice. Como a aresta, o ângulo do vértice mexido aumenta/diminui*" (D05); "*4; 2,8; 4; 2,83. 45º e 135º. Os ângulos* *mudam*”(D06); “*As medidas e os ângulos mudam de acordo com paralelogramo*” (D08); “*Os ângulos e as retas (lados) deixam em um momento de serem paralelas*” (D09); “*Quando movemos o vértice M os ângulos não mudam, porém quando movemos os outros, isso não acontece*” (D10); “*A largura e o movimento são alterados a partir dos movimentos*” (D12); “*As medidas dos ângulos e lados mudam*” (D13).

Duas duplas (D04 e D07) registraram apenas os valores das medidas dos comprimentos dos lados e dos ângulos das figuras: “*Lados: MQ=6.34, MN=4.1, NP=6.91, PQ=4.14; Ângulos: QMN=81.04º, MNP=99.21º, NPQ=79.94º, PQM=99.8º; Perimetro: 20*” (D04); “*MN-8.06, PM-5.32, PQ-7.34, QN-5.01; M=53.26º, N=119,43º, Q=59,79º, P=127.52º*” (D07). Aqui chamamos atenção para o fato de que a dupla D04 fez referência a medida do perímetro da figura que construiu, no entanto, o conceito dessa grandeza geométrica não foi trabalhado na sequência didática.

Em relação ao segundo momento da atividade, evidenciamos que nenhum dos estudantes fez menção à propriedade *(iii)* do paralelogramo, discutindo apenas sobre mudanças nos segmentos de reta *MC, NC, PC* e *QC* e dos ângulos internos, o comportamento do ponto *C*, e que a figura deixava de ser paralelogramo com a movimentação dos pontos.

Nove duplas (D01, D02, D03, D06, D07, D08, D09, D12 e D14) observaram se no deslocamento dos pontos da figura, houve mudança nas medidas dos segmentos de reta *MC, NC, PC* e *QC* e dos ângulos internos: “*Colocamos o ponto C no centro do paralelogramo e criamos os segmentos MC, NC, PC, QC e determinamos suas medidas. Quando movemos os pontos, notamos que eles se autocorrigem e que MC=QC e NC=PC*” (D01); “*MC=4.24/NC=5.83/PC=5.83/QC=4.24. A forma e a medida muda*” (D02); “*A distancia muda*” (D03); “*MN=141; NC=141; PC=3,16; QC=3,16. O comprimento muda*” (D06); “*O ponto centro não muda de lugar, mas as medidas dos segmentos: MC, NC, PC, QC se alteram*” (D07); “*As medidas mudam de acordo com o ponto C*” (D08); “*Além dos lados e dos ângulos deixarem de ser paralelas, a distancia de MC, QC, PC e NC muda*” (D09); “*O tamanho dos segmentos mudam a partir de nossos* *movimentos*" (D12); "*Criamos um ponto no centro do paralelogramo, com isso ao ligarmos o ponto C aos seus vértices e movimentar, em algumas posições, poderá formar uma pirâmide de base quadrada, mesmo assim os lados mudam, mas todos ficam com a mesma medida e o ângulo permanece*" (D14).

Cinco duplas (D04, D05, D10, D13 e D15) analisaram o comportamento do ponto *C*, quando os outros pontos eram movimentados: "*Os pontos se moveram e o ponto C quando não tinha contanto com uma vértice ficava no centro da figura*" (D04); "*O ponto que você move, move-se sozinho, e portanto o ponto C não continua no meio do paralelogramo*" (D05); "*Quando nós movemos os vértices, o ponto C não continua sendo o centro do paralelogramo. Não conseguimos colocar exatamente o ponto C no centro*" (D10); "*O ponto C acaba saindo do centro*" (D13); "*O ponto C vai junto, afinal é o ponto médio*" (D15).

Além disso, uma dupla (D11) notou que a figura deixava de ser um paralelogramo com o deslocamento de seus pontos: "*O paralelogramo deixa de ser paralelogramo e dependendo qual ponto você move a distância dele para o ponto C diminui ou aumenta*" (D11).

6.1.3.2 Segunda atividade

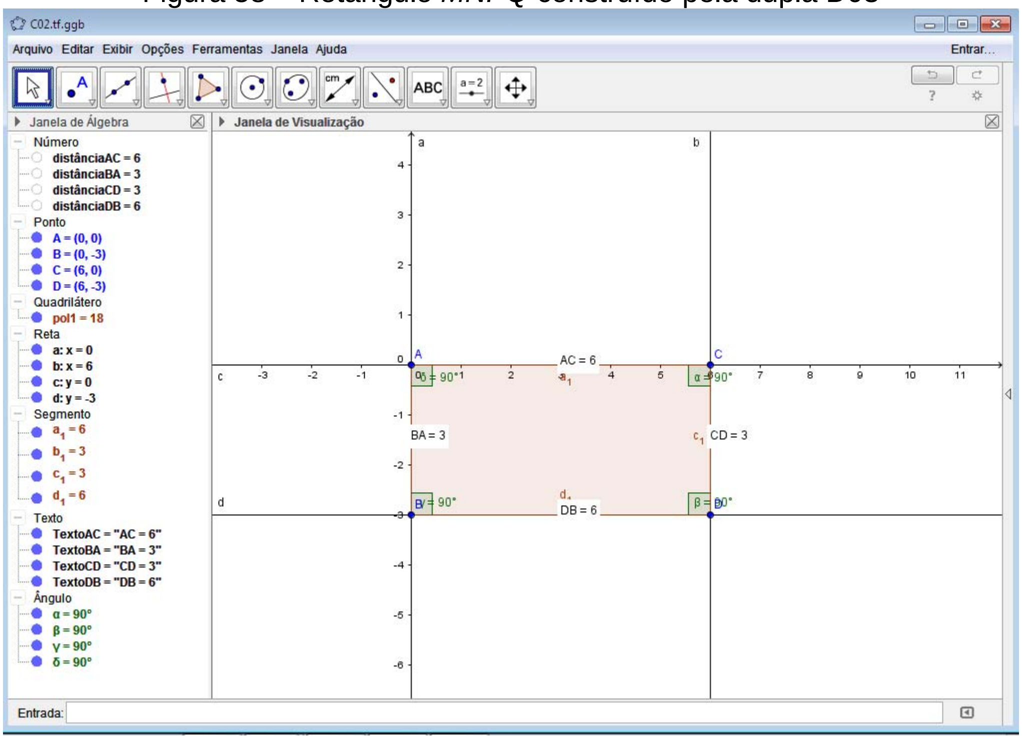
A segunda atividade da terceira fase da sequência didática objetivou construir um retângulo a partir da construção de perpendiculares. Nesse sentido, inicialmente, a atividade pediu que os alunos produzissem um segmento de reta *MN*, e a partir dele, construíssem o retângulo *MNPQ*. Em seguida, eles deveriam mover todos os pontos da figura, analisar se permanecia como retângulo, e caso contrário, isto é, se o quadrilátero notável deixasse de ser um retângulo quando os seus pontos fossem deslocados, os estudantes deveriam refazer a construção.

Além disso, a questão solicitava a justificativa da produção, isto é, o porquê da figura construída ser um retângulo. Assim, poderíamos verificar se os estudantes faziam referência à aparência global ou à definição usual (*quadrilátero notável que possui os quatro ângulos internos congruentes*) ou as propriedades do retângulo (*(i)* *os lados opostos congruentes, (ii) os ângulos internos opostos congruentes, (iii) as diagonais se cortam ao meio, (iv) as diagonais são congruentes*).

Podemos evidenciar no item 5.5.3 desse trabalho as possibilidades de solução para a atividade no GeoGebra por um estudante que esteja no primeiro nível de pensamento geométrico e também por um aluno do segundo nível.

Verificando as construções das duplas de estudantes desenvolvidas no *software* GeoGebra, observamos que sete duplas (D01, D02, D03, D06, D09, D12 e D14) apresentaram produções características do segundo nível de Van-Hiele, no qual, as figuras geométricas são consideradas a partir de suas propriedades, como previsto no item 5.5.3. Na Figura 58 está ilustrado um exemplo para esse caso, com a produção da dupla D03.

Figura 58 – Retângulo *MNPQ* construído pela dupla D03

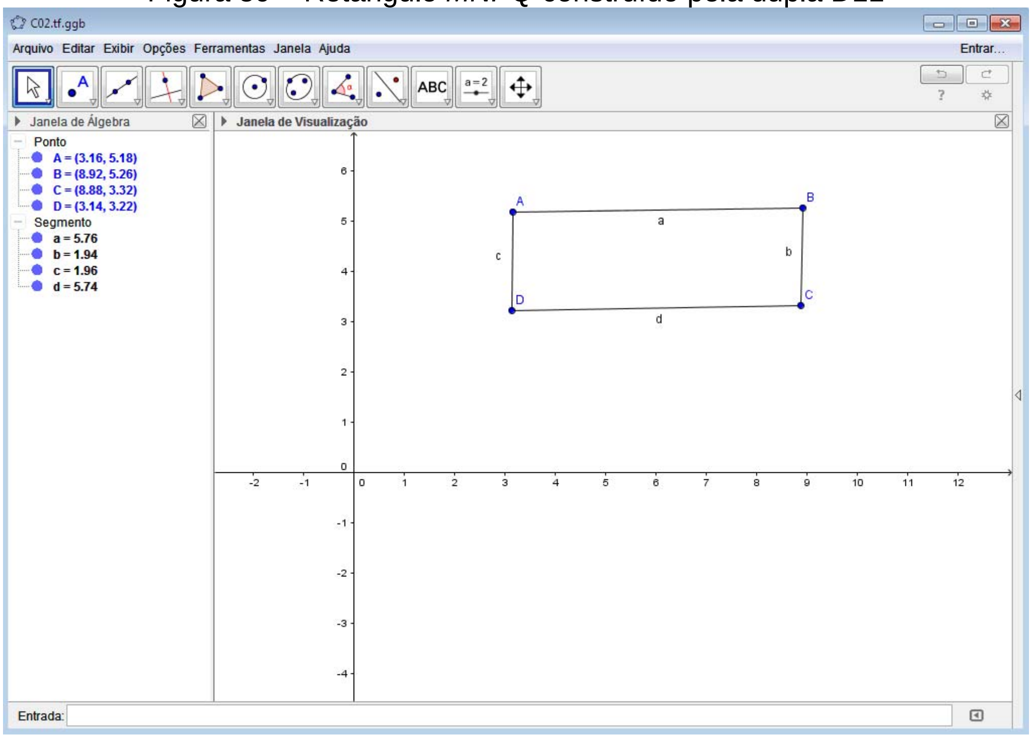


Fonte: Dados da pesquisa

Pela Figura 58, evidenciamos que D03 construiu o retângulo *MNPQ* a partir da construção de retas perpendiculares, não apresentando dificuldades na produção. Além disso, essa dupla fez uso da definição do retângulo e de duas propriedades: *(i) os lados opostos congruentes, (ii) os ângulos internos opostos congruentes*. Dessa forma, na atividade analisada, a dupla D03 atuou no segundo nível de pensamento geométrico vanhieliano.

Identificamos sete duplas de estudantes (D04, D05, D07, D08, D10, D11, D13 e D15) que apresentaram produção no GeoGebra típica do primeiro nível de Van-Hiele, caracterizado pelo reconhecimento das figuras planas pelo seu aspecto físico. No Figura 59, podemos encontrar uma ilustração desse fenômeno, com a produção da dupla D11.

Figura 59 – Retângulo *MNPQ* construído pela dupla D11



Fonte: Dados da pesquisa

Pela Figura 59, notamos que a dupla D11 construiu o retângulo apenas considerando sua aparência física, não fazendo referência às suas propriedades. Nesse sentido, na atividade analisada, tal dupla estava trabalhando no primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Nessa atividade, não identificamos duplas que tivessem construído outra figura que não se configurasse como sendo um retângulo.

Em seguida, analisamos as produções dos estudantes deixadas nas fichas de atividades, referentes às justificativas acerca da figura construída ser um retângulo, e evidenciamos que as duplas fizeram uso do aspecto global, da definição usual e de algumas propriedades desse quadrilátero notável. Além disso, algumas duplas analisaram o comportamento do retângulo, quando seus pontos eram descolados, se ele permanecia ou não como retângulo.

Duas duplas (D11 e D12) fizeram uso apenas de uma das propriedades do retângulo (*(i) os lados opostos congruentes*) em sua justificativa, que é uma característica do segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele: "*Porque tem dois lados paralelos iguais*" (D11); "*Porque todos os lados paralelos são iguais*" (D12).

Três duplas (D06, D10 e D13) utilizaram somente a definição usual da figura em sua explicação: "*Porque tem 4 vertices, todos [os ângulos são] retos*" (D06); "*Porque tem 4 lados e todos seus ângulos são retos*" (D10); "*Porque é um quadrilátero*" (D13).

Também, duas duplas (D02 e D04) fizeram referência apenas à aparência do retângulo na justificativa, que é uma característica do primeiro nível vanhieliano: "*[...] para formar um retângulo precisa de dois lados iguais grandes e dois iguais só que pequenos*" (D02); "*Ele possui quatro lados, dois lados menores com a mesma medida e dois maiores de medidas iguais*" (D04).

Cinco duplas (D01, D03, D07, D09 e D14) usaram tanto a definição usual como um das propriedades do retângulo *(i)* em suas explicações: "*É um retângulo porque cotém 4 ângulos retos e seus lados paralelos são iguais*" (D01); "*Para isso você tem que colocar 4 angulos retos e todos os lados opostos terem a mesma medida*" (D03); "*Porque ele é um polígono quadrilátero, lados opostos iguais e os outros lados opostos iguais também*" (D07); "*Os angulos tem 90º, os lados opostos são iguais*" (D09); "*Retângulo: como diz o nome, "retangulo" que significa todos os ângulos retos. É um polígono que tem seus lados opostos iguais*" (D14).

Duas duplas (D05 e D08) utilizaram a aparência e a definição do retângulo nas justificativas: "*Porque tem 4 lados 2 maiores e 2 menores e possui 4 ângulos de*

90º” (D05); “*Porque ele é quadrilátero e possui duas retas paralelas longas e duas retas paralelas curtas*” (D08).

Além disso, seis duplas (D01, D02, D03, D11, D14 e D15) analisaram o comportamento do retângulo, quando seus pontos eram deslocados: “*Criamos o retângulo MNPQ, movemos os pontos e ele continuou um retângulo*” (D01); “*Ele não permanece um retângulo*” (D02); “*Não é possível, a não ser que você mova os 4 pontos de modo para ele continuar sendo um retangulo*" (D03); “*Ele não permanece um retângulo quando movemos os pontos*” (D11); “*Começamos a tentar pelo o polígono regular, mas de todo jeito iria formar um quadrado. procuramos mais soluções, como o polígono rígido, e o semideformável, que chegou perto, mas não trouxe uma solução. Depois um segmento de comprimento físico e também fixamos o polígono, porém não encontramos um resultado. Porém, o que chegou bastante perto foi o polígono rígido que permanece um retângulo*” (D14); “*Ele vai continuar um retangulo, pois mesmo movendo ele não mudara*” (D15)

Ainda nessa atividade analisada, chamamos atenção para as produções das duplas D02, D11 e D07. A dupla D02 no GeoGebra produziu um retângulo fazendo uso das suas propriedades, todavia, nas fichas de atividade, ao justificar sua figura como retângulo, fez referência ao seu aspecto global. Enquanto que D11 e D07 construíram o retângulo no GeoGebra a partir de sua aparência física, mas, nas fichas de atividade, mencionaram um das propriedades desse quadrilátero notável. Esses indícios parecem evidenciar que para a atividade analisada, esses estudantes estavam trabalhando transição entre os níveis iniciais de pensamento geométrico de Van-Hiele.

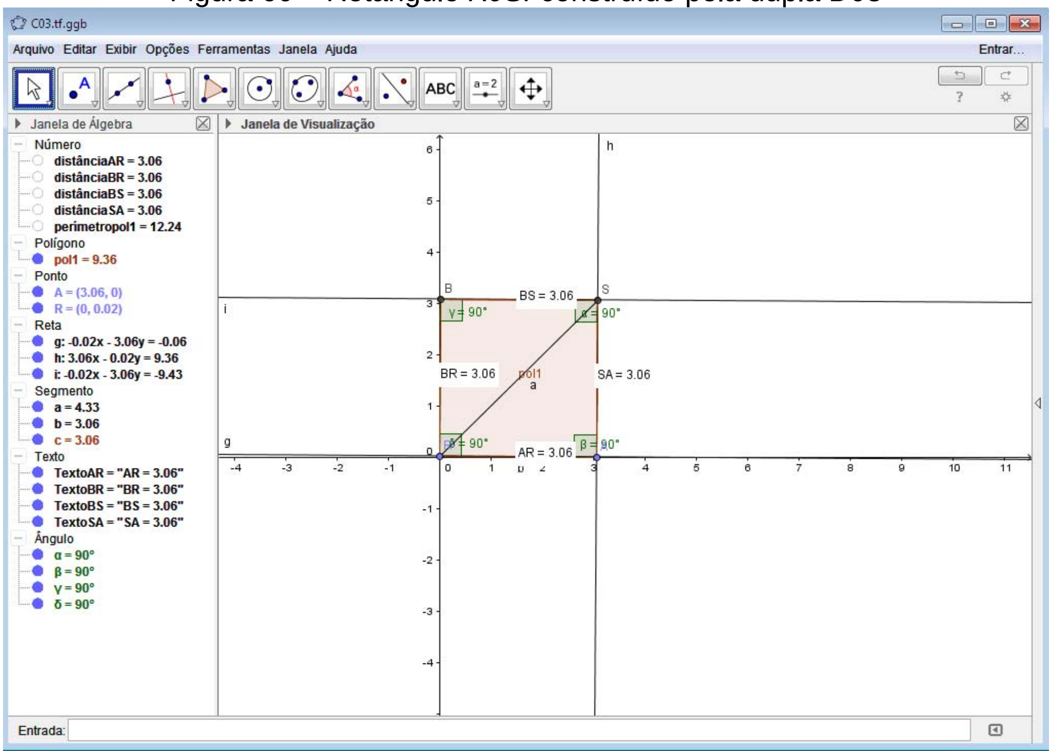
6.1.3.3 Terceira atividade

A terceira atividade da terceira fase da sequência didática buscou construir um retângulo a partir de uma de suas diagonais. Tal fato estabelece um conflito nos estudantes, pois há certa tendência em considerarem a diagonal como um dos seus lados na construção da figura. Primeiramente, a atividade orientou que os alunos criassem um segmento de reta *RS*, e depois um retângulo de forma que *RS* seja sua diagonal. Em seguida, eles deveriam mover os pontos *R* e *S* e verificar se a figura continuava sendo um retângulo (caso contrário, deveriam refazer a produção). No final da atividade, os estudantes deveriam explicar por que sua figura é um retângulo.

As possibilidades de resolução para essa atividade no GeoGebra segundo os níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele foram discutidas no item 5.5.3.

Na análise das construções realizadas no GeoGebra pelas duplas, evidenciamos que quatro delas (D01, D03, D10 e D14) demonstraram o pensamento geométrico característico do segundo nível de Van-Hiele, pois em suas produções fizeram uso das propriedades do retângulo, como ilustrado na Figura 60.

Figura 60 – Retângulo *RJSI* construído pela dupla D03



Fonte: Dados da pesquisa

Pela Figura 60, constatamos que a dupla considerou um ângulo reto fora do segmento de reta *RS*. Nesse sentido, ela construiu uma reta qualquer que passa pelo ponto *S*, e em seguida, traçou a perpendicular a essa reta, passando também no ponto *S*. A dupla considerou duas propriedades do retângulo para sua construção: *(i) os lados opostos congruentes, (ii) os ângulos internos opostos congruentes*. Essas evidências demonstram que esses estudantes estão, no item estudado, atuando no segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

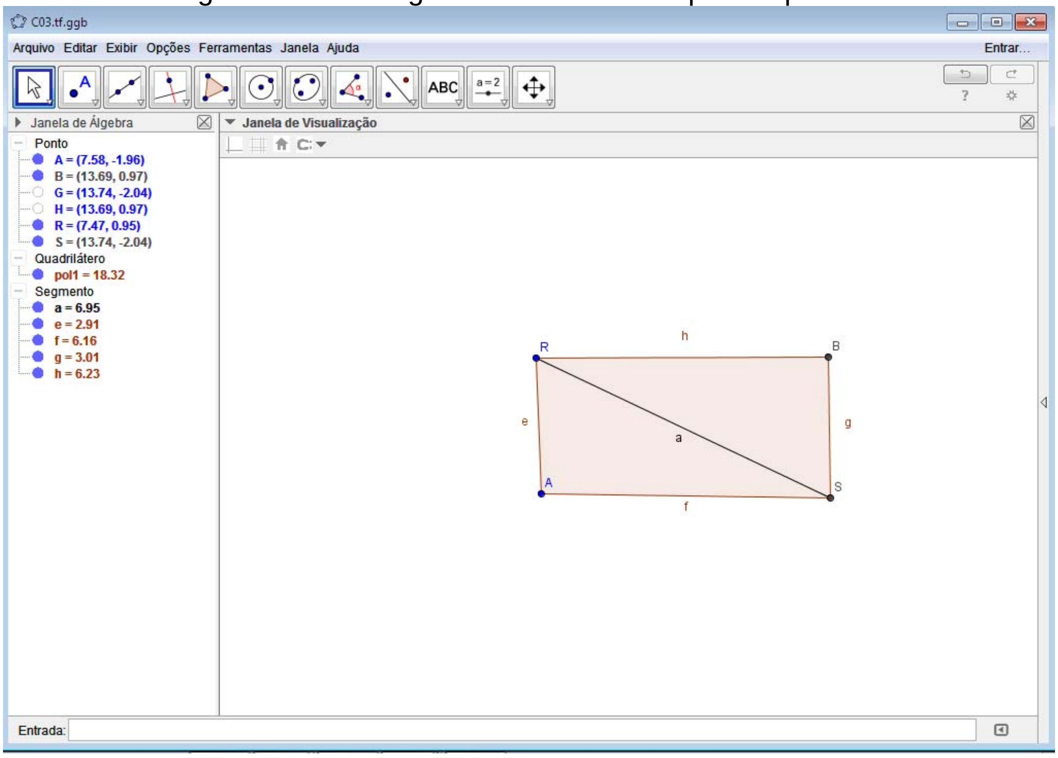
Aqui destacamos o fato de que a dupla D10, que nessa atividade produziu o retângulo atuando no segundo nível de Van-Hiele, enquanto que na atividade anterior, ela estava trabalhando no primeiro nível. Tal fenômeno é um indicio de que a sequência didática pode ter promovido um avanço do pensamento geométrico desses alunos, para o retângulo.

Averiguamos que oito duplas (D02, D04, D05, D07, D09, D11, D13 e D15) apresentaram produções características do primeiro nível de Van-Hiele, isto é, construíram o retângulo no GeoGebra por meio do aspecto global desse quadrilátero notável, desconsiderando suas propriedades. Podemos observar na Figura 61 uma ilustração desse fenômeno (produção da dupla D05).

Dessa forma, notamos que a dupla D05 fez uso apenas da aparência física do retângulo para construí-lo, assim, ela não considerou as propriedades dessa figura na produção, o que nos dá indícios que esses estudantes estão trabalhando no primeiro nível vanhieliano, isso para a atividade analisada. Ainda, identificamos três duplas (D06, D08 e D12) que ao invés de produzirem retângulos, construíram paralelogramos (não retângulos). A Figura 62 tem uma ilustração para esse caso, com a produção da dupla D06.

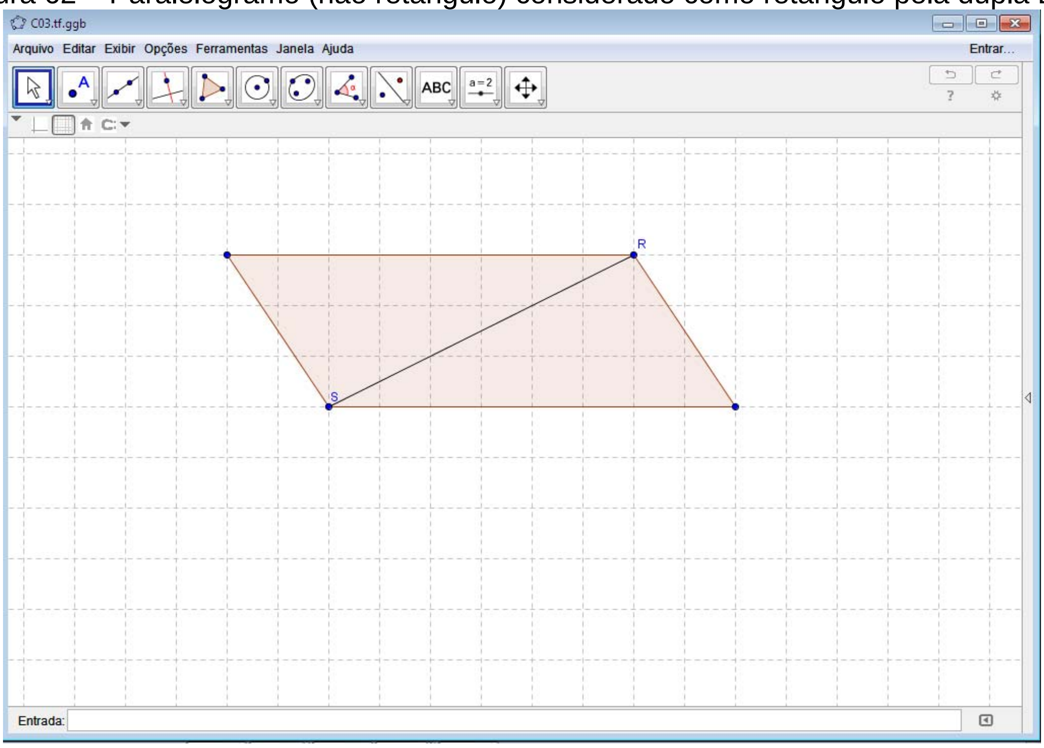
Nesse segundo caso, podemos analisar que a dupla D06 apresentou dificuldades em construir um retângulo a partir de sua diagonal, o que pode ter contribuído para produzir um paralelogramo. Outro aspecto que nos chamou atenção foi que essa dupla ativou o recurso da malha quadriculada do GeoGebra, o que poderia ter ajudado na construção do retângulo. Mesmo assim, D06 criou um paralelogramo (não retângulo). Na atividade anterior, referente ao primeiro retângulo, essa dupla não apresentou dificuldades em construir esse quadrilátero notável.

Figura 61 – Retângulo *RJSI* construído pela dupla D05



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 62 – Paralelogramo (não retângulo) considerado como retângulo pela dupla D06



Fonte: Dados da pesquisa

Tal resultado reforça a necessidade do professor de Matemática realizar um trabalho mais sistemático, elaborando situações em que os estudantes tenham contato, por exemplo, com atividades que solicitem a construção dos quadriláteros notáveis a partir de suas diagonais em ambientes de Geometria Dinâmica.

Ainda nesse item, não identificamos nenhuma dupla utilizando o segmento de reta *RS* como lado do retângulo, como tínhamos antecipado no capítulo anterior. Tal fato parece mostrar que os estudantes investigados não apresentam dificuldades em reconhecer RS como uma diagonal do quadrilátero notável evidenciado na atividade.

Em um segundo momento, realizamos a análise das justificativas em relação à figura produzida se configurar como um retângulo. Nosso interesse aqui era verificar se os estudantes mencionavam a aparência física ou a definição usual ou as propriedades da figura em suas explicações.

Três duplas de estudantes (D11, D12 e D15) fizeram uso apenas de uma das propriedades (*os lados opostos são congruentes*) do retângulo nas justificativas: "*Porque tem dois lados paralelos iguais*" (D11); "*Porque tem todos os lados paralelos iguais*" (D12); "*Pois os lados opostos são iguais*" (D15). Aqui chamamos atenção para as duplas D11 e D15, que na atividade anterior fizeram referência apenas ao que ocorria com o retângulo, quando seus pontos eram deslocados. Esses indícios parecem mostrar que houve avanço no pensamento geométrico desses estudantes, por meio da sequência didática.

Duas duplas (D06 e D10) fez uso exclusivo da definição usual da figura na explicação: "*Por causa que ele tem 4 vertices*" (D06); "*Porque tem 4 ângulos retos*" (D10). Observamos apenas uma dupla (D02) utilizando apenas a aparência física do retângulo em sua justificativa: "*porque tem dois lados iguais grandes e dois pequenos*" (D02).

Duas duplas (D01 e D03) utilizaram a definição e uma propriedade do retângulo: "*É um retângulo porque contém 4 ângulos retos e seus lados paralelos são iguais*" (D01); "*O Retângulo precisa ter todos os lados opostos iguais e ângulos de 90º. Porém fizemos um quadrado. passamos um tempo pensando: quadrado é retângulo? Concluímos que sim e fechamos a tarefa*" (D03).

Pelo registro deixado pela dupla D03 na ficha de atividade, notamos que essa atividade gerou um desequilíbrio, possibilitando que estudantes refletissem sobre sua construção, e concluíssem que um quadrado é um retângulo, pois apresentam propriedades em comum: *(i) lados opostos paralelos congruentes e (ii) ângulos internos opostos congruentes.* Para tanto, esses alunos conseguiram estabelecer uma relação entre as propriedades dos dois quadriláteros notáveis, que é uma característica do terceiro nível de Van-Hiele, no qual, o aluno consegue realizar a ordenação das propriedades das figuras geométricas. Tal fato representa um significativo avanço no pensamento geométrico desses estudantes.

Apenas uma dupla (D05) fez uso da aparência e da definição da figura na explicação: "*Nós fizemos um retângulo a partir da função polígono rígido. Ele tem 4 lados 2 maiores e 2 menores e 4 ângulos 90º*" (D05).

Seis duplas (D01, D02, D06, D08, D11 e D13) analisaram se o retângulo permanecia (ou não) como retângulo, quando seus pontos eram movimentados no *software*: "*Fizemos o segmento RS e depois construímos um retângulo e RS era a diagonal. Movemos os pontos RS e a figura continuou um retângulo*" (D01); "*Não continua sendo um retângulo*" (D02); "*o segmento RS faz com que qualquer movimento de RS continue sendo um retangulo*" (D06); "*Usamos s ferramenta "polígono rígido", movemos e continuou um retangulo só que virado*" (D08); "*Não, pois quando mechemos os pontos deixa de ser um retângulo*" (D11); "*Porque nós utilizamos o polígono rígido, então ele continua sendo um retângulo*" (D13).

Duas duplas (D07 e D14) explicaram como construíram o retângulo: "*Usamos a ferramenta: Poligono Rígido, para fazer um retangulo, depois fizemos o segimento de reta para fazer RS ser a diagonal do retangulo*" (D07); "*Nós tentamos de vários modos, mas não achamos um resultado. Porém o polígono rígido trouxe um bom resultado*" (D14).

6.1.3.4 Quarta atividade

A quarta atividade da terceira fase da sequência didática teve por finalidade construir um quadrado a partir da construção de circunferência e de paralelas e perpendiculares. Dessa forma, em um primeiro momento, a atividade solicitava que os estudantes criassem um segmento de reta *MN*, e a partir dele, construíssem um quadrado *MNPQ*. Depois, eles deveriam deslocar os pontos *M*, *N*, *P* e *Q* e verificar se a figura permanece um quadrado, caso contrário, deveriam refazer a atividade. Em um segundo momento, os alunos foram orientados a explicitarem porque a figura produzida se configurava como um quadrado.

Os percursos de solução para essa atividade no GeoGebra em relação aos níveis vanhielianos podem ser observadas no capítulo V, item 5.5.3.

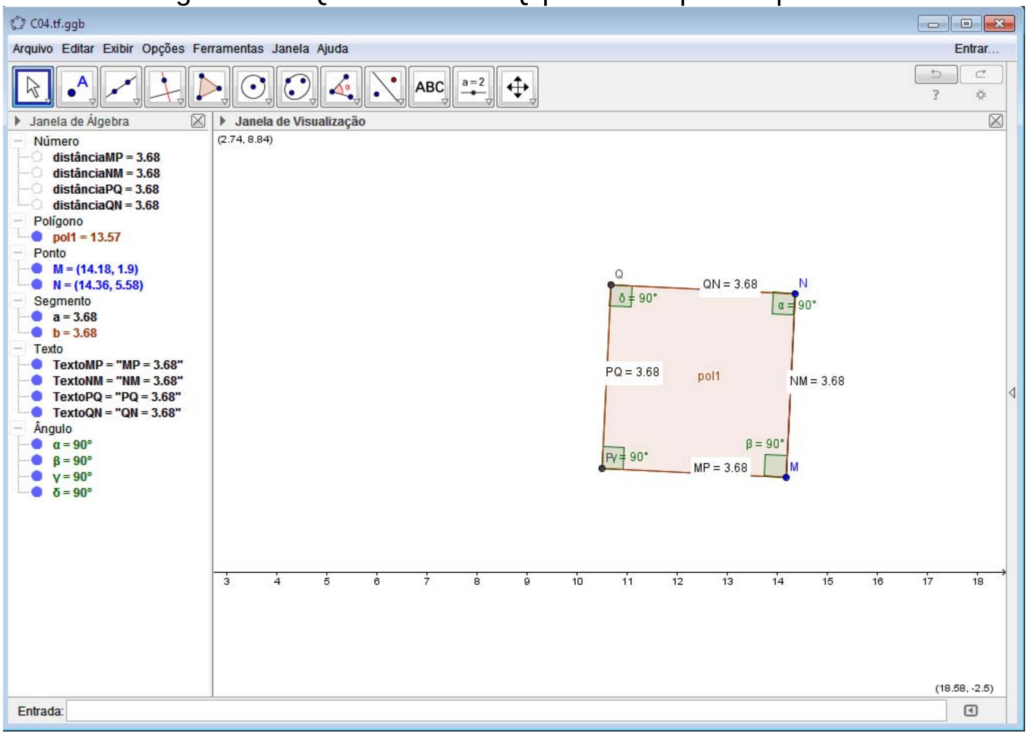
Analisando as produções dos estudantes desenvolvidas no *software* GeoGebra, notamos que apenas duas duplas de alunos (D03 e D12) apresentaram o pensamento geométrico típico do segundo nível de Van-Hiele, isto é, fizeram uso das propriedades do quadrado em suas produções. No entanto, essas duplas não fizeram uso dos conceitos de circunferência e de paralelas e perpendiculares. Na Figura 63 podemos encontrar uma ilustração para esse caso (com a dupla D03).

Assim, constatamos que apesar da dupla D03 não terem mobilizado os conceitos de circunferência e de paralelas e perpendiculares (trabalhados nas fases anteriores da sequência didática) conforme antecipado no item 5.5.3, ela fez uso de duas propriedades do quadrado na construção: *(i) dois lados opostos paralelos congruentes* e *(ii) ângulos internos opostos congruentes*. Tal fato é uma característica do segundo nível de pensamento geométrico vanhieliano.

Notamos dez duplas (D01, D04, D05, D07, D09, D10, D11, D13, D14 e D15) demonstrando o pensamento geométrico característico do primeiro nível de Van-Hiele, pois fizeram uso apenas do aspecto global do quadrado em suas construções. A Figura 64 apresenta um exemplo desse fenômeno (com D01).

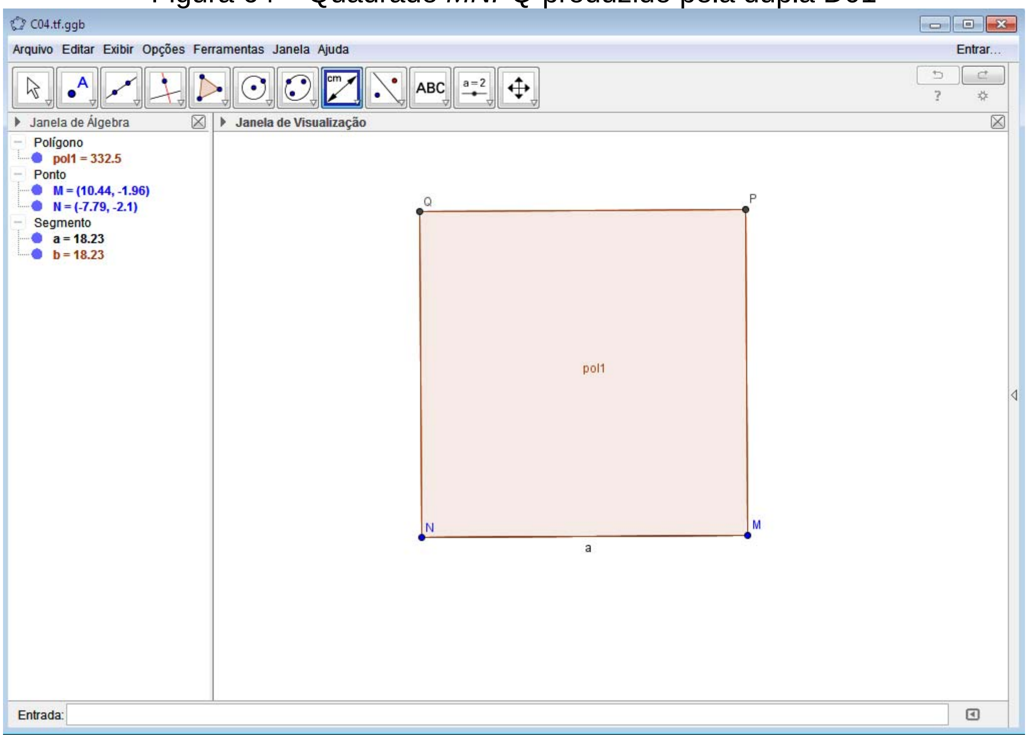
Nesse segundo caso, verificamos que a dupla D01 fez uso apenas da aparência física do quadrado na construção, logo, desconsideraram as propriedades desse quadrilátero notável, que corresponde à característica do primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Figura 63 – Quadrado *MNPQ* produzido pela dupla D03



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 64 – Quadrado *MNPQ* produzido pela dupla D01

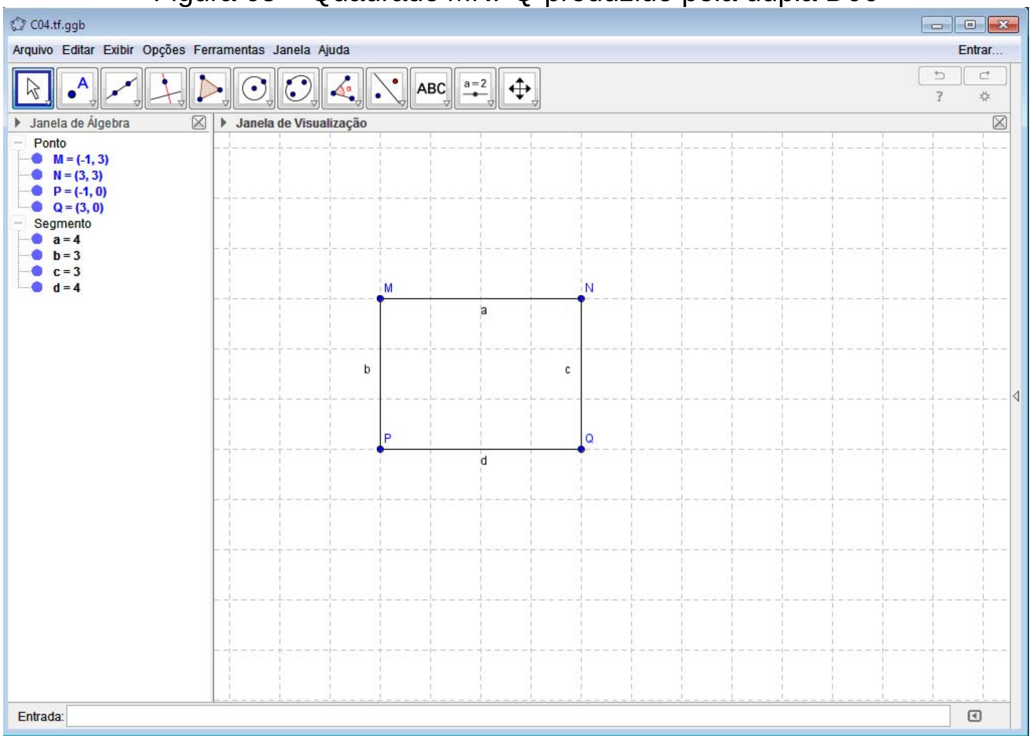


Fonte: Dados da pesquisa

Ainda, identificamos três duplas (D02, D06 e D08) que construíram retângulos (não quadrados) ao invés de quadrados. Esse dado nos chamou atenção, pois dificilmente um estudante que esteja atuando no primeiro nível de Van-Hiele, que reconhece as figuras geométricas por meio de sua aparência física, consideraria um retângulo (não quadrado) como um quadrado, o mesmo poderia ser verificado com um aluno que trabalhe no segundo nível de Van-Hiele. A Figura 65 ilustra esse caso, com a produção da dupla D06.

Por apresentarem propriedades em comum, todo quadrado pode ser considerado com um retângulo, mas o inverso nem sempre pode proceder. Nesse sentido, um retângulo que não tenha todos os lados congruentes entre si (com a mesma medida dos comprimentos dos seus lados), mesmo que ele apresente ângulos internos opostos congruentes e diagonais que se cortam ao meio, não pode ser considerado como um quadrado.

Figura 65 – Quadrado *MNPQ* produzido pela dupla D06



Fonte: Dados da pesquisa

Como observado na Figura 65, apesar da facilidade que a malha quadriculada no GeoGebra poderia proporcionar na construção, a dupla construiu um retângulo (não quadrado) como um quadrado, o que reforça a necessidade de um trabalho sistemático pelo professor de Matemática, de forma que essas dificuldades sejam superadas.

Em seguida, analisamos as explicações dos estudantes registradas nas fichas de atividade, nas quais, deveriam justificar por que sua produção é um quadrado. Novamente, buscamos evidenciar se os alunos se referiam ao aspecto global ou à definição ou às propriedades do quadrilátero notável abordado na atividade.

Apenas uma dupla de alunos (D04) fez referência a uma das propriedades do quadrado em sua construção: "*Movendo da forma correta fica com 4 lados iguais e paralelos*" (D04). Essa dupla percebeu que quando os pontos do quadrado são deslocados, ele (o quadrado) continua com quatro lados paralelos iguais, que é uma das propriedades desse quadrilátero notável.

Aqui chamamos atenção para o fato de que no GeoGebra, D04 construiu o quadrado a partir do seu aspecto global. Todavia, ao justificar sua construção, a dupla fez referência a uma das propriedades do quadrilátero notável. Essas evidências indicam que esses alunos estão atuando na transição dos níveis iniciais de pensamento geométrico de Van-Hiele, isso para a atividade analisada.

Treze duplas (D01, D02, D03, D05, D06, D07, D08, D09, D11, D12, D13, D14 e D15) mencionaram a definição usual do quadrado em suas justificativas: "*É um quadrado porque todos os lados são iguais e têm 4 ângulos retos*" (D01); "*Porque os quatro lados são iguais*" (D02); "*A nossa produção é um quadrado porque têm ângulos de 90º e todos os lados de comprimento igual*" (D03); "*Porque tem 4 lados iguais da mesma forma e tem 4 ângulos de 90º*" (D05); "*Porque ela tem 4 lados, 4 vertices*" (D06); "*Porque ele tem 4 lados iguais e é um polígono*" (D07); "*Porque tem quatro lados iguais*" (D08); "*Porque os quatro lados são iguais e apresentam ângulos de 90º*" (D09); "*Porque tem todos lados iguais*" (D11); "*Porque todos os seus lados são iguais*" (D12); "*Porque todos os lados são iguais*" (D13); "*Quadrado: é um* *polígono onde tem todos os 4 lados iguais, e todos os ângulos retos*” (D14); “*Pois tem os 4 lados iguais*” (D15).

Mais uma vez, chamamos atenção para as justificativas das duplas D02, D06 e D08 que construíram um retângulo (não quadrado) ao invés de um quadrado no ambiente do GeoGebra. As explicações de D02 e D08 apresentam elementos da definição usual do quadrado, enquanto que a justificativa de D06 pode ser utilizada como definição mais geral para os quadriláteros notáveis.

Nessa atividade, não foram identificadas duplas fazendo uso da aparência global do quadrado em suas justificativas, que pode representar um avanço no pensamento geométrico desses estudantes.

Além disso, seis duplas (D01, D02, D06, D10, D11 e D14) observaram se a figura construída permanecia quadrado (ou não), quando seus pontos eram movimentados: “*Criamos o quadrado MNPQ, movemos os pontos e continuou um quadrado*” (D01); “Não permanece” (D02); “*qualquer movimento de qualquer vértice ele se matém sendo um quadrado*” (D06); “*Quando movemos vértices a figura continua um quadrado*” (D10); “*Quando movemos permanece um quadrado*” (D11); “*Após a construção de um segmento M e N, para produzir um quadrado MNPQ, que permaneça um quadrado quando movemos os vértices fizemos um polígono regular, usando o segmento*” (D14).

6.1.3.5 Quinta atividade

A quinta atividade da terceira fase da sequência didática teve por objetivo produzir um quadrado a partir da utilização das propriedades das suas diagonais. Nesse sentido, os estudantes deveriam mobilizar os conceitos de mediatriz, perpendicularidade e circunferência.

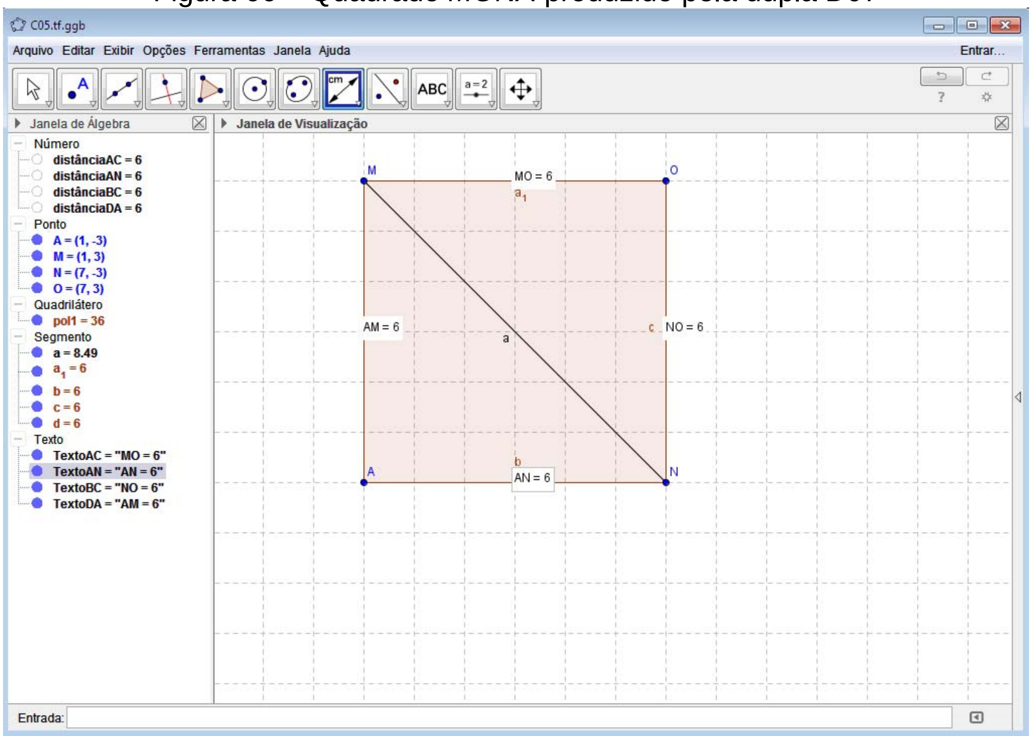
Inicialmente, a atividade pediu que os alunos produzissem um segmento de reta *MN*, e depois, um quadrado *MONA*, de forma que *MN* seja a diagonal desse quadrado. Em seguida, eles deveriam deslocar os vértices do quadrado, analisar se a figura permanecia como um quadrado, e caso negativo, deveria refazer a produção. Por fim, a atividade questionava os estudantes acerca do que se pode afirmar da construção.

No item 5.5.3 dessa dissertação, podemos encontrar as possibilidades de resposta a serem realizadas pelos estudantes para essa atividade no *software* GeoGebra, no primeiro nível e no segundo nível de Van-Hiele.

Analisando as construções dos estudantes desenvolvidas no GeoGebra, percebemos que nenhuma dupla fez o quadrado a partir das propriedades desse quadrilátero notável, não evidenciando, assim, estudantes atuando no segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Identificamos uma dupla (D07) fazendo uso da definição usual do quadrado em sua produção, como podemos verificar na Figura 66.

Figura 66 – Quadrado *MONA* produzido pela dupla D07



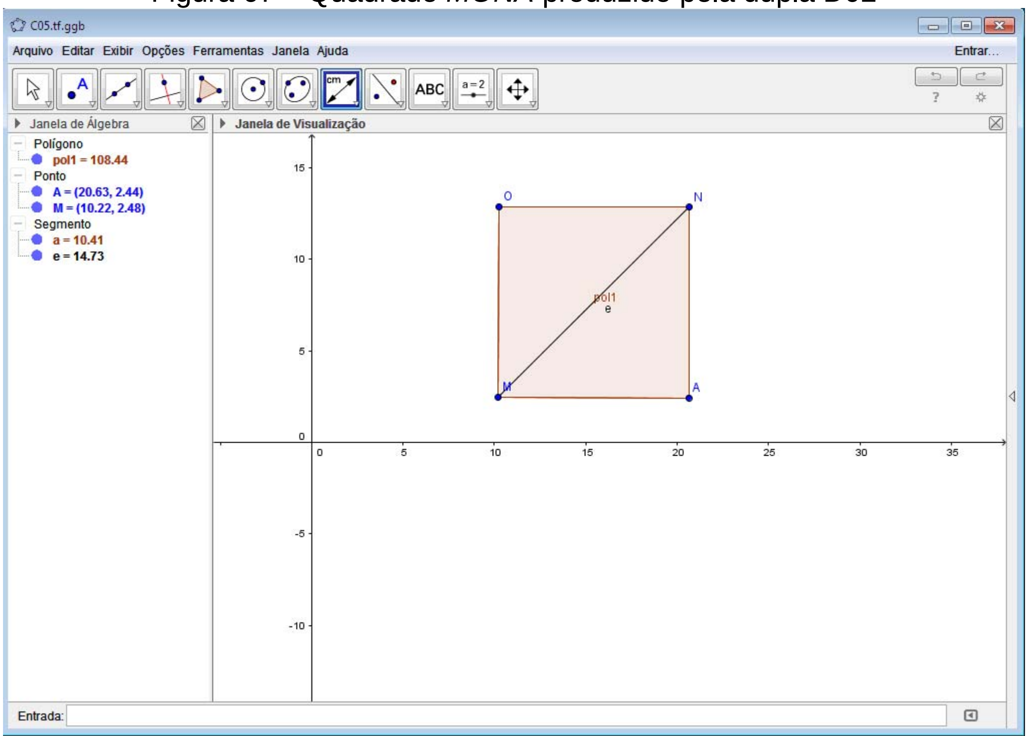
Fonte: Dados da pesquisa

Pela Figura 66, notamos que a dupla considerou um dos elementos da definição usual do quadrado na solução, que consiste no aspecto de que esse quadrilátero notável possui todos os lados iguais entre si. Além disso, ela fez uso da malha quadriculada do GeoGebra que a auxiliou na criação da figura.

Doze duplas (D01, D02, D03, D04, D05, D06, D08, D10, D11, D12, D14 e D15) apresentaram o pensamento geométrico característico do primeiro nível vanhieliano, isto é, fizeram uso apenas da aparência física do quadrado em sua produção. Desse total, nove duplas (D01, D02, D04, D08, D10, D11, D12, D14 e D15) construíram o quadrado como previsto no item 5.5.3, e três duplas (D03, D05 e D06) apresentaram outro tipo de solução, na qual, estabeleceram a diagonal do quadrado a partir de uma reta que passa por dois vértices opostos.

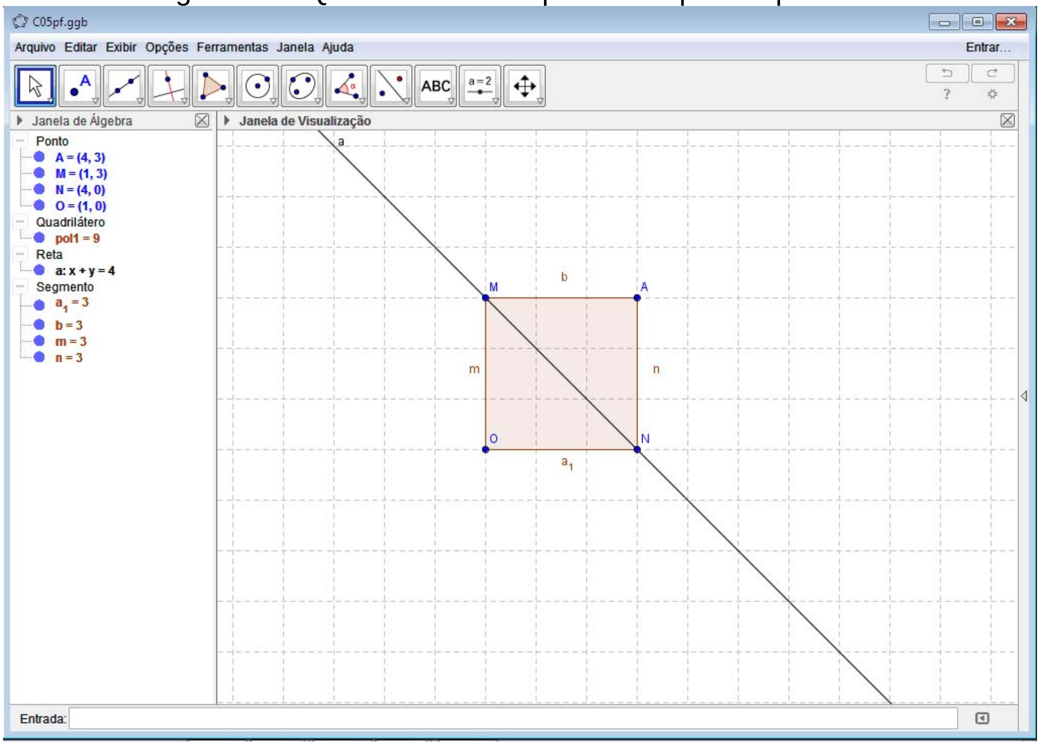
As figuras a seguir apresentam uma ilustração para esses dois casos mencionados. Dessa forma, na Figura 67 temos um exemplo de uma dupla (D02), que construiu o quadrado conforme previsto no item 5.5.3, e na Figura 68 encontramos também uma ilustração da construção de uma dupla (D06), que obteve a diagonal por meio de uma reta que corta dois vértices opostos do quadrado.

Figura 67 – Quadrado *MONA* produzido pela dupla D02



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 68 – Quadrado *MONA* produzido pela dupla D06



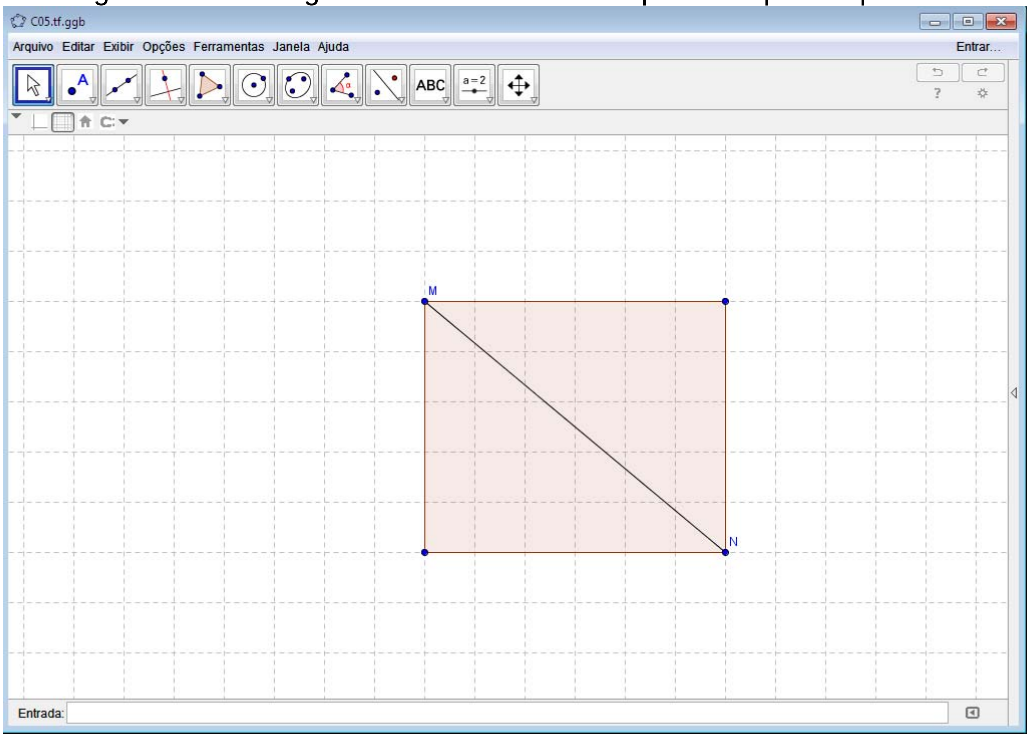
Fonte: Dados da pesquisa

Aqui chamamos atenção para as duplas D02, D06 e D08 que na primeira atividade referente à construção de um quadrado, produziram retângulos ao invés de quadrados. Todavia, na segunda atividade elas construíram quadrados por meio do aspecto global da figura, o que dá indícios de que essas duplas avançaram em seu pensamento geométrico em relação à atividade anterior.

Ainda, verificamos que duas duplas (D09 e D13) fizeram retângulos ao invés de quadrados, como ilustrado na Figura 69 com a produção da dupla D13. Esse dado nos chama atenção, pois em relação à atividade anterior, essas duplas demonstraram o pensamento geométrico do primeiro nível de Van-Hiele, isto é, produziram o quadrado a partir da aparência física.

Em um segundo momento da análise da atividade, verificamos as justificativas das duplas deixadas nas fichas de atividades, referentes ao que os estudantes poderiam afirmar sobre sua produção.

Figura 69 – Retângulo *MONA* considerado quadrado pela dupla D13



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse sentido, notamos que cinco duplas de alunos (D01, D06, D07, D09 e D15) fizeram referência à definição usual do quadrado em suas justificativas: "*É um quadrado, pois, ele têm todos os lados iguais e 4 ângulos retos*" (D01); "*Que um quadrado ele só precisa ser quadrilátero, seus lados serem todos retos e ter 4 vértices*" (D06); "*É um quadrado, porque tem 4 lados iguais e é um polígono*" (D07); "*É um quadrado, ambos os lados são paralelos*" (D09); "*Por ter todos os lados iguais*" (D15). É importante lembrarmos que D09 construiu um retângulo ao invés de um quadrado no ambiente do GeoGebra.

Uma dupla (D08) estabeleceu uma importante relação entre o quadrado e os triângulos equiláteros: "*Que é um quadrado definitivo feito por dois triângulos equiláteros*" (D08).

Nessa atividade, não observamos estudantes fazendo uso das propriedades e do aspecto global do quadrado em suas explicações.

Onze duplas (D01, D02, D03, D04, D05, D10, D11, D12, D13, D14 e D15) analisaram o que ocorria com a figura, quando seus vértices eram deslocados, centrando-se em observar se ela (a figura) deixava de ser quadrado (ou não): "*Criamos o quadrado MONA e o segmento MN era sua diagonal. Movemos os vértices e ele continuou um quadrado*" (D01); "*Não continua sendo um quadrado. Porque ao mover os vértices de quadrado pode formar várias figuras*" (D02); "*Ao mexermos, ele continua quadrado*" (D03); "*Novamente movendo de forma correta fica o quadrado MONA*" (D04); "*Ao mover 1 vértice do quadrado, toda a figura se movimenta, seu tamanho se altera, e inclusive a reta se move*" (D05); "*Ele continua um quadrado quando movemos os vértices M e A, porém quando tentamos mover os vértices O e N ele não se move*" (D10); "*Que permanece um quadrado. mas quando mechemos os vértices OM ON NA AM, o vértice não meche. Quando mechemos o segmento NM, o vértice meche mas continua um quadrado*" (D11); "*Mesmo movendo os vértices conseguimos obter o mesmo resultado com outras medidas*" (D12); "*Que a opção polígono rígido só altera a posição, mas não muda os lados*" (D13); "*Ao fazermos um polígono regular, sendo um quadrado, e traçamos um segmento na diagonal, nos pontos M e N, assim ao movermos o polígono ele permanecerá um quadrado*" (D14); "*mesmo movendo continuara quadrado*" (D15).

6.1.3.6 Sexta atividade

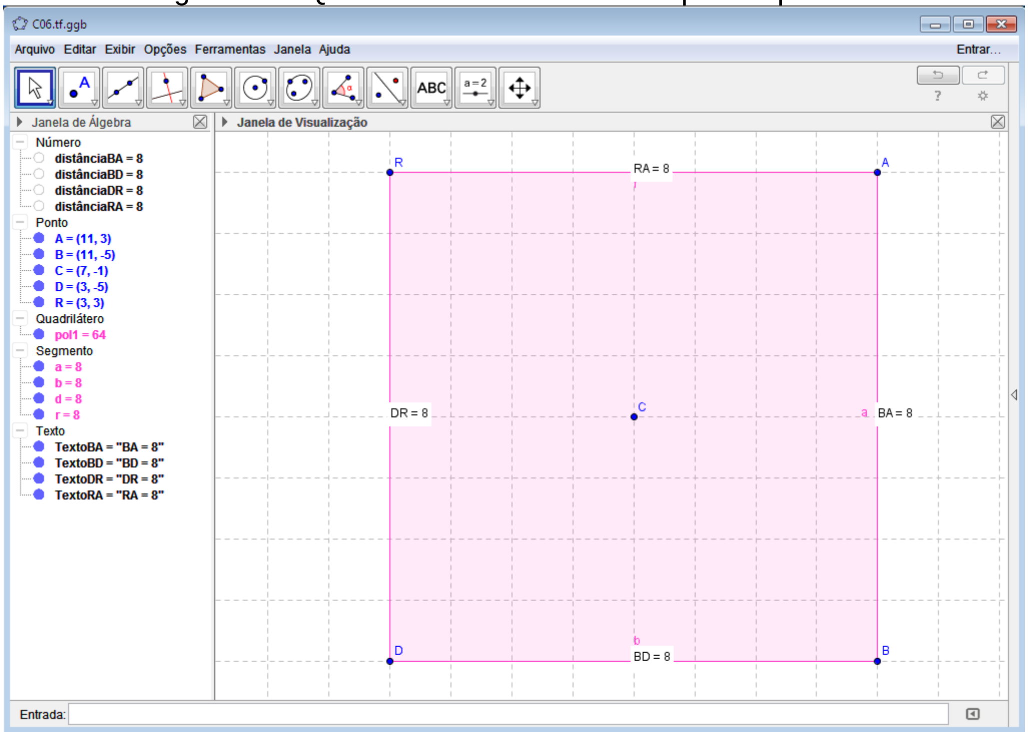
A sexta atividade da terceira fase da sequência didática teve por finalidade construir um quadrado a partir das relações das propriedades das diagonais desse quadrilátero notável. Desse modo, primeiramente, a atividade orientou que os estudantes construíssem os pontos *R* e *C,* e em seguida, o quadrado *ROSA*, de forma que *R* fosse um dos seus vértices e *C* o seu centro. Depois, eles deveriam mover os vértices do quadrado, analisar e registrar se a figura permanecia um quadrado, e em caso contrário, deveriam reiniciar a construção.

As possibilidades de solução no que se refere os níveis de Van-Hiele para essa atividade no GeoGebra podem ser verificadas no item 5.5.3 desse texto.

Agora, analisando as construções realizadas pelas duplas de estudantes no GeoGebra, observamos que nenhuma das duplas demostrou explicitamente que estabeleceu as relações das propriedades das diagonais do quadrado, isto é, que elas são perpendiculares, congruentes e se cortam no centro do quadrado (que é o ponto médio das diagonais).

Uma dupla (D12) fez uso da definição usual do quadrado em sua produção, como podemos observar na figura 70.

Figura 70 – Quadrado *ROSA* construído pela dupla D12

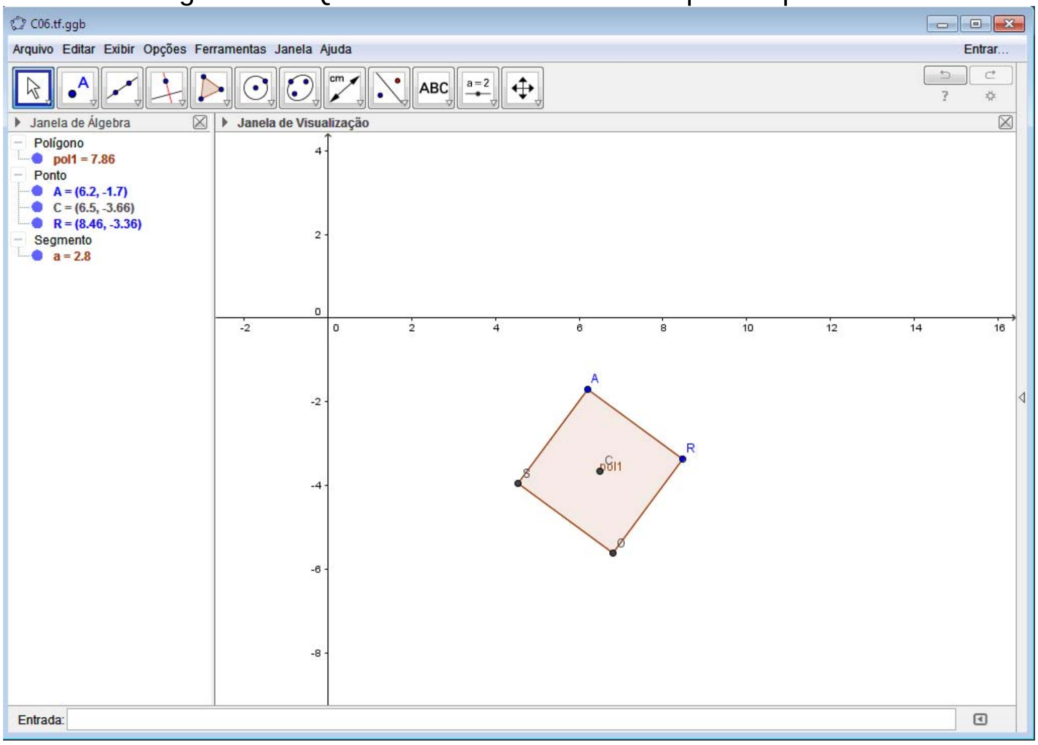


Fonte: Dados da pesquisa

Como verificado na Figura 70, a dupla D12 considerou um dos elementos da definição usual do quadrado em sua construção: *o quadrado possui todos os lados iguais*.

Nas produções, doze duplas (D01, D02, D03, D04, D06, D07, D09, D10, D11, D13, D14 e D15) demonstraram o pensamento geométrico do primeiro nível de Van-Hiele, pois construíram o quadrado considerando seu aspecto global (Figura 71).

Figura 71 – Quadrado *ROSA* construído pela dupla D10



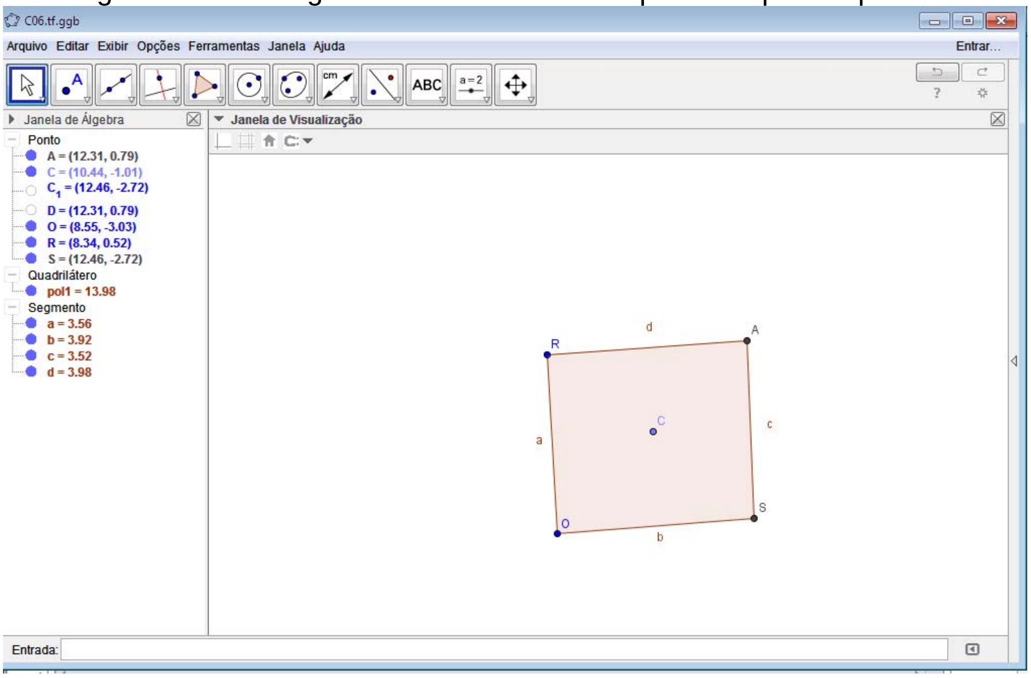
Fonte: Dados da pesquisa

O que nos chamou atenção na produção de D10 foi que essa dupla construiu um quadrado em formato não padrão, diferentemente das demais duplas, que fizeram quadrados prototípicos. Tal fenômeno representa uma importante autonomia em relação às figuras em posição prototípica.

Também, encontramos uma dupla (D05) que construiu um retângulo (não quadrado) ao invés de um quadrado (Figura 72), e uma dupla (D08) que produziu um trapézio (Figura 73). Esses resultados reforçam a necessidade de um trabalho sistemático em sala de aula, de forma que essas dificuldades apresentadas pelos estudantes sejam superadas por meio da Geometria Dinâmica.

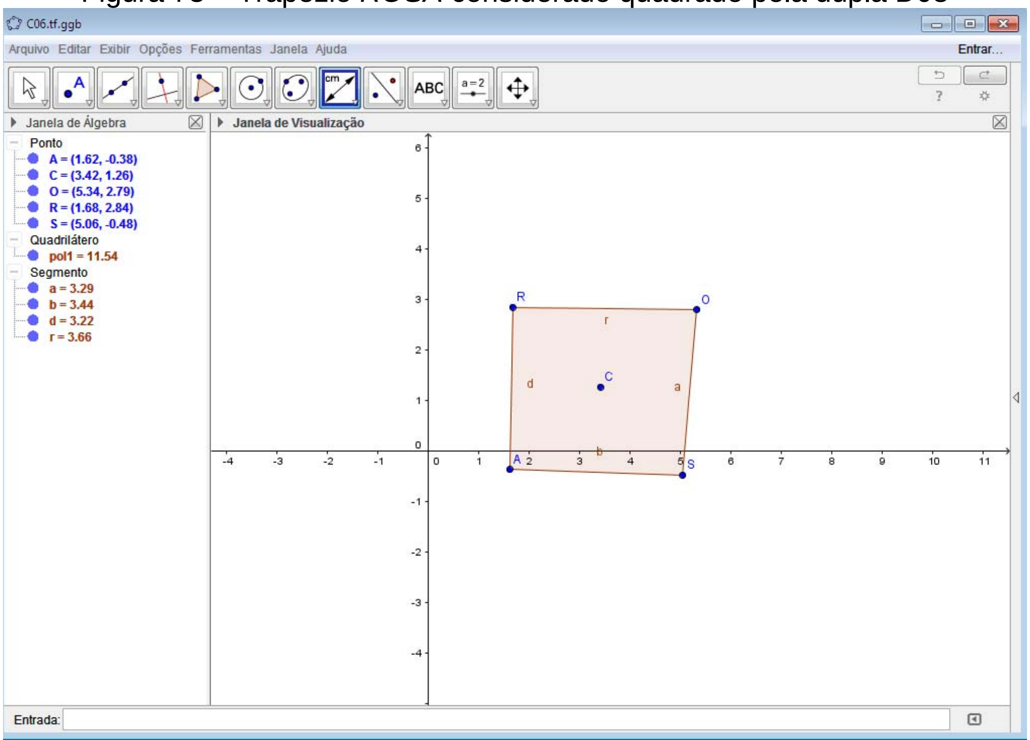
Ao analisarmos os registros das duplas de alunos nas fichas de atividades, verificamos que elas centraram-se em verificar se a figura continuava quadrado (ou não), e ainda se o ponto *C* continuava (ou não) no centro do quadrado, quando os vértices eram deslocados.

Figura 72 – Retângulo *ROSA* considerado quadrado pela dupla D05



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 73 – Trapézio *ROSA* considerado quadrado pela dupla D08



Fonte: Dados da pesquisa

Onze duplas (D01, D03, D04, D05, D06, D07, D10, D11, D12, D14 e D15) observaram que a figura permanecia quadrado quando seus vértices eram movidos: "*Criamos os pontos R e C e consideramos o quadrado ROSA, de modo que R era um vértice e C era o centro. Movemos os vértices e continuou um quadrado. podemos afirmar que C continua sendo o centro*" (D01); "*O quadrado continua um quadrado e C continua no centro*" (D03); "*Movendo de uma forma correta continua a figura [um quadrado]*" (D04); "*Quando movemos o quadrado, a partir do ponto "O" ele se movimenta ao redor do ponto "P", mas quando mexemos o ponto "R", o quadrado se move normalmente*" (D05); "*Nós tentamos uma primeira vez que não deu certo mas nós fizemos uma segunda tentativa e ele de certo usamos a ferramenta poligono regular e quando movemos um ponto os outros se mover para continuar um quadrado*" (D06); "*Permanece um quadrado, mas o ponto C não fica no seu centro e a distância de R para C, O para C, S para C e A para C se alteram*" (D07); "*Que o ponto C continua sendo o seu centro e permanece um quadrado*" (D10); "*Que continua um quadrado. os vértices não mechem. Os pontos S e A não mechem, mas os outros sim, porém a figura continua um quadrado*" (D11); "*Que, apesar dos movimentos, a figura permanece um quadrado*" (D12); "*Ao produzirmos um polígono regular, em forma de quadrado, ROSA, e colocarmo o ponto C no centro, assim quando movemos os vértices o poligono permanece um quadrado, mas o ponto C permanece no mesmo lugar onde foi posto*" (D14); "*Que movendo ou não continuara um quadrado com o centro C*" (D15).

Três duplas (D02, D09 e D13) perceberam que a figura deixava de ser um quadrado, quando seus vértices eram deslocados, provavelmente, porque não utilizaram o recurso "Polígono" do GeoGebra: "*Ao mover os pontos, o quadrado pode virar qualquer figura*" (D02); "*Vai deixar de ser quadrado e o ponto C deixa de ser o centro*" (D09); "*Que o ponto C não fica no centro*" (D13).

Além disso, uma dupla (D08) analisou apenas o comportamento do ponto *C*, verificando que ele saiu do quadrado, quando os vértices foram descolados: "*O ponto C sai do quadrado, por causa que não tem alguma ligação existente com o quadrado*" (D08). Tal fato deve ter ocorrido, provavelmente, porque essa dupla construiu inicialmente o quadrado (com o recurso “Polígono”), e depois, criou o ponto *C* (com o recurso “Ponto”).

6.1.3.7 Sétima atividade

A sétima atividade da terceira fase da sequência didática buscou construir um losango a partir de dois de seus vértices opostos, sendo necessário o emprego das propriedades das diagonais do losango. Nesse sentido, a atividade pediu, inicialmente, que os estudantes criassem dois pontos *T* e *C*, e em seguida, outros dois pontos *I* e *A*, de forma que *TICA* seja um losango. Após a construção desse losango, os alunos deveriam mover os seus pontos e analisar se a figura permanecia sendo um losango. Caso contrário, deveriam refazer a construção. A atividade ainda orientava que os estudantes deveriam justificar por que a figura permanecia como losango, quando seus vértices eram deslocados, e também por que sua figura era um losango.

No item 5.5.3 dessa dissertação, podemos consultar as possibilidade de resolução para essa atividade no GeoGebra, em relação a teoria de Van-Hiele.

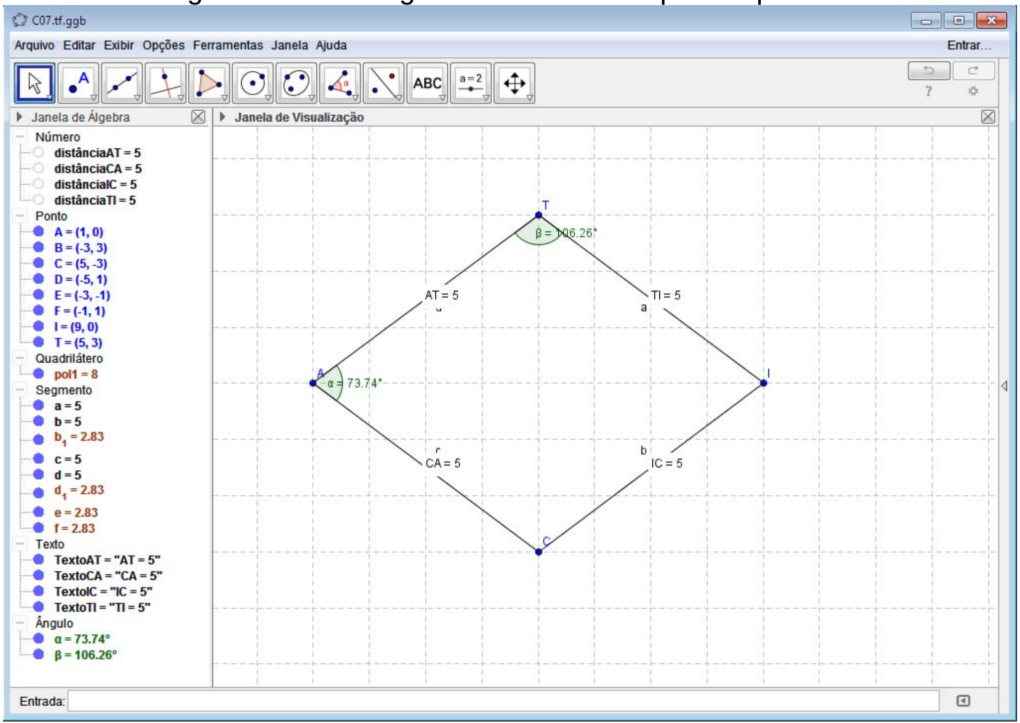
Em um primeiro momento, realizando a análise das produções das duplas de alunos desenvolvidas no mencionado *software*, verificamos que nenhuma dupla da turma investigada construiu o losango por meio de suas propriedades, que é uma característica do segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Cinco duplas (D01, D05, D10, D12 e D14) fizeram uso da definição usual do losango em sua construção. Na Figura 74 podemos encontrar uma ilustração para esse caso, com a produção da dupla D01.

Pela produção, podemos perceber que D01 fez uso da definição usual do losango, compreendida com uma figura que *apresenta todos os lados de medidas iguais (congruentes entre si)*.

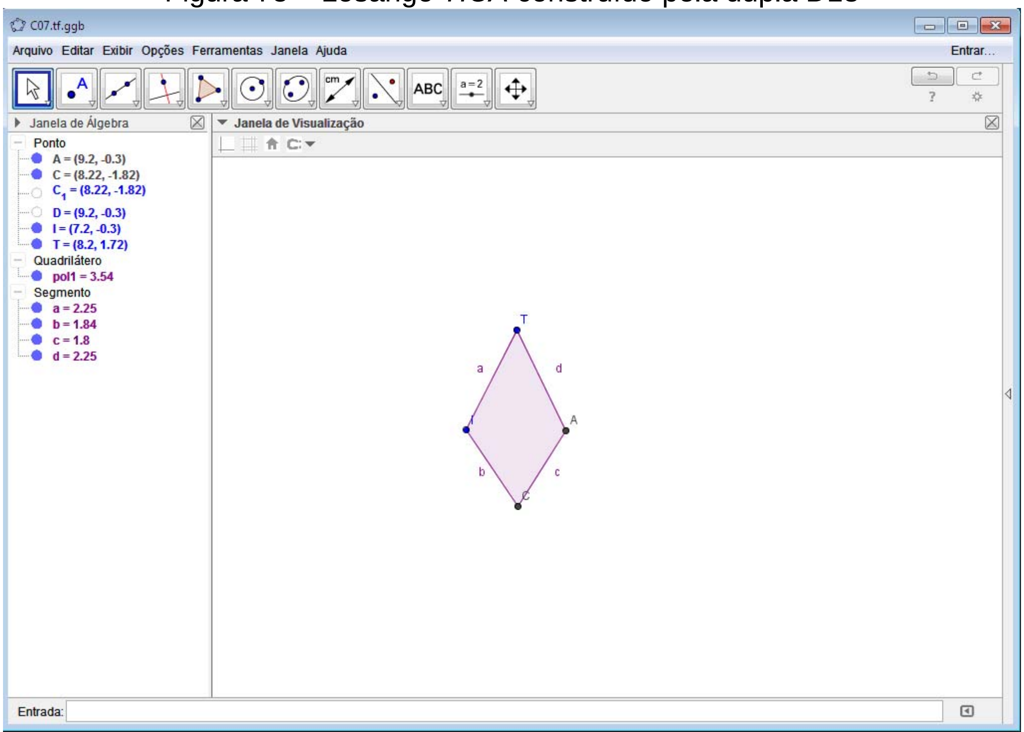
Nove duplas (D02, D03, D04, D06, D08, D09, D11, D13 e D15) demostraram o pensamento geométrico típico do primeiro nível vanhieliano, porque construíram o losango a partir de sua aparência física, como exemplificado na Figura 75.

Figura 74 – Losango *TICA* construído pela dupla D01



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 75 – Losango *TICA* construído pela dupla D13

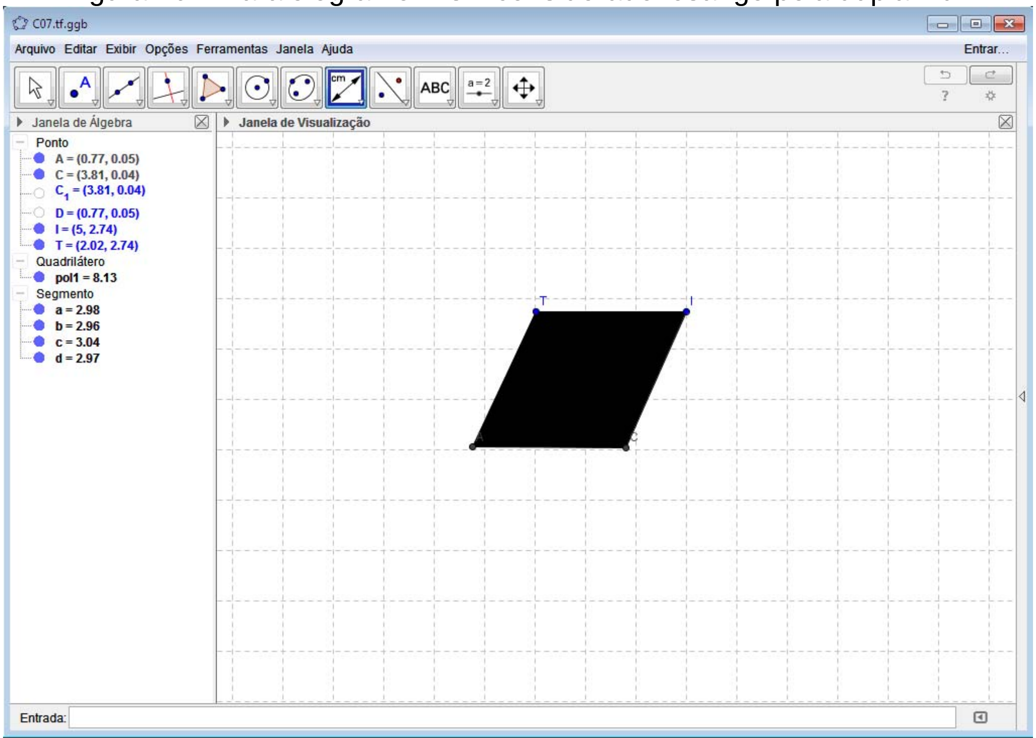


Fonte: Dados da pesquisa

Pela Figura 75, percebemos que D13 construiu um losango em desacordo com a definição usual desse quadrilátero notável, pois os lados da figura produzida não são iguais entre si. Além disso, a propriedade do losango de que *os lados opostos são congruentes* também não se verifica na produção.

Ainda, identificamos uma dupla (D07) que ao invés de um losango, produziu um paralelogramo (não losango), como ilustrado na Figura 76.

Figura 76 – Paralelogramo *TICA* considerado losango pela dupla D07



Fonte: Dados da pesquisa

Apesar da facilidade com a malha quadriculada no GeoGebra, que poderia ajudar na construção do losango, D07 acabou produzindo um paralelogramo, que não se configura como um losango, pois os lados não são congruentes entre si.

Em um segundo momento, analisamos as justificativas dos estudantes, quando questionados se a figura construída permanecia como um losango ao ter seus pontos deslocados, e ainda por que a figura se configurava como um losango.

Uma dupla (D09) fez referência apenas à propriedade de um tipo de losango, demostrando, assim, o pensamento geométrico do segundo nível de Van-Hiele:

“*Tem dois ângulos agudos e dois obtusos*” (D09). No entanto, na construção no GeoGebra, essa dupla produziu um losango a partir de seu aspecto global, que é uma característica do primeiro nível vanhieliano. Esses indícios evidenciam que para a atividade analisada, D03 estava atuando na transição entre os dois níveis.

Uma dupla (D02) parece ter estabelecido a relação entre as propriedades do losango e do quadrado, que é uma característica do terceiro nível de Van-Hiele: “*porque um losângulo é um quadrado*” (D02). Aqui chamamos atenção para o fato de que apenas um tipo de losango, com ângulos de medidas iguais, é considerado um quadrado.

Logo, os losangos com ângulos obtusos e agudos não se configuram como um quadrado. Todavia, todo quadrado é losango.

Outra dupla (D14) também demonstrou o pensamento geométrico característico do terceiro nível de Van-Hiele, no qual, ocorre a ordenação das propriedades das figuras geométricas: “*Ele permanece um losango, pois um quadrado é um losango, um retangulo e um quadrado ao mesmo tempo. Um quadrado é um losango, mas um losango não é obrigatoriamente um quadrado. losango: um polígono diverso que pode ter angulos diversos com 4 lados*” (D14). Pela justificativa apresentada por D14, observamos que essa dupla conseguiu perceber que o losango e o quadrado apresentam propriedades em comum, o mesmo pode ser verificado com o retângulo e o quadrado. Esses dados mostram que esses estudantes avançaram significativamente em seu pensamento geométrico por meio da sequência didática.

Três duplas (D06, D07 e D12) mencionaram somente a definição usual do losango em suas explicações: “*Sim porque um losango ele tem 4 lados iguais, tem 4 vértices e todos os seus lados são retos*” (D06); “*Possui 4 lados e é um polígono*” (D07); “*Todos seus lados são iguais*” (D12). Aqui chamamos atenção para o fato de que nas produções desenvolvidas no GeoGebra, D06 fez o losango a partir de sua aparência física, D07 construiu um paralelogramo (não losango) e D12 construiu um losango com base em sua definição usual.

Seis duplas (D01, D03, D05, D10, D11 e D13) se basearam na definição e em uma das propriedades do losango, caracterizando o segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele: “*Porque ainda era um quadrilátero com os lados iguais e, no mínimo, 2 ângulos iguais*” (D01); “*É um losango pois tem ângulos de 90º e lados de medida igual*” (D03); **“***Sim. Pois ele continua tendo 4 lados e possui 2 ângulos agudos e 2 obtusos*” (D05); “*A figura é um losango porque todos os seus lados são iguais e seus angulos opostos são iguais e não são retos*” (D10); “*Sim. Porque tem 4 ângulos de 90º e todos os lados iguais*” (D11); “*Porque é um quadrilátero de lados iguais, mas ângulos diferentes*” (D13).

Nesse caso, D03 e D11 em suas produções mencionaram o losango com ângulos de medidas iguais (que também é um quadrado), enquanto que as demais duplas referendaram o losango com ângulos não retos (não quadrado).

É importante destacar que no GeoGebra, D03, D11 e D13 construíram o losango a partir da aparência global da figura, enquanto D01, D05 e D10 apelaram pela sua definição. Esses indícios parecem mostrar que essas duplas estavam trabalhando na transição dos níveis iniciais, no período da pesquisa, para a atividade verificada.

Das oito duplas de alunos que fizeram referência ao comportamento da figura, quando seus pontos eram descolados, sete (D01, D02, D04, D06, D07, D13 e D15) perceberam que a figura continuava um losango: “*Fizemos o losango TICA e movemos seus pontos e ele continuou um losango*” (D01), “*[ao] se mover os quatro pontos continua um losangulo*” (D02), “*movendo de uma forma correta para continuar a figura continua um losango*” (D04), “*quando nos mechemos no losango ele continua normal*” (D06), “*Sim. Pois se movermos a figura continua com 4 lados e um polígono*” (D07), “*Sim. Porque nós utilizamos a opção polígono rígido*” (D13), “*Sim. Pois mesmo se os forem movidos os pontos continua um losango, sendo diferente*” (D15); e uma dupla (D09) verificou que a figura deixava de ser um losango: “*ele deixa de ser um losangulo*” (D09).

6.1.3.8 Oitava atividade

A oitava atividade da terceira fase da sequência didática teve por objetivo construir um losango a partir da congruência de seus lados, mobilizando também a ideia de circunferência. Nesse sentido, inicialmente, a atividade solicitou que os estudantes estabelecessem uma reta *a* e dois pontos *G* e *A*, fora dessa reta. Em seguida, eles deveriam construir o losango *GABI*, de forma que o ponto *I* esteja sobre a reta *a*. A atividade pediu ainda que os estudantes movessem os pontos da figura, analisando se ela (a figura) permanecia um losango, e em caso negativo, deveriam refazer a construção. Por fim, os estudantes deveriam explicar como produziram o losango.

Podemos observar as possibilidades de resposta para essa atividade no GeoGebra acerca dos níveis vanhielianos no capítulo V desse trabalho, item 5.5.3.

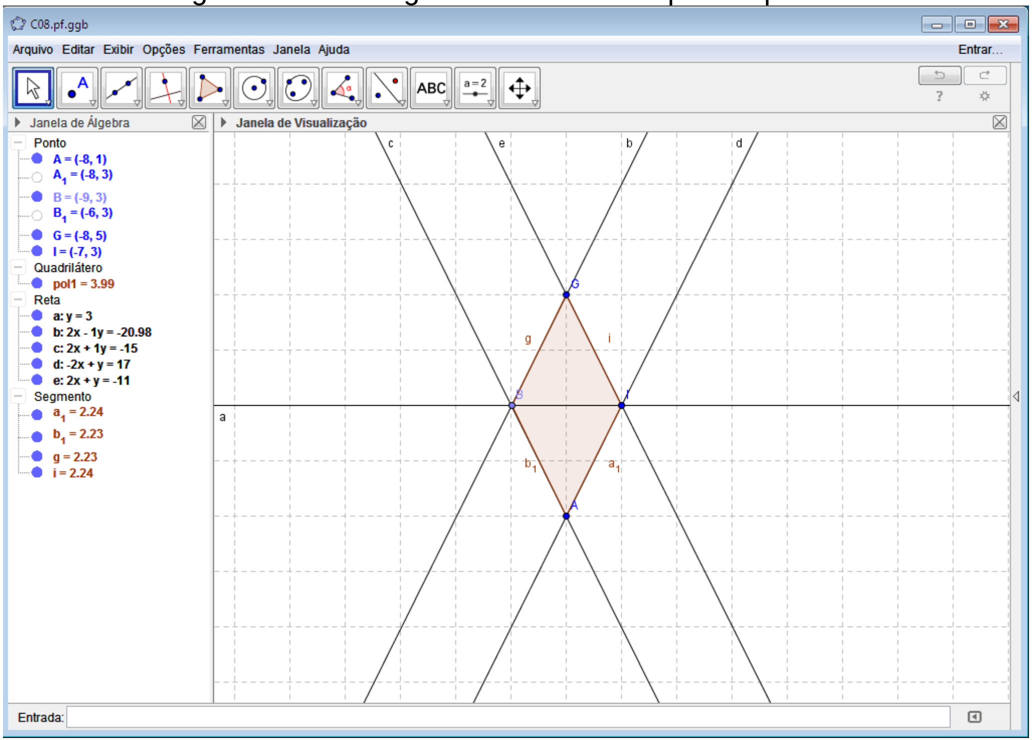
Analisando as produções dos estudantes realizadas no GeoGebra, evidenciamos que apenas uma dupla (D04) de alunos demostrou na construção o pensamento geométrico característico do segundo nível de Van-Hiele, isto é, fazendo uso das propriedades das diagonais do losango (*que cortam-se ao meio e são perpendiculares entre si*). No entanto, essa dupla construiu o losango *GBAI*, ao invés do *GABI*, para isso, apresentou um tipo de solução diferente do que tínhamos antecipado no capítulo V para esse nível de pensamento geométrico, pois D04 não fez uso da noção de circunferência, mas sim o uso do paralelismo e do perpendicularismo (Figura 77).

Em sua construção no *software*, após estabelecer a reta *a* por meio do recurso “Reta”, D04 cria os pontos *G* e *A*, com o recurso “Reflexão em Relação a uma Reta”, que constrói dois pontos a partir de dada uma reta, sendo que esses pontos ficam à mesma distância em relação a essa reta. Logo, se traçarmos um segmento de reta *GA*, poderíamos verificar que a reta *a* corta *GA* no seu ponto médio, estabelecendo ainda a relação de perpendicularidade.

Em seguida, com o recurso “Reta”, a dupla traçou duas retas, sendo a primeira passando entre o ponto *G* e o ponto *I* (na reta *a*), e a segunda entre *A* e *I.*

Nesse momento da construção, os estudantes consideraram a congruência dos lados do losango, assim, os segmentos de reta *GI* e *AI* são congruentes entre si.

Figura 77 – Losango *GBAI* construído pela dupla D04



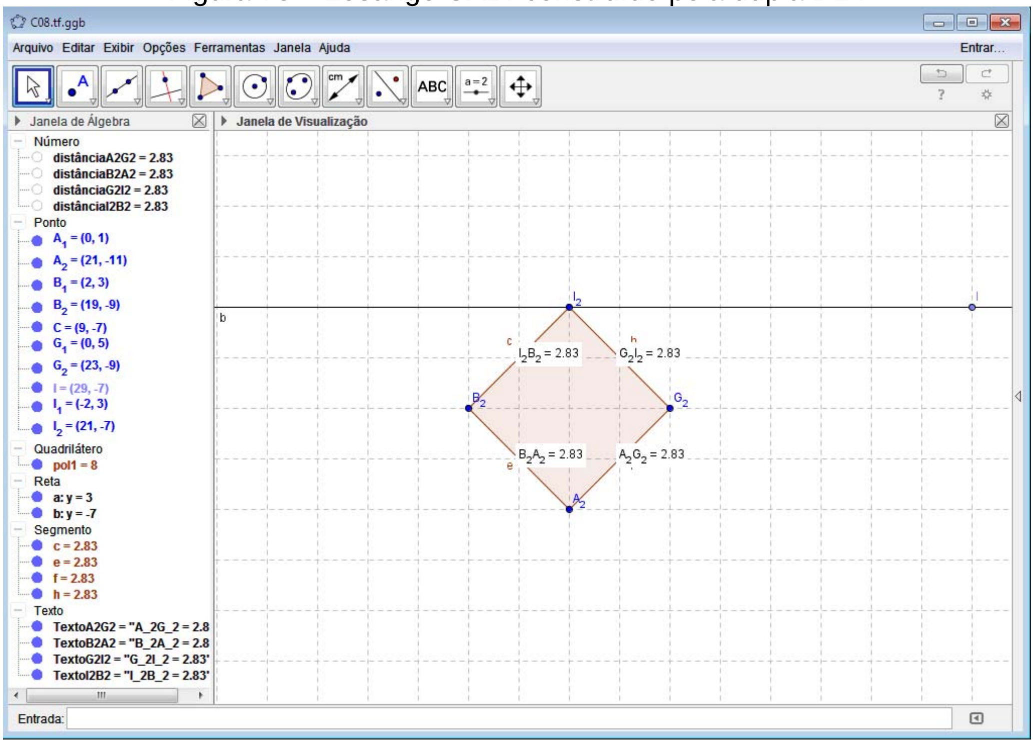
Fonte: Dados da pesquisa

Por meio do recurso “Reta Paralela”, D04 construiu uma reta paralela ao segmento de reta *GI*, passando por *A* e *B* (na reta *a*), e em seguida, traçou outra reta paralela ao segmento de reta *AI*, passando entre *B* e *G*. Os segmentos de reta *GB* e *BA* também são congruentes entre si e com *GI* e *AI* (*GB*=*BA*=*AI*=*GI*). O resultado dessas construções foi o losango *GBAI*.

Na atividade anterior, também referente à construção de um losango, D04 produziu um losango a partir de sua aparência global, dessa forma, notamos que essa dupla avançou significativamente em seu pensamento geométrico por meio da sequência didática.

Quatro duplas (D01, D10, D12 e D14) fizeram uso da definição usual do losango em sua construção, como podemos observar na Figura 78, com a produção da dupla D14.

Figura 78 – Losango *GABI* construído pela dupla D14

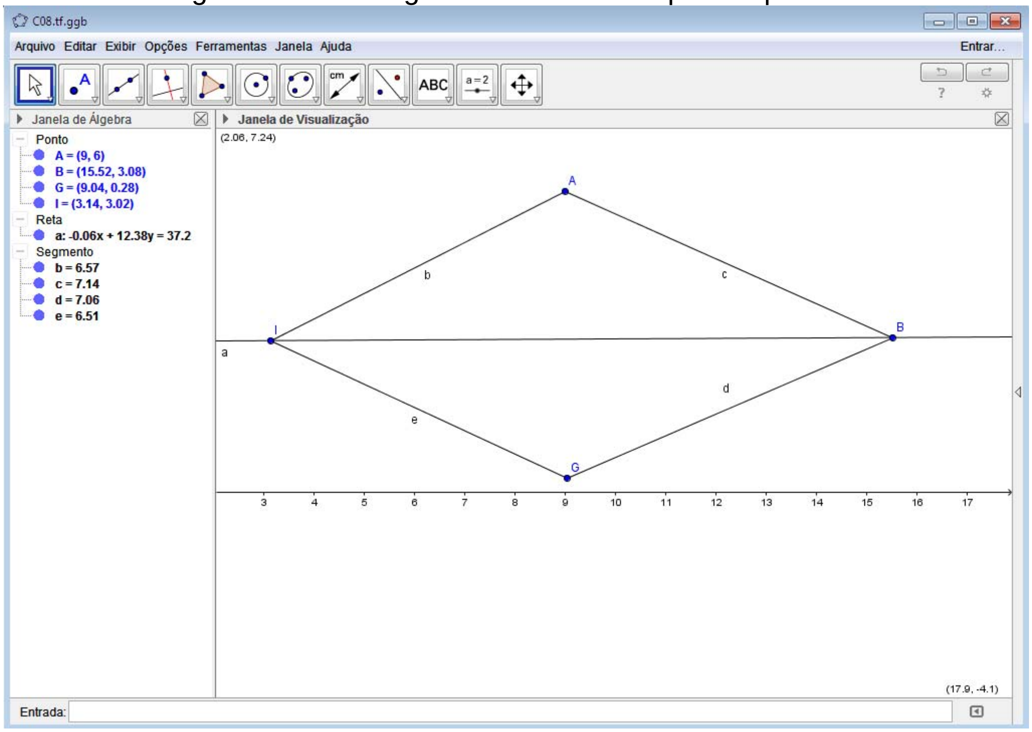


Fonte: Dados da pesquisa

Pela Figura 78, notamos que D14 fez uso da definição do losango em sua construção, compreendendo-o como *uma figura que possui todos os lados congruentes entre si*. Na atividade anterior, essas duplas também apelaram à definição usual do losango na construção.

Oito duplas (D02, D03, D06, D07, D09, D11, D13 e D15) se basearam apenas no aspecto global da figura para construir o losango *GABI*, que é uma característica do primeiro nível vanhieliano. Na Figura 79, encontramos uma ilustração para esse caso, com a produção da dupla D09. Em comparação com a Atividade 07, entre essas duplas, apenas D07 que não fez uso da aparência física usual do losango em sua construção, pois produziu um paralelogramo (não losango). Então, esses indícios parecem mostrar que essa dupla avançou em seu pensamento geométrico (comparando suas produções nas duas atividades referentes à construção de um losango).

Figura 79 – Losango *GABI* construído pela dupla D09



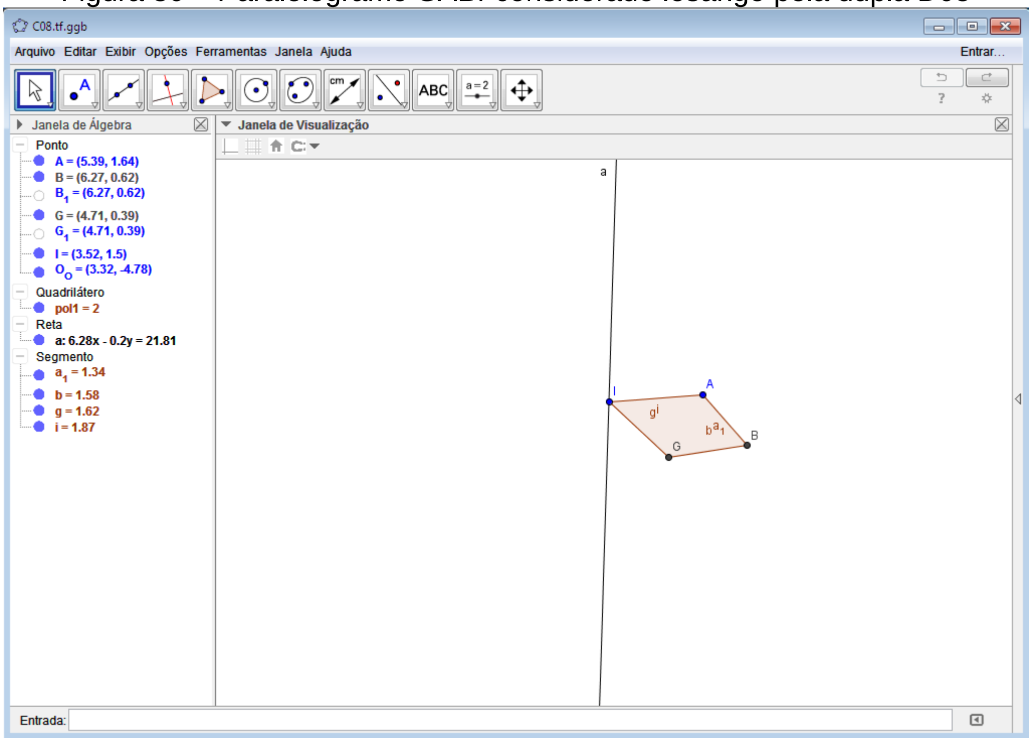
Fonte: Dados da pesquisa

Além disso, identificamos duas duplas (D05 e D08) que produziram outros tipos de quadriláteros notáveis que não se configuram como losangos. D05 construiu um paralelogramo (Figura 80) e D08 fez um trapezoide (Figura 81).

Na atividade anterior, D05 construiu um losango a partir de sua definição usual, enquanto que D08 construiu um losango com base em sua aparência global.

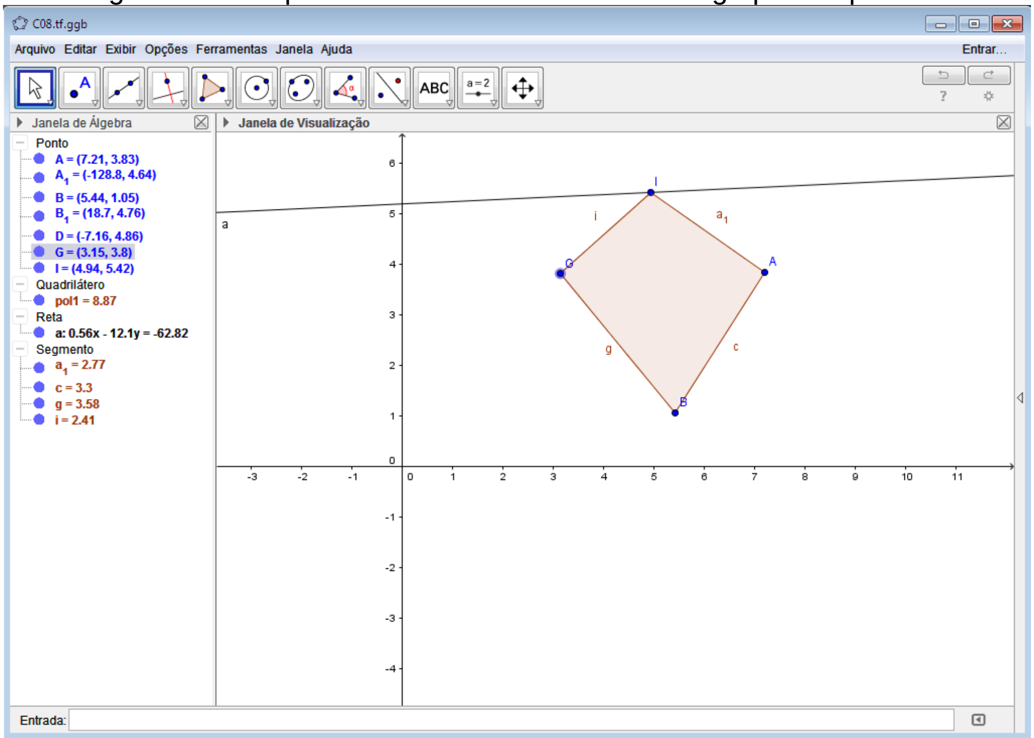
Agora, analisando as explicações das duplas de estudantes referentes ao modo como produziram o losango, constatamos que dez duplas (D01, D03, D05, D08, D09, D10, D12, D13, D14 e D15) inicialmente construíram a reta *a*, na qual, traçaram o ponto *I*, e em seguida, por meio do recurso "Polígono Regular" ou do recurso "Polígono" estabeleceram o losango *GABI:* "*Fizemos uma reta e os pontos G e A fora dela. Fizemos um losângulo GABI, de maneira que o ponto I estava sobre* *a reta, colocando a reta em posição diagonal*" (D01); "*Foi fácil. Fizemos a reta e os pontos. Depois fizemos um polígono rígido*" (D03); "*Nós criamos a reta "a" e lá criamos o ponto "I" e depois fizemos um polígono rígido a partir desse ponto e no polígono, colocamos os pontos G, A e B, de forma que obtemos um losango com o ponto I na reta "a""* (D05); "*Criando a reta a, colocando o ponto I nessa reta, e posicionamos os pontos formando um losango*" (D08); "*Utilizamos a reta como apoio para os pontos I e B e utilizamos a ferramenta de polígono*" (D09); "*Construir fazendo 1 reta e depois os polígonos*" (D10); "*Fizemos a reta a passando pelos pontos B e I, depois fizemos o lango GABI*" (D12); "*Nós utilizamos a opção polígono rígido*" (D13); "*Fizemos uma reta, e colocamos o ponto I na reta, e fizemos um lozango GABI, de modo que ele seja regular*" (D14); "*Apenas ligamos os pontos até formar um losango*" (D15).

Figura 80 – Paralelogramo *GABI* considerado losango pela dupla D05



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 81 – Trapezoide *GABI* considerado losango pela dupla D08



Fonte: Dados da pesquisa

Três duplas (D02, D06 e D07) disseram que estabeleceram primeiramente o losango, para em depois traçar a reta *a*: "*Primeiro criamos os pontos, logo após usamos o poligono e depois fizemos a reta*" (D02); "*Nós usamos a ferramenta poligono regular e criamos 2 pontos que seria GA e automaticamente se criou mas 2 pontos que foram o que nós fizemos a reta no caso BI*" (D06);"*Selecionamos: polígono rígido. Fizemos o losango, e depois fizemos a reta "a"*"" (D07).

Esses registros apresentam que nenhuma dessas treze duplas mencionou que fez uso das propriedades das diagonais do losango, nem das noções de circunferência, de perpendicularismo e de paralelismo.

Além disso, cinco duplas registraram o comportamento da figura, quando seus pontos eram deslocados. Desse total, quatro (D01, D02, D11 e D14) verificaram que a figura continua losango, provavelmente por terem utilizado o recurso "Polígono Rígido" do GeoGebra: "*Movemos os pontos e a figura continuou um lôsangulo*" (D01), "*Permanece, mas ao mover o ponto "I" a reta "a" também se move*" (D02), "*A figura permanece um losângulo*" (D11), "*E assim ele permanece um* *losango em quando movemos seus vértices*” (D14); e uma dupla (D10) observou o contrário, que a figura não permanece losango, possivelmente, por ter trabalhado com o recurso “Polígono”: “*Que quando movemos os pontos I e B eles continuam na reta, porém não continuam sendo um losango*” (D10).

6.2 Análise do pré-teste e do pós-teste

Como já mencionado anteriormente, para analisar como os estudantes avançaram (ou não) nos níveis de pensamento geométrico por meio da sequência didática, aplicamos um pré-teste e um pós-teste. O teste buscou identificar os níveis de pensamento geométrico em que se encontram os participantes do estudo, antes e após a aplicação da sequência didática. Entre um teste e outro, houve um intervalo de 101 dias, que equivale a pouco mais de três meses. A seguir, apresentamos os resultados referentes aos cinco itens do teste.

6.2.1 Primeira questão

No primeiro item pediu-se aos estudantes que construíssem um retângulo, e em seguida, uma figura diferente de um retângulo (em um primeiro momento). Os estudantes deveriam explicitar suas produções por escrito (em um segundo momento). Aqui estávamos interessados em analisar as estratégias utilizadas por eles para realizar a diferenciação entre suas construções. Na Tabela 1 são apresentados os quadriláteros notáveis produzidos pelos alunos como “não retângulos”, no pré-teste e no pós-teste.

Tabela 1 – Figuras geométricas consideradas como “não retângulo”

FIGURAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Trapézio	3%	27%
Paralelogramo	3%	7%
Losango	13%	13%
Quadrado	81%	53%

Fonte: Dados da pesquisa

Pela tabela, em relação ao pré-teste, podemos constatar que, da mesma forma como na pesquisa de Câmara dos Santos (2001), o quadrilátero notável mais escolhido como um “não retângulo” pela maior parte dos estudantes foi o quadrado, sendo construído por 81% dos participantes no nosso estudo, ou seja, quatro quintos do total não reconheceram o quadrado como um retângulo.

Esse fenômeno pode ter ocorrido, provavelmente, pois o quadrado e o retângulo (padrão) apresentam diferenças em suas aparências físicas, característica essa típica do primeiro nível de Van-Hiele. No pós-teste, esse índice caiu para 53%, ou seja, menos de três quintos do total de participantes, o que representa um avanço no pensamento geométrico em relação ao teste anterior.

Em seguida, o quadrilátero notável mais frequente como um “não retângulo”, ocupando o segundo lugar, foi o losango. Isso foi observado em 13% dos alunos, tanto no pré-teste como no pós-teste, todavia, em Câmara dos Santos (2001), o losango só apareceu no pós-teste. Nesse caso, a opção pelo losango parece ser uma tentativa desses alunos buscarem características próprias da figura, como mecanismo para distinguir esses dois quadriláteros notáveis.

Em terceiro lugar, o trapézio foi considerado como um não retângulo por 3% dos estudantes no pré-teste, e por 27% no pós-teste. Novamente, parece que os estudantes procuram por características intrínsecas ao quadrilátero notável, bem como de suas propriedades como uma forma de promover a distinção. Essa é uma tendência própria do segundo nível de Van-Hiele. Por fim, em quarto lugar, o paralelogramo foi escolhido no pré-teste por 3%, e no pós-teste por 7%.

Nesse primeiro momento do item analisado, ao realizamos uma comparação entre os resultados produzidos pelo pré-teste e pelo pós-teste, constatamos uma relevante melhoria do desempenho por parte dos estudantes, após a aplicação da sequência didática.

Na análise das justificativas dos estudantes referentes às suas produções, categorizamos as respostas em três classes: a) *pragmática*, quando o estudante menciona a aparência física ou formato da figura em sua resposta; b) *aplicativa*, na qual, a definição usual da figura é utilizada como justificativa; c) *relacional*, quando o aluno cita as propriedades das figuras produzidas. Como já dito anteriormente, essa categoria foi elaborada por Câmara dos Santos (2001).

Inicialmente, realizamos a categorização das respostas relacionadas à primeira construção, isto é, a partir da categoria anunciada, analisamos os argumentos dos estudantes para explicarem o motivo da figura ser um retângulo. A Tabela 2 exibe a classificação para o pré-teste e para o pós-teste.

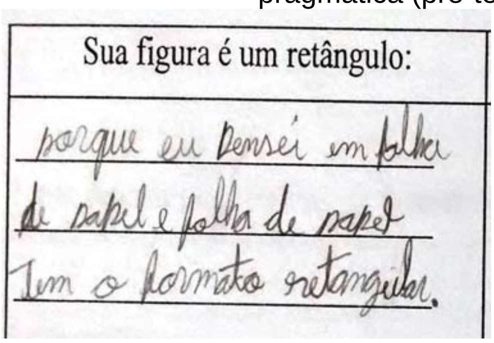
Tabela 2 – Categorização das respostas referentes à primeira construção

CLASSES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Pragmática	64%	20%
Aplicativa	23%	43%
Relacional	13%	37%

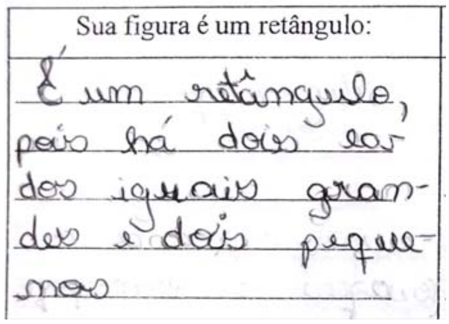
Fonte: Dados da pesquisa.

Pela Tabela 2, observamos que no pré-teste, 64% dos estudantes estavam no nível pragmático, ou seja, mais de três quintos do total fizeram referência apenas à aparência da figura, que é uma característica do primeiro nível vanhieliano. Tal índice caiu para 20% no pós-teste. Uma ilustração da esfera pragmática está apresentada nas Figuras 82.

Figuras 82 – Justificativas dos alunos A06 e A20 sobre a primeira figura na esfera pragmática (pré-teste e pós-teste).



(a) Aluno A06 (pré-teste)



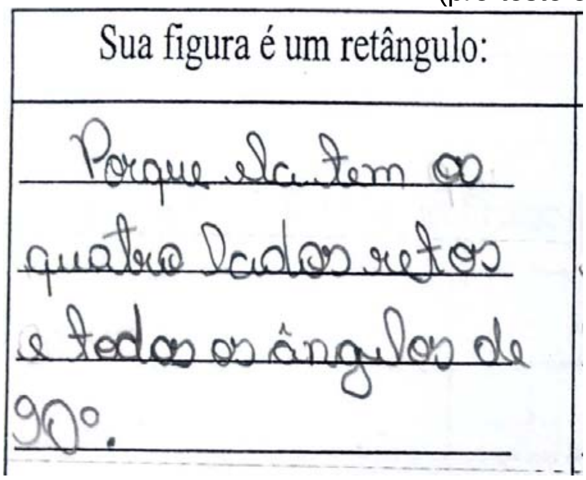
(b) Aluno A20 (pós-teste)

Fonte: Dados da pesquisa.

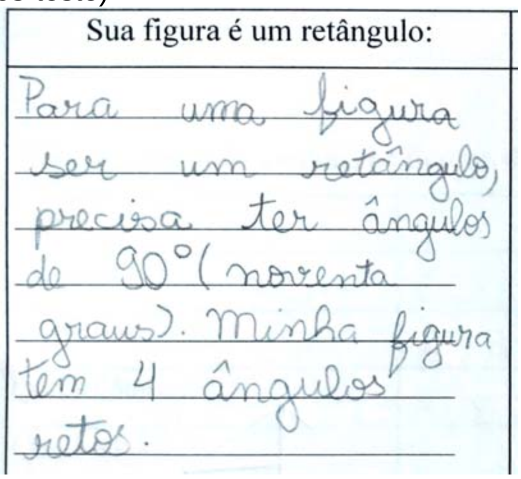
Pela Figura 82a, observamos que o aluno A06 no pré-teste, em sua resposta, faz referência à folha de papel, argumentando que o retângulo lembra o formato de uma folha de papel. Já na Figura 82b, constatamos que o estudante A20 no pós-teste, faz menção aos tamanhos dos lados do retângulo, apontando que há lados grandes e pequenos, logo, também justifica sua produção por meio da aparência da figura. Aqui fica evidente que, no item analisado, esses alunos estão trabalhando no primeiro nível de Van-Hiele, no qual, o estudante reconhece as figuras geométricas a partir dos seus aspectos globais.

Ainda no pré-teste identificamos 23% dos participantes atuando no nível aplicativo, fazendo uso da definição do quadrilátero notável, e 13% no nível relacional, baseando-se nas propriedades da figura, que corresponde ao segundo nível de Van-Hiele. No pós-teste, esses índices apresentaram crescimento, sendo 43% no nível aplicativo e 37% no nível relacional. A seguir, podemos observar dois exemplos para essas classes nas Figuras 83 e 84.

Figuras 83 – Justificativas dos alunos A08 e A01 sobre a primeira figura na esfera aplicativa (pré-teste e pós-teste)


Sua figura é um retângulo:

Porque ela tem os quatro Lados retos e todos os ângulos de 90°.


Sua figura é um retângulo:

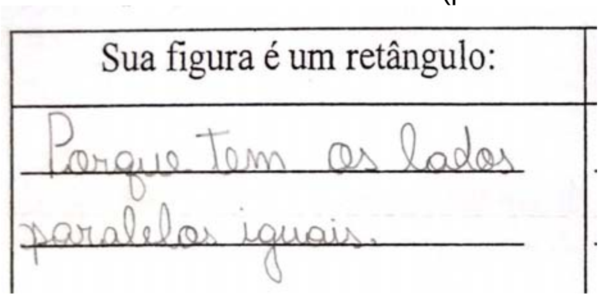
Para uma figura ser um retângulo, precisa ter ângulos de 90° (noventa graus). Minha figura tem 4 ângulos retos.

(a) Aluno A08 (pré-teste) (b) Aluno A01 (pós-teste)

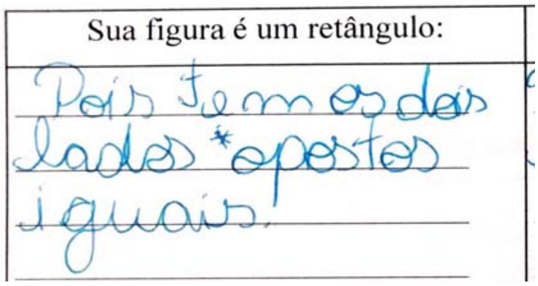
Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 83a, evidenciamos que no pré-teste, o aluno A08 afirmou que sua figura é um retângulo, pois apresenta quatro ângulos retos, que medem 90º, fazendo uso da definição usual do retângulo, como podemos observar no tópico 3.5.1.3 dessa dissertação. O mesmo pode ser verificado na explicação do aluno A01 no pós-teste (Figura 83b). Nesse item analisado, como os alunos não fazem referência às propriedades das figuras, logo, ainda não alcançaram o segundo nível vanhieliano.

Figuras 84 – Justificativas dos alunos A12 e A28 sobre a primeira figura na esfera relacional (pré-teste e pós-teste)



(a) Aluno A12 (pré-teste)



(b) Aluno A28 (pós-teste)

Fonte: Dados da pesquisa.

Constatamos, pelas Figuras 84a e 84b, que os estudantes A12 e A28 explicam que a figura desenhada é um retângulo, porque possui lados opostos congruentes. Tal aspecto é uma das propriedades do retângulo, como pudemos observar no item 3.5.1.3 desse trabalho. Dessa forma, evidentemente esses estudantes estão atuando no segundo nível de Van-Hiele, que é caracterizado pelo reconhecimento das figuras geométricas por meio de suas propriedades.

Até aqui, notamos que há um considerável avanço no pensamento geométrico dos estudantes provocado pela sequência didática, pois se no pré-teste, mais da metade da turma fez referência à aparência do retângulo na justificativa, isto é, uma grande quantidade de estudantes situados no primeiro nível de Van-Hiele, e no pós-teste, houve uma redução considerável desse número de alunos atuando nesse nível.

Além disso, ocorreu crescimento dos índices das classes aplicativa e relacional, o que significa que no pós-teste houve mais estudantes mencionando a definição usual e as propriedades do retângulo em suas respostas. Esse fato representa um importante progresso na aprendizagem dos estudantes, pois segundo Van-Hiele (1957), o aluno que é capaz de reconhecer as figuras geométricas por meio de suas propriedades pode ter alcançado o segundo nível de sua teoria. Logo, no pós-teste, evidenciamos um crescimento do percentual de estudantes trabalhando no segundo nível vanhieliano.

Posteriormente, categorizamos as justificativas dos estudantes em relação à segunda figura produzida (o "não retângulo"). A Tabela 3 apresenta essa categorização.

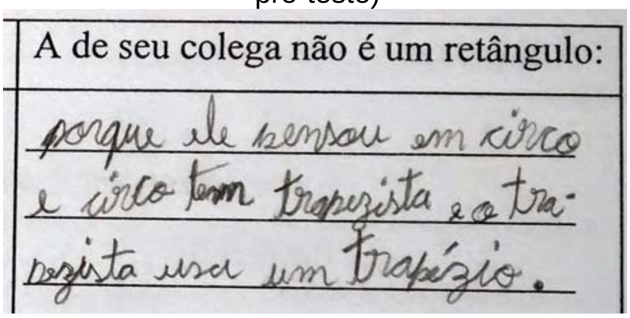
Tabela 3 – Categorização das respostas referentes à segunda construção

CLASSES	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Pragmática	17%	0
Aplicativa	76%	77%
Relacional	7%	23%

Fonte: Dados da pesquisa

Evidenciamos pela Tabela 3 que no pré-teste havia 17% na classe pragmática, 77% (quase quatro quintos) na aplicativa, e 7% na relacional. No pós-teste, encontramos novamente 76% dos alunos trabalhando na classe aplicativa, e 23% na relacional. Além disso, não identificamos alunos situados na classe pragmática. Algumas ilustrações dessas classes estão apresentadas nas Figuras 85, 86 e 87.

Figura 85 – Justificativa do aluno A06 sobre a segunda figura na classe pragmática (apenas pré-teste)

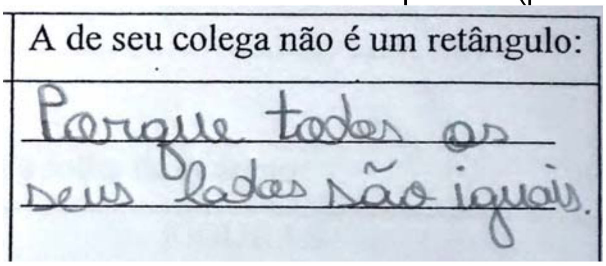


Aluno A06 (pré-teste)

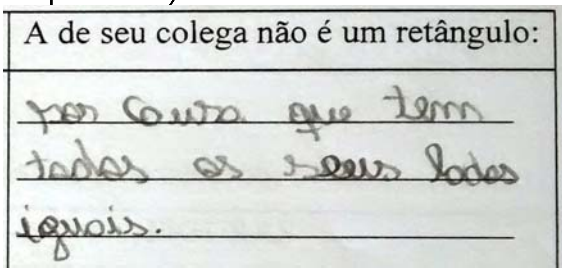
Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar do estudante A06 ter produzido um trapézio com um "não-retângulo", em sua justificativa, demonstrada na figura acima, ele se referenda em um trapézio de circo, mencionando, nesse caso, a aparência desse instrumento como meio de diferenciação. Então, no item estudado do pré-teste, tal aluno atuou no primeiro nível de Van-Hiele.

Figuras 86 – Justificativas dos alunos A03 e A19 referentes à segunda figura na classe aplicativa (pré-teste e pós-teste)



(a) Aluno A03 (pré-teste)

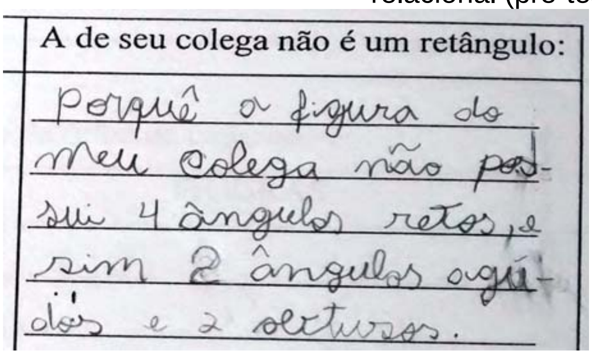


(b) Aluno A19 (pós-teste)

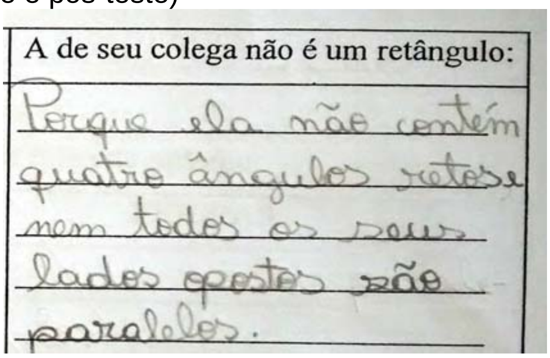
Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno A03 construiu um quadrado como um “não-retângulo”, e sua justificativa apresentada pela Figura 86a, podemos verificar que ele argumentou que o quadrado não é um retângulo, pois possui todos os lados iguais. Aqui é evidente que esse aluno faz uso da definição usual de quadrado (rever item 3.5.1.4) como mecanismo de distinção entre suas figuras produzidas. Tal fenômeno também ocorreu no caso do aluno A19, no pós-teste (Figura 86b). Diante disso, esses alunos ainda não alcançaram o segundo nível vanhieliano nesse item investigado.

Figuras 87 – Justificativas dos alunos A16 e A22 acerca da segunda figura na classe relacional (pré-teste e pós-teste)



(a) Aluno A16 (pré-teste)



(b) Aluno A22 (pós-teste)

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno A16 construiu um losango como um “não retângulo” no pré-teste, e em sua resposta (Figura 88a), explicou que sua figura não é um retângulo, pois não possui quatro ângulos retos, mas sim, dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos. Notamos aqui que esse aluno faz referência a uma propriedade existente para alguns tipos de losangos, logo, há outros tipos de losangos que não apresentam essa propriedade. O quadrado, por exemplo, que é um tipo especial de losango, apresenta todos os ângulos internos retos, sendo também um tipo especial de retângulo. Diante disso, apesar de A16 ter mencionado as propriedades de alguns tipos de losango nesse item, ele ainda não alcançou o segundo nível de Van-Hiele, então, estaria atuando na transição entre os níveis iniciais vanhielianos.

No caso do segundo aluno no pós-teste, A22 produziu um trapézio isósceles, explicitando, como pode ser observado na Figura 88b, que esse quadrilátero notável diverge do retângulo por não possuir quatro ângulos retos e ainda porque nem todos os seus lados opostos são paralelos. No item 3.5.1.1 desse texto, podemos concluir que essas propriedades são válidas para esse tipo de trapézio. Assim, verificamos que A22 atingiu o segundo nível de Van-Hiele, para o item analisado.

Esses dados também mostram que os alunos avançaram em seus pensamentos geométricos por meio da sequência didática, porque há uma considerável redução de alunos trabalhando na esfera pragmática (que apresenta características do primeiro nível de Van-Hiele), uma estabilidade no índice da esfera aplicativa e um crescimento na esfera relacional (que apresenta evidências do segundo nível vanhieliano). Nesse sentido, há estudantes que alcançaram o segundo nível de Van-Hiele, e outros estudantes que avançaram no próprio primeiro nível, ficando bem próximos de atingir o nível seguinte.

Em relação à pesquisa de Câmara dos Santos (2001), observamos algumas diferenças referentes aos nossos dados. Por exemplo, esse pesquisador não identificou nenhum estudante atuando no nível relacional durante o pré-teste. Enquanto que no pós-teste, ele não encontrou nenhum estudante no nível pragmático. Em nosso estudo, não observamos alunos trabalhando nesse mesmo nível apenas na segunda produção. Além disso, da mesma forma como no estudo desse pesquisador, identificamos alunos na transição entre os dois níveis de pensamento geométrico investigados.

Conforme previsto no Capítulo V deste trabalho, tanto no pré-teste como no pós-teste, os estudantes construíram quadrados, losangos, paralelogramos e trapézios e os consideraram como "não retângulos", fazendo referência à aparência dessas figuras, bem como as suas propriedades. Sendo que no pós-teste, houve uma redução de número de alunos utilizando o aspecto global nas explicações, e um aumento da quantidade de alunos aplicando as propriedades. Assim, fica evidente que os alunos avançaram entre os níveis iniciais de pensamento geométrico.

Ainda, não foram identificados alunos construindo retângulos em posição "não prototípica", circunferências e polígonos com cinco ou mais lados como "não retângulos" no pré-teste e no pós-teste.

Para tornar a análise desse item mais completa sobre o primeiro item dos testes, elaboramos mais três quadros que apresentam a relação dos estudantes, com base nas suas produções. Nesse sentido, no Quadro 10, é possível observarmos quais os alunos que construíram, por exemplo, um quadrado no pré-teste e no pós-teste.

Quadro 10 – Relação dos alunos e suas respectivas produções no pré-teste e no pós-teste

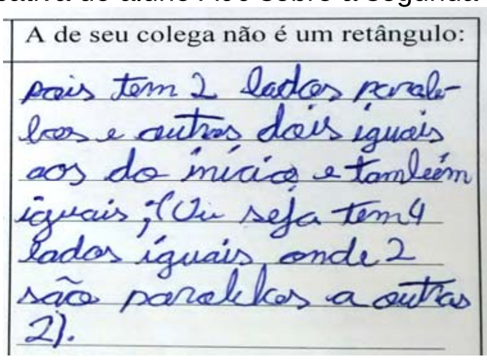
Figuras	Pré-teste	Pós-teste
Trapézio	A06	A03, A05, A07, A09, A10, A22, A24, A26
Paralelogramo	A14	A01, A14
Losango	A01, A08, A13, A16	A04, A08, A13, A16
Quadrado	A02, A03, A04, A05, A07, A09, A10, A11, A12, A15, A17, A18, A19, A20, A21, A22, A23, A24, A25, A26, A27, A28, A29, A30	A02, A06, A11, A12, A15, A17, A18, A19, A20, A21, A23, A25, A27, A28, A29, A30

Fonte: Dados da pesquisa.

Pelo Quadro 10, evidenciamos que dos 24 estudantes que construíram um quadrado no pré-teste, 08 produziram trapézios e 01 elaborou um losango no pós-teste. Como já tínhamos mencionado anteriormente, esses dados nos mostram que parecer existir uma tendência em buscar características próprias das figuras como um meio de diferenciação.

Dos 04 estudantes que fizeram losangos no pré-teste, 01 desenhou um paralelogramo no pós-teste. Ainda, houve um aluno (A06) que no pré-teste construiu um trapézio, mas, no pós-teste, produziu um quadrado. Esse caso não se trata de uma regressão de pensamento geométrico, mas, de um avanço dentro do próprio primeiro nível, pois como vimos anteriormente (Figura 93), em sua justificativa no pré-teste, A06 fez uso da aparência de um trapézio de circo, enquanto que no pós-teste, ele menciona a definição usual do quadrado, como está ilustrado na Figura 88.

Figura 88 – Justificativa do aluno A06 sobre a segunda figura no pós-teste


A de seu colega não é um retângulo:

pois tem 2 lados parale-
los e outros dois iguais
aos do início e também
iguais; (Ou seja tem 4
lados iguais onde 2
são paralelos a outros
2).

Aluno A06 (pós-teste)

Fonte: Dados da pesquisa.

O Quadro 11 apresenta a relação dos alunos, considerando suas respostas à primeira figura construída.

Quadro 11 – Relação dos alunos organizada segundo o tipo de resposta referente à primeira construção

Esferas	Pré-teste	Pós-teste
Pragmática	A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A13, A18, A19, A20, A21, A23, A24, A25, A27, A28, A29, A30	A18, A19, A20, A21, A30
Aplicativa	A08, A09, A10, A14, A16, A17, A26	A01, A02, A03, A07, A08, A11, A14, A15, A16, A23, A24, A25, A27
Relacional	A11, A12, A15, A22	A04, A05, A06, A09, A10, A12, A13, A17, A22, A26, A28

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos pelo Quadro 11 que dos 19 estudantes que estavam na esfera pragmática no pré-teste, 08 passaram para a esfera aplicativa e 05 para a esfera relacional no pós-teste. Dos 07 alunos situados na esfera aplicativa no pré-teste, 04 ficaram na esfera relacional no pós-teste. Ainda, dos 04 estudantes que estavam na esfera relacional no pré-teste, 02 (A11 e A15) passaram para a aplicativa no pós-teste. Lembremos que A11 e A15 produziram apenas quadrados nos dois testes, logo, permanecem no primeiro nível de Van-Hiele.

Tendo em vista as justificativas para o segundo quadrilátero notável produzido, temos no Quadro 12 a relação dos estudantes participantes.

Quadro 12 – Relação dos alunos organizada segundo o tipo de resposta referente à segunda construção

Esferas	Pré-teste	Pós-teste
Pragmática	A04, A06, A26, A29, A30	-
Aplicativa	A01, A02, A03, A05, A07, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A17, A18, A19, A20, A21, A22, A23, A24, A25, A27, A28	A01, A02. A03, A04, A05, A06, A07, A11, A12, A13, A14, A15, A17, A18, A19, A20, A21, A23, A24, A25, A27, A28, A30
Relacional	A08, A16	A08, A09, A10, A16, A22, A26, A29

Fonte: Dados da pesquisa

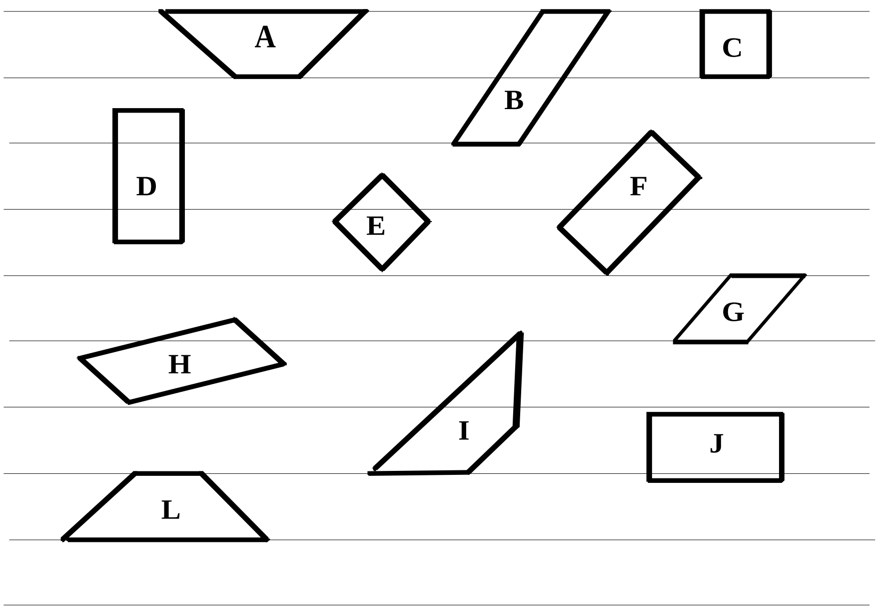
Analisando o Quadro 12, podemos notar que dos 05 estudantes que estavam na classe pragmática no pré-teste, 03 situaram-se na classe aplicativa e 02 na relacional, no pós-teste. Além disso, dos 23 alunos localizados na classe aplicativa no pré-teste, 3 (A09, A10 e A22) avançaram para a classe relacional no pós-teste. Destacamos que no pré-teste esses alunos construíram quadrados, enquanto que no pós-teste, produziram trapézios. Tal fato ocorreu, pois A09, A10 e A22 fizeram uso das propriedades do trapézio em sua resposta, demonstrando assim, que progrediram do primeiro nível para o segundo nível de Van-Hiele, por meio da sequência didática, na atividade analisada.

No caso dos alunos A11 e A15, eles permaneceram na esfera aplicativa, logo, na questão analisada, não avançaram para o segundo nível de Van-Hiele.

6.2.2 Segunda questão

No segundo item foram apresentados aos estudantes onze quadriláteros notáveis de diferentes formas e de diversas posições. A atividade compreendeu em classificar essas figuras em diferentes famílias de quadriláteros, como está ilustrado na Figura 89.

Figura 89 – Quadriláteros utilizados no segundo item no teste



Fonte: CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p.207.

Nesse sentido, os alunos foram orientados a organizarem as figuras a partir das seguintes categorias: retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos.

Nesse item, buscamos verificar se os alunos conseguiriam considerar as figuras geométricas a partir de grupos de família, durante a categorização. Na Tabela 4 estão ilustradas as figuras consideras como retângulos pelos alunos no pré-teste e pós-teste.

Tabela 4 – Figuras geométricas consideradas como retângulos

FIGURAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
B	7%	3%
C	3%	23%
D	90%	100%
E	3%	20%
F	80%	93%
G	3%	0
H	13%	3%
J	87%	93%

Fonte: Dados da pesquisa

Pela tabela, observamos que a maioria dos alunos conseguiu reconhecer o retângulo em sua forma prototípica, que geralmente é trabalhada em sala de aula no ensino básico, sendo evidenciado em 87% dos participantes no pré-teste e em 93% no pós-teste. No caso dos retângulos em posição não prototípica, ocorreu uma pequena redução do índice no pré-teste em comparação aos demais retângulos, isto é, 85% dos alunos reconheceram-no como retângulos, enquanto que no pós-teste, houve um crescimento desse índice, sendo constatado em 97% dos alunos. É importante destacar que os retângulos em formato não prototípico não são comumente explorados na escola.

Dessa forma, no caso do reconhecimento dos retângulos, realizando uma comparação entre os dois testes, observamos um crescimento no índice, isto é, no pós-teste houve mais estudantes reconhecendo o retângulo do que no pré-teste, o que nos dá indício de que houve um avanço no pensamento geométrico dos estudantes.

Os paralelogramos também foram considerados como retângulos, apresentando frequências de 8% no pré-teste e 2% no pós-teste. Tal fato pode ocorrer, porque o paralelogramo e o retângulo apresentam aparências físicas em comum, além de possuírem propriedades comuns. No caso do losango, ele foi considerado como retângulo por 3% dos participantes no pré-teste, sendo que no pós-teste, houve um crescimento desse índice, passando para 20% da turma investigada. Esse crescimento no índice dos losangos também pode representar um avanço no pensamento geométrico dos estudantes.

O quadrado foi reconhecido como retângulo no pré-teste por apenas 3% dos estudantes. No pós-teste, esse índice apresentou um crescimento considerável, alcançando 23% do total de participantes. Aqui também há evidências de avanços no pensamento geométrico desses estudantes. Tal resultado diverge do estudo de Câmara dos Santos (2001), que evidenciou nenhum aluno considerando o quadrado como retângulo no pré-teste e no pós-teste. Além disso, tanto no pré-teste como no pós-teste, nenhum aluno reconheceu os trapézios como retângulos.

No que refere à classificação no grupo dos trapézios, observamos que 90% dos alunos participantes conseguiram reconhecer os trapézios em diferentes posições no pré-teste. No pós-teste esse índice subiu para 96%. Tal crescimento nesse índice pode ser um indicativo de que os estudantes avançaram em seu pensamento geométrico. Os paralelogramos em diversos formatos também foram identificados como trapézios, sendo observado por 3% dos alunos no pré-teste e por 7% no pós-teste. Esse fenômeno parece ter ocorrido, pois para os estudantes esses dois tipos de quadriláteros notáveis possuem aparentemente lados “tortos”. Na Tabela 5 estão apresentados os quadriláteros notáveis identificados como trapézios.

Tabela 5 – Figuras geométricas consideradas como trapézios

FIGURAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
A	90%	97%
B	3%	7%
G	3%	7%
H	3%	7%
I	90%	93%
L	90%	97%

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação à categorização das figuras geométricas na família dos quadriláteros, notamos que a maioria dos estudantes conseguiu reconhecer as onze figuras como quadriláteros, tanto no pré-teste (em média 75%) como no pós-teste (79%). Nesse sentido, fica evidente que há um crescimento do número de alunos que realizaram tal classificação, o que pode representar um avanço em seu pensamento geométrico. A Tabela 6 contém as figuras geométricas consideradas como quadriláteros pelos estudantes tanto no pré-teste como no pós-teste.

Tabela 6 – Figuras geométricas consideradas como quadriláteros

FIGURAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
A	60%	67%
B	70%	77%
C	80%	90%
D	80%	87%
E	80%	87%
F	80%	90%
G	73%	77%
H	67%	73%
I	80%	73%
J	80%	83%
L	60%	63%

Fonte: Dados da pesquisa

Pela tabela, observamos que os paralelogramos foram identificados como quadriláteros por 70% dos estudantes no pré-teste, sendo que no pós-teste, esse número subiu para 76%. Os trapézios foram reconhecidos como quadriláteros por 67% dos participantes no pré-teste e por 68% no pós-teste. Os quadrados (em forma prototípica) foram considerados por 80% no pré-teste e por 90% no pós-teste. Os losangos (em posição prototípica) foram identificados por 80% no pré-teste e por 87% no pós-teste. Os retângulos foram reconhecidos por 80% dos alunos no pré-teste e por 82% no pós-teste. Esses dados mostram que houve crescimento dos índices para todas as figuras fornecidas classificadas como quadriláteros, o que parece fornecer evidências avanços no pensamento geométrico dos estudantes.

Em seguida, ocorreu a classificação dos onze quadriláteros na família dos quadrados. Foi possível observamos que o quadrado em posição prototípica foi considerado como quadrado por 93% da turma no pré-teste e por 97% no pós-teste. O losango (quadrado) em formato prototípico foi reconhecido como quadrado por 67% dos estudantes no pré-teste e por 70% no pós-teste. Aqui, tanto no caso do reconhecimento do quadrado como do losango, observamos crescimentos dos índices, o que pode evidenciar que os alunos avançaram em seu pensamento geométrico. Além disso, o paralelogramo em posição similar ao losango padrão foi identificado por 3% do total de participantes tanto no pré-teste como no pós-teste. Na Tabela 7, podemos verificar as figuras geométricas reconhecidas como quadrados pela turma no pré-teste e no pós-teste.

Tabela 7 – Figuras geométricas consideradas como quadrados

FIGURAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
C	93%	97%
E	67%	70%
F	3%	3%

Fonte: Dados da pesquisa

Dando continuidade, a turma categorizou as figuras geométricas na classe dos paralelogramos. Verificamos que os paralelogramos foram reconhecidos por 73% dos alunos no pré-teste e por 83% no pós-teste. O losango padrão foi considerado como paralelogramo por 20% dos participantes no pré-teste e por 17% no pós-teste. O quadrado em posição prototípica foi identificado como paralelogramo por 20% dos estudantes no pré-teste e no pós-teste. Os retângulos foram reconhecidos no pré-teste por 23% e no pós-teste por 24%. Tais dados parecem confirmar que houve um avanço no pensamento geométrico desses estudantes. Além disso, os trapézios foram identificados como paralelogramos por 7% da turma no pré-teste e por 8% no pós-teste. Esse resultado parece ocorrer, pois o trapézio e o paralelogramo apresentam lados tortos, o que pode levar os estudantes a considerar o trapézio como um paralelogramo. Na Tabela 8, observamos os quadriláteros notáveis considerados como paralelogramos.

Tabela 8 – Figuras geométricas consideradas como paralelogramos

FIGURAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
A	7%	10%
B	77%	87%
C	20%	20%
D	20%	23%
E	20%	17%
F	27%	27%
G	67%	80%
H	77%	83%
I	7%	7%
J	23%	20%
L	7%	7%

Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, os estudantes classificaram as figuras geométricas no grupo dos losangos. O losango (na posição prototípica) foi identificado por 67% da turma no pré-teste e por 80% no pós-teste. O quadrado padrão foi reconhecido como losango por 13% no pré-teste e por 27% no pós-teste. Câmara dos Santos (2001) verificou em sua pesquisa que 3% dos estudantes reconheceram o quadrado como sendo um losango no pré-teste, sendo que no pós-teste 33% dos alunos conseguiram realizar essa identificação. Em ambos os casos, os estudantes parecem demostrar um importante avanço em seu pensamento geométrico, tendo em vista que, em geral, na sala de aula de Matemática, o losango é abordado na posição prototípica, isto é, os seus lados não estão paralelos às bordas da folha de papel. Tal aspecto pode dificultar o reconhecimento do quadrado como losango por parte dos estudantes.

O retângulo em posição inclinada (posicionamento similar ao do losango padrão) foi considerado losango por 3% no pré-teste e por 17% no pós-teste. Os demais retângulos foram identificados como losangos apenas no pós-teste por 3% do total.

Os paralelogramos (não losangos) foram reconhecidos como losangos por 12% no pré-teste e por 17% no pós-teste. Esse fenômeno também foi observado por Câmara dos Santos (2001) tanto no pré-teste como no pós-teste. No pré-teste, o pesquisador verificou 25% dos estudantes considerando os paralelogramos (não losangos) como sendo losangos, todavia, no pós-teste esse índice caiu para 8%. Em ambos os casos, parece que os estudantes apresentam uma compreensão de losangos como um tipo de retângulos "tortos".

Além disso, os trapézios não foram considerados losangos tanto no pré-teste como no pós-teste. Na Tabela 9, podemos observar as figuras geométricas consideradas como losangos pelos estudantes nos testes.

Tabela 9 – Figuras geométricas consideradas como losangos

FIGURAS	**PRÉ-TESTE**	**PÓS-TESTE**
B	7%	13%
C	13%	27%
D	-	3%
E	67%	80%
F	3%	17%
G	23%	27%
H	7%	13%
J	-	3%

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação às nossas previsões de possíveis respostas aos testes mencionadas no capítulo V dessa dissertação, observamos aproximações nas produções dos estudantes, tanto para o primeiro nível (Quadro 09) como para o segundo nível (Quadro 08) de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Como exemplo, podemos mencionar os alunos A15 e A25, que no pré-teste apresentaram uma resposta bem próxima da nossa.

No pré-teste os alunos A15 e A25 não reconheceram o quadrado como sendo um losango, e também não consideraram o losango padrão como um quadrado. Essas evidências parecem mostrar que os alunos estavam no primeiro nível de Van-Hiele. Todavia, no pós-teste, esses mesmos alunos demostraram avanços no seu pensamento geométrico em relação ao seu desempenho no pré-teste, como A15 que considerou o quadrado como sendo um losango, o que não foi verificado no pré-teste. Tal fato representa um significativo avanço no pensamento geométrico desse estudante.

No entanto, nos dois testes, esse estudante não reconheceu os quadrados e os losangos como retângulos, e também não identificou os retângulos, os losangos e os quadrados como sendo paralelogramos. Nesse sentido, há evidências de que A15 não alcançou o segundo nível de Van-Hiele, todavia, avançou dentro do primeiro nível, ficando mais próximo de alcançar o nível de pensamento geométrico seguinte, isso para a questão analisada nos testes.

O aluno A25 também apresentou importante avanço em seu pensamento geométrico no pós-teste. No pós-teste, ele reconheceu o losango padrão como um quadrado (o que não ocorreu no pré-teste), apesar de não ter considerado o quadrado como um losango. Ele ainda identificou os trapézios como quadriláteros (o que não ocorreu no pré-teste). Dessa forma, esses dados evidenciam que, no item analisado, A25 também não conseguiu alcançar o segundo nível vanhieliano, todavia, avançou dentro do primeiro nível.

O Aluno A01 também apresentou no pré-teste uma resposta próxima daquela que tínhamos previsto para o primeiro nível de Van-Hiele, sendo o único diferencial, o fato de ele ter incluído o quadrado, o losango e os retângulos na família dos paralelogramos. No pós-teste, sua resposta se aproxima de nossa previsão para o segundo nível vanhieliano, o que evidencia que houve avanço em seu pensamento geométrico. Observamos que A01 reconheceu o losango como quadrado, no entanto, o inverso ainda não ocorreu (ele não reconheceu o quadrado como losango). No pós-teste, o aluno identificou o quadrado e losango (em posições prototípicas) como retângulos, mas, isso não ocorreu no pré-teste.

Nos dois testes, A01 considerou o quadrado e o losango como paralelogramos, todavia, não reconheceu os paralelogramos padrões como paralelogramos. Dessa forma, os dados parecem mostrar que A01 avançou dentro do primeiro nível, ficando bem próximo de alcançar o segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Outros participantes do estudo que demonstraram avanços em seu pensamento geométrico foram os estudantes A03, A06, A14, A23, A24, A26 e A29. No item analisado, esses alunos ainda não conseguiram alcançar o segundo nível de Van-Hiele, todavia, progrediram significativamente dentro do primeiro nível, ficando próximos de atingirem o nível seguinte de pensamento geométrico.

O aluno A03 reconheceu os paralelogramos como retângulos no pré-teste, no entanto, no pós-teste, isso não foi evidenciado. No pós-teste, ele considerou os quadrados e os losangos como retângulos (isso não foi constatado no pré-teste). No pré-teste, A03 identificou os quadrados, os losangos e os retângulos como paralelogramos (o que não ocorreu no pós-teste). Além disso, no pós-teste, reconheceu os quadrados como losangos e os losangos como quadrados (o que não foi notado no pré-teste). Esses dados apresentam indícios de que esse estudante avançou em seu pensamento geométrico.

O aluno A06, por sua vez, reconheceu o losango como quadrado no pós-teste, sendo que isso não foi verificado no pré-teste, demonstrando, assim, progresso em seu pensamento geométrico.

O estudante A14 no pós-teste considerou o quadrado e o losango como retângulos, porém, esses aspectos não foram verificados no pré-teste, demostrando que houve avanço no seu pensamento geométrico.

O aluno A23 tanto no pré-teste como no pós-teste reconheceu o quadrado como losango e o losango como quadrado. Além disso, no pré-teste, ele considerou apenas um tipo de retângulo na classe dos quadriláteros; no pós-teste, ele ampliou para outros tipos, excluindo apenas os trapézios. Assim, há evidências de que A23 progrediu em seu pensamento geométrico.

Por sua vez, o aluno A24 no pós-teste considerou o losango e o quadrado como retângulos, e também reconheceu o quadrado como losango. No pré-teste, esse fenômeno não foi verificado. Todavia, nos dois testes, ele não conseguiu reconhecer os quadrados, os losangos e os retângulos na classe dos paralelogramos. Logo, esses dados demostram que A24 avançou em seu pensamento geométrico, mas que ele ainda não atingiu o segundo de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Por fim, os estudantes A26 e A29 reconheceram o quadrado como sendo um losango no pós-teste, todavia, no pré-teste isso não ocorreu, o que pode representar significativo avanço no pensamento geométrico desses alunos. Porém, A26 e A29 ainda não conseguiram reconhecer o quadrado e losango como retângulos, e também não identificaram os retângulos, os quadrados e os losangos na família dos paralelogramos, evidenciando que eles ainda não atingiram o segundo nível vanhieliano, mas progrediram dentro do primeiro nível.

É importante destacar que houve alguns estudantes, em média de 33% do total de participantes, que não demonstraram nesse item que avançaram em seu pensamento geométrico, pois apresentaram a mesma resposta nos dois testes, como é o caso, por exemplo, do Aluno A02.

Além disso, observamos que tanto no pré-teste como no pós-teste, A02 reconheceu os retângulos (figuras D, F e J), os trapézios (figuras A, I, L) e os quadriláteros (todas as figuras). O estudante considerou o quadrado padrão e o losango (quadrado) na classe dos quadrados. Ele ainda identificou o losango (quadrado) como sendo um losango, excluído desse grupo, o quadrado padrão. Além disso, identificou os paralelogramos (figuras B, G e H). Nesse item analisado, não é possível afirmar se o estudante avançou em seu pensamento geométrico, tendo em vista que apresentou a mesma produção para os dois testes.

6.2.3 Terceira questão

No terceiro item, os estudantes foram orientados a produzirem dois quadrados diferentes. O objetivo com essa questão foi identificar os critérios utilizados pelos alunos na diferenciação entre as figuras.

Como primeiro resultado, todos os estudantes escolheram o quadrado para a primeira figura no pré-teste e no pós-teste. Aqui fica evidente que os estudantes não apresentam grandes dificuldades em reconhecer um quadrado, seja pela sua aparência física, seja pelas suas propriedades. Na Tabela 10 apresentamos os quadriláteros notáveis considerados pelos estudantes para a segunda figura, nos dois testes.

Tabela 10 – Quadriláteros notáveis escolhidos para a segunda figura pelos estudantes no pré-teste e no pós-teste

FIGURAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Quadrado	60%	53%
Losango	30%	47%
Retângulo	7%	-
Paralelogramo	3%	-

Fonte: Dados da pesquisa

Pela Tabela 10, verificamos que no pré-teste a maioria dos estudantes pesquisados, em média 60%, diferenciaram as duas produções apenas pelo tamanho das figuras, ou seja, produziram dois quadrados de tamanhos diferentes. Todavia, no pré-teste esse índice reduziu para 53%. As evidências parecem mostrar que houve um avanço no pensamento geométrico desses estudantes, contribuindo com a redução do índice.

Esses primeiros resultados do item são diferentes da pesquisa de Câmara dos Santos (2001), que observou que a porcentagem de estudantes que realizaram a diferenciação entre as duas figuras somente pelo seu tamanho foi diminuída de 48% (no pré-teste) para 31% (pós-teste).

O losango foi reconhecido como um quadrado diferente da forma padrão por 30% dos estudantes no pré-teste, e por 47% no pós-teste. Esses dados parecem mostrar que houve avanço no pensamento geométrico dos estudantes, é notório o crescimento do número de alunos diferenciando as duas figuras (quadrado e losango) pela sua posição na folha de papel, evidenciando uma relevante autonomia no que se refere às figuras prototípicas.

Em comparação com o estudo de Câmara dos Santos (2001), notamos algumas diferenças. Em nosso estudo, no pré-teste havia um em cada três estudantes diferenciando as duas construções pela posição na folha de papel, enquanto que em Câmara dos Santos havia um em cada cinco alunos. Todavia, nos dois estudos, foi notado que no pós-teste aproximadamente a metade dos participantes foi capaz de realizar essa diferenciação.

No pré-teste, o retângulo foi escolhido como sendo um quadrado por 7% e o paralelogramo por 3%. Porém, no pós-teste nenhum estudante apresentou tais escolhas. Tal fenômeno parece demostrar um avanço no pensamento geométrico desses estudantes.

Como base no que tínhamos previsto no Capítulo V desta dissertação, nos testes, os alunos escolheram quadrados, losangos, retângulos e o paralelogramo como segunda figura no item, fazendo referência ao aspecto global das figuras, e também, de suas propriedades.

No pós-teste ficou evidente o crescimento do número de estudantes buscando características intrínsecas do losango como meio de diferenciação com o quadrado. Desse modo, há indícios de que eles (os alunos) progrediram em seu pensamento geométrico.

É importante destacar que não verificamos estudantes escolhendo trapézios como segunda figura tanto no pré-teste como no pós-teste.

Agora, para refinar a análise desse item, elaboramos um quadro que mostra a lista dos alunos investigados, de acordo com suas construções. Dessa forma, no Quadro 13, podemos verificar quais os estudantes que, por exemplo, escolheram o losango como segunda figura tanto no pré-teste como no pós-teste.

Quadro 13 – Relação dos estudantes e suas respectivas construções no pré-teste e no pós-teste

Figuras	Pré-teste	Pós-teste
Quadrado	A01, A02, A03, A06, A07, A08, A10, A11, A12, A15, A17, A18, A20, A22, A23, A25, A28, A30	A01, A02, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A15, A17, A20, A22, A27, A28, A29, A30
Losango	A05, A13, A16, A19, A21, A24, A26, A27, A29	A03, A04, A05, A06, A13, A14, A16, A18, A19, A21, A23, A24, A25, A26
Retângulo	A09, A14	-
Paralelogramo	A04	-

Fonte: Dados da pesquisa

Pelo Quadro 13, podemos observar que dos 18 alunos (A01, A02, A03, A06, A07, A08, A10, A11, A12, A15, A17, A18, A20, A22, A23, A25, A28 e A30) que produziram um quadrado como segunda figura no pré-teste, 05 (A03, A06, A18, A23 e A25) construíram um losango no pós-teste.

Parece ficar evidente que há uma tendência entre o estudante A18 em buscar características implícitas das figuras como mecanismo de diferenciação, demonstrando assim significativo avanço no seu pensamento geométrico. Tal fato pode ser generalizado para os demais estudantes.

Dos 09 estudantes (A05, A13, A16, A19, A21, A24, A26, A27 e A29) que produziram losangos como segunda figura no pré-teste, 07 (A05, A14, A16, A19, A21, A24 e A26) construíram novamente losangos no pós-teste, representando significativa autonomia em relação às figuras prototípicas.

Observamos que A05 explicou sua produção no pós-teste, afirmando que *“não existem quadrados diferentes, mas pode ter alteração de tamanho ou posição do quadrado”* (A05). Aqui fica bastante evidente a autonomia desse estudante em relação às figuras prototípicas, representando que ele avançou em seu pensamento geométrico.

Os outros 02 estudantes (A27 e A29) que produziram losangos no pré-teste, escolheram quadrados no pós-teste, evidenciando que, no item analisado, eles estão na faixa de transição entre os níveis iniciais de Van-Hiele.

Além disso, dos 02 alunos (A09 e A14) que construíram retângulos no pré-teste, 01 (A09) produziu um quadrado, não demonstrando avanço em seu pensamento geométrico no item, e o outro (A14) fez um losango, representando que progrediu em seu pensamento geométrico.

Por fim, o estudante (A04) que escolheu um paralelogramo como segunda figura no pré-teste, optou por um losango no pós-teste, apresentando também que avançou em seu pensamento geométrico.

6.2.4 Quarta questão

No quarto item os estudantes foram orientados a construírem um losango *ABCD* (como lustrado pela Figura 49) a partir de dois nós dados em uma malha quadriculada, que representam dois dos seus vértices.

A finalidade desse item era identificar as estratégias empregas pelos alunos na resolução do problema, isto é, se na produção do losango, eles faziam referência apenas à aparência global da figura ou se aplicavam as propriedades, nesse caso, fazendo uso das diagonais do losango. Nesse sentido, elaboramos três categorias para as produções:

a) perceptiva – quando o estudante faz referência apenas a aparência global do losango na construção;
b) reflexiva – quando o aluno aplica as propriedades do losango na produção, isto é, das suas diagonais.
c) divergente – quando o estudante produz outro tipo de quadrilátero notável, que diverge do losango.

Na Tabela 11, podemos encontrar a categorização das produções dos estudantes referente ao item analisado. Embora o item tenha disponibilizado uma malha, a maioria dos estudantes não conseguiu produzir adequadamente o losango no pré-teste.

Pela tabela, observamos que a maior parte dos participantes no pré-teste, em média 57% (quase três a cada cinco alunos) se encontrava na classe perceptiva, isto é, na construção do losango esses estudantes fizeram referência apenas ao aspecto global da figura, que é a característica do primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele. No entanto, esse índice reduziu no pós-teste para 40% (o que corresponde a dois entre cinco alunos).

Tabela 11 - Categorização das construções dos estudantes em relação à produção do losango por meio de dois pontos dados

CATEGORIAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Perceptiva	57%	40%
Reflexiva	37%	57%
Divergente	-	3%
Não respondeu	6%	-

Fonte: Dados da pesquisa

No pré-teste, foram identificados 37% (quase dois entre cinco estudantes) de estudantes trabalhando na esfera reflexiva, referente a uso das propriedades do losango na sua construção, que se refere ao segundo nível vanhieliano. No pós-teste, houve um aumento do número de alunos atuando nessa esfera, cerca de 57% do total (quase três entre cinco estudantes).

Esses primeiros resultados referentes ao item, notamos que há divergência em relação à pesquisa de Câmara dos Santos (2001), na qual, foi verificado menos da metade atuando na classe reflexiva no pré-teste, enquanto no pós-teste, tal índice cresceu para 80% da turma (correspondendo a quatro entre cinco estudantes).

Além disso, 3% dos estudantes produziu um paralelogramo (não losango) ao invés de um losango no pós-teste, ficando na esfera divergente. É importante destacar que 6% dos estudantes não responderam o item no pré-teste.

Nesse item, os dados produzidos evidenciam que os estudantes avançaram significativamente em seu pensamento geométrico, pois há um aumento do número de alunos na classe reflexiva e uma redução de estudantes na esfera perceptiva.

Em relação à previsão de respostas do Capítulo V desse trabalho, identificamos alunos construindo losangos por meio de suas propriedades e também por sua aparência global. Também, observamos um estudante produzindo um paralelogramo, todavia, não evidenciamos nenhum participante construindo trapézios, retângulos e triângulos.

Agora, objetivando tornar a análise mais detalhada dos dados referentes ao item, estabelecemos um quadro que apresenta a relação dos estudantes participantes da pesquisa, com base em suas produções. Assim, a partir do Quadro 14, é possível observamos quais alunos, por exemplo, construíram losangos apenas por meio do aspecto global da figura.

Quadro 14 - Categorização das construções dos estudantes em relação à produção do losango por meio de dois pontos dados

Categorias	Pré-teste	Pós-teste
Perceptiva	A03, A05, A09, A10, A11, A13, A14, A16, A17, A18, A19, A20, A23, A24, A25, A26, A29	A05, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A18, A19, A20, A24, A26
Reflexiva	A01, A02, A06, A07, A08, A12, A15, A21, A22, A27, A28	A01, A02, A03, A04, A06, A07, A08, A09, A10, A17, A21, A22, A23, A25, A27, A28, A29
Divergente	-	A30
Não respondeu	A04, A30	-

Fonte: Dados da pesquisa

Pelo Quadro 14, evidenciamos que dos 17 estudantes (A03, A05, A09, A10, A11, A13, A14, A16, A17, A18, A19, A20, A23, A24, A25, A26 e A29) que produziram losangos por meio da aparência da figura (esfera perceptiva) no pré-teste, 07 (A03, A09, A10, A17, A23, A25 e A29) construíram losangos a partir das suas propriedades (esfera reflexiva), entre eles, o aluno A17. Esses indícios parecem mostrar que esses estudantes avançaram em seu pensamento geométrico, para o item analisado.

Analisando as produções do estudante A17, percebemos que ele avançou significativamente em seu pensamento geométrico, pois no pré-teste, esse participante construiu um losango a partir da aparência física, sendo que a figura ficou bem semelhante ao retângulo, em posição não prototípica. Já no pós-teste, pelas marcações deixadas, A17 aplicou a propriedade das diagonais do losango na produção. Dessa forma, esses dados parecem evidenciar que o aluno avançou entre os níveis iniciais de Van-Hiele (do primeiro para o segundo).

Dos 11 estudantes (A01, A02, A06, A07, A08, A12, A15, A21, A22, A27 e A28) que estavam na classe reflexiva no pré-teste, 09 (A01, A02, A06, A07, A08, A21, A22, A27 e A28) permaneceram nessa classe no pós-teste, isto é, nos dois testes, esses estudantes produziram losangos com base nas propriedades da figura, representando uma significativa consolidação do trabalho na supracitada classe.

Ainda em relação a esse grupo (que construiu o losango na classe reflexiva), observamos que 2 (A12 e A15) desses alunos produziram os losangos na classe perceptiva, fazendo uso da aparência física da figura na construção.

Ao analisamos as produções, evidenciamos que os estudantes A12 e A15, provavelmente, estão trabalhando na faixa de transição entre os níveis de Van-Hiele, no item analisado.

Além disso, dos 02 participantes (A04 e A30) que não responderam o item no pré-teste, um (A04) construiu um losango na esfera reflexiva, e o outro (A30) produziu um paralelogramo (losango) no pós-teste, respectivamente.

No caso do estudante A04, provavelmente, ele não respondeu o item no pré-teste por ter dificuldades com o conceito de losango. No pós-teste, ele parece fazer referência às propriedades da diagonal do losango na construção, evidenciando avanço em seu pensamento geométrico.

No que diz respeito a A30, que produziu um paralelogramo (que não se configura como um losango) no pós-teste, os indícios indicam que ele apresenta dificuldades com o conceito de losango, isso no item analisado.

6.2.5 Quinta questão

O quinto item apresentava um losango *ABCD*, que teve uma parte apagada (Figura 51), e os estudantes eram questionados se era possível reconstruir esse quadrilátero notável (ou não), sendo que eles deveriam explicitar suas respostas. Nessa questão, o objetivo era analisar as estratégias empregadas pelos discentes na reconstrução da figura, isto é, se eles faziam referência ao aspecto global da figura ou se utilizavam das suas propriedades. A Tabela 12 apresenta a primeira parte das respostas dos estudantes.

Tabela 12 – Respostas dos estudantes em relação à possibilidade de reconstrução do losango apagado, da quinta questão do pré-teste e do pós-teste

É POSSÍVEL RECONSTRUIR O LOSANGO?	**PRÉ-TESTE**	**PÓS-TESTE**
Sim	87%	93%
Não	10%	7%
Não respondeu	3%	-

Fonte: Dados da pesquisa

Pela Tabela 12, evidenciamos que no pré-teste, 87% dos estudantes disseram que era possível reconstruir o losango, 10% afirmaram que não era viável refazer o losango que teve um pedaço apagado, e 3% não respondeu o item. No pós-teste, 93% disseram que era possível refazer o losango, enquanto que 7% foram contrários.

Entre os discentes que afirmaram que era possível reconstruir a figura no pré-teste e no pós-teste, observamos três tipos de justificativa:

a) referência ao aspecto global – quando o estudante faz uso da aparência física do losango na justificativa;
b) uso implícito das diagonais do losango – quando o aluno menciona as diagonais do losango de forma implícita em sua explicação;
c) apelo a ideia de simetria – quando, na justificativa, o discente menciona o conceito de simetria.

A Tabela 13 apresenta a porcentagem de estudantes com base nessas categorias. Dessa forma, notamos que um primeiro grupo de estudantes fez uso apenas da aparência global da figura, afirmando que só seria necessário ligar os pontos e a figura estaria reconstruída. Tal fato foi verificado entre 65% desses participantes no pré-teste e 61% no pós-teste.

Tabela 13 – Tipos de justificativas dos estudantes que confirmaram a possibilidade de reconstrução do losango nos dois testes [24]

TIPO DE JUSTIFICATIVAS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Referência ao aspecto global do losango	65%	61%
Uso implícito das diagonais do losango	31%	39%
Apelo à ideia de simetria	4%	-

Fonte: Dados da pesquisa

O segundo grupo de discentes fez uso implícito[25] das diagonais, justificando que era necessário determinar a medida dos comprimentos dos segmentos de reta que formam as diagonais para reconstruir o losango apagado. Tal resposta foi observada entre 31% da turma no pré-teste e entre 39% no pós-teste. Além disso, no pré-teste, 4% dos estudantes fez apelo à ideia de simetria na sua justificativa, no entanto, no pós-teste, não identificamos alunos que fizessem uso dessa ideia.

Em comparação com a pesquisa de Câmara dos Santos (2001), notamos diferenças percentuais no que se referem os dados. Por exemplo, o pesquisador identificou no pré-teste 40% dos estudantes se referindo, de algum modo, as diagonais do losango, sendo que no pós-teste tal índice chegou a 80%. Outro dado interessante verificado foi que no pós-teste 33% dos discentes fizeram uso da ideia de simetria na explicação, sendo que esse conceito não foi trabalhado na pesquisa.

Em relação a nossa previsão de respostas discutida no capítulo V dessa dissertação, verificamos estudantes fazendo uso do aspecto global do losango e também do uso de suas diagonais nas justificativas.

---

[24] No pré-teste, o total de estudantes que confirmaram ser possível reconstruir o losango foi de 26, enquanto que no pós-teste foi de 28. Nesse sentido, o cálculo percentual foi calculando consideram essas quantidades.

[25] Aqui utilizamos o termo implícito, pois, os estudantes não mencionam diretamente o termo “diagonal”, mas sim segmentos de reta ou linha.

CAPÍTULO VII

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo apresentamos as considerações finais obtidas a partir dos dados produzidos na pesquisa, além de algumas perspectivas para estudos futuros.

7.1 Buscando concluir a discussão

Esta pesquisa de mestrado buscou analisar os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático. Para tanto, o estudo foi aplicado com 30 estudantes de uma turma do 6º do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Recife, capital do Estado de Pernambuco, Brasil.

A sustentação teórica utilizada para a realização de nosso estudo considerou os trabalhos de Van-Hiele (1957), Salvador et al. (1989), Crowley (1994), Kaleff et al. (1994), Usiskin (1994), Câmara dos Santos (2001; 2009), Inoue (2004), Ontário (2006), Santos (2007), Van de Walle (2009), Alves e Sampaio (2010), Benites (2010), Nasser e Sant'anna (2010), Barbosa (2011), Oliveira (2012), Conceição e Oliveira (2014), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b), entre outros, sobre a teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, construída pelos educadores matemáticos holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geodolf.

Para alcançarmos o nosso objetivo, a dissertação contemplou uma replicação de pesquisa, fazendo uso dos instrumentos elaborados por Câmara dos Santos (2001) para a coleta de dados, em um estudo análogo realizado também em uma escola pública de Recife-PE.

Decidimos reaplicar esses instrumentos, pois nos interessamos em verificar se a sequência didática construída por Câmara dos Santos (2001) seria capaz de proporcionar o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes do 6º ano, por meio de outro *software* de GD, diferente do utilizado no estudo pioneiro. Hipótese essa que foi confirmada em nosso estudo.

A partir dos dados produzidos, analisamos as produções dos estudantes referentes às atividades propostas pela sequência didática, desenvolvida no GeoGebra, e também relacionadas as questões do pré-teste e pós-teste. No pré-teste e pós-teste, buscamos identificar os níveis de pensamento geométrico em que se encontravam esses alunos, antes e após a intervenção pedagógica proposta pela sequência didática. Na sequência didática, objetivamos verificar as estratégias utilizadas pelos participantes do estudo na realização das atividades.

Também, nesse estudo, buscamos verificar os avanços de pensamento geométrico dos estudantes.

Na análise das produções referentes à sequência didática, evidenciamos que as estratégias utilizadas pelos estudantes no desenvolvimento das atividades, centraram-se em três campos: a) pragmático, no qual, os estudantes fazem referência somente ao aspecto global dos quadriláteros notáveis (verificado em 40% das duplas de alunos); b) aplicativo, quando os alunos utilizam a definição usual da figura geométrica (observado em 47% da turma); c) relacional, no qual, os estudantes mencionam as propriedades dos quadriláteros notáveis nas produções (evidenciado em 13% do total de participantes).

Em relação ao pensamento geométrico dos estudantes antes da aplicação da sequência didática, no pré-teste, verificamos que todos os estudantes estavam no primeiro nível de Van-Hiele, no qual, ocorre o reconhecimento das figuras geométricas apenas pela sua aparência física. Contudo, no pós-teste, foi possível notarmos estudantes atuando já no segundo nível vanhieliano.

Assim como na pesquisa de Câmara dos Santos (2001), no que se refere ao desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, considerando a teoria de Van-Hiele (1957), verificamos um progresso importante nesse processo, pois parte considerável dos estudantes participantes avançou entre os níveis iniciais (do primeiro nível para o segundo nível), por meio da sequência didática (sendo verificado entre 27% do total de alunos participantes do nosso estudo).

Observamos, também, que alguns alunos não alcançaram a passagem do primeiro para o segundo nível, mas, esses alunos progrediram significativamente dentro do próprio nível, deixando-os bem próximos do nível seguinte (43% dos estudantes). Diante dessa constatação, conjecturamos a possibilidade da existência de subníveis no primeiro nível vanhieliano. Nesse sentido, investigaremos essa hipótese em uma nova linha de investigação, isto é, em nível de doutorado.

Foi-nos possível ainda identificar alunos trabalhando nos dois níveis (30% dos alunos), tal fato é um indício de que podem existir faixas de transição entre os níveis vanhielianos, como também foi verificado por Câmara dos Santos (2001).

Além disso, em algumas atividades da sequência didática (no que se refere às justificativas), alguns estudantes demostraram o pensamento geométrico característico do terceiro nível de Van-Hiele, no qual, ocorre a ordenação das propriedades das figuras geométricas (por exemplo, reconhecer um quadrado como um retângulo e com um losango, pois apresentam propriedades em comum). No entanto, tal aspecto não foi observado no pós-teste. Esses indícios parecem mostrar que um mesmo aluno pode estar em diferentes níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele, mas isso, de acordo com o tipo de atividade e com o tipo de conceito matemático explorado, como foi constato pelos pesquisadores Gutiérrez, Pastor e Fortuny (1991).

Nessa pesquisa, observamos que o progresso de níveis não ocorre em um pequeno período de tempo, levando semanas e meses, como bem discutem Nasser e Sant'anna (2010). Essas autoras afirmam que o desenvolvimento do pensamento geométrico é ainda marcado pelas experiências dos estudantes, pelo contexto social, pelas relações estudante-professor e estudante-estudante, do número de aulas de Geometria, etc.

De modo geral, julgamos que os objetivos traçados no estudo foram alcançados. Todavia, algumas questões necessitam uma discussão mais refinada em estudos posteriores, sobretudo, em relação à superação de várias dificuldades referentes à pregnância das figuras prototípicas para os quadriláteros notáveis, como verificados nesta dissertação e também no estudo de Câmara dos Santos (2001).

Também buscaremos realizar em pesquisas futuras um estudo teórico sobre os níveis de Van-Hiele, tendo em vista que verificamos na literatura do âmbito da Educação Matemática a existência de diferentes nomes dados aos níveis, sendo utilizados como sinônimos. No entanto, acreditamos que essa nomenclatura apresenta divergências no que se refere à sua natureza.

Outro aspecto que merece uma discussão em pesquisas futuras refere-se a alguns tipos de produções dos estudantes realizadas na sequência didática e no pré-teste e pós-teste. Como por exemplo, podemos mencionar a oitava questão da terceira fase da sequência didática, na qual, os estudantes foram orientados a produzirem um losango. Nessa atividade, identificamos duplas de estudantes que construíram um trapézio ou um paralelogramo (não losango) ao invés de um losango.

Diante desses resultados produzidos, surgem algumas inquietações para trabalhos futuros: O que leva esses estudantes a realizarem essas produções? Como a teoria de Van-Hiele explicaria esses dados? Quais conceitos geométricos esses estudantes deveriam mobilizar para terem êxito nessas atividades? Qual(is) Geometria(s) eles vivenciaram nos anos iniciais do ensino fundamental? Quais situações didáticas foram exploradas? Que tipos de atividades foram trabalhados em sala de aula?

É importante destacar que nessa dissertação nosso foco centrou-se nos níveis iniciais de pensamento geométrico, de acordo com a teoria de Van-Hiele, por meio da aplicação de uma sequência didática no *software* GeoGebra. Também, sugerimos como tema para estudos futuros, realizar uma análise dos efeitos didáticos do GeoGebra para o desenvolvimento do pensamento geométrico dedutivo e do pensamento geométrico abstrato, referentes aos quarto e quinto níveis da teoria de Van-Hiele, respectivamente. Tendo em vista que são níveis quase nunca investigados por pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

Outro fenômeno que observamos em nossa pesquisa foi a importância do desenvolvimento de atividades em dupla, principalmente, quando essas atividades estão atreladas a ambientes de Geometria Dinâmica. Durante a aplicação da sequência didática no GeoGebra, evidenciamos que os alunos discutiram entre si sobre as atividades, realizaram socialização de informações, construíram conhecimento coletivamente, além de refletirem acerca de uma melhor estratégia de resolução.

Por fim, ressaltamos a relevância do professor de Matemática realizar um trabalho sistemático com a Geometria em sala de aula, sendo que a Geometria Dinâmica um caminho, contribuindo como um elemento de superação das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes do 6º ano do ensino fundamental em espaços de Geometria Estática.

Nessa perspectiva, nossa experiência com o GeoGebra apresentou que esse *software* é um importante recurso didático aos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria, sobretudo, para o desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico no 6º ano do ensino fundamental, tendo a teoria vanhieliana como sustentação.

Para isso, não descartamos que a participação da direção e da equipe pedagógica da escola é fundamental nesse processo, apoiando o trabalho do professor, tornando, assim, as aulas de Geometria Dinâmica possíveis e viáveis de serem desenvolvidas em sala de aula.

Esperamos que esta dissertação possa contribuir de alguma forma com o desenvolvimento de outras pesquisas no campo educacional, e sobretudo, com o trabalho de nossos colegas de profissão, professores de Matemática do ensino básico, nas intervenções pedagógicas e na transposição das situações vivenciadas nesse estudo com o cotidiano tão complexo das suas classes de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, A. C. O lugar da geometria no ensino fundamental: um estudo no município de Crato – CE. **Anais...** 10 Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010.

ALVES, G. S; SAMPAIO, F. F. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, v. 05, pp. 69-76, 2010.

ARAÚJO, W. A. de; GOMES, A. M. F. O GeoGebra como Recurso Didático no Ensino da Geometria Analítica. **Anais...** 5 Colóquio Internacional de Educação e Contemporaneidade, São Cristóvão, 2011.

BALDINI, L. A. F. **Construção do conceito de área e perímetro:** uma sequência didática com auxílio de software de Geometria Dinâmica. 2004. 211f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BARBOSA, C. P. **O pensamento geométrico em movimento:** um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2011. 187f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana:** coleção professor de Matemática. Fortaleza: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

BAUMAN, Z. **Modernidade Líquida**. Trad. P. Dentzien. Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

BELLEMAIN, F. A transposição informática na engenharia de softwares educativos**. Anais...** 1 Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Serra Negra, 2000.

BENITES, J. R. **Estudo de caso utilizando o modelo de pensamento geométrico dos Van Hiele**. 2010. 35f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Matemática). Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados, 2010.

BEZERRA, E. S.; BARBOSA, E. J. T. Um olhar reflexivo sobre a aprendizagem de geometria no ensino fundamental. **Anais...** 11 Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013.

BITTENCOURT, I. M.; BITTENCOURT, I. G. S. Como professores concebem o uso das TIC em suas práticas pedagógicas. **Anais...** 5 Encontro de Pesquisa em Educação em Alagoas, Maceió, 2010.

BORBA, V. M. L.; COSTA, A. P. Uma análise sobre a permanência e a desistência de licenciandos em matemática no Centro de Formação de Professores da Universidade Federal de Campina Grande. **Anais...** 11 Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013.

BORBA, R. E. S. R. O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números inteiros relativos. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** Repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRASIL. MEC. 1998. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. 3. ed. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Le contrat Didactique: Le Milieu. **RDM**, v.9, n.3, pp.309-336, 1988.

BUENO, C.; GUÉRIOS, E. C. Alfabetização matemática: manifestações de estudantes do primeiro ciclo sobre geometria. **Anais...** 10 Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Effets de l´utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpement de la pensée géométrique. **Annales...** 2 Congres International Cabri Géomètre, Montreal, 2001.

______. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. **Revista do Professor de Matemática**, v. 50, pp. 38-45, 2002.

______. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** Repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

CATANEO, V. I. O Uso do Software GeoGebra como Ferramenta de Ensino e Aprendizagem da Matemática. **Revista Eletrônica de Investigação e Docência**, n.7, pp.57-71, 2012.

CLEMENTE, F.; TORREGROSA, G.; LLINARES, S. La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural. **Anais...** 14 Conferência Interamericana de Educação Matemática, Tuxtla Gutiérrez, 2015.

CATTAI, A. P. O GeoGebra nas aulas de Matemática. **Anais...** 1 Encontro de Matemática do CEFET-BA, Salvador, 2007.

CONCEIÇÃO, D. A. ; OLIVEIRA, K. P. **Uma análise do nível do conhecimento geométrico dos professores de matemática das escolas estaduais do município de São Vicente Ferrer**. 2014. 53f. Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade de Pernambuco, Nazaré da Mata, 2014.

COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. **Anais...** 14 Conferência Interamericana de Educação Matemática, Tuxtla Gutiérrez, 2015a.

______. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. **Anais...** 4 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Ilhéus, 2015b.

COSTA, A. P.; LACERDA, G. H. Educação Matemática: o uso do software Geogebra como instrumento de ensino e aprendizagem da geometria plana. **Anais...** 3 Colóquio Brasileiro Educação na Sociedade Contemporânea, Campina Grande, 2012.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar em Revista**, v. 31, pp. 213-230, 2008.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** geometria plana. Vol.9. São Paulo: Atual, 2005.

FAINGUELERNT, E.K. O ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. **A Educação Matemática em Revista**, n. 4, pp. 45-53, 1995.

GIANCATERINO, R. **A matemática sem rituais**. Rio de Janeiro: Wak Ed, 2009.

GITIRANA, V. Função matemática: o entendimento dos alunos a partir do uso de softwares educacionais. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** Repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.; FORTUNY, J. F. An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 22, n. 3, pp. 237-251, 1991.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. **Journal. of Computers in Mathematics and Science Teaching**, n.2, pp. 135-146, 2008.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M. **Ajuda GeoGebra:** manual oficial da versão 3.2. 2009. Disponível em: < http://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf> Acesso em: 27 ago 2015.

INOUE, R. K. M. **O processo de formação do conceito de quadriláteros, envolvendo alunos de uma 6ª série do Ensino Fundamental**. 2004. 170f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2004.

ITACARAMBI, R. R.; BERTON, I. C. B. **Geometria, brincadeiras e jogos:** 1º ciclo do ensino fundamental. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

JANUÁRIO, A. J. **Desenho geométrico**. 4. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2013.

KALEFF, A. M. M. R.; HENRIQUES, A.S.; REI, D.M.; FIGUEIREDO, L. G. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. **Bolema**, v. 10, pp. 21-30, 1994.

LEAL, T. F. Fazendo acontecer: o ensino da escrita alfabética na escola. In: MORAIS, A. G.; ALBUQUERQUE, E. B. C.; LEAL, T. F. **Alfabetização**: apropriação de escrita alfabética. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

LENNAN, M. L. F. M.; AVRICHIR, I. A prática da replicação em pesquisas do tipo survey em Administração de Empresas. **Administração:** Ensino e Pesquisa, v.4., n.1, pp.39-61, 2013.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. P. F. Geometria. In: CARVALHO, J. P. F. **Matemática:** ensino fundamental (Coleção Explorando o ensino). vol. 17. Brasília: MEC/SEB, 2010.

LOPES, M. M. Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. **Anais...** 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, 2011.

LORENZATTO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, n.4, pp.3-13, 1995.

MACCARINI, J. M. **Fundamentos e metodologia do ensino de Matemática**. Curitiba: Editora Fael, 2010.

MARQUES, F. J. R.; BAIRRAL, M. A. Futuros professores de Matemática interagindo em um ambiente virtual com o GeoGebra. **Educação Matemática em Revista** (EMR), v. 41, pp. 5-18, 2014.

MELO, M. M. C. **Efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de perímetro**. 2009. 198f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

MOCROSKY, L. F.; MONDINI, F.; ESTEPHAN, V. M. O ensino de geometria no Brasil: alguns aspectos da sua origem nos livros didáticos brasileiros. **Anais...** 3 Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa, 2012.

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 19. ed. Campinas: Papirus, 2012.

MORACO, A. S. C. T.; PIROLA, N. A. Visualização e representação geométrica e sua contribuição na formação do pensamento geométrico em alunos do ensino médio. **Anais...** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte - MG. Anais... Belo Horizonte: SBEM – Regional da Bahia, 2007. p. 1-16.

MOTTA, M. S. **Contribuições do Superlogo ao ensino de geometria do sétimo ano da Educação Básica.** 2008. 226f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele.** 2ªed. Rio de Janeiro: IM/UFJR, 2010.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso básico de Geometria – enfoque didático:** módulo I, formação de conceitos geométricos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2010a.

______. **Curso básico de Geometria – enfoque didático:** módulo II, visão dinâmica da congruência de figuras. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2010b.

OLIVEIRA, M. C. **Ressignificando conceitos de geometria plana a partir do estudo de sólidos geométricos.** 2012. 266f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

NERÍ, I. C. **O que é Geometria Dinâmica?** 2012. Disponível em: <http://kmatematikka.blogspot.com.br/2012/09/o-que-e-geometria-dinamica.html> Acesso em: 26 ago. 2015

OLIVEIRA, P. N.; ALMEIDA, J. R. Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE: o que mostram os resultados no desempenho dos alunos em matemática em 2011. **Anais...** 7 Encontro Paraibano de Educação Matemática, João Pessoa, 2012.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2006. **Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année**. Géométrie et sens de l'espace: Formes géométriques. Fascicule 1. Toronto, le Ministère, p.12.

PADILHA, M. A. S. Professores, professoras, tecnologias e avaliação da aprendizagem: dilemas e proposições no contexto da escola pública. In: CRUZ, F. M. L. **Teorias e práticas em avaliação**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2010.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, n.1, pp.7-17, 1993.

PENTEADO, M. G. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

PEREIRA, M. R. de O. **A geometria escolar:** uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino. 2001. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PEREIRA JUNIOR, J. ; SOUTO PEREIRA, D. L. Estudo do Potencial dos Softwares Geogebra, Cabri-geometrè e Régua e Compasso. **Anais...** 32 Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá, 2009.

PERNAMBUCO. **SAEPE – 2011.** Volume 3 – Matemática – 4ª série/5ºano Ensino Fundamental. UFJF, Juiz de Fora, 2012a.

______. Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. UFJF, Juiz de Fora, 2012b.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. Trad. M. A. M. D'Amorim e P. S.L. Silva. 24.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitaria, 1999.

QUARTIERI, M. T.; REHFELDT, M. J. H. Investigando conceitos no ensino de geometria. **Anais...** 9 Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.

RÊGO. R. G.; RÊGO. R. M.; VIEIRA, K. M. **Laboratório de ensino de geometria**. Campinas: Autores Associados, 2012.

SANTOS, M. R. Teoria de Van Hiele: uma alternativa para o ensino da geometria no 2º ciclo. **Anais...** 9 Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.

SANTOS FILHO, J. C. Pesquisa quantitativa versus pesquisa qualitativa: o desafio paradigmático. In: SANTOS FILHO, J. C.; GAMBOA, S. S. **Pesquisa educacional**: quantidade-qualidade. 8. ed. São Paulo: Cortez, pp.13-59, 2013.

SALVADOR, R. M. C.; PALAU, P. H.; GARRIGUES, J. M.; PASCUAL. A. P.; PÉREZ, E. **Didáctica de la geometría:** modelo Van Hiele. València: Universitat de València, 1989.

SOUZA, M. F. de O. **O uso das TIC no processo de ensino e aprendizagem da Matemática:** das práticas às concepções docentes. 2010. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

TINOCO, L. A. A. **Geometria Euclidiana por meio da resolução de problemas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática-UFRJ, 1999.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry**. CDASSG Project. The University of Chicago. Chicago (USA). 1982.

______. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN-HIELE, P. M. **El problema de la comprensión:** en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria. 1957. 151f. Tesis (Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad Real de Utrecht: Utrecht,1957.

ZULLATO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica:** suas características e perspectivas. 2002. 316f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

ANEXOS

ANEXO I – Original do Quadro 5 (Ontario, 2006).

Description	Comportements observables
Niveau 0 – Visualisation Perception et classement des formes géométriques selon leur apparence	**L'élève :** • utilise du vocabulaire géométrique; • reconnaît, nomme, compare et reproduit des formes géométriques d'après leur apparence générale; • a de la difficulté à se faire une représentation mentale d'une forme géométrique (Les formes sont observées, mais ne sont pas conceptualisées. Chacune est perçue de façon globale, comme une entité.); • classe ou regroupe des formes géométriques qui se ressemblent. **Exemple d'énoncé :** *C'est un carré, on le voit bien… Ses côtés sont tous pareils et il est droit.*
Niveau 1 – Analyse Début de l'analyse des formes géométriques pour en découvrir les propriétés	**L'élève :** • reconnaît certaines propriétés communes et distinctes des formes géométriques; • nomme les propriétés des formes géométriques, mais ne voit pas les sous-classes à l'intérieur d'une famille de polygones; • généralise les propriétés d'une forme géométrique donnée à l'ensemble des formes géométriques de la même famille; • classe les formes géométriques en fonction de leurs propriétés. **Exemple d'énoncé :** *Cette figure est un carré parce qu'elle a quatre sommets, quatre coins droits, quatre côtés égaux et deux paires de côtés parallèles.*
Niveau 2 – Déduction informelle Établissement de liens entre les formes géométriques et entre les propriétés d'une forme géométrique donnée	**L'élève :** • déduit certaines des propriétés d'une forme géométrique; • reconnaît et établit des sous-classes de formes géométriques; • émet et vérifie certaines hypothèses; • comprend et utilise les relations d'inclusion et d'exclusion; • développe des listes de propriétés qui sont nécessaires et suffisantes pour décrire une forme géométrique quelconque; • formule des arguments mathématiques clairs et suffisants en utilisant le vocabulaire de causalité (p. ex., parce que, car, donc) et de conséquence logique (p. ex., si… alors, puisque… donc). **Exemple d'énoncé :** *C'est un carré mais c'est aussi un trapèze, car la propriété qui décrit le trapèze est qu'au moins deux côtés opposés sont parallèles. Je crois donc que le carré est une sorte de trapèze.*
Niveau 3 – Déduction Étude des définitions, des preuves, des théorèmes, des axiomes et des postulats	**L'élève :** • présente une preuve sans se limiter à la mémorisation; • prouve un énoncé de différentes façons; • comprend les sous-classes de formes géométriques et leurs relations. **Exemple d'énoncé :** *Un parallélogramme qui a deux côtés adjacents congrus doit être un losange.*
Niveau 4 – Rigueur Étude de la géométrie de façon abstraite	**L'élève :** • utilise des systèmes déductifs abstraits; • travaille avec la géométrie non euclidienne; • fait les liens entre les concepts et développe parfois de nouveaux postulats.

ANEXO II – USISKIN, 1982

specification as a fifth property of the levels.

Property 5: (attainment) The learning process leading to complete understanding at the next higher level has five phases, approximately but not strictly sequential, entitled:

- inquiry
- directed orientation
- explanation
- free orientation
- integration

It is not the intent of this study to examine the movement from one level to the next. The interested reader may wish to look at Hoffer (1982). The writings of the van Hieles serve to indicate that the process of moving from one level to the next takes more time than can be spanned in an hour or even a short unit of teaching. For instance, Dina (1957) reports 20 lessons to get from level 1 to level 2 (our numbering) and 50 lessons to get from level 2 to level 3, working with 12-year-olds. This is about a half year of lessons if studied continuously.

Properties of the theory. From the descriptions of the van Hiele theory given thus far, the reader may have noted that this theory possesses three appealing characteristics: elegance, comprehensiveness, and wide applicability. By elegance we mean that the theory involves a rather simple structure described by reasonably succinct statements, each with broad effect. For instance, the same principles apply for movement from level 1 to 2 as from 2 to 3 and so on, displaying an elegance of form. And the simplicity of structure is evident when one notes that the figures of level 1 are the building blocks for properties at level 2, which in turn are ordered in level 3, the ordering being an

essential prerequisite for the understanding of a mathematical system at level 4, one of those objects compared at level 5.

Any theory which covers the whole of learning of geometry, and which seeks to explain not only why students have trouble in learning but also what could be done to remove these stumbling blocks, must be called comprehensive. P.M. van Hiele asserts in Begrip en Inzicht that the theory applies to all of mathematical understanding and gives examples involving the learning of functions and other non-geometric notions. Yet the theory has not been detailed enough in other areas to make it that comprehensive. From personal communication, we know that Mayberry felt restricted by the lack of breadth even of geometric content in the published articles of van Hiele. For this same reason, the study of Burger et al. (1981) has restricted the domain to triangles and quadrilaterals. Still, the theory purports to be quite comprehensive.

With attempts to apply the theory in geometry curricula in countries as diverse as the Netherlands, the Soviet Union, and the United States, the theory is obviously seen as both widely and easily applicable.

Significantly, these properties of a theory (elegance, comprehensiveness, and wide applicability) do not lend themselves to being tested. Yet they are probably the major reasons for the speed with which the van Hiele theory has become known in the United States. Thus many mathematics educators are accepting and using this theory on the basis of characteristics of the theory rather than a testing of its individual components.

An analogous situation would be if someone had a theory for curing

all cancer, requiring merely the introduction of a single substance into the bloodstream in some carefully administered way. That would be an elegant cure, and comprehensive in the sense that it applied to all cancers. If it were accepted in many places, the theory would have gained the quality of wide applicability. Indeed there exists such a theory, and the substance is laetrile. Yet laetrile has not withstood more careful scrutiny. Just because a theory is elegant, comprehensive, and has been used by many does not insure that the theory is correct.

In the medical situation, one looks for experiments that test the ability of the theory to satisfy its claims. The van Hiele theory includes descriptions of behaviors of students at various levels and predicts certain other behaviors of those students. Descriptive accuracy and predictive power are important attributes of theories that purport to be scientific (as opposed to theories that are only speculative). The fundamental purpose of this project is to test the ability of the van Hiele theory to describe and predict the performance of students in secondary school geometry. Referring back to the questions to be addressed by the project, as stated on pages 1 and 2 of this report, the first two questions are each designed to test the extent to which a level can be identified for each student and to test the fixed sequence property of the levels. Questions 3, 4, and 5 test the ability of van Hiele levels to predict geometry performance. Questions 6 and 7 relate to the separation property of the levels and provide a somewhat less formal test of the validity of that property.

ANEXO III – Sequência didática (original)

Primeira fase

<u>1ª Atividade</u>

1) Construa o segmento **AB**;
2) Construa o ponto **M** no meio de **AB**;
3) Desloque o ponto **M** e certifique-se de que ele continua no meio do segmento **AB**;
4) Deslocar os pontos **A** e **B** e observar o que acontece. Escreva suas observações:

5) Construa um ponto **D**, fora do segmento **AB**
6) Construa uma reta paralela ao segmento **AB**, passando por **D**
7) Desloque os pontos **A**, **B** ou **D** , observando o que acontece.

8) Salve o arquivo com o nome A01.fig

<u>2ª Atividade</u>

1) Crie os pontos **A** e **P**;
2) Construa a reta **r** que passa por **A** e **P**;
3) Construa um ponto **B** da reta **r**, de tal forma que a distância de **AP** seja a mesma de **PB**;
4) Aproxime o ponto **A** do ponto **P**;
5) O ponto **B** também se aproxima?
6) Se não, apague o ponto **B**, crie outro e tente outra vez.
7) Explique como você construiu o ponto **B**, para que ele satisfaça a condição solicitada:

8) Salve o arquivo com o nome A02.fig

<u>3ª Atividade</u>

1) Crie os pontos **A** e **B**;
2) Construa a reta **s** que passa por **A** e **B**;
3) Construa as retas perpendiculares a **s**, que passem pelos pontos **A** e B;
4) Desloque os pontos **A** e **B**;
5) Qual a relação que existe entre as duas retas perpendiculares que você construiu?

6) Salve o arquivo com o nome A03.fig

Segunda fase

<u>1ª Atividade</u>

1) Construa o segmento **AB**;
2) Pelo ponto **A**, construir a perpendicular ao segmento **AB**. Sobre essa reta construir o ponto **X**.
3) Pelo ponto **B**, construir a perpendicular ao segmento **AB**. Sobre essa reta construir o ponto **Y**

4) Desloque os pontos da figura e verifique se as retas continuam sendo perpendiculares ao segmentos. Se não continuarem, recomeçar a construção.
5) Os ângulos **XÂB** e **YBA** são iguais? Quanto eles medem?

6) Construa um segmento **MN**.
7) Construa o ângulo **PMN** de tal forma que sua medida seja de 45º.
8) Desloque os elementos de sua figura, se o ângulo não continuar com 45º, refaça a figura.
9) Explique como você fez para obter o ângulo de 45º?

10) Salve o arquivo com o nome B01.fig

<u>2ª Atividade</u>

1) Construa uma reta **r** e um ponto **P** sobre ela.
2) Pelo ponto **P**, construir a perpendicular à reta **r**, que passe pelo ponto **P**. Chame essa reta de **s**.
3) Determinar sobre a reta **r**, dois pontos **A** e **B** de tal forma que a distância do ponto **P** ao ponto **A** seja a mesma do ponto **P** ao ponto **B** (**PA=PB**).
4) Determinar sobre a reta **s**, dois pontos **C** e **D** de tal forma que (**PA=PB=PC=PD**).
5) Movimente os pontos da figura e verifique se essa relação continua ocorrendo. Se não, recomeçar.
6) Determinar outros três pontos (**E, F** e **G**), que mantenham a mesma relação de distâncias (**PA=PB=PC=........PF=PG**).
7) O que você pode dizer sobre os pontos **A, B, C, D, E, F** e **G**, em relação ao ponto **P**? Como poderíamos chamar a região do plano formada por todos os pontos que satisfaçam a mesma relação?

8) Salve o arquivo com o nome B02.fig

<u>3ª Atividade</u>

1) Construa três pontos **A**, **B** e **C** não alinhados.
2) Determine o ponto **P**, que esteja a mesma distância dos pontos **A**, **B** e **C**.
3) Deslocar os pontos da figura e verificar se eles continuam mantendo a mesma distância. Se não, recomeçar.
4) Explique como você resolveu o problema.

5) Salve o arquivo com o nome B03.fig

Terceira fase

<u>1ª Atividade</u>

1) Construa três pontos **A**, **B** e **C** não alinhados.
2) Construa o paralelogramo **ABCD**.
3) Deslocar os vértices do paralelogramo. Se ele não permanece um paralelogramo, recomeçar a construção.
4) Medir os lados e os ângulos do paralelogramo **ABCD**.
5) Deslocar os vértices do paralelogramo, observando o que acontece.

6) Determinar o ponto **O**, centro do paralelogramo.
7) Construir e medir os segmentos **AO**, **BO**, **CO** e **DO**.
8) Deslocar os pontos do paralelogramo, observando o que acontece.

9) Salvar o arquivo com o nome C03.fig

<u>2ª Atividade</u>
1) Construir o segmento **AB**.
2) Construir o retângulo **ABCD**.
3) Deslocar os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Se a figura não continua sendo um retângulo, recomeçar a construção.
4) Explicar porque sua figura é um retângulo.

5) Salvar o arquivo com o nome C02.fig.

<u>3ª Atividade</u>
1) Construir o segmento **GH**.
2) Construir um retângulo de forma que **GH** seja sua diagonal.
3) Deslocar os pontos **G** e **H**. Se a figura não continua sendo um retângulo, recomeçar a construção.
4) Explicar porque sua construção é um retângulo.

5) Salvar o arquivo com o nome C03.fig.

<u>4ª Atividade</u>
1) Construir o segmento **AB**.
2) Construir o quadrado **ABCD**.
3) Deslocar os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
4) Explicar porque sua figura é um quadrado.

5) Salvar o arquivo com o nome C04.fig.

<u>5ª Atividade</u>
1) Construir o segmento **TC**.
2) Construir o quadrado **TOCA**, de modo que **TC** seja sua diagonal.
3) Deslocar os vértices do quadrado. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
4) Que conclusões você pode tirar de sua construção?

5) Salvar o arquivo com o nome C05.fig.

<u>6ª Atividade</u>
1) Construir os pontos **P** e **O**.

2) Construir o quadrado **PITA**, de modo que **P** seja um de seus vértices e **O** seja seu centro.
3) Deslocar os vértices do quadrado. Se a figura não continua sendo um quadrado, recomeçar a construção.
4) Deslocando os pontos da figura, que conclusões você pode tirar?

5) Salvar o arquivo com o nome C06.fig.

7ª Atividade

1) Construir os pontos **M** e **N**.
2) Construir o losango **MANO**.
3) Deslocar os pontos da figura. Ela continua sendo um losango?
4) Por quê?

5) Se ela não continua um losango, recomeçar a construção.
6) Explique porquê sua figura é um losango.

7) Salvar o arquivo com o nome C07.fig.

8ª Atividade

1) Construir uma reta **r** e dois pontos **L** e **O**, fora da reta **r**.
2) Construir o losango **LOJA**, de modo que o ponto **A** esteja sobre a reta **r**.
3) Deslocar os pontos da figura. Se ela não continua sendo um losango, recomeçar a construção
4) Explique como você construiu o losango **LOJA**.

5) Salvar o arquivo com o nome C08.fig.

ANEXO IV – Pré-teste e pós-teste

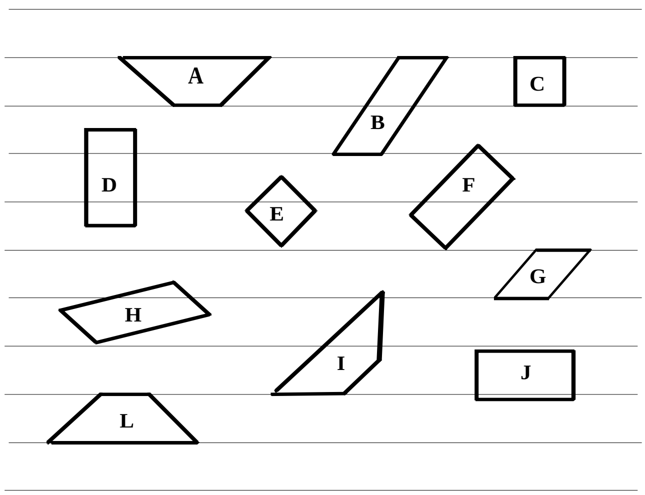
Q01) Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura de seu colega:

SUA FIGURA:	FIGURA DE SEU COLEGA:

Justifique por quê:

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________

Q02) Em uma folha de caderno estão desenhadas vária figuras de quatro lados:

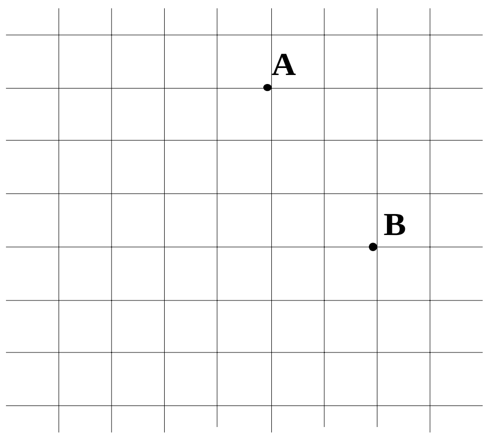


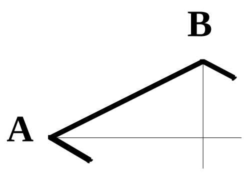
Tente separar por famílias, as figuras da folha de caderno:

	FIGURAS
Retângulos:	
Trapézios:	
Quadriláteros:	
Quadrados:	
Paralelogramos:	
Losangos:	

Q03) Construir no espaço abaixo, dois quadrados diferentes:

Q04) Utilizando os vértices **A** e **B** já marcados, desenhe o losango **ABCD**:





Q05) O losango **ABCD** teve um pedaço apagado. Você pode reconstruí-lo?

☐ Sim

Explique como:

____

____

____

____

____

____

____

☐ Não

Porquê:

____

____

____

____

____

____

____

APÊNDICES

APÊNDICE I – Sequência didática (com alterações)

Primeira fase – introdutória

Atividade 01 – Ponto Médio e Paralelismo

a) Considere um segmento de reta *MN*.
b) Considere um ponto *P* na metade do segmento de reta *MN*.
c) Mova o ponto *P*, e verifique se ele permanece na metade do segmento de reta *MN*.
d) Mova os pontos *M* e *N* e analise o que ocorre. Registre suas considerações:

e) Escolha um ponto *Q*, fora do segmento de reta *MN*.
f) Escolha uma reta paralela ao segmento de reta *MN*, passando por *Q*.
g) Mova os pontos *M*, *N* e *Q*, analisando o que ocorre.

h) Grave o arquivo como A01.pf

Atividade 02 – Simétrico de um ponto em relação a outro

a) Considere os pontos *M* e *Q*.
b) Considere a reta *a* que passa por *M* e *Q*.
c) Escolha um ponto *N* da reta *a* diferente de *M*, de modo que a distância de *M* até *Q* seja a mesma de *Q* até *N*.
d) Aproxime o ponto *M* do ponto *Q*.
e) O ponto *N* se aproxima também?
f) Em caso negativo, elimine o ponto *N*, considere outro e tente novamente.
g) Comente como você criou o ponto *N*, de modo que atenda a condição necessária:

h) Grave o arquivo como A02.pf

Atividade 03 – Perpendicularismo e Paralelismo

a) Considere os pontos *M* e *N*.
b) Considere uma reta *b* que passa por *M* e *N*.
c) Trace retas perpendiculares *a* e *b*, que passem por *M* e *N*.
d) Mova os pontos *M* e *N*.
e) O que se pode observar nas retas perpendiculares que foram construídas? Que relação há entre elas?

f) Grave o arquivo como A03.pf

Segunda fase – intermediária

Atividade 01 – Ângulos e bissetrizes

a) Escolha um segmento de reta *MN*.

b) Considere uma reta perpendicular ao segmento de reta *MN,* pelo ponto *M*. Em seguida, trace um ponto *K* na reta construída.
c) Considere uma reta perpendicular ao segmento de reta *MN,* pelo ponto *N*. Depois, trace um ponto *W* nessa reta.
d) Mova os pontos da figura e analise se as retas permanecem perpendiculares ao segmento *MN*. Reinicie a construção se não permanecerem como perpendiculares.
e) Que relação há entre os ângulos $K\hat{M}N$ e $W\hat{N}M$? Eles são iguais? Qual a medida deles?

f) Escolha um segmento de reta *AB*.
g) Crie o ângulo *PÂB* de modo que ele meça 45º.
h) Mova os componentes de sua figura, se a medida do ângulo modificar, reconstrua a figura.
i) Comente como você fez para ter o ângulo de 45º.

j) Grave o arquivo como B01.sf

Atividade 02 – Noção de circunferência

a) Crie um ponto *K* e uma reta *a,* passando por ele.
b) A partir do ponto *K*, crie a reta perpendicular à reta *a*, passando pelo ponto *K*. Nomeie a reta construída por *b*.
c) Na reta *a*, estabeleça dois pontos *M* e *N* de modo que a distância do ponto *K* até o ponto *M* seja igual à distância do Ponto *K* ao ponto *N* (*KM=KN*).
d) Sobre a reta *b*, estabeleça dois pontos *P* e *Q* de modo que (*KM=KN=KP=KQ*).
e) Desloque os pontos da figura e analise a relação estabelecida entre eles. O que ocorre com essa relação? Há alguma modificação? Em caso positivo, reinicie.
f) Considere outros três pontos (*R, S* e *T*) de modo que a relação de distâncias (*KM=KN=KP= ... =KS=KT*) seja mantida.
g) O que se pode afirmar acerca dos pontos *M, N, P, Q, R, S* e *T,* em referência ao ponto K? Observe a região do plano formada por todos esses pontos. Como poderíamos chamá-la de modo a relação de distâncias seja satisfeita?

h) Grave o arquivo como B02.sf

Atividade 03 - Equidistância

a) Crie três pontos *M, N* e *P* não alinhados.
b) Considere o ponto *K*, de modo que ele esteja à mesma distância dos pontos *M, N* e *P*.
c) Mova os pontos da figura e analise se eles permanecem com a mesma distância. Em caso negativo, reinicie.
d) Justifique sua resolução do problema.

e) Grave o arquivo como B03.sf

Terceira fase – avançada

Atividade 01 – Paralelogramo

a) Crie três pontos *M, N* e *P* não alinhados.

b) Crie o paralelogramo *MNPQ*.
c) Mova os vértices do paralelogramo. Observe se ele permanece um paralelogramo e, em caso negativo, reinicie a construção.
d) Determine a medida dos lados e dos ângulos dos paralelogramos *MNPQ*.
e) Mova os vértices do paralelogramo, analisando o que ocorre.

f) Considere um ponto *C*, centro do paralelogramo.
g) Crie e determine as medidas dos segmentos *MC, NC, PC* e *QC*.
h) Mova os pontos do paralelogramo, analisando o que ocorre.

i) Grave o arquivo como C01.tf

Atividade 2 – Retângulo I

a) Crie um segmento de reta *MN*.
b) Crie um retângulo *MNPQ*.
c) Mova os pontos *M, N, P* e *Q*. Observe se ele permanece um retângulo e, em caso negativo, reinicie a construção.
d) Justifique por que a figura construída é um retângulo.

e) Grave o arquivo como C02.tf

Atividade 03 – Retângulo II

a) Crie um segmento de reta *RS*.
b) Considere um retângulo de modo que *RS* seja sua diagonal.
c) Mova os pontos *R* e *S*. Observe se a figura permanece um retângulo e, em caso negativo, reinicie a construção.
d) Justifique por que sua produção é um retângulo.

e) Grave o arquivo como C03.tf

Atividade 04 – Quadrado I

a) Crie um segmento de reta *MN*.
b) Considere um quadrado *MNPQ*.
c) Mova os pontos *M, N, P* e *Q*. Observe se a figura permanece um quadrado e, em caso negativo, reinicie a construção.
d) Justifique por que sua produção é um quadrado.

e) Grave o arquivo como C04.tf

Atividade 05 – Quadrado II

a) Crie um segmento de reta *MN*.
b) Considere um quadrado *MONA*, de maneira que *MN* seja sua diagonal.
c) Mova os vértices do quadrado. Observe se a figura permanece um quadrado e, em caso negativo, reinicie a construção.
d) O que se pode afirmar acerca de sua produção?

e) Grave o arquivo como C05.tf

Atividade 06 – Quadrado III

a) Crie os pontos *R* e *C*.
b) Considere um quadrado *ROSA*, de maneira que *R* seja um dos seus vértices e *C* seja seu centro.
c) Mova os vértices do quadrado. Observe se a figura permanece um quadrado e, em caso negativo, reinicie a construção.
d) Movendo os pontos da figura, o que se pode afirmar?

e) Grave o arquivo como C06.tf

Atividade 07 – Losango I

a) Considere os pontos T e *C*.
b) Considere dois outros pontos I e A, tais que *TICA* seja um losango*.*
c) Mova os pontos da figura. Ela permanece sendo um losango?
d) Justifique.

e) Caso a figura não permanece um losango, reinicie a construção.
f) Justifique por que sua figura é um losango.
g) Grave o arquivo como C07.tf

Atividade 08 – Losango II

a) Estabeleça uma reta *a* e dois pontos *G* e *A*, fora da reta *a*.
b) Considere o losango *GABI*, de maneira que o ponto *I* esteja sobre a reta *a.*
c) Mova os pontos da figura. Observe se a figura permanece um losango e, em caso negativo, reinicie a construção.
d) Explicite como você produziu o losango G*ABI.*

e) Grave o arquivo como C08.tf

APÊNDICE II – Fichas de atividade

Primeira fase – introdutória

Atividade 01 – Ponto Médio e Paralelismo

d) Registre suas considerações:

g) Registre suas considerações:

Atividade 02 – Simétrico de um ponto em relação a outro

g) Registre suas considerações:

Atividade 03 – Perpendicularismo e Paralelismo

e) Registre suas considerações:

Segunda fase – intermediária

Atividade 01 – Ângulos e bissetrizes

e) Registre suas considerações:

i) Registre suas considerações:

f) Grave o arquivo como B01.sf

Atividade 02 – Noção de circunferência

e) Registre suas considerações:

Atividade 03 - Equidistância

d) Registre suas considerações:

Terceira fase – avançada

Atividade 01 – Paralelogramo

e) Registre suas considerações:

h) Registre suas considerações:

Atividade 2 – Retângulo I

d) Registre suas considerações:

Atividade 03 – Retângulo II

d) Registre suas considerações:

Atividade 04 – Quadrado I

d) Registre suas considerações:

Atividade 05 – Quadrado II

d) Registre suas considerações:

Atividade 06 – Quadrado III

d) Registre suas considerações:

Atividade 07 – Losango I

d) Registre suas considerações:

Atividade 08 – Losango II

d) Registre suas considerações:

APÊNDICE III – Carta de apresentação

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC
UFPE

CURSO DE MESTRADO

Ao (À) Senhor (a):
Coordenador (a) do Conselho Escolar da Escola Ernest Huet - EFEH

Assunto:
Apresentação de Projeto de Pesquisa

Por meio desta apresentamos o projeto de pesquisa **"Efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis com o uso do GeoGebra: um estudo sob a ótica da teoria vanhieliana"**, que é desenvolvida pelo discente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Curso de Mestrado da Universidade Federal de Pernambuco, André Pereira da Costa. Tal mestrando é orientado pelo Professor Doutor Marcelo Câmara dos Santos.

O objetivo do estudo é analisar os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito quadrilátero, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático para o desenvolvimento dos níveis iniciais de pensamento geométrico nos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Nesse sentido, a pesquisa será realizada por meio da aplicação de um pré/pós-teste (cuja finalidade é verificar se haverá ou não avanços no pensamento geométrico dos estudantes) e também de uma sequência didática a serem aplicados nas turmas de 6º ano da instituição. No caso da sequência, ela será aplicada no laboratório de informática da escola, sendo que os alunos se organizarão em dupla para resolver as questões propostas.

A expectativa é que o estudo seja desenvolvido no 1º Bimestre do ano letivo 2015. Para o desenvolvimento da sequência pelos alunos serão necessárias, em geral, seis sessões de aproximadamente 100 minutos cada uma. Além disso, o pré e pós-teste pode ser aplicado em uma sessão de no máximo 50 min cada um.

Na pesquisa, a sequência didática será aplicada pelo professor titular da turma a ser analisada e não pelo pesquisador, pois, há grande probabilidade de que os estudantes se sintam mais a vontade com o seu professor e também com o contrato didático já estabelecido por ele, ao desenvolverem as atividades propostas pela sequência. Dessa forma, esse docente será orientado previamente pelo pesquisador acerca da aplicação da sequência com seus alunos.

Os dados da pesquisa serão produzidos por meio de diversos métodos, entre eles, pode-se mencionar: análise de registros escritos (fichas de atividades), análise dos pré e pós-testes, análise dos dados obtidos pela gravação do GeoGebra, filmagens. É importante salientar que durante as sessões serão realizadas filmagem de uma dupla de alunos em cada turma, cujo objetivo é analisar o conflito sóciocognitivo estabelecido entre os membros do grupo durante a vivência da sequência, favorecendo a construção do conhecimento.

Para tanto, pedimos consentimento para que desenvolve o estudo a partir da coleta de dados (já mencionados anteriormente). Informamos que o aspecto ético deste estudo garante a manutenção da identificação das pessoas e da instituição participantes do estudo.

Além disso, nos comprometemos, enquanto pesquisadores, em permitir, aos participantes, um retorno dos dados produzidos no estudo. Pedimos também o consentimento para a exposição desses resultados, em modo de pesquisa, conservando silêncio e moral, com base no termo de consentimento livre a ser rubricado pelo participante. Explicamos que essa autorização é um pré-requisito.

Desde já, ficamos gratos por sua atenção e contribuição no processo de formação deste futuro mestre em Educação Matemática e Tecnológica em nosso país. Em caso de dúvida você pode entrar em contato conosco pelo telefone-celular pelos e-mails apresentados em anexo.

Recife, ___/_____________/_______.

Atenciosamente,

____

André Pereira da Costa
Mestrando

____

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
Professor orientador

APÊNDICE IV – Termo de livre consentimento

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC
UFPE

CURSO DE MESTRADO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Estamos convidando seu filho (a) para participar de uma pesquisa a ser realizada na Escola de Ensino Fundamental e Médio Ernest Huet - EFEH, com o tema **"Efeitos de uma sequência didática na construção do conceito de quadriláteros notáveis com o uso do GeoGebra: um estudo sob a ótica da teoria vanhieliana".** Para tanto, necessitamos do seu consentimento.

O objetivo do estudo é analisar os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito quadrilátero, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático para o desenvolvimento dos níveis iniciais de pensamento geométrico nos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Nesse sentido, a pesquisa será realizada por meio da aplicação de um pré/pós-teste (cuja finalidade é verificar se haverá ou não avanços no pensamento geométrico dos estudantes) e também de uma sequência didática a serem aplicados nas turmas de 6º ano da instituição. No caso da sequência, ela será aplicada no laboratório de informática da escola, sendo que os alunos se organizarão em dupla para resolver as questões propostas.

A identificação de seu filho(a) será resguardada, porque cada aluno será considerado por uma letra e um número. Não haverá nenhum dano físico ou moral para o seu filho. Mas trata-se um momento de reflexão e debate juntos aos educadores matemáticos.

O responsável pelo estudo é um estudante de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE e o professor Marcelo Câmara dos Santos, orientador da pesquisa. Pedimos o seu consentimento para o desenvolvimento da pesquisa e também para a organização de artigos científicos. Se o (a) senhor (a) responsável estiver de acordo, por gentileza, assine este documento, que possui duas cópias (sendo uma sua e a outra do responsável pela pesquisa).

Caso não aceite, não se preocupe, pois, não sofrerá nenhuma penalidade.

Desde já, ficamos gratos pela sua compreensão e colaboração!

Pesquisadores responsáveis:

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO SUJEITO

Eu, ____, RG/CPF ____, assinado abaixo, estou de acordo que meu filho(a) atue na pesquisa como participante. Fui notificado acerca do estudo e de sua metodologia e, todas as informações relacionadas não deverão ser referendas ao nome de meu filho, em caso de publicação e divulgação. Foi-me assegurado a possibilidade de retirar a autorização em qualquer instante.

Recife, ..., ...de ....de 2015.