Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação
Matemática e Tecnológica
Curso de Mestrado

JOHN KENNEDY JERÔNIMO SANTOS

A COMPREENSÃO DO PROFESSOR SOBRE OS ERROS DOS ALUNOS, EM ITENS ENVOLVENDO EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS, NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Recife

2015

JOHN KENNEDY JERÔNIMO SANTOS

A COMPREENSÃO DO PROFESSOR SOBRE OS ERROS DOS ALUNOS, EM ITENS ENVOLVENDO EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS, NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientardor: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife

2015

Catalogação na Fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB/4-1460

S237c Santos, John Kennedy Jerônimo.
A compreensão do professor sobre os erros dos alunos, em itens envolvendo expectativas de aprendizagem dos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental / John Kennedy Jerônimo Santos. - Recife: O Autor, 2015.
184 folhas : il.; 30 cm.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, CE, 2015.
Inclui Referências e Anexos.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números racionais. 3. Aprendizagem. I. Santos, Marcelo Câmara dos (Orientador). II. Título.

372.7 CDD (22.ed.) UFPE (CE 2015-033)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ALUNO

JOHN KENNEDY JERÔNIMO SANTOS

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

A COMPREENSÃO DO PROFESSOR SOBRE OS ERROS DOS ALUNOS, EM ITENS ENVOLVENDO EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS, NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Presidente e Orientador

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

____

Examinador Externo

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes

____

Examinadora Interna

Profª. Drª. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Recife, 27 de fevereiro de 2015.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que com sua imensa sabedoria e bondade, me permitiu ultrapassar todos os obstáculos.

A toda minha família, que, nesta caminhada, me apoiou e compreendeu sempre a minha ausência em momentos importantes da vida de cada um.

Ao meu orientador, Marcelo Câmara, que, com simplicidade, sabedoria e paciência me fez enxergar um novo mundo.

Aos professores Marcus Bessa e Rosinalda Teles pela valiosa contribuição em nossa pesquisa.

Aos professores Paulo Figueiredo, Paula Baltar, e Iranete Lima pelas contribuições nas discussões nos seminários.

As professoras Gilda Lisboa, Rute Borba e Cristiane Pessoa, que contribuíram significativamente na minha vida acadêmica.

A todos que contribuíram de forma direta, ou indireta para a concretização deste trabalho.

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo investigar de que maneira os professores interpretam os erros dos alunos em relação aos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental. Escolhemos analisar a compreensão do erro por entendermos a sua fundamental importância no processo de ensino e aprendizagem; já a escolha dos números racionais justifica-se apelos baixos índices de aproveitamento verificados por meio de avaliações externas – SAEPE e Prova Brasil – nos descritores do conteúdo em discussão. Para balizar nossas análises, buscamos aporte teórico nos estudos sobre erros na aprendizagem escolar de Borasi (1996), Pinto (2000), Cury (2007), Torre (2007) e Peng e Luo (2009); na compreensão da avaliação da aprendizagem em Perrenoud (1999), Hadji (2001) Luckesi (2006), e em trabalhos referentes aos números racionais de Nunes (1997), Campos *et al*. (2009), dentre outros. Utilizamos também alguns elementos da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009). Para identificar os erros mais comuns dos estudantes, construímos um questionário, com itens abertos, contemplando todas as expectativas de aprendizagem dos números racionais para o 5º ano e aplicamos a 324 alunos dessa etapa de escolarização, da rede municipal de Jaboatão dos Guararapes. Em seguida elaboramos o instrumento para o professor, com cinco itens, obedecendo a dois critérios, à diversificação dos registros de representação semiótica de Duval (2009) e à relevância dos erros, tanto no aspecto quantitativo como no qualitativo. Aplicamos o instrumento a 209 sujeitos do município de Jaboatão dos Guararapes. Após a conclusão do preenchimento do questionário, fizemos uma discussão coletiva sobre os erros descritos no instrumento. Analisamos a partir da taxionomia de Borasi (1996) e da tabela de dupla entrada de Peng e Luo (2009), na perspectiva de identificar e interpretar os erros para a remediação. Nossos resultados apontam que cerca de um em cada dez sujeitos não identificam respostas inadequadas e, na interpretação dos erros, apenas cerca de trinta por cento dos sujeitos demonstram essa habilidade. Concluímos, assim, que os professores não lidam bem com o conhecimento do conteúdo matemático e apresentam grandes dificuldades na compreensão do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Palavras-chave: Erros. Números Racionais. Avaliação da aprendizagem. Professores. Expectativas de Aprendizagem.

ABSTRACT

This research aimed to investigate how teachers interpret students' errors in relation to rational numbers in the early years of elementary school. We chose to analyze the understanding of error on account of its paramount importance in the teaching and learning process; on the other hand, the choice of rational numbers is justified due to the low approval rates verified through external evaluations, such as SAEPE and Test Brazil in the descriptors of the content under discussion. To provide corroborated basis for our analysis we sought theoretical support in studies of errors in school learning pursuant to Borasi (1996), Pinto (2000), Cury (2007), Tower (2007) and Peng and Luo (2009); on understanding the learning evaluation of Perrenoud (1999), Hadji (2001) Luckesi (2006), and research related to Nunes' rational numbers (1997), Campos et al. (2009), just to name a few. We also utilized some elements of the theory from the records of semiotic representation by Duval (2009). In order to identify the students' most common mistakes, a questionnaire with open questions was built, which covered all the learning expectations concerning rational numbers for the 5th graders, and 324 students who attended the municipal school of Jaboatão Guararapes at this stage were put to test. Following, we developed a five- item instrument for the teacher according to two criteria: diversification of the records by Duval's semiotic representation (2009) and error significance, both the quantitative and qualitatively aspect. The instrument was utilized with 209 subjects from Jaboatão Guararapes. Upon completion of the interview, a collective discussion concerning the errors described in the instrument was conducted. Analyzes based on Borasi's taxonomy (1996) and Peng and Luo's double entry table (2009) were carried out with the view to identify and interpret errors for remediation. Results indicate that about one out of ten individuals fail to identify inadequate responses, and when it comes to error interpretation, only about thirty percent of those demonstrate such ability. It is concluded that teachers do not deal well with Math knowledge and so have great difficulty understanding the pedagogical content

Keywords: Errors. Rational Numbers. Learning Evaluation. Teachers. Learning Expectations.

.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Avaliações em larga escala coordenadas pelo Saeb	**31**
Figura 2	Segmentos de retas para determinar o conceito de número racional	**39**
Figura 3	Segmentos de retas para determinar a adição de números racionais	**40**
Figura 4	Exemplo de introdução dos números racionais	**146**

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1	Identificação de respostas inadequadas – Item 1, resposta 1	**83**
Gráfico 2	Interpretação dos erros – Item 1, resposta 1	**86**
Gráfico 3	Identificação de respostas inadequadas – Item 1, resposta 2	**91**
Gráfico 4	Interpretação dos erros – Item 1, resposta 2	**93**
Gráfico 5	Identificação de respostas inadequadas – Item 2, resposta a	**97**
Gráfico 6	Interpretação dos erros – Item 2, resposta a	**99**
Gráfico 7	Identificação de respostas inadequadas – Item 2, resposta b	**104**
Gráfico 8	Interpretação dos erros – Item 2, resposta b	**106**
Gráfico 9	Identificação de respostas inadequadas – Item 3, resposta 1	**109**
Gráfico 10	Interpretação dos erros – Item 3, resposta 1	**111**
Gráfico 11	Identificação de respostas inadequadas – Item 3, resposta 2	**115**
Gráfico 12	Interpretação dos erros – Item 3, resposta 2	**117**
Gráfico 13	Identificação de respostas inadequadas – Item 4, resposta 1a	**122**
Gráfico 14	Interpretação dos erros – Item 4, resposta 1a	**124**
Gráfico 15	Identificação de respostas inadequadas – Item 4, resposta 2a	**127**
Gráfico 16	Interpretação dos erros – Item 4, resposta 2a	**129**
Gráfico 17	Identificação de respostas inadequadas – Item 4, resposta 1b	**133**
Gráfico 18	Interpretação dos erros – Item 4, resposta 1b	**135**
Gráfico 19	Identificação de respostas inadequadas – Item 4, resposta 2b	**140**
Gráfico 20	Interpretação dos erros – Item 4, resposta 2b	**142**
Gráfico 21	Identificação de respostas inadequadas – Item 5, resposta 1	**148**
Gráfico 22	Interpretação dos erros – Item 5, resposta 1	**150**
Gráfico 23	Identificação de respostas inadequadas – Item 5, resposta 2	**154**
Gráfico 24	Interpretação dos erros – Item 5, resposta 2	**156**

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Ideb dos anos iniciais do ensino fundamental – Jaboatão dos Guararapes	**14**
Quadro 2	Exemplos de itens usados para estudar a compreensão das crianças sobre frações	**34**
Quadro 3	Expectativas de aprendizagem dos números racionais para o 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental	**44**
Quadro 4	Diversificação dos registros de representação semiótica dos números reacionais	**49**
Quadro 5	Taxionomia de Borasi para os usos dos erros	**58**
Quadro 6	Quadro proposto por Peng e Luo (2009) para análise do conhecimento dos professores sobre os erros matemáticos	**60**
Quadro 7	IDEB Apurado na 4ª Série/5º Ano do Ensino Fundamental – Matemática	**66**
Quadro 8	Proficiência média do SAEPE na 4ª Série/5º ano do ensino fundamental – matemática.	**67**
Quadro 9	Padrões de desempenho utilizados pelo SAEPE	**67**
Quadro 10	Distribuição dos alunos avaliados por escola	**70**
Quadro 11	Distribuição total dos professores investigados por ano e por regional	**70**
Quadro 12	Tipo de registro e percentual de erro em cada item	**71**
Quadro 13	Expectativas de aprendizagem que compõem o instrumento de pesquisa	**72**
Quadro 14	Comparação dos dados referentes à identificação de respostas inadequadas entre os itens (a) e (b)	**105**

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 AVALIAÇÃO ESCOLAR	19
2.1 Contexto histórico da avaliação escolar no Brasil	20
2.2 Avaliação de sala de aula ou avaliação da aprendizagem	24
2.3 Avaliação externa	29
3 OS NÚMEROS RACIONAIS	33
3.1 A origem dos números racionais	35
3.2 O conceito dos números racionais.	38
3.3 Os números racionais nos Parâmetros Curriculares Nacionais	42
3.4 As expectativas de aprendizagem dos números racionais de acordo com os Parâmetros Curriculares de Pernambuco	43
3.5 Os registros de representação dos números racionais	45
4 A ANÁLISE DO ERRO NO PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM	52
4.1 A trajetória da análise de erro em matemática no ensino e na aprendizagem	52
4.2 O professor e a compreensão do erro	62
5 METODOLOGIA	66
5.1 O campo da pesquisa	66
5.2 Sujeitos da pesquisa	68
5.3 Descrição do percurso metodológico	69
5.4 Descrição e análise do instrumento de pesquisa	72
6 ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	80
6.1 Questão 1 – registro simbólico (numérico fracionário)	81
6.2 Questão 2 – registro simbólico (numérico decimal)	95
6.3 Questão 3 – registro simbólico (numérico percentual)	108
6.4 Questão 4 – registro na língua natural	120
6.5 Questão 5 – registro figural (contínuo)	144

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 160

REFERÊNCIAS 165

ANEXOS 170

1 INTRODUÇÃO

A dificuldade no ensino e aprendizagem dos números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental é evidente, e tem se manifestado de formas diversas, ora por meio de pesquisas em Educação Matemática tais como Nunes & Bryant (1997); Canova (2006); Silva (2007) e Campos *et al.* (2009) outras vezes pelos resultados das avaliações externas (Prova Brasil e SAEPE – Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco). Essas dificuldades têm se revelado em todas as representações dos números racionais (fracionária, decimal e porcentagem), bem como nos significados das representações fracionárias (parte/ todo, quociente, razão etc.).

Nunes & Bryant (1997) advertem que apesar de uma das formas mais comuns de apresentar às crianças as frações seja por meio da ideia parte de um todo, utilizando o registro figural, os alunos parecem dominar bem esse conceito, o que se revela falso quando se alteram alguns aspectos da figura, por exemplo, quando o todo não está dividido em partes iguais. Assim, parece que os alunos memorizam algumas técnicas no trabalho com frações, como a contagem dupla (o número total de partes e o número de partes pintadas), mas não são capazes de compreender o significado desse número.

Campos *et al.* (2009) ressaltam os resultados de diversos estudos internacionais que apontam as dificuldades na construção do conceito do número racional com destaque para a representação fracionária.

Campos e Rodrigues (2007) afirmam ainda que a compreensão dos números racionais é um dos conteúdos de construção mais complexa, pois, apesar de representar a extensão dos números naturais, nem sempre preserva as características desses números.

Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) apontam que a aprendizagem dos números racionais exige uma ruptura com as ideias já estabelecidas pelos alunos sobre os números naturais. Assim faz-se necessário estabelecer algumas características que são próprias dos números racionais e, portanto, não são regidas sob a ótica dos números naturais.

1. Compreender que diferentemente dos números naturais um número racional admite infinitas representações fracionárias, ($\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$) são exemplos de representações diferentes para um mesmo número.

2. Na comparação entre frações unitárias, ($\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$) como exemplo, para estabelecer quem é maior não é suficiente o conhecimento dos naturais, em que 5 é maior que 3. Neste caso, é preciso entender a fração como um único número o que a princípio para a criança possa parecer contraditório se ela pensa na lógica dos números naturais.

3. Nas representações decimais nem sempre o maior número é aquele que possui mais algarismos, essa ideia também vai em sentido oposto ao raciocínio dos números naturais.

4. O produto entre dois números naturais, excetuando-se o zero e o um, resulta sempre em um número maior que os dois fatores e nem sempre acontecerá quando lidamos com números racionais, ao multiplicarmos 20 por $\frac{1}{4}$, obtemos 5, o valor encontrado é menor que 20.

5. Diferentemente dos números naturais os números racionais não admitem nem antecessor nem sucessor.

Portanto, algumas concepções dos números naturais fortemente cristalizadas pelos estudantes não devem ser estendidas aos números racionais, sob pena de obstaculizar a construção do conceito.

Resultados de avaliações externas em larga escala também têm revelado os baixos índices de aprendizagem em descritores relacionados aos números racionais.

Podemos citar como exemplo um item do 5º ano do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE (PERNAMBUCO, 2010), relacionado ao descritor “identificar diferentes representações de um mesmo número racional”, em que o contexto demandava representar uma fração na forma de número decimal. O resultado aponta que apenas 35,7% dos alunos conseguem assinalar a resposta correta.

Em avaliação da Prova Brasil (BRASIL, 2009), em um item aplicado ao 5º ano, referente ao descritor “resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%)”, revela que pouco mais de um terço dos alunos acertou a questão.

Assim, conhecemos as dificuldades de aprendizagem dos números racionais, seja por meio de pesquisas educacionais ou pelos resultados das avaliações externas com ênfase para a Prova Brasil que divulga os dados regularmente a cada dois anos desde 2005.

Enquanto Coordenador de Avaliação e Formação Continuada da Secretaria Executiva de Educação de Jaboatão dos Guararapes, no período de 2009 a 2012, comecei a me inquietar com esses resultados o que me motivou a tentar entender porque temos tantas dificuldades em construir uma aprendizagem significativa.

Analisando a série histórica do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) do Município de Jaboatão dos Guararapes, mostrado no quadro a seguir, percebemos que as mudanças são bem tímidas, o que não nos permite vislumbrar avanços significativos na aprendizagem dos alunos.

Anos	**2005**	**2007**	**2009**	**2011**	**2013**
Ideb	2,8	3,1	3,8	3,9	4,3

Quadro 1 – Ideb dos anos iniciais do ensino fundamental – Jaboatão dos Guararapes (Fonte: INEP)

Como podemos ver, tivemos um crescimento de 1,5 pontos em oito anos, e, considerando a evolução do fluxo escolar, que em 2005 representava cerca de 80%, chegando a 90% em 2013, percebemos que boa parte do crescimento se deu pelo aumento do fluxo e não pela melhora da aprendizagem. O avanço do Ideb impulsionado pelo fluxo escolar não representa de forma alguma algo menos relevante do que o crescimento advindo do resultado da avaliação escrita, mas revela um dado preocupante, pois, como o fluxo escolar está chegando ao teto, a partir de agora o Ideb só aumenta em decorrência da melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem.

O município desenvolve uma ampla política de formação continuada por meio de programa próprio e em parceria com o governo federal. A seguir os principais programas desenvolvidos no município.

Formação continuada do município - faz parte de um terço da carga horária do professor, está instituído em lei com carga horária de 20h por mês, mas efetivamente resume-se 4h mensais. Para não comprometer os 200 dias letivos e garantir a formação na sua integralidade é necessário que ela ocorra no contra turno ou aos sábados, e ainda não há um consenso entre o município e os professores para a implementação em sua totalidade. Assim, todas as atividades de formação são distribuídas nas 4h mensais o que nos parece insuficiente para discutir com maior profundidade todos os temas que norteiam os rumos da educação.

Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – GESTAR I – o programa é direcionado para a formação continuada em serviço dos professores dos anos iniciais do ensino fundamental, com duração de 4 semestres. Abordando as áreas de Língua Portuguesa e Matemática. No município o programa ocorreu durante os anos de 2008 e 2009 e foi marcado pela baixa adesão dos professores, cerca de 40 de um total de 415 e também pela dificuldade em compreender a concepção.

Pró-Letramento – de acordo com Brasil (2008, p. 7) "é um programa de formação continuada de professores para melhoria da qualidade de aprendizagem da leitura/escrita e Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental". Especificamente em Matemática, um dos objetivos do programa é "desenvolver conhecimentos que possibilitem a compreensão da matemática e seus processos de ensino e aprendizagem" (BRASIL, 2008, p.7). O município aderiu ao programa em 2011 e o desenvolveu até 2012. Nestes dois anos cerca de 100 professores participaram do programa e tiveram uma convivência harmônica com a concepção e o material didático utilizado. Parece-nos um programa bem concebido, bem fundamentado, com objetivos claros e sintonizado com a formação continuada em matemática nos dias de hoje.

Programa Mais Educação que, de acordo com o decreto da presidência da república nº 7.083 de 27 de janeiro de 2010, tem por finalidade "contribuir para a melhoria da aprendizagem por meio da ampliação do tempo de permanência de crianças, adolescentes e jovens matriculados em escola pública, mediante oferta de educação básica em tempo integral". O programa foi implantado no município em 2009, em 25 escolas, e atende hoje a 114 escolas das 131 da rede municipal. O grande entrave é que o Ministério da Educação libera recursos para implantar o programa sem analisar as condições estruturais das escolas, assim, em muitos casos, o Mais Educação funciona em espaços inadequados, sejam alugados ou na própria escola muitas vezes com subtração de tempo pedagógico ou com instalações precárias para o desenvolvimento das atividades. Dessa maneira há limitações significativas para a execução plena do programa.

Mesmo com todos os programas implantados no município, tais como Formação Continuada do município, Pró-Letramento, Gestar I e Mais Educação entre outros, os resultados não nos parecem apontar para a superação dos problemas detectados.

Assim, parece que a formação inicial do professor, bem como a formação continuada, não têm sido suficientes para preencher algumas lacunas no ensino e na aprendizagem, haja vista os resultados aqui já discutidos.

Parece-nos razoável concordar que ter acesso aos resultados das pesquisas e os das avaliações externas não tem sido suficiente para impulsionar uma transformação pujante na nossa educação.

Neste contexto, sabendo-se, por exemplo, que em um item da Prova Brasil divulgado em 2011, que envolve a resolução de subtração com números decimais, apenas 26% dos alunos conseguem a resposta correta é necessário aprofundar a análise, buscando elementos que respondam as seguintes questões: quais conhecimentos foram mobilizados no intuito de resolver o problema? Quais os erros constantes na resolução do problema? O que os alunos já sabem sobre o conteúdo abordado no problema?

Esta investigação mais específica deve ser realizada pela escola que é o ente propício para aprofundar essas análises que vão permitir intervenções pontuais capazes de melhorar os índices de aprendizagens.

Os erros não podem ser vistos apenas como a ausência de aprendizagem, eles revelam caminhos importantes para a superação de dificuldades e devem ser utilizados como ponto de partida para (re)construção do conhecimento. Neste sentido Borasi enfatiza,

> *(...) se os alunos são pressionados pelo sistema escolar, os erros por eles cometidos são frustrantes, porque os fazem perder tempo e despender esforços na tentativa de evitar a reprovação. No entanto, se a ênfase da avaliação dos estudantes se desloca do produto para o processo, há a possibilidade de que os erros cometidos venham a ser discutidos e possam ser fonte de novas aprendizagens. (BORASI, 1996, p.17).*

Com base nesta concepção, o foco passa a ser o erro e não o acerto, o que exige um diferente fazer pedagógico, diferente porque o professor passa a analisar o percurso resolutivo desenvolvido pelo aluno e não somente a resposta final.

Compreendemos o erro como uma estratégia didática, que pode contribuir significativamente na construção da aprendizagem, pois, saber como o aluno erra revela pistas importantes que contribuem para a intervenção pedagógica. É a partir dos erros que o professor deve desenvolver o processo de mediação com os alunos.

Por um lado temos uma gama de problemas no ensino e na aprendizagem dos números racionais já citadas aqui, por outro temos a convicção que os erros são aspectos importantes na construção da aprendizagem. É nesse contexto que se insere o nosso problema de pesquisa: **Como o professor interpreta os erros dos alunos, no trabalho com os números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental?**

Para responder o nosso problema de pesquisa tivemos como objetivo geral: investigar como os professores interpretam os erros dos alunos em relação aos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental.

Para dar suporte ao objetivo geral definimos os seguintes objetivos específicos:

- Verificar se os professores identificam como erros, respostas incorretas de alunos envolvendo os números racionais;

- Investigar as hipóteses dos professores para os erros dos alunos no trabalho com os números racionais.

Com o intuito de responder os problemas aqui discutidos, organizamos nossa dissertação em sete capítulos.

Abordaremos no primeiro capítulo o nosso problema de pesquisa, apontando elementos que justificam o estudo.

No segundo capítulo discutiremos a avaliação escolar, abordaremos seu contexto histórico, seus tipos (diagnóstica, formativa, somativa), suas formas (interna e externa), sua abrangência (larga escala e pequena escala) e a avaliação em matemática.

O terceiro capítulo foi reservado para tratarmos dos números racionais, sua origem, seu conceito e a abordagem dada aos números racionais pelos documentos curriculares, Parâmetros Curriculares Nacionais e Parâmetros Curriculares de Pernambuco.

No quarto capítulo discorremos sobre a análise do erro no processo ensino e aprendizagem, onde discutiremos a trajetória do erro na matemática e a concepção do professor sobre o erro.

O quinto capítulo é dedicado à metodologia, quando apontaremos nossas escolhas metodológicas, campo e sujeitos da pesquisa, instrumentos e método da pesquisa e seu percurso metodológico.

No sexto capítulo contemplaremos as análises qualitativa e quantitativa dos dados, obtidos por meio de questionário, respondido por professores e posterior discussão coletiva.

Concluímos apresentando as considerações finais, trazendo os resultados da pesquisa e possíveis contribuições para a Educação Matemática.

2 AVALIAÇÃO ESCOLAR

Entendemos a avaliação escolar como uma prática pedagógica a serviço da aprendizagem. Nesse contexto, é importante compreender a trajetória da avalição no Brasil e como ela tem contribuído atualmente na construção do conhecimento.

Já são mais de quatro séculos da publicação pelos Jesuítas da Ratio Studiorum que, entre outras regras para o funcionamento escolar, normatizava as avaliações na educação brasileira. Trazia um capítulo específico intitulado “Dos exames escritos e orais”, que definia todo o processo avaliativo escolar. Na verdade o título é muito apropriado, pois na nossa compreensão trata-se de exame e não de avaliação.

Entendemos exame na perspectiva defendida por Luckesi (2005), que lhe atribui as seguintes características: têm por objetivo julgar e, consequentemente, aprovar ou reprovar; são pontuais; são classificatórios; são seletivos; são estáticos; são antidemocráticos e fundamentam uma prática pedagógica autoritária.

Sem dúvida o método Jesuíta de avaliar era carregado de todas as especificidades citadas o que de fato, no nosso entendimento, se constitui em exame.

Durante esses mais de quatrocentos anos muito se discutiu sobre avaliação, estiveram no cerne da discussão diversas teorias e práticas avaliativas defendidas pelos estudiosos do tema mais importante em cada época.

De acordo com Hadji (2001, p. 9) “(...) a noção de avaliação formativa foi proposta por Scriven, em 1967, em relação aos currículos, antes de ser estendida aos estudantes por Bloom em 1971.” Assim, são mais de trinta anos de debates e embates sobre uma avaliação que seja capaz de regular a aprendizagem, que permita ao aluno detectar e analisar suas dificuldades. Segundo Hadji,

> *Nessa perspectiva, o erro não seria uma falta a ser reprimida, mas uma fonte de informação, e isso tanto para o professor – cujo dever é analisar a produção e, através dela, a situação do aluno – como para o aluno, que precisa compreender seu erro para não mais cometê-lo, e progredir. (HADJI, 2001, p.10).*

Parece-nos ainda existir um grande abismo entre o discurso e a prática, neste contexto a avaliação formativa tem se constituído muito mais como um modelo ideal do que como uma atividade corriqueira no ensino e na aprendizagem.

Não tem se revelado fácil para os professores entenderem as dimensões e as funções/tipos da avaliação educacional, as discussões parecem não terem sido suficientes ainda para estabelecer, por exemplo, as diferenças entre avaliação externa e avaliação da aprendizagem ou distinguir a avaliação somativa da avaliação formativa.

De acordo com Souza (2000), a avaliação educacional apresenta as seguintes dimensões: avaliação de sala de aula, avaliação institucional, avaliação de programa e projetos educativos, avaliação de currículo e avaliação de sistema. Não vamos detalhar cada uma das dimensões, nos interessa aqui a avaliação de sala de aula e a avaliação de sistema.

Quanto às funções da avaliação da aprendizagem, vamos adotar a ideia defendida por Pernambuco (2009) que a entende como diagnóstica, formativa e somativa que serão retomadas e aprofundadas no tópico 1.2.

2.1 Contexto histórico da avaliação escolar no Brasil

De acordo com Fausto (2002), a educação no Brasil tem início com a Companhia de Jesus, que teve sua primeira missão chefiada pelo padre Manoel da Nóbrega em 1549. A princípio, o objetivo era implantar a crença cristã católica aos índios, movimento que ficou conhecido como catequese. Os jesuítas difundiram suas atividades educacionais em várias partes do país e permaneceram em nosso território até 1759, quando foram expulsos devido às reformas pombalinas.

Em 1599 os padres jesuítas publicam uma obra que tem por título *Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Jesus*, traduzida pelo padre Leonel Franca e publicada como anexo de sua obra intitulada “O método pedagógico jesuítico”, pela editora Agir, Rio de Janeiro, 1942.

A Ratio Studiorum tem como objetivo unificar a conduta pedagógica de todos os colégios administrados pela Companhia de Jesus.

Interessa-nos aqui discutir o capítulo da Ratio Studiorum que tem como título “Dos exames escritos e orais”. Vamos citar algumas das regras desse documento, de acordo com Luckesi (2005),

> *No dia das provas, os estudantes deverão trazer para a sala de aula todo material do qual necessitarão, tendo em vista não ter que solicitar nada a seus companheiros; após terminar sua prova, o estudante deverá tomar seu material, entregar a prova concluída ao Prefeito de Estudos (personagem que tomava conta das provas) e sair imediatamente da sala de aula; o estudante que permanecer na sala de aula, após um colega seu ter saído, não poderá mudar-se do lugar de onde está sentado para o lugar daquele que já terminou sua prova e saiu; o estudante que tiver terminado sua prova deverá entregá-la imediatamente ao Prefeito de Estudos e não poderá retomá-la a não ser depois de corrigida; etc. (LUCKESI, 2005, p. 22).*

Portanto, assim foi concebido o processo de avaliação escolar no Brasil, com regras bem autoritárias e estáticas, características próprias de exame. E talvez pela sua praticidade, este modelo vai sobreviver a todas as reformas educacionais do País, sendo inclusive muito utilizado na “avaliação da aprendizagem escolar” atual.

Segundo Romanelli (2006), só a partir de 1772 se dá a implantação do ensino público no Brasil, estruturado pedagogicamente na herança deixada pela Companhia de Jesus e no campo estrutural marcado pela falta de investimentos. Para Romanelli (2006, p. 36) “mas, apesar disso a situação não mudou em suas bases. Recorde-se que os Jesuítas mantiveram, além de colégios para a formação de seus sacerdotes, seminários para a formação do clero secular.” Assim, não houve avanço significativo na educação do país, neste período que se encerra com a chegada da família real em 1808. Dessa forma, permaneceu basicamente a mesma estrutura educacional, mantendo-se a mesma prática pedagógica, sem mudanças perceptíveis no processo avaliativo.

Para Romanelli (2006), com a mudança da sede do Reino de Portugal para o Brasil é natural que a educação fosse reestruturada no sentido de atender as demandas primárias não da população, mas da nova aristocracia portuguesa que agora habitava o país. Assim, a educação implantada por D. João VI foi marcada pela implantação dos cursos superiores e formação profissional permanecendo à margem o ensino primário. Mesmo assim, manteve e até acentuou a tradição da educação aristocrática, oriunda da colônia.

De acordo com Almeida (2007), na segunda metade do século XIX se instalam no Brasil importantes escolas protestantes, entre elas o Makenzie College. As escolas eram a principal condição da disseminação do protestantismo no País, pois elas, ao mesmo tempo em que alfabetizavam crianças, jovens e adultos, aproveitavam para evangelizar, evidentemente sob a ótica cristã protestante.

Segundo Luckesi (2005), no campo pedagógico muitas das escolas protestantes estavam embasadas nas ideias do Bispo João Amós Comênio, maior educador protestante do século XVII. Comênio, em 1631, publica em latim a “Didática magna”, obra que consagra o autor atribuindo-lhe o título de criador da didática moderna.

Na obra de Comênio, “didática magna”, há um trecho que nos interessa profundamente, pois, segundo Luckesi (2005, p. 23), ele afirma: “que estudante não se preparará suficientemente bem para as provas, se ele souber que, de fato, as provas são para valer?”

Do ponto de vista educacional, a proposta de avaliação de Comênio e a dos Jesuítas são totalmente convergentes, com ênfase na figura do professor, autoridade pedagógica e moral que formaria alunos obedientes e disciplinados.

Para Luckesi (2006), a fusão das teorias pedagógicas Jesuítica e Comeniana, originaram o que chamamos hoje de Pedagogia Tradicional, e que mais tarde recebeu as contribuições do educador alemão, Johann Friedrich Herbart (1776 - 1841), que desenvolveu os cinco passos formais do ensino.

De Acordo com Silva (2007), a partir de 1925 aconteceu uma série de reformas educacionais, citadas a seguir, todas baseadas nos ideais da escola nova que se opunham à pedagogia tradicional. Reforma Anísio Teixeira (1925), Bahia; reforma Francisco Campos (1927), Minas Gerais; reforma Fernando de Azevedo (1928), Rio de Janeiro e reforma Carneiro Leão (1928), Pernambuco.

Em 1930, com a tomada do poder por Getúlio Vargas, é criado um órgão nacional para cuidar da educação. Por meio do decreto número 19 402 instituiu-se o Ministério dos Negócios da Educação e Saúde Pública. O que podemos considerar como um avanço, pois antes a educação estava subordinada aos estados sem que houvesse integração entre os entes federados (união, estados e municípios). O governo Vargas precisava atender novas demandas advindas da industrialização do país, assim resolveu promover a renovação e a ampliação do ensino.

Em 1932 foi deflagrado o movimento dos "pioneiros da educação nova" que tinha como mentores Fernando de Azevedo, Lourenço Filho e Anísio Teixeira. Esse movimento, de acordo com Vidal (2003), diferenciava-se da pedagogia tradicional ao afirmar que o conhecimento não se adquire por meio da memorização e sim da relação instituída entre os alunos com os objetos e fatos. À escola cabe a aquisição de um conjunto de materiais para proporcionar aos alunos essas relações. Mesmo com essas proposições de mudanças na prática pedagógica, não se verifica alterações importantes no modo de avaliar do professor.

Na década de 80 o Brasil está mergulhado em grandes transformações políticas, culminando com o fim do regime militar, que vai exigir uma nova organização política e social. Neste contexto, a educação está em ebulição e surge o construtivismo inspirado nas ideias de Jean Piaget (1896 – 1980) que vai subsidiar a educação brasileira como teoria/referencial da aprendizagem. Essa teoria/referencial enfatiza que o conhecimento é construído pelo próprio aluno a partir de condições propícias criadas pela escola, a reprodução, a cópia não representam uma aprendizagem. Cool e Solé (2004, p.19) afirmam que, "para a concepção construtivista, aprendemos quando somos capazes de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretendemos aprender." Assim, o ato de aprender exige a integração entre a modificação do conhecimento já existente bem como a capacidade de interpretar o novo, esse processo denomina-se aprendizagem significativa.

A concepção construtivista traz contribuições importantes propondo diferentes tipos de avaliação e assim as avaliações diagnóstica, formativa e somativa começam a ser discutidas na perspectiva de cumprir funções diferenciadas no ensino e na aprendizagem. Cool e Martín (2004, p. 198) apontam que, "No entanto, apesar de todas essas contribuições, a avaliação continua sendo um dos ingredientes de nossa atividade profissional que ainda coloca maiores dificuldades, dúvidas e contradições." Não parece haver ainda conhecimento e convicção suficientes para o profissional da educação praticar a avaliação escolar na perspectiva do construtivismo.

Os anos 90 foram marcados pela universalização do ensino no país e a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB, lei 9 394, que regulamenta a educação brasileira em todos os aspectos e traz importantes conquistas para a escola pública.

É também a partir da década de 90 que surgem no Brasil as avaliações externas em larga escala na educação básica, as quais não devem ser confundidas com as avaliações da aprendizagem.

Sob a responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais "Anísio Teixeira" – INEP, estão as seguintes avaliações externas em larga escala da educação básica: Exame Nacional do Ensino Médio - Enem; Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos - Enceja; Provinha Brasil; Avaliação Nacional do Rendimento Escolar – Anresc/Prova Brasil, Avaliação Nacional da Educação Básica - Aneb e Avaliação Nacional da Alfabetização - ANA. E articula ainda, a participação de alunos brasileiros no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), que é coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE; De acordo com Brasil (2008), essas avaliações têm como objetivo principal a formulação e a implementação de políticas públicas para melhorar a qualidade da educação brasileira.

O estado de Pernambuco, por meio do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE, também é referência em avaliação externa em larga escala, iniciou suas atividades em 2000 e, a partir de 2008, tem avaliado anualmente todos os alunos das redes públicas (estadual e municipal) nas disciplinas de português e matemática, dos 5º e 9º anos do ensino fundamental e 3° ano do ensino médio e ainda em língua portuguesa o 3º ano do ensino fundamental.

Fizemos assim um breve histórico da avaliação educacional no Brasil, desde o seu nascedouro com a Companhia de Jesus, abordamos aspectos da avaliação de Comênio, discutimos as ideias avaliativas da escola nova, discorremos sobre a proposta construtivista de avaliação bem como tratamos das avaliações externas.

2.2 Avaliação de sala de aula ou avaliação da aprendizagem

Segundo Souza (2000, p. 1), "A avaliação de sala de aula tem como foco o processo de ensino-aprendizagem e visa a subsidiar o aperfeiçoamento da prática docente”. Nessa dimensão é um processo simultâneo ao ensino e à aprendizagem e não deve deles se descolar em hipótese alguma, sob pena de não cumprir o seu objetivo.

O termo avaliação de sala de aula, também conhecida como avaliação da aprendizagem ou avaliação interna, de acordo com Luckesi (2005), foi cunhado por Ralph Tyler (1930) com o sentido de diagnosticar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos e torná-la mais eficiente. Ao passar dos anos esse termo foi generalizado, e passou a ser sinônimo de todo e qualquer instrumento de aferição do rendimento escolar. Assim, Luckesi afirma,

> *Vários fenômenos diferentes passaram a ser denominados de avaliação: o exame passou a ser denominado de avaliação, seleção passou a ser denominada de avaliação e a própria avaliação, também, permaneceu sendo denominada pelo termo avaliação. Nasceram, assim, nossa noção e nossa prática equivocada do que é avaliação. (LUCKESI, 2005, p. 20).*

Assim a avaliação passa a ser confundida com instrumento, abandonando seu caráter de processo, e encarregando-se apenas em verificar a aquisição de conhecimento dos estudantes para atestar se eles devem ou não progredir no nível de escolaridade.

Trataremos aqui especificamente da avaliação da aprendizagem em matemática e, a princípio, vamos discorrer sobre as recomendações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e Parâmetros Curriculares de Pernambuco – PCPE.

Brasil (1997) destaca a necessidade de repensar os objetivos da avaliação, para responder a duas questões, sobre o que e como se avalia, respeitando a diversificação de situações de aprendizagem, como a resolução de problemas, o trabalho com jogos, o uso de recursos tecnológicos, entre outras.

Ressalta também a importância de instrumentos avaliativos criados pelos professores que permitam registrar observações acerca do desenvolvimento atitudinal dos alunos e alerta para a importância das análises dos instrumentos avaliativos, especificamente a prática de interpretar sinais, ou indícios que permitam a reorganização da atividade pedagógica. Assim,

> *Ao levantar indícios sobre o desempenho dos alunos, o professor deve ter claro o que pretende obter e que uso fará desses indícios. Nesse sentido, a análise do erro pode ser uma pista interessante e eficaz. (BRASIL, 1997, p. 59).*

O erro é inerente à aprendizagem e é um elemento central no subsídio de informações acerca da compreensão do aluno, assim permite ao professor entender respostas que antes não faziam nenhum sentido. A percepção do erro possibilita ao professor intervenções pontuais, em oposição a uma prática pedagógica mais comum, aquela que repete a atividade sem observar as especificidades de aprendizagem dos estudantes.

Nesse contexto, as recomendações de Brasil (1997) para a avaliação da aprendizagem em matemática são no sentido de termos uma prática avaliativa que contribua com a aprendizagem, fornecendo elementos que possibilitem ao professor intervir, reorganizando suas atividades pedagógicas.

Para Pernambuco (2012), a avaliação da aprendizagem em matemática, apesar de gerar certa euforia entre os gestores, ainda é um elemento visto com reserva pelos professores, isso porque seus resultados tendem a ser interpretados como um indicativo do fracasso do processo de ensino e aprendizagem. Nesta direção,

> *Pode-se dizer que a avaliação escolar parece realizar-se em paralelo com o corpo docente, ao passo que a interpretação dos resultados de uma avaliação, tão carregada de consequências, não é muito reconhecida por esse mesmo corpo. Isso parece acentuar-se ainda mais quando esses resultados permitem, à administração escolar, julgar o desempenho dos professores. (PERNAMBUCO, 2012, p. 41).*

Nesta perspectiva, a avaliação fica um pouco órfã, na medida em que seus resultados não são validados pelos professores, ela termina não sendo legitimada na escola e assim tende a ser rejeitada senão em sua totalidade, mas em parte.

Dessa forma,

> *Esses fatos, aliados a uma concepção fragmentada de aprendizagem em Matemática, na qual o conhecimento se decompõe em pequenas parcelas, acaba por transformar a avaliação em Matemática numa espécie de sistema binário, em que a aquisição do conhecimento se traduz por meio de uma escala na qual os valores são representados por 0 ou 1; dessa forma, o valor 1 corresponderia a uma aquisição completa e*

> *definitiva, enquanto o valor 0 representaria a não aquisição de certo objeto do conhecimento. (PERNAMBUCO, 2012, p. 41).*

Dessa forma, a avaliação em matemática é uma dicotomia entre certo e errado, sabe ou não sabe, sim ou não, etc. Mas que conhecimento matemático pode atender aos requisitos citados, ou seja, ter sua aprendizagem avaliada por meio de um sistema binário. Para Pernambuco (2012, p. 41) “seria, com certeza, sem importância ou inútil.”

Para Pernambuco,

> *A avaliação tem como objetivo fundamental proporcionar a tomada de decisões. Avaliar é então a organização (ou estudo) de situações susceptíveis de revelar algo de confiável e de substancial sobre o “valor” de um objeto. (PERNAMBUCO, 2012, p. 42).*

Assim, os PCPE recomendam uma avaliação pautada no desenvolvimento do aluno, que seja capaz de diagnosticar as dificuldades individuais durante o percurso da aprendizagem e não apenas classificar como certo ou errado ao final de um bimestre. Dessa forma a avaliação está inserida no processo ensino e aprendizagem, ela se estabelece como um elemento indissociável do ato de ensinar e aprender.

Apesar de termos vários adjetivos para as avaliações da aprendizagem, dependendo do autor, como por exemplo, a avaliação mediadora de Jussara Hoffman, a avaliação diagnóstica de Cipriano Luckesi e a avaliação qualitativa de Pedro Demo, vamos adotar aqui as funções de avaliação da aprendizagem definida por PERNAMBUCO (2009),

> *Se é assim, se a avaliação antecede, acompanha e sucede o trabalho pedagógico, ela assume funções diferenciadas, de acordo com a situação de aprendizagem e o momento em que ela é demandada. São elas: Diagnóstica, Formativa e Somativa. (PERNAMBUCO, 2009, p. 23).*

Vamos agora detalhar as características das avaliações diagnóstica, formativa e somativa, com o intuito de estabelecer suas diferenças e o contexto de empregabilidade de cada uma delas.

A avaliação diagnóstica, de acordo com Pernambuco (2009), se estabelece pela sua função básica que é comunicar o contexto em que a atividade pedagógica será desenvolvida, bem como informar sobre os sujeitos participantes dessa atividade. Essa avaliação acontece em duas fases distintas, antes e durante o processo ensino e aprendizagem. Na primeira fase ela busca: identificar quais competências já foram desenvolvidas pelos alunos que são pré-requisitos para uma nova aprendizagem; agrupar alunos de acordo com suas especificidades; encaminhar alunos a estratégias e programas específicos de ensino a partir de um diagnóstico. Na segunda fase procura-se identificar as causas que não têm origem pedagógica e estão presentes no fracasso escolar.

A avaliação formativa procura investigar como os alunos aprendem determinado conteúdo, identificando aquilo que eles já compreendem e as dificuldades que os impedem momentaneamente de avançarem. Estamos aqui tratando da avaliação formativa, que tem como característica principal atuar sobre a aprendizagem. Segundo Perrenoud (1999),

> *Essa concepção se situa abertamente na perspectiva de uma regulação intencional, cuja intenção seria determinar ao mesmo tempo o caminho já percorrido por cada um e aquele que resta a percorrer com vistas a intervir para otimizar os processos de aprendizagem em curso. (PERRENOUD, 1999, p. 89).*

Assim, trata-se de uma avaliação contínua que em momento algum se separa do ensino e da aprendizagem, ou seja, ela está sempre presente na prática diária do professor. Como exemplo, podemos citar uma atividade em que o professor solicita que os alunos somem as frações $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ e ele percebe que determinado estudante atribui como resposta $\frac{3}{10}$. No mesmo momento, o professor intervém e, a partir da decomposição do número $\frac{2}{5}$ em frações unitárias, é possível fazer com que o aluno tenha a compreensão que não é necessário somar os denominadores. Neste sentido Brasil (1997) afirma que,

> *Ao procurar identificar, mediante a observação e o diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode interferir para auxiliá-lo. (BRASIL, 1997, p. 59).*

Como podemos perceber, a avaliação formativa é desprovida de regras que determinam quando ela acontece e como acontece, ela se dá na dinâmica da prática pedagógica, sendo orientada pela situação didática do momento em que se faz necessária.

Avaliação somativa, diferentemente da diagnóstica e da formativa, ocorre ao final de um determinado período para verificar efetivamente o que o aluno aprendeu. Essas avaliações também têm como características a atribuição de notas ou a certificação de alunos de um determinado curso ou programa. São avaliados geralmente a aprendizagem dos conteúdos tidos como mais relevantes para uma unidade de um ano letivo e a avaliação encerra-se com a emissão da nota, não há intervenção no ensino e na aprendizagem independentemente do resultado apurado.

Dessa forma, entendemos que a avaliação da aprendizagem em matemática seja exercida contemplando no mínimo os três tipos citados anteriormente, e não se constitua naquela avaliação representada pelo sistema binário.

Propostas de avaliações coerentes com o ensino e aprendizagem atual estão presentes nos parâmetros curriculares do País, além disso, grandes educadores têm proporcionado um amplo debate propondo alternativas interessantes na busca da construção de uma avaliação mais justa, mais dinâmica e, consequentemente, mais eficiente, capaz de minimizar a sensação de fracasso e impotência carregada por professores e alunos.

Assim compreender os erros dos alunos como elementos inerentes a construção da aprendizagem exige entender a avaliação como processo e não como exame. O tipo de avaliação utilizada pelo professor se reflete na compreensão que ele tem sobre os erros.

2.3 Avaliação externa

Segundo Pernambuco (2009) são denominadas de avaliações externas aquelas cujos instrumentos avaliativos (de forma geral, testes de proficiência, provas, questionários) são produzidos e aplicados por pessoas que não são ligadas diretamente à escola. As avaliações externas geralmente são aplicadas em larga escala, ou seja, envolvem um grande número de escolas e alunos. De acordo com Pernambuco (2009, p. 24), “tais avaliações, normalmente, são aplicadas de forma padronizada em todos ou em um grande número de estudantes, abrangendo diferentes alunos, turmas e escolas.”

Dessa forma são avaliações produzidas e gerenciadas por órgãos externos à escola, normalmente pelo governo federal, governos estaduais e municípios.

Especificamente o município de Jaboatão dos Guararapes tem seus alunos avaliados em larga escala pelo governo federal por meio do INEP e pelo governo de Pernambuco por meio do SAEPE.

Por atingir milhões de alunos as avaliações em larga escala utilizam geralmente itens de múltipla escolha, no caso dos anos iniciais do ensino fundamental, a questão apresenta quatro alternativas. A alternativa correta é chamada de gabarito as demais são denominadas de distratores, que devem ter relação com o item, são alternativas que apresentam possíveis raciocínios dos estudantes.

De acordo com Pernambuco (2009) os principais objetivos das avaliações externas em larga escala são, a autoavaliação, a certificação, o credenciamento, o diagnóstico e a rendição de contas.

A avaliação de sistemas é uma das dimensões da avaliação externa e, de acordo com Souza,

> *A avaliação de sistema apresenta claramente dois focos de análise: o primeiro refere-se aos resultados do sistema, as habilidades e competências adquiridas pelos alunos em determinadas séries escolares, e o segundo trata das condições oferecidas para alcançar esses resultados. (SOUZA, 2000, p. 113).*

Assim, a avaliação de sistemas está inserida no objetivo do diagnóstico, que tem como função subsidiar gestores, diretores e professores com informações acerca do desempenho dos estudantes das escolas e dos sistemas de ensino. Segundo Pernambuco (2009, p. 26), “Com base nesse diagnóstico, torna-se possível alterar ou aperfeiçoar um conjunto variável de procedimentos, de modo que os objetivos possam ser de fato alcançados.” Nesse sentido, o diagnóstico contribui para a tomada de decisões, fornecendo elementos para as intervenções necessárias.

Os principais organismos, aqui no Brasil, que operam com avaliação externa em larga escala, entre eles o Saeb e o SAEPE, têm como principal objetivo o diagnóstico, obtido por meio da análise de aprendizagem. De acordo com Pernambuco (2009), análise de aprendizagem se dá por meio da aplicação de testes em conteúdos específicos e a partir deles verifica-se o desempenho dos estudantes em processo de ensino e aprendizagem.

Assim, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) realizou as primeiras avaliações externas em larga escala em nível nacional no início da década de 90 e nos últimos 20 anos foi sendo aprimorado e hoje apresenta a seguinte estrutura.

Figura 1 – Avaliações em larga escala coordenadas pelo Saeb. (Fonte: INEP)

Dessa forma, o SAEB avalia por meio da Avaliação Nacional da Educação Básica – Aneb, de maneira amostral, alunos das redes pública e privada em todo o País nos 5º anos, 9º anos do ensino fundamental e nos 3º anos do ensino médio. A Avaliação Nacional do Rendimento Escolar – Anresc, mais conhecida como Prova Brasil, avalia os estudantes dos 5º anos e 9º anos do ensino fundamental das escolas públicas das redes municipal, estadual e federal, abrangendo todo o País e tendo caráter censitário. A Avaliação Nacional da Alfabetização - ANA foi instituída em 2013, com periodicidade anual. É uma avaliação censitária que ocorre nos 3º anos das escolas públicas, contemplando o País inteiro com o objetivo de avaliar os níveis de alfabetização e letramento em Língua Portuguesa e a alfabetização Matemática

A ANA surge para verificar se o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC, que é um compromisso assumido pelos governos federal, distrito federal, estados e municípios que todas as crianças estejam alfabetizadas até os oito anos de idade, ao término do 3º ano do ensino fundamental, está conseguindo alfabetizar as crianças no tempo certo, os resultados das avaliações também devem ser utilizados para redirecionar as ações do Pacto quando necessário.

A Aneb e a Anresc/Prova Brasil avaliam as competências desenvolvidas pelos alunos nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática e ocorrem a cada dois anos.

Nas últimas décadas, municípios e estados implantaram também seus próprios sistemas de avaliação externa em larga escala, é o caso do estado de Pernambuco, que em 2000 criou o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE, avaliando as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, nas 4ª séries, 8ª séries do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio nas redes públicas municipal e estadual em todo o Estado a cada dois anos de maneira censitária. A partir de 2008 passou a ocorrer anualmente, e hoje avalia 3º anos, 5º anos e 9º anos do ensino fundamental e 3º anos do ensino médio.

Foi partir dos resultados da Prova Brasil (2011) e do SAEPE (2011) divulgados em 2012, que fomos motivados a investigar como os professores compreendem os erros dos alunos, por entendermos o erro como estratégia pedagógica eficaz no ensino e na aprendizagem.

Por se tratar de sistemas que avaliam em larga escala e quase sempre de forma censitária não é possível utilizar questões abertas, assim, apesar de os distratores cumprirem um papel importante nas avaliações com questões fechadas, eles não dão conta de investigar mais especificamente as estratégias e os conhecimentos que os alunos mobilizam para resolver um determinado problema.

Dessa forma vamos construir nosso instrumento de pesquisa a partir de itens já divulgados da Prova Brasil e do SAEPE, mas adaptando-os para questões abertas, para podermos identificar plenamente os erros mais frequentes em questões relacionadas as expectativas de aprendizagem dos números racionais.

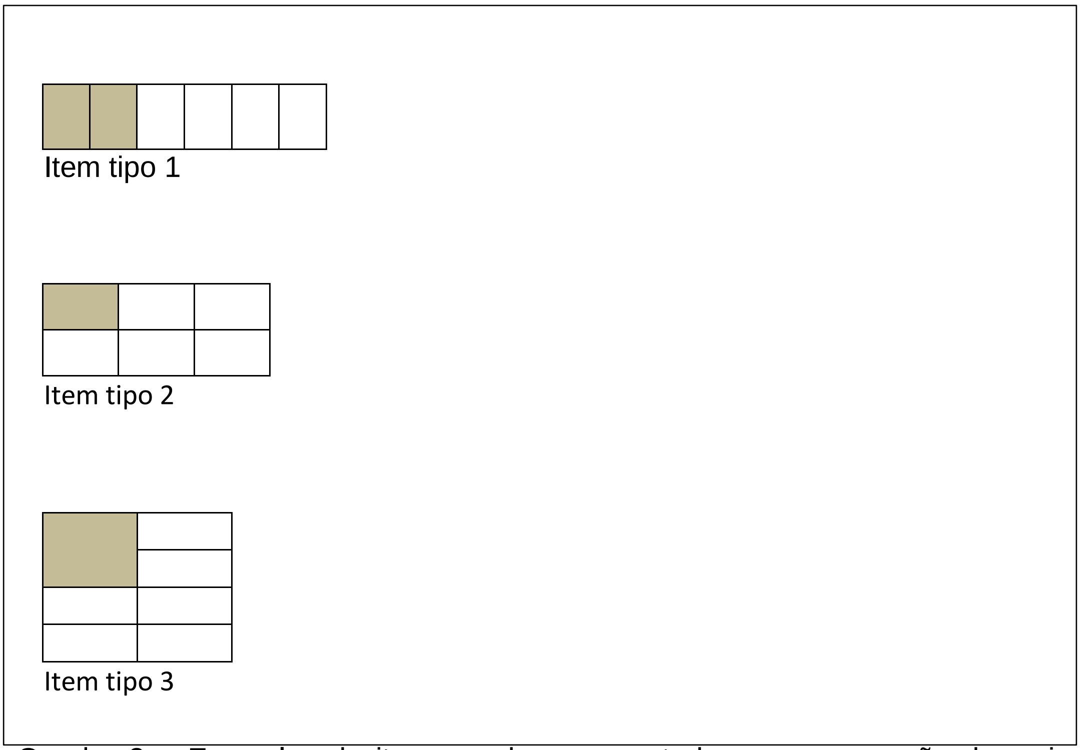
3 OS NÚMEROS RACIONAIS

A dificuldade da aprendizagem do conceito de números racionais é retratada em diversos estudos, tanto no exterior por Kerslake (1986), Kieren (1988), Behr *et al.* (1993), quanto aqui no Brasil pelos trabalhos de Campos *et al.* (1995), Nunes e Bryant (1997), Santos (2005), Canova (2006), Silva (2007), Campos *et al*. (2009) Santos (2010) e Santos (2011).

Behr (1993) afirma que há um consenso entre os pesquisadores que a forma como se introduz os números racionais, por meio de uma fração com o significado parte/todo, favorece a um procedimento chamado dupla contagem, em que os estudantes contam as partes pintadas da figura e a quantidade de partes que foi dividida a figura e os estabelece como numerador e denominador, sem perceber a relação existente entre essas partes. Nesse mesmo sentido Kieren (1988) alerta a fragilidade do modelo parte/todo que não contribui para a construção do conceito de número racional.

Kerslake (1986) em estudo com crianças de 12 – 14 anos aponta que os estudantes têm familiaridade em resolver problemas quando se emprega a dupla contagem, mas há indícios de dificuldades em estabelecer equivalências de frações quando se exige outro procedimento de resolução.

Campos *et al.* (1995) realizaram um estudo com o intuito de averiguar a influência do procedimento de dupla contagem na resolução de itens envolvendo o significado parte/todo. A atividade foi desenvolvida com alunos da 5ª série, hoje 6º ano, com idade aproximada de 12 anos ou mais e era composta por três itens onde os dois primeiros permitiam a resolução por meio da dupla contagem, mas o terceiro exigia raciocinar com a ideia parte/todo. Eles estabeleceram como hipóteses que os estudantes não teriam grandes dificuldades para resolverem as questões 1 e 2 ; a questão 3 apresentaria um grau de dificuldade bem mais elevado em relação aos itens 1 e 2 e os erros mais recorrentes no item 3 seria o emprego da dupla contagem.



Quadro 2 – Exemplos de itens usados para estudar a compreensão das crianças sobre frações. (Fonte: Campos *et al*., 1995)

As hipóteses foram confirmadas, os estudantes demonstraram relativa facilidade para responder os itens 1 e 2 mas, no item 3, 56% dos alunos estabeleceram como resposta $\frac{1}{7}$, utilizando o procedimento de dupla contagem sem perceber a relação parte/todo.

As pesquisas de Canova (2006) e Silva (2007) apontam que o trabalho com os racionais nos anos iniciais enfatiza as representações fracionárias com destaque para o significado parte/todo.

Os PCN (1997), Nunes (2005), Campos *et al*. (2009) sugerem a diversificação do trabalho com frações, assim na introdução dos números racionais, nos anos iniciais, devem estar presentes os significados parte/todo, divisão e razão.

Os PCPE (2012) recomendam a introdução dos números racionais considerando o contexto social da criança, que desde cedo de alguma forma já tem contato com as ideias de “metade da turma”, “um terço da largura da mesa”, “a quarta parte da fita”, “meio quilo de carne” etc. Também sugerem situações envolvendo as frações com a ideia de divisão, situações cotidianas em que o todo é dividido em partes iguais. E, por fim, as situações em que as frações têm a ideia de razão é o caso do exemplo, numa sala de aula a razão do número de meninas para o de meninos é de $\frac{2}{3}$.

Dessa forma, recomenda-se a exploração dos diferentes significados da fração a partir do conhecimento prévio do estudante. Os PCPE também sugerem a exploração das frações fundamentais, aquelas que têm numerador um $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\ \ etc.\right)$, seu uso contribui na construção do conceito de frações bem como na compreensão de equivalência.

Os PCPE apontam que a representação dos números racionais não se dá apenas pelas frações e ressaltam a importância que a representação decimal vem adquirindo nas práticas sociais. Esse tipo de representação é cada vez mais comum para comunicar fatos da vida cotidiana que envolvem os números racionais, portanto, não deve ser negligenciada no ensino da Matemática. Sugerem ainda a construção da ideia de porcentagem com situações da vida prática do aluno, utilizando porcentagem simples, como 10%, 20%, 50% etc.

3.1 A origem dos números racionais

Não há dúvida que a matemática surge a partir da necessidade humana, desempenhando um papel importante na construção da sociedade e no desenvolvimento da nossa espécie. Logo, apesar de não termos registros, é possível afirmar que a matemática tem sua origem atrelada ao avanço cultural da humanidade. Não estamos aqui descrevendo uma matemática avançada, mas sim uma matemática incipiente, capaz de explicar e resolver fenômenos de uma sociedade que não buscava respostas para situações mais complexas do universo, mas tinha o intuito de oferecer soluções para a vida cotidiana das civilizações.

De acordo com Boyer (2010), o progresso da matemática vai acontecendo paulatinamente, sendo aprimorado de geração para geração, todo este processo acontece gradativamente. Atrelado à matemática que aqui descrevemos, está a construção do conceito de número. Nesse sentido, Boyer (2010, p. 1) afirma que “Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana.”

A construção de um conhecimento não acontece de uma só vez, nem tampouco por ações isoladas, ela vai evoluindo e incorporando novos paradigmas que são exigências da dinâmica da sociedade em que está inserida. Portanto, a percepção de propriedades comuns na natureza, que provavelmente deram origem à Matemática, teve origem há milhares de anos e foi evoluindo progressivamente. Boyer (2010) afirma,

> *É improvável que isso tenha sido descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo; é mais provável que a percepção tenha sido gradual, desenvolvida tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300 000 anos.*(p.1).

Se a origem dos números inteiros data de um período longínquo, que se confunde com a própria história da humanidade, os números racionais surgem em uma época bem distante dos primeiros. Neste contexto, Boyer (2010, p.2) coloca “a noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para inteiros.”

Para Boyer (2010), não há indícios do uso de frações pelo homem durante o período paleolítico, mas com o surgimento de culturas mais desenvolvidas, a partir da idade dos metais, especificamente a Idade do Bronze, emerge a necessidade do conceito e da simbologia das frações.

Hieróglifos mostram a habilidade que os egípcios demonstravam sobre as frações unitárias, ou seja, frações cujo numerador é igual a 1. Estas frações eram facilmente utilizadas, não parecendo haver qualquer embaraço no emprego desse tipo de número. Existia simbologia específica para estas frações, registradas inclusive no Papiro Ahmes (cerca de 1650 a.C.), representando $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{20}$. Assim, parece que a convivência nessa época com as frações unitárias se deu de forma bastante harmoniosa. O mesmo não podemos afirmar em relação às frações em geral. Segundo Boyer (2010, p. 9), “a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios.” Com exceção da fração $\frac{2}{3}$, que eles entendiam como a soma de duas frações unitárias um terço, os egípcios enfrentaram grandes dificuldades em compreender e utilizar outras frações não unitárias.

A fração $\frac{2}{3}$ era a base para os egípcios determinar outras frações. Segundo Boyer (2010), eles,

> *Atribuíam à fração 2/3 um papel especial nos processos aritméticos, de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso. Conheciam e usavam o fato de dois terços da fração unitária 1/p ser a soma de duas frações unitárias 1/2p e 1/6p; também tinham percebido que o dobro da fração 1/2p é a fração 1/p. No entanto, parece que tirando a fração 2/3 os egípcios consideravam a fração racional própria geral da forma m/n não como uma "coisa" elementar, mas como parte de um processo incompleto. (BOYER, 2010, p. 9).*

Assim, o uso dos números racionais pela civilização egípcia é marcado fortemente pelas frações unitárias e o emprego da fração 2/3 em várias operações aritméticas. Para eles a fração $\frac{3}{5}$ era a soma de três frações unitárias $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{5}$+ $\frac{1}{15}$ e $\frac{2}{5}$ podia ser representado por $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{15}$. De acordo com Boyer (2010), o papiro de Rhind apresenta uma tabela fornecendo 2n como a soma de frações unitárias incluindo todos os valores de n de 5 a 101. Ainda segundo Boyer (2010), não há uma explicação para a escolha de uma forma de decomposição entre tantas possíveis.

Neste sentido, os egípcios manipulavam bem a fração $\frac{2}{3}$ e as frações unitárias e percebe-se em seus estudos a noção de métodos, o que sem dúvida foi uma contribuição importante para o desenvolvimento dos números racionais.

Próximo ao vale do Nilo, entre os rios Tigre e o Eufrates, viviam os babilônios, uma civilização bastante avançada culturalmente, que desenvolveram um sistema de numeração de base sexagesimal.

A grande diferença entre babilônios e egípcios é que os primeiros estenderam o princípio posicional às frações, assim para eles operar com números decimais não era necessariamente mais complexo do que realizar operações com os números inteiros, já os egípcios não conseguiram dominar a notação decimal. Segundo Boyer (2010), um exemplo da superioridade babilônia está registrado numa tableta da coleção de Yale (nº 7289) que expressa a raiz quadrada de dois com três casas sexagesimais. Para eles a $\sqrt{2}$ equivale aproximadamente a 1,414222 que difere do valor real por apenas 0,000008. Para Boyer (2010, p. 19) "a precisão nas aproximações era relativamente fácil de conseguir para os babilônios com sua notação para frações, a melhor que qualquer civilização tenha possuído até a Renascença".

A renascença foi um período marcado por grandes transformações na vida humana, ele determina o fim da idade média e o princípio da idade moderna, neste contexto é possível perceber o avanço dos babilônios na Matemática em relação a outras civilizações.

3.2 O conceito dos números racionais

Os números racionais surgem a partir de situações em que os números naturais não conseguem oferecer respostas adequadas para solucioná-las. Para Caraça (2005), a dificuldade reside em dividir dois números quando o resultado não é exato, por exemplo, dividir 11 por 3, neste caso não é possível operar no campo dos números naturais, surge, então, um novo campo numérico.

De acordo com Caraça (2005, p. 35), esse novo campo numérico está definido assim:

Sejam, fig. 1, os dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u – $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ contém n vezes o segmento u. Diz-se, por definição, que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escreve-se,

(1) $\overline{AB} = \frac{m}{n} \,.\, \overline{CD}$,

quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo); se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se m não for divisível por n, o número se diz fracionário.

O número $\frac{m}{n}$ diz-se em qualquer hipótese, racional – ao número m chama-se numerador a ao número n denominador. Em particular, da igualdade (1) resulta que

(2) $\frac{n}{1} = n$

Visto que, se $\overline{AB} = n.\overline{CD}$, é também $\overline{AB} = \frac{n}{1} \,.\, \overline{CD}$, e que

(3) $\frac{n}{n} = 1$

Porque as igualdades $\overline{AB} = \overline{AB}$ e $\overline{AB} = \frac{n}{n} \,.\, \overline{AB}$ são equivalentes.

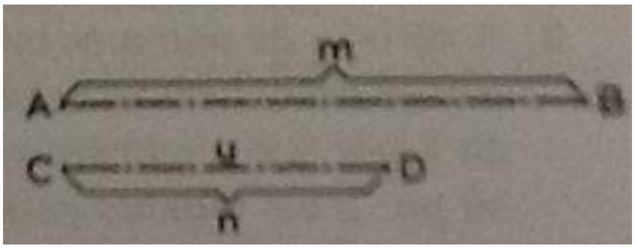


Figura 2 – Segmentos de retas para determinar o conceito de número racional

De acordo com Caraça (2005), o campo racional compreende o conjunto dos números inteiros (os inteiros na perspectiva dos naturais 0, 1, 2, 3,...) e os números fracionários. A criação dos novos números traz duas vantagens,

> 1) *É possível exprimir sempre a medida dum segmento tomando outro como unidade; se, por exemplo, dividida a unidade em 5 partes iguais, cabem 2 dessas partes na grandeza a medir, diz-se que a medida é o número $\frac{2}{5}$.*
> 2) *A divisão de números inteiros m e n agora pode sempre exprimir-se simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$ – o quociente de 2 por 5 é o número racional fracionário $\frac{2}{5}$, o quociente de 10 por 5 é o número racional inteiro $\frac{10}{5}$ = 2. (CARAÇA, 2005, p. 36).*

Dessa forma, preenche-se a lacuna encontrada para determinar a razão de dois números inteiros, o novo campo numérico absorve este vazio e estabelece sempre uma razão entre dois números inteiros.

Ainda de acordo com Caraça (2005), o conhecimento do campo racional só estará completo após o estudo de suas propriedades – igualdade, desigualdade e operações. As definições das propriedades estão ancoradas em dois critérios, os números racionais tendo como origem concreta a expressão numérica de medição de segmentos e o princípio da economia que é composto pelos aspectos, analogia de definições com as dadas em números inteiros e manutenção das leis formais das operações. Para Caraça (2005), o princípio da economia se traduz em encontrar sempre o caminho mais curto nas operações mentais, sem abandonar a essência das leis formais das operações, ou seja, é a generalização da aplicação dessas leis.

Os critérios têm caráter complementar, quando o primeiro não for suficientemente capaz de definir a propriedade, então, recorre-se ao segundo.

A seguir a definição das propriedades da igualdade, da desigualdade e das operações de acordo com Caraça (2005).

Igualdade

Dois números racionais j = $\frac{k}{l}$ e m = $\frac{n}{r}$ são iguais se exprimem a medida do mesmo segmento, mantendo a unidade inicial.

Desigualdade

Dados dois números racionais j e m, o maior deles é aquele que, com o mesmo segmento unidade, mede um segmento maior.

Adição

Se temos dois números racionais j e m medindo, com a mesma unidade, dois segmentos, chama-se soma j + m ao número racional que mede, ainda com a mesma unidade, o segmento soma dos dois. Em que a definição de soma de dois segmentos é,

Sejam dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; chama-se soma deles ao segmento $\overline{AD}$ que se obtém transportando $\overline{CD}$ para a reta sobre a qual existe $\overline{AB}$, e fazendo lá coincidir a origem C de $\overline{CD}$ com a extremidade B de $\overline{AB}$.

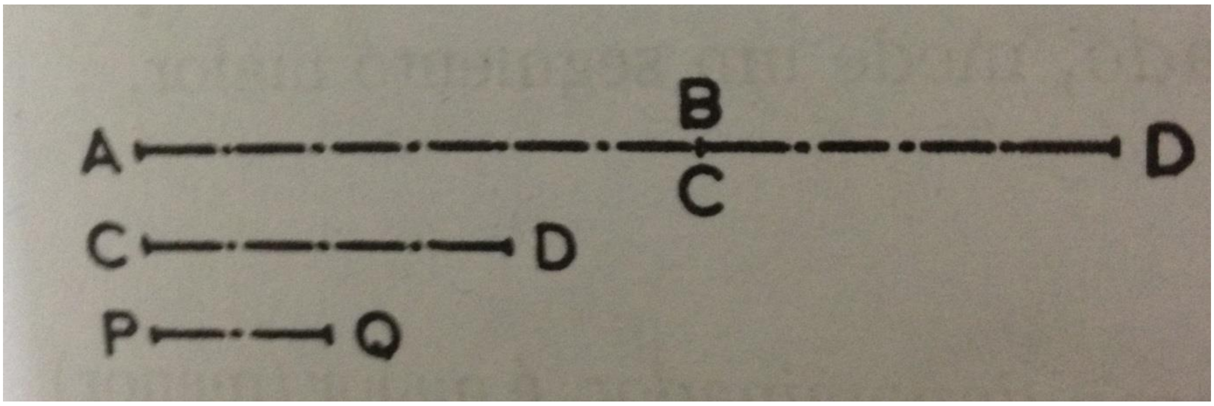


Figura 3 – segmentos de retas para determinar a adição de números racionais

Subtração

Dados dois números racionais j = $\frac{k}{l}$ e m = $\frac{n}{0}$, chama-se diferença j – m deles a um terceiro número racional g tal que m + g = j.

Multiplicação

a) Multiplicador inteiro $\frac{p}{q}$. n = $\frac{p}{q}$ + $\frac{p}{q}$ + ... $\frac{p}{q}$, donde, $\frac{p}{q}$. n = $\frac{n.p}{q}$.

b) Multiplicador fracionário n. $\frac{p}{q}$ = $\frac{p}{q}$. n = $\frac{p.n}{q}$.

c) Caso geral $\frac{p}{q}$. $\frac{r}{s}$ = $\frac{p.\frac{r}{s}}{q}$ = $\frac{\frac{p.r}{s}}{q}$.

Divisão

a) Divisor inteiro

1) $\frac{p}{q} : n = x \leftarrow n.x = \frac{p}{q}$
2) $\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q.n}$
3) $a : b = \frac{a}{b}$
4) $\frac{\frac{p.r}{s}}{q} = \frac{p.r}{s} : q = \frac{p.r}{q.s}$, $\frac{p}{q} . \frac{r}{s} = \frac{p.r}{q.s}$,

b) Divisor fracionário

1) $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = x \leftarrow x . \frac{r}{s} = \frac{p}{q}$.

2) $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p.s}{q.r} = \frac{p}{q} . \frac{s}{r}$.

Potenciação com expoente inteiro

$(\frac{p}{q})^n = \frac{p}{q} . \frac{p}{q} ... \frac{p}{q}$

Radiciação

$\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = x \leftarrow x^n = \frac{p}{q}$

Potenciação com expoente fracionário

$r^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{r^p}$

Logaritmação

1) $a = b^n \rightarrow n = \log_b a$

3.3 Os números racionais nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN de Matemática (BRASIL, 1997) organizam os conteúdos matemáticos em quatro blocos, Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Segundo Brasil (1997), os conhecimentos numéricos são construídos pelos alunos por meio do diálogo, levando em consideração suas propriedades, relações e seu aspecto histórico. Assim, Brasil afirma,

> *Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversas categorias numéricas criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar – números naturais, números inteiros positivos e negativos, números racionais (com representações fracionárias e decimais) e os números irracionais. (BRASIL, 1997, p. 55).*

Uma maneira interessante de introduzir os números racionais é partir de situações práticas em que os números naturais não são suficientes para resolver. Neste contexto, os alunos são desafiados a raciocinar e compreenderem a necessidade da expansão dos números. Assim, é possível que eles consigam entender o que significa um número representado em forma de fração ou em decimal.

Os números racionais, apesar de serem uma extensão dos números naturais, em algumas situações não permitem raciocinar sobre eles levando em conta as características dos naturais. É preciso atenção do professor nesse aspecto, pois, é comum os alunos estenderem aos racionais todos os seus conhecimentos sobre os naturais. E de acordo com Brasil (1997), ao estenderem as características dos números naturais aos racionais os alunos acabam enfrentando alguns obstáculos,

> *Um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, 1/3, 2/6, 3/9 e 4/12 são diferentes representações de um mesmo número;*
>
> *Outro diz respeito à comparação entre racionais; acostumados com a relação 3 > 2, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, 1/3 > 1/2;*

> *Se o “tamanho” da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais (8 345 > 41), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério;*
>
> *Se ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa era a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por 1/2 se surpreenderão ao ver que o resultado é menor que 10;*
>
> *Se a sequência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87. (BRASIL, 1997, p. 101 – 102).*

Como podemos perceber, trata-se de definições já internalizadas pelos alunos que se não houver uma mediação do professor serão automaticamente transferidas para o novo campo numérico.

Ainda segundo Brasil (1997), os números racionais se manifestam frequentemente nas representações decimais, é assim que eles surgem no contexto diário, logo não faz sentido a escola privilegiar uma abordagem contemplando as frações. A facilidade ao acesso das novas tecnologias, como a calculadora, permite construir diversas atividades envolvendo os números decimais. É interessante também, na introdução da representação fracionária, não se restringir somente à ideia parte de um todo, esquecendo significados importantes das frações como divisão e razão.

3.4 As expectativas de aprendizagem dos números racionais segundo os Parâmetros Curriculares de Pernambuco

Os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco destacam que no caso do ensino da Matemática o olhar não deve estar direcionado apenas para os conteúdos a serem ensinados, mas também para as expectativas de aprendizagem, ou seja, aquilo que se espera que o aluno aprenda. De acordo com Pernambuco (2012), “isso é necessário para o acompanhamento do processo de ensino e aprendizagem e a garantia do seu sucesso”.

Dessa forma podemos afirmar que este documento têm as expectativas de aprendizagem como dos temas central da sua discussão.

Este documento (os Parâmetros) refere-se ao termo expectativa em seu sentido etimológico de “espera”, “esperança”. Segundo Pernambuco (2012),

> *As expectativas de aprendizagem explicitam aquele mínimo que o estudante deve aprender para desenvolver as competências básicas da disciplina. Em outras palavras, elas descrevem o “piso” de aprendizagens, e não o “teto”. Dependendo das condições de cada sala de aula, elas podem ser ampliadas e/ou aprofundadas. (PERNAMBUCO, 2012, p. 13).*

Sem dúvida, um avanço importante nos Parâmetros Curriculares de Pernambuco em relação a outros documentos curriculares, é a articulação entre as expectativas de aprendizagem e os sistemas de avaliação educacional em larga escala. As matrizes de referência do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) estão contempladas nas expectativas de aprendizagem atrelando o ensino e a aprendizagem às avaliações externas.

Interessamo-nos em particular pelas expectativas de aprendizagem do 5º ano do ensino fundamental, referentes aos números racionais, apresentadas no quadro a seguir que fazem parte do nosso objeto de estudo.

Expectativas de aprendizagem para o 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental - números racionais

Nº de Ordem	Expectativa
1	Reconhecer que numa unidade dividida em 10 partes iguais, cada parte corresponde a um décimo; que numa unidade dividida em 100 partes iguais, cada parte corresponde a um centésimo e que numa unidade dividida em 1 000 partes, cada parte corresponde a um milésimo.
2	Reconhecer que numa unidade dividida em 10 partes iguais, cada parte corresponde a um décimo; que numa unidade dividida em 100 partes iguais, cada parte corresponde a um centésimo e que numa unidade dividida em 1 000 partes, cada parte corresponde a um milésimo.
3	Reconhecer a representação simbólica de décimos, centésimos e milésimos.
4	Elaborar composições e decomposições de números decimais (décimos, centésimos e milésimos), como por exemplo, perceber que 0,3 corresponde a três parcelas iguais de um décimo.
	Relacionar números racionais (representações fracionárias e

5	decimais) positivos a pontos na reta numérica e vice e versa.
6	Identificar e representar frações menores e maiores que a unidade.
7	Relacionar frações equivalentes em situação contextualizada.
8	Associar a representação simbólica de uma fração às ideias de parte de um todo e de divisão.
9	Resolver e elaborar problemas envolvendo a determinação de porcentagens (por exemplo: determinar 10% de 1 000 reais. (10%, 5%, 20%, 25%, 50%, 75% e 100%)).
10	Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% à décima parte, quarta parte, metade, três quartos etc. em problemas de contexto cotidiano do estudante.
11	Comparar e ordenar números na representação decimal, usados em diferentes contextos.
12	Resolver problema contextualizado envolvendo a adição de frações de mesmo denominador.
13	Resolver problema contextualizado envolvendo a multiplicação de uma fração por um número natural.
14	Resolver problema de adição ou subtração de números decimais, por meio de cálculo mental em diferentes contextos.
15	Resolver problema de multiplicação de um número decimal por um número natural, por meio de cálculo mental em diferentes contextos.

Quadro 3 – Expectativas de aprendizagem dos números racionais para o 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental. Fonte: Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco – Matemática (*Numeração nossa*).

3.5 Os registros de representação dos números racionais

A semiótica é a ciência que se encarrega de estudar os signos e os sistemas de sinais empregados em comunicação e, sem dúvida, a aprendizagem da Matemática é carregada de todo um sistema de símbolos e representações além da língua natural. Como afirma Duval (2009), a aprendizagem das matemáticas aborda de forma mais contundente a pluralidade de registros semióticos de representação do que as outras disciplinas.

Para Duval (2009), a questão central a ser respondida é se o uso de diversos sistemas semióticos de representação e de expressão é fundamental ou, significa somente uma forma confortável, mas secundária, no desenvolvimento das aprendizagens? Ou ainda, o funcionamento cognitivo do pensamento humano como a construção de um conceito independe da pluralidade de registros semióticos de representação? Estas perguntas são importantes, porque tentar respondê-las traz subsídios para determinar a relevância das representações semióticas no desenvolvimento das atividades cognitivas.

De acordo com Duval (2009), temos pelo menos dois argumentos fortes, que por si só tentam se estabelecerem.

O primeiro é que se não distinguimos um objeto da sua representação não pode haver compreensão matemática. Assim, não se pode confundir o objeto matemático com sua representação. Neste sentido Duval afirma,

> *É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc, com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras ... porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (DUVAL, 2009, p. 14).*

Mas neste caso a ênfase será para o objeto representado e não suas representações semióticas, como afirmam Deledicq *et al.* (1979), ou seja, as diversas representações semióticas dos objetos matemáticos estariam em segundo plano, seriam dessa forma externas ao desenvolvimento conceitual dos objetos.

O segundo argumento diz respeito às representações mentais e, segundo Duval (2009, p. 15), significa "(...) todo o conjunto de imagens e de conceituações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre aquilo que lhe é associado." Neste caso, o conjunto de representações semióticas seria apenas a forma de o sujeito expressar suas representações mentais. Assim, seriam totalmente subordinadas às representações mentais, cumprindo somente o ofício de comunicar.

Esse entendimento é possível se partirmos de definições mais reducionistas para semiósis e noésis como afirma Duval,

> *Se chamamos de semiósis a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e noésis os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou compreensão de uma inferência, pareceria então evidente admitir que a noésis é independente da semiósis ou, ao menos, a dirige. Muitos trabalhos psicológicos e didáticos partem implicitamente desta evidência. (DUVAL, 2009, p. 15).*

Acontece que na aprendizagem matemática as relações entre semiósis e noésis não se estabelecem de forma extrínseca, elas têm uma interdependência e podemos afirmar que as representações semióticas são imprescindíveis para o desenvolvimento das tarefas matemáticas.

Apoiamo-nos também em outros autores que referendam a importância da relação indissociável entre a representação mental e a representação semiótica.

Neste contexto, Granger (1979) afirma que não se separa a formação do pensamento científico de simbolismos exclusivos para representar o objeto e suas respectivas relações.

Duval (2009) aponta a evolução dos sistemas semióticos utilizados em livros didáticos, para tal basta comparar livros produzidos em 1930 com outros dos anos de 1950, 1970, 1990, para verificar o aumento e a diversidade dos registros de representação.

Vygotsky (1985) destaca que o desenvolvimento das representações mentais acontece por meio da internalização das representações semióticas, bem como as imagens mentais são uma interiorização das percepções.

Dessa forma Duval vai de encontro aos dois argumentos iniciais e estabelece que,

> *Sendo atribuídas a necessidade das representações semióticas para certas funções cognitivas fundamentais e a implicação recíproca das representações mentais e das representações semióticas, parece legítimo avançar a hipótese contrária: não há noésis sem semiósis, é a semiósis que determina as condições de possibilidade e de exercício da noésis. (DUVAL, 2009, p. 17).*

Assim, há situações em que os sistemas semióticos evidenciam as relações entre a noésis e semióses, no entanto, estes sistemas devem desempenhar três atividades intrínsecas a toda representação.

> *Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. (DUVAL, 2009, p. 37).*

A relação entre a noésis e semiósis é exclusiva dos sistemas semióticos que admitem as três atividades cognitivas fundamentais citadas anteriormente; a linguagem natural, os gráficos, a linguagem simbólica, as figuras geométricas, etc. são exemplos desses sistemas. Por outro lado, alguns sistemas, como o morse ou o código da rota, não preenchem estes requisitos.

A linguagem natural, os gráficos, as figuras geométricas, a linguagem simbólica, dentre outros, constituem os registros de representação semiótica, que oferecem ao indivíduo várias possibilidades de expressão e comunicação. Nesse sentido temos,

> *Tais registros constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor. (DUVAL, 2009, p. 37).*

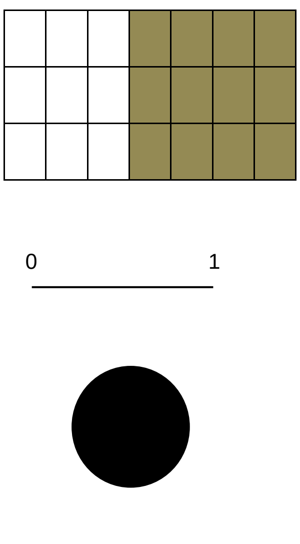
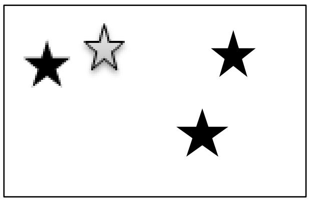
Assim, os registros de representação semiótica se constituem em uma ferramenta fundamental no desenvolvimento da aprendizagem, mas é preciso atenção a três fenômenos intrínsecos a esses registros que, de acordo com Duval (2009), são a diversificação dos registros de representação semiótica, a diferenciação entre representante e representado e a coordenação entre os diferentes registros.

Vamos descrever os três fenômenos citados tomando como referência os números racionais, trata-se de um campo muito fértil para a discussão dos registros de representação semiótica.

1. A diversificação dos registros de representação semiótica manifesta-se nos números racionais por meio dos três tipos de registros apontados por Duval, registro na língua natural, registro simbólico (numérico e algébrico)

e registro figural (contínuo e discreto). Exemplos desses registros podemos ver no quadro a seguir, organizado por Igliori e Maranhão (2003, p. 59)

REGISTROS DE REPRESENTAÇAO E NÚMEROS RACIONAIS

REGISTRO FIGURAL	REGISTRO SIMBÓLICO		REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL	
CONTÍNUO	NUMÉRICO	ALGÉBRICO		SUB-REGISTROS
	Fracionário Ex: $\frac{2}{5}$	$\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$	Um número racional escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$ está representado por uma fração.	
	Decimal exato Ex: 0,2 ou Decimal não Exato Ex: $1,\overline{3}$	$a_0\, x^n +$ $a_1\, x^{n-1} + \cdots +$ $a_n\, x^0 + \ldots$		
DISCRETO	Potência de 10 ou Notação científica	$a \,.\, 10^n$ *ou* $a.\, 10^{-n}$	Um número racional pode ser escrito seguindo as regras e convenções do Sistema Decimal de Numeração	
				

Quadro 4 – Diversificação dos registros de representação semiótica dos números reacionais. (Fonte: Igliori *et al.,* 2003)

Dessa forma, o registro figural, o registro simbólico e o registro na língua natural, são sistemas de representações diferentes e, portanto, exigem aprendizagens diversificadas.

2. A diferenciação entre representante e representado de acordo com Duval (2009) geralmente se traduz como a compreensão do que uma representação

representa, esse entendimento contribui para associar outras representações ao representado integrando-o aos procedimentos de tratamento.

Como indício desse fenômeno vamos citar as dificuldades que os estudantes têm em identificar frações equivalentes, por exemplo, compreender que $\frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{2}{4}$.

Pernambuco sugere o uso de materiais manipulativos para facilitar a compreensão de equivalência de frações, assim afirma,

> *(...) a fração deve sempre ser vista em sua totalidade, como representação de uma quantidade. Essa ideia deve estar na base da compreensão do conceito de equivalência de frações. Para isso, devem ser propostas atividades com materiais de manipulação, para que o estudante perceba, por exemplo, que o "pedaço" correspondente a $\frac{1}{2}$ tem o mesmo tamanho que dois pedações correspondentes a $\frac{1}{4}$. (PERNAMBUCO, 2013, p. 174).*

Mesmo assim, superar essas dificuldades e perceber diferença entre o objeto e sua representação, segundo Duval (2009), não é um processo simples de ser adquirido, independentemente do registro de representação e da etapa de desenvolvimento.

3. A coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica não é uma atividade simples; de acordo com Duval (2009) o domínio de regras de correspondências entre dois sistemas não garante que esses conhecimentos sejam mobilizados e usados conjuntamente.

É fundamental distinguir os procedimentos de tratamento e conversão, como ambos se materializam por meio de uma transformação é comum confundir atividades tão diferentes. No tratamento a transformação acontece internamente, como exemplo podemos transformar a fração $\frac{2}{6}$ em $\frac{1}{3}$, o registro de partida e o registro de chegada é o mesmo, no caso, o simbólico (numérico fracionário). Numa conversão a transformação se dá de um registro de representação semiótica para outro, ou seja, escrever $\frac{1}{5}$ como $0{,}2$ envolve um procedimento de conversão. Temos como registro de partida o simbólico (numérico fracionário) e como registro de chegada o simbólico (numérico decimal). Dessa forma, sobre a conversão, Duval (2009, p. 39) afirma, "Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. O estudo dessa atividade de conversão deve então permitir compreender a natureza de um laço estrito entre semiósis e noésis.” Assim, a conversão estabelece uma relação estreita entre a representação mental e os registros de representação semiótica.

Não é possível analisar os erros nos números racionais sem compreender suas diferentes representações e os diferentes significados das frações, no entanto essa compreensão se traduz na coordenação entre diferentes registros de representação que são as conversões e os tratamentos. Dessa forma os registros de representação semiótica permeiam o ensino e a aprendizagem dos números racionais.

4 A ANÁLISE DO ERRO NO PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM

4.1 A trajetória da análise de erro em matemática no ensino e na aprendizagem

A análise dos erros enquanto pesquisa educacional emerge a partir do início do século XX. Para Cury (2007), pesquisadores como Thorndike (1936), Hadamard (1945), Krutetskii (1976), Newell e Simon (1972), Brosseau (1983) e Borasi (1996) são os precursores desse gênero de pesquisa. Os trabalhos desses autores estão situados no campo da Educação Matemática, tomando como referência a definição de Cury, quando afirma que,

> *A Educação Matemática emprega contribuições da matemática, de sua filosofia e de sua história, bem como de outras áreas, tais como Educação, psicologia, Antropologia e Sociologia sendo seu objetivo o estudo das relações entre o conhecimento matemático, o professor e os alunos, relações estas que se estabelecem em um determinado contexto sociocultural. (CURY, 2007, p. 19).*

De acordo com Cury (2007), Thorndike(1936) e seus colaboradores realizaram pesquisas enfatizando as dificuldades que os alunos apresentavam na resolução de problemas de aritmética. Dessa época surge um exemplo de pesquisa sobre erros, que foi desenvolvida por Knight e Behrens (1940). Eles estudaram o comportamento de 40 estudantes de 2º ano ao resolverem adições e subtrações envolvendo números naturais cujo resultado era inferior a 20, registrando o número de erros cometidos. Os tipos de erros detectados levaram os pesquisadores a propor rotinas para analisar o processo mental para se chegar às respostas.

Cury (2007) defende que as investigações de Thorndike (1936) e seus seguidores estão presentes ainda hoje em pesquisas que avaliam estratégias utilizadas por alunos para efetuar operações elementares envolvendo os números naturais. Portanto, Thorndike foi um dos pioneiros dos estudos sobre os erros.

Segundo Cury (2007), Hadamard (1945) envolveu-se com os processos de invenção em matemática a partir de uma conferência proferida por Henri Poincaré, sobre as relações entre consciente e inconsciente. Segundo Hadamard (1945), a invenção é composta por quatro estágios: preparação, incubação, iluminação e apresentação precisa do resultado. Hadamard enfatiza que os matemáticos cometem muitos erros, porém percebem e os corrigem, apresentando apenas o trabalho concluído, que não reflete o seu processo de construção. As contribuições de Hadamard são inegáveis, pois suas pesquisas permitiram a discussão da importância da Psicologia no estudo da criação matemática.

Assim, Hadamard, ao questionar que os matemáticos cometem erros, mas escondem-nos e só apresentam o resultado final sem nenhum vestígio de falhas, vislumbrou que era natural que os professores e os alunos também enveredassem pela estratégia da eliminação dos erros. O questionamento de Hadamard é importante para entendermos por que o erro sempre foi por muitos anos abominado no processo ensino e aprendizagem.

Krutetskii (1976), psicólogo de origem soviética, desenvolveu sua pesquisa com ênfase para a estrutura e formação das habilidades matemáticas. Krutetskii investigou como funciona a atividade mental dos alunos durante a resolução de problemas matemáticos, como os alunos desenvolvem as habilidades matemáticas. Diferenciando-se dos pesquisadores de sua época, ele rompe com a metodologia usual, pautada praticamente em testes e técnicas estatísticas para a análise dos resultados. Krutetskii, segundo Cury (2007), desenvolve metodologias variadas, usando, entre outros procedimentos, experiências com grupos de alunos talentosos ou não, por períodos longos ou curtos, com observação de suas atividades ao resolver problemas e uso, em alguns momentos do "pensar em voz alta", discussões com os estudantes, entrevistas com pais, professores e amigos e aplicação de questionários a professores de matemática e matemáticos, com o objetivo de entender o que compreendiam por habilidade matemática.

De acordo com Cury (2007), outro aspecto importante na obra de Krutetskii é o seu distanciamento da maioria das pesquisas da época, que centravam a análise no resultado final da resolução do problema investigado. Ele rompe com essa prática e passa a analisar o desenvolvimento da resolução do problema e não apenas o produto final. Assim, Krutetskii analisa os erros cometidos pelos alunos durante todas as fases de resolução até a resposta final. Krutetskii faz duras críticas às pesquisas que apoiam suas investigações tão somente nos resultados sem considerar todo o seu percurso. Nesse sentido ele afirma que

> *Um defeito básico na pesquisa com testes é a mera abordagem estatística no estudo e avaliação das habilidades – o tratamento matemático fetichista dos resultados dos testes, com uma*

> *completa ausência de interesse em estudar o processo de solução em si. (KRUTETSKII, 1976, p. 13 apud CURY, 2007, p. 26).*

As pesquisas da época em matemática eram centradas na resolução de problemas de aritmética. Krutetskii e seus colaboradores ampliaram o universo das pesquisas e desenvolveram trabalhos abordando problemas diversos, envolvendo a aritmética, a álgebra, a geometria e a lógica. Variou também a metodologia que passou a incluir situações que envolviam grandes amostras de alunos e até os casos únicos. Preocupou-se também em ouvir matemáticos, pais e professores.

Assim, com a mudança de paradigma na metodologia da pesquisa, antes centrada apenas na análise dos resultados finais dos testes e analisada apenas estatisticamente, e a partir de Krutetskii, com ênfase no processo e análise mais qualitativa é possível estabelecer bases para a análise dos erros. Cury (2007), analisando trabalho de Krutetskii (1976), afirma que

> *Desse trabalho do psicólogo russo, considero que, para a análise de erros, além dos vários tipos de problemas propostos, vale a ênfase na observação detalhada da resolução, com o cuidado de registrar o pensamento em voz alta dos estudantes, de questionar suas respostas, para verificar como pensavam ao solucionar as tarefas. (CURY, 2007, p. 28).*

Newell e Simon (1972) analisaram protocolos de resolução de problemas resolvidos por alunos. Esses pesquisadores criaram, em 1956, o primeiro programa de Inteligência Artificial (IA) Logic Theoristic. Ele tinha a capacidade de demonstrar teoremas, utilizando-se de sistemas simbólicos.

Esses pesquisadores tentaram, por meio desse programa, simular o comportamento humano diante da resolução de um problema. Nesse sentido, Cury (2007) discorda em muitos aspectos, porque demonstrar os teoremas dos *Principia Mathematica* é uma atividade formal, encadeada, totalmente distinta das fases pelas quais passam um indivíduo que resolve um problema matemático. Para Cury (2007, p. 30),

> *É impossível alimentar um computador com todas as diferenças individuais dos solucionadores de problemas, com todas as influências que cada sujeito sofre, em termos de aprendizagem matemática, para poder resolver um problema.*

Apesar das discordâncias, o trabalho de Newell e Simon(1972), traz uma contribuição importante para a análise dos erros. É que no processo de resolução de problemas foram revelados erros pelos alunos não previstos pela teoria. Neste sentido, Cury (2007, p. 30) aponta que “uma teoria de resolução de problemas tem de levar em conta a flexibilidade dos solucionadores e suas características especiais.”

Cury (2007) relata ainda que Newell e Simon (1972) acreditam que, ao final da pesquisa, armazenaram dados suficientes para organizar uma teoria da resolução humana de problemas, ao mesmo tempo em que encontraram questões que não tiveram soluções. Eles identificaram uma teoria interna e outra externa no processo de resolução de problemas. A teoria externa é responsável pelos resultados principais, enquanto a teoria interna está associada aos erros, confusões e explorações erradas que brotam durante a resolução dos problemas.

Bachelard (1938) traz a concepção inicial dos obstáculos epistemológicos e afirma que o processo de construção do conhecimento não acontece inevitavelmente sem interrupções, apontando ainda à importância de se considerar a influência dos obstáculos epistemológicos no percurso de construção do conhecimento. Essas ideias são incorporadas mais tarde por Brousseau (1983) e Perrin-Glorian (1995), entre outros.

Em seu livro *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*, Bachelard (1996) vai fundamentar muitas das discussões atuais dos pesquisadores em Educação Matemática, bem como dar sustentáculo à linha francesa da Didática da Matemática. Bachelard afirma que

> *Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (BACHELARD, 1996, p. 17).*

Vale a pena salientar que Bachelard não inclui neste contexto a formação do espírito matemático, pois, de acordo com ele, “a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro.” (p. 28).

Mesmo assim, contra os princípios de Bachelard (1938), educadores matemáticos colocam os obstáculos epistemológicos no centro das discussões da educação matemática, e conseguem desenvolver a ideia original, ampliando significativamente a noção de obstáculo. Cury (2007, p. 32) aponta que, “na verdade, eles se apossaram dela, mas a expandiram, para discutir as manifestações dos obstáculos na aprendizagem da Matemática.”

Pessoa (2009) afirma que um dos principais pesquisadores responsável por essa expansão é Brousseau, afirmando que,

> *Brosseau (1983) retoma as ideias de Bachelard sobre obstáculos e amplia esta discussão, colocando que existem diferentes origens para os obstáculos, o que leva a formas diferentes de tratamento didático: (1) os de origem ontogenética, que aparecem pelas limitações do sujeito a um momento do seu desenvolvimento; (2) os de origem didática, que dependem de escolhas didáticas ou de um projeto educativo, resultantes, assim, de transposições didáticas; (3) os de origem epistemológica, que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico dos conhecimentos e cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente no saber transmitido. Perrin-Glorian (1995) acrescenta a esta lista o obstáculo de origem cultural como aquele que corresponde a certas maneiras de pensar social e culturalmente. (PESSOA, 2009, p. 35).*

Assim, é fundamental que se faça a identificação da origem do obstáculo e, a partir deste diagnóstico, que se possa aplicar um tratamento didático apropriado a cada situação. Para um mesmo problema, alunos podem apresentar obstáculos de origens diferentes, e se não detectadas corretamente, é provável que se aplique a mesma intervenção em contextos que exigiam tratamentos diferentes.

De acordo com Brousseau (1983), o erro não é obra do acaso, ele tem raízes, tem suas origens,

> *O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos. (BROSSEAU, 1983, p. 171 Apud CURY, 2007, p. 33).*

Dessa forma os erros podem se manifestar como obstáculos, é o caso da apresentação dos números racionais aos estudantes, quando os professores tendem a estender aos racionais as características dos números naturais, constituindo assim um obstáculo que precisa ser compreendido pelo professor para intervir de forma eficaz no ensino e na aprendizagem.

Mesmo compreendendo que alguns erros possam se encontrar associados a obstáculos, nossa pesquisa está centrada somente na interpretação do erro do aluno por parte do professor. Portanto, os obstáculos não fazem parte do nosso objeto de estudo.

Ainda de acordo com Cury (2007), temos a contribuição de Borasi (1996), que no final do século XX desenvolve diversos trabalhos imprescindíveis àqueles que utilizam o erro como estratégia para a construção da aprendizagem. Borasi (1996), na busca de uma matemática com um enfoque mais humano e construtivista, vai alicerçar-se nas obras de Lakatos, Kuhn e Kline. É a partir deles que ela sedimenta seus estudos sobre história e filosofia das ciências que se tornam fundamentais para a compreensão do significado dos erros. Borasi (1996),

> *Considera que as contribuições filosóficas que buscou nesses autores e trouxe para a análise de erros permitem responder a questões desafiadoras, tais, como: "o que aconteceria se aceitássemos esse resultado? [ou] em que circunstâncias esse resultado pode ser considerado correto?" (BORASI, 1996, p. 29).*

As pesquisas de Borasi (1996) serão norteadas por estas duas perguntas, é a partir delas que se busca o significado dos erros bem como a possibilidade de construir conhecimento utilizando as informações fornecidas pelos alunos. Nesse contexto, o estudante é estimulado a argumentar, a raciocinar, a discutir suas estratégias resolutivas o que permitirá ao professor um diagnóstico fidedigno para as intervenções adequadas no ensino e na aprendizagem.

Para responder perguntas, os alunos serão instigados a justificar se o resultado encontrado tem alguma coerência com o problema, situação que implica, necessariamente, a argumentação ou a aceitação de um resultado não apropriado para o caso. Qualquer que seja a conclusão, os alunos estarão construindo uma matemática significativa, que prima pelo raciocínio e não apenas pela memória. Confrontar respostas exige, no mínimo, a capacidade de analisar a adequação ou não de um resultado e isso desenvolve a habilidade de raciocinar.

Assim, Borasi (1996 Apud Cury) propõe a utilização do erro como estratégia pedagógica, questionando se o resultado encontrado tem validade na resolução de determinado problema ao invés de descartá-lo. Ela enfatiza ainda que

> *Um erro bastante comum (e segundo ela, pesquisado por vários educadores matemáticos) é ilustrado por $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}=\frac{9}{11}$. Ao invés de tentar eliminar o erro, re-explicando o processo, recitando a regra da adição de frações e solicitando aos alunos que refaçam o cálculo – o que se mostra ineficiente na maior parte das vezes, especialmente em relação aos erros resistentes -, ela sugere que o professor, por exemplo, proponha aos alunos investigar se há algumas frações em que essa "regra" da adição, por eles inventada, funcione. (BORASI, 1996, p. 8 Apud CURY, 2007, p. 36).*

Dessa forma, nos parece haver uma inversão da prática pedagógica corrente, o erro passa a ser elemento norteador do ensino e da aprendizagem, ou seja, ele passa a ser referencial, dando origem a debates e discussões na sala de aula e favorecendo o desenvolvimento e a construção de raciocínio genuinamente matemático.

Não podemos deixar de citar outra contribuição bastante significativa dessa autora que, segundo Cury (2007), chama de "taxionomia de uso dos erros como trampolins para a pesquisa", organizada a partir de um quadro, que foi concebido inicialmente em 1987 e reformulado nos anos seguintes (1988 e 1996). Apresentaremos aqui o quadro mais atual com algumas simplificações e alterações feitas por Cury (2007).

Objetivo da aprendizagem	**Nível de discurso matemático**		
	Realização de uma tarefa matemática específica	**Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático**	**Compreensão sobre a natureza da matemática**
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de conteúdos

			específicos.
Descoberta	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar potenciais enganos.	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a *insights* e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.

Quadro 5 – Taxionomia de Borasi para os usos dos erros. (Fonte: Borasi, 1996)

Assim, Borasi (1996) diversifica as possibilidades das análises dos erros, ampliando os objetivos bem como o nível de discurso matemático. Nesse sentido, Cury coloca que,

> *Em um determinado momento, um professor pode estar interessado apenas em remediar os erros que detecta nas produções de seus alunos, mas, posteriormente, ou com outra turma, pode encontrar um resultado intrigante que o leva a aprofundar-se no conteúdo matemático, ou mesmo a propor a seus alunos que se engajem com ele na pesquisa. (CURY, 2007, p. 38).*

Sem dúvida, o trabalho de Borasi (1996) é um marco no estudo da análise dos erros, ela consegue aliar matemática, história e filosofia para obter um tratamento didático às respostas dos alunos, questionando o porquê dos resultados, fazendo com que eles busquem raciocinar e compreendam as relações que estão implícitas e explícitas em cada problema. Assim, não podemos falar em análise de erros em matemática sem nos referirmos às pesquisas de Borasi, que, inegavelmente, trouxeram uma enorme contribuição para o ensino e aprendizagem da matemática.

Peng e Luo (2009) desenvolveram uma estrutura para investigar o conhecimento do professor de matemática usando a análise de erros, partindo de duas categorias de conhecimento do professor propostas Shulman (1986), conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo. Os autores propuseram uma tabela de dupla entrada criando novas categorias, a natureza do erro matemático que está dividida em quatro dimensões (matemática, lógica, estratégica e psicológica) e as fases de análises de erros que envolvem a identificação, a interpretação, a avaliação e a remediação. A seguir quadro com as categorias criadas por Peng e Luo.

Dimensão	Categorização analítica	Descrição
Natureza do erro matemático	Matemático	Confusão de conceitos e características, negligência no uso de fórmulas e teoremas.
	Lógico	. Argumento falso, reorganização do conceito, classificação inadequada, argumentação circular, transformação equivalente.
	Estratégico	Não consegue distinguir do padrão, conceptualização incompleta, pensamento inverso deficiente, não consegue transformar o problema.
	Psicológico	Deficiência de mentalidade, estágio mental inadequado.
Etapas de análises do erro	Identificação	Conhecer a existência do erro matemático.

	Interpretação	Interpretar a racionalidade subjacente ao erro matemático.
	Avaliação	Avaliar os níveis de desempenho dos alunos de acordo com o erro matemático
	Remediação	Apresentar estratégia de ensino para eliminar o erro matemático.

Quadro 6 – Quadro proposto por Peng e Luo (2009) para análise do conhecimento dos professores sobre os erros matemáticos (*Tradução nossa*)

Segundo Cury (2012) a estrutura criada por Peng e Luo traz semelhanças com a taxonomia de uso dos erros de Borasi , que é uma tabela de dupla entrada e relaciona níveis de discurso matemático e situações de aprendizagem.

Podemos citar ainda os trabalhos dos soviéticos Kuzmitskaya e Menchinskaya, ambos na década de 60, bem como os dos alemães Weiner (1922), Kiessling (1925), Sclaac (1968), Gluck (1971) e Pippig (1977), que pesquisaram notadamente as dificuldades de resolução de problemas aritméticos, investigando a causa dos erros no processo ensino e aprendizagem.

Outros pesquisadores, também, evidentemente contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento da análise dos erros em matemática, mas vamos tomar como referência para entendermos a sua evolução desde o seu nascedouro Thorndike no início do século XX, passando por Hadamard, Krutetskii, Newell e Simon, e chegando à década de 1980 com Brousseau e Borasi. Estas pesquisas sem dúvida são os pilares fundamentais dos estudos contemporâneos que envolvem a análise de erros em matemática.

Até 1990, de acordo com Fiorentini (1994), havia pouca produção centrada no estudo dos erros no Brasil. De 204 dissertações e teses sobre educação matemática analisadas por esse autor, somente 9 apresentaram "alguma preocupação relacionada aos erros, problemas e dificuldades presentes no processo ensino-aprendizagem da matemática" (FIORENTINI, 1994, p. 131).

É bem provável que tenha havido no país uma disseminação desses estudos, levando em consideração a adoção do socioconstrutivismo como prática pedagógica corrente na maioria dos sistemas de ensino público, o estudo do erro se torna mais frequente.

De acordo com De La Torre *et al.* (1994, p. 11), “o homem tem errado e continuará errando; porém, é sua capacidade para aprender com os erros, com os fracassos, o que o torna diferente das demais espécies”. Este autor ainda afirma que “erro e êxito são duas faces da mesma moeda de muitos valores culturais”. Logo, percebe-se a valorização que o autor atribui ao erro, colocando-o no mesmo patamar do acerto. Ele ainda aponta que “o estudo do erro surge, primeiramente, como teoria físico-matemática; depois, como princípio do construtivismo e, posteriormente, como estratégia didática (DE LA TORRE *et al*., 1994, p.12).

4.2 O professor e a compreensão do erro

Historicamente, o professor tem usado o erro no ensino e na aprendizagem no sentido apenas de quantificar quanto o estudante sabe ou não sabe de um determinado conteúdo. É comum os professores atribuírem às produções dos alunos adjetivos como certo ou errado. Não há espaço para o erro ou acerto parcial. Não existe uma preocupação com as fases da resolução de um problema, e sim com o resultado final. Assim, a prática pedagógica que utiliza o erro apenas no contexto do certo ou errado, falso ou verdadeiro resume-se tão somente à hierarquização dos alunos. Logo, essa concepção de erro não favorece absolutamente em nada a aprendizagem, uma vez que não permite analisar o funcionamento dos processos mentais, ou seja, como é que os estudantes aprendem. Neste contexto, Starepravo (2009) afirma que,

> *Aprender é algo complexo que não pode ser medido por quantidade de respostas corretas. É tarefa que ninguém pode realizar pelo outro, é algo absolutamente pessoal, mas que ocorre principalmente mediante a troca com os outros. (STAREPRAVO, 2009, p. 14).*

Dessa forma, fica evidente a necessidade de se considerar o percurso do aluno na aprendizagem, que certamente será marcado por muitos erros, muitas dúvidas, mas que são inerentes à atividade do aprender.

A história da educação no Brasil, ao longo de décadas, foi marcada por um caráter seletivo e discriminatório. Se no princípio o gargalo era o ingresso para a alfabetização, hoje ele se concentra no ensino superior, uma vez que o número de estudantes que concluem o ensino médio é bem superior ao número de vagas ofertadas nas universidades. Neste contexto, a escola teve sempre uma postura seletiva e obviamente surgiram alguns instrumentos para legitimar essa prática. Sem dúvida, um importante instrumento para selecionar é a avaliação pautada apenas no seu aspecto classificatório, utilizando o erro somente para definir quem avança na escolaridade.

A partir dos anos 80, o Brasil começa a discutir alternativas à concepção tradicional de ensino com destaque para o construtivismo. É a partir daí, mesmo de forma ainda muito tímida, que o erro começa a ser discutido como um aspecto importante na construção da aprendizagem escolar. Segundo Pinto (2000)

> *Uma decorrência do princípio construtivista é o fato de o erro apresentar-se como uma oportunidade didática para o professor organizar melhor seu ensino a fim de criar situações apropriadas para o aluno superar seus erros e apropriar-se dos conhecimentos necessários à sua cidadania. (PINTO, 2000, p. 11).*

Assim, na concepção construtivista é natural que o erro comece a ser tratado com outro enfoque, ele agora não serve apenas para aferir e certificar se o estudante aprende ou não aprende, mas adquire o *status* de elemento construtor da aprendizagem.

Mesmo com a implantação do construtivismo em grande parte dos sistemas públicos de ensino, a mudança do professor não se dá de forma automática. Nossos professores, que ignoraram os erros dos estudantes como subsídios para a aprendizagem e os utilizaram apenas para classificá-los, não vão repentinamente abandonar suas convicções, aqueles que têm postura tradicional tendem a conservá-la, pelo menos a princípio.

Precisamos considerar também toda a formação e prática desse professor que, a partir das reformas educacionais da década de 80, é impelido a dotar teoricamente novas concepções e práticas pedagógicas diferentes daquelas utilizadas e conhecidas por ele.

Vale salientar que este novo modelo de concepção pedagógica não foi implantado paulatinamente. Muitos estados e municípios “decretaram” o construtivismo como prática pedagógica oficial, sem que houvesse um debate capaz de justificar e referendar a escolha. Assim, rapidamente todos os educadores classificavam-se como construtivistas, mesmo sem mudanças significativas na prática pedagógica, pois era bem mais confortável do que ser classificado como “professor tradicional”. Durante alguns anos houve um vácuo na prática docente, os professores perderam sua identidade, não eram mais tradicionais, mais por imposição do que convicção, tampouco eram construtivistas, faltava formação e compreensão para aderir à nova teoria da aprendizagem.

Mesmo não havendo diálogo para a implantação do construtivismo, é decorrente do seu estabelecimento que vai surgir uma discussão importante acerca da psicogênese. É a partir do desenvolvimento dos processos mentais que podemos pensar em compreender a importância do erro. E de acordo com Pinto (2000), o erro perde a sua função repressora e passa a ser visto como um conhecimento.

> *Se numa avaliação seletiva, o erro tem um papel delimitado pelos resultados, ao perder a função controladora, ele passa a ocupar um papel relevante na aprendizagem: o erro é um conhecimento; ele mostra o caminho do acerto que já está ali implícito. (PINTO, 2000, p. 12).*

Temos, então, um diagnóstico, já sabemos o que o aluno conhece e é o subsídio que permitirá ao professor planejar e tomar decisões acertadas a fim de possibilitar a construção do conhecimento.

Mesmo com todas estas discussões a respeito do erro, faz-se necessário entender que estamos tratando de um assunto complexo, em que estão envolvidas variáveis que nem sempre a formação do professor contempla. Shulman (1986) estabelece três categorias de conhecimento indispensáveis para a atividade docente; o conhecimento do conteúdo, o conhecimento curricular e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Cury (2012), para analisar erros cometidos por alunos, propõe a nomenclatura “o conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros”, e aponta alguns elementos indispensáveis para uma análise de erro profunda que atenda o problema em todo seu contexto. Assim, ela define que,

> *Portanto, o conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros exige muito mais do que o simples conhecimento do conteúdo ou*

> *da pedagogia. Esse conhecimento deve incluir uma compreensão do que faz aquele determinado conteúdo fácil ou difícil; das concepções errôneas que os alunos têm sobre o conceito ou sobre suas operações e propriedades; das formas de auxiliar os alunos a desconstruir tais concepções. (CURY, 2012, p. 37).*

Como vemos, utilizar o conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros não é tarefa fácil. Já não seria se dependesse exclusivamente do conteúdo e da pedagogia, pois sabemos da debilidade da formação inicial e da formação continuada, que nem sempre atende a questão pedagógica e o desenvolvimento dos conteúdos. Mas não é apenas isso, é também conhecer as características de cada conteúdo, compreendendo aquilo que os torna fácil e o que os torna difícil, é também compreender concepções errôneas dos alunos sobre conceitos e propriedades, além de ser capaz de apontar caminhos para os alunos no sentido de desconstruir concepções já enraizadas que não são corretas.

5 METODOLOGIA

Descreveremos agora o processo metodológico que desenvolvemos em nossa pesquisa. Vamos delimitar o campo de pesquisa, os instrumentos, os sujeitos e o percurso realizado. Nosso trabalho tem como objetivo **Investigar como os professores interpretam os erros dos alunos em relação aos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental.**

5.1 O Campo de pesquisa

O nosso campo de pesquisa foi o município de Jaboatão dos Guararapes e a escolha se deu pelos baixos índices de aprendizagem verificados em matemática, nos anos iniciais do ensino fundamental (4ª série/5º ano), diagnosticados por meio de avaliações de larga escala como SAEPE e Prova Brasil, avaliações aplicadas em 2011 e os resultados divulgados em 2012. Na Prova Brasil o IDEB Nacional foi 5,0 e nas dependências administrativas estadual e municipal os índices registrados foram 5,1 e 4,7 respectivamente, enquanto o município de Jaboatão dos Guararapes atingiu somente 3,9, em uma escala que vai de 0 a 10. O quadro abaixo mostra o IDEB no âmbito das escolas federais, estaduais, municipais e do município de Jaboatão dos Guararapes no período de 2005 a 2013.

Dependência Administrativa	**IDEB Observado**				
	2005	**2007**	**2009**	**2011**	**2013**
Federal	3,8	4,2	4,6	5,0	5,2
Estadual	3,9	4,3	4,9	5,1	5,4
Municipal	3,4	4,0	4,4	4,7	4,9
Jaboatão dos Guararapes	2,8	3,1	3,8	3,9	4,3

Quadro 7 – IDEB Apurado na 4ª Série/5º Ano do Ensino Fundamental – Matemática. (Fonte: BRASIL/INEP, 2014)

Já no SAEPE o município apresentou uma proficiência média de 184,0 contra 197,1 das escolas da rede estadual, 185,7 das escolas municipais no estado e 187,0 das escolas públicas de Pernambuco em uma escala que varia de 0 a 500. O quadro a seguir traz a série de dados verificada no período de 2008 a 2013.

Dependência Administrativa	Proficiência Média do SAEPE					
	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rede Estadual	172,7	180,5	181,2	197,1	197,6	198,8
Rede Municipal	164,5	172,0	171,7	185,7	188,5	187,0
Rede Pública Estadual	165,9	173,3	172,9	187,0	189,3	187,7
Jaboatão dos Guararapes	167,3	174,6	174,5	184,0	184,1	187,0

Quadro 8 – Proficiência Média do SAEPE na 4ª Série/5º Ano do Ensino Fundamental – Matemática. (Fonte: PERNAMBUCO/CAEd 2013)

De acordo com o quadro a seguir, que explicita os padrões de desempenho da aprendizagem em Matemática, e conforme a escala de proficiência utilizada pelo SAEPE, podemos perceber que o município se encontra no padrão de desempenho Elementar II, enquanto as outras redes públicas estão no padrão de desempenho Básico.

Padrões de Desempenho	Elementar I	Elementar II	Básico	Desejável
Escala	Até 150	De150 a 185	De185 a 220	Acima de 220

Quadro 9 – Padrões de Desempenho Utilizados pelo SAEPE. (Fonte: PERNAMBUCO/ CAEd 2013)

Para PERNAMBUCO (2013) estudantes nos padrões, Elementar I, Elementar II, Básico e Desejável, na 4ª série/5º ano, nos números racionais desenvolvem as seguintes habilidades:

> *Elementar I – reconhecem a quarta parte de um todo em representações gráficas.*
> *Elementar II – associam a representação simbólica de uma fração à ideia de parte e todo; resolvem problemas com adição e subtração de números racionais, na representação decimal, contextualizados em situações de compra de produtos e de medições; em relação à porcentagem, associam uma representação fracionária simples à sua representação percentual.*
> *Básico – reconhecem frações de quantidades contínuas, relacionando representações simbólicas às representações pictóricas e reconhecem a representação simbólica de fração de quantidades discretas em situação cotidiana; resolvem problemas de adição e subtração que envolvem números racionais em sua representação decimal, contextualizados em situações de compra de produtos e de medições; no trabalho com relações de ordem identificam e associam números a pontos na reta numérica na sua*

> *representação decimal; em relação à porcentagem, determina porcentagem em situação de compra com desconto.*
> *Desejável – reconhecem a representação simbólica de fração de quantidades discretas, contextualizadas em situações cotidianas; conseguem também, resolver problemas de multiplicação que envolvem a ideia de proporcionalidade em sua forma decimal, contextualizados em situação de compra de produtos; Em relação à porcentagem, assim como no Padrão anterior, resolve problemas contextualizados em situação cotidiana, determinando 50% de uma quantidade. (PERNAMBUCO/CAEd, 2013, p. 38 – 48).*

O desenvolvimento das habilidades é cumulativo, assim o padrão de desempenho seguinte incorpora aquelas já consolidadas no padrão de desempenho anterior.

Como a proficiência média foi 184,0, o município encontra-se no padrão de desempenho Elementar II, que vai de 150 a 185 e, como vemos, as habilidades desenvolvidas ainda são muito incipientes, comparadas ao grau de escolarização dos estudantes.

A aprendizagem média verificada especificamente nos números racionais por meio de itens divulgados pelo SAEPE e Prova Brasil, a partir de 2009, revela que os estudantes têm um acerto médio de aproximadamente 30%. Esse percentual revela grandes dificuldades de compreensão do conteúdo. Para o SAEPE esses alunos encontram-se no nível elementar II que representa uma grande defasagem na aprendizagem prevista para essa etapa de escolarização. Assim, resolvemos centrar nossa pesquisa nos números racionais.

5.2 Sujeitos da pesquisa

Para atendermos ao objetivo da pesquisa investigamos os professores da rede pública municipal de Jaboatão dos Guararapes que lecionam no 4º e no 5º ano do ensino fundamental, pois o trabalho com os números racionais, mesmo iniciando-se no 3º ano do ensino fundamental, é nesta fase de escolarização que se amplia e se desenvolvem os principais conceitos.

A rede escolar de Jaboatão dos Guararapes segue a lógica administrativa do município que é a divisão em regionais. Seu parque escolar é composto por 131 escolas agrupadas em sete regionais que ofertam o ensino público a 54 935 estudantes, na educação infantil e no ensino fundamental (anos iniciais e finais).

Deste total de escolas, 123 ofertam o ensino para os anos iniciais do ensino fundamental, atendendo a 5 897 alunos do 4º ano e a 6 043 alunos no 5º ano.

A Secretaria de Educação do município conta com um efetivo de 2 596 professores, sendo 322 na educação infantil, 1 388 nos anos iniciais do ensino fundamental e 886 nos anos finais do ensino fundamental. Dos 1 388 que atuam nos anos iniciais do ensino fundamental, temos 461 especificamente atendendo aos 4º e 5º anos.

5.3 Descrição do percurso metodológico

A ideia inicial era construir um instrumento para investigar o conhecimento dos professores sobre os erros dos alunos, composto por itens do SAEPE e da Prova Brasil, itens já divulgados, contemplando todas as expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco, para o 5º ano do ensino fundamental referente aos números racionais. Depois de uma análise mais acurada, encontramos dois obstáculos que nos fizeram alterar o pensamento original. O primeiro é que os itens dessas avaliações não revelam exatamente o erro dos alunos, uma vez que eles vão optar por escolhas já pré-determinadas, que são os distratores e o gabarito, mas não é, necessariamente, uma resposta espontânea dos estudantes; portanto, não explicita o percurso de resolução, que nos parece revelar a essência do erro. O segundo é que, ao analisarmos as matrizes de referência do SAEPE e da Prova Brasil, constatamos que seus descritores não avaliam algumas das expectativas de aprendizagem relativas aos números racionais (já citadas no capítulo II), o que limitaria muito a nossa pesquisa naquilo que estamos propondo.

Assim, construímos e aplicamos um instrumento com questões abertas, a partir de adaptações de itens já publicados pelo SAEPE e Prova Brasil e criamos outros para contemplar todas as expectativas de aprendizagem dos PCPE, relativas aos números racionais para o 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental, com o objetivo de identificar não apenas o erro dos estudantes, mas todo o caminho por eles percorrido até chegar à resposta final. Fizemos também a análise prévia das respostas dos alunos.

O instrumento foi aplicado em sete escolas, uma por regional, e avaliamos 324 alunos, conforme distribuição no quadro a seguir:

Escola	Regional	Número de Alunos
A1	1	28
A2	2	28
A3	3	46
A4	4	66
A5	5	46
A6	6	37
A7	7	69
Total		**324**

Quadro 10 – Distribuição dos alunos avaliados por escola

De posse dos resultados, utilizamos os erros mais frequentes dos alunos para construirmos o questionário do professor. Esse instrumento permitiu que investigássemos como os professores interpretam os erros dos alunos. O quadro a seguir mostra a distribuição do total de professores do 4º e 5º ano por regional, bem como o número de professores investigados.

Regional	Professores do 4º Ano	Professores do 5º Ano	Professores do 4º + 5º Anos	Professores Pesquisados
1	50	55	105	48
2	38	40	78	35
3	13	11	24	11
4	21	23	44	20
5	36	37	73	33
6	39	36	75	34
7	32	30	62	28
Total	**229**	**232**	**461**	**209**

Quadro 11 – Distribuição total dos professores e professores investigados por ano e por regional

O município tem um total de 461 professores no 4º ou no 5º ano do ensino fundamental e investigamos, por meio de um questionário, 209 deles, sendo 103 do 4º ano e 106 do 5º ano, o que representa aproximadamente 45% do total de professores da rede que atuam nessa etapa de escolarização. Fizemos uma distribuição equilibrada tanto nos anos (4º e 5º) como nas regionais, respeitando assim o princípio da proporcionalidade. Entendemos ser uma amostra bastante representativa e bem distribuída, e que dará conta de responder ao objeto de estudo. Ao final da aplicação do instrumento fizemos uma discussão com os professores a respeito dos erros cometidos pelos alunos, que foi gravada em áudio e filmada.

Os questionários foram aplicados aos professores de forma individual, para que não houvesse interferência nos resultados e, assim, pudéssemos preservar as particularidades das respostas. Os questionários tiveram o objetivo de investigar como os professores descrevem os erros dos alunos e suas possíveis causas.

A discussão coletiva teve como objetivo elucidar possíveis dúvidas nas respostas atribuídas ao questionário, situações em que não é possível compreender com clareza o raciocínio exposto pelos professores no instrumento. Todo o processo de coleta de dados com os professores foi gravado em vídeo e em áudio.

Para analisar os resultados agrupamos as respostas dos sujeitos em categorias que foram elaboradas *a posteriori*, ou seja, a partir das respostas dos sujeitos.

Após a análise do instrumento aplicado aos estudantes (anexo 1) selecionamos 05 (cinco) itens (5, 7 e 11 do instrumento A e 1 e 8 do instrumento B) para compor o instrumento que foi aplicado aos professores. A escolha dos itens atende a dois critérios, primeiro, o erro mais frequente ter sido maior que 15%, isso significa que do total de respostas incorretas em cada item mais de quinze por cento dos alunos optaram pelo mesmo mecanismo de resolução e que pudesse favorecer identificação e interpretação de erros; o segundo a diversificação dos registros de representação semiótica, de acordo com os estudos de Duval (2009), contemplando o registro figural, o registro simbólico e o registro na língua natural, como podemos observar no quadro a seguir:

Número do item	Tipo de registro	Percentual de erro
1	Registro simbólico (fracionário)	23,0
2	Registro simbólico (decimal)	62,8
3	Registro simbólico (percentual)*	24,1
4	Registro na língua natural	17,8
5	Registro figural (contínuo)	16,6

Quadro 12 – Tipo de registro e percentual de erro em cada item

Das 15 (quinze) expectativas de aprendizagem para o 5º ano, referentes aos números racionais, propostas pelos PCPE, concentramos nossa pesquisa em 05 (cinco) delas, definidas pelos critérios citados anteriormente e que estão elencadas no quadro a seguir.

Número do item	Número da expectativa	Expectativa
1	5	Relacionar números racionais (representações fracionárias e decimais) positivos a pontos na reta numérica e vice e versa.
2	11	Comparar e ordenar números na representação decimal, usados em diferentes contextos.
3	9	Resolver e elaborar problemas envolvendo a determinação de porcentagens (por exemplo: determinar 10% de 1 000 reais. (10%, 5%, 20%, 25%, 50%, 75% e 100%)).
4	2	Perceber que uma unidade corresponde a 10 décimos ou a 100 centésimos ou a 1000 milésimos.
5	8	Associar a representação simbólica de uma fração às ideias de parte de um todo e de divisão.

Quadro 13 – Expectativas de aprendizagem que compõem o instrumento de pesquisa

O questionário (anexo 2) foi estruturado contendo duas partes distintas, a primeira caracterizando os sujeitos quanto ao sexo, idade, formação inicial, formação continuada e tempo de serviço. A segunda parte contemplou os dois erros mais comuns em cada uma das cinco questões já mencionadas, e o professor respondeu duas perguntas, uma sobre a adequação da resposta dada pelos alunos, categorizadas em inadequada, pouco adequada, adequada e muito adequada e a outra justificando o porquê da sua escolha por uma das alternativas citadas, descrevendo o percurso da resolução e as possíveis hipóteses para os erros. Imediatamente após a conclusão do questionário, foi feita uma discussão coletiva sobre as hipóteses para as estratégias utilizadas pelos alunos.

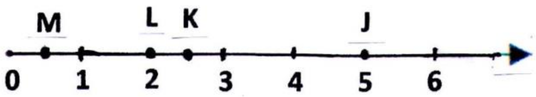
5.4 Descrição e análise do instrumento de pesquisa

Descreveremos agora o instrumento da pesquisa respondido pelos sujeitos, apresentando a caracterização dos indivíduos e as questões construídas a partir dos registros de representação semiótica, segundo os estudos de Duval (1999), contemplando o registro figural (contínuo), registro simbólico (numérico fracionário, numérico decimal e numérico percentual) e o registro na língua natural. Apresentaremos a caracterização do item, nossas hipóteses para os erros dos alunos e o percentual de acerto e de erros das duas respostas incorretas mais frequentes. Os protocolos dos alunos utilizados na construção dos itens quanto à categorização das respostas em inadequada, pouco adequada, adequada e muito adequada se enquadram todos na categoria inadequada. Essa escolha foi proposital, no sentido de nos potencializar investigar a compreensão que os professores têm sobre o erro.

5.4.1 Análise dos Itens

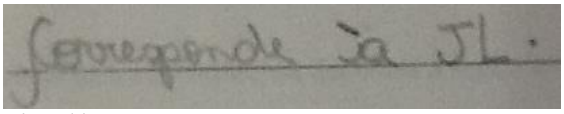
Item

1. O número $\frac{5}{2}$ corresponde a que ponto assinalado na reta numérica?



Resposta 1

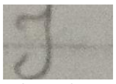
Protocolo:



A3 T1 09

Resposta 2

Protocolo:



A3 T1 05

Caracterização do item

O item contempla como registro de partida o simbólico (numérico fracionário) e exige uma conversão para o registro figural como registro de chegada. A fração em questão apresenta o significado de ponto na reta numérica.

Percentuais de acerto e erros e possíveis hipóteses para as respostas

Neste item cerca de 9% dos estudantes conseguem relacionar a fração $\frac{5}{2}$ ao ponto K, que na reta numérica em discussão são correspondentes. As principais respostas erradas verificadas foram o ponto JL apresentada por 23% dos alunos e o ponto J que foi atribuído como solução da questão por 22% dos estudantes. A soma dos percentuais das duas respostas incorretas mais frequentes atinge 45% do total; como foram citadas outras respostas esses valores são bastante significativos.

Em ambos os casos os estudantes não conseguem enxergar a fração com o significado de número e raciocinam como se fossem dois números naturais independentes. É provável que a supervalorização dos termos numerador e denominador e a ausência do trabalho com as frações fundamentais, ou seja, aquelas que têm numerador um, nas atividades em sala de aula, tenham contribuído de forma direta e significativa na incompreensão do significado de frações.

Item

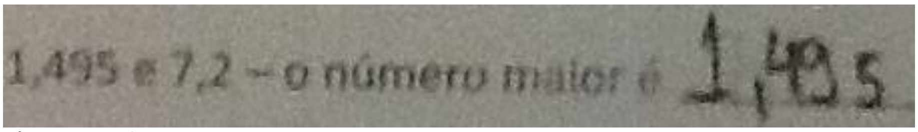
2. Observe os pares de números decimais a seguir e diga qual deles é o maior:

a) 1,495 e 7,2 – o número maior é ________________

b) 15,7 e 0,9999 – o número maior é ______________

Resposta - letra a

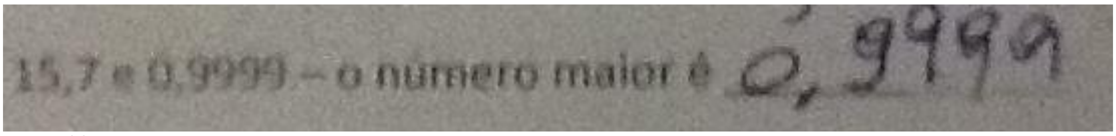
Protocolo:


1,495 e 7,2 – o número maior é 1,495

Aluno A4 T1 05

Resposta – letra b

Protocolo:


15,7 e 0,9999 – o número maior é 0,9999

A5 T1 02

Caracterização do item

O item aborda o registro simbólico (numérico decimal) e não é necessário fazer conversão para outro registro. Para resolver a questão basta comparar décimos de milésimos, milésimos, centésimos, décimos e a parte inteira de cada número.

Percentuais de acerto e erros e possíveis hipóteses para as respostas

Neste item o percentual de acerto nas letras (a) e (b) é de 21 e 25 por cento respectivamente, ou seja, aproximadamente um quarto dos estudantes consegue fazer a ordenação corretamente. Já as respostas incorretas, na letra (a) 62% dos alunos afirmaram que o número 1,495 é maior que o número 7,2 enquanto que na letra (b) 63% dos estudantes acreditaram que o número 0,9999 seja maior do que o número 15,7. Como podemos perceber nas duas situações, mais de 60% dos alunos não acertaram a questão, mesmo tendo que optar apenas entre duas alternativas (uma correta e a outra incorreta). Neste item apresentamos em cada pergunta apenas um protocolo com o erro mais frequente, pois a questão não favoreceu a pluralidade de respostas.

Os números racionais são uma ampliação dos números naturais, mas algumas características do segundo não se aplicam ao primeiro. Geralmente, o trabalho de comparação de números naturais é concebido em sala de aula a partir da informação "que nos naturais o maior número é aquele que possui mais algarismos". Como raramente se trabalha a construção de conceitos e nem sempre há clareza em qual(is) conteúdo(s) determinada afirmação se aplica, muito provavelmente os alunos estão estendendo aos números racionais características próprias dos números naturais.

Item

3. Um professor de educação física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Esse percentual representa quantos alunos?

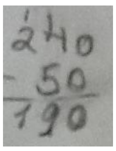
Resposta 1

Protocolo:

A7 T2 09

Resposta 2

Protocolo:



A2 T2 12

Caracterização do item

Neste caso é necessário entender que 50% equivale a metade do todo que pode ser representado dentre outras formas por $\frac{1}{2}$, ou 0,5 e por meio de uma multiplicação ou divisão é possível estabelecer a solução.

Percentuais de acertos e erros e possíveis hipóteses para as respostas

Nesta questão 31% dos estudantes conseguem determinar a porcentagem corretamente, estabelecendo como resposta o número 120. As duas respostas com maiores índices de erros (50% e 240 – 50 = 190), apresentaram percentuais relativamente altos, 24% e 19% respectivamente, considerando a diversidade das soluções apresentadas pelos alunos.

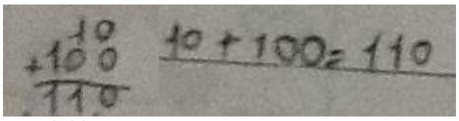
A representação de números racionais na forma de porcentagem é pouco explorada em sala de aula, assim é provável que os alunos não compreendam o problema e atribuíram como resposta um dado do problema (50%). Na segunda resposta, os estudantes recorreram a uma subtração desconsiderando o símbolo de por cento e entendendo 50% como numero natural. É possível que a ênfase do ensino aos problemas de estruturas aditivas e multiplicativas com os números naturais favoreça a cristalização de um falso paradigma que consiste em resolver todas as atividades matemáticas por meio de uma operação envolvendo os números naturais.

Item

4. Que quantidade obtemos se juntarmos dez décimos? E se juntarmos cem centésimos?

Resposta 1 – letra a

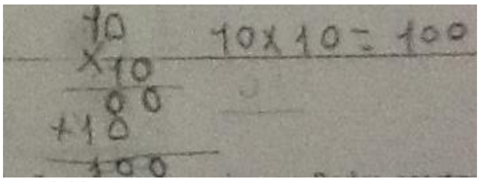
Protocolo:



A4 T2 09

Resposta 2 – letra a

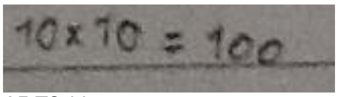
Protocolo:



A4 T2 09

Resposta 1 – letra b

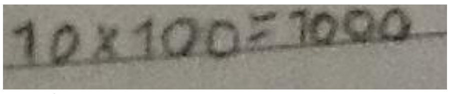
Protocolo:



A5 T2 11

Resposta 2 - letra b

Protocolo:



A5 T2 11

Caracterização do item

O item é expresso na língua natural e requer a compreensão do estudante que $\frac{1}{10}$ ou 0,1 e $\frac{1}{100}$ ou 0,01 são algumas das possibilidades de representação de um décimo e um centésimo respectivamente. Envolve também entender que 1 inteiro é formado por 10 décimos, 100 centésimos ou 1000 milésimos. E a resolução da questão se dá por meio de uma adição ou multiplicação.

Percentuais de acerto e erros e possíveis hipóteses para as respostas

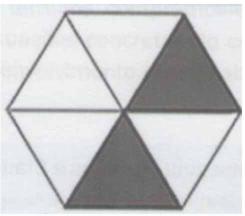
Este item é composto por duas perguntas e ocorreu uma diversificação enorme de respostas. O índice de acerto foi extremamente baixo, apenas 3% dos alunos acertaram as perguntas, determinando 1 como solução. Na primeira parte, as respostas incorretas mais comuns representaram 18% e 12% respectivamente. Já para a segunda pergunta os percentuais registrados foram 17 e 11 por cento.

A troca de bases no sistema de numeração decimal compreendendo os números naturais é um conteúdo pouco explorado em sala de aula, até se informa aos alunos que 1 dezena é composta por 10 unidades, 1 centena é constituída por 100 unidades ou 10 dezenas e 1 unidade de milhar é equivalente a 1000 unidades, 100 dezenas ou 10 centenas. Mas não parece ser este um conhecimento consolidado, tomando como referência os resultados de avaliações em larga escala que apontam as dificuldades dos estudantes em resolver operações com reserva de estruturas aditiva e multiplicativa. Assim, o estabelecimento das relações entre unidade, dezena, centena e unidade de milhar pelos alunos têm se revelado extremamente frágil.

Se as trocas não são enfatizadas nos números naturais, que sem dúvida são números que os professores se sentem mais a vontade e, consequentemente, são mais explorados, o contexto das trocas com os números racionais é ainda mais sofrível. A ausência desse conhecimento se cristaliza nas respostas dos alunos que utilizam os números naturais para responder o item e o índice de acerto não atinge 5%. É muito provável que os erros estejam relacionados ao desconhecimento do valor de décimos e centésimos e, para responder a questão, os alunos mobilizam o conhecimento já existente, associando décimos a dez e centésimos a cem.

Item

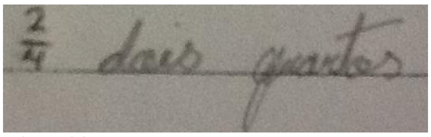
5. A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais.



A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

Resposta 1

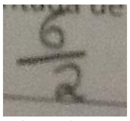
Protocolo:



A2 T1 02

Resposta 2

Protocolo:



A2 T1 05

Caracterização do Item

Este item tem como registro de partida a representação figural contínua e como registro de chegada a representação simbólica (numérico fracionário)

Percentuais de acerto e erros e possíveis hipóteses para as respostas

Nesse item 44% dos estudantes não apresentaram dificuldades e estabeleceram a conversão de registros corretamente, passando do registro figural para o registro simbólico (numérico fracionário), atribuindo como resposta $\frac{2}{6}$. Como respostas incorretas mais frequentes, 17% dos alunos apresentaram a solução $\frac{2}{4}$, neste caso eles estabeleceram a relação parte-parte, relacionando as partes sombreadas da figura com as partes brancas. Outros 16% determinaram como resposta $\frac{6}{2}$, fazendo a relação entre o todo e as partes sombreadas. Os erros relacionados à representação da fração, provavelmente estão ancorados na fragilidade da pratica pedagógica comum que situa o ensino e a aprendizagem pautados pela ênfase aos termos numerador e denominador e, ainda, à repetição exaustiva de representações de frações como, por exemplo, informar que $\frac{1}{3}$ significa uma figura dividida em três partes e uma delas pintada, ao invés de mostrar que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Tudo isso contribui para o aluno não identificar a fração como um número que representa uma quantidade, e sim “algo” composto por dois números naturais. Apesar de os alunos, por meio da dupla contagem, em muitas situações estabelecerem a resposta correta, não significa que eles compreenderam o significado do número fracionário.

De acordo com Campos et. al. (2006) o ensino dos números racionais nos anos iniciais está centrado nas frações e preferencialmente aquelas com o significado parte de um todo. No mesmo sentido, Nunes (1997) afirma que um modo muito comum de apresentar as frações às crianças é por meio de um todo dividido em partes. Assim, apesar de as frações serem introduzidas na escola geralmente a partir de uma situação que representa a ideia de parte de um todo, parece que os significados das frações são pouco explorados em sala de aula.

Assim descrevemos a metodologia utilizada nessa pesquisa e no próximo capítulo veremos as análises e a discussão dos resultados.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo vamos analisar e discutir os resultados deste estudo que teve como objetivo geral investigar como os professores interpretam os erros dos alunos em relação aos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental. Como objetivos específicos, tivemos verificar se os professores identificam como erros, respostas incorretas de alunos envolvendo os números racionais e investigar as hipóteses dos professores para os erros dos alunos no trabalho com os números racionais.

Nossa análise está ancorada na taxionomia de Borasi (1996) e no arcabouço criado por Peng e Luo (2009), mais especificamente uma tabela de dupla entrada para análise de erros. Da taxionomia de Borasi, vamos nos ater em relação ao nível do discurso matemático - realização de uma tarefa matemática específica e no que diz respeito ao objetivo da aprendizagem – a remediação. Da tabela de dupla entrada de Peng e Luo nos interessa as etapas das análises de erro (identificação e interpretação).

Chamamos de tarefa matemática específica qualquer atividade oral, textual e/ou gráfica composta por enunciado e que exige um desenvolvimento matemático.

A identificação do erro seria a detecção de respostas inadequadas para satisfazer uma tarefa matemática, resume-se apenas à localização de respostas incorretas, enquanto que a interpretação envolve a descrição do erro, trazendo elementos que explicam e fundamentam as respostas incorretas.

Na perspectiva da remediação, o professor precisa identificar o erro e, em seguida, interpretar as suas possíveis causas, o que permitirá a proposição de uma intervenção capaz de fazer o aluno realizar a tarefa com sucesso.

De forma qualitativa analisamos como os professores identificam e interpretam os erros dos estudantes e em seguida transformamos esses dados em percentual.

A análise contempla três aspectos distintos, verificar como os professores identificam respostas inadequadas de alunos, analisar como os professores interpretam erros de alunos e averiguar se a discussão coletiva esclarece algumas respostas dos professores que por si só não permitem uma análise mais profunda.

No primeiro, para identificar as respostas inadequadas, utilizamos os dados do questionário respondido pelos professores e fizemos a seguinte associação para as respostas:

Inadequada – identifica plenamente;

Pouco adequada – Identifica;

Adequada – identifica parcialmente;

Muito adequada – não identifica.

Assim, o professor que assinalou uma determinada resposta como inadequada, consideramos que ele identifica plenamente que a resposta não é ideal para a tarefa matemática.

No segundo aspecto utilizamos as repostas dos professores da questão 2 do questionário, que solicita a justificativa da resposta anterior, descrevendo a(s) possível(is) estratégia(s)/percurso utilizadas pelos alunos. A partir de cada resposta categorizamos em, interpreta plenamente, interpreta, interpreta parcialmente e não interpreta. Como parâmetro para a categorização usamos a seguinte definição:

-Interpreta plenamente – descreve com clareza o percurso da resolução do aluno e/ou a(s) possível(is) causa(s) do(s) erro(s);

-Interpreta – descreve razoavelmente o percurso da resolução do aluno e/ou a(s) possível(is) causa(s) do(s) erro(s);

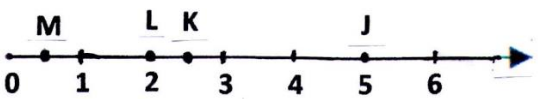
-Interpreta parcialmente - descreve minimamente o percurso da resolução do aluno e/ou a(s) possível(is) causa(s) do(s) erro(s);

-Não interpreta – não descreve de forma alguma o percurso do aluno nem a(s) possível(is) causa(s) do(s) erro(s);

Por fim, utilizamos fragmentos da discussão coletiva para elucidar dúvidas, quando as respostas obtidas no questionário não fornecem elementos claros para uma compreensão adequada.

6.1 Questão 1 – Registro simbólico (numérico fracionário)

1. O número $\frac{5}{2}$ correspondente a que ponto assinalado na reta numérica?



A questão envolve a realização de uma tarefa matemática, no caso relacionar números racionais (representação fracionária) positivos na reta numérica.

As respostas em discussão são inadequadas e as causas dos erros estão relacionadas provavelmente a forma como frequentemente é explorado o estudo das frações, por meio da relação parte/todo, que valoriza o enfoque na dupla contagem. Campos et. al. (1995) afirmam que esse método de ensino encoraja os estudantes a utilizarem um procedimento de contagem dupla, ou seja, contar separadamente o número total de partes e o número de partes pintadas, sem compreender o significado desse novo tipo de número. A ênfase aos termos numerador e denominador, também contribui para o falso entendimento do significado do número racional como sendo os valores isolados dos dois números naturais que compõem a fração.

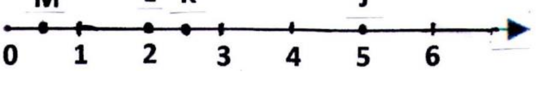
De acordo com Mandarino (2010), uma alternativa para superar essa dificuldade é a representação de números na reta, esse é um recurso importantíssimo em matemática e pode ser trabalhado com os alunos em todos os níveis de ensino, iniciando esse processo já nos anos iniciais a partir de recursos concretos como barbante, passos sobre uma linha desenhada no chão, jogos de trilha, etc. Este recurso pode favorecer a compreensão de fração com a ideia de divisão em partes iguais. Ainda segundo Mandarino (2010, p. 133), “Representar frações na reta numérica contribui para a difícil passagem de seu estudo como é feito até agora para a sua concepção como números.”

Esse contexto tende a colaborar para a compreensão do significado do número fracionário, evitando que seja visto como dois números naturais independentes.

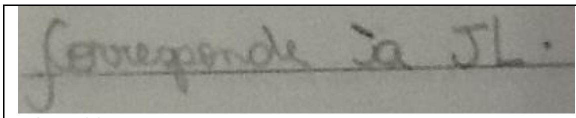
Análise das respostas dos sujeitos

Resposta 1

1. O número $\frac{5}{2}$ correspondente a que ponto assinalado na reta numérica?



Protocolo:



A3 T1 09

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:
A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

Quanto à identificação de respostas inadequadas, dos 209 sujeitos, temos, 34 que não identificam, 78 que identificam parcialmente, 43 que identificam e 54 que identificam plenamente. A seguir o gráfico com representação desses dados em percentual.

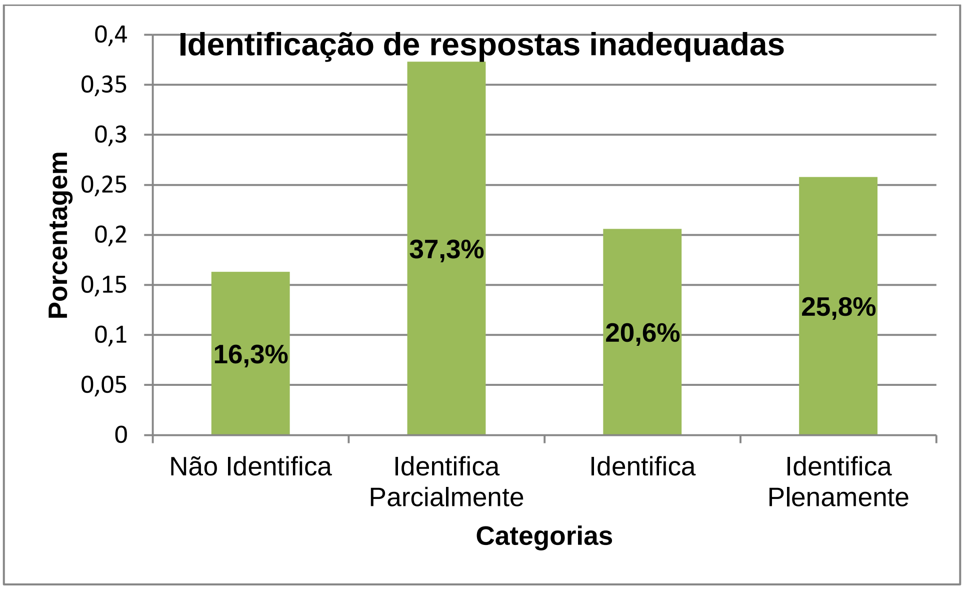


Gráfico 1 – Item 1, resposta 1

Existe uma correspondência biunívoca entre os números racionais e os pontos da reta, ou seja, cada um dos pontos da reta representa um número e cada número está associado a um único ponto. Dessa forma não é plausível que o conhecimento do conteúdo matemático do professor não identifique que a resposta é inadequada, uma vez que associa o número $\frac{5}{2}$ a dois pontos distintos na reta J e L.

Mesmo assim, mais de 16% dos professores afirmaram que a resposta é muito adequada, seguem provavelmente a mesma lógica dos alunos, associando o J ao numerador da fração e o L ao denominador. Esse raciocínio está fundamentado na resposta do sujeito abaixo. Usaremos a nomenclatura que segue: S = sujeito; R = regional; e os numerais 4 e 5 para identificar os anos que os professores lecionam (4 = 4º ano e 5 = 5º ano).

"Muito adequada. Porque ele seguiu uma sequência conforme o segmento da reta e na ordem em que aparece os números na fração $\frac{5}{2}$."

(S5 – R6 – 5) Sujeito de número 5 da regional 6 e professor do 5º ano.

Percebe-se a validação da resposta sem contestação, ou seja, para o professor a solução encontrada pelo aluno satisfaz plenamente a exigência da questão.

Mais de 37% dos professores dizem que a resposta é adequada. Para esse grupo, os alunos lidam bem com a expectativa de aprendizagem "relacionar números racionais (representação fracionária) positivos a pontos na reta numérica." As respostas dos sujeitos a seguir apontam nessa direção.

"Adequada. O aluno associou a fração aos números correspondentes da reta numérica 5 e 2."

(S7 – R6 – 5).

"Adequada. A associação dele está adequada, pois respondeu de acordo com as letras."

(S10 – R6 – 5).

"Adequada. O aluno verificou na reta os números 2 e 5, consequentemente respondeu as letras JL."

(S3 – R7 – 4).

"Adequada. Sim está correta."

(S9 – R7 – 5).

Os professores consideram as respostas adequadas mesmo os alunos seguindo um raciocínio errado, e parece que as justificativas estão apoiadas em duas vertentes, a primeira pela tolerância ao erro, mas não é a boa tolerância que o identifica e propõe intervenção, mas aquela que se contenta com estratégias de resolução minimamente adequadas e, às vezes, inadequada e que se encerram nelas mesmas. Tolerar respostas inadequadas sem proposição de retomada do conhecimento no processo de ensino e aprendizagem é tão grave quanto desprezar a construção do aluno valorizando apenas o acerto. É possível que esse entendimento esteja representado pelo Sujeito 7 – R6 – 5º. A segunda vertente está cristalizada no sujeito 9 – R7 – 5º, que afirma convictamente que a resposta está correta, neste caso trata-se da falta do conhecimento do conteúdo matemático.

Para aproximadamente 21% dos sujeitos a resposta é pouco adequada, não contemplando satisfatoriamente a resolução do item, como podemos verificar nas explicações das respostas dos sujeitos.

"Pouco adequada. O aluno pensou nos dois algarismos que formam a fração (5 e 2), porém, deveria observar que o número proposto é uma fração: 5/2 e a resposta é 2,5, ou seja, o ponto K."
(S7 – R7 – 4).

"Pouco adequada. Pois a resposta do aluno corresponde a ideia de número e não de fração. Para ele foi encontrada na reta. Tinha lógica."
(S8 – R1 – 4).

"Pouco adequada. Ele compreendeu que a resposta está no intervalo entre 2 e 5. A resposta é o ponto K."
(S10 – R1 – 4).

Neste caso os professores conseguem identificar que as estratégias utilizadas pelos alunos não são suficientes para resolver a questão, mesmo alguns não compreendendo a hipótese do erro, como é o caso do sujeito 10 – R1 – 4º. Na sua afirmação, citada anteriormente, ele tem a convicção que a solução do aluno está errada. Dessa forma entendemos que o professor tem o domínio do conhecimento do conteúdo matemático.

Cerca de 26% apenas dos sujeitos identificam que a solução encontrada pelos estudantes é inadequada. Todavia, existe neste grupo a clareza e convicção do entendimento que a resposta não atende de forma adequada ao que se pede na questão. Essa afirmação está cristalizada nas respostas dos sujeitos a seguir.

"Inadequada. Ele simplesmente relacionou os algarismos, contudo já é um ponto de partida."
(S20 – R1 – 4).

"Inadequada". A resposta certa (K), o aluno não considerou o denominador 2, não efetuou a divisão."
(S21 – R1 – 4).

"Inadequada. Analisou sob o olhar dos números naturais. Registrou os algarismos utilizados na escrita do número, considerando de cima para baixo."
(S1 – R1 – 5).

Nestas descrições os professores demonstram desenvoltura no trato com o conteúdo matemático e apontam aspectos importantes do conteúdo pedagógico, caracterizados na descrição do sujeito 20 – R1 – 4º, que identifica a inadequação da resposta e ao mesmo tempo propõe utilizá-la para remediar a aprendizagem.

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir mostra o percentual por categoria.

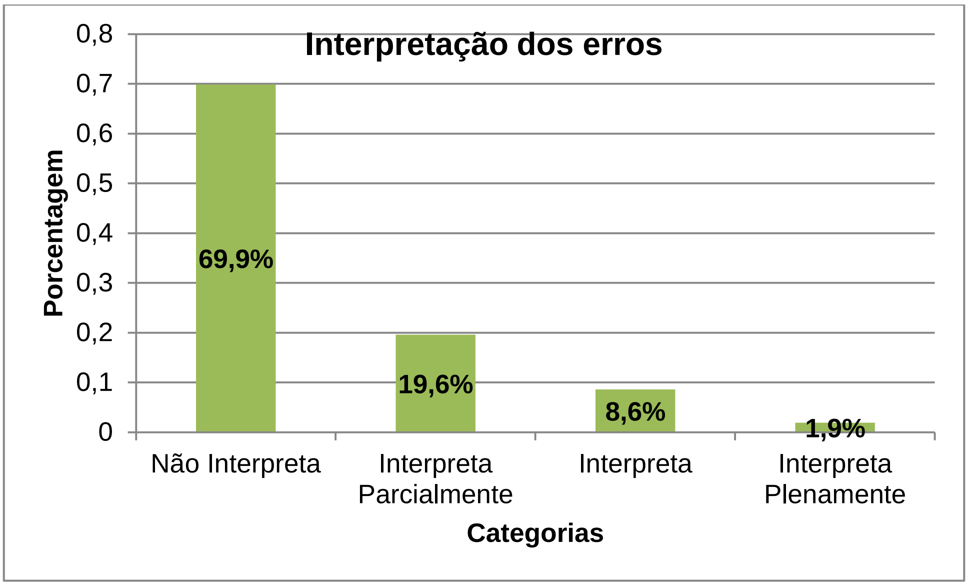


Gráfico 2 – Item 1, resposta 1

Aproximadamente 70% dos sujeitos não interpretam os erros dos alunos, neste grupo temos aqueles que não identificam os erros e consequentemente não podem buscar as causas e os que identificam, mas não conseguem estabelecer hipóteses para os erros, neste caso, a ênfase parece estar no acerto. Os comentários são extremamente genéricos, aqui não se busca uma razão que fundamenta o erro, o tema é abordado com enorme superficialidade. A descrição dos sujeitos a seguir retrata esse quadro.

"O aluno apresentou ter pouco conhecimento do assunto."

(S20 – R1 – 5).

"O aluno não tem noção de reta numérica."

(S21 – R1 – 5).

"O aluno colocou dois resultados e só um correto."

(S24 – R1 – 5).

Cerca de 20% dos sujeitos descrevem de forma muito elementar os erros nesta questão, eles dão "pistas" bastante sutis do que pode ter contribuído para o resultado indesejado encontrado pelos alunos. Também há registros da supervalorização dos termos numerador e denominador, o que dificulta compreender a fração na sua totalidade. Nesse sentido temos algumas descrições dos professores.

"O aluno associa os numerais encontrados na reta."

(S6 – R2 – 4).

"Ele fez a resposta pela representação dos números."

(S9 – R2 – 4).

"Eles de certa forma tentaram dar a resposta de acordo com a posição da fração."

(S14 – R2 – 4).

"Ele(a) localizou os números que aparecem na fração."

(S17 – R2 – 4).

"Pois o estudante entende que o numerador e denominador são pontos cruciais na reta numérica."

(S5 – R1 – 5).

Aproximadamente 9% dos professores demonstram um olhar mais apurado para os erros, de certa forma descrevem o percurso desenvolvido pelo aluno e fornecem com relativa consistência hipóteses para o insucesso do aluno na resolução da questão. Já fica claro, por exemplo, que os erros têm relação com a maneira que os alunos enxergam as frações, relacionando-as com números naturais. Embora não apresentem essa discussão com profundidade, mas é perceptível que a compreensão dos professores aponta nessa direção. Essas evidências estão ancoradas nas descrições a seguir.

"Ele está ainda apegado aos números naturais."
(S5 – R2 – 4).

"O aluno representou 5 e 2 como números naturais e não como fração."
(S14 – R1 – 5).

"O aluno não compreende a representação de fração e pensou em numerador e denominador como números naturais."
(S13 – R2 – 5).

"O aluno considerou a letra J como numerador e a letra L como denominador."
(S1 – R5 – 4).

"De acordo com a concepção dele o ponto J corresponde ao algarismo 5 e o L ao 2."
(S12 – R5 – 5).

Cerca de 2% dos sujeitos, o que corresponde a 4 professores, conseguem interpretar o erro em discussão na sua plenitude. Eles descrevem com segurança o processo resolutivo percorrido pelos alunos até chegarem à resposta e estabelecem hipóteses consistentes para as estratégias utilizadas pelos estudantes. Parece existir uma relação estreita com o erro na prática pedagógica desses professores, aproximando-se do que afirma De La Torre (2007, p. 27) "o erro é uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um longo e desconhecido caminho sem se equivocar. (...) Não há aprendizagem isenta de erros."

Embora seja flagrante a presença do erro nas atividades humanas, na aprendizagem escolar ele tem sido desprezado e essa prática tem contribuído consideravelmente para dificultar a sua interpretação e posteriormente a remediação.

Nas respostas dos sujeitos a seguir podemos observar a descrição minuciosa do percurso percorrido pelos estudantes para resolver o problema bem como a interpretação das possíveis estratégias utilizadas pelos estudantes que, nesse caso, provavelmente está associada à compreensão de fração como um número formado por dois números naturais independentes.

"Ele (aluno) associou a correspondência entre o número 5 e a letra J e da mesma forma o número 2 a letra L. O aluno trabalha na perspectiva dos números naturais, não absorveu o significado de fração."

(S4 – R1 – 4).

"Pensou nas partes que foram divididas, nas partes que foram tomadas. Numerador e denominador. Só sabem frações como números naturais."

(S2 – R4 – 4).

Discussão coletiva

O professor/pesquisador será representado pela letra P, o grande grupo pela letra G e as demais letras simbolizam os sujeitos.

A discussão coletiva ratificou algumas ideias já explicitadas no questionário, como a compreensão de frações como número naturais e a tolerância a respostas inadequadas. Fragmentos da transcrição apontam neste sentido.

(...)

A: "Na cabeça dos nossos alunos os números são todos naturais."

D: "Ele foi direto aos pontos J (5) e L (2), como se a fração fosse os dois números naturais."

J: "A reposta é muito adequada porque já sabe alguma coisa."

E: "Temos que considerar o conhecimento do aluno, é o que ele sabe."

(...)

Mas também trouxe elementos novos corroborados por vários professores e aqui representados na fala do sujeito F, que é a insuficiência em sala de aula do trabalho com os números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental, são abordados apenas temas pontuais e ao nosso modo de ver com bastante superficialidade.

(....)

F: “Os conteúdos dos números racionais são pouco visto nos anos iniciais.”

P: “Porque?”

F: “Não dá tempo ai a gente trabalha mais os naturais.”

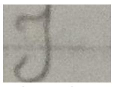
P: “E as recomendações dos Parâmetros Curriculares e os conteúdos nos livros didáticos?”

F: “Como já falei não dá tempo para tudo.”

(...)

Resposta 2

1. O número $\frac{5}{2}$ correspondente a que ponto assinalado na reta numérica?

Protocolo:  A3 T1 05
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

O gráfico a seguir mostra em percentual a distribuição dos sujeitos por categoria.

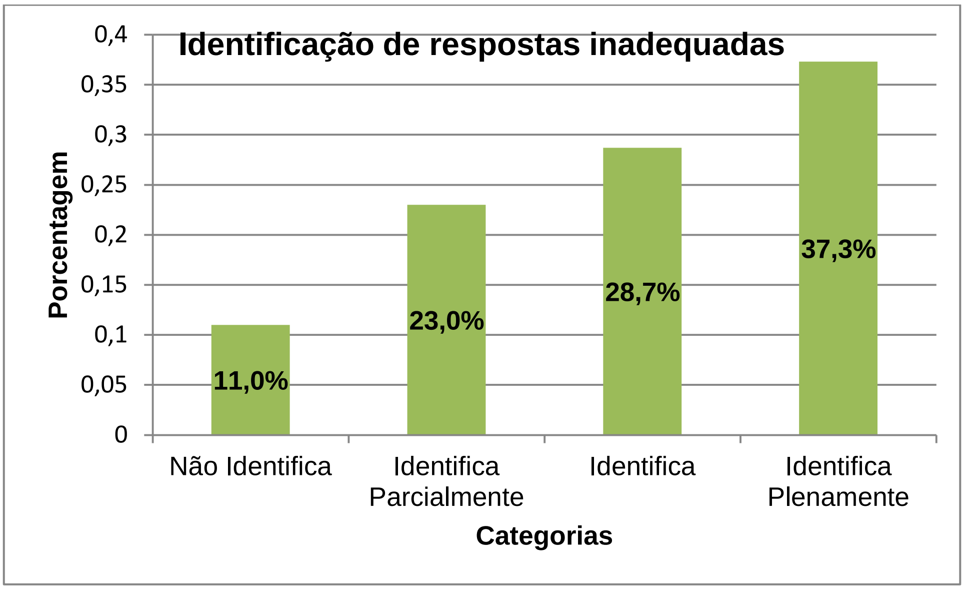


Gráfico 3 – Item 1, resposta 2

Do total de sujeitos 11% não identificam a inadequação da resposta e afirmam que é "muito adequada", mesmo a resposta atribuída por alunos tenha sido o ponto J que na reta numérica em discussão representa o número 5. Esse grupo de sujeitos ora se manifesta de forma explicita, afirmando com veemência que a resposta está correta, portanto, muito adequada, outras vezes aborda a identificação do erro dentro de um campo muito subjetivo, atribuindo hipóteses que parecem não ter relação com o objeto em discussão. Essas evidências se apoiam nas respostas dos sujeitos a seguir.

"Muito adequada. Resposta correta!"

(S21 – R1 – 4).

"*Muito adequada. Ele foi claro e objetivo na maneira que ele interpretou a leitura da reta."*

(S3 – R3 – 5).

23% dos professores afirmam que a resposta é adequada, ou seja, identificam os erros parcialmente. Esses sujeitos percebem superficialmente a deficiência da resposta, mas tendem a aceitá-la como correta. Essa ideia está ancorada nas respostas dos sujeitos a seguir.

"Adequada. O aluno elimina o numeral 2 em sua visão."

(S6 – R2 – 4).

“Adequada. O estudante não percebeu a compreensão da fração, mas uma parte dela (número inteiro).”

(S5 –R1 – 5).

Cerca de 29% dos sujeitos identifica o erro na questão, mas julgam que a resposta não é totalmente inadequada, caracterizando-a como pouco adequada. Embora identifiquem o erro, esse procedimento se dá de forma bastante restrita e, às vezes, ambígua; parece não haver total convicção do erro. Os dois registros a seguir contemplam respectivamente a restrição e a ambiguidade às quais no referimos.

“Pouco adequada. Porque é onde está o numerador.”

(S5 – R3 – 5).

“Pouco adequada. Ele identificou o ponto J porém não a relação com o outro ponto.”

(S16 – R5 – 5).

Aproximadamente 37% dos professores identificaram plenamente a inadequação da resposta. Esses sujeitos compreenderam que a resposta é dada por um número racional e não um número natural. A identificação da resposta inadequada é apontada com propriedade, trazendo elementos que sustentam a argumentação. Neste sentido os sujeitos a seguir afirmaram.

“Inadequada. O aluno não compreendeu o que significa $\frac{5}{2}$ e o número inteiro do ponto J não o representa.”

(S15 – R5 – 5).

“Inadequada. O aluno demonstrou não compreender o conceito de fração e sua representação e fixou-se apenas no numerador.”

(S13 – R2 – 5).

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir mostra em percentual a distribuição dos sujeitos por categoria.

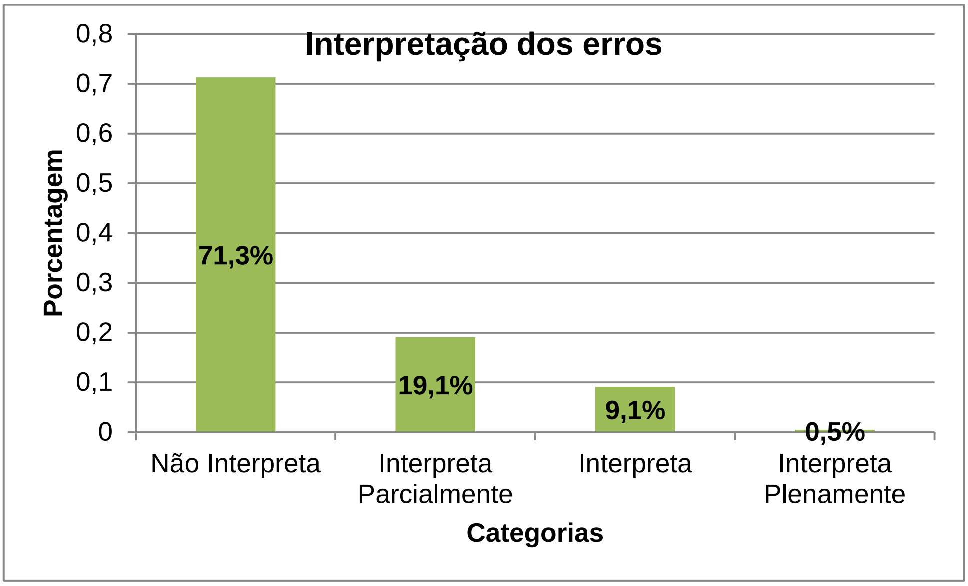


Gráfico 4 – Item 1, resposta 2

Um pouco mais de 71% dos sujeitos não identificam possíveis causas para os erros, tampouco conseguem descrever o percurso de resolução. As análises são muito superficiais e as repostas são atribuídas ao acaso. Como aponta Torre (2007, p. 87), "O erro é um sintoma que não se elimina sem se averiguar antes o que o provoca. Raramente o estudante responde por acaso." Parece haver um conformismo, como se o erro fosse superado naturalmente, os professores não tendem a buscar uma causa, uma origem, que justifique aquele processo resolutivo. A seguir afirmação de alguns professores referendando esse entendimento.

"Ele marcou aleatoriamente."

(S2 – R4 – 5).

"Colocou o primeiro pensamento que lhe veio na cabeça."

(S1 – R6 -5)

Aproximadamente 19% do total de sujeitos fazem uma interpretação bastante incipiente, não conseguem identificar aspectos significativos que contribuem diretamente para um percurso de resolução equivocado. Mas fornecem alguns indicativos que orbitam o erro, conseguem apontar, por exemplo, que a resposta foi dada como número natural/inteiro. Conforme podemos ver nas respostas que seguem.

"Considerou o maior no campo dos naturais."

(S1 – R1 – 5).

“O aluno procurou visualizar só o inteiro. Pra ele o J já respondia tudo.” (S7 – R4 – 5).

9% dos professores conseguem interpretar os erros trazendo elementos importantes que justificam sua origem, como o fato de operar com os números racionais utilizando as características dos números racionais, assim o entendimento que os estudantes têm de fração é o de dupla contagem. No entanto, esse grupo não discute com profundidade as possíveis causas que levam os alunos a cometerem esses erros. As respostas dos professores a seguir expressam essas afirmações.

“A reta representa números inteiros e decimais, o aluno levou em consideração apenas o numero inteiro.”

(S3 – R5 – 4).

“Ele entende a fração como dois números inteiros e não como divisão.”

(S11 – R5 – 4).

Menos de 1**%** do total dos sujeitos, que em valores absolutos equivale a um professor, consegue interpretar o erro de forma plena. Para interpretar erros é necessário entender como os estudantes pensam. Assim, de acordo com Torre (2007, p. 135), “Entrar nas causas do erro significa entrar na psicologia de quem aprende, já que todo erro comporta um aspecto relacional; isto é, um desacordo entre a mente do sujeito e uma determinada regra lógica ou convencional.”

Neste caso, o sujeito descreve a trajetória da resolução da questão e aponta possíveis hipóteses que conduziram o aluno ao erro. Ou, seja, o estudante associa o número natural 5, por vir primeiro, ao numerador da fração $\frac{5}{2}$, compreendendo a fração como dupla contagem e toma como resposta o ponto J que equivale ao inteiro 5. É provável que os números racionais sejam trabalhados na perpectiva dos números naturais, sem levar em conta a sua especificidade. Essa inferência fazemos a partir da resposta do sujeito que faz a seguinte afirmação:

“O estudante associa o primeiro número da fração ao ponto J, ele não se apropriou ainda das noções básicas dos números racionais, a escola explora os naturais, no seu universo o que predomina são os números naturais, que fazem parte do seu dia a dia.”

(S1 – R3 – 5).

Discussão coletiva

A discussão coletiva a princípio foi marcada pela falta de consenso sobre a inadequação da resposta e fortemente pela ideia de resposta aleatória, vários sujeitos atribuíram o erro ao acaso. Os trechos da transcrição da fala dos sujeitos a seguir apontam nessa direção.

P: “A resposta é inadequada?”

B: “Não, o aluno responde alguma coisa.”

C: “Pra mim é inadequada, o aluno responde, mas marca um ponto que representa um número inteiro e o ponto pedido é uma fração.”

(...)

P: “Que raciocínio deve ter utilizado o aluno pra chegar a essa resposta?”

A: “O aluno respondeu de forma aleatória.”

J: “Ele marcou a primeira letra que veio na cabeça.”

(...)

A discussão trouxe elementos semelhantes aos já detectados na resposta 1, os quais apontam indícios de “fuga” aos números racionais, sempre com as justificativas que alguns conteúdos têm um nível muito elevado para o aluno e o tempo pedagógico é insuficiente. O diálogo a seguir retrata essa situação.

(...)

F: “Esses números na reta nem sempre é visto no 5º ano.”

P: “Porque?”

F: “Se trabalha mais as frações, as somas...”

L: “Professor, temos que considerar também o tempo e o nível dos nossos alunos.”

(...)

6.2 Questão 2 – Registro simbólico (numérico decimal)

2. Observe os pares de números decimais a seguir e diga qual deles é o maior:

a) 1,495 e 7,2 – o número maior é ________________

b) 15,7 e 0,9999 – o número maior é ______________

A questão envolve a expectativa de aprendizagem “comparar e ordenar números na representação decimal” que exige o conhecimento próprio dos números decimais. Esses números, assim como os naturais, também estão representados em um sistema de base 10. Cada número decimal é composto por duas partes, a inteira (unidades, dezenas, centenas, etc.) e a decimal (décimos, centésimos, milésimos, décimos milésimos, etc.). Assim, comparar dois números decimais exige estabelecer relação de ordem entre seus termos (centenas, dezenas, unidades, décimos, centésimos, milésimos, décimos milésimos, etc.).

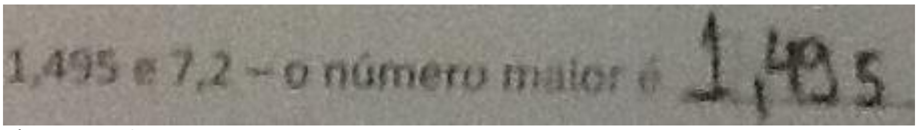
A comparação dos números decimais, de acordo com Pernambuco (2013), deve se dar pela compreensão de cada termo e não por meio de técnicas ditadas pelo professor. Para Pernambuco (2013, p. 199) “dizer que dentre dois números, o número maior é aquele que tem mais algarismos leva o aluno a erros do tipo afirmar que o número 1,05 é maior que o número 1,5, por ter mais algarismos.”

Neste sentido, o estudante precisa entender o que significa décimos, centésimos, etc., atividades envolvendo nosso sistema monetário e no campo das grandezas e suas medidas tendem a contribuir na construção desse conceito.

Resposta - a

2. Observe os pares de números decimais a seguir e diga qual deles é o maior:

a) 1,495 e 7,2 – o número maior é ________________

Protocolo:  1,495 e 7,2 – o número maior é 1,495 Aluno A4 T1 05
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

O gráfico a seguir traz a distribuição em valores relativos das respostas dos sujeitos quanto à inadequação das respostas.

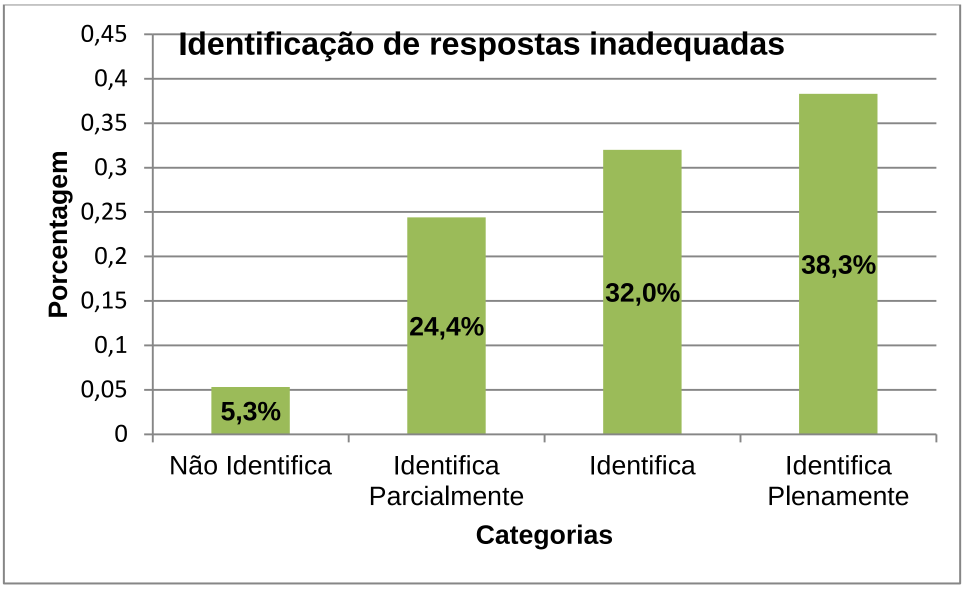


Gráfico 5 – Item 2, resposta a

Somente cerca de 5% dos sujeitos entendem que a solução determinada pelos estudantes é muito adequada e, portanto, não identificam a inadequação da resposta. Esses professores apresentam fortes indícios de dificuldades na compreensão do conteúdo matemático em discussão e afirmam categoricamente que a resposta está correta, ou seja, 1,495 é maior que 7,2, conforme podemos observar nas transcrições a seguir.

“Muito adequada. Sim está correta porque 1,495 é maior que 7,2.”
(S9 – R7 – 5).
“Muito adequada. Está correta quanto menor o número é o maior número decimal.”
(S4 – R7 – 4).
“Muito adequada. Porque o número 1.495 é milhar.”
(S13 – R1 – 4).

Aproximadamente 24% dos sujeitos afirmam que a resposta é adequada e neste caso se enquadram na categoria que identificam o erro parcialmente. Esses sujeitos tendem a minimizar a inadequação das respostas, justificando o baixo nível de conhecimento dos estudantes e valorizando as estratégias utilizadas pelos alunos, mesmo não sendo capaz de resolver a questão de forma satisfatória. Seguem alguns depoimentos dos professores nesse sentido.

“Adequada. Porque não compreendeu esse conteúdo, o aluno observou o número que tem mais algarismos e julgou sendo o maior.”

(S4 – R3 – 5)

“Adequada. Porque no cotidiano do aluno de hoje do 5º ano ele mal sabe somar quanto mais responder essas questões de uma forma que um matemático espera.”

(S3 – R3 – 5).

“Adequada. Porque a estratégia que o aluno usou foi adequada.”

(S8 – R5 – 5).

32% do total dos sujeitos julgam a solução como pouco adequada e se enquadram no grupo daqueles que identificam a inadequação de respostas. Esses professores conseguem perceber que a solução encontrada pelos alunos não resolve satisfatoriamente a questão, no entanto, não demonstram convicção para afirmar que a resposta é inadequada. A ideia da tolerância ao erro, mas não aquela em que se utiliza o erro para subsidiar a prática pedagógica e sim a aceitação da produção dos alunos, mesmo que ela esteja em desacordo com a tarefa matemática, parece estar cristalizada entre os professores. As transcrições que veremos a seguir revelam que os professores identificam as discrepâncias das respostas.

“Pouco adequada. O aluno considerou a quantidade de algarismos, dando pouca importância à vírgula.”

(S23 – R1 – 5).

“Pouco adequada. Ele utiliza a quantidade de números para achar o número maior. Quando ele tinha que verificar o número que vem antes da vírgula.”

(S18 – R1 – 5).

Cerca de 38% dos professores apontam com clareza que a resposta é inadequada e, de acordo com a nossa análise, eles estão inseridos no contexto daqueles que identificam plenamente a inadequação das respostas. A identificação da inadequação da resposta é fundamental, pois é o primeiro elemento do tripé do tratamento didático dos erros (identificação, interpretação e remediação). De acordo com Torre (2007, p. 132) “Enquanto não forem localizados e não se tiver consciência deles, não é possível seguir em frente.” A detecção da inadequação das respostas fica evidente conforme os relatos dos professores a seguir.

“Inadequada. Pois 7,2 é maior que 1,495.”
(S15 – R2 – 4).

“Inadequada. Porque o valor numérico decimal 7,2 é maior do que 1,495 jamais o resultado matemático seria o respondido de 1,495.”
(S6 – R3 – 4).

“Inadequada. O aluno não estabeleceu o valor posicional dos numerais no sistema de numeração decimal.”
(S4 – R1 – 4).

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir traz a representação da interpretação dos erros em percentual.

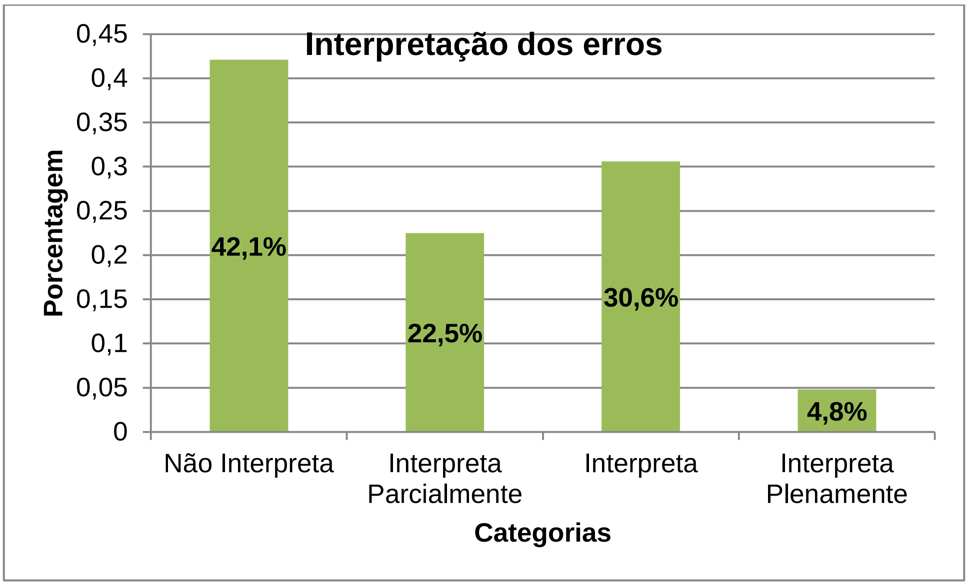


Gráfico 6 – Item 2, resposta a

Não basta identificar o erro, após a identificação vem a fase da interpretação, ou seja, a descrição do raciocínio empregado pelo aluno. Como afirma Correia (2010, p. 25) “Todo raciocínio é lógico mesmo os que conduzem ao erro, e estes erros precisam ser compreendidos para serem superados.” Dos nossos sujeitos aproximadamente 42% não conseguem descrever as possíveis causas do erro, limitam-se a apontar que a questão não está correta e tratam o erro como um acidente de percurso. Parece não haver motivação ou compreensão para interpretar a origem do erro, os trechos transcritos a seguir parecem apontar nesta direção.

“A resposta do aluno não está certa.”
(S2 – R7 – 5).
“O aluno não quer pensar e sim chutar as respostas.”
(S3 – R5 – 4).
“Não faço ideia qual estratégia o aluno utilizou para responder a questão.”
(S5 – R5 – 4).

23% dos professores descrevem de forma muito preliminar o percurso desenvolvido pelos alunos na resolução da atividade. Essa descrição não é clara, mas nas entrelinhas é possível perceber que eles estão apontando, mesmo que de forma bastante generalizada, o raciocínio desenvolvido pelos alunos. Seguem alguns depoimentos referendando esse entendimento.

“O aluno não reconhece valores decimais e está ligando os números a classe dos milhares.”
(S16 – R6 – 4).
“O aluno pensou como trabalhamos com o quadro valor de lugar.”
(S2 – R4 – 4).
“Não se deteve ao sistema de numeração decimal.”
(S16 – R6 – 5).

Para cerca de 31% dos sujeitos há uma interpretação satisfatória do processo resolutivo empregado na atividade. Eles apontam com nitidez o possível raciocínio dos alunos, ou seja, responderam a questão levando em conta a quantidade de algarismos sem observar as características próprias dos números decimais. Sentimos falta de uma análise mais profunda sobre a causa do erro. Os professores demonstram entenderem como os alunos resolvem a questão, no entanto, parecem desconhecer as razões que os guia nessa direção. A seguir relatos dos sujeitos que embasam essa análise.

“Neste caso o aluno associou a dimensão do número pela quantidade de algarismos. Em muitos casos os alunos não conhecem o valor posicional dos algarismos e a dificuldade é maior com os números fracionários.”

(S15 – R2 – 5).

“O aluno destacou pela quantidade dos números, não dando importância a algumas regras importantes na matemática.”

(S3 – R1 – 4).

“Possivelmente ele não considerou a vírgula, apenas a quantidade de algarismos presentes em cada um dos números. Não faz ideia da ‘quantidade’ presente no número.”

(S16 – R1 – 5).

De acordo com Pinto (2000), o ato de identificar e corrigir o erro no sentido de repetir o conteúdo de forma correta não satisfaz plenamente ao ensino e a aprendizagem. É preciso analisar com mais profundidade os aspectos que permeiam a aprendizagem e em alguns casos contribuem para a cristalização dos erros. Entre esses aspectos temos as “técnicas” que são comumente disseminadas pelos professores, funcionando bem em um determinado contexto, mas que passa a não ser mais útil em uma nova situação. É o caso da técnica para ordenar os números naturais, ou seja, “o maior número é aquele que possui mais algarismos.” Essa técnica é válida para os números naturais, mas não faz nenhum sentido na comparação dos números decimais. Assim a interpretação dos erros contribui significativamente para direcionar a correção da atividade matemática.

Temos aqui aproximadamente 5% dos sujeitos com o perfil adequado para lidar com os erros, eles são capazes de identificá-los e interpretá-los, trazendo detalhes do percurso desenvolvido pelos alunos e as prováveis origens. Os professores apontam que o raciocínio dos alunos é baseado no quantitativo de algarismos e sugerem a técnica para comparar números naturais como possível causa do erro, conforme podemos ver na descrição dos sujeitos.

“Ele levou em consideração apenas a quantidade de números e não o valor real dos números. Isso acontece porque ele está usando a regra de comparar números naturais.”

(S10 – R1 – 4)

“Leva em consideração a quantidade de algarismos no número sem levar em consideração a posição da vírgula, agindo como se fosse números naturais.”

(S1 – R2 – 4).

Por fim, nas entrelinhas, alguns professores revelam uma certa negligência no trabalho com os números racionais, neste caso na representação decimal. De alguma forma eles admitem que esse conteúdo é relegado e/ou postergado para os anos finais do ensino fundamental. A descrição dos sujeitos a seguir deixam essas evidências subjacentes.

"O aluno nunca estudou números decimais. Portanto, ele foi pela quantidade de algarismos."
(S17 – R1 – 4).

"Não estudou ainda os números decimais."
(S4 – R5 – 4).

"O aluno não domina o básico dos decimais. Usou a estratégia da quantidade."
(S20 – R1 – 5).

Essas afirmações tão veementes parecem denunciar a própria prática pedagógica, como se o professor estivesse respondendo sobre a condição de conhecimento dos seus alunos. Mas, os elementos analisados não nos permitem afirmar categoricamente que, de fato, é isso que ocorre, eles apontam seguramente fortes indícios nessa direção.

Diante dessas evidências é importante identificar quais conteúdos matemáticos vem sendo efetivamente trabalhados na escola, assim, propomos como questão de futuras investigações o seguinte problema, "que conteúdos estão sendo priorizados nas salas de aula de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental e como estão sendo ensinados?"

Discussão coletiva

A discussão coletiva apresentou dados extremamente coerentes em relação àqueles verificados nos questionários.

Quanto à inadequação da resposta, houve praticamente uma aclamação, apenas um sujeito questionou que poderia ser adequada, porque o aluno se baseou em um raciocínio já conhecido para resolver a questão. Mas após breve discussão parece ter se convencido da inadequação da resposta. Vejamos a transcrição de parte do diálogo.

P: “Pra vocês a resposta dada pelos alunos é inadequada, pouco adequada, adequada ou muito adequada?”

G: “Inadequada!”

M: “Acho que posso considerar adequada, levando em consideração que eles responderam de acordo com o que eles já sabiam.”

P: “Gente esse argumento é ou não suficiente para justificar a adequação da resposta?”

G: “Não!”

P: “Porque?”

E: “Os alunos não respondem adequadamente, a resposta não serve para os números decimais.”

M: “Pensando assim a resposta é inadequada.”

(...)

Quanto à interpretação dos erros, os professores se dividiram praticamente em três grupos: aqueles que atribuem a resposta ao acaso, aqueles que defendem que os alunos não conhecem os números decimais e resolvem como se fossem números naturais e, por último, o grupo que afirma ser as respostas dos alunos oriundas de “técnicas” inadequadas para comparar números naturais. A seguir trechos da transcrição das falas dos sujeitos.

(...)

P: “Porque vocês acham que os alunos afirmaram que 1,495 é maior do que 7,2!”

Q: “Eles nem se preocuparam em resolver a questão, respondem de qualquer jeito.”

(...)

B: “os alunos só conhecem os números naturais e resolveram observando a quantidade de algarismos.”

(...)

C: “Pode ser que o jeito que ele aprendeu a encontrar o maior número natural esteja influenciando nos decimais.”

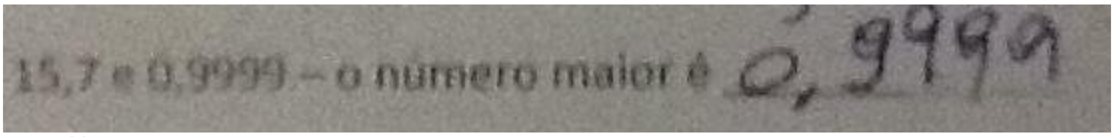
(...)

Resposta – b

2. Observe os pares de números decimais a seguir e diga qual deles é o maior:

b) 15,7 e 0,9999 – o número maior é ______________

Protocolo:



A5 T1 02

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:
A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

A identificação das respostas inadequadas estão representadas no gráfico a seguir.

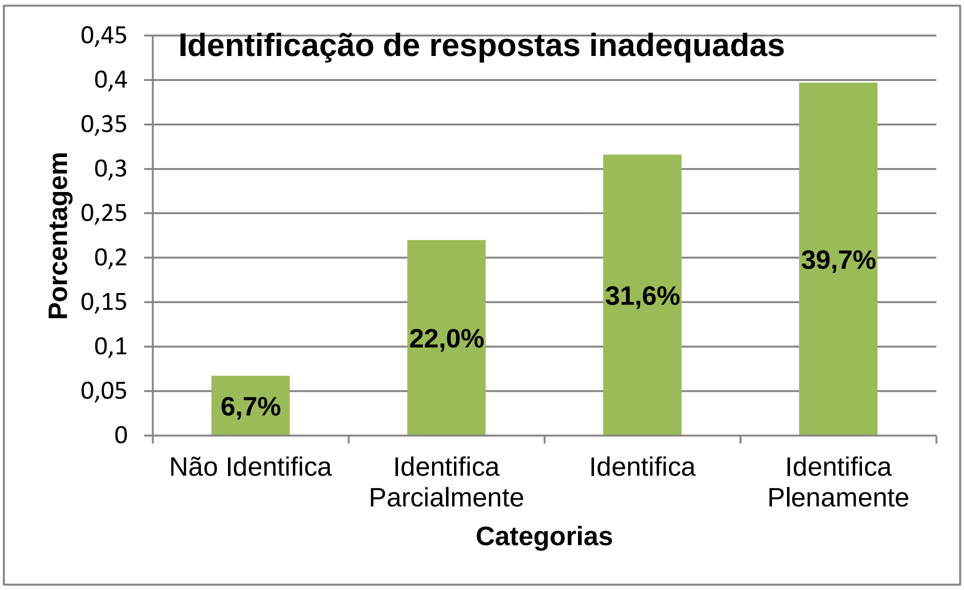


Gráfico 7 – Item 2, resposta b

Não há diferenças significativas em relação a identificação de respostas inadequadas entre os itens (a) e (b), nem do ponto de vista quantitativo nem qualitativo.

O quadro abaixo mostra a comparação quantitativa em percentual, dos itens (a) e (b), por categoria, com variações insignificantes diante do número de sujeitos.

Categorias	(a) (%)	(b) (%)	Variação (%)
Não identifica	5,3	6,7	1,4
Identifica parcialmente	24,4	22,0	2,4
Identifica	32,0	31,6	0,4
Identifica plenamente	38,3	39,7	1,4

Quadro 14 – Comparação dos dados referentes à identificação de respostas inadequadas entre os itens (a) e (b)

Como podemos perceber, a maior variação é de 2,4%, que representa 5 sujeitos; em valores absolutos, temos nessa categoria 51 sujeitos no item (a), contra 46 no item (b), valores praticamente equivalentes.

No aspecto qualitativo não detectamos novos elementos importantes que já não tivessem sido citados na análise da letra (a).

A convergência dos elementos na identificação de respostas inadequadas entre os itens (a) e (b), talvez se explique pelo fato de as duas atividades solicitarem a comparação de números decimais e, no aspecto geral apresentarem a mesma estrutura, ou seja, dois pares de números decimais e o erro se caracterizando pela quantidade de algarismos.

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir representa a interpretação dos erros em percentual.

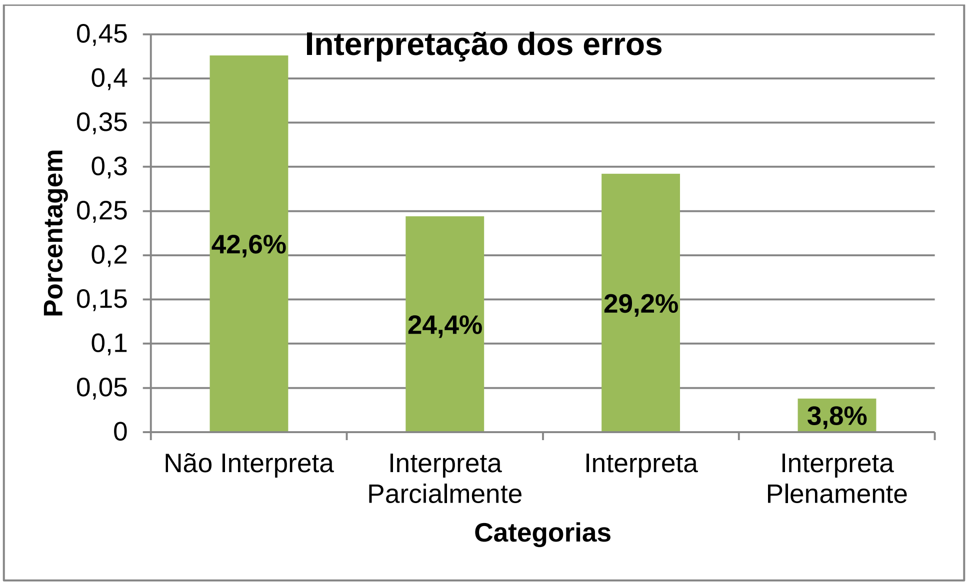


Gráfico 8 – Item 2, resposta b

Como já dissemos anteriormente, os itens(a) e (b) se caracterizam como atividades que consistem em comparar dois números decimais e, de forma geral, podemos entender que a estratégia utilizada pelos alunos foi compreender que o maior número é aquele que tem mais algarismos. Essa estratégia parece ser predominante no item (a), mas a item (b) além desse entendimento é razoável pensar também no valor absoluto do algarismo 9, que pode ter contribuído para conduzir os alunos ao erro. Assim, as atividades não são exatamente semelhantes, mas se forem analisadas de modo superficial é provável que se equivalham.

Os sujeitos que não interpretam os erros e aqueles que interpretam parcialmente, representados por cerca de 43% e 24%, respectivamente, não conseguem apontar a possibilidade do algarismo 9 ter influenciado a resposta e não trazem novos elementos significativos além dos já descritos aqui na análise do item (a).

Os professores que interpretam os erros, aproximadamente 29% do total dos sujeitos, descrevem o percurso dos alunos na resolução da atividade, apontando como prováveis estratégias a quantidade de algarismos e o valor absoluto do algarismo 9; no entanto, esse grupo não justifica o que pode ocasionar essa compreensão nos estudantes. A seguir depoimentos dos professores ratificando nossa análise.

“O aluno considerou o valor absoluto do algarismo 9, que é superior aos demais e a quantidade de números.”

(S16 – R2 – 5)

“Ele julgou que o número 9 é maior que os outros números e vários 9 o torna maior ainda”.

(S17 – R2 – 5).

“Neste caso o aluno verificou pelo número 9 como maior e também por ter mais algarismos.”

(S3 – R7 – 4).

Aproximadamente 4% dos sujeitos interpretam os erros na sua plenitude, estabelecendo hipóteses coerentes para o percurso resolutivo bem como apontando com consistência possíveis causas que originam esses erros. Os textos dos sujeitos a seguir embasam esse entendimento.

“A sequência dos noves faz com que ele pense que esse é o maior número. O nove é o maior dos naturais e a quantidade de noves. Foi desse jeito que ele aprendeu nos naturais.”

(S7 – R7 – 4)

“Ele mais uma vez foi pela quantidade de algarismos e não pelo valor, mas pode também ter se baseado no algarismo 9. É assim que se ensina nos naturais.”

(S11 – R5 – 5).

Discussão coletiva

Os principais aspectos abordados pela discussão coletiva contemplam os elementos já citados na discussão do item (a). No campo da identificação de respostas inadequadas, o entendimento comum da inadequação da resposta e no campo da interpretação dos erros, as três tendências já citadas, respostas aleatórias, resolução da questão como se fosse números naturais devido a ausência do conhecimento dos números decimais e identificação de técnicas para comparar os números naturais que influenciam no trabalho com os decimais. Nessa última os professores acrescentam a possibilidade de o algarismo 9, pelo fato de ser tratado como o “maior algarismo” exercer alguma influência na resposta. Apresentaremos a seguir apenas o trecho da transcrição que aborda esse elemento novo.

(...)

P: "O que pode justificar os alunos responderem que 0,9999 é maior que 15,7?"

C: "O número 9 e a quantidade de algarismos como já disse antes."

(...)

6.3 Questão 3 – Registro simbólico (numérico percentual)

3. Um professor de educação física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Esse percentual representa quantos alunos?

A questão aborda a expectativa de aprendizagem "resolver e elaborar problemas envolvendo a determinação de porcentagens." De acordo com Pernambuco (2013) o trabalho com porcentagens nessa fase de escolaridade não deve explorar procedimentos e fórmulas, mas situações em que os alunos sejam desafiados a compreenderem outras representações para as porcentagens. Assim 25% pode ser representado por $\frac{1}{4}$ ou 0,25. Atividades envolvendo o sistema monetário contribuem para a compreensão. Neste sentido Pernambuco (2013, p. 203) aponta "Por exemplo, um desconto de 10% em um real corresponde a 10 centavos, ou a $\frac{1}{10}$ (décima parte) de um real, ou a R$ 0,10."

A questão em discussão pode ser solucionada usando-se raciocínio semelhante, na qual 50% de 240 alunos equivalem a 120 alunos ou a $\frac{1}{2}$ de 240, ou 0,5 de 240.

Resposta 1

3. Um professor de educação física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Esse percentual representa quantos alunos?

Protocolo:  A7 T2 09
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

A representação gráfica seguinte expressa a identificação de respostas inadequadas em percentual.

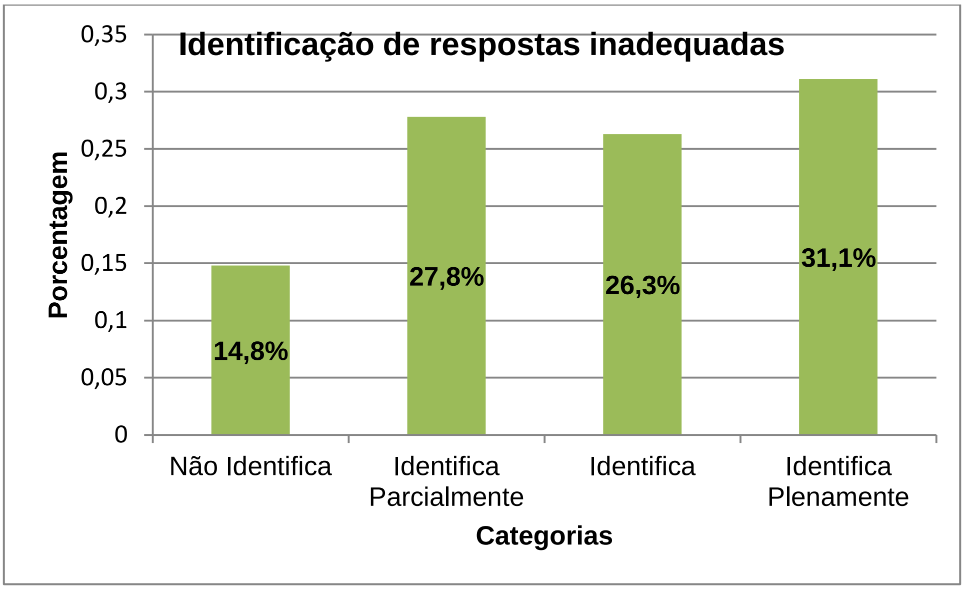


Gráfico 9 – Item 3, resposta 1

Para cerca de 15% dos sujeitos a resposta é muito adequada, ou seja, esses indivíduos não identificam a inadequação da resposta. Esses sujeitos não conseguem identificar com clareza o que solicita o enunciado e buscam justificar a pertinência da solução determinada pelos estudantes. Como veremos a seguir, os argumentos utilizados pelos professores são vagos e desconectados com a realidade exigida para equacionar a questão.

"Muito adequada. O aluno já tem consciência do que foi exposto, quanto a questão trabalhada ele responde com segurança e tranquilidade."

(S3 – R5 – 5).

"Muito adequada. Porque ele respondeu de acordo com o número inteiro."

(S8 – R6 – 5).

"Muito adequada. O aluno compreende número fracionário."

(S10 – R7 – 5).

Aproximadamente 28% dos indivíduos julgam a resposta adequada e, de acordo com os critérios estabelecidos para nossa análise, identificam parcialmente a inadequação da resposta. Esse grupo de sujeitos demonstra tendências em defender a resposta estabelecida, mas com ressalvas, justificando sempre a ausência de uma compreensão mais profunda do enunciado pelos estudantes. A descrição dos professores que segue aponta nessa direção.

"Adequada. O estudante já visualizou a resposta no próprio enunciado, porém não interpretou corretamente o que o enunciado pedia."

(S2 – R1 – 5).

"Adequada. O aluno interpretou a pergunta de forma curta e precisa, querendo ganhar tempo no seu raciocínio e sem se preocupar em dar os valores em algarismos ao qual a questão se refere."

(S1 – R6 – 4).

Aproximadamente 26% dos professores entendem a resposta como pouco adequada, portanto, esses sujeitos identificam a inadequação da solução encontrada pelos alunos. Esses professores não aceitam a resposta, no entanto, não identificam o erro de forma mais contundente, ou seja, a identificação do erro é feita de forma generalizada, sem que apresente elementos mais particulares, pertinentes a inadequação. Essa análise está ancorada nos testemunhos dos indivíduos a seguir.

"Pouco adequada. O aluno não compreendeu o enunciado."

(S1 – R2 – 4).

"Pouco adequada. Resta saber se o estudante tem conhecimento em porcentagem nos anos anteriores."

(S5 – R4 – 4).

Para cerca de 31% dos sujeitos a resposta é inadequada, ou seja, os professores identificam plenamente a inadequação da solução apresentada pelos estudantes. A descrição da inadequação aponta vestígios que o grupo domina o conhecimento matemático em discussão, essa afirmação se torna evidente no momento em que os professores rechaçam a resposta estabelecida pelos alunos e indicam a solução adequada. Essas evidências se materializam nos textos dos sujeitos a seguir.

"Inadequada. Porque a pergunta foi quantos alunos sabem jogar, a resposta é 120, e não quantos por cento?"

(S12 – R1 – 4).

"Inadequada. O aluno não entendeu que a resposta seria a quantidade de alunos, 120 e não o percentual."

(S17 – R1 – 5)

Interpretação dos erros

Os dados a seguir representam a distribuição dos sujeitos em percentual de acordo com as categorias.

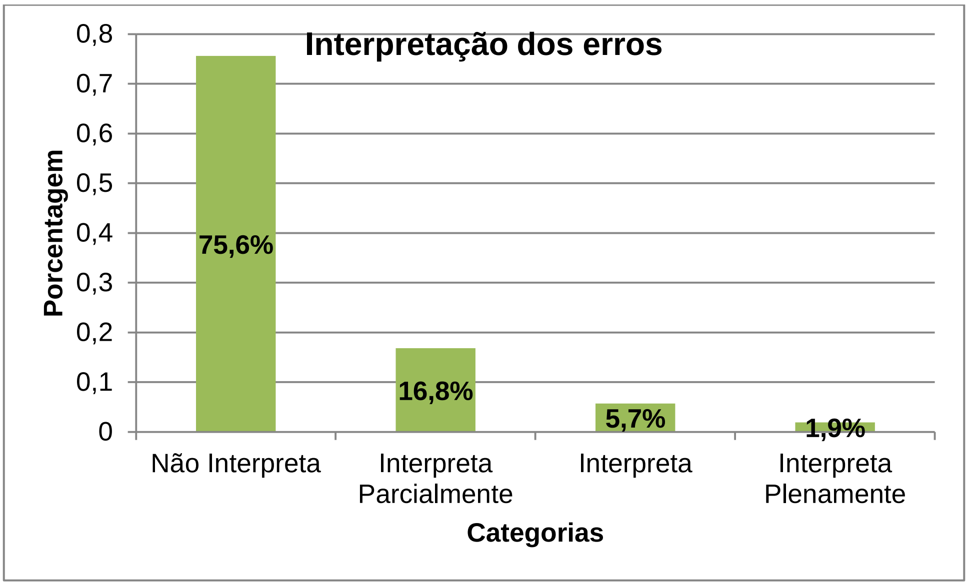


Gráfico 10 – Item 3, resposta 1

Mais de $\frac{3}{4}$ dos sujeitos não consegue interpretar os erros da questão, não descrevem o processo desenvolvido pelos alunos, se bem que nesse caso o processo seria apenas mental, pois não há registro de percurso, temos apenas a resposta final, também não apontam as possíveis hipóteses que guiaram os alunos nessa direção. Esse grande grupo de professores expressa a interpretação da resolução da questão abordando praticamente duas vertentes, a primeira desqualificando a aprendizagem dos estudantes sobre o conteúdo e a segunda descrevendo de forma não convincente o percurso dos erros. Vários sujeitos atribuem à resposta 50% a subtração 100% - 50%, mas as resoluções dos estudantes não trazem evidências neste sentido, não há registros que sustentem essas afirmações, a não ser que pensássemos em cálculo mental. Mesmo assim, seria um argumento frágil, pois a questão não se resolve por meio de uma subtração e neste caso só se encontra 50% como resposta porque o valor inicial também é 50%. Vamos imaginar que a questão demandasse inicialmente 40%, então resolvendo a subtração 100% - 40% = 60%, analogamente afirmariam que 60% sabem jogar voleibol o que representa uma resposta absurda. Assim é mais provável que os 50% advenham dos dados do problema e não de uma subtração, foi apenas uma repetição de uma informação do enunciado. A seguir dois comentários dos professores que simbolizam as duas vertentes citadas.

"Ele não apresenta conhecimento do assunto e responde aleatoriamente."
(S9 – R1 – 4).
"O aluno faz uma subtração 100% - 50% = 50% e encontra a resposta."
(S7 – R1 – 5).

Cerca de 17% dos sujeitos interpretam parcialmente os erros, esses sujeitos revelam-se capazes apenas de apontar de forma pouco convincente o provável percurso de resolução estabelecido pelos alunos. Os professores tendem a demonstrar dificuldades em interpretar com desenvoltura o processo resolutivo em discussão, assim fazem afirmações pouco consistentes, conforme veremos a seguir.

"O aluno compreendeu que 50% é a resposta e copiou do texto."
(S14 – R1 – 4).
"Porque o aluno compreendeu que 50% é a metade."
(S15 – R1 – 4).

Aproximadamente 6% do total de sujeitos descrevem com segurança o provável raciocínio desenvolvido pelos alunos, eles apontam que a resposta foi uma transcrição dos dados da questão. Neste caso, entendemos que esses professores interpretam bem os erros dos estudantes nessa questão, necessitando um aprofundamento para identificar a razão pela qual os alunos enveredam por esse caminho, talvez fosse o caso de melhorar o conhecimento pedagógico do conteúdo. A seguir a descrição dos sujeitos.

“O aluno localizou a informação no texto; porém não calculou a quantidade de alunos.”
(S21 – R1 – 4).
“O aluno apenas interpretou a questão e respondeu com as mesmas palavras do enunciado.”
(S3 – R2 – 4).

Apenas 4 professores, cerca de 2% interpretam os erros de modo adequado, ou seja eles conseguem descrever o raciocínio que conduziu os alunos durante a resolução da atividade e estabelecem hipóteses para causas dos erros. Assim, esses quatro sujeitos parecem ter domínio do conhecimento do conteúdo matemático em discussão, bem como do conhecimento pedagógico do conteúdo. Esses indivíduos descrevem que os alunos provavelmente por apresentarem dificuldades na resolução da atividade, determinaram a resposta utilizando dados do enunciado da questão, situação que segundo eles é frequente. Segue descrição dos professores neste sentido.

“O aluno repetiu o mesmo valor da questão. Acho que teve dificuldade de resolver e lançou mão dessa situação.”
(S10 – R5 – 4).
“Ele repete a resposta em percentual porque não consegue resolver.”
(S13 – R5 – 5).

Discussão coletiva

Em relação inadequação da resposta, os sujeitos ficaram divididos, uma parte entendia que a solução encontrada pelos estudantes fazia sentido justificando que a quantidade de alunos que sabe jogar voleibol é 50%. A outra parte argumentava que o enunciado solicita a resposta em quantidade o que exige determinar 50% de 240, logo, a resposta não pode ser 50%. Aparentemente, não houve consenso, conforme veremos em um trecho do diálogo.

P: “Então, de acordo com a classificação proposta (inadequada, pouco adequada, adequada e muito adequada), como vocês julgam essa resposta (50%)?”

E: “Inadequada.”

Q: “Acho adequada.”

P: “Queria que vocês justificassem o porquê da inadequação e da adequação!”

(...)

Q: “Veja eles dão uma resposta e fica claro que 50% dos alunos sabem jogar, por isso que acho adequada.”

(...)

E: “A pergunta é ‘esse percentual representa quantos alunos?’ Então a resposta não pode ser dada em por cento!”

(...)

Quanto interpretação dos erros, um grupo de professores entendia que a resposta 50% foi obtida por meio de uma subtração, ou seja, 100% - 50%. O diálogo parece ter demovido essa ideia e houve uma concordância se não unânime, ampla, que essa resposta é oriunda da transcrição do enunciado da atividade. Segue trechos da discussão com esse teor.

(...)

P: “Como vocês explicam o processo de resolução percorrido pelos alunos para chegarem a resposta 50%?”

R: “Fizeram uma subtração 100% - 50% = 50%.”

P: “Mas esse procedimento funciona? E se no enunciado ao invés de 50% fosse 20%, ao subtraírem 20% de 100% teriam 80%, essa resposta servia?”

B: “Não!”

C: “Na resposta do aluno não aparece nenhuma operação, eu acho que ele apenas copiou do texto, não sabia como resolver e copiou.”

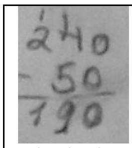
R: “Pode ser.”

(...)

Resposta 2

3. Um professor de educação física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Esse percentual representa quantos alunos?

Protocolo:



A2 T2 12

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:
A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

O gráfico a seguir representa a distribuição das respostas dos sujeitos em percentual quanto identificação de respostas inadequadas.

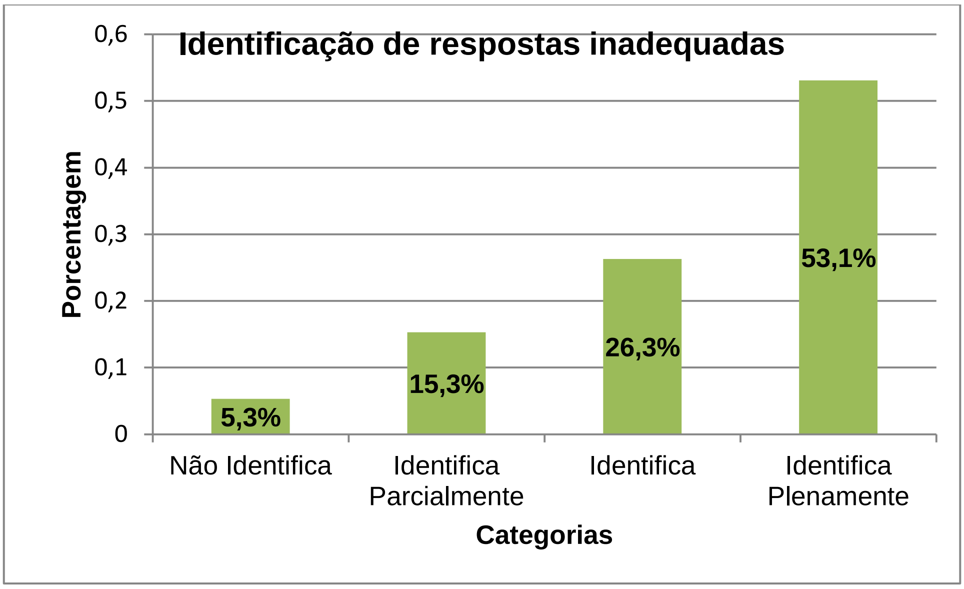


Gráfico 11 – Item 3, resposta 2

Apenas cerca de 5% dos sujeitos não identifica a inadequação da resposta, classificando a solução determinada pelos estudantes de muito adequada. Esse grupo de 11 sujeitos parece se apoiar no resultado do cálculo numérico, ou seja, os alunos resolvem corretamente a subtração. Assim, esses professores não fazem relação da resposta dos estudantes com a atividade em discussão, eles apenas analisam se a estratégia aplicada foi desenvolvida satisfatoriamente, mesmo não sendo adequada para resolver a questão. O testemunho dos professores a seguir sinaliza nessa direção.

"Muito adequada. O aluno do 5º ano já sabe subtração com reserva."
(S6 – R2 – 4).
"Muito adequada. O cálculo do aluno está correto."
(S2 – R7 – 5).

Aproximadamente 15% dos professores identificam parcialmente a inadequação da resposta eles apontam que a solução encontrada pelos estudantes é adequada. Esses sujeitos parecem habitar uma linha tênue, ao mesmo tempo em que concordam com as respostas também apresentam ressalvas. Dessa forma, podemos perceber indícios no sentido de que já existe uma compreensão, ainda que incipiente, da inadequação da resposta em discussão. Seguem a descrição dos professores ratificando esse entendimento.

"Adequada. A resposta está correta, embora ele tenha utilizado um recurso pouco adequado."
(S15 – R5 – 5)
"Adequada. Porque em sua visão, através da subtração teria a quantidade exata, mesmo sendo errada."
(S8 – R1 – 4).

Aproximadamente 26% dos sujeitos classificam a resposta como pouco adequada, que significa a identificação da inadequação da solução apresentada pelos alunos. Essa identificação é fortemente marcada pelos registros dos sujeitos que rejeitam de forma convincente as respostas estabelecidas, mas fazem no aspecto geral, sem descrever especificamente as particularidades da inadequação da resposta. Seguem trechos transcritos dos testemunhos dos sujeitos.

"Pouco adequada. Não houve entendimento de porcentagem."
(S5 – R1 – 4).
"Pouco adequada. Ele não fez a operação adequada."

(S1 – R5 – 5)

Um pouco mais de 53% dos sujeitos afirmam que a solução atribuída pelos estudantes é inadequada, ou seja, identificam plenamente a inadequação da resposta. Esse grande grupo de professores consegue apontar com detalhes a inadequação da resposta, apontando a solução correta ou a estratégia inadequada que foi utilizada. Vejamos a seguir a transcrição dos relatos de alguns sujeitos que embasam essa análise.

“Inadequada. Errada, pois seria 240 dividido por 2, que é igual a 120.”
(S4 – R7 – 4).

“Inadequada. A criança não compreende a proposta do enunciado e faz uma subtração que apesar de correta não responde a questão.”
(S11 – R5 – 5)

Interpretação dos erros

Os dados a seguir representam em percentual a interpretação dos erros dos sujeitos distribuídos em categorias.

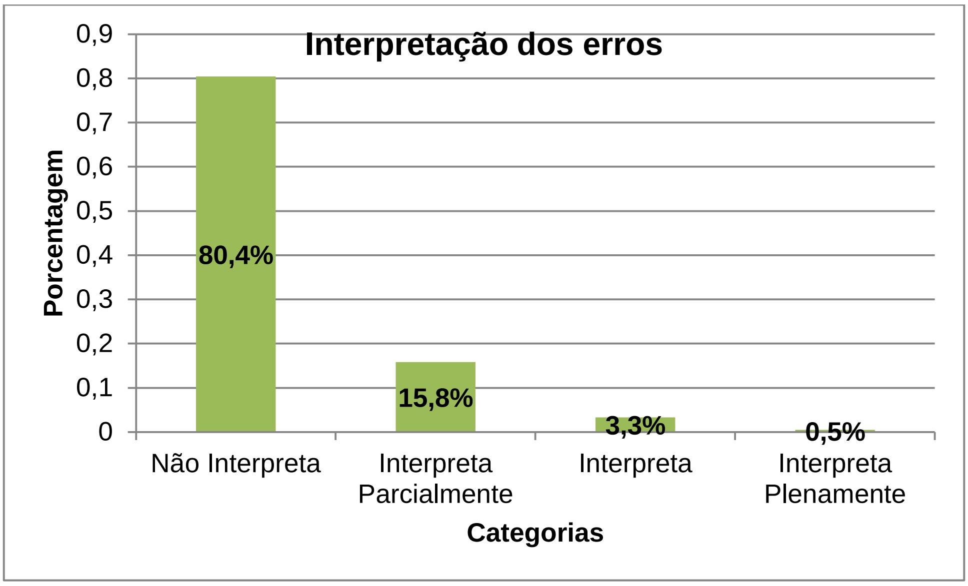


Gráfico 12 – Item 3, resposta 2

Cerca de 80% dos sujeitos não buscam uma razão para os erros, mesmo uma grande parte deles identificando a inadequação da resposta, como vimos na análise anterior. Há evidências que nesse grupo os professores apresentam dificuldades em lidar com o conhecimento pedagógico do conteúdo que, de acordo com Cury e Vianna (2012, p. 34), "Conhecer um conteúdo, portanto, na concepção do conhecimento pedagógico, significa poder dar respostas aos alunos sobre quaisquer questões a respeito daquele conteúdo." Como podemos ver, os professores não explicam nem o percurso explorado pelos alunos nem as possíveis hipóteses que contribuíram para os erros. As respostas dos sujeitos estão fundamentadas na ausência do conhecimento dos alunos em relação ao conteúdo, que é bastante evasiva para justificar as estratégias aplicadas na atividade em discussão. Vejamos a seguir a descrição dos sujeitos.

"O aluno não domina o conteúdo."
(S20 – R1 – 5).
"Esse aluno não estudou porcentagem."
(S17 – R1 – 4).

Praticamente 16% dos professores interpretam de modo bastante superficial os erros da questão. Os sujeitos não conseguem explicar com clareza o raciocínio utilizado pelos alunos, mas deixam nas entrelinhas pistas que já interpretam os erros. Ainda é uma interpretação parcial, mas já apontam alguns aspectos que se relacionam com as causas dos erros. A seguir a transcrição dos relatos dos professores que apontam nessa direção.

"O aluno não tem conhecimento de números decimais e acha que 50% é o mesmo que 50."
(S4 – R6 – 5).
"Ele representa 50% com o valor numérico e não percentual."
(S2 – R4 – 5).

Apenas pouco mais de 3% dos sujeitos são capazes de interpretar os erros dos alunos. Esse pequeno grupo de professores consegue descrever com detalhes a estratégia utilizada pelos estudantes, no entanto, não justificam o porquê da provável escolha da estratégia. Seguem depoimentos dos professores que indicam essas evidências.

"Esse aluno não entende sobre porcentagem, ele fez subtração misturando os números de alunos com a porcentagem."

(S18 – R1 – 5)

"Este subtraiu o percentual do total de alunos, misturando quantidade com percentual."

(S16 – R6 – 5).

Tão somente meio por cento do total de professores, que em valores absolutos representa um sujeito, interpretam os erros em sua plenitude; esse professor descreve o processo resolutivo minuciosamente e justifica possíveis razões que levam os estudantes a utilizarem a estratégia empregada na questão. Não é fácil para os estudantes definir em cada problema qual o procedimento que mais se adequa; fazer a escolha correta da operação a ser utilizada, manipular corretamente os dados do problema e interpretar adequadamente as representações, tem sido tarefas bastante complexas para os nossos alunos. Segundo estudos de Nunes e Bryant,

> *Uma das dificuldades de usar técnicas matemáticas como ferramentas de pensamento parte da relação entre o domínio de procedimentos gerais e seu uso em situações específicas. Dominar um procedimento geral frequentemente não nos diz quando o procedimento é uma boa escolha para resolver um problema. Temos que entender a situação-problema a fim de pensar matematicamente sobre ela. (NUNES & BRYANT, 1997, p.30).*

Como, de forma geral, o ensino e a aprendizagem enfatizam o domínio de procedimentos e técnicas em detrimento da compreensão da situação-problema, é comum nossos estudantes aplicarem procedimentos desconectados com o teor da atividade matemática. Assim, se utilizam dos procedimentos que mais dominam e, geralmente, nos anos iniciais do ensino fundamental, são as operações fundamentais, principalmente a adição e a subtração.

A seguir o relato do professor analisando a resposta da questão em discussão.

"Isto sempre acontece neste tipo de questão, ou eles subtraem ou adicionam; os mesmos não se preocupam em compreender o texto dos problemas, então pega os números e fazem as operações, usou 50% como se fosse o número cinquenta, mas acertou a operação, que não é a resposta da questão."

(S16 – R1 – 4).

Discussão coletiva

Na discussão coletiva os sujeitos tendem a concordar com a inadequação da resposta e se estabelece um diálogo bastante interessante em relação utilização de procedimentos inadequados na resolução de tarefas matemáticas. A seguir um trecho da transcrição do diálogo.

(...)

P: "O que vocês pensam que pode ter levado os estudantes a subtraírem o percentual do total de alunos?"

J: "Os alunos não querem pensar e respondem de todo jeito."

B: "A gente passa os problemas e eles já vão perguntando que conta tem que fazer."

P: "Os problemas trabalhados em sala de aula contribuem verdadeiramente para fazer os alunos pensarem, ou favorecem esse tipo de raciocínio?"

G: Contribuem!

L: "Na verdade os alunos têm preguiça de estudar, não têm compromisso!"

(...)

Nas entrelinhas transfere-se a responsabilidade da aprendizagem para os alunos, a escola desempenha bem o seu papel, mas os estudantes não colaboram, são dispersos e desinteressados e, dessa forma, não conseguem aprender.

Nessa perspectiva o papel do professor seria reduzido tão somente apresentar o conteúdo e cada aluno se apropria dele como for possível. Que segundo Pernambuco (2012, p. 22) é "o ensino como transmissão e a aprendizagem como a recepção dos conhecimentos". Entendemos de acordo com Pernambuco (2012) o professor como mediador, aquele sujeito capaz de criar situações que proporcione aos estudantes os confrontos de concepções para que esses sejam construtores do seu próprio conhecimento.

6.4 Questão 4 – Registro na língua natural

Item

4. Que quantidade obtemos se juntarmos dez décimos? E se juntarmos cem centésimos?

O item está relacionado com a expectativa de aprendizagem "perceber que uma unidade corresponde a 10 décimos ou a 100 centésimos ou, ainda, a 1000 milésimos." O trabalho com os números decimais exige a compreensão do significado de décimos, centésimos e milésimos e é importante perceber, por exemplo, as relações entre 10 décimos e 1 unidade e entre 100 centésimos e 1 unidade. De acordo com Pernambuco,

> *O recurso ao nosso sistema monetário permite que o estudante atribua sentido à representação decimal dos números racionais. Por exemplo, associar R$ 0,01 (um centavo) a um centésimo de real. Isso permite, também, o estabelecimento de relações, tais como R$ 0,10 (dez centavos) como dez centésimos do real, que equivale a um décimo do real. (PERNAMBUCO, 2013, p. 172).*

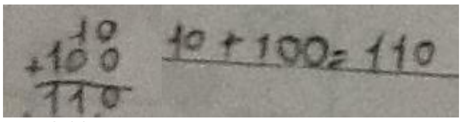
Dessa forma, se R$ 0,10 (dez centavos) equivale a um décimo do real, dez décimos de real representa um real, ou seja, uma unidade. Analogamente se R$ 0,01 (um centavo) equivale a um centésimo do real, cem centésimos de real representa uma unidade de real.

Assim, a resolução da questão exige a compreensão das relações entre décimos e a unidade e entre centésimos e a unidade, ou seja, dez décimos equivalem a uma unidade e cem centésimos também equivalem a uma unidade.

A questão é composta por duas perguntas, chamamos a primeira pergunta de item (a) e a segunda pergunta de item (b).

Resposta 1a

4. Que quantidade obtemos se juntarmos dez décimos? E se juntarmos cem centésimos?

Protocolo:  A4 T2 09
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizadas(s) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

O gráfico a seguir representa em percentual a distribuição dos sujeitos quanto à identificação de respostas inadequadas.

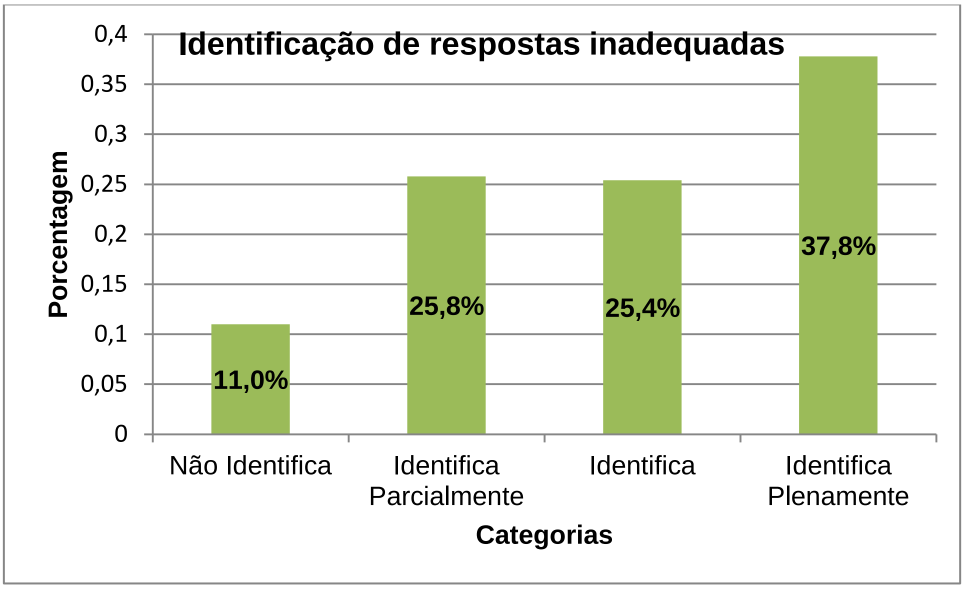


Gráfico 13 – Item 4, resposta 1a

Temos 11% dos sujeitos que julgam a resposta muito adequada e, dessa forma, não identificam sua inadequação. Esses sujeitos demonstram insuficiência no conhecimento matemático em discussão, pois afirmam que a solução encontrada pelos alunos está correta. De acordo com Mandarino (2009) há indícios que os professores trazem em sua formação problemas conceituais, que contribuem para restringir a abordagem a os conteúdos. Assim,

> *O trabalho com números racionais positivos, tanto na forma de fração quanto na notação decimal, fica restrito à representação de inteiros contínuos; não se exploram adequadamente: os diferentes significados; as propriedades do sistema de numeração decimal; a relação com o sistema métrico, para citar alguns exemplos. (MANDARINO, 2009, p. 46).*

Provavelmente neste cenário encontram-se esse grupo de professores e seus relatos sinalizam para esse contexto.

"Muito adequada. A resposta do aluno foi coerente com a pergunta se juntarmos 100 + 10 = 110."

(S3 – R3 – 5).

"Muito adequada. O aluno entende e sabe aplicar os números racionais."

(S1 – R7 – 5).

Aproximadamente 26% dos professores entendem a resposta como adequada e assim são classificados na categoria dos que identificam a inadequação da resposta parcialmente. Parcialmente porque parece não haver ainda segurança para apontar a inadequação da solução. Esse grupo de professores habita um terreno ambíguo, pois enquanto concordam com as respostas dos alunos, buscam justificar que eles não seguiram o caminho mais correto. A seguir testemunhos dos professores que apontam neste sentido.

"Adequada. A resposta está adequada, porém devia considerar também os números decimais."

(S1 – R6 – 4).

"Adequada. O aluno usou a lógica correta somando 10 + 100, devia usar os números decimais.

(S18 – R1 – 5).

Cerca de 25% dos sujeitos identificam a inadequação da resposta e a julgam como pouco adequada. Esses professores compreendem que a resposta é inadequada, no entanto não conseguem explicar com profundidade que a solução proposta pelos alunos não resolve a tarefa matemática. As justificativas se dão em linhas gerais, mas fica evidente que eles não concordam com a resposta. Segue texto dos professores ratificando essa análise.

"*Pouco adequada. O aluno não utiliza os valores solicitados no problema."*

(S9 –R2 – 5).

"Pouco adequada. Ele somou números que não tem a ver com a resposta."

(S17 – R2 – 5).

Praticamente 38% dos professores identificam plenamente a inadequação da resposta e afirmam que a resposta é inadequada. Esse grupo de sujeitos traz elementos intrínsecos à resposta estabelecida pelos estudantes que fundamentam a sua impertinência. São aspectos consistentes e relevantes que evidenciam o bom trato desses sujeitos com o conteúdo matemático em discussão. Os relatos a seguir ratificam essa compreensão.

"Inadequada. A resposta é incorreta, ele não utilizou décimos e sim dezenas e centenas."

(S5 – R3 – 4).

"Inadequada. A representação correta seria 1 inteiro, o aluno utilizou dezena e centena."

(S14 – R1 – 5)

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir representa em percentual a distribuição dos sujeitos em categorias quanto a interpretação dos erros.

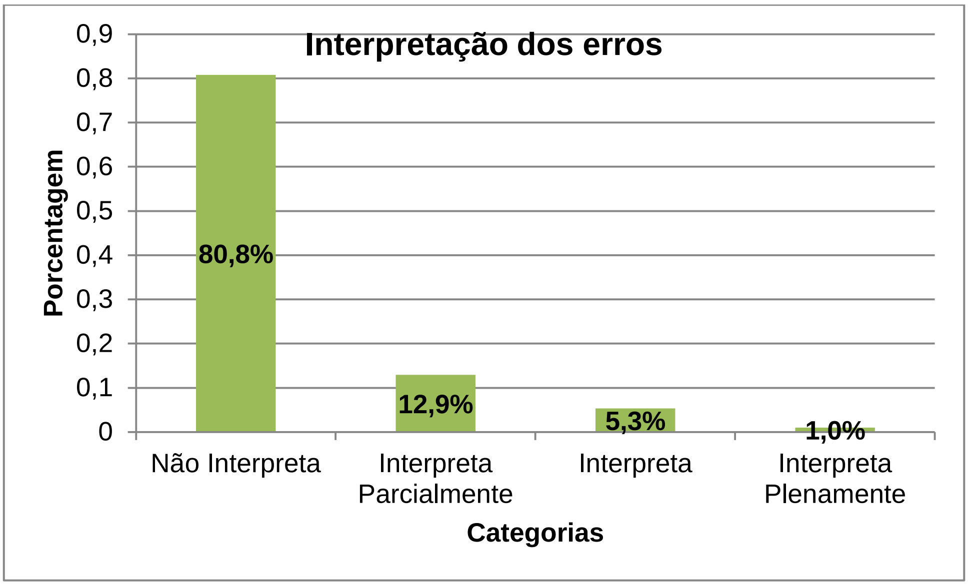


Gráfico 14 – Item 4, resposta 1a

Praticamente 81% dos sujeitos não conseguem interpretar os erros constantes na resposta, esse grande grupo de professores não estabelece um significado real para as soluções apresentadas pelos alunos. Parece haver um conformismo generalizado com as dificuldades de aprendizagens dos estudantes que é utilizado para justificar as causas dos erros. O depoimento dos professores a seguir retrata esse quadro.

"Porque ele não vai entender isso!"

(S7 – R2 – 4).

"O aluno não se apropriou dos números decimais."

(S8 – R7 – 5).

Cerca de 13% dos professores fazem uma interpretação muito incipiente dos erros, revelando apenas indícios de como podem terem se constituídos. Esses sujeitos não são capazes de descrever a trajetória utilizada pelos estudantes, tampouco tentam obter uma fundamentação para os erros. Fazem uma interpretação mais geral, trazendo alguns elementos que estão relacionados aos erros. Vejamos a seguir a descrição dos professores.

"Ele não soube transformar os valores pedidos."
(S8 – R1 – 5).
"Ele considerou apenas as quantidades que cada número representa, sem levar em conta o conhecimento sobre números fracionários."
(S10 – R1 – 4).

Aproximadamente 5% dos sujeitos interpretam os erros cometidos pelos estudantes na tarefa matemática em discussão. Esses professores descrevem a adição realizada pelos alunos com o uso indevido de dezenas e centenas ao invés de décimos, no entanto, não estabelecem, ainda, hipóteses que conduzem os estudantes a esses erros. A seguir transcrição de relatos dos professores com esse teor.

"O aluno faz uma adição, mas não considera décimos, utiliza dezena e centena."
(S23 – R1 – 5).
"O aluno não compreendeu a ideia de décimos, fez uma adição usando dezena e centena."
(S1 – R5 – 5).

Dois professores, cerca de 1% do total de sujeitos, fazem uma interpretação plena dos erros em análise. Além de descrever com precisão o percurso da resolução apontam possíveis hipóteses que podem ter conduzido os estudantes para este caminho. A seguir podemos verificar as descrições dos professores.

"Realizaram uma adição com números naturais, deviam ter usado os décimos (0,1). Acho que se explora mais os números naturais ai acontece isso."
(S16 – R2 – 5)

“Fez a adição, mas não usou os décimos pra somar. O aluno trabalha mais com os números naturais.”
(S11 – R1 – 5).

Discussão coletiva

A discussão coletiva expressa a concordância plena pela inadequação da resposta. Um pouco contraditória em ralação a resposta dos sujeitos nos questionários, em que 11% deles afirmaram ser uma resposta muito adequada. Provavelmente se explique pela fala do sujeito “D,” que se coloca com bastante propriedade desqualificando a resposta, tão logo a discussão teve início. Apresentamos a seguir o trecho desse diálogo.

(...)

P: “Gente! E agora, mais uma vez, essa resposta é inadequada, pouco adequada, adequada ou muito adequada?”

D: “Considero inadequada. Porque o aluno tinha que usar os décimos e ele usou números naturais, eu não concordo com essa resposta.”

(...)

Outro aspecto importante que prevaleceu na discussão foi o questionamento da expressão “se juntarmos dez décimos”, eles afirmam que não é possível, juntar com o que? Então, perguntamos e se juntarmos dez unidades, quanto teremos? Logo responderam, 1 dezena! Pelo diálogo podemos inferir que as relações, 10 décimos = 1 unidade; 100 centésimos = 1 unidade, não são exploradas na sala de aula. A seguir a transcrição de parte da conversa.

(...)

B: “Juntar a que?”

Q: “O problema é na questão, pois quem junta o faz com outra parte, mas juntar dez décimos com o que?”

P: “E se ao invés de décimos trocássemos por unidades. A pergunta seria que quantidade obtemos se juntarmos dez unidades?”

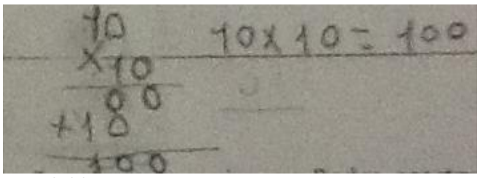
G: “Uma dezena”

(...)

Resposta 2a

4. Que quantidade obtemos se juntarmos dez décimos? E se juntarmos cem centésimos?

Protocolo:



A4 T2 09

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:
A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

O gráfico a seguir mostra em percentual a distribuição em percentual dos sujeitos quanto a identificação de respostas inadequadas.

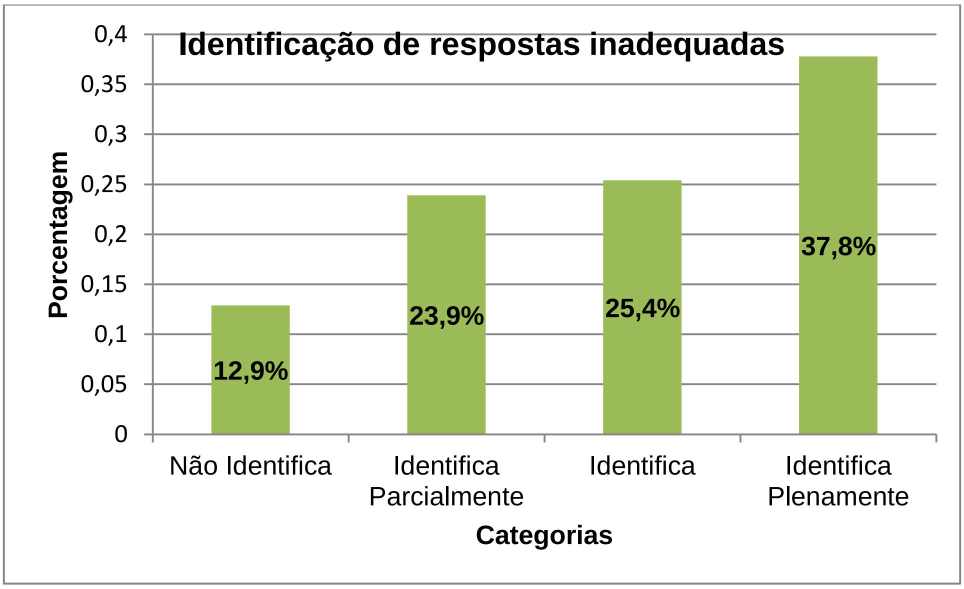


Gráfico 15 – Item 4, resposta 2a

Aproximadamente 13% dos sujeitos entendem a resposta em discussão como muito adequada, o que, de acordo com nossa análise, significa que eles não identificam a inadequação da solução. A maior parte desses sujeitos afirma literalmente que a resposta está correta, que o estudante resolveu a contento a tarefa matemática, enquanto que dois professores julgam a resposta muito adequada porque os alunos resolvem corretamente a multiplicação. Nos dois contextos a situação é preocupante; no primeiro porque não é aceitável que o professor não tenha pleno domínio dos conteúdos que deve ensinar e, no segundo, porque não devemos entender que um conhecimento qualquer do aluno seja suficiente para satisfazer o professor. Seguem relatos dos sujeitos descrevendo esse contexto.

"Muito adequada. A resposta está correta ele compreendeu o problema."
(S21 – R1 – 4).
"Muito adequada. Porque já resolve corretamente a multiplicação."
(S15 – R5 – 5).

Praticamente 24% dos sujeitos entendem que a solução é adequada e se enquadram na categoria que identifica a inadequação da resposta parcialmente. Esses professores são caracterizados pela dubiedade nas descrições, afirmam a coerência das respostas dos estudantes e ao mesmo tempo se encarregam em fazer a negação da pertinência. A seguir podemos acompanhar suas descrições.

"Adequada. Porque eles resolvem a multiplicação, mas precisava usar os décimos."
(S8 – R7 – 5).
"Adequada. O aluno não soube juntar os décimos, mas já domina a multiplicação."
(S16 – R2 – 4)

Para um pouco mais de 25% dos sujeitos a resposta é pouco adequada, ou seja, eles identificam a inadequação da solução em análise. Esse grupo, que representa um quarto do total de sujeitos, desaprova a solução apontada pelos alunos, mesmo sem exibir argumentos mais específicos. Vejamos as descrições dos sujeitos.

"Pouco adequada. Está errado, o aluno não conhece os números decimais."
(S11 – R1 – 4)

“Pouco adequada. Não condiz com a atividade.”

(S3 – R3 – 4)

Cerca de 38% dos professores julgam a resposta como inadequada e, assim, fazem parte dos sujeitos que identificam plenamente a inadequação da solução. Essa identificação plena se cristaliza na descrição feita por esses sujeitos que, ao mesmo tempo em que refutam a solução em discussão, apresentam com desenvoltura o percurso adequado para solucionar a atividade. A seguir os relatos dos sujeitos.

“Inadequada. A resposta está incorreta. O aluno precisa somar ou multiplicar os dez décimos.”

(S10 – R7 – 5).

“Inadequada. Pode ser uma multiplicação, mas tem que ser com os décimos.”

(S10 – R2 – 4).

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir representa em percentual a distribuição dos sujeitos quanto a interpretação dos erros.

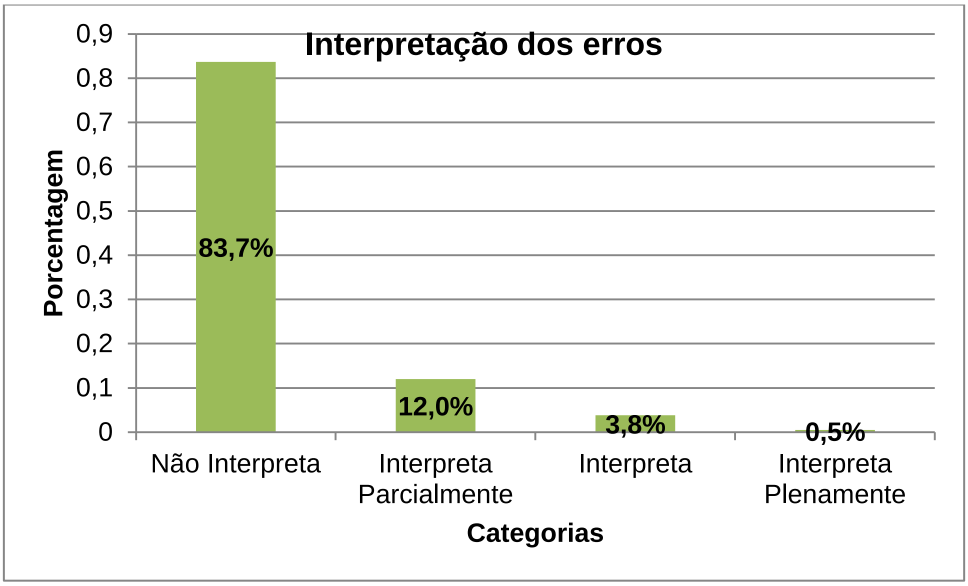


Gráfico 16 – Item 4, resposta 2a

Na análise anterior verificamos que cerca de 87% dos sujeitos identificam o erro com algum grau de profundidade. Quando analisamos como esses sujeitos interpretam os erros, percebemos que praticamente 84% deles não buscam uma interpretação para o erro, contentam-se com a identificação.

De acordo com Torre (2007) a conduta do professor diante do erro deve ser norteada pelo tripé identificação, interpretação e remediação, nessa ordem. Assim, para o professor intervir, ele necessita identificar e interpretar o erro.

Diante dos fatos concordamos com Pinto (2000, p. 23), que afirma "Em geral, o professor tende a orientar sua ação sobre o erro por uma perspectiva essencialmente empirista, isto é, sobretudo corretiva." Se o objetivo do professor é somente a correção na perspectiva da repetição da atividade ele necessita apenas identificar o erro, não precisa buscar as causas que provavelmente originam o erro.

A descrição desse grupo de professores sobre o percurso desenvolvido pelos alunos e as possíveis causas dos erros resume-se tão somente a comentários gerais sobre as respostas, que giram em torno da inadequação da solução, eles não conseguem apontar aspectos importantes que fundamentam os erros. A seguir a descrição dos sujeitos.

"Ele não compreende os números decimais."
(S2 – R2 – 4).
"Não tem conhecimento do conteúdo abordado na questão."
(S13 – R6 – 4).

12% dos professores apresentam argumentos para as origens dos erros, não fazem de forma explicita, mas deixam transparecer aspectos que são inerentes a consolidação dos erros. Na resposta em discussão eles apontam que os alunos só sabem os números naturais, por isso os utilizam para resolver a atividade. Mesmo que subjacente essa afirmação trazem algumas ideias para os erros dos alunos como, por exemplo, o conteúdo números decimais vem sendo trabalhado em sala de aula? Como? A ênfase é para os números naturais? Responder essas perguntas é, sem dúvida, levantar aspectos que fundamentam os erros em discussão. A seguir transcrição dos relatos dos professores que fundamentam essa análise.

"Por não ter domínio dos números decimais o aluno opera apenas com números naturais."
(S13 – R5 – 5).

“O aluno possivelmente não entende números racionais e resolve com os naturais.”
(S17 – R6 – 5).

Cerca de 4% dos sujeitos são capazes de interpretar os erros em discussão. Esses oito sujeitos descrevem corretamente o trajeto da resolução dos estudantes e apontam evidências para as causas dos erros. No entanto, sentimos falta de elementos mais específicos para caracterizar a origem dos erros. Seguem os relatos dos professores.

“Eles fazem uma multiplicação e dez décimos vira 10 x 10, porque só conhecem os números naturais.”
(S1 – R6 – 4).
“Os alunos multiplicam utilizando os números que conhecem que são os naturais.”
(S4 – R7 – 4).

Somente meio por cento dos sujeitos, que corresponde a um professor, interpreta os erros na sua totalidade, esse sujeito descreve minuciosamente a resolução dos estudantes e aponta elementos que provavelmente fundamentam os erros. Segue a descrição do sujeito.

“A criança compreende que deve multiplicar dez (10 x 10) décimos, isso evidencia que apesar de saber que décimo refere-se a 10, não conhece sua representação fracionária e decimal. Nossos alunos praticamente só estudam os números naturais e resolvem os problemas com aquilo que sabem.”
(S11 – R5 – 5)

Discussão coletiva

Mais uma vez houve a convergência das ideias dos sujeitos em relação identificação da inadequação da resposta, eles a entendem como inadequada. Quanto interpretação dos erros, surgiu um fato novo, a hipótese que o erro pode ter sua origem na dificuldade de leitura dos alunos. Vamos acompanhar um trecho do diálogo.

(...)

J: “A maioria dos alunos não domina a leitura nesta série, fica difícil responder as questões.”

Q: “Se eles não conseguem ler não vão responder direito.”

G: “Expressão de concordância.”

P: “Neste caso, parece que os alunos leram, é provável que tenham associado 10 palavra dez e 10 palavra décimos.”

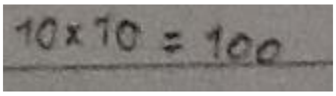
E: “Se foi assim que eles pensaram eles leram.”

(...)

Neste item praticamente 13% dos sujeitos não identificam a inadequação da resposta e quase 84% dos professores não conseguem interpretar os erros. É provável que o registro na língua natural tenha influenciado esse resultado, pelo fato de não conter registro simbólico numérico no enunciado.

Resposta 1b

4. Que quantidade obtemos se juntarmos dez décimos? E se juntarmos cem centésimos?

Protocolo:  A5 T2 11
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

O gráfico a seguir representa em percentual a distribuição dos sujeitos em relação a identificação das respostas inadequadas.

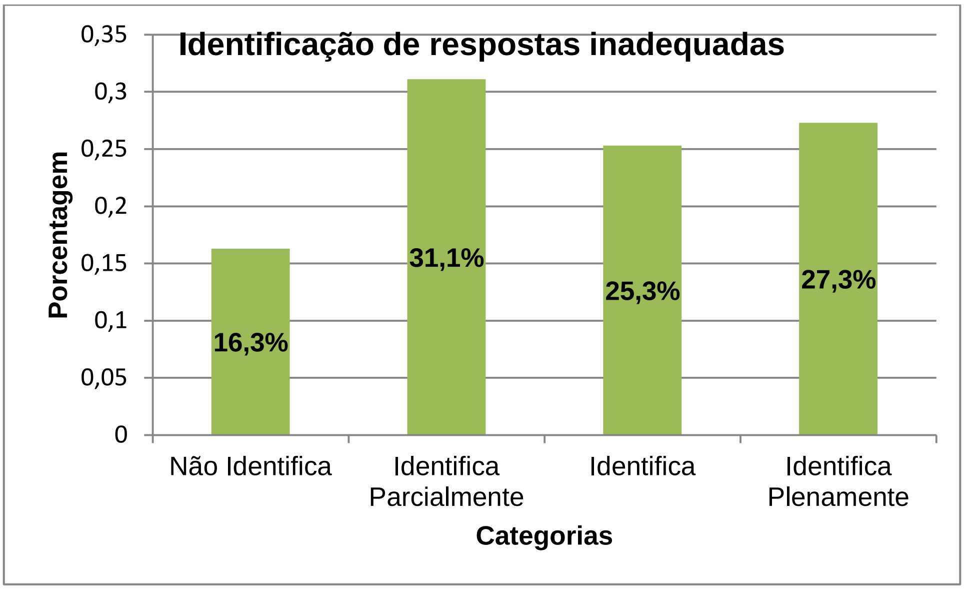


Gráfico 17 – Item 4, resposta 1b

Cerca de 16% dos sujeitos não identificam que a resposta é inadequada e a classificam como muito adequada. O argumento utilizado é que a resolução dos estudantes está de acordo com o que pede a questão. Novamente os professores apresentam vestígios de problemas conceituais já citados na análise da questão 4 – resposta 1a. A seguir os relatos dos professores justificando que a resposta é muito adequada.

"Muito adequada. Ele compreende que 10 x 10 é igual a 100, logo corresponde ao cem centésimos."

(S5 – R1 – 5).

"Muito adequada. Através da multiplicação encontrou a resposta correta."

(S12 – R6 – 4)

Para aproximadamente 31% dos sujeitos a solução em discussão é adequada, assim, esses sujeitos identificam parcialmente a inadequação da resposta. Esse grupo de professores não defende que a resposta esteja correta, mas a entende como adequada porque os alunos são capazes de efetuar corretamente a multiplicação. É a supervalorização da memória em detrimento do raciocínio. Vergnaud (1986) afirma que a resolução de problemas de estruturas aditivas exige dos estudantes a compreensão dos cálculos relacional e numérico e os diferencia apontando que o cálculo relacional está associado às competências mobilizadas na resolução de um problema, são operações que envolvem o pensamento, o raciocínio; já o cálculo numérico associa-se aos procedimentos resolutivos de uma operação, por exemplo, a aplicação do algoritmo da adição. Assim, o fato de realizar cálculo numérico adequadamente não significa que o estudante seja capaz de resolver determinada tarefa matemática, neste caso era necessário também que o cálculo relacional estivesse correto. O que podemos afirmar efetivamente nesta situação é que os estudantes sabem que 10 x 10 = 100. Os depoimentos dos professores sinalizam no sentido da importância da resolução da multiplicação, conforme veremos a seguir.

"Adequada. Porque ele responde, ele sabe a multiplicação."
(S1 – R1 – 4).
"Adequada. Acertou 10 x 10 = 100.
(S10 – R7 – 5).

Cerca de um quarto dos sujeitos julga a solução como pouco adequada e, de acordo com a nossa análise, eles identificam a inadequação da resposta. A característica principal desse grupo de professores é a discordância da resposta em discussão apoiada por uma justificativa bastante geral, que não explica especificamente a inadequação. Vejamos os relatos dos sujeitos.

"Pouco adequada. A resposta não é essa, não é com os números naturais."
(S11 – R6 – 4).
"Pouco adequada. Não está correta, falta conhecimento sobre a questão."
(S14 – R6 – 4)

Cerca de 27% dos professores classificam a resposta como inadequada, identificando plenamente a sua inadequação. Esses sujeitos, além de refutar a solução em discussão, conseguem um argumento próprio para fundamentar a impertinência da resposta. A descrição dos professores a seguir revela essa compreensão.

"Inadequada. O aluno não resolveu corretamente, não usa os centésimos (0,01)."
(S11 – R5 – 4).
"Inadequada. Para resolver o exercício precisava usar os centésimos e ele usou os números naturais."

(S11 – R1 – 5).

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir representa em percentual a distribuição dos sujeitos quanto à interpretação de erros.

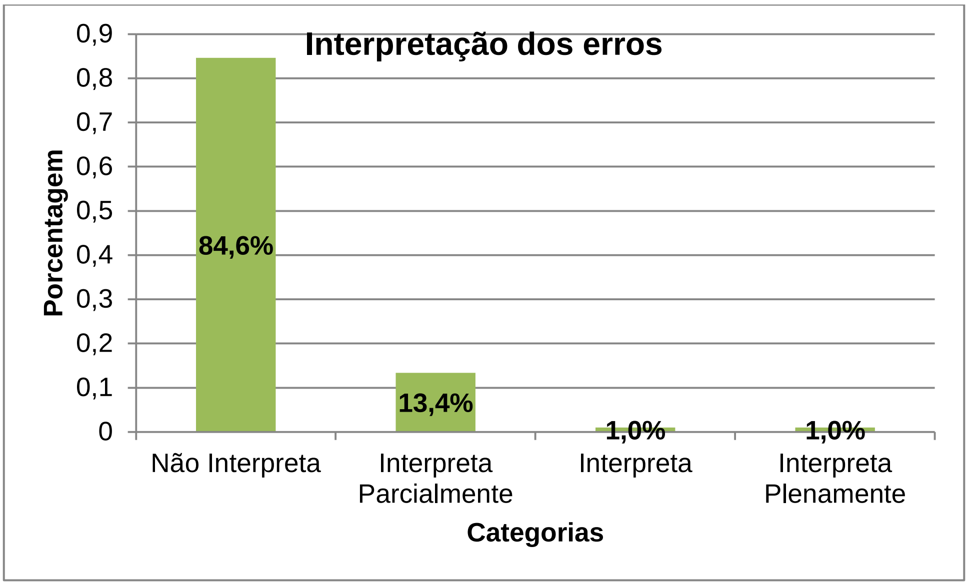


Gráfico 18 – Item 4, resposta 1b

Nessa resposta, praticamente 85% dos sujeitos não descrevem causas reais para os erros, eles limitam-se a atribuir ao acaso e à negligência dos estudantes. Como já afirmamos aqui na questão 1 – resposta 2, o erro raramente acontece por acaso, tem sempre uma razão de ser, contudo os professores parecem estarem centrados nos acertos e a remediação se dá por meio da repetição, sem considerar as especificidades dos erros e dos estudantes. Nesse sentido, Zabala afirma que,

> *O professor atua com o grupo como se este fosse um todo homogêneo, o discurso geralmente é unidirecional e a forma de ensino/aprendizagem corresponde a um esquema que consiste em exposição, memorização do que foi exposto, verbalização do memorizado por meio de uma prova oral ou escrita e sanção sobre o resultado (ZABALA, 2004, p. 187).*

Interpretar as razões dos erros, não tem sentido nessa concepção de ensino e aprendizagem se o professor está atrelado ao esquema exposição e memorização, ele compreende que o erro será eliminado com a exaustão da repetição do conteúdo e, para tanto, necessita somente identificar o desacordo da resolução. Talvez esse contexto explique o porquê da ausência à busca pelas causas dos erros pelos nossos professores.

Mas, como afirma Torre (2007, p. 28) “o bom médico não se limita a eliminar a febre, a dor ou as palpitações, mas se vale delas para diagnosticar a origem do mal. Talvez o exemplo não seja de todo adequado, mas nos ajuda a entender o valor diagnóstico do erro.” Assim, o professor não deve apenas identificar o erro, para eliminá-los verdadeiramente precisa conhecer suas raízes, é o diagnóstico que possibilitará uma intervenção consciente, capaz de demover os estudantes de estratégias que por razões diversas eles julgam verdadeiras. Seguem os relatos de alguns professores.

“O aluno respondeu o que veio na cabeça.”

(S9 – R6 – 4).

“Creio que se eles prestassem mais atenção na questão saberiam responder.”

(S8 – R2 – 5).

No item em discussão, praticamente 13% dos professores revelam que convivem com a interpretação dos erros, mesmo não ficando muito claro se o processo acontece de forma consciente; o fato é que esses sujeitos apontam elementos intrínsecos aos erros apresentados pelos estudantes. Há um entendimento que as respostas estão centradas nos números naturais o que possibilita professores buscar justificativas para esse fenômeno. Se as causas dos erros ainda não são descritas de forma explicita, contudo, aponta um princípio norteador que pode conduzir os professores ao centro da discussão, ou seja, diagnosticar que os alunos não lidam bem com os números racionais pode remeter os professores a buscarem justificativas e, neste caso, estarão desenvolvendo o exercício de interpretar os erros. A seguir o testemunho de alguns professores enfatizando o uso dos números naturais.

“A falta de conhecimento dos números fracionários obrigam eles a trabalharem com os naturais.”

(S23 – R1 – 5).

“Resolveu o problema com os números naturais, porque é o que ele sabe.”

(S9 – R5 – 5).

Somente 1% dos sujeitos, dois professores, são capazes de interpretar os erros neste item. Eles conseguem delinear o percurso da resposta estabelecida pelos estudantes com bastante clareza e apontam de forma mais tímida as hipóteses para os erros. No entanto, podemos afirmar que os elementos descritos pelos professores, se forem discutidos com os estudantes, são capazes de proporcionar a eles uma reflexão sobre os seus erros, o que significa o princípio para se desfazer de ideias equivocadas. A seguir a descrição de um dos sujeitos que revela o uso da multiplicação com números naturais e a interpretação equivocada de cem centésimos.

"Ele associou cem centésimos a 10 x 10, usando a multiplicação. Terá que identificar e distinguir o que é natural e o que é racional."
(S7 – R6 – 5).

Dois professores, o que representa 1% do total de sujeitos, faz a interpretação que consideramos ideal, para o uso dos erros como estratégia pedagógica. Eles apontam elementos significativos tanto na descrição dos procedimentos em discussão quanto na busca de causas que fundamentam estratégias inadequadas, utilizadas pelos estudantes. Quando os alunos associam décimo a 10, não o fazem aleatoriamente, isso pode ter origem na relação uma dezena = 10 unidades e, assim, o décimo também é 10 ou, ainda, entendendo o décimo como número ordinal e usando sua representação cardinal; O 10 x 10 pode ser a representação de cem, é comum nas atividades em sala de aula as trocas de unidades, dezenas e centenas, trocar dez dezenas por uma centena. Assim os estudantes agem com convicção, se baseiam em evidências falsas que, contudo, pra eles, tem uma lógica. Nesse sentido, concordamos com Pinto (2000, p. 49) quando afirma "o diagnóstico deve detectar as dificuldades subjacentes, além dos conceitos e da compreensão que a criança possui. Sendo assim, é importante determinar o processo: o 'como' e o 'porquê'." Nos parece que esses dois professores elencaram elementos pertinentes ao como e o porquê, segue o relato de um deles que entendemos contemplar esse perfil.

"Multiplicou 10 x 10, pode ter entendido que cem é 10 vezes 10. A escola até o quinto ano explora muito os números naturais, a maioria dos exercícios são com números naturais."

(S16 – R1 – 5).

Discussão coletiva

A discussão coletiva não aponta nenhum elemento novo quanto a identificação de respostas inadequadas, uma ampla maioria concorda que a solução é inadequada, no entanto houve um questionamento, mas a discussão não fluiu porque um professor estabeleceu imediatamente a resposta da questão e provavelmente inibiu o debate, mesmo o pesquisador tentando resgatar a fala do professor.

Quanto interpretação dos erros, confirma-se a atribuição deles ao acaso, falta de compromisso dos alunos e pouca ênfase ao trabalho com os números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental. Surgiu uma discussão interessante a respeito do uso da multiplicação, quando o item traz em seu enunciado a palavra "juntarmos", a seguir um trecho do diálogo.

(...)

S: "Os alunos deviam ter feito uma adição e não uma multiplicação."

P: "Porque?"

S: "Porque a questão fala em juntar e juntar é adição."

P: "Vocês concordam?"

L: "Eu concordo, se o aluno lê-se a resposta direito ele ia somar."

E: "Mas também pode fazer pela multiplicação, acho até mais fácil, cem centésimos é um centésimo vezes cem."

(...)

Essa discussão reforça a ideia enraizada na escola que cada problema só pode ser resolvido por meio de uma única estratégia, seguindo um esquema em que todos os estudantes resolvem de forma semelhante. Nesse contexto, concordamos com Brasil, que afirma,

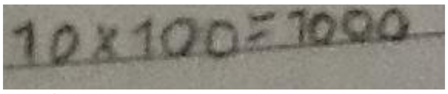
> *É importante que as estratégias individuais sejam estimuladas. São elas que possibilitam aos alunos vivenciarem as situações matemáticas articulando conteúdos, estabelecendo relações de naturezas diferentes e decidindo sobre a estratégia que desenvolverão. A socialização dessas estratégias com toda a turma amplia o repertório dos alunos e auxilia no desenvolvimento de uma atitude mais flexível frente a resolução de problemas. (BRASIL, 2014, p. 11).*

Assim, é fundamental estimular a pluralidade de estratégias, dando preferência para os problemas que permitam sempre a variedade de procedimentos resolutivos para romper com a ideia do aluno de unicidade no ato da resolução de uma atividade matemática.

Nesse item, nos chama atenção o elevado número de professores (mais de 16%) que afirma que a resposta está correta, o que significa concordar que cem centésimos equivalem a cem unidades. E, nesse caso, parece claro a deficiência dos professores em relação ao conhecimento do conteúdo matemático em discussão. É preocupante também o percentual de professores (quase 85%) que não conseguem uma justificativa plausível para descrever a estratégia e as possíveis origens dos erros. Não se trata aqui do conhecimento do conteúdo, mas do conhecimento pedagógico do erro.

Resposta 2b

4. Que quantidade obtemos se juntarmos dez décimos? E se juntarmos cem centésimos?

Protocolo:  A5 T2 11
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

Os dados a seguir representam a distribuição dos sujeitos quanto à identificação de respostas inadequadas em percentual.

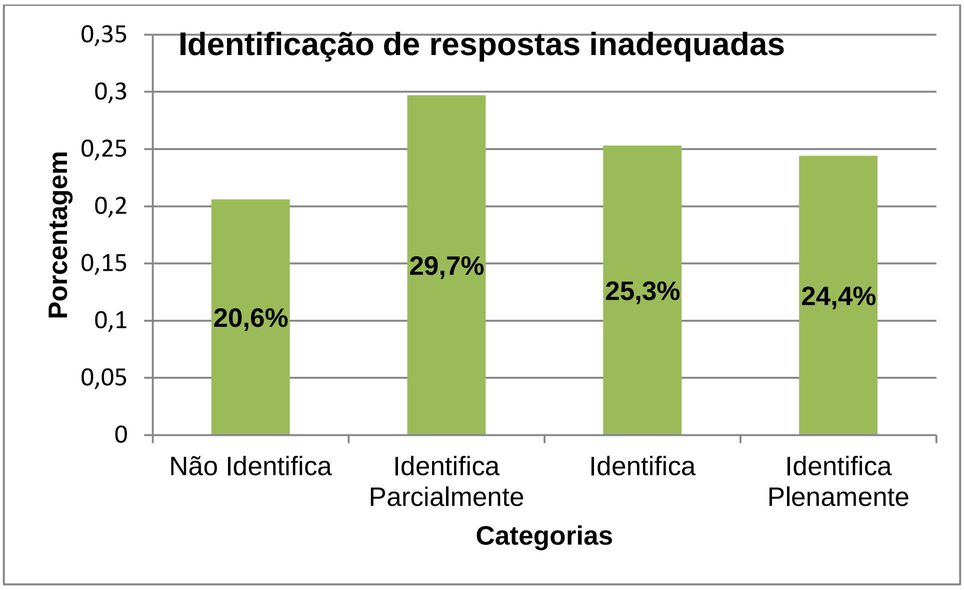


Gráfico 19 – Item 4, resposta 2b

Cerca de 21% dos sujeitos não identificam a inadequação da resposta e consequentemente classificam a solução como muito adequada. Esse grupo de sujeitos repete a análise do item 4 – resposta 2a, ou seja, para justificar que a solução em discussão é muito adequada apoiam-se em dois argumentos; uma parte do grupo afirma que os alunos sabem resolver multiplicação e a outra parte entende que a resposta está certa. Aplica-se aqui a análise feita na questão 4 – respostas 1a e 2a, sobre os sujeitos que não identificam respostas inadequadas. A seguir a transcrição dos relatos de alguns sujeitos.

“Muito adequada. O aluno domina a multiplicação.”
(S20 – R1 – 5).
“Muito adequada. A resposta está correta.”
(S16 – R6 – 4).

Praticamente 30% dos professores classifica a resposta como adequada, se enquadrando na categoria dos que identificam parcialmente as respostas inadequadas. As justificativas desses sujeitos para considerar a solução adequada são dúbias, eles não fazem uma descrição coerente, ao mesmo tempo em que apontam que a resposta está correta negam sua pertinência. O comportamento desses sujeitos é semelhante aos verificados nas análises da questão 4 – respostas 1a e 2a, quanto a identificação parcial de respostas inadequadas. Segue descrição de alguns sujeitos com esse teor.

“Adequada. O aluno responde corretamente a questão, mas necessita trabalhar os números racionais.”

(S16 – R1 – 4).

“Adequada. Sua resposta corresponde ao resultado da questão, falta um pouco de conhecimento dos decimais.”

(S13 – R2 – 4).

Aproximadamente 25% dos sujeitos classificam a solução como pouco adequada, o que, para nossa análise, significa que eles identificam as respostas inadequadas. As justificativas aqui são análogas da questão 4 – respostas 1a, 2a e 1b referentes aos sujeitos que identificam respostas inadequadas; Os sujeitos discordam das respostas dos estudantes, no entanto não conseguem descrever com especificidade a inadequação, não adentram no cerne do problema. A seguir transcrição de alguns relatos dos sujeitos ratificando esse entendimento.

“Pouco adequada. A resposta não tá certa, não é pra resolver com os números naturais.”

(S9 – R2 – 4).

“Pouco adequada. A multiplicação está correta, mas não é a resposta do problema porque ele não utilizou os números decimais.”

(S18 – R1 – 5).

Cerca de 24% dos sujeitos afirmam que a resposta é inadequada, e estão na categoria dos que identificam plenamente a inadequação das respostas. Como na questão 4 – respostas 1a, 2a e 1b, em relação aos sujeitos que identificam plenamente as respostas inadequadas, esse grupo de professores, de modo geral, desaprova a resposta em discussão e justifica apontando especificidades que invalidam a resposta, esses sujeitos parecem lidar bem com o conhecimento do conteúdo matemático.

“Inadequada. A multiplicação tinha que ser também com os centésimos (100 x 0,01) que dá um inteiro.”

(S11 – R6 – 5).

“Inadequada. O exercício se resolve multiplicando os centésimos.”

(S12 – R2 – 5).

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir representa a distribuição em percentual dos sujeitos quanto a interpretação dos erros.

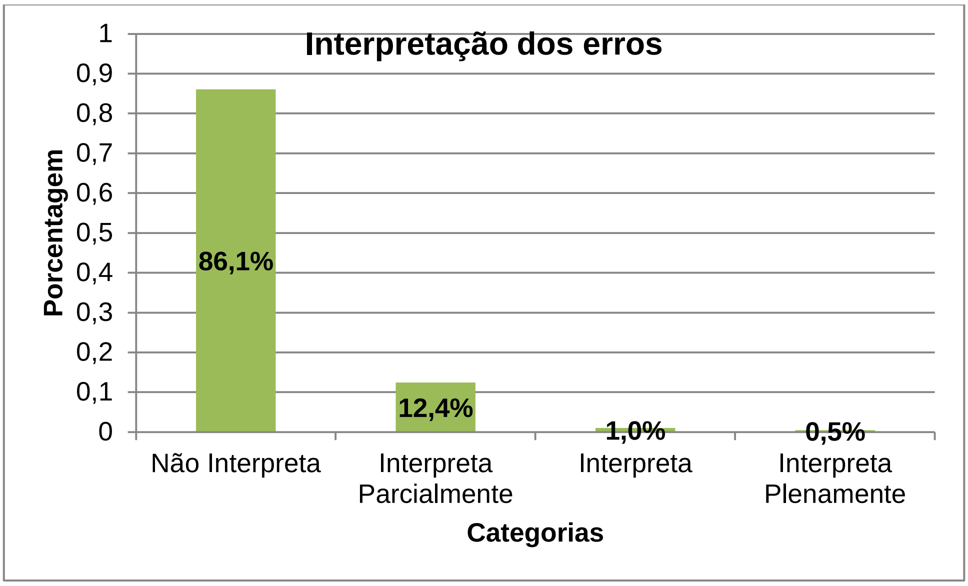


Gráfico 20 – Item 4, resposta 2b

Mais de 86% dos sujeitos não conseguem interpretar os erros da resposta em discussão. Os professores repetem as justificativas já descritas na análise da questão 4 – respostas 1a, 2a e 1b referentes aos sujeitos que não interpretam os erros. Assim, as análises citadas contemplam plenamente esse tópico.

Cerca de 12% dos professores interpretam parcialmente os erros discutidos nessa questão. Esse grupo de professores apresenta argumentos semelhantes aos descritos na análise da questão 4 – resposta 1a, 2a e 1b em relação aos sujeitos que interpretam os erros parcialmente. Portanto, as análises citadas contemplam o objeto em discussão de forma satisfatória.

Dois professores, o que equivale a 1% do total de sujeitos, interpretam os erros apresentados na solução da questão pelos estudantes. Eles apresentam uma descrição coerente do percurso resolutivo, apontando elementos fundamentais no raciocínio desenvolvido pelos alunos. Contudo, sentimos falta de hipóteses que possam justificar as estratégias descritas. A seguir o relato de um dos sujeitos referendando a nossa análise.

“Ele multiplicou 10 por 100, porque no enunciado aprecem as palavras dez e cem, ele mistura as perguntas e multiplica.”

(S3 – R4 – 4).

Apenas um professor, ou seja, meio por cento do total de sujeitos, interpreta a resposta de forma plena. Esse professor demonstra competências para utilizar o erro como estratégia pedagógica, pois faz uma interpretação profunda da resolução da questão; além de descrever com detalhes as estratégias utilizadas pelos alunos ele elenca hipóteses que provavelmente estão fundamentando os erros em discussão. A seguir o relato do sujeito, ratificando nosso comentário.

“O estudante multiplicou 10 x 100. 10 de ‘dez ou de décimo’ e 100 de ‘cem ou centésimos’, mas ele não sabe o que é centésimos e mistura as duas perguntas da questão. Esse aluno deve ter décimos a dezena e centésimos a centena por conta trabalhar mais com os números naturais.”

(S1 – R3 – 5).

Discussão coletiva

A discussão foi coerente com as descrições expostas nas análises, contudo trouxe um diálogo interessante, que revela, em parte, a abordagem dada em sala de aula aos números decimais por esses sujeitos.

(...)

B: “Os alunos não acertam porque esse assunto não é trabalhado em sala de aula.”

P: “Vocês não trabalham os números decimais no 4º e 5º ano?”

B: “Trabalha, mas essa questão não.”

P: “E o que vocês trabalham?”

L: “As operações, os preços.”

P: “como vamos compreender os números decimais sem entender a relação existente entre décimos, milésimos, centésimos,...?”

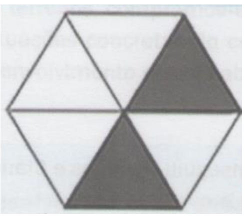
G: “Silêncio”

(...)

Neste item nos preocupa o número elevado de sujeitos que não consegue perceber que a resposta é incorreta, quase 21% dos professores e, neste caso, fica evidente a dificuldade que eles têm com o conhecimento do conteúdo matemático em discussão. Também é preocupante o elevado número de professores que não interpreta~~m~~ as causas dos erros, esse número chega aos 86%. Se no primeiro caso o problema é com o conhecimento do conteúdo matemático, agora o que está em jogo é o conhecimento pedagógico do conteúdo. Há indícios que esses professores trabalhem na perspectiva de eliminar os erros por meio da repetição do conteúdo e nessa dimensão pedagógica o requisito é a identificação dos erros, como cerca de 80% dos sujeitos conseguem identificá-los em algum grau de profundidade, temos a condição da aplicabilidade da correção proposta.

6.5 Questão 5 – Registro figural (contínuo)

5. A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais.



A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

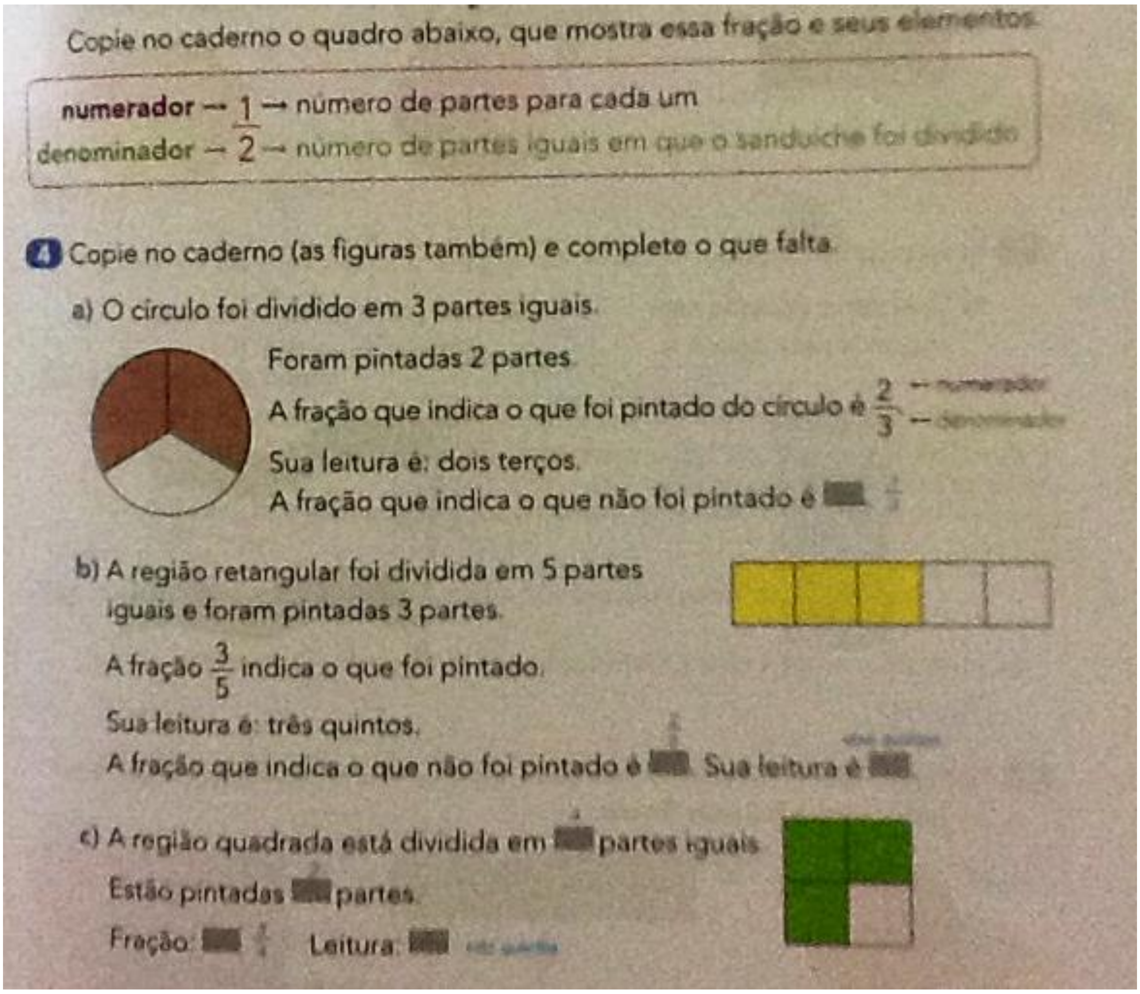
O item demanda estabelecer outra representação para a fração representada por meio de registro figural contínuo, ou seja, uma conversão, provavelmente para o registro simbólico numérico (fracionário). A questão contempla a expectativa de aprendizagem “associar a representação simbólica de uma fração às ideias de parte de um todo e divisão.”

De acordo com Duval (2009), as conversões não acontecem de forma automática, mesmo quando se conhece as regras de correspondências entre dois sistemas semióticos diferentes, não há garantias que elas sejam mobilizadas simultaneamente, principalmente quando não são congruentes, ou seja, naturais, diretas. Na questão em discussão, fazer a conversão para o registro numérico fracionário é mais simples do que converter para o registro numérico decimal porque, no primeiro caso, os registros são congruentes, já no segundo não há congruência, a conversão não é direta.

O trabalho com frações com a ideia parte todo deve enfatizar que o todo foi dividido em partes iguais e a soma das partes é igual ao todo, não sendo aconselhável explorar os termos numerador e denominador, essa prática contribui para a compreensão da fração como dois números naturais independentes. Nesse sentido Pernambuco afirma,

> *(...) é fundamental que o estudante reconheça o número fracionário como um número que representa quantidades iguais que formam um todo. Em outras palavras, ao invés de apresentar ao aluno a fração $\frac{1}{4}$ como uma parte pintada de um inteiro dividido em quatro partes iguais, a fração $\frac{1}{4}$ deve ser vista como uma quantidade que, repetida quatro vezes, forma uma unidade. Não se deve, nesta etapa de escolarização (4º e 5º ano) falar em numerador e denominador, pois isso leva o estudante a ver a fração como dois números, um encima do outro, e não como representando uma quantidade. (PERNAMBUCO, 2013, p. 172).*

Essas recomendações parecem ir de encontro ao trabalho em sala de aula e à forma como alguns livros didáticos abordam a ideia de fração parte/todo. Na coleção Ápis – Dante (2011, p. 238) uma das adotadas, mediante processo de escolha autônomo, por um conjunto de escolas da rede municipal de ensino de Jaboatão dos Guararapes, ao introduzir as ideias de fração, o autor faz um esforço para mostrar, por exemplo, que $\frac{1}{3}$ corresponde a uma das três partes que o todo foi dividido e a soma dessas partes equivalem ao inteiro. No entanto, nas atividades do capítulo nota-se a predominância da identificação ou representação de uma fração a partir de uma figura sem que haja referência explicita das partes com o todo, no sentido de entender a fração como um único numero. Ainda na introdução do conteúdo p. 239 já são abordados os termos numerador e denominador contrariando as orientações dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco – Matemática. A seguir, cópia de um trecho do capítulo que embasam essas afirmações.



Copie no caderno o quadro abaixo, que mostra essa fração e seus elementos.

numerador → $\frac{1}{2}$ → número de partes para cada um

denominador → 2 → número de partes iguais em que o sanduíche foi dividido

4 Copie no caderno (as figuras também) e complete o que falta.

a) O círculo foi dividido em 3 partes iguais.

Foram pintadas 2 partes.

A fração que indica o que foi pintado do círculo é $\frac{2}{3}$ ← numerador ← denominador

Sua leitura é: dois terços.

A fração que indica o que não foi pintado é ▬.

b) A região retangular foi dividida em 5 partes iguais e foram pintadas 3 partes.

A fração $\frac{3}{5}$ indica o que foi pintado.

Sua leitura é: três quintos.

A fração que indica o que não foi pintado é ▬. Sua leitura é ▬.

c) A região quadrada está dividida em ▬ partes iguais.

Estão pintadas ▬ partes.

Fração: ▬ Leitura: ▬

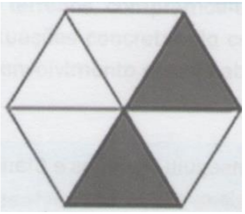
Figura 4 – Exemplo de introdução dos números racionais. (Fonte: Dante, 2011)

Por entendermos que o livro didático é um recurso muito presente na prática pedagógica do professor, certamente exerce influência no trabalho com as frações em sala de aula.

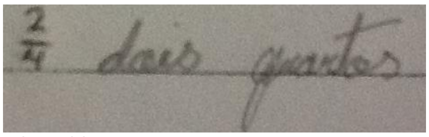
Uma resposta adequada para o item é a conversão do registro figural contínuo para o registro simbólico numérico fracionário, se a figura está dividida em seis partes iguais, cada uma representa $\frac{1}{6}$, se temos duas partes pintadas, então temos $\frac{2}{6}$.

Resposta 1a

5. A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais.



A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

Protocolo:  A2 T1 02
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

A representação gráfica a seguir traz em percentual a distribuição dos sujeitos quanto identificação de respostas inadequadas.

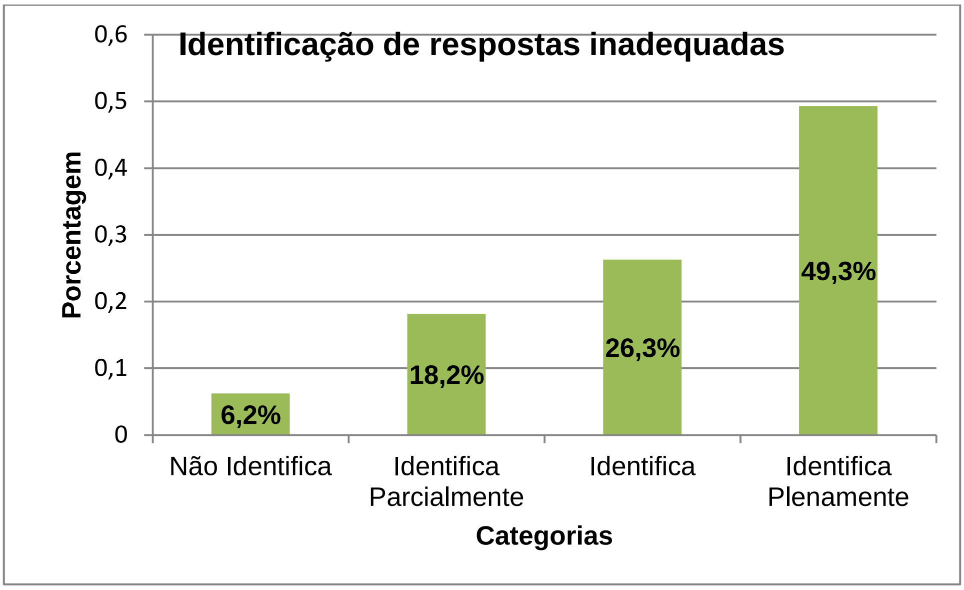


Gráfico 21 – Item 5, resposta 1

Pouco mais de 6% dos sujeitos classificam a resposta como muito adequada e se enquadram na categoria dos professores que não identificam respostas inadequadas. A tendência dos sujeitos é utilizar a dupla contagem parte/parte, as partes pintadas com as partes não pintadas para justificar a pertinência da resposta. Percebe-se não haver compreensão da fração em sua totalidade e sim como dois números naturais. Para Campos et. al., (2009) Neste caso não se estabelece relação entre as partes e o todo, assim a fração passa a representar dois números ao invés de um. A seguir relatos de alguns sujeitos ratificando essa compreensão.

"Muito adequada. O aluno compreendeu a pergunta e respondeu corretamente."
(S3 – R3 – 5).
"Muito adequada. Porque a resposta está correta."
(S9 – R7 – 5)

Cerca de 18% dos sujeitos afirmam que a resposta é adequada e são classificados na categoria que identifica parcialmente as respostas inadequadas. Esse grupo de sujeitos apresenta inclinação em compreender a fração como um número formado por dois números naturais, com ênfase aos termos numerador e denominador; assim se o numerador está correto e o denominador não, é como se o estudante acertasse a metade da questão. Mas esse entendimento revela-se falso, porque nessa situação o aluno não fez relação das partes com o todo, o que caracteriza a não compreensão do conceito de fração com a ideia parte/todo. Para

Pernambuco (2013, p. 174) “É importante ressaltar que a ênfase nos termos da fração (numerador e denominador) deve ser eliminada da sala de aula; a fração deve ser vista em sua totalidade, como representação de uma quantidade.” Segue a transcrição de alguns relatos dos professores que ratificam a nossa análise.

“Adequada. Ele acertou o numerador, mas errou o denominador.”

(S18 – R1 – 5).

“Adequada. Ele esqueceu que o denominador são as partes em que foram divididas. Essa criança tem algumas noções do que é fração.”

(S21 – R1 – 4).

Aproximadamente 26% dos professores entendem que a resposta é pouco adequada e se enquadram na categoria que identifica respostas inadequadas. A característica principal desses sujeitos é a discordância da resposta sem apresentar justificativa pertinente para a identificação dos erros. Segue o testemunho de alguns professores expressando a particularidade citada.

“Pouco adequada. A fração seria $\frac{2}{6}$.”

(S13 – R1 – 4).

“Pouco adequada. A resposta está errada o correto seria $\frac{2}{6}$.

(S11 – R5 – 5).

Cerca de 49% dos sujeitos classifica a resposta como inadequada e pertence ao grupo de professores que identifica plenamente respostas inadequadas na questão em discussão. A tendência desse grupo de professores é a rejeição à resposta apresentada justificando a inadequação por meio do procedimento comum para introduzir frações com a ideia parte/todo. Ou seja, por meio de um registro figural contínuo dividido em partes iguais e alguma(s) parte(s) pintada(s); a fração é um número formado pelos termos (numerador e denominador) em que o numerador é representado pela(s) parte(s) pintada(s) e o denominador constituído pelo total de partes em que o registro figural foi dividido. Para Nunes (1997), essa estratégia de apresentar as frações contribui para os estudantes desenvolverem um método de dupla contagem parte/todo; os estudantes compõem a fração contando as partes pintadas e o total de partes, mas não entendem o significado desse número. A seguir testemunho de dois professores nesse sentido.

“Inadequada. A resposta correta é $\frac{2}{6}$. A figura foi dividida em 6 partes e 2 foram pintadas.”

(S15 – R1 – 4).

“Inadequada. O todo foi dividido em seis partes e duas foram pintadas. O numerador é 2 e o denominador é 6.”

(S4 – R1 – 4).

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir representa em percentual a distribuição dos sujeitos em categorias quanto interpretação dos erros.

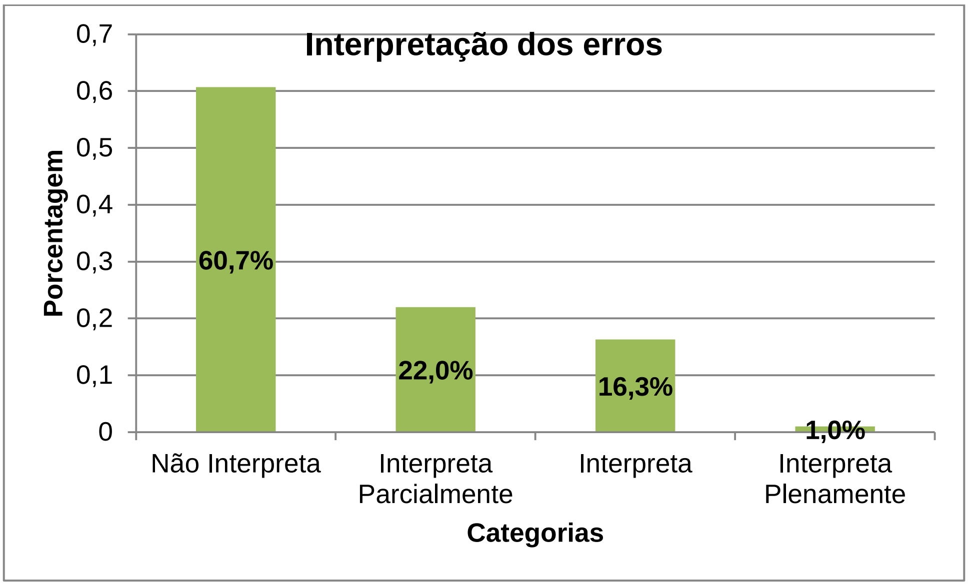


Gráfico 22 – Item 5, resposta 1

Cerca de 61% dos sujeitos não interpreta os erros da solução da questão em discussão. Esses professores são evasivos na explicação da descrição das estratégias utilizadas pelos alunos bem como das possíveis hipóteses que fundamentam os erros. Apresentam apenas comentários gerais sem adentrar no núcleo dos erros.

“Não sabem interpretar as questões.”

(S3 – R5 – 4).

“Eles não entendem frações.”

(S1 – R7 – 4).

22% dos sujeitos fazem uma interpretação bastante tímida dos erros. Esses sujeitos são capazes apenas de descrever elementos periféricos do processo resolutivo que nos permite somente hipoteticamente compreender as possíveis estratégias utilizadas. Segue a descrição dos relatos de dois professores que referendam essa análise.

"Ele compreende que cada parte deve ser representada por um número."
(S1 – R4 – 5).
"Ele respondeu do modo que lhe foi passado em seu aprendizado usando numerador e denominador."
(S13 – R1 – 6).

Aproximadamente 16% dos professores interpretam os erros na resposta atribuída pelos estudantes. Esse grupo de sujeitos descreve com muita propriedade os passos percorridos pelos alunos até chegarem resposta final. Apontam com clareza que o 2 é oriundo das partes pintadas das figuras e o 4 representa as partes não pintadas. A justificativa para as causas dos erros é atribuída praticamente falta de atenção dos alunos, que achamos insuficiente para fundamentar erros tão carregados de significados. Segue o testemunho de dois sujeitos que sinalizam nessa direção.

"O aluno representou o número 2 como a parte pintada de preto e o número 4 corresponde a parte que não está pintada. Errou por falta de atenção."
(S14 – R1 – 5).
"O estudante utilizou como critério a quantidade de partes pintadas com a quantidade de partes não pintadas, se pensasse um pouquinho acertava."
(S2 – R1 – 5).

Dois professores, o que equivale a 1% dos sujeitos, interpretam plenamente os erros contidos na resposta em discussão. Nos relatos desses professores, há fortes evidências da compreensão do significado das frações com ideia de parte de um todo e também do procedimento de dupla contagem praticado pelos alunos. Assim, eles demonstram uma estreita relação com o conhecimento do conteúdo matemático e com o conhecimento pedagógico do conteúdo em discussão; expressam ainda entender a construção do conhecimento não apenas como resultado, mas como se dá todo o processo até o produto final. Neste sentido concordamos com Coll et,al. Quando afirmam,

> *A aprendizagem entendida como construção de conhecimento, pressupõe entender tanto sua dimensão como produto quanto sua dimensão como processo, isto é, o caminho pelo qual os alunos elaboram pessoalmente os conhecimentos. (Coll et.al., 2004. p. 88).*

Os dois professores revelam interesse no percurso de resolução desenvolvido pelos alunos, assim é possível inferir que eles utilizam o erro como estratégia pedagógica. A seguir o relato de um dos sujeitos que fundamenta nossa análise.

"Essa é uma resposta muito comum, os alunos não associam as partes ao todo, contam as partes pintadas e as partes não pintadas. Isso acontece porque é ensinado apenas contar as partes sem se preocupar com o valor do número. Auxiliar o trabalho com material concreto."

(S15 – R2 – 5).

Discussão coletiva

Quanto pertinência da resposta, os professores praticamente são unânimes em classificá-la como inadequada, o que ratifica o entendimento já verificado nos questionários, em que apenas cerca de 6% dos sujeitos não identifica os erros de nenhuma forma.

Quanto interpretação dos erros, os sujeitos apresentam bastante dificuldades, mesmo afirmando que as frações com o significado de parte de um todo é um conteúdo muito trabalhado em sala de aula. Diferentemente do que recomenda os Parâmetros na Sala de Aula - Matemática, o diálogo aponta indícios de uma prática pedagógica centrada nos termos numerador e denominador, conforme podemos ver em um trecho da transcrição a seguir.

L: "Dois quartos está errado, mas ele já começa a entender porque o numerador está certo."

P: Assim se os alunos responderem $\frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{15}, \frac{2}{37}, \frac{2}{100}$ *são respostas interessantes!"*

R: "De certa forma sim, porque se a fração é formada por numerador e denominador, ele acerta uma das partes."

P: “E o valor dos números são semelhantes?”

B: “É mais fácil resolver pensando nas partes.”

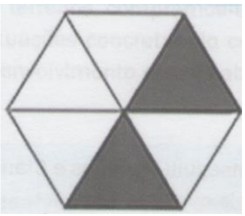
(...)

As frações com a ideia de parte de um todo é sem dúvida uma das formas mais comum de explorar os números racionais em sala de aula. Mesmo assim ainda registramos cerca de 6% dos sujeitos com dificuldades graves na compreensão do conteúdo matemático, ou seja, eles não conseguem responder a atividade corretamente.

O número de sujeitos que não consegue descrever o percurso da estratégia utilizada pelos alunos é muito elevado, aproximadamente 61%. Percebe-se, ainda, a ênfase aos termos numerador e denominador, bem como a institucionalização da dupla contagem, seja ela parte/parte ou parte/todo, a fração não é vista como uma quantidade.

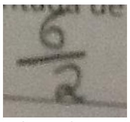
Resposta 2

5. A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais.



A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

Protocolo:



A2 T1 05

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Identificação de respostas inadequadas

A seguir gráfico com os dados em percentual dos sujeitos quanto a identificação de respostas inadequadas.

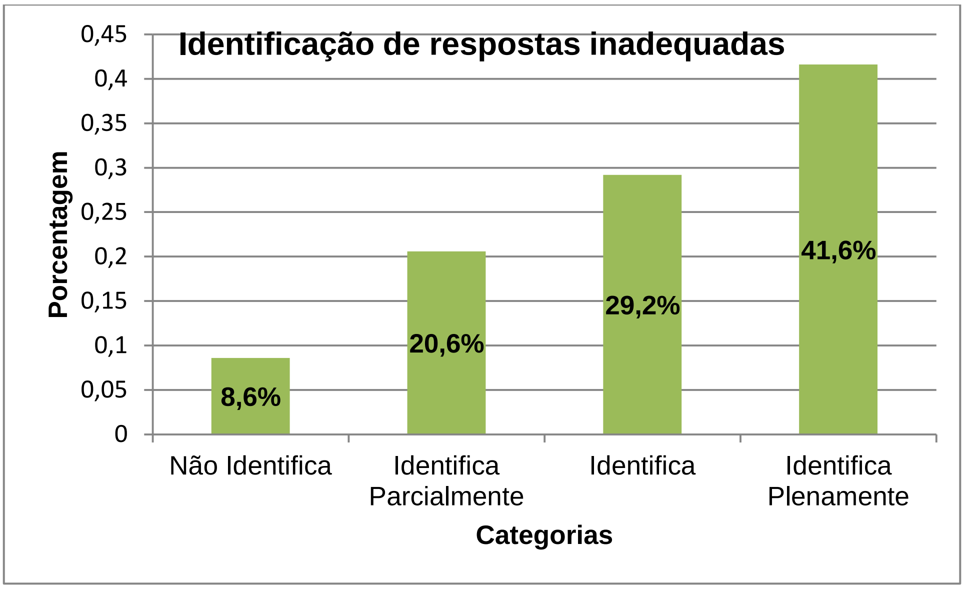


Gráfico 23 – Item 5, resposta 2

Cerca de 9% dos sujeitos classificam a resposta como muito adequada, ou seja, eles não identificam a inadequação da resposta em discussão. Assim como os alunos eles se utilizam do procedimento de dupla contagem relacionando o todo com a parte. A seguir relatos de alguns sujeitos que revelam essa compreensão.

“Muito adequada. Seria a fração correta.”

(S6 – R4 – 4).

“Muito adequada. Ele contou todas as partes e as partes pintadas e acertou.”

(S4 – R3 – 5)

Quase 21% dos sujeitos entendem que a solução é adequada, esses professores se enquadram na categoria dos que identificam parcialmente a inadequação de respostas. Esse grupo de sujeitos parece acreditar que o fato dos estudantes contarem corretamente a quantidade de partes em que o todo foi dividido e o total de partes pintadas, mesmo fazendo uma inversão quando representam o número fracionário é um avanço significativo. Assim tendem a compreender que trata-se de uma simples troca entre numerador e denominador que será resolvida com um pouco de atenção. Há evidências que a remediação desses sujeitos acontece por meio da repetição, como se fosse um "mantra", dos termos numerador e denominador. Os professores não conseguem perceber que esse procedimento não contribui para a compreensão do significado do número fracionário. Segue transcrição dos textos de alguns sujeitos que embasam nossa análise.

"Adequada. Nesse caso o aluno já desenvolve a ideia de fração, ele apenas trocou a posição do numerador e do denominador, precisa só um pouco de atenção."
(S3 – R2 – 4)
"Adequada. Ele inverteu, mas nota-se que o aluno tem compreensão do sistema fracionário, falta só atenção."
(S10 – R1 – 4)

Aproximadamente 29% dos sujeitos entendem que a resposta é pouco adequada e fazem parte do grupo que identifica a inadequação da solução em discussão. Esse grupo de sujeitos compreende que a resposta é incorreta porque há uma inversão dos termos numerador e denominador, no entanto é provável que não compreendam o significado do número $\frac{2}{6}$ ou $\frac{6}{2}$, e tentam minimizar os erros dos alunos. A seguir alguns relatos dos sujeitos nesse sentido.

"Pouco adequada. Está errada, ele inverteu o denominador e o numerador, mas pode superar este erro rapidamente."
S(21 – R1 – 4).
"Pouco adequada. O aluno não colocou os números de forma correta, mas está no caminho certo para aprender frações."
(S3 – R1 – 4).

Cerca de 42% dos professores afirmam que a solução é inadequada, e identificam plenamente a inadequação da resposta em discussão. Esse grupo de sujeitos é mais rigoroso com a resposta, no entanto demonstram indícios de que não compreendem o significado do número fracionário, mas não tolera a inversão dos termos numerador e denominador. São contundentes em afirmar que a resposta é incorreta porque os termos estão trocados. Segue o testemunho de alguns sujeitos referendando essa análise.

"Inadequada. A resposta está totalmente errada. O aluno trocou o numerador pelo denominador."

(S11 – R5 – 4).

"Inadequada. Numerador e denominador não correspondem, a resposta está errada."

(S2 – R5 – 4).

Interpretação dos erros

O gráfico a seguir representa em percentual a distribuição dos sujeitos em relação a interpretação dos erros.

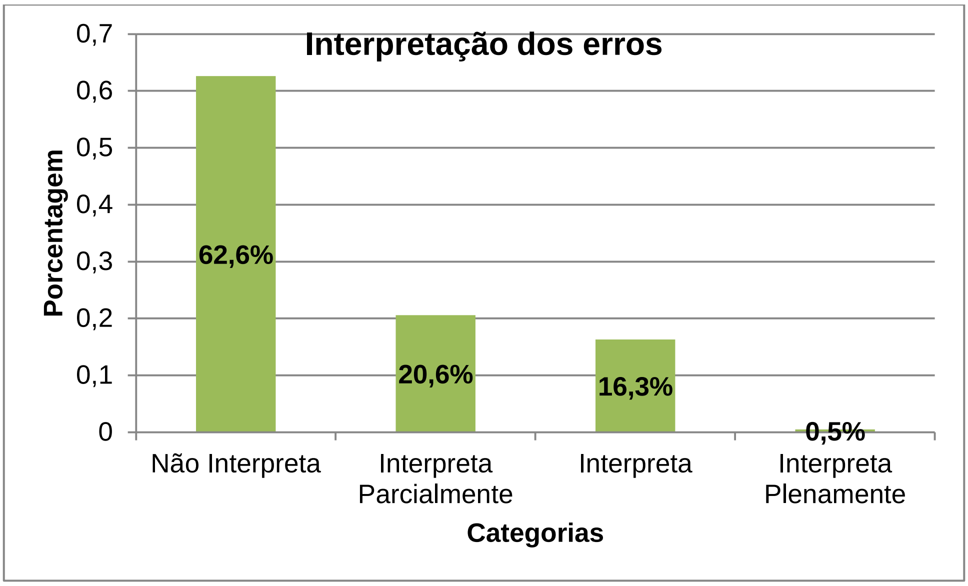


Gráfico 24 – Item 5, resposta 2

Cerca de 63% dos sujeitos demonstram dificuldades em analisar a resposta e não conseguem descrever o provável raciocínio utilizado pelos alunos tampouco as possíveis hipóteses que fundamentam a resposta. As justificativas dos professores para as respostas dos estudantes baseiam-se somente elementos gerais abordando a falta de compreensão do conteúdo. Mesmo tratando-se provavelmente de uma das formas dos números racionais mais explorada em sala de aula, percebe-se que a ênfase do ensino e da aprendizagem está no acerto e não no erro. Parece que esses sujeitos limitam-se apenas a identificação dos erros e não percebem as suas origens é como se eles tivessem o mesmo nascedouro. A seguir relato de textos de alguns professores que fundamentam essa análise.

“Ele não tem compreensão de fração.”
(S14 – R6 – 4).
“O aluno ainda não sabe representar fração.”
(S13 – R7 – 5).

Quase 21% dos sujeitos conseguem uma interpretação parcial dos erros, de forma direta sem uma justificativa mais elaborada eles apontam o raciocínio que os alunos utilizaram para estabelecer a resposta. Segue o depoimento de dois professores com esse teor.

“Trocou o numerador e o denominador.”
(S11 – R1 – 4).
“Ele confundiu as posições.”
(S2 – R1 – 4).

Aproximadamente 16% dos professores demonstram interpretar os erros da questão, eles descrevem o provável raciocínio dos alunos detalhadamente, apontando elementos centrais do processo resolutivo. No entanto há indícios que a interpretação dos erros baseia-se em um ensino e aprendizagem das frações com ênfase aos termos numerador e denominador. A seguir transcrição dos relatos de dois sujeitos, que referendam essa análise.

“O aluno percebeu que o todo foi dividido em seis partes e duas foram pintadas ele conta corretamente, mas troca o numerador pelo denominador.”
(S1 – R1 – 5).
“Ele conta o total de partes em que a figura foi divida e o total de partes pintadas e inverte colocando encima o valor do denominador.”
(S16 – R1 – 5).

Somente meio por cento dos sujeitos, que corresponde a um professor faz uma interpretação plena, abordando os aspectos fundamentais inerentes aos erros. Esse sujeito descreve passo a passo o possível raciocínio utilizado pelos estudantes e aponta as prováveis hipóteses que conduzem os alunos a esses erros. Percebe-se a habilidade do professor com o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo. A seguir o relato do professor expressando essa compreensão.

“Eles entendem a divisão da figura, ou seja, a figura foi repartida em seis partes iguais e duas delas foram pintadas e eles trocam os termos. Eles resolvem as frações sem se preocupar com o valor dos números, precisa entender o que significa uma fração, por isso que erram.”

(S9 – R4 – 5)

Discussão coletiva

A discussão foi coerente com as respostas dos questionários que descrevemos na análise, no entanto o diálogo confirmou o que aponta Nunes (1997) em relação ao estudo das frações, que uma forma comum de introduzir esse conteúdo aos alunos se dar por meio da ideia parte de um todo. Os professores revelam que é dessa forma que se inicia o estudo das frações.

(...)

P: “Esse conteúdo é trabalhado em sala de aula?”

B: “Geralmente é assim que começamos a estudar frações.”

P: “Vocês concordam?”

G: “Sim!”

P: “Vocês acham correto trabalhar essas frações enfatizando o numerador como a quantidade de partes que a figura foi dividida e o denominador o total de partes pintadas?”

G: “Sim!”

P: “Porque?”

Q: “Fica mais fácil.”

(...)

O questionário e a discussão coletiva de modo geral revelam que os números racionais têm sido pouco explorado em sala de aula, no entanto mostra evidências que a fração com significado de parte de um todo, está sempre presente no trabalho com frações. Dessa forma os dados são preocupantes, pois quase 9% dos sujeitos não conseguem identificar a inadequação da resposta em discussão e outros 63%

não buscam causas para os erros tampouco descrevem o provável raciocínio utilizado pelos estudantes. Assim, entendemos que a remediação dos erros acontece de forma generalizada, sem preocupação com suas especificidades.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa foi motivada pelos baixos índices de aprendizagens dos alunos da 4ª série/5º ano, do município de Jaboatão dos Guararapes, envolvendo os números racionais, diagnosticados por meio de itens das avaliações do SAEPE e Prova Brasil, divulgados a partir de 2009.

Compreendendo o professor como sujeito central no processo de ensino e de aprendizagem e o erro como estratégia didática, tivemos como objetivo investigar como os professores interpretam os erros dos alunos em relação aos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental.

O referencial teórico da nossa pesquisa está embasado nos estudos sobre erros na aprendizagem escolar de Borasi (1996), Pinto (2000), Cury (2007), Torre (2007) e Peng e Luo (2009); a compreensão da avaliação da aprendizagem de acordo com Perrenoud (1999), Hadji (2001) Luckesi (2006), e trabalhos referentes aos números racionais de Nunes (1997), Campos et. al., (2009) dentre outros. Utilizamos ainda alguns elementos da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009).

Com o intuito de responder ao nosso objetivo, construímos um instrumento com questões abertas que foi aplicado aos alunos do 5º ano para identificar os erros mais frequentes, em cada uma das expectativas de aprendizagens dos números racionais referentes a essa etapa de escolarização.

De posse dos resultados do questionário dos alunos, selecionamos cinco itens usando como critérios a diversificação dos registros de representação semiótica e a relevância dos erros nos aspectos qualitativo e quantitativo, para construir o instrumento do professor.

Cada item foi composto por duas respostas incorretas que apresentaram um percentual de erros superior a 15% e que pudessem favorecer identificação e a interpretação dos erros.

Para cada um dos cinco itens os sujeitos foram convidados a responder duas perguntas; na primeira, eles podiam classificar a adequação da resposta dos alunos em inadequada, pouco adequada, adequada e muito adequada, e na segunda os professores foram instigados a justificar a escolha da resposta, descrever o percurso da resolução e apontar possíveis elementos que pudessem fundamentar as causas dos erros. Ao concluírem essa etapa, se estabeleceu uma discussão coletiva acerca das questões respondidas pelos professores, com o objetivo de esclarecer possíveis dúvidas nas respostas atribuídas ao questionário.

O questionário foi aplicado a 209 professores sendo 103 do 4º ano e 106 do 5º ano. A aplicação aconteceu em quatro momentos distintos, destinados a formação continuada do município, com quatro horas de duração cada um. A princípio os professores responderam o instrumento e após a conclusão de todos teve início a discussão coletiva, todo o processo de coleta de dados foi gravado em vídeo e áudio.

A análise preocupou-se em responder duas questões; em que grau de profundidade os sujeitos são capazes de identificar respostas inadequadas e a capacidade que eles têm de interpretar os erros cometidos pelos estudantes. Para atender a primeira questão utilizamos a classificação das respostas e a justificativa pela escolha, para a segunda usamos a descrição do percurso da resolução e as hipóteses apontadas pelos sujeitos para as causas dos erros, constantes no instrumento. Utilizamos ainda as contribuições da discussão coletiva que colaboraram para elucidar algumas respostas do questionário que não apresentava clareza.

Após a análise dos questionários e a transcrição dos trechos mais importantes da entrevista coletiva, reunimos um banco de informações a respeito da pesquisa e como os professores identificam respostas inadequadas e interpretam os erros dos alunos em discussão. Essas informações nos permitiram responder questões importantes que permeiam a prática pedagógica do professor.

O município tem ainda cerca de 20% dos professores que possuem apenas o normal médio, não têm nenhuma formação superior. Essa condição de formação mínima pode influir no conhecimento do conteúdo matemático e no conhecimento pedagógico do conteúdo, criando obstáculos para um ensino e aprendizagem consistentes que utiliza o erro como estratégia didática.

Um dos resultados encontrados é que os professores revelam-se tolerantes ao erro, mas não se trata da tolerância que identifica e interpreta os erros para remediar a aprendizagem da matemática. É a compreensão de valorizar qualquer indício de conhecimento, e, às vezes, falsos indícios, como se fosse suficiente para responder a uma expectativa de aprendizagem. Parece haver um conformismo do professor aceitando um mínimo de aprendizagem como se fosse o ideal para aquela etapa de escolaridade.

Constatamos também que, em média, um em cada dez professores não conseguem identificar respostas erradas; em alguns casos, essa taxa sobe para um em cada cinco sujeitos dependendo do conteúdo e tipo de erro. Não identificam porque apresentam dificuldades no conhecimento matemático, não se trata de leniência com respostas inadequadas, mas com o desconhecimento do conteúdo. Como já citamos, essas dificuldades podem estar relacionadas mais diretamente aquele grupo de professores que apresentam apenas o normal médio como formação. Na outra extremidade, estão os sujeitos que identificam plenamente a inadequação da resposta e o resultado também não é animador, temos uma média aproximada de quatro sujeitos em cada grupo de dez com essa habilidade consolidada e no melhor cenário a metade dos sujeitos.

A interpretação dos erros dos estudantes apresenta dados preocupantes, em média para cada grupo de dez professores, sete não conseguem descrever minimamente o erro e suas possíveis causas. Em situação extrema quando se trata de compreender as relações entre décimos e a unidade, por exemplo, encontramos quase 90% dos sujeitos que não conseguem interpretar os erros dos alunos. Fica evidente a dificuldade dos professores em lidar com o conhecimento pedagógico do conteúdo, pois não demonstram familiaridade com a descrição do percurso resolutivo, e as possíveis hipóteses para os erros estão ancoradas em respostas extremamente gerais, como, por exemplo, o aluno não tem noção de reta numérica, na falta de atenção dos estudantes e em respostas atribuídas aleatoriamente. Essas características estiveram presentes em todos os itens, se não as três ao mesmo tempo, pelo menos uma delas.

Por outro lado, menos de dois a cada cem professores consegue interpretar de maneira adequada os erros dos alunos. Esse seleto grupo caracteriza-se por uma descrição detalhada do percurso de resolução e por apresentar causas coerentes aos erros. O que nos permite concluir, que esses professores detêm amplo domínio do conteúdo matemático e do conteúdo pedagógico em discussão.

De forma geral a diversificação dos registros de representação semiótica parece não ter influenciado nas respostas dos sujeitos, no entanto há evidências que o registro na língua natural pode ter dificultado a identificação e interpretação dos erros. O fato do item não apresentar números pode ter contribuído para aumentar as dificuldades dos sujeitos.

Há indícios que as variações, tanto na identificação de respostas inadequadas quanto na interpretação dos erros, parecem também estar associadas à familiaridade que os professores têm com determinado conteúdo. Os baixos índices de não identificação de respostas inadequadas e um aumento acentuado na interpretação dos erros, verificados no item que contempla a expectativa de aprendizagem comparar números decimais, certamente se justificam pelo conhecimento que os professores têm do conteúdo. Trata-se de um conteúdo de forte relevância social, ou seja, sua prática ultrapassa as fronteiras da escola, pode ser usado, por exemplo, para comparar preços de um mesmo produto. E neste caso, mesmo a discussão coletiva apontando que há indícios que o conteúdo não é muito trabalhado em sala de aula os professores apresentam um desempenho acima da média na identificação de respostas inadequadas e na interpretação dos erros.

A discussão coletiva aponta que a representação simbólica da fração com a ideia de parte de um todo é uma situação comum de abordar os números racionais no ensino e na aprendizagem, assim a familiaridade dos sujeitos com esse conteúdo pode ter contribuído para uma melhor compreensão dos professores com o trabalho com os erros.

Diante de algumas dificuldades apresentadas pelos sujeitos na identificação de respostas inadequadas e complexidades extremas para interpretar os erros, chegamos conclusão que na prática pedagógica desses professores não há espaço para a avaliação formativa, como descrita por Charles Hadji (2001) e Cipriano Luckesi (2005). Como os índices de interpretação dos erros são extremamente baixos e a identificação de respostas inadequadas tem uma média próxima aos

90%, essa combinação sugere a prática de correção dos erros por meio da repetição do conteúdo, sem considerar as múltiplas faces dos erros.

A não identificação de respostas inadequadas, aliada à dificuldade de interpretar os erros, parece estar associada à falta de habilidade em lidar com o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Assim, seria importante que a gestão da educação municipal, onde trabalham os sujeitos de nossa investigação, promovesse em seu programa de formação continuada mudanças para suprir as lacunas identificadas na formação inicial e continuada dos professores.

A discussão coletiva que realizamos como um dos meios de coleta de dados, aponta a ausência de efetivo trabalho em sala de aula com os números racionais. Mesmo esse conteúdo estando referendado nos parâmetros curriculares, ficou evidente que há uma fuga dos professores a esses números e a abordagem parece se dar de forma superficial. Assim sugerimos a investigação de quais conteúdos estão sendo priorizados em sala de aula e como vem sendo trabalhado os números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. S. de. **Missionárias norte-americanas na educação brasileira: vestígios de sua passagem nas escolas de São Paulo no século XIX.** Revista Brasileira de Educação – v. 12, n. 35 – maio/agosto, 2007.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento.** Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BEHR, M. J., HAREL, G., POST , T., and LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In; GROUWS, D.A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: MacMillan, 1993, p. 296 – 333.

BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors.** Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BOYER, C. B. **História da matemática.** 3ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL, Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: **Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores.** Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: **Operações na resolução de problemas.** Brasília: MEC, SEB, 2014.

CAMPOS, T., JAHN, A. P., LEME DA SILVA, M. C., e FERREIRA DA SILVA, M. J. **Lógica das equivalências.** In: 22ª Reunião da ANPED – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, Caxambu. Anais 22ª Reunião da ANPED, 1995.

CAMPOS, T. M. M., SILVA, A. F. G. e PIETROPAOLO, R. C. **Considerações a Respeito do ensino e aprendizagem de representações fracionárias de números racionais.** In: GUIMARÃES, Gilda e BORBA, Rute. (Org.). Reflexões sobreo ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização. Recife: SBEM, 2009, p. 131 – 139.

CANOVA, R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental com relação à fração.** Dissertação de Mestrado em

Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 2005.

COOL, C., MARTÍN, E., MAURI, T., MIRAS, M., ONRUBIA, J., SOLÉ, I. e ZABALA, A. **O construtivismo na sala de aula.** São Paulo: Editora Ática, 2004.

CORREIA, C. E. F. **Matemática, análise de erros e formação continuada de professores polivalentes.** São Paulo: Porto de Ideias, 2010.

CURY, H. N. e VIANNA, C. R. Organizadores. **Formação do professor de matemática: reflexões e propostas.** Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DANTE, L. R. Ápis**; Matemática. 4º ano**. São Paulo: Ática, 2011.

DE LA TORRE, S. et. al. **Errores y currículo – tratamento didático de los errores em la enseñanza**. Barcelona: PPU, 1994.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

ESTUDO exploratório sobre o professor brasileiro. **Com base nos resultados do censo escolar 2007.** Disponível em < http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 30 out. 2014, 11:37.

FAUSTO, B. **História do Brasil.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo – EDUSP, 2002.

FIORENTINI, D. **Ramos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas. Tese de doutorado, 1994.

GRANGER, G. **Langages et épistémologie.** Paris: Klinksieck, 1979.

HADJI, C. **Avaliação desmistificadora.** Trad. Patrícia C. Ramos. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

IGLIORI, S. B. C., MARANHÃO, M. C. S. A. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Campinas: Papirus, 2003. p. 59.

KERSLAKE, D. **Fractions: children's strategies e erros**: a repor tof the strategies e errors in secondary Mathematics project. Windsor: NFER – Nelson, 1986.

KIEREM, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J. and BEHR, M. (Eds.): **Number concepts and operations in the middle grades.** Hillsdale, Nova Jersey: Erlbaum, 1988, p. 162 – 180.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem na escola: reelaborando conceitos e recriando a prática.** 2ª ed. – Salvador: Malabares Comunicação e Eventos, 2005.

MANDARINO, M. C. F. **Considerações a Respeito do ensino e aprendizagem de representações fracionárias de números racionais.** In: GUIMARÃES, G. e BORBA, R. (Org.). Reflexões sobreo ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização. Recife: SBEM, 2009, p. 29 – 48.

MANDARINO, M. C. F. **Matemática: Ensino Fundamental.** In: DE CARVALHO, J. B. F. (Org.). Brasília: Ministério da Educação, 2010. p. 131.

NUNES, T. e BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PENG, A., LUO, Z. A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. **For the learning of mathematics**, v. 29, n. 3, p. 22 – 25, Nov. 2009.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Avaliação continuada: apropriação e utilização dos resultados: Pernambuco.** Juiz de Fora: FADEPE, 2009.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros curriculares de matemática para o ensino fundamental e médio.** Recife: SE, 2012.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros na sala de aula – Matemática: ensino fundamental e médio.** Recife: SE, 2013.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Revista do sistema de avaliação:** redes municipais e estadual. Recife: SE, 2013.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Revista pedagógica:** 4ª série/5º ano do ensino fundamental - Matemática**.** Recife: SE, 2013.

PERRENOUD, P. **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens – entre duas lógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

PESSOA, C. A. dos S. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.** Tese de doutorado. Recife: UFPE, 2009.

ROMANELLI, O. de O. **História da Educação no Brasil.** 30ª ed. – Petropólis: Editora Vozes, 2006.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

SANTOS, L. S. **Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2010.

SANTOS, R. S. dos. **Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2011.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge grouth in teaching. **Educational Researcher.** v. 15, n. 2, p. 4 – 14, 1986.

SILVA, A. F. G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

SILVA, R. M. L. da. **O movimento de renovação da educação e o cinema educativo.** XXIV Simpósio Nacional de História – São Leopoldo, 2007.

SOUZA, C. P. **Dimensões da avaliação educacional.** Artigo discutido na CPLP – Conferência dos Países de Língua Portuguesa. Rio de Janeiro, 17 e 18 de abril/2000.

STAREPRAVO, A. R. **Mundo das ideias: jogando com a matemática, números e operações.** Curitiba: Aymará, 2009.

TORRE, S. de la. **Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança.** Porto Alegre: Artmed, 2007.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas – um exemplo: as estruturas aditivas**. Análise Psicológica, v. 1, n. 5, p. 75 – 90, 1986.

VIDAL, D. G. **Escola nova e processo educativo.** In: LOPES, E. M. FIGUEIREDO, L. e GREIVAS, C. (Orgs). Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ANEXOS

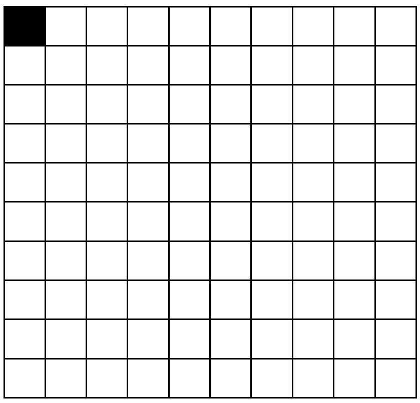
Instrumento do Aluno

Escola:____
Aluno(a):____
Data:__________________ **5º Ano** ____ **Idade**________________

Responda as questões a seguir - sua resposta é muito importante, não deixe nenhuma questão em branco.

Instrumento 1

1. A figura abaixo representa um quadrado dividido em cem partes iguais.



A parte sombreada da figura corresponde a que número decimal?

Resposta:
____

2. Represente na forma de número decimal:

a) trinta e sete centésimos ______________________

b) um centésimo ______________________________

c) oito décimos _______________________________

d) dois inteiros, cento e vinte e cinco milésimos _________________

e) um milésimo _______________________________

3. Pedro e João estão lendo livros iguais. Pedro já leu $\frac{1}{3}$ do livro e João leu $\frac{2}{6}$. Quem leu mais páginas até o momento, Pedro ou João? Por que?

Resposta: ____

4. Decomponha os números a seguir em décimos, centésimos e milésimos.

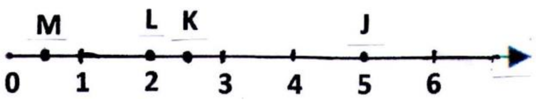
a) 0,23 ____

b) 0,30 ____

c) 0,729____

d) 0,501____

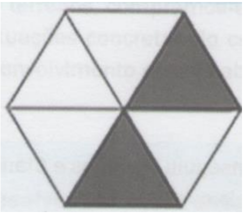
5. O número $\frac{5}{2}$ correspondente a que ponto assinalado na reta numérica?



Resposta: ____

6. Na turma de Camila $\frac{3}{5}$ dos estudantes são meninas. Represente esta fração na figura abaixo.

7. A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais.



A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

Resposta: ____

8. A professora Joana tem 25 alunos. Para comemorar o dia da criança ela levou 80 chocolates para serem divididos com os alunos em partes iguais. Que fração de chocolate cada aluno receberá?

Resposta: ____

9. Uma professora ganhou ingressos para levar 25% de seus alunos ao circo da cidade. Considerando que essa professora leciona para 36 alunos, quantos alunos no máximo ela poderá levar?

Resposta: ____

10. Clara está juntando dinheiro para comprar uma máquina fotográfica. Ela já tem 25% do valor total. Esse percentual corresponde a que fração?

Resposta: ____

11. Observe os pares de números decimais a seguir e diga qual deles é o maior:

a) 3,1 e 2,75 – o número maior é ________________

b) 1,495 e 7,2 – o número maior é _______________

c) 0,581 e 0,299 – o número maior é _____________

d) 15,7 e 0,9999 – o número maior é ______________

12. Dona Benta fez um bolo retangular e dividiu esse bolo em vinte partes iguais. Ela deu um pedaço para cada um de seus oito netos. A parte que seus netos ganharam corresponde a que fração do bolo todo?

Resposta: ____

13. Num exercício de matemática, Ângela conseguiu 8,7 pontos e Cláudia conseguiu 6,4 pontos. Quantos pontos conseguiram as duas juntas? (faça o cálculo mentalmente, não use lápis nem papel).

Resposta: ____

Escola:____
Aluno(a):____
Data:________________ **5º Ano** ____ **Idade**_______________

Responda as questões a seguir - sua resposta é muito importante, não deixe nenhuma questão em branco.

Instrumento 2

1. Que quantidade obtemos se juntarmos dez décimos? E se juntarmos cem centésimos?

Respostas:

____

2. A professora do 5º ano, corrigindo as avaliações da classe, viu que Pedro acertou $\frac{2}{10}$ das questões. De que outra forma a professora poderia representar essa fração?

Resposta:

____

3. Quais números decimais obtemos fazendo as composições:

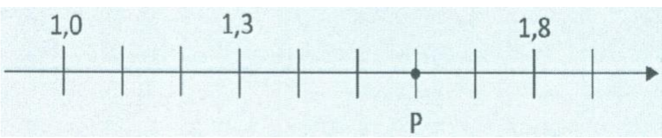
a) 0,3 + 0,01 ____

b) 0,17 + 0,103 + 0,2 ____

c) 7 + 0,40 + 0,001 ____

d) 0,1 + 0,1+ 0,1 ____

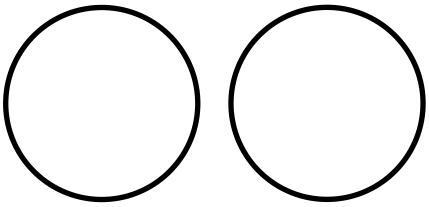
4. Na reta numérica abaixo, que número decimal corresponde ao ponto P?



Resposta:

____

5. Usando as figuras abaixo represente a fração $\frac{3}{2}$.



6. Maria tem 36 lápis. Ela deu 17 desses lápis para sua prima. Que fração do total desses lápis Maria deu para sua prima?

Resposta:

Qual a ideia que está associada a essa fração? **Parte de um todo ou divisão**

7. Veja as figuras a seguir.

Figura 1

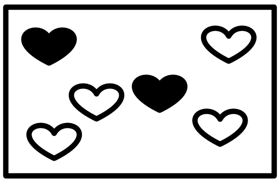


Figura 2

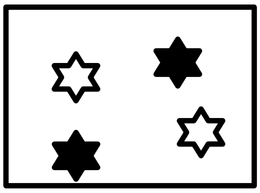


Figura 3

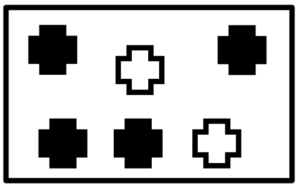
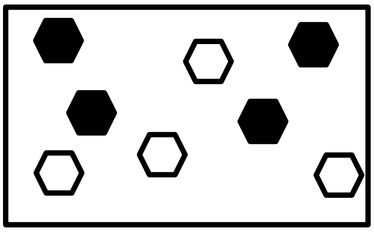


Figura 4



Tomando como referência as partes pintadas de preto quais figuras representam a mesma fração?

Resposta:

8. Um Professor de educação física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Esse percentual equivale a quantos alunos do total?

Resposta: ____

9. Sérgio já fez 3/4 do trabalho de Geografia. Quantos por cento do trabalho de Geografia Sérgio já fez?

Resposta: ____

10. Na eleição para representante de turma do 5º ano, Luísa teve $\frac{1}{8}$ dos votos e Heitor $\frac{5}{8}$. Qual a fração dos votos que os dois tiveram, juntos?

Resposta: ____

11. Antônia foi à mercearia e comprou um pacote de arroz que custou 3,20 reais. Ela pagou sua compra com uma nota de 5,00 reais.

O troco que Antônia recebeu foi de: (faça o cálculo mentalmente, não use lápis nem papel).

Resposta: ____

12. Observe a seguir os tempos de classificação de alguns pilotos de Fórmula 1, no Grande prêmio de Cingapura em 2013:

Chilton 1,489 minutos; **Massa** 1,438 minutos; **Vetel** 1,428 minutos; **Alonso** 1,439 minutos e **Grosjeaan** 1,430 minutos.

De acordo com os tempos de classificação forme o grid de largada da corrida.

Resposta:

1º ______________________

2º ______________________

3º ______________________

4º ________________________

5º ________________________

13. Vera toma 5 copos de leite por semana, cada copo com 0,25 litros. Quantos litros de leite Vera toma por semana? (faça o cálculo mentalmente, não use lápis nem papel).

Resposta: ____

Instrumento do professor

Professor,

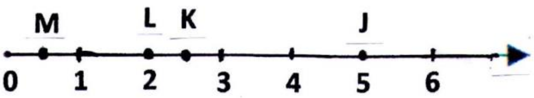
Queremos agradecer por sua colaboração em responder este instrumento de pesquisa. As perguntas a seguir foram desenvolvidas com o objetivo de entender melhor como os professores compreendem as possíveis estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem questões envolvendo expectativas de aprendizagem referentes aos números racionais.

Os dados coletados por este questionário serão analisados de forma conjunta e utilizados em estudos estatísticos. Com isso garantimos tanto o anonimato como o sigilo dos respondentes.

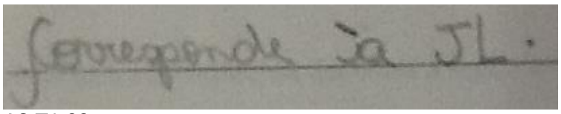
Apresentamos a seguir protocolos de respostas frequentes de alunos do 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental referentes a questões envolvendo algumas expectativas de aprendizagem dos números racionais.

Por gentileza responda as questões a seguir.

1. O número $\frac{5}{2}$ correspondente a que ponto assinalado na reta numérica?

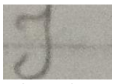


Resposta 1

Protocolo:  A3 T1 09
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados (as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Resposta 2

Protocolo:



A3 T1 05

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados (as) pelos alunos.

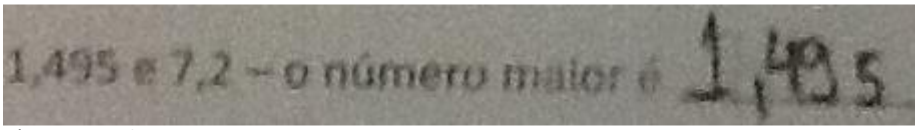
Justifique a escolha da estratégia.

2. Observe os pares de números decimais a seguir e diga qual deles é o maior:

a) 1,495 e 7,2 – o número maior é ________________
b) 15,7 e 0,9999 – o número maior é ______________

Resposta - letra a

Protocolo:



Aluno A4 T1 05

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

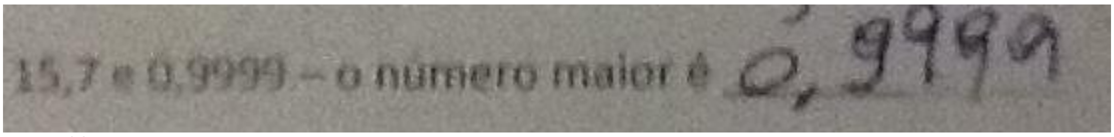
Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

Resposta – letra b

Protocolo:


15,7 e 0,9999 – o número maior é 0,9999

A5 T1 02

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

3. Um professor de educação física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Esse percentual equivale a quantos alunos do total?

Resposta 1

Protocolo:


50%

A7 T2 09

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

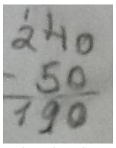
A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

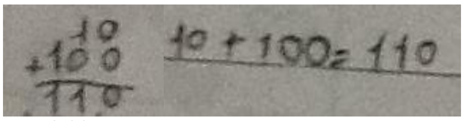
Justifique a escolha da estratégia.

Resposta 2

Protocolo:  A2 T2 12
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

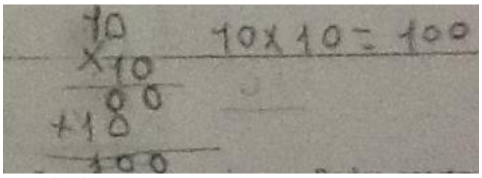
4. Que quantidade obtemos se juntarmos dez décimos? E se juntarmos cem centésimos?

Resposta 1 – letra a

Protocolo:  A4 T2 09
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.

Resposta 2 – letra a

Protocolo:



A4 T2 09

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

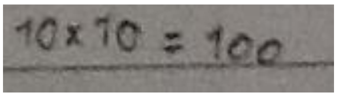
Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

Resposta 1 – letra b

Protocolo:



A5 T2 11

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

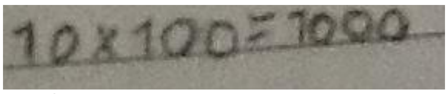
Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

Resposta 2 - letra b

Protocolo:



A5 T2 11

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

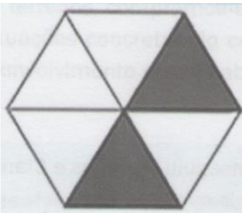
A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizados(as) pelos alunos

Justifique a escolha da estratégia.

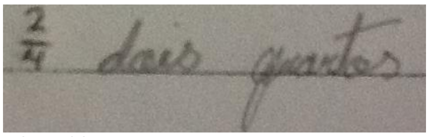
5. A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais.



A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

Resposta 1

Protocolo:



A2 T1 02

A resposta atribuída pelos alunos para a questão é:

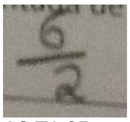
A ( ) Inadequada
B ( ) Pouco adequada
C ( ) Adequada
D ( ) Muito adequada

Justifique sua resposta.

Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizadas pelos alunos.

Justifique a escolha da estratégia.

Resposta 2

Protocolo:  A2 T1 05
A resposta atribuída pelos alunos para a questão é: A ( ) Inadequada B ( ) Pouco adequada C ( ) Adequada D ( ) Muito adequada
Justifique sua resposta. Descreva a(s) estratégia(s)/percurso(s) utilizadas pelos alunos. Justifique a escolha da estratégia.