

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

Renato de Siqueira Motta

**OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZAS DE ESTRUTURAS COM
COMPORTAMENTO NÃO LINEAR UTILIZANDO MODELOS DE
ORDEM REDUZIDA**

Recife

2015

Renato de Siqueira Motta

**OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZAS DE ESTRUTURAS COM
COMPORTAMENTO NÃO LINEAR UTILIZANDO MODELOS DE
ORDEM REDUZIDA**

Tese submetida ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Doutor em Ciências em Engenharia Civil.

Tema: Otimização Estrutural

Orientadora: Silvana Maria Bastos Afonso

Coorientador: Eduardo de Souza Neto

Recife / 2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

M921o Motta, Renato de Siqueira.
Otimização sob incertezas de estruturas com comportamento não linear utilizando modelos de ordem reduzida / Renato de Siqueira Motta. - Recife: O Autor, 2015.
132 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientadora: Profa. Dra. Silvana Maria Bastos Afonso.
Coorientador: Prof. Dr. Eduardo de Souza Neto.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2015.
Inclui Referências.

1. Engenharia Civil. 2. Análise não linear. 3. Modelo de Ordem Reduzida. 4. Análise de Confiabilidade. 5. Cálculos das Estatísticas. 6. Otimização Robusta. 7. Otimização Multiobjetivo. 8. Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade. I. Afonso, Silvana Maria Bastos. (Orientadora). II. Souza Neto, Eduardo de. (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2015-164

OTIMIZAÇÃO SOB INCERTEZAS DE ESTRUTURAS COM
COMPORTAMENTO NÃO LINEAR UTILIZANDO MODELOS DE ORDEM
REDUZIDA

Renato de Siqueira Motta

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Doutor em Ciências em Engenharia Civil.

Aprovada por:

Prof^a. Dr^a. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva, Orientador - UFPE

Prof. Dr. Bernardo Horowitz, Examinador Interno - UFPE

Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf, Examinador Interno - UFPE

Prof. Dr. Evandro Parente Junior, Examinador Externo - UFC

Prof. Dr. Anderson Pereira, Examinador Externo - PUC-Rio

Recife, Pernambuco – Brasil.

19 de Fevereiro de 2015.

“I, at any rate, am convinced that He (God) does not throw dice”,

Albert Einstein

“It cannot be for us to tell God how he is to run the world.”,

Niels Bohr

Resumo

Nas últimas décadas o tópico de otimização tem ampliado suas aplicações e tem sido bastante aprimorado devido principalmente ao crescimento da capacidade computacional. Entretanto, na maioria das aplicações na engenharia, a abordagem tradicional é considerar modelos determinísticos. Porém algum grau de incerteza ou variação de parâmetros na caracterização de qualquer sistema estrutural é inevitável. Infelizmente a abordagem determinística pode levar a soluções cujo desempenho pode cair significativamente e/ou restrições podem ser violadas devido a perturbações decorrentes de incertezas. Neste trabalho, serão examinadas algumas abordagens para a consideração das incertezas no processo de otimização e assim obter projetos robustos e confiáveis em estruturas com comportamento não linear. Um projeto robusto é aquele que apresenta, além de bom desempenho, uma baixa variabilidade às incertezas do problema. As medidas de robustez utilizadas aqui foram: a média e a variância da função de interesse. Quando se usa ambas as medidas, à busca por um projeto robusto ótimo, surge como um problema de decisão com múltiplos critérios (otimização multiobjetivo robusta). Para o cálculo dos parâmetros estatísticos serão empregadas duas técnicas de análise de propagação de incerteza, o método de Monte Carlo (MC) e o método da colocação probabilística (Probabilistic Collocation Method - PCM). Quando se considera além da robustez, a confiabilidade estrutural, tem-se então, um problema de otimização robusta baseada em confiabilidade (RBRDO, Reliability-Based Robust Design Optimization). Neste tipo de problema, alguma restrição associada à probabilidade de falha está presente em sua formulação. Dois métodos para o cálculo da probabilidade de falha da estrutura foram investigados: o MC e o FORM (First Order Reliability Method). Para avaliar a restrição de confiabilidade em um procedimento de otimização, serão utilizadas duas abordagens: uma abordagem chamada RIA (*Reliability index approach*), onde é necessário calcular a probabilidade de falha (ou índice de confiabilidade) de cada novo projeto e uma abordagem denominada PMA (*Performance Measure Approach*), para lidar com este tipo de restrições sem a necessidade do cálculo direto da probabilidade de falha. Serão abordados aqui, problemas que envolvem análise não-linear, utilizando o POD (“Proper Orthogonal Decomposition”) para a redução da ordem do modelo computacional e conseqüentemente, o tempo computacional. As estruturas consideradas são treliças planas e espaciais e estruturas 2D (estado plano) com as considerações das não linearidades físicas e geométricas.

Palavras-Chave: Análise não linear; Modelo de Ordem Reduzida; Análise de Confiabilidade; Cálculos das Estatísticas; Otimização Robusta; Otimização Multiobjetivo; Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade.

Abstract

In recent decades the optimization topic has expanded its applications and has been greatly enhanced due mainly to the growth of the computational power available. However, in most engineering applications, the traditional approach is to consider deterministic models. However some degree of uncertainty or variation in the parametric characterization of any structural system is inevitable. Unfortunately, the deterministic approach can lead to solutions whose performance may degrade significantly and/or constraints may be violated due to perturbations caused by uncertainties. In this thesis, some approaches will be examined for the consideration of the uncertainties in the optimization process and thus obtaining robust and reliable designs of structures with nonlinear behavior. A robust design is one that has, in addition to good performance, a low variability of the problem uncertainties. The robustness measures used here were the mean and the variance of the function of interest. When using both measures, the search for a robust optimum design comes as a decision problem with multiple criteria (robust multi-objective optimization). To calculate statistical parameters two techniques of uncertainty propagation analysis will be employed: the method of Monte Carlo (MC) and the Probabilistic Collocation Method (PCM). When considering the structural reliability, in addition to the robustness, it leads to a Reliability-based Robust Design Optimization (RBRDO) problem. In this type of problem, some constraints related with the probability of failure are present in its formulation. Two methods for the approximated computation of the failure probability of the structure were investigated: the MC and the FORM (First Order Reliability Method). To evaluate the reliability constraint in an optimization procedure, two approaches will be used: an approach called RIA (Reliability index approach) where it is necessary to calculate the probability of failure (or reliability index) of each project and an approach called PMA (Performance Measure Approach), to handle such a restriction without the direct computation of the probability of failure. To reduce the order of the computational model, problems involving nonlinear analysis using the Proper Orthogonal Decomposition (POD) will be addressed here, resulting in reduced computational time. The structures considered are plane and space trusses and 2D structures (plan analysis) with the considerations of physical and geometrical nonlinearities.

Keywords: Nonlinear Analysis; Reduced Order Model; Reliability Analysis; Statistics computation; Robust Optimization; Multiobjective Optimization; Probabilistic Collocation Method; Reliability-Based Robust Design Optimization.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS E RELEVÂNCIA	1
1.2. METODOLOGIA	4
1.3. ESCOPO DO DOCUMENTO.....	5
1.4. LISTA DE ACRÔNIMOS	6
2. ANÁLISE NÃO LINEAR.....	8
2.1. MECÂNICA DOS SÓLIDOS.....	8
2.2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM MECÂNICA DOS SÓLIDOS NÃO LINEAR QUASE-ESTÁTICA	11
2.2.1. Solução do problema não linear	13
2.2.2. Grandes deformações	14
2.3. PLASTICIDADE COMPUTACIONAL	15
2.3.1. Critério de escoamento.....	16
2.3.2. Lei de endurecimento	18
2.3.3. Lei de fluxo	19
2.3.4. Caso particular: Treliças.....	20
2.4. PLASTICIDADE COM GRANDES DEFORMAÇÕES	21
2.4.1. Modelo constitutivo de von Mises	22
2.4.2. Determinação do multiplicador plástico	23
2.4.3. Solução da equação constitutiva do modelo von Mises.....	25
2.5. MÉTODOS DE REDUÇÃO DE ORDEM.....	26
2.5.1. POD (Proper Orthogonal Decomposition).....	28
2.5.2. Procedimento Computacional Off-Line/On-Line	31
2.6. APLICAÇÃO.....	32

3. CONSIDERAÇÃO DAS INCERTEZAS	36
3.1. CÁLCULOS DAS ESTATÍSTICAS	37
3.1.1. Definição matemática.....	37
3.1.2. Método de Monte Carlo para a obtenção das estatísticas	38
3.1.3. Técnicas de amostragem	39
3.1.4. Método da Colocação Probabilística (PCM)	41
3.2. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE	44
3.2.1. Monte Carlo em confiabilidade.....	45
3.2.2. FORM.....	46
4. OTIMIZAÇÃO.....	50
4.1. OTIMIZAÇÃO UNI-OBJETIVO	51
4.2. OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO	53
4.3. MÉTODOS PARA GERAÇÃO DE PONTOS DE PARETO	54
4.3.1. Método da Soma Ponderada.....	54
4.3.2. Método Min-Max	56
4.3.3. Método da Interseção Contorno-Normal (NBI).....	57
4.3.4. Método da Restrição Normal Normalizada (NNC)	60
4.3.5. Problemas Com Mais de Duas Funções Objetivo.....	62
4.4. OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE	68
4.4.1. Exemplo do uso do método MC para otimização com confiabilidade	69
4.4.2. Metodologias para otimização com confiabilidade	71
4.5. OTIMIZAÇÃO ROBUSTA	74
4.5.1. Medidas de Robustez	74
4.5.2. Formulação do Problema	75
4.6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL RBRDO	76
5. EXEMPLOS	80

5.1. PROBLEMA BENCHMARK - TRELIÇA 3D	80
5.1.1. Otimização Robusta	84
5.1.2. Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade	87
5.2. TRELIÇA 2D	90
5.2.1. Definição do Problema.....	90
5.2.2. Construção do Modelo de Ordem Reduzida	92
5.2.3. Otimização Robusta (RDO)	93
5.2.4. Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade (RBRDO).....	95
5.2.5. Formulação RBRDO com três objetivos.....	101
5.3. EXEMPLO DE CHAPA QUADRADA COM FURO	104
5.3.1. Chapa quadrada com furo - RBRDO via RIA	106
5.3.2. Chapa quadrada com furo: aproximação RBRDO.....	110
6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS..	113
6.1. SUGESTÕES E TRABALHOS FUTUROS	115
7. REFERÊNCIAS	117

1. Introdução

Esta tese tem o intuito de investigar, desenvolver e implementar procedimentos gerais para a otimização estrutural uni e multiobjetivo determinística e robusta (estocástica), com ou sem restrições de confiabilidade (probabilidade de falha), incorporando um procedimento de aproximação através do método de redução de ordem POD (Proper Orthogonal Decomposition) (CARDOSO, 2009), nas análises estruturais que levam em conta as não linearidades física e geométrica do problema. As estruturas consideradas são treliças espaciais e planas com comportamento elasto-plástico e chapas 2D (estado plano) com não linearidades física e geométrica.

1.1. Considerações Gerais e Relevância

Técnicas de otimização têm sido extensivamente usadas para obter projetos viáveis e econômicos nos mais variados campos das engenharias. Atualmente as abordagens têm se tornado cada vez mais realistas, tendo sido comumente empregadas na solução de problemas não triviais da engenharia prática, incluindo o projeto de estruturas ótimas através de simulação computacional. No entanto, apenas recentemente dois pontos têm sido abordados de forma mais incisiva.

A primeira questão diz respeito ao aprimoramento simultâneo de vários fatores relacionados ao desempenho e custos (funções objetivo) em geral conflitantes, além das várias restrições a serem satisfeitas, quase sempre envolvidas no desenvolvimento de projetos ótimos de problemas reais. Otimizadores de propósito geral não resolvem tais problemas. Uma classe de estratégias baseadas no denominado conceito de Pareto (ARORA et al., 2007), constitui a abordagem adequada quando problemas de otimização multiobjetivo ('Multiobjective Optimization' - MO) devem ser resolvidos.

Nas últimas décadas, distribuições eficientes de pontos de Pareto para problemas bi-objetivos têm sido obtidas graças ao desenvolvimento de algoritmos eficientes tais como o NBI ("Normal-Boundary Intersection") (DAS e DENNIS, 1996) e o NNC ("Normalized Normal Constraint") (MESSAC et al, 2003). Mais recentemente, uma técnica para a obtenção de distribuições eficientes de pontos de Pareto para problemas n-objetivos têm sido desenvolvidas (MOTTA, 2009; MOTTA

et al, 2012) através de uma modificação do método NBI original, chamada NBIm. Essas estratégias juntamente com abordagens clássicas (Método da soma ponderada e Método min-max) (ARORA et al., 2007(a)) serão aqui implementadas e analisadas.

Outra questão importante são as incertezas embutidas de várias formas nos problemas dos mais variados campos da engenharia. Na maioria das aplicações, a abordagem tradicional é considerar modelos determinísticos e incluir fatores de segurança, cuja magnitude está relacionada à variabilidade (incerteza) dos parâmetros do problema. Algum grau de incerteza ou variação nas características de qualquer sistema estrutural é inevitável, alguns fatores de segurança consideram estas aleatoriedades de forma empírica, outros se baseiam em confiabilidade utilizando casos padrões. Independente disto, a utilização de fatores de segurança torna os problemas determinísticos, porém os projetos resultantes não possuem probabilidade de falha conhecida, com a exceção dos casos específicos que possam ter sido utilizados para a definição dos fatores de segurança. A abordagem determinística pode levar a soluções cujas restrições podem ser violadas e, além disto, o desempenho pode cair significativamente devido às perturbações decorrentes de incertezas.

Uma ferramenta aplicada no âmbito estrutural considerando as incertezas nos objetivos (custo, desempenho, etc.) e nas restrições (confiabilidade), além das não linearidades do problema, para obter projetos ótimos em desempenho, robustez e confiabilidade, foi desenvolvida e implementada em ambiente MATLAB (Mathworks, 2012). Esta classe de problema é chamada otimização robusta baseada em confiabilidade (“Reliability-Based Robust Design Optimization” - RBRDO ou R²BDO) (ARORA et al., 2007(b); RATHOD et al, 2011).

Para o cálculo dos parâmetros (momentos) estatísticos serão empregadas duas técnicas não intrusivas de análise de propagação de incerteza, o método de Monte Carlo (MC) e o método da colocação probabilística (“Probabilistic Collocation Method” - PCM) (RAMAMURTHY, 2005). O MC é um dos métodos mais tradicionais para este tipo de análise, porém é inviável para ser aplicado diretamente em modelos complexos de alto custo computacional, devido ao grande número de análises necessárias. O PCM é uma ferramenta desenvolvida visando uma análise de incerteza eficiente, mesmo em modelos complexos e computacionalmente custosos. A ideia básica do PCM é aproximar a resposta do modelo em função das variáveis aleatórias, por funções polinomiais, e estimar os parâmetros estatísticos por integração numérica. Será ainda estudado o comportamento do MC para o cálculo das estatísticas de funções específicas, através do uso de diferentes técnicas de amostragem.

Para avaliar as restrições de modo apropriado, considerando as suas variações decorrentes de incertezas do problema estrutural, deve-se avaliar a confiabilidade estrutural através de algum procedimento para restringir a probabilidade de falha (ou índice de confiabilidade) da estrutura. O procedimento para o cálculo da probabilidade de falha é chamado de análise de confiabilidade. Dois métodos para conduzir a análise de confiabilidade serão investigados: o MC e o FORM (First Order Reliability Method). Quando se considera além da robustez, a confiabilidade estrutural, tem-se então, um problema de otimização robusta baseada em confiabilidade (RBRDO).

Para avaliar a restrição de confiabilidade em um procedimento de otimização foram utilizadas duas abordagens: uma chamada RIA (*Reliability index approach*), e outra denominada PMA (*Performance Measure Approach*). Na abordagem RIA (mais tradicional), em uma otimização baseada em confiabilidade, a confiabilidade estrutural é obtida através do cálculo do índice de confiabilidade (via FORM) ou a probabilidade de falha, para cada novo projeto. Já a abordagem PMA avalia as restrições de confiabilidade estrutural durante o processo de otimização, sem a necessidade do cálculo direto do índice de confiabilidade (ou probabilidade de falha) por isso é dita mais eficiente (YOUN e CHOI, 2004).

Ferramentas para a obtenção de projetos ótimos robustos, para problemas de otimização multiobjetivo que consideram as incertezas do problema, já foram desenvolvidas e utilizadas com sucesso em pesquisas passadas. As análises envolvidas em sua maioria eram estruturas de treliças com comportamento linear (Afonso et al, 2009; Motta, 2009; Motta et al, 2010; Motta et al, 2011b; Motta et al, 2012b; Motta et al, 2012c). Neste trabalho foi desenvolvida a inclusão das restrições de confiabilidade.

Nesta tese as análises estruturais lineares e não lineares são realizadas através de simulação computacional utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000; COOK et al, 2003). Para a redução do custo computacional, serão resolvidos problemas que envolvem análises estruturais utilizando o método POD (“Proper Orthogonal Decomposition”) (Ramamurthy, 2005) para a redução da ordem do modelo computacional e conseqüentemente, o tempo computacional. As estruturas consideradas inicialmente são treliças planas, devido a simplicidade na implementação dos métodos de solução das análises não-lineares. Para este caso foram desenvolvidas as ferramentas para as análises não-lineares, bem como usando o modelo aproximado via POD no ambiente MATLAB (Mathworks, 2012). Na sequência foi investigado o problema RBRDO com estruturas com comportamento mais complexo, com análises via MEF de sólidos 2D (estado plano) com comportamento não linear físico e geométrico. Para este tipo de aplicação foi utilizado o programa chamado HYPLAS (de SOUZA NETO et al, 2008),

desenvolvido em FORTRAN na Universidade de Swansea, para problemas de mecânica dos sólidos 2D com comportamento elasto-plástico e considerando grandes deformações.

1.2. Metodologia

Como já mencionado, os problemas de otimização estrutural considerados abordarão modelos estruturais de treliças planas e espaciais elasto-plásticos não lineares e modelos bidimensionais (estado plano) com não linearidades física e geométrica. Para a solução do problema RBRDO, foi construída uma ferramenta computacional flexível que soluciona o problema RBRDO recebendo como parâmetros os procedimentos para a modelagem geométrica, a análise estrutural e a análise de sensibilidade, utilizando modelo de ordem reduzida via o método POD.

Os algoritmos para os cálculos dos parâmetros estatísticos das funções de interesse, assim como também a probabilidade de falha (via análise de confiabilidade) foram aproveitados e adaptados para serem utilizados pelos métodos de otimização multiobjetivo (MO). Também foram implementados os procedimentos de análise de sensibilidade para a avaliação dos gradientes das estatísticas e das restrições de confiabilidade. Os procedimentos de obtenção de pontos de Pareto utilizam a programação quadrática sequencial (“Sequential Quadratic Programming” - SQP) (POWEL, 1978) como otimizador.

Os problemas lineares e não lineares inicialmente resolvidos consideraram treliças planas com pequenas deformações e material com comportamento elasto-plástico. Durante o período de intercâmbio (programa de doutorado sanduíche do CNPq) na Swansea University (SU), foram estudadas ferramentas mais avançadas, desenvolvidas pelo próprio grupo da SU (de SOUZA NETO et al, 2008) para tratar modelos mais complexos e fiéis à física do problema, considerando as não linearidades tanto físicas quanto geométricas.

Mesmo as estruturas de comportamento linear, mas que apresentam grande número de graus de liberdade, podem levar a problemas de otimização que demandam um tempo computacional considerável, quando as incertezas são consideradas. Além disso, as obtenções dos pontos de Pareto para os problemas RBRDO estão associados a um grande número de avaliações de funções e cálculos de gradientes, assim sendo o tempo total de CPU no procedimento de otimização pode torná-lo inviável em aplicações práticas. Para amenizar esta dificuldade, técnicas de aproximação baseadas em métodos de redução de modelo (ROM – Reduced Model Order) (AFONSO, 2003; ALBUQUERQUE, 2005; AFONSO et al., 2009, MOTTA, 2011) foram incluídas na metodologia, para as etapas de análise estrutural e de análise de sensibilidade requeridas pelo algoritmo. O uso de

modelos substitutos no processo de otimização visa produzir um grande ganho de desempenho computacional, sem grandes perdas de acurácia do modelo.

1.3. Escopo do documento

Este documento consiste de sete capítulos organizados conforme descrito a seguir.

Após este capítulo introdutório, no segundo capítulo é descrita a análise não linear via MEF e a utilização do modelo substituto POD. Este capítulo foca na metodologia utilizada para as análises não lineares realizadas pelo programa HYPLAS, a formulação das análises de treliças podem ser encontrada em (MOTTA, 2009). Serão apresentadas as principais equações da mecânica dos sólidos (quase-) estática não linear e o uso do FEM para sua solução. Além disso, serão especificadas as equações das variáveis de estado que serão utilizadas para a consideração das deformações finitas. Em seguida, serão descritas a formulação e os fundamentos da plasticidade computacional para a análise elasto-plástica estrutural: critério de escoamento, lei de fluxo, lei de endurecimento, etc. Ainda neste capítulo, será descrita uma metodologia para a utilização de modelos de ordem reduzida aplicada à análise estrutural não linear. Neste sentido, será utilizado o método POD a fim de obter uma aproximação de baixa ordem ótima para a realização das análises não lineares.

O capítulo terceiro apresentará formas de tratamento estatístico das incertezas. Nele são apresentados os métodos MC e o PCM para o cálculo das estatísticas da função de interesse, média e desvio padrão. Posteriormente, é feita uma introdução sobre análise de confiabilidade e dois métodos para obtenção da probabilidade de falha e/ou índice de confiabilidade serão descritos: o MC e o FORM.

No quarto capítulo serão apresentadas as formulações dos problemas de otimização uni-objetivo (que consideram apenas uma função objetivo) e multiobjetivo (que consideram mais de uma função objetivo). Neste contexto, serão brevemente descritos os métodos utilizados para a solução de problemas de otimização multiobjetivo, utilizados neste trabalho. Ao final do capítulo quatro, serão descritos como as incertezas serão incorporadas na formulação do problema de otimização, através de tratamentos estatísticos, utilizando as ferramentas descritas no capítulo três. Primeiro, a consideração das incertezas nos objetivos da otimização, através do uso das estatísticas da função de interesse (desempenho, custo, etc.). Esta abordagem leva a uma formulação de otimização robusta (RDO – “Robust Design Optimization”). Em seguida, serão descritas duas diferentes abordagens para a inclusão das incertezas nas restrições, na forma de problemas de

otimização baseados em confiabilidade (“Reliability-Based Design Optimization” - RBDO), são elas a RIA e a PMA.

No quinto capítulo serão apresentados três exemplos utilizando os conceitos de otimização e métodos aqui apresentados. Sendo eles uma treliça espacial com comportamento linear, uma treliça 2D com material elasto-plástico e uma estrutura sólida bidimensional considerando as não linearidades físicas e geométricas.

No sexto capítulo serão descritas algumas conclusões atingidas no decorrer da pesquisa e serão sugeridos alguns trabalhos para pesquisas futuras. Após este capítulo, serão listadas as referências utilizadas no decorrer da tese.

1.4. Lista de Acrônimos

Capítulo 2

MEF	Método dos Elementos Finitos
MRP	Método dos resíduos ponderados
NR	Newton-Raphson
POD	Método da decomposição ortogonal própria (<i>Proper Orthogonal Decomposition</i>)
ROM	Método de redução de modelo (<i>Reduced Order Model</i>)
SVD	Decomposição em valores singulares (<i>Singular Value Decomposition</i>)
PCA	Análise em componentes principais (<i>Principal Component Analysis</i>)
KL	Decomposição de Karhunen-Loève
RBM	Método da base reduzida (<i>Reduced Basis Method</i>)

Capítulo 3

pdf	Função de distribuição de probabilidade (<i>Probability Density Function</i>)
DoE	Plano de amostragem (<i>Design of experiments</i>)
LHS	Método de geração de variáveis aleatórias (<i>Latin Hypercube Sampling</i>)
nva	Número de variáveis aleatórias
MC	Método de Monte Carlo
PCM	Método da colocação probabilística (<i>Probabilistic Collocation Method</i>)
ELS	Estado limite de serviço
ELU	Estado limite último
Pf	Probabilidade de falha

MPP	Ponto de maior probabilidade de falha (<i>Most probable failure point</i>)
FORM	Método de confiabilidade de primeira ordem (<i>First Order Reliability Method</i>)
HL-RF	Algoritmo de otimização para FORM (HASORF, LIND, RACK-WITZ, FIESSLER)
SORM	Método de confiabilidade de segunda ordem (<i>Second Order Reliability Method</i>)

Capítulo 4

SQP	Programação quadrática sequencial (<i>Sequential Quadratic Program</i>)
nvp	Número de variáveis de projeto
NIP	Algoritmo de ponto interior não linear (<i>nonlinear interior-point</i>)
MO	Otimização multiobjetivo (<i>Multiobjective Optimization</i>)
POM	Problema de otimização multiobjetivo
WS	Soma ponderada (<i>Weight Sum method</i>)
NBI	Método da interseção do contorno normal (<i>Normal-Boundary Intersection</i>)
ECMI	Envoltória convexa do mínimo individual
NNC	Método da restrição normal normalizada (<i>Normalized Normal Constraint</i>)
NC	Método da restrição normal (<i>Normal Constraint</i>)
NU	Reta normal à Linha Utópica
NBIm	Método da interseção do contorno normal modificado
CVT	Método de amostragem (<i>Centroidal Voronoi Tessellation</i>)
nobj	número de objetivos do POM
RBRDO	Otimização robusta baseada em confiabilidade (<i>Reliability-Based Robust Design Optimization</i>)
RDO	Otimização robusta (<i>Robust Design Optimization</i>)
RMO	Otimização multiobjetivo robusta (<i>Robust Multiobjective Optimization</i>)
RBDO	Otimização baseada em confiabilidade (<i>Reliability-Based Design Optimization</i>)
RIA	Abordagem de índice de confiabilidade (<i>Reliability index approach</i>),
PMA	Abordagem de medida de desempenho (<i>Performance Measure Approach</i>)
AMV	Método de avaliação de confiabilidade PMA (<i>Advanced mean-value</i>)

2. Análise não linear

Atualmente, procedimentos para análises baseadas no MEF para a solução de problemas não lineares de grande escala se tornaram bastante consistentes e bem estabelecidos. Através destes são obtidas simulações mais realistas, que consideram uma relação não linear entre o carregamento e os deslocamentos. Esta não linearidade, com o aumento da aplicação das cargas, advém tanto das mudanças na geometria do problema (não linearidade geométrica), quanto da não linearidade da relação tensão-deformação do material (não linearidade física). Estas duas fontes básicas de não linearidades são consideradas em métodos de análise avançados que tratam de grandes deformações e da plasticidade, tornando o processo de solução dos problemas mais complexos. Este campo da mecânica dos sólidos é conhecido como Plasticidade Computacional, e tem tido grandes avanços nas últimas décadas (OWEN e HINTON, 1980; BONET e WOOD, 2007; LUBLINER 2008; de SOUZA NETO, et al 2008). Este capítulo foca na metodologia utilizada para este tipo de análises não lineares realizadas pelo sistema HYPLAS descrito e explicado em (de SOUZA NETO, et al 2008). A formulação das análises de treliças podem ser encontrada em (MOTTA, 2009).

2.1. Mecânica dos sólidos

Definindo um corpo de domínio Ω (indefinido) e de contorno $\partial\Omega$, submetido a uma força de corpo \mathbf{b} e a um carregamento \mathbf{q} no contorno, o tensor de tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ no corpo e o campo de deslocamentos $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ seguem a (equação de equilíbrio) lei conservação de momento:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} &= \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \text{ em } \varphi(\Omega) \\ \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= 0 \text{ em } \varphi(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ é o sistema de coordenadas espaciais (originais), \mathbf{n} é um campo vetorial normal ao contorno deformado, ρ é a densidade volumétrica do corpo, t o tempo e $\varphi(\Omega)$ é o domínio deformado do corpo. Além disso, $\varphi(\partial\Omega)$ é o contorno deformado do corpo que se divide em duas

partes, uma onde o deslocamento \mathbf{u} é prescrito, chamada condições de contorno essenciais e outra onde o carregamento \mathbf{q} é prescrito, chamada condições de contorno naturais. A eq. (2.1) é a equação fundamental dos problemas da mecânica dos sólidos tratados neste trabalho.

Há pelo menos duas formas de formular os problemas na mecânica do contínuo. A primeira considera o sistema de coordenada fixo (espacial) e o corpo deformado se desloca neste espaço, chamada versão Euleriana. Na segunda visão, um sistema de coordenada de referência (chamado material – \mathbf{p}) é usado de forma que qualquer ponto \mathbf{p} do corpo tenha suas coordenadas fixas neste sistema de referência, está é a versão Lagrangeana. Uma função φ , relaciona um ponto material (no espaço de referência) e as coordenadas espaciais (verdadeiras), um para um, como mostrado na Figura 2.1.

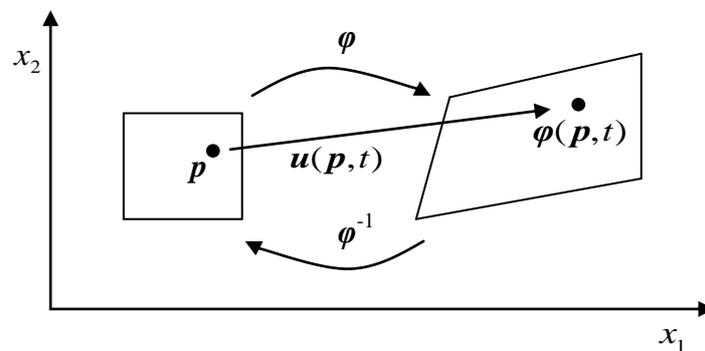


Figura 2.1. Sistema de coordenadas espacial (\mathbf{x}) e de referência (\mathbf{p}).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{p}, t) &= \varphi(\mathbf{p}, t) \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) &= \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Com isso podemos definir o campo de deslocamentos \mathbf{u} e o gradiente de deformações \mathbf{F} , para uma partícula \mathbf{p} (posição de referência) no tempo t , como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{p}, t) &= \varphi(\mathbf{p}, t) - \mathbf{p} \\ \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) &= \Delta_{\mathbf{p}} \varphi(\mathbf{p}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{p}} = \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

A Equação (2.1) pode ser reescrita com relação ao sistema de coordenada de referência (ou do material – \mathbf{p}):

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{P} + \bar{\mathbf{b}} &= \bar{\rho} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \text{ em } \Omega \\ \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{P} \mathbf{m} \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{m} é um vetor unitário normal ao contorno indeformado, i.e. no sistema de referência e

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}J \\ \bar{\rho} &= \rho J \\ \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q}J \\ J &= \det(\mathbf{F})\end{aligned}\tag{2.5}$$

além disso, \mathbf{P} é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\tag{2.6}$$

onde o sobrescrito “ $-T$ ” indica a matriz inversa da transposta de \mathbf{F} .

No caso de problemas estáticos (ou quase-estáticos) pode-se eliminar o termo de aceleração dependente do tempo, podendo-se reescrever a Equação (2.1) no domínio como:

$$\begin{aligned}\nabla_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= 0 \text{ em } \varphi(\Omega) \\ \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= 0 \text{ em } \varphi(\partial\Omega)\end{aligned}\tag{2.7}$$

O sistema de equações diferenciais de equilíbrio Eq. (2.1) (chamado forma forte) pode ser solucionado utilizando o método dos resíduos ponderados (MRP) (ou, analogamente, o princípio dos trabalhos virtuais). Um campo de deslocamento \mathbf{u} solução para o problema Eq. (2.7), também é solução para o seguinte problema:

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\nabla_x \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b})\boldsymbol{\eta} dv + \int_{\varphi(\partial\Omega)} (\mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n})\boldsymbol{\eta} da = 0\tag{2.8}$$

para todas as possibilidades de função de ponderação $\boldsymbol{\eta}$ (deslocamentos virtuais) pertencente ao domínio do campo de deslocamento que respeite as condições de contorno essenciais. Utilizando a integração por partes, a Equação (2.8) pode ser reescrita e a chamado forma fraca do equilíbrio é obtida tal como a seguir:

$$\int_{\varphi(\Omega)} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\nabla_x \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}\boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\varphi(\partial\Omega)} [\mathbf{q}\boldsymbol{\eta}] da = 0.\tag{2.9}$$

Para mais detalhes vide (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000; de SOUZA NETO et al, 2008).

Utilizando uma aproximação do campo de deslocamentos $\hat{\mathbf{u}}$ formada por funções teste (N_i) e um número finito de funções de ponderação (η_i), pode-se obter uma aproximação da solução \mathbf{u} como se segue:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) a_i \quad (2.10)$$

Assim a Eq. (2.9) pode ser reescrita de modo aproximado da seguinte forma:

$$\int_{\varphi(\Omega)} [\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) \nabla_x \boldsymbol{\eta}_i - \mathbf{b} \boldsymbol{\eta}_i] dV - \int_{\varphi(\partial\Omega)} [\mathbf{q} \boldsymbol{\eta}_i] dA = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

onde a_i são chamados de grau de liberdade generalizados e n é o número de graus de liberdade da solução.

O MEF, apresentado a seguir, consiste na aplicação da versão de Galerkin do MRP, onde as funções de ponderação são iguais às funções testes ($N_i = \eta_i$).

2.2. Método dos Elementos Finitos em Mecânica dos Sólidos não linear quase-estática

No MEF o domínio do problema é dividido (discretizado) em subdomínios, chamados elementos. Cada elemento é formado por um conjunto de nós e funções de interpolação. As formas das funções de interpolação, chamadas de funções de forma, e o número de funções em um elemento definem diferentes tipos de elementos. Neste trabalho serão considerados apenas os tipos básicos de elementos, onde é definida uma função de interpolação (ou forma) associada a cada nó do elemento. Estas funções são definidas de tal forma que:

$$\begin{cases} N_i(\mathbf{x}(p_j)) = 1 & \text{se } i = j \\ N_i(\mathbf{x}(p_j)) = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.12)$$

para $i, j = 1, \dots, nn$, onde x_j é a coordenada do nó j e nn é o número de nós. Além disso, as funções de forma são nulas em todo o resto do domínio exceto no domínio do elemento considerado.

Assim, pode se reescrever a aproximação do campo dos deslocamentos como:

$$\hat{\mathbf{u}}^j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nm} N_i(\mathbf{x}) u_i^j \quad (2.13)$$

onde u_i^j é o deslocamento do nó i na direção $j = 1, \dots, nd$ e nd é o número de dimensões do problema. Neste trabalho iremos utilizar apenas problemas bidimensionais planos, com a exceção de treliças espaciais as quais suas equações não serão detalhadas. Pode-se então, escrever de forma matricial as funções de forma \mathbf{N} e o operador dos gradientes das funções de forma ou funções testes \mathbf{B} ($\mathbf{B} = \nabla_x \mathbf{N}$) para um elemento (e) com nne nós (ou funções de forma) por elemento, num problema bidimensional, respectivamente, como:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \dots & N_i & 0 \dots & N_{nne} & 0 \\ 0 & N_{1 \dots} & 0 & N_{i \dots} & 0 & N_{nne} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 \dots & N_{i,1} & 0 \dots & N_{nne,1} & 0 \\ 0 & N_{1,2 \dots} & 0 & N_{i,2 \dots} & 0 & N_{nne,2} \\ N_{1,2} & 0 \dots & N_{i,2} & 0 \dots & N_{nne,2} & 0 \\ 0 & N_{1,1 \dots} & 0 & N_{i,1 \dots} & 0 & N_{nne,1} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde

$$N_{i,j} = \frac{dN_i}{dx_j} \quad (2.15)$$

Desta forma, a aproximação do campo de deslocamentos, Eq. (2.10) e (2.13), pode ser reescrita como:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.16)$$

onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, os possíveis deslocamentos são chamados de graus de liberdade. A equação de equilíbrio (2.11) na forma matricial via MEF (versão espacial) pode ser expressa como:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left(\int_{\varphi(\Omega^e)} [\mathbf{B}\sigma(\hat{\mathbf{u}}) - b\mathbf{N}] dv - \int_{\varphi(\partial\Omega^e)} [q\mathbf{N}] da \right) = 0 \quad (2.17)$$

Por fim a equação final, para a solução de um problema de mecânica dos sólidos não linear quase-estático via MEF pode ser expressa como:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (2.18)$$

onde \mathbf{F}_{int} é o vetor das forças internas e \mathbf{F}_{ext} o vetor das forças externas, dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{int} &= \sum_{e=1}^{ne} \left(\int_{\varphi(\Omega^e)} [\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{u})] dv \right) \\ \mathbf{F}_{ext} &= \sum_{e=1}^{ne} \left(\int_{\varphi(\Omega^e)} [\mathbf{b}^e \mathbf{N}] dv + \int_{\varphi(\partial\Omega^e)} [\mathbf{q}^e \mathbf{N}] da \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.2.1. Solução do problema não linear

Na maior parte das análises estruturais não lineares o carregamento é feito em passos de carga, assim o problema é resolvido de forma incremental, e as equações para cada incremento de carga são resolvidas de forma iterativa. A técnica iterativa por si só, gera apenas um ponto solução. Na prática, por vezes é preferível obter a curva completa da resposta carregamento/deslocamento (caminho do equilíbrio). Esta abordagem é importante para problemas estruturais onde as soluções são dependentes do caminho de equilíbrio (“*path-dependent*”), ou seja, quando o comportamento da estrutura para um determinado carregamento depende do histórico de carregamento. Para tanto, é útil combinar os procedimentos de solução incremental e o iterativo. A solução incremental de cada passo é usada como o ponto inicial do procedimento iterativo para próximo incremento de carga. Um bom ponto inicial melhora significativamente (e até viabiliza) a convergência do procedimento iterativo (CRISFIELD, 2000; de SOUZA NETO et al, 2008). Assim, o procedimento da análise não linear utilizado é dito incremental e iterativo.

Há vários métodos para o cálculo do incremento do passo de carga. O sistema HYPLAS adota um incremento constante com uma redução do incremento (1/2), quando ocorre algum erro no procedimento iterativo (número de iterações máximo atingido, falha na atualização das variáveis internas, problemas no sistema de equações, etc...). Outra opção mais robusta é utilizar procedimentos como o método de comprimento de arco (*arc-length*), onde o incremento está relacionado aos deslocamentos, ao invés do carregamento. O “*arc-length*” é indicado, inclusive, para problemas de instabilidade. O procedimento, apesar de estar disponível no código utilizado (HYPLAS), não foi empregado na presente pesquisa, para mais detalhes vide (de SOUZA NETO et al, 2008). Esquemas mais avançados de solução de problemas não lineares estruturais podem ser visto em (LEON et al, 2011). A solução do problema estrutural de um passo de carga (ou

incremento de carga $-\lambda$) pode ser resumida em encontrar um campo de deslocamentos de tal forma que as forças internas se equilibrem com as forças externas.

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{F}_{ext} \quad (2.20)$$

O procedimento iterativo mais popular e eficiente, empregado para a solução deste tipo de problema, é o método de Newton-Raphson (NR). O método de NR iterativamente aproxima a equação não linear através de uma linearização no ponto atual da solução e o resolve. Na análise estrutural não linear, para problemas onde o vetor de forças externas não depende do deslocamento, isto pode ser formulado como:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_k) + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}_k} \Delta \mathbf{u}_{k+1} = \lambda \mathbf{F}_{ext}, \text{ ou } \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{R}_k \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{K}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{u}_k} \right|_{\mathbf{u}_k}$ é a matriz de derivadas das forças internas em relação aos deslocamentos nodais na iteração atual (k) e é chamada de matriz tangente (“consistente”, no caso onde o algoritmo de atualização plástica é considerado) e $\mathbf{R}_k = \lambda \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_k)$ é o vetor de carga residual (ou de desequilíbrio). Existem outros métodos utilizados para resolver sistemas de equações de elementos finitos não lineares, como os métodos Newton modificado (Owen e Hinton, 1980; Zienkiewicz e Taylor, 2000) e quase-Newton (Haftka et al., 1990), além de técnicas mais avançadas para a definição dos incrementos de carga, porém estes não serão abordados neste trabalho, para mais detalhes vide (LEON et al, 2011).

2.2.2. Grandes deformações

Há diversas medidas de deformações não lineares utilizadas em problemas estruturais. Neste trabalho, nos problemas de grandes deformações, será utilizado o tensor de deformações logarítmicas (de Hencky ou naturais) (Hencky, 1933):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) \quad (2.22)$$

onde \mathbf{F} é o gradiente das deformações já mencionado, Equação (2.3). Como será visto adiante, o tensor de deformações logarítmicas $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ definido na Eq. (2.22), é particularmente atraente quando se trabalha com problemas elasto-plásticos.

Os tensores de tensões de Kirchhoff ($\boldsymbol{\tau}$) e de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}$) podem ser expressos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_L \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\tau} J^{-1}\end{aligned}\tag{2.23}$$

onde \mathbf{D}^e é o tensor elástico. Através de uma vetorização do tensor de tensões de Kirchhoff e do tensor de deformações (simétricos), é possível reescrever a Eq. (2.23) de forma matricial para um material isotrópico, como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{pmatrix} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix}\tag{2.24}$$

onde G é o modulo de cisalhamento dado por,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{2.25}$$

Além disso, E é o modulo de elasticidade (ou de Young) e ν é o coeficiente de Poisson.

2.3. Plasticidade Computacional

O fenômeno da plasticidade ocorre em materiais que possam sofrer deformações permanentes, i.e., depois de submetido a um carregamento suficiente para que ocorra a plastificação, o material não retorna totalmente para a configuração inicial ao ser descarregado. A deformação remanescente é dita deformação plástica. Em análises estruturais, onde a estrutura é composta por materiais que apresentam comportamento plástico, é necessário calcular durante cada iteração, além do campo de deslocamentos, o tensor de deformação plástica. Ao se plastificar, as deformações ocorridas no

material podem ser divididas em deformação elástica e deformação plástica, esta última depende fundamentalmente de variáveis internas (α) relacionadas ao histórico de deformação da estrutura. Assim, pode se dizer que de forma incremental a integração das forças internas é função dos deslocamentos e das variáveis internas na iteração anterior $\mathbf{F}_{int}^t(\mathbf{u}^t, \alpha^{t-1})$.

Para se definir completamente o modelo de plasticidade, para um determinado material plástico, é necessário conhecer três princípios básicos que regem o comportamento plástico deste material (de SOUZA NETO et al, 2008), são eles:

1. Critério de escoamento,
2. Lei de fluxo e
3. Lei de endurecimento

Existem alguns modelos básicos de materiais plásticos, estabelecidos de acordo com critérios de escoamentos clássicos.

2.3.1. Critério de escoamento

O critério de escoamento é definido pela função de escoamento F que indica regime elástico ($F < 0$) ou regime plástico ($F = 0$).

Abaixo listamos alguns critérios usados para diferentes tipos de materiais e a respectiva função de escoamento F utilizada, onde σ_Y é a tensão de escoamento, σ_i são as tensões principais ($i = 1,2,3$) e α é um parâmetro relacionado ao histórico de tensões e indica o endurecimento do material.

• Critério da Tensão Normal Máxima

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \sigma_1 - \sigma_Y(\alpha) \quad (2.26)$$

• Critério de Tresca

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_Y(\alpha) \quad (2.27)$$

• Critério de von Mises

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \sigma_e - \sigma_Y(\alpha) \quad (2.28)$$

onde σ_e é a tensão efetiva von Mises dada por

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \quad (2.29)$$

onde J_2 é o segundo invariante do tensor de tensões desviadoras de Cauchy.

• **Crítério de Mohr-Coulomb**

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = (\sigma_1 - \sigma_3) - 2c \cos(a) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin(a) \quad (2.30)$$

onde c é a coesão e a o angulo de atrito do material.

• **Crítério de Drucker-Prager**

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 3k_1 \sigma_m + \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} - k_2 \quad (2.31)$$

onde k_1 e k_2 são constantes que dependem do ângulo de atrito e da coesão do material, σ_e é a tensão efetiva von Mises e σ_m é a tensão média hidrostática.

• **Crítério de Green**

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{9}{4} \ln(\beta)^2 \sigma_m + 3 \left(\frac{3 - 2\sqrt[4]{\beta}}{3(1 - \sqrt[3]{\beta})} \right)^2 J_2 - \sigma_Y \quad (2.32)$$

onde β é o coeficiente de porosidade do material.

No processo iterativo, o incremento de deformação ($\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$) é inicialmente considerado totalmente elástico (preditos elásticos). Quando $F > 0$ significa que houve uma deformação plástica, então o tensor de incremento da deformação plástica ($\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$) é ajustado, assim como é atualizado o vetor α , tal que $F = 0$ e as leis de fluxo e de endurecimento sejam respeitadas (apresentadas na sequência).

O critério de von Mises é o mais indicado para materiais metálicos, devido a boa concordância com o resultados experimentais e a continuidade da superfície de escoamento. Os critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager são utilizados para modelar solos (areia) e materiais frágeis, como rocha e concreto, enquanto que o critério de Green é utilizado para materiais porosos. Para os casos considerados neste trabalho foi utilizado apenas o modelo de von Mises.

2.3.2. Lei de endurecimento

A lei de endurecimento determina a variação na superfície de escoamento a medida em que há incrementos de deformação plástica e em geral pode ser representada por uma função como $\sigma_y(\alpha)$. Quando ocorre um incremento de deformação plástica (decorrentes de incremento de tensão) a superfície de escoamento é atualizada (através do parâmetro α apresentado na seção anterior) de tal forma que as tensões resultantes permaneçam sobre a superfície de escoamento ($F = 0$). A atualização da superfície de escoamento pode se dá através de dois modelos básicos (OWEN e HINTON, 1980):

- Endurecimento isotrópico – A superfície de escoamento se expande uniformemente. Este modelo é muito utilizado devido a sua simplicidade apesar de não representar bem o comportamento de muitos materiais, pois um endurecimento no sentido da tração não provoca um endurecimento para compressão, vide Figura 2.2.
- Endurecimento cinemático – A superfície de escoamento translada no espaço da tensões. Este tipo de endurecimento é utilizado em modelos sujeitos à carregamentos cíclicos, fadiga, problemas sísmicos, etc., pois consegue reproduzir o efeito de Bauschinger (Hill, 1950), vide Figura 2.2.

A Figura 2.2 ilustra a atualização da superfície de escoamento no espaço das tensões principais (bidimensional) para uma trajetória de tensões ABC, de acordo com o modelo isotrópico e cinemático de endurecimento.

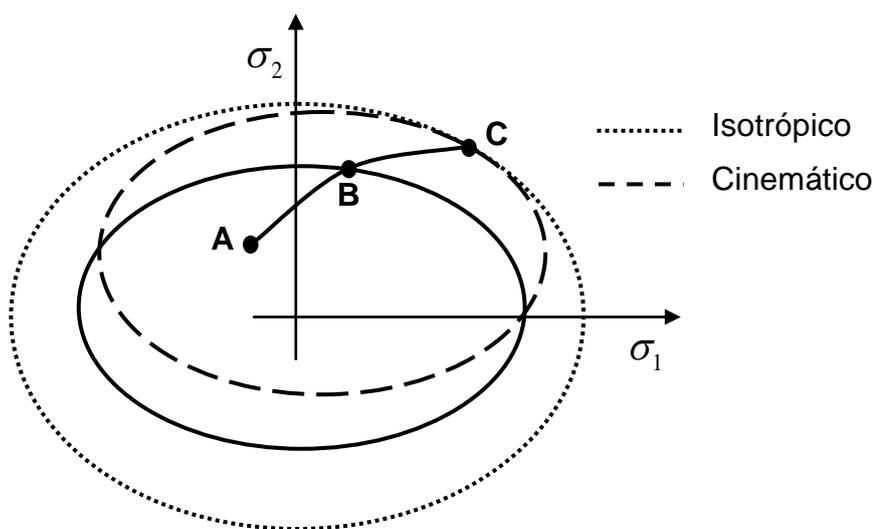


Figura 2.2. Endurecimento isotrópico e cinemático.

A escolha do modelo a ser utilizado depende não apenas do tipo de material, como também do tipo de aplicação considerada. Há ainda modelos mais avançados chamados endurecimento distorcional (Phillips et al., 1975, Ortiz e Popov, 1983; Feigenbaum e Dafalias, 2007). Nestes, a superfície de escoamento pode expandir, transladar, rotacionar e até mudar sua forma. Estes modelos podem ser utilizados para qualquer material.

2.3.3. Lei de fluxo

Se um material ultrapassar a tensão de escoamento, passa a ter um comportamento plástico e dissipar energia, sendo a parcela de energia “perdida” denominada energia plástica. A energia elástica de deformação é totalmente recuperável, designando esse processo conservativo. A energia plástica é dissipativa devido a fenômenos de origem térmica e/ou de contato a nível atômico (CHUNG, 1988).

Para se conhecer o estado de tensões de um ponto de um corpo ao se deformar plasticamente (após o escoamento), é preciso conhecer a parcela da deformação total que é plástica. Para o cálculo do incremento de deformação plástica ($\Delta\epsilon^p$), é necessário conhecer a chamada função de potencial plástico (g), que informa a direção do escoamento (direção de $\Delta\epsilon^p$).

$$\frac{d\epsilon^p_{i,j}}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{i,j}} \right) \quad (2.33)$$

onde γ é um escalar positivo chamado de multiplicador da taxa de deformação plástica ou multiplicador plástico e está diretamente relacionado à magnitude da deformação plástica total. Adotando um esquema totalmente implícito (*Backward Euler*) para discretização no “tempo”, onde todos os termos são calculados em relação à configuração atual, a lei de fluxo pode ser expressa como (de SOUZA NETO et al, 2008):

$$\Delta\epsilon^p_{i,j} = \Delta\gamma \frac{\partial g}{\partial \sigma_{i,j}} \quad (2.34)$$

Pode-se utilizar esta mesma equação para o caso de grandes deformações, utilizando deformações logarítmicas (de Hencky ou naturais), Equação (2.22), e considerando uma discretização aproximada exponencial, tal como detalhado em (de SOUZA NETO et al, 2008).

Em geral utiliza-se como potencial plástico a função de escoamento, $g = F$. Diz-se neste caso que a lei do fluxo é associativa. A Eq. (2.34) no caso associativo é chamada de condição de normalidade, pois indica que a deformação plástica se dá na direção normal à superfície de escoamento (na direção do gradiente da função de escoamento). Pode-se mostrar que a lei associativa satisfaz a condição de normalidade da termodinâmica (SCHÖNAUER, 1993) equivalendo ao princípio da máxima dissipação plástica (LUBLINER, 1984; 1986). Modelos de fluxo associativos simulam de forma adequada o comportamento de metais. Para outros tipos de materiais, como solos e rochas, modelos não-associativos têm sido aplicados com boa concordância experimental (de SOUZA NETO et al, 2008).

2.3.4. Caso particular: Treliças

Nos elementos de barra de treliças só atuam tensões normais então o tensor de tensões podem ser considerados escalares $\sigma = \sigma_N$, isto simplifica bastante o estudo da plasticidade para este tipo de estruturas. Além disso, no caso de serem consideradas pequenas deformações e carregamento monotônico independente no tempo, itens importantes do estudo da plasticidade são bastante simplificados. Assim o problema pode ser resolvido através de uma formulação elástica não linear. O modelo de plasticidade von Mises para o caso de treliças podem ser escritos como:

- Critério de escoamento: $F(\sigma_N, \varepsilon^p) = \sigma_N - \sigma_Y(\varepsilon^p)$
- Lei de fluxo: $\Delta \varepsilon_N^p = \Delta \gamma$
- Cálculo da tensão normal: $\sigma_N = \mathbf{D}^e(\varepsilon - \varepsilon^p) = \sigma_Y(\varepsilon^p)$

Então, pode-se definir previamente uma função $\sigma_N = \sigma(\varepsilon)$, a partir da curva de endurecimento, que relaciona as tensões normais e as deformações totais, não sendo necessária assim a determinação do multiplicador plástico. Com isso, o cálculo da resultante das forças internas $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u})$ para um dado vetor de deslocamento (\mathbf{u}) pode ser feito através de três passos simples:

1. Cálculo das deformações (multiplicação matricial): $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_L \mathbf{u}$
2. Cálculo das tensões (curva do material): $\boldsymbol{\sigma}_N = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})$
3. Cálculo das forças internas (multiplicação matricial): $\mathbf{F}_{int} = \mathbf{T}_K \boldsymbol{\sigma}_N$

Onde \mathbf{T}_L e \mathbf{T}_K são matrizes globais constantes (pois não foram consideradas as não linearidades geométricas) que dependem apenas de parâmetros geométricos da estrutura de

dimensão ($ndof \times ne$), onde ne é o número de elementos e $ndof$ o número de graus de liberdades.

Os relativos vetores locais \mathbf{t}_L^e e \mathbf{t}_K^e do elemento e podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} M_\theta^e &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1^e) & -\cos(\theta_2^e) & -\cos(\theta_3^e) & \cos(\theta_1^e) & \cos(\theta_2^e) & \cos(\theta_3^e) \end{bmatrix} \\ \mathbf{t}_k^e &= \frac{1}{L^e} M_\theta^e \\ \mathbf{t}_L^e &= A^e M_\theta^e \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde θ_i^e é o ângulo segundo a direção i da barra e , L^e e A^e são, respectivamente, o comprimento e a área da seção transversal da barra e . Onde os graus de liberdades locais são definidos conforme Figura 2.3.

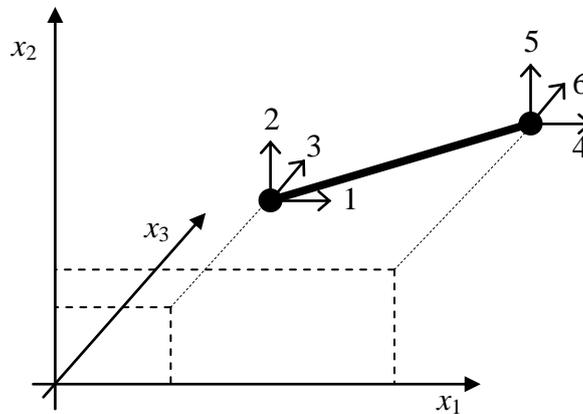


Figura 2.3. Graus de liberdades locais do elemento de treliça.

As matrizes globais \mathbf{T}_L e \mathbf{T}_K são montadas a partir das conectividades dos elementos, relacionando os graus de liberdades locais (j) e globais (i), da seguinte forma:

$$[\mathbf{T}]_{i,e} = \mathbf{t}_j^e \quad (2.36)$$

onde i é o grau de liberdade global e j o grau de liberdade local do elemento e . A Eq. (2.36) é válida para ambas as matrizes globais \mathbf{T}_L e \mathbf{T}_K .

2.4. Plasticidade com grandes deformações

Para o desenvolvimento das equações considerando grandes deformações e plasticidade será utilizado um modelo de plasticidade multiplicativo. O termo “multiplicativo” vem do fato do gradiente de deformação \mathbf{F} ser decomposto multiplicativamente tal como segue:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\varphi}^p} \frac{d\boldsymbol{\varphi}^p}{d\boldsymbol{\rho}} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$$

onde \mathbf{F}^e é o gradiente de deformações elásticas e \mathbf{F}^p o gradiente de deformações plásticas, a configuração $\boldsymbol{\varphi}^p$ é uma configuração intermediária, relacionada à deformação permanente (plástica) no ponto. As deformações plásticas estão relacionadas com um “deslizamento puro” entre os cristais do sólido, enquanto que as deformações elásticas medem as deformações dos cristais em si (de SOUZA NETO et al, 2008). Adotando a divisão multiplicativa de \mathbf{F} e deformações logarítmicas, pode-se obter de forma elegante uma decomposição aditiva das deformações de forma equivalente ao caso de pequenas deformações, para mais detalhes vide (de SOUZA NETO et al, 2008):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p . \quad (2.38)$$

O tensor de tensões de Kirchhoff pode ser calculado em função da parcela elástica das deformações, como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.39)$$

2.4.1. Modelo constitutivo de von Mises

Nesta subseção será abordado a solução do problema de atualização das variáveis de estado (tensões e deformações) para um modelo de plasticidade von Mises, associativo e de endurecimento isotrópico. Além disso, para o caso de grandes deformações, são utilizadas deformações logarítmicas, as quais são compatíveis com a decomposição aditiva das deformações totais em elásticas e plásticas. Para obter a parcela plástica do incremento da deformação, Eq. (2.34), através deste modelo, a única variável interna (α) que se precisa determinar é o incremento do multiplicador plástico $\Delta\gamma$ (de SOUZA NETO et al, 2008).

Para a formulação do modelo de von Mises será utilizada apenas o tensor de tensão desviadora (\mathbf{s}) dada por:

$$\mathbf{s} = \text{dev}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I} \quad (2.40)$$

onde p é chamado de pressão hidrostática ou tensão média e é dada pela média das tensões principais ($p = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$), \mathbf{I} é a matriz identidade (3x3) e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de tensões de Kirchhoff calculado conforme Eq. (2.39).

A equação do critério de escoamento de von Mises pode ser reescrita em função do tensor das tensões desviadoras como:

$$F(\mathbf{s}, \bar{\varepsilon}_p) = \sqrt{3J_2(\mathbf{s})} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p) \quad (2.41)$$

onde $J_2(\mathbf{s}) = (s_{ij}s_{ji})/2 = \|\mathbf{s}\|^2/2$ é o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras \mathbf{s} . A lei de endurecimento, que relaciona a tensão de escoamento e as deformações plásticas, é dada por

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p) \quad (2.42)$$

onde

$$\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_p\| = \int d\gamma \quad (2.43)$$

é chamada de deformação plástica equivalente de von Mises ou simplesmente deformação plástica acumulada e γ é o multiplicador plástico descrito anteriormente.

Considerando uma lei de fluxo associativa, Eq. (2.34), do modelo de von Mises e utilizando uma discretização totalmente implícita, chamada Euler “backward” no tempo, o incremento de deformações plásticas pode ser calculado, em função do multiplicador plástico, da seguinte forma:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \gamma \frac{dF}{d\boldsymbol{\tau}} = \Delta \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (2.44)$$

2.4.2. Determinação do multiplicador plástico

Para a devida atualização das variáveis de estado é necessário satisfazer as equações constitutivas elastoplásticas (em geral não lineares). Este processo é chamado de mapeamento de retorno (“return-mapping”) (ORTIZ e POPOV, 1985; SIMO e TAYLOR, 1985). Neste trabalho foi utilizado o procedimento implementado e detalhado em (de SOUZA NETO et al, 2008), que para o modelo de plasticidade de von Mises tratado aqui, resume as equações constitutivas em uma única equação não linear sendo o incremento do multiplicador plástico a única incógnita. O problema em

questão é: dada as variáveis de estado atual e um incremento de deformação total, achar um par tensão, deformação plástica que sejam plasticamente admissíveis.

Para a solução do problema plástico, o primeiro passo chamado “*trial*” considera que o incremento de deformação é totalmente elástico ($\Delta\gamma = 0$). Esta consideração inicial é chamada preditor elástico e os parâmetros com valores referentes a está etapa possuem o subscrito $(.)^{trial}$.

$$\Delta\gamma^{trial} = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e^{trial} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\tau}^{trial} = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.45)$$

Caso o critério de escoamento seja violado, as tensões devem “retornar” para um valor admissível, através da inclusão de uma parcela plástica do incremento de deformação. Para isso, é necessário iniciar o processo de mapeamento de retorno propriamente dito.

Primeiro, substituindo (2.24) e (2.39) em (2.40), podemos reescrever o tensor de tensões desviadora em função das deformações elásticas como:

$$\mathbf{s} = 2G \operatorname{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \quad (2.46)$$

considerando o estado inicial *trial* e a decomposição aditiva das deformações, podemos reescrever o tensor de tensões desviadora em função do incremento das deformações plásticas, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= 2G \operatorname{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}_e^{trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p) \\ &= \mathbf{s}^{trial} - 2G \operatorname{dev}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p) \end{aligned} \quad (2.47)$$

substituindo, agora, o incremento das deformações plásticas $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p$, Eq. (2.44), na Eq. (2.47), tem-se:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{trial} - \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (2.48)$$

Reescrevendo a Eq. (2.48) conforme a Eq. (2.49) abaixo, pode-se notar que \mathbf{s} e \mathbf{s}^{trial} são colineares,

$$\mathbf{s}^{trial} = \mathbf{s} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma 2G}{\|\mathbf{s}\|} \right) \quad (2.49)$$

Assim, pode-se rearrumar a Eq. (2.48), finalmente, como

$$\mathbf{s}(\Delta\gamma) = \mathbf{s}^{trial} \left(1 - \frac{3G\Delta\gamma}{q^{trial}} \right) \quad (2.50)$$

onde

$$q^{trial} = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}^{trial})} \quad (2.51)$$

Finalmente, substituindo as Eq. (2.50) e (2.51) na Eq. (2.41), pode-se reescrever a condição de consistência de plástica embutida no critério de escoamento de von Mises, com apenas uma variável ($\Delta\gamma$), como:

$$\bar{F}(\Delta\gamma) = q^{trial} - 3G\Delta\gamma - \sigma_y(\bar{\epsilon}_p + \Delta\gamma) = 0 \quad (2.52)$$

2.4.3. Solução da equação constitutiva do modelo von Mises

A Eq. (2.52) pode ser resolvida por meio do método de Newton-Raphson, aproximando a função \bar{F} linearmente, como:

$$\bar{F} + \frac{d\bar{F}}{d[\Delta\gamma]} d[\Delta\gamma] = 0 \quad (2.53)$$

onde

$$\frac{d\bar{F}}{d[\Delta\gamma]} = -3G - H(\Delta\gamma) \quad (2.54)$$

onde H é a inclinação da função endurecimento, ou curva tensão-deformação efetiva $\sigma_y(\bar{\epsilon}_p)$, chamada de modulo de endurecimento. Então, o incremento do multiplicador plástico é iterativamente (m) atualizado, até a convergência, da seguinte forma:

$$\Delta\gamma_{m+1} = \Delta\gamma_m + \frac{\bar{F}(\Delta\gamma_m)}{3G + H(\Delta\gamma_m)} \quad (2.55)$$

Após a obtenção do $\Delta\gamma$, calcula-se: $\Delta\epsilon^p$ através da Eq. (2.44) e τ através da Eq. (2.39).

Em resumo, uma vez obtido o incremento dos deslocamentos ($\Delta \mathbf{u}_k$), através de uma iteração de NR conforme Eq. (2.21), o procedimento para a integração das forças internas ($\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_k)$), pode ser escrito como:

1. Calcular o gradiente das deformações Eq. (2.3), depois as deformação logarítmicas (2.22);
2. Calcular parâmetros “trial” Eq. (2.45) e Eq. (2.51);
3. Iterativamente calcular $\Delta \gamma$ através de NR;
4. Calcular Função de escoamento \bar{F} , Eq. (2.52);
5. Computar a inclinação de endurecimento H ;
6. Atualizar $\Delta \gamma$, Eq. (2.55);
7. Calcular $\Delta \varepsilon^p$ através da Eq. (2.44);
8. Calcular $\boldsymbol{\tau}$ através da Eq. (2.39);
9. Calcular $\boldsymbol{\sigma}$ através da Eq. (2.23)₂;
10. E finalmente calcular as forças internas Eq. (2.19)₁.

2.5. Métodos de Redução de Ordem

Os métodos de redução de ordem (ROM – *Reduced Order Methods*) objetivam aproximar sistemas de alta ordem em espaços de ordem reduzida formado por um espaço aproximado de soluções do modelo de alta fidelidade. A maioria dos ROMs faz uma projeção do tipo Galerkin do sistema de alta ordem em espaços de baixa ordem, através de uma base para o subespaço de baixa ordem (AFONSO e PATERA, 2003; AFONSO et al, 2009; MOTTA et al, 2009; CARDOSO, 2009).

Considere o sistema de n equações não lineares de equilíbrio apresentado na Eq. (2.20). Este sistema pode ser projetado num subespaço de soluções \mathbf{W} de “base reduzida” $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n,w}$, com $w < n$, e um sistema de w equações não lineares é obtido. Primeiro, a aproximação do vetor de deslocamentos \mathbf{u} é definida como:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} \quad (2.56)$$

onde o vetor $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^w$, são os coeficientes lineares da aproximação de \mathbf{u} . Assim, $\boldsymbol{\alpha}$ pode ser considerado o novo vetor de graus de liberdades generalizados e as colunas de \mathbf{Z} os campos de

deslocamentos associado a cada componente de $\boldsymbol{\alpha}$. Assim pode-se dizer que o campo de deslocamentos, Eq. (2.16), é re-aproximada como:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{N}^w(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} \quad (2.57)$$

formando assim as novas funções de forma generalizadas $\mathbf{N}^w(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{N}^w(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{Z}$.

Assim, pode-se utilizar todo procedimento do MEF tradicional (de alta ordem) e obter um sistema de ordem reduzida de forma bastante simples, como demonstrado a seguir. Substituindo a Eq. (2.56) na equação de equilíbrio (2.18), temos que:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}) \approx \mathbf{F}_{ext} \quad (2.58)$$

Aplicando-se o método de Newton-Raphson da mesma forma como feito em (2.21), porém considerando como variável os graus de liberdade generalizados $\boldsymbol{\alpha}$ (\mathbf{Z} é constante), tem-se:

$$\mathbf{F}_{int}(\boldsymbol{\alpha}_k) + \left[\frac{d\mathbf{F}_{int}}{d\boldsymbol{\alpha}} \right]_{\boldsymbol{\alpha}_k} \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\boldsymbol{\alpha}} \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = \mathbf{F}_{ext}, \text{ ou } \mathbf{K}_k \mathbf{Z} \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = \mathbf{R}_k \quad (2.59)$$

Este sistema possui mais equações que incógnitas, pois $(\mathbf{K}_k \mathbf{Z})_{n \times w}$ e $n > w$. Pré-multiplicando a Eq. (2.59) por \mathbf{Z}^T se obtém uma projeção do sistema de equações original no espaço \mathbf{W} de “base reduzida” $\mathbf{Z} \in \mathcal{R}^{n,w}$. Como resultado o problema se torna:

$$\mathbf{K}_k^w \Delta\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = \mathbf{R}_k^w \quad (2.60)$$

onde a matriz tangente consistente e o vetor de resíduos projetados (\mathbf{K}_k^w e \mathbf{R}_k^w) são definidos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k^w &= \mathbf{Z}^T \mathbf{K}_k \mathbf{Z} \in \mathcal{R}^{w,w} \\ \mathbf{R}_k^w &= \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_k \in \mathcal{R}^w \end{aligned} \quad (2.61)$$

Note que a matriz tangente consistente projetada \mathbf{K}_k^w tornasse “cheia”, favorecendo o uso de alguns métodos iterativos de solução de sistema de equações lineares, porém desfavorecendo o uso de métodos diretos que se utilizam de matrizes esparsas (como, em geral, a \mathbf{K}_k).

De posse do incremento dos graus de liberdades generalizados ($\Delta\boldsymbol{\alpha}$) os deslocamentos nodais são atualizados como:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{Z}\Delta\boldsymbol{\alpha}_{k+1} \quad (2.62)$$

Vale apenas salientar que na solução do problema MEF não linear tradicional a verificação da convergência do algoritmo de Newton-Raphson é feita através do vetor resíduo \mathbf{R} . Porém, quando se utiliza o sistema de ordem reduzida, é necessário fazer a verificação sobre o resíduo projetado \mathbf{R}^w , pois a parte do resíduo \mathbf{R} normal ao espaço aproximado \mathbf{W} possui um valor mínimo ($\mathbf{R}^w - \mathbf{R}$), o que pode implicar na não convergência do Newton-Raphson. O valor final do resíduo original \mathbf{R} está diretamente relacionado ao erro na aproximação do modelo reduzido.

2.5.1. POD (Proper Orthogonal Decomposition)

Como visto no item anterior, o subespaço \mathbf{W} , e conseqüentemente a base \mathbf{Z} no qual o sistema é projetado, são fundamentais para a eficiência da aproximação de ordem reduzida e em geral, esta, representam as diferenças entre as diferentes metodologias de ROMs.

O método POD (Proper Orthogonal Decomposition) é, basicamente, um ROM que projeta o problema de alta ordem em um subespaço formado por uma base ortonormal ótima, no sentido que considera os campos de soluções mais significantes (de maior variância) para o espaço das soluções (\mathbf{u}). A principal dificuldade do POD está no cálculo da matriz de correlação das respostas (\mathbf{C}), um procedimento prático para obter esta matriz é conhecido como o método dos snapshots. O método dos snapshots foi introduzido por Lawrence Sirovich (Sirovich, 1987) como uma forma de se obter os parâmetros para a criação do modelo reduzido via POD. Neste procedimento, a matriz de correlação (\mathbf{C}) é obtida a partir de um conjunto de vetores \mathbf{u} os quais são calculados para várias configurações (\mathbf{S}^N) possíveis do sistema (tempo, variáveis de projeto, variáveis aleatórias, passos de carga, etc.).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^N &= \left\{ (x_1, \dots, x_R)^1, \dots, (x_1, \dots, x_R)^N \right\} \\ \mathbf{u}^j &= \mathbf{u} \left((x_1, \dots, x_R)^j \right) \end{aligned} \tag{2.63}$$

onde N é o número de configurações projetos os quais serão analisados via MEF, R é o número de parâmetros variáveis de projeto. No caso dos problemas tratados neste trabalho, os parâmetros variáveis de projeto são as variáveis aleatórias (nva) e as próprias variáveis de projeto (ndv), tal que $R = nva + ndv$. Cada análise não-linear de uma configuração de projeto $(x_1, \dots, x_R)^i$, retorna um conjunto de vetores respostas \mathbf{u} (“snapshots”), um para cada passo de carga obtidas pelo processo de análise incremental. Nesta fase (chamada *off-line*) cada análise é realizada de forma incremental até que a tensão máxima dada seja atingida.

Sirovich aproximou a matriz de correlação das respostas por um somatório de "snapshots ou estrobos" da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \text{ onde } \mathbf{X} = [\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^K] \quad (2.64)$$

O processo de construção de \mathbf{X} é chamado estagio off-line, onde, como já mencionado, diferentes configurações de projeto são analisadas e as respostas \mathbf{u} são armazenadas. O número total de snapshots K é assumido ser suficiente grande para que a Eq. (2.64) seja verdadeira. O valor de K pode ser obtido através de um processo de teste de convergência, onde novos vetores \mathbf{u} são adicionados até que o espaço formado por \mathbf{X} seja suficiente para uma boa aproximação de um novo vetor \mathbf{u} , isto é, até que o erro seja menor que uma tolerância tol_w .

$$\left\| \left(\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T - I \right) \mathbf{u} \right\| \leq tol_w \quad (2.65)$$

Os componentes principais da matriz de autocorrelação \mathbf{C} ($k \times k$), podem ser obtidos através de uma decomposição de autovalores e autovetores ($\mathbf{C}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$). De modo mais direto, pode-se realizar uma decomposição em valores singulares (*singular value decomposition* - SVD) do conjunto de soluções \mathbf{X} ($n \times k$).

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \text{ onde } \mathbf{X}\mathbf{V} = \mathbf{S}\mathbf{D} \text{ e } \mathbf{X}^T\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{D}^T \quad (2.66)$$

Na Eq. (2.66) \mathbf{D} é uma matriz "diagonal" ($n \times k$) cuja diagonal é formada pela raiz quadrada dos autovalores (λ) de \mathbf{C} , i. e., $\text{diag}(\mathbf{D}) = [\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n], \Lambda_i = \sqrt{\lambda_i}$, \mathbf{V} é uma matriz $k \times k$ formada pelos componentes principais de \mathbf{C} e \mathbf{S} é uma matriz $n \times k$ formada pelos autovetores da matriz $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Os w componentes mais significantes (de maior energia) da decomposição são selecionados através do valor dos seus autovalores (em ordem decrescente). Determinasse w até que:

$$1 - \sum_{i=1}^w \bar{\lambda}_i < tol_\lambda, \text{ onde } \bar{\lambda}_i = \lambda_i / \sum_{k=1}^K \lambda_k \quad (2.67)$$

no qual o parâmetro tol_λ é o erro admissível da aproximação. Note que $w, N \leq K < n$. Após o número de componentes singulares significantes w determinado, a "base reduzida" (\mathbf{Z}) do POD é computada da seguinte forma:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}^w \quad (2.68)$$

onde o índice superior w , indica os primeiros w vetores (colunas) da matriz \mathbf{S} .

Como se pode notar, o POD é semelhante à análise em componentes principais (principal component analysis - PCA) ou SVD e à decomposição Karhunen-Loève (KL). Esse procedimento vem sendo ampla e proveitosamente usado em varias áreas como mecânica dos fluidos, mecânica estrutural estática e dinâmica, oceanografia, estatística, economia, processamento de imagem, etc. (Tan, 2003). O procedimento combina dois aspectos: uma aproximação com precisão e uma melhoria na eficiência computacional tornando este procedimento bem atrativo para propósitos da otimização.

Outra metodologia para a redução de modelo e utilizado em pesquisas anteriores é o chamado método da base reduzida (RBM – *Reduced Basis Method*) (AFONSO e PATERA, 2003; MOTTA, 2009; AFONSO et al, 2009), que utiliza os próprios snapshots como base do espaço reduzido ($\mathbf{Z} = \mathbf{X}$, $w = K$). Como se pode notar o POD apresenta uma evolução do RBM, uma vez que obtém um espaço reduzido para a aproximação menor ($w \leq K$). Além disso, o POD não apresenta algumas dificuldades do RBM, como o problema de componentes (\mathbf{u}_i) linearmente dependentes (comum em estruturas com comportamento linear), estes são automaticamente ignorados pelo POD uma vez que os autovalores relacionados a estes componentes são nulos.

O programa para análise não linear de treliças, implementadas pelo candidato no MATLAB, e o programa para análise não linear de sólidos bidimensionais HYPLAS, implementado em FORTRAN pelo grupo da Swansea University (SU), foram modificados para a incorporação da opção de análise estrutural via POD. O POD aplicado à análise não linear de outros tipos de estruturas, como sólidos 3D, será investigado futuramente. Além disto, serão investigadas estratégias visando um melhor desempenho do POD (CARDOSO, 2009).

Existem além destes, outros ROMs disponíveis na literatura como o método da aproximação combinada (combined approximation - CA) (Kirsch, 2008) chamado de método de reanálise, onde uma expansão da série binomial em torno do ponto inicial é frequentemente usado como a base reduzida. De forma parecida, existem os métodos baseados nos chamados espaços de Krylov. O espaço de Krylov de ordem r (\mathbf{K}_r) de um dado sistema linear, por exemplo, Eq. (2.21), é dado por $\mathbf{K}_r = \text{span}(\mathbf{F}; \mathbf{K}\mathbf{F}; \mathbf{K}\mathbf{K}\mathbf{F}; \dots; \mathbf{K}^{r-1}\mathbf{F})$. Entretanto, como os vetores tendem a se tornarem linearmente dependentes. Métodos baseados em espaços de Krylov, normalmente utilizam um esquema de ortogonalização como as iterações de Lanczos ou Arnoldi (Heres, 2004). Uma de suas desvantagens é que este tipo de procedimento não garante limites de erro para o modelo reduzido (Cardoso, 2009).

Outra possibilidade é a utilização direta da expansão por série de Taylor para estimar os vetores da base para mudanças no projeto. Para utilizar a série de Taylor é necessário o cálculo dos gradientes dos vetores da base (Weickum, 2005).

2.5.2. Procedimento Computacional Off-Line/On-Line

Os procedimentos para a análise via POD, são divididos em duas etapas, na primeira é calculada a base (\mathbf{Z}) onde as equações serão projetados, na segunda etapa são realizadas as análises propriamente ditas. Como uma consequência desta subdivisão, a implementação computacional para cálculo das grandezas pelo POD é conduzida por um algoritmo “*off-line*”/“*on-line*”. A ideia deste algoritmo consiste no fato de que a parte “*off-line*” só é executado uma vez, gerando a base (\mathbf{Z}). Consequentemente, no estágio on-line utiliza-se estes dados gerados anteriormente para executar uma resposta em tempo real para novos parâmetros (variáveis) do problema (x).

No caso de problemas de otimização considerando incertezas, estas variáveis são as chamadas variáveis de projeto e variáveis aleatórias. Aqui, por simplicidade, vamos chamar este conjunto de variáveis com μ . O procedimento de POD é implementado aqui, de acordo com o algoritmo descrito na Tabela 2.1.

A análise de sensibilidade necessária pelo procedimento de otimização foi calculada aqui considerando o método direto analítico para os problemas de treliça (Motta, 2009) e diferenças finitas para os problemas contínuos bidimensionais utilizando o sistema HYPLAS.

Como já mencionado, o sistema computacional HYPLAS, escrito em FORTRAN, destina-se à análise não linear via MEF de problemas elastoplásticos com grandes deformações, desenvolvida por de SOUZA NETO et al (2008). O HYPLAS foi integrado às ferramentas desenvolvidas para otimização robusta baseada em confiabilidade. Para isso, foram feitas modificações nas entradas (input), leituras e saídas (output) das informações do HYPLAS. Além disso, para a opção de análise não linear via POD, foi modificada a função “solver”, a qual cria a matriz tangente consistente e o vetor de forças e obtém o incremento de deslocamento do passo, Equação (2.21). Quando a opção do uso do modelo reduzido é acionado, o problema é projetado na base \mathbf{Z} , previamente lida a partir de um arquivo (binário). O arquivo contendo as informações da base \mathbf{Z} é gerado no MATLAB ao final da fase off-line, este arquivo contém primeiro as dimensões da base, seguidas pelos valores da base propriamente dita.

Tabela 2.1. Algoritmo POD: Off-Line/On-Line.

<p>OFF-LINE – obter a base da aproximação:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Escolhe a amostra: $\mathbf{S}^N = \left\{ (x_1, \dots, x_R)^1, \dots, (x_1, \dots, x_R)^N \right\}$, segundo a Equação (2.65); 2. Constrói a matriz final de soluções via MEF: $\mathbf{X} = [\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^K]$; 3. Decomposição SVD: $\mathbf{X} = \mathbf{SDV}^T$; 4. Encontrar w para um dado tol_λ: $1 - \sum_{i=1}^w \bar{\lambda}_i < tol_\lambda$; 5. Definir a base reduzida: $\mathbf{Z} = \mathbf{S}^w$
<p>ON-LINE – para um novo vetor $\boldsymbol{\mu}$:</p> <p>Para cada iteração de cada passo de carga:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Construir: \mathbf{K}_k e \mathbf{R}_k; 2. Projeta-los na base reduzida (\mathbf{Z}), obtendo: \mathbf{K}_k^w e \mathbf{R}_k^w; 3. Resolver: $\mathbf{K}_k^w \Delta \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_k^w$ 4. Atualizar: $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{Z} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 4. Atualizar o vetores de força/resíduo: $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{F}_{ext} - [\mathbf{F}_{int}]_{k+1}(\mathbf{u}_{k+1})$ 5. Verificar a convergência do resíduo projetado: $\ \mathbf{Z}^T \mathbf{R}_{k+1}\ < tol_F$

2.6. Aplicação

Neste item será apresentado um exemplo de análise não linear via HYPLAS, o qual será aproximado utilizando modelos computacionais reduzidos. A estrutura considerada para a análise é uma chapa 2D quadrada com um furo elíptico, apresentada na Figura 2.4.

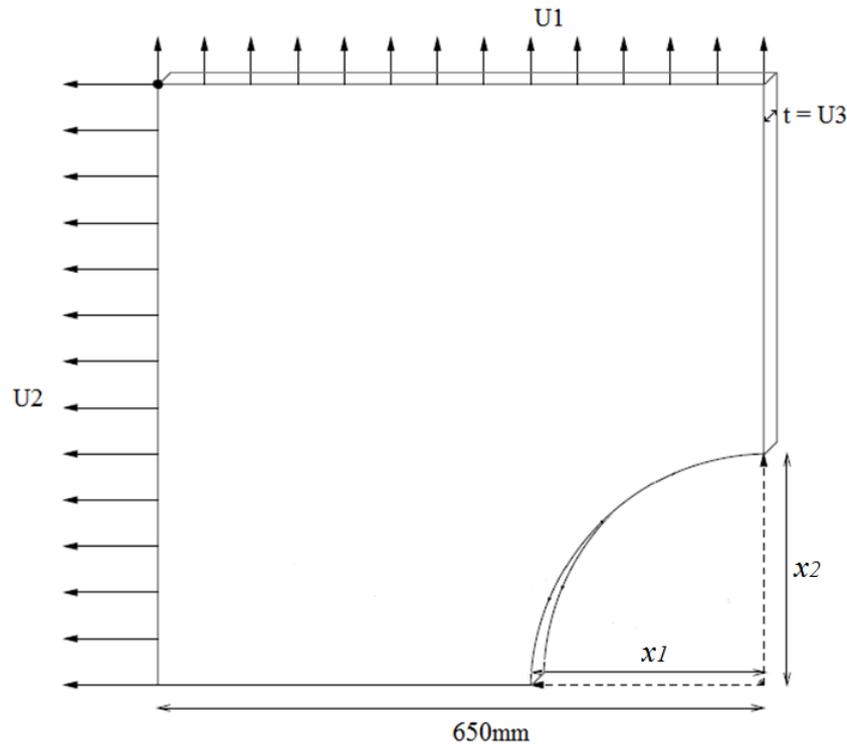


Figura 2.4. Chapa quadrada com furo - Definição do problema.

O material considerado é um modelo elasto-plástico von Mises com as seguintes propriedades: módulo de Elasticidade (E) = 20000.0 MPa, coeficiente de Poisson (ν) = 0.3 e tensão de escoamento (σ_y) = 200 MPa. A curva tensão-deformação “linear por trechos” uniaxial é apresentada na Tabela 2.2.

Tabela 2.2. Relação tensão-deformação uniaxial constitutiva de von Mises.

Deformação	Tensão (MPa)
0.0100	200
0.0400	400
0.1200	540
0.3600	600

Foram consideradas três variáveis aleatórias para este exemplo. As variáveis aleatórias são apresentadas na Figura 2.4, são elas: os carregamentos distribuídos ($U1$ e $U2$) e a espessura da chapa $U3$. As propriedades das distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias são apresentadas na Tabela 2.3, mais detalhes sobre a incorporação das incertezas serão apresentados no capítulo 3.

Será realizado um teste de convergência sobre o tamanho da base \mathbf{Z} para a redução do modelo computacional sem o uso do POD (RBM, $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$) e utilizando-o para uma maior redução da base, Eq. (2.68). Para o estudo paramétrico de convergência o número de amostras de projetos (e variáveis aleatórias) N , variou de 5 até 60, geradas utilizando o método LHS (*Latin Hypercube Sampling*), o qual será explicado posteriormente.

Tabela 2.3. Variáveis aleatórias.

Variáveis	Média	Desvio Padrão	Pdf
U1	40 N/mm	20 N/mm	Normal
U2	80 N/mm	8 N/mm	Normal
U3	1 mm	0.2 mm	Log-Normal

Foram definidos dois passos de carga como padrão para todos os projetos deste exemplo. Este número pode aumentar caso não haja convergência durante alguma análise não linear. Porém, isto não ocorreu, então o número de snapshots K (tamanho da base RBM) foi igual a duas vezes o número de amostras, $K = 2N$. O tamanho da base do POD (w) foi calculado para vários valores de tolerância (tol_λ), na Figura 2.5, w (em vermelho) foi plotado como K (em azul) para a comparação com o RBM. O erro das aproximações forma calculados em relação ao resultado utilizando via FEM (sem redução de modelo).

Nota-se que a convergência via POD é um pouco mais eficiente, apesar de apresentar pontos com erros próximos para um mesmo tamanho de base ($K = 70$). Devido ao número de graus de liberdade relativamente pequeno ($n_{gl} = 598$) e às não linearidades do problema, a melhoria do POD em relação ao RBM não foi muito evidente. É de se esperar que com o aumento do n_{gl} a melhoria no desempenho computacional do POD sobre o RBM seja mais destacado.

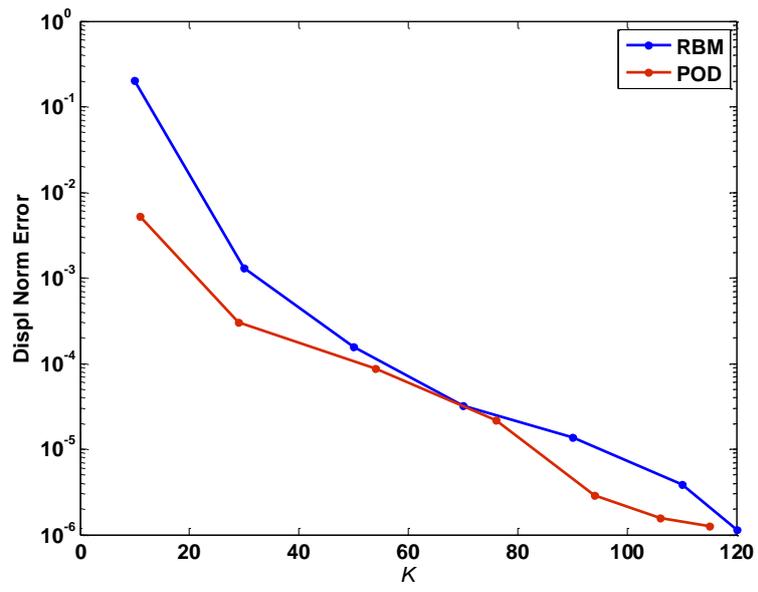


Figura 2.5. Convergência do erro da redução de modelo com o aumento do número da base.

3. Consideração das Incertezas

As estruturas são projetadas para atender a uma série de requisitos de forma mais eficiente possível, ou seja, com menor investimento, ou no menor tempo, ou com o menor custo de operação, etc. Quando uma estrutura deixa de atender qualquer um dos seus requisitos para o qual foi construída, diz-se que ela atingiu um estado limite. Para os diferentes níveis de estados limites são obtidos diferentes níveis de confiabilidade (HALDAR & MAHADEVAN, 2000). De maneira geral, as normas de projeto de estruturas definem dois tipos de estado limite: estado limite de serviço (ELS) e estado limite último (ELU). O ELS está associado à durabilidade, aparência, conforto do usuário e bom desempenho funcional, podendo gerar deformações excessivas, formação de fissuras excessivas, danos indesejáveis (corrosão), deslocamentos excessivos sem perda da estabilidade e vibrações excessivas. O ELU está associado ao colapso parcial ou global da estrutura provocando a paralisação do uso. Devido ao esgotamento da capacidade da estrutura, podem ocorrer a perda da estabilidade do equilíbrio, o colapso da estrutura, a ruptura de regiões críticas e a deterioração por fadiga (TORRES, 2009).

No projeto de estruturas, os parâmetros associados à carga, à resistência e até ao custo apresentam características aleatórias. Surge desta forma uma maior dificuldade em garantir a eficiência e que os estados limites não sejam violados. Neste contexto, os métodos de verificação da segurança se inserem visando reduzir a probabilidade da estrutura violar tais estados limites. Aqui o método probabilístico puro será utilizado para a consideração dos requisitos de projeto (restrições) de forma apropriada.

Como já anteriormente comentado, a abordagem determinística leva a um projeto final cujo desempenho pode cair significativamente e restrições podem ser violadas devido a perturbações decorrentes de incertezas. Este problema é acentuado quando se lida com projetos que foram otimizados, pois projetos ótimos tendem a se localizar no contorno das restrições (pequenas perturbações podem levar a violação das restrições do projeto). Como consequência, um ótimo determinístico pode potencialmente ser uma solução de alto risco (BEYER e SENDHALF, 2007).

Serão examinadas aqui algumas abordagens para a consideração das incertezas no processo de otimização e assim obter projetos robustos e confiáveis. Deste modo, as incertezas são consideradas ou na função objetivo ou nas restrições ou em ambas. Isto contrasta com as abordagens tradicionais que utilizam fatores de segurança, e assim os parâmetros incertos não são explicitamente incorporados na formulação do problema.

3.1. Cálculos das Estatísticas

Para o cálculo das estatísticas requeridas para a otimização considerando incertezas, serão empregadas algumas técnicas não intrusivas, especificamente, o método de Monte Carlo (MC) (KEANE e NAIR, 2005) e o Método da Colocação Probabilística (“Probabilistic Collocation Method” - PCM) (WEBSTER et al, 1996; RAMAMURTHY, 2005). O MC é um dos métodos mais tradicionais para este tipo de análise, porém a aplicação direta em modelos complexos de alta fidelidade é em geral computacionalmente onerosa, devido ao grande número de análises necessárias. O PCM é uma ferramenta desenvolvida visando uma análise de incerteza eficiente, mesmo em modelos complexos e computacionalmente custosos. A idéia básica do PCM é aproximar a resposta do modelo em função das variáveis aleatórias, por funções polinomiais, e estimar os parâmetros estatísticos por integração numérica.

3.1.1. Definição matemática

Sendo U uma variável aleatória com uma função de distribuição de probabilidade conhecida (pdf – Probability Density Function) $P(U)$, pode-se calcular diretamente a distribuição de probabilidade, $P_f(f)$, para uma função $f(U)$, caso f seja uma função monotônica, através da sua função inversa (BUCHER, 2009). Por exemplo, a tensão em uma barra tracionada pode ser calculada como $\sigma(A) = F/A$, onde F é a força axial aplicada à barra e A , a área de seção transversal. Caso A seja uma variável aleatória com pdf $P(A)$, a pdf da tensão $P_\sigma(\sigma)$, pode ser calculada como: $P_f(\sigma) = P(F / \sigma)$.

Alternativamente, é possível encontrar diretamente parâmetros estocásticos de f utilizando a pdf da variável aleatória U . A média de $f(U)$, também chamada de valor esperado de $f(U)$ pode ser expressa por (BUCHER, 2009):

$$E[f(U)] = \bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(U)P(U)dU \quad (3.1)$$

Já a variância da função $f(U)$, $\text{var}(f) = SD(f)^2$ onde $SD(f)$ é o desvio padrão de $f(U)$, é calculada como:

$$SD^2(f) = E\left[\left(f(U) - \bar{f}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(U) - \bar{f}\right)^2 P(U)dU \quad (3.2)$$

Porém, na grande maioria dos problemas envolvendo simulação numérica, estes cálculos analíticos não são viáveis ou possíveis. Neste caso é necessário o uso de métodos aproximados.

Desta forma, neste trabalho serão utilizados dois métodos para o cálculo das estatísticas: o método de Monte Carlo (MC) e o Método da Colocação Probabilística (PCM) (RAMAMURTHY, 2005; WEBSTER et al, 1996). Os problemas aqui tratados, essencialmente envolveram o cálculo apenas de alguns momentos estatísticos sem a necessidade de se encontrar toda a distribuição de probabilidade da função aleatória. A ideia básica é aproximar numericamente as integrais das Eq. (3.1) e (3.2), através de simulações determinísticas. Ambas as metodologias serão tratadas nas seções subsequentes.

3.1.2. Método de Monte Carlo para a obtenção das estatísticas

O método de Monte Carlo é o mais popular método não intrusivo e pode ser utilizado para qualquer problema de propagação de incerteza (KEANE e NAIR, 2005). Dado uma distribuição conjunta de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas, o método de MC pode ser aplicado para o cálculo aproximado da estatística da resposta de interesse, incluindo sua distribuição, com um nível de erro arbitrário, desde que seja fornecido um número suficiente de amostras. Esta abordagem é utilizada também para validar outras técnicas, utilizadas para o cálculo das estatísticas. No método de MC as funções de interesse $f(U)$ são calculadas em m pontos U^i , $i = 1 \dots m$ gerados aleatoriamente a partir de suas distribuições $P(U)$, então as integrais das Eq. (3.1) e (3.2) são aproximadas, respectivamente, por:

$$\bar{f} \approx \bar{f}_{MC} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(U^i) \quad (3.3)$$

$$\text{var}(f) \approx \text{var}_{MC}(f) = SD_{MC}^2(f(U)) = \overline{f_{MC}^2} - (\bar{f}_{MC})^2 \quad (3.4)$$

onde m é o número de pontos amostrados, \bar{f}_{MC} é a aproximação de MC da média $\overline{f_{MC}^2}$ é a aproximação de MC da média dos quadrados de $f(U)$ e $SD_{MC}(f(U))$ é a aproximação de MC do desvio padrão de $f(U)$.

Se f é integrável em U , então $\bar{f}_{MC} \rightarrow \bar{f}$ na medida em que $m \rightarrow \infty$. O cálculo da variância pode ser usado para verificar a aproximação \bar{f}_{MC} através da Equação (3.4), e então se pode estimar o erro dado por $SD(f)/\sqrt{m}$ (KEANE e NAIR, 2005), o qual independe do número de variáveis aleatórias do problema. A maior dificuldade do método de MC é sua baixa taxa de convergência, já que o seu erro estimado é de ordem $O(1/\sqrt{m})$. Por exemplo, para melhorar em um décimo a aproximação, é necessário uma amostra 100 vezes maior. Porém o método é facilmente paralelizável, pois o cálculo de cada $f(U)$ pode ser feito de forma independente.

A partir das Eq. (3.3) e (3.4), pode-se calcular os gradientes da média e do desvio padrão em relação a variáveis quaisquer (aleatórias ou determinísticas). Estes gradientes serão requeridos durante o processo de otimização, e podem ser calculados derivando as Eq. (3.3) e (3.4) em relação às variáveis de projeto \mathbf{x} :

$$\frac{\partial \bar{f}(\mathbf{x}, U)}{\partial \mathbf{x}} \approx \frac{\partial \bar{f}_{MC}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}, U^i)}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial (\text{var}(f))}{\partial \mathbf{x}} \approx \frac{\partial (\text{var}_{MC}(f))}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^m \left(2f(\mathbf{x}, U^i) \frac{\partial f(\mathbf{x}, U^i)}{\partial \mathbf{x}} \right) - 2m(\bar{f}_{MC}) \frac{\partial \bar{f}_{MC}}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (3.6)$$

derivando $SD_{MC}(f) = \sqrt{\text{var}_{MC}(f)} = \sqrt{SD_{MC}^2(f)}$, tem-se que

$$\frac{\partial SD_{MC}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2} (SD_{MC})^{-1} \frac{\partial (SD_{MC}^2)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{SD_{MC} m} \left[\sum_{i=1}^m \left(f(\mathbf{x}, U^i) \frac{\partial f(\mathbf{x}, U^i)}{\partial \mathbf{x}} \right) - m(\bar{f}_{MC}) \frac{\partial \bar{f}_{MC}}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (3.7)$$

3.1.3. Técnicas de amostragem

A geração das amostras pode ser feita de maneira totalmente aleatória (ou pseudo-aleatória), ou utilizando técnicas mais eficientes para o plano de amostragem (“Design of experiments” – DoE) (GIUNTA et al, 2003) tal como o método LHS (“Latin Hipercube Sampling”) que melhora a distribuição dos pontos da amostra e conseqüentemente aumenta a convergência do MC. As

amostras com distribuição Lognormal são geradas a partir de amostras com distribuição Normal, e estas são geradas a partir de amostras com distribuição Uniforme. A geração desta última é feita através de algoritmos determinísticos, capazes de gerar recursivamente uma sequência finita de números inteiros ou de ponto flutuante, com um determinado período (muito longo), sendo por isso chamados de números pseudo-aleatórios.

No presente trabalho, as metodologias utilizadas para a geração das amostras serão uma técnica pseudo-aleatória e o LHS, ambos os algoritmos usados são do ambiente MATLAB 7.14 (MATHWORKS, 2012). Para a geração de amostras segundo uma determinada pdf, primeiro é feita uma geração de amostras com distribuição uniforme, em seguida se utiliza uma função inversa da distribuição acumulada (cdf) para fazer uma transformação e obter as amostras com a distribuição de probabilidade requerida (MATHWORKS, 2012).

O LHS é um método de DoE (“Design of Experiments”) utilizado para gerar amostras mais adequadas, resultando numa convergência mais rápida para o método de MC, quando comparado com a performance deste utilizando uma amostra totalmente aleatória. No LHS, considerando uma amostra com m pontos, o intervalo de cada uma das n variáveis (dimensões) da amostra é dividido em m subintervalos, assim o domínio total é dividido em m^n sub-regiões. Cada sub-região tem a mesma probabilidade de ocorrência, pois cada subintervalo das variáveis está associado a uma probabilidade marginal de ocorrência de $1/m$. Os m pontos são dispostos em algumas das m^n sub-regiões, de forma que cada subintervalo das variáveis tenha apenas um ponto projetado. A Figura 3.1 mostra um exemplo de distribuição de 4 pontos numa amostra LHS para um caso de duas variáveis uniformes ($n = 2$ e $m = 4$), para mais detalhes vide (BARÓN e LEOD, 1999).

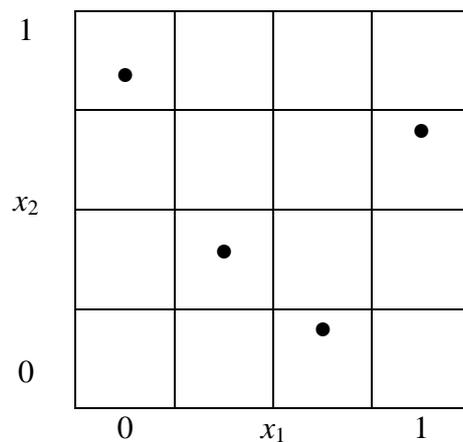


Figura 3.1. Exemplo de amostra LHS para $n = 2$ e $m = 4$.

As amostras LHS são geradas a partir de uma amostra aleatória com distribuição normal, a qual é ajustada para que a distribuição marginal de cada variável se aproxime da sua distribuição de probabilidade teórica (STEIN, 1987).

3.1.4. Método da Colocação Probabilística (PCM)

Métodos tradicionais como o MC, mesmo com técnicas de amostragem que melhoram sua eficiência, são inviáveis para serem aplicados diretamente em modelos complexos de alta fidelidade. O Método da Colocação Probabilística (“Probabilistic Collocation Method” - PCM) (RAMAMURTHY, 2005) é uma ferramenta desenvolvida visando uma análise de incerteza eficiente em modelos complexos e computacionalmente custosos. A ideia básica do PCM é aproximar a resposta do modelo em função das variáveis aleatórias, por funções polinomiais, e estimar as integrais das Eq. (3.1) e (3.2) por Quadratura de Gauss (STOER e BULIRSCH, 1991). Em particular, um PCM de grau $m-1$, aproxima a resposta do modelo por uma função polinomial de grau $2m-1$, através de m pontos calculados, obtendo de forma exata as estatísticas de funções polinomiais de grau menor ou igual a $2m-1$.

Este método é indicado principalmente para problemas onde as funções de interesse são suaves, pois as aproximações polinomiais podem apresentar dificuldades para funções oscilatórias ou com singularidades. Além disso, o número de variáveis aleatórias consideradas deve ser pequeno, pois o número de pontos necessários, para a aproximação de um mesmo grau, aumenta exponencialmente com o número de variáveis aleatórias. Esta dificuldade pode ser amenizada utilizando técnicas de integração por grades esparsas (“sparse grids”) (HEISS e WINSCHHEL, 2008). Por exemplo, para um número mínimo de 2 pontos por variável aleatória (aproximação de 1º grau) o número total de pontos à ser avaliados é: $m = 2^n$ onde n é número de variáveis aleatórias. Para um problema com 20 variáveis aleatórias ($n = 20$), o número total de pontos à ser avaliados é maior que 10^6 o qual em geral já é o suficiente para uma boa aproximação via Monte Carlo.

(a) Polinômios ortogonais

Dado um espaço linear de funções reais \mathcal{F} e duas funções polinomiais $f(x), g(x) \in \mathcal{F}$, considere o produto interno definido como:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{\mathcal{F}} f(x)g(x)P(x)dx \quad (3.8)$$

onde $P(x)$ é uma função de ponderação não negativa definida no espaço \mathcal{F} . Pode-se mostrar que a integral da Eq. (3.9) apresenta as propriedades que definem um produto interno.

Este produto interno forma a base da integração por Quadratura de Gauss e para o PCM. As funções polinomiais $f(x), g(x) \in F$ são ortogonais se seu produto interno for nulo. Um conjunto de polinômios $h_i(x)$ pertencentes ao espaço polinomial \mathcal{H} , pode ser definido como:

$$h_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x + a_{i,2}x^2 \dots + a_{i,i}x^i = \sum_{j=0}^i a_{i,j}x^j \quad (3.9)$$

Estes polinômios serão ortonormais em relação a uma função de ponderação $P(x)$, se a seguinte relação existe para todos $h_i(x)$, $i=0,1..n$, onde o índice de h_i indica o grau do polinômio:

$$\langle h_i(x), h_j(x) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (3.10)$$

Através destas relações são encontrados os coeficientes $a_{i,j}$ que definem os polinômios ortonormais. Estes polinômios são únicos para cada função de ponderação dada, e formam uma base para \mathcal{H} . Todas as raízes x_j^* , $j=1..i$ de um polinômio $h_i(x)$, estão contidas no espaço real, ou seja, $h_i(x_j^*) = 0$, $x_j^* \in \mathcal{F}$, $j=1..i$, (RAMAMURTHY, 2005) e dependem apenas da função de ponderação $P(x)$. As raízes de $h_i(x)$ formam os pontos de colocação da quadratura de Gauss. Para mais detalhes consulte (GAUTSCHI, 2005).

(b) Quadratura de Gauss

Na integração numérica via quadratura de Gauss para integrais da seguinte forma:

$$\int_r f(x)P(x)dx \quad (3.11)$$

Aproxima-se a função $f(x)$, por um polinômio de grau $2n-1$, a partir da base ortonormal do espaço \mathcal{H} , em relação à função de ponderação $P(x)$, onde n é o número de pontos de integração, tal como segue

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i h_i(x) \right) + h_n(x) \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i h_i(x) \right) \quad (3.12)$$

Na integral da Equação 3.11 aproximada por quadratura de Gauss, o segundo termo da aproximação dada em (3.12) se cancela (por ortogonalidade), assim como os termos para $i = 1..n - 1$ do primeiro somatório da aproximação. A integral desejada 3.11, aproximada por quadratura de Gauss, pode ser expressa então da seguinte forma:

$$\int_F f(x)P(x)dx \approx b_0 h_0 \int_F P(x)dx \quad (3.13)$$

Para encontrar os coeficientes b_i e c_i da aproximação (Equação 3.12), seria necessário o cálculo da função $f(x)$ em $2n$ pontos. Porém, como a integral não depende dos coeficientes c_i , pode-se calcular a função $f(x)$ nas n raízes x^* de $h_n(x)$, cancelando assim o segundo termo da aproximação apresentada na Equação (3.12), pois $h_n(x_i^*) = 0, i = 1..n$. Desta forma, os coeficientes b_i são encontrados resolvendo um sistema de $n \times n$. Vale salientar que a matriz desse sistema depende apenas de dados previamente conhecidos: a função de ponderação $P(x)$, os polinômios ortonormais $h_i(x)$ e as raízes x^* . Esse sistema é resolvido e o coeficiente b_0 , valor incógnito da aproximação da integral (Eq. (3.13)), é calculado como uma combinação ponderada dos valores de $f(x)$ nos pontos x^* .

Definindo-se

$$C_0 = h_0 \int_F P(x)dx \quad (3.14)$$

O valor desejado é calculado como

$$\int_F f(x)P(x)dx \approx C_0 \sum_{i=1}^n P_i f(x_i^*) \quad (3.15)$$

onde os valores de P_i são os coeficientes de ponderação obtidos através da resolução do sistema de equações da aproximação, para mais detalhes vide (MOTTA, 2009). Vale ressaltar que não é necessário calcular estes parâmetros para as funções de distribuição conhecidas, pois estes valores são conhecidos e podem ser encontrados na literatura, bem como em bibliotecas computacionais da maioria dos programas.

(c) Aplicando Quadratura de Gauss à estatística - PCM

A avaliação das estatísticas definidas nas Equações (3.1) e (3.2) utilizando o PCM é uma aplicação da quadratura de Gauss considerando o espaço das variáveis aleatórias U , onde a função

de ponderação é a pdf conjunta das variáveis aleatórias. Portanto tem-se que $\int_F P(U)dU = 1$ e $h_0 = 1$, consequentemente a constante $C_0 = 1$ (definida pela Equação (3.14)). Com isso o valor da integral da Eq. (3.13) é aproximado apenas por b_0 . Os polinômios ortonormais são definidos para cada PDF. A média e o desvio padrão de uma resposta de interesse serão aproximados pelo PCM da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{f}_{PC} &= \sum_{i=1}^n P_i f(U^{*i}) \\ SD_{PC}^2 &= \sum_{i=1}^n P_i f(U^{*i})^2 - \bar{f}_{PC}^2\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde U^{*i} , $i=1..n$ são as n raízes do polinômio ortonormal.

Pode-se calcular a partir da Equação (3.16) os gradientes da média e do desvio padrão em relação a variáveis quaisquer, aleatórias ou determinísticas, da mesma forma como foi feito para o MC, derivando a Equação (3.16) em relação às variáveis de projeto (Motta, 2009).

Uma dificuldade da integração por Quadratura de Gauss a qual também ocorre também com o PCM é a chamada maldição da dimensionalidade (“dimensional curse”), pois o número de pontos de integração (para um mesmo grau de aproximação) cresce exponencialmente com o número de dimensões do problema. Ou seja, no caso do PCM, o número de variáveis aleatórias a ser considerada não deve ser elevado, pois o número de cálculos da função de interesse é dado por n^{nva} , onde n é o numero de pontos de colocação e nva o número de variáveis aleatórias.

Para problemas com muitas variáveis aleatórias pode-se utilizar para integração numérica, técnicas de grades esparsas (“sparse grids”) baseadas nas regras de Smolyak (1963) para integração multivariável, diminuindo consideravelmente o número de pontos de colocação, para mais detalhes vide (HEISS e WINSCHHEL, 2008). Esta metodologia não será abordada aqui.

3.2. Análise de Confiabilidade

As estruturas são projetadas de forma a atender aos níveis de segurança e economia, durante toda sua vida útil. O método probabilístico puro se baseia no princípio de que não existe segurança absoluta (probabilidade de falha igual a zero). A deficiência relativa à determinação da probabilidade de falha associada ao critério de projeto é suprida com sua aplicação.

Desta forma, em um projeto estrutural é importante quantificar a probabilidade de falha da estrutura para auxiliar na avaliação da segurança da mesma em operação. O grau de confiança de

que a estrutura não falhe durante sua vida útil, atendendo às especificações de projeto, pode ser medido através da análise de confiabilidade. A análise de confiabilidade estrutural representa um importante desenvolvimento para a engenharia estrutural moderna em todo o mundo. Ela é usada atualmente no desenvolvimento de novas gerações de códigos de projeto, na avaliação da segurança de estruturas existentes e na avaliação do risco (MELCHERS, 1999).

Projetos confiáveis são aqueles criados para atender à uma probabilidade de falha limite. Os procedimentos empregados para calcular a confiabilidade de algum projeto podem ser obtidos por meio da análise de confiabilidade. O objetivo principal da análise de confiabilidade é determinar a probabilidade de falha de um projeto, porém recentemente o índice de confiabilidade, vem sendo usado como métrica para definir a confiabilidade de um projeto.

Nos projetos atuais de estruturas, a consideração das incertezas do problema real são feitos através de parâmetros de cálculo conservadores, porém determinísticos, desta forma o grau de segurança da estrutura ou a probabilidade de falha (Pf) não são determinados. Uma forma de calcular quantitativamente o quão segura é uma estrutura, é através do cálculo da probabilidade de falha (Pf), obtida através da análise de confiabilidade.

Para um conjunto de variáveis aleatórias, U , uma função de distribuição de probabilidade conjunta (pdf) $f_U(U)$ e uma função de falha $G(U)$, a Pf pode ser calculada como:

$$Pf = \int_F f_U(U) dU \quad \therefore F = \{U : G(U) > 0\} \quad (3.17)$$

onde F é a região de falha.

A análise de confiabilidade pode ser realizada por meio de vários métodos, os mais conhecidos, e que estão sendo investigados na presente pesquisa, são os métodos de Monte Carlo, já apresentado anteriormente, e o FORM (First Order Reliability Method) (MELCHERS, 1999; Youn e Choi, 2004).

3.2.1. Monte Carlo em confiabilidade

A ideia básica do uso do MC para o cálculo de probabilidade de falha é aproximar o valor da integral Eq. (3.17) numericamente, de forma semelhante ao procedimento do item 3.1.2 para as integrais Eq. (3.1) e (3.2). Neste caso, a partir do valor da função de interesse (função de falha) nos pontos amostrais gerados (U_i) a probabilidade de falha Pf é calculada da seguinte maneira:

$$Pf_{MC} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [G(U_i) > 0] \quad (3.18)$$

Na Eq. (3.18), $[G(U_i) > 0]$ vale 1 caso verdadeiro e 0 caso contrário. Assim, a Pf é obtida contando o número de pontos os quais falharam (estão na zona de falha, $G(U_i) > 0$) e dividindo-o pelo número total de pontos.

Nota-se que para valores muito baixos de Pf (o que é comum) o número de pontos amostrados deve ser muito grande, caso contrário poucos ou nenhum ponto irão cair na zona de falha e assim o valor de Pf dificilmente será adequado. Na literatura se aconselha utilizar o tamanho da amostra mínima da ordem de $m = 5/Pf$ (DEB et al, 2009; BECK, 2008). Por exemplo, para uma $Pf \sim 1e^{-5}$ deve-se utilizar uma amostra com pelo menos 5×10^5 pontos.

3.2.2. FORM

Com o objetivo de evitar o uso da integral numérica no cálculo da probabilidade de falha (Eq. 3.17) os métodos analíticos FORM e SORM são utilizados, fazendo uso de uma técnica iterativa.

O FORM (DITLEVSEN e MADSEN, 2007; BECK, A. T., 2008) faz uma aproximação de primeira ordem da função de falha, no ponto de maior probabilidade de falha (MPP – Most probable failure point) considerando um problema equivalente. Neste problema equivalente o espaço das variáveis aleatórias originais (U) é transformado em um espaço das variáveis normais padrão equivalente não-correlacionadas, chamado espaço reduzido padrão. No espaço reduzido padrão as variáveis aleatórias reduzidas (V) seguem uma distribuição de probabilidade padrão (média zero e desvio padrão unitário). O problema equivalente é obtido através de alguma transformação de variáveis, existem várias metodologias para executar este tipo de transformação, como a baseada no modelo de Nataf (NATAF, 1962; LIU and KIUREGHIAN, 1986) e a transformação de Rosenblatt (ROSENBLATT, 1952). Aqui a transformação utilizada é baseada na Transformação de Nataf, e as distribuições de probabilidade das variáveis originais consideradas serão normais ou log-normais.

Esta transformação simplesmente opera com a distribuição marginal das variáveis aleatórias e com o coeficiente de correlação entre as variáveis, sendo obtida por:

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}(\mathbf{U} - \mathbf{M}_U) \quad (3.19)$$

onde \mathbf{V} é o vetor das variáveis transformadas, \mathbf{M}_U é o vetor com as médias normais equivalentes das variáveis \mathbf{U} e \mathbf{T} é o jacobiano da transformação dado por:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{V}}{d\mathbf{U}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{SD}^{-1} \quad (3.20)$$

onde \mathbf{SD} é uma matriz diagonal contendo os desvios padrões normais das variáveis \mathbf{U} e \mathbf{L} a matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação de \mathbf{U} .

No espaço reduzido padrão, o MPP (\mathbf{V}^*) é o ponto de menor distância entre o estado limite, $G(\mathbf{U}) = 0$, e a origem do espaço (local da média das variáveis aleatórias \mathbf{U} no espaço \mathbf{V}). Esta distancia é chamada índice de confiabilidade, definida por:

$$\beta = |\mathbf{V}^*| \quad (3.21)$$

No método FORM, a superfície de falha é aproximada por um hyperplano que passa pelo MPP e é tangente a função de falha, no espaço reduzido. A probabilidade de falha no FORM é, então, aproximada por

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.22)$$

onde Φ é a função acumulada de probabilidade para uma variável aleatória padrão (MELCHERS, 1999). Uma interpretação gráfica do FORM é mostrada na Figura 3.2 para um problema com duas variáveis aleatórias U_1 e U_2 .

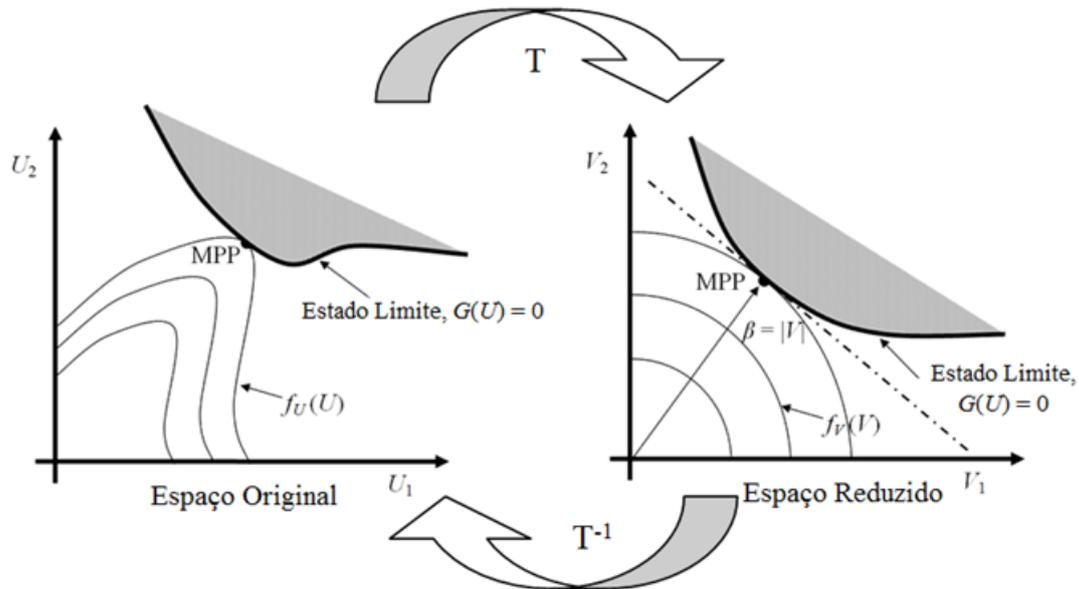


Figura 3.2 – Espaço original e reduzido utilizado no FORM.

Para a solução do problema será necessário o gradiente da função de falha no espaço reduzido. Ele pode ser obtido diferenciando a equação que relaciona a função de falha nos dois espaços

$$G(V) = G(U)$$

$$\frac{dG(V)}{dV} = \frac{dG(U)}{dV} \quad (3.23)$$

como apenas conhecemos o gradiente de G no espaço original em relação às variáveis originais $\frac{dG(U)}{dU}$, pode-se reescrever a Eq. (3.23) como:

$$\frac{dG(V)}{dV} = \frac{dG(U)}{dU} \frac{dU}{dV} \quad (3.24)$$

Utilizando a notação $\frac{df(a)}{db} = \nabla f_b(a)$ e utilizando o jacobiano Eq. (3.21), o gradiente da função de falha no espaço reduzido pode ser expresso como

$$\nabla_{G_V}(V) = \nabla_{G_U}(U) \mathbf{T}^{-1} \quad (3.25)$$

O principal desafio do FORM é a determinação do MPP. A busca pelo MPP recai num problema de otimização não-linear. O algoritmo de otimização mais utilizado na análise de confiabilidade é o HL-RF, desenvolvido por HASORF & LIND (1974) e em seguida aprimorado

por RACKWITZ & FIESSLER (1978). O HL-RF é baseado no método de Newton-Rapson para encontrar raízes de equações, são feitas iterações até que a convergência seja atingida, seguindo a seguinte recorrência para atualização das variáveis:

$$\mathbf{V}^{K+1} = \frac{\nabla G_V(\mathbf{V}^K)}{|\nabla G_V(\mathbf{V}^K)|^2} [\nabla G_V(\mathbf{V}^K)^T \mathbf{V}^K - G_V(\mathbf{V}^K)] \quad (3.26)$$

Para alguns problemas de alta não linearidade o algoritmo HL-RF pode não convergir. Uma possibilidade para aumentar a robustez do método é utilizar a iteração como direção de busca e realizar uma busca linear, esta modificação é referida como HL-RF melhorado (*i* HL-RF) (HALDAR & MAHADEVAN, 2000). Há ainda outros algoritmos de otimização os quais podem ser utilizados para obter o MPP para diferentes tipos de problema, incluindo o SQP (Sequential Quadratic Program), o algoritmo de ponto interior não linear (nonlinear interior-point - NIP) (Beck, 2012).

Em resumo, os passos do algoritmo do FORM são:

1. Obter os dados da transformação Nataf \mathbf{T} , Eq. (3.20);
2. Computar $G(\mathbf{U})$ e $\nabla G_U(\mathbf{U})$;
3. Transformar ponto atual $\mathbf{V} = \mathbf{T}(\mathbf{U} - \mathbf{M}_U)$;
4. Calcular $\nabla G_V(\mathbf{V}) = \nabla G_U(\mathbf{U})\mathbf{T}^{-1}$
5. Calcular o novo \mathbf{V} , Eq. (3.26)
6. Transformar de volta $\mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{V} + \mathbf{M}_U)$;
7. Verificar convergência, caso negativo ir para 2;
8. Computar β .

Geralmente utiliza-se como ponto inicial, a média das variáveis aleatórias, $\mathbf{U} = \mathbf{M}_U$.

Além do valor do índice de confiabilidade (β), o seu gradiente em relação às variáveis de projeto também é requerido pelo otimizador, ele pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\frac{d\beta}{dx_i} = - \frac{\nabla_{x_i} G(\mathbf{U})}{\|\nabla_V G(\mathbf{V}^*)\|} \quad (3.27)$$

4. Otimização

A pesquisa científica no campo da otimização estrutural foi substancialmente aumentada durante as últimas décadas e um progresso considerável foi atingido. Este desenvolvimento foi devido principalmente ao progresso de ferramentas numéricas confiáveis, tais como o método dos elementos finitos, métodos de análise de sensibilidades e métodos de programação matemática. Além disso, mais recentemente, novos métodos para a incorporação de simulações mais realistas, tais como a abordagem estocástica, utilizando ferramentas eficientes de aproximação, e análises estruturais não lineares tornaram os problemas de otimização na engenharia mais realistas e ao mesmo tempo tratáveis. Tais procedimentos foram fortemente alavancados pelo crescimento acentuado das velocidades e capacidades dos computadores. Uma ideia geral das atividades em tal campo nas últimas décadas pode ser encontrada na literatura (BATES, 2003; VANDERPLAATS, 2006; ARORA et al, 2007).

Neste trabalho serão estudados diversos problemas de otimização os quais possuem particularidades na sua formulação, bem como em sua solução. Os tipos de otimização abordados neste trabalho podem ser classificados em dois grandes grupos:

- Otimização Uni-objetivo (escalar) – possui uma única função objetivo;
- Otimização Multiobjetivo (vetorial) – possui varias funções objetivo;

Nesta pesquisa, serão examinadas abordagens para a consideração das incertezas no processo de otimização e assim obter projetos confiáveis e robustos. Na prática da engenharia é comum assumir valores nominais para os parâmetros incertos de projeto. Uma maneira de garantir segurança contra incertezas é aplicar restrições mais rígidas que as idealmente impostas. Por exemplo, quando se projeta um sistema estrutural, para garantir que ele não falhe geralmente são impostas restrições de projetos nas tensões da forma $\sigma(\mathbf{x}) < \sigma_{\max}$, onde σ_{\max} é a tensão de falha do material e \mathbf{x} é o conjunto das variáveis de projeto. Para considerar as incertezas já citadas, a restrição pode ser escrita como $\mathbf{F}_s \sigma(\mathbf{x}) < \sigma_{\max}$, onde \mathbf{F}_s é chamado o *fator de segurança*. Normalmente os valores de fator de segurança são definidos por normas de cálculo e variam entre

1.2 e 3.0. Claramente, o novo projeto ótimo será mais conservador quanto mais se aumenta o valor de F_s , pois neste o ótimo se distancia do contorno da restrição original $\sigma(\mathbf{x}) - \sigma_{\max} = 0$.

Como já mencionado, esta prática deve ser evitada, principalmente quando se lida com projetos que foram severamente otimizados, pois projetos ótimos tendem a se localizar nos extremos da função objetivo ou no contorno das restrições, com isso, pequenas perturbações podem levar a queda de desempenho e/ou violação das restrições do projeto.

Quando as incertezas de um problema são consideradas de forma apropriada no processo de obtenção de uma solução ótima, surgem diversos subtipos particulares de problemas de otimização. Neste trabalho serão abordados os seguintes:

- Otimização Robusta (Robust Optimization ou Robust Design Optimization – “RDO”)
- Otimização Baseada em Confiabilidade (RBDO, reliability based design optimization)
- Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade (R²BDO ou RBRDO “reliability based robust design optimization”)

Apesar de descritos separadamente neste trabalho, diversos trabalhos na literatura consideram todos os casos de otimização que abordam incertezas (tanto na função objetivo como nas restrições) como otimização robusta (BEYER e SENDHOFF, 2007). A seguir, a formulação matemática para todos os tipos de otimização a serem considerados neste trabalho serão descritos.

4.1. Otimização Uni-objetivo

Quando os problemas de otimização envolvem uma única função objetivo ele é denominado problema de otimização escalar (ARORA et al, 2007). Este tipo de problema de otimização pode ser expresso como:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nvp}} f(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

sujeito às seguintes condições:

$$\begin{aligned} h_k(\mathbf{x}) &= 0 & k &= 1, \dots, ne \\ g_i(\mathbf{x}) &\leq 0 & i &= 1, \dots, ni \\ x_{lj} &\leq x_j \leq x_{uj} & j &= 1, \dots, nvp \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo:

$f(\mathbf{x}) \rightarrow$ função objetivo;

$h(\mathbf{x}) \rightarrow$ função restrição de igualdade;

$g(\mathbf{x}) \rightarrow$ função restrição de desigualdade;

$\mathbf{x} \rightarrow$ vetor das variáveis de projeto;

$ne \rightarrow$ número de funções restrições de igualdade;

$ni \rightarrow$ número de funções restrições de desigualdade;

$nvp \rightarrow$ número de variáveis de projeto;

$\mathbf{R}^{mp} \rightarrow$ espaço das variáveis de projeto (nvp dimensional).

As funções restrições de igualdade, $h(\mathbf{x})$, e de desigualdade, $g(\mathbf{x})$, definem o espaço viável ou admissível da(s) variável(eis) de projeto. As restrições, em certo ponto \mathbf{x}^* viável, são ditas inativas, caso $g_i(\mathbf{x}) < 0$ e ativas caso $g_i(\mathbf{x}) = 0$ e todas as restrições de igualdade são consideradas ativas.

A Programação Matemática pode ser considerada como a primeira linha de métodos para resolução de problemas de otimização. Ela trata o problema de forma iterativa e determinística, isto é, através de gradientes, funcionais, operações matriciais, etc., para encontrar o ponto ótimo.

Na maioria dos casos de otimização, supõe-se a continuidade das funções, assim como de suas derivadas, o que nem sempre ocorre, acarretando na principal dificuldade encontrada por estes tipos de métodos. A diferenciabilidade e a convexidade do problema influem, fundamentalmente, sobre a natureza das condições de ótimo.

Vários algoritmos podem ser utilizados na resolução dos problemas de otimização não-lineares com restrições baseadas em gradientes (VANDERPLAATS, 2004; KLEIBER, 2005). O algoritmo usado neste trabalho, na busca da solução ótima para os problemas de otimização, é o da *programação quadrática sequencial*, mais conhecido como SQP (“Sequential Quadratic Programming”) (POWEL, 1978). A versão do algoritmo aqui utilizada é a disponível no ambiente computacional MATLAB (MATHWORKS, 2012). Para maiores informações sobre o processo de otimização utilizado vide (MOTTA, 2009).

Esta formulação de problema descrita nas Eq. (4.1) e (4.2) serve de base para todos os problemas de otimização conhecidos, qualquer outro tipo de otimização é formulado como uma variante ou um caso particular deste.

4.2. Otimização Multiobjetivo

O projeto ótimo de problemas reais de engenharia quase sempre envolve várias metas (funções objetivo) a serem aprimoradas (minimizadas), além de vários critérios a serem satisfeitos (funções restrição). Este tipo de problema é chamado de Otimização Multiobjetivo (OM). Os algoritmos de otimização já citados são capazes de resolver problemas que envolvam apenas uma função objetivo.

O problema de otimização multiobjetivo (POM) pode ser expresso como:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), \dots, f_{nobj}(\mathbf{x})], \quad nobj \geq 2 \quad (4.3)$$

sujeito às condições como as expressas na Eq. (4.2).

O problema de otimização multiobjetivo (POM) pode ser resolvido empregando-se o conceito de Pareto. Os pontos de Pareto apresentam a propriedade de que quando se movem na direção decrescente de uma das funções, pelo menos uma das outras funções restantes tem seu valor aumentado.

Nas últimas décadas, pontos de Pareto bem distribuídos têm sido obtidos graças ao desenvolvimento de algoritmos eficientes tal como o NBI (Normal-Boundary Intersection) (DAS e DENNIS, 1996). Essas estratégias juntamente com outras abordagens de mais fácil implementação (Método da soma ponderada e Método min-max) são aqui implementadas. Além destas, uma modificação proposta da estratégia NBI para problemas com mais de duas funções objetivo (MOTTA et al., 2012), será utilizada.

Em um POM é muito importante analisar o problema no espaço das funções objetivo. Isto pode ser feito usando-se um sistema de equações geradas pelas funções objetivo e conjuntos das restrições ativas. Para cada projeto viável, haverá correspondentes valores das funções objetivo que definirão o espaço viável das funções objetivo. Sobre seu contorno se localizam os pontos ótimos de Pareto. Na Figura 4.1 é apresentado um exemplo de POM com duas variáveis de projeto e duas funções objetivo, onde a linha tracejada representa os pontos ótimos de Pareto.

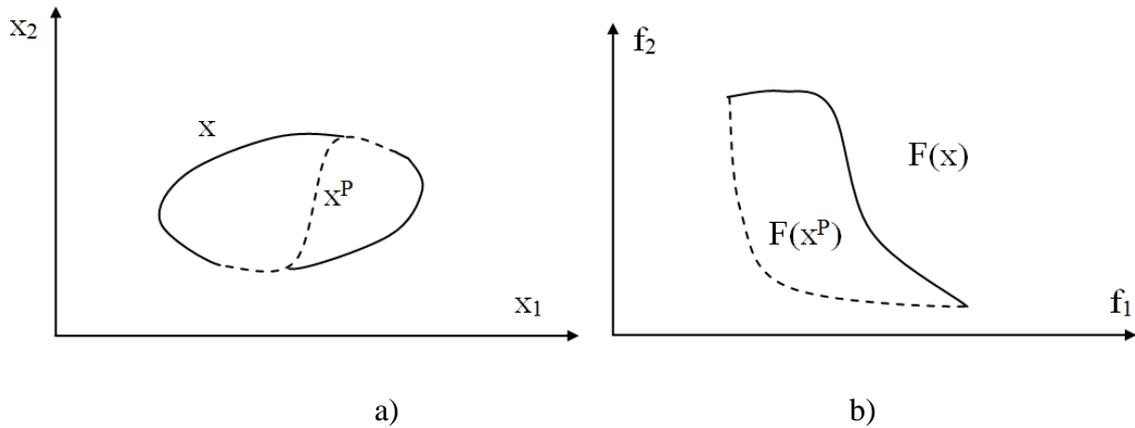


Figura 4.1. Região viável e pontos de Pareto: a) no espaço das variáveis de projeto, b) no espaço das funções objetivo.

Conforme já mencionado, em problemas multiobjetivo, o interesse do projetista é encontrar um vetor das variáveis de projeto \mathbf{x}^* tal que as Eq. (4.2) e (4.3) sejam satisfeitas. Usualmente, não existe tal \mathbf{x}^* devido ao aspecto de conflito comum entre as funções objetivo. Usando o conceito de Pareto, o projetista deve encontrar tantos pontos quanto possíveis, em cujas respectivas avaliações das funções objetivos estabeleça um compromisso (trade-off) ótimo entre elas. A partir destes pontos será escolhido o projeto o qual irá satisfazer, mais adequadamente, cada função objetivo.

4.3. Métodos Para Geração de Pontos de Pareto

Existem várias técnicas para se obter o chamado conjunto de mínimo de Pareto (DAS e DENNIS, 1997; BATES, 2003; COLLETTE e SIARRY, 2004). Entre eles, métodos baseados em metodologias metaheurísticas têm sido usados com algum sucesso (LALONDE et al, 2009). Porém, neste trabalho apenas serão considerados procedimentos que fazem uso de programação matemática. Os métodos considerados serão os seguintes: Método da Soma Ponderada (STEUER, 1985), Método Min-Max (HWANG et al, 1980), Método NBI (DAS e DENNIS, 1997) e o Método da Restrição Normal - NC (MESSAC et al, 2003).

4.3.1. Método da Soma Ponderada

Dentre os métodos desenvolvidos para otimização multiobjetivo, no qual se substitui as funções objetivo por uma única função, denominada de função substituta, o mais empregado e de uso mais simples é o método da soma ponderada (“Weighted Sum method” – WS) (KOSKI, 1985; AFONSO, 1997; AFONSO e SIENZ, 1999; AFONSO et al, 2002). Sua técnica baseia-se em

atribuir um vetor de coeficientes de ponderação β_j , às funções objetivo normalizadas, combinando-as linearmente, ou seja, transformando-as em uma única função objetivo. Sua representação algébrica é dada da seguinte forma

$$F = \beta_j^T \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_0} = \sum_{k=1}^{nobj} \beta_{j,k} \frac{f_k}{f_{0k}} \quad (4.4)$$

onde os elementos de $\beta_{j,k}$ são normalizados, da seguinte maneira:

$$\sum_{k=1}^{nobj} \beta_{j,k} = 1, \quad 0 \leq \beta_{j,k} \leq 1 \quad (4.5)$$

e f_{0k} é a função objetivo k no projeto inicial \mathbf{x}_0 .

O algoritmo desse método pode ser representado pelos seguintes passos:

- i) Definir o número de subconjuntos β ;
- ii) Normalizar as funções objetivo;
- iii) Para cada β_j faça:
 - iii.a) Obter a função objetivo substituta usando a Eq. (4.4);
 - iii.b) Otimize a função substituta e encontrar o ponto \mathbf{x}_j^* ;
 - iii.c) Substituir o \mathbf{x}_j^* nas funções objetivo e obter os seus valores;

Problemas na obtenção de pontos de Pareto via WS poderão surgir quando o contorno da região viável no espaço das funções objetivos for não-convexo, como mostra a Figura 4.2. Neste caso, não existirá nenhum β_j capaz de fornecer uma solução que esteja na parte não-convexa.

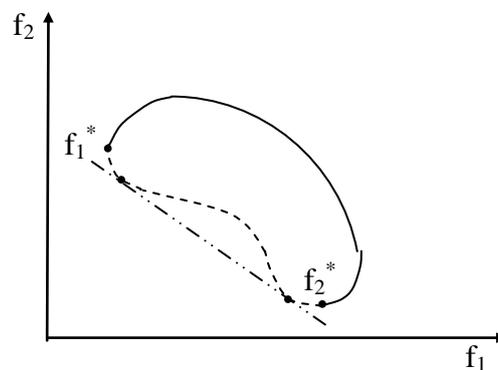


Figura 4.2. Região viável não-convexa no espaço das funções objetivo.

Em geral, quando se utiliza essa metodologia, ocorre que uma distribuição uniforme dos pesos β não fornece uma distribuição uniforme de pontos de Pareto.

4.3.2. Método Min-Max

Este método foi desenvolvido com o propósito de sanar os problemas listados anteriormente no método da soma ponderada dos objetivos, o que é parcialmente alcançado no que se refere a obter pontos uniformemente distribuídos (HWANG et al, 1980).

Neste procedimento, as funções objetivo são normalizadas, de forma diferente daquela do método da soma ponderada dos objetivos, sendo para isso acrescentados dois parâmetros: $\max f_k$ e $\min f_k$. Estes parâmetros são obtidos das soluções das otimizações escalares, isto é, que envolvem a consideração individual das funções objetivo isoladas. Obtém-se, então, um conjunto de variáveis \mathbf{x}_k^* , resultante de cada otimização k isolada. Aplica-se esse conjunto a cada função objetivo e daí atribui-se o máximo valor da função a $\max f_k$ e o mínimo a $\min f_k$.

As funções objetivo normalizadas assumirão a forma:

$$\bar{f}_k = \frac{f_k - \min f_k}{\max f_k - \min f_k}, \quad k = 1, \dots, nobj \quad (4.6)$$

caso ($\max f_k \equiv \min f_k$) para algum objetivo k , este pode ser desconsiderado.

O novo vetor das funções objetivo é escrito como:

$$\bar{\mathbf{F}} = [\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k, \dots, \bar{f}_{nobj}] \quad (4.7)$$

Então, um coeficiente β_k é associado a cada nova função objetivo e o seguinte problema é proposto:

$$\min(\gamma) \quad (4.8)$$

onde

$$\gamma = \max(\beta_k \bar{f}_k), \quad k = 1, \dots, nobj \quad (4.9)$$

sujeita às restrições definidas na Eq. (4.2) e às seguintes restrições adicionais

$$\beta_k \bar{f}_k \leq \gamma \quad \text{para } k = 1, \dots, nobj \quad (4.10)$$

para vários conjuntos de vetores β , pois para cada vetor β diferente um novo subproblema de otimização é formulado e um novo ponto de Pareto é obtido. Como se pode observar, o valor utilizado para minimização é o máximo valor de $\beta_k \bar{f}_k$, $k = 1, \dots, nobj$ com a restrição que os outros componentes não ultrapassem este valor. Em geral, no ponto ótimo, os valores de $\beta_k \bar{f}_k$, $k = 1, \dots, nobj$, são iguais sendo este é o conceito principal do método.

4.3.3. Método da Interseção Contorno-Normal (NBI)

O método da *Interseção Contorno-Normal* ou *Normal-Boundary Intersection* (NBI) (DAS e DENNIS, 1996) é uma técnica criada para encontrar pontos eficientes (ou pontos NBI) do contorno do espaço viável gerado pelos vetores objetivos alcançáveis, $\{F(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in C\}$, C representando o conjunto viável, que possibilitem a construção de uma curva suave, de forma que o projetista possa definir em qual daqueles pontos será considerada a solução compromisso para o problema multiobjetivo. Quando os pontos eficientes estiverem sobre uma parte do contorno suficientemente convexa daquele espaço viável, esses são definidos como pontos de Pareto. Isto acontece para a grande maioria dos casos estudados na engenharia. Porém, se aqueles pontos estiverem na parte côncava do contorno, não há a garantia de que eles sejam pontos de Pareto. Apesar disso, esses pontos contribuem para que a curva Pareto seja definida.

Este método foi inovador com relação à obtenção dos pontos sobre a superfície Pareto, permitindo uma distribuição uniforme daqueles pontos até mesmo para um pequeno conjunto de vetores do parâmetro β , independentemente do número de funções objetivo. Este método difere daqueles descritos anteriormente por não ocorrer a transformação do vetor das funções objetivo em uma única função objetivo, através de uma combinação linear.

A ideia central do NBI é encontrar uma porção do contorno do denominado espaço das funções objetivo (DAS e DENNIS, 1996), o qual contém os pontos ótimos de Pareto. Tais pontos podem ser encontrados resolvendo-se um problema de otimização. No que se segue, apresentam-se, inicialmente, algumas terminologias específicas do método para em seguida detalharmos a metodologia.

Define-se \mathbf{F}^* como sendo o vetor do mínimo local das funções objetivo, denominado de *Ponto Utópico* (Shadow Minima ou Utopia Point) (DAS e DENNIS, 1996), representado por:

$$\mathbf{F}^* = \left[f_1^*, f_2^*, \dots, f_k^*, \dots, f_{nobj}^* \right]^T \quad (4.11)$$

onde cada f_i^* representa um mínimo local individual. Sendo o vetor \mathbf{x}_i^* a solução ótima de f_i , temos que $f_i^* = f_i(x_i^*)$. Define-se a *envoltória convexa do mínimo individual* (ECMI) como:

$$\left\{ \Phi \beta : \beta \in \mathfrak{R}^{nobj}, \sum_{i=1}^{nobj} \beta_i = 1, \beta_i \geq 0 \right\} \quad (4.12)$$

onde

$$\Phi_{i,j} = f_i(x_j^*) - f_i^*, \quad i = 1, \dots, nobj; \quad j = 1, \dots, nobj \quad (4.13)$$

é a matriz “pay-off” ($nobj \times nobj$) dos mínimos individuais transladados.

Assim, os pontos pertencentes a ECMI são definidos por um conjunto de pontos do \mathfrak{R}^{nobj} , que são definidos pelas combinações convexas de $\{\mathbf{F}(\mathbf{x}_i^*) - \mathbf{F}^*\}$, armazenados sob a forma de matriz, Φ , denominada de “pay-off” (DAS e DENNIS, 1996). Um exemplo da representação gráfica da ECMI é ilustrada na Figura 4.3. Nesta figura é considerado que na origem esteja o ponto de utopia \mathbf{F}^* e, dessa forma, todas as funções objetivos são não-negativas, isto é, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é substituída por $\bar{\mathbf{F}}$ que é definido da seguinte forma: $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}^*$.

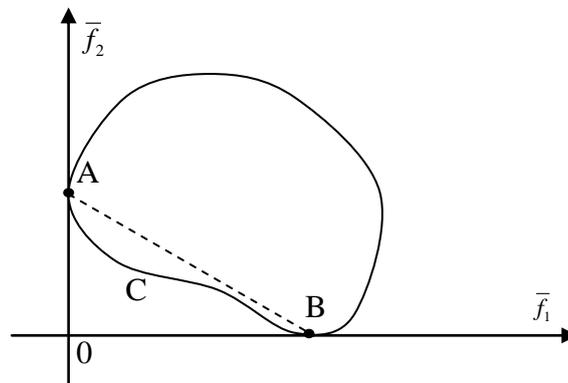


Figura 4.3. Representação gráfica da ECMI num espaço bidimensional.

Com esta redefinição, observa-se na Figura 4.3 que o ponto A é $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_1^*)$ e o ponto B é $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_2^*)$, a origem é o ponto Utópico \mathbf{F}^* , o segmento tracejado é a ECMI, enquanto que a curva ACB é a fronteira de Pareto no espaço das funções objetivo. O conjunto das funções objetivo no espaço viável $\{\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\}$ será denominado por f e o seu contorno por ∂f . A técnica NBI possui o objetivo de encontrar parte do contorno ∂f que contém os pontos ótimos de Pareto.

A ideia geométrica associada ao método é que tais pontos de Pareto são encontrados a partir da interseção da reta quase-normal à ECMI, apontada para a origem, e o contorno ∂f como ilustrado na

Figura 4.4. A reta quase-normal à ECMI é definida a partir do ponto médio da ECMI, i.e.

$$\hat{n}_i = \frac{1}{nobj} \sum_{j=1}^{nobj} \Phi_{i,j}.$$

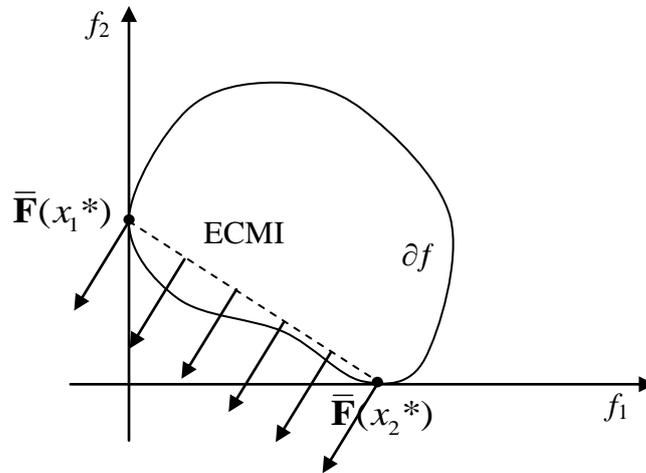


Figura 4.4. A imagem do conjunto viável sobre o mapeamento de f no espaço das funções objetivo.

Matematicamente, tais pontos podem ser encontrados resolvendo-se um problema de otimização descrito a seguir. Dados os parâmetros β , $\Phi\beta$ representa pontos sobre a ECMI. Seja \hat{n} o vetor unitário quase-normal à ECMI, como já mencionado, direção que liga o ponto médio da ECMI e o ponto Utópico F^* . Então, $\Phi\beta + t\hat{n}$, com $t \in \mathcal{R}$, representa o conjunto de pontos sobre \hat{n} , que formam uma reta quase-normal à ECMI. O subproblema original do NBI, encontra a interseção entre a reta quase-normal a ECMI, e o contorno que define o espaço $\{F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in C\}$, ∂f , mais próximo da origem resolvendo o seguinte problema de programação não-linear:

$$\max_{\mathbf{x}, t} t \quad (4.14)$$

sujeita às restrições definidas na Eq. (4.2) e à restrição adicional

$$\Phi\beta + t\hat{n} \geq \bar{F}(\mathbf{x}) \quad (4.15)$$

Neste trabalho foi utilizado uma modificação desta restrição proposta por (Motta et al, 2012a), na restrição original (DAS e DENNIS, 1996) o símbolo de desigualdade é substituída por um de igualdade.

Esta equação de restrição garante o mapeamento de \mathbf{x} por $\bar{F}(\mathbf{x})$ sobre a reta quase-normal. O problema apresentado nas Eq. (4.14), (4.2) e (4.15) passa a ser definido com um subproblema NBI,

representado por NBI_{β} , considerando que β seja o parâmetro que caracteriza o subproblema. Cada vetor parâmetro β , resultará em uma solução pretendente à Pareto. Resolvendo esse subproblema para um conjunto de parâmetros β , encontra-se um conjunto de pontos sobre ∂f , que poderão fornecer uma curva suavizada. Esses pontos serão pontos ótimos de Pareto caso estejam numa porção convexa do ∂f . Em caso contrário, eles poderão não ser ponto ótimo de Pareto. Em não sendo, poderão ser úteis na suavização da curva Pareto, além da garantia de que todo ∂f foi explorado (mesmo sendo não Pareto), o que não ocorre para os métodos descritos anteriormente. Para maiores detalhes, ver referências (DAS e DENNIS, 1996; MACEDO, 2002). Porém, problemas podem ocorrer caso ∂f não seja contínuo i.e., caso não exista região viável entre os mínimos individuais.

4.3.4. Método da Restrição Normal Normalizada (NNC)

O método da restrição normal normalizada (NNC) é o método da restrição normal (NC) onde as funções objetivo são normalizadas, foi introduzido por (MESSAC et al, 2003) e mostrou ser capaz de gerar uma propagação uniforme de pontos Pareto. O NNC trabalha de forma similar ao método da Interseção Contorno-Normal (NBI), (discutido anteriormente), e sua representação gráfica, tirada da referência (MESSAC et al, 2003), é mostrada na Figura 4.5.

No espaço das funções objetivo normalizadas (mesma normalização usada no método Min-Max), todos os pontos mínimos locais das funções objetivo, estão a uma unidade de distância do *Ponto Utópico*. E o *Ponto Utópico* está na origem – por definição.

Na Figura 4.5 nós observamos o espaço viável e a fronteira de Pareto correspondente. Nós também notamos os dois pontos de mínimo das funções objetivo que são obtidos pela minimização separada do primeiro e do segundo objetivo do projeto. Uma linha ligando os dois pontos é chamada de *Linha Utópica*, ela é equivalente à *envoltória convexa do mínimo individual* (ECMI) no método NBI. Ela é dividida em $m-1$ segmentos, resultando em m pontos.

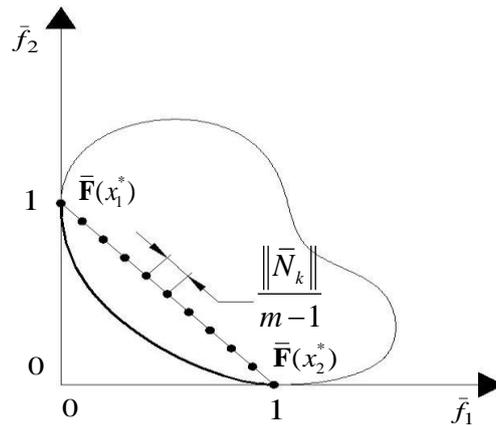


Figura 4.5. Um conjunto de pontos espaçados na linha Utópica para um problema bi-objetivo.

Na Figura 4.6 um ponto genérico $\bar{\mathbf{X}}$ pertencente à Linha Utópica é utilizado para definir uma reta normal (NU). Esta reta normal (NU) diminui a região viável, conforme indicado na figura. Como pode ser visto, minimizando-se \bar{f}^2 o resultado ótimo será o ponto \bar{f}^* . Transladando o ponto genérico $\bar{\mathbf{X}}$, pela *Linha Utópica*, podemos ver que um conjunto de Pontos Pareto correspondente será obtido.

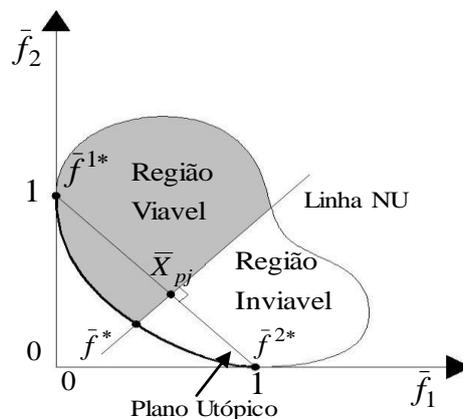


Figura 4.6. Representação gráfica do método da NC para um problema bi-objetivo.

No que se segue, a formulação matemática do Método da Restrição Normal Normalizada para a otimização multiobjetivo em geral é apresentada. O vetor \mathbf{x} define as variáveis de projeto e f_i ($\mathbf{f} \in R^n$) a i -ésima função objetivo. \mathbf{x}^* ($x_i^* \in R^{n_x}$) é o ponto ótimo da função f_i . Sendo $nobj$ o número de funções objetivo de um problema genérico, os vetores do Plano Utópico \bar{N}_k são definidos como a direção dos $\bar{\mathbf{F}}(x_k^*)$ até $\bar{\mathbf{F}}(x_{nobj}^*)$, para $k=1..nobj-1$, pela equação:

$$\bar{N}_k = \bar{\mathbf{F}}(x_{nobj}^*) - \bar{\mathbf{F}}(x_k^*), \quad k = 1, 2, \dots, nobj - 1 \quad (4.16)$$

Um conjunto de n_p pontos distribuídos no Plano Utópico é gerado da seguinte forma.

$$\bar{\mathbf{X}}_j = \sum_{k=1}^{nobj} \beta_{j,k} \bar{\mathbf{F}}(x_k^*), \quad j = 1, 2, \dots, n_p \quad (4.17)$$

onde

$$0 \leq \beta_{j,k} < 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{nobj} \beta_{j,k} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n_p \quad (4.18)$$

Agora nós geramos pontos distribuídos no espaço das funções objetivas normalizadas. Para cada ponto $\bar{\mathbf{X}}$ gerados anteriormente é obtido um Ponto Pareto correspondente, solucionando o problema abaixo:

$$\begin{aligned} &\text{Para } j = 1, 2, \dots, n_p \\ &\min_x \bar{f}_{nobj} \end{aligned} \quad (4.19)$$

sujeita às restrições definidas na Eq. (4.2) e às restrições adicionais:

$$\bar{N}_k (\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{X}}_j)^T \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.20)$$

4.3.5. Problemas Com Mais de Duas Funções Objetivo

Obter de forma eficiente, pontos de Pareto bem distribuídos sobre toda a fronteira de Pareto, em problemas de otimização com mais de duas funções objetivo, é um questão ainda em discussão (Messac and Mattson, 2004; Arora et al, 2007; Mueller-Gritschneider et al, 2009; Motta et al., 2012).

Em um problema qualquer de otimização multiobjetivo, todos os pontos de Pareto podem ser obtido pelo NBI, resolvendo um subproblema com um determinado vetor β associado, resolvendo o problema definido pelas Eqs. (4.14) e (4.15), e de forma semelhante pelo NC, através do problema definido pelas Eqs. (4.19) e (4.20). Porém no caso de problemas com mais de duas funções objetivo, os componentes do vetor β não são necessariamente não-nulos. Assim, os valores corretos dos coeficientes β para se obter pontos bem distribuídos sobre toda a fronteira de Pareto não são conhecidos. Os pontos inicialmente distribuídos na ECMI, definidos pela Eq. (4.12), os quais definem as otimizações dos subproblemas do NBI, devem ser distribuídos numa envoltória

total definida como $ECMI^+$ (DAS e DENNIS, 1996), não conhecidos a priori. Já pelo NC, dependendo da formulação do problema, utilizando as Eqs. (4.19) e (4.20) algumas regiões podem ser ignoradas independente dos valores de β utilizados.

Para corrigir este problema, Messac and Mattson (2004) recomendam uma modificação no método NC original, a fim de obter pontos sobre toda a superfície de Pareto em problemas com mais de dois objetivos. Esta modificação consiste em ampliar o Plano Utópico (Eq. (4.16)) de forma que este tenha projeção em todas as áreas da fronteira de Pareto. Porém, esta ampliação do Plano Utópico acarreta em procura por ótimos em áreas não Pareto do espaço das funções objetivo, tornando-o ineficiente (Motta et al., 2012).

A solução proposta (Motta et al., 2012) para encontrar toda a fronteira de Pareto de forma eficiente, consiste em definir inicialmente os contornos da fronteira de Pareto, e então obter a envoltória de mínimos individuais (ECMI) que inclui as regiões não convexas, chamada $ECMI^+$. Para isso é necessário resolver o problema multiobjetivo para cada subconjunto de funções objetivo e assim definir cada contorno da fronteira de Pareto.

Na Figura 4.7 vemos um exemplo de fronteira de Pareto de um problema de otimização com três funções objetivo, onde o contorno representa a $ECMI^+$. São apresentados também os pontos de Pareto encontrados para todos os subconjuntos (pares) de funções objetivo, marcados em preto. A partir destes pontos de Pareto são distribuídos os restantes dos pontos centrais, marcados de azul, chamados pontos interiores. Para a distribuição dos pontos interiores utilizamos um método de geração de amostras DoE (Design of Experiments) e um algoritmo baseado em CVT (Centroidal Voronoi Tessellation) (DU et al, 1999; GIUNTA et al, 2003).

Através de um procedimento iterativo utilizado para redistribuir os pontos iniciais, de tal forma que a distancia entre eles seja otimizada, chega-se a uma configuração de mínima energia chamada CVT. Nesta configuração os pontos estão distribuídos de forma que todos os pontos estejam posicionados no centro de massa dos seus respectivos polígonos de Voronoi. Assim, a cada iteração o algoritmo CVT, tece os polígonos de Voronoi e reposiciona os pontos nos respectivos centros de massa. Este procedimento é repetido até que a uniformidade dos pontos seja atendida ou caso não haja mudança significativa na posição dos pontos. Este método é conhecido como algoritmo de Lloyd (LLOYD, 1982). Diversos procedimentos para se obter um CVT são disponíveis na literatura, o utilizado neste trabalho se baseia em (Du et al, 1999).

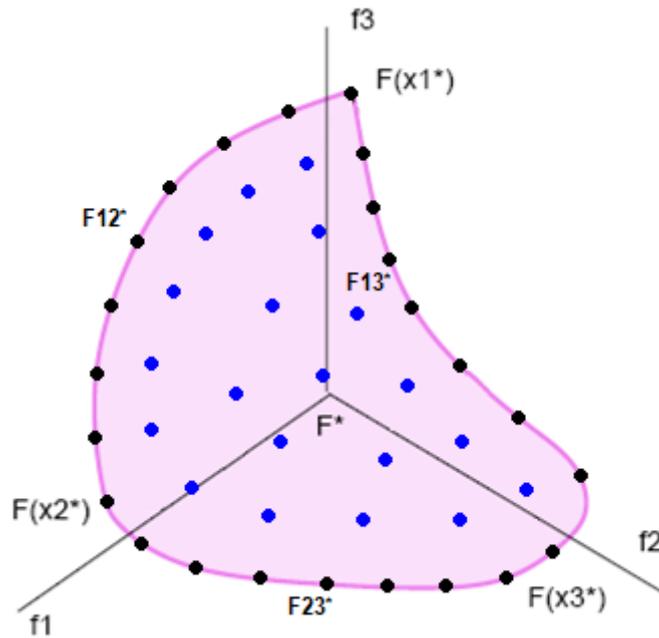


Figura 4.7. Problema com 3 funções objetivo – Distribuição dos pontos.

Para a utilização do algoritmo CVT na distribuição dos pontos interiores na $ECMI^+$, foi necessária uma adaptação do algoritmo original. Nesta adaptação os pontos pré-obtidos que formam a $ECMI^+$ são utilizados pela metodologia CVT, porém as suas posições são mantidas, além disso eles são utilizados para impedir que os restantes dos pontos saiam do domínio do $ECMI^+$. Depois de encontrados os pontos de Pareto que formam o contorno da fronteira total (pontos pretos na Figura 4.7), projetam-se estes pontos, no plano formado por $F(X1^*)$, $F(X2^*)$ e $F(X3^*)$, que forma a $ECMI$. Estes pontos projetados delimitam uma região a qual é utilizada para encontrar o restante dos pontos centrais. Os pontos que formam as curvas $F12^*$, $F23^*$ e $F13^*$ são considerados as soluções de Pareto dos subproblemas onde o coeficiente β da função desconsiderada é nulo. Será utilizado o NBI para se encontrar as curvas de Pareto do contorno da superfície de Pareto, bem como para as otimizações dos subproblemas relacionados aos pontos centrais, este procedimento é chamado NBI_m (MOTTA et al, 2012).

A Tabela 4.1 mostra o algoritmo básico para a obtenção dos pontos de Pareto sobre toda a fronteira de Pareto. Nos problemas de otimização deste trabalho, utilizamos otimizações auxiliares (subotimizações) adicionais para resolver possíveis casos de redundância de variáveis em otimizações de subproblemas onde algum objetivo é ignorado.

Tabela 4.1. Algoritmo geral da metodologia MO proposta.

<p>1. Loop sobre os objetivos (for 1 to $nobj$)</p> <p>1.1. Rodar otimização escalar dos objetivos individualmente;</p> <p>1.2. Rodar otimização auxiliar para evitar pontos de Pareto redundantes;</p> <p>Fim do loop</p> <p>2. Loop sobre as dimensões (for $dim = 2$ to $nobj$)</p> <p>2.1. Computar as n_{comb} combinações, Eq. (4.21);</p> <p>2.2. Loop sobre as combinações (for 1 to n_{comb})</p> <p>2.2.1. Atualizar informações da combinação;</p> <p>2.2.2. If ($dim \geq 3$)</p> <p>a. Projetar pontos de Pareto de contorno;</p> <p>b. Distribuir pontos interiores - CVT ;</p> <p>Fim do if</p> <p>2.2.3. Loop sobre os pontos interiores</p> <p>a. Rodar sub-otimização;</p> <p>b. Rodar otimização auxiliar (if $dim < nobj$);</p> <p>Fim do loop sobre os pontos interiores (sub-otimizações)</p> <p>Fim do loop sobre as combinações</p> <p>Fim do loop sobre as dimensões</p>

Na definição dos subconjuntos de objetivos para a definição dos contornos da ECMI⁺ são computadas todas as possíveis combinações dos objetivos para cada número de dimensão do problema. O número de combinações pode ser calculado como

$$n_{comb} = C_{dim}^{nobj} = \binom{nobj}{dim} = \frac{nobj!}{dim!(nobj - dim)!} \quad (4.21)$$

onde $nobj$ é o número total de dimensões (objetivos) do problema e dim é o número de dimensões (objetivos) dos subproblemas de otimização em questão, formando assim os coeficientes do binômio de Newton. Para mais detalhes, consulte (MOTTA et al, 2012a). Por exemplo, para um problema de otimização multiobjetivo com cinco funções objetivo ($nobj = 5$) a sequência das combinações dos objetivos, seria:

$$\text{Etapa 1.} \quad 5 - \text{Otimizações individuais: } C_1^5 = \binom{nobj}{dim} = \frac{5!}{1!4!}.$$

$$\text{Etapa 2.} \quad 10 - \text{Otimizações bi-objetivos: } C_2^5 = \frac{5!}{2!3!}.$$

$$\text{Etapa 3.} \quad 10 - \text{Otimizações com 3 objetivos: } C_3^5 = \frac{5!}{3!2!}.$$

$$\text{Etapa 4.} \quad 5 - \text{Otimizações com 4 objetivos: } C_4^5 = \frac{5!}{4!1!}.$$

$$\text{Etapa 5.} \quad 1 - \text{Otimização com 5 objetivos: } C_5^5 = \frac{5!}{5!}.$$

Os subproblemas de otimização são definidos pelo parâmetro β , de forma que na “Etapa i ” o número de coeficientes de β diferentes de zero é i . A última etapa (Etapa $nobj$) é referente às otimizações de pontos de Pareto interiores, onde todos os coeficientes de β são diferentes de zero, enquanto que todas as outras são para a obtenção de pontos do contorno da fronteira de Pareto. Vale salientar que o número total de otimizações realizadas é igual ao número de pontos de Pareto definido pelo usuário através dos parâmetros β , independente do número de objetivos. Os pontos de Pareto serão distribuídos entre estas diferentes etapas do procedimento geral. Porém, o número de pontos de Pareto necessários para cobrir satisfatoriamente a fronteira de Pareto aumenta com a dimensão ($nobj$) do problema. Em uma distribuição regular e uniforme dos parâmetros β (e consequentemente dos pontos de Pareto) pode-se desejar ao menos um ponto de Pareto interior, o qual seria definido por coeficientes iguais, $\beta_i = \frac{1}{nobj}$, $i = 1, \dots, nobj$. Por exemplo, para um problema com 3 objetivos, seriam necessários dez parâmetros β distribuídos uniformemente para se ter um ponto interior. Estes dez parâmetros β são apresentados na Tabela 4.2, não necessariamente nesta ordem.

Tabela 4.2. Dez coeficientes β com apenas um ponto interior para um problema com três objetivos.

Ponto de Pareto	β_1	β_2	β_3	Etapa	Obs.
1.	1	0	0	1	Otimização escalar
2.	0	1	0	1	Otimização escalar
3.	0	0	1	1	Otimização escalar
4.	2/3	1/3	0	2	Otimização biobjetivo
5.	1/3	2/3	0	2	Otimização biobjetivo
6.	2/3	0	1/3	2	Otimização biobjetivo
7.	1/3	0	2/3	2	Otimização biobjetivo
8.	0	1/3	2/3	2	Otimização biobjetivo
9.	0	2/3	1/3	2	Otimização biobjetivo
10.	1/3	1/3	1/3	3	Ponto interior

Assim, pode-se definir o número de pontos de Pareto em função do número de objetivos, utilizando uma distribuição uniforme e regular dos coeficientes β , com apenas um ponto interior, como mostrado na Tabela 4.3. Nota-se que com o aumento da dimensão do problema (*nobj*) o número de pontos de Pareto necessários para obter uma boa representação da fronteira de Pareto cresce rapidamente.

Tabela 4.3. Número de pontos de Pareto em função do número de objetivos, necessários para uma distribuição de pontos regular e uniforme com um ponto interior.

Número de funções objetivo	Número de pontos de Pareto
2	3
3	10
4	35
5	126
6	462
7	1716
8	6435

4.4. Otimização Baseada em Confiabilidade

A otimização baseada em confiabilidade (RBDO, Reliability-Based Design Optimization) é um problema de otimização onde as incertezas do problema são tratadas estatisticamente, permitindo avaliar corretamente o nível de segurança do projeto. Um parâmetro muito utilizado neste tipo de problema é o chamado índice de confiabilidade (β), ele é utilizado principalmente para o cálculo aproximado da probabilidade de falha. Considerando o espaço das variáveis aleatórias reduzidas, o índice de confiabilidade indica a distância do ponto de falha mais próximo (mais provável) ao centro da distribuição das probabilidades, detalhes de sua definição e obtenção foram tratados no item 3.2. Neste tipo de problema, alguma função associada à probabilidade de falha ou índice de confiabilidade está presente em sua formulação, geralmente em termos de restrição. Consequentemente, para avaliar tal restrição é necessário conduzir a análise de confiabilidade do problema.

Como exemplo de RBDO, podem ser consideradas restrições na otimização em termos da probabilidade de falha máxima, ou de índice de confiabilidade mínimo para um dado projeto. Outras possibilidades de formulação de RBDO consideram a confiabilidade como um objetivo, por exemplo, maximizar o índice de confiabilidade. Neste caso é comum chegar a problemas chamados Otimização Baseada em Confiabilidade Multiobjetiva (Multiobjective Reliability-Based Optimization) (DEB et al, 2009).

O problema de RBDO é aqui formulado como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar : } [f(\mathbf{x})] \\
 &g_i^r(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 &g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
 &h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, \ell \\
 &x_k^l \leq x_k \leq x_k^u \quad k = 1, \dots, ne
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $g_i^r(\mathbf{x})$ são as funções restrição relacionada à confiabilidade, por exemplo, probabilidade de falha máxima ou índice de confiabilidade mínimo.

Quando se utiliza o MC para o cálculo da probabilidade de falha e este possui um valor muito baixo, pode ocorrer que poucos pontos caiam na região de falha. Neste caso, a função $Pf_{MC}(x)$ se comporta como uma função discreta, tornando muito difícil sua utilização direta em um processo de

otimização que utilize a informação do gradiente. Mais detalhes sobre o uso do MC para otimizações com restrição de confiabilidade serão abordadas no que se segue.

4.4.1. Exemplo do uso do método MC para otimização com confiabilidade

Uma questão importante sobre a geração das amostras para o MC em um processo de otimização através de técnicas de programação matemática é a utilização de uma mesma semente (“seed”), para a geração das amostras para o cálculo via MC da probabilidade de falha durante todo o processo de otimização, para “suavizar” a resposta das estatísticas. O uso de tal recurso auxilia no processo de otimização, porém o problema de valores discretos continua. Sendo assim, o MC será utilizado apenas para a verificação de projetos ótimos. Para a utilização do MC em uma otimização com restrição de confiabilidade (Pf), são necessários métodos de otimização que lidam diretamente com as incertezas, como por exemplo os algoritmos heurísticos, os métodos de aproximação estocástica (“stochastic approximation methods”), entre outros (ANDRADÓTTIR, 1998; SCHUËLLER e JENSEN, 2008).

Para ilustrar a consequência do uso do MC no cálculo da Pf com amostras totalmente (semi-) aleatórias e com amostras de semente (“seed”) fixa, considere um problema adimensional de flambagem elástica em pilar biapoado de seção tubular de comprimento L , diâmetro interno D_i e espessura t . O pilar está submetido a uma força de compressão com valor 10. Utilizando a equação da carga crítica de flambagem de Euler a função de falha pode ser expressa como:

$$G(x, \mathbf{U}) = \frac{\pi^2 EI}{L^2} - 10 \quad (4.23)$$

onde

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4) \\ D_e &= D_i + 2t \\ \lambda &= \frac{D_e}{L} \\ E &= \frac{64}{\pi^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Neste problema duas variáveis aleatórias (U_1 e U_2) onde $U_1 \sim N(4,1)$ e $U_2 \sim N(4,1)$ e uma variável de projeto (x) são consideradas. As duas variáveis aleatórias são a espessura (t) e um

parâmetro associado à esbeltez ($\lambda = \text{relação diâmetro externo/comprimento}$), enquanto que a variável de projeto é o diâmetro interno do pilar (D_i), assim:

$$U_1 = t; \quad U_2 = \lambda; \quad x = D_i \quad (4.25)$$

Neste exemplo será utilizado o FORM para comparação com o resultado obtido via MC. A Figura 4.8 ilustra os resultados dos procedimentos de análise de confiabilidade utilizando o FORM e o MC com 10^3 pontos, para o projeto $x = 20$. Os pontos em azul são os pontos da amostra de MC na região viável e os pontos pretos são os pontos da amostra de MC na região de falha, a linha tracejada verde mostra a superfície de falha ($G = 0$). A trajetória em vermelho mostra os passos para a convergência do FORM.

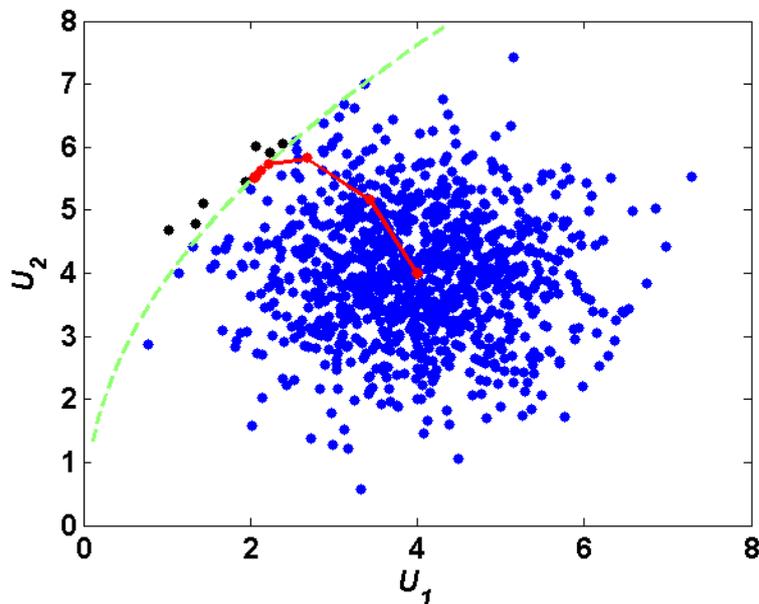


Figura 4.8. Exemplo de flambagem elástica de pilar: Procedimentos Monte Carlo e FORM.

Em seguida, foram calculadas aproximações da Pf para valores de x variando de 15 a 35 com incrementos de 0.1. Foram utilizados o FORM e o MC (com amostras de 1000 pontos), para os cálculos de Pf . Porém, duas estratégias diferentes para a construção das amostras do MC foram consideradas: mantendo a mesma amostra para todos os valores de x (semente fixa) e gerando uma nova amostra aleatória para cada valor de x (semente aleatória).

Na Figura 4.9 é apresentado o gráfico de Pf em função de x , calculada por três procedimentos diferentes:

1. Cálculo via MC utilizando uma amostra diferente para cada x (semente aleatória),

2. Cálculo via MC utilizando a mesma amostra (semente fixa) e

3. Cálculo via FORM.

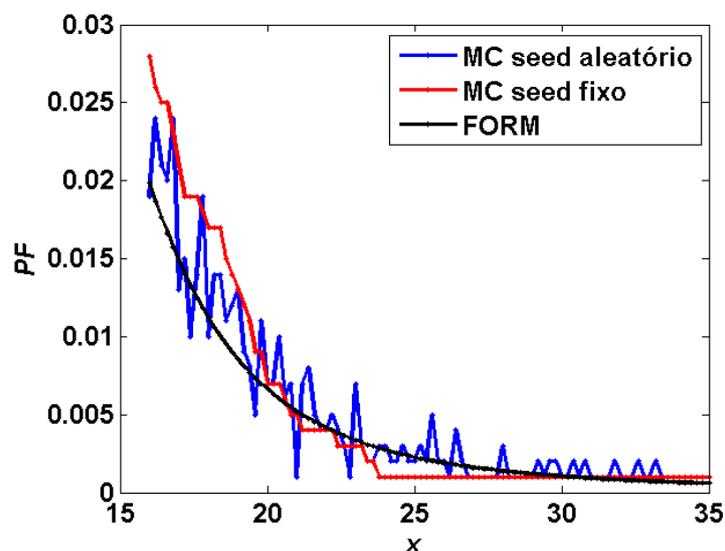


Figura 4.9. Exemplo de flambagem elástica de pilar: Probabilidade de falha via Monte Carlo e FORM.

Na Figura 4.9, nota-se claramente a dificuldade em considerar a função $Pf(x)$ via MC com amostras aleatórias (MC - semente aleatória) indicada em azul, em um processo de otimização. A função $Pf(x)$ via MC com o uso da mesma amostra (MC - semente fixa), apresenta pontos com gradiente indefinido porém é mais bem comportada, mas ainda assim, necessita de um procedimento específico para a otimização, pois o seu gradiente não pode ser obtido diretamente. Já com o uso do FORM para calcular a função $Pf(x)$ o gráfico apresenta uma curva mais suave e o gradiente pode ser obtido diretamente, como apresentado no item 3.2.2, Eq. (3.27).

4.4.2. Metodologias para otimização com confiabilidade

Todos os procedimentos para a obtenção de projetos ótimos confiáveis (RBDO) abordados neste trabalho são de duplo-laço. Um laço interno para a verificação das restrições de confiabilidade e um laço externo relacionado à atualização das variáveis de projeto. Existem duas metodologias básicas para verificar a confiabilidade de um projeto durante o processo de otimização RBDO: a abordagem via índice de confiabilidade (RIA, *Reliability Index Approach*) e a abordagem via medida de desempenho (PMA, *Performance Measure Approach*). Estas metodologias se diferenciam pela forma como verificam a confiabilidade de um projeto durante o processo de otimização, ambas utilizam um processo iterativo (laço interno), porém diferente.

(a) RIA (Reliability Index Approach) - Abordagem via índice de confiabilidade

Esta é a forma tradicional de solução de um problema RBDO através de métodos para a obtenção do índice de confiabilidade, como o FORM. O índice de confiabilidade é recalculado para cada novo projeto e comparado ao índice de confiabilidade alvo. Assim, processo iterativo do RIA é determinar o MPP, a solução (\mathbf{V}_{RIA}^*) do loop interno do RBDO via RIA é dado por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{V}} \{ \|\mathbf{V}\| \} \\ \text{sujeito à: } G(\mathbf{V}) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

esse problema pode ser resolvido pela metodologia do FORM já detalhada.

A restrição de confiabilidade do problema RBDO na RIA é

$$\beta_{tar} - \|\mathbf{V}_{RIA}^*\| < 0 \quad (4.27)$$

Em algumas aplicações, a maximização do índice de confiabilidade é utilizada como objetivo, nestes casos a RIA é mais indicada.

Nos exemplos tratados aqui, quando a variação da variável de projeto for pequena (< 10%) o FORM inicia a partir do MPP anteriormente encontrado. Assim, quando o ponto de projeto está próximo do ótimo o índice de confiabilidade é calculado de forma mais rápida. O gradiente do índice de confiabilidade em relação às variáveis de projeto para a otimização via RIA (DITLEVSEN e MADSEN, 2007) é dado por

$$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{dG_U}{dx} \frac{1}{\|\nabla G_V(\mathbf{V}^*)\|} \quad (4.28)$$

(b) PMA (Performance Measure Approach) Abordagem via medida de desempenho

Na PMA não é necessário o cálculo do índice de confiabilidade durante o processo de otimização. A PMA avalia se o índice de confiabilidade do projeto está maior ou menor do que o valor pretendido β_{tar} , porém o índice de confiabilidade não é calculado diretamente. É apenas utilizado o valor máximo da função de falha, na região de probabilidade definida pelo índice de confiabilidade alvo (β_{tar}). Caso esse valor máximo, seja menor que zero (não tenha falhado), o projeto atende às especificações do projeto. A PMA é dita mais eficiente que a RIA principalmente

em problemas "muito viáveis" ou "muito inviáveis", i.e. quando $\beta \gg \beta_{tar}$ ou $\beta < 0$ (YOUN et al, 2003; YOUN et al, 2004; DEB et al 2009; VALDEBENITO et al, 2010; PAIVA et al, 2014).

No processo iterativo da PMA o ponto ótimo é definido como o ponto na superfície de uma esfera (esfera de dimensão $n = nva$) de raio β_{tar} ($\|\mathbf{V}\| = \beta_{tar}$) no espaço reduzido, que possui o maior valor da função de falha (pior caso). Assim, a solução (\mathbf{V}_{PMA}^*) do loop interno do RBDO (obter MPP) via PMA é encontrado resolvendo

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{V}} \{G(\mathbf{V})\} \\ \text{sujeito à: } \|\mathbf{V}\| = \beta_{alvo} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Esse problema pode ser resolvido pela metodologia AMV (Advanced mean-value) (YOUN et al, 2004). Este método pode ser instável para problemas com funções de falha côncavas, porém isto não foi verificado nos problemas aqui tratados.

O valor da função de falha no ponto ótimo encontrado é a restrição de confiabilidade do RBDO associada à PMA tal como segue

$$G(\mathbf{V}_{PMA}^*) \leq 0 \quad (4.30)$$

A Figura 4.10 ilustra a avaliação da restrição de confiabilidade via RIA e PMA num espaço reduzido (\mathbf{V}) para um problema geral com duas variáveis aleatórias. Na figura, as linhas tracejadas são os objetivos ($\|\mathbf{V}\|$ e $G(\mathbf{V})$) e as linhas cheias as restrições ($G(\mathbf{V}) = 0$ e $\|\mathbf{V}\| = \beta_{tar}$) da RIA e da PMA, respectivamente. Neste caso genérico, a restrição de confiabilidade é satisfeita $\beta > \beta_{tar}$ e $G(\mathbf{V}_{PMA}^*) < 0$. Note que quando a restrição de confiabilidade está ativa $\beta = \beta_{tar}$, ambas abordagens se equivalem, ($\mathbf{V}_{RIA}^* = \mathbf{V}_{PMA}^*$) e $G(\mathbf{V}_{PMA}^*) = 0$.

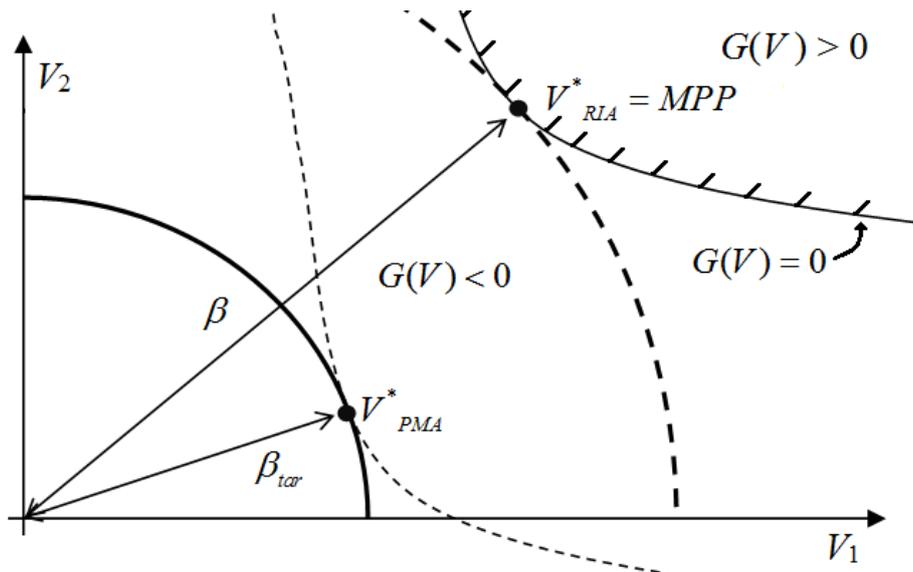


Figura 4.10. Avaliação da restrição de confiabilidade via RIA e PMA.

4.5. Otimização Robusta

Nesta seção, serão examinadas algumas abordagens para a consideração das incertezas no processo de otimização e assim obter projetos robustos. Isto contrasta com as abordagens que utilizam o fator de segurança, nos quais os parâmetros incertos não são explicitamente incorporados na formulação do projeto.

4.5.1. Medidas de Robustez

Considere um processo de otimização com incertezas, onde a função de interesse é $f(\mathbf{x}, \xi)$, onde $\mathbf{x} \in R^{ne}$ são as variáveis de projeto e $\xi \in \mathcal{E}$ as variáveis incertas, onde \mathcal{E} é o espaço amostral das variáveis aleatórias. Um objetivo robusto e utópico seria encontrar um \mathbf{x}^* , de tal forma que para todo $\xi \in \mathcal{E}$

$$f(\mathbf{x}^*, \xi) \leq f(\mathbf{x}, \xi) \quad \forall \mathbf{x} \in R^{ne} \quad (4.31)$$

Achar tal \mathbf{x}^* que simultaneamente minimize $f(\mathbf{x}, \xi)$, para todos os $\xi \in \mathcal{E}$, é o problema central da teoria da decisão estatística (KEANE e NAIR, 2005 Apud PRATT et al, 1996; BARROS, 2009). Porém, esta condição não pode ser atingida na maioria dos problemas, pois o ponto ótimo varia com a variável aleatória, sendo necessário definir alguma medida de robustez que viabilize o problema.

Várias abordagens são usadas neste contexto (BEYER e SENDHOFF, 2007), muitas consideram uma combinação linear da média e do desvio padrão da função de interesse.

Neste trabalho serão utilizados estes dois controles principais do objetivo independentemente. Otimizando a média encontra-se um ótimo menos conservador, pois pode existir uma probabilidade razoável do desempenho ser pior (ou melhor) que o valor encontrado. Por outro lado, quando um processo de otimização é realizado sobre o desvio padrão, se está sendo conservativo, e encontra-se o ponto onde há a menor variação da função de interesse, sendo esta uma das principais medidas de robustez. Esta consideração tem sido adotada em várias referências no contexto da otimização robusta (DOLTSINIS e KANG, 2004; BEYER e SENDHOFF, 2007; SCHUËLLER e JENSEN, 2008).

Assim como no item 4.4.1 a utilização do MC para o cálculo das estatísticas (por exemplo, \bar{f}) durante a otimização considerando amostras totalmente aleatórias (com semente livre), gera um ruído devido a um erro aleatório $O(1/\sqrt{m})$, tornando a função aproximada (\bar{f}_{MC}) dificilmente diferenciável. Em um processo de otimização matemático, esta oscilação torna difícil (ou até mesmo impossível) a convergência de métodos que iterativamente aproximam gradientes ($\nabla\bar{f}$) ou hessianas ($\nabla^2\bar{f}$). Para superar esta adversidade, pode-se utilizar uma mesma semente, para a geração de amostras para os cálculos via MC durante todo o processo de otimização, do mesmo modo como mostrado anteriormente. Assim, é obtido uma função aproximada (\bar{f}_{MC}) tão suave quanto a função que está sendo integrada, f . Caso contrário, são necessários outros métodos de otimização que lidam diretamente com as incertezas, é o caso de métodos de otimização estocástica, métodos de aproximação estocástica (“stochastic approximation methods”), algoritmos heurísticos, entre outros (ANDRADÓTTIR, 1998; SCHUËLLER e JENSEN, 2008). Um estudo que ilustra tal situação apontada pode ser visto na referencia (MOTTA, 2009).

4.5.2. Formulação do Problema

Quando se usa como medidas de robustez a esperança e a variância da função de interesse simultaneamente, a busca por um projeto robusto ótimo surge como um problema de otimização multiobjetivo, para se encontrar soluções intermediárias de interesse, este problema pode então ser chamado de otimização multiobjetivo robusta (Robust Multiobjective Optimization - RMO). O problema de RMO pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar : } [E(f(\mathbf{x}, \mathbf{U})), \quad SD(f(\mathbf{x}, \mathbf{U}))] \\
& g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, \ell \\
& x_k^l \leq x_k \leq x_k^u \quad k = 1, \dots, ne
\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde $E(\cdot)$ é a esperança, $SD(\cdot)$ o desvio padrão, $f(\cdot)$ é a função de interesse, \mathbf{x} o vetor das variáveis de projeto e \mathbf{U} são as variáveis aleatórias. Para a solução deste problema, as técnicas de MO apresentadas na seção 4.3 serão utilizadas.

4.6. Implementação Computacional RBRDO

A combinação dos métodos descritos anteriormente para resolver os problemas RBRDO é constituído por uma fase off-line para calcular os dados do POD e um procedimento em dois laços na fase on-line para obter as soluções de Pareto. Um laço interno é necessário para realizar a análise estatística (utilizando PCM) em que as avaliações de função são computadas via POD. Além disso, um procedimento iterativo é realizado na análise da confiabilidade. O loop principal (externo) é o procedimento de otimização em que a busca pelas variáveis do projeto ótimo é realizado. A Figura 4.11 mostra o fluxograma macro da execução do procedimento computacional RBRDO proposto.

As informações detalhadas da execução computacional do procedimento geral são apresentadas no algoritmo da Tabela 4.4.

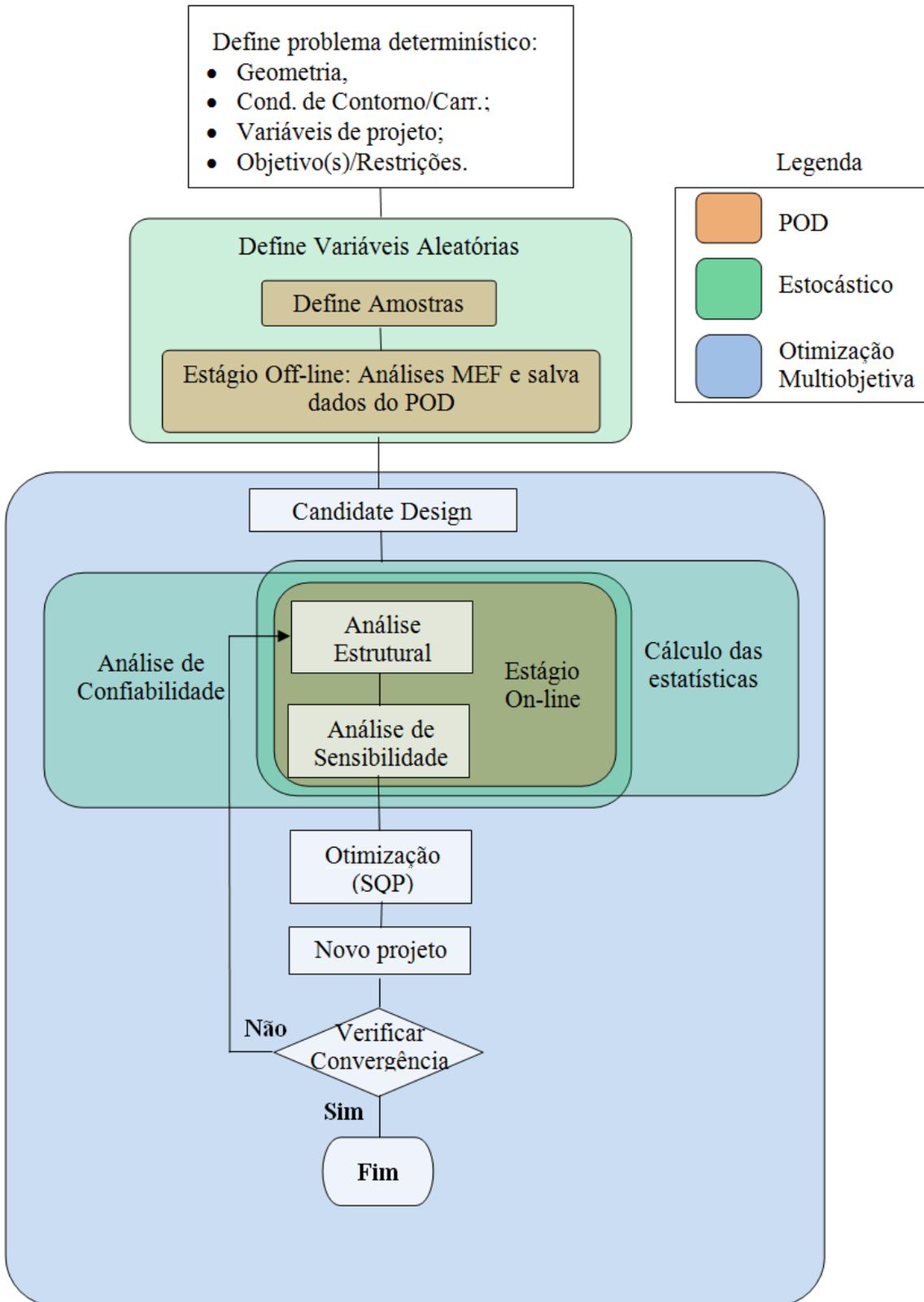


Figura 4.11. Fluxograma geral do processo RBRDO integrado.

Tabela 4.4. Algoritmo geral para a solução do problema RBRDO utilizando POD: Implementação computacional.

<p>Estagio Off-Line (executado apenas uma vez):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Define-se o problema: <ul style="list-style-type: none"> • Geometria, • Condições de contorno e carregamento, • Variáveis de projeto, • Objetivo(s) e Restrição (ões); 2. Define-se as variáveis aleatórias; 3. Define-se as amostras usando as técnicas de DoE considerando o espaço das variáveis de projeto e aleatórias; <ol style="list-style-type: none"> 3.1. Obtém-se as soluções dos pontos amostrados (análises determinísticas); 4. Resolve-se a análise de SVD e obter componentes da base reduzida do POD (Eq. 2.66) 5. Salva-se dados da base \mathbf{Z} do POD em um arquivo;
<p>Estagio On-line: onde ocorre o procedimento de otimização;</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Laço da Otimização Multiobjetiva (estratégias MO) <ol style="list-style-type: none"> 1.1 Procura-se por ótimo Pareto (otimização escalar); <ol style="list-style-type: none"> 1.1.1. Define-se um novo projeto; 1.1.2. Laço para o cálculo das estatísticas (análise estocástica via PCM); <ol style="list-style-type: none"> i. Análise estrutural via POD; ii. Análise de Sensibilidade com relação às DV* via POD; 1.1.3. Obtém-se estatísticas das respostas e seus gradientes via PCM; 1.1.4. Procedimento de análise de confiabilidade (RIA ou PMA); <ol style="list-style-type: none"> i. Análise estrutural via POD; ii. Análise de Sensibilidade com relação às RV* via POD; 1.1.5. Obtém-se valores das restrições de confiabilidade; 1.1.6. Verifica-se convergência 1.2 Salva-se ponto ótimo Pareto

* DV = variáveis de projeto; RV = variável aleatória.

Observações do algoritmo (Tabela 4.4):

- a) O projeto inicial da otimização escalar (1.1.1) é escolhido a partir de uma das soluções de Pareto previamente encontradas (se houver);
- b) O método para otimização escalar usado neste trabalho foi o SQP (Sequential Quadratic Programming) presente no toolbox de otimização do MATLAB, versão “active-set” (MathWorks, 1012);
- c) O processo de otimização multiobjetivo segue o procedimento descrito no item 4.3.5, onde otimizações auxiliares (subotimizações) são realizadas após cada otimização onde pelo menos um dos objetivos não é levado em consideração. Em caso de problemas bi-objetivos, estas subotimizações são executadas após as otimizações individuais (escalares), (Motta et al, 2012).

5. Exemplos

A ferramenta desenvolvida neste trabalho é usada nesta seção para obter projetos ótimos, confiáveis, com redução na variabilidade do desempenho estrutural. O primeiro exemplo é um problema de otimização robusta de uma treliça 3D linear estudada na literatura aqui considerada, para validar a implementação. Em seguida, o mesmo problema é tratado como um problema RBRDO para comparar as duas abordagens. No segundo exemplo, antes de apresentar os resultados RBRDO, os estudos de seleção de amostragem são realizadas para a definição da aproximação da análise e para o cálculo das estatísticas. No primeiro, a amostragem para a construção da aproximação do modelo reduzido tem de ser determinado, nesta etapa o modelo de alta fidelidade (MEF) é utilizado. Para tal, um estudo de precisão da análise via POD variando o número de amostras (N) é realizado. No segundo cenário, o tamanho da amostra para o cálculo das estatísticas requeridas tem de ser obtido, nesta etapa o modelo substituto (POD) é usado. Mais uma vez, a fim de proporcionar estatísticas precisas um estudo sobre a convergência para as amostras tanto do MC quanto do PCM é realizado. Por fim será solucionado um problema RBRDO, no qual a análise estrutural será realizada através do programa HYPLAS, considerando grandes deformações e material elasto-plástico. Para este caso a definição dos parâmetros para a análise aproximada via o modelo reduzido utilizando o POD foi mostrada no item 2.6. A análise de sensibilidade dos exemplos de treliça foram feitos pelo método direto analítico, para o exemplo utilizando o HYPLAS foi utilizado o método das diferenças finitas.

5.1. Problema Benchmark - Treliça 3D

Neste problema adimensional, proposto em (DOLTSINIS e KANG, 2004), uma otimização robusta considerando a energia de deformação de uma estrutura de treliça de 25 barras (Figura 5.1) é realizada. As variáveis de projeto são áreas transversais de seis conjuntos de barras. As seis variáveis de projeto independentes são as selecionados, ligando vários tamanhos de membros como mostrado na Figura 5.1. A densidade de massa do material é de 0,1. Todos os quatro nós da base

são fixos nos três graus de liberdade. Quatro forças nodais com valores $P_{Ay} = P_{By} = P_{Ax} = P_{Bx} = -10^4$ são impostas no primeiro e segundo nós (A e B) da Figura 5.1. Além disso, forças são aplicadas com valores aleatórios aos nós C e D da Figura 5.1 na direção horizontal (eixo x). A referência (DOLTSINIS e KANG, 2004) considera 14 variáveis aleatórias da seguinte forma: as duas forças nodais aplicadas nos nós C e D, os seis módulos de Young e as seis áreas transversais para as barras agrupadas conforme indicado na Figura 5.1. Os valores nominais das seis seções transversais são as variáveis de projeto (valor da média). Para cada variável aleatória (VA) suas estatísticas: média, desvio padrão (SD) e coeficiente de variação (COV), são apresentadas na Tabela 5.1. Embora não diretamente indicados no documento original, aqui, distribuições de probabilidade log-normal foram usadas para todas as variáveis aleatórias, exceto as cargas (VA 7 e 8), para as quais foram adotadas distribuições normais. Devido ao pequeno número de graus de liberdade da estrutura (DoF = 18), as soluções deste problema basearam-se em análises conduzidas via MEF, sem o uso de modelos reduzidos.

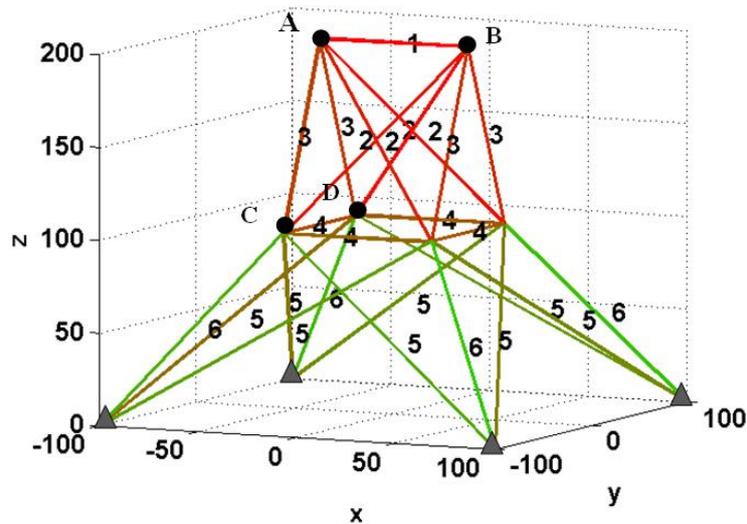


Figura 5.1. Definição da estrutura - exemplo treliça 3D.

Tabela 5.1. Distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias.

Número	VA	Média	Desvio Padrão	Covariância
1-5	$E_I - E_V$	10^7	2×10^5	-
6	E_{VI}	10^7	15×10^5	-
7, 8	P_{Cx}, P_{Dx}	500	50	-
9-14	$A_I - A_{VI}$	$x_I - x_{VI}$	-	0.05

Um procedimento para avaliar a importância de cada variável aleatória foi realizado (MOTTA et al, 2015). Com o valor de importância relativa de cada variável aleatória em mãos, as mais irrelevantes foram consideradas como determinísticas e, como consequência, o número de variáveis aleatórias foi reduzido. No procedimento para quantificar a variação de uma função de interesse, devido a uma determinada variabilidade de uma variável aleatória em um projeto específico, uma análise de sensibilidade das funções objetivo (média e desvio padrão da energia de deformação) com relação às variáveis aleatórias foi realizada. Os gradientes obtidos foram então multiplicados pelos respectivos desvios padrões das variáveis aleatórias para obter a variação da função de interesse. As variações foram normalizadas para se obter o fator de importância (*ImpF*) relativa de cada variável aleatória com relação as funções de interesse, da seguinte forma:

$$ImpF_{k,i} = \frac{\Delta f_{k,i}}{f_k}, \Delta f_{k,i} = \frac{df_k}{dU_i} SD_{U_i}$$

O resultado de fator de importância (*ImpF*) para cada variável aleatória (Tabela 5.1) é mostrado na Figura 5.2. Através deste foi feito um conjunto de aproximações da média e do desvio padrão (SD) da energia de deformação foram avaliadas considerando diferentes grupos de variáveis aleatórias e métodos para o cálculo das estatísticas, os resultados são mostrados na Tabela 5.2.

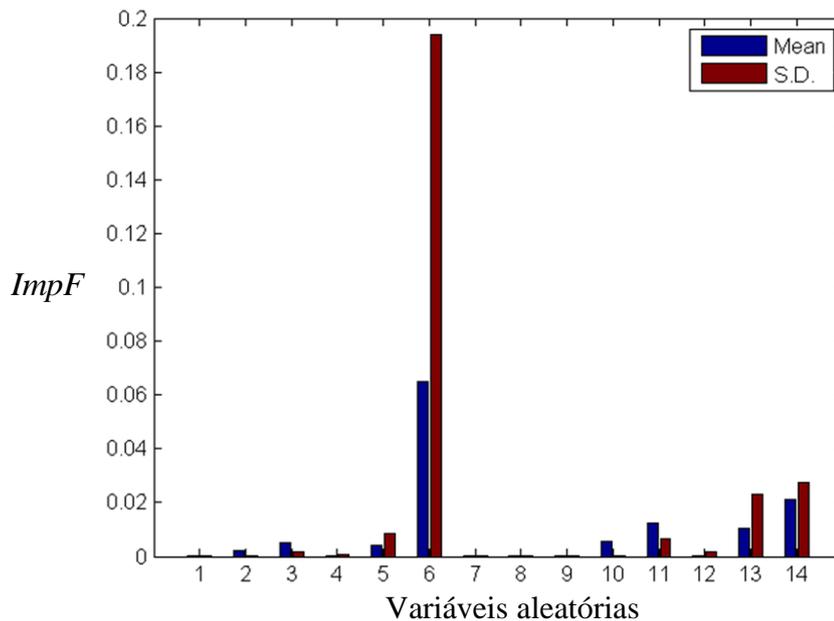


Figura 5.2. Fator de importância das variáveis aleatórias, Tabela 5.2.

Nesta tabela foi considerado o projeto relacionado com o ponto inicial, são apresentadas as variáveis aleatórias consideradas, o método, o número de avaliações de função e os respectivos

resultados. Os resultados estão em aceitável concordância com os apresentados na literatura (DOLTSINIS e KANG, 2004). O resultado apresentado para o caso 13 será considerado como exato para os nossos objetivos. Como pode ser visto o caso 6 com apenas quatro (de quatorze) variáveis aleatórias, pode alcançar um erro de apenas 1% no cálculo do SD da energia de deformação, utilizando apenas 81 pontos (PCM) de integração contra 5×10^5 via MC. Por conseguinte, este foi o caso escolhido para realizar o estudo de otimização robusta da próxima seção. As variáveis aleatórias consideradas foram apenas o conjunto [6, 11, 13, 14] conforme caso 6, Tabela 5.2.

Tabela 5.2. Treliça 3D: Cálculo das estatísticas com diferentes variáveis aleatórias e métodos.

Casos	Variáveis aleatórias	Método	Avaliações de Função	Media ($\times 10^3$)	SD ($\times 10^3$)
0	-	Determinístico	1	7.7024	-
1	14	PCM – 3	3	7.7085	0.1659
2	6	PCM – 3	3	7.7595	0.5204
3	6,14	PCM – 3	9	7.7656	0.5466
4	6,14,13	PCM – 3	27	7.7678	0.5533
5	6,14,13,5	PCM – 3	81	7.7681	0.5543
6	6,14,13,11	PCM – 3	81	7.7709	0.5612
7	6,14,13,11	PCM – 5	625	7.7710	0.5625
8	6,14,13,11	MC – $5e3$	5,000	7.7711	0.5651
9	6,14,13,11,5	PCM – 3	243	7.7712	0.5623
10	6,14,13,11,5	MC – $5e3$	5,000	7.7714	0.5637
11	01-14	MC – $5e3$	5,000	7.7722	0.5713
12	01-14	MC – $5e4$	50,000	7.7729	0.5667
13	01-14	MC – $5e5$	500,000	7.7730	0.5670
Artigo*	01-14	MC – $3e3$	3,000	7.763	0.557

* Resultados do artigo (DOLTSINIS e KANG, 2004)

No que segue, a estrutura será considerada para uma otimização robusta formulado segundo a literatura, com o objetivo de validação da implementação computacional, neste caso, a restrição de tensão é definida em termos das suas estatísticas. Em seguida, será realizado um estudo de otimização robusta baseada em confiabilidade (RBRDO) utilizando a metodologia PMA.

5.1.1. Otimização Robusta

Na formulação RO a função objetivo de interesse é a energia de deformação total ($C = \mathbf{F}^T \mathbf{u}$) as restrições consideradas foram as tensões (σ) em cada barra (como uma restrição do tipo confiabilidade), o peso médio da estrutura ($E(w)$) e os limites das variáveis de projeto (x). O problema de otimização é, então, declarado como se segue:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}} [E(C(\mathbf{x}, \mathbf{U})), SD(C(\mathbf{x}, \mathbf{U}))] \\ & \text{sujeita à :} \\ & E(\sigma_i) + 3SD(\sigma_i) \leq 5000 \quad i = 1, 2, \dots, 25 \\ & E(w(\mathbf{x}, \mathbf{U})) \leq 750 \\ & 0.05 \leq x_k \leq 10 \quad k = 1, \dots, 6 \end{aligned} \tag{5.1}$$

As restrições de tensão no problema original (DOLTSINIS e KANG, 2004), são definidas como $E(|\sigma_i|) + 3SD_{\sigma_i} \leq 5000$. Porém, a fim de permitir as soluções obtidas por (DOLTSINIS e KANG, 2004), as restrições de tensão devem ser modificadas (algumas das soluções ótimas apresentadas não são viáveis, devido a uma tensão elevada em uma das barra horizontais do nó C). Levando em conta esta constatação, nós suspeitamos fortemente que a restrição considerada deve ser $E(\sigma_i) + 3SD_{\sigma_i} \leq 5000$, note que as tensões negativas (compressão) são praticamente sempre viáveis. O problema de otimização robusta multiobjetivo foi resolvido em (DOLTSINIS e KANG, 2004) via o método da soma ponderada e para a análise numérica estatística o método dos elementos finitos estocásticos baseados em perturbação (“perturbation based stochastic finite element method”) foi usado (DOLTSINIS e KANG, 2004).

As soluções de otimização robusta multiobjetivo obtidas para esse problema, usando PCM em conjunto com as diversas técnicas multiobjetivo explicadas neste documento, são apresentados na Figura 5.3. O desempenho das diferentes técnicas para a solução do problema de MO são apresentados na Tabela 5.3, na qual o tempo de CPU, o número de avaliações de função e o parâmetro de uniformidade associada a cada técnica são mostrados. Cada avaliação de função considera uma análise estatística, que por sua vez leva à várias análises estruturais (MEF) e de sensibilidade. O número de análises estruturais e de sensibilidade não foi armazenado, mas pode-se calculá-lo como 81x“avaliações de função”. O parâmetro de uniformidade “evenness”, que aparece na Tabela 5.3, quantifica a uniformidade da distribuição de pontos, quanto mais próximo de zero melhor, para mais detalhes (MESSAC e MATTSON, 2004).

Como pode ser observado, os resultados obtidos por NBI MO e NNC concordam uns aos outros e estes dois métodos obtiveram a distribuição de pontos de Pareto com melhor uniformidade (menor valor de “evenness”). Além disso, pelo menos uma solução obtida através dos métodos WS e Min Max não foram Pareto ótimo (otimização não convergiu).

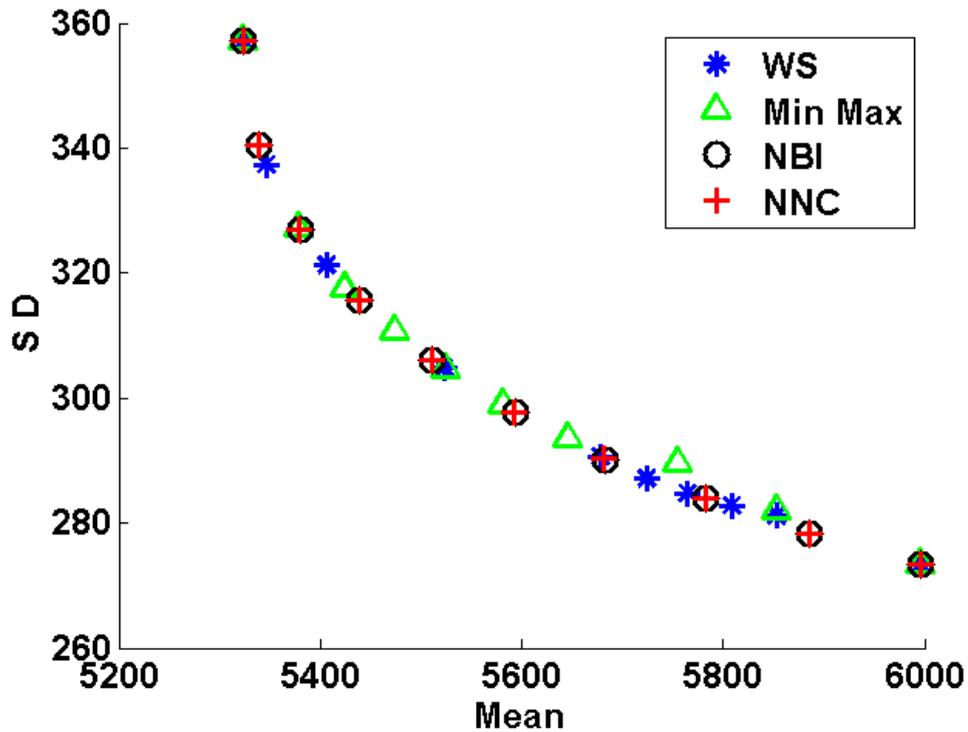


Figura 5.3. Treliça 3D: Soluções de Pareto do problema de otimização robusta (RO).

Tabela 5.3. Treliça 3D: Desempenhos das otimizações multiobjetivo (MO).

Método	Tempo (s)	Avaliações de função	Evenness
WS	20.9	918	0.572
MinMax	8.8	488	0.482
NBI	13.8	566	0.311
NNC	11.3	516	0.311

A Tabela 5.4 apresenta os projetos ótimos (x_1, x_2, \dots, x_6) para os dez pontos de Pareto, obtidas através da técnica NBI. As soluções P1 e P10 são os ótimos individuais (escalares) do desvio padrão e da média da energia de deformação, respectivamente. As soluções “P* (SD)” e “P* (Média)” são os ótimos do desvio padrão e da média da energia de deformação, respectivamente, fornecidos pela literatura (DOLTSINIS e KANG, 2004). Nota-se que a melhoria na variabilidade

estrutural (no SD da energia de deformação) foi maior que 20% quando se compara os projetos ótimos das soluções individuais.

As colunas $E(C)$ e $SD(C)$ são os valores dos objetivos calculados considerando o método utilizado no processo de otimização. No caso de os resultados da literatura (“P* (SD)” e “P* (Média)”), como já mencionado, é considerado o método dos elementos finitos estocásticos baseado em perturbação (“perturbation based stochastic finite element method”). No caso do trabalho atual (linhas restantes da Tabela 5.4), o PCM foi usado.

Os respectivos valores para as funções objetivo (média e SD) foram recalculados através do método MC para os doze projetos apresentados na Tabela 5.4. Os resultados que aparecem nas colunas $E(C)_{MC}$ e $SD(C)_{MC}$, são os valores dos objetivos calculados através do MC com 3×10^3 e 5×10^4 pontos quando a literatura e o trabalho atual são considerados, respectivamente. Os resultados para o MC com 3×10^3 pontos não era estável o suficiente, então 5×10^4 pontos de MC foram utilizados neste trabalho, para fins de verificação.

Tabela 5.4. Soluções de Pareto via diferentes métodos MO – Exemplo treliça 3D.

Soluções #	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$E(C)$	$SD(C)$	$E(C)_{MC}$	$SD(C)_{MC}$
P* (SD)	0.147	0.672	3.465	0.566	0.822	8.048	6196	276	6184	287
P1 (SD)	0.145	0.742	3.567	0.378	1.184	7.023	5997	273	6136	296
P2	0.125	0.652	3.894	0.409	1.192	6.811	5886	278	5957	297
P3	0.05	0.05	4.417	0.606	1.212	6.829	5782	284	5832	301
P4	0.05	0.05	4.803	0.640	1.149	6.672	5682	290	5720	308
P5	0.05	0.05	4.835	0.762	1.141	6.598	5593	298	5622	316
P6	0.05	0.05	4.903	0.921	1.111	6.536	5510	306	5531	325
P7	0.05	0.05	5.001	1.119	1.072	6.453	5438	316	5450	336
P8	0.05	0.05	5.18	1.325	1.034	6.298	5380	327	5387	348
P9	0.05	0.05	5.434	1.459	1.044	5.992	5340	340	5344	363
P10 (Média)	0.05	0.05	5.678	1.659	1.045	5.679	5324	357	5328	380
P* (Média)	0.05	0.05	5.74	1.72	1.05	5.574	5328	357	5322	377

* Resultado da referência (Doltsinis and Kang, 2004).

5.1.2. Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade

O exemplo anteriormente estudado é nesta seção resolvido considerando a restrição da tensão calculada através da análise de confiabilidade, transformando-o em um problema de otimização robusta baseada em confiabilidade (RBRDO) clássico. Este problema é formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x} \in R^{1 \times 6}} [E(C(\mathbf{x}, \mathbf{U})), SD(C(\mathbf{x}, \mathbf{U}))] \\
 & \text{sujeita à:} \\
 & \beta(G_i) \geq 3, \quad i = 1, 2, \dots, 25 \\
 & G_i = \sigma_i - 5000, \quad i = 1, 2, \dots, 25 \\
 & E(w(\mathbf{x}, \mathbf{U})) \leq 750 \\
 & 0.05 \leq x_k \leq 10 \quad k = 1, \dots, 6
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

no qual $\beta(G_i)$ é o índice de confiabilidade da função de falha G_i relacionada à tensão no elemento i . O problema foi resolvido do mesmo modo que o problema formulado anteriormente, mas considerando-se as restrições de confiabilidade. As tensões em cada barra definem uma restrição de confiabilidade diferente, as quais foram consideradas como restrições individuais. O modo mais apropriado de lidar com várias restrições de confiabilidade seria considerar a probabilidade conjunta, porém, por simplicidade, elas foram consideradas individualmente. O elevado número de restrições de confiabilidade pode tornar o processo de otimização difícil de lidar, porém muitas destas podem ser desconsideradas, pois estão longe da superfície de falha (são sempre viáveis) ou são redundantes. Então, as estatísticas das respostas requeridas para a avaliação da função objetivo foram usadas para aproximar a restrição de confiabilidade, tal como a abordagem anterior (RDO). Os índices de confiabilidade para as respostas relacionadas à restrição de confiabilidade foram aproximados por $(\hat{\beta}_i)$, utilizando seus momentos estatísticos e considerando a pdf mais adequada. Este é um procedimento equivalente ao método MVFOSM (*Mean-value First-order Second-moment Method*) (HALDAR, A., & MAHADEVAN, 2000). Para saídas considerando uma distribuição normal, essa aproximação ocorre da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & E(\sigma) + \hat{\beta}_i SD(\sigma) = 5000, \\
 & \text{ou} \\
 & \hat{\beta}_i = (5000 - E(\sigma)) / SD(\sigma)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Para o caso de ser considerada uma pdf log-normal, por exemplo, o valor de $\hat{\beta}_i$ é calculado a partir da cdf log-normal equivalente, que possua os momentos estatísticos obtidos.

Com esta aproximação do índice de confiabilidade ($\hat{\beta}_i$) em mãos, apenas as restrições de confiabilidade das barras em que $0 < \hat{\beta}_i < 5$ foram recomputadas utilizando procedimento para análise de confiabilidade (via RIA ou PMA).

Os resultados apresentados utilizam a metodologia PMA para o tratamento das restrições de confiabilidade. Os resultados por RIA neste exemplo tiveram problemas de convergência durante o FORM e nenhuma frente de Pareto adequada foi encontrada. Para a solução do problema MO o número de pontos de Pareto escolhido foi dez. As soluções de Pareto são apresentadas na Figura 5.4 e o desempenho das técnicas MO é dada na Tabela 5.5.

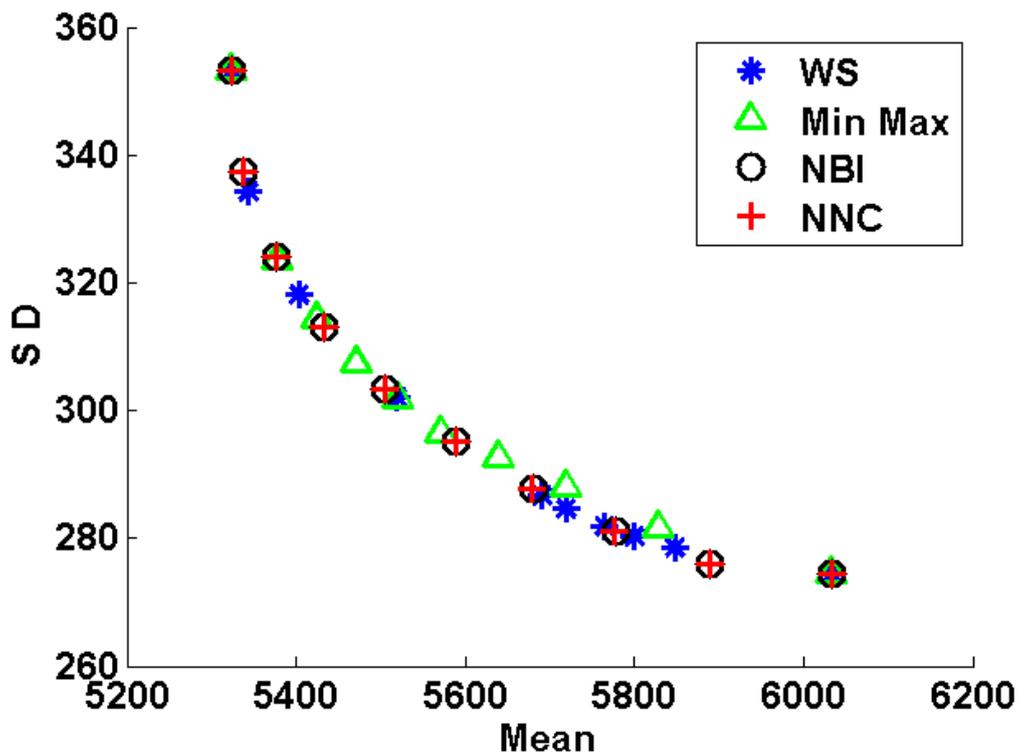


Figura 5.4. Treliça 3D: Soluções de Pareto do problema RBRDO (média e desvio padrão da energia de deformação).

Nesta tabela, além do tempo (s) e o parâmetro de uniformidade (evenness), o número total de avaliações de função objetivo e restrição são dados. Cada avaliação de função considera uma chamada das funções objetivas e restrições, ou seja, uma análise estatística e uma análise de confiabilidade, que por sua vez leva à várias análises estruturais (MEF) e de sensibilidade. O número exato de análises estruturais e de sensibilidade não foi armazenado, mas para se ter uma

ideia da ordem de grandeza, pode-se estima-lo como sendo da ordem de “avaliações de função” $\times 100$ ($\sim 81+15$). Como se pode notar, os resultados obtidos através das técnicas NBI e NNC concordam uns com os outros, além disto, estes dois métodos obtiveram a distribuição de pontos de Pareto com menor valor de evenness (melhor uniformidade).

Tabela 5.5. Treliça 3D: Desempenho dos métodos MO do problema RBRDO.

Método	Tempo	Avaliações de função	Evenness
WS	338	535	0,52
Min-Max	375	562	0,57
NBI	232	463	0,21
NNC	300	451	0,21

A Tabela 5.6 apresenta os resultados dos dez pontos de Pareto. Como o problema anterior, os respectivos valores das funções objetivo (Média e SD da energia de deformação), obtidos via NBI e as estatísticas recalculadas através do MC com 5×10^4 pontos são mostrados. Nesta tabela, as soluções P1 e P10 são os ótimos individuais do desvio padrão e da média da energia de deformação, respectivamente, as soluções RDO (SD) e RDO (Média) são as mesmas soluções obtidas para a otimização formulada anteriormente (RDO). Comparando as soluções obtidas do problema na formulação RBRDO e na formulação anterior (RDO), os resultados não são muito diferentes, especialmente para o ótimo da média (P10).

Ao comparar os resultados das formulações do primeiro e segundo problema, a Figura 5.3 e a Figura 5.4 (ou Tabela 5.4 e Tabela 5.6), pode-se notar que ambos os resultados são bastante semelhantes. Porém o tempo de CPU consumido (Tabela 5.3 e Tabela 5.5) é maior quando se considera a restrição de confiabilidade. Isto ocorre, devido ao processo adicional da análise de confiabilidade (processo de otimização local PMA) para várias restrições. Vale a pena mencionar que os resultados poderiam ser mais diferentes, dependendo da função de distribuição de probabilidade (pdf) obtida para a resposta considerada na restrição de confiabilidade, neste caso, as tensões normais. Quanto mais próxima a pdf da resposta de uma pdf normal (Gaussiana), melhor o resultado da aproximação formulada no caso RDO, Eq. (5.1), (YOUN e CHOI, 2004) assim como a aproximação $\hat{\beta}_i$ na Eq. (5.3).

Tabela 5.6. Treliça 3D: Soluções de Pareto via diferentes métodos MO - problema RBRDO.

Soluções #	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$E(C)$	$SD(C)$
RDO (SD)	0.145	0.742	3.567	0.378	1.184	7.023	5997	273
P1 (SD)	0.051	0.213	3.666	0.540	1.270	7.150	6033	275
P2	0.055	0.320	4.061	0.520	1.162	7.033	5889	276
P3	0.050	0.109	4.439	0.578	1.208	6.781	5777	281
P4	0.050	0.050	4.857	0.619	1.167	6.592	5678	288
P5	0.050	0.050	4.874	0.745	1.158	6.531	5588	295
P6	0.050	0.050	4.933	0.908	1.125	6.482	5505	303
P7	0.050	0.050	5.025	1.111	1.081	6.413	5433	313
P8	0.050	0.050	5.193	1.328	1.038	6.275	5376	324
P9	0.050	0.050	5.442	1.466	1.043	5.982	5338	337
P10 (Média)	0.050	0.050	5.673	1.661	1.046	5.679	5323	353
RDO (Média)	0.05	0.05	5.678	1.659	1.045	5.679	5324	532

5.2. Treliça 2D

5.2.1. Definição do Problema

Uma treliça plana será aqui otimizada, considerando a não linearidade do material e condições de carregamento estático. A configuração geométrica e as condições de contorno são apresentados na Figura 5.5, na qual o número total de graus de liberdade é 1210 (Motta et al, 2011b).

A Figura 5.5 mostra as variáveis aleatórias (\mathbf{U}) e as variáveis de projeto (\mathbf{x}). Assim, duas variáveis aleatórias são consideradas: as cargas verticais na parte superior da estrutura (U_1), e as cargas horizontais no topo do lado esquerdo da estrutura (U_2). A primeira (U_1) possui uma distribuição normal com média $E(U_1) = 4$ kN e desvio padrão $SD_1 = 2$ kN, a segunda variável aleatória (U_2) tem uma distribuição log-normal com média de $E(U_2) = 2$ kN e desvio padrão $SD_2 = 1$ kN. Três variáveis de projeto são consideradas, que são as áreas das secções transversais

das barras de três regiões, como mostrado na Figura 5.5. As áreas iniciais das seções (variáveis de projeto) são iguais a um e as variáveis de projeto são delimitadas por $0.1 \leq x \leq 10 \text{ cm}^2$.

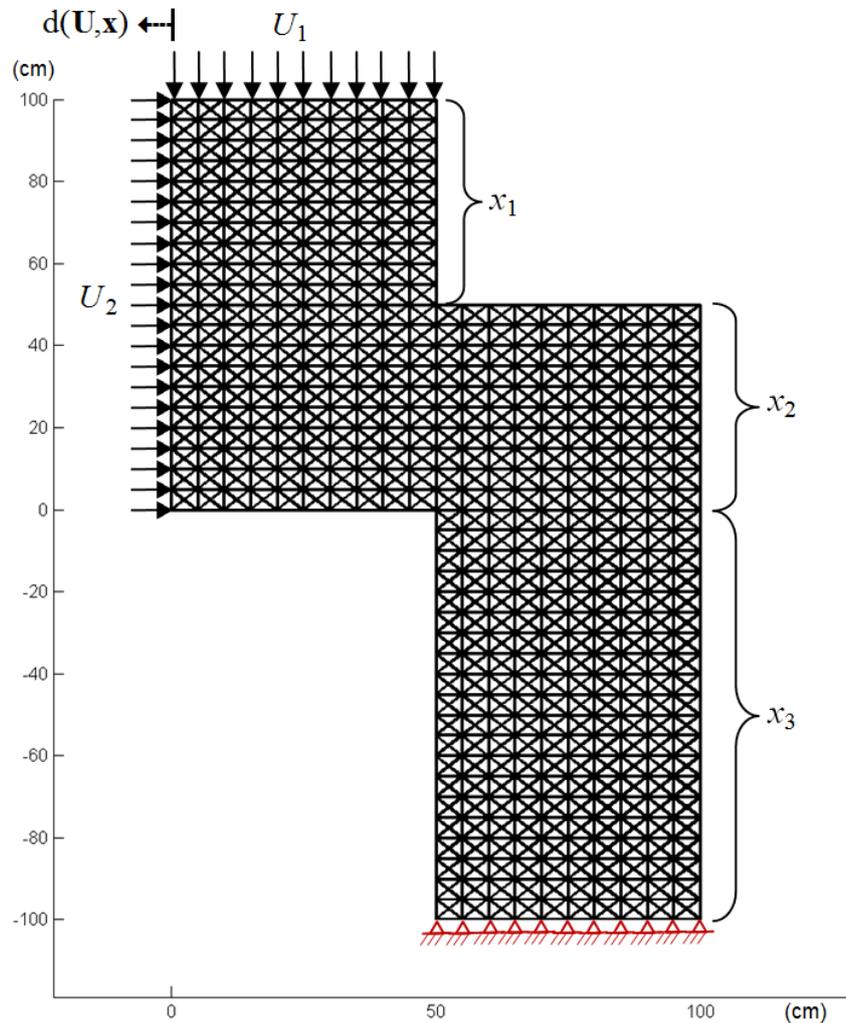


Figura 5.5. Treliça 2D: Definição da estrutura e do problema.

Os pontos da curva tensão-deformação obtidos por meio de um teste uniaxial do material são apresentados na Tabela 5.7.

A definição dos incrementos de carga para a análise não-linear utilizando tanto o FEM padrão, quanto para o uso do modelo reduzido POD, foram obtidos de forma a garantir a convergência da análise não-linear em todas as situações possíveis. Primeiro foi definido através de uma análise linear elástica com carga unitária (P_0) o passo de carga (P_y) o qual levaria a tensão de escoamento σ_y .

$$P_y = P_0 \frac{\sigma_y}{\sigma_0}$$

onde σ_0 é a tensão normal máxima obtida para o carregamento P_0 . O incremento da carga utilizada é então definido como $P_y / 10$ e P_y foi utilizado como a carga inicial. Caso o carregamento desejado seja menor que P_y este é aplicado diretamente (análise linear).

Tabela 5.7. Treliça 2D: Curva tensão-deformação.

Deformação	Tensão normal (N/cm ²)
0.0025	51750
0.0034	62100
0.0050	72450
0.0100	82800
0.0175	93150
0.0350	103500
0.0750	113850

5.2.2. Construção do Modelo de Ordem Reduzida

Para a construção do modelo de ordem reduzida utilizando o POD, uma matriz snapshot (\mathbf{X}) de 1210x246 foi obtida ($K = 246$) a partir de análises não lineares por meio da solução via FEM de 30 casos diferentes, considerando diferentes valores para as variáveis de projeto e variáveis aleatórias ($N = 30$), este processo requereu um tempo computacional de 27,0s. Os vetores de deslocamentos de cada passo de carga de cada análise são armazenados na matriz \mathbf{X} e todas as análises são realizadas até a carga de colapso (tensão normal de ao menos uma barra igual à tensão máxima do material).

A análise de decomposição de valores singulares (SVD) da matriz snapshot \mathbf{X} levou à distribuição dos valores próprios (energia) como apresentado na Figura 5.6 (a). Para uma tolerância solicitada de $tol_\lambda = 10^{-5}$, o tamanho da base do POD gerada foi $w = 50$. Para ilustrar o comportamento de algumas soluções da base, a Figura 5.6 (b-d) ilustra a distribuição das tensões da estrutura considerando os deslocamentos referentes aos três componentes (autovetores) principais.

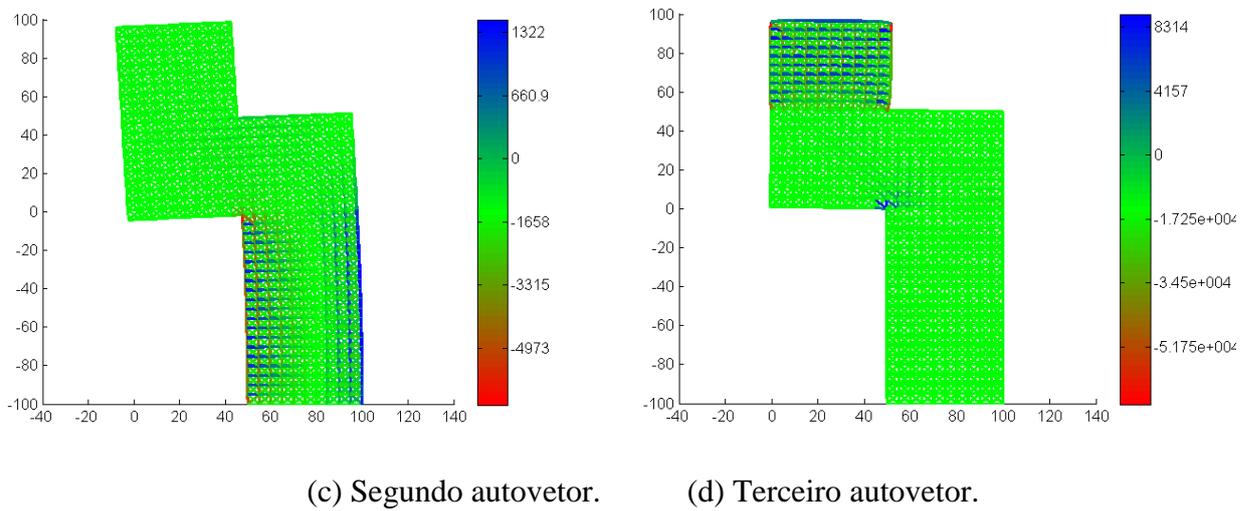
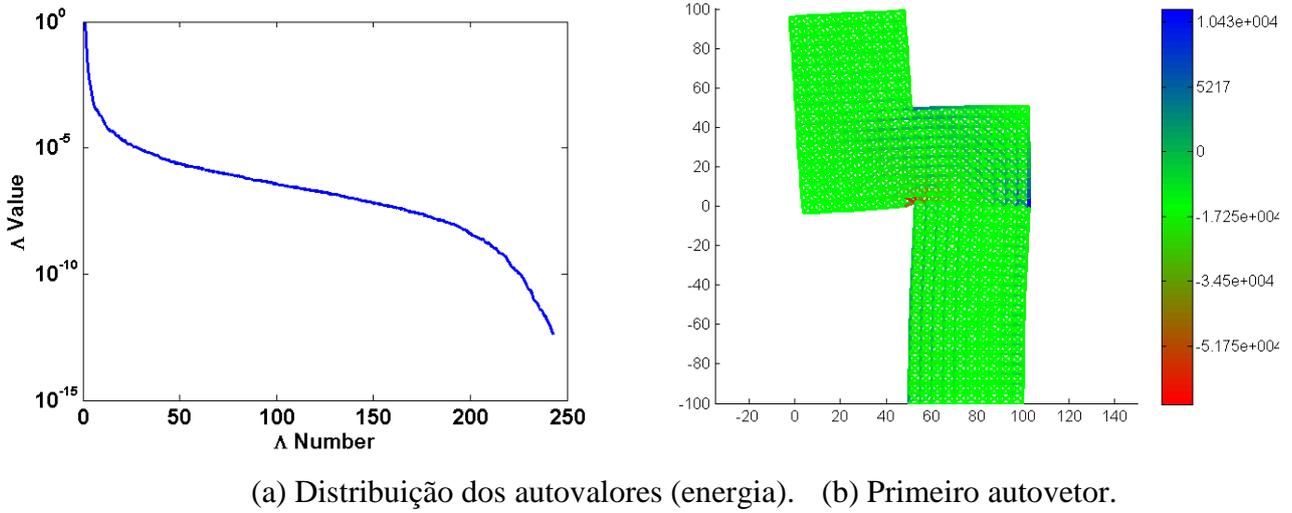


Figura 5.6. Treliza 2D: Estudo da base do POD obtido através da SVD das respostas estruturais (tensões na estrutura deformada).

5.2.3. Otimização Robusta (RDO)

O problema de otimização robusta é formulado para o exemplo em análise como:

$$\min [E(d(\mathbf{U}, \mathbf{x})), SD(d(\mathbf{U}, \mathbf{x}))]$$

sujeito à :

$$vol(\mathbf{x}) \leq vol(x_0)$$

$$0.1 \leq x_i \leq 10, i = 1 \dots n$$

(5.4)

no qual $d(\mathbf{U}, \mathbf{x})$ é o deslocamento horizontal no canto superior esquerdo da estrutura, ver Figura 5.5. Para o projeto inicial as seções transversais das barras tem 1 cm^2 de área, x_0 é o vetor de variáveis de projeto inicial e o volume inicial $vol(x_0) = 12.371,1 \text{ cm}^3$.

Para a avaliação estatística via PCM, na configuração inicial, o consumo de tempo computacional quando se utiliza POD (on-line) e totalmente FEM foi 0.29s e 0.98s, respectivamente. Como já mencionado, o tempo total off-line, para a definição dos parâmetros da metodologia de redução de ordem, foi 27,0s.

Também para o projeto inicial, a solução PCM para graus diferentes de aproximação foi confrontada com a solução de MC usando uma amostra de 10^5 pontos. O PCM considerando uma rede de 3×3 pontos de integração (aproximação de 5° grau) alcança uma diferença em relação à solução de MC da ordem de 10^{-3} . O tempo computacional via MC foi cerca de 10^4 vezes maior do que através do PCM. Assim, no procedimento RMO foi usada para o cálculo das estatísticas o PCM considerando 9 pontos de colocação (3×3).

As análises não lineares foram realizadas via modelo de ordem reduzida POD (para $w = 50$). As frentes de Pareto com 10 pontos, obtidas através dos vários métodos de MO aqui citados, são mostrados na Figura 5.7. Como esperado, os resultados através de NBI e NNC foram praticamente os mesmos. Pode-se também verificar que a melhor distribuição de pontos de Pareto foi obtida por estes dois métodos.

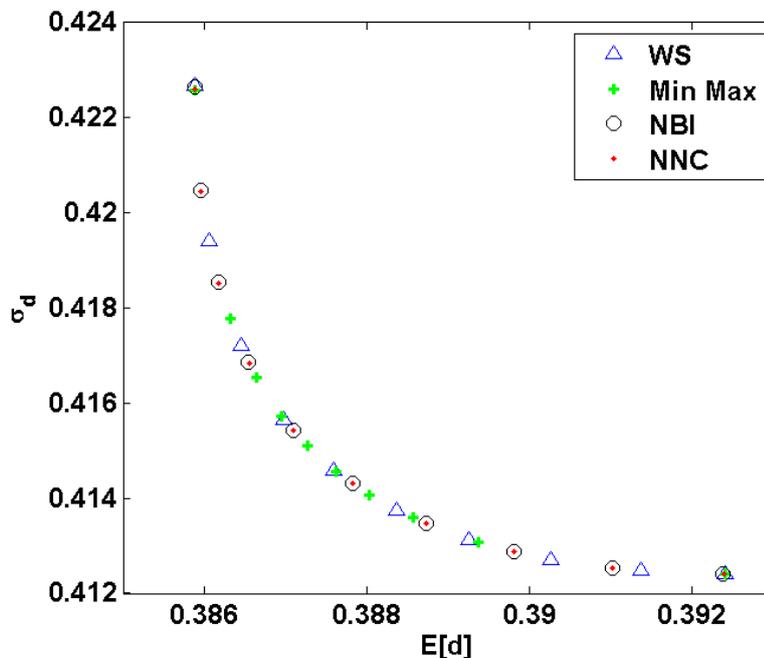


Figura 5.7. Treliça 2D: Soluções de Pareto via diferentes metodologias MO.

O desempenho das quatro estratégias para a otimização multiobjetivo, é mostrado na Tabela 5.8. Nesta tabela, o número de avaliações de função é o número total de cálculos das estatísticas e suas sensibilidades (PCM), utilizando o modelo POD, para obter os pontos de Pareto. Tal como mencionado anteriormente, o parâmetro da uniformidade da distribuição dos pontos de Pareto (Evenness), que aparece na Tabela 5.8, indica a qualidade da distribuição dos pontos, quanto mais próximo de zero o melhor (Messac, et al 2004; Motta, et al, 2012). Segundo este parâmetro e o tempo computacional, o método mais eficiente para este exemplo foi o método NBI, cerca de pelo menos 2 vezes mais rápido do que os outros.

Tabela 5.8. Desempenho das otimizações, considerando PCM com o método POD.

Método MO	Tempo(s)	Avaliações de função	Evenness
WS	50.7	210	0.300
MinMax	119.2	299	0.896
NBI	27.3	143	0.109
NNC	58.6	181	0.109

5.2.4. Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade (RBRDO)

Nos problemas de otimização estruturais determinísticos, pode-se ter como objetivo a minimização da tensão máxima, ou deslocamento máximo com uma restrição, por exemplo, de volume. Neste caso a função objetivo seria, por exemplo, $f = \max(\boldsymbol{\sigma})$, onde $\boldsymbol{\sigma}$ é um vetor de tensões quaisquer. Porém, quando se trata de problemas não determinísticos, utilizando uma metodologia de otimização robusta multiobjetivo com este tipo de objetivo, duas formulações podem ser consideradas. Pode-se considerar a minimização das estatísticas das máximas tensões, assim o vetor de objetivos seria: $\mathbf{F} = [E(\max(\boldsymbol{\sigma})), SD(\max(\boldsymbol{\sigma}))]$. Alternativamente, pode-se considerar a minimização das máximas estatísticas das tensões, neste caso o vetor de funções objetivo poderia ser expresso como: $\mathbf{F} = [\max(E(\boldsymbol{\sigma})), \max(SD(\boldsymbol{\sigma}))]$. Note que no primeiro caso, as estatísticas seriam obtidas para a função $f = \max(\boldsymbol{\sigma})$, a qual pode não ser continuamente diferenciável no espaço das variáveis aleatórias (\mathbf{U}). Isto porque a tensão máxima para diferentes valores de \mathbf{U} pode ocorrer em elementos diferentes da estrutura (elemento da malha, barra, etc.) e consequentemente pode haver mudanças bruscas de gradiente conforme se altera o elemento

estrutural da máxima tensão. Como o PCM é um método que utiliza uma aproximação polinomial global, ele não é indicado para este tipo de formulação. Assim, neste exemplo, optou-se pelo uso da segunda formulação, onde as estatísticas são calculadas, por exemplo, diretamente do vetor das tensões.

Para o exemplo analisado nesta seção, a formulação considerada do problema de otimização estrutural RBRDO é expressa como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} & \left[\max(E(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U}))), \max(SD(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U}))) \right], \\ \text{sujeito à:} & \\ V(\mathbf{x}) & \leq V_0 \\ \beta(\mathbf{x}) & \geq 3.3 \\ 0.1 \leq x_i & \leq 10, i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $E(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U}))$ e $SD(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U}))$ são os momentos estatísticos da tensão axial máxima a ser minimizada. O índice de confiabilidade ($\beta(\mathbf{U}, \mathbf{x})$) é calculado para a mesma função de falha da formulação anterior:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{U}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{U}) - d_{\max} \tag{5.6}$$

onde, agora, $d_{\max} = 3.5\text{cm}$ é o novo deslocamento horizontal máximo permitido no canto superior esquerdo da estrutura, veja Figura 5.5. O volume inicial também é o mesmo do caso anterior.

Os parâmetros da análise, do modelo substituto, do cálculo das estatísticas via PCM são os mesmos utilizados anteriormente. Note que não é necessária rodar novamente o estágio off-line para a geração da base do modelo reduzido.

Serão estudados os desempenhos das duas abordagens para o tratamento da restrição de confiabilidade, a RIA e a PMA.

(a) RBRDO via RIA

Para a solução deste problema utilizando uma abordagem via índice de confiabilidade (RIA), foi utilizado o FORM para o cálculo do índice de confiabilidade de cada projeto durante a otimização. Os 10 pontos de Pareto obtidos por cada método de MO são apresentados na Figura 5.8. Os desempenhos dos quatro diferentes métodos MO são apresentados na Tabela 5.9. O tempo

médio consumido para a análise de confiabilidade (FORM) via FEM foi 10.3s e via POD foi 3.0s (tempo on-line), representando uma redução de 3 vezes.

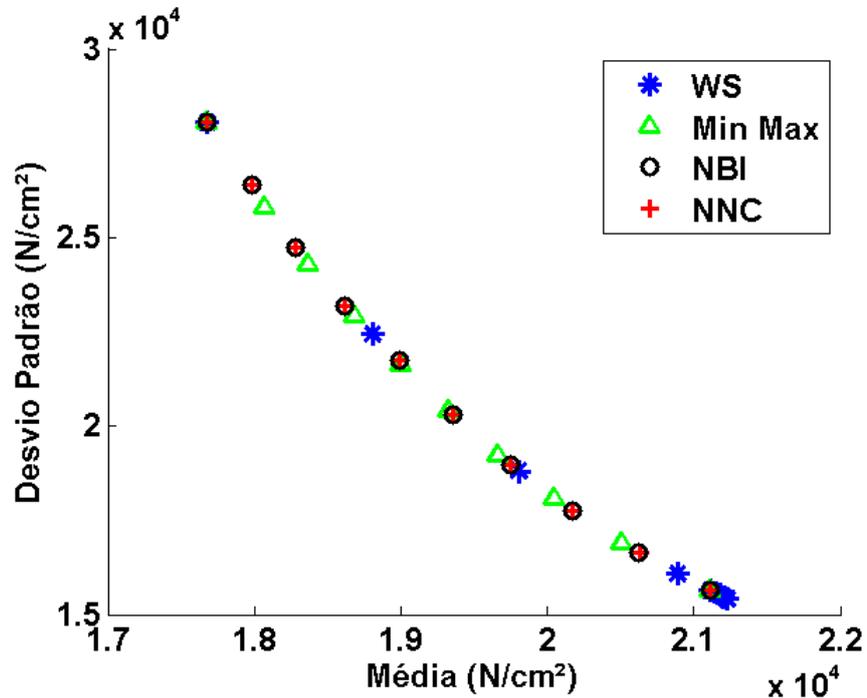


Figura 5.8. Exemplo da treliça 2D – Soluções de Pareto obtidas pelos diferentes MO métodos: Soluções via RIA.

O método WS obteve uma representação pobre da frente de Pareto, o Min-Max foi melhor. Como esperado, os resultados obtidos pelos NBI e NNC apresentaram grande concordância. Assim como nos casos anteriores. A melhor distribuição de pontos Pareto foi obtida por estes dois métodos.

Tabela 5.9. Exemplo da treliça 2D – Desempenho dos diferentes MO métodos: Soluções via RIA.

MO Method	Tempo (sec)	Avaliações de função	Evenness
WS	1308.4	84	1.3257
MinMax	1577.9	106	0.1748
NBI	2811.7	163	0.0114
NNC	802.7	78	0.0116

(b) RBRDO via PMA

Para a solução deste problema utilizando uma abordagem de medição de desempenho (PMA), foi utilizado o AMV (*Advanced mean-value*) para a avaliação da restrição de confiabilidade de cada projeto durante a otimização. Os 10 pontos de Pareto obtidos por cada método de MO são apresentados na Figura 5.9. Os desempenhos dos quatro diferentes métodos MO são apresentados na Tabela 5.10.

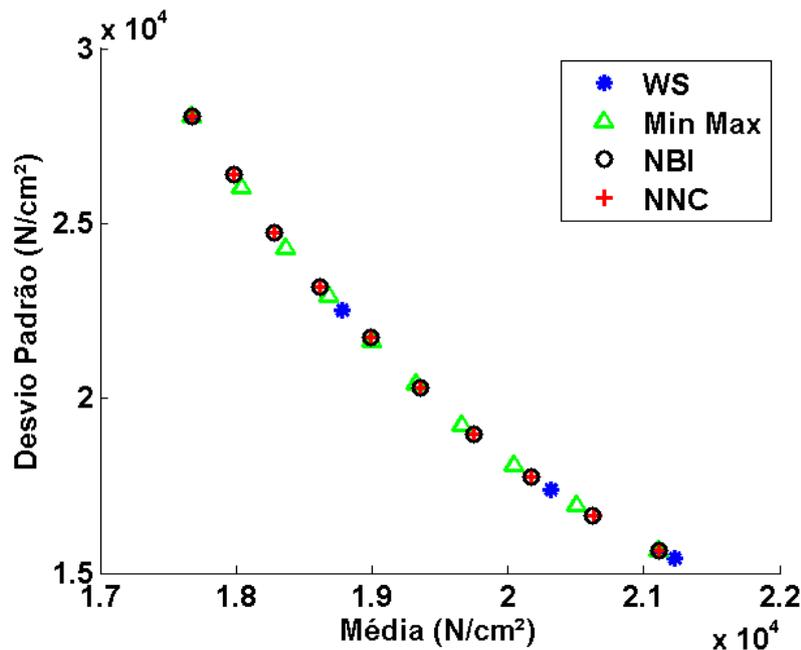


Figura 5.9. Exemplo da treliça 2D – Soluções de Pareto obtidas pelos diferentes MO métodos: Soluções via PMA.

Os resultados são bem próximos aos obtidos utilizando a RIA. Novamente, o método WS obteve uma representação pobre da frente de Pareto e os resultados obtidos pelos NBI e NNC foram próximos. A melhor distribuição de pontos Pareto foi obtida por estes dois métodos, novamente. Porém quando se compara o tempo de CPU utilizado para a otimização via RIA e PMA, a grande vantagem no uso da PMA é observada, com uma redução de mais da metade do tempo de CPU.

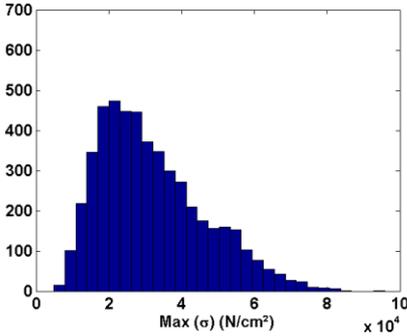
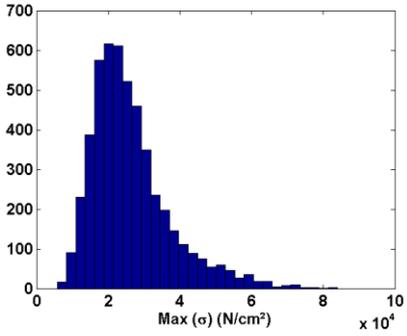
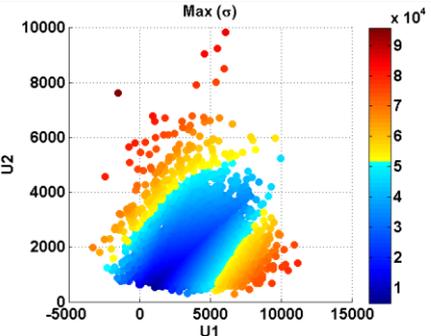
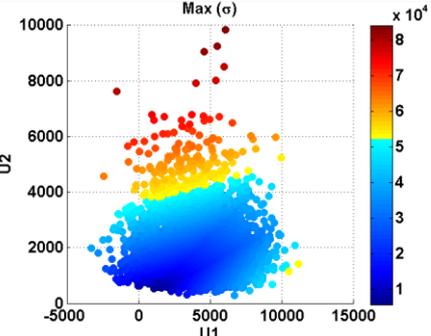
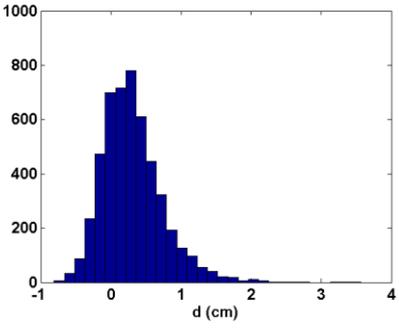
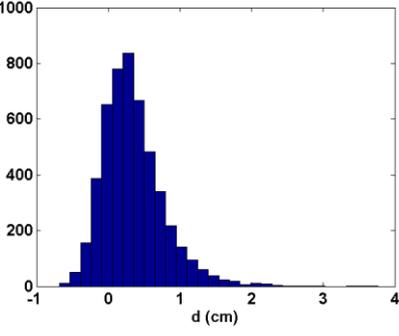
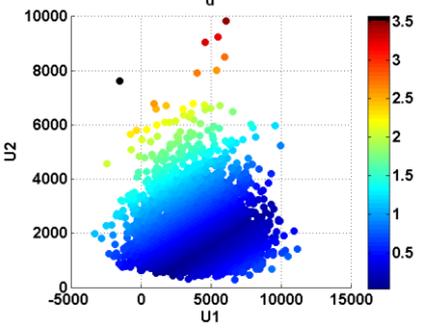
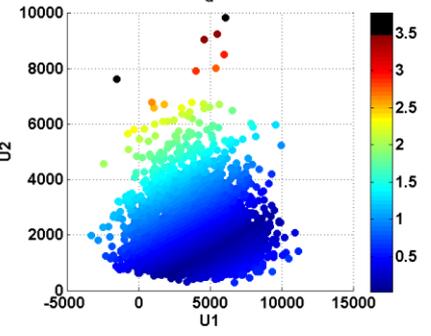
Para avaliar melhor os projetos ótimos de Pareto de forma qualitativa, foi realizada uma análise via Monte Carlo com 5000 pontos dos projetos ótimos individuais da média (P1), ponto no topo esquerdo da Figura 5.9 e do desvio padrão (P2), ponto do lado inferior direito da Figura 5.9, o resultado do estudo é apresentado na Tabela 5.11.

Tabela 5.10. Exemplo da treliça 2D – Desempenho dos diferentes MO métodos: Soluções via RIA.

MO Metodo	Time (sec)	Avaliações de função	Evenness
WS	560.6	92	1.5701
MinMax	402.07	90	0.1491
NBI	1221.0	180	0.0114
NNC	333.9	78	0.0116

A Tabela 5.11 mostra algumas informações relacionadas à estes dois projetos (P1 e P2), são elas, respectivamente: os valores das variáveis de projeto, os valores das funções objetivo ($F_1 = \max(E(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U})))$ e $F_2 = \max(SD(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U})))$), os gráficos do histograma e da dispersão dos pontos de MC dos valores das máximas tensões “ σ ” e os gráficos do histograma e da dispersão dos pontos de MC dos valores do deslocamento “ \mathbf{d} ”. Os gráficos de dispersão dos pontos de MC dos valores tensão máxima “ σ ” seguem uma coloração conforme a respectiva barra de cores ao lado direito, onde os pontos com cores frias (azuladas) estão no regime elástico e os de cores quentes (avermelhadas) estão no regime plástico.

Tabela 5.11. Exemplo da treliça 2D – Dados dos projetos de ótimos individuais.

Dados	Projeto ótimo P1	Projeto ótimo P2
Projeto	[0.4595; 0.4029; 1.8587]	[0.3833; 0.7498; 1.5529]
Desempenho $\mathbf{F} = [F_1; F_2]$	$\mathbf{F} = [176.77; 280.46]$ MPa	$\mathbf{F} = [211.12; 156.45]$ MPa
Histograma das tensões máximas σ (N/cm ²)		
Monte Carlo das tensões máximas σ (N/cm ²)		
Histograma do deslocamento \mathbf{d}		
Monte Carlo do deslocamento \mathbf{d}		

5.2.5. Formulação RBRDO com três objetivos

O exemplo anteriormente estudado, é na presente seção considerado com três objetivos simultaneamente. A formulação considerada do problema de otimização estrutural RBRDO com três objetivos, é expressa como:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \left[E(d), \max(E(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U}))), \max(SD(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{U}))) \right],$$

sujeito à :

$$V(\mathbf{x}) \leq V_0 \tag{5.7}$$

$$\beta_G(\mathbf{x}) \geq 3.3$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{U}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{U}) - d_{\max}$$

$$0.1 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, 3$$

O problema é expresso da mesma forma que o problema anterior, apenas com a adição da minimização da média do deslocamento d como objetivo. O índice de confiabilidade ($\beta(\mathbf{U}, \mathbf{x})$) é calculado para a mesma função de falha G da formulação anterior, onde $d_{\max} = 3.5$ cm. O volume inicial também é o mesmo do caso anterior.

Os parâmetros da análise, do modelo substituto, do cálculo das estatísticas via PCM são os mesmos utilizados anteriormente. Note que, novamente, não é necessária rodar o estágio off-line para a geração da base do modelo reduzido.

Será estudado apenas o desempenho da abordagem PMA para o tratamento da restrição de confiabilidade, dada a complexidade do problema e a conhecida ineficiência da RIA. Para a solução deste problema foi utilizado o AMV (Advanced Mean-Value) para a avaliação da restrição de confiabilidade de cada projeto durante a otimização.

Como já mencionado, a obtenção da fronteira de Pareto de problemas MO com mais de dois objetivos se torna mais complexa. A solução do problema MO com três objetivos é uma superfície de Pareto. Esta superfície pode se degenerar em uma curva 3D em algumas situações. Isso ocorre quando um ótimo individual de um dos objetivos já é um ponto de Pareto do problema quando se considera apenas os outros objetivos restantes. Os 36 pontos de Pareto obtidos por cada um dos métodos de MO apresentados (WS, Min-Max, NBI, NNC e NBI_m) e do método NBI original (com a restrição de igualdade), chamado aqui NBI_o, totalizando 216 pontos, são apresentados em conjunto na Figura 5.10.

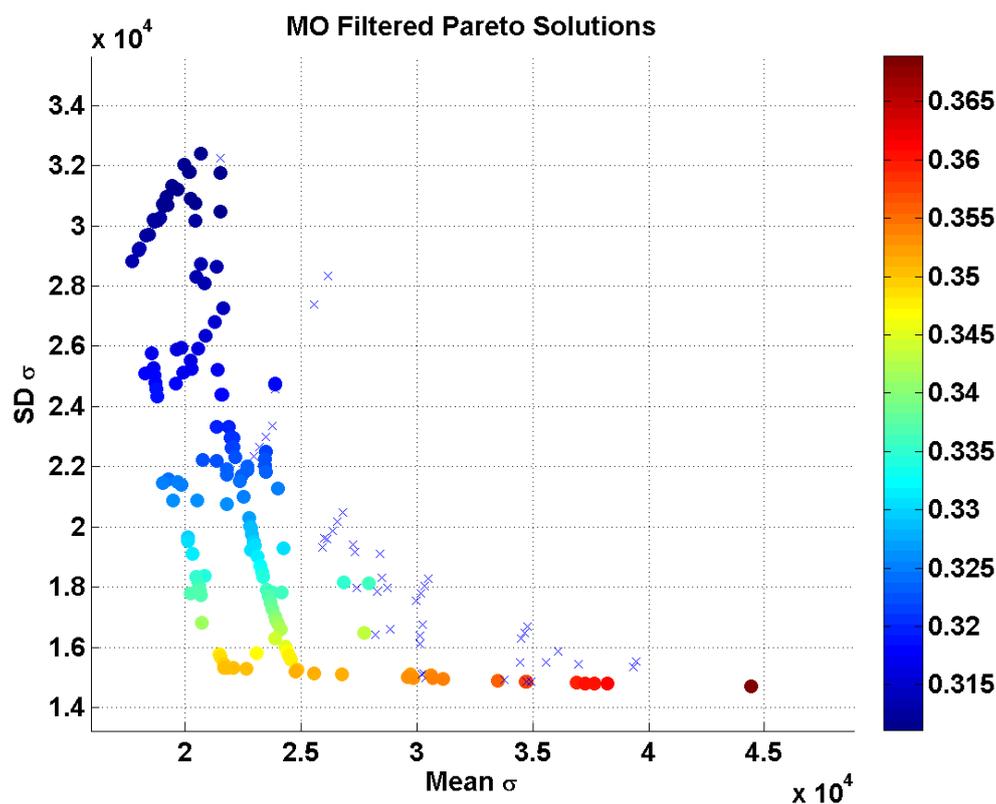


Figura 5.10. Exemplo da treliça 2D – Soluções de Pareto filtradas obtidas por todos MO métodos: problema MO 3D.

Nesta Figura, os pontos não Pareto obtidos, isto é, os pontos dominados por alguma outra solução e pontos inviáveis (obtidas de otimizações com problemas de convergência) foram plotados com um “x”. A escala de cor refere-se ao valor da média do deslocamento “ d ”. Como pode ser visto no gráfico do histograma de “ d ” na Tabela 5.11 do exemplo anterior, os valores da média de d são bem menores que o seu valor limite ($d_{\max} = 3.5$ cm) para assegurar sua confiabilidade. Através da Figura 5.10, nota-se que na região inferior a superfície de Pareto se degenera em uma curva. Este tipo de comportamento não é incomum em otimização estrutural e apresenta uma grande dificuldade para métodos como o NBI e NNC que utilizam a envoltória convexa de mínimos individuais (CHIM), principalmente o NBIo, pois restringe a solução na projeção da CHIM.

Na Figura 5.11(a-f) são mostrados individualmente as soluções obtidas respectivamente pelos métodos: WS, Min-Max, NBI, NNC, NBI_m e NBI_o. Os desempenhos destes cinco diferentes métodos MO são apresentados na Tabela 5.12.

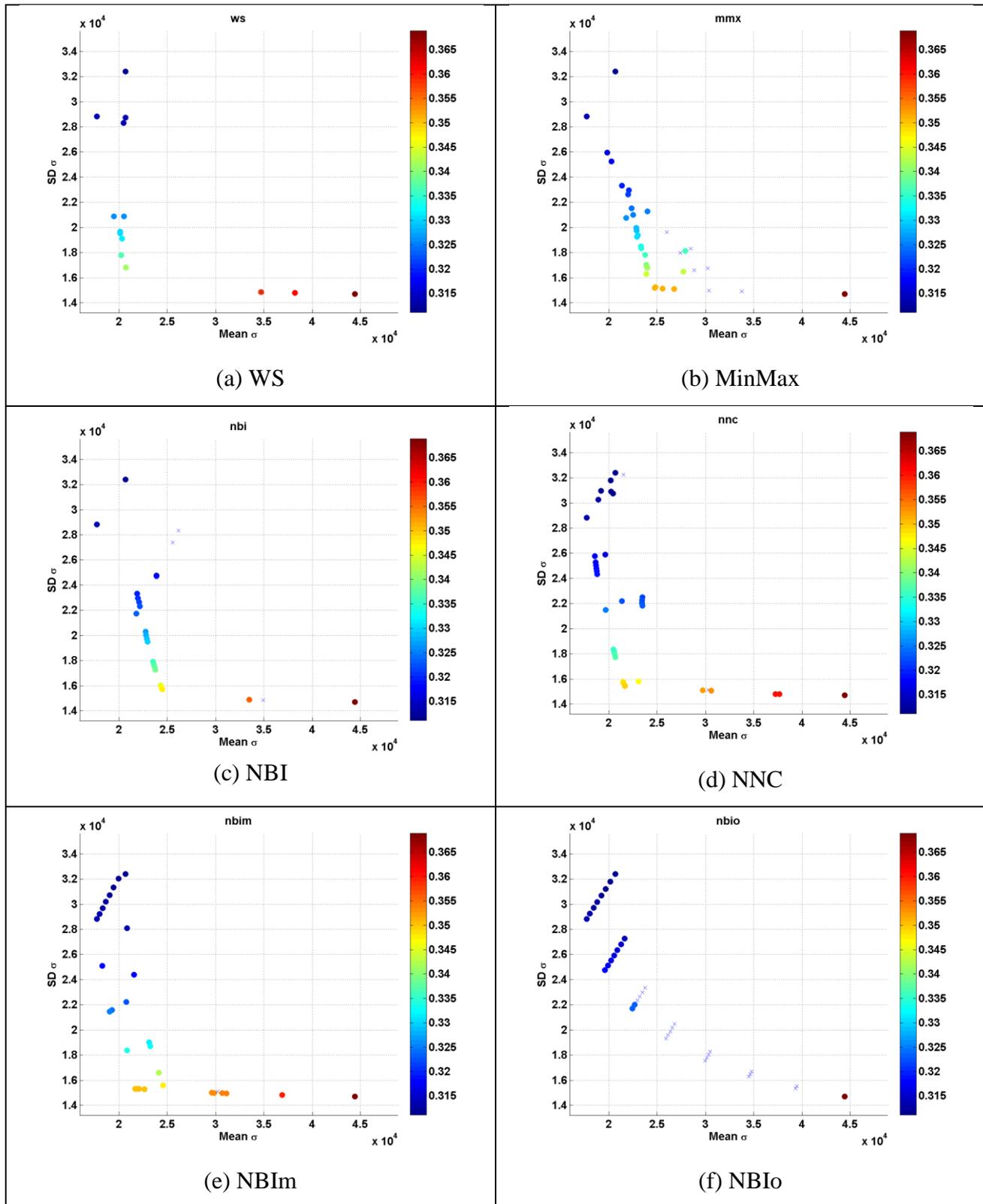


Figura 5.11. Exemplo da treliça 2D – Soluções de Pareto obtidas pelos diferentes MO métodos: problema MO 3D.

Tabela 5.12. Exemplo da treliça 2D – Desempenho dos diferentes MO métodos: problema MO 3D.

MO Método	Tempo (s)	Avaliações de função	Evenness	Não Pareto
WS	3453	390	2.063	12
MinMax	3097	439	1.209	7
NBI	3069	462	1.670	4
NNC	4066	578	1.447	2
NBIm	7256	603	1.281	1
NBIO	6084	880	1.102	18

Novamente, o método WS obteve uma representação pobre da frente de Pareto, com 12 soluções que não são ótimos de Pareto. Porém, um bom desempenho do MinMax é observado, quando se compara o tempo de CPU utilizado para a otimização e uma distribuição de pontos satisfatória, obtendo inclusive o menor valor de evenness, mesmo com 7 pontos não Pareto ótimos.

Metade das soluções encontradas pelo NBIO (com a restrição de igualdade) são pontos não Pareto (dominados), porém o resultado pode ser utilizado para ilustrar de forma clara a projeção da CHIM (envoltório convexa de mínimos individuais). Os resultados obtidos pelos NBI e NNC desta vez foram diferentes. Os pontos de Pareto obtidos por ambos os métodos se agruparam em algumas regiões, fato já observado na literatura (Motta et al, 2010), pois a projeção da CHIM não atende aos critérios de Pareto favorecendo o deslocamento dos pontos e a consequente aglomeração. A melhor distribuição de pontos Pareto foi obtida pelo NBIm, apresentando o menor número de pontos não Pareto (um) e um valor de evenness próximo ao valor do Min-Max. Vale destacar que o parâmetro evenness mede a distribuição das distâncias entre pontos, porém não avalia diretamente a área total ocupada pelos pontos nem os vazios (regiões sem pontos).

5.3. Exemplo de chapa quadrada com furo

Este exemplo utiliza a mesma estrutura definida na Seção 2.6, o qual ilustrará a utilização do sistema HYPLAS para a obtenção de um projeto estrutural robusto e confiável, sob comportamento não linear físico e geométrico. Como já mencionado, o sistema computacional HYPLAS, escrito em FORTRAN, destina-se à análise não linear via MEF de problemas elastoplásticos com grandes deformações, desenvolvida por (de SOUZA NETO et al, 2008). O HYPLAS foi integrado às ferramentas desenvolvidas para otimização robusta baseada em confiabilidade. Esta seção trata

portanto de uma aplicação de ferramenta integrada. A estrutura considerada para o problema de otimização robusta baseada em confiabilidade é uma chapa quadrada com furo elíptico, apresentada na Figura 5.12. Este problema foi baseado em um caso da literatura (Silva, 2000).

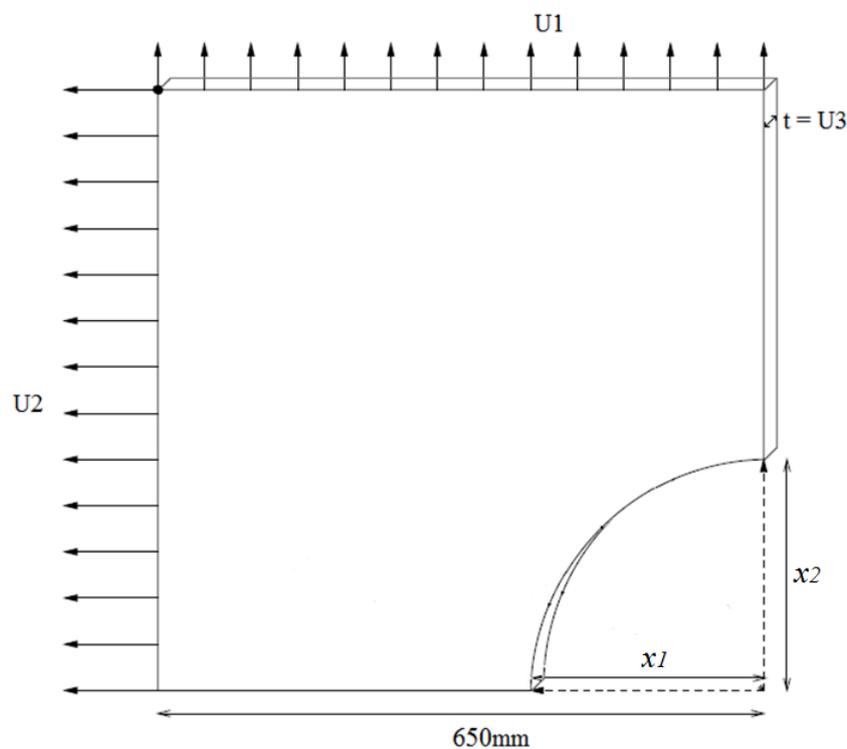


Figura 5.12. Chapa quadrada com furo: representação geométrica das variáveis aleatórias (U_1 , U_2 e U_3) e de projeto (x_1 , x_2).

O material considerado segue um modelo von Mises elasto-plástico com as seguintes propriedades: módulo de Young (E) = 20000.0 MPa, coeficiente de Poisson (ν) = 0.3 e tensão de escoamento $\sigma_y = 200$ MPa. A curva tensão-deformação “linear por partes” uniaxial é apresentada na Tabela 5.13.

Tabela 5.13. Chapa quadrada com furo: Relação tensão-deformação uniaxial.

Deformação	Tensão (MPa)
0.0100	200
0.0400	400
0.1200	540
0.3600	600

As variáveis de projetos são as dimensões (x_1, x_2) do orifício, como mostrado na Figura 5.12. Os valores mínimos, máximos e iniciais das variáveis de projeto são apresentados na Tabela 5.14. As variáveis aleatórias são apresentadas na Figura 5.12, são elas: os carregamentos distribuídos ($U1$ e $U2$) e a espessura da chapa $U3$. As propriedades das distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias são apresentadas na Tabela 5.15.

Tabela 5.14. Chapa quadrada com furo: Variáveis de projeto.

Variáveis	Min (mm)	Inicial (mm)	Max (mm)
x_1	100	300	477
x_2	100	300	477

Tabela 5.15. Chapa quadrada com furo: Variáveis aleatórias.

Variáveis	Média	Desvio Padrão	pdf
U1	40 N/mm	20 N/mm	Normal
U2	80 N/mm	8 N/mm	Normal
U3	1 mm	0.2 mm	Log-Normal

5.3.1. Chapa quadrada com furo - RBRDO via RIA

O problema de otimização robusta baseada em confiabilidade, o qual será resolvido via RIA é definido como:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \mathbf{F} = [E(\sigma_B), SD(\sigma_B)]$$

sujeito à:

$$\beta(G) \geq 3.2$$

$$100 \leq x_i \leq 477, i=1,2$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{U}) = d_y^A - 6mm$$

onde σ_B é a tensão von Mises no ponto de Gauss do elemento B, mostrado na Figura 5.13, $E(\cdot)$ e $SD(\cdot)$ são a média e o desvio padrão, respectivamente. A restrição de confiabilidade é imposta utilizando um valor de índice de confiabilidade, associado à função de falha G , onde d_y^A é o valor absoluto do deslocamento vertical no nó A, mostrado na Figura 5.13. O valor de índice de confiabilidade alvo (β_{tar}) considerado é 3.2.

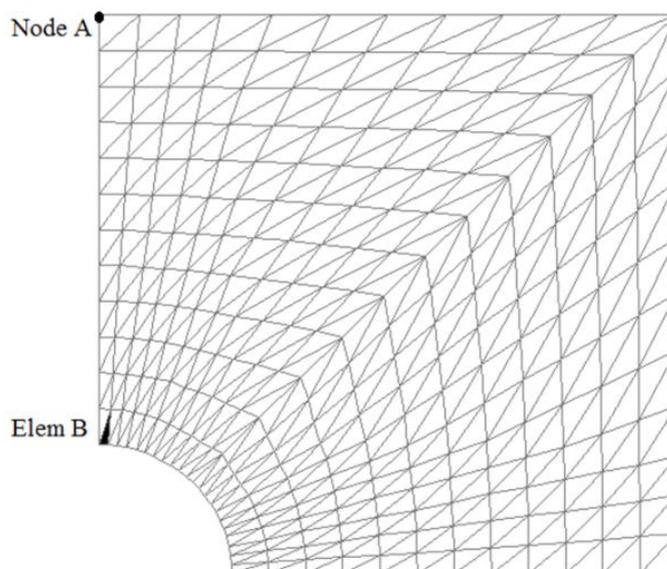


Figura 5.13. Chapa quadrada com furo: Discretização do domínio e definição das funções objetivos e restrição.

Para o cálculo dos gradientes, requeridos pelo otimizador, foi utilizado o método das diferenças finitas global. Foi considerado o método POD para a análise estrutural, com 46 componentes ($w = 46$) obtidos para uma tolerância (tol_λ) de 10^{-4} , a partir de 120 “snapshots” ($K = 120$, $N = 60$), conforme detalhado na seção 2.6. O problema original possui 598 graus de liberdade e o elemento utilizado foi triangular de três nós, chamado CST (“*Constant Stress Triangle*”). Para calcular as estatísticas via PCM um grid com 8 ($2 \times 2 \times 2$) pontos de integração foi utilizado.

A restrição de confiabilidade via RIA foi computada via FORM. A fronteira de Pareto foi construída com 10 pontos utilizando os quatro métodos de MO considerados (WS, Min-Max, NBI e NNC). Os resultados são mostrados na Figura 5.14. Como esperado, os resultados do NNC e do NBI são praticamente os mesmos e estes dois foram os que obtiveram as melhores distribuições de pontos de Pareto.

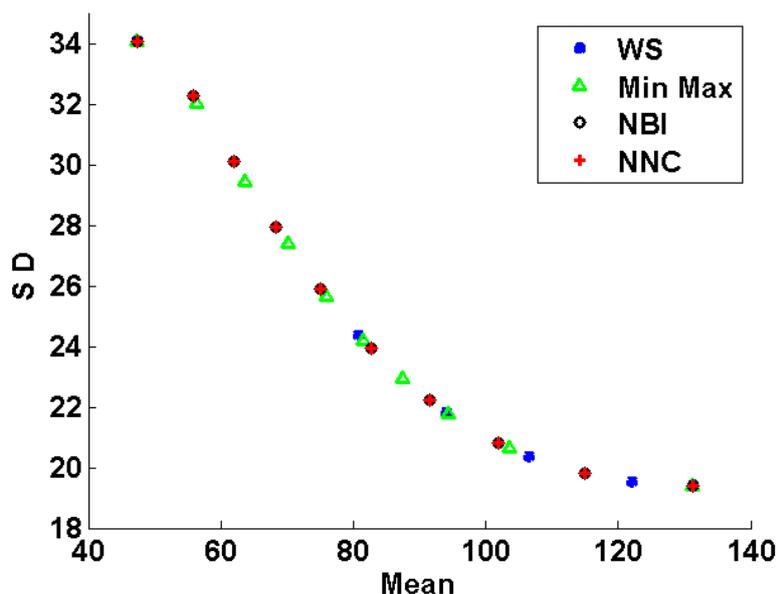


Figura 5.14. Chapa quadrada com furo: Fronteiras de Pareto obtidas em MPa.

A Tabela 5.16 apresenta o desempenho de cada método para a obtenção dos respectivos conjuntos de Pareto. Na tabela, “Avaliações de função” é o número funções objetivo/restrição computadas, cada avaliação de função inclui o cálculo das estatísticas via PCM, a análise de confiabilidade e suas respectivas sensibilidades.

A medida de uniformidade da distribuição dos pontos de Pareto é avaliada através do parâmetro Evenness conforme (Messac and Mattson, 2004), mostrado na Tabela 5.16. O método mais eficiente para este exemplo foi o NNC, aproximadamente 1.9 vezes mais rápido que o Min-Max, este último o mais lento.

Tabela 5.16. Chapa quadrada com furo: Desempenhos dos métodos MO.

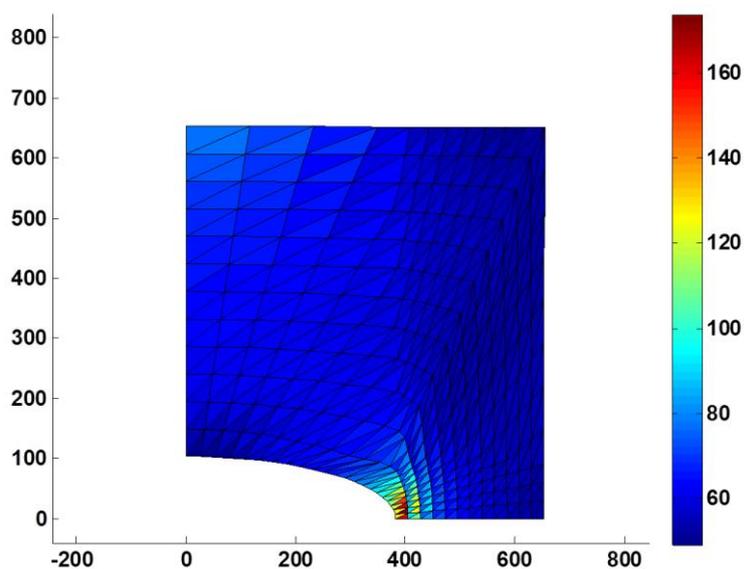
Métodos MO	Tempo (s)	Avaliações de função	Não-Pareto	Evenness
WS	326.3385	324	0	1.084341
Min-Max	381.0324	367	0	0.417310
NBI	246.5128	232	0	0.070742
NNC	202.6609	177	0	0.070742

A Tabela 5.17 apresenta os projetos ótimos referentes a cada ponto de Pareto obtido via NNC (e NBI). Nota-se que o tamanho vertical do furo é mantido no seu valor mínimo, enquanto apenas a dimensão horizontal é alterada.

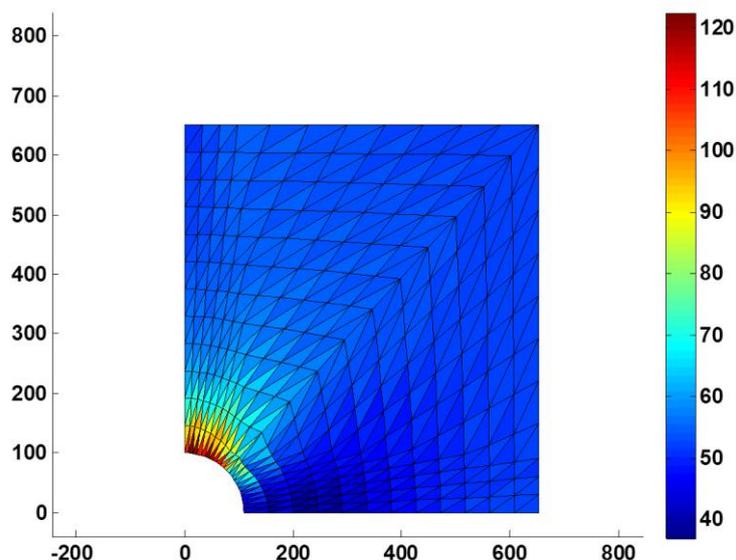
Tabela 5.17. Chapa quadrada com furo: Pontos de Pareto utilizando POD.

Solução	x_1	x_2	$E(\sigma_B)$	$SD(\sigma_B)$
P1	107.4346	100	131.2993	19.4197
P2	137.1488	100	114.8846	19.8110
P3	167.7102	100	101.9780	20.8161
P4	198.3129	100	91.46470	22.2399
P5	228.3652	100	82.61760	23.9554
P6	256.1902	100	75.12390	25.9077
P7	283.0751	100	68.32730	27.9820
P8	309.8650	100	61.92970	30.1261
P9	336.7757	100	55.74170	32.3068
P10	381.0117	100	47.37270	34.1059

Os projetos ótimos obtidos considerando os objetivos F_1 e F_2 independentes são mostrados na Figura 5.15. Estas figuras mostram os resultados das análises não lineares determinísticas, computadas com as variáveis aleatórias definidas nos seus valores nominais (médios) e o contorno das tensões von Mises são apresentados segundo a escala de cor em MPa.



a) Projeto ótimo da média (comportamento determinístico)



b) Ótimo do desvio padrão (comportamento determinístico)

Figura 5.15. Chapa quadrada com furo – Projetos Pareto ótimos de mínimos individuais (escala de cor em MPa): a) ótimo da média e b) ótimo do desvio padrão.

5.3.2. Chapa quadrada com furo: aproximação RBRDO

O mesmo problema é novamente aqui resolvido, porém agora a restrição de confiabilidade é tratada de forma aproximada, utilizando apenas as estatísticas da saída de interesse (d_y^A). Considerando que a saída d_y^A possui uma distribuição próxima a uma distribuição normal, um novo problema RBRDO pode ser formulado, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & \mathbf{F} = [E(\sigma_B), SD(\sigma_B)] \\ \text{sujeito à:} \quad & \\ & E(d_y^A) + \beta_{\text{tar}} [SD(d_y^A)] \leq 6mm \\ & 100 \leq x_i \leq 477, i=1,2 \end{aligned}$$

onde β_{tar} é igual a 3.2.

Para a solução deste problema foram utilizados os mesmos parâmetros dos casos anteriores. O resultado da solução via cada método de MO é mostrado na Figura 5.16.

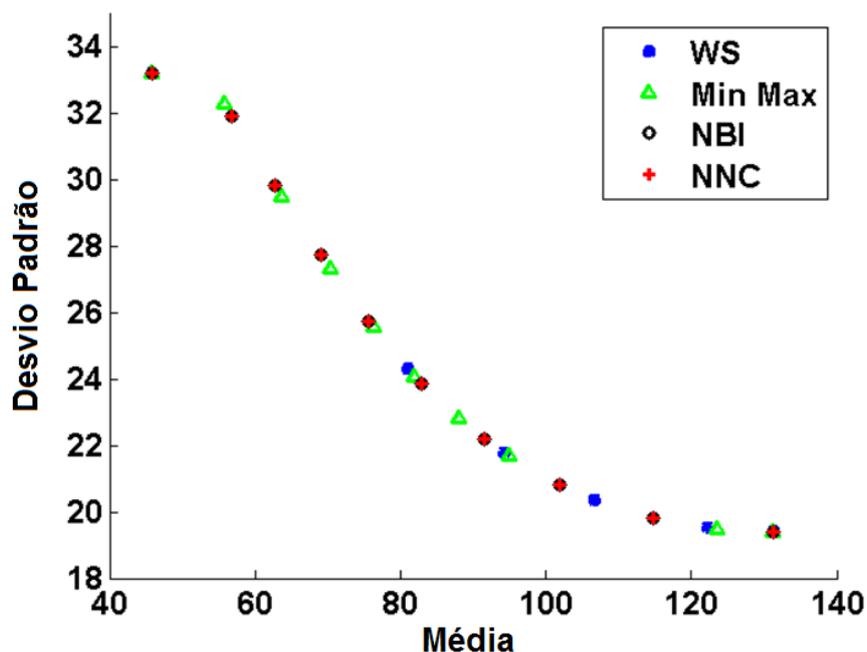


Figura 5.16. Chapa quadrada com furo: Fronteira de Pareto do problema RBRDO aproximado.

A Tabela 5.18 apresenta os desempenhos de cada método de MO, utilizando os mesmos parâmetros da Tabela 5.16, para a obtenção dos respectivos pontos de Pareto. Como esperado os resultados via NNC e NBI apresentam grande concordância, e estes dois foram o que obtiveram as melhores distribuições de pontos de Pareto (Evenness). Novamente, o método mais eficiente, foi o NNC, cerca de 1,75 vezes mais rápido que o método WS, o mais lento.

A Tabela 5.19 apresenta os projetos ótimos referentes a cada ponto de Pareto obtido via NNC (e NBI). Como se pode notar, quando comparando as duas formulações para lidar com restrições de confiabilidade, há pouca diferença entre as duas fronteiras de Pareto obtidas. Isto ocorreu porque apenas em uma parte da fronteira de Pareto, a restrição de confiabilidade está ativada, mais precisamente, próximo ao ponto de Pareto P10. Porém o desempenho do processo de otimização foi aproximadamente 40% mais rápido quando considerando a segunda abordagem (aproximada).

Tabela 5.18. Chapa quadrada com furo: Desempenhos dos métodos MO do problema RBRDO aproximado.

Métodos MO	Time (s)	Avaliações de função	Evenness
WS	201.37	326	1.06
Min-Max	191.24	315	0.51
NBI	160.53	262	0.07
NNC	114.79	180	0.07

Tabela 5.19. Chapa quadrada com furo: Pontos de Pareto utilizando POD do problema RBRDO aproximado.

Solução	x1	x2	$E(\sigma_B)$	$SD(\sigma_B)$
P1	107.4346	100	131.2993	19.4197
P2	137.4071	100	114.7618	19.8172
P3	167.7541	100	101.9614	20.8178
P4	197.8304	100	91.61700	22.2148
P5	227.1786	100	82.94680	23.8819
P6	254.3259	100	75.61490	25.7652
P7	280.2776	100	69.00940	27.7657
P8	306.2104	100	62.78910	29.8283
P9	332.0318	100	56.81220	31.9302
P10	397.3196	100	45.79950	33.2193

6. Conclusões e trabalhos futuros

Os diferentes tópicos abordados neste trabalho tiveram como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta geral e eficiente para a solução de problemas RBRDO de estruturas com comportamento não linear. Um único código geral foi desenvolvido de forma flexível no MATLAB, que trata a análise estrutural para diferentes tipos de estruturas com diferentes tipos de comportamento para obter projetos estruturais ótimos robustos e confiáveis.

Neste trabalho um algoritmo POD foi implementado para reduzir a ordem do modelo e obter um resultado aproximado da análise via FEM, linear e não-linear, para a otimização considerando incertezas. Uma boa concordância entre os resultados das análises estruturais não-lineares e os projetos ótimos obtidos via o FEM padrão e via POD foi alcançado. Para uma tolerância de erro na definição da base do POD de 10^{-5} , bases de apenas 50 e 62 componentes foram usadas para aproximar as respostas de sistemas de 1210 e 586 graus de liberdades, respectivamente. Problemas de RBRDO foram resolvidos usando PCM para avaliar as estatísticas (1º e 2º momentos estatísticos) da resposta de uma treliça de comportamento não-linear. Várias técnicas de otimização multiobjetivo (métodos WS, Min-Max, NBI e NC) foram utilizadas para a obtenção de soluções de Pareto do problema RMO.

Além do problema RDO, um procedimento para a solução de problemas RBRDO aplicado ao mesmo sistema de treliça, considerando a análise estática não-linear, utilizando o método POD para aproximar as respostas estruturais foi desenvolvido.

Os resultados da análise da confiabilidade através aproximação FORM foram confrontados com os resultados através do MC para 10.000 pontos de integração. Devido aos pequenos valores de P_f empregados na confiabilidade estrutural, na prática se utiliza a P_f como ordem de grandeza, assim quando comparando os resultados obtidos por ambas as técnicas os resultados obtidos pelo FORM são satisfatórios. De modo semelhante, levando em consideração a medida do erro em termos do índice de confiabilidade, os resultados comparando o FORM e o MC concordam satisfatoriamente.

Em resumo as principais conclusões até o presente estágio da pesquisa foram:

- O tempo de processamento consumido para obter resultados por POD foi até 1/3 do tempo de CPU consumido para obter resultados por meio de FEM, demonstrando a eficácia do método;
- O cálculo das estatísticas através do PCM exigem cerca de 10^3 vezes menos avaliações de função do que o método de integração MC, para o mesmo erro relativo, para problemas com respostas suaves e com poucas variáveis aleatórias significantes;
- Para os exemplos bi-objetivos tratados, os métodos de MO com melhor resultado foram o NBI e o NNC que conseguiram uma distribuição uniforme dos pontos de Pareto. O NNC foi bem mais eficiente em alguns problemas aqui tratados, até 3 vezes mais rápido do que o NBI, porém em outros casos o NBI foi mais rápido. Na literatura há outros exemplos onde o NBI foi mais eficiente (MOTTA et al, 2010, 2011, 2012) não ficando claro em termos de eficiência qual o melhor.
- Para o problema com três objetivos tratado, o método de MO com melhor resultado foi o método NBI_m que conseguiu uma melhor distribuição dos pontos de Pareto por toda a região da frente de Pareto e o menor número de soluções não pareto. O MinMax foi o mais eficiente no problema aqui tratado, cerca de 2 vezes mais rápido do que o NBI_m.
- O cálculo do índice de confiabilidade via FORM apresentou resultados satisfatórios, além de ser muito mais eficiente quando comparado com o MC e permitiu a solução de problemas de RBDO.
- Quando se compara o tempo de CPU utilizado para a otimização com restrição de confiabilidade (RBDO ou RBRDO) via RIA e PMA, a grande vantagem no uso da PMA é observada, com uma redução de mais da metade do tempo de CPU nos problemas aqui tratados. Além disso, o RIA não foi capaz de produzir resultados satisfatórios em alguns dos casos.
- Foi mostrado também que a quantificação do fator de importância de cada variável aleatória com relação às estatísticas das funções de interesse, pode ser muito importante quando técnicas como o PCM são empregadas.

A ferramenta integrada provou ser muito eficiente para a solução de problemas de otimização com incertezas (RDO, RBDO e RBRDO), reduzindo o tempo computacional em até 5 ordens de grandeza quando comparado com soluções obtidas utilizando os métodos clássicos padrões. A combinação proposta de todas estas metodologias, para a solução de problemas RBRDO descritas

aqui, formam uma ferramenta poderosa para a obtenção das soluções de problemas de otimização com incertezas e pode ser estendida para aplicações mais complexas.

6.1. Sugestões e trabalhos futuros

Abaixo seguem alguns pontos que podem ser estudados em pesquisas futuras ou que já estão em andamento:

- Fazer comparação entre os métodos de redução de ordem com diferentes graus de discretização de malha (números de graus de liberdade).
- Realizar estudo da importância das variáveis aleatórias para diferentes configurações de projeto ao longo do processo de otimização, incluindo o projeto ótimo, em problemas com muitas variáveis aleatórias.
- Realizar otimização do caso 1 (Benchmark – Treliça 3D) utilizando as restrições formuladas corretamente.
- Realizar otimização de minimização de volume, utilizando restrições de confiabilidade para carga de colapso.
- Estudar um problema de otimização RBRDO formulado utilizando plastificação perfeita considerando a carga de colapso como restrição de confiabilidade (caso 1) e como objetivo a ser maximizado de forma robusta (caso 2). Pode-se ainda, comparar com estruturas dimensionadas (otimização determinística) utilizando normas vigentes e realizar análise de confiabilidade.
- Implementar no código do HYPLAS o cálculo dos gradientes das variáveis de estado entre outros parâmetros de interesse pelo método direto analítico de casos com comportamento elasto-plástico para pequenas deformações e posteriormente incluir as não linearidades geométricas (em andamento), para melhorar o seu uso em processos de otimização.
- Implementar a não linearidade geométrica em treliças e utilizar a instabilidade estrutural como critério de confiabilidade (em andamento).
- Devido a sua aproximação polinomial “global” o PCM apresenta dificuldades para alguns tipos de funções. Visando resultados mais confiáveis, pode-se investigar o “*Multi-element Probabilistic Collocation Method*” (ME-PCM) (FOO, et. al., 2008). Este

método é uma generalização do PCM onde a aproximação é feita por subdomínios (elementos), a partir da discretização do domínio das variáveis aleatórias.

- Além disso, o número de variáveis aleatórias consideradas deve ser pequeno para o uso do PCM ($nva < 20$), preferencialmente $nva < 10$, pois o número de pontos necessários, para a aproximação de um mesmo grau, aumenta exponencialmente com o número de variáveis aleatórias (nva). Esta dificuldade pode ser amenizada utilizando técnicas de integração por grades esparsas (“sparse grids”) (HEISS e WINSCHHEL, 2008).
- Para a obtenção da probabilidade de falha de forma mais acurada, será investigado o uso do SORM para a obtenção da probabilidade de falha e juntamente com a implementação do cálculo dos gradientes (em andamento).
- Para obter o MPP para diferentes tipos de problema, existem algoritmos de otimização diferentes do HRLF, os quais podem ser utilizados e investigados, como o SQP (Sequential Quadratic Program) e o algoritmo de ponto interior não linear (nonlinear interior-point - NIP) (Beck, 2012).
- O POD pode ser aplicado à análise não linear de outros tipos de estruturas, como sólidos 3D, o que será investigado futuramente. Além disto, serão investigadas estratégias visando um melhor desempenho do POD (CARDOSO, 2009).
- Aplicar os procedimentos para otimização robusta baseada em confiabilidade para outros problemas de chapas, cascas e sólidos 3D.
- Aplicar os procedimentos para otimização robusta baseada em confiabilidade para outros problemas mais complexos reais da engenharia estrutural, por exemplo, estruturas offshore da indústria do petróleo, torres metálicas treliçadas de telecomunicação, etc.

7. REFERÊNCIAS

- ANDRADÓTTIR, S. “A review of simulation optimization techniques”. in: D. Medeiros, E. Watson, J. Carson, M. Manivannan (Eds.), Proceedings of the 30th Conference on Winter simulation, IEEE, Piscataway, NJ, pp. 151– 158, 1998.
- AFONSO, S.M.B, LYRA, P.R.M, ALBUQUERQUE, T.M. M., R. S., MOTTA. “Structural Analysis and Optimization in the Framework of Reduced-Basis Method”. Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer Berlin / Heidelberg, January 2009.
- AFONSO, S. M. B. e PATERA, A. T. “Structural Optimization in Framework of Reduced Basis Method”.in XXIV CILAMCE, Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais na Engenharia, 2003.
- AFONSO, S. M. B., MOTTA, R. S., LYRA, P. R. M., WILLMERSDORF, R. B., Robust design considering optimization tools and reduced-basis approximations. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, v. 10, p. 012198-199, 2010.
- ARORA J. S.; MESSAC, A.; MULLUR, A. A. “OPTIMIZATION OF STRUCTURAL AND MECHANICAL SYSTEMS. Chapter 4 - Multiobjective Optimization: Concepts and Methods”. Jasbir S Arora, University of Iowa, USA, 2007(a).
- ARORA J. S.; MAHADEVAN, S. “OPTIMIZATION OF STRUCTURAL AND MECHANICAL SYSTEMS.Chapter 10 - Design optimization under uncertainty”.Jasbir S Arora, University of Iowa, USA, 2007(b)
- ALBUQUERQUE T. M. M.. “Análise e Otimização de Problemas Térmicos e Estruturais Bidimensionais Através do Método das Bases Reduzidas”. Dissertação de mestrado, Dept. de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil, 2005
- BATES, S. J., "Development of Robust Simulation, Design and Optimisation Techniques for Engineering Applications", PhD Thesis, University of Wales Swansea, 2003
- BARÓN, J. H. e LEOD, J. E. M. N.“SCALABILITY ON LHS SAMPLES FOR USE IN UNCERTAINTY ANALYSIS OF LARGE NUMERICAL MODELS”. International Conference on Safety and Reliability – ESREL '99, Munich, Alemanha, 1999

- BECK, A. T., Computational Issues in FORM with Uniform Random Variables. WCCM 2012, Sao Paulo – SP, Brasil. 2012
- BECK, A. T., “Curso de Confiabilidade Estrutural”. USP Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos – SP, Brasil, 2008
- BEYER, H. G., SENDHOFF, B., “Robust Optimization – A Comprehensive Survey”. Computational Methods and Applications in Mechanical Engineering. 196. 2007
- BONET, J. e WOOD, R.D., Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, Cambridge University Press, second edition, 2007
- BUCHER, C., Computational Analysis of Randomness in Structural Mechanics: Structures and Infrastructures Book Series, Structures and Infrastructures, Taylor & Francis, 2009
- BURKARDT, J., GUNZBURGER, M., and LEE, H. C., Pod and cvt-based reduced-order modeling of navier-stokes flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 196:337–355. 2006
- CARDOSO, M., A., Development and Application of Reduced-Order Modeling Procedures for Reservoir Simulation, Ph. D. thesis, Stanford University, 2009
- CHUNG, T.J. Continuum Mechanics, Prentice-Hall International Ed. 1988
- COLLETTE, Y. and SIARRY, P. Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies. Springer. 2004
- COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E. e WITT R. J. “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”. Fourth edition, Wiley, 2003
- CRISFIELD, M. A., Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures - Volume 1: Essentials. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England. 2000
- DAS, I. e DENNIS, J.E. “Normal Boundary Intersection: A New Method for Generating Pareto Surface in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems”. *SIAM J. Optimization*, Vol. 8, No. 3, pp. 631-657, 1996.
- DE SOUZA NETO, E., Peric, D., and Owen, D. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. Wiley. UK, Chichester. 2008
- DEB, K., GUPTA, S., DAUM, D., BRANKE, J., MALL, A. K., PADMANABHAN, D., Reliability-Based Optimization Using Evolutionary Algorithms, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol 13, Issue 5, p. 1054-1074, 2009
- DITLEVSEN, O., MADSEN, H. O., STRUCTURAL RELIABILITY METHODS. Edition 1, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1996. Edition 2.3.7: Internet edition, June_September 2007
- DOLTSINIS, I. and Z. KANG, Robust design of structures using optimization methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, no. 23, pp. 2221-2237. 2004

- DU, Q., FABER, V. and GUNZBURGER, M., “Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms”, *SIAM Review*, Volume 41, pages 637-676. 1999
- FEIGENBAUM, H. P., Y. F. DAFALIAS, Directional distortional hardening in metal plasticity within thermodynamics, *International Journal of Solids and Structures*, 44 (22–23), pp. 7526-7542, 2007
- FOO, J., WAN, X., KARNIADAKIS, G. E. “The multi-element probabilistic collocation method (ME-PCM): Error analysis and applications”. *Journal of Computational Physics* 227. 2008
- GAUTSCHI, W. “Orthogonal polynomials (in Matlab)”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 178, 2005, pp. 215-234, 2005
- GELIN, J.C., Picart, P., Numisheet’99 - Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes, Proceedings of the 4th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Shett Forming Processes, University of Franche-Comté and ENSMM Besançon, France. 1999
- GIUNTA, A. A., WOJTKIEWICZ, S. F. Jr and ELDRED, M. S., “Overview of Modern Design of Experiment for Computational Simulations”, Proceedings of the 41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Jan. 6-9. 2003
- HAFTKA, R.T., GÜRDAL, Z. and KAMAT, M.P., *Elements of Structural Optimization*. 2nd edn. Kluwer Academic Publishers. 1990
- HALDAR, A., & MAHADEVAN, S., *Reliability assessment using stochastic finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2000
- HASOFER, A. and LIND, N., Exact and invariant second-moment code format. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100:111-121. 1974
- HENCKY, H., The Elastic Behavior of Vulcanized Rubber. *J. Appl. Mech.*, 1, 45–53. 1933
- HERES, P. J., SCHILDERS, W. H. A. Orthogonalisation in Krylov subspace methods for model order reduction. *Scientific Computing in Electrical Engineering*, Sicily, Italy. 2004
- HILL, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press. 1950
- HWANG, C. L.; PAIDY, S. R.; YOON, K. e MASUD, A. S. M., Mathematical Programing whith Multiple Objectives: A Tutorial, *Comput. and Ops. Res.*, Vol. 7, pp. 5-31. 1980
- KEANE, A. J.; NAIR P. B. *Computational Approaches for Aerospace Design: The Pursuit of Excellence*. John-Wiley and Sons. 602 p., 2005
- KIRSCH, U., *Reanalysis of Structures: A Unified Approach for Linear, Nonlinear, Static and Dynamic Systems*. Springer, Netherlands. 2008

- LALONDE, N.; KIM, I. Y.; WECK, O., “A Comprehensive Comparison between Deterministic and Probabilistic Multiobjective Optimization Algorithms with Mathematical and Practical Applications”. 8^o World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. Lisbon, Portugal, 2009
- Leon, S. E., Paulino, G. H., Pereira, A., Menezes, I. F., & Lages, E. N., A unified library of nonlinear solution schemes. *Applied Mechanics Reviews*, 64(4), 040803. 2011
- LIANG, Y., LEE, H., LIM, S., LIN, W., LEE, K., and WU, C., Proper orthogonal decomposition and its applications-part i: Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3):527–544, 2002
- LIU, P.L. and KIUREGHIAN, A. D., Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1(2), 105-112. 1986
- LLOYD, Stuart P., "Least squares quantization in PCM", *IEEE Transactions on Information Theory* 28 (2): 129–137, 1982
- LUBLINER, J., A maximum-Dissipation Principle Generalized Plasticity, *Acta Mechanica*, Vol.52, pp.225-237.1984
- LUBLINER, J., Normality Rules in Large-Deformation Plasticity, *Mechanics of Materials*, Vol.5, pp.29-34. 1986
- LUBLINER, J., *Plasticity Theory*. Dover, New York. 2008
- MACEDO, C. M. H. “Otimização de Treliças Planas sob Várias Solicitações com Ênfase a Problemas Multiobjetivos”. Dissertação de Mestrado, Dept. de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco. Recife-PE, Brasil, 2002
- MARCZYK, J. “Stochastic multidisciplinary improvement: beyond optimization, American Institute of Aeronautics and Astronautics”, AIAA-2000-4929, 2000
- MELCHERS, R. E., *Structural reliability: analysis and prediction*. John Wiley and Sons Ltd, Chichester, West Sussex, England, second edition, 1999
- MESSAC, A. and MATTSON C.A., “Normal constraint method with guarantee of even representation of complete Pareto frontier”, 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Material Conference, Palm Springs, CA 2004
- MESSAC, A., ISMAIL-YAHAYA A. e MATTSON C. A. “The Normalized Normal Constraint Method for Generating the Pareto Frontier”. *Structural Optimization*, Vol. 25, No. 2, pp. 86-98, 2003
- MILLER, I., FREUND, J., and JOHNSON, R., *Probability and Statistics for Engineers*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 4 edition. 1990

- MOTTA, R. S., “Otimização Robusta de Estruturas Utilizando o Método da base Reduzida”. Tese de mestrado. Dep. de Eng. Civil, UFPE, Recife-PE Brazil. 2009
- MOTTA, R. S. ; Afonso, S. M. B. ; LYRA, P. R. M. . OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DE ESTRUTURAS. In: Conem 2010 - VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2010, Campina Grande-PB. Anais do Conem 2010. Campina Grande: Universidade Federal de Campina Grande, 2010
- MOTTA, R. S. ; Afonso, S. M. B. ; LYRA, P. R. M. . The Solution of N-Multiobjective Optimization Problems using Modified Normal Boundary Intersection and Normal Constraint Methods. In: Civil-Comp & Soft Civil-Comp, 2011, Crete. Proceedings of the Second International Conference on Soft Computing Technology in Civil, Structural and Environmental Engineering. Stirlingshire: Civil-Comp Press, 2011a.
- MOTTA, R. S., AFONSO, S. M. B., Optimization of Trusses under Nonlinear Conditions Considering the Proper Orthogonal Decomposition Method.In: XXXII CILAMCE, Ouro Preto-MG, Brasil, 2011b.
- MOTTA, R. S.; AFONSO, S. M. B.; LYRA, P. R. M., A modified NBI and NC method for the solution of N-multiobjective optimization problems. Structural and Multidisciplinary Optimization (Print), v. 1, p. 1-21, 2012a.
- MOTTA, R. S. e AFONSO, S. M. B., Reliability Based Design Optimization For Nonlinear Static Truss System Considering Reduced-Order Modeling. In: EngOpt 2012 - 3th International Conference on Engineering Optimization, 2012, Rio de Janeiro. Proceedings of EngOpt 2012. Rio de Janeiro: COPPE/Mechanical Engineering Program, 2012b.
- MOTTA, R. S. e AFONSO, S. M. B. . Robust Optimization Using Reduced-Order Modeling For Non-Linear Static Truss System. In: WCCM 2012 - 10th World Congress on Computational Mechanics, 2012, Sao Paulo. Proceedings of 10th World Congress on Computational Mechanics, 2012c.
- MOTTA, R. S., AFONSO, S.M.B, LYRA, and P.R.M. Development of a computational efficient tool for robust structural optimization, Engineering Computations, 32:2, p.p. 258-288, 2015
- MUELLER-GRITSCHNEIDER, D., GRAEB, H. and SCHLICHTMANN, U., “A Successive Approach to Compute the Bounded Pareto Front of Practical Multiobjective Problems”, SIAM Journal of Optimization, Vol. 20, No. 2, pp. 915-934, (2009)
- NATAF, A., Determination des distribution dont les marges sont données. Comptes Redus de l'Academie des Sciences, 225, 42-43. 1962

- ORTIZ, M. and E.P. POPOV. “Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations”. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 21:1561–1576, 1985.
- ORTIZ, M., P.E. POPOV, Distortional hardening rules for metal plasticity, *Journal of Engineering Mechanics*, 109 (4), pp. 1042–1057, 1983.
- OWEN, D.R.J. & HINTON, E., *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, Swansea, U.K.1980
- PAIVA, R. M., CRAWFORD, C., and SULEMAN, A., Robust and reliability-based design optimization framework for wing design. *AIAA Journal - Special Section on Multidisciplinary Design Optimization*. vol. 52, pp. 711, 2014.
- PHILLIPS, A., TANG, J. L. and RICCIUTI, M., Some new observations on yield surfaces, *Acta Mechanica*, 20, pp. 23–39, 1975.
- POWEL, M. J. D. “Algorithms for Nonlinear Constraints that use Lagrangian Function”. *Math. Programming*, vol 14, pp. 224-248, 1978.
- RACKWITZ, R. and FIESSLER, B. (1978).Structural reliability under combined load sequences.*Computers and Structures*, 9(5):489–494.
- RAMAMURTHY, D. “Smart simulation techniques for the evaluation of parametric uncertainties in black box systems”. Thesis (M.S. in computer science).Washington State University. 2005.
- RATHOD, V., YADAV, O., RATHORE, A., and JAIN, R., Reliability based robust design optimization: A comparative study,"in *Industrial Engineering and Engineering Management(IEEM)*, 2011 IEEE International Conference on, pp. 1558-1563, Dec 2011.
- ROSENBLATT, M., “Remarks on a multivariate transformation,” *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23, pp. 470–472, 1952.
- SANCHIS, J., MARTÍNEZ, M., BLASCO, X. and SALCEDO, J. V., “A new perspective on multiobjective optimization by enhanced normalized normal constraint method”, *Struct Multidisc Optim*, vol. 36, pp. 537–546. 2008
- SCHÖNAUER, M., *Unified numerical analysis of cold and hot metal forming processes*, PhD. Thesis, University College of Swansea, Wales, U.K.1993
- SCHULLER, G. and JENSEN, H., Computational methods in optimization considering uncertainties - an overview. *Computational Methods and Applications in Mechanical Engineering*. 2008
- SILVA, C. E. K., *Otimização de Forma de Modelos Bidimensionais de Elementos Finitos com Comportamento Elasto-Plástico*. Tese de Doutorado, Depto. Eng. Civil, PUC-Rio, 2000

- SIMO, J. C. and R. L. TAYLOR. “Consistent tangent matrix for rate independent elastoplasticity”. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 48:101–118, 1985
- SIROVICH, L. (1987). Turbulence and the dynamics of coherent structures, part 1: Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3):561–571.
- STEIN, M. “Large Sample Properties of Simulations Using Latin Hypercube Sampling”. *Technometrics*, vol 29, no.2, May 1987.
- STOER, J. and BULIRSCH, R. (1991). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, 2 edition.
- TAN, B. T., DAMODARAN, M., and WILLCOX, K., Proper orthogonal decomposition extensions and their applications in steady aerodynamics. Master’s thesis, Ho Chi Minh City University of Technology, Vietnam, 2001
- TAN, B. T., Proper Orthogonal Decomposition Extensions and Their Applications in Steady Aerodynamics”. Master of Engineering in High Performance Computation for Engineered Systems (HPCES), Singapore-MIT Alliance. 2003
- TORRES, J. S., Uma metodologia para Verificacao de Seguranca e Dimensionamento Otimo de Dutos com defeitos causados por Corrosao. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Pernambuco. 2009
- VALDEBENITO, M. A. and SCHUELLER, G. I., A survey on approaches for reliability-based optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 42, no. 5, pp. 645, 2010.
- VANDERPLAATS, G. N. “Numerical Optimization Techniques for Engineering Design - with Applications”. 4th Edition, Vanderplaats Research & Development, Inc., Colorado Springs, CO. 2004
- WEBSTER, M.; TATANG, M. A.; MCRAE, G. J. “Application of the Probabilistic Collocation Method for an Uncertainty Analysis of a Simple Ocean Model”. MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change, 1996
- WEICKUM G., MAUTE, K., Design Optimization Using Reduced Order Models. Department of Aerospace Engineering, University of Colorado, Department of Mechanical Engineering Boulder, CO, USA, 2005
- YOUN B. D., CHOI K.K., An investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches. *J Mech Des*, 126(3):403–411, 2004
- ZIENKIEWICZ, O.C. e TAYLOR, R.L., “The Finite Element Method”, New York, McGraw-Hill, 2000