Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Curso de Mestrado

PABLO EGIDIO LISBÔA DA SILVA

PROBLEMAS COMBINATÓRIOS CONDICIONAIS: UM OLHAR PARA O LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO

RECIFE
2015

PABLO EGIDIO LISBÔA DA SILVA

PROBLEMAS COMBINATÓRIOS CONDICIONAIS: UM OLHAR PARA O LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª Drª Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa

RECIFE
2015

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S586p Silva, Pablo Egídio Lisbôa da.
Problemas combinatórios condicionais: um olhar para o livro didático do ensino médio / Pablo Egídio Lisbôa da Silva. – Recife: O autor, 2015.
146 f. ; 30 cm.

Orientadora: Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2015.
Inclui Referências.
1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Combinações (matemática). 3. Livro didático. I. Pessoa, Cristiane Azevedo dos Santos. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2015-13)

PABLO EGIDIO LISBÔA DA SILVA

PROBLEMAS COMBINATÓRIOS CONDICIONAIS: UM OLHAR PARA O LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO

Aprovado em: 24/02/2015

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Presidente e Orientadora
Profª Drª Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa

____

Examinadora Externa
Profª Drª Cileda de Queiroz e Silva Coutinho

____

Examinador Interno
Profº Dr. Paulo Figueiredo Lima

Recife, 24 de Fevereiro de 2015.

AGRADECIMENTOS

Começo estes agradecimentos dizendo que sou um dos homens mais sortudos do planeta, porque estou cercado de algumas das pessoas mais maravilhosas que existem.

*A meus pais, **Felizardo Egidio** e **Gleyde Lisbôa** e a meus irmãos **Gleydson**, **Fabíola** e **Jefferson**, sou grato por todo apoio, torcida e colaboração!*

*À minha esposa **Lizomar Maria**, sou grato pela compreensão nesse período de intensas atividades e ausências. Saiba que tudo isso foi por você, assim como tudo o que faço! Sem você eu nada sou! "vou te amar, porque Deus me ensina a ser teu... meu caminho para o céu é contigo! Foi fazendo a vontade de nosso Deus que eu te encontrei"!*

*A meu amigo **Ivanildo Carvalho**, Pessoa que quero imitar quando crescer, meu primeiro incentivador, agradeço pelas informações sempre precisas e valiosas mesmo estando à quilômetros de distância!*

*A meu amigo **Alexandro da Silva Carmo**, agradeço pela forma inusitada com que me incentivou e convenceu a embarcar nessa jornada! Só sendo professor para utilizar os termos verbais que me fizeram sair do lugar de conforto em que me encontrava!*

*Às professoras **Iranete Lima** e **Cristiane Pessoa,** agradeço pelos seus "SIM"! Foi a partir daquele momento que este trabalho começou a ser gerado. Obrigado pela confiança!*

*À professora **Cristiane Pessoa** ainda, sou muito grato por ter compartilhado comigo sua grande humanidade e sabedoria. Com toda certeza, essa foi a melhor parte!*

*A **Jesus** e à **Nossa Senhora das Graças** que sempre me conduziram durante toda esta jornada, agradeço pela proteção, cuidado e providência!*

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar os livros didáticos de matemática aprovados pelo Programa Nacional do *livro didático* em 2012, que são voltados ao ensino médio, acerca dos problemas combinatórios condicionais. Para tanto, apoiou-se na categorização elaborada por Borba e Braz, a qual coloca que, além dos *invariantes* de *escolha* e *ordem*, relata a existência também dos *invariantes* de *posicionamento e/ou proximidade* e os de *explicitação* (ou não), todos relacionados aos elementos pertencentes aos conjuntos que se pretende contar e/ou agrupar. A presente pesquisa fundamentou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud que defende que um conceito é formado por um tripé composto pelas: *Situações* que dão significado ao conceito, pelos *Invariantes* que representam as diferentes propriedades do conceito e pelas *representações simbólicas.* Nesta dissertação defende-se que, quanto maior for o número de situações com que os alunos se deparam, ou seja, quanto maior for a diversidade dos problemas explorados pelos livros didáticos, haverá uma maior probabilidade de êxito na construção dos conceitos que se pretende ensinar. Sendo assim, considera-se que os problemas combinatórios condicionais constituem um arsenal de situações distintas, capazes de estimular os alunos a refletir sobre o problema, pois se este se constitui em um desafio, os alunos, de um modo geral, se sentem motivados a resolvê-lo. Os dados obtidos mostram que os problemas combinatórios estão concentrados nos livros do 2º ano do ensino médio. O levantamento quantitativo que procurou calcular o percentual de problemas combinatórios condicionais, em face aos problemas que não são condicionais, mostra, que as sete coleções analisadas apresentam percentuais que variam de 13,10% a 42,20% de problemas combinatórios condicionais. Desses problemas condicionais, os do tipo *permutação*, *arranjo* e *combinação* foram os mais explorados. Quanto aos tipos de Representações Simbólicas, a *Árvore de Possibilidades* e a *Tabela* foram as mais indicadas pelos autores dos livros em questão, embora não haja o incentivo para a utilização das mesmas. De forma geral, os problemas combinatórios condicionais abordaram contextos que faziam menção à organização de objetos em prateleiras, ou construção de anagramas (*permutação*); à criação de senhas ou de números com determinada quantidade de algarismos (*arranjo*) e à organização de comissões (*combinação*). As análises efetuadas no manual destinado especificamente ao professor mostraram a ausência de sugestões específicas que pudessem orientar o trabalho deste profissional em sala de aula ao trabalhar com os problemas combinatórios condicionais. Conclui-se então, que é considerável a quantidade de questões que trazem em seus enunciados, situações contextualizadas com a atividade diária dos alunos, possibilitando a instituição mais eficaz de um ou vários sentidos aos conceitos da combinatória.

Palavras-Chave: Problema Combinatório Condicional. Livro Didático. Ensino Médio

ABSTRACT

This research aimed to analyze the mathematics textbooks approved by the National Textbook Program in 2012, which are directed to the high school, about conditional combinatorial Problems. Therefore, has relied on categorization developed by Borba and Braz, which posits that, in addition to choice and order invariant, reports the existence also of positioning and / or proximity invariant and the explanation (or not) all related to the elements belonging to the sets to be counted and /or group. This research was based on the Conceptual Fields Theory of Vergnaud who holds that a concept is formed by a tripod composed of: Situations that give meaning to the concept, by Invariant that represent the different property of concept and by the symbolic representations. In this dissertation argues that the greater the number of situations that students are faced, that is, the greater the diversity of problems exploited by textbooks, there will be a greater chance of success in the construction of concepts that intends to teach. Therefore, it is considered that the conditional combinatorial problems are an arsenal of different situations, able to stimulate students to think about the problem, because if this constitutes a challenge, students, in general, feel motivated to solve it. The data obtained show that the combinatorial problems are concentrated in the books of the 2nd year of high school. The quantitative survey that sought to calculate the percentage of conditional combinatorial problems, in the sight of problems that are not conditional, shows that the seven analyzed collections present percentages that range from 13.10% to 42.20% of conditional combinatorial problems. Of these conditional problems, the type *permutation*, *arrangement* and *combination* were the most exploited. Regarding the types of symbolic representations, the "*possibilities tree*" and *Table* were the most indicated by the authors of the books in question, although there is not the incentive to use them. In general, the conditional combinatorial problems have addressed contexts that made mention of arranging objects on shelving, or construction of anagrams (*rotating*); the creation of passwords or numbers with certain amount of digits (*arrangement*) and organizing commissions (*combination*). Analyses on the manual specific to the teacher showed the absence of specific suggestions that could guide the work of this professional in the classroom to work with conditional combinatorial problems. It is concluded, that there is a considerable amount of issues that bring in their utterances, situations contextualized with daily activity of the students, enabling more effective use of one or more senses to the concepts of combinatorics.

Keywords: Conditional Combinatorial problem; Textbook; High School

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muito se tem escrito sobre a importância do *livro didático* (LD) em pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática, assim como muitas críticas têm sido dirigidas à forma como estas fontes de pesquisas abordam determinados temas em seus eixos, ambas abordagens, defesa e crítica, podem ser vistas em Dante (1996), Belfort (2003), Mandarino e Belfort (2004), Januário (2010), Rosa, Ribas e Marazzutti (2012). Não se pode esquecer, no entanto, que na educação brasileira o *livro didático* acaba se tornando uma das únicas opções que ainda podem ser acessadas por uma grande parte de alunos e de professores. O LD tem sido um apoio importante para o trabalho do professor e uma fonte permanente para a aprendizagem do aluno. Ele contribui para o processo de ensino e de aprendizagem e, geralmente, contém uma perspectiva sobre o saber a ser trabalhado na escola, ou seja, de certa forma direciona o currículo das escolas brasileiras.

Diante da importância do LD na escola e no trabalho do professor, é necessário explorar separadamente cada eixo temático disponibilizado e analisar se trazem conteúdos que favorecem a construção do conhecimento de maneira sistemática. Na Matemática especificamente, de acordo com o Guia de Livros Didáticos PNLD de Matemática do Ensino Médio (BRASIL, 2012), os conteúdos devem ser articulados entre os seguintes eixos: *Números e operações; Funções; Equações algébricas; Geometria; Geometria analítica* e *Estatística e Probabilidades.* Essa classificação, de acordo com o Guia, foi adotada apenas para proceder com a análise dos livros didáticos propostos, não se constituindo como única possível.

O conjunto de normas que está inserido nesses eixos foi organizado de forma que a Matemática no ensino médio contemple as necessidades básicas do seu público alvo, apresentando diversas formas de motivação, e desenvolva em cada aluno, particularmente, novos interesses e ainda o habilitem para que novas capacidades sejam construídas.

Sobre como se dá a construção de diferentes habilidades/competências e conceitos, Vergnaud (1986) defende que os conceitos levam um longo período de tempo para se desenvolverem. O raciocínio combinatório se desenvolve também em um longo período de tempo e precisa ser levado em consideração pelo professor e pela escola durante todo o processo de escolarização. De acordo com Vergnaud (1986), um conceito é formado por um tripé: *situações* que dão sentido ao conceito; *invariantes* prescritivos, propriedades que caracterizam o conceito; e *representações* *simbólicas*, ou seja, diferentes formas de representar o conceito, e não deve ser reduzido apenas à sua definição quando o objetivo principal em questão for sua aprendizagem. Vergnaud (1991) afirma ainda que, para o aluno, o sentido atribuído ao conceito está diretamente relacionado à atividade de resolução de problemas. Sendo assim, percebe-se que o conceito está sempre sendo processado ao longo do tempo, de acordo com cada situação apresentada e criando caminhos rumo à sua objetividade ou generalidade sem poder ser tratado como finalizado, definitivo.

A presente dissertação foi elaborada em consonância com o que está posto nessa introdução e está organizada da seguinte maneira: no primeiro capítulo – O LIVRO DIDÁTICO – apresenta-se a linha do tempo que descreve a origem e o desenvolvimento do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) até os dias atuais, assim como se discute sobre a importância do *livro didático* para o sistema de ensino brasileiro, comentando-se mais especificamente sobre o *livro didático* de Matemática e seu respectivo manual, que contém orientações educacionais em conformidade com as exigências dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

No segundo capítulo – CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS - apresenta-se o referencial teórico que norteou esta pesquisa de mestrado. Discute-se aqui sobre a formação de conceitos e a forma como esses conceitos estão organizados em campos conceituais, fazendo menção, especificamente, ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, onde está inserida a combinatória, cuja apresentação será feita no capítulo 3.

No terceiro capítulo – A COMBINATÓRIA – chama-se atenção para a necessidade de se promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de uma instrução adequada, e por esse fato, são apresentadas definições que, acredita-se, sejam pertinentes ao que está posto nesta dissertação. Os tipos de problemas, próprios da combinatória, *permutação, arranjo, combinação* e *produto cartesiano*, são apresentados e discutidos neste capítulo; ainda neste capítulo, os problemas combinatórios condicionais são anunciados e discutidos através de resultados encontrados pelas pesquisadoras Borba e Braz (2012); apresenta-se também a descrição de todas as categorias de problemas combinatórios condicionais e seus respectivos exemplos; finalizando este capítulo, apresentam-se alguns estudos anteriores envolvendo a combinatória e os *livros didáticos* de matemática.

No quarto capítulo – OBJETIVOS E MÉTODO – apresentam-se os objetivos que foram propostos para a realização desta pesquisa, assim como se descreve o percurso metodológico escolhido para a realização da mesma.

No quinto capítulo – APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS – são apresentados os dados quantitativos desta pesquisa, que foi realizada com base nas sete coleções de Livros Didáticos que compõem o Programa Nacional do Livro Didático de 2012, em relação aos problemas combinatórios condicionais, assim como as informações que originaram os aspectos qualitativos desta mesma pesquisa, cujo conteúdo é composto pelas discussões sobre conceito, tipos de problemas combinatórios condicionais explorados, formas de representações utilizadas para representar os tipos de contagens e orientações trazidas pelo manual do professor.

Na última parte desta dissertação – CONSIDERAÇÕES FINAIS – procurou-se, de posse dos dados obtidos na pesquisa, refletir sobre a importância da exploração de problemas combinatórios que apresentem condições específicas, de maneira que proporcionem ao aluno a utilização de uma quantidade diversificada de conceitos, eximindo-os à mera aplicação mecânica de fórmulas resolutivas.

CAPÍTULO 1:
O LIVRO DIDÁTICO

1.1 Histórico do *livro didático* no Brasil

Para que seja discutida a importância do *livro didático* na educação brasileira, e mais especificamente sobre o *livro didático* de Matemática e seu respectivo manual, optou-se, inicialmente, por apresentar o processo de criação do Programa Nacional do Livro Didático, cuja função é criar leis que impulsionem a produção desse material de grande consumo no país.

De acordo com o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE (BRASIL, 2014), o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) teve início no ano de 1929 como resultado de uma ação governamental, que teve como objetivo, legislar sobre políticas públicas que impulsionassem a produção em larga escala do *livro didático*. Naquela ocasião, foi instituída a criação do Instituto Nacional do Livro (INL). Mas foi só em 1938 que a primeira Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) foi criada, estabelecendo assim a primeira política de legislação e controle de produção e circulação do *livro didático* no país.

Ainda segundo o FNDE (BRASIL, 2014), por meio do Decreto-Lei nº 8.460, de 26/12/45, consolidou-se a legislação que tratava das condições de produção, importação e utilização do *livro didático*. Com o objetivo de coordenar estas ações referentes à produção, edição e distribuição do *livro didático*, foi que em 1966 o Ministério da Educação (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (Usaid) fizeram um acordo que rendeu recursos suficientes para que fossem distribuídos 51 milhões de livros gratuitamente no período de três anos, permitindo que o programa tivesse continuidade até 1971, ano em que este convênio foi encerrado por conta da implantação do sistema de contribuição financeira das unidades federadas para o fundo do *livro didático*. Em 1976, com a extinção do INL, o governo tornou-se responsável para suprir parte da compra dos livros e por sua distribuição nas escolas e nas unidades federadas, contando agora com o apoio da Fundação Nacional do Material Escolar (Fename).

A Fename, por sua vez, foi substituída pela Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), que em 1983 incorporou logo no início o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (Plidef) e apresentou a proposta de permitir que os professores fizessem parte da escolha dos livros didáticos. Dois anos mais tarde, em 1985, por meio do Decreto-Lei nº 91.542, de 19/08/85, o Plidef é substituído pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que, apesar de manter aspectos já existentes, apresentou algumas mudanças: manteve a proposta da FAE em permitir que o professor indique o *livro didático* a ser utilizado por ele; sugeriu a reutilização do livro possibilitando a criação de um banco de livros didáticos; estendeu a oferta de livros para os alunos de 1ª e 2ª séries (atuais 2º e 3º anos) das escolas públicas e comunitárias e pôs fim à participação financeira dos estados, deixando o controle a cargo da FAE (BRASIL, 2014).

Os primeiros critérios de avaliação dos livros didáticos surgiram entre 1993 e 1994 e foram publicados pelo conjunto MEC/FAE/UNESCO, trazendo de volta a universalização da distribuição no ensino fundamental e incluindo as disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa (1995), Ciências (1996) e Geografia e História (1997). O primeiro Guia de Livros Didáticos foi publicado no ano de 1996 e era destinado aos livros que atendiam ao público de 1ª a 4ª séries (atuais 2º a 5º anos) e excluía todos aqueles livros que apresentavam erros conceituais, atividades que induziam ao erro, livros desatualizados ou que traziam conteúdos preconceituosos ou discriminatórios. Um ano mais tarde, em 1997, o programa amplia a distribuição para os alunos de 5ª a 8ª séries (atuais 6º a 9º anos) do Ensino Fundamental. Apenas em 2003, por conta da Resolução CD FNDE nº 38, de 15 de outubro, é que foi instituído o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) que foi sendo consolidado progressivamente até os dias atuais.

1.2 Importância do livro didático no Ensino

No Brasil, os meios de comunicação começaram a ser utilizados como ferramentas para a aprendizagem a partir da década de 1970 e as mídias mais utilizadas eram o rádio e a TV (TORI, 2010). Já naquela época, a educação ganhou novas perspectivas com a aprendizagem baseada nas tecnologias. Atualmente, a humanidade possui meios de informação, aprendizagem, diversão e comunicação tão mais atrativos, e de formas tão diversas, que de certa forma eram inimagináveis para aquele tempo. A tecnologia foi sendo aprimorada com o passar dos anos e hoje, jogos eletrônicos, realidade virtual, ambientes virtuais 3D, Web 2.0 e celulares potentes, vêm chamando a atenção dos jovens a cada dia que passa. Mas, mesmo que esteja acontecendo essa explosão tecnológica, o livro permanece figurando entre os recursos principais e centrais na educação brasileira.

Para Pfromm Neto (1974), o livro sempre estará associado às mais importantes realizações do homem. Para ele, o livro guarda o relato de tudo o que foi dito ou feito no passado e serve de consulta permanente para as gerações futuras. É um recurso educacional que pode contribuir para grandes mudanças nos modos de pensar, agir e sentir dos alunos, e sua utilização diária favorece o desenvolvimento de algumas capacidades como: aquisição de vocabulário; leitura mais rápida; aumento na compreensão do que se lê e o desenvolvimento de habilidades como a de seguir instruções escritas.

Conforme Carvalho (2010), as tendências curriculares mais recentes têm dado um maior privilégio à ideia de um ensino mais voltado para a construção de competências, porém não deixando de proporcionar a construção de saberes que servirão de base para que essas competências sejam criadas.

O *livro didático* é um elemento que muitas vezes torna-se o único material ao qual o professor e o aluno têm acesso, ou, mesmo que estes tenham acesso a outros materiais, o *livro didático* serve como apoio para as escolhas do professor e consequentemente para o que será ensinado em sala de aula. Neste sentido, é fundamental que este livro tenha uma qualidade satisfatória para que possa atender às necessidades de formação do discente no sentido de construção de saberes importantes para o seu desenvolvimento.

Outra reflexão sobre o *livro didático* foi feita por Gérard e Roegiers (1998) citando algumas funções que eles precisam desenvolver sobre os alunos como, por exemplo, a de propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades, que contribuam para aumentar sua autonomia e favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes, colaborando assim com sua formação social e cultural.

O nosso foco de estudo é o *livro didático* de Matemática, o qual passará a ser discutido no próximo ponto.

1.3 Livro didático de matemática

Conforme o que escreveu D'Ambrósio (2008), a primeira vez em que se teve notícia de uma publicação em forma de *livro didático* de matemática no Brasil, foi no ano de 1744, com o título de "*Exame de Artilheiros*", cujo autor, José Fernandes Pinto Alpoim, militar português, teria escrito sob uma intensa pressão da metrópole que tinha como objetivo garantir a segurança da colônia e naquela época precisava de uma instrução militar mais específica, que se aperfeiçoasse cada vez mais na área de fortificações, porém os livros de matemática que existiam eram europeus e não se adequavam às reais necessidades da colônia.

No contexto histórico, o ensino de matemática sempre teve necessidade de fazer registros que servissem como fonte de consulta, conhecimento e de aprendizagem que se perpetuassem pelo tempo, e por esse motivo criou uma relação de dependência com os livros didáticos, como afirmou Valente (2008, p.141) quando escreveu:

> Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência, a saber, de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 2000), é no ensino médio que a Matemática desperta no aluno uma maior confiança e desprendimento ao serem submetidos a novos desafios. Contribui também para o desenvolvimento de processos de pensamento que por sua vez originam a tomada de novas atitudes que ultrapassam o âmbito da Matemática que com o advento da utilização da tecnologia. Por exemplo, causa um impacto na vida de cada aluno e serão necessárias novas competências que estão muito adiante daquelas desenvolvidas no ensino fundamental. Para isso, o currículo do ensino médio está estruturado de forma que favoreça a aquisição de novas habilidades, diferentes das já adquiridas no ensino fundamental, que orientem os discentes em suas escolhas.

1.4 Manual do professor no livro didático

Para Gérard e Roegiers (1998, p.19), um manual do professor pode ser definido como “sendo um instrumento impresso, intencionalmente estruturado para se inscrever num processo de aprendizagem, com o fim de lhe melhorar a eficiência”. Este material contém orientações do autor, direcionadas ao professor, com o objetivo de proporcionar uma maior reflexão desse profissional sobre cada tema trabalhado por capítulo. Apresenta uma proposta metodológica diferenciada que, somada ao conhecimento pedagógico, pertencente a cada professor, possa proporcionar uma melhor e mais eficaz aquisição do conhecimento.

Ainda segundo estudos dos mesmos autores, encontram-se citadas algumas expectativas que eles têm a respeito do manual do professor, afirmando que esses instrumentos precisam assegurar uma informação científica e geral sobre todos os tópicos que foram estudados em cada unidade; precisam trazer uma formação didática, ligada à disciplina em questão; precisam conter orientações que forneçam ajuda nas aprendizagens e na gestão das aulas, e por fim, esperam que forneçam um apoio na avaliação das aquisições do conhecimento.

A estas expectativas, acrescentam-se ainda, características citadas por Choppin (1992, *apud* Morgado, 2004, p. 37), que são inerentes a estes manuais:

> o manual escolar resume quatro características diferentes e importantes e que lhe conferem uma atitude própria: é um produto de consumo, um suporte de conhecimentos escolares, um veículo transmissor de um sistema de valores, de uma ideologia, de uma cultura e, por último, um instrumento pedagógico.

Conforme o edital de convocação para submissão de coleções de livros didáticos:

> O Manual do Professor deve visar, antes de qualquer coisa, a orientar os docentes para um uso adequado da coleção, constituindo-se, ainda, num instrumento de complementação didático-pedagógica e atualização para o docente. Nesse sentido, o Manual deve organizar-se de modo a propiciar ao docente uma efetiva reflexão sobre sua prática. Deve, ainda, colaborar para que o processo de ensino-aprendizagem acompanhe avanços recentes, tanto no campo de conhecimento do componente curricular da coleção, quanto no da pedagogia e da didática em geral (EDITAL do PNLD 2011, p.39).

O PNLD tem trazido mudanças significativas na qualidade dos manuais destinados ao professor. Ele tem mostrado preocupar-se com o processo de ensino e aprendizagem, além de demonstrar preocupação com o significado que todo esse processo traz para as práticas sociais. Outra característica marcante das propostas trazidas pelos manuais destinados ao professor tem sido o cuidado em oferecer orientações sobre como avaliar a aprendizagem de forma que possibilite ao profissional da educação acompanhar o desenvolvimento do aluno e o auxilie nesse processo contínuo.

CAPÍTULO 2:
CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

2.1 Formação de conceitos por meio do desenvolvimento de competências

Para que seja discutida a questão da aquisição e/ou desenvolvimento de competências pelo aluno, será realizada uma explanação sobre a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Gérard Vergnaud, assim como será feita uma discussão sobre os meios pelos quais são construídos os conceitos que são constituídos pelas *situações*, pelos *invariantes* que constituem as diferentes propriedades do conceito e pelas *representações* simbólicas.

Pais (2001) afirma que os conceitos são ideias gerais e abstratas, desenvolvidas no âmbito de uma área específica de conhecimento, criados para sintetizar a essência de uma classe de objetos, situações ou problemas relacionados ao mundo da vida. Enfatiza ainda que o conceito é algo que está em permanente estado de devir, ou seja, mesmo que esteja associada a uma classe de objetos materiais, a generalidade e a abstração somente serão compreendidas na medida em que forem abordadas por meio de um movimento evolutivo.

Pode-se dizer ainda que um conceito é formado com base em conhecimentos adquiridos previamente que estão armazenados e prontos para serem resgatados e sintetizados com os novos conhecimentos que forem adquiridos pelo sujeito. Para Vergnaud (1986), um conceito não é somente uma definição dada por meio de um enunciado e texto, é também aquilo que faz parte da base de sustentação para o desenvolvimento das competências e que permite que a ação seja operatória, podendo ser definido como um tripé que é formado pelo conjunto das *Situações* (**S**), que é composto de todas as situações que dão sentido, significado ao conceito; o dos *Invariantes prescritivos*[1], ou seja, do conceito (**I**), que contém todos os invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito e o caracterizam; e o das *Representações* (**R**), que engloba todas as representações simbólicas que podem ser utilizadas pelo sujeito.

Vergnaud (1986) reforça ainda mais essa explanação ao discutir sobre a possibilidade de haver resolução de uma única situação com a intenção de solucioná-la com êxito. Afirma que é necessário analisá-la tendo como

[1] Os invariantes operatórios (conceitos – em - ação e teoremas – em – ação) são próprios da atividade cognitiva dos sujeitos.

fundamentação um conjunto de conceitos que nem sempre estará explícito nela própria e para que seja formulado um conceito que possa responder a todas as questões levantadas na situação apresentada é necessário que haja um longo período de tempo, constituído por muitas interações entre vários conceitos. Essa interação, segundo Vergnaud (1986), acontece dentro de um conjunto denominado por ele de Campo Conceitual.

2.2 A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais, conforme Maia (2000, p.38), começou a ser construída ao tentar responder como acontece o desenvolvimento das competências no sujeito, ou seja, como o sujeito desenvolve capacidades eficazes para resolver um problema.

Escrevendo sobre o desenvolvimento das competências pelo sujeito, a pesquisadora afirma que a ação desse sujeito precisa ser eficaz, ou seja, precisa ser amparada por representações que tornem esse movimento (ação) de desenvolvimento eficiente. Sendo assim, considera que a Teoria dos Campos Conceituais é uma *Teoria da Representação,* por acreditar que para estudar o desenvolvimento das competências de cada ser humano a Teoria dos Campos Conceituais não pode desconsiderar que, em parte, toda competência é originada da Representação que o sujeito tem dele mesmo, da situação e de elementos que surgem na interação dele com o real. Portanto, Maia (2000) conceitualiza Campo Conceitual como um conjunto de situações, cujo tratamento implica esquemas, conceitos-em-ação (um pensamento tido como pertinente) e teoremas-em-ação (proposição sobre o real tida como verdadeira), ou seja, os invariantes operatórios, em estreita conexão, associados às representações verbais e simbólicas.

Para Vergnaud (1990, p.133),

> a Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista, que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, mais particularmente, daquelas que pertencem ao domínio científico e tecnológico.

Vergnaud (1990) defende que o conhecimento está relacionado à competência, e a define como sendo uma ação concreta adequada que serve para tratar uma situação. Segundo ele, o conhecimento escolar, com suas competências próprias, é constituído pelo conhecimento cotidiano e pelo conhecimento científico.

Sendo assim, para Vergnaud (1986), um campo conceitual pode ser definido como “um conjunto de situações cujo domínio, por parte do sujeito, requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (p.84). Porém, como Vergnaud (1986) mesmo afirma, para descrever um campo conceitual é necessário que ao mesmo tempo seja feita uma análise das situações ou dos problemas que serão trabalhados, e uma análise dos procedimentos que foram tomados pelos alunos, ou seja, das estratégias utilizadas por eles para resolver os problemas propostos. É necessário também analisar os propósitos que eles têm em suas argumentações e as representações simbólicas que utilizaram para chegar a uma resposta para aquela situação. Assim, a Teoria dos Campos Conceituais fornece elementos que possibilitam que seja feita uma análise das competências desenvolvidas pelos alunos, assim como de suas dificuldades na construção de conceitos e possibilita que um diagnóstico sobre eles seja elaborado por meio da análise das estratégias utilizadas por eles ao serem confrontados com uma situação-problema.

As competências desenvolvidas pelo sujeito, de acordo com Pessoa (2009), são sustentadas por esquemas organizadores da conduta. Para ela, fundamentada em Piaget e em Vergnaud, o funcionamento cognitivo, inerente a cada aluno, comporta operações que se automatizam progressivamente, e essa automatização, conforme a pesquisadora é uma das manifestações do caráter invariante da organização da ação, juntamente com a decisão consciente de cada sujeito. A pesquisadora afirma que o sujeito passa por níveis de desenvolvimento mais elementares até chegar em níveis mais complexos de formalização e até de explicitação consciente do conhecimento. Fazem parte deste processo de desenvolvimento do conhecimento pelo sujeito os invariantes operatórios, descritos por Vergnaud (1991), que com suas categorias principais: *teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação* auxiliam a construção dos modelos mentais. A primeira, aparecendo de forma intuitiva nas ações de cada indivíduo ao se deparar com situações a resolver, e a segunda, presente no repertório de conceitos que cada sujeito possui.

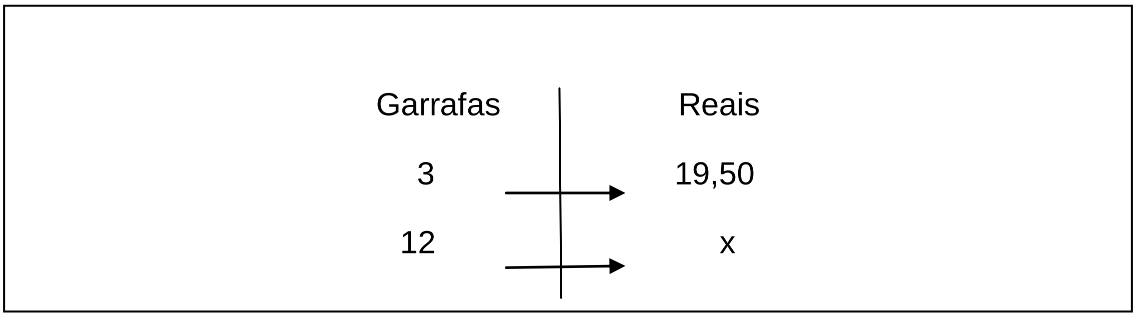
2.3 As estruturas multiplicativas de Gerard Vergnaud

Vergnaud (1983) classificou os problemas de estrutura multiplicativa como sendo aqueles cujo centro estrutural contido nas situações-problema, sempre envolve uma multiplicação ou uma divisão e afirma que esse tipo de problema pode ser identificado em três classes: Proporção Simples, Proporção Múltipla e Produto de Medidas.

As duas primeiras classes, Proporção Simples e Proporção Múltipla, são consideradas como uma ***relação quaternária***, ou seja, duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas medidas restantes, são de outro tipo.

Exemplo: “Vou comprar 12 garrafas de vinho a R$ 19,50 por três garrafas. Quanto vou gastar?” (VERGNAUD, 2009, p. 240).

Quadro 1- Representação gráfica do cálculo da relação quaternária Proporção Simples.



Fonte: Vergnaud, G (2009, p.240)

Nesse exemplo percebe-se claramente que há uma dupla relação entre as duas variáveis em questão, garrafas e reais.

A relação quaternária, dita **Proporção Múltipla**, é aquela responsável por tratar situações que envolvem mais de duas grandezas, que se relacionam duas a duas, e que é mais comum ser encontrada em problemas de *regra de três composta*.

Exemplo: Um grupo de 50 pessoas vai passar 28 dias de férias no campo. Eles precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente. Eles sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 4Kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar? (MAGINA, SANTOS e MERLINI, 2014)

Quadro 2 - Representação gráfica do cálculo da relação quaternária Proporção Múltipla

pessoas	dias	Kg de açúcar
10	7	4
50	28	X

De acordo com Vergnaud (1983), neste tipo de relação quaternária se faz necessário separar as grandezas, duas a duas, para que seja verificado se são *diretamente proporcionais* ou *inversamente proporcionais.* Esta situação específica apresenta um conjunto de duas duplas relações (pessoas/dias) e (dias/kg de açúcar).

A terceira classe, denominada de Produto de Medidas, faz parte das ***relações ternárias*** pelo fato de serem tratadas como uma relação entre dois elementos, de natureza ou grandeza distintas que se compõem para formar um terceiro elemento.

Exemplo: “3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?” (VERGNAUD,2009, P.253)

Procurando encontrar possíveis soluções para situações semelhantes a esta, Vergnaud (2009) afirma que o esquema mais natural que deve ser utilizado na representação dessa forma de relação é a tabela cartesiana, pelo fato de trazer a noção de *produto cartesiano*, ou seja, chamando de **R** = $\{r_1, r_2, r_3\}$ o conjunto dos rapazes e de **M** = $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ o conjunto das moças, pode-se obter um terceiro conjunto **C** que será formado pelo *produto cartesiano* entre o conjunto R e o conjunto M.

$$\mathbf{C = R \times M}$$

Quadro 3 - Representação de uma relação ternária por meio de uma tabela cartesiana

	m_1	m_2	m_3	m_4
r_1	(r_1, m_1)	(r_1, m_2)	(r_1, m_3)	(r_1, m_4)
r_2	(r_2, m_1)	(r_2, m_2)	(r_2, m_3)	(r_2, m_4)
r_3	(r_3, m_1)	(r_3, m_2)	(r_3, m_3)	(r_3, m_4)

Os pares ordenados contidos no Quadro 3 são os elementos do conjunto C que representa o número total de casais que são possíveis de serem formados pela associação de cada elemento do conjunto **R**, com cada elemento do conjunto **M**.

Como foi visto, os conceitos são formados pelo tripé *situações*, *invariantes prescritivos* (do conceito) e *representações simbólicas* e são gradativamente construídos pelo indivíduo em um longo período de tempo, passando pelos invariantes operatórios (de construção do conhecimento pelo indivíduo), tais como teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, até chegar a um nível maior de formalização.

No presente estudo, tratamos especificamente dos problemas do campo conceitual das estruturas multiplicativas, onde está inserida especificamente a Combinatória que é nosso objeto de estudo e que será discutida no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3:
A COMBINATÓRIA

3.1 Raciocínio combinatório

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) expressam que é necessário estimular o desenvolvimento psicoevolutivo do raciocínio combinatório por meio de uma instrução adequada por constituírem um excelente meio para que os alunos passem para uma fase que os permita realizar atividades como modelização e representação, por exemplo. Para eles, Bernoulli (1713) traz uma definição sobre combinatória que é bastante esclarecedora quando afirma que é a arte que nos ensina a enumerar todos os modos possíveis em que certo número de objetos pode ser misturado e combinado sem que seja omitido nenhum.

Para Hazzan (1946), a Análise Combinatória visa a desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições.

3.2 Definições

Morgado (1991) defende, que pelo fato de a Análise Combinatória, ou simplesmente combinatória, possuir e tratar de vários tipos de problemas que exploram técnicas de contagem como *arranjo*, *permutação*, *combinação*, Princípio da Inclusão-Exclusão, entre outros, pode ser definida como sendo *a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas* sempre com o objetivo de demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto maior, que é finito, satisfazendo determinadas condições, mas também de contar ou classificar esses subconjuntos.

Definindo a combinatória como sendo a parte da Matemática que analisa estruturas discretas, Morgado (1991) referiu-se às classes de operações que são realizadas nos conjuntos discretos e que são próprias da combinatória, como a mudança de estrutura dos elementos do novo conjunto formado em relação aos do conjunto de origem.

***Exemplo**: Considerando o conjunto **M = {5,6,7,8}**. Calcular quantos subconjuntos de 2 elementos podem ser formados com os elementos de **M**.*

Alguns dos possíveis subconjuntos compostos com 2 elementos cada, poderiam ser {5,6}; {7,8}; {5,8} que são em sua composição, diferentes por natureza.

Outros subconjuntos possíveis seriam os formados com a seguinte composição: {5,6}; {6,5} e {7,8}; {8,7}. Nestes, percebe-se que mesmo sendo alterada a ordem dos elementos, a natureza foi mantida, ou seja, {5,6} = {6,5} e contá-los estaria contando duas vezes o mesmo subconjunto, pois a ordem neste caso, não gera novas possibilidades. Portanto, observando o critério da mudança da ordem sem mudar a natureza dos elementos, tem-se que o número de subconjuntos possíveis de ser formado é 12.

Batanero *et al* (1996) definem a combinatória como a arte que nos ensina a enumerar todos os modos possíveis que uma quantidade determinada de objetos pode ser combinada e contada que nos dá a garantia de que todas as possibilidades de combinação foram consideradas, ou seja, nenhuma das possibilidades foi omitida.

Merayo (2001) buscou definir a combinatória a partir da ideia fundamental que ela própria possui: a de contagem. Para Merayo (2001), Análise Combinatória, ou combinatória, consiste em uma técnica própria utilizada para contar objetos pertencentes a um conjunto sem precisar contar um a um.

3.3 Tipos de problemas (*situações*), associados aos seus respectivos *invariantes* e *representações simbólicas* na combinatória.

Neste item retomamos as discussões sobre a formação do conceito defendida por Vergnaud (1986) e apresentaremos as definições de cada tipo (*situação* que dá significado ao conceito) de problema que é próprio da combinatória, assim como será feita a associação de cada um desses problemas com seus *invariantes*, e também serão apresentadas algumas estratégias mais comuns utilizadas como forma de *representação* simbólica.

3.3.1 Permutação

Merayo (2001, p.241), definindo *permutação* escreve:

> Seja um conjunto formado por ***m*** elementos distintos. Recebe o nome de Permutação Simples de ***m*** elementos, cada um dos diferentes conjuntos que se pode formar de maneira que cada um deles contenha todos os ***m*** elementos dados, sendo apenas diferenciado um conjunto do outro unicamente pela ordem.

Exemplo: Quantos anagramas podem ser escritos a partir da palavra CORDA?

Pensando de maneira bem preliminar, poder-se-ia proceder com uma listagem contendo todas as possibilidades de anagramas iniciados pela letra **C**, em seguida listar todos iniciados pela letra **O** e assim proceder até listar todos os anagramas iniciados pelas letras **R, D** e **A** chegando ao total de 120 anagramas.

Outra estratégia seria a utilização do *Princípio Fundamental da Contagem*, também conhecido como princípio multiplicativo ou simplesmente regra do produto, assim, se existe ***m*** maneiras distintas para realizar uma primeira ação e ***n*** possíveis maneiras de se realizar uma segunda ação, independente das já realizadas na primeira ação, o número total de maneiras de se realizar as duas ações é dada pelo produto ***m*** x ***n***.

1ª realização	2ª realização	3ª realização	4ª realização	5ª realização

Como as realizações são distintas, temos uma quantidade de cinco possibilidades de serem escolhidas para a primeira etapa por se tratar de um conjunto que contém cinco elementos {C, O, R, D, A}; pelo fato de um desses elementos já ter sido utilizado na primeira realização, restam apenas quatro para serem utilizados na segunda realização, três para serem escolhidos na terceira, dois para serem escolhidos na quarta realização, restando apenas um para ser utilizado na quinta realização, portanto 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 possibilidades de anagramas.

Fazendo um paralelo com a Teoria dos Campos Conceituais e levantando uma discussão sobre os *invariantes* relacionados à Combinatória, assim como discorrendo sobre as relações e propriedades que se mantêm constantes nele, Pessoa e Borba (2009) afirmam que na *permutação*: a ordem dos elementos gera novas possibilidades. E que *todos os elementos são usados* em diferentes ordens para formar as *permutações*.

3.3.2 Arranjo

Sobre este tipo de problema (*situação*), Merayo (2001, p.236) escreveu:

> Seja um conjunto formado por **m** elementos distintos. Recebe o nome de *arranjo* simples de ordem **n**, todo conjunto ordenado formado por **n** elementos tomados dos **m**, de tal modo que duas variações ou conjuntos são considerados distintos se diferem em algum de seus elementos ou, se possuir os mesmos elementos, mas diferirem na ordem em que são colocados.

Exemplo: Dado o conjunto ***M*** = {a, b, c, d}, obtenha todos os arranjos, com elementos distintos, formados com os elementos do conjunto *M*, tomados dois a dois.

Para se obter todos os arranjos procurados, a partir dos elementos do conjunto M, tomados dois a dois, é possível descrevê-los por intermédio de uma Listagem como podemos observar a seguir:

(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (c,b), (c,a), (b,a)

Outra forma de resolução pode ser por intermédio da construção de uma tabela como a que segue:

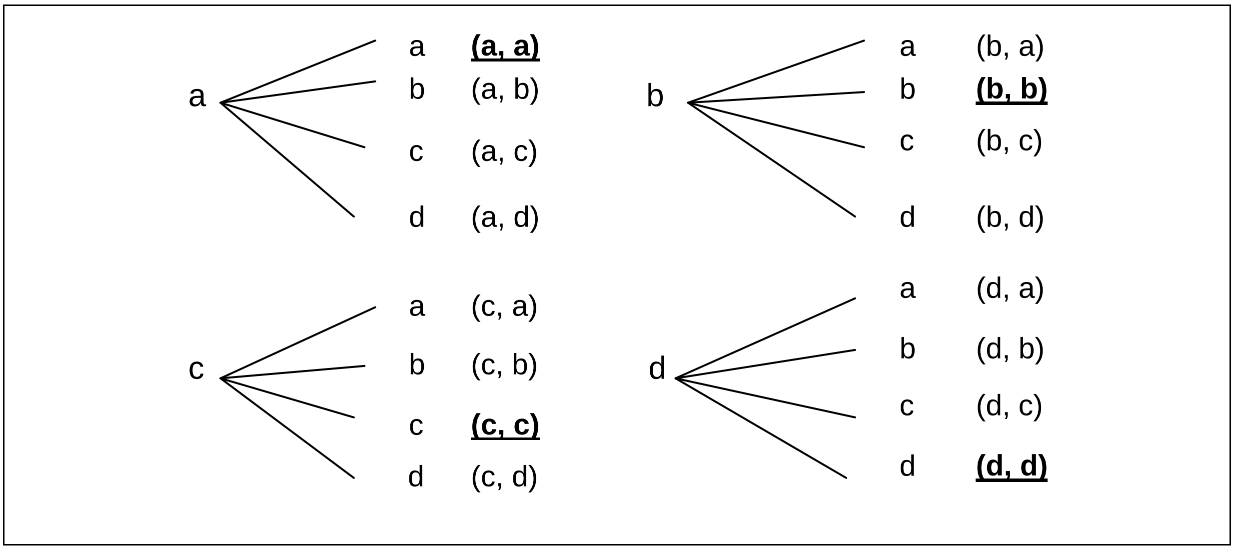
Tabela 1 - Resolução por intermédio da representação simbólica Tabela

	a	**b**	**c**	**d**
a	~~(a,a)~~	a,b	a,c	a,d
b	b,a	~~(b,b)~~	b,c	b,d
c	c,a	c,b	~~(c,c)~~	c,d
d	d,a	d,b	d,c	~~(d,d)~~

Lembrando-se de excluir todos os arranjos constituídos por elementos repetidos (a,a), (b,b), (c,c) e (d,d), que não farão parte da contagem.

Outra representação simbólica para representar a solução desta questão pode ser a estratégia que consiste na construção de uma *Árvore de Possibilidades* na qual é possível descrever todos os pares formados com os elementos do conjunto dado.

Figura 1 - Exemplo da utilização da Árvore de Possibilidades como estratégia de resolução para problemas de *arranjo*.



Como a exigência da questão é obter todos os arranjos formados por elementos distintos, tomados dois a dois, os pares formados por algarismos iguais precisam ser descartados, ou seja, os pares **(a, a)**, **(b, b)**, **(c, c)** e o par **(d, d)**, não farão parte da contagem final, restando apenas 12 pares.

Quanto aos *invariantes* prescritivos, ou seja, do conceito deste tipo de problema, e observando o que defendem Pessoa e Borba (2009) tem-se que: 1º) Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $\mathbf{0} < \mathbf{p} < \mathbf{n}$, sendo **p** e **n** números naturais; 2º) de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades.

3.3.3 Combinação

O conceito definido por Merayo (2001, p.269) a este tipo de problema é o seguinte:

> Seja um conjunto formado por ***m*** elementos distintos. Recebe o nome de Combinação simples de ordem ***n*** os subconjuntos desses ***m*** elementos, formados por ***n*** elementos tomados de ***m***, de tal forma que as combinações são consideradas diferentes se diferir em qualquer um dos seus elementos. A ordem não influencia, ou seja, não origina novas possibilidades.

Exemplo: Considerando o conjunto formado pelos jovens: Antônio, Bruna, Camila e Débora. De quantas maneiras se pode escolher 3 desses jovens para formar uma comissão?

É possível também neste tipo de problema, fazer uso da estratégia do *Princípio Fundamental da Contagem* para representar simbolicamente essas comissões.

Neste tipo de situação-problema a ordem em que os integrantes dessa comissão serão dispostos, não gerará uma nova comissão.

$$\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = 4$$

O numerador desta divisão representa o total de possibilidades de serem formadas comissões com o conjunto dos quatro jovens. Porém, nesse total, estarão inclusas comissões cujos elementos já foram contados em outras comissões, mas que foram compostas apenas alterando a ordem dos componentes, como por exemplo, a comissão (Antônio, Bruna e Camila) é a mesma formada por (Camila, Bruna e Antônio), e é por esse motivo que o resultado final só estará correto quando dividirmos esse valor pelo valor referente à *permutação* resultante do número de participantes de cada comissão $P_3 = 3 \times 2 \times 1$.

Outra maneira utilizada como forma de representação das possibilidades que pode ser utilizada em situações como esta é a elaboração de uma *listagem* constando os nomes dos integrantes das comissões, observada a ordem.

Figura 2 - Representação por meio de uma Listagem de todas as possibilidades de serem formadas comissões.

Antônio – Bruna – Camila	Antônio – Camila – Débora
Antônio – Bruna – Débora	Bruna – Camila – Débora

Essa estratégia, no entanto, é mais eficaz quando a quantidade a ser listada for um número muito pequeno, caso contrário fica complicado utilizar este artifício pelo fato de ser difícil conseguir esgotar a lista de todas as possibilidades.

Tratando agora dos *invariantes* contidos nesta *situação*, ou seja, buscando identificar as relações e propriedades que se mantêm constantes neste tipo de problema, Pessoa e Borba (2009) afirmam que na *combinação,* 1º) Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0**< **p** < **n, p** e **n** naturais; 2º) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Assim, de forma semelhante aos problemas de *arranjo*, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

3.3.4 Produto cartesiano

O tipo de problema denominado de *produto cartesiano* pelas pesquisadoras Pessoa e Borba (2009) é muito semelhante à *Regra do Produto* citada por Merayo (2001) ou ao *Produto de Medidas* proposto por Vergnaud (1991).

> Quando se tem uma sucessão **C** que pode ser decomposta em duas etapas sucessivas **A** e **B** independentes entre si, e que a etapa **A** pode ser realizada de ***m*** maneiras e a etapa **B** pode ser realizada de ***n*** maneiras, independentemente de qual tenha sido o resultado obtido na etapa **A**, a sucessão **C** poderá ser realizada de ***m x n*** maneiras distintas (MERAYO, 2001,p.231).

Neste tipo de problema, segundo Pessoa e Borba (2009), dois ou mais conjuntos disjuntos são combinados para formarem um terceiro conjunto.

Exemplo: Em uma lanchonete são oferecidos 4 tipos de sucos (abacaxi, maracujá, cajá e uva) e 3 opções de salgados (pastel, empada e folhado de frango). De quantas maneiras distintas Gabriel poderá compor um lanche sabendo que só poderá escolher um tipo de suco e um tipo de salgado por lanche?

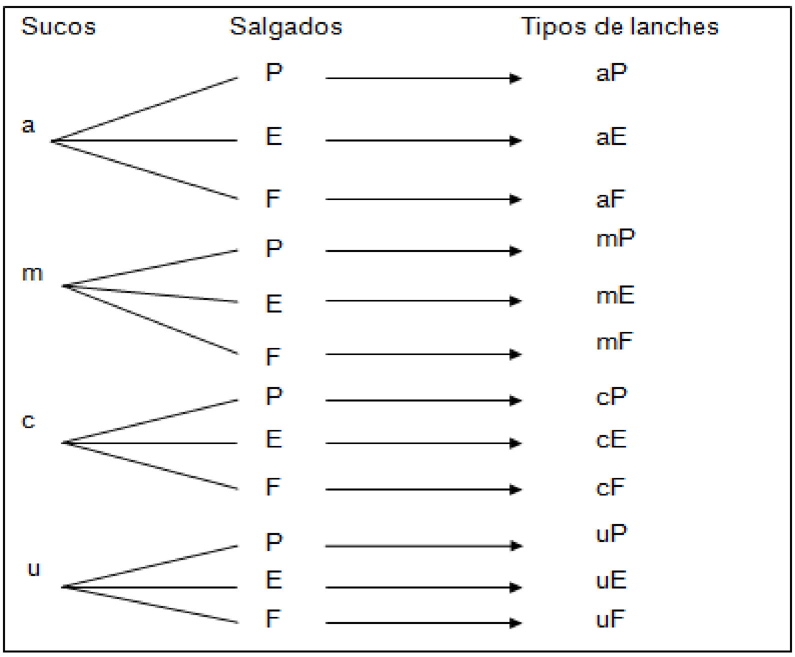
Utilizando a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem, tem-se:

$$\underset{\text{Opções de suco}}{\underline{\quad 4 \quad}} \times \underset{\text{Opções de Salgados}}{\underline{\quad 3 \quad}} = 12 \text{ maneiras}$$

Esta questão apresenta de maneira bem clara alguns *invariantes* que já foram discutidos nos tipos de problemas já vistos anteriormente nesta pesquisa, como, por exemplo, o *invariante* da ***escolha*** (decidir entre os tipos de sucos e os de salgados). Sabe-se também que os dados necessários para a composição das respostas estão dispostos em dois conjuntos disjuntos, o conjunto de sucos e o conjunto de salgados.

Logo, utilizando a estratégia da Árvore de Possibilidades temos:

Figura 3 - Representação dos tipos de lanche utilizando uma Árvore de Possibilidades



A discussão sobre as situações (tipos de problemas) que são próprios da combinatória, nesta pesquisa, referem-se aos agrupamentos simples, ou seja, aqueles em que não há repetição de elementos. Portanto, toda referência que for feita nesta pesquisa aos problemas combinatórios, serão considerados como tal as *permutações*, *arranjos*, *combinações* e os *produtos cartesianos*, todos formando agrupamentos sem elementos repetidos, pois os agrupamentos com repetição não são o foco desta pesquisa.

3.4 Problemas combinatórios condicionais

De acordo com Batanero *et al* (1996), a combinatória possui em sua essência problemas relacionados com *existência*, com *enumeração*; possui ainda os que necessitam de uma *contagem* mais sofisticada dos elementos de um determinado conjunto e também alguns em que é necessário fazer *classificações* para que haja uma maior organização de sua estrutura.

Conforme Borba e Braz (2012), dentro desse conjunto de problemas, pode-se ainda trabalhar com manipulações de variáveis que exijam do aluno: fazer uma escolha de elementos (um elemento ou mais de um elemento); que identifique se esses elementos pertencentes às enumerações possíveis estão explícitos (ou não); que o condicione a obedecer a certa ordem na disposição dos elementos e que fique atento às condições de posicionamento e/ou proximidade entre determinados elementos. As autoras ainda consideram que critérios cognitivos como esses precisam ser identificados e levados em consideração por quem se propõe resolver tais problemas porque exercem grande influência sobre a forma de pensar e podem ser a condição necessária para que um raciocínio eficaz seja desenvolvido em sua solução.

Os *invariantes* relacionados aos problemas combinatórios condicionais, além da *escolha* e da *ordenação* dos elementos, como visto anteriormente, comuns a todos os tipos de problemas combinatórios e não específicos dos condicionais, tem-se as relações de *explicitação* (ou não) dos elementos, *posicionamento* e/ou *proximidade.*

Em estudo realizado recentemente com alunos do 1º e do 3º anos do ensino médio, Borba, Araujo e Braz (2013) se propuseram a verificar a compreensão que estes alunos tinham sobre os problemas combinatórios condicionais e na ocasião, decidiram apenas utilizar os problemas de *arranjo*. O fato de terem escolhido alunos que não estavam no 2º ano do ensino médio, ano específico para o estudo formal da Análise Combinatória, foi o de trabalharem apenas com alunos que ainda não receberam instruções formais sobre a Combinatória (alunos do 1º ano) e os que já haviam recebido instruções formais (alunos do 3º ano) e fazerem uma comparação quantitativa dos acertos. Confirmando suas expectativas, as pesquisadoras constataram que os alunos que já haviam recebido instruções sobre combinatória apresentaram um melhor desempenho nos testes aplicados, apesar de não utilizarem o conhecimento formal sobre o conteúdo.

De acordo com as análises realizadas, as pesquisadoras levantaram a hipótese de que os problemas combinatórios condicionais que apresentam maior dificuldade são aqueles que associam as relações *ter ao menos* ou *no máximo* alguns elementos com as de *posicionamento e/ou proximidade* e defendem que é preciso explorar uma maior quantidade de situações condicionais, ao ser trabalhada a combinatória, de forma que possibilite a ampliação do desenvolvimento matemático dos alunos.

As categorias de problemas *combinatórios condicionais* elaboradas por Borba e Braz (2012), assim como seus respectivos exemplos, serão descritas a seguir por meio de um quadro e também serão utilizadas como critério para as devidas classificações dos problemas combinatórios encontrados nos livros didáticos analisados no presente trabalho.

Quadro 4 - Categorização de problemas combinatórios condicionais elaborada por Borba e Braz (2012, p.6-9)[2]

Categorias de Problemas Condicionais	Exemplo
1.Um elemento explicitado fixo.	André quer criar uma nova senha para seu e-mail utilizando apenas quatro das cinco letras do seu nome. Quantas senhas com quatro letras diferentes ele pode obter a partir das letras ANDRE, que tenham a letra A, em qualquer posição?

[2] Os problemas aqui apresentados são de arranjo, porém, a maior parte pode ser ampliada e adaptada para os outros tipos de problemas combinatórios, de acordo com as características de cada um.

2.Um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo.	Marcela foi ao parque de diversões com seu irmão Jorginho e três primas: Marina, André e Tati. Em um banco da roda gigante só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco, desde que uma das primas tenha sempre lugar?
3.Mais de um elemento explicitado fixo.	Quantos números de três algarismos podemos formar com os algarismos 2, 4, 5, e 6 em que os algarismos 2 e 5 sempre apareçam?
4.Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo.	Placas de automóveis possuem quatro algarismos. De quantas maneiras diferentes podemos completar com os algarismos 1, 3, 6 e 9, a placa iniciada com KLM 4, que tenha apenas dois algarismos ímpares?
5.Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica, fixo.	Quantos números de três algarismos podemos formar a partir dos algarismos 2, 3, 4 e 5, que tenham pelo menos uma algarismo par?
6. Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com determinada característica, fixo.	Paulo, Maria, Amanda e Lila são muito amigos e adoram ir juntos na Van da escola. Mas em cada banco da Van só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco desde que no máximo duas das meninas tenham lugar?
7.Um elemento fixo explicitado em determinada posição.	O Brasil será o país da Copa do Mundo de 2014! Considere que, assim como a seleção brasileira, também participarão a Argentina, a Alemanha, a França e a Itália. Imaginando que o Brasil será o campeão, de quantas maneiras diferentes podem se organizar os quatro primeiros colocados?
8. Um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo em determinada posição.	César só lembra dos cinco primeiros algarismos do telefone de Ana e precisa muito falar com ela. Os cinco primeiros algarismos são: 3491-0_ _ _. Pelo que César se lembra, o último algarismo do telefone de Ana é ímpar e nenhum algarismo se repete. Quantos números telefônicos César encontrará sob essas condições?
9.Mais de um elemento explicitado em determinadas posições.	Na praça em que Marina está tem um banco no qual cabem quatro pessoas. De quantas maneiras diferentes Marina e as amigas (Aninha, Amanda, Júlia, Gabi e Maria) podem ocupar os quatro lugares do banco, desde que Marina fique em uma ponta e Gabi na outra?
10.Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições.	Quero criar uma senha de quatro algarismos para meu celular usando alguns destes algarismos: 2, 3, 4, 5, e 7. Quantas senhas de quatro algarismos diferentes eu posso formar em que o primeiro e o terceiro algarismos sejam pares?
11.Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade.	Júlio quer criar uma bandeira para o time de vôlei da escola, do qual faz parte. A bandeira conterá quatro cores, dispostas em linhas horizontais. Dispondo das cores azul, verde, branca, amarela e vermelha, quantas bandeiras diferentes Júlio pode formar, desde que as cores azul e vermelha fiquem sempre juntas?
12.Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, numa determinada proximidade.	De quantas maneiras diferentes minha tia Joana, meus primos João e Ana e minha mãe, podem se sentar em um banco de cinco lugares sendo que os filhos da minha tia querem ficar sempre juntos?
13.Mais de um elemento explicitado com determinada ordem.	Diego, Mário, João e Carlos estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes podem-se obter os três primeiros lugares se Carlos sempre ficar à frente de Mário?
14.Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, numa determinada ordem.	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, e 8, em que algarismos pares sempre apareçam do maior para o menor, em qualquer posição?

15.Mais de um elemento explicitado com determinadas posições e ordem.	De seis opções de lanche (sorvete, coxinha, pizza, hambúrguer, bolo e misto), Thiago pode escolher três para fazer sua refeição. Se ele começar comendo primeiro a coxinha e por último o sorvete, nesta ordem, de quantas maneiras diferentes Thiago poderá fazer esta refeição?
16.Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições e ordem.	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, sendo o 1º algarismo par e o 3º algarismo ímpar?
17.Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e proximidade.	Beto, Pedro, João, André e Paulo estão disputando uma corrida de cavalos. De quantas maneiras diferentes podemos ter os quatro primeiros colocados desde que Pedro e João estejam juntos no 1º e no 2º lugar?
18.Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições e proximidade.	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 3, 4, 7 e 8, sendo os dois últimos algarismos pares?
19.Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem.	Cinco garotas: Maria, Ana, Paulinha, Bela e Raquel estão disputando na natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que Maria e Raquel fiquem sempre juntas e nessa ordem?
20.Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, proximidade e ordem.	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que números pares sempre apareçam juntos, do maior para o menos?
21.Mais de um elemento explicitado em determinada posição, proximidade e ordem.	Cinco garotas: Maria, Ana, Paulinha, Bela e Raquel estão disputando na natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que Ana e Raquel sejam as primeiras, juntas e nessa ordem?
22.Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições, proximidade e ordem.	Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que algarismos pares sempre apareçam juntos, no início e do maior para o menos?

Fonte: Borba e Braz (2012)

3.5 Estudos anteriores sobre combinatória nos livros didáticos

Pesquisa realizada por Matos Filho e Pessoa (2006), teve como fonte de dados oito coleções de livros didáticos, 4 aprovadas pelo PNLD 2004 e 4 que ficaram fora desta aprovação, destinados ao público de 1ª a 4ª séries do ensino fundamental, hoje denominados 2º ao 5º anos. Para alcançar o objetivo pretendido, os autores analisaram um total de 5276 questões de estrutura multiplicativa, distribuídas entre os 32 volumes das coleções em questão. Como pretendiam analisar os problemas de raciocínio combinatório nas séries iniciais do ensino fundamental, os autores da pesquisa foram buscar no campo conceitual das estruturas multiplicativas a base norteadora para responder a seus questionamentos. A pesquisa visou a quantificar os problemas de raciocínio combinatório, analisar a forma como esses problemas eram abordados e qual era a sistemática utilizada na explanação dos conteúdos e também foi incluída a análise do manual do professor para que fosse verificado se traziam orientações que norteassem esses profissionais no trabalho com questões de raciocínio combinatório.

No decorrer da análise, os pesquisadores perceberam que os problemas que envolviam o raciocínio combinatório eram explorados poucas vezes, contrariando suas expectativas, que por sua vez eram fundamentadas nos documentos oficiais que mostram a importância da exploração desse tipo de problema. Com relação à abordagem que esses livros apresentam para os problemas de multiplicação, os pesquisadores constataram que a maior parte deles apresenta o conceito de multiplicação não só como uma soma de parcelas repetidas, mas também como um dos vários elementos que compõem o campo conceitual das estruturas multiplicativas e em 87% dos livros analisados é estabelecida uma relação conceitual entre a multiplicação e o raciocínio combinatório. No que se refere ao momento em que os problemas de raciocínio combinatório eram apresentados nos livros didáticos, constataram que em 20 dos 32 livros analisados a explicitação desses problemas ocorreu sempre após a apresentação dos problemas de multiplicação, que por sua vez, são apresentados após os conceitos de adição e subtração, vinculando a construção do conceito da multiplicação ao conceito da adição. E pra finalizar, em relação às orientações sugeridas no manual do professor sobre a exploração dos problemas de raciocínio combinatório, os pesquisadores verificaram que mais da metade, ou seja, 20, desses manuais não forneciam orientações que auxiliassem os professores para trabalhar com esse tipo de problema e concluíram que apesar de haver bastante exigência dos documentos oficiais em relação ao trabalho, em sala de aula, com problemas de raciocínio combinatório, os livros didáticos ainda estão aquém da realidade pretendida.

Barreto, Amaral e Borba (2007) se propuseram a analisar os livros de 1ª a 4ª séries (hoje 2º ao 5º anos) para identificar se abordavam os problemas de raciocínio combinatório, e pretendiam fazer essa pesquisa à luz das três dimensões conceituais propostas por Vergnaud que são: *Significados*, *Representações* e propriedades *Invariantes*. Neste estudo os pesquisadores, com base em estudos anteriores, tinham a hipótese que o modo como os livros didáticos tratavam esses conteúdos podiam exercer uma influência sobre a aprendizagem pretendida. Foram analisadas cinco coleções dentre aquelas que foram avaliadas e aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2007) em duas vertentes: o livro do aluno e o manual destinado ao professor. Primeiramente procuraram categorizar os tipos de problemas que iam identificando como sendo problemas que envolviam o raciocínio combinatório, em seguida observaram qual o tratamento era o tratamento dado a esses problemas pelos autores.

A hipótese inicial era de que seriam os problemas de *produto cartesiano* que mais apareceriam em relação aos outros tipos de problemas abrangidos na combinatória, mas constataram que este tipo de problema foi apenas o segundo mais explorado pelos autores, contrariando assim sua hipótese inicial, já que os problemas de combinação apresentaram um percentual de 42,13% de aparição nos livros analisados. Quanto à forma de representação, foi encontrado um percentual bastante significativo de questões que valorizavam bastante apenas o enunciado (53,19%), seguido da representação em forma de desenho (15,74%). Com relação ao manual do professor, os pesquisadores não encontraram nenhuma instrução específica, em nenhuma das cinco coleções escolhidas para análise, sobre os significados da combinatória, e por consequência dessa ausência, nenhuma das propriedades invariantes foi abordada, contrariando as expectativas dos pesquisadores, uma vez que o professor precisa receber orientações sobre os significados e propriedades invariantes dos conceitos que serão trabalhados em sala de aula.

Carvalho (2010) nos trouxe uma breve análise sobre as habilidades requeridas pelos problemas de raciocínio combinatório no momento de sua resolução, problemas estes voltados para os anos finais do ensino fundamental. Essa proposta foi encaminhada a partir da análise efetiva de 10 coleções de livros, 5 que estavam entre as 15 aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2010 (livros de 1º ao 5º anos) e 5 que pertenciam às 16 coleções aprovadas pelo PNLD 2008 (livros do 6º ao 9º anos). O pesquisador utilizou como critério para suas análises oito classes de habilidades necessárias para a resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório: 1) mapear todas as possibilidades; 2) decidir a quantidade total de possibilidades; 3) decidir se um resultado é possível; 4) mapear e decidir a quantidade total de possibilidades; 5) modelagem de fórmula algébrica; 6) calcular a quantidade total a partir de fórmula dada; 7) fazer cálculos de probabilidade; 8)identificar a posição de uma possibilidade no mapeamento. A análise da pesquisa também se organizou em dois blocos, de acordo com o nível de ensino. Assim, um bloco era composto pelos livros destinados aos anos iniciais do ensino fundamental (2ª ao 5º anos) e o outro para os anos finais do ensino fundamental (6º ao 9º anos). Somente as questões propostas para os alunos é que foram levadas em consideração nesta pesquisa.

Os resultados mostram que apenas em 24,8% das atividades propostas para os alunos exigiam que eles tivessem a habilidade de “mapear todas as possibilidades”. Já, atividades que exigiam do aluno a habilidade para “decidir a quantidade total de possibilidades” foi a mais explorada pelos autores dos livros didáticos em questão, elas corresponderam a 57,1% do total das atividades analisadas. As questões que se enquadravam nas demais categorias, apresentaram percentuais inferiores a 7% de aparição nesses mesmos livros. Na tentativa de fazer um paralelo entre o tipo de problema (*produto cartesiano*, *permutação, arranjo* e *combinação*) e as habilidades requeridas para sua resolução, o pesquisador constatou que apenas as habilidades “mapear todas as possibilidades” e “decidir a quantidade” estavam presentes nos quatro tipos de problema. Ao analisar também, qual dos livros utilizados na pesquisa contemplava todas as habilidades já descritas, o autor constatou que apenas os livros do 8º ano, de todas as 10 coleções analisadas, contemplavam todas as habilidades. Com esses dados, o pesquisador concluiu sugerindo que, para que o processo de ensino e aprendizagem seja mais eficaz, é necessário que os livros abordem cada vez mais questões diferenciadas, de forma que permita a utilização de um número maior de habilidades referentes à resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório.

Martins e Borba (2012) levantaram e analisaram os contextos de problemas multiplicativos em 19 livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro de Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA) no ano de 2008. A unidade principal de análise para essa pesquisa foram os problemas de estrutura multiplicativa, ou seja, todos aqueles que envolviam significados de multiplicação, divisão, raciocínio combinatório e números racionais.

Neste levantamento foram identificados 459 problemas que continham elementos de estrutura multiplicativa. Dentre os contextos encontrados, os problemas que simulavam situações financeiras foram os que apresentaram uma maior frequência, 110 problemas do total, isso levando em consideração os 19 livros analisados. Já os que apresentavam contextos relacionados a diversão e escolar, apareceram em menor quantidade, apenas 2 e 1 respectivamente. Os outros tipos de contextos (matemático, doméstico, de medidas e outros) foram identificados em uma distribuição mais homogênea nas 19 obras investigadas. De uma maneira geral, as pesquisadoras consideraram, após a análise, que as especificidades e as características próprias para o público da EJA foram exploradas, porém sugerem que seja feita uma distribuição mais homogênea das diversas formas de contextos existentes, de forma que possibilite a estes alunos a transferência dos conhecimentos adquiridos nos contextos familiares com os não, ou pouco familiares.

Os estudos aqui descritos procuraram relatar e retratar como a combinatória tem sido explorada nos livros didáticos de matemática. As análises dos referidos estudos foram feitas com diferentes propósitos, como por exemplo, analisar o tipo de contexto em que esses problemas eram apresentados, assim como, análise sobre os tipos de habilidades que eram necessárias para a compreensão desses problemas e também sobre os tipos de *representações simbólicas* mais sugeridas.

Estes estudos contribuem para um melhor entendimento sobre a discussão que será efetuada posteriormente acerca da análise do *livro didático*.

CAPÍTULO 4:
OBJETIVOS E MÉTODO

4.1 Objetivos

Este estudo teve como objetivos os descritos a seguir.

4.1.1 Objetivo geral

Analisar os problemas combinatórios condicionais em livros didáticos de matemática para o ensino médio.

4.1.2 Objetivos específicos

- Verificar quais problemas combinatórios condicionais são trabalhados em livros didáticos no ensino médio;
- Analisar como os invariantes prescritivos dos problemas combinatórios condicionais são tratados nos livros didáticos;
- Analisar as representações simbólicas de problemas combinatórios condicionais trabalhadas nos livros didáticos do ensino médio;
- Verificar quais são as orientações fornecidas aos professores pelos manuais dos livros didáticos em relação ao trabalho com os problemas que envolvem o raciocínio combinatório condicional.

4.2 Método

4.2.1 Percurso metodológico

Para a realização da presente pesquisa, foram analisadas as sete coleções selecionadas pelo PNLD 2012, direcionadas exclusivamente ao ensino médio, as quais estão identificadas pelas letras LD seguidas de um número compreendido entre 1 e 7, de forma que nesta pesquisa, serão tratadas como LD1, LD2, LD3, LD4, LD5, LD6 e LD7 conforme suas análises estão dispostas respectivamente no corpo do texto que compõe esta dissertação.

Com o propósito de identificar problemas que necessitam de algum conhecimento que envolve o raciocínio combinatório, cada questão foi considerada como uma unidade de análise, e se a questão possuía subitens como (a, b, c), por exemplo, cada subitem foi considerado também como uma unidade de análise individual, ou seja, cada item ou subitem foi considerado nesta pesquisa como uma unidade de análise. Todos os três volumes de cada coleção foram levados em consideração nesta análise.

Posteriormente, foi verificado se e como os problemas combinatórios condicionais aparecem na obra. Na medida em que esses problemas eram encontrados nos livros didáticos, foram classificados de acordo com a categorização desenvolvida por Borba e Braz (2012).

A classificação foi organizada quantitativamente, de acordo com a frequência de aparição nas coleções analisadas e foram classificadas por tipo de problema combinatório (*produto cartesiano*, *arranjo, combinação, permutação*) e logo em seguida, procedeu-se uma discussão e análise dos Invariantes contidos nesses problemas que o caracterizavam como sendo problemas combinatórios condicionais, apresentando-se um exemplo de cada um desses tipos de problemas.

Paralelamente a esta análise efetuada no livro do aluno, foi também analisado o manual do professor de cada coleção em questão, com o intuito de descrever se ele traz orientações sobre o trabalho com a combinatória condicional.

Partindo dos resultados obtidos no estudo piloto, para o qual foram analisadas duas coleções de *livros didáticos*, foram criadas cinco categorias para a análise, trazendo maior clareza na visualização dos resultados.

O quadro a seguir explicita as categorias que foram utilizadas na análise das sete coleções de *livros didáticos* em questão.

Quadro 5 - Critérios utilizados na análise das coleções

Categorias para Análise	Descrição
1. Visão geral da coleção	Comentário sobre a visão que o PNLD tem sobre a coleção, de forma geral, e como vê o estudo da combinatória na obra, para confrontar com nossa opinião.
2. Abordagem sobre combinatória na coleção.	Análise sobre como o livro apresenta a Combinatória.
3.Tipos de problemas na coleção	Mapeamento e quantificação dos problemas combinatórios condicionais em cada coleção.
4. Formas de representações simbólicas na coleção	Identificação das representações simbólicas que são propostas pelo autor como forma de resolução para as questões.
5. Problemas combinatórios condicionais na coleção	Análise, com base nos problemas combinatórios condicionais identificados e categorizados nesta pesquisa, sobre como os Invariantes de escolha, ordem, explicitação (ou não), posicionamento e/ou proximidade, estão sendo abordados nos *livros didáticos*.
6.Manual do professor na coleção	Verificação acerca das orientações pertencentes no manual do professor sobre a combinatória.

CAPÍTULO 5:
APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo faremos a descrição e a análise do que encontramos em termos de resultados. Na primeira parte trazemos uma visão geral das sete coleções analisadas, com dados numéricos e análise acerca destes dados. Na segunda parte detalhamos o que foi encontrado em cada uma das coleções, a partir dos itens: **Visão geral da coleção**, no qual apresentamos e discutimos como o Guia do Livro Didático de Matemática do Ensino Médio (BRASIL, 2012) apresenta a coleção e colocamos a nossa visão em relação ao que encontramos, apresentamos ainda quantidade de problemas gerais propostos e resolvidos e a quantidade de problemas que envolvem o raciocínio combinatório encontrados na coleção; **Abordagem sobre a combinatória na coleção**, no qual apresentamos e discutimos como a coleção aborda a combinatória, ou seja, de que forma o estudo sobre a combinatória é iniciado; **Tipos de problemas combinatórios na coleção**, no qual apresentamos o levantamento quantitativo referente aos problemas combinatórios identificados em cada coleção, divididos por tipo (*produto cartesiano*, *permutação, arranjo* e *combinação*); **Formas de representações simbólicas na coleção**, no qual apresentamos os tipos de representações simbólicas utilizadas por cada coleção para tratar os problemas de combinatória e citamos aquelas que foram sugeridas por cada coleção; **Problemas combinatórios condicionais na coleção**, no qual apresentamos o quantitativo em relação aos problemas combinatórios apresentado anteriormente. Apresentamos ainda, alguns exemplos, classificando-os conforme categoria de problemas combinatórios condicionais, elaborada por Borba e Braz (2012) e finalizando com a discussão sobre os invariantes neles presente; **Manual do professor na Coleção**, no qual apresentamos o levantamento dos dados referentes ao suporte fornecido aos professores com relação à combinatória e discutimos sobre a importância de ser disponibilizado um material que oriente o trabalho do professor especificamente em cada conteúdo.

5.1 Dados gerais das sete coleções analisadas

Esta pesquisa teve como um dos focos mapear, nos *livros didáticos* de matemática do ensino médio, a frequência com que os problemas combinatórios condicionais foram explorados em cada uma das sete coleções aprovadas pelo PNLD no ano de 2012. Nesse mapeamento, fizemos um levantamento de todas as sugestões dos autores em relação às representações simbólicas que, na visão deles, são as mais indicadas para se trabalhar com esse tipo de problema.

Outro foco foi analisar qualitativamente cada problema identificado no mapeamento, inicialmente classificando-os com base na categoria elaborada por Borba e Braz (2012), já descrita nesta pesquisa, para em seguida discutir sobre os *invariantes* de *escolha*, *ordem*, *explicitação* (ou não) de elementos, *posicionamento* e/ou *proximidade* que são próprios dos problemas combinatórios condicionais.

A Tabela 2 a seguir, traz o demonstrativo global das sete coleções, fazendo a descrição dos percentuais, por tipo de problema, dos problemas combinatórios condicionais.

Tabela 2 - Porcentagens dos problemas combinatórios condicionais por tipo

	P.C	**%**	**Permutação**	**%**	**Arranjo**	**%**	**Combinação**	**%**	**TOTAL**
LD1	2	4,35	28	60,81	2	4,35	14	30,43	**46**
LD2	1	2,38	24	57,14	8	19,05	9	21,43	**42**
LD3	1	2.18	12	26,08	19	41,30	14	30,44	**46**
LD4	3	6,98	17	39,53	8	18,60	15	34,89	**43**
LD5	0	0,0	10	33,33	6	20,00	14	46,67	**30**
LD6	0	0,0	23	60,52	1	2,64	14	36,84	**38**
LD7	0	0,0	7	36,84	5	26,32	7	36,84	**19**

Legenda: P.C – *Produto cartesiano*; LD – Coleção de *livro didático*

Os percentuais baixos referentes aos problemas *combinatórios condicionais* do tipo *produto cartesiano*, são um reflexo da baixa frequência com que os problemas combinatórios referentes também ao tipo *produto cartesiano* foram explorados em cada coleção. Infere-se que pelo fato de esse tipo de problema não apresentar um grau de dificuldade esperado para o público do ensino médio, o problema do tipo *produto cartesiano* tenha sido menos explorado pelos autores de *livros didáticos*.

O problema combinatório condicional do tipo *permutação*, no levantamento feito nesta pesquisa, foi o mais explorado pelos autores, o que podemos considerar um fato relevante e que contraria uma hipótese por nós levantada, pois, por ser este um tipo de problema combinatório que possui algumas restrições referentes à exploração dos *invariantes* de problemas condicionais, como por exemplo, problemas que exijam o cálculo do *número máximo* ou *mínimo de elementos* a serem utilizados em uma determinada composição não podem ser aplicados aos problemas de *permutação* pelo fato de que nestes problemas, todos os elementos deverão ser utilizados.

Os problemas combinatórios condicionais, sendo pouco explorados ou muito explorados, exigem do resolvedor o conhecimento de um número maior de conceitos, e representá-los simbolicamente de uma maneira clara no momento em que estão sendo interpretados, às vezes é o melhor caminho para um bom desempenho na busca da solução correta.

Em se tratando das representações simbólicas possíveis de serem utilizadas na resolução dos problemas combinatórios condicionais, Borba e Braz (2012), buscando analisar o desempenho de alunos dos anos finais do ensino fundamental ao resolverem estes tipos de problemas, perceberam que eles conseguiam estabelecer as relações contidas nos problemas combinatórios condicionais expressando suas respostas por meio de *Listagens, Desenhos, Quadros* e pelo *Princípio Fundamental da Contagem*.

A seguir, apresentamos no Quadro 6 as formas de *representação simbólica* para os problemas combinatórios condicionais utilizadas pelos autores as diferentes coleções.

Quadro 6 - Formas de representações simbólicas de problemas combinatórios condicionais exploradas por coleção.

	LD1	**LD2**	**LD3**	**LD4**	**LD5**	**LD6**	**LD7**
Árvore de Possibilidades							
Esquema							
Tabela							
Listagem							
Diagrama[3]							
Desenho							
P.F.C							
Fórmula							

Aqui neste levantamento, percebemos que os diferentes autores, cujas coleções de livros foram analisadas, tiveram a preocupação de sugerir a solução dos problemas *combinatórios condicionais* por intermédio da utilização de diferentes representações simbólicas, o que consideramos um fato de grande importância, pois oferece um número maior de possibilidades de compreensão desses problemas, o que, conforme afirma Vergnaud (1986), "as representações denotam o que o aluno está pensando e como está compreendendo o problema".

A utilização das *Fórmulas* como representação simbólica para a resolução de problemas combinatórios condicionais foi muito utilizada e inclusive, foi muito sugerida por algumas das coleções analisadas. Vergnaud (1986, p.85) afirma que "uma representação algébrica faz perder muita informação, porque identifica sob o mesmo sinal (+, -, =), conceitos elementares relativamente diferentes uns dos outros". Apesar de defendermos que a fórmula é uma representação possível e, muitas vezes, necessária, defendemos uma diversidade de uso de estratégias, a depender da grandeza numérica envolvida no problema e da quantidade de etapas

[3] Neste trabalho as representações simbólicas *Esquema* e *Diagrama* possuem o mesmo significado. Esta coleção permanece com o nome Diagrama porque foi a única que se referiu ao Diagrama de Euler-Venn.

de escolha, pois se é um problema com valores muito altos ou com muitas etapas de escolha, a fórmula é uma eficiente opção de estratégia, concordamos com a afirmação de Vergnaud (1986), pois acreditamos que o uso de *Fórmulas* sem reflexão sobre os passos do problema torna a solução de uma questão uma tarefa mecanizada e com poucas possibilidades de fixação do conteúdo.

Após termos analisado os percentuais encontrados relativos à frequência com que os problemas combinatórios condicionais foram explorados em cada coleção e as formas de representações simbólicas que foram mais utilizadas e/ou sugeridas por cada coleção, apresentaremos o demonstrativo geral com a quantidade de problemas *combinatórios condicionais* em relação aos problemas combinatórios de cada coleção, elencando-os por tipos de problema.

Os percentuais totais de problemas combinatórios condicionais por coleção, calculados em relação aos problemas combinatórios identificados em cada uma delas, nos dá uma visão panorâmica da análise geral das sete coleções e nos permite discutir, inferir e sugerir propostas relacionadas ao trabalho com os problemas combinatórios condicionais.

Identificamos nas coleções, os percentuais de problemas combinatórios condicionais que seguem: 42,20% (LD1); 36,46% (LD2); 30,46% (LD3); 32,33% (LD4); 19,48% (LD5); 25,33% (LD6) e 13,10% (LD7).

Como esta pesquisa é a primeira a ser desenvolvida envolvendo análise de *livros didáticos* do ensino médio em relação à abordagem que utilizam na apresentação de problemas combinatórios condicionais e em relação à quantificação desses problemas, não é possível compararmos nossos resultados com os resultados de outra, nos restando fazer uma comparação entre as coleções analisadas nesta pesquisa.

Os percentuais descritos acima revelam que dos problemas combinatórios explorados em cada coleção, menos da metade é composta pelos problemas combinatórios condicionais, fato que nos leva a refletir sobre a eficácia da utilização quase que massiva de problemas mais diretos. A defesa aqui em relação aos problemas combinatórios condicionais é porque, como discutido anteriormente, estes se constituem em um desafio para o aluno, pois demandam uma maior reflexão acerca do problema e uma maior manipulação de variáveis para resolvê-lo e, muitas, vezes, uma aplicação direta de fórmula não é capaz de fornecer a solução do questionamento.

A seguir, na Tabela 3, apresentamos os números gerais da análise quantitativa das coleções em relação aos problemas combinatórios gerais e problemas combinatórios condicionais.

Tabela 3 - Números gerais da análise quantitativa das coleções em relação aos problemas combinatórios gerais e problemas combinatórios condicionais

	Tipos de Problemas	Problemas Combinatórios	Problemas combinatórios condicionais
LD1	Produto Cartesiano	10	2
	Permutação	42	28
	Arranjo	15	2
	Combinação	42	14
	Total	**109**	**46**
LD2	Produto Cartesiano	7	1
	Permutação	37	24
	Arranjo	34	8
	Combinação	38	9
	Total	**116**	**42**
LD3	Produto Cartesiano	9	1
	Permutação	25	12
	Arranjo	59	19
	Combinação	58	14
	Total	**151**	**46**
LD4	Produto Cartesiano	9	3
	Permutação	39	17
	Arranjo	40	8
	Combinação	45	15
	Total	**133**	**43**
LD5	Produto Cartesiano	9	0
	Permutação	33	10
	Arranjo	45	6
	Combinação	67	14
	Total	**154**	**30**
LD6	Produto Cartesiano	6	0
	Permutação	51	23
	Arranjo	34	1
	Combinação	59	14
	Total	**150**	**38**
LD7	Produto Cartesiano	7	0
	Permutação	34	7
	Arranjo	48	5
	Combinação	56	7
	Total	**145**	**19**

Homa (2011) identificou que a maior dificuldade, citada pelos professores, e que estão relacionadas às dificuldades sentidas pelos alunos ao estudarem sobre combinatória, está na interpretação do problema. Todos os professores apontaram esta como a principal dificuldade em relação ao trabalho com a combinatória.

Na mesma pesquisa, Homa (2011) cita que, 54,45% dos professores afirmam que a identificação do agrupamento também é uma das maiores dificuldades apresentadas pelos alunos, e apenas 10,56% é o percentual que relaciona o cálculo do resultado como a maior dificuldade citada pelos alunos, ou seja, a utilização em larga escala de problemas que somente objetivam a aplicação direta de fórmulas resolutivas não está atendendo aos outros 89,44% que não apresenta problemas com o cálculo da questão.

Quanto maior for o estudo e a aplicação de problemas como os problemas combinatórios condicionais, maior será o público atendido, pelo fato de que os benefícios trazidos pelas discussões que estão envolvidas na solução de cada um desses problemas possibilitam que dúvidas relacionadas à Interpretação do problema e identificação do agrupamento sejam mais frequentemente discutidas. A discussão sobre os *invariantes* próprios deste conceito (*ordem, escolha, explicitação* (ou não) dos elementos, *posicionamento* e/ou *proximidade*) possibilita aos alunos a iniciarem o processo de formação do conceito da Combinatória.

5.2 Dados individuais das sete coleções analisadas

5.2.1.1 Visão geral da coleção LD1

De acordo com o Guia do Livro Didático de Matemática do Ensino Médio (BRASIL, 2012), a coleção analisada, que a partir de agora denominaremos de LD1, parte sempre de uma contextualização adequada para a atualidade, os capítulos são iniciados de forma que propiciem uma maior adesão e interesse dos alunos aos conteúdos matemáticos que serão sistematizados logo adiante e utiliza também o recurso da interdisciplinaridade formando uma maior conexão entre os conteúdos abordados (BRASIL, 2012).

O Guia do *livro didático* de Matemática (BRASIL, 2012) coloca, também, como ponto positivo desta coleção o emprego de diversos recursos didáticos como calculadoras (simples ou científicas) e também a utilização de *softwares* livres. Afirma, ainda, que apesar de possuir bastante conteúdo, muitos são apresentados como opcionais, cabendo ao educador sua exploração ou não.

Em relação à combinatória, o Guia do *livro didático* de Matemática (BRASIL, 2012) ressalta que mesmo após a definição dos tipos de problemas combinatórios, e da sugestão de variados tipos de representações simbólicas indicadas para solucionar estes problemas, a obra faz uma excessiva utilização de fórmulas, não incentivando a utilização dos artifícios apresentados.

O que nós observamos, é que ao longo do seu percurso metodológico, as autoras submetem os alunos, no transcorrer da unidade, a uma situação diferenciada e mais complexa do que a que foi apresentada anteriormente, podendo, assim, possivelmente proporcionar o aumento de suas capacidades dedutivas e também de suas habilidades matemáticas. Nas figuras a seguir, têm-se dois exemplos que ilustram essa gradação na dificuldade que é apresentada para os alunos.

A primeira situação, (Figura 4) trata de uma questão envolvendo *permutação* que apresenta condições específicas para sua resolução. Primeiro, os anagramas a serem formados, precisam começar com a letra “C”. Os demais têm a condição de não poderem terminar pela letra “O”.

Na segunda situação (Figura 5), a questão apresenta condições semelhantes às que foram citadas anteriormente, porém, acrescenta condições mais específicas como a de solicitar que os anagramas mantenham as letras *E,S* e *A* sempre juntas e nessa ordem ou que mantenham as vogais sempre juntas, o que poderá exigir um nível de raciocínio mais elaborado que o anterior, apresentado na Figura 4.

Figura 4 - Permutação com pequeno grau de dificuldade

ER4. Calcule quantos anagramas da palavra PALCO:
a) começam com *C*.
b) não terminam com *O*.

Resolução
a) A primeira letra do anagrama só pode ser *C*, então:

C				

↓
1

Para cada uma das outras posições, como não pode haver repetição de letras, temos:

C				

Número de possibilidades: 1 4 3 2 1 ou
$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ anagramas

b) Se os anagramas não podem terminar com *O*, teremos apenas 4 letras que podem ocupar a última posição; então:

Número de possibilidades: 1 2 3 4 4 ou
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ anagramas

Fonte: LD1, p.132

Figura 5 - Permutação com grande grau de dificuldade

ER10. Retome o significado de anagrama, dado no exercício 8 (página 131). Com relação aos anagramas da palavra ESCOLA, qual é o número:
a) total deles?
b) dos que começam com consoante?
c) dos que começam e terminam com vogal?
d) dos que mantêm as letras E, S, A juntas e nessa ordem?
e) dos que mantêm as vogais juntas?

Resolução
a) Cada anagrama é uma permutação simples das letras E, S, C, O, L, A.
Logo, a resposta é $P_6 = 6! = 720$.
b) Nesse caso, temos anagramas que começam com S, C ou L. Em cada um deles basta permutar as 5 letras restantes.
Logo, a resposta é $3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 360$.
c) São anagramas do tipo $\underline{\text{vogal}}$ ___ ___ ___ ___ $\underline{\text{vogal}}$.
Para preencher as extremidades, temos os elementos E, O, A; logo, há $A_{3,2}$ possibilidades.
Para cada uma dessas possibilidades, podemos preencher as posições restantes com as 4 letras que sobraram.
Logo, a resposta é $A_{3,2} \cdot P_4 = 3 \cdot 2 \cdot 4! = 144$.

Fonte: LD1,p.139

Percebe-se que as autoras preocupam-se também com a exploração de diversos tipos de recursos didáticos que podem ajudar o desenvolvimento da aprendizagem da combinatória, como é o caso do uso da calculadora como no exemplo que segue na Figura 6.

Figura 6 - Exemplo da exploração do recurso didático pela coleção LD1

CALCULADORA

Conheça sua calculadora

Algumas calculadoras possuem a tecla **n!**, que é, geralmente, acionada por meio da tecla **2nd** ou **SHIFT** (segunda função). Ela auxilia no cálculo de fatoriais e na resolução de problemas de Análise Combinatória.

Use uma calculadora com a tecla **n!** para resolver os problemas a seguir.

1. Calcule.
a) 5! b) 6! c) 10! d) 12! e) 15!

2. Observe dois modos diferentes de calcular, por exemplo, $A_{10,6}$.
1º) Com o auxílio das teclas **(** e **)**.
1 **0** **2nd** **n!** **÷** **(** **1** **0** **−** **6** **)** **2nd** **n!** **=** 151200
2º) Sem o auxílio das teclas **(** e **)**.
1 **0** **2nd** **n!** **÷** **4** **2nd** **n!** **=** 151200

Fonte: LD1, p. 158

A obra apresenta 2641 problemas matemáticos gerais que estão distribuídos entre exercícios resolvidos e exercícios propostos[4], conforme Tabela que segue:

Tabela 4 - Quantitativo de exercícios da coleção LD1 por volume

Coleção Analisada LD1	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Total
Vol. 1	138	660	**798**
Vol. 2	157	919	**1076**
Vol. 3	125	672	**797**
Total	**420**	**2251**	**2641**

Desse total, foram identificados 109 (total encontrado, juntando-se os três volumes) que necessitam do conhecimento que envolve o raciocínio combinatório[5].

Tabela 5 - Quantidade de questões por ano escolar da coleção LD1

Identificação da coleção	Número de questões envolvendo o raciocínio combinatório		
	1º Ano	**2º Ano**	**3º Ano**
LD1	3	104	2

Como podemos perceber, o ano em que há mais problemas combinatórios sendo trabalhados é no segundo, o que já era de se esperar, pois, tradicionalmente este conteúdo é formalmente introduzido/retomado na escola neste ano de escolarização. De acordo com Amorim, Lima e Pessoa (2013), ao se solicitar assistir a aulas de combinatória de professores da Educação de Jovens e Adultos, estes

[4] Série constituída por uma grande variedade de exercícios e situações-problema para o aluno checar, consolidar e aplicar os conhecimentos recém-discutidos.
[5] Consideramos como problemas que necessitam de conhecimento que envolve o raciocínio combinatório, aqueles em que, implícita ou explicitamente se pode fazer uso de estratégias de contagem, sejam elas formais ou informais.

justificavam que apenas no 2º Ano do ensino médio é que se trabalha esse conteúdo. Assim, apesar de os Parâmetros Curriculares Nacionais dos anos iniciais (BRASIL, 1997) e dos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) indicarem a importância de se trabalhar a combinatória desde cedo, na prática, de um modo geral, pelo discurso de professores e pelo que observamos em *livros didáticos* do ensino médio, esse trabalho se efetiva neste ano escolar do ensino médio.

5.2.1.2 Abordagem sobre a combinatória na coleção LD1

Esta coleção trata a combinatória como a área da Matemática que analisa dados e tenta quantificá-los de forma que se possa avaliar tendências e tomar decisões. Apresenta o Princípio Fundamental da Contagem como uma forma de contagem eficiente na qual está contida a ideia básica para a resolução de problemas combinatórios, considerando-o como uma estratégia para a resolução destes problemas. Indica também outros processos de contagem, que possuem características especiais como a *permutação*, o *arranjo* e a *combinação*.

Cada problema combinatório é definido de maneira sucinta e sem dar ênfase ao critério da *ordem* entre os elementos dentro dos agrupamentos, o que pode causar dúvidas na diferenciação entre os problemas de *arranjo* e *combinação*, por exemplo. Pinheiro, Santos e Sá (2006) realizaram uma pesquisa com alunos concluintes do ensino médio e, dentre os resultados apresentados, destacam-se as dificuldades, declaradas pelos alunos, referentes a diferenciar os problemas de *arranjo* dos problemas de *combinação*. Pessoa (2009), ao realizar pesquisa sobre conhecimentos de combinatória de alunos da educação básica, encontrou, dentre os resultados, que alunos do 3º ano do ensino médio trocam as fórmulas de *arranjo* pelas de *combinação* e vice-versa. Talvez o *livro didático* tenha uma contribuição nesta dificuldade de diferenciação.

5.2.1.3 Tipos de problemas combinatórios na coleção LD1

Entre os problemas que fazem parte das *situações* combinatórias, os de *permutação* foram os mais explorados.

Os problemas de *produto cartesiano* pouco foram explorados, apesar de ter sido através de um problema desse tipo que as autoras fizeram a apresentação do capítulo sobre contagem, demonstrando, inclusive, uma forma de *representação simbólica* que é mais comumente utilizada na resolução de problemas do tipo *produto cartesiano* que é a Árvore de possibilidades.

Tabela 6 - Frequência e percentual com que os problemas combinatórios foram explorados na coleção LD1

Tipo de problema combinatório	Quantidade identificada
Produto cartesiano	10 (9,18%)
Permutação	42 (38,53%)
Arranjo	15 (13,76%)
Combinação	42 (38,53%)
TOTAL	**109 (100%)**

Percebemos que há uma distribuição equitativa entre os tipos de problemas *permutação* e *combinação*, trazendo contextos bem diferenciados, com exceção, dos de *produto cartesiano* e *arranjo*, que apresentaram um percentual baixo de aparição na coleção.

5.2.1.4 Formas de *representações simbólicas* na coleção LD1

A coleção faz menção a vários tipos de *representações simbólicas* como, por exemplo, *Listagem*, *Diagrama, Quadro*, *Árvore de possibilidades, Desenho ou utilizando o Princípio Fundamental da Contagem* como podemos observar por meio das figuras abaixo, no entanto, ao longo do capítulo, não incentiva a utilização dessas *representações*.

Figura 7 - Exemplo de resolução por Listagem

ER1. Suponha que você tenha 4 camisas, uma branca (*b*), uma azul (*a*), uma preta (*p*) e uma vermelha (*v*), e 3 calças, uma preta (*P*), uma branca (*B*) e uma azul (*A*). De quantas maneiras diferentes você pode se vestir usando uma camisa e uma calça?

Você pode escolher qualquer uma das 4 camisas e, para cada camisa escolhida, optar por qualquer uma das 3 calças.

Resolução

Podemos resolver este problema de vários modos.

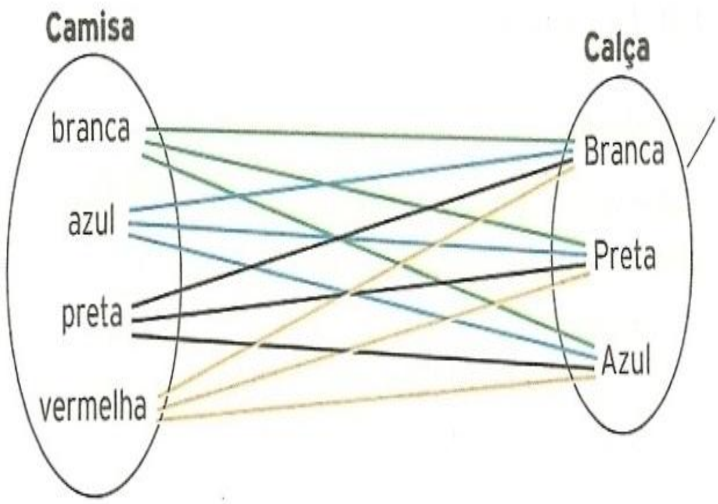
1º) Escrevendo os grupos possíveis de camisa e calça.

camisa branca, calça branca
camisa branca, calça azul
camisa branca, calça preta
camisa azul, calça branca
camisa azul, calça azul
camisa azul, calça preta
camisa preta, calça branca
camisa preta, calça azul
camisa preta, calça preta
camisa vermelha, calça branca
camisa vermelha, calça azul
camisa vermelha, calça preta

Fonte: LD1, p.129

Figura 8 - Exemplo de resolução por Diagrama

2º) Usando diagramas de Euler-Venn.



Também assim chegamos a 12 maneiras diferentes.

Fonte: LD1, p.129

Figura 9 - Exemplo de resolução por Tabela

3º) Montando uma tabela.

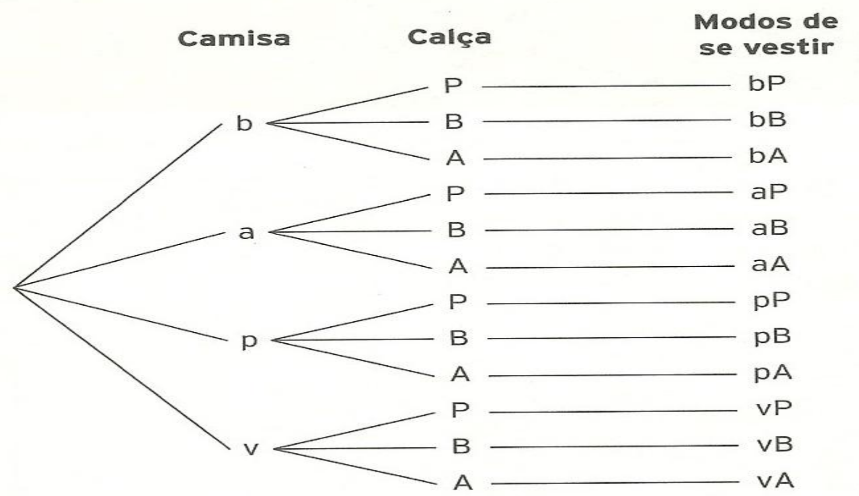
Camisa \ Calça	Branca	Azul	Preta
branca	bB	bA	bP
azul	aB	aA	aP
preta	pB	pA	pP
vermelha	vB	vA	vP

Vemos que há $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades diferentes de se vestir.

Fonte: LD1, p.129

Figura 10 - Exemplo de resolução por Árvore de Possibilidades

4º) Visualizando as possibilidades por meio de um diagrama chamado árvore de possibilidades.



Fonte: LD1, p.130

Figura 11 - Exemplo de resolução por Desenho

Fonte: LD1, p.130

Figura 12 - Exemplo de resolução pelo Princípio Fundamental da Contagem

6º) Fazendo um esquema.

Calça	Camisa
3 possibilidades	4 possibilidades

Para cada escolha de calça, temos 4 possibilidades de camisa ou, ao todo, 12 possibilidades diferentes de se vestir.

Fonte: LD1, p.130

Representações simbólicas como as que foram sugeridas por esta coleção são muito indicadas como forma facilitadora de resolução de problemas combinatórios. Algumas delas possuem restrições, como é o caso da *Listagem* de elementos, que somente é indicada quando o número de possibilidades for pequeno, caso contrário, o aluno poderá ter dificuldades em listar todas as possibilidades. Queremos ressaltar ainda a indicação da *representação simbólica Diagrama de Euler-Venn* (Figura 8)*,* que a nosso ver é limitado aos problemas de *produto cartesiano*, atendendo somente àqueles constituídos por dois conjuntos, o que não acontece sempre. A *representação simbólica* denominada de *Esquema* pelas autoras desta coleção (Figura 12), nada mais é do que a *representação simbólica*

Princípio Fundamental da Contagem, o qual se constitui como uma eficiente estratégia para resolução de problemas combinatórios condicionais ou gerais.

5.2.1.5 Problemas combinatórios condicionais na coleção LD1

Dentre os 109 problemas encontrados, 46, ou seja, (42,20%) eram condicionais, sendo divididos da seguinte forma: dois são de *produto cartesiano*, 28 são de *permutação*, 2 são do tipo *arranjo* e 14 do tipo *combinação* e esses foram classificados conforme as categorias apresentadas por Borba e Braz (2012), como por exemplo:

Figura 13 - Exemplo de problema combinatório condicional utilizando *produto cartesiano*

25. A mesa de saladas de um restaurante tem alface, pepino, pimentão verde, cebola, ovos fatiados, pedaços de *bacon* e pequenas torradas de pão. Há 4 temperos disponíveis. Quantos tipos de saladas diferentes podem ser preparadas com esses ingredientes? (Suponha que cada tipo de salada inclua pelo menos alface e apenas um tempero.)

Fonte: LD1, p. 134

Este problema, cujo significado referente à combinatória é o de *produto cartesiano*, possui características bem claras e específicas dos problemas combinatórios condicionais. Nele identifica-se a presença da categoria denominada pelas pesquisadoras Borba e Braz (2012) de *“Um elemento explicitado fixo”*, representada na questão pelo componente da salada que se propõe fazer, a “ALFACE”, que precisa estar presente em todos os tipos possíveis de combinações.

Também se percebe que a exigência referente ao tempero pode ser incluída em outra categoria de problemas combinatórios condicionais, a categoria denominada pelas pesquisadoras de *“Ter pelo menos um elemento não explicitado fixo”*, já que dentre os quatro tipos de temperos disponíveis para a composição de uma salada foi exigida a presença de apenas um deles, sem expressar preferência por algum.

Na Figura 14, a seguir, tem-se um problema de permutação com condição.

Figura 14 - Exemplo de problema combinatório condicional utilizando *permutação*.

1. Há 4 livros de Matemática, 3 de Física e 2 de Português para serem colocados em uma prateleira. De quantos modos eles podem ser arrumados se:
a) não houver restrição?
b) os livros do mesmo assunto tiverem de ficar juntos?
c) forem colocados primeiro os de Física?

Fonte: LD1, p.217

Esta situação, em que o significado referente à combinatória é o de *permutação*, é outro exemplo de problema combinatório condicional encontrado na coleção LD1 que, pela quantidade de elementos, não exige o uso direto da fórmula, possibilitando ao sujeito usar diferentes estratégias para resolvê-lo.

Como resposta ao item "b" da questão, precisa-se estar atento à condição que foi imposta como requisito primordial para a arrumação da prateleira, "os livros do mesmo assunto precisam estar juntos" em qualquer arrumação que se faça na prateleira. Essa condição refere-se à categoria 11, denominada por Borba e Braz (2012) de *"Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade,"* pois existem três tipos de livros para serem organizados na prateleira (Matemática, Física e Português), com a condição de estarem sempre juntos, ou seja,

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{P_4}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{P_3}\ \underbrace{\_\_\ \_\_}_{P_2} \times P_3 = 1728 \text{ modos}$$

P_3 - Possibilidade de permutações entre os títulos (Matemática, Português e Física);

P_4 – Permutação entre os livros de Matemática;

P_3 – Permutação entre os livros de Física;

P_2 – Permutação entre os livros de Português.

O item “c” exige uma condição semelhante ao anterior, mas acrescenta uma nova condição: a de *posicionamento*, porque em qualquer arrumação que seja feita, os livros de Física deverão sempre estar juntos e deverão ser os primeiros a serem colocados na prateleira, ou seja, existe *“Mais de um elemento explicitado* (os livros de Física) *com determinadas posições e ordem”* (devem ser os primeiros), o que configura sua classificação na categoria 15.

Sendo assim, o número de maneiras como esses livros poderão ser arrumados de acordo com a condição imposta é dado por:

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{P_3}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{P_6} = 4320 \text{ maneiras}$$

P_3 – Permutação entre os livros de Física;

P_6 – Permutação entre os livros restantes.

O item “a” trata do cálculo de uma *permutação* normal, sem condições específicas, por isso não o incluímos na discussão.

5.2.1.6 Manual do professor na coleção LD1

No manual que, conforme as autoras, possui os “pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a proposta didático-pedagógica” (p.4) da coleção LD1, encontram-se elencadas algumas habilidades que esperam ser desenvolvidas pelos alunos por meio da resolução de problemas de contagem como, por exemplo, decidir sobre o melhor modo de resolver um problema tendo já conhecido algumas formas de representação. Entretanto, não foi identificada nenhuma instrução direcionada ao professor que apresentasse sugestões específicas sobre a combinatória, o que não era esperado por se tratar de um material de suporte pedagógico para o profissional que irá utilizá-lo.

Este resultado pôde ser observado também nos achados da pesquisa realizada por Matos Filho e Pessoa (2006), na qual ficou constatado que em 62,5%, ou seja, mais da metade dos livros analisados para aquela pesquisa, não apresentava orientações que auxiliassem os professores no trabalho com os problemas combinatórios.

O trabalho que é feito nesta coleção em relação à combinatória é bem articulado com as experiências sociais vividas pelos alunos, como comentado no Guia do *livro didático* de Matemática do Ensino Médio (BRASIL, 2012). A conexão com outras áreas do conhecimento é sempre bem realizada ao longo da obra

Nesta coleção, 42,20% dos problemas identificados, é composto por problemas *combinatórios condicionais*, o que consideramos uma excelente oportunidade para que os *Invariantes* prescritivos relacionados ao conceito da combinatória sejam explorados e discutidos, o que não aconteceu, pelo fato de ter ocorrido o uso excessivo das fórmulas resolutivas, excesso esse já criticado pelo Guia do *livro didático* de Matemática do Ensino Médio (BRASIL, 2012). Essa ausência da discussão sobre as propriedades *Invariantes* relacionadas ao conceito da combinatória também foi percebida no manual do professor. Nele, não se encontra nenhuma menção específica sobre os problemas combinatórios, contrariando nossas expectativas, uma vez que para um trabalho eficaz em sala de aula, o professor, além dos seus conhecimentos, deveria contar com indicações/sugestões do(a)(s) autor(a)(es) da coleção que escolheu como referência para aquele ano letivo.

5.2.2.1 Visão geral da coleção LD2

De acordo com o Guia de Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio (BRASIL, 2012), a coleção LD2 sistematiza os conceitos matemáticos de forma cuidadosa, porém quase sempre essa sistematização não estimula o aluno a desenvolver sua capacidade investigativa, impedindo assim, a nosso ver, o desenvolvimento e/ou aquisição de habilidades diferenciadas que potencializem a construção de competências.

De acordo com o Guia PNLD (BRASIL, 2012) o autor desta obra teve a preocupação de sempre iniciar uma explanação a partir de situações contextualizadas. Disponibilizando, inclusive, uma seção intitulada *Matemática sem fronteiras* na qual são feitas conexões com outras áreas do conhecimento que, exploradas corretamente pelo professor em sala de aula, podem favorecer a formação da cidadania. Ainda conforme o que o Guia PNLD (BRASIL, 2012) atesta, alguns capítulos desta coleção são iniciados com um fato histórico ou uma aplicação daquele conteúdo que será detalhado logo em seguida.

Um exemplo que esta coleção propõe logo no início do capítulo representa uma situação que exigirá do aluno que faça algumas contagens (**Figura 15**).

Figura 15 - Exemplo da aplicação da contagem no contexto social explorado pela coleção LD2

Fonte: LD2, p.155.

É por meio desta situação-problema que o autor começa afirmando que “contar não é uma tarefa tão fácil” e que se faz necessário estabelecer alguns métodos de contagem que atinjam resultados mais eficazes.

A coleção LD2 apresenta 2007 problemas, os quais estão distribuídos entre problemas resolvidos e problemas propostos, conforme Tabela 7:

Tabela 7 - Quantitativo de exercícios da coleção LD2 por volume

Coleção Analisada LD2	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Total
Vol. 1	144	544	**688**
Vol. 2	158	634	**792**
Vol. 3	112	415	**527**
Total	**414**	**1593**	**2007**

Desse quantitativo de questões oferecido pela coleção, identificamos 116 que necessitam do conhecimento que envolve o raciocínio combinatório, e todos estavam concentrados no volume 2, conforme pode ser visto na **Tabela 8.**

Tabela 8 - Quantidade de questões por ano escolar da coleção LD2

Identificação da coleção	Número de questões envolvendo o raciocínio combinatório		
	1º Ano	**2º Ano**	**3º Ano**
LD2	0	116	0

Os números apresentados na Tabela 8 acima refletem bem a situação encontrada por Sabo (2007), que em sua pesquisa percebeu que as informações referentes ao estudo da combinatória estavam encapsuladas nos volumes destinados ao 2º ano do Ensino Médio, o que consideramos um ponto negativo, pois acreditamos que um estudo espiralado é o mais adequado pelo fato de que neste esquema de espiral, em diferentes momentos o conteúdo é retomado possibilitando uma maior compreensão do conceito.

5.2.2.2 Abordagem sobre a combinatória na coleção LD2

A coleção LD2 não apresenta a definição que o autor defende em relação à combinatória, apenas afirma que ela abrange um conceito alicerçado no Princípio Fundamental da contagem e que identifica dois tipos de agrupamentos: os *arranjos* e as *combinações*.

Ao mencionar o tipo de problema conhecido como *permutação*, o autor trata dessa forma de contagem não como mais um tipo de problema e sim como sendo um caso particular de arranjo, assim como fazem muitos autores, mas, conforme discutimos na sessão referente à combinatória, a *permutação*, assim como os demais tipos de problemas, apresenta *invariantes* prescritivos específicos que, tanto assemelha quanto diferencia cada uma dessas *situações*/tipos de problemas, levando, cada uma delas, a raciocínios diferentes.

5.2.2.3 Tipos de problemas combinatórios na coleção LD2

Na coleção LD2 percebe-se certa homogeneidade na distribuição dos problemas de *permutação, arranjo* e *combinação*. A quase ausência de problemas do tipo *produto cartesiano* pode ocasionar um processo automático de resolução das questões pelo fato de induzir os alunos a ter que fazer escolhas sobre elementos pertencentes a um único conjunto.

Essa quantidade de problemas envolvendo o *produto cartesiano* talvez justifique também a falta da utilização da *representação simbólica* denominada de Árvore de Possibilidades, por exemplo, entre as sugestões para a resolução das questões, pois ela é uma representação válida quando se quer tomar mais de uma decisão sucessiva entre mais de um conjunto.

Tabela 9 - Frequência e percentual com que os problemas combinatórios foram explorados na coleção LD2

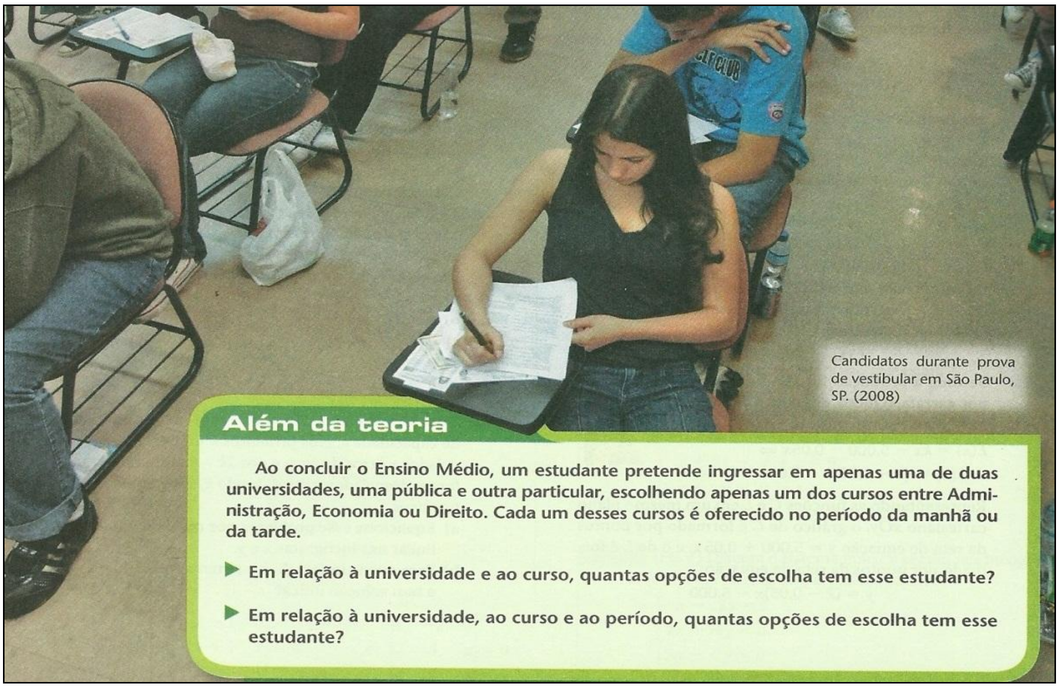
Tipo de problema combinatório	Quantidade identificada
Produto cartesiano	7 (6,03%)
Permutação	37 (31,90%)
Arranjo	34 (29,32%)
Combinação	38 (32,75%)
TOTAL	**116(100%)**

A frequência de 31,90% na ocorrência de problemas do tipo *permutação*, identificada nesta coleção, na nossa concepção, não representa um ganho conceitual em relação a este tipo de problema combinatório, uma vez que, a maior parte desse percentual é composta por problemas de um mesmo gênero: calcular e/ou listar todos os anagramas possíveis de serem formados a partir de uma palavra dada, contrariando o que defende Vergnaud (1982) quando afirma que devemos oferecer aos alunos situações diferenciadas visando entender a significação do conceito e também experimentar as competências e concepções destes alunos.

5.2.2.4 Formas de *representações simbólicas* na coleção LD2

Esta coleção, em todas as atividades de combinatória, faz menção a apenas dois tipos de estratégias de resolução que servirão para resolver os diversos problemas propostos: a utilização de um quadro, chamado pelo autor de *matriz das possibilidades* e a utilização do Princípio Fundamental da Contagem que inclusive é explorado constantemente nos exemplos que servem de modelo de resolução para os alunos. Um exemplo dessa afirmação é o que vemos no início do capítulo 10, do volume 2, capítulo intitulado *Os princípios da Análise Combinatória* quando o autor apresentou a seguinte situação-problema:

Figura 16 - Situação-problema proposta pelo autor no início do capítulo



Fonte: LD2, p.154

Como suporte para a resolução dessa questão, o autor apresenta duas possibilidades, ou dois caminhos para encontrar o resultado: fazer uma Matriz com todas as possibilidades de universidade, curso e horário de estudo ou utilizar o Princípio Fundamental da Contagem por se tratar de ter que tomar mais de uma decisão sucessivamente.

Figura 17 - Exemplo de uma Matriz de possibilidades

	manhã	tarde
(pública, Administração)	(pública, Administração, manhã)	(pública, Administração, tarde)
(pública, Economia)	(pública, Economia, manhã)	(pública, Economia, tarde)
(pública, Direito)	(pública, Direito, manhã)	(pública, Direito, tarde)
(particular, Administração)	(particular, Administração, manhã)	(particular, Administração, tarde)
(particular, Economia)	(particular, Economia, manhã)	(particular, Economia, tarde)
(particular, Direito)	(particular, Direito, manhã)	(particular, Direito, tarde)

FONTE: LD2, p.156

Figura 18 - Exemplo de Princípio Fundamental da Contagem

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{número de}\\ \text{opções de}\\ \text{universidade}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{número de}\\ \text{opções de}\\ \text{curso}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{número de}\\ \text{opções de}\\ \text{período}}} = 12$$

Concluímos, então, que são doze opções possíveis.

FONTE: LD2, p.156

Nesta coleção não houve a sugestão de um variado repertório de *representações simbólicas.* O uso das fórmulas resolutivas ocupa um lugar de destaque, especificamente no capítulo que trabalha a combinatória, tratando este conceito de forma mecânica e sem permitir que os alunos demonstrem sua forma de pensar e impedindo-os de construir o conceito de combinatória esperado.

5.2.2.5 Problemas combinatórios condicionais na coleção LD2

Nesta coleção, que apresentou 116 problemas combinatórios, foram identificados 42 problemas, ou seja, 36,20% de problemas combinatórios condicionais dos quais, um desses problemas é de *produto cartesiano*, 24 são de *permutação*, 8 são do tipo *arranjo* e 9 do tipo *combinação*, como por exemplo:

1ª Situação

Figura 19 - Exemplo de problema combinatório condicional utilizando *combinação*

23 Uma salada de frutas deve conter quantidades iguais de quatro tipos de frutas escolhidas entre uva, maçã, laranja, mamão, morango e melão. Quantas saladas diferentes podem ser preparadas se maçã e laranja forem ingredientes obrigatórios?

Fonte: LD2, p.182

Neste problema combinatório condicional, em que o autor tomou como suporte o tipo de problema combinatório que é a *combinação*, ao se pretender arrumar as frutas que irão compor a salada, salientando-se que deverá conter apenas quatro, dos seis tipos de frutas disponíveis, é preciso levar em consideração também a condição imposta para que a composição seja correta, ou seja, as frutas ***maçã*** e ***laranja*** precisam estar presentes em todas as combinações possíveis que formarão a salada de frutas. Essa condição refere-se ao fato de ser necessário que se mantenha *fixo* dois elementos (maçã e laranja) dentre os seis que foram explicitados (uva, maçã, laranja, mamão, morango e melão). Esta condição específica, é a característica da categoria 3, pois a mesma descreve a existência de *"Mais de um elemento explicitado fixo* (BORBA e BRAZ, 2012). Portanto, a quantidade de saladas de frutas diferentes que podem ser feitas de modo que esta condição seja atendida é a seguinte:

$$\underbrace{\_\_\_\_\;\_\_\_\_}_{C_{4,2}}\;\overset{\text{laranja}}{\_\_\_\_\_\_}\;\overset{\text{maçã}}{\_\_\_\_\_\_} = 6$$

2ª situação

Dentre os problemas combinatórios encontrados nesta coleção e que foram classificados como condicionais, encontram-se exemplos como o exposto na Figura 20.

Figura 20 - Exemplo de problema combinatório condicional do tipo *arranjo*

2 Com todas as vogais, a, e, i, o, u, e as consoantes b, c, d, f, g, h, serão formadas sequências de sete letras distintas tal que três sejam vogais e estejam juntas e as demais sejam consoantes e também estejam juntas. O número de sequências é dado por:

a) $2 \cdot A_{5,3} \cdot A_{6,4}$

b) $A_{5,3} \cdot A_{6,4}$

c) $A_{11,7}$

d) $A_{5,3} + A_{6,4}$

e) $A_{5,3} + 2 \cdot A_{6,4}$

Fonte: LD2, p.184

Quanto ao tipo de problema combinatório, trata-se de um *arranjo*; em relação à categoria de problemas combinatórios condicionais pode ser classificado dentro da categoria 12 *"Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica* (ser vogal ou ser consoante), *numa determinada proximidade"* (as vogais e as consoantes devem estar sempre juntas) (BORBA e BRAZ, 2012).

O autor não explora todas as potencialidades que a questão possui, por exemplo, confrontar as respostas dos alunos e discutir suas estratégias de resolução. Porém, como não foi sugerido pelo autor desta coleção um variado conjunto de representações simbólicas, capazes de melhorar o entendimento desta situação, inferimos que a utilização da fórmula resolutiva de *arranjo*, pelas alternativas dadas como sugestão de resposta, seja a única opção disponível, o que empobrece o estudo desta *situação* combinatória.

Uma solução possível para essa situação seria a seguinte:

$$\underbrace{\text{vogal}\quad\text{vogal}\quad\text{vogal}}_{A_{5,3}}\quad\underbrace{\text{consoante}\quad\text{consoante}\quad\text{consoante}\quad\text{consoante}}_{A_{6,4}}$$

OU

$$\underbrace{\text{consoante}\quad\text{consoante}\quad\text{consoante}\quad\text{consoante}}_{A_{6,4}}\quad\underbrace{\text{vogal}\quad\text{vogal}\quad\text{vogal}}_{A_{5,3}}$$

O total de sequências possíveis é $2 \times A_{5,3} \times A_{6,4} = 21\ 600$

5.2.2.6 Manual do professor da coleção LD2

O manual fornecido por esta coleção é denominado pelo autor de “Suplemento com orientações para o professor”. Nele o autor apresenta algumas sugestões de leitura complementar, para o professor, para seu conhecimento pessoal, mas também para que o professor trabalhe com os alunos.

Esse suplemento traz um item que tem o objetivo de fornecer sugestões para o desenvolvimento de cada capítulo individualmente, porém, no que se refere à combinatória, o autor apenas traz orientações sobre dois tipos de *situações* presentes no estudo deste conteúdo: o *arranjo* e a *permutação*; sugere que seja feita uma discussão sobre a *ordem* dos elementos, afirmando ser essa a dúvida mais frequente dos alunos e o elemento fundamental para o entendimento sobre a combinatória. Este tipo de orientação é interessante, pois há a explicitação do invariante da ordem, embora pudesse, também, evidenciar o invariante da escolha dos elementos e falar dos problemas condicionais.

Comparando os resultados encontrados pela pesquisa realizada por Barreto, Amaral e Borba (2007), já mencionada anteriormente, na qual ficou constatado que nenhuma das propriedades invariantes do conceito da combinatória foi abordada pelos autores das coleções analisadas na coleta de dados, com os resultados encontrados na análise desta coleção, nos é permitido inferir que pelo fato de termos identificado no manual do professor desta coleção uma atenção maior do autor em relação ao invariante da *ordem,* que já começa a se configurar um tímido avanço no processo instrucional do professor, apresentando para ele alguns pontos-chave sobre aqueles conceitos trabalhados pela obra.

5.2.3.1 Visão geral da coleção LD3

Conforme o Guia de Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio (BRASIL, 2012), os capítulos trazidos em cada volume que compõe esta coleção, abordam cada conteúdo proposto para aquele ano escolar, de maneira contextualizada, de forma que motive os alunos e os aproxime mais dos conceitos que serão introduzidos, tratados e sistematizados logo em seguida.

O Guia ainda aponta a existência de uma boa interligação entre os vários campos da Matemática, inclusive com as outras áreas, buscando sempre associar os conhecimentos novos aos que já foram trabalhados, porém não explora e muito menos indica a utilização de recursos didáticos tecnológicos. Considera ainda que há exageros ao explorar procedimentos afirmando que esse excesso exigirá do docente priorização apenas daqueles que são indispensáveis à formação dos alunos do ensino médio.

A nosso ver, esse “exagero” de procedimentos relacionado ao estudo da combinatória, que é objeto de estudo nessa pesquisa, é um ponto positivo da coleção, uma vez que não limita o aluno à utilização de uma única maneira para resolver determinada situação-problema. Especificamente nos casos que envolvem os problemas combinatórios, o autor forneceu, a critério de ilustração, seis tipos procedimentais diferentes como estratégia de resolução para esses tipos de problemas, o que é excelente para um entendimento e sistematização mais eficaz sobre o tema.

A seguir, será apresentada uma Tabela contendo o levantamento quantitativo relacionado ao total de questões trazidas por esta coleção:

Tabela 10 - Quantitativo de exercícios da coleção LD3 por volume

Coleção Analisada LD3	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Total
Vol. 1	1419	460	**1879**
Vol. 2	990	270	**1260**
Vol. 3	618	215	**833**
Total	**3027**	**945**	**3972**

Como se pode observar na **Tabela 10**, esta coleção apresenta um total de 3972 exercícios matemáticos gerais, divididos entre resolvidos e propostos, e desse total foram classificados como problemas combinatórios o quantitativo de 142, como pode ser observado na **Tabela 11** que segue:

Tabela 11 - Quantidade de questões por ano escolar da coleção LD3

Identificação da coleção	Número de questões envolvendo o raciocínio combinatório		
	1º Ano	**2º Ano**	**3º Ano**
LD3	0	142	0

Como visto nas coleções apresentadas anteriormente, a concentração de problemas combinatórios está no 2º ano do ensino médio, confirmando o que discutimos que, na prática, o trabalho formal com a combinatória vem ocorrendo no ensino médio de modo mais sistematizado e, nos anos escolares anteriores, ocorre de forma mais esporádica e pontual.

5.2.3.2 Abordagem sobre a combinatória na coleção LD3

A maneira como o autor dessa coleção apresenta a combinatória foi descrevendo que ela é o campo da Matemática que trata de problemas de contagem frequentes ao nosso cotidiano. Chama a atenção para o conceito de Principio Multiplicativo presente nesse conteúdo e completa a apresentação do tema expressando que a “técnica de contar” e suas extensões são uma forma de preparação para o estudo da Estatística. Para o autor desta coleção, a combinatória pode ser vista como uma forma de contar, como muitos autores também a definem. Um aspecto importante é a relação que ele faz com a Estatística.

Para o autor desta coleção, a combinatória compreende dois tipos de agrupamentos: os arranjos e as combinações. Considera a *permutação* como um caso particular dos *arranjos* quando estes acontecem sem repetição.

É feita ainda uma discussão bastante rica sobre o *invariante* da ordem em que os elementos de um agrupamento podem ocupar e chama a atenção para a mudança de natureza dos elementos que acontece nos problemas de *arranjo*, mas que não acontecem nos problemas de *permutação*, diferenciando-os dessa maneira.

5.2.3.3 Tipos de problemas combinatórios na coleção LD3

Esta coleção traz um número expressivo de problemas combinatórios. Nela, percebe-se uma distribuição equilibrada entre os tipos de problemas que envolvem *permutação*, *arranjo* e *combinação* de elementos que constituem um único conjunto, porém a exploração dos problemas de *produto cartesiano*, que são aqueles formados a partir de dois ou mais conjuntos, em comparação com os tipos de problemas já citados, é bastante pequena como podemos ver na Tabela 12 que segue:

Tabela 12 - Frequência e percentual com que os problemas combinatórios foram explorados na coleção LD3

Tipo de problema combinatório	Quantidade identificada
Produto cartesiano	8 (5,63%)
Permutação	37 (26,06%)
Arranjo	50 (35,21%)
Combinação	47 (33,10%)
TOTAL	**142 (100%)**

O equilíbrio na frequência com que os problemas de *permutação*, *arranjo* e *combinação* foram explorados nesta coleção possibilita uma construção mais eficiente do conceito de combinatória, na nossa concepção. Pessoa e Borba (2009) defendem que, desde os anos iniciais de escolarização, os variados tipos de problemas combinatórios devem ser vistos de maneira simultânea, pois, fazem parte de um mesmo campo conceitual e seu conhecimento desenvolvido desta forma, contribui para novas aprendizagens, favorecendo, assim, o momento do aprendizado sistemático oferecido no ensino médio.

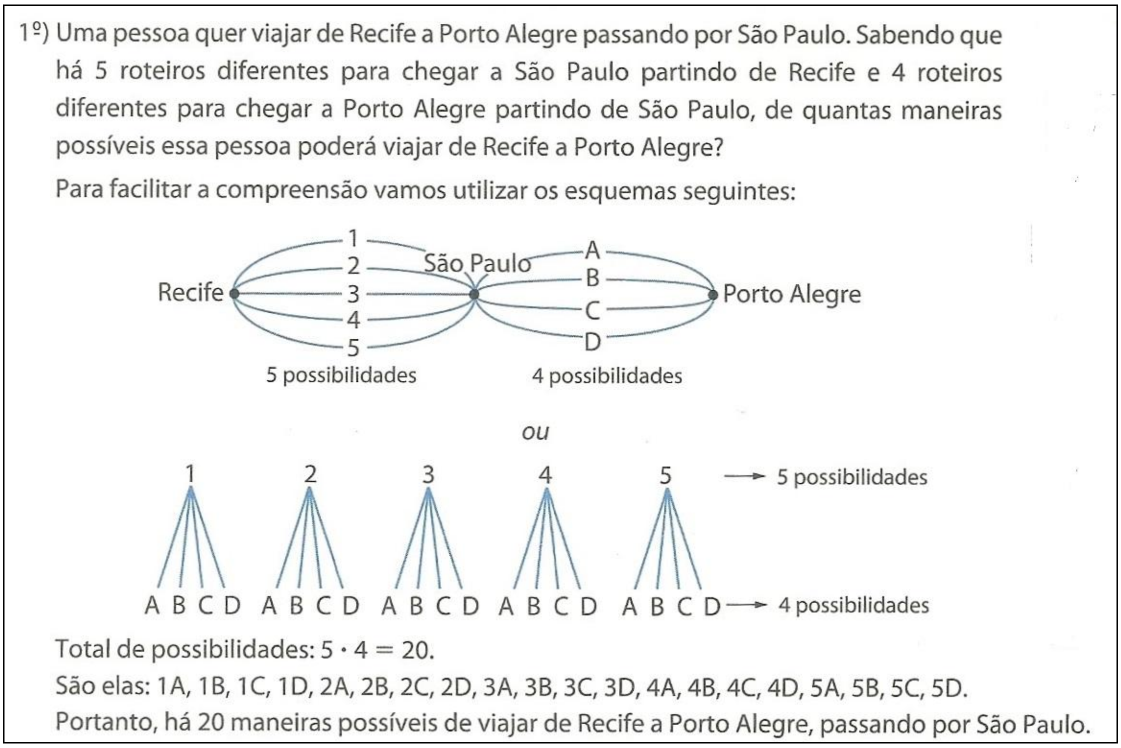
5.2.3.4 Formas de representações simbólicas na coleção LD3

Inicialmente, foram apresentados três tipos de estratégias que serviram como modelo para a resolução dos diferentes tipos de questões elaboradas para esta coleção: *Esquema*[6], *Árvore de possibilidades* e o *Princípio multiplicativo*. Essas estratégias foram utilizadas na resolução das questões de *produto cartesiano* e posteriormente as estratégias *Árvore de possibilidades* e *Princípio multiplicativo* foram estendidas aos problemas de *permutação* e aos problemas de *arranjo*.

[6] A árvore de possibilidades é também chamada de esquema de árvore. No entanto, no presente estudo, quando nos referimos à Esquema, este não diz respeito à arvore de possibilidades e sim a esquemas mais gerais. Quando tratarmos do esquema de árvore especificamente, o denominaremos de árvore de possibilidades.

A Figura 21, a seguir, apresenta um exemplo de resolução de problema combinatório por *Esquema* e por *Árvore de possibilidades,* respectivamente.

Figura 21 - Exemplo de Esquema e Árvore de possibilidades


1º) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Para facilitar a compreensão vamos utilizar os esquemas seguintes:

Total de possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$.

São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C, 5D.

Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo.

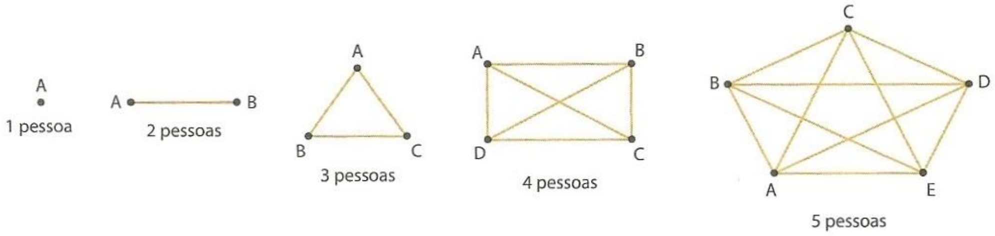
Fonte: LD3, p.276

Mais adiante, ao anunciar os problemas de *combinação*, o autor utilizou mais uma estratégia que foi denominada por ele de *Diagrama* (ver figura), que na nossa concepção tem os mesmos princípios da estratégia chamada de *Esquema* e que, portanto, não consideraremos como uma nova estratégia.

Figura 22 - Exemplo de diagrama na resolução de um problema de *combinação*

1ª maneira – Com diagramas

Os diagramas abaixo representam os cumprimentos para 1, 2, 3, 4 e 5 pessoas.



Observe que o problema dos cumprimentos se reduz à contagem do número de segmentos necessários para conectar vários números de pontos.

Vamos ver o caso de 4 pessoas. **A** cumprimenta 3 pessoas: **B**, **C** e **D** (3 cumprimentos). **B** também cumprimenta 3 pessoas: **A**, **C** e **D** (3 cumprimentos). E assim por diante. Cada pessoa cumprimenta outras 3 pessoas. Parece então que teremos $4 \cdot 3$ ou 12 cumprimentos. Mas note que os cumprimentos entre **A** e **B** foram contados duas (2) vezes. Isso ocorre com cada uma das 4 pessoas. Consequentemente, cada cumprimento foi contado duas vezes. Assim, para obter a resposta, precisamos dividir 12 por 2, ou seja, fazer $\frac{4 \cdot 3}{2}$ ou 6, que é igual ao número de segmentos de reta traçados na figura ($\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$).

Faça esse mesmo raciocínio para o caso de 5 pessoas. Você descobrirá que serão $\frac{5 \cdot 4}{2}$ ou 10 cumprimentos ou 10 segmentos de reta ligando 5 pontos não alinhados do plano. Podemos generalizar esse raciocínio para um número qualquer de pessoas. Usando a estratégia acima, nosso problema fica resolvido fazendo $\frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2}$ ou 435 cumprimentos.

Fonte: LD3, p.288

O autor ainda cita a possibilidade da utilização de outras duas estratégias: a Tabela, que utiliza o princípio da Progressão Aritmética, e a utilização direta da fórmula para o cálculo das combinações.

Figura 23 - Tabela utilizando o princípio de Progressão Aritmética

Número de pessoas	Número de cumprimentos
1	0
2	1
3	$3 = 1 + 2$
4	$6 = 1 + 2 + 3$
5	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
⋮	⋮
10	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$
⋮	⋮
30	$1 + 2 + 3 + \ldots + 28 + 29$

Observe a regularidade:

a) para 4 pessoas temos $1 + 2 + 3 = 6$ cumprimentos

b) para 5 pessoas temos $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ cumprimentos

c) o último número da expressão $1 + 2 + 3 + \boxed{4}$ é igual ao número de pessoas menos 1

Seguindo este padrão, para 30 pessoas teremos:

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 28 + 29$ cumprimentos

A sequência 1, 2, 3, 4, ..., 28, 29 é uma PA de razão igual a 1, onde o primeiro termo é 1, o último termo é 29 e o número de termos é 29.

Vimos no capítulo 9 do volume 1 que a soma de uma PA finita é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n)_n}{2}$. Nesse caso, $a_1 = 1$, $a_n = 29$ e $n = 29$.

Assim, $S_{29} = \frac{(1 + 29)29}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2} = 435$

Portanto, teremos 435 cumprimentos.

Fonte: LD3, p. 289

A diversificação de estratégias para a resolução dos problemas combinatórios é importante para o seu ensino, pois ajuda o aluno a perceber que, além da fórmula, dependendo da ordem de grandeza dos números envolvidos no problema, se estes forem pequenos, pode-se usar estratégias alternativas. Além disso, estratégias diferenciadas podem ajudar o aluno a entender o que significa o problema, pois ao fazer uma árvore de possibilidades, uma listagem, uma tabela, um esquema, o aluno consegue perceber mais claramente os passos de resolução do problema. De acordo com Vergnaud (1986), as representações denotam o que o aluno está pensando e como está compreendendo o problema.

5.2.3.5 Problemas combinatórios condicionais na coleção LD3

Como já foi visto na **Tabela 12**, foi explorado pelo autor desta coleção o total de 142 problemas que envolvem o raciocínio combinatório, e desse total, 47, ou seja, 33,10% dos problemas foram classificados como sendo combinatórios condicionais pelo fato de possuírem características específicas. Desses problemas, nenhum do tipo *produto cartesiano* foi explorado como problema combinatório condicional, 15 foram explorados por meio da *permutação*, 18 por meio dos problemas de *arranjo* e 14 desses tipos de problemas utilizaram a *combinação*. Discutir-se-á nesse momento sobre alguns desses problemas, elencando quais as características que os tornam um problema combinatório condicional.

No exemplo que segue, o autor fez uso de um problema de *permutação* para explorar aspectos específicos que tornam este um problema diferenciado.

Figura 24 - Exemplo de problema combinatório condicional na *permutação*

4º) Vamos calcular quantos são os anagramas:

a) da palavra PERDÃO.

Basta calcular $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

b) da palavra PERDÃO que iniciam com **P** e terminam em **O**.

P __ __ __ __ O

Devemos permutar as 4 letras não fixas, ou seja, calcular $\mathbf{P_4}$:

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, há 24 anagramas da palavra PERDÃO iniciados com **P** e terminados em **O**.

c) da palavra PERDÃO em que as letras **A** e **O** aparecem juntas e nessa ordem (ÃO).

É como se a expressão ÃO fosse uma só letra: PERDÃO; assim, temos que calcular $\mathbf{P_5}$:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d) da palavra PERDÃO em que **P** e **O** aparecem nos extremos.

P __ __ __ __ O

O __ __ __ __ P

Temos então $2P_4 = 2 \cdot 4! = 48$ anagramas.

Fonte: LD3, p.278

A ocorrência de problemas de *permutação* solicitando calcular o número de anagramas que é possível de se obter com as letras de uma determinada palavra é bastante frequente nos livros didáticos de matemática do ensino médio. Porém, alguns desses problemas estipulam “condições específicas” que os elementos deverão apresentar para compor os agrupamentos.

A questão trazida na **Figura 24** é um exemplo desse tipo de situação. O item “a” não impõe nenhuma condição especial para que seja calculada a quantidade de anagramas, com ou sem sentido, que podem ser escritos a partir das letras da palavra PERDÃO.

No item “b”, o autor especifica quais são os tipos de anagramas que ele deseja contar. São aqueles iniciados pela letra **P** e terminados pela letra **O**, ou seja, da quantidade total de anagramas que é possível formar a partir das letras da palavra PERDÃO, devem-se ser contados apenas aqueles que obedecem a essa condição específica.

Obsevando o **Quadro 4** contendo a categorização dos problemas combinatórios condicionais criada por Borba e Braz (2012), percebe-se que esse item está relacionado à categoria 9, pois esta fala da existência de *“mais de um elemento explicitado fixo* (**P** e **O**) *em determinadas posições”* (**P** no início e **O** no final). Analogamente ao item “b”, o item “d” também pode ser classificado como sendo da categoria 9, porém com uma condição mais abrangente ainda, uma vez que poderão ser contados os anagramas iniciados pela letra **P** e terminados pela letra **O**, e também os iniciados pela letra **O** e terminados pela letra **P**.

Ainda com base no **Quadro 4**, nota-se que pelas condições específicas impostas no item “c” como essenciais para a formação e contagem dos agrupamentos solicitados, ele pode ser classificado conforme a categoria 19 que cita a existência de “*mais de um elemento explicitado* (**AO**) *com determinada proximidade e ordem”*, ou seja, ao especificar que as letras **A** e **O** deverão aparecer sempre juntas, está atendendo ao critério da *proximidade* e ao impor que a letra **A** deve sempre aparecer antes da letra **O**, está correspondendo ao critério da *ordem* descrita pela categoria em questão.

Figura 25 - Exemplo de problema combinatório condicional no *arranjo*

24. Responda:
a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO?
b) Quantas "palavras" de 4 letras distintas é possível formar com as letras da palavra FILHO?
c) Quantas dessas "palavras" de 4 letras começam com **O**?
d) Quantas dessas "palavras" de 4 letras terminam com FI?
e) Quantas dessas "palavras" contêm a letra **I**?

Fonte: LD3, p.285

Neste exemplo envolvendo o tipo de problema combinatório *arranjo*, também é possível identificar características específicas que o tornam um problema *combinatório condicional*.

O item "a" não será discutido aqui por se tratar de um exemplo que envolve a Permutação, pois já foi discutido no exemplo da **Figura 24** anteriormente.

O item "b" já se trata de uma situação que envolve o *arranjo*, mas que não são exigidas condições específicas.

É a partir do item "c" que a questão passa a apresentar características de um problema *combinatório condicional* ao solicitar a contagem do número de palavras, com ou sem sentido, que podem ser formadas utilizando apenas 4 letras da palavra FILHO e exigindo que essas palavras iniciem pela letra **O**. Nessa questão é possível perceber a trajetória proposta pelo autor ao elaborá-la. Primeiro foi necessário contar todos os agrupamentos possíveis que poderiam ser escritos utilizando todas as letras de uma determinada palavra, em seguida, solicitou que fossem contados os agrupamentos possíveis de serem escritos, utilizando apenas algumas letras dessa mesma palavra, para enfim solicitar a contagem apenas dos agrupamentos que podem ser escritos utilizando 4 letras de uma palavra que contém 5 letras, e que começam por uma dessas letras especificamente.

A partir dessa sequência de tarefas, infere-se que o objetivo principal do autor é possibilitar a formação do conceito de *arranjo*, explorando primeiro seus aspectos práticos. Podemos relacionar a este aspecto, a afirmação de Vergnaud (1986) quando defende que o saber forma-se a partir de problemas a resolver, ou seja, de situações a dominar e que as concepções dos alunos sempre são modeladas pelas situações com que eles se deparam.

Procurando classificar o item “c” na categorização de problemas combinatórios condicionais citada no **Quadro 4**, vê-se a possibilidade de incluí-lo na categoria 7, a qual afirma haver a existência de *“um elemento fixo explicitado* (**O**) *em determinada posição”* (início de cada agrupamento).

Analisando o item “d”, o qual exige a contagem dos agrupamentos que terminam pelas letras **FI**, percebe-se a possibilidade de classificá-lo na categoria 19 pelo fato de determinar a existência de *“mais de um elemento explicitado* (**FI**), *com determinada proximidade e ordem”*, ou seja, as letras **FI** devem sempre estar presentes nos agrupamentos obedecendo a essa proximidade e ordem de escrita. Por sua vez, o item “e” pode ser classificado na categoria 1 pelo fato de ter *“um elemento explicitado fixo* (**I**) *em qualquer posição”*.

A seguir, será analisado um problema *combinatório condicional* que foi elaborado com base no tipo de problema *combinação*, que nesta coleção figura como a segunda maior quantidade de problemas combinatórios, correspondendo a 33,10% do total dos problemas combinatórios identificados.

Figura 26 - Exemplo de problema combinatório condicional de *combinação*

53. Num grupo de 20 pessoas há 6 mulheres. Quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas, de modo que nelas haja pelo menos uma mulher?

Fonte: LD3, p.294

Este problema exige a formação de comissões compostas por apenas 4 pessoas, que deverão ser escolhidas dentre um conjunto de 20 pessoas, das quais 6 são mulheres.

Em problemas envolvendo a formação de comissões, percebe-se claramente a necessidade de se dar uma maior atenção à ordem em que cada uma dessas das pessoas ocupará, pelo fato de que, alternando a ordem de escolha entre os membros que ocuparão uma determinada comissão, não será configurada a formação de uma nova comissão, como por exemplo, a comissão formada por Ana, Bruno, Carlos e Davi, escolhidos e dispostos nessa ordem, não será diferente da comissão formada por Carlos, Bruno, Ana e Davi, escolhidos e dispostos nessa ordem. Porém, o que deve ser levado mais em consideração ao serem formadas as comissões exigidas nessa questão específica, é a obrigação de sempre se ter pelo menos a presença de uma mulher entre os escolhidos, não importando a ordem da escolha.

Este tipo de problema *combinatório condicional*, pode ser classificado na categoria 5 descrita no **Quadro 4**, que, segundo Borba e Braz (2012), para serem formadas as comissões, é necessário se *“ter pelo menos um determinado elemento não explicitado* (a presença de uma mulher), *com determinada característica, fixo”*, ou seja, independentemente da ordem em que essa mulher seja colocada na comissão, ela deverá sempre estar presente.

5.2.3.6 Manual do professor da coleção LD3

O autor desta obra destaca que ela foi elaborada com o objetivo de apresentar uma nova proposta pedagógica de ensino de matemática para o ensino médio, em termos de conteúdo e metodologia. Para tanto, afirma que buscou centralizar no aluno o papel de agente principal na construção do processo de ensino-aprendizagem (2010, manual do professor, p. 3-4).

Na expectativa de que essa nova proposta fosse bem sucedida, esperávamos encontrar no manual destinado à consulta pelo professor, informações relevantes sobre cada tema abordado, com discussões envolvendo os principais pontos de cada assunto, e orientações bem específicas que possibilitassem ao professor ser o mediador desse processo de ensino-aprendizagem.

Buscamos encontrar, especificamente, orientações relacionadas à combinatória e seus métodos de contagem, mas apenas encontramos a indicação de outro livro como fonte de consulta sobre o tema, o que nos leva a levantar a questão: de que forma o professor poderá contribuir com o aprendizado do aluno no que diz respeito à combinatória, segundo essa proposta, uma vez que não houve orientações para o trabalho sobre esse conteúdo?

5.2.4.1 Visão geral da coleção LD4

Conforme o Guia de Livros Didáticos de Matemática (BRASIL, 2012), os autores dessa coleção optaram por começar cada conteúdo por meio de exemplos contendo breves contextualizações, relacionadas às situações que podem ser identificadas cotidianamente na vida dos alunos, pois servirão como suporte para uma sistematização mais precisa do conceito que se deseja introduzir. No entanto, segundo o Guia, esses exemplos muitas vezes não propiciam autonomia para que os alunos construam o conhecimento adequado para aquele conteúdo, pelo fato de, na maior parte dos exemplos utilizados, a exigência mínima para a resolução apenas é a aplicação direta da fórmula resolutiva (BRASIL, 2012). O Guia também destacou a ausência da indicação de recursos tecnológicos e/ou a utilização desses recursos em toda a coleção.

Dentro desta perspectiva periférica em que foram descritas algumas características desta coleção de *livros didáticos*, queremos descrever a forma como os autores introduzem a combinatória.

Fazendo perguntas como: de quantos modos distintos oito pessoas podem se sentar lado a lado em um cinema, e quantas placas de automóveis podem ser formadas sem repetição de letras e de algarismos, os autores iniciaram a apresentação dos problemas de contagem, característica principal da combinatória, e logo após essa breve introdução, apresentou os tipos de problemas que compõem esse conteúdo.

A **Tabela 13** abaixo apresenta os dados do levantamento que foi realizado, cujo objetivo foi o de quantificar o número de questões que está presente nessa coleção como um todo, ou seja, esse levantamento não leva em consideração somente os exercícios de combinatória e sim de todos os conteúdos.

Tabela 13 - Quantitativo de exercícios da coleção LD4 por volume

Coleção Analisada (LD4)	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Total
Vol. 1	836	197	**1033**
Vol. 2	766	188	**954**
Vol. 3	794	204	**998**
Total	**2396**	**589**	**2985**

Desse levantamento quantitativo que descreveu o número total de questões presentes nessa coleção, entre exercícios resolvidos e propostos em cada volume, tem-se o total de 2985 atividades, e dessas atividades, as que são consideradas somente de combinatória totalizam 132, cujo quantitativo está apresentado, de acordo com o ano escolar, na **Tabela 14**.

Tabela 14 - Quantidade de questões por ano escolar da coleção LD4

Identificação da coleção	Número de questões envolvendo o raciocínio combinatório		
	1º Ano	2º Ano	3º Ano
LD4	0	129	3

Semelhantemente aos resultados encontrados no estudo de Sabo (2007), os problemas combinatórios desta coleção também encontram-se concentrados no volume 2, que é o destinado ao 2º ano do ensino médio, e onde se encontra estruturado o estudo da combinatória**.** Os únicos problemas identificados no volume 3 desta coleção, somente estão no livro destinado ao 3º ano do ensino médio porque no final deste referido volume existe uma bateria de exercícios propostos composta por questões de vestibulares passados.

Em estudo realizado por Homa (2011), 142 professores foram questionados sobre as dificuldades apresentadas por alunos relacionadas ao estudo da combinatória, três professores declararam ter abordado o conteúdo no 1º ano do ensino médio, 92 no 2º ano e 23 no 3º ano do ensino médio. Esta constatação permite-nos inferir que a concentração do estudo da combinatória apenas no 2º ano do ensino médio pode estar influenciando os professores a não abordar este conteúdo nos outros anos escolares.

5.2.4.2 Abordagem sobre a combinatória na coleção LD4

Os autores dessa coleção definem a combinatória como a parte da Matemática responsável por desenvolver técnicas e métodos de contagem. Chama a atenção do leitor ainda para o Princípio Fundamental da Contagem, colocando-o como principal técnica para a resolução de problemas envolvendo contagem, mas deixa claro que essa técnica não pode ser utilizada exclusivamente em determinados tipos de problemas pelo fato de tornarem sua resolução mais complicada. Para esses casos, o autor afirma ser necessário utilizar outras técnicas de contagem de acordo com o tipo de agrupamento que deseja ser formado.

Na nossa concepção, o Principio Fundamental da Contagem é uma representação muito eficaz quando utilizada na resolução de todos os tipos de problemas combinatórios. Sua utilização permite que o aluno, ao resolver qualquer problema envolvendo a combinatória, fique mais livre para expor suas concepções prévias sobre o assunto e não fique dependente da utilização de fórmulas.

A apresentação dos tipos de problemas referentes à combinatória é feita de maneira sistematizada, porém, o autor utiliza muita linguagem matemática que pode dificultar o entendimento dos conceitos que estão sendo anunciados, caso não haja a interferência do professor ao discutir o conteúdo.

5.2.4.3 Tipos de problemas combinatórios na coleção LD4

Nesta coleção encontramos os problemas de *permutação*, *arranjo* e *combinação* distribuídos em quantidades bem próximas, porém os problemas de *produto cartesiano*, assim como nas demais coleções, são explorados em menor frequência, talvez por já ter sido objeto de estudo no ensino fundamental, conforme orienta os PCN (BRASIL, 1997 e 1998), sendo citados apenas como revisão.

A seguir serão apresentadas as frequências e percentual com que cada tipo de problema foi mencionado pelo autor desta coleção.

Tabela 15 - Frequência e percentual com que os problemas combinatórios foram explorados na coleção LD4

Tipo de problema combinatório	Quantidade identificada
Produto cartesiano	10 (7,56%)
Permutação	48 (36,37%)
Arranjo	33 (25%)
Combinação	41 (31,07%)
TOTAL	**132 (100%)**

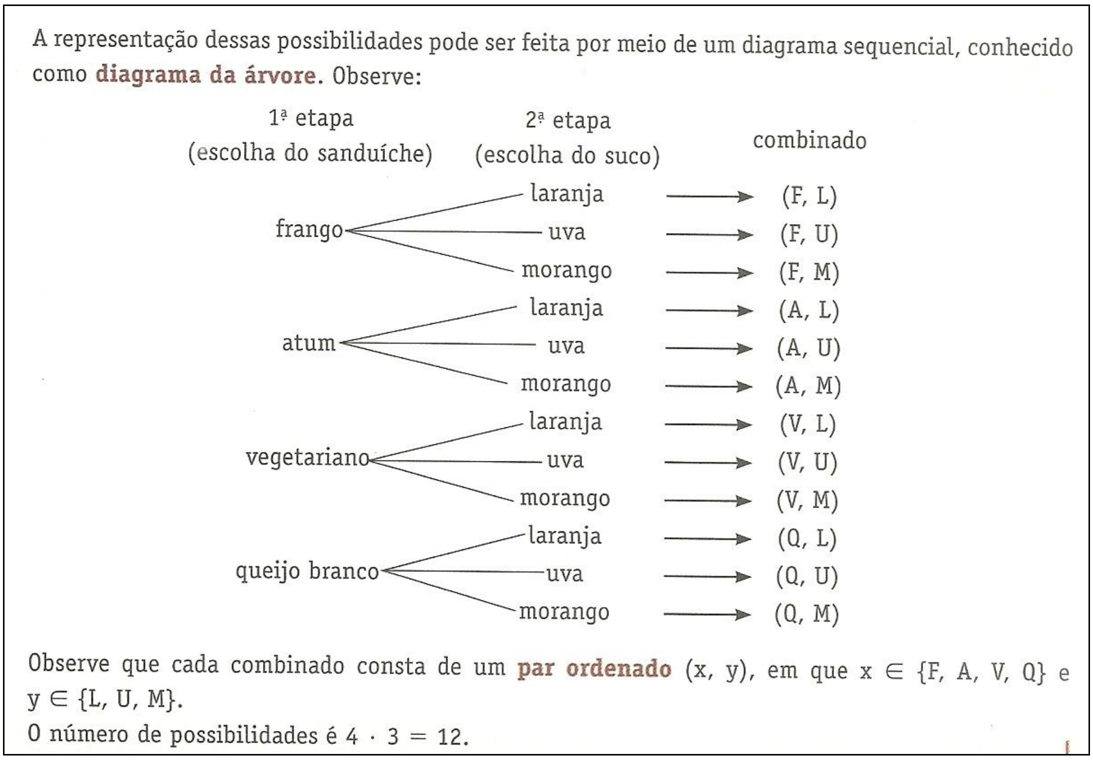
O equilíbrio na exploração e estudo dos problemas combinatórios, é a maneira ideal, defendida por Pessoa e Borba (2009) para a construção do conceito inserido no campo conceitual das estruturas multiplicativas, o conceito de combinatória. Todos os problemas resolvidos envolvendo *permutação*, *arranjo* e *combinação*, utilizados como modelo, foram resolvidos primeiramente sem a fórmula e só após uma breve discussão, o autor resolveu com a utilização da fórmula específica para cada um dos tipos de problemas. Essa estratégia de explorar o conteúdo é bastante pertinente, uma vez que permite ao aluno analisar cada situação de maneira única e não ficar preso à utilização mecanizada de métodos prontos.

5.2.4.4 Formas de representações simbólicas na coleção LD4

É possível identificar nessa coleção, sobretudo no início do capítulo destinado ao estudo da combinatória, exemplos cujas estratégias de resolução são a *Árvore de possibilidades*, a utilização de *Esquemas* e a elaboração de *Listagens*. Porém, nos demais exercícios que compõem esse mesmo capítulo, percebe-se que os autores, nos exercícios resolvidos que são apresentados como modelo, induzem a utilização da fórmula ou fazem uso do Princípio Fundamental da Contagem, mas sem tratá-lo como uma nova estratégia de resolução para os problemas combinatórios.

As figuras que seguem ilustram cada um dos três tipos de estratégias que foram utilizadas nesta coleção como um caminho para a resolução dos problemas de combinatória.

Figura 27 - Exemplo da estratégia Árvore de possibilidades



A representação dessas possibilidades pode ser feita por meio de um diagrama sequencial, conhecido como **diagrama da árvore**. Observe:

1ª etapa (escolha do sanduíche)	2ª etapa (escolha do suco)	combinado
frango	laranja	(F, L)
	uva	(F, U)
	morango	(F, M)
atum	laranja	(A, L)
	uva	(A, U)
	morango	(A, M)
vegetariano	laranja	(V, L)
	uva	(V, U)
	morango	(V, M)
queijo branco	laranja	(Q, L)
	uva	(Q, U)
	morango	(Q, M)

Observe que cada combinado consta de um **par ordenado** (x, y), em que $x \in \{F, A, V, Q\}$ e $y \in \{L, U, M\}$.

O número de possibilidades é $4 \cdot 3 = 12$.

Fonte: LD4, p.251

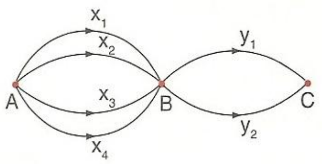
Figura 28 - Exemplo da estratégia chamada de Esquema

Quatro estradas ligam as cidades A e B, e duas estradas ligam as cidades B e C. De quantas maneiras distintas pode-se ir de A a C, passando por B?

Vamos representar as estradas que ligam as cidades A a B por x_1, x_2, x_3 e x_4 e as que ligam as cidades B a C por y_1 e y_2.

Há duas etapas sucessivas a serem cumpridas; na primeira, deve-se ir de A até B e, na segunda, de B até C.

Cada caminho determina uma sequência de dois elementos (x_i, y_j), em que $x_i \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $y_j \in \{y_1, y_2\}$, como mostra o esquema seguinte:



Caminhos possíveis: (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_4, y_1), (x_4, y_2).

O número de maneiras de realizar a viagem completa corresponde ao número de sequências possíveis, que é $4 \cdot 2 = 8$.

Fonte: LD4, p.252

Figura 29 - Exemplo de estratégia chamada de Listagem

Quando termina o treino, Jaqueline costuma tomar uma vitamina com leite na lanchonete da academia. Numa tarde, a lanchonete dispunha das seguintes frutas: abacate, mamão, banana, maçã, morango e laranja. De quantas maneiras distintas Jaqueline pode pedir sua vitamina misturando exatamente duas dessas frutas?

Vamos representar, uma a uma, as possibilidades de mistura:

mamão e banana	maçã e morango	abacate e mamão
mamão e maçã	maçã e laranja	abacate e banana
mamão e morango	banana e morango	abacate e maçã
mamão e laranja	banana e laranja	abacate e morango
banana e maçã	morango e laranja	abacate e laranja

RICHARD SEMIK/ALAMY/OTHER IMAGES

As frutas fazem parte de um cardápio saudável.

Fonte: LD4, p.264

O que temos percebido até o momento é que a *representação simbólica* conhecida como *Árvore de possibilidades* é a mais utilizada, nas coleções analisadas até então, na resolução de problemas do tipo *produto cartesiano*. No nosso entendimento, esta utilização pode possibilitar avanços no desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois é possível visualizar todas as etapas de escolha necessárias. Porém, é necessário que um número maior de representações simbólicas seja utilizado, pois, conforme Vergnaud (1996, p.184) “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas”.

5.2.4.5 Problemas combinatórios condicionais na coleção LD4

Após levantamento quantitativo dos problemas combinatórios existentes nesta coleção, tem-se que dos 132 problemas, 43 foram classificados como sendo combinatórios condicionais, ou seja, 32,33%, e desses, 3 são de *produto cartesiano*, 17 de *permutação*, 8 de *arranjo* e 15 são do tipo *combinação*.

A seguir, será ilustrado com um exemplo, cada um desses tipos de problemas combinatórios condicionais, apresentando também comentários sobre eles que justifiquem suas respectivas classificações.

Situação 1. Na Figura 30 tem-se um exemplo de problema combinatório condicional do tipo *produto cartesiano*.

Figura 30 - Exemplo de problema combinatório condicional com *produto cartesiano*

Em uma festa, há 32 rapazes e 40 moças; 80% das moças e $\frac{3}{8}$ dos rapazes sabem dançar. Quantos pares podem ser formados de modo que:
a) ninguém saiba dançar?
b) apenas uma pessoa do par saiba dançar?

Fonte: LD4, p. 254

Neste problema estão sendo tratadas duas situações distintas: a primeira delas está expressa no item “a”. Ao serem escolhidos entre os rapazes e as moças, os pares constituídos de um representante de cada sexo, será preciso escolher entre aqueles que não sabem dançar, ou seja, entre 20 rapazes (R_{nd}) e 8 moças (M_{nd}). Portanto, têm-se dois conjuntos: o conjunto de rapazes que não sabem dançar e o conjunto das moças que também não sabem dançar, que deverão ser combinados para formar os pares procurados.

$$20\ (R_{nd}) \times 8\ (M_{nd}) \text{ ou } 8\ (M_{nd}) \times 20\ (R_{nd}) = 160 \text{ pares}$$

Essa escolha corresponde à categoria 6 descrita no **Quadro 4**, que considera a existência de *“no máximo determinados elementos não explicitados* (Rapaz/Moça ou Moça/Rapaz), *com determinada característica* (que não saiba dançar)*, fixo”.*

A segunda situação está retratada no item “b”. Nela, é preciso observar que para formar cada par, apenas é necessário que um dos integrantes saiba dançar, ou seja, é necessário *“ter pelo menos um determinado elemento não explicitado* (Rapaz ou Moça), *com determinada característica* (saiba dançar), *fixo”* (categoria 5). Portanto, há duas construções possíveis:

1ª) O Rapaz sabe dançar e a Moça não.

$$12 \text{ x } 8\ (M_{nd}) = 96 \text{ pares}$$

2ª) A Moça sabe dançar e o Rapaz não.

$$32 \text{ x } 20\ (M_{nd}) = 640 \text{ pares}$$

Assim, essa situação que está classificada na categoria 5 citada no **Quadro 4**, tem como resultado para o número de pares que podem ser formados, em que apenas um integrante saiba dançar, o total de

$$96 + 640 = 736 \text{ opções de pares}$$

Situação 2. O exemplo que segue, trata-se de um problema de *permutação* que pode ser categorizado como sendo um exemplo da categoria 11 descrita no **Quadro 4**.

Figura 31 - Exemplo de problema combinatório condicional na *permutação*

Giba e Gina têm três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.

a) De quantas formas distintas os membros da família podem se distribuir?

b) Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?

Solução:

a) Cada forma de dispor as cinco pessoas lado a lado corresponde a uma permutação entre elas, uma vez que a sequência é formada por todos os membros da família.

O número de posições possíveis é, portanto, $P_5 = 5! = 120$.

b) Para que Giba e Gina apareçam juntos (lado a lado), podemos considerá-los como uma "única pessoa" que irá permutar com as outras três, num total de $P_4 = 4! = 24$ possibilidades.

Porém, para cada uma dessas 24 possibilidades, Giba e Gina podem trocar de lugar entre si, de $P_2 = 2! = 2$ maneiras distintas.

Assim, o resultado procurado é $\underbrace{P_4}_{\text{entre os blocos}} \cdot \underbrace{P_2}_{\text{dentro do bloco}} = 24 \cdot 2 = 48$.

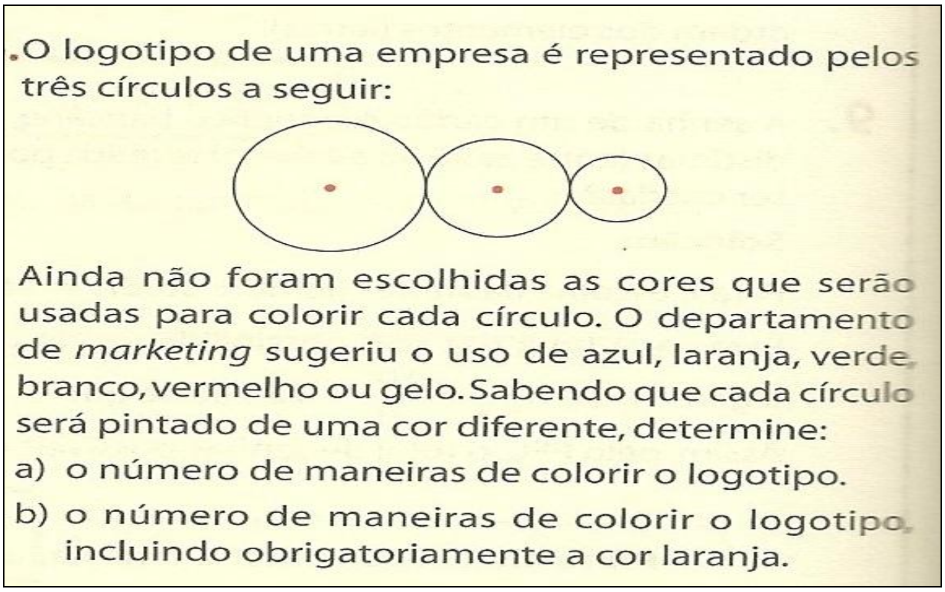
Fonte: LD4, p. 259

Nesse exemplo, apenas é possível identificar características de um problema combinatório condicional no item "b", tendo em vista que no item "a" não é exigida nenhuma condição específica para a disposição de cada membro da família no momento da foto, ou seja, como cada membro da família poderá ficar em qualquer posição, o número total de posições diferentes é calculado pela permutação dos cinco integrantes da família (P_5).

Observando o item "b" cuidadosamente, percebe-se a exigência de uma condição específica para a formação da fotografia, ou seja, em qualquer formação que os membros da família estejam no momento do registro da foto, o casal Giba e Gina deverão permanecer sempre lado a lado, juntos. Portanto, tem-se "*mais de um elemento explicitado* (Giba e Gina) que devem permanecer sempre *com determinada proximidade"* para que a foto seja tirada (BORBA e BRAZ, 2012).

Situação 3. Esse exemplo trata de um problema *combinatório condicional* que foi explorado por meio de um problema de *arranjo*.

Figura 32 - Exemplo de problema combinatório condicional no *arranjo*



O logotipo de uma empresa é representado pelos três círculos a seguir:

Ainda não foram escolhidas as cores que serão usadas para colorir cada círculo. O departamento de *marketing* sugeriu o uso de azul, laranja, verde, branco, vermelho ou gelo. Sabendo que cada círculo será pintado de uma cor diferente, determine:

a) o número de maneiras de colorir o logotipo.

b) o número de maneiras de colorir o logotipo, incluindo obrigatoriamente a cor laranja.

Fonte: LD4, p. 264

Este tipo de problema pode ser classificado conforme a categoria 1 de Borba e Braz (2012), que encontra-se listada no **Quadro 4**. Ao analisa-lo, é necessário perceber, que para contar a quantidade de maneiras de se colorir o logotipo que representa a marca da empresa, situação proposta pelo item “b”, a escolha da cor laranja é obrigatória. Portanto, temos a presença de “*um elemento explicitado fixo”* (cor laranja) e os demais círculos serão coloridos de acordo com o resultado de um *arranjo* entre as cores restantes: azul, verde, branco, vermelho e gelo, duas a duas. Assim, supondo que o primeiro círculo seja colorido com a cor laranja, os demais serão coloridos de 20 maneiras diferentes, pois $A_{5,2} = 20$. E como a cor laranja pode colorir qualquer um dos três círculos, o número de possibilidades total é 3 x 20 = 60.

O item “a” não trata de uma situação que exige uma condição específica, sendo assim, o número total de possibilidades de se colorir o logotipo é calculado pelo resultado de um *arranjo* entre as seis cores disponíveis, duas a duas, ou seja, $A_{6,2}$ = 120 maneiras.

Situação 4. Nesse exemplo de problema combinatório condicional tem-se como base um problema de *combinação*.

Figura 33 - Exemplo de problema combinatório condicional de *combinação*

O vencedor de um concurso de redação de um colégio poderá, como prêmio, escolher cinco livros, entre dez de Machado de Assis, sete de Érico Veríssimo e cinco de Clarice Lispector. De quantos modos distintos o vencedor poderá fazer a escolha de modo que:

a) sejam selecionados dois de Machado de Assis, dois de Érico Veríssimo e um de Clarice Lispector?

b) nenhum livro escolhido seja de Machado de Assis?

c) pelo menos quatro livros de Clarice Lispector sejam escolhidos?

Fonte: LD4, p. 269

Analisando o item "a" tem-se que, para selecionar 5 dentre os 22 livros disponíveis para a premiação, o ganhador somente poderá escolher 2 de Machado de Assis, 2 de Érico Veríssimo e um de Clarisse Lispector, o que torna essa escolha condicional. Sendo assim, o ganhador deverá escolher *"mais de um elemento explicitado fixo"*, classificando este item na categoria **3** de problemas combinatórios condicionais, na classificação de Borba e Braz (2012).

Numericamente esse problema pode ser representado da seguinte maneira: pelo fato de existir três autores diferentes de livros, o ganhador poderá fazer três escolhas sucessivas independentes.

$$C_{10,2} \times C_{7,2} \times C_{5,1} = 4725 \text{ possibilidades}$$

M. Assis E. Veríssimo C. Lispector

Analisando o item "b" percebe-se que é estabelecida uma condição específica para que o ganhador do concurso eleja seu prêmio: a escolha dos 5 livros precisa ser feita de maneira que entre os escolhidos não haja nenhum cujo autor é Machado de Assis. Dessa forma, o vencedor *"terá no máximo determinados elementos não explicitados, com determinada característica* (não ter sido escrito por Machado de

Assis), *fixo"*, caracterizando-o na categoria 6 (BORBA e BRAZ, 2012), descrita no **Quadro 4**.

Numericamente, essa escolha deverá ser feita entre os 7 livros escritos por Érico Veríssimo e os 5 escritos por Clarisse Lispector combinados cinco a cinco, ou seja, $C_{12,5}$. Portanto, o vencedor do concurso terá o total de 792 possibilidades de escolhas de acordo com a condição especificada.

Semelhantemente ao item "a", o item "c" também está inserido na categoria 3 (BORBA e BRAZ, 2012),descrita anteriormente, ou seja, ao escolher os livros a que tem direito, o vencedor deverá preferir pelo menos 4 de autoria de Clarice Lispector. Para essa situação têm-se duas possibilidades:

1ª – dos 5 livros escolhidos, 4 serão de Clarice Lispector e 1 não é, logo a combinação será representada por $C_{5,4}$, totalizando 85 possibilidades;

2ª – os 5 livros podem ser de Clarice Lispector. Sendo assim, tem-se mais 1 opção.

Portanto, respeitando as normas do concurso especificadas neste item "c", o vencedor terá o total de 86 possibilidades de escolha.

A diversidade de contextos que foi utilizado na elaboração dos problemas *combinatórios condicionais* é um ponto positivo nesta coleção. De acordo com Vergnaud (1986), o saber é formado a partir de situações a dominar. Ainda segundo o mesmo autor, as concepções dos alunos são modeladas pelas situações (problemas) com que eles se deparam. Portanto, quanto maior a diversificação de problemas, maior serão as possibilidades de desenvolvimento da aprendizagem em relação raciocínio combinatório.

5.2.4.6 Manual do professor da coleção LD4

O manual desta coleção possui um suplemento pedagógico, comum a todos os três volumes da coleção, e outro que é específico para cada volume. Na parte comum aos três volumes, podem ser encontrados os objetivos divididos por eixo temático. Na parte específica para cada volume, pode ser identificado no volume 2, algumas sugestões direcionadas ao trabalho com a combinatória, orientando os professores a iniciar e estender exaustivamente o trabalho com o Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, pelo fato de os estudantes do ensino médio já haverem tido contato com esse princípio desde o ensino fundamental, mostrando um ponto positivo, pois dessa forma incentiva o aluno a não ficar dependente das fórmulas resolutivas; apresenta ainda uma sugestão de atividade que simula o jogo da *Mega Sena* em que o professor deverá executá-la em grupo, possibilitando que todos os conceitos expostos no estudo da combinatória sejam aplicados, discutidos e formalizados. No entanto, de acordo com a organização dessa coleção, não foram identificadas orientações e/ou discussões mais específicas sobre os invariantes pertencentes à combinatória no manual do professor, como o da ordem dos elementos por exemplo, que determina a diferenciação entre um *arranjo* e uma *combinação*, assim como também não há qualquer menção à especificidade dos problemas combinatórios condicionais.

5.2.5.1 Visão geral da coleção LD5

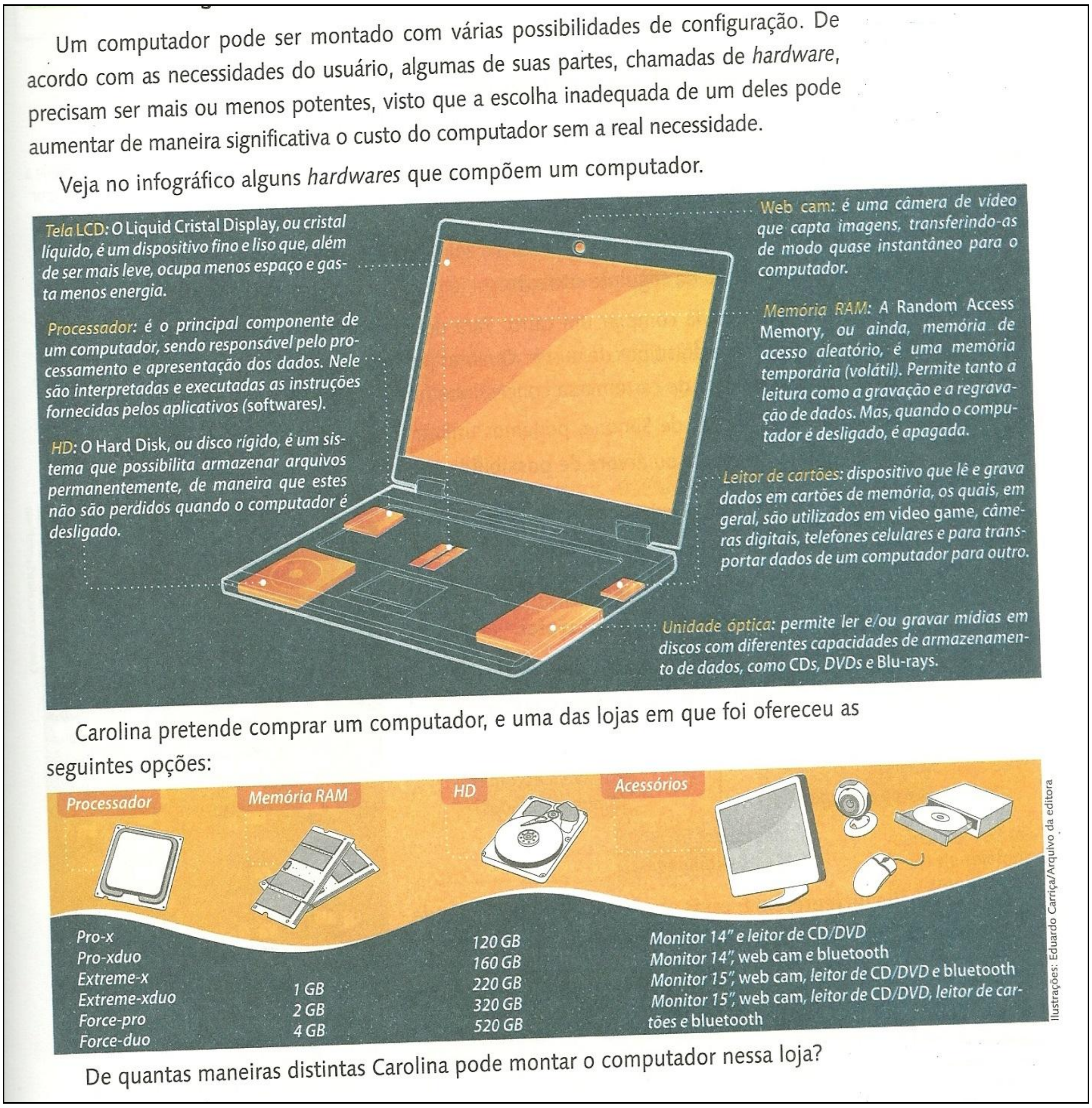
Conforme o Guia de livros didáticos de Matemática para o ensino médio, o que caracteriza essa coleção é a maneira como ela apresenta os conteúdos propostos, pois embora apresente definições, propriedades e regras, ela o faz de modo fragmentado (BRASIL, 2012).

O Guia também destaca as conexões que o autor faz entre a Matemática e outras disciplinas, e também com as práticas sociais atuais. Destaca ainda o uso da calculadora, que é incentivado ao longo dos capítulos, proporcionando, dessa maneira, a resolução das questões por meio de outro recurso didático (BRASIL, 2012).

O capítulo específico sobre combinatória foi apresentado por meio de uma situação contextualizada que frequentemente é discutida entre jovens e adultos: a compra de um *notebook* para uso pessoal e/ou profissional **(Figura 34)**. Nela, o leitor é direcionado ao pensamento sobre as diferentes possibilidades de ser montado e adquirido um *notebook* de acordo com a configuração que mais irá atendê-lo. Para isso, poderá escolher entre 6 tipos de processadores, 3 tipos de memória RAM, 5 tipos de HD e 5 tipos de acessórios. Utilizando-se dessa situação, o autor apresentou a ideia do Princípio Fundamental da Contagem que constitui a base fundamental para resolver problemas de contagem sem ter que descrever todas as possibilidades.

Conforme as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+,2006), trabalhos envolvendo contextos que contém informações sobre computadores, possibilita ganhos expressivos ao aprendizado dos alunos pelo fato de abordarem situações contendo dados reais ao mesmo tempo que proporcionam uma familiarização deles com as máquinas e os *softwares*.

Figura 34 - Contextualização inicial do capítulo sobre combinatória


Um computador pode ser montado com várias possibilidades de configuração. De acordo com as necessidades do usuário, algumas de suas partes, chamadas de *hardware*, precisam ser mais ou menos potentes, visto que a escolha inadequada de um deles pode aumentar de maneira significativa o custo do computador sem a real necessidade.

Veja no infográfico alguns *hardwares* que compõem um computador.

Carolina pretende comprar um computador, e uma das lojas em que foi ofereceu as seguintes opções:

De quantas maneiras distintas Carolina pode montar o computador nessa loja?

Fonte: LD5, p.189

Essa coleção como um todo, traz um número grande de exercícios, se comparado aos demais, como pode ser visto na **Tabela 16** que apresenta o levantamento quantitativo relativo à presente coleção, porém, não são todos contextualizados.

Tabela 16 - Quantitativo de exercícios da coleção LD5 por volume

Coleção Analisada (LD5)	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Total
Vol. 1	1216	163	**1379**
Vol. 2	837	136	**973**
Vol. 3	1089	202	**1291**
Total	**3142**	**501**	**3643**

Dessa quantidade de exercícios descrita, 154 problemas foram classificados como combinatórios. Desse total, 3 estão no volume 1, os demais estão no volume 2 (volume onde é tratado de maneira sistemática a combinatória). Ver **Tabela 17** abaixo.

Tabela 17 - Quantidade de questões por ano escolar da coleção LD5

Identificação da coleção	Número de questões envolvendo o raciocínio combinatório		
	1º Ano	**2º Ano**	**3º Ano**
LD5	3	151	0

Sabo (2007) já havia pontuado questão semelhante a essa. Na ocasião, analisou três das sete coleções, e classificou a concentração dos problemas combinatórios nos livros do 2º ano do ensino médio de “encaixotamento” dos conceitos matemáticos, alegando que dessa forma, os conceitos sobre contagem ficam “encapsulados” somente no volume destinado a esse ano escolar, impossibilitando, segundo ele, a interação entre outros conhecimentos matemáticos.

5.2.5.2 Abordagem sobre a combinatória na coleção LD5

O autor desta coleção cita a combinatória como sendo uma parte da Matemática que envolve métodos de contagem, mas não relaciona nenhum desses métodos inicialmente, deixando para mais adiante a explanação sobre cada um deles, podendo-se inferir que o autor prefere não externar o que entende por combinatória, o que torna esse um ponto negativo da coleção. Por sua vez, o autor anuncia algumas maneiras de representar simbolicamente os problemas combinatórios e chama a atenção principalmente para o Principio Fundamental da Contagem, que segundo ele, com este principio, é possível obter a solução de certos problemas sem a necessidade de se enumerar os elementos envolvidos, porém, não faz nenhuma referência àqueles tipos de problemas em que se faz necessário descrever os agrupamentos e não só contá-los.

No momento em que passa a descrever os tipos de problemas combinatórios (*arranjo*, *permutação* e *combinação*), o faz de forma rápida e resumida, procurando não se deter muito à formalização do conceito, o que pode causar uma deficiência conceitual.

5.2.5.3 Tipos de problemas combinatórios na coleção LD5

Tomando como base a quantidade total de problemas combinatórios descrita anteriormente, (154), percebeu-se a não distribuição homogênea entre os tipos de problemas de *produto cartesiano*, *permutação, arranjo* e *combinação*. Desses, o menor percentual corresponde aos do tipo *produto cartesiano* e o maior percentual corresponde aos do tipo *combinação*, como pode ser verificado na **Tabela 18**.

Tabela 18 - Frequência e percentual com que os problemas combinatórios foram explorados na coleção LD5

Tipo de problema combinatório	Quantidade identificada
Produto cartesiano	9 (5,85%)
Permutação	33 (21,43%)
Arranjo	45 (29,22%)
Combinação	67 (43,50%)
TOTAL	**154 (100%)**

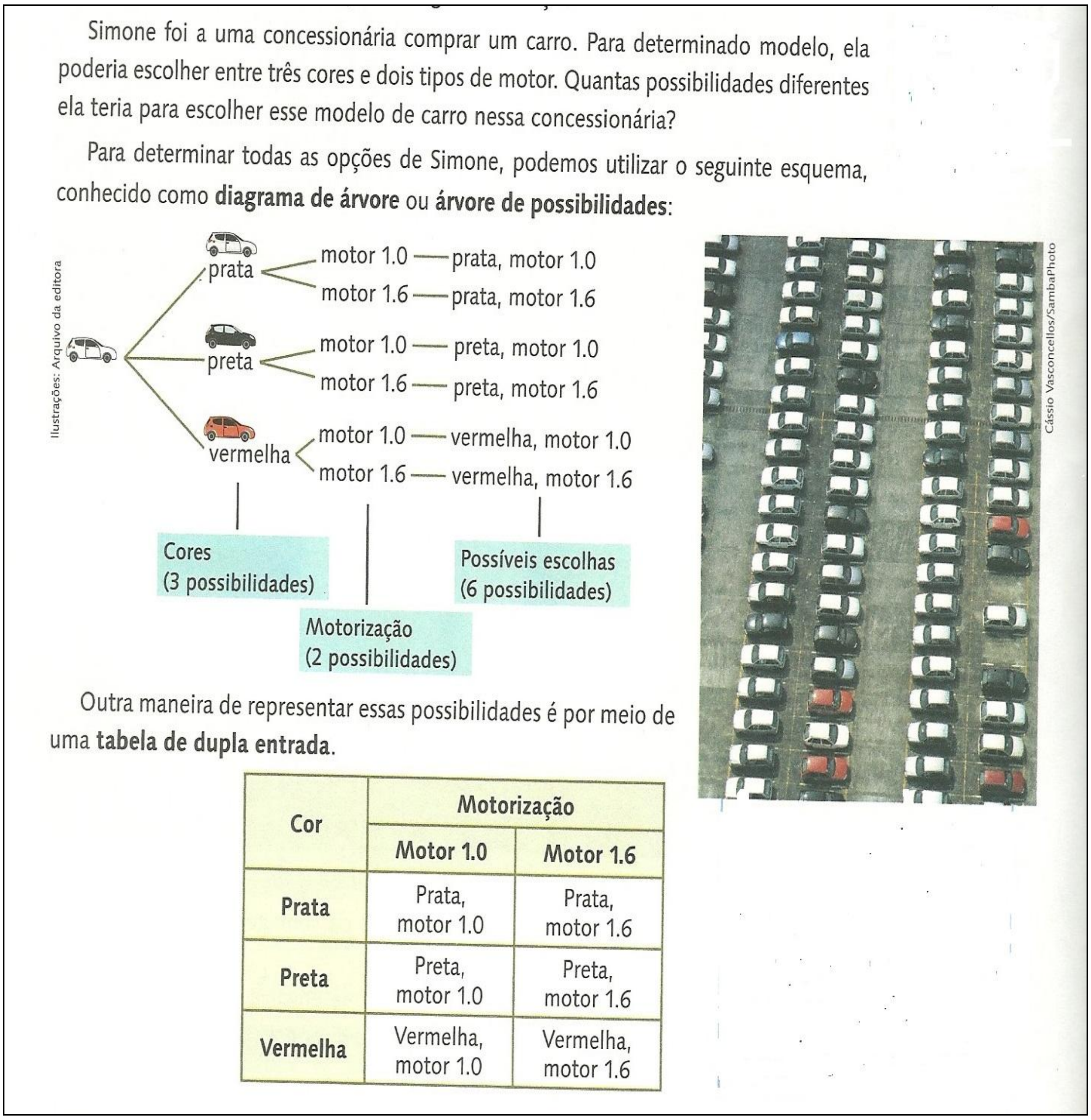
A frequência com que os problemas combinatórios estão sendo explorados, em relação ao total de problemas existentes nesta coleção e nas coleções anteriores analisadas, parece seguir o mesmo padrão. Os problemas do tipo *produto cartesiano* são sempre os menos explorados, talvez pelo pouco grau de dificuldade oferecido para o público do ensino médio, e os problemas de *permutação, arranjo* e *combinação* são os mais explorados pelos autores, pelo fato de oferecerem um grau maior de dificuldade em sua resolução. Em algumas coleções os do tipo *permutação* são mais explorados, em outras são os de *arranjo* e outras vezes, os de *combinação*, variando de acordo com a coleção, mas acreditamos que este fato não tenha uma intenção específica e pedagógica dos autores.

Na nossa concepção, quanto mais diferenciadas forem as situações envolvidas no estudo da combinatória, maior será o desenvolvimento da aprendizagem em relação ao raciocínio combinatório.

5.2.5.4 Formas de representações simbólicas na coleção LD5

Em relação aos diferentes tipos de representações simbólicas conhecidas e utilizadas para resolver os problemas combinatórios como: *Listagem*, *Tabela*, *Árvore de Possibilidades*, *Esquemas*, entre outros, apenas foram explorados dois tipos, explicitamente, nesta coleção: a Árvore de Possibilidades e a Tabela, colocadas na **Figura 35** abaixo.

Figura 35 - Tipos de representações simbólicas explorados na coleção LD5



Simone foi a uma concessionária comprar um carro. Para determinado modelo, ela poderia escolher entre três cores e dois tipos de motor. Quantas possibilidades diferentes ela teria para escolher esse modelo de carro nessa concessionária?

Para determinar todas as opções de Simone, podemos utilizar o seguinte esquema, conhecido como **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades**:

Outra maneira de representar essas possibilidades é por meio de uma **tabela de dupla entrada**.

Cor	Motorização	
	Motor 1.0	**Motor 1.6**
Prata	Prata, motor 1.0	Prata, motor 1.6
Preta	Preta, motor 1.0	Preta, motor 1.6
Vermelha	Vermelha, motor 1.0	Vermelha, motor 1.6

Fonte: LD5, p.190

Quando descrevemos que apenas a *Árvore de Possibilidades* e a *Tabela* foram exploradas explicitamente por esta coleção como representações simbólicas para a resolução dos problemas combinatórios e dos combinatórios condicionais, queríamos chamar a atenção do leitor para o fato de que, na resolução dos problemas postos como modelo nesta coleção, o autor utiliza a *representação simbólica* do Principio Fundamental da Contagem, mas sem reconhecê-la como tal.

Este fato parece não ser isolado nesta coleção, em algumas já descritas anteriormente acontece da mesma forma. Dessa maneira, inferimos que não há consenso em relação ao tratamento dado por alguns autores ao Principio Fundamental da Contagem, o que pode influenciar o trabalho do conceito feito pelos professores que escolheram este ou qualquer um dos livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2012).

5.2.5.5 Problemas combinatórios condicionais na coleção LD5

Esta coleção trabalhou com 30 problemas combinatórios condicionais, o que corresponde a 19,48% do total de problemas classificados como combinatórios, e desses, apenas não foram explorados aqueles referentes ao *produto cartesiano*, os demais estão distribuídos da seguinte forma: 10 (33,34%) são do tipo *permutação*, 6 (20%) são do tipo *arranjo* e 14 (46,66%) do tipo *combinação*, dos quais será discutido um exemplo de cada tipo de problema e se fará uma discussão sobre suas especificidades.

1ª situação

Figura 36 - Exemplo de problema combinatório condicional na *permutação*

Considere os números de seis algarismos distintos, formados pelos algarismos 3, 4, 5, 7, 8 e 9.

a) Quantos números é possível formar?

b) Desses números:

- quantos têm os algarismos 3 e 4 juntos?
- quantos são pares?

Fonte: LD5, p. 187.8

Esta primeira situação apresenta um exemplo de problema combinatório condicional de Permutação. Nele, só é possível perceber o que o torna um problema condicional ao resolver o item "b", pois o item "a" apenas remete a uma contagem mais geral da quantidade de números que podem ser formados com os algarismos fornecidos pelo problema.

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ números}$$

As exigências impostas na contagem dos números procurados no item "b" permite-nos classificá-lo como fazendo parte de uma contagem específica de números, em que existe *"mais de um elemento explicitado* (algarismos 3 e 4) *com* *determinada proximidade* (devem estar juntos)”, correspondendo à categoria 11 da classificação elaborada por Borba e Braz (2012).

Como os números 3 e 4 devem estar juntos, consideramos que eles ocupam apenas uma posição e podem ser escritos em ordem diferente, pode-se resolver da seguinte forma:

$$\underset{P_2}{\overset{3e4}{\_\_\_\_}}\ \underbrace{\_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_}_{P_5} = 2!5! = 240 \text{ números}$$

Para contar os números pares, formados com os algarismos fornecidos, têm-se duas possibilidades, pois para um número ser par, ele precisa terminar em um número que seja par, logo:

$$\underbrace{\_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_}_{P_5}\ \underbrace{\overset{4/8}{\_\_\_\_}}_{\text{2 possibilidades}} = 2P_5 = 240 \text{ números}$$

2ª situação

Nessa segunda situação, que retrata um torneio de voleibol, a escola A sempre estará entre os 3 primeiros lugares, ou seja, sempre irá existir nessa contagem “*um elemento explicitado* (escola A) *e fixo*” – categoria 1 de Borba e Braz (2012). Portanto, existem 3 possibilidades de classificação para essa escola. Para as demais (18), resta serem arranjadas duas a duas.

Figura 37 - Exemplo de problema combinatório condicional no *arranjo*

Em certa cidade, está sendo realizado um torneio de voleibol entre 19 escolas. Sabendo que o pódio é formado apenas pelos três primeiros colocados, e que um deles é da Escola A, de quantas maneiras diferentes pode ser formado o pódio desse campeonato?
918 maneiras

Fonte: LD5, p. 199

$$3 \times A_{18,2} = 918 \text{ maneiras diferentes}$$

3ª situação

A terceira situação trata-se de um problema de combinação condicional. Nela, ao ser especificada a condição de que para formar a comissão composta por 3 profissionais, e um deles *pelo menos* seja capacitado para trabalhar com crianças que possuem necessidades educacionais especiais, permite-nos classificá-lo na categoria 5 descrita por Borba e Braz (2012), que fala da possibilidade de *"ter pelo menos um determinado elemento não explicitado com determinadas características, fixo"* (ser capacitado para trabalhar com crianças que possuem necessidades educacionais especiais).

Figura 38 - Exemplo de problema combinatório condicional na *combinação*.

(Unifesp – SP) O corpo clínico da pediatria de certo hospital é composto por 12 profissionais, dos quais 3 são capacitados para atuação com crianças que apresentam necessidades educacionais especiais. Para fins de assessoria, deverá ser criada uma comissão de 3 profissionais, de tal maneira que 1 deles, **pelo menos**, tenha a capacitação referida.

Quantas comissões distintas podem ser formadas nessas condições?

a) 792 c) 369 e) 108
b) 494 d) 136

Fonte: LD5, p. 187.8

Diante dessa condição imposta, têm-se três situações possíveis de serem formadas as comissões:

1 – 1 profissional com a capacitação requerida e 2 não

$$C_{3,1} \bullet C_{9,2} = 108 \text{ comissões}$$

2 – 2 profissionais com a capacitação requerida e 1 não

$$C_{3,2} \bullet C_{9,1} = 27 \text{ comissões}$$

3 – 3 profissionais com a capacitação requerida

$$C_{3,3} = 1 \text{ comissão}$$

Portanto, pela condição imposta no enunciado da questão, é possível formar

$$108 + 27 + 1 = 136 \text{ comissões}$$

Os problemas combinatórios condicionais desta coleção como vimos anteriormente, representam 19,48% do total de problemas combinatórios identificados nesta obra. É um percentual baixo, o que consideramos um fator preocupante, pois defendemos que os problemas combinatórios condicionais são uma excelente maneira para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Este auxilio, no desenvolvimento do raciocínio combinatório, já foi identificado em pesquisa realizada por Borba e Braz (2012), quando analisaram o desempenho de alunos do 5º, 7º e 9º anos do ensino fundamental. Na pesquisa ficou constatado que os alunos conseguiam estabelecer de forma correta as relações combinatórias, principalmente quando estavam envolvidos *elementos não explicitados*, *elementos fixos em determinada posição* e na determinação *de pelo menos um determinado elemento*. Portanto, acreditamos que as relações trazidas nos problemas combinatórios condicionais, também podem auxiliar os alunos do ensino médio no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

5.2.5.6 Manual do professor da coleção LD5

O manual desenvolvido pelo autor desta coleção, cujo objetivo é dar orientações específicas aos professores, foi apresentado individualmente, por assunto, antes de ser iniciado cada capítulo, representando uma maneira ímpar de chamar a atenção do professor para pontos essenciais de cada conteúdo antes mesmo de iniciá-lo.

No capítulo reservado ao estudo da combinatória, porém, não foram identificadas orientações sobre as propriedades *invariantes* inerentes a este conceito, repetindo os resultados encontrados pelas pesquisadoras Barreto, Amaral e Borba (2007), o que constitui uma perda significativa à assessoria pedagógica pretendida pelo autor.

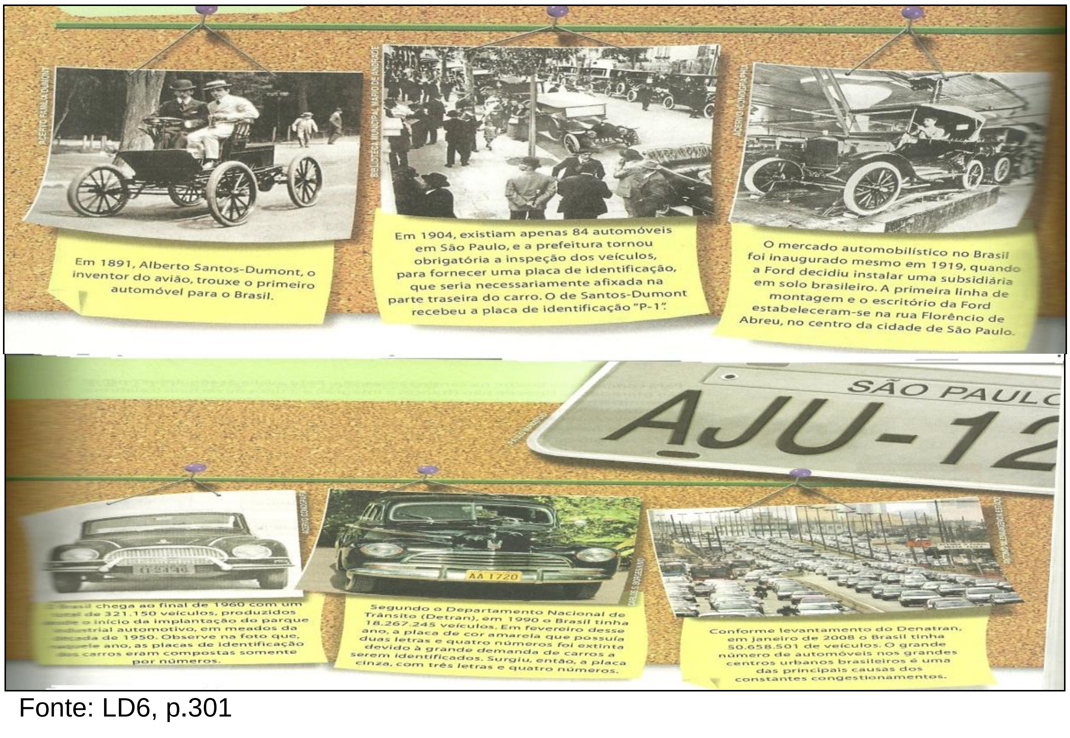
5.2.6.1 Visão geral da coleção LD6

O Guia de Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio (BRASIL, 2012) enfatiza a exploração dos conhecimentos prévios dos alunos por meio da apresentação de situações contextualizadas logo no início de cada capítulo nesta coleção. Segundo o Guia aponta, essa é uma maneira de aproveitar os conhecimentos extraescolares de cada aluno.

Nessa coleção, de acordo com o Guia, o início da explanação de cada conteúdo que será tratado naquele capítulo, se dá por intermédio da apresentação de uma situação que está presente ao cotidiano dos alunos, de forma que o conceito que será tratado mais adiante seja estudado de forma mais significativa.

O capítulo sobre combinatória, por exemplo, foi iniciado com o infográfico que pode ser visto, na Figura 39. Permeando a história desde a entrada do primeiro automóvel no Brasil, em 1891, até o levantamento feito pelo Departamento Nacional de Trânsito (Denatran) na época, 2008. Esta coleção comentou sobre a necessidade de haver uma identificação adequada para cada veículo, pois a quantidade dos automóveis aumentava ano após ano. Como cada automóvel deveria ter uma identificação única, estabeleceu-se o critério da codificação de cada carro por meio de uma combinação única, composta por números, surgindo então a questão que iniciou o estudo da combinatória nesta coleção: quantos carros é possível ser identificado por meio da combinação dos algarismos conhecidos?

Figura 39 - Infográfico com informações que nortearam o estudo da combinatória



Fonte: LD6, p.301

Considerando a totalidade de atividades que foram apresentadas nesta coleção, ver Tabela 19, tem-se que 87,64% é composta por exercícios e/ou situações-problema propostos, cujo objetivo é proporcionar aos alunos o contato com uma grande variedade de situações que possibilitem a construção dos diversos conceitos.

Tabela 19 - Quantitativo de exercícios da coleção LD6 por volume

Coleção Analisada (LD6)	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Total
Vol. 1	206	1353	**1559**
Vol. 2	222	1630	**1852**
Vol. 3	128	962	**1090**
Total	**556**	**3945**	**4501**

A partir do universo que compõe as questões trazidas por esta coleção, e olhando mais especificamente para aquelas que envolvem o raciocínio combinatório, identificou-se o total de 150 questões que exigiam esse conhecimento, como pode ser visto na Tabela 20.

Tabela 20 - Quantidade de questões por ano escolar da coleção LD6

Identificação da coleção	Número de questões envolvendo o raciocínio combinatório		
	1º Ano	2º Ano	3º Ano
LD6	0	150	0

Assim como nas demais coleções vistas até aqui, a concentração de problemas combinatórios está no volume 2 que é destinado ao público do 2º ano do ensino médio, o que, na nossa concepção, entrava a interação da combinatória com outros conteúdos e diminui as possibilidades para os alunos construírem o campo conceitual em que a combinatória está inserida.

5.2.6.2 Abordagem sobre a combinatória na coleção LD6

Nesta coleção a combinatória é tratada como o campo de estudo responsável por permitir o desenvolvimento de métodos eficientes de contagens, porém, não apresenta nenhuma característica desses métodos, ou seja, os invariantes do conceito não são explicitados em nenhum ponto da coleção.

O Princípio Fundamental da Contagem é proposto como conhecimento introdutório para os problemas combinatórios, porém, seu uso não é incentivado na solução dos problemas e nem é encontrado nos processos de resolução das questões respondidas.

Na apresentação dos métodos de contagem (*permutação, arranjo* e *combinação*), não há sequer uma discussão sobre os invariantes da *ordem* ou o da *escolha* que são próprios dos problemas combinatórios e não há também um processo de conceitualização claro a respeito desses tipos de problemas, deixando a desejar nessa etapa primordial do estudo de um conceito.

5.2.6.3 Tipos de problemas combinatórios na coleção LD6

O levantamento efetuado, em relação à quantidade de questões abordadas por tipo de problema combinatório, traz uma visão mais detalhada sobre como aconteceu a distribuição desses problemas na presente coleção.

Tabela 21 - Frequência e percentual com que os problemas combinatórios foram explorados na coleção LD6

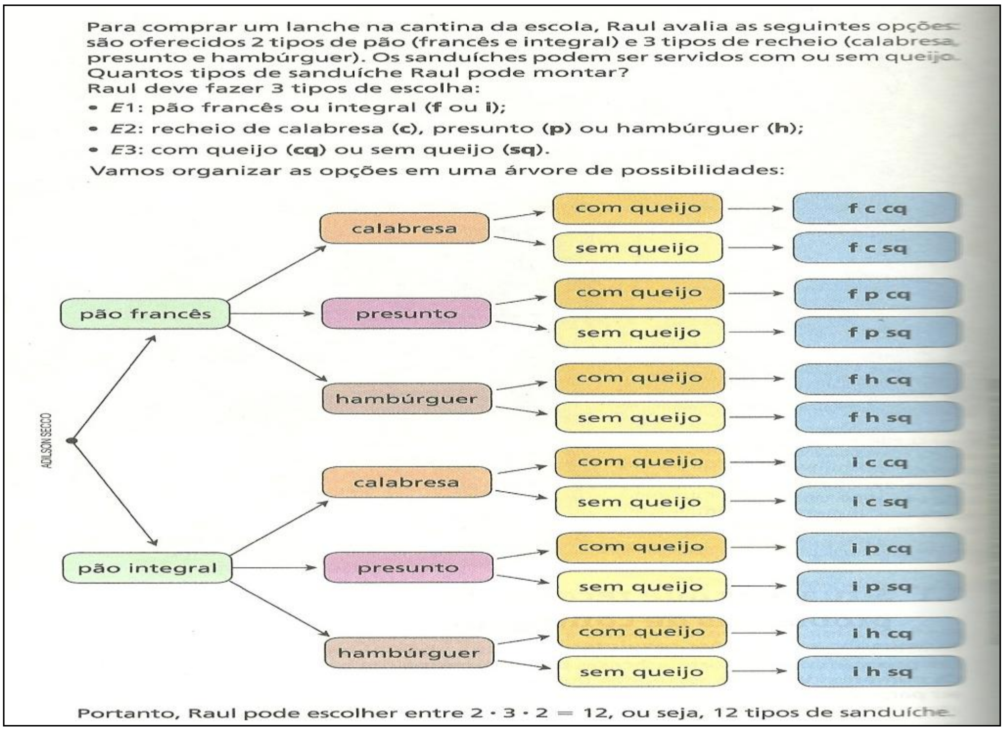
Tipo de problema combinatório	Quantidade identificada
Produto cartesiano	6 (4%)
Permutação	51 (34%)
Arranjo	34 (22,67%)
Combinação	59 (39,33%)
TOTAL	**150 (100%)**

Percebe-se que, apesar de não haver intencionalidade quanto à distribuição dos problemas combinatórios por tipo, aqueles que são classificados como *produto* *cartesiano*, encabeçam a lista dos que são menos explorados, como aconteceu com as demais coleções. Dessa forma, infere-se que o fato de esse tipo de problema combinatório não oferecer um grau de dificuldade esperado para os problemas matemáticos do ensino médio, estão sendo citados apenas a critério de revisão, servindo de introdução para o estudo das demais situações de problemas encontradas na combinatória.

5.2.6.4 Formas de representações simbólicas na coleção LD6

Esta coleção apresenta como modelo de *representação simbólica* para os problemas combinatórios a *Árvore de Possibilidades* e a *Tabela*, ver Figuras 40 e 41, enfatizando que estas duas formas atendem às situações de contagem mais simples, ou seja, aquelas em que o número de possibilidades é pequeno, permitindo que todas as possibilidades sejam expressas, porém não faz nenhuma indicação de outra *representação simbólica*, além das fórmulas, para os problemas com um número maior de possibilidades, e não indica uma representação específica para os problemas combinatórios condicionais.

Figura 40 - Representação simbólica - Árvore de Possibilidades



Fonte: LD6, p.302

Figura 41 - Representação Simbólica - Tabela

Vamos considerar dois lançamentos sucessivos de uma moeda. Que resultados podem ocorrer?

Quando lançamos uma moeda, podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**). Lançando-a uma segunda vez, novamente podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**).

Vamos representar em uma tabela de dupla entrada esses 2 lançamentos:

2º lançamento / 1º lançamento	Cara (c)	Coroa (k)
Cara (c)	cc	ck
Coroa (k)	kc	kk

Logo, nos 2 lançamentos, temos 2 · 2 = 4, isto é, **cc**, **ck**, **kc** ou **kk**.

Fonte: LD6, p.302

Esta coleção apesar de apresentar inicialmente dois tipos de representações simbólicas (*Árvore de possibilidades* e *Tabela*) como modelos possíveis de representar a resolução de problemas combinatórios e problemas combinatórios condicionais, não incentiva seu uso durante os exercícios propostos.

O que se percebe nesta obra é a valorização do uso das fórmulas, diminuindo, na nossa concepção, as possibilidades de discussões sobre os Invariantes do conceito de combinatória e causando certo automatismo na resolução das questões, sobretudo pelo fato de os problemas sempre estarem dispostos em blocos, ou seja, quando se é anunciado o conceito de *permutação*, todos os exercícios seguintes são de Permutação, e assim acontece com os problemas de *arranjo* e com os de *combinação*.

5.2.6.5 Problemas combinatórios condicionais na coleção LD6

Nesta coleção, 25,33% dos problemas combinatórios são condicionais, ou seja, dos 150 problemas combinatórios, 38 são condicionais, e destes, 23 (60,52%) são do tipo *permutação*, 1 (2,64%) é do tipo *arranjo* e 14 (36,84%) são do tipo *combinação*. Será apresentado e discutido um exemplo de cada tipo desses problemas, assim como será apresentada sua classificação tomando como referência a categorização elaborada por Borba e Braz (2012).

1ª situação

A primeira situação é um exemplo da exploração de um problema condicional de *permutação*.

Figura 42 - Exemplo de Problema combinatório condicional na *permutação*

De quantas maneiras diferentes um casal com seus três filhos podem ocupar um banco com cinco lugares, de modo que o casal fique sempre junto?

Fonte: LD6, p.309

A característica principal dos problemas de *permutação* é que todos os elementos do conjunto serão utilizados uma única vez (especificamente para caso como esse que é sem repetição). Aqui, o conjunto é composto por cada membro da família: pai, mãe e três filhos.

Nesta questão especificamente, ao ser imposta a condição para se calcular a quantidade de maneiras que a família poderá ser organizada no banco, de forma que o casal permaneça "sempre junto", refere-se à categoria 11 descrita no Quadro 4 que fala sobre a existência de *"Mais de um elemento explicitado* (pai e mãe) *com determinada proximidade"* (devem sentar sempre juntos). Como o casal não pode ser separado, devem ser considerados como uma única pessoa e, para situações como essa, existem duas construções possíveis:

Construção 1 - ________ _____ _____ _____

Pai/mãe filho filho filho

4 x 3 x 2 x 1 = 24 maneiras

Construção 2 - ________ _____ _____ _____

Mãe/pai filho filho filho

4 x 3 x 2 x 1 = 24 maneiras

Resultando o total de 48 maneiras

Ou

4! x 2! = 48 maneiras

2ª situação

Neste exemplo de problema combinatório condicional, o tipo de problema que está sendo explorado é o *arranjo*.

Figura 43 - Exemplo de problema combinatório condicional de *arranjo*

Numa sala existem 10 cadeiras numeradas de 1 a 10. De quantas formas 2 pessoas podem sentar nessas cadeiras, havendo ao menos uma cadeira entre elas?

Fonte: LD6, p.314

Considerando como sendo um par ordenado de números distintos escolhidos entre 1, 2, ..., 10, cada maneira como as duas pessoas poderão se sentar, pode-se encontrar duas construções possíveis:

$$(2, 6) \begin{cases} \text{A pessoa A se senta na cadeira 2} \\ \text{A pessoa B se senta na cadeira 6} \end{cases}$$

$$(6, 2) \begin{cases} \text{A pessoa A se senta na cadeira 6} \\ \text{A pessoa B se senta na cadeira 2} \end{cases}$$

Sendo assim, tem-se que o número total de pares ordenados possíveis é igual a 90, utilizando o argumento $A_{10,2}$.

Como a condição específica imposta pelo enunciado do problema é que deve existir "*ao menos*" uma cadeira entre as duas pessoas (este problema se enquadra na categoria 5 descrita no Quadro 4 (BORBA e BRAZ, 2012) – *"Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica, fixo*"), é necessário que sejam descartados todos os pares ordenados cujos elementos sejam números consecutivos.

(1, 2) (2, 3) (3, 4) ... (9, 10) – 9 pares ordenados
(2, 1) (3, 2) (4, 3) ... (10, 9) – 9 pares ordenados

Logo, o número de maneiras possíveis em que as duas pessoas poderão sentar-se, de maneira que a condição específica seja atendida, é 90 – 18 = 72 maneiras.

3ª situação

A questão que será discutida nesta 3ª situação trata-se de um problema condicional envolvendo a *combinação*.

Esse problema, apenas apresenta uma condição específica em sua resolução, no item "b", pois, no item "a", para calcular a quantidade de equipes, compostas de 4 alunos, que é possível formar com 20 garotas e 10 garotos sem restrições, basta calcular

$$C_{30,4} = 27.405 \text{ equipes}$$

Figura 44 - Exemplo de problema combinatório condicional na *combinação*

> Os 30 alunos de uma classe devem fazer um trabalho em equipes de 4 pessoas. Há 20 garotas e 10 garotos. Quantas equipes podem ser formadas:
>
> **a)** se não houver restrições quanto ao sexo?
>
> **b)** com 2 garotas e 2 garotos?

Fonte: LD6, p.316

A condição específica apresentada no item "b" possibilita que essa situação seja classificada como sendo da categoria 6 descrita no Quadro 4 (BORBA e BRAZ, 2012), pois para que as equipes sejam formadas com 2 garotas e 2 garotos, o leitor precisa estar atento à condição que em cada equipe deverá *"Ter no máximo determinados elementos não explicitados* (2 garotas e 2 garotos quaisquer), *com determinadas características, fixo"*.

Sendo assim, para a composição da equipe serão necessárias duas etapas:

1ª etapa (E_1) – escolher 2 entre as 20 garotas – $C_{20,2} = 190$

2ª etapa (E_2) – escolher 2 entre os 10 garotos – $C_{10,2} = 45$

Pelo princípio multiplicativo, temos $C_{20,2} \times C_{10,2} = 190 \times 45 = 8550$ equipes.

Os problemas combinatórios condicionais identificados e catalogados nesta coleção foram os mais simples explorados até o momento. Apesar de os problemas serem bastante contextualizados, ao final da leitura do texto trazido por cada questão/situação, o aluno logo identifica de que tipo de problema combinatório se trata. O fato de os problemas combinatórios estarem dispostos em blocos, também contribui para essa identificação sem maiores dificuldades, o que consideramos uma perda para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

5.2.6.6 Manual do professor da coleção LD6

Conforme descrição do autor, contida no manual elaborado para fornecer instruções aos professores, o objetivo do capítulo sobre a combinatória é "compreender e aplicar o Princípio Fundamental da Contagem" e "identificar a natureza dos problemas de contagem".

Entende-se que para compreender o Princípio Fundamental da Contagem é necessário que haja uma discussão, por exemplo, sobre o *invariante* da ordem, que em alguns casos pode gerar novas possibilidades de agrupamentos, o que não aconteceu.

O manual do professor também não apresentou nenhuma informação diferente das que já se encontram na parte do livro que é comum a alunos e professores, e embora apresente questões extras nesse suporte, essas questões nada possuem de diferente das que já foram trabalhadas pelos alunos.

O manual traz sugestões de textos sobre temas educacionais de forma geral, mas sem um planejamento que dê suporte para que o professor possa aproveitá-los.

5.2.7.1 Visão geral da coleção LD7

O Guia de Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio (BRASIL, 2012) destaca a contextualização dos conteúdos matemáticos como sendo um aspecto interessante dessa obra, pelo fato de fazer conexões com as práticas sociais, com a própria Matemática e também com outros saberes.

O Guia afirma que cada capítulo é iniciado com uma discussão envolvendo uma contextualização de forma que estimule o leitor e prepare-o para o estudo do tema que será desenvolvido mais adiante. Para finalizar o estudo do tema proposto em cada capítulo, o autor apresenta uma seção denominada de *Explorando o tema,* que procura apresentar sempre uma aplicação do tema que foi estudado.

De modo semelhante ao LD6, nesta coleção LD7, o capítulo sobre Combinatória, por exemplo, foi iniciado com uma pequena explanação de como ocorreu o processo de codificação das placas dos automóveis brasileiros, codificação essa que transita entre o sistema alfanumérico e o sistema de cores, como pode ser visto na Figura 45.

Figura 45 - Histórico da implantação do sistema alfanumérico e de cores para identificação de placas

Fonte: LD7, p.208-209

Essa coleção é composta por uma quantidade expressiva de atividades, que estão divididas entre exercícios resolvidos e exercícios propostos, estes últimos, representando 86,70% da coleção.

Tabela 22 - Quantitativo de exercícios da coleção LD7 por volume

Coleção Analisada (LD7)	Exercícios resolvidos	Exercícios propostos	Total
Vol. 1	137	942	1079
Vol. 2	126	796	922
Vol. 3	132	837	969
Total	**395**	**2575**	**2970**

Do total de exercícios trazidos nesta coleção (2970), tem-se que 4,88% deles é composto de questões que envolvem o raciocínio combinatório, como pode ser visto, na Tabela 23 abaixo.

Tabela 23 - Quantidade de questões por ano escolar da coleção LD7

Identificação da coleção	Número de questões envolvendo o raciocínio combinatório		
	1º Ano	2º Ano	3º Ano
LD7	0	145	0

A quantidade de problemas combinatórios identificada nesta coleção é razoável, já que os problemas colocados no livro são divididos entre os tantos conteúdos a serem trabalhados no ensino médio.

Apesar de a combinatória ser formalmente trabalhada no 2º ano do ensino médio, seria importante ter problemas deste conteúdo tanto no 1º, como no 3º ano. Consideramos que no 1º ano, a combinatória poderia ser trabalhada de maneira mais elementar e informal, preparando os alunos para o processo de formalização que acontece no 2º ano, e no 3º ano, trazendo uma revisão reflexiva. Dessa forma, ao longo de certo período de tempo, como defende Vergnaud (1986) ao discutir a formação de conceitos, o conceito de combinatória teria maior possibilidade de ser construído.

5.2.7.2 Abordagem sobre a combinatória na coleção LD7

O autor dessa coleção não explicita o que entende sobre combinatória, ou qual concepção defende ou assume.

Em relação ao trabalho com a combinatória, apresenta o Princípio Fundamental da Contagem como um procedimento que atende qualquer tipo de contagem, sobretudo aquelas em que não é necessário listar todas as possibilidades, e deseja-se apenas saber a quantidade total, defesa bastante importante e pertinente, com a qual concordamos e a qual defendemos. De acordo com Pessoa (2009), o Princípio fundamental da Contagem é uma estratégia capaz de resolver qualquer problema combinatório. Entretanto, apesar de anunciar essa possibilidade, o autor não estimula seu uso durante o percurso metodológico que compõe o capítulo sobre combinatória.

A discussão sobre cada tipo de problema combinatório é feita especificando que nos problemas de *arranjo*, por exemplo, a ordem que os elementos assumem no agrupamento é o fator principal que diferencia esse tipo de problema com o tipo *combinação*. Cita a *permutação* como sendo um caso particular dos problemas de *arranjo simples*, ou seja, nesta coleção, os problemas de *permutação* não são considerados como um novo tipo de problema combinatório. Assim, como vemos, há uma preocupação do autor em diferenciar os problemas de *arranjo* dos de *combinação* a partir de um dos invariantes, o da ordem. Isso é feito por alguns dos autores aqui analisados, o que é positivo, entretanto, o invariante da escolha dos elementos, se todos, como no caso da *permutação* ou apenas alguns, como nos casos do *arranjo* e da *combinação*, não são colocados por nenhum dos autores pesquisados. Assim como alguns dos demais autores de livros didáticos desta pesquisa, este também coloca que a *permutação* é um caso particular do *arranjo*.

5.2.7.3 Tipos de problemas combinatórios na coleção LD7

A partir do levantamento quantitativo das questões em relação aos tipos de problemas combinatórios, encontrou-se o seguinte resultado:

Tabela 24 - Frequência e percentual com que os problemas combinatórios foram explorados na coleção LD7

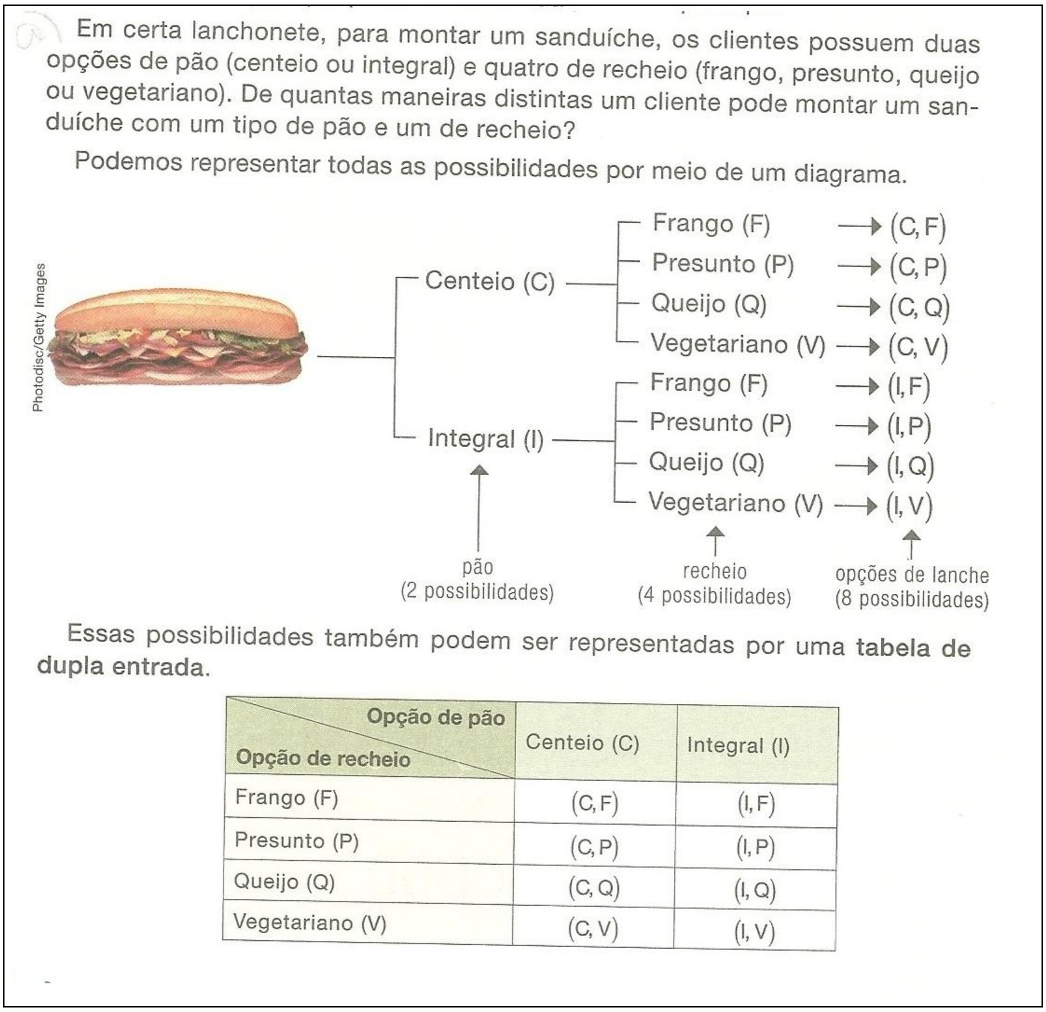
Tipo de problema combinatório	Quantidade identificada
Produto cartesiano	7 (4,83%)
Permutação	34 (23,45%)
Arranjo	48 (33,10%)
Combinação	56 (38,62%)
TOTAL	**145 (100%)**

Percebe-se, de posse desses números e após ter analisado cada uma das coleções do PNLD 2012 (BRASIL, 2012), que no ensino médio, a ênfase dada aos problemas do tipo *produto cartesiano*, é pequena. Comparando esses resultados com os encontrados por Barreto, Amaral e Borba (2007), percebe-se que houve uma inversão no quantitativo por tipo de problema. Na pesquisa citada, os problemas de *produto cartesiano* correspondiam ao percentual de 35,32% e os de *arranjo* correspondiam a 2,98% do total de problemas combinatórios. Como já discutido, esse fato ocorre, possivelmente, porque o *produto cartesiano* é um dos tipos de problemas multiplicativos, o que é tradicionalmente trabalhado nos anos iniciais de escolarização e os demais tipos (*arranjo, combinação* e *permutação*) fazem parte de um trabalho com raciocínio combinatório mais complexo, normalmente trabalhado de forma mais sistematizada no ensino médio, especificamente no 2º ano, como visto na apresentação dos resultados da presente pesquisa.

5.2.7.4 Formas de representações simbólicas na coleção LD7

Os tipos de representações exploradas nesta coleção foram a *Árvore de possibilidades* e a *Tabela* de dupla entrada. A seguir temos o exemplo de uso de árvore de possibilidades na coleção.

Figura 46 - Exemplos de representações simbólicas



Em certa lanchonete, para montar um sanduíche, os clientes possuem duas opções de pão (centeio ou integral) e quatro de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um de recheio?

Podemos representar todas as possibilidades por meio de um diagrama.

Essas possibilidades também podem ser representadas por uma **tabela de dupla entrada**.

Opção de pão / Opção de recheio	Centeio (C)	Integral (I)
Frango (F)	(C, F)	(I, F)
Presunto (P)	(C, P)	(I, P)
Queijo (Q)	(C, Q)	(I, Q)
Vegetariano (V)	(C, V)	(I, V)

Fonte: LD7, p.210

Semelhantemente ao que foi descrito na análise da coleção anterior, percebe-se, nesta obra, a valorização das fórmulas, diminuindo, na nossa concepção, as possibilidades de discussões sobre os Invariantes do conceito de combinatória e causando certa mecanização na resolução das questões, sobretudo pelo fato de os problemas estarem dispostos em blocos. Porém, a *Árvore de possibilidades* é apresentada como uma *representação simbólica* possível de ser utilizada na resolução de todos os tipos de problemas combinatórios, inclusive sua utilização é incentivada, além da utilização das fórmulas resolutivas.

5.2.7.5 Problemas combinatórios condicionais na coleção LD7

Nesta coleção, 13,10% dos problemas combinatórios são condicionais, ou seja, dos 145 problemas combinatórios, 19 são Condicionais, e destes, 7 (36,84%)

são do tipo *permutação*, 5 (26,32%) são do tipo *arranjo* e 7 (36,84%) são do tipo *combinação*, dos quais, será apresentado um exemplo de cada de problema combinatório condicional, sua respectiva classificação conforme as categorias descritas no Quadro 4, e pelo menos uma possível resolução.

Como nesta coleção nenhum dos problemas do tipo *produto cartesiano* é um problema condicional, este tipo está ausente dessa discussão.

1ª situação

O tipo de problema combinatório condicional que será discutido nessa primeira situação é a *permutação*.

A construção de anagramas com ou sem sentido, como está expressa pela questão que segue, é bastante comum de ser encontrada nos *livros didáticos* do ensino médio. Porém, o que torna esta questão um problema combinatório condicional, são as exigências expressas nos itens “b”, “c” e “d” que conduzirão o aluno a fazer escolhas bem mais específicas.

Figura 47 - Exemplo de problema combinatório condicional na *permutação*

Considerando os anagramas da palavra BRASIL, determine:

a) o número total de anagramas

b) quantos começam com B

c) quantos terminam com L

d) quantos começam com B e terminam com L

Fonte: LD7, p.222

O item “a” não tem a especificidade de problema condicional pelo fato de não oferecer nenhuma condição específica para se obter a solução, ou seja, para calcular o número de anagramas pedido por este item, basta que o resolvedor proceda da seguinte maneira (existem outras possíveis).

__6__x__5__x__4__x__3__x__2__x__1__ = 720

Logo, há 720 anagramas

O item “b”, ao exigir a contagem dos anagramas, percebe-se que não são todos eles que estarão presentes, mas sim, aqueles que começam com a letra **B**, configurando-o, dessa maneira, como um problema combinatório condicional pelo fato de, na construção dos anagramas, existir *“Um elemento explicitado fixo* (a letra B) *em determinada posição”* (inicio do anagrama). Categoria 1 descrita no Quadro 4 por Borba e Braz (2012).

Portanto, fixando a letra **B** no início de cada anagrama, as outras 5 letras deverão permutar entre si, já que na Permutação todos os elementos devem ser utilizados. Sendo assim,

$$\mathbf{B}\ \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{P_5} = 120 \text{ anagramas}$$

A especificação do item “c” que o tornou um problema combinatório condicional é semelhante à do item “b”, este item também está classificado na categoria 1 de problemas condicionais (BORBA e BRAZ, 2012). A única diferença, é que a letra que deverá constar em todos os anagramas é a letra **L**, e ela deverá estar sempre no final de cada anagrama, portanto,

$$\underbrace{\_\_5\_\_ \times \_4\_\_\_ \times \_\_3\_\_ \times \_\_2\_\_ \times \_\_1\_\_}_{P_5}\ \mathbf{L} = 120 \text{ anagramas}$$

Seria mais interessante e desafiador se a proposta do item “c” fosse uma condição diferente da do item “b”, pois assim o alunos poderia se sentir cognitivamente mais estimulado, já que precisaria pensar de uma maneira diferente da que pensou na questão anterior.

O item “d” traz restrições ainda maiores. Nele, os anagramas que deverão ser contados, são os iniciados pela letra **B** e terminados pela letra **L**, ou seja, nessa contagem existe a presença de *“Mais de um elemento explicitado* (as letras **B** e **L**) *em determinadas posições”* (**B** no início e **L** no final). A categoria em que este problema está inserido é categoria 9, descrita no Quadro 4, com a classificação de Borba e Braz (2012)..

$$\mathbf{B}\ \underbrace{\_\_\_\_ x \_\_\_\_ x \_\_\_\_ x \_\_\_\_}_{P_4}\ \mathbf{L} = 24 \text{ anagramas}$$

2ª situação

A situação que segue trata-se de uma questão do tipo *arranjo* condicional. Nela, o item "a" não será discutido por se tratar de uma contagem que possui repetição e que não é objeto deste estudo; o item "b" também não será discutido pelo fato de não fazer exigências para que se proceda com a contagem da quantidade de números pedida.

Figura 48 - Exemplo de problema combinatório condicional no *arranjo*

A partir dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 8, calcule a quantidade de números:

a) com 4 algarismos que podem ser formados

b) com 4 algarismos distintos que podem ser formados

c) múltiplos de 4 com 4 algarismos distintos que podem ser formados

d) ímpares de 4 algarismos distintos que podem ser formados

Fonte: LD7, p.220

O item "c", pode ser classificado na categoria 4 (BORBA e BRAZ, 2012), que afirma existir *"Mais de um elemento não explicitado* (os dois últimos algarismos), *com determinada característica* (valor absoluto ser múltiplo de 4), *fixo*".

Para ser múltiplo de 4, o número formado pelos dois últimos algarismos (unidade e dezena), precisa ser divisível por 4. Diante dessas condições, apenas os números que terminam em 12, 24, 28, 32, 48 e 84 podem ocupar essas posições, ou seja, existem 6 possibilidades.

Como para as ordens da centena e da unidade de milhar restam 3 algarismos, a quantidade desses números procurados é dada por:

$$\underbrace{\_\_\_\_\ \_\_\_\_}_{A_{3,2}}\ \overset{\overbrace{(12,\ 24,\ 28,\ 32,\ 48 \text{ e } 84)}^{}}{\underset{}{\text{6 possibilidades}}}$$

Ou

6 x $A_{3,2}$ = 36 números

Nesta situação ocorre, assim como na anterior, uma repetição de condição nos itens da questão. O item “d” também pode ser classificado na categoria 4, a mesma do item anterior, pois nele também se percebe que para efetuar a contagem dos número ímpares de 4 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, e 8, é indispensável notar que um número somente é considerado ímpar, quando termina em um número ímpar, ou seja, na contagem desses números, tem-se *“Mais de um elemento não explicitado* (um número ímpar), *com determinada característica, fixo”* que precisa ocupar a posição do algarismo das unidades. Logo, o algarismo das unidades, nesta situação, só poderá ser 1 ou 3, e o algarismo das dezenas, centenas e unidades de milhar devem ser arranjados de qualquer maneira. Portanto, com essas condições, podem ser formados:

$$\underbrace{\_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_}_{A_{3,2}}\ \underline{\ \mathbf{1}\ } = 24 \text{ números}$$

Repetindo o mesmo processo com o algarismo 3 na posição das unidades também encontram-se 24 números, portanto, é possível formar 48 números com as especificações exigidas.

3ª situação

A terceira situação trata de um problema do tipo combinação condicional, na qual cada grupo é formado por uma combinação de 5 alunos.

Figura 49 - Exemplo de problema combinatório condicional na *combinação*

Uma sala de aula tem 18 meninas e 14 meninos. De quantas maneiras o professor pode formar grupos de 5 alunos, sendo 3 meninas e 2 meninos?

Fonte: LD7, p.225

A categoria em que este problema está inserido é a 6, descrita no Quadro 4 (BORBA e BRAZ, 2012). Para a formação dos grupos *“Tem-se no máximo determinados elementos não explicitados* (qual é o menino ou qual é a menina que deverão ser escolhidos), *com determinada característica* (ser menino ou ser menina), fixo”.

Portanto, o número de maneiras que o professor pode formar esses grupos é dado por:

$$\underbrace{\_\_\_\_ \; \_\_\_\_ \; \_\_\_\_}_{C_{18,3}} \; \underbrace{\_\_\_\_ \; \_\_\_\_}_{C_{14,2}} = 74\,256 \text{ maneiras}$$

De todos os percentuais que representam as quantidades de problemas *combinatórios condicionais* em cada obra, o desta coleção (13,10%), é o mais baixo de todos, principalmente pelo fato de que a quantidade total de problemas combinatórios desta coleção (145) está no mesmo nível das quantidades identificadas nas demais coleções analisadas.

A baixa frequência na exploração de problemas combinatórios mais bem elaborados, como é o caso dos problemas condicionais, a nosso ver, induz a uma mecanização intelectual, ou seja, os alunos passam a não utilizar todos os conhecimentos que já possuem, causando uma barreira na construção do conceito de combinatória.

5.2.7.6 Manual do professor da coleção LD7

O manual do professor desta coleção inicia-se com a descrição de cada uma das seções que foram apresentadas nos volumes que a compõe, ou seja, descreve a finalidade para o qual foram criadas, e quais objetivos eram pretendidos alcançar. Esta parte é comum aos três volumes.

Na parte específica a cada volume, discute-se sobre os objetivos que a coleção deseja atingir, por tema estudado, e sugere algumas discussões para que o professor possa explorar em sua aula, de acordo com o mesmo tema.

Na parte específica sobre a combinatória, encontram-se algumas sugestões de contextualização que podem ser exploradas sobre o tema, porém, o manual não traz nenhuma situação que chame a atenção do professor para as especificidades inerentes aos problemas combinatórios, como, por exemplo, a ordem em que os elementos são dispostos nos agrupamentos, pois poderão originar outro agrupamento, no caso dos problemas de *arranjo*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da análise das atividades e conteúdos envolvidos no estudo da combinatória contidos nos *livros didáticos* de matemática, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2012), destinados ao público do ensino médio, procurou-se identificar a frequência e a forma com que a manipulação de algumas relações próprias de problemas combinatórios está sendo explorada.

Nossa questão inicial foi a seguinte: os *livros didáticos* de matemática, destinados ao público do ensino médio, estão trabalhando com problemas combinatórios condicionais? Caso a resposta seja positiva, de que forma estão fazendo isso, ou seja, de que forma acontece a abordagem sobre esses tipos de problemas? Para ir em busca das respostas, fizemos a contagem de todos os problemas, referentes a todos os conteúdos, presentes nos livros e depois focamos nos combinatórios e gerais para, em seguida, focarmos nos combinatórios condicionais, para que pudéssemos fazer uma relação entre estes e aqueles.

Os PCN do ensino médio (BRASIL, 2000), levando em consideração que o ensino médio é a última etapa da educação básica, e que seu público alvo já apresenta maior maturidade, defende que seus objetivos educacionais devem ser mais ousados, as informações devem trazer uma maior riqueza de detalhes, de forma que favoreçam o desenvolvimento do aprendiz. É nessa última etapa, segundo os PCN, que deve haver uma maior articulação entre os saberes de forma que propicie uma ação mais integradora na formação pessoal do discente. E é justamente nessa perspectiva que a Matemática deve estar inserida no âmbito do ensino médio. Habilidades como selecionar, descrever e analisar informações, tomar decisões, realizar inferências com base numa amostra e por sua vez aplicar as ideias de probabilidade e combinatória, exigirão procedimentos próprios dos saberes envolvidos na Matemática. Nesta pesquisa, encontramos resultados que nos mostram que nos *livros didáticos* de matemática do ensino médio, a articulação entre os diversos saberes adquiridos durante toda a etapa estudantil dos alunos é mais efetiva. Porém, no que se refere ao processo de conceitualização, especificamente no estudo sobre a combinatória, percebemos que algumas coleções das que analisamos, tratam dessa fase primordial para a aprendizagem com certo grau de superficialidade.

A explicação sobre o que é a combinatória, como pudemos analisar, por vezes não foi abordado adequadamente. Em outras vezes, percebemos sua ausência quase que total.

Em relação aos Invariantes próprios do conceito da combinatória (*ordem* e *escolha*) percebemos pouca discussão. Em quatro, das sete coleções, percebemos que os autores fazem uma discussão sobre o *Invariante* da *ordem*, mesmo que de forma sucinta.

Em relação aos Invariantes próprios dos problemas combinatórios condicionais (*ordem, escolha, explicitação* ou não de elementos, *posicionamento* e/ou *proximidade*), percebemos que quando a situação envolve um problema de *combinação*, categorias que consideram a *ordem* dos elementos, nunca podem ser utilizadas, pelo fato de que na *combinação*, a *ordem* não gera novas possibilidades de formação de agrupamentos.

O mesmo pôde ser observado por nós nos problemas de *permutação*. Assim como identificado por Borba e Braz (2012), neste tipo de problemas combinatórios condicionais, categorias que determinassem o *número máximo* ou *mínimo de elementos* não são aplicadas a este tipo de problema combinatório condicional pelo fato de que nos problemas de *permutação*, todos os elementos são sempre utilizados.

A frequência com que os problemas combinatórios condicionais foram explorados variou bastante entre as coleções. Porém, dentre os problemas identificados como condicionais, alguns se repetiam bastante na mesma obra, como é o caso dos problemas de *permutação* em que a criação de anagramas a partir de uma determinada palavra era solicitada, impossibilitando os alunos em lidar com contextos diferenciados que lhes permitam atribuir um sentido mais amplo e aprofundado àquele conceito. A esse respeito, defendemos, assim como Vergnaud (1986), que uma dada situação não tem a possibilidade de abordar todas as propriedades envolvidas em um conceito, e se um dos objetivos do ensino deve ser o de permitir o desenvolvimento de habilidades e competências que possibilitem aos alunos atribuírem um significado àquilo que está sendo ensinado, é necessário utilizar um conjunto mais diversificado de tipos de problemas e de contextos, pois as dificuldades dos alunos, a maioria das vezes, não estão em um único conceito e sim em vários conceitos. Assim, acrescentando ao que defende Vergnaud (1986), acreditamos que não basta apenas usar um conjunto diversificado de tipos de problemas para favorecer o desenvolvimento de habilidades, é preciso mudar a forma como estes problemas são explorados.

Em todas as coleções analisadas nesta pesquisa, os problemas estão divididos por uma espécie de *“bloco de problemas”,* ou seja, quando a *permutação* é trabalhada, todos os problemas que virão na sequência são do tipo *permutação*; quando o *arranjo* é definido, todos os problemas posteriores à definição serão de *arranjo*, o mesmo acontecendo com os do tipo *combinação*, o que não ajuda no desenvolvimento da compreensão do conceito pelo aluno, já que os problemas propostos, não necessariamente se constituem como desafios para eles, pelo fato de saberem de antemão que fórmula aplicar, pois o tipo de problema está explícito. Por isso, defendemos o trabalho com os problemas combinatórios condicionais, pois estes de fato se constituem como desafio, pois a solução não está explícita logo de início, já que uma única fórmula não ajudará a resolver as especificidades solicitadas pelo problema.

Na tentativa de apresentar uma forma diferenciada para essa exposição e trabalho com os problemas combinatórios, sugerimos trabalhar os tipos de problemas combinatórios todos de uma só vez, exemplificando e comentando sobre os detalhes que os diferenciam, como por exemplo, o *Invariante* da *ordem* em que os elementos estão dispostos, explicando porque que na *permutação* e no *arranjo* a ordem gera novas possibilidades e na *combinação* não.

Outra forma de contribuir com a construção de conhecimentos pelos estudantes seria a exploração mais frequente de um número maior de estratégias de resolução para os problemas apresentados. Quanto a este fato, apenas em uma das sete coleções analisadas foi apresentado um conjunto mais diversificado de estratégias que são usualmente mais eficazes na resolução de problemas combinatórios, mas que não foi utilizado pelos próprios autores na resolução de questões modelo, o que nos permite inferir que houve uma falta de cuidado com a importância desse aspecto para a formação do aluno e que pode ter sido apresentado para cumprir as exigências dos documentos oficiais, já que aparece apenas na introdução do assunto e não mais no decorrer das resoluções e apresentações de outras situações.

A única *representação simbólica* presente na descrição feita por todas as coleções como estratégia de resolução para os problemas combinatórios como um todo foi a *Árvore de possibilidades*, que na nossa concepção não dá conta de resolver todos os tipos de problemas combinatórios. Mesmo assim, achamos pertinente o conhecimento sobre esta forma de representação, pois ela possibilita a visualização de todas as etapas de escolha que podemos tomar na composição de determinados agrupamentos. Assim, ajuda o aluno aperceber as especificidades do problema proposto. Defendemos que é importante a exploração de um número maior de representações simbólicas, pois, conforme Vergnaud (1996, p.184), “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas”.

No que se refere ao manual do professor, identificamos duas situações diferentes. Na primeira situação, algumas coleções não disponibilizaram orientações/sugestões que pudessem viabilizar um trabalho mais adequado em relação aos problemas combinatórios e nem com os combinatórios condicionais. Não trouxeram discussões sobre os invariantes contidos no conceito de combinatória, nem sobre seus diferentes significados. Na segunda situação encontrada, foi possível identificarmos orientações do autor direcionadas a significados contidos na combinatória, como o de *arranjo* e o de *permutação*. Nesta situação, o autor traz também uma orientação para os professores mostrando a importância que esse profissional deve dar à propriedade da *ordem*, que é uma das propriedades invariantes do conceito relacionado à combinatória e que é causa de muitas dúvidas dos alunos, e o que diferencia os tipos de problemas.

Reconhecemos a eficácia do trabalho que o Programa nacional do livro didático vem realizando ao longo dos anos, sobretudo nas exigências em busca da melhoria do manual confeccionado para consulta permanente do professor, mas sabemos que ainda falta um longo caminho a ser trilhado em relação ao oferecimento de um material didático sem falhas.

A interferência do professor na transposição do conhecimento científico para o conhecimento escolar será sempre insubstituível. Sendo assim, cabe ao professor, o dever e o compromisso, de suprir toda e qualquer falta de informação que por ventura exista nos livros didáticos.

Sugerimos que em pesquisas futuras sejam analisadas a relação existente entre os invariantes do conceito contidos nos problemas combinatórios condicionais e quais os benefícios estes invariantes oferecem para um aprendizado mais eficaz de alunos do ensino médio, uma vez que já sabemos que estes problemas estão cada vez mais presentes no estudo da combinatória.

Sugerimos também que professores sejam pesquisados em relação ao trabalho com problemas combinatórios condicionais, quais estratégias de ensino utilizam e como diferenciam os combinatórios mais gerais dos condicionais.

Estudos com alunos de ensino médio e de ensino superior, tanto de cursos de ciências exatas quanto de cursos de ciências humanas ou de saúde. Como estes alunos resolvem problemas combinatórios condicionais e quais estratégias mais utilizam? Como os professores destes alunos tratam ou trataram o estudo com estes tipos específicos de problemas na educação básica ou no ensino superior?

São ideias que podem ser desenvolvidas para ampliação e aprofundamento de estudos que se relacionam aos problemas combinatórios condicionais.

REFERÊNCIAS

BARRETO, F.; AMARAL, F.; BORBA, R. **Como o Raciocínio Combinatório tem sido Apresentado em Livros Didáticos de séries Iniciais**. Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia. Recife: UFPE, 2007, v.2, p.1-21.

BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio**. Madrid: Editorial Síntesis, S.A., 1996.

BELFORT, E. Reflexões sobre o papel do livro texto em matemática: um carcereiro ou um bom companheiro?. In: **Anais**... do XI Congresso Inter-Americano de Educação Matemática. Blumenau: FURB-CIAEM, 2003.

BORBA, R.; Araújo, A.; Braz, F. A Compreensão por alunos do Ensino Médio de Problemas Combinatórios Condicionais. **Anais...** XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática – Curitiba, 2013.

BORBA, R.; BRAZ, F. O que é necessário para se compreender problemas combinatórios condicionais. **Anais...** III SIPEMAT - Simpósio Internacional de Pesquisas em Educação Matemática **–** Fortaleza, 2012.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. 3º e 4º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, Brasília, 1998.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, vol. 2, Brasília: SE/MEC. 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF, **Guia do livro Didático: Matemática.** Brasília, 2012.

BRASIL. FNDE. **Edital de convocação para inscrição no processo de avaliação e Seleção de coleções didáticas para o programa nacional do livro Didático - pnld 2011**. Disponível em <ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/edital_pnld.pdf>. Acessado em 19/02/2014.

BRASIL. FNDE. Livro didático. **Histórico**. Disponível em <http://www.fnde.gov.br/livro-didático-historico>, acessado em 22/01/14.

CARVALHO, J. Análise das Habilidades em Problemas de Combinatória nos livros Didáticos dos anos Finais do Ensino Fundamental. In: **Anais...** X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador- Bahia, 2010.

CARVALHO. J. B.;, LIMA, P. F. **Matemática**, v. 17, Brasília. 2010.

CHOPPIN, A. **Les manuels scolaires. Histoire et actualité**. Paris: Hachette Éducation, 1992.

COLLETE, J. **História de las Matemáticas**. v. I.y II. México: Siglo XXI, 1985.

D'AMBRÓSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis/ RJ: Vozes, 2008.

DANTE, L.R. Matemática: contexto e aplicações. vol.1, 1. ed. – São Paulo: Ática, 2010.

_______. **Matemática**: contexto e aplicações. vol.2, 1. ed. – São Paulo: Ática, 2010.

_______. **Matemática**: contexto e aplicações. vol.3, 1. ed. – São Paulo: Ática, 2010.

DANTE,L. **Livro didático de matemática**: Uso ou abuso? Em Aberto, Brasília, ano 16, nº 69, jan./mar. 1996.

GÉRARD, F. M.; ROEGIERS, X. **Conceber e avaliar manuais escolares**. Porto: Porto Editora, 1998.

HAZZAN, S. **Fundamentos da matemática elementar**, 5: combinatória, probabilidade. – 7. Ed. – São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G.; ...[et al.]. **Matemática:** ciência e aplicações. vol.1, 6. ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

_______. **Matemática**: ciência e aplicações. vol.2, 6. ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

_______. **Matemática**: ciência e aplicações. vol.3, 6. ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

JANUÁRIO, G. **Análise de conteúdos de livros didáticos:** contribuições à prática do professor de matemática. Instituto federal de educação, ciência e tecnologia. São Paulo, 2010.

JULIANE, M.B. **Conexões com a Matemática**. vol.1, 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2010.

_______. **Conexões com a Matemática**. vol.2, 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2010.

_______. **Conexões com a Matemática**. vol.3, 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2010.

LIMA, I; AMORIM, N; PESSOA, C. **Aulas de combinatória na educação de jovens e adultos: como ocorrem na prática?** Caderno de trabalhos de conclusão de curso de Pedagogia. Recife: UFPE, 2013, v.1, p. 1-27.

MAIA, L. A. **Teoria dos Campos Conceituais:** Um Novo Olhar para a Formação do Professor. In: Artigos sobre Educação Matemática, Boletim GEPEM, nº 36, Rio de Janeiro, 2000.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Revista Ciência e Educação**, Bauru, v.20, n.2, p.517-533, 2014.

MANDARINO, M. C. F.; BELFORT, E. Como é escolhido o livro didático de matemática dos primeiros anos do ensino fundamental? In: **Anais**... VIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: UFPE, 2004.

MARTINS, G; BORBA, R. Análise dos contextos Apresentados em Problemas Multiplicativos nos Livros Didáticos de Alfabetização de Adultos. In: **Anais...** III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Fortaleza, 2012.

MATOS FILHO, M.; PESSOA, C. Como os problemas de Raciocínio Combinatório estão sendo abordados nos Livros Didáticos de Matemática das Séries Iniciais do Ensino Fundamental? In: **Anais...** III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia- São Paulo, 2006.

MERAYO, F. **Matemática Discreta**. Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A.,2001.

MORGADO, A., PITOMBEIRA DE CARVALHO, J., PINTO DE CARVALHO, P. e FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. -9. ed.- Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MORGADO, J. C. **Manuais Escolares – Contributo para uma análise.** Porto: Porto Editora, 2004.

PAIS, M. Luiz Carlos. **Didática da Matemática;** uma análise da influência francesa/ Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAIVA, M. **Matemática.** Paiva/ Manoel Paiva. Vol 1. – 1.ed. – São Paulo : Moderna, 2009.

_______. **Matemática.** Paiva/ Manoel Paiva. Vol 2. – 1.ed. – São Paulo : Moderna, 2009.

_______. **Matemática.** Paiva/ Manoel Paiva. Vol 3. – 1.ed. – São Paulo : Moderna, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio. **Anais...** IV SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasília, 2009.

PFROMM NETO, S. O livro na Educação, por S.P.Neto, Claudio Zaki Dib e Nelson Rosamilha. Rio de Janeiro, Primor/INL, 1974.

PINHEIRO, C; SANTOS, I; SÁ, P. Ensino de Análise Combinatória: o que ficou? **Anais...** I SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Recife, 2006.

RIBEIRO, J. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. vol.1, 1. ed.- São Paulo: Scipione, 2010.

_______. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. vol.2, 1. ed.- São Paulo: Scipione, 2010.

_______. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. vol.3, 1. ed.- São Paulo: Scipione, 2010.

ROSA,C; RIBAS, L; BARAZZUTTI,M. **Análise de livros didáticos**. III EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática, Agosto, 2012.

SABO, R. Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio: um estudo dos conteúdos referentes à combinatória. Santo André-SP, 2007.

SILVA,P.; PESSOA,C. **Problemas Combinatórios Condicionais**: como são explorados nos Livros Didáticos do Ensino Médio ? Anais... XVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – Vitória-ES, 2013.

SMOLE, K.; DINIZ, M. I. **Matemática**: Ensino Médio: volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

_______. **Matemática**: Ensino Médio: volume 2, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

_______. **Matemática**: Ensino Médio: volume 3, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, J. Novo olhar matemática. vol. 1, 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

_______. **Novo olhar matemática**. vol. 2, 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

_______. **Novo olhar matemática**. vol. 3, 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

TORI, R. **Educação sem distância**: as tecnologias interativas na redução de distâncias em ensino e aprendizagem / Romero Tori. São Paulo: Editora Senac, 2010.

VALENTE, W. Osvaldo Sangiorgi e o movimento da matemática moderna no Brasil. In: **Revista Diálogo Educativo**. V.8.n.25. Curitiba: 2008.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didático das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise psicológica**, 1982, p. 31-41.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics:** Concepts and processes. New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas multiplicativas. **Análise psicológica**, 1, 1986, p. 75-90.

VERGNAUD, G. La théorie dês champs conceptuels. Recherches em Didactiques dês Mathématiques, vol.10,23, p.133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gerard. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.