



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

JOSUÉ FERREIRA DOS SANTOS FILHO

INVESTIGANDO COMO PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS JULGAM PROPOSTAS
DE ENSINO PARA O TRABALHO COM OS NÚMEROS RACIONAIS

Recife

2015



JOSUÉ FERREIRA DOS SANTOS FILHO

**INVESTIGANDO COMO PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS JULGAM PROPOSTAS
DE ENSINO PARA O TRABALHO COM OS NÚMEROS RACIONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife

2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S237i

Santos Filho, Josué Ferreira dos.

Investigando como professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com números racionais / Josué Ferreira dos Santos Filho. – Recife: O autor, 2015.

131 f.: il; 30 cm.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica 2015.

Inclui Referências.

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino.
2. Matemática - Números racionais. 3. Professores de ensino fundamental - Formação. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marcelo Câmara dos. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.)

UFPE (CE2015-17)

JOSUÉ FERREIRA DOS SANTOS FILHO

INVESTIGANDO COMO PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS JULGAM PROPOSTAS DE ENSINO PARA O TRABALHO COM NÚMEROS RACIONAIS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 27/02/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dr.^a Rosinalda Aurora de Melo Teles (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

AGRADECIMENTOS

Ao Deus Eterno por todos os benefícios que tem concedido.

À minha esposa Gildete e filhos pelo apoio e compreensão.

Ao professor Doutor Marcelo Câmara dos Santos, pela amizade, confiança, orientação e dedicação a este trabalho.

Aos professores Doutores Rosinalda Aurora de Melo Teles, Marcus Bessa de Menezes pela participação na banca de qualificação e de defesa e pelas valiosas sugestões.

A todo corpo docente e funcionários do EDUMATEC.

Aos colegas da turma 2013 pelos conhecimentos compartilhados e pela amizade.

Ao grupo de pesquisa “Fenômenos Didáticos” pelas contribuições em forma de discussões e sugestões.

Aos professores do município de Jaboatão dos Guararapes que participaram desta pesquisa.

À minha gestora da escola Marechal Costa e Silva, Maria de Fátima do Nascimento, pelo apoio e incentivo.

RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo investigar como os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais, tomando por base as expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco. Para tanto, utilizamos como aporte teórico os estudos de Kieren (1976, 1988), Behr et al. (1983), Nunes e Bryant (1997), Kerslake (1986), Cunha (2002), Santos (2005), Merlini (2005), Canova (2006), Teixeira (2008), Esteves (2009) e o modelo teórico *conhecimento matemático para o ensino* proposto por Ball et al. (2008). Posteriormente realizamos um estudo diagnóstico com 152 professores que ensinam no 4º e no 5º ano do Ensino Fundamental em escolas da rede municipal de Jaboatão dos Guararapes – PE. O instrumento diagnóstico foi um questionário composto de vinte propostas de ensino sobre os números racionais, sendo quatro propostas para cada uma das cinco expectativas de aprendizagem dos Parâmetros de Pernambuco. Os resultados indicam que “reconhecer a fração como partes iguais de um todo” foi a expectativa de aprendizagem que teve o maior valor médio (24,5%) de justificativas que manifestaram *conhecimento matemático para o ensino*. Já “identificar e representar frações maiores e menores que a unidade” teve o menor valor médio (4,5%). Quanto aos entraves para o trabalho com as expectativas de aprendizagem analisadas, destacamos: não conceber a fração como um número; não compreender o princípio da ordenação de frações; utilizar regras dos números naturais para ordenar e comparar números decimais; dentre outros. Estes resultados levam-nos a concluir a necessidade de se rever a questão da formação dos professores que ensinam nos anos iniciais do Ensino Fundamental e o seu conhecimento de Matemática.

Palavras-chaves: Números racionais; propostas de ensino; conhecimento do professor.

ABSTRACT

This work aimed to investigate how teachers in the early years of elementary school teaching proposals judge to work with rational numbers building on the learning expectations of Mathematics Curriculum Standards of Pernambuco. For this use as the theoretical studies of Kieren (1976, 1988), Behr et al. (1983), Nunes and Bryant (1997), Kerslake (1986), Cunha (2002), Santos (2005), Merlini (2005), Canova (2006), Teixeira (2008), Esteves (2009) and the theoretical model knowledge mathematician to education proposed by Ball et al. (2008). Subsequently conducted a diagnostic study with 152 teachers who teach in the 4th and 5th year of primary education in municipal schools of Jaboatão Guararapes. The diagnostic tool was a questionnaire consisting of twenty teaching proposals on rational numbers, four proposals for each of the five learning expectations of Pernambuco parameters. The results indicate that "recognize the fraction as equal parts of a whole" was the expectation of learning that had the highest average value (24.5%) of justifications that expressed mathematical knowledge for teaching. Already, "identify and represent fractions larger and smaller than the unit", had the lowest average (4.5%). Of the barriers to work strain out the learning expectations analyzed include: not conceive the fraction as a number; not understand the principle of ordering fractions; use rules of natural numbers to order and compare decimal numbers. These results lead us to conclude the need to review the training of teachers teaching in the early years of elementary school and your math knowledge.

Keywords: rational numbers; learning programs; teacher's knowledge.

LISTA DE TABELAS

TABELA 1: PERCENTUAL ACERTOS NOS ITENS SOBRE NÚMEROS RACIONAIS NO SAEPE-2011	10
TABELA 2: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA A DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 4.1	68
TABELA 3: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA B DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 4.1	70
TABELA 4: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA C DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 4.1	73
TABELA 5: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA D DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 4.1	75
TABELA 6 : RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA A DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 4.2	79
TABELA 7: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA B DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 4.2	82
TABELA 8: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA C DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 4.2	85
TABELA 9: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA D DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 4.2	87
TABELA 10: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA A DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.3	91
TABELA 11: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA B DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.3	94
TABELA 12: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA C DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.3	97
TABELA 13: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA D DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.3	99
TABELA 14: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA A DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.4	103
TABELA 15: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA B DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.4	105
TABELA 16: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA C DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.4	107
TABELA 17: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA D DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.4	109
TABELA 18: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA A DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.5	113
TABELA 19: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA B DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.5	115
TABELA 20: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA C DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.5	117
TABELA 21: RESULTADO REFERENTE À PROPOSTA D DA EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM 5.5	119

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: ITENS USADOS PARA ESTUDAR A COMPREENSÃO DE CRIANÇAS SOBRE FRAÇÕES.....	11
FIGURA 2: ALGUNS ITENS DO QUESTIONÁRIO UTILIZADO POR CANOVA EM SUA PESQUISA.....	12
FIGURA 3: DOMÍNIOS DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO	43

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
1 OS NÚMEROS RACIONAIS.	18
1.1 Os números racionais na perspectiva da Matemática.	18
1.2 Os números racionais na perspectiva da Educação Matemática.	23
1.2.1 Kieren e o ensino dos números racionais	23
1.2.2 Behr e suas contribuições para o ensino dos números racionais	26
1.2.3 Os estudos de Kerslake e o conceito de fração.	28
1.2.4 Algumas considerações sobre o modelo parte-todo.	30
1.2.5 O ensino dos números decimais.	34
2 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO.	38
2.1 A formação de professores dos anos iniciais e o seu conhecimento de Matemática.	38
2.2 A base de conhecimento para o ensino: contribuições de Lee Shulman.	40
2.3 Conhecimento matemático para o ensino.	42
3 METODOLOGIA.....	48
3.1 Discussão teórico-metodológica	48
3.2 Desenvolvimento da pesquisa	48
3.3 Descrição e análise do instrumento diagnóstico	49
4 ANÁLISE DOS RESULTADOS	66
4.1 Análise da expectativa de aprendizagem 4.1	67
4.2 Análise da expectativa de aprendizagem 4.2	79
4.3 Análise da expectativa de aprendizagem 5.3	91
4.4 Análise da expectativa de aprendizagem 5.4.....	102
4.5 Análise da expectativa de aprendizagem 5.5	112
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	126

INTRODUÇÃO

Dentre os vários conceitos matemáticos abordados no Ensino Fundamental, que podemos associar as situações do cotidiano dos estudantes, destacam-se os números racionais. A receita do bolo que indica $\frac{3}{4}$ de uma xícara de farinha de trigo; o preço de determinado objeto que custava R\$ 1,90 agora vale R\$ 2,35; o aumento no salário mínimo de 6% são alguns exemplos de aplicação desse conteúdo matemático.

Os números racionais são, ainda, utilizados em diversas áreas do conhecimento; na Física, por exemplo, o quociente da distância pelo tempo fornece a velocidade média; na Geografia, a renda per capita de certa população é o quociente da soma dos salários de toda população pelo número de habitantes; na Economia, índices inflacionários, taxas de juros, descontos promocionais são representados por porcentagens e, na própria Matemática, vários conteúdos – razão, proporção, probabilidade, semelhança, dentre outros - estão associados ao conceito de número racional.

Esse universo de aplicação dos números racionais demonstra a importância desse conteúdo matemático. Por outro lado, estudos tais como Bianchini (2001), Canova (2006), Cunha (2002), Esteves (2009) e Merlini (2005), apontam problemas tanto no ensino como na aprendizagem dos números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Resultados de avaliações externas reforçam o que dizem esses estudos. O SAEPE (Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco), realizado em 2011, cujos resultados foram divulgados em 2012, apresenta a Rede Estadual de Ensino de Pernambuco com média em Matemática de 197,1 para o 5º ano, quando o nível de proficiência desejável para esse ano de escolaridade são valores acima de 250 pontos, numa escala que varia de 0 a 500. Em relação aos números racionais, nenhum descritor¹ teve a média de acerto dos itens que o compõe maior que 50%. Na tabela a seguir apresentamos a média de acerto dos itens que compõem cada

¹ Um descritor, como próprio nome sugere, é uma descrição das habilidades esperadas ao final de cada período escolar, que serão objeto de avaliação, no conjunto de itens que compõem o SAEPE. (PERNAMBUCO, 2011).

descriptor do SAEPE 2011 referente aos números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental:

Tabela 1: Percentual médio de acertos nos itens sobre números racionais no SAEPE-2011

DESCRIPTOR	HABILIDADE	QUANTIDADE DE ITENS NA PROVA	MÉDIA DE ACERTOS
D 20	Identificar as diferentes representações de um mesmo número racional.	02	26,1%
D 21	Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.	03	42,2%
D 22	Resolver problema utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.	05	48,4%
D 23	Resolver problema com números racionais expressos na forma de fração ou decimal, envolvendo diferentes significados.	04	44,6%
D 24	Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).	02	26,2%

Fonte: Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora.

São números que preocupam e nos levam a refletir acerca do ensino e da aprendizagem dos números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nunes e Bryant, por exemplo, ao tratar sobre a compreensão das frações pelas crianças, afirmam:

Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. (1997, p.191).

Para esses autores, a não compreensão do conceito de fração é resultado da forma como esse conteúdo é trabalhado com os estudantes:

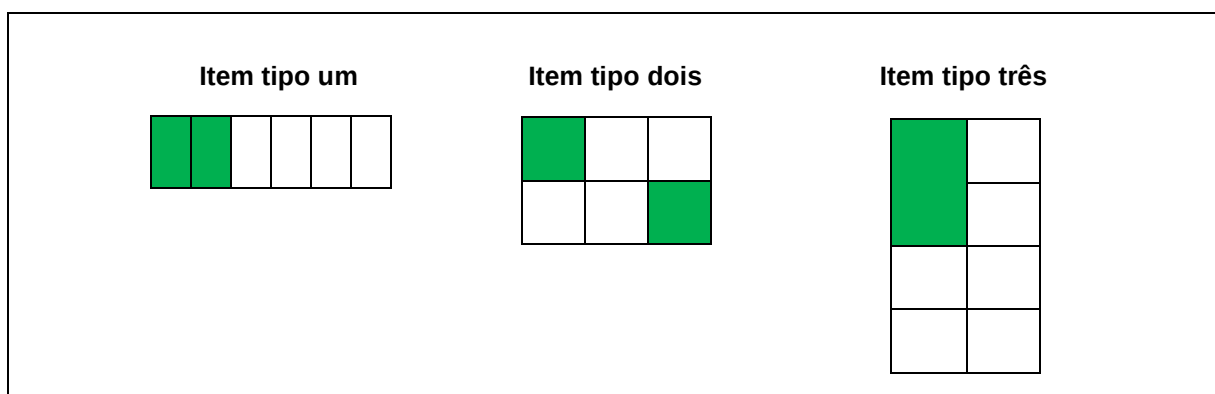
Todos divididos em partes, alguns dos quais distinguidos do resto, por exemplo, pintados. As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas o numerador. Esta introdução, junto com alguma instrução sobre algumas poucas regras para calcular, permite que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações. (1997, p.191).

Nunes e Bryant (1997), então, retomam pesquisas realizadas por Kerslake (1986), na Inglaterra, e Campos et al. (1995), no Brasil, para mostrar que este modo de introduzir frações pode, na realidade, conduzir as crianças a erro.

O trabalho de Campos et al. (1995) demonstrou que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa, pois o método de ensino utilizado estimula o aluno a resolver problemas por procedimentos de dupla contagem - o total das partes pintadas da figura para o numerador e o total de partes para o denominador - sem entender o significado desse novo tipo de número.

Esses pesquisadores, para comprovarem sua hipótese, aplicaram um teste com três tipos de itens para alunos (de quinta série², idade aproximada de 12 anos ou mais) que haviam aprendido o procedimento de contagem dupla, e então lhes pediram para nomear as frações retratadas em cada caso.

Figura 1: Itens usados para estudar a compreensão de crianças sobre frações



Fonte: Campos et al. (1995)

Campos et al. (1995) fizeram três previsões:

Primeira: itens do tipo um e dois não diferiram significativamente em sua dificuldade, porque ambos os tipos podiam ser resolvidos por meio do procedimento de dupla contagem.

Segunda: itens tipo três seriam significativamente mais difíceis do que os tipos um e dois, porque eles não poderiam ser resolvidos por dupla contagem.

Terceira: o erro mais frequente do item de tipo três resultaria da dupla contagem dos números de partes no desenho e do número de partes pintadas.

² Atualmente, 6º ano do Ensino Fundamental.

Os resultados do estudo confirmaram estas predições. Nos itens um e dois os acertos chegaram perto de 100%. Já no tipo três, 56% dos alunos escolheram $1/7$ como a fração correspondente, ou seja, a fração que corresponderia ao procedimento de dupla contagem.

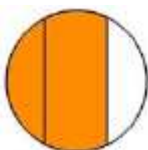
Assim, Nunes e Bryan (1997) confirmam a hipótese de que as crianças podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza.

Canova (2006), ao investigar o entendimento de 51 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental acerca do conceito de fração, elaborou um instrumento diagnóstico em que os sujeitos respondiam se era possível representar determinada figura por uma fração e, caso afirmativo, qual seria essa fração. Ao analisar os resultados, a pesquisadora concluiu que esses docentes também fazem uso da dupla contagem sem considerar a conservação da área da figura.

Figura 2: Alguns itens do instrumento diagnóstico utilizado por Canova em sua pesquisa

1.1 Responda qual a fração que representa as partes pintadas de cada figura.

1c



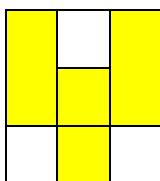
- () Não é possível saber qual é a fração.
 () É possível saber, e a fração correspondente é _____

1d)



- () Não é possível saber qual é a fração.
 () É possível saber, e a fração correspondente é _____

1e)



- () Não é possível saber qual é a fração.
 () É possível saber, e a fração correspondente é _____

Fonte: Canova (2006)

Segunda Canova (2006), dos 51 sujeitos investigados 43% assinalaram que a fração correspondente à parte colorida do item 1c é $2/3$. No entanto, como a figura

não está dividida em partes com áreas iguais, não é possível representá-la por uma fração. No item 1e, o professor teria que perceber que o todo não está explicitamente dividido. O que não aconteceu com 47% dos sujeitos, que afirmaram, erroneamente, ser $\frac{4}{7}$ a fração correspondente à parte colorida da figura. Já o item 1d, em que o todo está dividido em partes iguais, o desempenho dos sujeitos foi próximo de 100%.

Esses resultados comprovam que professores também utilizam a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza. Ao analisar as respostas dos itens 1c e 1e, por exemplo, percebemos que esses docentes demonstram conhecer o procedimento da dupla contagem, no entanto, utilizam tal procedimento fora de contexto.

Estudos revelam ainda dificuldades de alunos e professores quanto à representação decimal dos números racionais. Brousseau (1980), citado por Cunha (2002, p.41), realizou pesquisas em que trabalhou com crianças na faixa etária entre 10 e 11 anos, no estágio inicial da aprendizagem dos números decimais. Neste trabalho, ele investigou as dificuldades na aprendizagem desses números, bem como algumas regras necessárias para a compreensão dos problemas do ensino.

Como resultado dessas pesquisas, Brousseau (1980) coloca que uma das dificuldades quanto à aprendizagem dos números decimais diz respeito à comparação desses números, pois os alunos visualizam os números decimais como justaposição de números naturais, separados por vírgula.

Nesse contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) orientam acerca das dificuldades que as crianças podem encontrar, quando raciocinam sobre os números decimais como se fossem números naturais, “se o “tamanho” da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais ($8345 > 41$), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério”. (BRASIL, 1997, p.67).

Esteves (2009), ao investigar os conhecimentos de professores do 5º ano do Ensino Fundamental sobre números decimais, verificou que esses docentes também apresentam dificuldades quanto à compreensão desses números. A pesquisadora, durante a realização do seu estudo, observou que para comparar números decimais os professores recorriam às regras do conjunto dos números naturais chegando a

afirmar que 0,103 é maior que 0,7; 0,40 é maior que 0,9; 1,005 é muitas vezes maior que 1,0.

Esses critérios para comparar números decimais utilizados pelos professores participantes de nossa pesquisa, e também por alunos (MOREIRA, DAVID, 2007; PADOVAN, 2000; SILVA, 2006), revelam que a concepção que prevalece no ensino dos decimais em nossas escolas é muito parecida com a concepção observada por Brousseau (1980) ao analisar o ensino dos números decimais na França nos anos 60 e 70, a qual tinha como uma de suas características principais considerar o número decimal como um número natural munido de uma vírgula. (ESTEVES, 2009, p.94).

Assim, os resultados da pesquisa de Esteves (2009) revelam, dentre outros elementos, a existência de lacunas no conhecimento do professor quanto à compreensão de números decimais.

Essas “lacunas” nos remetem à questão da formação do professor dos anos iniciais e o ensino de Matemática. Nas últimas décadas, muitas pesquisas têm se voltado a discutir essa problemática, e uma questão que tem definido rumos de investigações se refere aos conhecimentos que os professores devem possuir para realizar um bom ensino.

Os estudos de Shulman (1986), por exemplo, diferenciam três categorias de conhecimentos que compõem a base de conhecimento para o ensino: o conhecimento específico do conteúdo, que se refere às compreensões dos professores sobre a estrutura da disciplina, como ele entende o conhecimento que será objeto de ensino; o conhecimento pedagógico do conteúdo, que se refere ao modo de formular e apresentar o conteúdo de forma a torná-lo compreensível aos alunos e o conhecimento curricular, que diz respeito ao conhecimento do projeto dos programas de ensino e os recursos didáticos que podem ser utilizados.

Na intenção de aprofundar e de ampliar o trabalho de Shulman (1986), em direção ao conhecimento específico para o ensino de Matemática, Ball, Thames e Phelps (2008) propuseram o modelo teórico “*Conhecimento Matemático para o Ensino*”, que é uma aproximação do ensino da Matemática com a teoria proposta por Shulman.

Ball et al. (2008) apontam que os dois grandes domínios do conhecimento – conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo – poderiam ser divididos em três categorias cada. O conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 1986)

poderia ser subdividido em *conhecimento comum do conteúdo*, que é um conhecimento do conteúdo não exclusivo dos professores, mas essencial para eles; *conhecimento especializado do conteúdo*, que se refere a um tipo de conhecimento do conteúdo específico para situações de ensino, e *conhecimento do horizonte do conteúdo*, que é o conhecimento que o professor deverá ter de como os tópicos de um conteúdo estão relacionados.

Já o conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986) poderia ser subdividido em *conhecimento do conteúdo e estudantes*, que é um conhecimento capaz de prever as principais dificuldades dos alunos para então sugerir exemplos ou representações que facilitem a sua aprendizagem; *conhecimento do conteúdo e ensino* que se caracteriza como um conhecimento utilizado para explorar aspectos específicos do conteúdo por meio de princípios pedagógicos; e *conhecimento do conteúdo e currículo*, que é o conhecimento que o professor precisa ter dos programas curriculares concebidos para o ensino.

Assim, a partir dos estudos de Kieren (1976, 1988), Behr et al. (1983), Nunes e Bryant (1997), Kerslake (1986), Cunha (2002), Merlini (2005), Canova (2006), Teixeira (2008) e Esteves (2009), dentre outros, sobre o ensino dos números racionais e do modelo teórico *conhecimento matemático para o ensino* proposto por Ball et al. (2008), consideramos relevante investigar como os professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino³ para o trabalho com os números racionais tomando por base as expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012).

Os Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco (PCPE)⁴ é um documento curricular publicado em 2012 pela Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, resultado de um trabalho construído por especialistas de várias universidades públicas e professores das redes estadual e municipais de Pernambuco – que tem como meta estabelecer expectativas de aprendizagem⁵ para

³ Para este estudo vamos considerar uma proposta de ensino como uma sequência de ensino, ou mesmo um exemplo que pode ser utilizado, para introduzir as ideias de determinado conteúdo específico ou aprofundá-lo.

⁴ A partir desse momento utilizaremos a sigla PCPE para designar Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco.

⁵ De acordo com os Parâmetros Curriculares de Pernambuco as expectativas de aprendizagem explicitam aquele mínimo que o estudante deve aprender para desenvolver as competências básicas da disciplina.

os estudantes, ano a ano, para todos os componentes curriculares, em todas as etapas de escolaridade da educação básica.

Cabe ressaltar que nosso estudo faz parte de um projeto de pesquisa mais amplo “Saberes docentes versus saberes discentes: convergências e divergências” desenvolvido pelo CAEd⁶, sob coordenação do Professor Marcelo Câmara dos Santos. Nossa inserção no projeto contemplou o bloco de conteúdos de “números e suas operações” dos PCPE, em que investigamos como os professores julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Sendo assim, definimos como questão de investigação de nossa pesquisa:

Expectativas de aprendizagem dos PCPE: que conhecimentos professores dos anos iniciais manifestam quando julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais?

E apresentamos os seguintes objetivos.

Objetivo Geral:

- Investigar como os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais, tomando por base as expectativas de aprendizagem dos Parâmetros de Pernambuco.

Objetivos Específicos:

- Analisar as propostas de ensino que os professores julgam corretas ou erradas para o trabalho de algumas ideias concernentes aos números racionais.
- Identificar que conhecimentos, na acepção de Ball et al. (2008), os professores demonstram sobre alguns conceitos relativos aos números racionais.
- Identificar possíveis entraves que os professores apresentam na compreensão de alguns conceitos relativos aos números racionais.

⁶ CAEd: Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora.

O termo julgar será usado nesta pesquisa no sentido de o professor decidir se a proposta de ensino é correta, errada ou correta apenas do ponto de vista da Matemática.

Assim, ao julgar a proposta de ensino ele poderá escolher uma das alternativas:

- A proposta está correta e eu certamente usaria em sala de aula.
- A proposta está correta e eu poderia usar em sala de aula.
- A proposta está correta, mas eu não usaria em sala de aula.
- A proposta está errada e eu jamais usaria em sala de aula.

Justificando em seguida sua escolha.

Passaremos a descrever os capítulos subsequentes. No capítulo um abordaremos os números racionais na perspectiva da Matemática e da Educação Matemática; no capítulo dois, falaremos sobre a formação do professor dos anos iniciais e o *conhecimento matemático para o ensino*; no capítulo três trataremos sobre a metodologia; no capítulo quatro faremos a análise dos resultados e, no capítulo cinco, apresentaremos as considerações finais.

1 OS NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo apresentaremos os números racionais sob dois diferentes enfoques. O primeiro refere-se aos números racionais na perspectiva da Matemática, em que apresentaremos a gênese do número racional de acordo com Caraça (1998), e o número racional como um conjunto numérico, sua definição formal e suas propriedades operatórias.

O segundo diz respeito ao número racional do ponto de vista da Educação Matemática, momento em que revisaremos as contribuições de Kieren (1976, 1988), Behr (1983), Nunes et al. (2003), Kerslake (1986), Nancy Mack (1990), dentre outros para o ensino dos números racionais. Também traremos os estudos de Silva (1997), Cunha (2002), Rodrigues (2005) e Esteves (2009), por enfocarem aspectos que poderão se constituir em subsídios para a busca de respostas à questão desta pesquisa.

1.1 Os números racionais na perspectiva da Matemática.

De acordo com Caraça (1998), os números racionais surgiram como resposta do homem à necessidade de comparar grandezas e realizar medições, ou seja, situações em que nem sempre era possível comparar dois segmentos de tamanhos diferentes e exprimir com um número inteiro a quantidade de vezes que um deles “cabia” no outro.

Segundo Caraça (ibid), a ideia era obter resposta à questão: quantas vezes determinada grandeza é maior que o padrão, tomado como unidade de comparação? Questão que teria solução imediata, dada pelo quociente das duas medidas, sempre que fosse possível efetuar a divisão entre os números inteiros que as representavam. Um impasse, porém, surgiria, quando essa divisão não fosse possível.

É justamente a solução desse impasse que dá origem ao novo campo numérico – o conjunto dos números racionais. Porque a divisão indicada, antes considerada impossível, passou a ser vista como a representação de um novo tipo

de número, que expressa o resultado da divisão, agora considerada como possível, apesar de não poder ser expressa por um número inteiro. Surge, assim, o conjunto dos números racionais.

Para Caraça (1998), dois princípios básicos que norteiam a evolução de toda Matemática também estão presentes na construção desse novo campo numérico:

- Princípio da extensão: de acordo com esse princípio, na construção de um novo conhecimento, este deve considerar o conhecimento já existente e mantê-lo válido;
- Princípio da economia: as operações usadas para resolver problemas na situação antiga devem ser as mesmas operações usadas para resolver problemas análogos na nova situação.

Desse modo, os casos de medição em que o dividendo for múltiplo do divisor devem ser considerados casos particulares de medição nesse novo conjunto numérico. Isso significa que todo número inteiro deve ser também considerado um número racional.

Assim, Caraça (ibid) define os números racionais da seguinte maneira: dados dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em que cada um contém um número inteiro de vezes o segmento u - $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ contém n vezes o segmento u . Diz-se, por definição, que a medida do segmento $\overline{AB}$ tomando $\overline{CD}$ como unidade é o número $\frac{m}{n}$, e escreve-se:

- 1) $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$ quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo); se m for divisível por n , o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se m não for divisível por n , o número $\frac{m}{n}$ diz-se fracionário. O número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese, racional – ao número m chama-se numerador e ao número n denominador. Em particular, da igualdade $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$ resulta que,
- 2) $\frac{n}{1} = n$ visto que, se $\overline{AB} = n \cdot \overline{CD}$, é também $\overline{AB} = \frac{n}{1} \cdot \overline{CD}$ e que,
- 3) $\frac{n}{n} = 1$ porque as igualdades $\overline{AB} = \overline{AB}$ e $\overline{AB} = \frac{n}{n} \cdot \overline{AB}$ são equivalentes (CARAÇA, 1998, p.36).

Já o número racional como um conjunto numérico, segundo Ávila (1999), é indicado por $\mathbb{Q}$ e é definido como números da forma $\frac{a}{b}$ sendo a e b inteiros e $b \neq 0$; simbolicamente, temos:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$, em que $\mathbb{Z}$ indica o conjunto dos números inteiros.

Nesse contexto, são válidas as seguintes definições:

- Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$
- Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+b.c}{b.d}$
- Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Em $\mathbb{Q}$, os números racionais na representação fracionária podem ser comparados, obedecendo às seguintes regras:

- Se as duas representações fracionárias têm o mesmo denominador, será maior ou menor, a fração que tiver maior ou menor numerador;
- Se as duas representações fracionárias têm o mesmo numerador, será maior ou menor, a fração que tiver menor ou maior denominador;
- Se as duas representações fracionárias não têm o mesmo numerador nem o mesmo denominador, primeiro deve-se encontrar representações de frações equivalentes que tenham o mesmo denominador e só depois proceder com a comparação.

De acordo ainda com Ávila (1999), do ponto de vista da Matemática como ciência, cabe apresentar o conjunto dos números racionais como uma estrutura algébrica, ou seja, um corpo comutativo constituído pela terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ em que estão definidas as operações de adição e de multiplicação, que satisfazem as propriedades a seguir:

- Adição

A1) A soma é associativa, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$; $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A2) A soma é comutativa, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$; $x + y = y + x$.

A3) A soma tem elemento neutro, denominado zero e designado por 0, isto é, para qualquer que seja $x \in \mathbb{Q}$; $x + 0 = 0 + x = x$.

A4) Todo elemento $x \in \mathbb{Q}$ possui um simétrico $-x \in \mathbb{Q}$ tal que $x + (-x) = 0$.

- Multiplicação

M1) O produto é associativo, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$; $(x.y).z = x.(y.z)$.

M2) O produto é comutativo, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$; $x.y = y.x$.

M3) O produto tem elemento neutro, denominado um e designado por 1, isto é, para qualquer que seja $x \in \mathbb{Q}$; $x.1 = 1.x = x$.

M4) Todo $x \neq 0$ em $\mathbb{Q}$ tem inverso multiplicativo, isto é, qualquer que seja $x \in$

$\mathbb{Q} - \{0\}$, $\exists y \in \mathbb{Q}$ tal que $x.y = y.x = 1$. O inverso do número $x \neq 0$ designa-se x^{-1} .

Além disso, existe uma propriedade que relaciona essas duas operações, conhecida como propriedade distributiva: $x.(y + z) = x.y + x.z$, para $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Assim, satisfazendo essas propriedades, $\mathbb{Q}$ está fundamentado teoricamente e recebe o nome de corpo comutativo dos números racionais.

Outro ponto que merece destaque no que diz respeito ao número racional na perspectiva da Matemática é sua representação decimal. Tomemos um número racional $\frac{a}{b}$ tal que a não seja múltiplo de b . Esse número racional pode também ser representado por meio de um número decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador. Nesta divisão podem ocorrer dois casos:

- O número decimal obtido possui, após a vírgula, uma quantidade finita de algarismos, tais números racionais são chamados decimais exatos.
- O número decimal obtido possui uma infinidade de algarismos após a vírgula. Nesse caso, ocorre à repetição de alguns algarismos, tais números racionais são chamados decimais periódicos ou dízimas periódicas.

Segundo Lima (2006), o número racional que admite representação decimal finita $a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ pode ser representado na forma fracionária: $\frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_n}{10^n}$

Para admitir representação decimal finita, o denominador da fração deve ser formado apenas pelos fatores 2 e/ou 5. Assim, sendo dado:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m . 5^n}$$

- Se $m \geq n$ basta multiplicar o numerador e o denominador da fração por 5^{m-n} , obtendo-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m} = \frac{c}{10^m}$$

- Se $n \geq m$ basta multiplicar o numerador e o denominador da fração por 2^{n-m} , obtendo-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n} = \frac{d}{10^n}$$

Dessa forma, pode-se dizer que os números que têm representação finita são aqueles que, ao serem representados na forma fracionária $\frac{a}{b}$ com a e b primos entre si, o denominador b possui somente fatores 2 e/ou 5. Vejamos alguns exemplos:

$$a) \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 0,125$$

$$b) \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 0,04$$

$$c) \frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} = 0,15$$

Por outro lado, quando o denominador das frações apresenta fatores diferentes de 2 e de 5 surge a representação decimal infinita, chamada de dízima periódica. Essa representação pode ser interpretada como sendo a soma de uma série geométrica de razão $q = \frac{1}{10^n}$ sendo n o número de algarismos que forma o período.

Como essa série possui razão < 1 , sua soma é dada por $S = \frac{a_1}{1-q}$ em que

a_1 é o primeiro termo e q , a razão.

Vejamos alguns exemplos:

$$a) 0,333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$b) 0,1333... = 0,1 + 0,03 + 0,003 + ... = \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... = \frac{1}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} +$$

$$\frac{1}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

No item a, aparece uma dízima periódica simples (o algarismo 3 se repete a partir da primeira casa decimal) e, no item b, observa-se um exemplo de dízima periódica composta (o período 3 não aparece desde a primeira casa decimal). Vale ressaltar que as representações decimais infinitas e não periódicas não representam elementos do conjunto dos números racionais, como o exemplo, $0,101001000\dots$

Uma fração equivalente a uma dízima periódica é chamada geratriz dessa dízima.

Na próxima seção trataremos do número racional na perspectiva da Educação Matemática.

1.2 Os números racionais na perspectiva da Educação Matemática.

Nesta seção abordaremos os números racionais do ponto de vista da Educação Matemática, momento em que revisaremos as contribuições de Kieren (1976, 1988), Behr (1983), Nunes et al. (2003), Kerslake (1986), Nancy Mack (1990), para o ensino dos números racionais. Também traremos os estudos de Silva (1997), Cunha (2002), Rodrigues (2005), Esteves (2009), por enfocarem aspectos que poderão se constituir em subsídios para a busca de respostas à questão desta pesquisa, e as orientações de documentos como os PCN (BRASIL, 1997), PCPE (PERNANBUCO, 2012) e PSA⁷ (PERNAMBUCO, 2013) sobre o ensino dos números racionais nos anos iniciais.

1.2.1 Kieren e o ensino dos números racionais

Kieren foi um dos primeiros pesquisadores a trazer contribuições para o ensino e a aprendizagem dos números racionais, no campo de estudos da Educação Matemática, ao chamar a atenção da comunidade científica para o fato de

⁷ A partir desse momento utilizaremos a sigla PSA para designar Parâmetros na Sala de Aula de Matemática de Pernambuco

que os números racionais são constituídos de diversos construtos – conceitos. Em artigo publicado, em 1976, ele defende que um completo entendimento dos números racionais se dá a partir de sete interpretações, a saber:

- os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas;
- os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural dos números naturais;
- os números racionais são classes de equivalências de frações;
- os números racionais são números na forma a/b onde a e b são números inteiros e b diferente de zero;
- os números racionais são operadores multiplicativos;
- os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito, isto é, há números na forma $x = a/b$, em que x satisfaz a equação $bx = a$;
- os números racionais podem ser representados por medidas ou por pontos sobre a reta numérica.

Em artigo publicado posteriormente, Kieren (1993), substitui o termo interpretações por subconstrutos (Quociente, Medida, Razão e Operador), que são pequenos conceitos que juntos formam o conceito maior.

Segundo Martinez (1992), citado por Rodrigues (2005, p.33), a substituição se dá porque Kieren entendeu a noção de número racional como um construto teórico constituído de noções mais simples. Esse novo olhar permitia isolar com mais facilidade as noções essenciais do conceito, tendo em vista que nas interpretações essas noções estavam muito interligadas e não podiam ser isoladas e identificadas com facilidade.

Ainda de acordo com Martinez (1992), nas interpretações, Kieren parecia privilegiar as estruturas matemáticas do conceito, já nos subconstrutos ele atribui mais ênfase ao aspecto cognitivo dos números racionais, facilitando sua compreensão.

Para Kieren (1993), o ensino de números racionais deve contemplar o conhecimento intuitivo do estudante, seguir em direção aos subconstrutos até o estágio da formalização. Nesse processo de construção do conceito, Kieren considera que a partição e a obtenção da fração unitária da forma $1/n$, com n

diferente de zero tem, para criança, o mesmo papel de um axioma na construção do número racional como elemento de um conjunto quociente.

O ensino de número racional a partir do universo social da criança também é defendido por Nancy Mack (1990), pois, de acordo com a pesquisadora, há evidências de que alunos trazem para escola um rico histórico de conhecimentos intuitivos. Resultados apresentados em seus estudos mostram que, em geral, os alunos são capazes de resolver um grande número de problemas apresentados sob a forma de situações do dia a dia e explicitar corretamente suas soluções, porém não conseguem resolver os mesmos problemas quando apresentados de maneira simbólica.

Essa questão é ilustrada pelas respostas dos alunos ao serem questionados quanto à comparação das fatias de duas pizzas de mesmo tamanho, uma dividida em seis partes iguais e outra dividida em oito partes iguais. Eles não tiveram dificuldades em responder que a pizza dividida em seis partes iguais apresentava a fatia maior, no entanto, esses mesmos estudantes, em situações de avaliação escolar, ao comparar $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{8}$ responderam que $\frac{1}{8}$ é maior que $\frac{1}{6}$ porque 8 é maior que 6.

São ideias que coadunam com as orientações dos PCPE (PERNAMBUCO, 2012) para o ensino dos números racionais nos anos iniciais, uma vez que o documento sugere introduzir o conceito de número racional a partir do conhecimento intuitivo da criança, reconhecer, por meio de situações do cotidiano, as frações como partes iguais de um todo e como um quociente, evitando a formalização precoce do conceito, que só deve acontecer nos anos finais do Ensino Fundamental.

Outra orientação dos Parâmetros de Pernambuco, que se adéqua às ideias de Kieren, é explorar as denominadas frações unitárias ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc.), pois, de acordo com o documento, se trata de um bom caminho para auxiliar o estudante na compreensão do conceito de fração, reconhecendo o número fracionário como um número que representa quantidades iguais que formam um todo. Por exemplo: “ $\frac{3}{4}$ da fita” pode ser entendido como “três pedaços de $\frac{1}{4}$ da fita” (2012, p. 79).

Os dois aspectos acima descritos merecerão especial atenção nesta pesquisa. Eles estão presentes nas questões do instrumento diagnóstico e

pretendem investigar se os professores dos anos iniciais consideram essas ideias como uma proposta de ensino correta para o trabalho com os números racionais.

Kieren (1993) ainda destaca alguns aspectos dos números racionais que devem merecer atenção especial no momento do seu ensino, por apresentarem dificuldades para sua compreensão:

- o duplo papel desempenhado pelo número 1 no conjunto dos racionais, que serve tanto como unidade divisível que forma a base de comparação, quanto a base conceitual para a formação dos inversos multiplicativos, além, de ser o elemento neutro da multiplicação;
- o fato de que os números racionais às vezes adquirem um caráter de quociente e às vezes de razão, representando, no primeiro caso, o número de partes em que um todo foi dividido e, no segundo caso, estabelecendo apenas uma propriedade relacional entre dois números;
- o fato de que a adição e a multiplicação, ao contrário dos naturais, são independentes no conjunto dos racionais. A multiplicação nos naturais, por exemplo, sempre produz números maiores, uma vez que corresponde a uma soma de parcelas iguais. Já nos racionais a multiplicação pode até ser interpretada como uma divisão.

1.2.2 Behr e suas contribuições para o ensino dos números racionais

Behr et al. (1983) reconhecem os números racionais como sendo uma das mais importantes ideias matemáticas, e justificam o trabalho com os números racionais na escola elementar segundo três pontos de vista:

- ponto de vista prático, que permite aperfeiçoar a habilidade de dividir proporcionando um melhor entendimento dos problemas do mundo real;
- ponto de vista psicológico, que permite desenvolver e expandir as estruturas mentais;

- ponto de vista matemático, que fornece a base sobre a qual serão construídas ideias matemáticas mais complexas, como as operações algébricas elementares que serão desenvolvidas ao longo do seu ensino.

Há uma relação entre cada um desses pontos de vista, citados anteriormente, defendidos por Behr (ibid.) e as ideias de Kieren (1993) uma vez que Kieren busca a construção do conceito de número racional a partir da ideia de partição, enfatiza a ideia de que o número racional deve ser visto primeiro como um conhecimento humano e só posteriormente como uma construção lógica formal - o que caracteriza a formação do conceito de número racional como uma expansão das estruturas mentais – e, Kieren, também acredita que o subconstruto operador proporciona uma aproximação dos números racionais com a álgebra.

Behr et al.(1993) enfatizam que temos de descobrir que tipos de experiências as crianças precisam, a fim de desenvolver os seus conhecimentos sobre número racional. Segundo os autores, do ponto de vista da Matemática, somos capazes de dar definições matemáticas claras e precisas de números racionais e frações: os números racionais são elementos de um campo quociente infinito que consiste em classes de equivalência infinitas, e os elementos das classes de equivalência são frações.

No entanto, quando as frações e os números racionais são aplicados a problemas do mundo real e são olhados a partir de um ponto de vista pedagógico, assumem várias "personalidades". Do ponto de vista da investigação e do desenvolvimento curricular, o problema é descrever estas personalidades - que são os subconstrutos - em detalhe e clareza suficiente para que a organização de experiências de aprendizagem para as crianças tenha uma base teórica firme.

Assim, os autores consideram que o número racional pode ser compreendido a partir de seis subconstrutos: parte-todo, decimal, razão, quociente, operador e medida e, assim como Kieren (1993), afirma que a compreensão completa do conceito de número racional requer não apenas o entendimento de cada subconstruto, mas, também, como eles se inter-relacionam.

Behr et al. (1983) ainda criticam, no ensino dos números racionais, a ênfase curricular nos procedimentos e algoritmos e argumentam que, mesmo com essa ênfase, os estudantes não atingem resultados satisfatórios em testes de

desempenho. Para esses pesquisadores, o fracasso na aprendizagem dos números racionais é consequência de se priorizar, no ensino desse conteúdo matemático, procedimentos, em detrimento dos aspectos relacionados à compreensão do seu conceito.

Esta ênfase nos procedimentos e algoritmos na prática pedagógica dos professores levantados por Behr e colaboradores será objeto de investigação nesta pesquisa, e deverá fornecer subsídios importantes para a análise de alguns itens do instrumento diagnóstico aplicado aos professores.

1.2.3 Os estudos de Kerslake e o conceito de fração.

Kerslake (1986) realizou estudo um com 10 000 crianças na faixa etária entre 11 e 15 anos, em que investigou uma série de problemas trabalhados com alunos, analisando suas estratégias de resolução e seus erros, sendo que alguns desses problemas envolviam o conceito de fração.

Na busca de compreender como as crianças pensam sobre as frações, o estudo possibilitou observar três aspectos que emergiram dos dados obtidos:

- 1) observar se as crianças eram capazes de pensar as frações como números ou se elas pensavam que a palavra “número” implicaria somente em números inteiros;
- 2) descobrir que modelos de frações as crianças dispunham;
- 3) determinar como as crianças visualizavam a ideia de equivalência

Uma das questões do teste pedia aos alunos a resolução de $3 \div 5$ ou $\frac{3}{5}$ em uma situação contextualizada e em outra sem contexto. A situação contextualizada era: “Três barras de chocolate foram divididas igualmente entre cinco crianças. Quanto cada criança recebeu?”, os acertos das crianças com 12 e 13 anos aproximaram-se de 65%. Por outro lado, quando apresentaram a questão $3 \div 5$ sem o contexto, os resultados caíram significativamente. Assim, a pesquisadora argumenta que tal dificuldade pode estar relacionada ao fato de que os alunos não conectam a divisão $3 \div 5$ à representação fracionária $\frac{3}{5}$.

Outra questão do teste perguntava aos alunos: “Quantas frações se escondem entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?” Eles respondiam: uma, referindo-se a $\frac{1}{3}$. Dessa forma, pode-se concluir que os alunos entrevistados observam apenas os denominadores, não compreendendo a fração como um número, uma magnitude.

Kerslake (1986) observou, ainda, que o diagrama com frequência ajuda as crianças na resolução de determinados problemas, como, por exemplo, entender a fração como partes de um todo por meio de um círculo dividido em partes iguais e sombreada algumas delas.

Por outro lado, o uso do diagrama no modelo parte-todo não favorece a compreensão da fração em outras situações como, por exemplo, entender a fração como um número ou como um quociente.

Assim, Kerslake (ibid) conclui que o entendimento dos racionais como elementos de um campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Nesse sentido, há necessidade de se estender o modelo “parte-todo” e incluir os aspectos quociente das frações.

Em relação à equivalência de frações, Kerslake (1986) verificou que, apesar de os alunos serem capazes de obter frações equivalentes, eles não associavam esse aspecto do conceito à soma de frações. Por exemplo, em $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ os estudantes deram como resultado $\frac{5}{7}$.

A autora, então, argumenta que, apesar de alguns alunos serem capazes de obter frações equivalentes com o mesmo denominador, eles parecem não perceber a conexão entre equivalência de fração e adição.

Finalmente, Kerslake (1986) concluiu que o único modelo de fração que os alunos sentiam-se familiarizados foi o de fração como parte de um todo, o que dificultou o entendimento do aspecto de divisão ou de distribuição.

Embora apresente diferenças do ponto de vista metodológico em relação ao presente estudo, os resultados obtidos por Kerslake (1986) serão importantes para as análises desta pesquisa, uma vez que as propostas de ensino contidas em nosso instrumento diagnóstico abordam aspectos do conceito de números racionais semelhantes aos que foram tratados no estudo de Kerslake.

1.2.4 Algumas considerações sobre o modelo parte-todo.

Segundo Nunes et al. (2003), a ideia presente no modelo parte-todo é a de partição de um todo contínuo⁸ em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$; logo, um procedimento de dupla contagem é suficiente para se chegar a uma representação correta desse significado. Por exemplo, uma barra de chocolate foi dividida em quatro partes iguais. Tico comeu três dessas partes. Que fração representa o que Tico comeu? A resposta $\frac{3}{4}$ pode ser obtida a partir da dupla contagem, acima do traço escreve-se o número de partes de chocolate que foram consumidas, abaixo do traço escreve-se o número total de partes.

Damico (2007) se apoia nas pesquisas de Marshall (1990, 1993) e Sweller e Cooper (1985) para afirmar que o trabalho com o modelo parte-todo no âmbito escolar, envolvendo quantidades contínuas, leva em consideração duas formas de representação visual:

Uma é o símbolo $\frac{a}{b}$, uma vez que difere dos outros números que os estudantes conhecem e veem. A segunda representação tem a ver com dividir regiões. Normalmente, estas regiões são retângulos ou círculos, colocados de forma que eles possam ser divididos facilmente em pedaços de tamanhos iguais. (DAMICO, 2007, p.68)

Quanto à representação visual associada a uma região, Damico (2007, p.69) afirma que “Os modelos que se utilizam da interpretação de regiões geométricas envolvem, aparentemente, uma compreensão da noção de área”.

Isso quer dizer que, em algumas situações, a habilidade requerida para representar a parte hachurada de uma figura, por meio de uma fração, não é dividir a figura em partes iguais, mas, sim, dividir em partes com áreas congruentes.

O que podemos observar no exemplo a seguir:



⁸ Quantidade contínua refere-se àquelas quantidades possíveis de serem divididas exaustivamente sem que percam suas características.

Uma vez que os dois retângulos têm a parte hachurada representada pela fração $\frac{1}{4}$.

Ainda segundo Damico (2007), Owens (1980) e Sambo (1980) examinaram a relação entre o conceito de área de uma criança e a sua habilidade para aprender conceitos de fração. Esses pesquisadores acreditam que ensinar a noção de área pode ajudar na habilidade de crianças para aprender conceitos de fração.

Já em relação à representação associada ao símbolo $\frac{a}{b}$ Damico (2007) afirma que não é trabalhada no âmbito escolar associada a um número, mas tão somente a figuras que representam um todo dividido em partes iguais, com algumas dessas partes pintadas ou hachuradas. O todo que foi dividido corresponderá ao denominador “b” e a quantidade de partes pintadas ou hachuradas será o numerador “a” da fração.

Já no trabalho com o modelo parte-todo em quantidades discretas⁹, as questões a serem consideradas são diferentes das de quantidades contínuas, anteriormente salientadas.

Damico (2007) faz menção à situação descrita no trabalho de Marshall (1993) para explicitar essas diferenças:

Billy tem 3 bolas de gude, Tony tem 4 bolas de gude e Joe tem 9 bolas de gude. Juntos eles têm 16 bolas de gude. Se a pessoa aceitar a bola de gude individual como a unidade de divisão, então a pessoa pode ilustrar esta situação por meio de 16 círculos. A representação parte-todo para a parte de Billy seria feita obscurecendo 3 desses círculos. Assim, a “parte” é agora o número de objetos sombreados, e o “todo” é o número total de objetos. Cada uma das unidades que compõem a “parte” tem tamanho igual, porque cada uma representa o mesmo número de objetos (por exemplo, 1 bola de gude). No entanto, a divisão não resulta em partes de tamanhos iguais. Há três partes que se combinam para formar o todo, e cada uma pode ser representada por uma fração: $\frac{3}{16}$ (Billy); $\frac{4}{16}$ (Tony) e $\frac{9}{16}$ (Joe). (Damico, 2007, p.69, 70).

Sendo assim, no modelo parte-todo de quantidade discreta, o todo deixa de ser uma unidade para ser representado por um conjunto constituído de objetos

⁹ Quantidade discreta refere-se àquelas quantidades enumeráveis, contáveis, que dizem respeito a um conjunto de objetos.

iguais, e as partes que formam esse todo não são, necessariamente, divididas de forma igual, como acontece no modelo parte-todo de quantidade contínua.

Os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) orientam para o ensino dos números racionais nos anos iniciais o trabalho com as quantidades contínuas e discretas, pois as frações surgem em situações que envolvem, quase sempre, uma grandeza, seja discreta (uma coleção de objetos ou entidades), seja contínua (comprimento, área, volume, massa etc.).

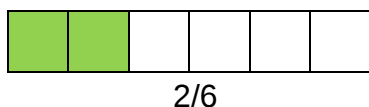
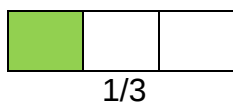
Assim, explorar essa diversidade de contextos pode contribuir para a evolução da compreensão do conceito de fração, e um dos pontos que se pretende investigar, nesta pesquisa, é se os docentes consideram relevante para o ensino dos números racionais o trabalho com quantidades contínuas e discretas.

Além do trabalho com as quantidades contínuas e discretas, Nunes et al. (2003) ainda chamam a atenção para a equivalência de frações em quantidades extensivas e intensivas.

As quantidades extensivas se baseiam na comparação de duas quantidades de mesma natureza e na lógica parte-todo. Assim, podem ser adicionadas e medidas por uma unidade de mesma natureza. Já as quantidades intensivas referem-se às medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes. Por isso, não podem ser adicionadas, pois expressam a relação entre duas quantidades de medidas diferentes.

Como exemplo, consideremos dois recipientes com suco de laranja. O primeiro tem 20dl de suco e o outro 80dl, juntando os dois em um recipiente maior teremos 100dl de suco de laranja, é uma situação que envolve quantidades extensivas. Agora, no primeiro recipiente há 20% de concentrado de suco de laranja e no segundo 80% de concentrado. Juntando os dois conteúdos em um recipiente maior, não teremos uma mistura com 100% de concentrado, essa situação caracteriza quantidades intensivas.

Assim, Nunes et al. (2003) alertam que ao tratar de equivalência de fração em contexto de quantidades extensivas em situações de parte-todo, a classe de equivalência vai depender do tamanho do todo (ou da unidade), ou seja, para obter frações equivalentes, nesse contexto, os todos devem ser equivalentes. Vejamos o exemplo a seguir em que aparecem a representação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$.



Nesse caso, as frações $1/3$ e $2/6$ não pertencem a uma classe de equivalência, porque os dois todos não são equivalentes.

Já a equivalência de frações em contexto de quantidades intensivas pode ocorrer entre duas frações que se referem a todos diferentes. Por exemplo, se fizermos uma jarra de suco usando um copo de concentrado para dois copos de água, o suco terá a mesma concentração e gosto que uma jarra maior de suco feito com dois copos de concentrado e quatro copos de água. Em situações de quantidades intensivas, $1/2$ e $2/4$ são equivalentes mesmo que o todo não seja idêntico.

Essas considerações de Nunes et al.(2003) acerca de equivalência de frações em quantidades extensivas e intensivas será objeto de especial atenção nesta pesquisa, pois deverá fornecer subsídios importantes para a análise das propostas de ensino relacionadas à expectativa de aprendizagem 5.4 “*Relacionar frações equivalentes em situações contextualizadas*”.

Para finalizar, estudos revelam que o ensino de fração como partes iguais de um todo tem se mostrado ineficaz para a construção desse conceito matemático. O trabalho de Campos et al. (1995) – que apresentamos na introdução da dissertação - demonstrou que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa, pois o método de ensino utilizado estimula o aluno a resolver problemas por procedimentos de dupla contagem, sem entender o significado desse novo tipo de número.

Nesse sentido, Escolano e Gairín (2005) criticam a introdução do conceito de fração por meio do modelo parte-todo por conta do seu caráter estático, representado por uma figura dividida em partes iguais, com algumas dessas partes pintadas, não estabelecendo que a fração resultante desse processo represente um novo número.

No entanto, um recurso que pode favorecer a compreensão da fração como um número, uma magnitude é o modelo da reta numérica.

Silva (1997), por exemplo, ao realizar um estudo com objetivo de introduzir o conceito de fração por meio dos significados parte-todo, medida e quociente, concluiu que o trabalho com o significado medida, utilizando o modelo da reta numérica, contribuiu para compreensão da fração como um número e ajudou na visualização de frações maiores que a unidade.

Damico (2007), afirma que o modelo da reta numérica apresenta algumas vantagens no processo de ensino-aprendizagem dos números racionais, em relação a outros modelos, tais como:

- a) os tipos de problemas envolvendo a localização de pontos na reta numérica ou vice-versa fazem com que os alunos concebam as frações como números, tais como 1, 2, 3, 4 etc.;
- b) facilita a compreensão de ideia de que os números racionais são uma extensão dos números inteiros, incluindo a ideia de que os números inteiros também são racionais;
- c) faz com que as frações impróprias (frações maiores que a unidade) e as frações mistas ($3 \frac{1}{2}$) apareçam de forma muito mais natural;
- d) facilitam o trabalho de compreensão das propriedades topológicas da reta, tais como a densidade dos números racionais;
- e) a reta numérica pode ser utilizada na construção do significado de equivalência e ordem, além de servir como modelo representacional para auxiliar a compreensão das operações básicas com frações. (2007, p.77).

Assim, as contribuições que o modelo da reta numérica apresenta para o ensino dos números racionais serão relevantes para esta pesquisa, uma vez que as propostas de ensino referentes às expectativas de aprendizagem 4.2 “*Determinar a posição aproximada na reta numérica, de frações com numerador unitário ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$)*” e 5.3 “*Identificar e representar frações menores e maiores que a unidade*”, foram construídas a partir deste modelo.

1.2.5 O ensino dos números decimais.

Os PCN (BRASIL, 1997) sugerem que a abordagem dos números racionais – frações e números decimais - em sala de aula tenha início no 2º ciclo do Ensino Fundamental, com o objetivo de levar os estudantes a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver determinados problemas.

Segundo o documento, o início do estudo dos números racionais, levando-se em consideração seu reconhecimento no contexto diário, deve iniciar pelos números decimais (números com vírgula) porque eles aparecem no cotidiano das pessoas muito mais do que a representação fracionária.

Nesse sentido, os PSA (PERNAMBUCO, 2013) sugerem como recurso para o ensino dos números decimais o sistema monetário, porque permite ao estudante atribuir sentido à representação decimal dos números racionais como, por exemplo, associar R\$ 0,01 (um centavo) a um centésimo de real; R\$ 0,10 (dez centavos) a dez centésimos do real, que equivale também a um décimo do real.

O documento ainda orienta que o trabalho com composição e decomposição de números na representação decimal deve ser explorado nos anos iniciais do Ensino Fundamental e cita, como exemplo, a criança perceber cinco centésimos como a repetição, cinco vezes, de um centésimo.

Os PCN (BRASIL, 1997), apresentam algumas dificuldades conhecidas no trabalho com os números decimais. Sua aprendizagem, por exemplo, supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais.

Nesse sentido, o documento apresenta alguns entraves que as crianças encontram, quando raciocinam sobre os números decimais como se fossem números naturais:

- se o “tamanho” da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais ($8.345 > 41$), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
- se a sequência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81; 0,815 ou 0,87. (BRASIL, 1997, p.67).

Diversos estudos (PADOVAN, 2000; CUNHA, 2002; SILVA, 2006; ESTEVES, 2009) também revelam problemas no ensino e na aprendizagem dos números decimais.

Silva (2006), por exemplo, investigou o que sabem adultos e crianças sobre os números decimais, antes e após o ensino formal. A pesquisadora desenvolveu

um estudo experimental com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), dos módulos I e IV, e alunos do Ensino Fundamental do 5º e 7º anos. Os dados foram coletados por meio de uma entrevista individual sobre seus conhecimentos de números decimais, seguida da resolução de dezesseis problemas que abordavam os diferentes significados, representações simbólicas, propriedades e contextos do número decimal.

Os resultados revelaram problemas dos estudantes quanto à compreensão dos números decimais. Em relação à comparação e ordenação de decimais, por exemplo, Silva (2006) constatou várias dificuldades dos estudantes, conforme apresentamos abaixo:

O número maior é o que tem a parte decimal com o maior número de dígitos. Assim, por exemplo, 10,25 seria maior que 10,9.

O número é maior quando tem mais zeros depois da vírgula. Por exemplo, 10,09 > 10,9.

Regra dos números inteiros: 10,25 é maior que 10,5 porque 25 é maior que 5.

Regra da fração: R\$ 10,9 é maior que R\$ 10,25 porque 9 são décimos e 25 são centésimos. Embora o julgamento seja correto, pois 10,9 é de fato maior que 10,25, a justificativa dada é incorreta pois se devia comparar décimos com décimos ou centésimos com centésimos. Assim, 9 décimos é maior que 2 décimos, ou 90 centésimos é maior que 25 centésimos.(SILVA, 2006, p.181).

Dificuldades análogas apresentaram professores dos anos iniciais participantes do estudo de Esteves (2009), que investigou os conhecimentos de professores do 5º ano do Ensino Fundamental sobre números decimais.

Os resultados revelaram a existência de lacunas, não apenas no conhecimento específico desses docentes mas, também, na forma como eles organizam o processo de ensino e aprendizagem dos números decimais em sala de aula.

No que diz respeito ao conhecimento específico, um dos pontos investigados por Esteves foi a comparação e a ordenação de números decimais. Segundo a pesquisadora, 58% dos participantes utilizavam regras dos números naturais para comparar e ordenar números decimais.

Quanto ao ensino dos números decimais em relação à representação decimal, 72% dos professores disseram ter dificuldades para explicar aos alunos as

diferentes representações de um mesmo número decimal. Por exemplo: 2,2; 2,20; 2,200.

São resultados preocupantes e que nos remetem à questão do conhecimento de Matemática dos professores que ensinam nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Assim, no próximo capítulo, vamos discutir sobre a formação do professor dos anos iniciais e o seu conhecimento de Matemática.

2 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO.

Neste capítulo apresentaremos algumas pesquisas cujo tema é a formação de professores dos anos iniciais e o seu conhecimento de Matemática, uma vez que o foco de nosso estudo é o professor. Trataremos também os três domínios de conhecimento que compõem a base de conhecimento para o ensino apresentado por Shulman (1986), e o refinamento desses domínios para o ensino específico de Matemática, que é o modelo teórico “Conhecimento Matemático para o Ensino” proposto por Ball et al. (2008), que deverá fornecer subsídios importantes para as análises a que esta pesquisa se propõe.

2.1 A formação de professores dos anos iniciais e o seu conhecimento de Matemática.

Segundo Curi e Pires (2008), durante muito tempo os educadores em todo o mundo pouco ou nada se preocuparam com a investigação sobre a formação de professores que atuam em diferentes níveis de escolaridade. Suas discussões estavam voltadas para as teorias sobre conhecimento, aprendizagem, motivação, currículo e avaliação, e tinham como foco os alunos ou recursos didáticos.

No entanto, a partir da década de 1980, diversos trabalhos de diferentes partes do mundo começam a investigar questões do tipo “o que os professores conhecem?”, “que conhecimento é essencial para o ensino?”, “quem produz conhecimento sobre o ensino?”, “como se formam os professores?”.

As autoras, então, comentam:

Uma possível justificativa para explosão de pesquisas centrados no professor pode estar relacionada ao fato de que ele passou a ser considerado um profissional que reflete, que pensa e precisa construir sua própria prática e não apenas atuar como simples reprodutor de conhecimentos. Assim, passou a ser relevante compreender o que e como pensam e conhecem os professores e, especialmente, como atuam. (CURI E PIRES, 2008, p.153).

Fiorentini et al. (2003), ao realizar um levantamento acerca de pesquisas brasileiras sobre formação de professores que ensinam Matemática, no período de 1978 a 2002, constatou que a produção acadêmica sobre o tema vem crescendo significativamente nos últimos anos. Entretanto, apesar desse aumento, poucos foram os estudos do período analisado que discutiram a formação do professor que ensina Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Curi (2004) analisou ementas de disciplinas de 36 cursos de pedagogia. Nessa análise, a pesquisadora constatou, nas disciplinas relativas à Matemática e seu ensino, a presença de considerações gerais sobre o ensino de Matemática e a ênfase no “saber fazer”, em detrimento do conhecimento específico do conteúdo de ensino.

A pesquisadora ainda constatou que as disciplinas relativas à Matemática e seu ensino que constam das grades curriculares dos cursos de pedagogia têm uma carga horária bastante reduzida, em torno de 36 ou 72 horas, e as referências bibliográficas alusivas às ementas são, em geral, bastante genéricas e não incluem pesquisas atuais de educadores matemáticos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Mas, quais serão as crenças e atitudes dos alunos de Curso de Pedagogia em relação à Matemática e seu ensino?

Makarewicz (2007) realizou estudo com 50 alunos do 4º semestre de um curso de Pedagogia que teve como objetivo conhecer e categorizar algumas crenças destes estudantes em relação à Matemática e seu ensino.

Como resultado a pesquisadora constatou:

De modo geral, os alunos que participaram de nossa pesquisa têm uma relação “pobre” e “triste” com a Matemática.

“Pobre” porque não têm atitude positiva frente à Matemática, em relação à resolução de problema e à sua capacidade matemática.

“Triste” porque não têm boas relações com a Matemática, sentem medo, consideram que a Matemática é apenas para pessoas com capacidades especiais.

O grupo aparenta ter conhecimentos matemáticos rudimentares, compartimentados, centrado na aplicação de procedimentos de cálculos.

Para esse grupo, a Matemática tem pouco significado e aqueles que dizem que gostam de Matemática referem-se à Matemática usada no cotidiano. Trazem marcas muito fortes da Matemática básica, de como aprenderam essa disciplina. (MAKAREWICZ, 2007, p.85).

Tomando por base o estudo de Santos (2008), realizado com 25 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que teve como objetivo analisar em sessões de formação continuada como estes professores processam os conhecimentos abordados na formação e os implementam em suas salas de aulas, podemos dizer que as dificuldades em relação ao conhecimento matemático de professores dos anos iniciais se manifestam na formação inicial, Makarewicz (2007), e continuam em sua vida profissional:

Durante a formação pudemos observar que de fato um dos obstáculos a serem enfrentados pela formação continuada ainda se refere ao conhecimento matemático dos professores polivalentes, bastante insuficiente para quem vai ensinar. Sabemos que a formação inicial não investe nesse aspecto e o professor acaba tendo como repertório único aquilo que aprendeu enquanto aluno da educação básica. Assim, há muitos conceitos e procedimentos que os professores não dominam. Podemos observar que no tocante aos números naturais eles se sentem mais seguros, embora nem sempre tenham uma compreensão mais aprofundada sobre o assunto. (SANTOS, 2008, p. 71).

Em relação aos formadores a pesquisadora constatou que:

Difícilmente, formadores satisfazem aos quesitos básicos: conhecer Matemática, conhecer a Matemática a ser ensinada para crianças, conhecer crianças e professores dessas crianças. Ou seja, conhecer esse universo tão peculiar. (SANTOS, 2008, p.69).

São resultados preocupantes, uma vez que as pesquisas que abordam a temática da formação de professores cada vez mais têm definido como rumo de investigação os conhecimentos que os professores devem possuir para realizar um bom ensino.

Nesse sentido, destacamos as contribuições de Lee Shulman, que abordaremos na próxima sessão.

2.2 A base de conhecimento para o ensino: contribuições de Lee Shulman.

Shulman (1987) optou por pesquisar e consolidar a corrente do “knowledge base” (base de conhecimento) que, segundo o autor, é o corpo de compreensões,

conhecimentos, habilidades e disposições de que um professor necessita para atuar efetivamente numa dada situação de ensino.

Interessado em investigar os conhecimentos necessários que um professor demanda em sua profissão, Shulman (1986; 1987) têm como foco responder questões tais como: Qual conhecimento da matéria ensinada os professores têm em sua mente? Quais as fontes dos conhecimentos dos professores? Como os “novos” conhecimentos combinam-se com os “velhos” para formar uma base de conhecimentos?

No que diz respeito ao conhecimento da disciplina para ensiná-la, Shulman (1986) identifica três domínios no conhecimento do professor: o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular.

Conhecimento específico do conteúdo: refere-se às compreensões dos professores sobre a estrutura da disciplina, como ele entende o conhecimento que será objeto de ensino. Essa compreensão não se restringe apenas a fatos e conceitos relativos à disciplina, mas em conhecer a organização dos princípios fundamentais de uma área de conhecimento e os processos de produção da sua área disciplinar.

O professor precisa não só entender que algo funciona assim; o professor deve entender porque é assim, em quais fundamentos isso é garantido e afirmado, e em quais circunstâncias nossa crença nessa justificativa pode ser diminuída ou negada. Além disso, nós esperamos que os professores entendam porque um dado tópico é particularmente central para uma disciplina, ao mesmo tempo em que um outro pode ser de alguma forma periférico. (SHULMAN, 1986, p.9)

Conhecimento pedagógico do conteúdo: o conhecimento pedagógico do conteúdo vai além do conhecimento da disciplina. É uma combinação entre o conhecimento específico do conteúdo e o modo de ensinar. Esse conhecimento diz respeito à forma como o assunto é tratado incluindo-se aí as formas mais úteis de representação das ideias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações, modos de representar e formular o assunto de maneira a torná-lo compreensível para o aluno.

Conhecimento curricular: é o conhecimento representado por toda a gama de programas concebidos para o ensino de disciplinas e temas específicos em um

determinado nível, mas também o conhecimento de materiais que o professor seleciona para ensinar sua disciplina.

De acordo com Ball et al (2008), o conhecimento pedagógico do conteúdo teve um grande impacto sobre a comunidade científica e várias pesquisas foram desenvolvidas abordando esse aspecto do conhecimento do professor. No entanto, seu potencial foi pouco explorado, uma vez que para muitos sua natureza e seu conteúdo eram óbvios. Isso tornou o conhecimento pedagógico do conteúdo pouco individualizado, sem uma definição e sem fundamentos empíricos, o que resultou por limitar a sua utilidade.

Nesse sentido, Ball et al (ibid) optam por ampliar e aprofundar o trabalho de Shulman (1996), tendo como foco o conhecimento específico para o ensino de Matemática e propuseram o modelo teórico Conhecimento Matemático para o Ensino, que veremos a seguir.

2.3 Conhecimento matemático para o ensino.

É na intenção de ampliar e aprofundar o trabalho de Shulman (1986), que Ball et al. (2008) apresentam o modelo teórico “Conhecimento Matemático para o Ensino”, que, segundo eles, é o conhecimento matemático que os professores precisam para realizar efetivamente o seu trabalho como professores de Matemática.

Os estudos de Ball e seus colaboradores têm como foco o “trabalho de ensinar”. Sendo assim, inicialmente, não priorizam aspectos relacionados ao currículo, nem enfocam os padrões para a aprendizagem dos alunos, mas se voltam tão somente para os conhecimentos necessários aos professores para desenvolver efetivamente sua prática pedagógica.

Nesse sentido, Ball et al. (2008) se debruçam em estudos empíricos para compreender o conhecimento do conteúdo necessário para o ensino de Matemática e desenvolvem dois projetos. No primeiro, eles analisam a prática do professor e as demandas matemáticas para o ensino levantando algumas hipóteses sobre a natureza do conhecimento matemático para o ensino; no segundo, investigam a

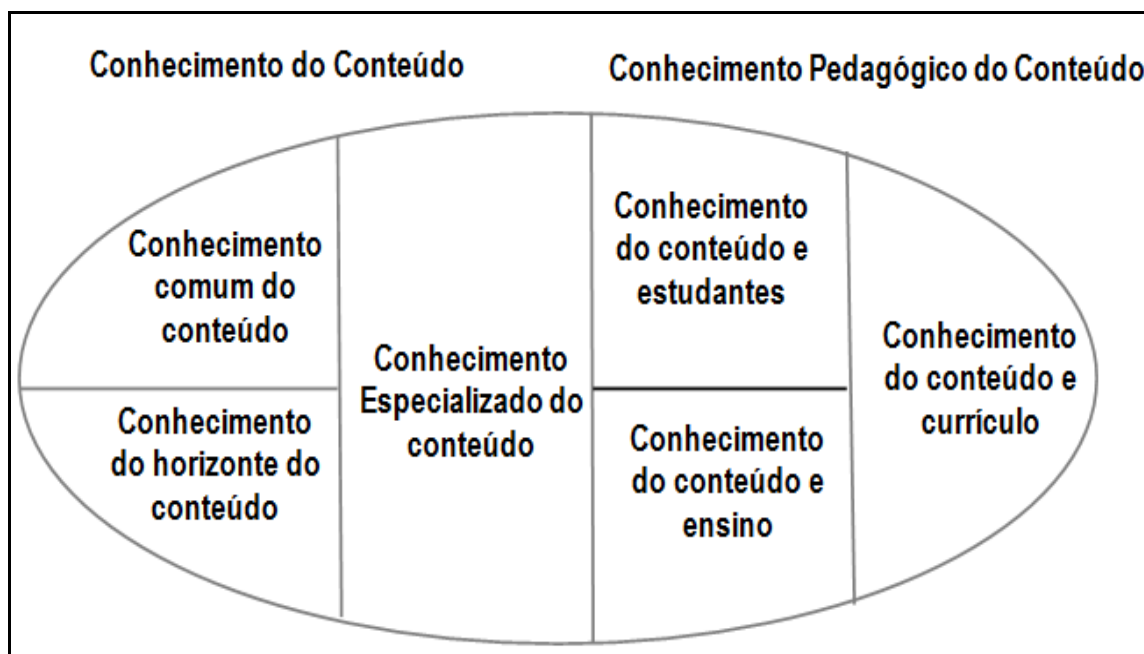
natureza, o papel e a importância de diferentes tipos de conhecimento matemático, na intenção de dimensionar a Matemática usada para o ensino.

Como resultado desses estudos, Ball et al (ibid) fazem uma releitura nos dois grandes domínios do conhecimento proposto por Shulman (1986) – conhecimento específico do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo – e sugerem um refinamento desses domínios dividindo-os em três subdomínios cada.

O Conhecimento específico do Conteúdo poderia ser subdividido em conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento do horizonte do conteúdo. Já o conhecimento pedagógico do conteúdo poderia ser subdividido em conhecimento do conteúdo e estudantes, conhecimento do conteúdo e ensino e conhecimento do conteúdo e currículo.

A seguir apresentamos um quadro-resumo com os dois grandes domínios do conhecimento proposto por Shulman (1986) – conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo – e a releitura desses domínios proposta por Ball et al (2008).

Figura 3: Domínios do conhecimento matemático para o ensino



Fonte: Adaptado da figura apresentada por Ball et al.(2008, p.403)

Ball et al. (2008) chamam atenção para a alocação provisória dos subdomínios – conhecimento do horizonte do conteúdo e conhecimento do conteúdo e currículo – oriundos do refinamento do terceiro domínio do conhecimento de Shulman (1986), conhecimento curricular do conteúdo.

Passaremos, então, a descrever cada um desses subdomínios de acordo com Ball et al. (2008).

Conhecimento comum do conteúdo: é um conhecimento que não é exclusivo dos professores, que outros com a mesma formação também têm e utilizam. Ele inclui identificar uma resposta errada dos alunos, reconhecer quando o livro dá uma definição imprecisa, utilizar termos e notação corretamente. Em suma, é o conhecimento que os professores precisam a fim de serem capazes de fazer o trabalho que eles estão atribuindo aos seus alunos.

Ball et al. (2008), ao analisarem vídeos de ensino, constataram, especialmente quando os professores não tinham conhecimento comum do conteúdo, que esse conhecimento é essencial. Quando um professor usava termos inadequados, cometia erros de cálculo, ou ficava preso tentando resolver um problema, perdia-se um tempo precioso da aula e o ensino era prejudicado. No caso dos números racionais, representar a fração $\frac{3}{4}$ numa reta graduada é um exemplo de conhecimento comum do conteúdo.

Assim, para os autores, a compreensão e o domínio da Matemática básica são procedimentos necessários, mas não suficientes, para o ensino.

Conhecimento especializado do conteúdo: é um conhecimento específico para o ensino, diz respeito aos conhecimentos e habilidades necessários unicamente para o professor na condução do seu trabalho, pois se refere a um tipo de conhecimento do conteúdo que é exclusivo para situações de ensino, ou seja, apesar de ser um conhecimento de Matemática, ele não é requerido em outra ação que não a de ensino.

Para Ball et al. (2008), ensinar exige conhecimento além daquele a ser ensinado aos alunos, exige uma compreensão diferente, não apenas perceber e identificar um erro, por exemplo, mas, sobretudo, saber a sua natureza, são aspectos do conhecimento especializado do conteúdo. Por exemplo, ao analisar padrões em erros de alunos ao comparar números decimais, o professor faz uso desse conhecimento.

Conhecimento do horizonte do conteúdo: é o conhecimento que o professor possui de como os tópicos de um conteúdo estão relacionados e que

devem ser abordados com diferentes graus de profundidade, dependendo do ano de escolaridade.

Por exemplo, professores que ensinam o conceito de fração nos anos iniciais do Ensino Fundamental, podem querer saber como tais conhecimentos serão abordados por professores que ensinarão tal conhecimento nos anos finais dessa etapa de escolaridade e vice-versa.

Conhecimento do conteúdo e estudantes: é um tipo de conhecimento que combina conhecimento sobre estudantes e conhecimento sobre Matemática. Ter familiaridade com os erros comuns e saber por que diversos alunos os cometem; prever as principais dificuldades dos alunos para então sugerir exemplos ou representações que facilitem a aprendizagem do estudante; ouvir e interpretar os pensamentos incompletos e emergentes dos estudantes, na linguagem deles, são situações que caracterizam o conhecimento do conteúdo e estudantes.

Quando o professor utiliza o recurso da reta numérica para ajudar os alunos a compreenderem frações maiores que a unidade ele está imerso nesse subdomínio do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Conhecimento do conteúdo e ensino: É um tipo de conhecimento que combina conhecimento sobre o ensino e conhecimento sobre a Matemática, ou seja, é uma interação entre a compreensão matemática específica de um conteúdo e a percepção de questões pedagógicas que estão associadas à aprendizagem dos alunos.

O planejamento do ensino, a elaboração de uma sequência para o ensino de um conteúdo específico, decidir sobre exemplos para introduzir determinado conteúdo ou aprofundá-lo, determinar uma estratégia de superação para as dificuldades dos alunos, são situações que evidenciam o conhecimento do conteúdo e ensino.

Um professor que deseje preparar uma atividade pedagógica sobre a soma de frações para turmas diferenciadas – anos iniciais ou anos finais do Ensino Fundamental – fará uso desse conhecimento.

Conhecimento do conteúdo e currículo: é o conhecimento dos programas curriculares que se referem a um dado nível de ensino, isto é, que conteúdos devem aprender os alunos e quais as suas orientações na aprendizagem.

O professor demonstra esse conhecimento ao compreender, por exemplo, que os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) orientam o ensino do conceito de fração, em diferentes níveis, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o terceiro ano do Ensino Médio.

Para finalizar, Ball et al. (2008) consideram fundamental que os professores conheçam os conteúdos que ensinam, porque se os professores não conhecem bem determinados conteúdos como poderão ajudar seus alunos a aprendê-los. Outra conclusão dos autores é que os cursos de formação de professores devem focar, principalmente, no preparo dos professores no sentido de conhecerem e serem capazes de usar a Matemática que é necessária no trabalho de ensinar.

Nesse sentido, Ma (1999) defende que os professores tenham domínio dos conteúdos que lecionam e identifica uma série de características de professores que possuem uma profunda¹⁰ compreensão da Matemática fundamental.

(MA, 1999 apud DAMICO, 2007), elenca essas características:

- O ensino de um professor com compreensão profunda da Matemática fundamental tem conectividade, ou seja, faz conexão entre conceitos matemáticos e procedimentos, evitando que a aprendizagem dos alunos seja fragmentada; em vez de aprenderem tópicos isolados, os alunos aprendem um corpo unificado de conhecimentos.
- Aqueles que atingiram um alto grau de conhecimento da Matemática elementar apreciam os diferentes aspectos de uma ideia e as várias abordagens à resolução de uma questão, assim como as suas vantagens e inconvenientes. Além disso, são capazes de fornecer explicações matemáticas desses aspectos e abordagens. Deste modo, os professores podem guiar os seus alunos em direção a uma compreensão flexível da disciplina.
- Professores que tenham um profundo conhecimento da Matemática fundamental têm uma atitude favorável em relação à Matemática e estão particularmente atentos aos “simples, mas poderosos conceitos e princípios básicos da Matemática”, além de terem a tendência a revisitar e reforçar essas ideias básicas. Ao centrarem a sua atenção nessas ideias básicas, os alunos não são apenas encorajados a abordar problemas, mas são conduzidos a desenvolver atividade Matemática real.
- Finalmente, professores com um alto grau de conhecimento da Matemática elementar não estão limitados ao conteúdo que deve ser ensinado num certo ano de escolaridade. Em lugar disso, têm um conhecimento profundo do todo o currículo matemático

¹⁰ A autora define a compreensão de um tópico com profundidade como a forma de conectá-lo a ideias conceituais mais poderosas e gerais em relação ao assunto. Quanto mais próxima uma ideia é da estrutura da disciplina, mais poderosa será e, conseqüentemente, mais tópicos será capaz de abarcar (MA, 1999 apud DAMICO, 2007, p. 38)

elementar. Estão preparados para aproveitar sempre uma oportunidade para rever conceitos cruciais que os alunos estudaram anteriormente. Além disso, sabem o que os alunos deverão aprender a seguir, e aproveitam as oportunidades para estabelecer as bases para essa aprendizagem. (DAMICO, 2007, p.39)

Essas características referentes ao conhecimento matemático de professores dos anos iniciais identificadas nos estudos de Ma (1999) coadunam com o conhecimento matemático para o ensino de Ball et al. (2008), por isso as considerações apresentadas nesses trabalhos fornecem importantes subsídios para a presente pesquisa, uma vez que pretendemos identificar que conhecimentos professores dos anos iniciais demonstram sobre alguns conceitos relativos aos números racionais.

No próximo capítulo apresentamos a metodologia da pesquisa.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos a metodologia utilizada neste estudo. Iniciaremos com uma discussão teórico-metodológica justificando o tipo de pesquisa. Em seguida, o desenvolvimento da pesquisa, momento que descreveremos o universo da pesquisa e a coleta de dados, depois faremos a descrição do instrumento diagnóstico e sua análise.

3.1 Discussão teórico-metodológica

Este estudo teve como objetivo investigar como os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais, tomando por base as expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco.

Realizamos, então, uma pesquisa descritiva de caráter diagnóstico em que observamos fenômenos e tentamos interpretá-los. Optamos por um estudo descritivo porque, de acordo com Rudio (1992, p.55), assegura que o pesquisador procure “conhecer e interpretar a realidade sem nela interferir para modificá-la”.

Para responder a questão de investigação e dar conta dos objetivos analisamos os dados quantitativamente e qualitativamente por meio de um questionário que foi o instrumento diagnóstico. Escolhemos o questionário como instrumento de coleta de dados porque, segundo Cervo e Bervian (1993), é a forma usada em estudos descritivos, pois possibilita medir, com melhor exatidão, o que se deseja.

3.2 Desenvolvimento da pesquisa

A coleta dos dados da pesquisa aconteceu na Faculdade Metropolitana, no município de Jaboatão dos Guararapes, região metropolitana de Recife. A Secretaria de Educação deste município possui um calendário em que uma vez por mês

professores dos anos iniciais, lotados em regiões específicas, são convocados para a formação que acontece, geralmente, na faculdade citada acima.

Assim, como os sujeitos de nossa pesquisa são professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em pleno exercício de docência, solicitamos autorização da Secretaria de Educação do referido município para que, em um dia de formação com professores que lecionam no 4º e 5º ano, pudéssemos aplicar o questionário. Escolhemos professores do 4º e 5º ano porque as expectativas de aprendizagem que constam no instrumento diagnóstico se referem ao 4º e 5º ano.

Nossa solicitação foi atendida para os dias 29/05 e 04/06/2014. No dia 29/05 aplicamos os questionários para 82 professores do 5º ano, 46 professores pela manhã, no horário de 9:00 às 11:30 e 36 professores à tarde, no horário de 14:00 às 16:30. No dia 04/06 foram 70 professores do 4º ano, 42 pela manhã, de 9:00 às 11:30, e 28 à tarde de 14:00 às 16:30. Assim, tivemos um total de 152 respondentes.

No início de cada encontro informamos aos professores que se tratava de uma pesquisa de mestrado e solicitamos que contribuíssem no sentido de responder todos os itens do questionário, sempre justificando suas respostas. Em seguida, apresentamos o primeiro item do questionário explicando como eles deveriam proceder e, antes de autorizarmos o início, perguntamos se havia alguma dúvida quanto à dinâmica da pesquisa.

Depois que todos devolveram o material tivemos com os sujeitos participantes da pesquisa um momento de discussão sobre as questões abordadas no instrumento diagnóstico. Fizemos assim para compensar a formação que esses docentes deveriam ter naquele dia.

3.3 Descrição e análise do instrumento diagnóstico

Para o ensino dos números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) elencam vinte e quatro expectativas de aprendizagem, distribuídas entre os 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

Para não tornar o instrumento diagnóstico maçante e cansativo e adequá-lo ao tempo disponível para a realização da pesquisa, fizemos um recorte no total das

expectativas de aprendizagem de modo que, das vinte e quatro que o documento apresenta, escolhemos cinco. A escolha se deu de forma aleatória, uma vez que não vamos investigar todos os pontos que os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) abordam sobre os números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mas algumas ideias relativas ao conceito desse campo numérico.

As expectativas de aprendizagem foram numeradas com dois algarismos, separados por um ponto. O primeiro se refere ao ano de escolaridade que o documento sugere que se inicie seu trabalho e o segundo a ordem em que a expectativa de aprendizagem aparece no instrumento diagnóstico.

Por exemplo: “Reconhecer frações como partes iguais de um todo” recebeu a numeração 4.1, isto quer dizer que o trabalho com a expectativa de aprendizagem 4.1 se inicia no 4º ano e ela é a primeira que aparece no instrumento diagnóstico.

Abaixo apresentamos as expectativas de aprendizagem que formaram o instrumento diagnóstico:

4.1 Reconhecer frações como partes iguais de um todo.

4.2 Determinar a posição aproximada na reta numérica, de frações com numerador unitário ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ e $1/10$).

5.3 Identificar e representar frações menores e maiores que a unidade.

5.4 Relacionar frações equivalentes em situações contextualizadas.

5.5 Comparar e ordenar números na representação decimal, usados em diferentes contextos.

Para cada expectativa de aprendizagem elaboramos quatro propostas de ensino (Propostas A, B, C e D), cujos detalhes apresentaremos na próxima seção.

Como dissemos na introdução, consideramos uma “proposta de ensino” como uma sequência de ensino, ou mesmo um exemplo que pode ser utilizado, para introduzir as ideias de determinado conteúdo específico ou aprofundá-lo.

Assim, a partir das considerações, orientações e contribuições dos estudos de Kieren (1976, 1988), Behr et al. (1983), Nunes e Bryant (1997), Cunha (2002), Merlini (2005), Canova (2006), Teixeira (2008), Esteves (2009), dentre outros, e também documentos oficiais como os PCN (BRASIL, 1997), PCPE (PERNAMBUCO, 2012) e PSA (PERNAMBUCO, 2013), elaboramos as propostas de ensino que para

esta pesquisa consideramos correta, errada ou correta do ponto de vista da Matemática.

Por exemplo, a proposta C *“Mostrar para a criança, por meio de desenho em cartolina, que $\frac{2}{5}$ de uma barra de chocolate corresponde a duas quantidades iguais de $\frac{1}{5}$ da barra de chocolate”*, da expectativa de aprendizagem 4.1 *“Reconhecer frações como partes iguais de um todo”*, é considerada correta, uma vez que duas quantidades de $\frac{1}{5}$ equivalem a uma quantidade de $\frac{2}{5}$, e os PSA (PERNAMBUCO, 2013) orientam o trabalho com a fração como partes iguais de um todo, a partir da composição do todo pelas partes.

A proposta B *“Dizer para criança que 1,198 é maior que 1,3 porque tem mais algarismos”*, da expectativa de aprendizagem 5.5 *“Comparar e ordenar números na representação decimal, usados em diferentes contextos”*, é considerada errada, pois 3 décimos é maior que 198 milésimos, e também estudos como Cunha (2002), Esteves (2009), os PCN (BRASIL, 1997) orientam que, para comparar números decimais, não podemos raciocinar sobre números racionais como se fossem números naturais, considerando apenas a quantidade de algarismos.

Já a proposta B *“Dizer para a criança que para obtermos frações equivalentes basta multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero”*, da expectativa de aprendizagem 5.4 *“relacionar frações equivalentes em situação contextualizada”*, é considerada correta apenas do ponto de vista da Matemática, uma vez que reforça a ideia de fração como dois números naturais separados por um traço. Prática desaconselhável pelos PCPE (PERNAMBUCO, 2012).

Por isso, decidimos no instrumento diagnóstico perguntar ao professor não apenas se a proposta seria correta ou errada, mas, sendo correta, se ele a usaria em sala de aula; poderia usar em sala de aula; ou não usaria em sala de aula.

Tal procedimento do professor ao julgar a proposta como correta, associa-la à sua prática em sala de aula, foi de grande relevância, uma vez que contribuiu no sentido de depurar o instrumento diagnóstico, identificar vertentes do *conhecimento matemático para o ensino* e possíveis entraves para a compreensão de ideias relativas aos números racionais presentes nas propostas de ensino.

Assim, o professor, ao julgar a proposta de ensino, teria que escolher uma das alternativas abaixo, justificando sua resposta:

- A proposta está correta, e eu certamente usaria em sala de aula.
- A proposta está correta, e eu poderia usar em sala de aula.
- A proposta está correta, mas eu não usaria em sala de aula.
- A proposta está errada, e eu jamais usaria em sala de aula.

Em que levantamos as seguintes hipóteses:

Proposta de ensino considerada correta: o professor que julgar a proposta “correta, e eu certamente usaria em sala de aula” pode indicar *conhecimento matemático para o ensino*; o que julgar a proposta “correta, e eu poderia usar em sala de aula” ou “correta, mas eu não usaria em sala de aula” pode indicar *conhecimento matemático para o ensino*, no entanto, por discordar da forma como foi apresentada, estabelecer condições para seu uso, considerar inadequada para os anos iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, discordar de seus aspectos pedagógicos, poderia não usar, ou não usaria a proposta em sala de aula e, por fim, o professor que julgar “errada, e eu jamais usaria em sala de aula”, apresenta dificuldade quanto à compreensão do conteúdo de Matemática presente na proposta.

Proposta de ensino considerada errada: o professor que julgar a proposta “errada, e eu jamais usaria em sala de aula” pode indicar *conhecimento matemático para o ensino*. Já o professor que julgar a proposta “correta” apresenta dificuldade quanto à compreensão do conteúdo de Matemática da proposta.

Proposta de ensino correta do ponto de vista da Matemática: o professor que julgar a proposta “correta, e eu certamente usaria em sala de aula” pode indicar *conhecimento comum do conteúdo*. O professor que julgar “correta, e eu poderia usar em sala de aula” pode indicar *conhecimento comum do conteúdo*, e mesmo discordando de algum aspecto pedagógico da proposta poderia usa-la em sala de aula. Já o professor que julgar “correta, mas eu não usaria em sala de aula” pode indicar *conhecimento especializado do conteúdo*, uma vez que não usaria a proposta em sala de aula e, por fim, o sujeito que julgar “errada e eu jamais usaria em sala de aula”, apresenta dificuldade quanto à compreensão do conteúdo de Matemática da proposta.

Assim, analisaremos cada proposta de ensino, referentes as cinco expectativas de aprendizagem, classificando-as como correta, errada ou correta do ponto de vista da Matemática.

EXPECTATIVA 4.1 RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.

Proposta A: Apresentar, por meio de material concreto, a fração como partes iguais de um todo e mostrar para criança, como exemplo, que a parte pintada da figura abaixo é $\frac{2}{3}$.



O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino de fração como partes iguais de um todo em quantidade contínua, em que não se considerou a conservação da área da figura.

Geralmente, o conceito de fração é introduzido no âmbito escolar por meio do modelo parte-todo. No entanto, para representar as partes pintadas de uma figura por meio de uma fração, a figura deve ser dividida em partes de mesma área, o que não ocorreu na proposta de ensino em apreço.

Nesse sentido, diversos estudos como Campos et al. (1995); Nunes et al. (2003); Merlini (2005); Canova (2006) comprovaram que alunos e professores, para representar as partes pintadas de uma figura por meio de uma fração, utilizam a dupla contagem - o total das partes pintadas da figura para o numerador e o total de partes para o denominador - sem considerar a conservação da área da figura, o que pode indicar o uso da linguagem das frações sem compreender sua natureza.

Nunes e Bryant (1997), por exemplo, comprovaram que o procedimento da dupla contagem permite que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações, quando, na realidade, diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam.

Portanto, proposta considerada errada.

EXPECTATIVA 4.1: RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.

Proposta B: Dizer para a criança que todos os bonés da figura abaixo são do mesmo tamanho, e explicar-lhe que a quantidade de bonés azuis pode ser representada pela fração $\frac{2}{6}$.



O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que aborda a ideia de fração como partes iguais de um todo em quantidade discreta.

Uma das características das quantidades discretas no contexto de fração como parte-todo é que o todo deixa de ser uma unidade para ser representado por um conjunto de objetos de mesmo tamanho, e as partes não são divididas, necessariamente, de forma igual.

Na proposta em apreço, por exemplo, o todo deixa de ser uma unidade para ser representado por um conjunto de seis bonés, de mesmo tamanho, e as partes não foram divididas igualmente, uma vez que temos quatro bonés vermelhos e dois azuis.

Os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) orientam para o ensino dos números racionais nos anos iniciais o trabalho com as quantidades contínuas e discretas.

Assim, consideramos a proposta correta.

EXPECTATIVA 4.1: RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.

Proposta C: Mostrar para a criança, por meio de desenho em cartolina, que $\frac{2}{5}$ de uma barra de chocolate corresponde a duas quantidades iguais de $\frac{1}{5}$ da barra de chocolate.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que aborda o número fracionário como um número que representa quantidades iguais que formam um todo.

Geralmente, no trabalho com frações como partes iguais de um todo, a fração $\frac{1}{4}$, por exemplo, é vista como uma parte pintada de um inteiro dividido em quatro partes iguais, mas não como uma quantidade que repetida quatro vezes forma uma unidade.

Nesse sentido, a proposta se apoia nos PSA (PERNAMBUCO, 2013) e utiliza o significado parte-todo de quantidade contínua, a partir de uma situação bem comum do universo da criança, para explorar a ideia de número fracionário a partir da composição do todo pelas partes.

Portanto, proposta considerada correta.

EXPECTATIVA 4.1: RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.

Proposta D: Desenhar um retângulo na lousa dividi-lo em cinco partes iguais pintar quatro dessas partes e explicar para a criança que a parte colorida do retângulo pode ser representada pela fração $\frac{4}{5}$ em que o quatro se chama numerador, que indica quantas partes do retângulo foram pintadas, e o cinco se chama denominador, que indica em quantas partes iguais o retângulo foi dividido.
--

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de fração como parte-todo em quantidade contínua a partir do modelo tradicional.

É uma proposta correta do ponto de vista da Matemática. No entanto, estudos como Nunes e Bryant (1997), Escolano e Gairín (2005); Merlini (2005); Rodrigues (2005); Canova (2006); Teixeira (2008) confirmam que este tipo de proposta de ensino, cuja ênfase está nos procedimentos e algoritmos, não favorece a aprendizagem e leva o aluno a conceber a fração como dois números naturais separados por um traço.

Para os PSA (PERNAMBUCO, 2013), esta proposta de ensino é desaconselhável para essa etapa de escolaridade.

Por isso, vamos considerá-la correta do ponto de vista da Matemática, porém, inadequada para o processo de ensino e aprendizagem da expectativa de aprendizagem 4.1.

EXPECTATIVA 4.2: DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ E $1/10$).

Proposta A: Apresentar algumas frações unitárias em uma reta numérica em que apareçam os números naturais 0 e 1 e explicar a criança que, assim como os naturais, as frações são números, e podem ser representadas na reta numérica.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que concebe a fração como um número a partir da posição aproximada de frações unitárias na reta numérica.

Os PCN (BRASIL, 1997) salientam que o ensino e a aprendizagem das frações pressupõem algumas rupturas com as ideias construídas pelos alunos a respeito dos números naturais, uma delas é conceber que a representação a/b com b diferente de zero é um número e não dois números naturais e um traço separando-os.

Nesse sentido, o trabalho de representação das frações unitárias na reta numérica, conforme a proposta de ensino apresenta, se constitui numa oportunidade de o professor abordar as frações como números.

Assim, consideramos a proposta de ensino correta.

EXPECTATIVA 4.2: DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ E $1/10$).

Proposta B: Apresentar uma reta numérica na lousa, representar, nessa reta as frações $1/2$ e um $1/4$ e explicar para a criança que a distância do zero a $1/2$ corresponde a duas vezes a distância do zero a $1/4$.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que concebe a fração como um número a partir da associação de frações unitárias a pontos específicos na reta numérica.

Conforme recomendam os PCPE (PERNAMBUCO, 2012), a fração deve ser compreendida em sua totalidade, como representação de uma quantidade. No caso

da proposta, trata-se de perceber, na reta numérica, que duas vezes a distância do zero a $\frac{1}{4}$ equivalem a uma vez a distância do zero a $\frac{1}{2}$.

Nesse sentido, a proposta de ensino se constitui numa oportunidade de, por meio do trabalho de associação de frações unitárias na reta numérica, apresentar às crianças a fração como um número e não como dois números naturais separados por um traço.

Portanto, consideramos a proposta correta.

EXPECTATIVA 4.2: DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ E $\frac{1}{10}$).

Proposta C: Apresentar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ em uma reta numérica em que apareçam os números naturais 0 e 1 e explicar que, embora cinco seja maior que três, a fração $\frac{1}{5}$ é menor que a fração $\frac{1}{3}$, pois a distância entre o zero e $\frac{1}{5}$ é menor que a distância entre o zero e $\frac{1}{3}$.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora o princípio da ordenação, por meio da representação das frações unitárias na reta numérica.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos estudantes acerca dos números naturais. Nos naturais, por exemplo, temos $3 < 5$, nos racionais, $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$.

Estudos de Nancy Mack (1993) revelaram que estudantes ao serem questionados quanto à comparação das fatias de duas pizzas de mesmo tamanho uma dividida em seis partes iguais e outra dividida em oito partes iguais não tiveram dificuldades em responder que a pizza dividida em seis partes iguais apresentava a fatia maior, no entanto, os mesmos estudantes em situações de avaliação escolar ao comparar $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{8}$ responderam que $\frac{1}{8}$ é maior que $\frac{1}{6}$, porque $8 > 6$.

Assim, um ponto que pode ser explorado ao trabalhar a representação das frações unitárias na reta numérica é o princípio da ordenação. É justamente esse princípio que a proposta explora.

Portanto, consideramos a proposta correta.

EXPECTATIVA 4.2: DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ E $\frac{1}{10}$).

Proposta D: Explicar para criança, a partir da reta numérica na lousa, que o ponto que representa a fração $\frac{1}{2}$ pode ser representado pelo número decimal 1,2, ou seja, a fração $\frac{1}{2}$ estaria um pouco depois do número 2.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que aborda a comparação e localização de números racionais na reta numérica.

Construímos essa proposta errada uma vez que estudos em Educação Matemática têm apontado que tanto alunos como professores podem interpretar a fração como dois números naturais sobrepostos, separados por um traço, que pode ser uma vírgula.

Merlini (2005), ao analisar as estratégias que resultavam em erro, verificou que estudantes da 5ª e 6ª séries representavam a fração $\frac{1}{5}$ com a notação 1,5. Essa estratégia também foi encontrada no estudo de Bianchini (2001), feito com alunos da 3ª série do Ensino Fundamental. Em uma de suas atividades, os alunos representaram 1,9 como $\frac{1}{9}$, confundindo a vírgula com o traço de fração. Os professores no estudo de Canova (2006) também representaram a fração $\frac{1}{5}$ como 1,5. Santos (2011), ao analisar as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal de Recife na resolução de questões do Saepe sobre números racionais, constatou que além de o aluno não estabelecer corretamente a relação entre a forma fracionária e a forma decimal de um número racional, pode associar a fração $\frac{1}{2}$ ao número decimal 1,2 pelo fato de as duas representações apresentarem os algarismos 1 e 2. Assim, consideramos a proposta errada.

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.

Proposta A: Representar na lousa, por meio de dois círculos de mesmo tamanho, duas pizzas. Dividir, cada uma, em três partes iguais e explicar para a criança que quatro pedaços de $\frac{1}{3}$ de pizza podem ser representados pela fração $\frac{4}{3}$.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que apresenta as frações maiores que a unidade a partir das frações fundamentais.

A proposta trata do trabalho com as frações maiores que a unidade. Isso pode parecer contraditório para o aluno e professor, na medida em que frações significavam partes de um inteiro.

No entanto, os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) orientam que, para a ampliação dessa ideia, é importante retomar o trabalho com as frações fundamentais, ou seja, aquelas com numerador unitário.

Nesse sentido, como quatro “pedaços” de $\frac{1}{3}$ de pizza podem ser representados pela fração $\frac{4}{3}$, a proposta de ensino se constitui numa oportunidade de levar a criança a dar sentido às frações maiores que a unidade.

Assim, consideramos a proposta de ensino correta.

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.
--

Proposta B: A partir da representação da reta numérica na lousa, explicar para a criança que a fração $\frac{5}{4}$ encontra-se localizada entre os números um e dois, pois é um pouco maior que a unidade, marcando cinco pedaços iguais a um quarto.
--

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que apresenta as frações maiores que a unidade como um número que pode ser representado na reta numérica, a partir das frações unitárias.

Estudos como Merlini (2005), Canova (2006), Teixeira (2008) apontam que tanto alunos como professores não compreendem a fração como um número. De acordo com esses pesquisadores, isso pode ocorrer pelo fato de o conceito de fração ser trabalhado no ambiente escolar levando-se em consideração apenas o significado parte-todo.

Nesse sentido, a proposta de ensino se apresenta como uma oportunidade, tanto para introduzir a ideia de frações maiores que a unidade como para compreender a fração como um número.

Portanto, proposta de ensino considerada correta.

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.

Proposta C: Dizer para a criança que a fração $\frac{4}{3}$, pode representar a divisão de quatro barras de chocolates igualmente entre três pessoas, em que cada uma ganha uma barra inteira mais um terço da barra que sobrou.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino em que a fração maior que a unidade é interpretada como um quociente entre duas grandezas distintas (barra de chocolate e pessoa) que pode ser representado por um número misto.

Kieren et al. (1988), em seus estudos com números racionais, sugerem que as frações são produzidas por divisões. Kerslake (1986), Nunes e Bryant (1997), Bezerra (2001), Escolano e Gairín (2005), defendem em seus estudos a ideia de que a introdução do ensino de frações a partir do significado quociente pode proporcionar um melhor entendimento desse conteúdo.

Os PSA (PERNAMBUCO, 2013) orientam que no quinto ano de escolarização a ideia de fração como parte de um todo seja ampliada para a ideia de divisão.

Consideramos a proposta de ensino correta, uma vez que se constitui numa oportunidade de conduzir o estudante a estabelecer relação entre fração e divisão.

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.

Proposta D: Representando três pizzas por meio de três círculos idênticos na lousa, explicar à criança que se dividíssemos as três pizzas para quatro pessoas nenhuma delas ganharia uma pizza inteira. Mas, pode-se dividir cada pizza em quartos, e cada pessoa ganharia três pedaços de um quarto, o que corresponderia a $\frac{3}{4}$.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino em que as frações menores que a unidade é interpretada como um quociente entre duas grandezas distintas (pizzas e pessoas).

Nesse sentido, a proposta de ensino se constitui numa oportunidade de o professor trabalhar, em sala de aula, a fração $\frac{3}{4}$, não apenas como um inteiro

dividido em quatro partes iguais das quais foram consideradas três, mas, sobretudo, como o quociente entre duas grandezas distintas.

Portanto, proposta considerada correta.

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.
--

Proposta A: Explicar para criança a equivalência das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ a partir da seguinte situação: Tico e Teco ganharam uma barra de chocolate de mesmo tamanho; Tico comeu $\frac{1}{2}$ de sua barra e Teco $\frac{2}{4}$ da sua, apesar das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ serem representadas por numerais diferentes, Tico e Teco comeram a mesma quantidade de chocolate.
--

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de equivalência de frações em quantidades extensivas - quantidades de mesma natureza (barra de chocolate).

A proposta se refere à equivalência de frações em quantidades extensivas, visto que as quantidades em questão (barra de chocolate) são de mesma natureza e sua comparação se baseia na lógica parte-todo.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), uma das dificuldades do estudante compreender o conceito de fração é entender a noção de equivalência, ou seja, entender que cada fração pode ser representada por diferentes e infinitas representações, uma vez que no campo dos naturais uma determinada quantidade era representada por um único número e, agora, no campo dos racionais, é necessário conceber infinitas representações para uma determinada quantidade.

A proposta, então, apresenta a ideia de fração equivalente numa situação contextualizada que pode ajudar a criança a compreender que uma fração pode ter infinitas representações. Assim, consideramos a proposta correta.

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.
--

Proposta B: Dizer para a criança que para obtermos frações equivalentes basta multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que utiliza a abordagem tradicional – baseada em algoritmos e procedimentos – para obter classes de equivalência.

Para os anos iniciais do Ensino Fundamental, trata-se de uma situação de ensino em que o conceito de equivalência de fração é abordado por meio de um processo mecânico cuja ênfase está no domínio de um algoritmo, reforçando a ideia de fração como dois números naturais (numerador e denominador) separados por um traço (NUNES E BRYANT, 1997; CANOVA, 2006; MERLINI, 2005). Prática desaconselhável pelos PCPE (PERNAMBUCO, 2012).

Portanto, o ensino de fração equivalente a partir da proposta citada acima pode conduzir a criança a construir classes de equivalência de forma mecânica, por meio de procedimentos e algoritmos, sem atribuir nenhum significado à ideia de equivalência de frações.

Sendo assim, vamos considerá-la correta do ponto de vista da Matemática, porém, inadequada para o processo de ensino e aprendizagem da expectativa de aprendizagem 5.4.

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.
--

Proposta C: Apresentar a criança a seguinte situação: Numa mesa há três jarras distintas A, B e C. Na jarra A temos suco de laranja com $\frac{1}{5}$ de concentrado e $\frac{4}{5}$ de água; na jarra B também suco de laranja com $\frac{1}{5}$ de concentrado e $\frac{4}{5}$ de água; se juntarmos os conteúdos das jarras A e B na Jarra C vamos obter suco de laranja com $\frac{2}{5}$ de concentrado.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de frações equivalentes em quantidades intensivas.

No que concerne à equivalência de fração, Nunes et al. (2003) consideram dois aspectos essenciais, equivalências em quantidades extensivas e em quantidades intensivas. Na proposta apresentada acima é importante perceber que ela não é correta porque em situações de quantidades intensivas não é possível adicionar frações da mesma forma que em situações de quantidades extensivas.

Considerando-se, então, os aspectos intensivos das quantidades envolvidas na situação, a quantidade de concentrado no recipiente C continuará sendo $\frac{1}{5}$, e não $\frac{2}{5}$ resultado da soma de $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, como a proposta apresenta.

Assim, a proposta é considerada correta.

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.

Proposta D: Tomando por base as figuras abaixo, explicar para a criança que as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ são equivalentes.



O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a equivalência de fração em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo.

Nunes et al. (2003) chamam a atenção que, ao tratar de equivalência de fração em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo, a classe de equivalência depende do tamanho do todo (ou da unidade).

Sendo assim, a proposta D é considerada errada, porque as duas figuras representadas pelas frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ só pertenceriam a uma classe de equivalência de frações se fossem do mesmo tamanho.

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.

Proposta A: Dizer à criança que o sucessor de 0,8 é 0,9; pois 9 é o sucessor de 8.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que trabalha a ordenação de números decimais, por meio da ideia de sucessor e antecessor, muito frequente nos números naturais.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997), ao raciocinar sobre números racionais como se fossem números naturais, enfrentam-se vários entraves. Por exemplo, se a sequência dos números naturais permite falar em sucessor e

antecessor, para os números racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números decimais existem infinitos números decimais.

Assim, a proposta é considerada errada.

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
Proposta B: Dizer para criança que 1,198 é maior que 1,3; pois tem mais algarismos.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino de comparação de números decimais num contexto matemático.

Um entrave, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997), que se constrói ao raciocinar sobre números racionais como se fossem números naturais é o “tamanho” da escrita numérica, que nos naturais é um bom indicador da ordem de grandeza ($8345 > 41$). No entanto, a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério, pois a comparação de números decimais não depende da quantidade de algarismos da parte decimal. Esteves (2009) constatou em seu estudo que professores utilizavam as regras do conjunto dos números naturais para comparar números decimais. O mesmo fenômeno foi observado nos estudos de Padovan (2000) e Silva (2006) com estudantes do Ensino Fundamental.

Portanto a proposta de ensino é considerada errada.

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
Proposta C: Apresentar a seguinte situação: tico e teco, ao registrar suas alturas no quadro, escreveram: tico 1,30m; teco 1,3m; a partir dos registros explicar para as crianças, utilizando uma fita métrica, por exemplo, que tico e teco possuem a mesma altura, pois tanto 0,3 metro quanto 0,30 metro correspondem a 30 centímetros.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de equivalência de números decimais, num contexto de medida.

Os PSA (PERNAMBUCO, 2013) orientam que o trabalho com os números decimais pode ser articulado com as medidas. Nesse sentido, a proposta apresenta duas formas de escrita (1,30m e 1,3m) para um mesmo número decimal.

No entanto, cabe reforçar, conforme orientam os PCN (BRASIL, 1997), que não se deve raciocinar sobre números racionais como se fossem números naturais.

Nesse sentido, ao explorar a ideia de equivalência presente na proposta, é importante não considerar o decimal 30 centésimos maior que o decimal 3 décimos e, também, não fazer associação da parte decimal das alturas de Tico e Teco (3 e 30) com os valores desses números no conjunto dos números naturais.

Consideramos então a proposta correta.

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
--

Proposta D: Dizer à criança que R\$ 0,10 (dez centavos) tanto equivale a dez centésimos do real, como a um décimo do real.

O objetivo da proposta é investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de equivalência de número decimal num contexto monetário.

De acordo com os PSA (PERNAMBUCO, 2013), o recurso ao nosso sistema monetário permite atribuir sentido à representação decimal e consolidar as ideias de décimos e centésimos dos números racionais na representação decimal. Por exemplo, associar R\$0,01 (um centavo) a um centésimo de real, permite o estabelecimento de relações, tais como R\$ 0,10 como dez centésimos do real, que equivale a um décimo do real, ou ainda, 50 centavos, representado por R\$ 0,50, deve ser associado a meio real, ou 5 décimos (5 moedas de 10 centavos, ou R\$ 0,10).

Assim, consideramos a proposta correta.

No próximo capítulo, faremos a análise dos resultados.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo destina-se a apresentar os resultados obtidos pela análise do questionário aplicado aos professores do 4º e 5º ano que julgaram propostas de ensino para o trabalho com os números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Participaram da pesquisa 70 professores do 4º ano e 82 professores do 5º ano, cujos questionários numeramos de 01 a 70 e 01 a 82, respectivamente. Cada sujeito foi identificado pela letra “P” de professor e uma sequência de três algarismos. O das centenas representa o ano que o professor leciona e os dois restantes é o número do questionário. Por exemplo, (P503) é um professor do 5º ano, cujo número do questionário é 03.

O instrumento diagnóstico foi composto de cinco expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco, referentes aos números racionais, numeradas de acordo com o ano de escolaridade que o documento sugere que se inicia seu trabalho e a ordem em que foram dispostas no questionário.

Por exemplo: “Reconhecer frações como partes iguais de um todo” recebeu a numeração 4.1, o primeiro algarismo se refere ao ano de escolaridade que o documento sugere que se inicia o seu trabalho, no caso, 4º ano, e o segundo a ordem em que a expectativa apareceu no questionário.

Cada expectativa de aprendizagem apresentou quatro propostas de ensino em que os sujeitos escolhiam uma das alternativas:

- A proposta está correta e eu certamente usaria em sala de aula.
- A proposta está correta e eu poderia usar em sala de aula.
- A proposta está correta, mas eu não usaria em sala de aula.
- A proposta está errada e eu jamais usaria em sala de aula.

Em cada proposta havia um espaço para o professor apresentar sua justificativa.

Sendo assim, para alcançarmos os objetivos definidos nessa pesquisa, a análise dos resultados de cada proposta deu-se por meio da coordenação de duas perspectivas de análise – quantitativa e qualitativa - em dois momentos distintos:

1º momento: na intenção de identificar conhecimentos sobre alguns conceitos relativos aos números racionais, analisamos o resultado dos professores que, ao julgarem a proposta de ensino, apresentaram resposta idêntica à obtida na análise prévia do questionário no que diz respeito à proposta estar correta ou errada e apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*, na acepção de Ball et al. (2008).

2º momento: na intenção de identificar entraves para o trabalho com os números racionais analisamos o resultado dos professores que, ao julgarem a proposta, apresentaram resposta diferente da obtida pela análise prévia do questionário no que diz respeito à proposta estar correta ou errada.

4.1 Análise da expectativa de aprendizagem 4.1

EXPECTATIVA 4.1 RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.

Proposta A: Apresentar, por meio de material concreto, a fração como partes iguais de um todo e mostrar para criança, como exemplo, que a parte pintada da figura abaixo é $\frac{2}{3}$.



O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino de fração como partes iguais de um todo em quantidade contínua, em que não se considerou a conservação da área da figura.

Na análise prévia do questionário, ela foi considerada errada, uma vez que as partes pintadas da figura não estão divididas em partes iguais, por isso não podem ser representadas por uma fração.

A tabela a seguir apresenta os resultados, que serão analisados em dois momentos distintos:

Tabela 2 - Resultado referente à proposta A da expectativa de aprendizagem 4.1

JULGARAM A PROPOSTA "A"	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	31%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	24%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	5%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	39%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	1%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: De acordo com a tabela dois, 39% dos professores julgaram a proposta errada coincidindo com a resposta obtida na análise prévia do questionário. Desse total, 36 professores apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*, conforme Ball et al (2008):

(P426): "A resposta está incorreta. Eu não usaria em sala de aula, pois a parte pintada da figura acima teria que ser as três partes iguais e não estão".

(P576): "Fração são partes divididas igualmente, a figura acima não representa uma fração".

São sujeitos que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, pois compreendem que a figura não está dividida em partes iguais, por isso não pode ser representada pela fração $2/3$.

Já, os sujeitos (P438) e (P449) justificaram:

(P438): "A proposta está errada, porque fração é um inteiro dividido em partes iguais, a figura não mostra isso. Poderíamos até usar em sala de aula para que o aluno perceba o erro".

(P449): "Eu poderia usar para mostrar que essa representação ficou errada".

São docentes que além de compreender que a proposta está errada, sugerem trabalhar a situação em sala de aula no sentido de favorecer a aprendizagem dos alunos. Tal ação caracteriza o *conhecimento especializado do conteúdo*.

Assim, apenas os 36 professores que julgaram a proposta errada e justificaram sua resposta demonstrando *conhecimento matemático para o ensino*

compreende que para trabalhar a fração como partes iguais de um todo é necessário considerar a conservação da área da figura.

2º MOMENTO: Ao analisar a tabela 2 observamos que 60% dos professores julgaram a proposta correta. É um dado preocupante, uma vez que as partes pintadas da figura não estão divididas em partes de mesma área, por isso não podem ser representadas por uma fração.

Diversos estudos como Nunes e Bryant (1997); Nunes et al. (2003); Merlini (2005); Canova (2006) comprovaram que alunos e professores, para representar as partes pintadas de uma figura por meio de uma fração, utilizam a dupla contagem - o total das partes pintadas da figura para o numerador e o total de partes para o denominador - sem considerar a conservação da área da figura.

Assim, é provável que os sujeitos que julgaram a proposta correta não consideraram a conservação da área da figura, utilizaram o procedimento da dupla contagem e concluíram que $\frac{2}{3}$ seria uma resposta apropriada. No entanto, como a figura não está dividida em partes de mesma área, não pode ser representado por uma fração.

Essa compreensão errônea, acerca desse aspecto das frações, pode estar presente na prática pedagógica desses docentes, conforme justificativas abaixo:

(P468): *“A proposta da atividade está correta e trabalhar com representações é importante para a compreensão do conteúdo”.*

(P514): *“Sim, porque é uma maneira mais fácil da criança assimilar a fração”.*

Portanto, os sujeitos que julgaram a proposta correta (60%) apresentam dificuldades em compreender a fração como partes iguais de um todo em quantidade contínua conforme a proposta de ensino apresenta.

EXPECTATIVA 4.1: RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.

Proposta B: Dizer para a criança que todos os bonés da figura abaixo são do mesmo tamanho, e explicar-lhe que a quantidade de bonés azuis pode ser representada pela fração $\frac{2}{6}$.



O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que abordou a ideia de fração como partes iguais de um todo em quantidade discreta.

Proposta de ensino considerada correta na análise prévia, uma vez que no conceito de fração em quantidade discreta o todo é representado por um conjunto constituído de elementos de mesmo tamanho, e as partes que o constituem não são necessariamente divididas de forma igual.

A tabela a seguir apresenta os resultados, que serão analisados em dois momentos distintos:

Tabela 3 - resultado referente à proposta B da expectativa de aprendizagem 4.1

JULGARAM A PROPOSTA "B"	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	44%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	40%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	7%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	6%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	3%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: Conforme a tabela três 91% dos professores apresentaram resposta idêntica à resposta obtida na análise prévia do questionário.

No entanto, apenas 7% apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Vejamos alguns exemplos:

(P438): *"A proposta está correta porque a quantidade total de bonés representa $6/6$, então cada boné representa $1/6$, e os dois bonés azuis consequentemente representam $2/6$ ".*

(P540): *"O todo é uma quantidade (seis) tomando duas unidades do todo podemos representar em forma da fração $2/6$ ".*

(P515): *"Partindo do princípio que seis representa a parte inteira e temos dois bonés azuis a fração é representada por $2/6$ ".*

São sujeitos que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que reconhecem o conjunto dos seis bonés de mesmo tamanho como o todo, e a fração $2/6$ como a representação dos dois bonés azuis e podem demonstrar

conhecimento do conteúdo e ensino, tendo em vista que usariam, ou poderiam usar a proposta de ensino em sala de aula.

Outros professores que julgaram a proposta correta justificaram:

(P408): *“Ficou claro e a criança vai compreender melhor”.*

(P514): *“É um método mais fácil e com certeza o aluno não irá ter dificuldade de aprender”.*

São justificativas que não estão erradas, mas não demonstram *conhecimento matemático para o ensino*, pois nada dizem sobre o conteúdo de Matemática presente na proposta de ensino.

Outros apresentaram justificativa errada:

(P405): *“Em relação à representação da quantidade está correta, porém afirmar que os bonés são de mesmo tamanho não”.*

(P428): *“Trabalhar com o concreto é bom para aprendizagem, embora ache que o enunciado está errado”.*

São sujeitos que não compreendem as ideias sobre fração como parte-todo em quantidade discreta.

Assim, apenas os sujeitos (7%) que julgaram a proposta correta e justificaram demonstrando *conhecimento matemático para o ensino* compreendem as ideias relacionadas a fração como parte-todo, em quantidade discreta, apresentadas pela proposta de ensino.

2º MOMENTO: A tabela 3 também revela que 6% dos professores julgaram a proposta errada, ou seja, diferente da resposta obtida na análise prévia do questionário.

Vejamos algumas justificativas:

(P424): *“A proposta está errada, pois a fração não corresponde a $\frac{2}{6}$ ”.*

(P563): *“As partes pintadas não correspondem à medida de um todo e sim de figuras isoladas. Por este motivo não podem ser consideradas frações”.*

Tais sujeitos não compreendem que o todo foi representado pelo conjunto de seis bonés de mesmo tamanho, e as partes foram divididas em quatro bonés vermelhos e dois bonés azuis, sendo estes últimos representados pela fração $\frac{2}{6}$.

Vejamos ainda:

(P559): “Porque não usaria, pois complicaria a criança da forma tradicional”

(P561): “Porque na figura deixa a desejar para o aluno entender que são do mesmo tamanho. Eu traria os bonés para ser utilizado no concreto e então sim ele entenderia o que seria a proposta da atividade”.

Esses sujeitos alegaram que as crianças teriam dificuldades em compreender a proposta. Para o sujeito (P559) a dificuldade estaria no formato tradicional da proposta; já o sujeito (P561) atribuiu a dificuldade ao fato de a criança não perceber na figura que os bonés são do mesmo tamanho e afirma que o uso de material concreto proporcionaria à criança a compreensão da proposta de ensino.

No entanto, ainda que a proposta esteja apoiada no modelo tradicional de ensino isso não a torna errada, caso o sujeito (P559) discordasse do seu formato poderia ter julgado a proposta: “correta, mas eu não usaria em sala de aula”.

Em relação à justificativa do sujeito (P561), a proposta afirma em seu enunciado que os bonés são do mesmo tamanho. Ao fazer menção do uso de material concreto tudo indica que sua ênfase esteja no ensino pautado apenas na percepção, conforme Teixeira (2008), sem levar em consideração a lógica da fração.

Assim, os sujeitos que julgaram a proposta errada, apresentam dificuldades em relação às ideias de fração como parte-todo em quantidade discreta, que a proposta de ensino apresenta.

EXPECTATIVA 4.1 RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.
--

Proposta C: Mostrar para a criança, por meio de desenho em cartolina, que $\frac{2}{5}$ de uma barra de chocolate corresponde a duas quantidades iguais de $\frac{1}{5}$ da barra de chocolate.
--

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que abordou o número fracionário como um número que representa quantidades iguais que formam um todo.

Na análise prévia do questionário ela foi considerada correta, uma vez que os PSA (PERNAMBUCO, 2013) orientam que o trabalho a partir da composição do todo pelas partes pode ajudar, os estudantes, na compreensão do conceito de fração.

A seguir apresentamos os resultados:

Tabela 4 - Resultado referente à proposta C da expectativa de aprendizagem 4.1

JULGARAM A PROPOSTA “C”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	32%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	29%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	10%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	24%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	5%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 4 informa que 71% dos professores, julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 3% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Vejamos algumas justificativas:

(P438): “Usaríamos em sala de aula trabalhando o inteiro dividido em 5 partes iguais, mostrando que cada parte equivale a $\frac{1}{5}$ e que $\frac{2}{5}$ é formado por 2 partes iguais de $\frac{1}{5}$ ”.

(P431): “A proposta está correta e nos possibilita trabalhar a adição de frações com denominadores iguais”.

(P534): “Abrangeria a adição com denominadores iguais, seria de fácil entendimento”.

O sujeito (P438) reconhece a fração $\frac{2}{5}$, não apenas como uma unidade dividida em cinco partes iguais das quais foram consideradas duas, mas, sobretudo como a composição de duas quantidades iguais de $\frac{1}{5}$.

Apesar de os sujeitos (P431) e (P534) não se referir à composição do todo pelas partes, que é o objetivo da proposta de ensino, eles manifestam compreensão sobre soma de frações de mesmo denominador.

Assim, esses docentes demonstram *conhecimento comum do conteúdo* e podem demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino*, uma vez que usariam ou poderiam usar a proposta de ensino em sala de aula.

Dentre os que julgaram a proposta correta, mas ao justificarem não demonstraram *conhecimento matemático para o ensino*, destacamos:

(P508): “Não usaria porque os meus alunos se confundiriam”.

(P528): “Acho que seria difícil a compreensão para a criança”.

Tais justificativas não se sustentam, uma vez que os PSA (PERNAMBUCO, 2013) orientam trabalhar, já nos anos iniciais, o número fracionário como um número que representa quantidades iguais que formam um todo.

Assim, apenas os sujeitos que julgaram a proposta correta (3%) e justificaram manifestando *conhecimento matemático para o ensino* compreendem aspectos relacionados ao conteúdo de Matemática presente na proposta de ensino.

2º MOMENTO: A tabela 4 ainda informa que um quarto dos professores julgou a proposta errada, diferente da resposta obtida na análise prévia do questionário.

Vejamos algumas justificativas:

(P407): *“Duas quantidades de $1/5$ não correspondem a $2/5$ de uma barra de chocolate”.*

(P567): *“Porque $2/5$ não é igual a duas quantidades iguais de $1/5$ ”.*

Tudo indica que para esses docentes, $1/5$ é dividir em cinco partes iguais e considerar uma parte; $2/5$ é dividir em cinco partes iguais e considerar duas. Todavia não compreendem que cinco quantidades iguais de $1/5$ correspondem a uma unidade; duas quantidades iguais de $1/5$ correspondem a $2/5$, conforme a proposta de ensino apresenta.

São docentes que apresentam dificuldades em compreender a fração como parte-todo em quantidade contínua a partir da composição do todo pelas partes.

Alguns reconheceram sua dificuldade em compreender a proposta:

(P434): *“Porque eu não entendi”.*

(P427): *“Está muito complexa”.*

Assim, os professores que julgaram a proposta errada apresentam dificuldades em relação ao conceito de fração como parte-todo em quantidade contínua a partir da composição do todo pelas partes, conforme a proposta de ensino apresenta.

EXPECTATIVA 4.1 RECONHECER FRAÇÕES COMO PARTES IGUAIS DE UM TODO.

Proposta D: **Desenhar um retângulo na lousa dividi-lo em cinco partes iguais pintar quatro dessas partes e explicar para a criança que a parte colorida do retângulo pode ser representada pela fração $\frac{4}{5}$ em que o quatro se chama numerador, que indica quantas partes do retângulo foram pintadas, e o cinco se chama denominador, que indica em quantas partes iguais o retângulo foi dividido.**

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de fração como parte-todo em quantidade contínua a partir do modelo tradicional (modelo baseado em procedimentos e algoritmos).

A proposta é correta do ponto de vista da Matemática, mas não apropriada para o trabalho nos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma vez não favorece a aprendizagem e pode levar o aluno a conceber a fração como dois números naturais separados por um traço.

A seguir apresentamos os resultados:

Tabela 5 - Resultado referente à proposta D da expectativa de aprendizagem 4.1

JULGARAM A PROPOSTA "D"	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	53%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	32%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	5%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	6%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	4%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 5 informa que 90% dos professores, julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 3% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Vejamos algumas justificativas:

(P438): “Usaríamos porque o inteiro foi dividido em 5 partes iguais, cada parte equivale a $\frac{1}{5}$ e 4 partes são iguais a $\frac{4}{5}$. As partes retiradas do inteiro, ou seja, pintadas chamamos de numerador e quantidade que o inteiro foi dividido (5 partes) chamamos de denominador”.

(P580): “Porque o numerador indica quantas partes foram usadas ou tomadas e denominador o todo ou o total da quantidade dividida”.

São sujeitos que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*. No entanto, é importante salientar que este tipo de proposta de ensino, cuja ênfase está nos procedimentos e algoritmos, não favorece a aprendizagem.

Alguns sujeitos que julgaram a proposta correta, mas não manifestaram *conhecimento matemático para o ensino*, suas justificativas convergiram no sentido de o professor estar familiarizado com a proposta de ensino, podendo utiliza-la em sala de aula:

(P508): “Este é o método que utilizo com meus alunos”.

(P447): “Usaria em sala de aula, o exemplo é claro e de fácil compreensão”.

São sujeitos que trabalham o conceito de fração como parte-todo a partir do modelo tradicional, corroborando com as afirmações de Merlini (2005); Canova (2006); Teixeira (2008); Rodrigues (2005), dentre outros, em que o conceito de fração é introduzido, no âmbito escolar, quase sempre, por meio do modelo parte-todo de quantidade contínua, com o uso de figuras que, geralmente, são círculos ou retângulos.

Uma vez que a proposta de ensino é correta do ponto de vista da Matemática, mas desaconselhável para o trabalho nos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma resposta que poderia manifestar *conhecimento especializado do conteúdo* seria o professor julgá-la “correta, mas eu não usaria em sala de aula”. No entanto, a tabela 7 informa que apenas 5% dos sujeitos escolheram essa alternativa sem, contudo demonstrar *conhecimento matemático para o ensino*.

Assim, apenas os sujeitos que julgaram a proposta correta (3%) e justificaram manifestando *conhecimento comum do conteúdo* compreendem aspectos relacionados ao conteúdo de Matemática presente na proposta de ensino.

2º MOMENTO: Podemos observar na tabela 5 que 6% dos professores, julgaram a proposta errada.

Vejamos algumas justificativas:

(P533): *“Partiria de exemplos mais simples”*.

(P429): *“Usaria algo mais lúdico”*.

A proposta se baseou no modelo tradicional de ensino e apresentou um retângulo dividido em cinco partes iguais, quatro pintadas, representadas pela fração $\frac{4}{5}$, em que o cinco se chama denominador e o quatro numerador.

No entanto, esses sujeitos, além de julgarem uma proposta correta do ponto de vista da Matemática, como errada, justificaram que partiriam de “exemplos mais simples” e usariam algo mais “lúdico”.

Assim, podemos inferir que esses sujeitos apresentam dificuldades para trabalhar a fração como parte-todo em quantidade contínua a partir do modelo tradicional.

Síntese da análise dos resultados da expectativa de aprendizagem 4.1

As propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 4.1, buscaram identificar que conhecimentos, na acepção de Ball et al. (2008), os professores demonstram sobre o conceito de fração como partes iguais de um todo e possíveis entraves que professores, do 4º e 5º ano, apresentam quanto à compreensão de ideias associadas a esse conteúdo de Matemática.

A análise dos resultados revelaram a dificuldade desses docentes em trabalhar as propostas de ensino referentes a expectativa de aprendizagem 4.1.

Na proposta A, por exemplo, que investigou como os professores julgaram uma situação de ensino sobre o conceito de fração como partes iguais de um todo em quantidade contínua, constatamos que 60% dos professores não consideram a conservação da área da figura para representá-la por meio de uma fração. Utilizam, tão somente, o procedimento da dupla contagem concebendo a representação fracionária como dois números naturais separados por um traço.

A proposta B, considerada correta na análise prévia do questionário, investigou como os professores julgaram uma situação de ensino sobre o conceito de fração a partir do significado parte-todo em quantidade discreta.

Apesar de 91% dos sujeitos ter julgado a proposta B correta, pudemos constatar que esses docentes não compreendem que no conceito de fração em quantidade discreta o todo é representado por um conjunto constituído de elementos de mesmo tamanho, e as partes que o constituem não são necessariamente divididas de forma igual, uma vez que apenas 7% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Já a proposta C, considerada correta na análise prévia do questionário, investigou como os professores julgaram uma situação de ensino que trabalha a fração como partes iguais de um todo a partir da composição do todo pelas partes.

Embora 71% dos professores tenham julgado a proposta correta verificamos, por meio de suas justificativas, que eles podem até conceber que $1/5$ é dividir o inteiro em cinco partes iguais e considerar uma parte. Todavia não compreendem que duas quantidades iguais de $1/5$ correspondem a $2/5$, conforme apresentado na proposta de ensino. Nesse sentido, dos professores que julgaram a proposta correta (71%), apenas 3% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino* acerca do trabalho de fração como parte-todo a partir da composição do todo pelas partes.

A proposta de ensino D, correta do ponto de vista da Matemática, mas desaconselhável para o trabalho nos anos iniciais do Ensino Fundamental, investigou como os professores do 4º e 5º ano julgaram uma situação de ensino que trabalha a fração como parte-todo em quantidade contínua por meio da abordagem clássica, cuja ênfase é a nomenclatura.

Dos professores investigados, 85% julgaram a proposta correta e usariam, ou poderiam usa-la em sala de aula. No entanto, a proposta de ensino não favorece a compreensão do conceito de fração, uma vez que sua ênfase está nos procedimentos e algoritmos. Mesmo assim, esses professores apresentam dificuldade para trabalhar a fração por meio da abordagem clássica, uma vez que apenas 3% demonstrou *conhecimento comum do conteúdo*.

Assim, os dados apresentados nesta síntese nos permitem inferir que esses docentes, em geral, não demonstram *conhecimento matemático para o ensino*, em relação às propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 4.1 e apresentam como possíveis entraves para compreender as

ideias associadas ao conceito de fração como partes iguais de um todo, não considerar a conservação da área da figura no momento de representá-la por uma fração, não compreender o número fracionário como um número que representa quantidades iguais que formam um todo, em sua prática pedagógica predomina o uso de procedimentos e algoritmos, dentre outros.

4.2 Análise da expectativa de aprendizagem 4.2

EXPECTATIVA 4.2: DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ E $1/10$).

Proposta A: Apresentar algumas frações unitárias em uma reta numérica em que apareçam os números naturais 0 e 1 e explicar a criança que, assim como os naturais, as frações são números, e podem ser representadas na reta numérica.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que concebe a fração como um número a partir da posição aproximada de frações unitárias na reta numérica.

Ela foi considerada correta, uma vez que o trabalho de representação de número racional na reta numérica se constitui numa oportunidade de levar o estudante a conceber a fração como um número.

A tabela a seguir apresenta os resultados, que serão analisados em dois momentos distintos:

Tabela 6 - Resultado referente à proposta A da expectativa de aprendizagem 4.2

JULGARAM A PROPOSTA “A”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	20%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	33%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	28%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	10%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	9%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 6 informa que 81% dos professores, julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 2% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Vejamos alguns exemplos:

(P401): *“Dessa forma podemos fazer a criança compreender as partes menores de um todo”*.

(P515): *“Pode-se mostrar na reta numérica os números e partes destes números, ou seja, frações”*.

O sujeito (P401) justificou: *“dessa forma – ou seja, por meio da reta numérica – podemos fazer a criança compreender as partes menores de um todo”*; já, o sujeito (P515) destacou: *“pode-se mostrar na reta numérica os números – no caso, zero e um, conforme orienta a proposta - e as partes destes números, ou seja, as frações”*.

Assim, esses docentes demonstram *conhecimento comum do conteúdo* e podem demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino*, tendo em vista que usariam ou poderiam usar a proposta de ensino em sala de aula.

Os demais professores que julgaram a proposta correta, mas não demonstraram *conhecimento matemático para o ensino*, suas justificativas convergiram no sentido de que não usariam a proposta de ensino porque os estudantes não a compreenderiam:

(P412): *“Pois essa questão está fora da realidade das salas de aula”*.

(P536): *“Necessitaria de um grau de compreensão acerca dos números que os alunos ainda não adquiriram”*.

No entanto, a proposta trata de representar frações unitárias – por exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. - em uma reta em que aparecem os números naturais zero e um, com o objetivo de o estudante compreender a fração como um número.

Os PCPE (PERNEBUCO, 2012) orientam:

Explorar as denominadas frações fundamentais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc.) é um dos bons caminhos para auxiliar o estudante na compreensão do próprio conceito de fração, além de contribuir para a aprendizagem da equivalência, da comparação e das operações básicas no âmbito das frações. (p.79).

Segundo Damico (2007), os tipos de problemas envolvendo a localização de pontos na reta numérica fazem com que os alunos concebam as frações como número.

Sendo assim, tais justificativas não se sustentam e podem indicar que esses sujeitos não compreendem a proposta de ensino e atribuem suas dificuldades aos estudantes.

Portanto, apenas os sujeitos (2%) que julgaram a proposta correta e justificaram manifestando *conhecimento matemático para o ensino* compreendem a proposta de ensino como uma estratégia que pode favorecer o estudante a conceber a fração como um número.

2º MOMENTO: A tabela 6 também apresenta que 10% dos professores julgaram a proposta errada:

(P573): *“Em que apareçam os números naturais 0 e 1. Como isso seria possível?”*

Tal sujeito não compreende as ideias de representação de fração unitária na reta numérica presentes na proposta de ensino.

Outros sujeitos justificaram:

(P403): *“Não acho que essa proposta seja adequada para a aprendizagem de fração”.*

(P424): *“Eu não usaria esses métodos as crianças não entenderiam”.*

Esses docentes parecem discordar do aspecto pedagógico da proposta de ensino.

No entanto, essas justificativas não procedem.

Silva (1997) ao realizar um estudo com professores dos anos iniciais com o objetivo de introduzir o conceito de fração por meio dos significados parte-todo, medida e quociente constatou que o trabalho com o significado medida, utilizando o modelo da reta numérica, contribui para compreensão da fração como um número.

Como vimos na análise do 1º momento, Damico (2007), concluiu que os tipos de problemas envolvendo a localização de pontos na reta numérica fazem com que os alunos concebam as frações como números, que é o objetivo da proposta.

Assim, podemos inferir que esses sujeitos que julgaram a proposta errada apresentam dificuldades quanto ao trabalho de representação de frações unitárias na reta numérica.

EXPECTATIVA 4.2 DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ E $1/10$).

Proposta B: Apresentar uma reta numérica na lousa. Representar, nessa reta, as frações $1/2$ e $1/4$ e explicar para a criança que a distância do zero a $1/2$ corresponde a duas vezes a distância do zero a $1/4$.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que concebe a fração como um número a partir da associação de frações unitárias a pontos específicos na reta numérica.

Consideramos, na análise prévia do questionário, a proposta correta, uma vez que a distância do zero a $1/2$ corresponde a duas vezes a distância do zero a $1/4$, e documentos oficiais como os PCN (BRASIL, 1997) e PCPE (PERNAMBUCO, 2012) recomendam o trabalho de localização de frações unitárias, na reta numérica, no sentido de levar o estudante a compreender a fração como um número.

A tabela a seguir apresenta os resultados.

Tabela 7 - Resultado referente à proposta B da expectativa de aprendizagem 4.2

JULGARAM A PROPOSTA "B"	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	18%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	35%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	28%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	11%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	8%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: De acordo com a tabela sete 81% dos professores julgaram a proposta correta, e embora 50%, desse total, tenham apresentado justificativa nenhuma demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*:

(P415): *“Não sei como didatizar a proposta”.*

(P510): *“Se eu dominar passarei para meu aluno”.*

(P566): *“Poderia usar, mas não saberia desenvolver fração em uma reta numérica”.*

Apesar de esses sujeitos terem julgado a proposta correta suas justificativas parecem indicar dificuldades do ponto de vista pedagógico e da Matemática quanto ao trabalho com as frações unitárias na reta numérica.

Outros sujeitos que também julgaram a proposta correta justificaram:

(P414): *“Penso que a maioria dos alunos do 4º ano não acompanharia a lógica deste cálculo”.*

(P516): *“Acredito que essa atividade apresenta um nível alto para turmas de 5º ano”.*

São justificativas que parecem indicar que esses professores dominam o conteúdo de Matemática da proposta, no entanto não a utilizariam em sala de aula por conta da dificuldade de compreensão dos estudantes. Mas, como dissemos na análise da proposta anterior, estudos como Silva (1997), Damico (2007) confirmam que o trabalho com frações a partir do modelo da reta numérica pode contribuir para compreensão do conceito desse conteúdo matemático, e os PCPE (2012) orientam explorar as frações unitárias para auxiliar o estudante dos anos iniciais na compreensão do conceito de fração.

Então, dizer que as crianças não compreenderiam a proposta não é uma justificativa coerente. Tudo indica que esses sujeitos, mesmo julgando a proposta correta, apresentam dificuldades em relação ao trabalho com as frações unitárias na reta numérica e atribuem tais dificuldades aos estudantes.

Portanto, podemos inferir que os professores que julgaram a proposta correta (81%) não demonstram *conhecimento matemático para o ensino* para o trabalho com a proposta de ensino considerada.

2º MOMENTO: A tabela 7 revela que 11% dos professores julgaram a proposta errada.

Vejamos algumas justificativas:

(P407): *“Porque está errada”.*

(P540): “Porque a explicação está errada, a distância do zero a $\frac{1}{2}$ não corresponde a duas vezes a distância do zero a $\frac{1}{4}$ ”.

(P417): “Esta questão nem eu entendi. Acho que está errada. Na dúvida, é melhor não usar”.

São professores que apresentam dificuldades em compreender a fração como um número a partir da associação de frações unitárias a pontos específicos na reta numérica. O sujeito (P407), por exemplo, diz claramente que a proposta está errada. Já, o sujeito (P540) é contundente ao afirmar “[...] a distância do zero a $\frac{1}{2}$ não corresponde a duas vezes a distância do zero a $\frac{1}{4}$ ”, e o sujeito (P417) coloca “Esta questão nem eu entendi [...]”.

Outros sujeitos que julgaram a proposta errada justificaram:

(P432): “Achei meio complicado utilizar essa proposta, porque acho que provocaria confusão na compreensão”.

(P514): “Não usaria, até porque ele não iria entender”.

(P534): “Seria impossível a compreensão”.

Se a intenção dos sujeitos (P432), (P514) e (P534) fosse discordar do aspecto pedagógico da proposta eles poderiam ter julgado a proposta “correta, mas eu não usaria em sala de aula”, uma vez que do ponto de vista da Matemática a proposta é correta. No entanto, julgar uma proposta de ensino correta como errada, porque os estudantes não a compreenderiam, não faz sentido.

Assim, podemos inferir que esses sujeitos que julgaram a proposta errada, apresentam dificuldades para trabalhar a expectativa de aprendizagem 4.2 a partir da proposta de ensino considerada.

EXPECTATIVA 4.2 DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ E $\frac{1}{10}$).

Proposta C: Apresentar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ em uma reta numérica em que apareçam os números naturais 0 e 1 e explicar que, embora cinco seja maior que três, a fração $\frac{1}{5}$ é menor que a fração $\frac{1}{3}$, pois a distância entre o zero e $\frac{1}{5}$ é menor que a distância entre o zero e $\frac{1}{3}$.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora o princípio da ordenação, por meio da representação das frações unitárias, na reta numérica.

Ela foi considerada correta uma vez que $\frac{1}{5}$ é menor que $\frac{1}{3}$, e o trabalho com o modelo da reta numérica pode favorecer a compreensão do princípio da ordenação.

A tabela a seguir apresenta os resultados, que serão analisados em dois momentos distintos.

Tabela 8 - Resultado referente à proposta C da expectativa de aprendizagem 4.2

JULGARAM A PROPOSTA “C”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	12%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	25%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	32%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	22%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	9%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 8 informa que 69% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 6% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*:

(P458): “A proposta está correta, usaria, mas antes seria bem trabalhada a questão da divisão, que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{5}$, porque foi dividido menos vezes”.

(P540): “Eles perceberiam que na fração a quantidade maior de partes divididas representa uma parte menor em relação ao todo”.

São sujeitos que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que consideram $\frac{1}{3}$ maior que $\frac{1}{5}$, podem demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino* tendo em vista que usariam ou poderiam usar a proposta de ensino em sala de aula

Outros, embora tenham julgado a proposta correta suas justificativas parecem indicar que não demonstram *conhecimento do conteúdo e estudantes*, conhecimento que, de acordo com Ball et al (2008), deve prever as principais dificuldades dos

alunos no sentido de sugerir exemplos ou representações que facilitem a aprendizagem do estudante.

(P518): “A proposta está correta, mas eu teria dificuldade de explicar para criança”.

(P519): “A compreensão da fração é complexa para mim, apesar de compreender, repassá-la para os alunos é difícil”.

Portanto, apenas os sujeitos (6%) que julgaram a proposta correta e justificaram manifestando *conhecimento matemático para o ensino* compreendem o princípio da ordenação a partir da representação das frações unitárias na reta numérica.

2º MOMENTO: A tabela 8 também revela que 22% dos professores julgaram a proposta errada, ou seja, diferente da resposta obtida na análise prévia do questionário.

Vejamos algumas justificativas:

(P435): “Acredito que a fração $1/3$ é menor que a fração $1/5$, então a distância do ponto 0 para $1/5$ é maior. Ou poderia concluir também que a distância do 0 para 1 independe de fração”.

(P509): “A ordem dos números está errada “sendo $1/5$ é maior que $1/3$ ” só seria assim se os valores correspondentes fossem negativos”.

Estudantes que participaram da pesquisa de Nancy Mack (1993) apresentaram essa dificuldade quando compararam as frações $1/6$ e $1/8$, e responderam que $1/8$ é maior que $1/6$ porque $8 > 6$.

Os PCN (1997) orientam que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas acerca dos números naturais, e uma delas é não utilizar regras dos números naturais para comparar números racionais. Nos naturais, por exemplo, 3 é menor que 5, nos racionais, $1/3$ é maior que $1/5$.

Assim, um dos possíveis entraves que os professores que julgaram a proposta errada (22%) apresentam em relação ao princípio da ordenação de números racionais pode ser utilizar as regras dos números naturais para comparar números racionais.

EXPECTATIVA 4.2 DETERMINAR A POSIÇÃO APROXIMADA NA RETA NUMÉRICA, DE FRAÇÕES COM NUMERADOR UNITÁRIO ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ E $1/10$).

Proposta D: Explicar para criança, a partir da reta numérica na lousa, que o ponto que representa a fração $1/2$ pode ser representado pelo número decimal 1,2, ou seja, a fração $1/2$ estaria um pouco depois do número 2.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que aborda a comparação e localização de números racionais na reta numérica.

A proposta foi considerada errada, uma vez que a representação decimal da fração $1/2$ é 0,5 e não 1,2 conforme informado na proposta, e a fração $1/2$ não está representada na reta depois do 2.

A tabela a seguir apresenta os resultados, que serão analisados em dois momentos distintos.

Tabela 9 - Resultado referente à proposta D da expectativa de aprendizagem 4.2

JULGARAM A PROPOSTA “D”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	7%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	15%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	10%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	55%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	13%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: De acordo com a tabela nove, 55% dos professores julgaram a proposta errada. No entanto, apenas 11% apresentaram justificativa que manifestou *conhecimento matemático para o ensino*:

(P438): “Jamais usaria porque $1/2$ não pode ser representado por 1,2, pois este número decimal em forma de fração ficaria $12/10$ ou $1\frac{2}{10}$ ”.

(P458): “A fração $1/2$ pode ser representada pelo número 0,50 que é um inteiro dividido em duas partes, enquanto que 1,2 é um inteiro e dois décimos. E $1/2$ nunca estaria depois do 2, numa reta numérica, pois $1/2$ é menor que 2”.

(P578): “O número decimal que representa a fração $1/2$ é 0,5”.

(P581): “Não usaria, pois $1/2$ não é a mesma representação de $1,2$ ”.

São sujeitos que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que compreendem que $1/2 = 0,5$ ou a fração $1/2$ está entre 0 e 1 na reta numérica.

Outros sujeitos que julgaram a proposta errada apresentaram justificativas erradas, não demonstrando *conhecimento comum do conteúdo*:

(P408): “Que eu sei fração é um assunto número decimal é outro. Ficaria uma confusão na cabeça do aluno”.

(P416): “A fração $1/2$ está um pouco depois do 1, e não do 2”.

(P466): “ $1/2 = 1,2$, porém é menor que 2”.

São justificativas que revelam a dificuldade desses docentes em relação ao conteúdo de Matemática presente na proposta de ensino. Para Ball et al (2008), o *conhecimento comum do conteúdo*, embora não seja exclusivo dos professores é essencial para eles desenvolverem efetivamente o seu trabalho como professores de Matemática.

Assim, os sujeitos que julgaram a proposta errada (11%) e justificaram sua resposta manifestando *conhecimento matemático para o ensino* compreendem a comparação e localização de números racionais na reta numérica, conforme abordado na proposta de ensino.

2º MOMENTO: A tabela 9 ainda informa que um terço dos professores julgou a proposta correta.

Conforme vimos na análise prévia, Merlini (2005) ao analisar as estratégias que resultavam em erro, verificou que estudantes da 5ª e 6ª séries representavam a fração $1/5$ com a notação 1,5. Estratégia também encontrada no estudo de Bianchini (2001) com alunos da 3ª série do Ensino Fundamental. Professores no estudo de Canova (2006) também representaram a fração $1/5$ como 1,5.

Assim, tudo indica que os sujeitos que julgaram a proposta correta (32%) interpretam a fração como dois números naturais sobrepostos separados por um traço e esse traço podendo ser representado por uma vírgula.

Essa compreensão errônea, acerca desse aspecto da representação de números racionais, pode estar presente na prática pedagógica desses docentes:

(P424): *“Sim, eu usaria a proposta. Muito boa”.*

(P509): *“Boa proposta usaria com certeza e como eu disse anteriormente, usando a colaboração das crianças seria uma ótima aula de matemática”.*

São docentes que, além de julgar a proposta “correta, e eu certamente usaria em sala de aula”, a consideram “muito boa”, apesar de a proposta afirmar que $1/2$ é igual a $1,2$ e que a fração $1/2$, na reta numérica, está depois do 2.

Já os sujeitos que julgaram a proposta “correta, mas eu não usaria em sala de aula” (10%, conforme a tabela 9), justificaram:

(P455): *“Não temos condições de apresentar tais problemas para as crianças, pois são muito difíceis”.*

(P516): *“Acredito que essa atividade apresenta um nível alto para turmas de 5º ano”.*

Tais sujeitos julgaram uma proposta errada como correta e justificaram que não usariam em sala de aula porque a proposta é complicada para a criança. Isso reforça nossa hipótese de que o professor pode não compreender a proposta, julgá-la correta – conforme vimos em análises anteriores - e justificar que não usaria em sala de aula porque é complicado para a criança.

Assim, os docentes que julgaram a proposta correta apresentam dificuldades em relação ao conteúdo de Matemática presente na proposta de ensino.

Síntese da análise dos resultados da expectativa de aprendizagem 4.2

As propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 4.2, buscaram identificar que conhecimentos, na acepção de Ball et al. (2008), os professores demonstram sobre a representação de frações unitárias na reta numérica e possíveis entraves que esses docentes apresentam quanto à compreensão de ideias associadas a esse conteúdo de Matemática.

A análise dos resultados revelaram a dificuldade desses docentes em trabalhar as propostas de ensino referentes a expectativa de aprendizagem 4.2.

A proposta A, por exemplo, que investigou como os professores julgaram uma situação de ensino em que a reta numérica é usada como recurso para apresentar a fração como um número, embora 81% dos professores apresentaram respostas que

coincidiram com a resposta da análise prévia do questionário, apenas 2%, ao justificar, demonstraram *conhecimento matemático para o ensino*.

Em relação à proposta B, que investigou como os professores julgaram uma situação de ensino em que a fração é concebida como um número a partir da associação de frações unitárias a pontos específicos na reta numérica, nenhum sujeito apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*, quanto ao fato de que a distância do zero a $\frac{1}{2}$ corresponde a duas vezes a distância do zero a $\frac{1}{4}$.

Já a proposta C, que investigou como os professores julgaram uma situação de ensino que explora o princípio da ordenação, por meio da representação das frações unitárias na reta numérica, 22% dos professores afirmou que a proposta estava errada porque $\frac{1}{5}$ é maior que $\frac{1}{3}$.

Por fim, a proposta D investigou como os professores julgaram uma situação de ensino em que a fração pode ser interpretada como dois números naturais sobrepostos, separados por um traço, que pode ser uma vírgula. Como resultado, 32% dos professores considerou correto representar a fração $\frac{1}{2}$ pelo número decimal 1,2.

Assim, os dados apresentados nesta síntese, nos permitem inferir que esses docentes, em geral, não demonstram *conhecimento matemático para o ensino*, em relação às propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 4.2 e apresentam como possíveis entraves para compreender as ideias associadas à localização de frações unitárias na reta numérica, não conceber a fração como um número, não compreender o princípio da ordenação de números racionais, não compreender a comparação de frações, dentre outros.

4.3 Análise da expectativa de aprendizagem 5.3

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.

Proposta A: Representar na lousa, por meio de dois círculos de mesmo tamanho, duas pizzas. Dividir, cada uma, em três partes iguais e explicar para criança que quatro pedaços de $\frac{1}{3}$ de pizza podem ser representados pela fração $\frac{4}{3}$.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que trabalha as frações maiores que a unidade a partir das frações fundamentais.

Ela foi considerada correta, pois os quatro pedaços de pizzas de $\frac{1}{3}$ podem ser representados pela fração $\frac{4}{3}$, e os PSA (PERNAMBUCO, 2013) orientam que para assimilar a ideia de fração maior que a unidade, é importante retomar o trabalho com as frações fundamentais, ou seja, aquelas com numerador unitário; isso facilita a compreensão de fração como uma magnitude, um número.

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta:

Tabela 10 - Resultado referente à proposta A da expectativa de aprendizagem 5.3

JULGARAM A PROPOSTA "A"	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	20%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	24%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	10%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	36%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	10%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: Conforme a tabela dez, 54% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 7% apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

(P438): “Trabalharíamos porque através desse exemplo poderíamos trabalhar a fração maior que o inteiro (fração imprópria e número misto)”.

(P540): “Porque nesse caso estamos ensinando a fração imprópria, aquela cujo numerador é maior que o denominador”.

(P578): “Usaria a proposta para apresentar adição de fração com mesmo denominador ou fração imprópria”.

São docentes que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que dominam aspectos relacionados ao conteúdo matemático presente na proposta de ensino e podem demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino* tendo em vista que usariam, ou poderiam usar a proposta de ensino em sala de aula.

O sujeito (P425) que julgou a proposta “correta, mas eu não usaria em sala de aula”, demonstrou apenas *conhecimento comum do conteúdo*:

(P425): “Pois acho essa relação um pouco complicada para fase que estão para tratar de fração mista, pois $4/3 = 1 + 1/3$ ”.

Tal sujeito ao reconhecer que $4/3 = 1 + 1/3$, revela domínio sobre aspectos do conhecimento de Matemática presente na proposta. No entanto, apesar de a proposta de ensino se constituir numa oportunidade de trabalhar as frações maiores que a unidade a partir das frações unitárias, ele considera a proposta “complicada” para o trabalho da expectativa de aprendizagem em apreço.

Assim, apenas os sujeitos que julgaram a proposta correta (7%) e justificaram sua resposta manifestando *conhecimento matemático para o ensino* compreendem o trabalho com as frações maiores que a unidade a partir das frações fundamentais, conforme sugere a proposta de ensino.

2º MOMENTO: A tabela 10 ainda revela que 36% dos professores julgaram a proposta errada.

Vejamos algumas justificativas:

(P408): “Como? Se são três partes iguais? Acredito que esteja errada”.

(P435): “Acredito que a proposta está errada. Eu não posso representar por essa fração supracitada e sim $3/3$ e $1/3$ ”.

(P509): “Se tem apenas 2, sendo que cada uma representa $1/3$. Como poderia ser representado $4/3$. Não tem como”.

(P503): “Não tem fundamento essa representação de fração”.

Tais sujeitos não compreendem que quatro “pedaços” de $\frac{1}{3}$ podem ser representados pela fração $\frac{4}{3}$. É provável que esses docentes concebam a fração apenas como partes de um inteiro, por isso não atribuem significado ao símbolo $\frac{4}{3}$, ou não admitem a possibilidade de uma fração representar uma quantidade maior que a unidade.

Conforme resalta os PCN (BRASIL, 1997), o trabalho com as frações maiores que a unidade pode parecer contraditório para o aluno e professor, na medida em que as frações no modelo parte-todo significam partes de um inteiro e, na proposta acima, tal modelo é insuficiente para explicar a situação apresentada pela proposta.

Uma das críticas de Escolano e Gairín (2005) em relação a se introduzir o conceito de fração a partir do significado parte-todo é esse modelo não contemplar as frações maiores que a unidade, o que fortalece a ideia de fração como dois números naturais separados por um traço.

Vejamos outras justificativas:

(P529): *“A fração pode estar trocada”.*

(P577): *“O numerador está maior que o denominador, pois deveria ser $\frac{4}{6}$ ”.*

Canova (2005), ao investigar a compreensão dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre o conceito de fração, apresentou em seu instrumento diagnóstico uma questão que se referia à distribuição de 27 vasos de violeta entre 9 salas e 24 vasos também de violeta entre 6 salas. Os sujeitos responderam, corretamente, 3 e 4 vasos, respectivamente. No entanto, ao responderem sobre a fração que representava a situação, esses sujeitos, informaram $\frac{9}{27}$ e $\frac{6}{24}$, quando a resposta certa seria $\frac{27}{9}$ e $\frac{24}{6}$, respectivamente. Assim, a autora conclui que, além de esses professores inverterem o numerador pelo denominador, eles possuem a crença que o denominador tem que ser sempre maior que o numerador. Essas dificuldades também foram observadas em estudantes nas pesquisas de Bezerra (2001), Merlini (2005) e Moutinho (2005).

Assim, um dos possíveis entraves que os sujeitos que julgaram a proposta errada (36%) apresentam é conceber a fração apenas como parte de um inteiro em que o denominador é sempre maior que o numerador.

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.

Proposta B: A partir da representação da reta numérica na lousa, explicar para a criança que a fração $5/4$ encontra-se localizada entre os números um e dois, pois é um pouco maior que a unidade, marcando cinco pedaços iguais a um quarto.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que aborda o trabalho com as frações maiores que a unidade a partir da representação de frações unitárias na reta numérica.

Ela foi considerada correta, uma vez que o ponto que representa, na reta numérica, cinco “pedaços” iguais de $1/4$, a partir do zero, está localizado, entre os números 1 e 2 e pode ser representado pela fração $5/4$. A proposta se apoia ainda nas orientações dos PCN (BRASIL, 1997), PCPE (PERNAMBUCO, 2012) e PSA (PERNAMBUCO, 2013) no que diz respeito ao trabalho com as frações maiores que a unidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A seguir analisamos os resultados em dois momentos distintos:

Tabela 11 - Resultado referente à proposta B da expectativa de aprendizagem 5.3

JULGARAM A PROPOSTA “B”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	5%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	18%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	18%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	38%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	21%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: Apesar de 41% dos professores terem julgado a proposta correta, conforme informa a tabela 11, nenhum demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

O sujeito (P445), por exemplo, justificou:

(P445): “Não compreendi a proposta como correta, por não ter recebido orientação anterior”.

Tal sujeito não demonstra *conhecimento matemático para o ensino*, uma vez que a proposta tem como base as orientações de documentos oficiais como os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) e PCN (BRASIL, 1997) que sugerem, inclusive para os anos iniciais do Ensino Fundamental, tanto o trabalho com as frações unitárias como a reta numérica como recurso para o ensino das frações maiores que a unidade.

Essa justificativa revela não apenas a dificuldade desse professor compreender a proposta de ensino, mas, sobretudo, a necessidade de um trabalho mais efetivo para o ensino de Matemática nos cursos de formação de professores dos anos iniciais.

Assim, os sujeitos que julgaram a proposta correta, mas não demonstram *conhecimento matemático para o ensino* não compreendem o trabalho com as frações maiores que a unidade a partir da representação de frações unitárias na reta numérica.

2º MOMENTO: A tabela 11 também revela que 38% dos professores julgaram a proposta errada.

Alguns alegaram dificuldade em compreender a proposta de ensino:

(P432): *“Pela minha análise tive dificuldade na compreensão”.*

(P462): *“Eu não entendi, imagine as crianças”.*

É provável que esses docentes não tenham familiaridade com as frações maiores que a unidade ou com a reta numérica, tendo em vista que estudos como Campos et al. (1995); Merlini (2005); Canova (2006); Teixeira (2008); Rodrigues (2005) comprovam que geralmente o conceito de fração é introduzido, no âmbito escolar, por meio do modelo parte-todo e este não explica as frações maiores que a unidade.

Nesse sentido, três professores que julgaram a proposta errada justificaram:

(P435): *“Se dividir o inteiro em quatro partes, como posso representar em $5/4$?”.*

(P456): *“Não, pois corresponde a $1/5$ ”.*

(P540): *“Porque a fração $5/4$ não se encontra localizada entre os números um e dois”.*

Esses docentes não compreendem que quatro “pedaços” de $\frac{1}{4}$ equivalem à fração $\frac{5}{4}$, que pode ser representada na reta numérica entre os números 1 e 2, o que reforça a hipótese de esses docentes conceberem a fração apenas como partes de um inteiro.

Kerslake (1986) realizou estudos com 10 000 crianças, em que investigou as estratégias de resolução e erros dos alunos em relação à resolução de problemas de Matemática. No que diz respeito à compreensão do que as crianças pensam sobre as frações, a pesquisadora concluiu que o único modelo de frações que os alunos sentiam-se familiarizados foi o de fração como partes de um todo.

Os PCN (BRASIL, 1997) orientam que o trabalho com as frações maiores que a unidade pode parecer contraditório para o aluno e professor, na medida em que as frações no modelo parte-todo significam partes de um inteiro e não explicam as frações impróprias.

Assim, um dos possíveis entraves que os sujeitos que julgaram a proposta errada apresentam é conceber a fração apenas como partes iguais de um todo.

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.
--

Proposta C: Dizer para a criança que a fração $\frac{4}{3}$, pode representar a divisão de quatro barras de chocolates igualmente entre três pessoas, em que cada uma ganha uma barra inteira mais um terço da barra que sobrou.
--

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino em que as frações maiores que a unidade são interpretadas como um quociente.

Ela foi considerada correta, uma vez que o trabalho com frações maiores que a unidade se constitui numa oportunidade de conduzir o estudante a estabelecer relação entre fração e divisão, e $\frac{4}{3}$, de fato, é igual a $1\frac{1}{3}$.

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta. Analisamos os resultados em dois momentos distintos:

Tabela 12 - Resultado referente à proposta C da expectativa de aprendizagem 5.3

JULGARAM A PROPOSTA “C”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	15%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	30%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	17%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	22%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	16%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 12 informa que 62% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 1% apresentou justificativa que manifestou *conhecimento matemático para o ensino* como, por exemplo:

(P519): “Entendo como sendo uma fração mista sendo um inteiro e um terço”.

Tal sujeito demonstra *conhecimento comum do conteúdo* em relação à fração $\frac{4}{3}$ ser representa pelo número misto $1 \frac{1}{3}$ e pode demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino*, uma vez que afirma que poderia usar a proposta em sala de aula.

É um dado preocupante uma vez que a proposta de ensino enfoca o trabalho com as frações maiores que a unidade no sentido de compreender a fração como um quociente. Estudos como Kerslake (1986), Nunes e Bryant (1997), Bezerra (2001), Escolano e Gairín (2005), defendem a ideia de que a introdução do ensino de frações a partir do significado quociente pode proporcionar um melhor entendimento desse conteúdo e os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) orientam que, no quinto ano de escolarização, a ideia de fração como parte de um todo deve ser ampliada para a ideia de divisão.

Assim, apenas os sujeitos que julgaram a proposta correta (1%) e justificaram sua resposta demonstrando *conhecimento matemático para o ensino* compreendem o trabalho com as frações maiores que a unidade como um quociente.

2º MOMENTO: A tabela 12 ainda informa que 22% dos professores julgaram a proposta errada:

(P415): “Não corresponde à verdadeira representação da fração”.

(P435): “A representação fracionária está errada”.

Esses sujeitos parecem discordar da representação das frações maiores que a unidade em que o numerador é maior que o denominador. Isto pode ser visto mais explicitamente nas justificativas a seguir:

(P425): “O quatro devia ser o denominador já que as barras estão inteiras. A barra que sobrou seria $1/4$ e não $1/3$ ”.

(P552): “Se o todo é 3?”.

É provável que esses sujeitos – conforme vimos na proposta anterior – não tenham familiaridade com as frações maiores que a unidade e com as frações como um quociente indicado.

Assim, os professores que julgaram a proposta errada demonstram dificuldades em conceber as frações maiores que a unidade como um quociente indicado.

EXPECTATIVA 5.3: IDENTIFICAR E REPRESENTAR FRAÇÕES MENORES E MAIORES QUE A UNIDADE.
--

Proposta D: Representando três pizzas por meio de três círculos idênticos na lousa, explicar a criança que se dividíssemos as três pizzas para quatro pessoas nenhuma delas ganharia uma pizza inteira. Mas, pode-se dividir cada pizza em quartos, e cada pessoa ganharia três pedaços de um quarto, o que corresponderia a $3/4$.
--

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que amplia o modelo de fração como parte-todo para a ideia de fração como um quociente entre duas grandezas distintas (pizzas e pessoas).

Ela foi considerada correta, uma vez que se quisermos dividir três pizzas idênticas para quatro pessoas podemos dividir as pizzas em quartos e cada pessoa ganha três fatias de $1/4$, ou seja, $3/4$. A proposta de ensino ainda se constitui num recurso que pode ampliar a ideia de fração como parte de um todo para a ideia de quociente, conforme orientam os PCPE (PERNAMBUCO, 2012).

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta:

Tabela 13 - Resultado referente à proposta D da expectativa de aprendizagem 5.3

JULGARAM A PROPOSTA “D”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	29%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	31%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	14%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	10%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	16%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 13 informa que 74% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 1% apresentou justificativa que manifestou *conhecimento matemático para o ensino*.

(P458): “Está correta, se dentro da proposta do plano anual, usaria sem problemas explicando que cada pessoa ganharia 3 pedaços das pizzas que foram divididas em 4 partes”.

Tal sujeito demonstra *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que reconhece a fração $\frac{3}{4}$ como quociente da divisão de três pizzas para quatro pessoas, em que cada pessoa recebe três “pedaços” de $\frac{1}{4}$ de pizza, e pode demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino* tendo em vista que usaria a proposta em sala de aula se o seu conteúdo constasse no planejamento anual de ensino.

Mais da metade dos sujeitos que julgaram a proposta correta justificaram apresentando um conteúdo de certa forma conveniente, mas que não manifesta *conhecimento matemático para o ensino*:

(P426): “Usaria sim, sem nenhum problema. Pois a questão está claríssima”.

(P431): “Usaria, pois facilita o entendimento e o raciocínio do aluno”.

São justificativas que poderiam indicar *conhecimento do conteúdo e ensino*. No entanto, nada dizem sobre o conhecimento de Matemática da proposta, e de acordo com Ball et al (2008) o que caracteriza o *conhecimento do conteúdo e ensino*, é a junção do conhecimento sobre o ensino e conhecimento sobre a Matemática.

Assim, apenas os professores que julgaram a proposta correta (1%) e apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino* compreendem a fração como um quociente entre duas grandezas distintas.

2º MOMENTO: A tabela 13 revela também que 10% dos professores julgaram a proposta errada.

Vejamos algumas justificativas:

(P410): *“Eu não entendi direito, imagine como ficaria na mente desses alunos. Muito complicado”.*

(P459): *“A proposta está errada e eu jamais usaria em sala de aula”.*

É provável que esses sujeitos julgaram a proposta errada porque não compreendem a fração $\frac{3}{4}$ como o quociente entre duas grandezas distintas (pizzas e pessoas), mas apenas como um inteiro dividido em quatro partes das quais foram consideradas três.

Nesse sentido, estudos como Campos et al. (1995); Merlini (2005); Canova (2006); Teixeira (2008); Rodrigues (2005) comprovam que geralmente o conceito de fração é introduzido, no âmbito escolar, por meio do modelo parte-todo, em que a fração representa partes iguais de um inteiro.

Outro ponto que corrobora com essa hipótese é o percentual de sujeitos que não assinalaram alternativas ao julgarem as propostas de ensino. Na expectativa de aprendizagem 4.1, proposta A, por exemplo, que abordou a fração como partes iguais de um todo o percentual de professores, do 4º e 5º ano, que não assinalaram alternativas foi 1%. Na expectativa de aprendizagem que estamos analisando, que trata das frações maiores e menores que a unidade, em que as propostas de ensino enfocam, principalmente, a fração como um quociente, na proposta B, o percentual dos que não assinalaram alternativas foi 21%, e nesta proposta 16%.

Essa diferença pode indicar que esses sujeitos se sentem mais familiarizados para julgar propostas de ensino que se referem apenas à fração como partes iguais de um todo. No entanto, quando a proposta aborda a fração como um quociente, eles se omitem do julgamento.

Assim, podemos inferir que um dos entraves para os sujeitos que julgaram a proposta D errada compreender as frações menores que a unidade como um

quociente indicado é conceber o símbolo a/b , com b diferente de zero, apenas como um inteiro que foi dividido em partes iguais.

Síntese da análise dos resultados da expectativa de aprendizagem 5.3

As propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 5.3, buscaram identificar que conhecimentos, na acepção de Ball et al. (2008), os professores demonstram sobre as frações maiores e menores que a unidade e possíveis entraves que esses docentes apresentam quanto a compreensão de ideias associadas a esse conteúdo de Matemática.

A análise dos resultados revelaram a dificuldade desses docentes em trabalhar as propostas de ensino referentes a expectativa de aprendizagem 5.3.

Na proposta A, por exemplo, que investigou como os professores julgaram uma situação de ensino que trabalha as frações maiores que a unidade a partir das frações fundamentais, 36% dos professores julgou a proposta errada por não compreender que quatro fatias de $1/3$ de pizza podem ser representadas pela fração $4/3$, e dos que julgaram a proposta correta (54%) apenas 7% apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Na proposta B, que investigou o trabalho com as frações maiores que a unidade a partir da representação de frações unitárias na reta numérica, 38% dos professores julgou a proposta errada por não compreender que a fração $5/4$ encontra-se localizada entre os números um e dois, e dos que julgaram a proposta correta (41%) nenhum apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Já na proposta C, 22% dos professores não interpreta uma fração imprópria como um quociente indicado, e na proposta D, 10% não interpretam a fração própria como um quociente entre duas grandezas. Quanto aos professores que apresentaram resposta que coincidiu com a resposta da análise prévia do questionário para as propostas de ensino C e D, apenas 1% apresentou justificativa que manifestou *conhecimento matemático para o ensino* sobre o conteúdo de Matemática presente na proposta.

São dados preocupantes, uma vez que o trabalho com as frações maiores e menores que a unidade pode ajudar na compreensão da fração como um quociente entre duas grandezas distintas. Kieren (1988), em seus estudos com números racionais, sugere que as frações são produzidas por divisões. Kerslake (1986), Nunes e Bryant (1997), Bezerra (2001), Escolano e Gairín (2005), defendem em seus estudos a ideia de que a introdução do ensino de frações a partir do significado quociente pode contribuir para compreensão desse conteúdo matemático.

Assim, os dados apresentados nesta síntese, nos permitem inferir que esses docentes, em geral, não demonstram *conhecimento matemático para o ensino*, em relação às propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 5.3 e apresentam como possíveis entraves para compreender as ideias associadas às frações maiores e menores que a unidade, conceber a fração apenas como partes iguais de um inteiro, não compreender a fração como um quociente indicado, dentre outros.

4.4 Análise da expectativa de aprendizagem 5.4

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.

Proposta A: Explicar para criança a equivalência das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ a partir da seguinte situação: Tico e Teco ganharam uma barra de chocolate de mesmo tamanho; Tico comeu $\frac{1}{2}$ de sua barra e Teco $\frac{2}{4}$ da sua, apesar das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ serem representadas por numerais diferentes, Tico e Teco comeram a mesma quantidade de chocolate.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de equivalência de frações em quantidades extensivas - quantidades de mesma natureza (barra de chocolate).

Ela foi considerada correta, uma vez que as barras de chocolate são do mesmo tamanho e há equivalência entre as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta:

Tabela 14 - Resultado referente à proposta A da expectativa de aprendizagem 5.4

JULGARAM A PROPOSTA “A”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	30%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	27%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	12%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	18%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	13%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

Analizamos os resultados em dois momentos distintos:

1º MOMENTO: De acordo com a tabela catorze 69% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 5% apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

É um dado preocupante, pois se trata de um exemplo clássico, em que a proposta de ensino trabalha com duas frações bem conhecidas, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, numa situação contextualizada que pode ajudar a criança a compreender que uma fração pode ter infinitas representações.

Vejamos alguns exemplos de justificativas que manifestaram *conhecimento matemático para o ensino*:

(P528): “Esta situação é interessante e através das tiras de cartolina as crianças poderiam observar que tico e teco comeram a mesma quantidade”.

(P401): “Apesar de diferentes numerais as frações representam a mesma quantidade”.

(P456): “Sim, porque as duas partes se equivalem”.

São docentes que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que compreendem aspectos relacionados à ideia de equivalência de frações em quantidades extensivas e podem demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino* tendo em vista que usariam, ou poderiam usar a proposta de ensino em sala de aula.

Assim, apenas os sujeitos que julgaram a proposta correta (5%) e apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*

compreendem as ideias de equivalência de frações que a proposta de ensino apresenta.

2º MOMENTO: A tabela 14 revela que 18% dos professores julgaram a proposta errada.

Vejamos algumas justificativas:

(P410): *“Está errada, não é igual”.*

(P457): *“Estarei errando ao dizer que os dois comeram a mesma parte do chocolate”.*

(P513): *“Porque não são iguais”.*

São sujeitos que não compreendem que um mesmo número racional pode ter infinitas representações.

Conforme vimos na análise prévia da proposta, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997) uma das dificuldades do estudante compreender o conceito de fração é entender a noção de equivalência, ou seja, entender que cada fração pode ser representada por diferentes e infinitas representações, uma vez que no campo dos naturais uma determinada quantidade era representada por um único número e, agora, no campo dos racionais, é necessário conceber infinitas representações para uma determinada quantidade.

Sendo assim, podemos questionar: como os professores que julgaram a proposta “errada, e eu jamais usaria em sala de aula”, poderão ajudar os estudantes a compreender a equivalência de frações, se eles mesmos apresentam dificuldades em relação a esse conceito?

Assim, um dos possíveis entraves que esses docentes apresentam para trabalhar a expectativa de aprendizagem 5.4 é não conceber que uma fração pode apresentar infinitas representações.

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.
--

Proposta B: Dizer para a criança que para obtermos frações equivalentes basta multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que utiliza a abordagem tradicional – baseada em algoritmos e procedimentos – para obter classes de equivalência.

É uma proposta correta do ponto de vista da Matemática. No entanto, para os anos iniciais do Ensino Fundamental, trata-se de uma situação de ensino em que o conceito de equivalência de fração é abordado por meio de um processo mecânico, cuja ênfase está no domínio de um algoritmo, reforçando a ideia de fração como dois números naturais (numerador e denominador) separados por um traço (NUNES E BRYANT, 1997; CANOVA, 2006; MERLINI, 2005).

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta:

Tabela 15 - Resultado referente à proposta B da expectativa de aprendizagem 5.4

JULGARAM A PROPOSTA “B”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	24%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	22%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	15%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	16%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	23%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 15 informa que 61% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, nenhum apresentou justificativa que manifestou *conhecimento matemático para o ensino*.

Alguns justificaram demonstrando familiaridade com a proposta de ensino:

(P425): “Acho simples de entendimento”.

(P571): “Usaria com certeza”.

No entanto, é importante salientar que a proposta trata de uma situação de ensino em que o conceito de equivalência de fração é abordado com base no domínio de um algoritmo, que reforça a ideia de fração como dois números naturais separados por um traço.

Behr et al. (1983) criticam a ênfase curricular nesse tipo de abordagem e argumentam que, mesmo dando ênfase aos procedimentos e algoritmos, o resultado

dos alunos em testes de desempenho não costuma ser satisfatório. Para esses estudiosos a causa dessas dificuldades é a priorização, no ensino, dos procedimentos em detrimento dos aspectos ligados à compreensão do conceito.

Sendo assim, embora a proposta seja correta do ponto de vista da Matemática, ela induz o aluno a obter classes de equivalência por meio de procedimentos mecânicos e, mesmo assim, nenhum sujeito que julgou a proposta correta demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

2º MOMENTO: A tabela 15 ainda revela que 16% dos professores julgaram a proposta “errada, e eu jamais usaria em sala de aula”.

Vejamos algumas justificativas:

(P408): “Bem não estou lembrada, mas acho que divide”.

(P547): “Deve-se dividir”.

Esses docentes que julgaram a proposta errada não demonstram *conhecimento comum do conteúdo* acerca de frações equivalentes conforme apresentado na proposta de ensino. É provável que guardem apenas lembranças de como “aprenderam” na época de estudante a simplificação de frações.

Makarewicz (2007) realizou estudo com 50 alunos do 4º semestre de um curso de Pedagogia em que categorizou algumas crenças destes estudantes em relação à Matemática e seu ensino e como resultado a pesquisadora constatou:

O grupo aparenta ter conhecimentos matemáticos rudimentares, compartimentados, centrado na aplicação de procedimentos de cálculos. Para esse grupo, a Matemática tem pouco significado e aqueles que dizem que gostam de Matemática referem-se à Matemática usada no cotidiano. Trazem marcas muito fortes da Matemática básica, de como aprenderam essa disciplina. (MAKAREWICZ, 2007, p.85).

Portanto, os sujeitos que julgaram a proposta errada apresentam dificuldades quanto ao conhecimento de Matemática que a proposta de ensino apresenta.

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.

Proposta C: Apresentar a criança a seguinte situação: Numa mesa há três jarras distintas A, B e C. Na jarra A temos suco de laranja com $\frac{1}{5}$ de concentrado e $\frac{4}{5}$ de água; na jarra B também suco de laranja com $\frac{1}{5}$ de concentrado e $\frac{4}{5}$ de água; se juntarmos os conteúdos das jarras A e B na Jarra C vamos obter suco de laranja com $\frac{2}{5}$ de concentrado.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de frações equivalentes em quantidades intensivas.

Ela foi considerada errada na análise prévia do questionário, uma vez que Nunes et al. (2003) adverte que em situações de quantidades intensivas não é possível adicionar frações da mesma forma que em situações de quantidades extensivas. Sendo assim, a quantidade de concentrado na jarra C continua sendo $\frac{1}{5}$, e não $\frac{2}{5}$ como a proposta sugere.

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta:

Tabela 16 - Resultado referente à proposta C da expectativa de aprendizagem 5.4

JULGARAM A PROPOSTA "C"	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	18%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	24%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	18%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	21%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	19%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 16 informa que 21% dos professores julgaram a proposta errada. No entanto, apenas 3% apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

(P458): "Errado, pois a proporção é a mesma. Continuaria a mesma proporção $\frac{8}{10}$ de água para $\frac{2}{10}$ de suco. Ou $\frac{4}{5}$ de água e $\frac{1}{5}$ de suco".

Esse sujeito demonstra *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que compreende aspectos relacionados a equivalência de frações em quantidades intensivas.

Outros sujeitos que julgaram a proposta errada justificaram apresentando conteúdo equivocado:

(P456): “Não, pois $2/5$ é inferior a $1/5 + 4/5$ ”.

(P435): “A = $1/5$ concentrado B = $1/5$ concentrado. $4/5$ água em ambos. A quantidade de água aumentou então provavelmente o concentrado diminuiria”.

(P553): “Para que o problema tivesse aplicação prática, a jarra teria de ser maior, isso comprometeria o entendimento”.

São sujeitos que não compreendem o conteúdo de Matemática que a proposta de ensino apresenta.

Assim, apenas os sujeitos que julgaram a proposta errada (3%) e apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino* compreendem as ideias relacionadas a equivalência de frações em quantidades intensivas presentes na proposta de ensino.

2º MOMENTO: A tabela 16 também apresenta que 60% dos professores julgaram a proposta correta.

Vejamos algumas justificativas:

(P466): “Basta juntar $1/5 + 1/5 = 2/5$ ”.

(P517): “Soma de fração com o mesmo denominador. Soma-se apenas o numerador para obter-se o todo (resultado)”.

São sujeitos que somaram $1/5 + 1/5$ sem considerar os aspectos intensivos das quantidades envolvidas na situação.

Essa compreensão errônea, acerca da equivalência de frações, pode estar presente na prática pedagógica desses docentes:

(P510): “Com o próprio recipiente (três jarras iguais) e os sucos nas mesmas proporções faria a experiência e a conta de adição”.

(P424): “Sim, a proposta é muito boa”.

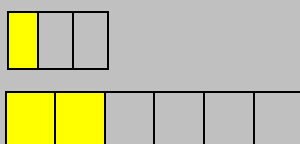
(P535): “Acredito que essa proposta seria bem utilizada em sala de aula”.

São sujeitos que não compreendem os aspectos intensivos das quantidades envolvidas na situação que a proposta de ensino apresenta.

Assim, podemos inferir que esses docentes que julgaram a proposta correta apresentam dificuldades em relação às ideias de frações equivalentes em quantidades intensivas presentes na proposta de ensino.

EXPECTATIVA 5.4: RELACIONAR FRAÇÕES EQUIVALENTES EM SITUAÇÃO CONTEXTUALIZADA.

Proposta D: Tomando por base as figuras abaixo, explicar para a criança que as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ são equivalentes.



O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a equivalência de frações em quantidades extensivas em situação de parte-todo.

A proposta, na análise prévia do questionário, foi considerada errada, porque as duas figuras, cujas partes coloridas são representadas pelas frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, só pertenceriam a uma classe de equivalência de frações se fossem do mesmo tamanho.

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta:

Tabela 17 - Resultado referente à proposta D da expectativa de aprendizagem 5.4

JULGARAM A PROPOSTA “D”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	34%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	25%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	13%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	12%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	16%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

Fizemos as análises em dois momentos distintos:

1º MOMENTO: A tabela 17 informa que 12% dos professores julgaram a proposta errada, e desse total 28% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*:

(P417): “Tomando por base as figuras representadas observamos que elas não são equivalentes”.

(P425): “Pois as figuras deveriam ser iguais, de mesmo tamanho, mas uma dividida em 3 e outra em 6”.

(P537): “Ilustrar o todo do mesmo tamanho para depois dividir. O todo não corresponde”.

Esses docentes demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que compreendem que na equivalência de frações em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo, a classe de equivalência depende do tamanho do todo (ou da unidade).

Os demais sujeitos que julgaram a proposta errada não demonstraram *conhecimento matemático para o ensino* concernente a proposta de ensino analisada.

2º MOMENTO: A tabela 17 também revela que quase três quartos dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, na análise prévia do questionário ela foi considerada errada.

(P466): “Basta multiplicar $1 \times 2 = 2$ e $3 \times 2 = 6$, comprovando a exatidão”.

(P555): “Porque para realizar equivalência de uma fração realmente multiplica-se o denominador e o numerador por um mesmo número maior que 1”.

(P534): “Bastaria multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número, para obter equivalência”.

São sujeitos que obtêm frações equivalentes por meio de um algoritmo, mas desconhecem os aspectos extensivos da equivalência de frações em situação de parte-todo.

Nunes et al. (2003), chamam a atenção que, ao tratar de equivalência de frações em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo, a classe de equivalência depende do tamanho do todo (ou da unidade).

Tudo indica que os sujeitos que julgaram a proposta correta não observaram o tamanho do todo, desprezando os aspectos extensivos das quantidades envolvidas na situação.

Algumas justificativas convergiram no sentido de que essa compreensão errônea acerca da equivalência de frações pode estar presente na prática pedagógica desses docentes, comprometendo a qualidade da aprendizagem dos estudantes.

(P426): “Sim usaria, pois a atividade está de fácil compreensão”.

(P578): “Possivelmente eu usaria inicialmente uma pizza dividida em 3 partes iguais. Facilitaria a compreensão inicial e só depois usaria a barra”.

Assim, podemos inferir que esses docentes que julgaram a proposta correta apresentam dificuldades em compreender a equivalência de frações num contexto de quantidades extensivas numa situação de parte-todo.

Síntese da análise dos resultados da expectativa de aprendizagem 5.4

As propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 5.4, buscaram identificar que conhecimentos, na acepção de Ball et al. (2008), os professores demonstram sobre equivalência de frações e possíveis entraves que esses docentes apresentam quanto a compreensão de ideias associadas a esse conteúdo de Matemática.

A análise dos resultados apresentaram dados preocupantes que revelam a dificuldade desses docentes trabalhar as propostas de ensino referentes à expectativa de aprendizagem 5.4

Na proposta A, por exemplo, que investigou como os professores julgaram uma situação de ensino que explora a ideia de equivalência de frações em quantidades extensivas, 18% dos professores julgou a proposta errada por não compreender que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam quantidades iguais de uma mesma barra de chocolate e, dos professores que julgaram a proposta correta (69%), apenas 5% apresentou justificativa que manifestou *conhecimento matemático para o ensino*.

A proposta B, que investigou como os professores julgaram uma situação de ensino que obtém classes de equivalência por meio da abordagem tradicional, nenhum sujeito participante da pesquisa apresentou justificativa que manifestou

conhecimento matemático para o ensino, e 46% dos professores usariam, ou poderiam usar tal proposta de ensino em sala de aula.

Já a proposta C, que investigou a ideia de frações equivalentes em quantidades intensivas, 60% dos professores, não compreende que no contexto de quantidades intensivas não é possível adicionar frações, e na proposta D, que investigou a equivalência de frações em quantidades extensivas, três quartos dos professores não observaram o tamanho do todo, e julgaram a proposta considerada errada na análise prévia como correta.

São números preocupantes, uma vez que os PCN (BRASIL, 1997) reconhecem que uma das dificuldades do estudante compreender o conceito de fração é entender a noção de equivalência.

Assim, os dados apresentados nesta síntese, nos permitem inferir que esses docentes, em geral, não demonstram *conhecimento matemático para o ensino* em relação às propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 5.4 e apresentam como possíveis entraves para compreender as ideias associadas à equivalência de frações, não perceber que uma fração pode ser representada por diferentes representações, não considerar os aspectos das quantidades intensivas e extensivas envolvidos em situação de equivalência de frações, obter classes de equivalência de frações por meio de procedimentos e algoritmos.

4.5 Análise da expectativa de aprendizagem 5.5

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
--

Proposta A: Dizer à criança que o sucessor de 0,8 é 0,9; pois 9 é o sucessor de 8.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que trabalha a ordenação de números decimais, por meio da ideia de sucessor e antecessor, muito frequente nos números naturais.

Considerada errada na análise prévia do questionário, tendo em vista que para os números decimais não faz sentido falar em antecessor e sucessor uma vez que entre dois números decimais existem infinitos números decimais.

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta de ensino:

Tabela 18 - Resultado referente à proposta A da expectativa de aprendizagem 5.5

JULGARAM A PROPOSTA “A”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	19%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	30%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	14%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	25%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	12%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

Fizemos as análises em dois momentos distintos:

1º MOMENTO: A tabela 18 informa que 25%, dos professores julgaram a proposta errada. No entanto, nenhum demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Suas justificativas convergiram no sentido de fazer menção aos termos antecessor e sucessor, conceito que não faz sentido para os números racionais.

(P466): “Pois como se trata de números decimais 0,8 é maior que 0,9 portanto é antecessor”.

(P516): “A justificativa apresentada está errada, pois 0,9 é sucessor de 0,8 por estar mais próximo de um inteiro”.

(P579): “0,9 é antecessor de 0,8”.

Assim, embora tenham julgado a proposta de ensino errada esses docentes (25%) não demonstram *conhecimento matemático para o ensino* e apresentam dificuldades em relação à ordenação e comparação de números decimais.

2º MOMENTO: A tabela 18 ainda revela que dois terços dos professores julgaram a proposta correta. Em que 19% julgaram “correta, e eu certamente usaria em sala de aula”:

(P426): “Usaria sim, com certeza meu educando está capacitado para compreender esse tipo de atividade”.

(P512): “A criança compreenderia mais rápido”.

São sujeitos que poderiam usar em sala de aula as ideias de antecessor e sucessor para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 5.5.

No entanto, para os PCN (BRASIL, 1997) não faz sentido falar em antecessor e sucessor para o ensino dos números decimais, uma vez que entre dois decimais quaisquer é sempre possível encontrar outro decimal.

Outras justificativas revelaram a dificuldade desses professores em compreender a ordenação de números decimais:

(P456): “Pois o 9 sucede o 8 como o 0,8 sucede o 0,9”.

(P528): “Nesta situação usaria este método, pois o algarismo 0 nesta situação não tem valor e o sucessor de 9 é 8”.

(P517): “Explicando por desenhos os números antecessores e sucessores. Logo seria aplicável mostrar o 9 como sucessor de 8”.

(P577): “Pois pela lógica após o 8 vem o nove (9), dentro de um contexto que ele já domina”.

Tudo indica que esses docentes utilizam os critérios de ordenação de números naturais para os números decimais.

Assim, um dos possíveis entraves desses professores para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 5.5 é utilizar as regras dos números naturais para ordenar números decimais.

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
Proposta B: Dizer para criança que 1,198 é maior que 1,3; pois tem mais algarismos.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino de comparação de números decimais num contexto matemático.

A proposta foi considerada errada na análise prévia do questionário, pois a comparação de dois números decimais independe do tamanho da escrita. Apresentamos os resultados na tabela a seguir:

Tabela 19 - Resultado referente à proposta B da expectativa de aprendizagem 5.5

JULGARAM A PROPOSTA "B"	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	3%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	7%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	11%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	64%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	15%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 19 revela que 64%, dos professores julgaram a proposta errada. No entanto, apenas 14% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

(P416): "Porque a proposta está errada, porque 1,198 é menor que 1,3".

(P443): "Porque 1,198 é menor que 1,3".

(P509): "1,3 é maior que 1,198 não importa a quantidade de algarismos, basta observar apenas o número após a vírgula e saberia se é maior ou menor".

São professores que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que compreendem que a comparação de números decimais independe da quantidade de algarismos.

Outros professores que julgaram a proposta errada suas justificativas revelaram dificuldades quanto a comparação de números decimais:

(P422): "Porque em numeração decimal quanto mais algarismos, menor será o número".

(P547): "Não tem mais algarismos. Apesar de ter mais algarismos 1,198 é menor, pois o número seguinte 0,198 é menor que 0,300".

São justificativas cujo conteúdo apresenta erro.

Assim, apenas os sujeitos que julgaram a proposta errada (14%) e apresentaram justificativa que demonstram *conhecimento matemático para o ensino* compreendem as ideias de comparação de números decimais presentes na proposta de ensino.

2º MOMENTO: A tabela 19 apresenta que 21% dos professores julgaram a proposta correta.

Vejamos algumas justificativas:

(P561): *“Sim, pois ele entenderia, mas também poderia trabalhar com o concreto seria muito melhor seu entender”.*

(P408): *“Poderia usar, porque tinha que ser bem clara a explicação, o motivo desses números serem maior que 1,3”.*

Professores que participaram da pesquisa de Esteves (2009) afirmaram que 0,103 é maior que 0,7; 0,40 é maior que 0,9; 1,005 é muitas vezes maior que 1,0. O mesmo fenômeno foi observado nos estudos de Padovan (2000) e Silva (2006) com alunos do Ensino Fundamental ao comparar números decimais. Brousseau (1980) ao analisar o ensino dos números decimais na França nos anos 60 e 70, constatou que uma de suas características principais era considerar o número decimal como um número natural munido de uma vírgula.

Assim, é provável que os professores que julgaram a proposta correta (21%) comparam números decimais como se fossem números naturais, baseados no tamanho da escrita.

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
--

Proposta C: Apresentar a seguinte situação: tico e teco, ao registrar suas alturas no quadro, escreveram: tico 1,30m; teco 1,3m; a partir dos registros explicar para as crianças, utilizando uma fita métrica, por exemplo, que tico e teco possuem a mesma altura, pois tanto 0,3 metro quanto 0,30 metro correspondem a 30 centímetros.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de equivalência de número decimal, num contexto de medida.

Ela foi considerada correta na análise prévia do questionário porque apesar das alturas de Tico e Teco estarem representadas por numerais diferentes expressam o mesmo valor.

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta:

Tabela 20 - Resultado referente à proposta C da expectativa de aprendizagem 5.5

JULGARAM A PROPOSTA “C”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	18%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	29%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	13%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	26%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	14%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: De acordo com a tabela vinte, 60% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 4% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

(P577): “O zero nesse caso não tem valor e seria importante explicar ao aluno”.

(P518): “É correto, 1,3 corresponde a 1,30”.

(P578): “Possivelmente falaria em décimos e centésimos para facilitar a compreensão”.

São docentes que demonstram *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que compreendem aspectos relacionados à ideia de equivalência de números decimais em contexto de medida e podem demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino* tendo em vista que usariam, ou poderiam usar a proposta de ensino em sala de aula.

Outros sujeitos que julgaram a proposta “correta, mas eu não usaria em sala de aula” justificaram alegando que as crianças não entenderiam:

(P454): “Representação decimal não é possível ser vivenciado”.

(P422): “Não usaria porque não está no entendimento das crianças”.

São justificativas que não se sustentam, uma vez que os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) orientam que o trabalho com os números decimais pode ser articulado com as medidas. São docentes não compreendem a proposta de ensino e atribuem a dificuldade aos estudantes.

Assim, podemos inferir que apenas os sujeitos que julgaram a proposta correta (4%) e apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático*

para o ensino compreendem as ideias de equivalência de números decimais que a proposta de ensino apresenta.

2º MOMENTO: A tabela 20 também revela que 26% dos professores julgaram a proposta errada. Tais sujeitos não compreendem que a proposta de ensino apresenta duas formas de escrita (1,30m e 1,3m) para um mesmo número decimal.

Vejamos algumas de suas justificativas:

(P456): “Pois não há equivalência entre 0,3 e 0,30”.

(P537): “0,3 é diferente de 0,30”.

São sujeitos que consideram o decimal 30 centésimos maior que o decimal 3 décimos e, também, fazem associação da parte decimal das alturas de Tico e Teco (3 e 30) com os valores desses números no conjunto dos números naturais.

Assim, podemos inferir que não compreendem as ideias de equivalência de números decimais em contexto de medida conforme a proposta de ensino apresenta.

EXPECTATIVA 5.5: COMPARAR E ORDENAR NÚMEROS NA REPRESENTAÇÃO DECIMAL, USADOS EM DIFERENTES CONTEXTOS.
Proposta D: Dizer à criança que R\$ 0,10 (dez centavos) tanto equivale a dez centésimos do real, como a um décimo do real.

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de equivalência de número decimal num contexto monetário.

Ela foi considerada correta na análise prévia do questionário, tendo em vista que dez centavos equivalem a dez centésimos e também a um décimo do real.

A proposta de ensino ainda se constitui num elemento que pode ajudar a criança a compreender que um número decimal pode ter mais de uma representação, pois de acordo com os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) o recurso ao nosso sistema monetário permite que o estudante atribua sentido à representação decimal e consolide as ideias de décimos e centésimos dos números racionais na representação decimal.

A tabela 21 apresenta como os professores julgaram a proposta.

Tabela 21 - Resultado referente à proposta D da expectativa de aprendizagem 5.5

JULGARAM A PROPOSTA “D”	PROFESSORES DO 4º E 5º ANO
CORRETA, E EU CERTAMENTE USARIA EM SALA DE AULA.	21%
CORRETA, E EU PODERIA USAR EM SALA DE AULA.	28%
CORRETA, MAS EU NÃO USARIA EM SALA DE AULA.	20%
ERRADA, E EU JAMAIS USARIA EM SALA DE AULA.	19%
NÃO ASSINALARAM ALTERNATIVAS.	12%

Fonte: dados da pesquisa, 2014.

1º MOMENTO: A tabela 21 revela que 69% dos professores julgaram a proposta correta. No entanto, apenas 1% desses professores apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

(P466): “Pela equivalência dividindo 1 real em 10 partes $1/10$ do real como 0,10 dez centavos”.

Tal sujeito demonstra *conhecimento comum do conteúdo*, uma vez que compreende aspectos relacionados à ideia de equivalência de números decimais num contexto monetário e pode demonstrar *conhecimento do conteúdo e ensino* tendo em vista que usaria a proposta de ensino em sala de aula.

Vejamos outras justificativas de professores que julgaram a proposta de ensino correta:

(P414): “Trabalhar com dinheiro é bem legal”.

(P426): “Sim poderia usar, pois eles têm uma habilidade incrível quando se trata de dinheiro”.

(P513): “É buscar a realidade do aluno para sala de aula”.

Tais justificativas não estão erradas. No entanto, nada dizem sobre a equivalência de números decimais num contexto monetário, não manifestando *conhecimento matemático para o ensino*.

Assim, apenas os sujeitos que julgaram a proposta correta (1%) e apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino* compreendem às ideias de equivalência de números decimais que a proposta de ensino apresenta.

2º MOMENTO: A tabela 21 ainda revela que 19% dos professores julgaram a proposta errada.

(P416): “Um décimo do real não é a mesma coisa que dez centésimos do real”

(P432): “Porque pelo sistema de numeração decimal, tendo dez como base, R\$ 0,10 não é dez centésimos, mas um décimo do real”.

São sujeitos que não demonstram *conhecimento matemático para o ensino*. Para eles um décimo é diferente de dez centésimos.

Portanto, não compreendem as ideias de equivalência de números decimais em contexto monetário, conforme a proposta de ensino apresenta.

Síntese da análise dos resultados da expectativa de aprendizagem 5.5

As propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 5.5, buscaram identificar que conhecimentos, na acepção de Ball et al. (2008), os professores demonstram sobre ordenação e comparação de números decimais e possíveis entraves que esses docentes apresentam quanto a compreensão de ideias associadas a esse conteúdo de Matemática.

A análise dos resultados apresentaram dados preocupantes que revelam a dificuldade desses docentes trabalhar as propostas de ensino referentes à expectativa de aprendizagem 5.5.

Na proposta A, por exemplo, que investigou a ordenação de números decimais, por meio da ideia errônea de sucessor e antecessor, dois terços dos professores julgou a proposta correta. São docentes que não concebem que entre dois números decimais existem infinitos números decimais.

Na proposta de ensino B, que sugere dizer para a criança que 1,198 é maior que 1,3; pois tem mais algarismos, 21% dos professores julgaram a proposta correta, 15% não assinalaram alternativa e dos sujeitos que julgaram a proposta errada (64%), apenas 14% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Já a proposta C, que investigou como os professores julgaram uma situação de ensino que explora a ideia de equivalência de número decimal, num contexto de

medida, 26% dos professores julgou a proposta errada porque não compreendem que 1,30m e 1,3m representam a mesma medida e, apesar de 60% dos docentes ter julgado a proposta correta, apenas 4% apresentaram justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Por fim, a proposta D, considerada correta, investigou como os professores julgaram uma proposta de ensino que explora a ideia de equivalência de números decimais, num contexto monetário, em que 19% dos sujeitos julgaram a proposta errada e, apesar de 69% dos docentes ter julgado a proposta correta, apenas 1% apresentou justificativa que demonstrou *conhecimento matemático para o ensino*.

Assim, os dados apresentados nesta síntese, nos permitem inferir que esses docentes, em geral, não demonstram *conhecimento matemático para o ensino*, em relação às propostas de ensino apresentadas para o trabalho com a expectativa de aprendizagem 5.5 e apresentam como possíveis entraves, utilizar as ideias de antecessor e sucessor para ordenar números decimais e utilizar as regras dos números naturais para ordenar e comparar números decimais no contexto da Matemática, de medida e monetário.

No próximo capítulo faremos as considerações finais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo buscou investigar como os professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais, tomando por base as expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco.

O aporte teórico para o desenvolvimento de nossa pesquisa contemplou os estudos de Kieren et al. (1976, 1988, 1993), Behr et al. (1983, 1993), Nunes e Bryant (1997), Kerslake (1986), Cunha (2002), Merlini (2005), Canova (2006), Teixeira (2008), Esteves (2009), dentre outros e o modelo teórico conhecimento matemático para o ensino proposto por Ball et al. (2008).

Para atingirmos nosso objetivo elaboramos um questionário a partir de cinco expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco, em que cada expectativa apresentou quatro propostas de ensino para o trabalho com os números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Aplicamos o instrumento diagnóstico para 152 professores do 4º e 5º ano em pleno exercício de docência, da rede municipal de ensino de Jaboatão dos Guararapes e, a partir dos dados coletados, analisamos as propostas de ensino que os professores julgaram corretas ou erradas com o objetivo de identificar conhecimentos e entraves que esses docentes demonstram para o trabalho com os números racionais.

No que concerne ao conhecimento sobre os números racionais constatamos que mais da metade dos professores (68%) não consideram a necessidade de termos uma figura dividida em partes iguais para representar uma fração; menos de 5% compreendem a ideia de fração como parte-todo em contexto de quantidade discreta; nenhum apresentou justificativa que manifestasse *conhecimento matemático para o ensino* em relação à distância do zero a $\frac{1}{2}$, numa reta numérica, corresponder a duas vezes a distância do zero a $\frac{1}{4}$; 22% ao comparar frações com numerador unitário consideraram a fração $\frac{1}{5}$ maior que a fração $\frac{1}{3}$; 38% não compreendem que a fração $\frac{5}{4}$ encontra-se localizada entre os números um e dois; 72% consideram as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ equivalentes, mesmo elas representando partes coloridas de figuras de tamanhos diferentes; mais da metade (63%) para ordenar números decimais utilizaram as ideias de antecessor e sucessor, não

percebendo que esse conceito só faz sentido no conjunto dos números naturais, dentre outras dificuldades.

Resultados que nos permitiram inferir que esses docentes utilizam a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza; concebem a fração apenas como partes iguais de um inteiro; não compreendem o princípio da ordenação de frações unitárias; não concebem a fração como um número, uma magnitude; não compreendem que um número racional pode ter diferentes representações; utilizam as regras dos números naturais para ordenar e comparar números decimais.

Assim, retomamos nossa questão de pesquisa que apresentamos na introdução desse estudo:

Expectativas de aprendizagem dos PCPE: que conhecimentos professores dos anos iniciais manifestam quando julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais?

Lembramos que nosso estudo foi realizado com uma amostra envolvendo 152 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e, apesar de o nosso objetivo ter se limitado a identificar apenas ideias concernentes ao conceito de números racionais, as propostas de ensino que constaram no questionário referente às expectativas de aprendizagem não foram suficientes para dar conta dessas ideias. Além do mais, reconhecemos a complexidade do trabalho docente no que diz respeito ao que sabem os professores sobre determinado conteúdo e a maneira como o ensinam.

Portanto, os dados que dispomos não nos permitem extrapolar para além de nossa amostra. Mas, acreditamos que podem contribuir para dar pistas sobre o conhecimento do professor para o trabalho com os números racionais.

Assim, podemos dizer, em geral, que os professores participantes desta pesquisa não demonstram *conhecimento matemático para o ensino*, na acepção de Ball et al (2008), para o trabalho com as expectativas de aprendizagem de Matemática dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco sobre os números racionais.

Os resultados apresentados evidenciam a fragilidade do conhecimento desses docentes em relação aos números racionais e como isto pode influenciar a

sua prática pedagógica, uma vez que propostas de ensino consideradas erradas na análise prévia do questionário eles julgaram corretas e usariam ou poderiam usa-las em sala de aula.

Concordamos com Ball et al. (2008) que considera fundamental que os professores conheçam os conteúdos que ensinam, pois como ensinar conteúdos dos quais não se têm domínio?

Para esses pesquisadores os cursos de formação de professores devem focar, principalmente, no preparo dos professores no sentido de conhecerem e serem capazes de usar a Matemática que é necessária no trabalho de ensinar.

Sendo assim, não podemos responsabilizar apenas o professor por essa situação, tendo em vista que os cursos de formação de professores dos anos iniciais, conforme Curi (2004) dão pouca ênfase às disciplinas relativas à Matemática e seu ensino, priorizando o “saber fazer” em detrimento do conhecimento específico do conteúdo de ensino. Prática que se repete, na maioria das vezes, nas formações continuadas.

Essa lacuna nos cursos de formação limita aos professores a oportunidade de aprofundar e ampliar seus conhecimentos matemáticos, por isso, muitas vezes, eles buscam em suas experiências como estudantes da Educação Básica, ou em práticas pedagógicas baseadas na percepção, os alicerces para o ensino, conforme observamos em diversos momentos em nossa investigação.

É necessário então repensar urgentemente a questão da formação inicial e continuada de professores que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, principalmente no que diz respeito ao seu conhecimento de Matemática. Observamos em nossa investigação situações preocupantes como, por exemplo, professores afirmarem que a fração $\frac{1}{2}$ pode ser representada pelo número decimal 1,2.

Por isso, ao longo de nossa pesquisa concordamos com pesquisadores como Lee Shulman, Deborah Ball, Liping Ma que defendem o conhecimento de Matemática como um elemento extremamente relevante na formação de um professor que ensina Matemática.

Por outro lado, esses pesquisadores são unânimes ao afirmar que o conhecimento específico do conteúdo é necessário, mas não suficiente para realização do trabalho pedagógico.

Nesse sentido, quando falamos em repensar a formação do professor dos anos iniciais estamos considerando uma formação equilibrada, que contemple não apenas o conhecimento de Matemática, mas, sobretudo as contribuições das pesquisas em Educação Matemática, as orientações e sugestões apresentadas por documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares de Pernambuco de Matemática, e o domínio de recursos didáticos.

Assim, uma formação nessa perspectiva proporcionará aos professores a construção significativa dos conceitos matemáticos e maior segurança para exercer o seu papel de professor que ensina Matemática.

Sugerimos como tema para futuras pesquisas, qual a relação entre as dificuldades apresentadas por professor e alunos quanto à compreensão dos números racionais? Investigar na sala de aula como os professores dos anos iniciais trabalham as expectativas de aprendizagem dos PCPE sobre os números racionais? Pode-se também analisar os livros didáticos dos anos iniciais com o objetivo de verificar se contemplam as expectativas de aprendizagem dos PCPE para o trabalho com os números racionais?

Esperamos assim que esta pesquisa possa contribuir para a formação do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo. **Introdução a análise matemática**. 2ª ed. ver. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). **Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?** *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

BEHR, M., LESH, R., POST, T. R., & SILVER, E. A. (1983). **"Rational number concepts"**. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes*, p. 91-126. New York: Academic.

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T. LESH, R., **Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis**. Em Carpenter, T. P., Fennema E. e Romberg T. A. (edits) in *Rational Numbers: An Integration of Research*, London, 1993.

BEZERRA, F. J. **Introdução do Conceito de Número Fracionário e de suas Representações**: Uma abordagem Criativa para Sala de Aula. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2001.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif. **Estudo sobre a aplicação de uma sequencia didática para o ensino dos números decimais**. Tese de Doutorado em Psicologia da Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

BRASIL. Ministério da educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1997.

BROUSSEAU, G. **Problèmes de l'enseignement des décimaux**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, vol. 1, nº 1. 1980.

CAMPOS, T. et al. 1995, **Uma análise da construção do conceito de fração**: relatório de pesquisa. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Não publicado).

CANOVA. R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2006.

CARAÇA, Bento Jesus. **Conceitos fundamentais de Matemática**. Lisboa, Portugal: Gradiva, 1998.

CERVO, A. L. & BERVIAN, P. A. **Metodologia científica**. São Paulo, McGraw-Hill, 1993.

CUNHA, M. R. K. **A quebra da unidade e o número decimal**: um estudo diagnóstico nas primeiras séries do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2002.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos.** Tese de doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2004.

CURI e PIRES. **Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisas de instituições paulistanas.** *Revista da PUC Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, V. 10 n.1, pp 151 – 189, 2008.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental.** Tese de doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2007.

ESCOLANO, R. GAIRIN, J. M. “Modelos de Medida para o Ensino do Número Racional na Educação Primária”. *Revista Iberoamericana de Educação Matemática*. Lisboa. 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.il.pt/docentes/ponte/> Acesso em: 10 de janeiro de 2014.

ESTEVES, A. K. **Números decimais na escola fundamental: interações entre os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. UFMS/MS 2009.

FIORENTINI, D. et al. **Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira.** *Revista Educação em Revista Dossiê Educação Matemática*, Belo Horizonte, UFMG 2003.

KERSLAKE, D. SESM interviews in: **Fractions: children's Strategies and errors: a report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project.** Windsor: Nfer-Nelson, 1986, p. 1-42

KIEREN, T. E. **Number and measurement: mathematical, cognitive and instructional fundaments of rational number,** Columbus, OHERIC/SMEA, p.101-144, 1976.

_____, **Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development.** In: J. HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.): *Number concepts and operations in the Middle Grades.* New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 162-180.

_____, **Rational and Fractional Numbers: From quotient Fields to Recursive Understanding.** Em Carpenter, T. P., Fennema E. e Romberg T. A. (edits) in *Rational Numbers: An Integration of Research*, London, 1993.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MA, Liping. **Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' Understanding of fundamental mathematics in China and the United State.** New Jersey, Lawrence Erlbaum, 1999.

MAKAREWICZ, L. J. **Crenças e atitudes declaradas por estudantes de um curso de Pedagogia em relação à matemática e seu ensino**. Dissertação de Mestrado. São Paulo, Unicsul, 2007.

MARSHALL, Sandra P. **Assessment of rational number understanding**: a schema-based approach. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.). *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1993.

_____. **What students learn (and remember) from word problem instruction**. In: CHIPMAN, S. (Org.). *Penetrating to the mathematical structure of word problems*. Simpósio apresentado na reunião anual da American Educational Research Association, Boston. 1990.

MACK, N., **Learning Fractions with Understanding**: Building on Informal Knowledge, in *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 21, Nº 1, p. 16-32, 1990.

MACK, N. **Learning rational numbers with understanding**: the case of informal knowledge. In: T. P. Carpenter; E. Fennema, and T. A. 1993.

MARTINEZ, E. M., **Significados y significantes Relativos a lãs Fracciones**, *Educacion Matemática*, Vol. 4, Nº 2, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1992.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005.

MOUTINHO, L. **Fração e seus diferentes significados**: um estudo junto a alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005.

NACARATO, A. M. PASSOS, C.L.B.; CARVALHO, D.L. **Os graduandos em pedagogia e suas filosofias pessoais frente à matemática e seu ensino**. *Zetetiké, Cempem, Unicamp*, v. 12, n.21, p.9-33, jan./jun. 2004.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U. & HURRY, J. **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, June, 2003.

OWENS, D. T. **Study of the relationship of area and learning concepts by children in grades three and four**. In: KIEREN, T. E. (Ed.). *Recent research on number concepts*. Columbus: ERIC/SMEAC, 1980.

PADOVAN, D. M. F. **Números decimais**: o erro como caminho. Dissertação de Mestrado em Educação. São Paulo: USP, 2000.

PERNAMBUCO. Secretaria da Educação. **SAEPE – 2011**/ Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 1 (jan/dez. 2011), Juiz de Fora, 2011 – Anual MELO, Manuel Fernando Palácios da Cunha e; OLIVEIRA, Camila Fonseca de; OLIVEIRA, Lina Kátia Mesquita; REZENDE, Wagner Silveira; SILVA, Wellington; VIEIRA, Verônica Mendes.

_____. Secretaria de Educação. **Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd, Juiz de Fora, 2012.

_____. Secretaria de Educação. **Parâmetros para sala de aula** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd, Juiz de Fora, 2013.

_____. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico de Avaliação da Educação: SAEPE – 2012** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. V. 1, Juiz de Fora, 2012.

RODRIGUES, R. R. **Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa**. Rio de Janeiro, 1992.

SAMBO, Abdussalami, A. **Transfer effects of measure concepts on the learning of fractional numbers**. 1980. Tese (Doutoramento) – The University of Alberta.

SANTOS, L. **Mudanças na prática docente: um desafio da formação continuada de professores polivalentes para ensinar Matemática**. Dissertação de Mestrado. São Paulo, PUC, 2008.

SANTOS, R. S. **Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do Saepe sobre números racionais**. Dissertação de Mestrado. Recife, UFPE, 2011.

SHULMAN, L. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching**. *Educational Researcher*. Washington, v. 15, n.2, February, 1986. p.4-14.

_____. **Knowledge and teaching: foundations of the new reform**. *Harvard Educational Review*. v. 57, n.1 February, 1987. p. 1-22.

SWELLER, J.; COOPER, G. **The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra**. *Cognition and Instruction*, v. 2, p. 59-89, 1985.

SILVA, Maria José Ferreira da. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, V. L. **Números Decimais: No que os saberes de adultos diferem dos de crianças?** Dissertação de Mestrado em Educação, Recife: UFPE, 2006.

TEIXEIRA, A. M. **O professor, o ensino de frações e o livro didático:** um estudo investigativo. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2008.