



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

MARIA DE JESUS GOMES DA CUNHA

**ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS POR PROFESSORES
DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**

Recife
2015

MARIA DE JESUS GOMES DA CUNHA

**ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS POR PROFESSORES
DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Prof.^a Dra. Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

Recife

2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

C972e	Cunha, Maria de Jesus Gomes da. Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do ensino médio / Maria de Jesus Gomes da Cunha. – Recife: O autor, 2015. 137 f.: il. ; 30 cm. Orientadora: Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2015. Inclui Referências e Apêndice. 1. Matemática - Ensino e estudo. 2. Combinatória. 3. Ensino médio. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Pessoa, Cristiane Azevêdo dos Santos. II. Título. 372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2015-77)
-------	--



Maria de Jesus Gomes da Cunha

ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 21/05/2015

BANCA EXAMINADORA:

Prof.^aDra. Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa (Presidente e Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof.^a Dra. Alina Spinillo (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof.^a Dra. Gilda Lisbôa Guimarães (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho aos meus filhos: Erickson Gomes da Cunha e Thayanne Maria Gomes da Cunha, pois acredito que a educação é capaz de libertar, levar o ser humano a conquistar novos horizontes e melhores condições de vida.

Dedico aos meus professores da Universidade Federal de Pernambuco, em especial, a minha querida orientadora Cristiane Pessoa, que refletiu e compartilhou comigo tantas ideias acadêmicas. E também aos demais professores que contribuíram para minha formação durante todo período da Educação Básica, da minha graduação e pós-graduação. Com eles aprendi a respeitar e admirar a profissão de “professor”.

Dedico também aos professores das redes municipais e estaduais que têm desenvolvido um trabalho para a melhoria da Educação Básica no Brasil. Espero que esta pesquisa possa ajudá-los no processo de formação continuada e no desenvolvimento do ensino e da aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me ensinado a nunca desistir dos meus sonhos e por conceder o desejo do meu coração de fazer o mestrado na Universidade Federal de Pernambuco. Sem Ele eu nada seria, nem poderia. O Senhor é a minha força, o meu braço forte, o socorro bem presente durante todo o percurso do mestrado. Sou eternamente grata a Deus por tudo. A Ele toda honra, toda glória e todo louvor!

À minha querida, amável, amiga, confidente e inteligente orientadora Cristiane Pessoa, que me abrigou e me ensinou tão bem durante esses dois anos de curso. Nos momentos tão difíceis me acolheu, respeitou meu tempo e minha dor. Ergueu-me, pegou na minha mão e me fez continuar firme. Você, querida Cris, é especial em minha vida, obrigada por fazer parte da minha história e por não desistir de mim. Com você eu aprendi muitas coisas. Não só acadêmicas, mas o cuidado, o amor e o compromisso de ser docente e de procurar, sempre, fazer melhor. Você é um presente que o Senhor me enviou e uma prova do amor de Deus por vidas. Sempre tratando de forma tão respeitosa e digna todas as pessoas, independente da condição social ou financeira. Muito obrigada!

Agradeço muito à minha família por sempre estar ao meu lado, mesmo nos momentos difíceis e compreender o meu sonho de fazer o mestrado. Agradeço aos meus filhos que tanto amo, Erickson Gomes, meu primogênito, sem você eu não estaria aqui. Muito obrigada pela sua ajuda. À minha linda menina, Thayanne Maria, obrigada por entender as muitas horas de estudo que necessitei. Muitas vezes eu escutava você dizer: “Mainha, você só pensa em estudar”. Estudar nos leva a conquistar novos horizontes, ter liberdade, autonomia e vencer na vida. Acredito filha, no estudo e dedico a vocês, minha família, que tanto amo.

Ao meu esposo, Josimar Carneiro da Cunha, agradeço todo carinho e compreensão pelos meus inúmeros momentos dedicados ao mestrado.

À minha querida neta do coração, Ana Júlyia. Você alegrou o meu coração em meio à tempestade. Agradeço a Deus por sua linda vida.

À minha mãe, Virgínia Duarte. Essa oportunidade que Deus nos deu de juntas, vivenciarmos esse momento tão importante em minha vida, compartilhar do meu sonho, acompanhar toda a minha trajetória. Obrigada, Senhor!

Aos meus avós maternos, Maria Ferraz e Alfredo Duarte (in memoriam), sempre os considerearei como meus pais. Ensinarão-me tantos valores e princípios que guardo até hoje dentro do meu coração. Muito obrigada, Deus verdadeiramente me presenteou com os meus avós.

Ao meu pai, Severino Gomes (in memoriam). Aprendi a amá-lo e respeitar o seu jeito. Muito obrigada.

Aos meus irmãos Tânia Maria, por ter sempre acolhido meus filhos; André Gustavo e meu irmão do coração Edvaldo Ferraz, que sempre me ajudou em tudo.

Ao meu querido e amado sobrinho, Caio André, com o seu jeitinho animado sempre me alegrou.

Agradeço também à Lucineide Sales, à minha querida vovó Maria e toda a sua família, a minha gratidão será para sempre.

Aos meus queridos apóstolos, Carlos Nibbering e Fabiana Nibbering, meu muito obrigada pelos momentos de oração, de palavras de Deus. Elas trouxeram vida e consolo ao meu coração. Obrigada pelo incentivo, pelos momentos de fé e de acolhimento. Agradeço também, aos meus queridos irmãos do Ministério Internacional em Células e a todos que fazem parte da Célula Jeová Jireh (o Senhor da provisão), pois sempre oraram por mim nos momentos de muita dor e se alegraram comigo nos momentos felizes. Amo todos vocês!

Agradeço as contribuições dos professores da rede Estadual de Pernambuco, participantes da pesquisa.

Agradeço às professoras doutoras Alina Spinillo e Gilda Guimarães pelas valiosas contribuições a respeito do meu trabalho e por terem aceitado fazer parte da minha banca de qualificação e banca de defesa. Sinto-me prestigiada por tê-las em minha banca. Muito obrigada!

Aos meus queridos professores, agradeço do fundo do meu coração todo o tempo que passamos juntos, cada um a sua maneira, mas sempre nos ensinando a fazer o melhor. Com muito carinho e amor no coração, agradeço à: Ana Beatriz Carvalho, Ana Coelho Selva, Cristiane Pessoa, Carlos Monteiro, Fátima Cruz, Gilda Guimarães, Iranete Lima, Lícia Maia, Liliane Carvalho, Marcelo Câmara, Patrícia Smith, Paula Baltar, Paulo Lima, Rosinalda Teles, Rute Borba e Sérgio Abranges.

Agradeço também aos demais professores que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica: Marcelo Sabbatini, Thelma Panerai, Verônica Gitirana, Fernando Melo, Frank Bellemain e Maria Auxiliadora Padilha.

Os meus sinceros agradecimentos aos meus professores doutores que me acompanharam durante as aulas de Seminários I, II, III e IV: minha orientadora querida Cristiane Pessoa, Liliane Carvalho, Carlos Monteiro, Gilda Guimarães, Rute Borba, Fátima Cruz e Lícia Maia. Agradeço também, aos meus colegas das turmas 2011, 2013 (em especial

a Fabíola Melo e Rosilângela pelo sonho compartilhado) e 2014. Vocês contribuíram bastante durante todo o percurso da minha pesquisa e com vocês também aprendi a ter o olhar de pesquisadora.

Agradeço a todos que fazem parte do GERAÇÃO – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório. Meus sinceros agradecimentos à professora Doutora Rute Borba, à Professora Doutora Cristiane Pessoa, aos meus colegas que tanto contribuíram com a minha pesquisa: Cristiane Rocha, Fernanda Barreto, Danielle Avanço, Adryanne Barreto, Pablo Egídio, Ana Paula Lima, Laís Thalita, Monalisa Cardoso, Flávia Myrella, Rita Batista, Itatiane Borges e Monique.

Agradeço a Clara Cavalcanti, Mário Dutra, Sorou, Vanessa de Melo, Anderson Henrique e Everton de Castro e às coordenadoras pelo tratamento tão acolhedor na secretaria do EDUMATEC, sempre dispostos a me ajudar e fazendo o melhor possível por todos.

À minha querida turma 2013, Deus escolheu vocês para fazerem parte da minha história. Agradeço a todos pelo carinho, atenção, contribuições e troca de ideias.

Agradeço à Propesq pelo financiamento parcial da minha viagem ao Espírito Santo em 2013 para apresentar trabalho no EBRAPEM.

Agradeço aos meus companheiros de trabalho do Sindicato dos Professores da Rede Municipal de Olinda – SINPMOL, por compreender a minha decisão de afastamento para o mestrado e de me apoiar nos momentos difíceis.

Agradeço à Prefeitura de Olinda e Recife, especialmente à Secretaria de Educação, por concederem o meu afastamento para cursar o mestrado. Terei o compromisso de retribuir tudo que aprendi em prol dos meus queridos alunos e de uma educação de qualidade.

Com carinho agradeço aos meus diretores: Rubens, Flávia e Rosemares Arouxa, por terem me ajudado em um momento tão difícil de minha vida, o início do Mestrado.

No momento da escrita do agradecimento, passou um filme na minha memória, a construção de uma história, de um trajeto percorrido e eu só tenho a agradecer por tudo isso. Por vocês terem participado da história do meu sonho, por sonharem comigo e não desistirem de mim.

Quem somos nós, quem é cada um de nós senão uma Combinatória de experiências, de informações, de leituras, de imaginações? Cada vida é uma enciclopédia, uma biblioteca, um inventário de objetos, uma amostragem de estilos, onde tudo pode ser completamente remexido e reordenado de todas as maneiras possíveis.

(CALVINO, 1990, p. 138)

RESUMO

O presente estudo buscou analisar o domínio conceitual de professores sobre os *invariantes* de problemas combinatórios a partir da elaboração de problemas e teve como objetivos específicos: identificar dificuldades e possibilidades de professores ao elaborarem problemas envolvendo o raciocínio combinatório e verificar se os professores aplicam os *invariantes* presentes nos problemas de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano. Como aporte teórico utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais, defendida por Vergnaud e o domínio dos conhecimentos necessários ao professor de Matemática, segundo Ball, Thames e Phelps. Participaram desse estudo sete professores licenciados em Matemática, que lecionam na rede Estadual de Pernambuco. Os professores responderam individualmente uma entrevista semiestruturada que foi audiogravada e durou em média 80 minutos. Na entrevista solicitamos informações para traçarmos o perfil dos professores, pedimos que os mesmos elaborassem problemas a partir das *situações* de cada tipo de problema combinatório e a partir dos invariantes do conceito. Buscamos, a partir dos problemas elaborados, informações sobre os conhecimentos dos professores em relação ao ensino, à aprendizagem, ao currículo e solicitamos que eles transformassem um tipo de problema em outro. Em relação à análise do perfil, foi evidenciado que todos participaram de cursos de formação continuada, tais como Especialização ou Mestrado, porém este aspecto não influenciou para que houvesse uma equivalência nos acertos, ou seja, as dificuldades e possibilidades apresentadas pelos docentes parecem não ter relação com o tipo de curso na formação continuada. Quanto ao processo de elaboração de problemas combinatórios, os professores elaboraram corretamente mais a partir das *situações* do que dos *invariantes do conceito*, exceto nos problemas de combinação. Parece-nos que os *invariantes do conceito* apresentados não foram suficientemente claros para a elaboração de problemas combinatórios, pois alguns professores fizeram relação com conceitos diferentes da Combinatória. Além disso, percebemos que os problemas elaborados são parecidos com os encontrados nos livros didáticos. Tiveram também dificuldade em diferenciar os invariantes de ordenação e escolha de elementos, de contextualizar e de estruturar os problemas combinatórios. Os problemas de permutação e arranjo foram o que os professores mais elaboraram corretamente, seguidos de combinação e produto cartesiano. Em relação aos conhecimentos dos professores sobre as semelhanças entre os problemas, constatamos que alguns indicaram serem problemas de contagem, conjuntos e subconjuntos, agrupamento e multiplicação. Sobre as diferenças, indicaram as particularidades, a forma de agrupar os elementos, de estrutura de cada tipo de problema e a ordenação e repetição de elementos. Quanto ao conhecimento relacionado ao currículo, a maioria dos professores reconheceu o 2º ano do Ensino Médio como ano oficial para trabalhar a Combinatória, mas também indicaram que o raciocínio combinatório pode ser trabalhado nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Indicaram que elaborar problemas combinatórios é mais difícil do que resolver, devido aos aspectos conceituais e pedagógicos, apenas um participante discordou. Evidenciaram que nos problemas combinatórios os alunos deveriam saber: interpretar, perceber as particularidades de cada tipo de problema e saber usar a fórmula adequada. Por fim, ao refletirmos sobre as transformações, ficou evidente que os professores que tiveram dificuldade de elaborar as transformações de problemas combinatórios foram os que não perceberam os *invariantes do conceito* e as particularidades de cada tipo de problema. Concluímos que o processo de elaboração de problemas combinatórios ajuda o professor a refletir sobre os conceitos envolvidos nas diferentes *situações* relacionadas à Combinatória, sobre os aspectos pedagógicos e a respeito do currículo.

Palavras-Chave: Elaboração de problemas. Combinatória. Situações. Invariantes. Ensino Médio.

ABSTRACT

The present study analyzed the conceptual domain of teachers about the invariants of combinatorial problems from the elaboration of problems and had as specific objectives: identify difficulties and possibilities of teachers when elaborating problems involving combinatory thinking and verify if the teachers apply the invariants present on the problems of permutation, arrangement, combination and cartesian product. We used the Theory of Conceptual Fields as a theoretical basis, defended by Vergnaud and the domain of the concepts needed by the Mathematics teacher, according to Ball, Thames and Phelps. Seven teachers with a degree in Mathematics who teach at the State School System of Pernambuco participated on this study. The teachers answered to an individual semi-structured interview that was audio recorded and lasted around 80 minutes. In the interview we requested informations to trace the profile of the teachers and asked them to elaborate problems from the situations of each combinatorial problem and from the invariants of the concept. We sought, from the elaborated problems, informations on the knowledge of the teachers regarding teaching, learning, curriculum, and asked them to transform a type of problem into another. When it comes to the analysis of the profiles, we noticed that all of them participated in continuous training courses, such as Specialization or Master's, however, this feature did not influence for there to be an equivalence of the hits, that is, difficulties and possibilities presented by the teachers did not seem to be related to the course taken during the continuous training. Regarding the process of elaborating combinatorial problems, teachers elaborated more correctly from situations than from the invariants of the concept, except on the combinatorial problems. It seems that the invariants of the concept presented were not clear enough to elaborate combinatorial problems, because some teachers related it to different concepts of Combinatorics. Besides, we also noticed the elaborated problems look like those found in didactical books. They also found it difficult to differentiate the invariants from ordering and element choice, from contextualizing and structuring combinatorial problems. Permutation and arrangement problems were the ones the teachers elaborated more correctly, followed by combination and cartesian product. About the knowledge of the teachers regarding the similarities between the problems, we found that some indicated to be counting, sets and subsets, grouping and multiplication problems. About the differences, they pointed out the particularities, the way of grouping the elements, the structure of each type, the order and repetition of elements. When it comes to the knowledge related to the curriculum, most of the teachers recognized the 2nd year of the High School as the official year to work Combinatorics, but they also indicated that combinatorial thinking can be worked in the initial and final years of Elementary School. They also indicated that elaborating combinatorial problems is harder than solving them, due to the conceptual and pedagogical features; only a participant disagreed. They highlighted that on the combinatorial problems students must know: interpret, notice the particularities of each kind of problem and how to use the proper formula. Finally, when thinking about the changes, it became clear that teachers who had difficult in elaborating the transformations of combinatorial problems were those who did not notice the invariants of the concept and the particularities of each type of problem. We concluded that the elaboration process of combinatorial problems helps the teacher to think about the concepts involved in the different situations related to Combinatorics, about the

pedagogical features and about the curriculum.

Keywords: Elaboration of problems. Combinatorics. Situations. Invariants. High School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Exemplo de resolução de problema de produto cartesiano através de árvore de possibilidades	31
Figura 2 –	Exemplo de resolução de problema de produto cartesiano através de listagem de figuras ilustrativas	32
Figura 3 –	Domínio do conhecimento do professor de Matemática	43

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Caracterização dos tipos de problemas que envolvem raciocínio combinatório (segundo Pessoa e Borba, 2008, 2009), a partir de exemplos de situações-problema, de <i>invariantes</i> e de fórmulas correspondentes	28
Quadro 2 –	Estruturação da entrevista com seus respectivos objetivos	55
Quadro 3 –	Informações a respeito do tempo de atuação, modalidade de ensino, atuação do docente e formação	55
Quadro 4 –	Perfil geral dos professores	62
Quadro 5 –	Resultados das elaborações dos problemas de permutação pelos professores pesquisados	65
Quadro 6 –	Acertos dos problemas de permutação elaborados a partir da <i>situação</i> e dos <i>invariantes</i>	66
Quadro 7 –	Protocolos para exemplificar as produções apropriadas, inapropriadas e as explicações de um conteúdo sem relação com a Combinatória, a partir da solicitação pelo tipo de problema (<i>situação/permutação</i>) e a partir dos <i>invariantes</i> específicos	68
Quadro 8 –	Resultados das elaborações dos problemas de arranjo pelos professores pesquisados	71
Quadro 9 –	Acertos dos problemas de arranjo elaborados a partir das <i>situação</i> e dos <i>invariantes</i>	72
Quadro 10 –	Protocolos para exemplificar os problemas apropriados, inapropriados, os exercícios e as explicações de um conteúdo sem relação com a Combinatória, a partir da solicitação pelo tipo de problema (<i>situação/arranjo</i>) e a partir dos <i>invariantes</i> específicos	74
Quadro 11 –	Resultados das elaborações dos problemas de combinação pelos professores pesquisados	77
Quadro 12 –	Acertos dos problemas de combinação elaborados a partir da <i>situação</i> e dos <i>invariantes</i>	78
Quadro 13 –	Protocolos para exemplificar os problemas elaborados de forma apropriada e inapropriada a partir da solicitação pelo tipo de problema (<i>situação/combinação</i>) e a partir dos <i>invariantes</i> específicos	80
Quadro 14 –	Resultados das elaborações dos problemas de produto cartesiano feitos pelos professores pesquisados	83
Quadro 15 –	Acertos dos problemas de produto cartesiano elaborados a partir da	83

situação e dos invariantes

Quadro 16 –	Protocolos para exemplificar os exercícios, explicações e problemas de produto cartesiano elaborados de forma apropriada e inapropriada a partir da solicitação pelo tipo de problema (<i>situação/produto cartesiano</i>) e a partir dos <i>invariantes</i> específicos	85
Quadro 17 –	Problemas elaborados corretamente a partir das diferentes <i>situações</i> e a partir dos <i>invariantes</i> específicos de cada tipo de problema	86
Quadro 18 –	Perguntas referentes ao terceiro momento da entrevista	88
Quadro 19 –	Semelhanças e diferenças elencadas dos problemas combinatórios elaborados	89
Quadro 20 –	Considerações feitas pelos professores a respeito da relação entre Combinatória e currículo na Educação Básica	95
Quadro 21 –	Reflexões dos professores acerca da elaboração e da resolução de problemas combinatórios	99
Quadro 22 –	Reflexões dos professores do Ensino Médio acerca dos alunos resolverem problemas combinatórios	105
Quadro 23 –	Discussão acerca das transformações dos problemas de arranjo em combinação e combinação em arranjo	114
Quadro 24 –	Discussão acerca das transformações dos problemas de permutação em produto cartesiano e de produto cartesiano em permutação	118

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	A FORMAÇÃO DE CONCEITOS E A COMBINATÓRIA	20
2.1	A Teoria dos Campos Conceituais	21
2.2	A formação de conceitos	24
2.3	O raciocínio combinatório	26
2.4	Investigações anteriores acerca do ensino e aprendizagem da Combinatória	34
3	CONHECIMENTOS DE PROFESSORES E A ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS	40
3.1	Conhecimento de professores	41
3.2	Elaborações de problemas	44
4	OBJETIVOS E MÉTODO	52
4.1	Objetivos	53
4.1.1	Geral	53
4.1.2	Específicos	53
4.2	Método	53
4.2.1	Participantes	53
4.2.2	Instrumento de coleta	54
5	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	60
5.1	Formação e atuação profissional dos professores	61
5.2	Análises dos resultados a partir dos problemas elaborados pelos professores, partindo das <i>situações</i> e dos <i>invariantes</i> dos problemas combinatórios	63
5.2.1	Problemas de permutação elaborados a partir das <i>situações</i> (tipos de problemas) e dos <i>invariantes</i> (características)	65
5.2.2	Problemas de arranjo elaborados a partir das <i>situações</i> (tipos de problemas) e dos <i>invariantes</i> (características)	70
5.2.3	Problemas de combinação elaborados a partir das <i>situações</i> (tipos de problemas) e dos <i>invariantes</i> (características)	76
5.2.4	Problemas de produto cartesiano elaborado a partir das <i>situações</i> (tipos de problemas) e dos <i>invariantes</i> (características)	82
5.2.5	Sistematizando o que discutimos até o momento...	86
5.3	Análises das reflexões dos professores acerca dos problemas combinatórios	87
5.3.1	Semelhanças e diferenças: O que os professores pensam quando elaboram problemas combinatórios?	88
5.3.2	Compreensões dos professores sobre Combinatória e currículo	94
5.3.3	Elaborar ou resolver problemas combinatórios: considerações dos professores do Ensino Médio	98
5.3.4	Considerações acerca da elaboração de problemas combinatórios	104
5.4	Transformando os problemas combinatórios: reflexões a partir das <i>situações</i> , dos <i>invariantes</i> envolvidos no raciocínio combinatório	113
5.4.1	Transformando arranjo em combinação e combinação em arranjo	113
5.4.2	Transformando permutação em produto cartesiano e produto cartesiano em permutação	117

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	123
	REFERÊNCIAS	128
	APÊNDICE: O ROTEIRO DA ENTREVISTA	135

1 INTRODUÇÃO

O presente estudo tem como objetivo analisar o domínio conceitual de professores de Matemática na elaboração de problemas combinatórios a partir dos *invariantes do conceito*, ou seja, a partir das propriedades que o caracterizam.

Resultados de pesquisas anteriores têm mostrado a construção e o domínio do conceito da Combinatória na resolução de problemas por alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e também de professores do Ensino Básico a respeito da Combinatória. No entanto, procuramos entender o domínio do conceito quando professores do Ensino Médio elaboram problemas combinatórios. Levamos em consideração a autonomia que os professores poderiam ter ou não ao analisar os problemas que constam nos livros didáticos quando os mesmos trabalham com os problemas combinatórios e também no momento em que os professores exemplificam oralmente ou por escrito nas suas aulas os tipos de problemas combinatórios. Possivelmente o processo de elaboração de problemas combinatórios irá permitir que o professor reflita mais sobre os *invariantes do conceito*. Além disso, podemos citar que elaborar problemas é uma recomendação dos documentos oficiais (PERNAMBUCO, 2012).

Os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio (PERNAMBUCO, 2012, p. 118-119, 138-139) sugerem que seja trabalhada a Combinatória no bloco de conteúdos referentes aos Números e Operações e indica algumas atividades a serem desenvolvidas pelos professores no 8º e 9º ano, referentes ao Ensino Fundamental e 10º, 11º e 12º anos, referentes ao Ensino Médio:

Resolver e elaborar problemas de contagem que envolvam o princípio multiplicativo, por meio de registros variados (diagrama de árvore, tabelas e esquemas), sem o uso de fórmulas. Resolver e formular problemas que envolvam diferentes operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação). Resolver e elaborar problemas de contagem, envolvendo ideias de permutação, combinação e arranjo, usando estratégias diversas, sem uso de fórmulas. Resolver e elaborar problemas de Combinatória envolvendo a ideia de permutação (estratégias básicas de contagem). Resolver e elaborar problemas de Combinatória, envolvendo a ideia de combinação. Resolver e elaborar problemas de combinatória envolvendo a ideia de arranjo. Resolver e elaborar problemas de Combinatória envolvendo a ideia de permutação (estratégias básicas de contagem). Resolver e elaborar problemas de combinatória envolvendo a ideia de combinação. Resolver e elaborar problemas de Combinatória envolvendo a ideia de arranjo (PERNAMBUCO, 2012, p. 118-119, 138-139).

A indicação dos Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio (PERNAMBUCO, 2012) é permeada pela resolução de problemas, como também pela elaboração de problemas combinatórios. Este trabalho é proposto de forma mais elementar nos 8º, 9º e 10º anos e com um nível de maior complexidade nos 11º e 12º anos. A estratégia de uso do princípio multiplicativo-PM é apenas sugerida e no início do trabalho não há uma ênfase no uso de fórmulas para que os problemas sejam resolvidos.

Diante do que foi exposto, consideramos que o professor, para solicitar atividades de resolução e de elaboração de problemas combinatórios para seus alunos, precisa conhecer e trabalhar bem essas duas situações (resolução e elaboração de problemas).

Nos PCN + Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002), são evidenciados eixos ou temas estruturadores para serem trabalhados, visando o desenvolvimento das competências referentes aos seguintes tópicos: álgebra; números e funções; geometria e medidas; análise de dados. O eixo análise de dados envolve a estatística, a contagem e a probabilidade, colocando-se que a contagem possibilita trabalhar com a probabilidade e o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Nos PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002), evidenciam os conteúdos e as habilidades elencadas para o desenvolvimento das competências a serem trabalhadas no tema estruturador da contagem são as seguintes:

Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem. Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações, com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos. Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem. Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem (BRASIL, 2002, p.127).

O trabalho com os problemas de contagem estão sendo indicados para serem desenvolvidos no Ensino Médio. No presente estudo abordamos a relevância de trabalhar os problemas de contagem no processo de elaboração.

Para fundamentar a nossa pesquisa, escolhemos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986). O referido autor indica que um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de *situações*, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos

e de representações simbólicas em estreita conexão. Assim, para este teórico, um conceito pode ser definido como um tripé de três conjuntos (S, I, R), sendo: **S**: um conjunto de *situações* que dão sentido ao conceito; **I**: um conjunto de *invariantes* que constituem as diferentes propriedades do conceito; **R**: o conjunto das *representações simbólicas* que podem ser utilizadas. A teoria de Vergnaud fornece subsídios teóricos que ajudam a entender como a Combinatória pode ser compreendida por alunos ou professores.

Buscamos entender a elaboração dos problemas combinatórios por professores de Matemática a partir das *situações* e dos *invariantes do conceito* presentes nos problemas combinatórios, elencados por Pessoa e Borba (2009), à luz da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1986).

Na elaboração de problemas, refletimos sobre a importância de textos matemáticos a partir das discussões permeadas por Polya (1977), Smole e Diniz (2001), Dante (2009), e outros autores que trazem considerações a respeito do texto no ensino da Matemática e da importância de ler, escrever e elaborar textos. No caso do presente estudo, consideramos os textos referentes aos problemas combinatórios elaborados por professores de Matemática do Ensino Médio.

Na Seção 2 desta Dissertação discutimos a Teoria dos Campos Conceituais e as relações presentes com a nossa pesquisa. Para isso, buscamos, então, uma fundamentação teórica em Vergnaud (1982, 1986, 1990, 1991, 1995, 2003), para refletir sobre a Teoria dos Campos Conceituais, especificamente sobre a construção de conceitos e a relação com a Combinatória. Apresentamos pesquisas anteriores sobre o raciocínio combinatório, a respeito da formação de professores e da aprendizagem dos alunos. Na revisão de literatura utilizamos os resultados de pesquisas de Morgado (1991), Lima et al (1998), Pessoa e Borba, (2009, 2010), Pessoa (2009), Borba (2010), Lima e Borba (2010), Rocha e Borba (2010), Barreto e Borba (2010), Rocha (2011), Borba (2012), Pontes e Borba (2012), Borba e Braz (2012), Assis e Pessoa (2013), Borba (2013), Silva e Pessoa (2013), Lima e Borba (2014), Santos e Pessoa (2014) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio (BRASIL, 2002), Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática (BRASIL, 2007), Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio (PERNAMBUCO, 2012).

Na Seção 3 discutimos a importância de elaborar problemas de Matemática, especificamente a elaboração de problemas combinatórios. Abordamos a importância da produção textual no currículo da Matemática segundo Smole (2001), Klüsener (2006), Santos (2009) e Silva (2014), discutimos a definição de problemas baseado em Chica (2001) e

Miguel (2005) e os objetivos referentes ao ensino da matemática segundo Dante (2009), a importância de trabalharmos com a resolução e produção de problemas de acordo com Silva (2014). Também discutimos sobre as reflexões dos problemas através da análise de elaborações de problemas com os alunos segundo Guimarães e Santos (2009). Refletimos sobre as etapas importantes de serem consideradas no processo de resolução de problemas de acordo com Polya (1977). Além disso, abordamos a respeito das diversas maneiras indicadas por Chica (2001) dos alunos produzirem problemas e as *situações* relacionadas à Combinatórias elencadas por Pessoa e Borba (2009). Refletimos a respeito do processo de formação de professores, especificamente a respeito dos conhecimentos necessários ao professor no que se refere ao conteúdo e à prática de ensino. Para tal, abordamos as categorias de base do conhecimento do professor de todas as áreas de ensino elencados por Shulman (2005) e os domínios e subdomínios indicados por Ball et al (2008) que foram referendados em Shulman (2005). Os autores tratam do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Na Seção 4 elencamos o objetivo geral e os objetivos específicos propostos, a questão da pesquisa e apresentamos o método e todo o percurso metodológico a fim de atender ao nosso objetivo geral da pesquisa, que é analisar o domínio conceitual de professores sobre a Combinatória a partir da elaboração de problemas.

Na Seção 5 apresentamos os resultados do estudo, buscando responder os objetivos propostos da pesquisa.

Nas considerações finais apresentamos as reflexões acerca dos dados obtidos a respeito da elaboração de problemas por professores do Ensino Médio, a partir das diferentes *situações* que podem ser trabalhadas nos problemas combinatórios e dos *invariantes do conceito*, de reflexões sobre o currículo, do ensino, da aprendizagem e de transformações de um tipo de problema em outro tipo.

2. A FORMAÇÃO DE CONCEITOS E A COMBINATÓRIA

Nessa seção, discutimos a Teoria dos Campos Conceituais apresentada por Vergnaud (1990) e a relação presente entre a formação do conceito e a Combinatória, segundo Pessoa e Borba (2009), visando refletir sobre o processo de elaboração de problemas a partir das *situações* e dos *invariantes do conceito*. Apresentamos resultados de pesquisas anteriores que discutem a respeito do ensino e da aprendizagem da Combinatória.

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

Vergnaud (1990) define que a Teoria dos Campos Conceituais é cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e de aprendizagens de competências complexas, mais particularmente daquelas que pertencem aos domínios científico e tecnológico. Para Vergnaud (1991) a construção de conceitos se desenvolve em um longo período de tempo e através da diversidade das *situações*. Portanto, podemos afirmar que a construção de um conceito na Matemática perpassa por um processo de desenvolvimento cognitivo ao longo dos anos, em que o sujeito precisa lidar com um conjunto de *situações* diferentes, tanto com atividades mais elementares quanto com as que têm um nível maior de complexidade. Assim, Vergnaud (1990) propõe que um conceito não pode ser ensinado de forma isolada, pois em uma situação há vários conceitos envolvidos. Desse modo, o sujeito, sendo ele professor ou aluno, precisa entender os conceitos envolvidos em cada tipo de problema combinatório. Além disso, podemos destacar também que um conceito pode estar presente em várias *situações*. Nessa perspectiva, precisamos pensar nos conceitos envolvidos em uma determinada situação e também um determinado conceito que pode estar presente em diferentes *situações*. É importante que o professor perceba a relevância de trabalhar o raciocínio combinatório considerando as situações, as propriedades¹ *invariantes* e as *representações*.

Como pontuado na introdução deste trabalho, de acordo com Vergnaud (1990), um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de *situações* cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de *representações simbólicas* em estreita conexão. Um conceito é formado por um tripé de três conjuntos (S, I, R), sendo:

S: um conjunto de *situações* que dão sentido ao conceito;

I: um conjunto de *invariantes* que constituem as diferentes propriedades do conceito;

¹ No presente estudo estamos utilizando os termos *características* e *propriedades* como sinônimos quando tratamos dos invariantes, pois com os professores, nas entrevistas, optamos por usar *características* por ser um termo mais claro e de uso corrente do que *propriedades*, termo utilizado por Vergnaud em sua teoria.

R: o conjunto das *representações* simbólicas que podem ser utilizadas.

No presente estudo tratamos de analisar as elaborações de problemas, partindo das *situações* e dos *invariantes do conceito*, pois consideramos que o professor em sala de aula, ao abordar determinado conceito, possivelmente precisa entender que não basta mostrar para o aluno apenas uma situação em que o conceito está envolvido, pois o mesmo quando se deparar com outras *situações* poderá ter dificuldade de desenvolver o problema proposto. De acordo com Magina, Nunes, Campos e Gitirana (2008) um conceito matemático tem sentido a partir de uma variedade de *situações*.

Para Vergnaud (2003), a Teoria dos Campos Conceituais trata do desenvolvimento e indica que é necessário conceber um processo cognitivo, de modo que o desenvolvimento possa ser visto de forma inteligente de organização da atividade de uma pessoa durante a sua experiência. O teórico elenca algumas considerações que enfatizam a necessidade de estudar os campos conceituais e não conceitos isolados, tais como:

- a) uma situação pode não explorar todas as propriedades de um conceito, portanto, é imprescindível que haja uma diversidade de *situações*;
- b) uma situação dada requer o conhecimento de vários conceitos existentes;
- c) a formação de um conceito ocorre através das atividades de resolução de problemas; conseqüentemente, devem ser consideradas as interações, o tempo e as defasagens.

Segundo Vergnaud (1982), a resolução de um problema representa a fonte e o saber operatório, pois permite oferecer aos alunos situações que visam a entender a significação do conceito, a experimentação das competências e as concepções dos alunos. Além disso, o autor aborda que as competências e as concepções se desenvolvem em um longo período de tempo e que estudar um conceito de forma isolada não tem nenhum sentido; ele recomenda que sejam estudados os diferentes conceitos presentes em campos conceituais e não apenas conceitos isolados, já que os campos conceituais são interdependentes e interagem entre si. O teórico chama a atenção para que, ao invés de serem propostos os mesmos questionamentos aos alunos, possamos considerar as *situações* diferentes com níveis mais aprofundados de complexidades, sendo permitido ver um novo aspecto do mesmo conceito, de um conjunto de conceitos e até de um conceito novo.

Para refletir sobre a compreensão e utilização de conceitos, Vergnaud trata dos esquemas operatórios. Pessoa (2009) aborda que as competências desenvolvidas pelo sujeito são provenientes dos esquemas estabelecidos pelos mesmos e segundo Vergnaud (1998) o

esquema é justamente a relação existente entre a organização invariante do comportamento, frente a uma classe de *situações* existentes, ou seja, a forma como o sujeito percebe uma determinada situação irá conduzir a sua ação para tentar resolver os problemas existentes, seja de ordem proveniente de comportamentos familiares, como também de compreensão e descrição da resolução de problemas.

A ação do sujeito pode acontecer de maneira consciente, com apropriação do que está fazendo ou de forma errônea e mecânica, porém revela a forma como é estabelecido cognitivamente o esquema. Pessoa (2009) discute que, se o sujeito utiliza o mesmo esquema para *situações* diferentes é porque determinou que os mesmos *invariantes* estão presentes nas *situações*. E quando o sujeito destaca *invariantes* diferentes, ele percebe que é necessário utilizar esquemas diferentes para a resolução do problema.

Vergnaud (1998, p. 173) estabelece os pontos principais de um esquema:

Metas (objetivos) e antecipações, pois um esquema está orientado sempre a uma determinada classe de *situações*;
 Regras de ação, o sujeito busca por informações e controle, os quais são os elementos que dirigem a sequência de ações do sujeito;
 Invariantes operatórios (*teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação*) que dirigem, por parte do sujeito, os elementos pertinentes à situação e, portanto, guiam a construção dos modelos mentais;
 Possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem determinar as regras e antecipações a partir das informações e dos invariantes operatórios dos quais dispõe o indivíduo (VERGNAUD, 1998, p. 173).

Os invariantes operatórios referem-se aos modelos mentais estabelecidos pelo sujeito no momento da ação e de acordo com Vergnaud (1991) são categorizados pelos *teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação* que são importantes para a construção do desenvolvimento cognitivo.

Segundo Vergnaud (1998) os *conceitos-em-ação* referem-se à maneira como o sujeito estabelece os conceitos diante de uma determinada situação. Os conceitos estabelecidos podem ser adequados ou não à situação apresentada, porém a forma como o sujeito representa o conceito pensado é justamente o *conceito-em-ação* que é colocado em prática.

Tratando-se da elaboração de problemas combinatórios, é possível analisarmos a ação do sujeito frente a algumas *situações* que envolvem o raciocínio combinatório, permitindo então estabelecer e compreender os conceitos envolvidos na Combinatória e a maneira como os sujeitos representam no momento que estão elaborando problemas.

Os teoremas-em-ação, segundo Vergnaud (1998), são proposições consideradas pelo sujeito como verdadeiras, frente a uma situação real. É justamente a forma como os mesmos pensam sobre determinado conceito.

No momento das elaborações de problemas, os invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) são colocados em prática pelos professores, pois as atividades cognitivas são estabelecidas de acordo com os modelos mentais inerentes ao sujeito.

No presente estudo, focamos a atenção nos *invariantes do conceito* (no caso da Combinatória, escolha e ordenação de elementos, segundo Pessoa e Borba (2010)), e não nos *invariantes operatórios*.

2.2 A formação de conceitos

Em se tratando da Combinatória, percebemos que há um conjunto de situações no qual podemos trabalhar o raciocínio combinatório. As *situações* da Combinatória destacadas por Pessoa e Borba (2009) são os problemas de arranjo, de combinação, de permutação, e também agregam os problemas de produto cartesiano no universo dos problemas combinatórios, que podem ser vivenciados fora da sala de aula de modo informal, nas *situações* cotidianas, sem haver a necessidade de esgotar todas as possibilidades possíveis de uma situação que envolve a Combinatória. Na sala de aula, o trabalho poderá ocorrer de maneira mais sistematizada, tendendo à generalização das informações. Além disso, é importante que seja também discutido no processo de formação inicial e continuada dos professores.

O professor, ao propor *situações* que envolvam o raciocínio combinatório, precisa perceber quais são os conceitos que podem ser explorados em tal situação, qual o nível de complexidade que terá para os alunos em determinado ano de ensino e o processo de construção do domínio do conceito ao longo do período da aprendizagem.

Os diferentes tipos de problemas combinatórios permitem que o professor possa trabalhar o raciocínio combinatório em diferentes *situações*. Contudo, é necessário que o professor tenha um domínio conceitual acerca do que rege a natureza de cada problema combinatório, para poder discutir e propor as diversas *situações* presentes na Combinatória, sendo possível trabalhar, conforme foi dito acima, com os problemas de arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano.

Os *invariantes do conceito* ou de uma forma de raciocinar combinatoriamente indicam as diferentes propriedades do conceito. Já os invariantes operatórios revelam as atividades cognitivas do sujeito frente a uma situação real. Vergnaud (1982) destaca que um *invariante* é

uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um determinado conjunto de transformações. Compreender quais são os *invariantes* presentes em cada tipo de problema combinatório permite que possamos diferenciá-los e, assim, como professores, tratá-los de maneiras distintas, explorando cada uma das suas características/propriedades. Cada tipo de problema combinatório tem suas especificidades em relação aos *invariantes* presentes, portanto, como afirmado, é importante que os professores e alunos conheçam e compreendam o raciocínio combinatório, pois tal competência será imprescindível para que ocorra a diferenciação dos tipos de problemas combinatórios, a resolução e a elaboração de problemas.

Possivelmente quando o professor vai elaborar um problema combinatório, ele deve utilizar os *invariantes* pertencentes a determinado tipo de problema combinatório, fazendo a relação entre a *situação* que envolve a Combinatória, os *invariantes* presentes na *situação* e também pensar nas *representações* existentes que possibilitam o aluno a resolver o problema.

Na elaboração de problemas combinatórios o professor colocará em prática o entendimento de cada tipo de problema e, conseqüentemente, poderá entrar em conflito em relação ao conceito, sendo possível pensar nas particularidades existentes nos problemas de arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano. Além disso, o professor, ao elaborar problemas ou utilizar os problemas combinatórios já existentes nos livros didáticos, poderá ter um olhar voltado para as diferentes *situações* presentes na Combinatória e as características/propriedades que envolvem o conceito.

Ao nos reportamos às representações, consideramos que não é nada fácil para o professor e nem para o aluno, pois é uma forma de expressar simbolicamente o que o sujeito pensa sobre determinado problema matemático ou ainda o resultado de uma resolução explicitada corretamente ou não. Podemos dizer que há diferentes maneiras corretas de *representar* uma *situação* e os *invariantes* envolvidos de forma implícita na *representação*. Diante desse quadro é imprescindível que o professor tenha um olhar sensível sobre a resolução do aluno apresentada de diferentes maneiras, considerando assim, as diversas formas de representação. Portanto, podemos propor as seguintes indagações: *O que é representar? E representar simbolicamente?* Podemos dizer que é uma maneira de pensar nos conceitos envolvidos em uma determinada situação, nos invariantes presentes e unir todas as informações para depois decidir como será registrado o resultado das ideias, colocando em prática o conceito-em-ação e o teorema-em-ação, estabelecido por Vergnaud (1998). Entretanto representar simbolicamente não é nada fácil, pois requer uma interação das variáveis envolvidas (*situações* e *invariantes* relacionadas ao conceito). As *representações*

simbólicas são a maneira como os alunos representam o pensamento em relação a determinado conceito, como já foi discutido anteriormente.

Podemos destacar que um conceito pode ser constituído por diferentes *representações* simbólicas; do mesmo modo que uma forma de *representação* pode ser usada em diferentes *situações* presentes na Combinatória. Vergnaud (1995) aborda que é importante valorizar o papel da linguagem e dos símbolos para o pensamento, mesmo que não sejam conceitos ou operações conceituais, mas sendo vistos como suporte para os mesmos. Combinatória Pessoa e Borba (2009) abordam que os alunos podem representar as possibilidades de um problema através da listagem, da árvore de possibilidades, dos desenhos, das fórmulas, dentre outras.

As diferentes formas de *representar* o pensamento, ou seja, as *representações simbólicas* permitem que o sujeito (professor ou aluno) expresse da melhor forma o seu entendimento a respeito de uma determinada situação e também os *invariantes* referentes ao conceito. A seguir tratamos de discutir o raciocínio combinatório considerando as *situações* presentes, os respectivos *invariantes* e as *representações*.

2.3 O raciocínio combinatório

Podemos dizer que o raciocínio combinatório está presente em diversas situações do nosso dia a dia, no qual podemos compor as possibilidades de agrupamentos através das escolhas feitas. No entanto, no cotidiano não necessariamente esgotamos todas as possibilidades presentes em uma situação. Segundo Borba (2010) o raciocínio combinatório é:

[...] um modo de pensar presente na análise de *situações* nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010, p.3).

Consequentemente, compreender os *invariantes* (ordem e escolha dos elementos) nos problemas combinatórios é essencial, pois indicará o que os diferencia. Portanto, esses *invariantes* são relevantes nas discussões ao longo do processo de formação, pois os professores devem utilizá-los tanto na resolução de problemas combinatórios como também na sua elaboração.

De acordo com os PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002):

A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis, não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2002, p.126).

Aos três tipos de problemas combinatórios (arranjo, permutação e combinação) elencados por Morgado (1991), Pessoa (2009) acrescenta o produto cartesiano ao conjunto de problemas combinatórios. A seguir, apresentamos o Quadro 01, extraído de Pessoa (2009), no qual são apresentados os tipos de problemas combinatórios (*situações*), exemplos de situações-problema, os *invariantes* associados ao tipo de problema e as fórmulas possíveis de resolver os problemas.

Quadro 1- Caracterização dos tipos de problemas que envolvem raciocínio combinatório (segundo Pessoa e Borba, 2008, 2009), a partir de exemplos de *situações-problema*, de *invariantes* e de fórmulas correspondentes

	Exemplos de Situações-problema	Invariantes	Representação em Fórmulas
Produto Cartesiano	Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?	- Dado dois (<i>ou mais</i>) conjuntos distintos (com n e complementos), os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto. - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.	$PC = n \times p$
Permutação simples (sem repetição)	Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.	- Todos os n elementos do conjunto serão usados; - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.	$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$
Arranjo simples (sem repetição)	O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$ - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.	$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ $n \geq p$
Combinação simples (sem repetição)	Uma escola tem 9 professores, dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 5 professores pode-se formar?	- Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$ - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.	$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$ $n \geq p$

Fonte: Pessoa (2009, p. 81).

No problema de produto cartesiano, a escolha de elementos será a partir de dois ou mais conjuntos diferentes. A exemplificação de produto cartesiano no Quadro 1, há dois conjuntos distintos: o de meninos (Pedro, Gabriel e João) e meninas (Maria, Clara, Luiza e Beatriz), ocorrendo duas etapas de escolhas². Podemos dizer que há 12 possibilidades distintas de formar os pares, sendo quatro possibilidades para cada menino (Pedro e Maria; Pedro e Clara; Pedro e Luiza; Pedro e Beatriz.), como há 3 meninos, são formadas, como já colocado, 12 possibilidades.

No problema de permutação sem repetição de letras, existe a solicitação de formação de anagramas a partir das letras da palavra **AMOR**, há apenas um conjunto e todos os elementos são utilizados ao mesmo tempo nas escolhas das possibilidades. Quando mudamos a ordem desses elementos geramos novas possibilidades.

No problema de arranjo há apenas um conjunto de elementos, porém, nem todos os elementos serão utilizados ao mesmo tempo para gerar as possibilidades. No caso do problema exemplificado acima, Brasil, França, Alemanha e Argentina constituem os elementos dos conjuntos e o problema indica a escolha dos três primeiros colocados, pois ser o primeiro colocado é diferente de ser o segundo e o terceiro; no entanto, a ordem dos elementos gera possibilidades distintas.

Já no problema de combinação há apenas um conjunto de elementos, porém na elaboração das possibilidades nem todos os elementos são usados ao mesmo tempo. O Quadro 1, mostra o problema de combinação em que há nove elementos no conjunto (professores); no entanto, para formar as possibilidades, apenas escolhemos cinco elementos de cada vez (professores que irão representar a escola em um congresso). Nesse tipo de problema, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, pois quando nos referimos aos cinco participantes do congresso e resolvemos mudar a sua ordem de chamada, o conjunto continua sendo o mesmo. Diante desta discussão, a partir dos tipos de problemas elencados por Pessoa e Borba (2008, 2009), podemos evidenciar a importância de professores e alunos entenderem o que se refere à ordem e escolha de elementos nos problemas combinatórios, pois são aspectos essenciais para a construção do conceito que rege a natureza dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

Percebemos que a estruturação de cada tipo de problema também é muito importante para resolver e elaborar problemas combinatórios. Partindo deste princípio, buscamos compreender: *Professores conseguem diferenciar um problema combinatório do outro a*

² De acordo com Vega (2014, p. 18) “Etapas de escolha referem-se ao número de escolhas que devem ser efetuadas em problemas combinatórios”.

partir desses invariantes? Quando professores elaboram problemas, pensam nos invariantes presentes em cada tipo/situação de problema combinatório? Essas são questões que nos levam a pensar no domínio conceitual que os professores têm em relação aos diferentes problemas combinatórios.

Podemos considerar ainda nos problemas combinatórios outros aspectos importantes, tais como: a relação de repetição de elementos, os problemas combinatórios condicionais de posicionamentos e de proximidade de elementos apontados por Borba e Braz (2012), as etapas de escolhas contidas nos problemas analisados por Pontes e Borba (2012), a ordem das grandezas resultante de menor ou maior número de possibilidades e o contexto em que os problemas estão inseridos, discutido por Santos e Pessoa (2014).

Quando o professor elabora um problema, espera-se que ele pense nos aspectos relacionados ao próprio conceito, como também no instrumental pedagógico que melhor atenda às especificidades do ano de ensino no qual o referido professor irá trabalhar. Nesta direção, diversas pesquisas investigaram alguns dos aspectos elencados acima, os quais serão apresentadas ainda na presente seção.

As *representações* para apresentação e resolução dos quatro diferentes tipos de problemas combinatórios podem ser diversas, tais como: árvores de possibilidades, listagens, diagramas, quadros, desenhos, fórmulas, princípio fundamental da contagem, dentre outras.

A seguir, destacamos os diversos tipos de representação, a partir de um problema de produto cartesiano.

Pedro resolveu comprar dois tipos de pão (pão de forma e pão francês) e três tipos de queijo (coalho, prato e mussarela) para fazer um sanduíche. De quantas maneiras Pedro pode fazer o seu sanduíche se usar apenas um tipo de pão e um tipo de queijo de cada vez?

Enfatizamos que o problema de produto cartesiano supracitado pode ser resolvido através de diferentes representações, por exemplo:

a) Listagem

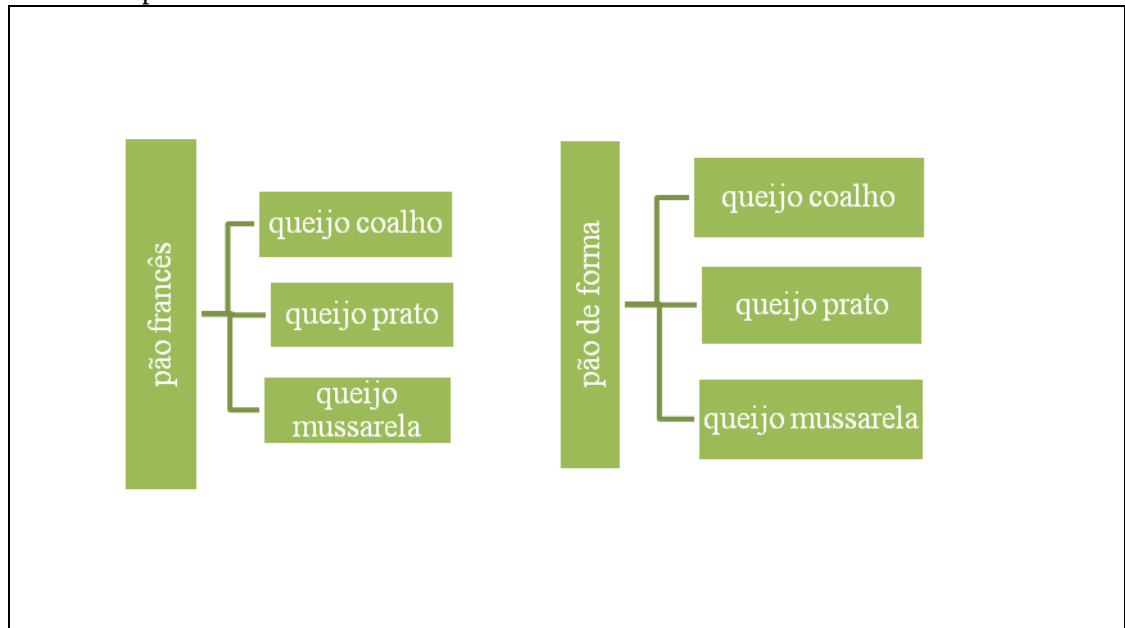
Pão de forma e queijo coalho	Pão francês e queijo coalho
Pão de forma e queijo prato	Pão francês e queijo prato
Pão de forma e queijo mussarela	Pão francês e queijo mussarela

Resolução de problema de produto cartesiano através de listagem de possibilidades. Esse é um tipo de procedimento que pode ser utilizado pelos alunos sem haver a necessidade

de conhecer fórmulas, o que pode ser uma excelente estratégia para ser trabalhado o raciocínio combinatório a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

b) Árvore de possibilidades

Figura 1. Exemplo de resolução de problema de produto cartesiano através de árvore de possibilidades

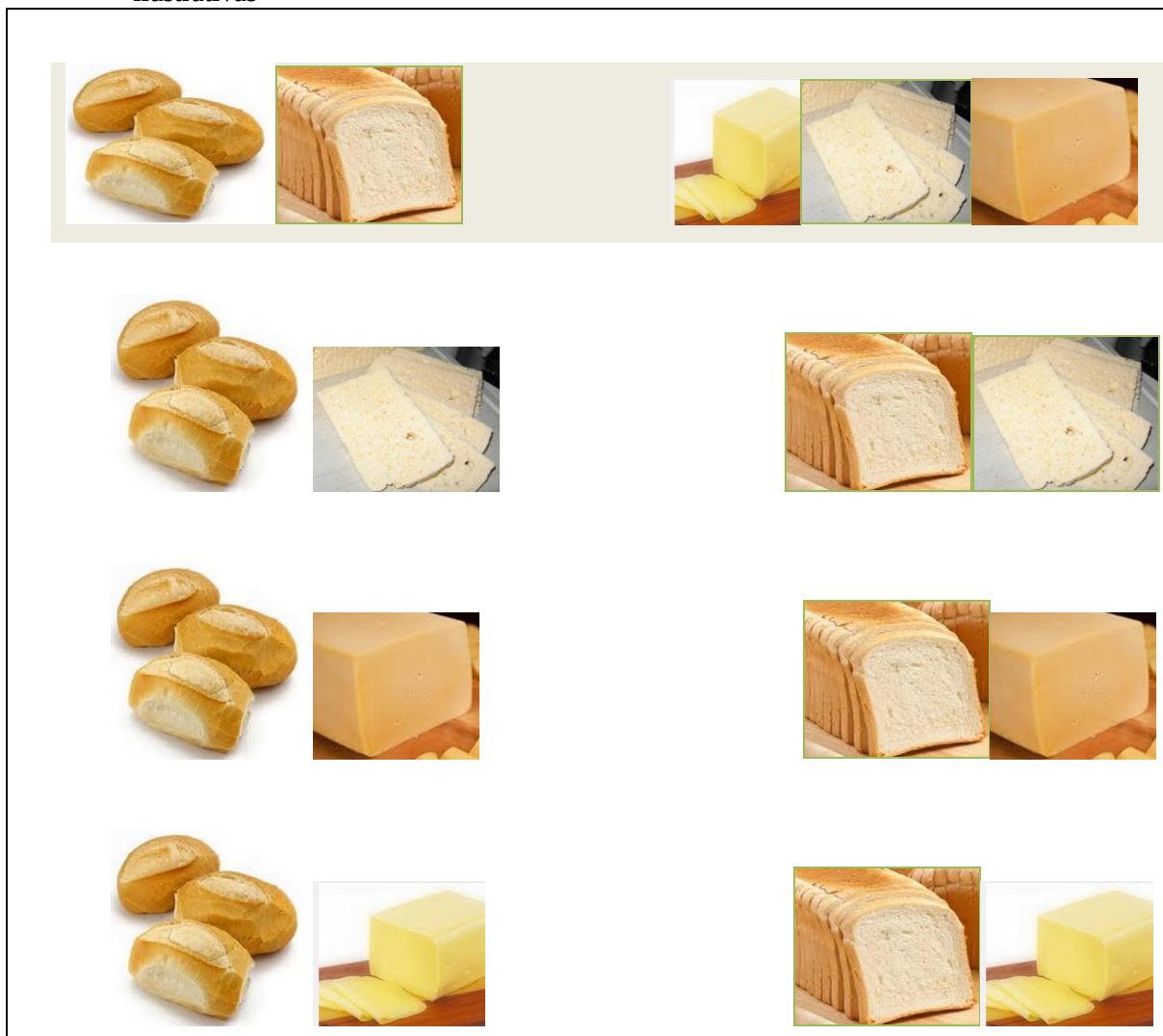


Fonte: A autora

A árvore de possibilidades é uma estratégia que pode ser utilizada para compreender melhor as possibilidades existentes, nesse caso, nos referimos aos sanduíches. De acordo com Borba e Azevedo (2012) corroborando com Fischbein (1975), a árvore de possibilidades ajuda os estudantes a entenderem melhor as diferentes *situações* que envolvem a Combinatória. Então esse tipo de estratégia pode ser utilizada para resolver os problemas de arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano.

c) **Desenhos ou figuras ilustrativas**

Figura 2. Exemplo de resolução de problema de produto cartesiano através de listagem de figuras ilustrativas



Fonte: A autora

O desenho ou figuras ilustrativas são representações que podem ser trabalhadas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, permitindo que o sujeito exemplifique as possibilidades e expresse o raciocínio combinatório.

d) Princípio Fundamental da Contagem-PFC ou Princípio multiplicativo-PM

$2 \times 3 = 6$ ou seja, seis possibilidades distintas de fazer o sanduíche.

O PFC é uma estratégia utilizada para resolver os problemas combinatórios. De acordo

com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997, p.40) "relativamente à Combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com *situações-problema* que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem". Apesar dos PCN agruparem o Princípio Fundamental da Contagem - PFC aos problemas combinatórios defendemos, assim como Pessoa e Borba (2010), que o PFC ou o PM se trata de uma estratégia utilizada para resolver todos os diferentes tipos de problemas combinatórios; portanto, não é considerado um tipo de problema e sim uma estratégia.

Lima et al (1998, p. 85) definem o PFC enfatizando os possíveis modos de tomarmos decisões, abordando que "Se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y modos de tomar a decisão D2, então, o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é xy ".

e) Uso da fórmula

$$PC = n \times p$$

Diante das diferentes *representações* apresentadas (listagem, árvore de possibilidades, desenhos, princípio fundamental da contagem e fórmulas), pensamos que é importante permitir que os alunos representem a resolução de um problema combinatório da forma como acharem mais viável e que os professores também possam oportunizar para seus alunos o conhecimento de representações variadas para a resolução de um mesmo problema.

O uso da fórmula apresenta um nível de abstração maior e permite que os alunos resolvam problemas combinatórios em que há um grande número de possibilidades envolvidas na situação apresentada. Portanto, defendemos que o importante é que os *invariantes do conceito* é que devem ser percebidos e diferenciados pelos alunos, deixando-os livres para resolver o problema como melhor lhe convém. Então, como discutido acima, o professor terá de oportunizar em sala de aula o uso de diferentes estratégias.

No momento da elaboração de problemas, os professores devem pensar nas possíveis estratégias de solução para aquela questão, por exemplo, ao elaborar um problema com um número grande de possibilidades como resposta, poderá pensar que a forma mais provável de resolução seja a fórmula, se elaborar um problema em que o resultado é um número menor de possibilidades, poderá pensar que diversas estratégias aparecerão.

2.4 Investigações anteriores acerca do ensino e da aprendizagem da Combinatória

A seguir, apresentamos estudos sobre Combinatória, os quais auxiliam a nossa reflexão sobre o presente estudo.

Lima e Borba (2014) buscaram investigar em quais tipos de problemas combinatórios os docentes de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio utilizavam como estratégia de resolução o PFC e se o mesmo é reconhecido para resolver os problemas com diferentes etapas. As pesquisadoras também compararam o desempenho dos professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Para isso, obtiveram o banco de dados apresentando resultados de um teste contendo oito questões de Combinatória (duas de cada tipo: arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano), sendo o primeiro com quatro etapas de escolha e o segundo com 5 etapas de escolha que foram aplicados para 37 estudantes do Ensino Médio, 13 professores de Matemática do Ensino Fundamental e 11 professores de Matemática do Ensino Médio. Os resultados da pesquisa apontaram que, apesar do desempenho dos professores do Ensino Médio ter sido melhor em relação aos professores do Ensino Fundamental, não houve diferença significativa entre os grupos de professores, apenas ocorreu diferença significativa em relação à utilização do PFC para resolver os problemas de arranjo e combinação. Também não ocorreu diferença nos problemas com quatro e cinco etapas de escolha, apenas foi constatado que a maior dificuldade foi no problema de combinação em que o PFC é utilizado duas vezes para efetuar a resolução, principalmente nos problemas com cinco etapas de escolha.

Outro estudo o qual investiga conhecimentos de professores é o de Rocha e Borba (2010). Evidenciaram haver poucas pesquisas tratando da formação de professores e do ensino da Combinatória, principalmente nos anos iniciais e/ou finais do Ensino Fundamental. O trabalho dessas pesquisadoras buscou analisar a concepção de professores sobre o ensino e a aprendizagem da Combinatória e como a sua compreensão pode interferir em suas práticas docentes. Essa pesquisa evidenciou como os professores dos anos iniciais e dos anos finais do Ensino Fundamental tiveram dificuldade em diferenciar os problemas de arranjo e de combinação, pois demonstraram dificuldade em relação ao invariante da ordenação; além disso, as pesquisadoras citadas também chamaram a atenção para o fato de os problemas Combinatórios serem indicados pelos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental como problemas de multiplicação. Enfatizaram ainda: o ensino da Combinatória pode ser iniciado antes do Ensino Médio. Já os professores dos anos finais do Ensino Fundamental reconhecem que os problemas podem ser trabalhados em níveis diferentes e elenca tópicos

distintos. Quanto à análise das estratégias utilizadas pelos alunos, os docentes chegaram a apresentar justificativas pontuais e referentes à construção conceitual. Nas atividades onde se pode trabalhar em sala de aula, os professores entrevistados indicaram uso de material manipulativo e *situações* do cotidiano do aluno baseada nas especificidades de cada nível de ensino em suas práticas, trabalhando ainda de forma superficial em relação à aplicação dos problemas combinatórios, fazendo-nos inferir que a presente pesquisa poderá ajudar a pensar em possibilidades de investigação sobre como o professor pensa acerca dos problemas combinatórios.

Ainda em relação aos conhecimentos docentes sobre Combinatória, Rocha (2011) pesquisou o conhecimento de docentes sobre a Combinatória e seu ensino, sendo dois professores dos anos iniciais e dois dos anos finais do Ensino Fundamental e dois professores do Ensino Médio, através de uma entrevista semiestruturada, contendo questões a respeito dos tipos de problemas combinatórios, do ensino e as dificuldades de sistematização das listagens de possibilidades referentes a pesquisas anteriores.

Os professores dos anos finais do Ensino Fundamental enfatizaram uma discussão sobre a ideia de possibilidades, sendo uma das dificuldades na compreensão dos problemas combinatórios e indicam a diferenciação dos mesmos como dificuldade para os alunos.

Com professores de anos iniciais do Ensino Fundamental, Assis e Pessoa (2013) buscaram analisar a formação continuada em Combinatória, baseada nas *situações* (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano), *invariantes* (ordem e escolha dos elementos) e *representações simbólicas* de cada tipo de problema, nas concepções e planejamentos dos docentes. Um dos resultados da pesquisa em foco mostrou que as professoras afirmaram não ter trabalhado esse conteúdo nos anos iniciais do Ensino Fundamental; porém, indicaram a necessidade de ser trabalhada a Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Por outro lado, reconheceram pontos comuns nos problemas que analisaram, mesmo sem fazer uma explicitação objetiva, sem diferenciar e nem classificar os referidos problemas. Ao observarem os erros e acertos dos alunos a partir dos protocolos da pesquisa de Pessoa e Santos (2012), as professoras entrevistadas fizeram algumas considerações acerca da Combinatória. No geral, a pesquisa mostrou a importância da formação continuada, uma vez que as professoras apresentaram limitações a respeito do tema em estudo e a intervenção feita resultou em reflexões importantes sobre os problemas combinatórios como sendo possível de ser trabalhado nos anos iniciais e também permitiu refletir sobre sua prática.

Em investigação sobre conhecimentos de estudantes, Pessoa e Borba (2010) analisaram o desempenho de 568 alunos de escolas públicas e particulares do 2º ano do

Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem oito problemas combinatórios, dois de cada tipo: produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação. Constataram que os percentuais de acertos aumentaram nos diferentes níveis de ensino e as pesquisadoras relacionaram o fato considerando os aspectos referentes à maturidade, às experiências escolares e extraescolares. Constataram também que os acertos totais nos diferentes níveis de ensino ocorriam quando havia no problema um menor número de possibilidades.

Em estudo de intervenção para alunos, Silva e Pessoa (2013) analisaram a eficácia de ensino a partir de estratégias bem sucedidas desenvolvidas por alunos pesquisados por Pessoa e Borba (2009) e por Pessoa e Santos (2011), ao resolverem problemas combinatórios (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Os participantes foram alunos de duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, divididos em Grupo Experimental (GE) e Grupo Controle (GC) que participaram do pré-teste, de duas sessões intervenções e do pós-teste. Com o GC, a intervenção estava focada em problemas de raciocínio lógico e de problemas multiplicativos de um modo geral. Já com o GE, a intervenção foi feita utilizando problemas combinatórios randomizados e com resultados de grandezas numéricas menores (até 10) e maiores (até 30), sendo destacados quatro tópicos: listagem de possibilidades como estratégias, *invariantes* dos tipos de problema, sistematização e generalização. No pós-teste, ocorreu à mesma quantidade de questões e de mesma natureza do pré-teste. No pré-teste os tipos de problema os quais tiveram a maior quantidade de acertos foram os de produto cartesiano seguido de combinação. No que diz respeito aos demais problemas, permutação e produto cartesiano, esses apresentaram um quantitativo muito baixo de acertos. No pós-teste houve avanço na quantidade de acertos por tipo de problemas, principalmente no de permutação. Em geral, os alunos melhoraram em relação aos tipos de problemas e também em relação às estratégias utilizadas, na qualidade das respostas, chegando à generalização; porém, tiveram dificuldade em resolver problemas de combinação com maior número de possibilidades (até 30). Os alunos do GC não apresentaram avanços relacionados aos tipos de problema combinatório.

Segundo Silva e Pessoa (2013), a sistematização é um caminho que possibilita chegar ao resultado final de um problema combinatório, sendo utilizada a estratégia de listagem. Também enfatizaram a compreensão dos *invariantes*. Destacam ainda ser possível trabalhar a Combinatória desde cedo, ensinando a partir das estratégias. Perceber os *invariantes* dos problemas combinatórios irá possibilitar resolver e elaborar problemas, assim como organizar os elementos de um problema combinatório nas diferentes *representações simbólicas*.

Pessoa e Borba (2009) analisaram o desempenho e as estratégias de alunos do 6º ao 9º ano de uma escola pública e de uma escola particular de Pernambuco ao resolverem problemas de Raciocínio Combinatório dos tipos produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação. Os participantes da pesquisa foram 174 alunos que resolveram individualmente oito problemas, sendo dois problemas de cada tipo combinatórios (arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano), sendo que os quatro primeiros envolviam números que levavam a maior número de possibilidades e os outros quatro com menor número de possibilidades. Os alunos podiam resolver os problemas utilizando desenhos, tabelas, gráficos, operações numéricas ou da forma que achassem melhor. Os resultados mostraram que houve um maior percentual de acertos nos problemas de produto cartesiano que apresentam um menor número de possibilidades a serem manipuladas. Já os problemas de combinação envolvendo números grandes não teve nenhum acerto, considerando os alunos do 6º ao 9º ano. As autoras defendem ser imprescindível termos um olhar em relação aos problemas combinatórios os quais sejam considerados os tipos de problemas diante das suas especificidades, considerando os *invariantes* presentes, a ordem de grandeza numérica na qual será determinado um maior ou menor número de possibilidades, as diferentes estratégias de resolução que enfatizam a forma como os alunos organizam o pensamento, escolhendo e ordenando os elementos e também as etapas de escolhas presentes no problema.

Barreto e Borba (2010, p.3) analisaram “a compreensão de estudantes da EJA no Ensino Médio, especificamente participantes do Projeto Travessia, acerca da Combinatória”. Para isso tiveram 30 participantes do Programa Travessia, sendo 15 do Módulo I (não tiveram aula de Matemática) e 15 do Módulo III (tinham vivenciado a disciplina). Foi aplicado de forma individual um teste contendo oito problemas combinatórios, sendo dois de cada tipo (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Os resultados não mostraram diferença significativa de acertos entre as médias dos alunos dos módulos I e III. Em relação aos significados os alunos dos módulos I e III tiveram maior compreensão nos problemas de produto cartesiano. Os acertos referentes ao produto cartesiano apresentaram diferença significativa quando comparado com arranjo e combinação, porém os alunos encontraram dificuldades em esgotar todas as possibilidades solicitadas nos problemas e ofereceram resistência em utilizar as *representações simbólicas*, pois são consideradas menos formais. Entre os poucos alunos que explicitaram estratégias, destacou-se a listagem de possibilidades.

Barreto e Borba (2010) ao compararem os resultados da pesquisa com o estudo de Lima e Borba (2010), no qual os participantes foram alunos do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica (PROEJA), verificaram que o

resultado foi assimétrico, pois houve uma maior compreensão dos alunos em relação aos significados e variação na estratégia utilizada. De acordo com Barreto e Borba (2010), essa diferença está relacionada aos currículos e aos objetivos dos programas TRAVESSIA e PROEJA, mas indicam que os estudos relacionados à Combinatória estejam presentes em todos os módulos da Educação de Jovens e Adultos - EJA.

Há ainda bastante dificuldade por parte dos professores e alunos a respeito das relações presentes na Combinatória e as pesquisas corroboram a necessidade de formação nas redes de ensino seja particular, municipal ou estadual, pois de acordo com Brasil (2007) no trabalho com Combinatória é encontrado deficiências, além de ser trabalhado de forma superficial. As aplicações feitas em sala de aula propostas aos alunos são, muitas vezes, consideradas inadequadas ou artificiais, usadas para introduzir o conceito e os procedimentos de contagem.

Nesse sentido percebemos a necessidade da formação de professores tendo como objetivo refletir a respeito dos *invariantes* presentes nos diferentes tipos de problemas combinatórios (ordem e escolha dos elementos) para um melhor desenvolvimento da construção e domínio do conceito, no momento em que o mesmo necessita resolver problemas, como também elaborá-los com propriedade e até mesmo analisar os problemas combinatórios encontrados nos livros didáticos. No entanto, percebemos ser mais comum em sala de aula o trabalho com resolução de problemas e não com elaboração. Nessa direção cabem aos cursos de formação de professores desenvolverem um trabalho valorizando a elaboração de problemas matemáticos, permitindo, assim, as discussões sobre os aspectos conceituais, estruturais e pedagógicos. Os aspectos conceituais permitem aos professores refletirem sobre os conceitos envolvidos em cada tipo de problema combinatório, pois apresentam uma estrutura específica. Além disso, destacamos os aspectos pedagógicos os quais são importantes de serem pensados no momento da elaboração, pois possivelmente permite ao professor refletir sobre o nível da turma e consequentemente o nível de complexidade que o problema possa ter de acordo com os objetivos a serem alcançados.

Desse modo, começamos a ponderar se a elaboração de problemas combinatórios ajuda os professores a pensarem na construção conceitual, sendo os *invariantes* dos problemas combinatórios o foco principal da nossa investigação. Em seguida, questionamos se o conhecimento e o domínio do conceito absorvidos pelo professor são suficientes para diferenciar os tipos de problemas combinatórios (permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano) quando elaboram problemas nas diversas *situações* que dão sentido ao conceito na Combinatória.

Quando nos reportamos ao processo de elaboração de problemas combinatórios, buscamos entender como vem ocorrendo essa discussão e também relacionamos com as dimensões presentes na Teoria dos Campos Conceituais, ou seja, as *situações*, os *invariantes* presentes e as *representações* que estão interligados. No entanto, no que diz respeito à elaboração de problemas, o domínio do conceito de cada tipo de problema combinatório é imprescindível, assim como conhecer, entender e relacionar os invariantes *presentes* em cada *situação* existente na Combinatória.

No presente estudo, focaremos na elaboração de problemas combinatórios por professores do Ensino Médio.

3. CONHECIMENTOS DE PROFESSORES E A ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS

Na seção 3 abordamos acerca do conhecimento de professores e a elaboração de problemas combinatórios no processo de construção do conceito.

3.1 Conhecimentos de professores

O processo de formação do professor nos remete a pensar tanto no conhecimento que o professor tem sobre determinada disciplina e sobre determinados conteúdos, como também na utilização do conhecimento voltado para aspectos didáticos. Assim, procuramos compreender melhor esse conhecimento quando se trata do raciocínio combinatório, ou Análise Combinatória, como é apresentado nos livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio. Buscamos entender quais conhecimentos os professores do Ensino Médio possuem sobre a Combinatória quando os mesmos elaboram problemas.

Para tal, refletimos sobre os conhecimentos especificamente de professores que ensinam Matemática, elencados por Ball et al (2008) que foram referenciados em Shulman (2005). Ao abordar o conhecimento do professor considerando a especificidade da Matemática, Shulman (2005) utiliza a expressão “*pedagogical content knowledge*”, que, segundo Curi e Pires (2008, p.164), pode ser entendida de diferentes maneiras ou traduções, pois são vistas da seguinte forma:

A expressão criada por Shulman (ibid.) “*pedagogical content knowledge*” é traduzida por alguns autores como “conhecimento pedagógico disciplinar” e, por outros, como “conhecimento didático do conteúdo”. Ele entende por *pedagogical content knowledge* uma combinação entre o conhecimento da disciplina e o conhecimento do “modo de ensinar” e de tornar a disciplina compreensível para o aluno. O autor defende que esse tipo de conhecimento incorpora a visão da disciplina como conhecimento a ser ensinado, incluindo os modos de apresentá-lo e de abordá-lo, de forma que sejam compreensíveis para os alunos, e ainda as concepções, crenças e conhecimentos dos estudantes sobre a disciplina (CURI E PIRES, 2008, p.164).

Salientamos que o conhecimento da disciplina nos faz ter um olhar mais amplo sobre uma determinada área de ensino e que quando nos reportamos ao conhecimento do conteúdo nos dá uma visão mais específica do conteúdo que queremos trabalhar. Portanto, utilizaremos o termo “*pedagogical content knowledge*” entendendo como sendo um conhecimento didático do conteúdo, ou seja, o conteúdo que será ensinado em sala de aula da maneira que o professor entende, considerando suas experiências extraescolares e suas crenças sobre o ensino e a Matemática. No presente estudo nos reportamos ao conhecimento relacionado ao

raciocínio combinatório no momento em que os professores elaboram problemas combinatórios.

Compreendemos ainda que mesmo o professor tendo o conhecimento do conteúdo, possa não ter o conhecimento para o ensino de forma a fazer o aluno compreender o assunto trabalhado. Desse modo, percebemos haver um desafio proposto no processo de formação do professor, pois se o conhecimento intrínseco do docente não possibilitar a aprendizagem do aluno, esse conhecimento precisa ser discutido para um olhar didático do conteúdo. Shulman (2005) discute as categorias da base do conhecimento do professor de um modo geral, ou seja, das diferentes áreas de ensino, destacando o conhecimento da seguinte forma:

- **Conhecimento do conteúdo:** referente ao que o professor sabe acerca dos conteúdos por ele trabalhados.
- **Conhecimento didático:** considera os princípios e as estratégias de organização das aulas e da disciplina.
- **Conhecimento do currículo,** em especial o domínio dos materiais e programas: servem de ferramenta para a prática docente.
- **Conhecimento didático do conteúdo:** está voltado para os elementos da prática docente e que podemos considerar a disciplina a ser ensinada e a pedagogia.
- **Conhecimento dos educandos e de suas especificidades.**
- **Conhecimento dos contextos educativos:** abarca o funcionamento do grupo de alunos e a gestão escolar e também o caráter cultural das comunidades.
- **Conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos e seus fundamentos filosóficos e históricos.**

Baseando-se em Shulman (2005), Ball et al (2008) destacaram o domínio dos conhecimentos necessários ao professor de Matemática. Na Figura 3, abaixo, destacamos os conhecimentos elencados e evidenciados pelos autores.

Figura 3 - Domínio do conhecimento do professor de Matemática



Fonte: Ball et al (2008, p.403)

Ball et al (2008) chamam a atenção para refletirmos a respeito de cada conhecimento. No conhecimento do conteúdo, os autores destacam os seguintes subdomínios:

- **O conhecimento comum-** É um conhecimento matemático que possibilita o indivíduo a fazer cálculos, usar os termos corretos da Matemática, até reconhecer os erros, sendo um conhecimento que o professor necessita para o ensino, porém não é exclusiva a ação de ensinar.
- **O conhecimento especializado-** É um conhecimento usado para o ensino, pois nesse caso o professor de Matemática tende a reconhecer os erros dos alunos e interpretações, como também estabelecer uma comunicação matemática. Esse conhecimento especializado é diferente para o professor de Matemática quando comparado com a matemática com um nível maior de complexidade do engenheiro e do contador, por exemplo.
- **O conhecimento horizonte-** Um conhecimento que estabelece a relação dos conteúdos trabalhados em determinado ano de ensino. No presente estudo os professores refletiram sobre qual ano de ensino daria para serem trabalhados os problemas elaborados.
- Para o **conhecimento pedagógico do conteúdo**, foi levado em consideração não apenas o conhecimento do conteúdo, mas também do seu ensino; portanto, foram estabelecidos os subdomínios relacionados à Matemática, estabelecidos por Ball et al

(2008) a partir das indagações acerca das categorias de conhecimento profissional de conteúdo estabelecido por Shulman (2005).

Os subdomínios relacionados ao conhecimento pedagógico do conteúdo são os seguintes:

- **Conhecimento do conteúdo e dos estudantes-** Envolve os conhecimentos de Matemática que o professor possui e a capacidade de analisar e interpretar o conhecimento dos estudantes, ou seja, os equívocos, as ideias que os mesmos possuem, a evolução em relação ao conteúdo trabalhado e a linguagem utilizada pelo aluno para se comunicar.
- **Conhecimento do conteúdo e do ensino-** Une o conhecimento do conteúdo e do ensino relacionado à Matemática.
- **Conhecimento do conteúdo e do currículo-** Conhecimento que o professor tem para selecionar o que poderá ser utilizado no determinado ano de ensino, fazendo uso de determinado conteúdo no seu planejamento escolar.

Solicitamos aos professores a elaboração de problemas combinatórios e a reflexão sobre esses problemas, a análise do que seria importante para os alunos perceberem nos problemas elaborados, e, além disso, a avaliação a respeito das dificuldades dos alunos relacionadas aos problemas combinatórios. Entendemos que o professor, quando elabora um problema, provavelmente deve levar em consideração: os objetivos os quais deseja ser do alcance de seu aluno, o nível de complexidade da questão se reportando a determinado ano de ensino, o contexto no qual o problema está inserido e qual forma de representação será utilizada pelos alunos ao resolverem os problemas. Portanto destacamos o conhecimento de conteúdo e do ensino, como também o conhecimento do conteúdo e do currículo.

3.2 Elaboraões de problemas

Ao refletirmos sobre a elaboração de problemas no ensino da Matemática, buscamos entender quais pontos importantes irão auxiliar o ensino e a aprendizagem. É expressivo, pois nos reportamos a algumas reflexões a respeito da elaboração de problemas, isto é, o texto matemático. *Por que é importante elaborar problemas? Elaborar problemas ajuda na compreensão e no domínio do conceito?* Esses são alguns pontos os quais trouxemos à

discussão e a análise, levando em consideração os conceitos envolvidos nos problemas abrangidos pelo conhecimento da Matemática de um modo geral e da Combinatória em particular.

Consideramos que o processo de elaboração dos diferentes tipos de problemas combinatórios, possivelmente seja viável para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Segundo Silva (2014), as atividades referentes à leitura e à escrita podem estar relacionadas com a Matemática, pois enfatiza como essa área do conhecimento não se limita apenas a símbolos, a operações e a regras. Nesse contexto, entendemos a importância de refletirmos a respeito da elaboração de textos matemáticos, da leitura e dos conceitos envolvidos.

Smole (2001) aborda não ser natural que os professores percebam a produção textual como algo integrante no currículo da Matemática e, apesar de não ser algo familiar aos professores, trata-se de um componente essencial ao ensino e à aprendizagem da Matemática e uma maneira de promover a comunicação na sala de aula.

Klüsener (2006) enfatiza quanto o trabalho desenvolvido na área da Matemática tende a favorecer os códigos escritos em detrimento das expressões da linguagem oral: que é importante para a socialização, e escrita: que tem uma relevância, pois envolve a língua materna e visual, destacando as diferentes maneiras de representações utilizadas. No entanto, ao valorizarmos as diferentes linguagens estamos desenvolvendo um processo de construção e apropriação de novos conceitos para o desenvolvimento da Matemática.

Destacamos, então, que o professor, ao elaborar as situações-problema, irá pensar nos aspectos conceituais dos conteúdos envolvidos, assim como organizar o pensamento para atender às especificidades de cada tipo de problema, ou seja, as diversas *situações* existentes onde podem ser abordados o conceito, os invariantes envolvidos e as diversas formas de *representações simbólicas*. Desse modo, a relação com o ensino será de forma direta, pois as questões as quais envolvem o nível de complexidade de cada problema elaborado será um ponto determinante para os objetivos que o professor deseja alcançar visando à aprendizagem dos seus alunos.

Para Smole (2001), o nível de compreensão de um conceito ou ideia está relacionado à capacidade de poder comunicá-lo e expressá-lo. Portanto, enfatizamos, quanto mais o professor tiver apropriação do conceito, mais ele terá a oportunidade de elaborar melhor um problema combinatório e de expressá-lo com mais clareza na sala de aula.

Miguel (2005, p.425) define que um problema pode ser visto da seguinte maneira:

Um problema matemático deve ser uma situação que demande uma sequência de ações e operações para obter o resultado. Ou seja, a solução não está disponível inicialmente, mas deve ser construída durante a resolução de problemas, nas *situações* da vida cotidiana, nas atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

Chica (2001) destaca que quando os alunos formulam problemas, eles têm a oportunidade de perceber o que é mais importante na elaboração e na resolução de uma determinada situação, nas relações existentes entre os dados contidos nos problemas, na pergunta a ser respondida e a resposta e, também, na articulação que há entre texto, os dados e a operação a ser usada, permitindo assim o controle do saber matemático.

Silva (2014) defende a importância dos alunos trabalharem a leitura e escrita de textos matemáticos e aborda que, tanto a produção como a resolução de problemas, favorecem a construção do conceito e a compreensão a respeito das relações envolvidas. Enfatiza ainda que não basta apenas oferecer aos alunos atividades de leitura visando apenas à resolução de exercícios, mas venha a proporcionar atividades que desafiem, divirtam e informem os alunos, promovendo a reflexão e a construção do significado do que está sendo trabalhado. Assim, percebemos que os processos de leitura e de escrita de textos matemáticos ajudam a organizar o pensamento e a colocar em prática os conceitos já existentes, sendo desafiados a novos conceitos envolvidos na situação. No entanto, enfatizamos a necessidade de os professores precisarem refletir sobre as questões supracitadas para solicitar aos seus alunos a elaboração de problemas matemáticos. Além disso, existe a importância dos próprios professores exercitem a elaboração de problemas por eles próprios, com a finalidade de pensarem sobre o conceito.

Santos (2009) indica haver um aprimoramento da escrita com a prática e quanto mais se escreve mais fluência é adquirida; portanto, o professor que tem a prática de ler vários textos matemáticos e elaborar novos textos terá uma melhor fluência em relação aos conceitos envolvidos e também na criatividade, na autonomia e na reflexão dos textos produzidos.

Nesse sentido, a atividade proposta pelo professor a seus alunos também precisa ter autonomia em trabalhar um conceito matemático, elaborando atividades em diversas *situações* com as quais o conceito está relacionado. A prática de elaboração de problemas requer pontos relevantes a serem pensados e discutidos pelos docentes. Dante (2009, p. 21) aborda que “um bom problema suscita a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa,

diminuindo sua passividade e seu conformismo”. Desse modo, consideramos a elaboração de bons problemas como sendo também um desafio para o professor, quando o mesmo trabalha com os problemas elaborados com seus alunos ou incentivam os alunos a produzirem, considerando o conceito em questão.

Guimarães e Santos (2009, p.9) constataram ser através da proposta de elaboração de problemas com os alunos, onde os professores participantes refletiram a respeito “das estruturas dos problemas, dos dados necessários, das relações entre as quantidades envolvidas, da coerência entre a pergunta e os dados fornecidos e as operações que podem ser realizadas”. Portanto, entendemos também ser necessária a reflexão do professor em fazer análises acerca do que está sendo elaborado e o conceito ou conceitos envolvidos em uma determinada situação.

Percebemos, ainda, como a atividade de elaboração de problema para o professor é relevante para a autoavaliação do seu conhecimento a respeito de determinado conteúdo. Refletir sobre essas questões permite ocorrer uma interação maior do professor ao propor aos seus alunos a leitura de textos matemáticos e a elaboração de textos, lembrando que em ambas as ações os conceitos estão envolvidos explicitamente ou implicitamente.

Smole (2001); Smole e Diniz (2001); Lerner (2002); Carrasco (2006) e Santos (2009) enfatizam a importância de trabalharmos com os alunos a leitura e a escrita dos textos matemáticos. No entanto, o professor necessita também ter essa prática e autonomia de elaborar textos, analisar criticamente textos já prontos e discutir sobre os textos já elaborados, visando assim, a um bom aproveitamento do trabalho em sala de aula.

O trabalho com a formulação e a resolução de problemas consideravelmente tem objetivos relevantes para o desenvolvimento do ensino por parte do professor em seu planejamento diário, como também dos seus alunos. *E como formular os problemas combinatórios para serem trabalhados com os alunos em sala de aula?* Compreendemos ser a elaboração de problemas uma atividade que ajuda o professor a refletir sobre os conceitos envolvidos e acerca dos aspectos os quais dizem respeito ao ensino e à aprendizagem de forma criativa e incentivadora, como também o olhar crítico que ele pode ter ao analisar as *situações* apresentadas no livro didático. Além disso, consideramos a importância de trabalharmos a elaboração de problemas no processo de formação de professores, sendo, então, um forte aliado para discutir os conceitos matemáticos.

Sobre a resolução de problemas na perspectiva dos ganhos proporcionados aos discentes, Renzulli e Callahan (1975), Juntune (1979), Noller (1982), Renzulli (1982), abordam quão a resolução de problemas contribui para a criatividade dos alunos. Ainda nessa

perspectiva, Dante (2009) elenca alguns objetivos a serem atingidos quando se trabalha a formulação e a resolução de problemas com os alunos. A seguir, destacaremos os objetivos propostos por esse autor, que também podem ser trabalhados com os professores, pois precisam ter uma maior apropriação para poder solicitar algo para seus alunos:

- **Fazer o aluno pensar produtivamente-** o aluno precisa ser desafiado e motivado a resolver as *situações* propostas, sendo livre para utilizar novos procedimentos de resolução, sendo assim, não precisa responder da mesma maneira utilizada pelo professor, ou seja, não precisa reproduzir e sim produzir.
- **Desenvolver o raciocínio do aluno-** ao resolver os problemas dentro e fora da escola, o aluno terá a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico e utilizar os recursos disponíveis.
- **Ensinar o aluno a enfrentar situações novas-** com os avanços tecnológicos e as mudanças constantes na sociedade, não basta ensinar apenas conceitos, habilidades, procedimentos e atitudes que podem se tornar obsoletos daqui a alguns anos, mas, principalmente, devemos propor novas *situações* desafiadoras e motivadoras para serem desenvolvidas pelos alunos.
- **Dar ao aluno a oportunidade de envolver-se com as aplicações da Matemática-** o aluno tem a oportunidade de compreender melhor em que *situações* determinados conceitos podem ser utilizados no dia a dia.
- **Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras-** o professor é desafiado a trabalhar a Matemática de forma incentivadora para seus alunos, o aluno precisa ser desafiado através dos problemas propostos à resolução.
- **Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas-** o aluno é desafiado a resolver o problema desenvolvendo estratégias que podem ser utilizadas em várias *situações*.
- **Dar uma boa base Matemática às pessoas-** permitir que as pessoas se tornem alfabetizadas matematicamente, tendo assim, a oportunidade de enfrentarem as *situações*-problema existentes. Nessa perspectiva, a atividade de formular e de resolver problemas contribui para o enfrentamento das *situações*;

- **Liberar a criatividade do aluno-** a formulação e a resolução de problemas permitem o desenvolvimento da produtividade e da criatividade do aluno ser manifestada.

Além disso, Polya (1977) destaca quatro etapas relevantes para a resolução de problemas, que são:

- **Compreender o problema-** é imprescindível a compreensão do aluno em relação ao que está sendo solicitado e quais são os principais dados para a solução do problema. Enfim, “o enunciado verbal precisa ser bem entendido” (POLYA, 1977, p.4).

É interessante ser levado em consideração pelo professor quais coisas deseja que seu aluno aprenda e o que irá conter no problema para poder ser bem explorado. Um bom texto irá ajudar o leitor a descobrir o que realmente está sendo solicitado.

- **A partir de uma figura dada, criar uma pergunta-** para o aluno a ilustração da figura pode ter vários significados.
- **A partir de um início dado, continuar o problema-** nesse tipo de situação, o aluno deverá inserir novos dados e articulá-los com os dados já existentes e finalizar o problema com uma pergunta.
- **A partir de um problema dado, criar um parecido-** a pesquisadora indica que esse tipo de solicitação permite verificar se o aluno se apropriou da estrutura de um problema e percebe o que é essencial em sua formulação.

Essas diversas maneiras de produzir problemas permitem que os conhecimentos matemáticos sejam articulados e colocados em prática, portanto, é necessário que sejam apresentadas as diversas maneiras para elaborar os problemas.

No presente estudo, solicitamos que os professores elaborassem problemas a partir das *situações* presentes na Combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano) e dos *invariantes do conceito*.

Em se tratando da elaboração de problemas por professores, podemos dizer que o domínio conceitual para um determinado saber matemático será revisto, porque o professor

colocará em prática o saber que existe referente a determinado conceito e poderá discutir novos conceitos; também destacamos as dificuldades encontradas em relação ao conceito, auxiliando que o mesmo se autoavale e reveja as dificuldades existentes.

Os professores, ao elaborarem problemas, também possibilitam a escolha do que pode ser proposto para seus alunos, considerando o nível de complexidade existente. Para Chica (2001), um problema é toda situação onde não possui uma solução evidente, na qual é exigido daquele que vai resolvê-lo a organização de seus conhecimentos e a decisão sobre como usá-los na busca da solução. Trata-se de situações favoráveis a questionamentos. No entanto, perguntamos: *Por que é importante elaborar problemas?* Não só no momento de resolução o saber é colocado em prática, mas também no momento de elaboração o conhecimento também será evidenciado.

Definimos que *o problema combinatório apresenta uma estrutura específica na qual pode ter dois ou mais conjuntos, como no caso de produto cartesiano, ou apenas um conjunto, como no caso do arranjo, da combinação e da permutação e que considera os invariantes do tipo de problema (especificamente a ordem e a escolha dos elementos) e apresenta um contexto envolvendo contagem*. No presente estudo vamos considerar os problemas elaborados pelos professores participantes apresentados na forma supracitada.

Percebemos ainda que quando um professor tem a prática de elaborar os problemas, possivelmente ele também tem a possibilidade de propor para seus alunos diferentes *situações* e trabalhar melhor com os conceitos envolvidos, ou seja, de comunicá-los melhor como aborda Smole (2001). O professor também será capaz de avaliar melhor os problemas já existentes nos livros didáticos e discutir quais são os conceitos envolvidos em um determinado problema e também pode solicitar aos seus alunos a elaboração de problemas, permitindo a contextualização de uma situação envolvida e a reflexão dos conceitos matemáticos que serão colocados em prática.

Nesse estudo, tratamos da elaboração dos problemas baseada nas três dimensões citadas na Teoria dos Campos Conceituais, destacamos o tripé proposto por Vergnaud (1990) – as *situações*, as *invariantes* e as *representações* simbólicas – como base para as nossas reflexões a respeito da elaboração de problemas.

Vamos, então, nos situar diante dos problemas referentes à Combinatória elencados por Pessoa e Borba (2009). Os problemas combinatórios podem ser vistos em várias *situações* as quais o conceito está envolvido; logo, podemos destacar a possibilidade de elaboração dos problemas de arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano. Cada tipo de problema terá seus invariantes presentes, servindo para diferenciar um tipo de problema do outro.

Portanto, o professor tem que fazer a relação entre o problema combinatório e os seus invariantes. O domínio conceitual permitirá aos professores elaborarem os problemas, ou as suas dificuldades no processo de elaboração permitirão que eles façam uma autoavaliação do conhecimento existente colocado em prática, elaborando problema de acordo com seus esquemas cognitivos.

O professor, ao elaborar os problemas combinatórios, irá colocar em prática o seu conhecimento a respeito dos invariantes de cada tipo de problema, sendo possível que os erros ocorram por dificuldade de diferenciar os invariantes e analisar a estrutura de cada tipo de problema e/ou pela falta de prática de trabalhar o conceito que envolve o raciocínio combinatório. Perceber as dificuldades relacionadas ao conceito pode ser importante para evidenciarmos o que precisa ser melhor enfatizado no processo de formação do professor.

Refletir acerca da elaboração de problemas por parte dos professores nos remete a pensarmos em um processo de formação que venha a considerar o conhecimento dos professores relacionados às *situações* que dão significado ao problema, aos *invariantes* do conceito que dizem respeito às relações e às propriedades/características existentes nos problemas e as diferentes formas de *representação*. Essas três dimensões elencadas por Vergnaud (1986) e discutidas na primeira seção da presente pesquisa nos fazem pensar na estreita conexão que há entre elas.

4. OBJETIVOS E MÉTODO

Destacamos a seguir, os objetivos gerais e específicos do presente estudo e o detalhamento metodológico.

4.1 Objetivos

4.1.1 Geral

Analisar o domínio conceitual de professores sobre os *invariantes* de problemas combinatórios a partir da elaboração de problemas.

4.1.2 Específicos

- Identificar dificuldades e possibilidades de professores ao elaborar problemas envolvendo o raciocínio combinatório;
- Verificar se os professores aplicam os *invariantes* presentes nos problemas de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano.

4.2 Método

Nessa seção abordamos o percurso metodológico da pesquisa. Apresentamos os participantes da entrevista, justificamos as escolhas dos participantes, também discutimos sobre o campo da pesquisa. Além disso, apresentamos o instrumento de coleta utilizado pelo entrevistador, que é uma entrevista semiestruturada, assim como o tempo de duração, o detalhamento de toda a entrevista e os objetivos de cada momento, intencionando responder nossos objetivos gerais e específicos do presente estudo.

4.2.1 Participantes

A pesquisa foi desenvolvida com sete professores do Ensino Médio em escolas públicas da rede estadual de Pernambuco, que possuem Licenciatura em Matemática, com, no mínimo, cinco anos de experiência docente. Optamos por professores do Ensino Médio por ser o docente que lida com os conteúdos da Combinatória formalmente apresentados nos livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio e que, provavelmente, faz uma revisão do conteúdo no 3º ano do Ensino Médio. A escolha por docentes com mais de cinco anos de experiência se dá porque buscamos considerar um tempo mínimo de experiência pedagógica

dos professores. Tardif (2002, p.15) ao expressar o cotidiano do professor e o saber que está arraigado na sua prática no contexto escolar e na sociedade aborda que:

[...] um saber sempre ligado a uma situação de trabalho com outros (estudantes, colegas, pais, gestores, etc.), um saber ancorado numa tarefa complexa (ensinar), situado num espaço de trabalho (a sala de aula, a escola), enraizado numa instituição e numa sociedade.

A escolha dos participantes foi por conveniência, ou seja, os professores que tiveram a disponibilidade e o interesse de participar da pesquisa e que atendessem aos critérios estabelecidos, referentes à formação e ao tempo mínimo de docência.

Identificamos através de códigos os professores do Ensino Médio participantes do referente estudo, visando resguardar o anonimato de cada professor pesquisado, assim, eles foram denominados de: PEM1, PEM2, PEM3, PEM4, PEM5, PEM6, PEM7. A pesquisadora é identificada como “P” ao longo do presente texto.

4.2.2 Instrumento de coleta

Escolhemos como instrumento de coleta a entrevista semiestruturada, aplicada individualmente para cada professor, em local reservado dentro da escola ou em outro local em que houvesse um ambiente favorável para o docente responder a entrevista. O professor teve o tempo livre para responder as questões da entrevista que foi feita pela pesquisadora/entrevistadora.

As questões da entrevista foram aplicadas sempre na mesma ordem a todos os participantes. A entrevista foi audiogravada com a autorização dos professores e teve uma média de 80 minutos de duração, variando de um professor para outro. Optamos pela entrevista semiestruturada por permitir que o entrevistado fale livremente sobre o assunto sem perder o foco do que está sendo discutido e solicitado pelo pesquisador (GIL, 1999).

A seguir, no Quadro 2, apresentamos os objetivos das questões propostas em cada momento da entrevista, tendo assim uma visão geral dos procedimentos.

Quadro 2 - Estruturação da entrevista com seus respectivos objetivos

MOMENTOS DA ENTREVISTA	OBJETIVOS PROPOSTOS
1ºMomento	Perfil dos professores
2ºMomento	Entender como os professores elaboram problemas combinatórios de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano.
3ºMomento	Propor reflexões acerca do ensino de Combinatória, do currículo e do conceito/características dos problemas combinatórios elaborados pelos professores.
4ºMomento	Transformar os problemas combinatórios de um tipo em outro tipo.
5ºMomento	Elaborar problemas combinatórios a partir dos invariantes.

Fonte: A autora

No primeiro momento da entrevista solicitamos informações sobre o tempo de docência, a modalidade de ensino que o professor estava trabalhando, a rede de ensino em que estava atuando e a formação inicial e continuada do professor. A seguir, no Quadro 3, apresentamos a forma de organização das questões referentes ao primeiro momento da entrevista:

Quadro 3- Informações a respeito do tempo de atuação, modalidade de ensino, atuação do docente e formação

INFORMAÇÕES	OPÇÕES DE RESPOSTA
Tempo de docência:	Ensino Fundamental Ensino Médio
Atualmente trabalha com qual nível ou modalidade de ensino?	Ensino Fundamental Ensino Médio EJA
Escola pública que trabalha:	Municipal Estadual Ambas
Formação:	Graduação Especialização Mestrado Doutorado

Fonte: A autora

No segundo momento buscamos compreender como os professores elaboram problemas combinatórios. Solicitamos aos docentes a elaboração de problemas a partir das diferentes *situações* que envolvem o raciocínio combinatório: permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano. Apesar dos problemas terem sido apresentados na mesma ordem para todos os professores, eles ficaram livres para iniciar a elaboração a partir do

problema que achassem melhor, já que na solicitação apresentamos os quatro tipos de uma vez.

Essa atividade nos permitiu analisar o domínio conceitual dos professores a respeito da Combinatória, pois a nossa intenção foi que eles relacionassem os invariantes de cada tipo de problema que, de forma implícita, estão contidos nos problemas elaborados por eles e foi também perceber o que diferencia um tipo de problema do outro para elaborar corretamente o problema. Além disso, pretendíamos que no momento da elaboração os professores tivessem a oportunidade de refletir sobre o seu próprio conhecimento a respeito da Combinatória e sobre as dificuldades existentes. Assim, fizemos as seguintes solicitações para os professores no segundo momento da entrevista:

Elabore um problema de:

- Permutação.
- Arranjo.
- Combinação.
- Produto cartesiano.

No terceiro momento propusemos reflexões acerca do conhecimento dos professores sobre os problemas combinatórios elaborados por eles, apresentamos algumas perguntas que pudessem fazer emergir e explicitar seus conhecimentos.

Assim, objetivamos nesse terceiro momento propor uma relação entre os problemas elaborados pelos professores no segundo momento e o que eles pensam sobre os mesmos, sendo possível discutir sobre o que os problemas têm em comum e de diferente e também relacionamos com as questões que envolvem a experiência do professor acerca do ensino, da aprendizagem e do currículo.

Quando perguntamos ao professor: *É mais fácil elaborar ou resolver problemas combinatórios?* Apesar de, na entrevista, os professores não terem de resolver nenhum problema, consideramos que possivelmente sua prática na sala de aula permeia mais na resolução de problemas prontos encontrados no livro didático do que na elaboração como foi solicitado que fizessem. As questões propostas para as reflexões foram as seguintes:

O que os problemas elaborados têm de semelhante e de diferente?

Os problemas que você elaborou dariam para trabalhar em que ano da Educação Básica?

É possível iniciar o trabalho com o raciocínio combinatório a partir de que ano?

No livro didático, em que ano geralmente encontramos os problemas combinatórios?

É mais fácil elaborar ou resolver os problemas combinatórios?

Para o aluno, o que seria importante perceber ao resolver os problemas que você elaborou?

Quais as dificuldades dos alunos em relação aos enunciados dos problemas combinatórios?

No quarto momento da entrevista solicitamos que os professores transformassem os problemas combinatórios de um tipo em outro tipo:

O que seria necessário para transformar um problema de:

- *Arranjo em combinação.*
- *Combinação em arranjo.*
- *Permutação em produto cartesiano.*
- *Produto cartesiano em permutação.*

Esperamos que eles fizessem reflexões a respeito das diferenças existentes nos problemas combinatórios, conseqüentemente, acreditamos que eles teriam que pensar nos *invariantes*, ou seja, nas propriedades relacionadas aos conceitos envolvidos nos problemas combinatórios, na estrutura de cada tipo de problema e também nas diferentes *situações*.

Para transformar um problema de arranjo em combinação, por exemplo, o professor terá que levar em consideração a diferença básica entre eles, que é o *invariante* da ordem, assim, não poderá estabelecer relações que indiquem posição e nem propor um contexto que assegure premiação, deverá perceber que no problema de combinação a ordem dos elementos não é relevante para tal contexto, pois não irá gerar novas possibilidades quando se trata dos mesmos elementos formados no subconjunto.

Podemos destacar como exemplo o problema de arranjo contido no Quadro 1, elaborado por Pessoa (2009), sendo o seguinte:

“O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?”

Entendemos que no problema a colocação do 1º, 2º e 3º colocados está sendo solicitada; nesse caso, a ordem tem uma importância para encontrar o número de

possibilidades existentes. Ser o primeiro é diferente de ser o segundo e de ser o terceiro colocado. Para transformar esse problema de arranjo em combinação, teremos que retirar a relevância que a ordem implicitamente estabelece. Portanto, poderíamos modificar o final do texto, ficando da seguinte maneira:

“O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina”. A comissão final, para organizar o campeonato, será formada por três pessoas indicadas pelos seus países de origem. De quantas maneiras poderemos organizar a comissão de três componentes, um de cada país, levando em consideração os quatro países finalistas?

Já quando desejamos transformar o problema de combinação em arranjo, a ordem passa a ser importante. No exemplo supracitado, que foi modificado a partir do problema de arranjo elaborado por Pessoa (2009), é possível verificar a transformação de arranjo em combinação e também combinação em arranjo. É lógico que aproveitamos apenas parte do contexto e pensamos de forma direta no invariante que diz respeito à ordem, gerando ou não novas possibilidades, além disso, também pensamos na escolha dos elementos. Destacamos ainda, que a estrutura de um problema de arranjo e combinação é a mesma, ou seja, a partir de um único conjunto maior solicitamos a formação de subconjuntos com menor número de elementos, considerando os invariantes de ordenação e a escolha dos elementos.

Na transformação referente aos problemas de permutação em produto cartesiano é necessário levarmos em consideração que na permutação temos apenas um conjunto em que os elementos serão permutados e a ordem irá gerar novas possibilidades. A estrutura do problema de permutação é que há um conjunto e na formação de novos conjuntos todos os elementos serão utilizados. No problema de produto cartesiano, na estrutura do problema teremos dois ou mais conjuntos distintos para gerar um novo conjunto. Nesse caso, o contexto do enunciado deveria ser modificado para atender à estrutura (ter um, dois ou mais conjuntos) e os *invariantes* de ordenação e escolha de elementos.

Portanto, no momento em que o professor vai transformar um problema em outro, ele terá que pensar na estrutura do problema e nos *invariantes* de ordenação e de escolha dos elementos, isso requer, um domínio conceitual da Combinatória que poderá ser explicitado no momento da entrevista. Assim, nesse momento, mais uma vez o professor tem a possibilidade de refletir sobre o seu próprio conhecimento relacionado à Combinatória: as *situações* presentes (tipos de problemas que envolvem problema de arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano), os *invariantes* do conceito (propriedades/características) e na estrutura de cada tipo de problema combinatório.

No quinto e último momento da entrevista foram explicitados para os professores os *invariantes* dos problemas combinatórios, baseados na pesquisa de Pessoa (2009) e solicitamos aos mesmos que elaborassem problemas combinatórios. Mais uma vez, os professores tiveram a oportunidade de refletir sobre os *invariantes*, que, nesse momento, foram apresentados de forma explícita. A questão proposta foi a seguinte:

Elabore problemas combinatórios a partir das características³ apresentadas:

- a) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos; a ordem dos elementos gera novas possibilidades.*
- b) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos. A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.*
- c) De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.*
- d) A partir de um conjunto dado, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar novos conjuntos. A ordem dos elementos gera novas possibilidades.*

Ressaltamos que todos os momentos da entrevista foram apresentados para os professores em uma mesma sequência e no mesmo dia.

³Características - Consideramos como os invariantes referentes aos problemas de arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano que foram apresentados respectivamente. O professor, provavelmente, não conhece o termo invariante, portanto chamamos de características.

5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A seguir, apresentamos os resultados da pesquisa a fim de responder o objetivo geral que pretendeu *analisar o domínio conceitual de professores sobre os invariantes de problemas combinatórios a partir da elaboração de problemas e os específicos que buscaram identificar dificuldades e as possibilidades dos professores ao elaborar problemas envolvendo o raciocínio combinatório e verificar se eles aplicam os invariantes presentes nos problemas de permutação, de arranjo, de combinação e de produto cartesiano.*

Analizamos o primeiro momento da entrevista semiestruturada a fim de verificar o tempo de docência dos professores do Ensino Médio que participaram da pesquisa, os níveis e a(s) modalidade(s) de ensino em que os mesmos estavam atuando, as redes de ensino que trabalham e a formação continuada desses professores. Em seguida, analisamos o segundo e quinto momento da entrevista que buscou identificar as dificuldades e possibilidades dos professores quando os mesmos elaboram problemas a partir das *situações* (de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano) e dos *invariantes*. No terceiro momento da análise, refletimos acerca do conhecimento do professor em relação aos problemas combinatórios elaborados por eles, em relação ao ensino e ao currículo. No quarto momento, focamos na análise da transformação de um problema combinatório de um tipo em outro tipo.

5.1 Formação e atuação profissional dos professores

No Quadro 4 a seguir, apresentamos o perfil dos professores entrevistados, sendo resultado do primeiro momento da entrevista. Buscamos saber o tempo de docência do professor no Ensino Médio, os níveis e as modalidades de ensino em que estavam atuando, as redes de ensino em que trabalham e a formação continuada desses professores. Acreditamos que conhecer o perfil de cada professor nos possibilitará entender melhor o contexto em que estão situados.

Quadro 4 - Perfil geral dos professores

PROF	TEMPO DE DOCÊNCIA	MODALIDADE DE ENSINO ATUAL	ESCOLA PÚBLICA	FORMAÇÃO CONTINUADA
PEM 1	8 anos no Ensino Fundamental - EF e Ensino Médio.	EJA (6º e 7º e 8º e 9º anos). Só nos 1º anos do EM, mas já trabalhou com todos os anos do EM.	Municipal de Olinda e Estadual de Pernambuco	Especialização: Educação Matemática – UFRPE Cursando Mestrado Profissional-PROFMAT-UFRPE.
PEM 2	15 anos no EF e 7 anos no EM.	Só nos 1º anos do EM.	Estadual de Pernambuco	Especialização em Matemática – UFRPE.
PEM 3	6 anos no EF e 4 anos no EM.	1º e 3º anos no Ensino Regular e EJA. Trabalhou apenas um ano no 2º ano do EM.	Estadual de Pernambuco	Especialização em Ensino das Ciências – UFRPE.
PEM 4	15 anos no EF e EM.	EJA (6º e 7º). Trabalha com os 1º, 2º, 3º anos do EM integrado e regular.	Estadual de Pernambuco	Especialização em Ensino de Física – UFRPE.
PEM 5	28 anos no EF e EM.	EJA (6º e 7º e 8º e 9º anos). Trabalha apenas com os 3º anos do EM. Faz 6 anos que trabalhou com os alunos do 2º ano do EM.	Estadual de Pernambuco	Especialização em Matemática – FUNESO.
PEM 6	2 anos no EF e 15 no EM.	Trabalha com os 3º anos do EM. Em 2013 trabalhou apenas com o 2º ano do Ensino Médio e passou 12 anos trabalhando com os 1º, 2º e 3º anos do EM.	Estadual de Pernambuco	Especialização em Matemática – Universidade Católica de Pernambuco. Cursando Mestrado em Educação – Universidade Del Salvador – USAL.
PEM 7	6 anos no EF e 8 anos no EM.	Trabalha na EJA e no EM.	Rede Municipal de Olinda e Estadual de Pernambuco.	Especialização em Ensino da Matemática – FUNESO.

Legenda: Ensino Fundamental - EF, Ensino Médio - EM.

Fonte: A autora

Todos os professores possuem Licenciatura Plena em Matemática, atuam em redes públicas e possuem mais de cinco anos de docência no ensino da Matemática. Podemos destacar que apenas o professor PEM4 trabalha atualmente com alunos do 2º ano do Ensino Médio, ano em que aparece de forma oficial nos livros didáticos os conteúdos intitulados de Análise Combinatória.

Silva (2013) analisou a abordagem de problemas combinatórios condicionais em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, para isso analisou uma coleção aprovada pelo PNLD (2012) e o manual do professor. O pesquisador constatou que a maior quantidade de problemas combinatórios foram concentrados no livro do 2º ano do Ensino Médio e que os tipos de problema que mais apareceram foram os de combinação (23 problemas) e de permutação (22 problemas), seguidos pelos de arranjo (13 problemas) e produto cartesiano (5 problemas). Podemos dizer que há um bom número de problemas de combinação e de permutação quando comparados aos demais tipos de problemas.

O PEM3 trabalhou apenas um ano no 2º ano do Ensino Médio. Atualmente trabalha no 3º ano do Ensino Médio, ano de ensino em que, além dos professores trabalharem com os conteúdos do 3º ano, acreditamos que os mesmos também procuram fazer uma revisão para que os alunos tenham um bom desempenho na prova do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Já o PEM6, apesar de atualmente não estar lecionando no 2º ano do Ensino Médio, possui uma vasta experiência, pois já trabalhou 12 anos nesse ano escolar.

A maioria dos professores possui curso de Especialização em Matemática, exceto o PEM3, que possui Especialização em Ensino das Ciências e o PEM4, que tem Especialização no Ensino de Física. Já o PEM6 tem Especialização em Matemática e está cursando o Mestrado em Educação. Podemos destacar que a formação continuada através dos cursos de Especialização é um ponto comum entre todos os professores; portanto, possivelmente podemos indicar o interesse dos mesmos em melhorar na carreira, tanto em relação ao conhecimento a ser trabalhado em sala de aula como também na melhoria do Plano de Cargos e Carreira.

5.2 Análises dos resultados a partir dos problemas elaborados pelos professores, partindo das *situações* e dos *invariantes* dos problemas combinatórios

A seguir, analisamos os problemas elaborados pelos professores, a partir das diferentes *situações* que envolvem a Combinatória e dos *invariantes* do conceito, buscando responder à questão: *Como os professores elaboram problemas combinatórios a partir das situações presentes na Combinatória (permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano) e dos invariantes do conceito?*

Neste ponto da análise, apresentamos os resultados da pesquisa fazendo uma abordagem qualitativa dos dados à luz da Teoria dos Campos Conceituais, focando nas

diferentes *situações* e nos *invariantes* do conceito que vão nos permitir entender melhor como professores de Matemática elaboram problemas combinatórios.

A solicitação de elaboração de problemas a partir das *situações* (tipos de problemas) foi o segundo momento da entrevista, após o levantamento do perfil do professor; a solicitação de elaboração a partir dos *invariantes* do conceito foi o quinto e último momento da entrevista. Entretanto, optamos por analisá-los juntos, pois esses são os dois momentos em que os professores refletem sobre os problemas a partir de dois pontos do tripé de Vergnaud (1986), *situações* e *invariantes*.

No segundo momento, solicitamos que os professores elaborassem um problema de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano (*situações*) e no quinto (último) momento da entrevista solicitamos que os mesmos elaborassem problemas combinatórios a partir dos *invariantes* do conceito de cada tipo de problema, elencados por Pessoa (2009) e indicassem o tipo de problema elaborado. Os *invariantes do conceito* por tipo de problema apresentados aos professores, na ordem que segue abaixo, foram os seguintes:

Arranjo- *De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos; a ordem dos elementos gera novas possibilidades.*

Combinação- *De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos. A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.*

Produto Cartesiano- *De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.*

Permutação- *A partir de um conjunto dado, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar novos conjuntos. A ordem dos elementos gera novas possibilidades.*

Analisamos e discutimos, a seguir, as elaborações feitas pelos professores a partir das *situações* que dão sentido ao conceito e dos *invariantes do conceito*. Organizamos as elaborações em: exercícios, explicações de um conteúdo sem relação com a Combinatória, problemas apropriados e problemas inapropriados. As elaborações não apresentam uma regularidade em relação aos erros apresentados.

5.2.1 Problemas de permutação elaborados a partir das *situações* (tipos de problemas) e dos *invariantes do conceito* (características)

Apresentamos no Quadro 5, a seguir, as análises acerca dos problemas de permutação elaborados pelos professores do Ensino Médio a partir da *situação* e dos *invariantes do conceito*. Os *invariantes* de permutação apresentados aos professores foram os seguintes: *a partir de um conjunto dado, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar novos conjuntos. A ordem dos elementos gera novas possibilidades.*

Quadro 5 - Resultados das elaborações dos problemas de permutação pelos professores pesquisados

	Resultados das elaborações dos problemas de permutação a partir da situação	Resultados das elaborações dos problemas de permutação a partir dos invariantes
PEM1	Fez corretamente um problema de permutação, utilizando um contexto que envolve o termo anagrama.	Elabora um problema de arranjo a partir dos invariantes de permutação, ou seja, parece não perceber as características dos problemas quando os invariantes foram explicitados.
PEM2	Fez corretamente um problema de Permutação.	Relaciona os invariantes à Teoria dos conjuntos, elaborando assim, uma situação que não envolve a Combinatória.
PEM3	Fez corretamente um problema de Permutação.	Elabora um problema de arranjo e indica como sendo de permutação.
PEM4	Fez corretamente um problema de permutação, utilizando o termo anagrama que é bem presente nos livros didáticos e elaborou corretamente o problema de permutação, no entanto faltou uma melhor estruturação em relação ao contexto.	Fez corretamente a relação entre os invariantes de permutação e o problema elaborado.
PEM5	Elaborou problemas sem relação direta com a Combinatória (contexto que envolve Probabilidade).	Elaborou problemas sem relação direta com a Combinatória (contexto que envolve Probabilidade)..
PEM6	Fez corretamente um problema de permutação.	Fez corretamente a relação entre os invariantes de permutação e o problema elaborado.
PEM7	Fez um problema de produto cartesiano.	Elaborou uma representação relacionada a Teoria dos conjuntos ao analisar os invariantes.

Legenda: Professores – PEM1, PEM2, PEM3, PEM4, PEM5, PEM6, PEM7

Fonte: A autora

Os professores pesquisados acertaram mais a elaboração dos problemas de permutação partindo das *situações* do que dos *invariantes*. Portanto, parece-nos que os *invariantes do conceito* que foram explicitados não são indicações claras para os professores elaborarem problemas corretamente, pois os mesmos fizeram relação com outros conceitos diferentes da Combinatória. Os participantes PEM2, PEM5 e PEM7 não relacionaram os *invariantes* à Combinatória, o PEM2 e PEM7 elaboraram uma situação que envolve a Teoria dos Conjuntos e o PEM5 elaborou problemas de Probabilidade, tanto na solicitação via *situação* (tipo de problema), quanto na solicitação via *invariantes* (características) do conceito. No Quadro 6, a seguir, apresentamos os acertos dos professores ao elaborarem os problemas de permutação a partir das *situação* e dos *invariantes*.

Quadro 6 – Acertos dos problemas de permutação elaborados a partir da *situação* e dos *invariantes*

	PEM1	PEM2	PEM3	PEM4	PEM5	PEM6	PEM7
<i>Situação</i>	X	X	X	X		X	
<i>Invariantes</i>				X		X	

Legenda: Professores – PEM1, PEM2, PEM3, PEM4, PEM5, PEM6, PEM7

X – Acertos

Fonte: A autora

De modo geral podemos perceber que elaborar problema partindo do seu tipo é mais fácil do que elaborar partindo de seus invariantes/características. Partir do tipo de problema para elaborá-lo é mais comum no cotidiano do professor, já elaborar um problema pensando em suas características pode ser mesmo mais complexo. Entretanto, ter clareza de quais são as propriedades que caracterizam os problemas é fundamental para dominar o conceito relacionado àqueles problemas. Assim, apesar dos *invariantes* do conceito explicitados não terem sido percebidos como um facilitador na elaboração dos problemas por professores do Ensino Médio, destacamos que no ensino formalizado eles provavelmente devem ser evidenciados tanto para a resolução como para a elaboração de problemas combinatórios. Além disso, ressaltamos a experiência dentro e fora da sala de aula do professor que também podemos considerar. Esperávamos então, que os *invariantes* explicitados ajudassem o professor no processo de elaboração e não foi isso o que ocorreu. Provavelmente os professores não relacionaram os invariantes explicitados à estrutura de um problema de permutação.

Organizamos as elaborações feitas pelos professores a partir da *situação* e dos *invariantes* de permutação em:

a) Exercícios:

- Não combinatório.
- Combinatório.

b) Explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória.

c) Problemas:

- Apropriados.
- Inapropriados:

Problema sem relação com a Combinatória;

Problema combinatório de um tipo diferente do solicitado.

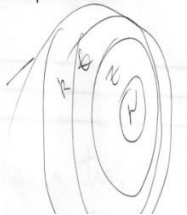
Entender a relação entre ordem e escolha dos elementos e as *situações* (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano) é importante tanto no momento da elaboração como no de resolução de problemas. Portanto, consideramos que a elaboração de problemas feitos pelos professores está relacionada aos conhecimentos prévios que os mesmos possuem em relação ao conceito, as suas crenças e a sua vivência dentro e fora da sala de aula. Esse conhecimento utilizado para o ensino, Ball et al (2008) consideram importantes e intitulam como o conhecimento do conteúdo e do ensino, pois quando o professor elabora problemas, analisa algumas variáveis importantes para o ensino como também os objetivos que pretende alcançar.

Já em relação à resolução dos problemas, salientamos que nem sempre o professor e o aluno precisam saber os nomes dos problemas combinatórios, mas se o aluno ou o professor desejar resolver o problema pelo uso da fórmula, ele terá que decidir se vai usar a fórmula da permutação, do arranjo, da combinação ou do produto cartesiano, ou ainda, se o professor estiver dando aula aos seus alunos terá que fazer as relações entre o tipo de problema e os seus respectivos *invariantes*, mesmo que não utilize esse termo.

Percebemos que quando o professor ou o aluno tenta resolver um problema sem o uso da fórmula, eles terão várias estratégias a serem utilizadas como procedimento de resolução (princípio fundamental da contagem- PFC, listagem, árvore de possibilidade, desenhos), portanto apenas precisarão perceber a estrutura do problema e focar nos *invariantes* de ordenação e escolha dos elementos que podem gerar ou não novas possibilidades. A interpretação desses dados que estão implícitos nos problemas combinatórios é importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

No Quadro 7, a seguir, organizamos as elaborações feitas pelos professores a partir da solicitação de um problema de permutação e dos *invariantes* específicos.

Quadro 7 - Protocolos para exemplificar os problemas apropriados, inapropriados e as explicações de um conteúdo sem relação com a Combinatória, a partir da solicitação pelo tipo de problema (*situação/permutação*) e a partir dos *invariantes* específicos

Problemas apropriados	Elaborações diversas
a) Permutação; Quanto anagramas podemos com as letras letras que formam a palavra AMOR? Problema apropriado de permutação elaborado corretamente pelo PEM4.	a) Permutação; 1º) Qual é a probabilidade de sair um número par quando se joga um dado só uma vez? Problema inapropriado, pois não tem relação direta com a de Combinatória, elaborado pelo PEM7..
1º) Elabore um problema de: a) Permutação; QUANTOS ANAGRAMAS EXISTEM NA PALAVRA <u>TEMA</u>? Problema apropriado de permutação elaborado pelo PEM1.	a) Permutação; Quantas maneiras eu tenho para fazer um lanche com três tipos de sucos e quatro tipos de salgadinhos. - LARANJA - CAJÁ - GOIABA - PIZZA - COXINHA - EMPADA - ENROLADINHO - PIZZA 12 maneiras de fazer um lanche. $3 \times 4 = 12$ Problema inapropriado (tipo diferente do solicitado), elaborado pelo PEM5.
1º) Elabore um problema de: a) Permutação; De quantas maneiras podemos organizar uma foto de uma família, Pai, Mãe, e 3 filhas. Problema apropriado de permutação, elaborado corretamente pelo PEM2.	d) A partir de um conjunto dado, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar novos conjuntos. A ordem dos elementos gera novas possibilidades.  Permutações = 24 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... infinito e nos periódicos. Explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória, feita pelo PEM7.

Legenda: Professores – PEM1, PEM2, PEM4, PEM5, PEM7

Fonte: A autora

Alguns dos problemas elaborados deixam clara a necessidade de trabalhar com os *invariantes* relacionados à ordem e escolha dos elementos, pois esses *invariantes* estão implícitos na própria elaboração do problema. A palavra maneira utilizada pelo PEM2 chama a atenção para as possibilidades existentes, pois enfatiza no contexto a relação entre ordem e escolha dos elementos.

O termo anagrama aparece nos problemas de permutação elaborados pelos participantes PEM1 e PEM4, sendo um contexto clássico utilizado nos livros didáticos.

A seguir mostraremos o extrato da entrevista, referente ao professor PEM4 que evidencia a relação direta entre o termo anagrama e o problema de permutação:

P- O que os problemas elaborados têm de semelhante e de diferente?

PEM4- Os três primeiros problemas trabalham com agrupamentos que é permutação, arranjo e combinação, ambos também abordam situações quase que do dia a dia deles.

PEM4- No primeiro problema anagrama, anagrama né, que é o caso de permutação onde o número de elementos de cada agrupamento é exatamente igual ao número de elementos que eu disponho pra formar os agrupamentos, eu achei esse problema interessante pelo fato de eles somarem anagramas com as letras da palavra AMOR, ele pode observar a partir daí, as duas formas de resolver esse problema, como eu tenho um número relativamente pequeno de letras, só 4 letras, então a gente pode trabalhar com a ideia Combinatória através da árvore das possibilidades, relativamente dá pra gente construir, né...caso a caso e a partir daí eles verem as possibilidades de técnicas de contagem que torna o problema mais fácil de ser resolvido, porque a princípio muitos alunos perguntam: Esse assunto trata do que? Vai ser importante em que situação?

PEM4- Análise Combinatória vem exatamente pra você facilitar a forma, você estudar técnicas de contagem, nos mais diversos problemas que vem pela frente, então eles vão ver através da árvore das possibilidades, caso a caso e vai comparar com a técnica, usando aí no caso, o cálculo da permutação, através do fatorial, a gente pode fazer a comparação dos dois métodos, a partir daí eles verem como as técnicas da Análise Combinatória, usando fatorial, princípio fundamental da contagem, facilita bastante a resolução do problema desse tipo.

(Grifo nosso)

Percebemos que o PEM4, além de explicar de forma implícita sobre os invariantes referentes à ordem e à escolha dos elementos, podendo gerar agrupamentos/possibilidades, ele também reporta-se a estratégia de resolução do problema de permutação, indicando a árvore de possibilidades, o cálculo de fatorial e ainda sugere a comparação das estratégias que podem ser utilizadas. Outro fato importante é o reconhecimento dos problemas combinatórios relacionados aos problemas de contagem.

Silva (2013) indica que muitas vezes o professor e o aluno só têm o livro didático como material a ser utilizado e quando o professor tem a oportunidade de ter acesso a outros materiais, o livro didático continua sendo usado para os professores fazerem suas escolhas e aplicarem em sala de aula. No entanto, parece-nos que os professores já utilizaram esse tipo de problema no contexto que envolve anagrama, pois conhecem esse termo utilizado na Matemática, especificamente nos problemas de Análise Combinatória ou ainda que seja um termo comum ao professor na sua prática de ensino desse conteúdo.

5.2.2 Problemas de arranjo elaborados a partir das situações (tipos de problemas) e dos *invariantes* (características)

A seguir, no Quadro 8, destacamos a análise e a discussão a respeito de problemas de arranjo, tanto a partir das *situações* que dão sentido ao conceito, como a partir dos *invariantes* específicos do arranjo, organizados da seguinte maneira: *de um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos; a ordem dos elementos gera novas possibilidades.*

Quadro 8 - Resultados das elaborações dos problemas de arranjo pelos professores pesquisados

Prof.	Resultados das elaborações dos problemas a partir da situação	Resultados das elaborações dos problemas a partir dos invariantes
PEM1	Elabora corretamente um problema de arranjo.	Relaciona os invariantes como sendo um problema de permutação, fazendo um problema de permutação e indicando como de permutação.
PEM2	Elabora corretamente um problema de arranjo.	Formular um exercício relacionado ao conjunto dos números naturais e intitula como sendo de permutação.
PEM3	Elabora corretamente um problema de arranjo, estabelecendo um contexto que deixa explícitas a possibilidades de escolha, elaborando o problema de permutação que é reconhecido como um caso particular do arranjo.	Elabora corretamente um problema de arranjo.
PEM4	Elabora corretamente um problema de arranjo, contextualizando-o e explicitando as diferentes formações que podem ser constituídas.	Elabora corretamente um problema de arranjo.
PEM5	Formula um exercício de arranjo, a partir de uma notação matemática, não propondo um contexto a ser resolvido.	Não reconhece os invariantes como sendo de um problema de arranjo, elaborando um problema sem relação com a Combinatória.
PEM6	Elabora corretamente um problema de arranjo. O problema criado, de forma implícita, estabelece a importância de olharmos para as “maneiras” e “possibilidades” de organização que podem ser feitas, portanto deixa claro para o leitor a importância ordem.	Elabora corretamente um problema de arranjo.
PEM7	Estabelece dados de um problema de permutação bastante recorrente nos livros didáticos, utilizando o termo anagrama e $5!$ (cinco fatorial) e o princípio fundamental da contagem - PFC, mas não contextualiza. Depois fez um problema de permutação contextualizado.	Relaciona os invariantes de arranjo com a Teoria dos conjuntos, não utilizando nenhum contexto.

Legenda: Professores – PEM1, PEM2, PEM3, PEM4, PEM5, PEM6, PEM7

Fonte: A autora

Os problemas de arranjo elaborados a partir das *situações* tiveram maior número de acertos que os elaborados a partir dos *invariantes* apresentados, pois alguns professores não fizeram uma relação dos *invariantes* com o problema que precisavam criar. Isso nos leva a refletir que: ou os *invariantes* apresentados não foram suficientes para a elaboração de problemas de arranjo, ou não ajudaram alguns professores nas relações que poderiam ter sido feitas para elaborar problemas combinatórios, ou até mesmo que os *invariantes* na forma que foram apresentados não são comuns para os professores.

Apesar dos *invariantes* apresentados terem sido específicos para um problema de arranjo, alguns professores elaboraram problemas de permutação, portanto parece-nos que os professores tiveram dificuldade de diferenciar os problemas combinatórios, a partir dos *invariantes*. Assim como aconteceu na elaboração de problemas de permutação, a facilidade

maior na elaboração foi quando os docentes foram solicitados a criar os problemas a partir dos seus tipos e mais difícil quando precisaram refletir sobre as suas características. Rocha (2011) indica que professores do Ensino Médio tiveram dificuldade de diferenciar arranjo e combinação, quando analisaram o enunciado do problema e a estratégia utilizada por alunos. O invariante da ordenação podendo gerar ou não novas possibilidades não estava claro para os professores.

Sendo assim, corroborando com Rocha (2011), podemos indicar que os professores apresentam dificuldade em diferenciar alguns tipos de problemas combinatórios. Trata-se de uma dificuldade constatada pela autora, tanto na resolução de problema, como na elaboração, vista no presente estudo. Propomos que esse tipo de dificuldade referente ao raciocínio combinatório seja trabalhada nos processos de formação inicial e continuada do professor.

Os *invariantes* dos problemas de arranjo apresentados no momento da elaboração foram os seguintes: *de um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos; a ordem dos elementos gera novas possibilidades*. A seguir, no Quadro 9, apresentamos os acertos dos professores ao elaborarem os problemas de arranjo, a partir da situação e dos invariantes.

Quadro 9 -Acertos dos problemas de arranjo elaborados a partir da *situação* e dos *invariantes*

	PEM1	PEM2	PEM3	PEM4	PEM5	PEM6	PEM7
<i>Situação</i>	X	X	X	X		X	
<i>Invariantes</i>			X	X		X	

Legenda: Professores – PEM1, PEM2, PEM3, PEM4, PEM5, PEM6, PEM7.

Acertos – X.

Fonte:A autora

Esperávamos que os professores elaborassem melhor a partir da explicitação dos invariantes, mas isso não ocorreu; ou seja, a relação dos invariantes e dos tipos de problemas (*situações*), não parece ser clara para os professores. Parece-nos que os invariantes de ordem e escolha dos elementos não são algo comum para os professores quando os mesmos elaboram problemas de arranjo.

Podemos exemplificar, a seguir, a relação entre os invariantes de arranjo e o problema elaborado corretamente pelo PEM6.

- a) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos; a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

A CHAPA PARA ELEIÇÃO DE DIRETORIA DE UM CONSELHO DE MORADORES É COMPOSTA POR PRESIDENTE, VICE-PRESIDENTE, SECRETÁRIO E TESOUREIRO. VINTE PESSOAS DECIDEM PARTICIPAR DO PROCESSO. DE QUANTAS MANEIRAS ESSA CHAPA PODE SER FORMADA?

Relacionando os invariantes do arranjo ao problema elaborado, percebemos que o conjunto maior é representado pelas vinte pessoas que decidem participar do processo de eleição, e os elementos que serão selecionados para formar o subconjunto são as pessoas que irão compor o cargo de presidente, vice-presidente, secretário e tesoureiro. Podemos lembrar que as especificidade dos cargos são diferentes, portanto ser presidente é diferente de ser vice-presidente, de ser secretário ou tesoureiro e no momento da resolução do problema isso deverá ser considerado, pois a ordem desses elementos vai gerar novas possibilidades. No momento da elaboração e resolução dos problemas, é imprescindível que o professor e o aluno entendam os *invariantes* também, como preconizado por Vergnaud (1986), percebam que um mesmo problema pode apresentar diferentes maneiras de resolução e vários conceitos envolvidos.

O problema de arranjo cuja elaboração solicitamos aos professores partindo da situação (tipo de problema) e dos *invariantes* os resultados foram organizados da seguinte forma:

a) Exercícios:

- Não combinatório.
- Combinatório.

b) Explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória.

c) Problemas:

- Apropriados.
- Inapropriados:
 - Problema sem relação com a Combinatória;
 - Problema combinatório de um tipo diferente do solicitado.

Consideramos que as elaborações foram feitas a partir do conhecimento que o professor tem a respeito do que seja uma situação-problema e do conhecimento sobre Combinatória. A seguir, no Quadro 10, apresentamos exemplos de problemas apropriados, inapropriados, exercícios e explicações de um conteúdo sem relação com a Combinatória, elaborados pelos professores a partir da solicitação por tipo de problema/situação e dos invariantes de arranjo.

Quadro 10 - Protocolos para exemplificar os problemas apropriados, inapropriados, os exercícios e as explicações de um conteúdo sem relação com a Combinatória, a partir da solicitação pelo tipo de problema (*situação/arranjo*) e a partir dos *invariantes* específicos

Problemas apropriados	Elaborações diversas
b) Arranjo; QUANTOS NÚMEROS DISTINTOS PODEMOS DE 3 ALGARISMOS PODEMOS FORMAR COM O CONJUNTO $\{3, 3, 5, 6, 7\}$ Problema de arranjo elaborado corretamente pelo PEM1 a partir da situação.	b) Arranjo; 1º) calcule os arranjos abaixo a) $A_{4,2} =$ b) $A_{7,5} =$ Exercício de arranjo elaborado pelo PEM5.
b) Arranjo; Quantas placas de carro podemos formar, de tal forma que em cada placa seja formada por quatro ^{três} letras distintas do nosso alfabeto e quatro algarismos distintos do nosso sistema de numeração decimal? Problema de arranjo elaborado corretamente pelo PEM4 a partir da situação.	a) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos; a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Dado um conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 10\}$, quantos ninet podemos formar com os algarismos pares? (Permutac=) Problema sem relação com a Combinatória, elaborado pelo PEM2.
b) Arranjo; NA DISPUTA DE UMA CORRIDA DE 100m POR CINCO ATLETAS, A COMISSÃO ORGANIZADORA INVESTIGA O TOTAL DE AGRUPAMENTOS POSSÍVEIS PARA A PREMIAÇÃO DO 1º LUGAR, 2º LUGAR E 3º LUGAR. QUANTAS POSSIBILIDADES EXISTEM PARA COMPOSIÇÃO DO PÓDIUM? Problema de arranjo elaborado corretamente pelo PEM6 a partir da situação.	a) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos; a ordem dos elementos gera novas possibilidades. alfabeto $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ vogais $\{a, e, i, o, u\}$ consoantes $\{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$ Números naturais Adição entre o menor e o maior $3-4=?$ Gera números $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória, elaborado pelo PEM7.

Legenda: Professores - PEM1, PEM2, PEM4, PEM5, PEM6, PEM7

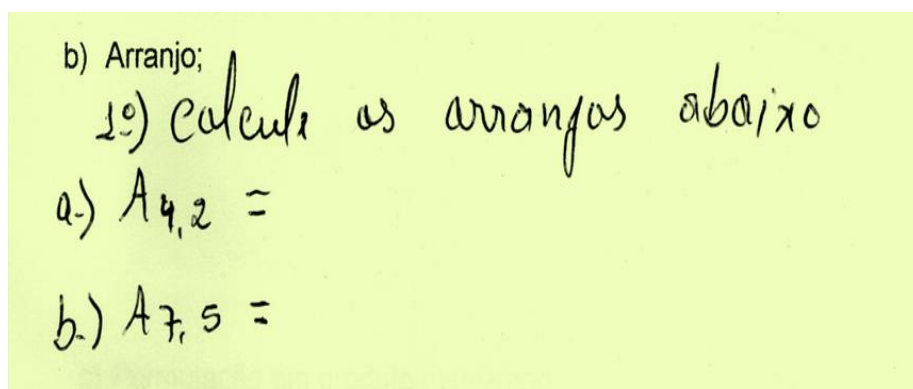
Fonte: A autora

De modo geral, foi mais fácil elaborar problemas a partir das *situações* estabelecidas numa relação com o conceito, e não a partir dos *invariantes* explicitados. Podemos verificar a ocorrência desse fato tanto nos problemas de permutação, apresentados no Quadro 7, como nos de arranjo, apresentados no Quadro 10 acima. A partir desses dados podemos pensar nas relações feitas pelos professores quando elaboraram os problemas e de fato entender o significado de problemas para eles, especificamente problemas combinatórios. As elaborações diversas nos fazem perceber o entendimento dos participantes PEM2, PEM5 e PEM7 a respeito do que seja um problema.

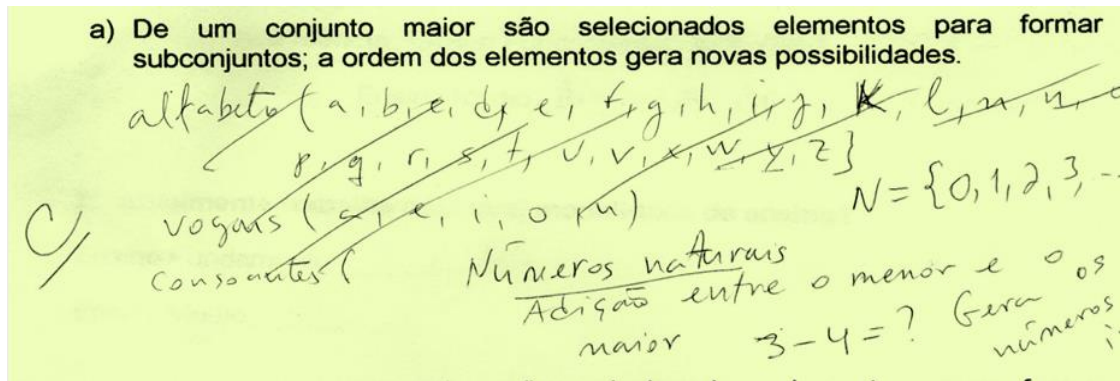
Pozo (1998) aborda que para haver um problema é necessário ter um esquema no qual o aluno necessite buscar conceitos construídos para resolvê-lo. Carvalho (2005) chama a atenção: nem todo problema proposto para o aluno pode ser considerado realmente como problema, e sim, como um exercício. Recomenda ainda ser necessária a exploração oral dos problemas pelos professores durante as aulas, considerando o cotidiano do aluno para torná-lo interessante e trabalhem diferentes maneiras de encontrar a solução. No mesmo sentido, Dante (2009) adverte para fazermos a diferenciação entre o exercício e o problema matemático. Afirma que o exercício serve para exercitar determinado algoritmo ou procedimento e o professor, nas suas aulas, deve equilibrar a quantidade de exercícios e de problemas a serem trabalhados em sala de aula com seus alunos. Para Itacarambi (2010) considera-se problema uma situação que apresenta dificuldades para as quais não há uma solução evidente.

Diante do exposto compreendemos que alguns professores (PEM2, PEM5, PEM7) não elaboraram problemas e sim exercícios e explicações. Isso demonstra a dificuldade de alguns professores de formularem problemas combinatórios, tanto no que diz respeito ao contexto, como também à estrutura dos problemas.

A seguir, elaborados pelo PEM5 e pelo PEM7, respectivamente, apresentamos um exercício de arranjo e uma explicação de conteúdo em lugar de um problema combinat



b) Arranjo;
 1º) Calcule os arranjos abaixo
 a) $A_{4,2} =$
 b) $A_{7,5} =$



Podemos perceber que o PEM5 não fez nenhuma contextualização, apenas apresentou um exercício que envolve arranjo e não um problema de arranjo. Já o PEM7 faz uma explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória.

Compreendemos que na elaboração de um problema, além de contextualizar, o professor precisar entender a estruturação do problema, as diversas *situações* que dão sentido ao conceito, os *invariantes* (propriedades que não variam para determinada situação), as diferentes maneiras que o aluno utiliza para resolver os problemas propostos e também ter clareza do objetivo que deseja alcançar, considerando o nível da turma, a complexidade do problema e a variedade de *situações*.

A esse respeito, Dante (2009, p.50) indica algumas características de “um bom problema” e recomenda que os alunos sejam desafiados através do problema a discutir *situações* reais e interessantes, de forma a proporcionar sentido para eles. Além disso, que possamos propor ao aluno o desenvolvimento do raciocínio lógico através do levantamento de várias hipóteses e da resolução por meio de diferentes estratégias e também considerarmos o nível adequado de dificuldade para determinada faixa etária.

A seguir, apresentamos a análise e a discussão a respeito da solicitação de elaboração de problemas combinatórios a partir da solicitação de elaboração de problema por *situações* e por *invariantes* da combinação.

5.2.3 Problemas de combinação elaborados a partir das *situações* (tipos de problemas) e dos *invariantes* (características)

Os *invariantes do conceito* explicitados para a combinação foram: *de um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos. A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.*

Apresentamos no Quadro 11, a seguir, as análises acerca dos problemas de combinação, elaborados pelos professores do Ensino Médio a partir da situação e dos invariantes.

Quadro 11 -Resultados das elaborações dos problemas de combinação pelos professores pesquisados

Profº	Resultados das elaborações feitas a partir da situação	Resultados das elaborações feitas a partir dos invariantes
PEM1	Elaborou um problema de combinação correto.	Elaborou problema correto a partir dos invariantes. Fez a indicação do problema como sendo de combinação, depois riscou e colocou como sendo de arranjo.
PEM2	Elaborou um problema de produto cartesiano a partir da solicitação de um problema de combinação.	Formulou um exercício de conjunto a partir dos invariantes, indicando como sendo um problema de combinação.
PEM3	O contexto elaborado a partir da solicitação de um problema de combinação, não foi bem elaborado, pois não há relação com os invariantes combinatórios de um problema combinação.	Elaborou um problema correto a partir dos invariantes de combinação.
PEM4	Não explicitou corretamente as suas ideias na elaboração de um problema de combinação a partir da situação.	Elabora um problema correto a partir dos invariantes de combinação.
PEM5	Elaborou problemas sem relação com a Combinatória.	Elaborou problemas sem relação com a Combinatória.
PEM6	Elaborou um problema de combinação correto. Contextos que envolvem “grupo” e “comissão”, sendo assim, apresenta implicitamente os <i>invariantes</i> específicos da combinação.	Elaborou problemas de combinação corretamente.
PEM7	Elaborou um problema de arranjo a partir da solicitação de um problema de combinação.	Explicou um conteúdo sem relação com a Combinatória.

Fonte: A autora

Observamos que, de modo geral, os professores pesquisados, no momento de elaborar problemas de combinação, apresentaram dificuldades tanto quando solicitados via *situações* quanto quando solicitados via *invariantes*.

Percebemos que os professores PEM1 E PEM7 confundem arranjo e combinação. Esses problemas são bastante parecidos, pois parte da estrutura é mesma para ambos: de um conjunto maior, são formados subconjuntos. O que pode diferenciá-los no momento da resolução e da elaboração de problemas são os *invariantes* da ordenação, que no arranjo geram novas possibilidades, e na combinação a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Rocha (2011) analisou o conhecimento dos professores em relação ao raciocínio combinatório e verificou que a maioria dos participantes da sua pesquisa (dois

professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, dois professores dos anos finais do Ensino Fundamental e dois professores do Ensino Médio) teve dificuldade em diferenciar os problemas de arranjo e combinação. Quando esses docentes analisaram os enunciados e também ao corrigirem as estratégias dos alunos, ficaram confusos em relação à ordenação, que pode gerar ou não, novas possibilidades. Compreendemos que, perceber o invariante de ordenação assim como a escolha dos elementos, é essencial para resolver e para elaborar problemas combinatórios.

Mais uma vez podemos evidenciar que os PEM2, PEM5 e PEM7 elaboraram problemas sem relação com a Combinatória. O PEM5 destaca uma situação que envolve um problema de Probabilidade, como fez nos problemas anteriores, e os PEM2 e PEM7, respectivamente, fazem um exercício não combinatório sem situação-problema e explicam um conteúdo sem relação com a Combinatória. Supomos que esses professores têm dificuldade em relação ao contexto que envolve problemas combinatórios e ao conceito. Portanto, para o professor elaborar bons problemas, é necessário dominar os conceitos envolvidos e também situá-los em um contexto do dia a dia que envolve contagem e o raciocínio combinatório.

A seguir, no Quadro 12, apresentamos os acertos referentes às elaborações de problemas de combinação a partir da *situação* e dos *invariantes*.

Quadro 12 – Acertos dos problemas de combinação elaborados a partir da *situações* e dos *invariantes*

	PEM1	PEM2	PEM3	PEM4	PEM5	PEM6	PEM7
<i>Situação</i>	X					X	
<i>Invariantes</i>	X		X	X		X	

Legenda: Professores – PEM1, PEM2, PEM3, PEM4, PEM5, PEM6, PEM7

Fonte: A autora

Diferente da elaboração dos problemas de permutação e de arranjo, nos quais a maioria dos acertos foi a partir da elaboração por situação, no caso dos problemas elaborados de combinação a maior parte dos acertos foi a partir dos invariantes. Então, parece-nos que os invariantes de combinação foram melhor compreendidos pelos professores.

Da elaboração dos problemas de combinação solicitados aos professores a partir da *situação* (tipo de problema) e dos *invariantes*, os resultados foram organizados da seguinte forma:

a) **Exercícios:**

- Não combinatório.
- Combinatório.

b) **Explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória;**

c) **Problemas:**

- Apropriados.
- Problemas inapropriados:
 - Problema sem relação com a Combinatória;
 - Problema combinatório de um tipo diferente do solicitado;
 - Problema incompleto.

A seguir, no Quadro 13, apresentamos as elaborações apropriadas e inapropriadas produzidas pelos professores.

Quadro 13 - Protocolos para exemplificar os problemas elaborados de forma apropriada e inapropriada a partir da solicitação pelo tipo de problema (*situação/combinção*) e a partir dos *invariantes* específicos

Problemas apropriados	Problemas inapropriados
b) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos. A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Quantas equipes de saúde podemos formar com cinco médicos, três enfermeiras e dois fisioterapeutas, sendo cada equipe formada por um médico, uma enfermeira e um fisioterapeuta? Problema elaborado corretamente Pelo PEM4.	c) Combinação; De quantas maneiras Maria pode se vestir tendo 5 saias, dois sapatos e 4 blusas, sendo todas as peças diferentes? Problema combinatório de um tipo diferente solicitado, elaborado pelo PEM2.
c) Combinação; DENTRE OS 30 ALUNOS DE UMA SALA DE AULA, PRETENDE-SE FORMAR UMA COMISSÃO COM 3 REPRESENTANTES PARA TRATAR DA FORMATURA DA TURMA. DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES ESSA COMISSÃO PODERÁ SER FORMADA? Problema elaborado pelo PEM6.	c) Combinação; Zilide fará uma vitamina com as seguintes frutas: banana, mamão e maçã. De quantas formas diferentes ela poderá fazer essa vitamina utilizando tais frutas? Problema incompleto PEM3.
c) Combinação; DESEJAMOS FORMAR UMA COMISSÃO COMPOSTA DE 3 MÉDICOS E DOIS ENFERMEIROS, QUANTOS GRUPOS DISTINTOS PODEMOS FORMAR SABENDO QUE TEMOS 6 MÉDICOS E 4 ENFERMEIROS? Problema elaborado corretamente pelo PEM1.	b) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos. A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. 1) Um lançamento de uma moeda qual a probabilidade de sair cara? Problema sem relação direta com a Combinatória, elaborado pelo PEM5.

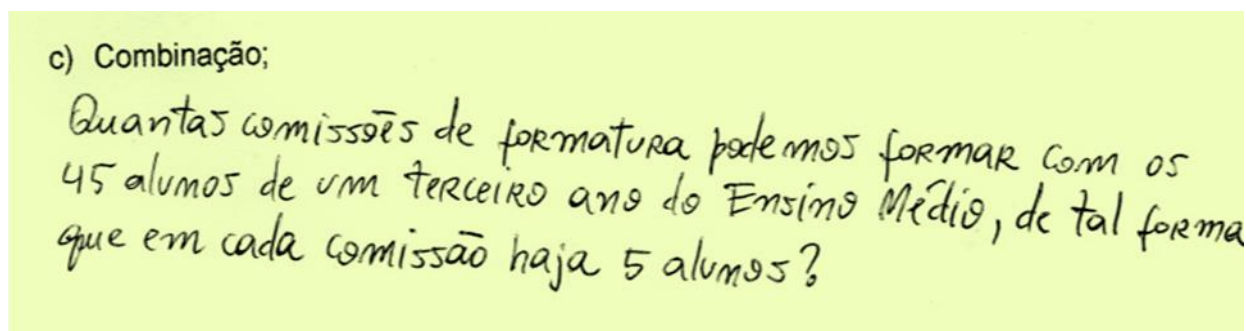
Legenda: Professores – PEM, PEM2, PEM3, PEM4, PEM5, PEM6

Fonte: A autora

Os professores que elaboraram corretamente, além de contextualizá-los, estruturaram os problemas, evidenciando a ideia de um conjunto maior e a formação de subconjuntos, a partir dos elementos apresentados.

Quanto aos problemas inapropriados, percebemos que os professores apresentam dificuldades em diferenciar os tipos de problemas e até mesmo de elaborar problemas combinatórios. Foi o que aconteceu com o professor PEM5 que elaborou problemas de Probabilidade nesse tópico, assim como nos de permutação e de arranjo.

Chamamos a atenção para o problema, a seguir, que foi elaborado pelo PEM4, a partir da solicitação de um problema de Combinação. O problema enfatiza a resolução através do algoritmo da divisão.



Apesar da intenção do professor ter sido a elaboração de um problema de combinação, percebemos que o PEM4 elaborou um problema de divisão. Podemos dizer que se em cada comissão há 5 alunos, então, é possível formar 9 comissões, isso já é o bastante para encontrarmos a solução do problema. O contexto é típico de um problema de combinação. No entanto, faltou alguma palavra-chave para que o problema fosse bem estruturado e desse a ideia para o leitor de descobrir diferentes maneiras de formar as comissões. A estruturação de um problema combinatório poderia ser organizada da seguinte forma, sem perder o contexto proposto pelo PEM4:

De quantas maneiras diferentes podemos formar uma comissão de formatura com os 45 alunos de um 3º ano do Ensino Médio, de tal forma que na comissão haja apenas 5 alunos?

Ou ainda

Temos 45 alunos do 3º ano do Ensino Médio e queremos formar uma comissão com 5 alunos. De quantas maneiras diferentes podemos formar a comissão?

Nesse caso, teremos maneiras distintas de formar a comissão de modo que podemos considerar todas as possibilidades existentes para resolver o problema. O uso do Princípio Fundamental da Contagem ou o uso da fórmula poderia ser o mais indicado, porque o problema indica muitas possibilidades. Resolver esse problema por listagem, desenhos ou outras estratégias menos formalizadas seria difícil por envolver a representação de muitas possibilidades. É importante que o docente pense também nas possíveis estratégias a serem utilizadas pelos alunos.

Nesse sentido, Dante (2009) destaca que quando os problemas apresentam números grandes, a atenção passa a ser para os cálculos e não para o raciocínio e os processos do pensamento. Portanto, refletimos a respeito da necessidade de propor problemas nos quais o aluno terá mais dificuldade nos cálculos por apresentarem um nível maior de complexidade, bem como em problemas que apresentem cálculos elementares, podendo ser resolvidos por diversas estratégias menos formalizadas e cheguem ao nível da generalização. Quando o professor se propõe a elaborar problemas, pensa no nível de complexidade gerado e também no objetivo que pretende alcançar no momento da resolução dos problemas pelos alunos.

O conhecimento do conteúdo e do ensino, indicado por Ball et al (2008) permite que o professor proponha atividades para seus alunos, percebendo as vantagens e as desvantagens para a aprendizagem. Portanto, é imprescindível ao professor ter o domínio do conteúdo combinatório e considerar o que deseja que seu aluno aprenda. Podemos destacar algumas variáveis:

- A ordem das grandezas de um problema poderá determinar a estratégia que o aluno vai utilizar.
- O contexto é pertinente ao ano de ensino que o professor está trabalhando e à faixa etária dos alunos?
- As diferentes etapas da escolha de um problema irão dificultar ou facilitar a sua resolução.
- Os problemas estão bem estruturados, apresentam todos os dados necessários para que o aluno resolva?

O planejamento do professor será importante para que ele realmente foque nos objetivos que deseja alcançar através dos problemas propostos para seus alunos. Portanto, ele deverá, além de saber o conteúdo, ter o conhecimento para o ensino.

A seguir, apresentamos a análise e a discussão a respeito da solicitação de elaboração de problemas combinatórios a partir da *situação* e do *invariante* de produto cartesiano.

5.2.4 Problemas de produto cartesiano elaborados a partir da *situação* (tipo de problema) e dos *invariantes* (características)

Os invariantes do produto cartesiano, apresentados para os professores foram o seguinte: *de dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.*

Apresentamos no Quadro 14, a seguir, as análises acerca dos problemas de produto cartesiano elaborados pelos professores, a partir da *situação* e dos *invariantes*.

Quadro 14 - Resultados das elaborações dos problemas de produto cartesiano feitos pelos professores pesquisados

PROF.	Resultados das elaborações feitas a partir da situação	Resultados das elaborações feitas a partir dos invariantes
PEM1	Elaborou corretamente os problemas de produto cartesiano.	Elaborou corretamente os problemas de produto cartesiano e indicou como sendo combinação.
PEM2	Fez um exercício não combinatório..	Fez um exercício não combinatório.
PEM3	Elaborou corretamente o problema de produto cartesiano	Fez apenas referência ao plano cartesiano
PEM4	Fez um exercício não combinatório.	Elaborou exercícios para que fossem determinados os pares ordenados.
PEM5	Elaborou problemas sem relação com a Combinatória.	Elaborou problemas sem relação com a Combinatória.
PEM6	Elaborou corretamente os problemas de produto cartesiano.	Elaborou corretamente os problemas de produto cartesiano.
PEM7	Fez um exercício não combinatório.	Fez a explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória.

Fonte: A autora.

A maioria dos erros ocorreu porque os professores relacionaram o produto cartesiano ao plano cartesiano. Além disso, não houve contextualização. Sendo assim, não consideramos como um problema. Como produto cartesiano não é um termo comum nos livros didáticos e nem para os professores, entendemos que esta pode ter sido a causa das elaborações equivocadas.

A seguir, no Quadro 15, apresentamos os acertos referentes às elaborações de problemas de produto cartesiano a partir da *situação* e dos *invariantes*.

Quadro 15 – Acertos dos problemas de produto cartesiano elaborados a partir da *situação* e dos *invariantes*

	PEM1	PEM2	PEM3	PEM4	PEM5	PEM6	PEM7
Situação	X		X			X	
Invariantes	X					X	

Legenda: Professores – PEM1, PEM2, PEM3, PEM4, PEM5, PEM6, PEM7

Fonte: A autora

A elaboração dos problemas de produto cartesiano a partir das *situações* e dos *invariantes* foi bastante difícil para os professores, pois, como colocado acima, o termo produto cartesiano não parece ser comum ao contexto combinatório. Sendo assim, os professores relacionaram o produto cartesiano ao plano cartesiano. Os invariantes também não foram bem compreendidos para elaborar problemas combinatórios.

O problema de produto cartesiano, cuja elaboração solicitamos aos professores partir da *situação* (tipo de problema) e dos *invariantes*, os resultados foram organizados da seguinte forma:

a) Exercícios:

- Não combinatório.

b) Explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória;

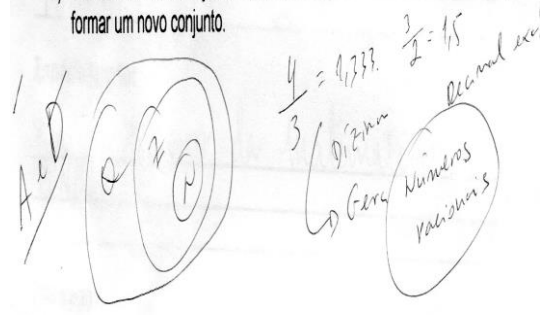
c) Problemas:

- Apropriados.
- Inapropriados:

Problema sem relação com a Combinatória.

No Quadro 16, a seguir, apresentamos os exercícios, as elaborações apropriadas e as inadequadas elaboradas pelos professores.

Quadro 16 - Protocolos para exemplificar os exercícios, explicações e problemas de produto cartesiano elaborados de forma apropriada e inapropriada a partir da solicitação pelo tipo de problema (*situação/produto cartesiano*) e a partir dos invariantes específicos

Problemas apropriados	Elaboraões diversas
d) Produto cartesiano. TEMTO 5 SAPATOS E 3 MEIAS, QUANTAS FORMAS POSSO CALÇAR UM SAPATO E UMA MEIA? Problema de produto cartesiano elaborado corretamente pelo PEM1 a partir da <i>situação</i>.	c) De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.  Explicação de um conteúdo sem relação com a Combinatória feita pelo PEM7 a partir dos invariantes.
d) Produto cartesiano. UM RESTAURANTE SE PROPÕE SERVIR 3 PRATOS DIFERENTES COM ACOMPANHAMENTO DE 4 TIPOS DE BEBIDAS. QUANTAS POSSIBILIDADES DE MONTAR O CARDÁPIO EXISTIRÃO? Problema de produto cartesiano elaborado corretamente pelo PEM6 a partir da <i>situação</i>.	c) De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto. Produto cartesiano. Dado o conjunto $A = \{0, 1\}$ e $B = \{2, 3\}$, determine $A \times B$. Exercício não Combinatório sem situação-problema elaborado pelo PEM3.
d) Produto cartesiano. Uma turma da escola Alegria fará a votação para representante e vice-representante. Porém, para representante somente homens poderão se candidatar e para vice somente mulheres. Sabendo que somente Alex e Flávio se candidatarão para representante e Ana e Maria para vice, quantas são as possibilidades de escolher representante e vice? Problema de produto cartesiano elaborado corretamente pelo PEM3 a partir da <i>situação</i>.	d) Produto cartesiano. 1º) Em um lançamento de duas moedas quais as possibilidades sair cara, e demonstre em pares ordenados, localiz, no Plano cartesiano. Problema sem relação com a Combinatória, elaborado pelo PEM5 a partir da <i>situação</i>.

Legenda:- Professores – PEM1; PEM3; PEM5; PEM6; PEM7

Fonte: A autora

Apenas os professores PEM1, PEM3 e PEM6 criaram problemas contextualizados a partir da solicitação por *situação*. Os demais fizeram relação com o plano cartesiano ou par ordenado; o PEM7 apresentou uma explicação relacionada a conjunto e PEM5 contextualizou

um problema de probabilidade. Como discutido acima, nos livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio o termo “produto cartesiano” não é citado, nem agregado ao conjunto de problemas combinatórios. Sendo assim, alguns professores têm dificuldade na abordagem do conteúdo no Ensino Médio, principalmente no contexto que envolve a Combinatória.

Salientamos que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) indicam que o aluno possa lidar com situações-problema de combinações, arranjo, permutação e o princípio fundamental da contagem. Como discutimos no início desse trabalho, para nós, baseadas em Pessoa e Borba (2010), o princípio fundamental da contagem é uma estratégia de contagem e não um tipo de problema combinatório. Pessoa e Borba (2009) agregam o produto cartesiano ao conjunto de problemas combinatórios, por ser um problema que envolve um contexto de contagem.

5.2.5 Sistematizando o que discutimos até o momento...

A seguir, no Quadro 17, apresentamos os acertos a respeito das elaborações feitas a partir das *situações* e dos *invariantes* de cada tipo de problema.

Quadro 17 - Problemas elaborados corretamente a partir das diferentes *situações* e a partir dos *invariantes* específicos de cada tipo de problema

	SITUAÇÕES				INVARIANTES				TOTAL DE ACERTOS
	PERM.	ARR.	COMB.	PC	PERM.	ARR.	COMB.	PC	
PEM1	X	X	X	X			X	X	6
PEM2	X	X							2
PEM3	X	X		X		X	X		5
PEM4	X	X			X	X	X		5
PEM5									0
PEM6	X	X	X	X	X	X	X	X	8
PEM7									0
TOTAL	5	5	2	3	2	3	4	2	

Legenda: PERM. – permutação; ARR – arranjo; COMB. – combinação; PC – produto cartesiano
Acertos - X

Fonte: A autora

Percebemos, de modo geral, ter sido mais fácil para os professores elaborar a partir das *situações* de cada tipo de problema combinatório, e não a partir dos *invariantes*. A partir desse

dado, levantamos a hipótese: para o professor faz mais sentido o tipo do problema em si do que as relações que podem ser feitas com os *invariantes*.

Os problemas com o maior número de acertos pelos professores foram os de arranjo e de permutação, seguidos de combinação, e depois produto cartesiano. Esse último teve o menor número de acerto, pois alguns professores confundiram produto cartesiano em um contexto referente ao plano cartesiano, desconsiderando, assim, situações reais que envolvem contagem. Como já discutido anteriormente, esse não é um nome comum para problemas combinatórios nas salas de aula do Ensino Médio e nem nos livros didáticos desse nível de ensino.

Constatamos serem os erros dos professores provenientes da falta de contexto envolvendo o raciocínio combinatório; falta de conhecimento do conceito, e da dificuldade de diferenciar os invariantes específicos de cada tipo de problema e de estruturar os problemas.

Diante do exposto, indicamos a necessidade de uma formação continuada para que o conceito envolvido no raciocínio combinatório seja trabalhado através do texto matemático. Indicamos a elaboração de problemas como sendo relevante para refletir a respeito da Combinatória.

5.3 Análises das reflexões dos professores acerca dos problemas combinatórios

Nesse momento da análise, focamos na parte da entrevista na qual solicitamos algumas reflexões aos professores a respeito dos problemas elaborados a partir das *situações* e dos *invariantes*, sobre o ensino da Combinatória no Ensino Básico, sobre a percepção e a dificuldade dos alunos a respeito dos problemas combinatórios. No momento da análise, agrupamos as perguntas, da forma que está apresentada no Quadro 18, primeiro em relação ao conceito (item a), depois em relação ao currículo (itens b, c, d), novamente em relação ao conceito (item e) e, finalmente, em relação ao ensino e a aprendizagem (itens f, g).

Quadro 18 – Perguntas referentes ao terceiro momento da entrevista

Indagações acerca do ensino de Combinatória, do currículo e do conceito
a) O que os problemas elaborados têm de semelhante e de diferente?
b) Os problemas que você elaborou dariam para trabalhar em que ano da Educação Básica?
c) É possível iniciar o trabalho com o raciocínio combinatório a partir de que ano?
d) No livro didático, em que ano geralmente encontramos os problemas combinatórios?
e) É mais fácil elaborar ou resolver problemas combinatórios?
f) Para o aluno, o que seria importante perceber ao resolver os problemas que você elaborou?
g) Quais as dificuldades dos alunos em relação aos enunciados dos problemas combinatórios?

Fonte: A autora.

5.3.1 Semelhanças e diferenças: o que os professores pensam quando elaboram problemas combinatórios?

Nesse momento da entrevista, buscamos entender o que os professores consideram de semelhante e de diferente nos problemas combinatórios. Fizemos o seguinte questionamento aos professores: *O que os problemas elaborados têm de semelhante e de diferente?*

Apresentamos no Quadro 19, a seguir, o que os professores pensam sobre as semelhanças e as diferenças dos problemas combinatórios.

Quadro 19 - Semelhanças e diferenças elencadas dos problemas combinatórios elaborados

Continua

PROF	ANÁLISE DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
PEM1	Semelhanças- conjunto principal, formação de novos conjuntos, subconjuntos. Diferenças- Particularidade de cada tipo de problema.	PEM1- Todas as questões aqui que eu elaborei <u>são dados um conjunto principal e a partir deles eu peço para formar novos conjuntos, subconjuntos</u>, certo? Aí dependendo da particularidade que é feita essa pergunta, eu posso trabalhar com a permutação, combinação e o arranjo, certo? E a diferença é justamente isso, <u>a particularidade com que é feita essa pergunta</u>. Certo? <u>A especificidade da permutação, do arranjo e da combinação.</u>
PEM2	Semelhanças- Não consegue destacar as semelhanças. Diferenças- Tenta exemplificar as particularidades de cada tipo de problema combinatório, mas não deixa clara as especificidades de cada tipo, confunde arranjo e permutação.	PEM2- No caso permutação, eu posso, eu tenho cinco algarismos diferentes eu quero fazer, no caso eu quero formar números, então, aí eu vou fazer uma permutação. No caso de arranjo, é...o arranjo ele é, no caso aí a gente vai ver se eu posso repetir ou não a questão. A questão da combinação por exemplo se quando eu troco a posição dos números ou do conjunto e não altero, então isso é combinação. Então é, se no caso eu tenho, eu tenho cinco pessoas disputando uma corrida eu vou ter aí uma permutação. Agora se eu tenho cinco pessoas para fazer uma equipe aí é combinação. Cinco pessoas para tirar três para fazer uma comissão, aí é combinação, mas se eu tenho cinco pessoas, cinco pessoas pra ver numa corrida quais são as três primeiras, aí é permutação. Então veja que a semelhança nesse caso de permutação e combinação tá só... seria nas, na quantidade de elementos, mas aí a forma é diferente. Tenho aí no caso permutação, arranjo e combinação. E no produto cartesiano ele, ele difere também porque no <u>produto cartesiano se o ponto um dois é diferente do ponto dois um</u>, então se conectou a ordem já tem outro, outro elemento. No caso a realidade eu vou ter a formação de pares, a gente geralmente na permutação, arranjo e combinação a gente trabalha a formação de pares ou conjunto né, ou conjuntos.
PEM3	Semelhanças- São problemas de contagem. Diferentes- Formas de agrupar.	PEM3- Eu acho que <u>as semelhanças se referem às contagens</u> que nós precisamos fazer para resolver cada um desses problemas. E as <u>diferenças estão justamente de que forma devemos agrupar essas contagens</u>. Que forma vamos organizar essas informações para responder as perguntas.

Legenda: P – Pesquisadora/entrevistadora

Fonte: A autora

Grifo nosso

Quadro 19 - Semelhanças e diferenças elencadas dos problemas combinatórios elaborados

Continuação

PROF	ANÁLISE DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
PEM4	Semelhanças- Reconhece que são problemas que trabalham com <u>agrupamento</u> e abordam situações do dia a dia. Não agrega o produto cartesiano. Diferentes- Indica o estudo das técnicas de contagem e enfatiza as diferentes representações.	PEM4- Os três primeiros problemas <u>trabalham com agrupamentos que é permutação, arranjo e combinação</u> também abordam situações quase que do dia a dia deles. PEM4- Análise Combinatória vem exatamente pra você facilitar a forma, você <u>estudar técnicas de contagem nos mais diversos problemas</u> que vem pela frente então, eles vão ver através da <u>árvore das possibilidades</u>, caso a caso e vai comparar com a técnica usando aí no caso o cálculo da permutação através <u>do fatorial</u> a gente pode fazer a comparação dos dois métodos, a partir daí eles verem como <u>as técnicas da Análise Combinatória, usando fatorial, princípio fundamental da contagem, facilita bastante a resolução do problema desse tipo.</u>
PEM5	Semelhanças- Não consegue perceber os aspectos conceituais relacionados a semelhanças e diferenças dos problemas combinatórios. Diferenças- Apenas estabelece que uns problemas estão contextualizados e outros não.	PEM5- Semelhança aqui parece que <u>são os resultados e de diferença, é porque esse aqui no caso é um problemazinho...</u> P- Como assim os resultados? PEM5- Porque através desse aqui no caso os resultados ficam parecidos com ele, com arranjo. P- Por que os resultados ficam parecidos? PEM5- Porque um assunto depende do outro. Pra você fazer um, tem que dominar o outro. Eu acho um parecido com o outro. P- Qual que a gente teria que trabalhar primeiro já que um depende do outro? PEM5- O arranjo e a combinação. No caso aqui, porque no caso, o problema do arranjo é porque a questão já está dada só é <u>ele colocar na formulazinha. Aqui ele vai ter que ler interpretar para poder resolver.</u> P- E o de combinação?

Legenda: P – Pesquisadora/entrevistadora**Fonte:** A autora

Grifo nosso

Quadro 19 - Semelhanças e diferenças elencadas dos problemas combinatórios elaborados
Concluído

PROF	ANÁLISE DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS	FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
PEM 5		PEM5- A mesma coisa que eu estou falando. É bem parecido com permutação, porque no caso aqui eu elaborei. Primeiro aqui ele tem que entender a questão e depois armar para poder resolver. Tá contextualizado. A diferença é justamente que essa aqui é contextualizada e essa aqui o valor já está lá embaixo. Pode <u>colocar uma formulazinha</u> e depois fazer direto. O professor do 2º ano poderia explicar melhor. P- E a diferença em relação ao conceito? PEM5- Acho que eu não lembro mais não, disso não. No caso aqui combinação, acho que a gente tem que mostrar primeiro o espaço amostral e depois desenvolver os eventos. As possibilidades que vai dar o resultado.
PEM6	Semelhança- Trabalha com a ideia de agrupamento e contagem. Diferença- Na estrutura de cada tipo de problema.	PEM6- <u>Semelhantes que ele trabalha sempre com agrupamento, são problemas que têm a ideia de tá agrupando certas, certas, certas, certos elementos e o diferente nele, tá na, justamente na estrutura que cada situação vem apresentando.</u> PEM6- <u>Semelhança é que são problemas de contagem, de agrupamento montando a partir de elementos iniciais.</u>
PEM7	Semelhança- Multiplicação. Diferença- Na ordem e na repetição de elementos	PEM7- Permutação é de quantas maneiras de fazer alguma coisa, de permutar é diferente de fazer um lanche eu tenho quatro tipos de lanches, vou dar exemplo aqui: fazer um lanche com três tipos de suco e quatro tipos de salgadinho. <u>Permutar mudar. Quantas maneiras eu tenho de mudar o lanche? É permutação.</u> PEM7- <u>Semelhante é a multiplicação, multiplicar.</u> Arranjo e permutação a gente tem o princípio multiplicativo, agora na combinação. P- E a diferença entre eles? PEM7- Fatorial é a posição, posição. Na permutação é aleatório, trabalha de qualquer forma, num é uma questão de ordem, ordem num é? Na combinação não pode repetir, uma placa de um carro, eu não posso repetir. Por exemplo, KKR quantas maneiras eu tenho de mudar essa placa, sem repetir, sem repetição. Já na permutação pode repetir, não pode repetir também o mesmo lanche. Pode? Eu tenho duas maneiras de lanchar. Formar uma fila de cinco pessoas da seguinte maneira. Mas aqui não tem questão de ordem não tanto faz o primeiro ser o último. Produto cartesiano... O significado da palavra permutar mudar, arranjo arrumar.

Legenda: P – Pesquisadora/entrevistadora

Fonte: A autora

Grifo nosso

O PEM1 chama a atenção para a formação estrutural dos problemas combinatórios, destacando os conjuntos e os subconjuntos e percebe as especificidades dos mesmos. Já o PEM2 indica haver especificidades, mas não explicita corretamente as particularidades de cada tipo de problema. Os PEM3, PEM4 e PEM6 indicam as semelhanças como problemas de contagem e de agrupamentos. Apontam as especificidades da contagem de cada tipo de problema como uma maneira de diferenciar um problema do outro. O PEM7 aborda a questão da ordem e da escolha dos elementos, mas não explicita com clareza a relação entre os *invariantes* da ordenação e da escolha e o tipo de problema. Chama a atenção para a resolução de um problema de arranjo e de permutação pelo princípio multiplicativo, mas entendemos ser essa um tipo de estratégia que pode ser usada para resolver todos os tipos de problemas combinatórios.

Perceber os invariantes de cada tipo de problema é importante para poder elaborar corretamente e resolver problemas combinatórios. O PEM4 reconhece também as representações como diferentes técnicas de contagem podendo ser comparadas para avaliar o que facilita mais para resolver o problema combinatório e enfatiza a importância de trabalhar com situações do dia a dia. Dante (2009) sugere que os problemas sejam relacionados a situações reais, pois dados e perguntas artificiais tendem a desmotivar os alunos. O PEM4 segrega o produto cartesiano dos demais problemas combinatórios (arranjo, combinação e permutação), pois alega não ser algo comum a ser contextualizado.

PEM4- já com o problema de produto cartesiano, pessoalmente assim eu tenho uma dificuldade e não vejo tanta aplicação prática como nos primeiros três problemas né, e é um problema que você explora mais o lado abstrato da álgebra, então, ainda assim é um problema que trabalha bem a definição de relação. São dados dois conjuntos: o conjunto A e o conjunto B, os seus elementos aí descritos e pra eles determinarem, ou seja, escreverem uma relação, descreverem uma relação dos elementos de uma relação, aí trabalha a ideia de uma relação de um subconjunto do produto cartesiano daqueles dois conjuntos, de tal forma que cada elemento Y seja o dobro do elemento X cada elemento Y pertencente ao conjunto B seja o dobro do elemento X pertencente ao conjunto A, então é um problema aí pra trabalhar o conceito, a definição para trabalhar a relação de subconjunto, eu vejo aí que não é tão contextualizado como os três primeiros assuntos.

(Grifo nosso)

Diante do exposto, percebemos que para esse professor não é comum utilizar o produto cartesiano de forma contextualizada e sim através de um trabalho envolvendo relação de pares ordenados formados a partir dos elementos de dois conjuntos distintos. Diferentemente Pessoa e Borba (2009), destacam o produto cartesiano como um tipo de

problema combinatório envolvendo contagem de elementos, sendo então uma forma específica de contar.

As elaborações relacionadas ao produto cartesiano corroboram com a forma do pensamento do professor a respeito do produto cartesiano; por exemplo, se ele acredita que o produto cartesiano é par ordenado, ele trabalha com as relações entre dois conjuntos: $A \times B$ e $B \times A$. Apresentamos, a seguir, as elaborações feitas pelo PEM4 a partir da solicitação de um problema de produto cartesiano, a partir das *situações* e dos *invariantes*, respectivamente.

d) Produto cartesiano.

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Descreva os elementos (x, y) da relação R , tal que $R \subset A \times B$,
cuja lei de formação seja $y = 2x$.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 5 \cdot 6 = 30 \text{ pares } (x, y)$$

c) De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.

Dados dois conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$. Descreva os elementos dos conjuntos $A \times B$ e $B \times A$.

Como visto, as elaborações do PEM4 representam as ideias dele em relação ao conceito de produto cartesiano e a maneira como é trabalhado em sala de aula. Esse é um ponto consideravelmente importante para discutirmos no processo de formação do professor. É necessário ao professor ter o conhecimento pedagógico do conteúdo, destacado por Ball e colaboradores (2008). Possivelmente o professor que não tem o domínio de tal conhecimento, provavelmente ele vai ensinar de forma inadequada ou não vai ensinar determinado conteúdo.

O PEM6 tem a seguinte ideia a respeito de produto cartesiano:

PEM6- O problema de produto cartesiano que tá bem atrelado aquele princípio fundamental da contagem onde a gente tem que organizar a quantidade de elementos dentro do processo que na verdade é uma maneira diferente da gente pensar arranjo, estou arranjando ali os elementos organizando em pares, ou em trios...

(Grifo nosso)

O PEM6 traz uma justificativa para o produto cartesiano atrelado ao arranjo. Portanto, ele considera que os invariantes e a estrutura de um problema de produto cartesiano diferem do problema de arranjo. Percebemos que o termo “produto cartesiano” atrelado à Combinatória não é algo comum aos professores do Ensino Médio.

A partir deste ponto da entrevista, percebemos que os professores que tiveram 50% ou mais de acertos na elaboração de problemas combinatórios (a partir da situação e dos invariantes) foram os que perceberam melhor as especificidades de cada tipo de problema, ou seja, os invariantes de ordenação e de escolha dos elementos.

No momento da elaboração de problemas combinatórios é necessária a reflexão acerca de vários conceitos envolvidos nas relações que permeiam o raciocínio combinatório. Salientamos o fato disso não ter ocorrido com os professores PEM5 e PEM7, esses não tiveram nenhum acerto. O PEM5 apenas elaborou um exercício de arranjo corretamente, que é diferente de elaborar um problema, e os demais problemas elaborados estão relacionados à Probabilidade. Já o PEM7 teve dificuldade em diferenciar problemas combinatórios e de elaborar problemas a partir dos invariantes. O PEM2 tem dificuldade em elaborar o problema porque provavelmente, não compreende os invariantes de ordenação e de escolha dos elementos.

Apesar de todos os professores terem especialização, percebemos que o conhecimento do professor não depende apenas da formação; a prática de ensino favorece o conhecimento a respeito dos conceitos envolvidos em determinado conteúdo. Compreendemos que trabalhar a formação do conceito no processo de elaboração de problemas pode possibilitar aos professores reflexões sobre o conhecimento que têm a respeito do próprio conceito.

5.3.2 Compreensões dos professores sobre Combinatória e currículo

As recomendações baseadas em pesquisas anteriores e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) são que o ensino da Combinatória seja iniciado desde os anos iniciais do Ensino Básico. Para tal, apresentamos a pesquisa de Pessoa e Borba (2009) onde indicam a melhora no índice de acertos dos alunos no decorrer dos anos de escolaridade do Ensino Básico. Sendo assim, as pesquisadoras constataram: apesar dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental não conseguirem generalizar e encontrar todas as possibilidades solicitadas no problema foi possível ter acertos parciais. Diante do contexto apresentado, procuramos fazer uma relação entre os problemas elaborados e o currículo, relacionando os anos de ensino nos quais os problemas combinatórios podem ser aplicados. A

iniciação do trabalho com o raciocínio combinatório pode ser iniciada bem antes do 2º ano do Ensino Médio, ano que os professores encontram o conteúdo de Combinatória nos livros didáticos. Para isso, fizemos algumas indagações aos professores na entrevista, tais como:

- *Os problemas que você elaborou dariam para trabalhar em que ano da Educação Básica?*
- *É possível iniciar o trabalho com o raciocínio combinatório a partir de que ano?*
- *No livro didático, geralmente em que ano encontramos os problemas combinatórios?*

Apresentamos no Quadro 20, as considerações dos professoresa respeito da relação entre Combinatória e currículo na Educação Básica.

Quadro 20 - Considerações feitas pelos professores a respeito da relação entre Combinatória e currículo na Educação Básica

Continua

FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
PEM1- Desde o 2º ano. Produto cartesiano, desde o princípio, desde o 2º do Ensino Fundamental, acho que desde a base mesmo já podemos trabalhar com isso. Permutação nada mais é que o princípio fundamental da contagem, dependendo como a permutação pode ser feita <u>acho que pode ser trabalhada a partir da 5ª série⁴. Arranjo e permutação acho que a partir do Ensino Médio, 1º ano, 2º ano.</u> P- No livro didático em que ano encontramos os problemas combinatórios? PEM1- <u>Geralmente no 2º ano.</u>
PEM2- Dependendo do nível da para trabalhar. Vai depender do nível do alunado. <u>Dá para trabalhar no Fundamental II, a partir do 6º ano no caso. Pode começar a trabalhar no chamado princípio fundamental da contagem,</u> já pode trabalhar isso lá, lá no 2º ano (Ensino Médio), bem simples e aí vai aumentando o nível. Eu acho que se consegue. <u>Geralmente no 2º ano que a gente vê com um nível mais elevado. No 2º ano do Ensino Médio, é mais aprofundado esse assunto.</u>

Legenda: Pesquisadora - P; Professores - PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7.

Fonte: A autora/grifo nosso

⁴5ª série - Equivalente ao 6º ano do Ensino Fundamental

Quadro 20 - Considerações feitas pelos professores a respeito da relação entre Combinatória e currículo na Educação Básica

Concluído

FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
PEM 3- Daria para trabalhar <u>no 9º ano do Ensino Fundamental II e também daria para trabalhar no 2º ano do Ensino Médio.</u> PEM3- Apesar de nunca ter trabalhado com o Ensino Fundamental I, eu acredito que no 5º ano, 4º e 5º ano dariam para iniciar o trabalho com o raciocínio combinatório. Porque algumas situações que eles vivem no cotidiano eles já vivenciam a prática de alguns questionamentos que envolve Combinatória. PEM3- Eu encontro em livros do 6º ano, do 9º ano e livros do 2º ano, embora nos livros de 3º ano há alguns problemas relacionados a Combinatória, é isso que pude observar até então. Na ressalva que eu nunca trabalhei com 8º ano.
PEM4- olha, é...princípio fundamental da contagem você pode trabalhar já desde o 4º ano tranquilo do Ensino Fundamental, oh perdão, <u>6º ano do ensino fundamental, 5ª série</u>, então você já pode trabalhar a ideia de contagem, princípio fundamental da contagem, é...8º e 9º anos pode trabalhar questão de agrupamentos, combinações, agora de uma maneira mais, digamos que completa formal, no 2º ano do Ensino médio ,problema A, B e C 2º ano do Ensino Médio.
P- Os problemas que você elaborou dariam para trabalhar em que ano da Educação Básica? PEM5- A partir do 6º, 7º, 8º e 9º ano, daria já pra começar já com isso. P- É possível iniciar o trabalho com o raciocínio Combinatória a partir de que ano? PEM5- Ai eu vou chutar, eu sei que no9º ano existe, agora eu não sei no 5º,6º, 7º, que eu não dou aula, como é que vou saber? P- Que tipo de problema você recorda-se? PEM5- Você está me perguntando umas coisas que eu não dou aula, eu não me lembro não. A probabilidade a respeito do dado, da moeda, até do 6º ano já trabalho isso aqui... No 9º e no 2º ano do Ensino Médio.
PEM6- Olhe, eu já trabalhei com algo nesse tipo, nesse nível, numa quarta- série, mas era uma <u>quarta-série específica</u>, era uma quarta série, aquela, a resposta a o incentivo do professor era muita atenta, sabe. No <u>5º ano</u> pode ser trabalhado tranquilamente com a intervenção do professor e depois ser retomado no <u>6º, 7º e 8º anos.</u> P- No livro didático em que ano encontramos os problemas combinatórios? PEM6- [...] encontra no <u>2º ano do Ensino Médio</u> que tem aquela metodologia tradicional de divisão de conteúdo.
PEM7- <u>Sexto ano</u> daria para trabalhar os problemas elaborados. E iniciar o trabalho no <u>5º ano. Encontra no livro a partir do 6º ano.</u>

Legenda: Pesquisadora - P; Professores - PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7.

Fonte: A autora

Grifo nosso.

Os professores abordaram que os problemas combinatórios podem ser trabalhados a partir dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, mas reconhecem constar o conteúdo oficialmente no livro de Matemática do 2º ano do Ensino Médio. O PEM3 indica que os alunos já vivenciam situações no dia a dia relacionadas à Combinatória. Portanto, podemos corroborar com Pessoa e Borba (2009), quando indicam ser o raciocínio combinatório iniciado antes do ensino formal e sofre influência das experiências extraescolares e escolares.

Ball et al (2008) indicam o subdomínio do conhecimento os quais o professor de Matemática deve ter, intitulado como conhecimento do conteúdo e do currículo. Consideramos, então, ser esse o momento da entrevista em que os professores tiveram a oportunidade de refletir sobre em qual ano poderiam ser trabalhados os problemas combinatórios elaborados pelos mesmos, em razão deles poderem lecionar nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Diante do exposto, compreendemos poder haver a intensificação do trabalho com a Combinatória bem antes do 2º ano do Ensino Médio. Um trabalho de formação entre os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que possuem o curso de Magistério ou de Pedagogia, com o dos anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que têm Licenciatura em Matemática. Pessoa e Borba (2009) apontam a possibilidade de trabalho envolvendo a Combinatória desde os anos iniciais; e Matias, Santos e Pessoa (2011) indicam que os alunos da Educação Infantil já percebem os invariantes presentes na Combinatória.

Assis (2014, p. 142) buscou “analisar o efeito de um processo de formação continuada sobre Combinatória nos conhecimentos da docente”. Para tal, procurou verificar as mudanças de conhecimento relacionadas à reflexão e à prática de uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental após um processo de intervenção que foi organizado à luz da Teoria dos Campos Conceituais, a qual valoriza as *situações*, os *invariantes* e as *representações* simbólicas no desenvolvimento de um conceito (VERGNAUD, 1986), também conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento didático desse conteúdo matemático, destacados por Shulman (2005), que aborda o conhecimento do docente. Ball et al (2008) os quais enfatizam o conhecimento do docente em Matemática.

Nessa perspectiva, Assis (2014) realizou uma entrevista inicial, um processo de formação contendo seis encontros e uma entrevista final. Os resultados na entrevista inicial mostraram a dificuldade da professora em reconhecer os diferentes tipos de problemas combinatórios e a percepção dos *invariantes* presentes nas diversas *situações*. Após o processo de formação e na entrevista final, foi possível perceber que a professora pôde ressignificar o seu conhecimento sobre a Combinatória e seu ensino, passando a ter mais

clareza dos tipos de problemas e de suas respectivas características, como também do *invariante* de escolha dos elementos. Entretanto, o *invariante* de ordenação não foi percebido pela professora, que teve dificuldade em diferenciar os problemas de arranjo e combinação quanto à ordem dos elementos. A pesquisadora Assis reconhece o desenvolvimento da professora pesquisada após o processo de intervenção e indica a formação continuada para discutir sobre a Combinatória desde os anos iniciais, pois ajuda os docentes a refletirem sobre o conteúdo e a ressignificar os conhecimentos.

Diante do exposto, percebemos que é possível iniciarmos um trabalho envolvendo o raciocínio combinatório em toda a Educação Básica, porém, a complexidade das diferentes *situações* é que devem ser levadas em consideração para o desenvolvimento do trabalho em sala de aula, considerando as experiências já vivenciadas pelos alunos. Portanto, na elaboração de problemas o professor deve estar atento às especificidades da turma para propor *situações*, as explorações dos *invariantes* e o oferecimento dos diversos tipos de *representação*.

No processo de formação continuada com professores de diferentes níveis, podemos refletir sobre os aspectos envolvidos no processo de elaboração de problemas combinatórios, como também na resolução dos problemas. Enfatizamos que as *situações*, os *invariantes* e as *representações simbólicas* (VERGANUD, 1986) podem ser discutidos e analisados junto aos professores. O ponto seguinte de análise é a questão que colocamos, procurando entender o que os professores do Ensino Médio consideram mais fácil: *Elaborar ou resolver problemas combinatórios?*

5.3.3 Elaborar ou resolver problemas combinatórios: considerações dos professores do Ensino Médio

Nesse momento da entrevista, procuramos entender as dificuldades dos professores no momento da elaboração e da resolução de problemas combinatórios, em razão de ser uma indicação dos Parâmetros de Matemática de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). No entanto, percebemos que no dia a dia do professor, resolver problemas é mais comum do que elaborar problemas em sala de aula, pois geralmente os professores procuram problemas prontos nos livros didáticos, sem ter a oportunidade de refletir sobre o conceito e adequar à realidade dos alunos, como também de avaliar melhor os problemas já existentes nos livros didáticos. Nesse sentido, Smole (2001) indica que os professores não reconhecem a produção textual para o ensino da Matemática como um componente indicado no currículo de

Matemática; porém, a autora reconhece a importância de trabalhar textos. Daí, indagamos para os professores, a seguinte questão: *É mais fácil elaborar ou resolver problemas combinatórios?*

No Quadro 21, apresentamos as considerações dos professores acerca da elaboração e da resolução de problemas.

Quadro 21 - Reflexões dos professores acerca da elaboração e da resolução de problemas combinatórios

Continua

ANÁLISE	FRAGMENTOS DA ENTREVISTA
Não há formação para o processo de elaboração. Resolver problemas é mais fácil do que elaborar.	PEM1- Resolver, resolver. Resolver é mais fácil com certeza, até porque os professores infelizmente, nós <u>não estamos sendo capacitados para elaboração de questões</u>. Infelizmente dentro <u>da nossa formação, nós temos que seguir o livro didático que já pega aquele material pronto</u>. Resolver é bem mais fácil do <u>que elaborar</u>.
Resolver requer apenas que o professor aplique seus conhecimentos. Já no caso da elaboração os objetivos do professor e as estratégias de resolução estão em evidência.	PEM2- Resolver, como ele já está pronto a gente lê e aí <u>aplica os conhecimentos que a gente tem na resolução do problema</u>. No caso como ele já está pronto no caso não fica parando para pensar e elaborar. Ele já está pronto, eu acho mais fácil resolver. P- E no momento que está elaborando? PEM2- Aí a gente para pensar e, a gente tem que entender no problema e na resposta, para ter uma resposta satisfatória. Geralmente a elaboração de um problema requer muito mais concentração do que você realmente partir para resolver. P- Quando o senhor diz pensar no problema. Pensar em que no problema? PEM2- <u>Pensar no objetivo que você que atingir naquele problema. O que você que quer o aluno utilize para resolver no problema.</u>

Legenda - P – pesquisadora; PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7- professores

Fonte: A autora

Grifo nosso

Quadro 21 - Reflexões dos professores acerca da elaboração e da resolução de problemas combinatórios

Continuação

ANÁLISE	FRAGMENTOS DA ENTREVISTA
Resolver é mais complicado porque há a necessidade de diferenciar os tipos de problemas. Na elaboração é possível pensar na resposta, no raciocínio dos alunos, nos agrupamentos das informações e dos números.	PEM3- Eu acho que os dois são complicados, mas assim, eu acho que <u>resolver é mais complicado. Por que muitas vezes você tem a ideia que é um problema de Combinatória, mas não sabe que caminho, se é um arranjo, é uma combinação, isso é e aí você pode se confundir.</u> P- Porque elaborar é mais fácil? PEM3- Porque quando se <u>elabora um problema de Combinatória eu acho que a gente já se espera uma provável resposta</u>, pelo menos pra mim. Quando eu tou elaborando já estou pensando, eu vou responder desta forma. Então pra mim elaborar é mais simples. Do que pegar algo já pronto e responder, porque <u>quando você elabora você pensa naturalmente logo na resposta, você já se preocupa com a resposta.</u> P- E além de pensar na resposta o que está envolvido no momento da elaboração? PEM3- Está envolvido o raciocínio que os alunos precisam ter sobre a própria Combinatória de que forma <u>ele vai agrupar as informações e os números.</u>
É mais difícil elaborar do que resolver. Elaborar problemas ajuda a entender as abordagens dos conceitos e das definições.	PEM4- Resolver é mais fácil, elaborar é mais difícil, porque diferentemente de um problema de geometria, você esta trabalhando mais com o concreto, você esta visualizando figuras ou situações, por exemplo, trabalhando com funções, problemas envolvendo raciocínio combinatório exige um maior cuidado na elaboração até porque um assunto, é um campo da Matemática que praticamente você trabalha com o raciocínio, então é bem mais difícil você elaborar principalmente ali com aquela turma que você tá trabalhando esse assunto. PEM4- Problemas assim que eu venho trabalhando em sala de aula, são problemas assim introdutórios, são aqueles problemas assim que são mais básicos pra eles entenderem assim os conceitos e as definições, eles diferenciarem as definições de agrupamento, de arranjo e combinação são aqueles problemas básicos que eu começo a trabalhar quando estou com eles, eu pensei nisso, são mais assim dentro do cotidiano deles.
Refere-se à importância da prática em sala de aula.	PEM5- Aos conhecimentos. No caso é que vamos supor assim quem vivencia as práticas fica mais fácil para resolver no caso o que a gente vê no dia a dia esse negócio da bola que falei, esse negócio do dado, esse negócio da moeda, fica mais fácil de elaborar quando você trabalha e vê.

Legenda - P – pesquisadora; PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7- professores

Fonte: A autora

Grifo nosso

Quadro 21 - Reflexões dos professores acerca da elaboração e da resolução de problemas combinatórios

Concluído	
ANÁLISE	FRAGMENTOS DA ENTREVISTA
Indicou que elaborar problemas refere-se aos aspectos pedagógicos e do conceito.	PEM6- Elaborar problema ele deveria ser uma habilidade muito fácil para o professor. Quando eu estudava o meu professor me dizia, o meu professor do Ensino Médio você só vai ter condições de dizer que compreendeu o conteúdo quando for capaz de criar problemas em cima desse conteúdo, aí você vai tá dominando tudo. A dificuldade que a gente tem ao elaborar o problema é se adequar ao grupo de estudo que a gente tá trabalhando. Então o problema que eu elaborei agora com o objetivo de, de ajudar na compreensão de um conteúdo para uma série A pode ser que não sirva para iniciar uma aula em uma série B. Então a elaboração de problema o professor tem que tá muito atento ao meio que ele tá inserido, ao objetivo que ele que alcançar.
Resolver é mais fácil porque já contém as informações. Elaborar precisa conhecer os invariantes.	PEM7- <u>Resolver a questão é mais fácil. Agora tem que ter uma fórmula, alguma coisa. Porque é o que eu tenho e o que o problema tá pedindo. Eu posso ter a ideia de um exemplo e elaborar outro.</u> Criar do nada é difícil. P- O que foi difícil elaborar a partir das situações e das características dos problemas combinatórios? PEM7- Diferenciar um do outro. A princípio tudo é multiplicativo. Mas tem a diferença a questão de ordem, de posição, de não poder repetir.

Legenda - P – pesquisadora; PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7- professores

Fonte: A autora

Grifo nosso

O PEM1 aponta para a necessidade de um processo de formação continuada para trabalhar a elaboração de problemas e que os problemas trabalhados já são encontrados prontos nos livros didáticos. Percebemos, então, ser o livro didático um instrumento bastante utilizado pelo professor, pois os problemas combinatórios já estão prontos e é mais fácil utilizá-los que elaborá-los. Daí, indagamos: *Como os professores podem pedir aos alunos para elaborem problemas, se eles mesmos não costumam ter essa prática ou têm dificuldades em elaborar problemas?* Então, ressaltamos que o processo de formação continuada para trabalhar a elaboração de problemas pode ser uma atividade de construção do conceito que envolve o raciocínio combinatório nas diferentes *situações* que dão ênfase ao conceito, os *invariantes* de ordenação e escolha dos elementos que podem gerar ou não novas possibilidades e as variadas *representações simbólicas*.

Já o PEM3 não se reporta aos *invariantes* do problema, nem aos aspectos estruturais, apenas indica que o professor deve focar nos objetivos que deseja alcançar e nas estratégias de resolução. Adverte que resolver problemas combinatórios é mais difícil porque nos problemas já prontos há a necessidade de fazer a diferenciação entre eles e chama a atenção para os

problemas de combinação e de arranjo. Indica que elaborar é mais fácil, porque o professor já pensa na resposta. Lembramos que os demais professores indicaram que elaborar é mais difícil.

Além da resposta, a PEM3 chama a atenção para pensarmos no raciocínio do aluno no momento da elaboração e nos possíveis agrupamentos dos números. Apesar da PEM3 ter dito que elaborar é mais fácil, ele aponta para vários aspectos importantes que os professores precisam ter no momento da elaboração, possivelmente requerendo um conhecimento mais elaborado do professor, pois envolve tanto as questões conceituais da Combinatória como as questões pedagógicas referentes ao nível do aluno.

O PEM4 faz uma analogia dizendo que fazer uma comida é mais difícil do que comê-la, ou seja, elaborar um problema é mais difícil do que resolvê-lo, pois os aspectos conceituais, pedagógicos e o que se espera do aluno estão envolvidos. No momento da elaboração, o professor considera vários aspectos relacionados ao conceito e à sala de aula. No entanto, tem a oportunidade de refletir sobre a aprendizagem do aluno. Elaborar problemas não é uma tarefa fácil para o professor, pois depende do conhecimento existente de cada docente e da experiência em sala de aula, pois o professor precisa adequar o conteúdo a ser trabalhado ao nível da turma, estabelecendo a prática de ensino do conteúdo em destaque.

PEM4- É como eu disse, é mais difícil porque o que eu quero extrair do meu aluno a partir daquele problema que eu estou elaborando, que conceito eu vou trabalhar, que habilidade ou competência eu vou trabalhar naquele problema ali que eu estou resolvendo, é como... eu vou fazer uma comparação até um pouco grosseira, é bem mais difícil você preparar uma boa comida do que você comê-la, então né, você elabora uma comida você tem que ter o cuidado com os elementos, os ingredientes que você vai usar pra que não fique nem salgado nem fique doce, então é o cuidado que devemos ter, assim o professor tem que ter cuidado quando está elaborando aquele problema, a resolução já é, digamos, o relatório daquele problema que foi levantado.

(Grifo nosso)

O PEM5 informa que a experiência em sala de aula é muito importante para o professor elaborar problemas; ele se refere ao conhecimento utilizado na sua prática em sala de aula. O PEM5 é um professor que apesar de lecionar no Ensino Médio, não tem trabalhado atualmente no 2º desta modalidade. Já o PEM6 aborda que elaborar problemas envolve mais variáveis a serem consideradas, destaca que é importante considerar o nível da turma e o objetivo que o professor quer alcançar.

PEM6- Então eu acredito que hoje o professor tem muito mais facilidade em resolver o problema do que em criar, pra mim é mais facilidade resolver do

que criar, mesmo que não seja muito difícil criar. Mais eu percebo que há mais variáveis envolvidas para criar um bom problema que tenha objetivo didático. Pra mim, uma questão criada pelo professor ele não tem o objetivo de buscar uma resposta do aluno e sim de fazer o aluno pensar pra que a resposta seja consequência. Então, quando eu crio meus problemas de qualquer item, de qualquer assunto eu tenho uma intencionalidade e não de atingir uma resposta, é como se eu tivesse a metodologia para no final de tudo atingir uma resposta. Eu tenho outros objetivos a atingir na elaboração de um problema por isso que eu digo: leia o problema, a Matemática tá bem na minha cabeça.

PEM6- Pra mim, eu teria mais dificuldade em elaborar porque envolveria mais etapas do que a solução deles. Por exemplo, eu tenho que entender o público que estou trabalhando, leitura de turma, até que ponto ela pode chegar matematicamente falando porque se eu não posso preparar aquela turma para NASA eu tenho que preparar para sair na rua e pensar Análise Combinatória. O professor tem que ter a sensibilidade de perceber a turma e jogar o problema no nível, quando eu falo no nível, veja bem, não é um problema final de sala de aula não, é um problema intencional de construção didática de conteúdo que eu teria que ter essas variáveis todas: leitura de turma, entender o problema, o potencial do aluno, saber até onde ele pode chegar, qual é a linguagem que ele vai compreender melhor.

(Grifo nosso)

Compreendemos, então, que além do professor ter a necessidade de ter um conhecimento mais elaborado em relação ao conteúdo, ele também pensa nos aspectos pedagógicos. O PEM6 é um professor que conseguiu elaborar corretamente todos os problemas combinatórios a partir das *situações* (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano) e dos *invariantes do conceito*. No entanto, a preocupação maior desse professor é valorizar os aspectos pedagógicos para atender ao nível da turma, já que os aspectos conceituais dos diferentes tipos de problemas combinatórios ele consegue dominar. Para esse professor, há uma preocupação de valorizar o conhecimento pedagógico do conteúdo, defendido por Shulman (2005). Ao indicar a necessidade desse tipo de conhecimento aos professores de todas as áreas. Ball et al (2008) especificam esse conhecimento ao professor que trabalha com a Matemática.

O PEM7 explicita que elaborar problemas é mais difícil, pois o professor precisa saber diferenciá-los e chama a atenção para os *invariantes*. Esse professor teve bastante dificuldade de elaborar e não teve nenhum acerto, seja pela falta de contextualização, ou ainda, da diferenciação de acordo com os *invariantes*.

De modo geral, a maioria dos professores achou mais fácil resolver do que elaborar problemas combinatórios, pois essa atividade requer diversas variáveis importantes para serem pensadas no momento da elaboração. Podemos destacar que os objetivos que o professor quer alcançar permeiam diante dos aspectos estruturais de cada tipo de problema, dos conceitos envolvidos e do nível da turma, assim como, as diversas estratégias que o aluno poderá utilizar para resolver problemas. Ball et al (2008), ao destacarem os domínios que o professor de Matemática deve ter, chamam a atenção para o conhecimento do conteúdo e o ensino; daí percebemos que ao elaborar problemas os professores têm a oportunidade de exemplificar melhor o conteúdo no momento que está ensinando, tanto de forma oral como de forma escrita. Destacamos também que, o conhecimento do conteúdo e dos estudantes que são explicitados nas estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problema, deve ser pensado pelo professor, como destaca o PEM2, pois ele terá a oportunidade de analisar a maneira como o aluno está se comunicando matematicamente, os erros cometidos e suas razões, e ainda, como ou se ocorrem as generalizações por parte dos alunos a respeito das resoluções dos problemas combinatórios.

5.3.4 Considerações acerca da elaboração de problemas combinatórios

Nesse momento da entrevista, solicitamos aos professores que refletissem um pouco acerca do olhar dos alunos sobre os problemas combinatórios, para tal, fizemos as seguintes perguntas:

- *Para o aluno, o que seria importante perceber ao resolver os problemas que você criou?*
- *Quais as dificuldades dos alunos em relação aos enunciados dos problemas combinatórios?*

No Quadro 22, a seguir, abordamos as reflexões dos professores a respeito dos alunos e dos problemas combinatórios.

Quadro 22- Reflexões dos professores do Ensino Médio acerca dos alunos ao resolverem problemas combinatórios

ANÁLISE ACERCA DAS RESOLUÇÕES E DAS ELABORAÇÕES	
PEM1	Chamou a atenção para as particularidades de cada tipo de problema combinatório e a interpretação dos enunciados.
PEM2	Considerou a importância de o aluno perceber os conceitos básicos e interpretar o texto.
PEM3	Percebe os agrupamentos dos elementos e sabe interpretar os diferentes problemas combinatórios.
PEM4	Indicou a interpretação como algo importante para o aluno perceber os pontos principais do problema e os agrupamentos, principalmente os <i>invariantes</i> de ordenação e escolha dos elementos.
PEM5	Relatou que a maior dificuldade dos alunos é saber interpretar.
PEM6	Considerou o nível de complexidade dos problemas, os conceitos prévios que os alunos devem ter e boa leitura (interpretação de texto).
PEM7	Indicou a importância de diferenciar um problema do outro e saber usar a fórmula adequada para cada tipo de problema.

Legenda: P – pesquisadora; PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7- professores.

Fonte: A autora.

O PEM1 chama a atenção para refletirmos sobre as particularidades dos problemas combinatórios que consideramos como sendo os invariantes de ordenação e escolha dos elementos. Compreendemos que os invariantes são o que os professores apresentam mais dificuldade de perceber e diferenciar no momento da elaboração, portanto, os docentes que tiveram a compreensão dos *invariantes* de cada tipo de problema, também apresentaram o maior número de acertos.

Entendemos, então, que os *invariantes* precisam ser interpretados e diferenciados para que os problemas sejam elaborados e resolvidos corretamente. Por conseguinte, tanto na elaboração de problemas como na resolução, os *invariantes* são um ponto importante na discussão podendo ser trabalhado nos cursos de formação do professor. A seguir, apresentamos o extrato da fala do PEM1, que chama a atenção para as particularidades de cada tipo de problema, a interpretação e as formas criativas de resolução dos problemas combinatórios.

PEM1- Eu acho que antes de qualquer coisa, deveria verificar as particularidades das definições de cada termo desse aqui, de cada assunto elaborado. As particularidades de permutação, de arranjo, de combinação e de produto cartesiano. Eu acho que a maior dificuldade é problema de leitura, porque problema combinatório, de análise Combinatória você tem

que ler e interpretar para resolver. A maior dificuldade é questão da interpretação da questão.

P- Além da interpretação, o que ele precisa?

PEM1- Acho que sim, se ele souber interpretar, é porque é assim né, problemas de combinação e permutação eu não, quando eu estou ensinando, eu digo a meus alunos não fiquem preso as fórmulas, certo?. É mais viável você entender e adequar àquela questão para o seu conhecimento, certo? Trabalhando com as quatro operações que na verdade só trabalha com as quatro operações, não vejo nada a mais do que isso na Análise Combinatória, a não ser quando você tá pedindo aí uma quantidade de subconjuntos que trabalha com uma potência 2 elevado a n a subconjuntos, a não ser isso, eu acho que o básico é mais a leitura mesmo.

P- Você quer que os alunos não fiquem presos a fórmula. Que outras maneiras que eles têm de resolver a questão, quando eles não resolvem através da fórmula?

PEM1- Fazendo o desenho da questão, é pegar a questão e realmente eu falo por mim e também tento passar isso para meu aluno. É coisa muito difícil ensinar a pensar, é você pegar a questão e colocar no papel o que está dizendo o enunciado. É fazer o desenho da questão mesmo e ver como é que você pode utilizar um método, algo para resolver aquela questão. É usar a criatividade mesmo, incentivar a criatividade do aluno. Eu trabalho, a partir é, eu dou a fórmula é claro que tem ser dado, tem que ser dado não, é mais fácil para eles, mas eu sempre estimulo através de desenhos, a formação de desenhos, a utilizar a criatividade. Acho que esse é o lado interessante da Matemática, utilizar a criatividade.

P- Quando você utiliza a fórmula, eles sabem relacionar que aquela fórmula é de tal problema combinatório, eles conseguem?

PEM1- Conseguem, não digo todos, mas aqueles mais esforçados.

(Grifo nosso)

O PEM3 percebe a importância de agrupar de forma diferente os elementos dos diversos tipos de problemas combinatórios e reconhece as diferenças entre os problemas de arranjo e combinação. De maneira implícita reconhece os *invariantes* de ordenação e escolha dos elementos dos problemas combinatórios. A seguir, apresentamos os extratos da fala do PEM3, a respeito da resolução de problemas por alunos.

PEM3- Seria interessante que ele percebesse que a forma de agrupar as informações contidas elas precisam ser verificadas, a, a, a, é, com o intuito de se adentrar aquele tal conteúdo estudado. Então por exemplo, quando eu elaboro uma questão de arranjo, por exemplo, eu quero que ele identifique aquela questão, que ele perceba claramente que aquela questão se refere a uma questão de arranjo. A forma de agrupar as informações contidas naquela questão. Quando eu faço uma questão de combinação, eu quero que ele

perceba que o agrupamento vai ser diferenciado de um agrupamento de arranjo.

P- Pra ele perceber que é um problema de arranjo ou de combinação o que é necessário aí.

PEM3- É necessário que ele tenha o conhecimento de que existem essas duas formas de, de, de se agrupar esses elementos, é preciso que ele perceba que nesse problema eu vou agrupar as questões desse jeito e no outro problema ele vai agrupar de outra forma.

(Grifo nosso)

O exemplo dado pelo PEM3 reconhece que em certas *situações* a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, apesar da posição que os elementos irão ocupar serem diferentes. Em outras *situações*, como a exemplificação do contexto que envolve eleição, fica claro para o PEM3 que em alguns casos a ordem gera novas possibilidades.

PEM3- Vai ser em relação a posição que os elementos vão ocupar, então quando eu coloco aqui a situação de fazer uma vitamina por exemplo nesse se eu colocar três ou quatro frutas independente do quantitativo a vitamina vai ser a mesma, se eu colocar duas frutas por exemplo banana com maçã e a vitamina de maçã com banana vai ser a mesma vitamina. Né, eu quero que ele perceba isso. Há uma diferença na posição que os elementos vão ocupar. Nos de arranjo, por exemplo, compor uma comissão onde ele precise ter cargos, essa comissão quando eu coloco uma pessoa em determinado cargo, eu vou ter uma forma diferente de agrupar quando essa pessoa vai assumir um cargo e quando essa pessoa vai assumir outro, por exemplo. É, se eu compusesse uma chapa, por exemplo, Dilma com Aécio, por exemplo, Dilma presidente e Aécio vice é diferente de ter Aécio como presidente e Dilma como vice. Vou ter essa mudança da ordem.

(Grifo nosso)

O PEM3 reconhece a diferença dos agrupamentos entre combinação e arranjo e tem dificuldade em perceber como ocorrem os agrupamentos em uma situação de permutação. Apesar de não ter expressado uma discussão a respeito dos *invariantes* de permutação, a professora conseguiu elaborar um problema de permutação a partir da situação e reconhece os *invariantes* desse tipo de problema, mas não faz relação entre os *invariantes* e o problema elaborado. Outro fato importante é o professor reconhecer que existe deficiência no currículo quanto há indicação de trabalhar com a Combinatória no curso de formação inicial (Curso de Licenciatura em Matemática) e que na prática não está desenvolvendo um trabalho com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, ano escolar em que oficialmente é trabalhado o conteúdo. Reconhecemos, então, que a formação e a experiência do professor em sala de aula são importantes para o desenvolvimento do trabalho com a Combinatória. Ball et al (2008),

baseados em Shulman (2005), chamam a atenção para as questões que dizem respeito ao currículo. Dessa forma, reportamo-nos às relações que os professores podem fazer entre os conteúdos e os anos de ensino em que os mesmos podem ser trabalhados.

A seguir, apresentamos os problemas de permutação elaborados pelo PEM3, respectivamente, a partir da *situação* que dá sentido ao conceito e a partir dos *invariantes* da Combinatória e o extrato da fala do PEM3 referente aos problemas de permutação.

a) Permutação;

A cidade Longa-Vida precisa emplacar os carros que lá circulam. A placa será composta por 3 algarismos a saber: 2, 3 e 4. Até quantos carros podem ser emplacados nessa cidade?

d) A partir de um conjunto dado, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar novos conjuntos. A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Permutação.

Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$, de quantas formas podemos construir uma placa utilizando três elementos do conjunto A?

O PEM3, ao ser questionado sobre a resolução de problema de permutação, teve a seguinte reflexão:

P- E permutação?

PEM3- Dentro de permutação?

Momento de silêncio

PEM3- Eu não sei explicar não. Sei não, explicar não.

O PEM3 só consegue elaborar um problema de permutação a partir da situação e parece não perceber com clareza os invariantes explicitados de permutação. Na fala do PEM3, fica clara a dificuldade que o mesmo tem em relação aos problemas de permutação. A seguir, apresentamos os fragmentos da fala do PEM3 sobre a resolução dos problemas de produto cartesiano.

PEM3- É porque é assim, já faz certo tempo que eu não trabalho com o 2º ano, então alguns conteúdos de 2º ano eu particularmente, tanto não, até na

minha vivência de Ensino Médio foi um pouquinho relegado e até na minha própria formação como professora. Então eu lembro que teve um professor de uma disciplina, que teve, que a disciplina teve uma ementa diferente não era nada de Combinatória, mais ele disse assim: é importante que vocês saiam daqui sabendo Combinatória, porque eu sei que na grade curricular de vocês e nas ementas da disciplinas vocês não tem. Realmente a gente não tinha. E aí foi interessante que ao invés dele dar essas aulas de Combinatória, ele trouxe outro professor de Combinatória. Ele assim, até reconheceu que ele não é um expert de Combinatória, ele não tinha aquele conhecimento todo e trouxe outra pessoa. E aí quando eu vou trabalhar Combinatória, geralmente eu estudo antes alguma coisa tanto é que os exemplos que eu coloquei aqui são bem simples, porque eu vou estudar antes, aprofundar. Como faz certo tempo, aí eu não me prendo muito, como eu estou afastada do 2º ano, então eu não vou tocar nesse assunto. Isso acontece e aconteceu comigo também e aí produto cartesiano quando você perguntou eu disse e aí eu vejo também no primeiro ano, também uma questão de Combinatória. Eu disse pera aí, eu vou inventar uma questão envolvendo produto cartesiano. E aí pra minha surpresa, quando eu elaborei, eu não sei se está correto, eu posso até depois verificar com você eu disse: poxa como eu poderia trabalhar produto cartesiano que é um assunto do 1º ano que eu não identifico dentro de Combinatória e aí eu fico sem poder responder porque é uma questão que eu trabalhei e eu não tinha essa visão de Combinatória dentro de produto cartesiano. Então, na verdade, eu fiz a questão, consegui, acredito que dentro do pouco conhecimento que eu tenho de produto cartesiano, acredito que dá para montar o produto cartesiano com as informações da questão, mas que eu acabei de perceber pelo seu questionamento isso. Até porque quando eu trabalho Combinatória eu não trabalho produto cartesiano, só permutação, arranjo e combinação.

P- Como você trabalha produto cartesiano?

PEM3- Geralmente eu trabalho em conteúdos do 1º ano trabalhando com alguns algoritmos e pedindo para eles fazerem, construírem os agrupamentos dos elementos de um determinado conjunto com os elementos do outro conjunto.

P- Quais as dificuldades dos alunos em relação aos enunciados dos problemas combinatórios?

PEM3- Eu acho sinceramente que a dificuldade parte muito da forma como a gente explica, porque quando a gente coloca arranjo tem que ser assim, combinação tem que ser assado e tá tudo junto e misturado, aí ele fica querendo na verdade, querendo separar o que é arranjo e o que é combinação para poder aplicar aquela fórmula quando na verdade ele deveria entender esse problema a partir da leitura e da interpretação de um problema de arranjo e um problema de combinação, acho que isso parte muito da gente da forma como nós trabalhamos. Eu sinto também uma dificuldade da interpretação de texto também dos alunos, da forma como eles interpretam os problemas de uma forma geral. É como se fosse meio partido, está dentro do conteúdo mais está meio partido. Ele quer identificar logo, isso aqui é o que? É arranjo, é combinação? Ele quer logo colocar uma fórmula.

(Grifo nosso)

O PEM3, apesar de só trabalhar com seus alunos arranjo, combinação e permutação, reconhece que é possível trabalhar produto cartesiano no contexto que envolve a Combinatória. Há uma preocupação com o uso da fórmula, apesar do PEM3 indicar a interpretação como algo relevante.

A seguir, apresentamos os fragmentos da fala do PEM4 a respeito da elaboração de problemas combinatórios.

PEM4- É aquela receita na resolução de um problema de Matemática anote os dados que o problema forneceu, o que, é que o problema forneceu, que dados, ele forneceu? O que é que o problema está pedindo? Que dados, variável, parâmetro ele está pedindo? Que teorema ou que teoria, ou que regra eu vou usar para resolver aquele problema? E a parte final seria o cálculo propriamente dito. Principalmente em problemas combinatórios eu diria que 50% da resolução do problema seria interpretação de texto. Como todo restante da área, da área da Matemática, mas principalmente, problemas combinatórios, interpretação de textos e ele focar em algumas palavras chaves, que daria a ele, condições de diferenciar o tipo de agrupamento do qual ele tá trabalhando. Então, por exemplo, determinado problema em que aparece a palavra distinto. Ele vai trabalhar com um tipo de agrupamento, chamado arranjo, ou seja, eu não posso ter repetição de termos, ou melhor, ainda ele vê se determinado contexto, inverter a ordem de dois elementos daquele agrupamento que vai ser formado se vai continuar a ser o mesmo agrupamento ou se já se configura outro ponto ali, já que vai ser outro grupo. Então, é importante ele focar, interpretar no...é essas questões aí no problema combinatório. Se o grupo de agrupamentos de elemento ali solicitado, pedido no problema é o mesmo número de elementos que eu disponho ali no problema. Quando eu vou ter ali um problema de permutação, então o importante é ele focar bem nas palavras ali no sentido do texto, 50% dos problemas combinatórios é interpretação de texto.

PEM4- É algo importante se pode haver repetição de elementos, se não vai ter ali a palavra "distintos", eu não posso ter repetição de elementos, é importante ele olhar, ele perceber se há ordem dos elementos e se pode haver repetição de elementos ou não, pra que ele possa diferenciar os tipos de agrupamentos que ele vai trabalhar ali daquele problema combinatório, eu já tive a oportunidade de em uma atividade de avaliação de um problema envolver combinação, o aluno não interpretou devidamente, ele interpretou como sendo um arranjo e usou a fórmula do arranjo, ao invés de usar a fórmula de combinação. É importante que eles saibam diferenciar os agrupamentos, principalmente pela ordem, é o que ocorre com produto cartesiano. Então se eu tenho cada par ordenado daquele ali um elemento, uma relação, se eu inverter a ordem daquelas coordenadas, daqueles números eu não vou ter o mesmo par ordenado, eu vou ter outro par ordenado, vou ter outra localização o sistema de coordenadas cartesiano e eu já visualizei ainda uma situação com problemas que podemos trabalhar isso GPS, localização através do GPS, de um smartphone, a maioria dos smartphone vem com o dispositivo GPS.

(Grifo nosso)

O PEM4 foca na interpretação do problema e considera alguns pontos importantes para o processo de resolução, tais como: os dados, a pergunta principal e de que forma pode ser resolvido, assim como o cálculo que será feito.

Diante do exposto, consideramos importante que o professor, no momento da elaboração de um problema, reflita nos aspectos conceituais e nos pontos a serem considerados pelos alunos no momento da resolução.

Nesse sentido, Dante (2009) indica que um problema se torna mais difícil quando os dados não são apresentados em determinada ordem, ou seja, devemos definir a ordem das informações propostas em um problema. A seguir apresentamos os fragmentos das considerações feitas pelo PEM5, a respeito da resolução de problemas.

PEM5- A maior dificuldade dos alunos é saber interpretar, tem aluno que lê a questão e não sabe como resolver, é a interpretação. Tem que ter uma boa base de Matemática e até o raciocínio lógico. Assim já dá para ele responder certas questões.

(Grifo nosso)

O PEM5 é um professor que não percebe os *invariantes* dos problemas combinatórios e nem elaborou nenhum problema correto, tanto através da *situação*, como também dos *invariantes*. Apenas formulou um exercício de arranjo. Confundiu os conceitos de probabilidade com arranjo nas elaborações feitas. No momento em que o PEM5 precisa refletir sobre o conhecimento necessário para o aluno, ele aborda de forma bem geral, sem considerar os aspectos conceituais, que é justamente a dificuldade demonstrada por ele no momento da elaboração de problemas combinatórios.

Ball et al (2008), referendando-se em Shulman (2005) ao estabelecerem os domínios do conhecimento do professor de Matemática, aborda a necessidade do conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Ressaltamos, então, a necessidade do professor ter a capacidade de interpretar o conhecimento dos estudantes. Em relação aos objetivos necessários à aprendizagem dos problemas combinatórios, esse professor não soube indicar o que seria importante para seu aluno aprender. Quanto ao conhecimento do conteúdo e o ensino, seria relevante que houvesse a elaboração de problemas voltados para o ensino em sala de aula; porém, o mesmo apresentou dificuldade. Esses tipos de conhecimento são imprescindíveis para a prática do professor em sala de aula.

O PEM6 chama a atenção para o nível de complexidade de cada tipo de problema combinatório e para a importância da compreensão da leitura e interpretação dos problemas, porém indica ser pouco comum os professores de Matemática trabalharem com esse tipo de atividade, pois, possivelmente acreditam que está relacionada à Língua Portuguesa.

Silva (2014) e Smole (2001) consideram importante o trabalho com textos relacionados na área da Matemática, considerando que um problema possibilita o raciocínio lógico através da leitura e interpretação de texto. Consideramos a elaboração de problemas como uma possibilidade do professor estabelecer as *situações*, trabalhar os *invariantes* envolvidos e permitir a resolução através de diferentes maneiras de representar a solução do problema.

Percebemos que ainda é possível o professor focar nos objetivos que deseja alcançar, estabelecendo o nível de complexidade do problema. Outro ponto importante é a possibilidade de reflexão sobre o conceito, quando se está elaborando um problema. O PEM6 fez as seguintes considerações:

PEM6- Ele tem que entender que ele está resolvendo aquele problema dali, mas que vem um próximo que ele vai ter que pensar um pouquinho mais. Veja, na hora que ele vai resolver aquele problema, tem aluno assim, na hora que ele acerta uma questão de Matemática, por mais simples que seja, ele não tá formatada aquela verdade. Eu digo questão nível um e coloco uma estrela. O aluno quando ele trata com mais seriedade. Ele tem que entender que aquele modelo que ele tá resolvendo aquele problema é um modelo muito fácil onde todo mundo tem que atingir. Problemas intermediários, ele tem que perceber essa, essa, essa crescente. Tem que ter algo de utilização de outras ferramentas de um problema para outro, principalmente. Mas aquele problema em si, vai pensando que ele tem que ter uma bagagem, um grau de conhecimento prévio que vão ser úteis naquela resolução e ele tem que entender que o texto Matemático ele vem da boa leitura, se ele consegue associar essas duas coisas aí ele consegue fazer parte desse processo de aprendizagem. Leitura e interpretação de texto hoje acho que é fundamental para qualquer resolução de problema.

(Grifo nosso)

O PEM7 faz a relação entre o uso da fórmula e o tipo de problema, ou seja, não podemos usar a fórmula de arranjo para resolver o problema de combinação.

PEM7- Diferenciar um do outro. Distinguir qual é a fórmula que vai usar no problema correto.

(Grifo nosso)

De modo geral, os professores apontaram para a importância dos alunos perceberem a especificidade de cada tipo de problema combinatório, para poderem diferenciá-los e usar a fórmula adequada. Outro ponto percebido foi que os professores consideraram relevante os alunos saberem interpretar os problemas combinatórios

5.4 Transformando os problemas combinatórios: reflexões a partir das situações, dos invariantes envolvidos no raciocínio combinatório

Nesse momento da entrevista, solicitamos que os professores refletissem sobre as transformações relacionadas aos problemas combinatórios. Dessa forma, o professor teria que pensar tanto nos aspectos estruturais como também nos conceituais para discutir a respeito das transformações. Para tal, solicitamos dos professores as seguintes transformações:

O que seria necessário para transformar um problema de:

- a) *Arranjo em combinação.*
- b) *Combinação em arranjo.*
- c) *Permutação em produto cartesiano.*
- d) *Produto cartesiano em permutação.*

5.4.1 Transformando arranjo em combinação e combinação em arranjo

Discutimos, primeiramente, *as transformações de arranjo em combinação e combinação em arranjo*. Daí, quando nos reportamos aos aspectos estruturais do problema, podemos destacar os invariantes de arranjo e de combinação que constam no último momento da entrevista, no qual solicitamos que os professores elaborassem problemas combinatórios a partir das características⁵.

Os invariantes de ordenação e de escolha dos elementos nos problemas de arranjo e combinação são os seguintes:

- a) **Arranjo-** *De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos. A ordem dos elementos gera novas possibilidades.*
- b) **Combinação-** *De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos. A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.*

⁵Características– São os invariantes dos problemas combinatórios, respectivamente de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano que foram transcritos da Tese de Pessoa (2009).

Quadro 23 - Discussão acerca das transformações dos problemas de arranjo em combinação e combinação em arranjo

Continua

FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
PEM1- A minha questão aqui está falando em elementos distintos. Eu, primeira coisa, é... extinguiria essa palavra distinto, certo? Eu botaria assim: quantos números de três algarismos podemos formar com o conjunto, certo? Já pra arranjo, transformar arranjo pra combinação a princípio eu não restringiria o que estou pedindo eu deixaria solto, eu deixaria amplo e daí eu transformaria uma questão de arranjo para combinação. Se fosse o contrário eu iria restringir esse, esse, essa questão para voltar a ser uma questão de arranjo, certo? Pegaria um conjunto amplo, fazia uma restrição, uma particularidade um problema que era amplo passaria ser uma questão específica para arranjo.
PEM2- <u>É só mudar o enunciado.</u> Por exemplo, eu tenho cinco pessoas disputando uma corrida em que eu tenho o 1º, o 2º e o 3º lugar, isso é arranjo. Aí, eu tenho agora cinco pessoas quero, tirar uma comissão de três, isso é combinação. Veja que com o mesmo problema, eu mudo, invés, assim, de corrida eu boto comissão. Você ver uma palavra ou uma frase eu mudei o problema.
PEM3- Seria necessário modificar a forma de agrupar os elementos.
PEM4- Por exemplo, <u>um problema que envolva uma eleição em uma comissão com os 45 alunos,</u> por exemplo, do 3º ano do Ensino Médio em que em cada comissão daquela eu tenha, veja, em quanto comissão eu tenho um problema de combinação, mas a partir do momento em que eu vou ordenar cada comissão daquela, aquela <u>comissão vai ter o primeiro secretário, o segundo secretário, o terceiro secretário, então veja que a combinação aí, transformou-se em arranjo.</u> Então se o aluno A ele é o primeiro secretário, o aluno B o segundo secretário e o aluno C o terceiro secretário se eu inverter a ordem ali, o aluno B passar a ser agora o primeiro secretário, eu não tenho mais a mesma posição, <u>eu não tenho mais o mesmo agrupamento, então foi criado, eu já tenho um novo agrupamento, então tem situação que você pode transpor né, o conceito de arranjo, no caso um problema de combinação ele já se transforma no problema de arranjo.</u> Quando eu defino <u>a ordem dos elementos</u> ali, naquele agrupamento. P- E combinação em arranjo? PEM4- Seria a ordem inversa, tiro a ordem, são comissões formadas por três alunos A,B e C, não especifico a ordem.
PEM5 Não conseguiu discutir acerca das transformações e nem apontar os aspectos estruturais e os <i>invariantes do conceito</i> de cada tipo de problema.

Legenda: Pesquisadora - P; Professores - PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7

Fonte: A autora

Grifo nosso

Quadro 23 - Discussão acerca das transformações dos problemas de arranjo em combinação e combinação em arranjo

.....Concluído

FRAGMENTOS DAS ENTREVISTAS
PEM6- São duas coisas que tem na essência o conceito distinto, então é, não veria como a gente tá transformando em arranjo em combinação e combinação em arranjo. Diferente de você tá trabalhando com permutação é um caso especial do próprio arranjo. Então eu não vejo como você fazer uma modificação estrutural. A não ser que você modifique toda a estrutura do problema. E aí você não teria o corpo final com as qualidades do arranjo e sim de permutação diferente. P- Se você fizesse essas modificações? PEM6- <u>Um problema de arranjo eu teria que mudar a estrutura do texto.</u> E na hora que mudar a estrutura do texto ele não seria mais um problema de arranjo, seria de permutação. Por exemplo, vou colocar uma situação: cinco corredores cegos participam de uma olimpíada onde vai ser ranqueado primeiro, segundo e terceiro, então, quantas possibilidades eu teria? No arranjo de cinco, três a três. Pra mudar essa situação, eu teria que mudar a estrutura do problema. Como se trata de uma corrida especial de pessoas com necessidade especiais é a organização resolveu premiar igualmente os três (não tem primeiro, segundo e terceiro), premiar os três. Então do primeiro ao terceiro com o mesmo valor com o mesmo grau de importância. Quantas possibilidades? Então veja eu mudei a estrutura do texto. Quando eu mudo a estrutura do texto não tem como ser arranjo, passando a ser combinação. Pelo menos nessa leitura que eu faço. combinação pra arranjo do mesmo jeito tem que mudar a estrutura do texto e a intencionalidade que você quer. Que você consegue fazer. PEM7- Tem mais de dois conjuntos diferentes. O mesmo número de elementos tem que ser iguais. Não, mas pode ser diferente os conjuntos.

Legenda: Pesquisadora - P; Professores - PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7

Fonte: A autora

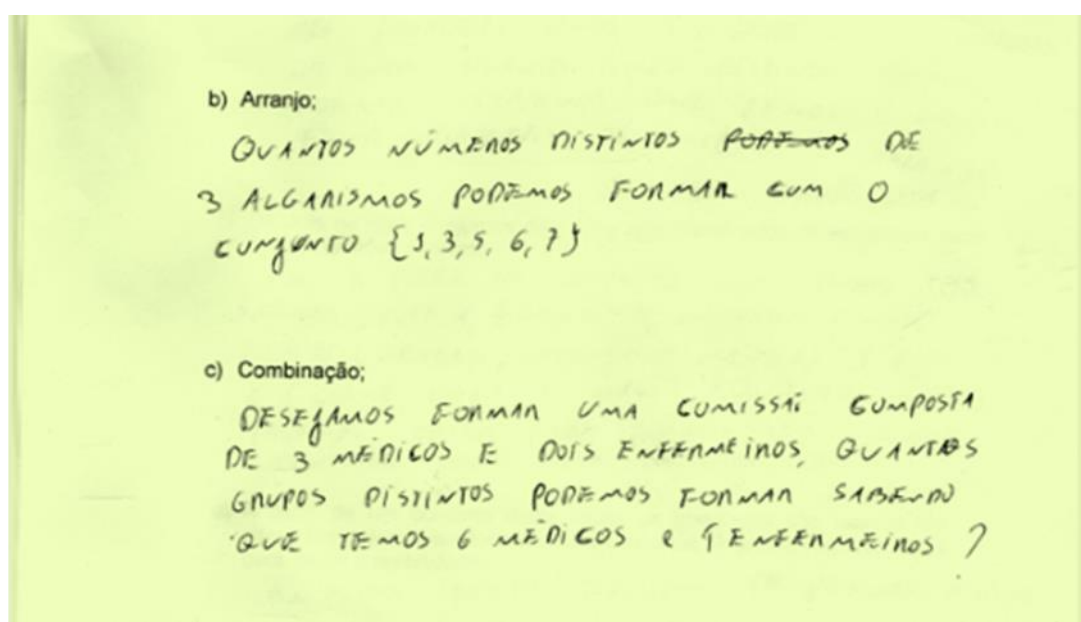
Grifo nosso

Percebemos que alguns professores que conseguiram elaborar os diferentes tipos de problemas corretamente da mesma forma explicitaram bem as transformações. Já os que tiveram um desempenho ruim nas elaborações, apresentaram muita dificuldade em refletir sobre os invariantes e as transformações.

O PEM5 e o PEM7 não conseguiram fazer colocações sobre as transformações de arranjo em combinação e vice-versa; tiveram um baixo desempenho ao elaborar os problemas combinatórios que justamente estão relacionados à não percepção dos invariantes, pois o PEM5 elaborou problemas sem relação com a Combinatória e um exercício combinatório e o PEM7 teve as seguintes situações: a explicitação de um conteúdo sem relação com a Combinatória; problemas combinatórios de um tipo diferente do solicitado e um exercício não combinatório. Percebemos que, diferenciar os invariantes combinatórios, estruturar os problemas e contextualizar, nem sempre é uma tarefa fácil para o professor.

Em geral, a atividade de transformar um problema em outro não é comum para os professores no dia a dia e nem recorrente nos livros didáticos. Porém, ajuda-os a refletirem sobre as particularidades de cada tipo de problema, ou seja, nos invariantes existentes, na forma de resolução e, principalmente, nos aspectos estruturais de cada tipo de problema.

O PEM1 apesar de chamar a atenção para o uso da palavra “distinta” para diferenciar um problema do outro, não levou isso em consideração no momento da elaboração dos problemas combinatórios a partir da situação. A seguir, destacamos as elaborações dos problemas de arranjo e combinação com o uso da palavra “distintos”.



Percebemos que nesse momento o PEM1 não levou em consideração o uso da palavra “distintos” para diferenciar o problema de arranjo e o de combinação.

Já o PEM2 considerou o contexto para cada tipo de problema que, implicitamente, indica se a ordem vai gerar ou não novas possibilidades.

Outro aspecto importante é a forma de agrupamento dos elementos presentes em cada tipo de problema que foi destacada pelo PEM3. Esse aspecto permite que o professor leve em consideração as especificidades de cada tipo de problema, sendo então, pensada no momento da elaboração.

Apesar de não ser comum, os professores modificarem as estruturas dos problemas; percebemos serem possíveis as transformações a partir do contexto e da estrutura de cada tipo de problema, como ratifica o PEM6.

De forma geral, os professores que elaboraram corretamente os problemas combinatórios de arranjo e combinação, perceberam bem a importância do contexto no que

diz respeito à estruturação dos problemas e aos invariantes de ordenação e de escolha que estão contidos implicitamente nos contextos. Outro fato importante é que os contextos elaborados corretamente são parecidos, pois nos problemas de arranjo eles levam em consideração as colocações ordinais e no de combinação enfatizam as comissões.

5.4.2 Transformando permutação em produto cartesiano e produto cartesiano em permutação

Solicitamos que os professores fizessem *as transformações de permutação em produto cartesiano e de produto cartesiano em permutação*. Os invariantes de permutação e de produto cartesiano apresentados no último momento da entrevista foram os seguintes:

Permutação- *A partir de um conjunto dado, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar novos conjuntos. A ordem dos elementos gera novas possibilidades.*

Produto cartesiano- *De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.*

No Quadro 24, a seguir, relatamos as considerações feitas pelos professores do Ensino Médio a respeito das transformações de um problema de permutação em produto cartesiano e de produto cartesiano em permutação.

Quadro 24- Discussão acerca das transformações dos problemas de permutação em produto cartesiano e de produto cartesiano em permutação

Continua

FRAGMENTOS DA ENTREVISTA
PEM1- Permutação, eu utilizaria o princípio fundamental da contagem, é, por exemplo, eu trabalharia com dois ou mais conjuntos distintos e pediria a combinação possível de quantos elementos eu poderia utilizar com o primeiro e com o segundo.
P- E produto cartesiano em permutação?
PEM1- Eu não restringiria a questão deixaria aberto. Isso é complexo, ensina e depois o cara vai parar para pensar. É isso mesmo, é isso mesmo.
PEM2- É porque, veja só o produto cartesiano são pares ordenados então em cada par eu tenho um ponto, então se eu tenho o par ordenado (1,2), (2,1) é outro par ordenado. É então é muito semelhante. No caso permutação é semelhante ao produto cartesiano. Eu posso dar um conjunto de números e pedir que ele organize esse conjunto em, em, em pares. E aí <u>mando distribuir no plano cartesiano</u>. Quer dizer aí eu tenho uma coisa ligada a outra. Quer dizer <u>a permutação é semelhante ao produto cartesiano. É isso que estou dizendo quando eu troco os elementos eu tenho outro conjunto. Questão também do par ordenado, quando eu troco eu tenho ponto no plano cartesiano.</u>
PEM3- Não sei.
PEM4- Você me pegou agora. Permutação em produto cartesiano. Se eu reduzisse o número de elementos de um conjunto do qual eu vou permutar seus elementos pra dois elementos só. O conjunto A é formado por esse elemento, por exemplo, 1 e 2. O conjunto B é formado pelos elementos 3 e 4. Onde eu vou formar pares ordenados com os elementos X pertencentes aos elementos Y pertencentes a B. Então como cada conjunto daquele ali eu só tenho dois elementos, cada par ordenado que eu vou formar é uma permutação. Porque a permutação são agrupamentos que eu formo com os N elementos do conjunto. Então de cada agrupamento são formados por N elementos, o número de elementos de cada agrupamento é igual ao número de elementos que é o total que eu disponho. É bem difícil de transformar esse problema de produto cartesiano em permutação. P- Difícil em relação a que professor? PEM4- Às próprias definições e conceitos, principalmente produto cartesiano que é uma parte assim muito abstrata da álgebra. <u>Eu vejo produto cartesiano como sendo assim é uma ponte pra eu chegar a definição de função lá na frente, mas que não tem tanta aplicação prática quanto ao próprio conceito de função ou de permutação. Produto cartesiano eu vejo apenas como aplicação prática não necessariamente como produto cartesiano, mas já trabalha com relação binária e função.</u> Mas é um assunto assim eu diria de álgebra abstrata que eu pessoalmente vejo dificuldade em converter em um problema de permutação que já é um problema assim mais aplicável. Situações aplicáveis, senha de criptografia, senha de acesso trabalha muito com permutação diferente de produto cartesiano que é álgebra abstrata. Estrutura algébrica.
PEM5- Obs.: O PEM5 não conseguiu discutir acerca das transformações e nem apontar os aspectos estruturais e os invariantes do conceito de cada tipo de problema.

Legenda - P – pesquisadora; PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7- professores;

Obs. - observação

Fonte: A autora

Grifo nosso

Quadro 24 - Discussão acerca das transformações dos problemas de permutação em produto cartesiano e de produto cartesiano em permutação

Concluído

FRAGMENTOS DA ENTREVISTA
PEM6- Tem que pensar um pouquinho. Eu vejo como possível, no caso, vou pensar mais aqui... eu vejo como possível, permutação, por exemplo: seis alunos e seis cadeiras fazer ali a representação então, eu vou ter uma representação cartesiana daquela relação que eu tenho, de possibilidades, seis alunos e seis cadeiras. Mas veria o total de possibilidades que eles teriam dentro de um problema de permutação. É possível a gente fazer a representação, agora pra transformar um problema de, em, eu teria que também abordar a apresentação, eu posso tanto jogar um problema apresentando o gráfico cartesiano, fazendo com que o aluno tenha a leitura e crie uma situação de permutar e vice-versa. Mas deixa eu ver uma coisa que fique mais... mais, direta. É possível mesmo que eu nunca tenha utilizado. Eu acho que é forçar, eu acho desnecessário. Posso tá falando algo que seja, digamos assim, da tendência de Matemática eu posso tá desatualizado. Mas eu acho desnecessário a gente tá, forçar a barra do plano cartesiano para a gente fazer uma exemplificação de permutação seja ela qual for.
PEM7- O mesmo número de elementos tem que ser iguais. Não, mas podem ser diferentes os conjuntos.

Legenda - P – Pesquisadora; PEM1; PEM2; PEM3; PEM4; PEM5; PEM6; PEM7- Professores;

Obs. - observação

Fonte: A autora

Os problemas de permutação são mais comuns para o professor do Ensino Médio, pois são encontrados no livro didático do 2º ano do Ensino Médio. Já os problemas de produto cartesiano não são vivenciados pelo professor no conjunto dos problemas combinatórios, pois os mesmos se reportam ao plano cartesiano ou ao trabalho com Função do 1º grau. Diferentemente de Pessoa (2009), que agrega o produto cartesiano ao conjunto de problemas combinatórios que são arranjo, combinação e permutação, lembramos ainda que todos são trabalhados de forma contextualizada. Pessoa (2009) se baseia em Nunes e Bryant (1997), Vergnaud (1983, 1991) e Brasil (1997) para agregar os problemas de produto cartesiano aos demais problemas combinatórios.

Nunes e Bryant (1997) abordam diferentes tipos de problemas que envolvem a estrutura multiplicativa, destacando em seus estudos a correspondência um-a-muitos, a relação entre variáveis covariação e distribuição. Na correspondência um-a-muitos é trabalhada a ideia de proporção e os autores destacam os problemas de multiplicação, o problema inverso de multiplicação e o de produto cartesiano. Vergnaud (1983, 1991) ao abordar, as estruturas multiplicativas, chama os problemas de produto cartesiano como produto de medidas. Porém, os problemas possuem a mesma estruturação indicada por Pessoa (2009), por Nunes e Bryant (1997) e Brasil (1997) que destacam os problemas combinatórios nas situações que envolvem a multiplicação.

Destacamos a seguir, os problemas de produto cartesiano elaborados pelo PEM6 a partir da *situação* e a partir dos *invariantes*, respectivamente.

d) Produto cartesiano. UM RESTAURANTE SE PROPÕE SERVIR 3 PRATOS DIFERENTES COM ACOMPANHAMENTO DE 4 TIPOS DE BEBIDAS. QUANTAS POSSIBILIDADES DE MONTAR O CARDÁPIO EXISTIRÃO?

c) De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.

UM RAPAZ DECIDE ENCONTRAR SUA NAMORADA USANDO SUAS MELHORES ROUPAS. VERIFICANDO QUE POSSUI 3 CAMISAS E 2 CALÇAS COM CORES DIFERENTES, QUANTAS SÃO AS POSSIBILIDADES DE QUE ISSO ACONTEÇA?

O PEM6 não acha ser possível transformar permutação em produto cartesiano. Ele se reporta ao plano cartesiano e não à questão estrutural do contexto.

O PEM1 chama a atenção para a utilização da estratégia do princípio fundamental da contagem para resolver o problema e aborda a estrutura de produto cartesiano. Mas apresenta dúvida quando retrata a transformação de produto cartesiano em permutação.

O PEM2 erroneamente indica ser permutação semelhante a produto cartesiano, ele leva em consideração que ao permutarmos os elementos dos pares ordenados ocorrerão novos pontos. Porém, enfatizamos que a ideia dos elementos de um conjunto em um contexto combinatório de produto cartesiano é diferente dos elementos trabalhados em um plano cartesiano.

PEM2- É porque, veja só o produto cartesiano são pares ordenados então em cada par eu tenho um ponto, então se eu tenho o par ordenado (1,2), (2,1) é outro par ordenado.

PEM2- É isso que estou dizendo quando eu troco os elementos eu tenho outro conjunto. Questão também do par ordenado, quando eu troco eu tenho ponto no plano cartesiano.

(Grifo nosso)

Diante do que foi exposto pelo PEM2, podemos dizer que quando trocamos os elementos trabalhando com o produto cartesiano no contexto de contagem, nem sempre temos um novo conjunto. Através da resolução do problema elaborado pelo PEM6, podemos refletir sobre essa abordagem. A seguir, apresentamos o problema elaborado.

d) Produto cartesiano. UM RESTAURANTE SE PROPÕE SERVIR 3 PRATOS DIFERENTES COM ACOMPANHAMENTO DE 4 TIPOS DE BEBIDAS. QUANTAS POSSIBILIDADES DE MONTAR O CARDÁPIO EXISTIRÃO?

Vamos destacar os pratos de comida oferecidos pelo restaurante: feijoada, sarapatel e dobradinha. E as bebidas podemos destacar: suco de laranja, suco de abacaxi, suco de graviola e suco de maracujá.

Se o cliente escolher feijoada com suco de laranja, é a mesma coisa se o pedido fosse feito de forma diferente, suco de laranja com feijoada. Desta forma, a ordem dos elementos não gerou novas possibilidades para que o cliente tivesse uma refeição diferente, pois as escolhas foram as mesmas.

Já no plano cartesiano, entendemos que temos o eixo das abscissas, que é o eixo x ; e o eixo das ordenadas, que é o eixo y .

Então, destacamos que os pontos são diferentes porque, apesar de o par ordenado $(1,2)$ e $(2,1)$ apresentarem os mesmos elementos, no primeiro momento, o 1 pertence ao eixo das abscissas e o 2 pertence ao eixo das ordenadas. Diferente do par ordenado $(2,1)$ em que o 2 desta vez pertence ao eixo das abscissas e não das ordenadas, como no primeiro momento; e o 1 pertence ao eixo das ordenadas diferente também do primeiro momento. Portanto os pares ordenados apresentados $(1,2)$ e $(2,1)$ são diferentes no plano cartesiano.

No momento da elaboração os professores se reportaram a situações que envolvem o plano cartesiano em detrimento de um contexto que envolve o raciocínio combinatório. Esse é um ponto que possivelmente precisa ser trabalhado e discutido nos cursos de formação de professor.

O PEM4 também faz abordagens relacionadas ao plano cartesiano e considera a existência de uma permutação dos valores dos pares ordenados que podem ser formados, ou seja, a troca entre os elementos do par ordenado. Reconhece produto cartesiano como um problema difícil e sem aplicabilidade nos contextos diários, porém utilizado no trabalho da

álgebra abstrata, função e relação binária. Além disso, não percebe o produto cartesiano como aplicação prática. Enfatizamos que o produto cartesiano é um problema de contagem que pode ser contextualizado, mas que não é comum aos livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio. Isso mostra o desconhecimento do PEM4, cuja elaboração consideramos um exercício não combinatório por dois motivos: primeiro pela falta de contexto do cotidiano; e segundo porque está mais voltado para um exercício que envolve os pares ordenados de dois conjuntos. A seguir, apresentamos o exercício elaborado pelo PEM4, a partir das características/*invariantes*.

c) De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.

Dados dois conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$. Descreva os elementos dos conjuntos $A \times B$ e $B \times A$.

Os PEM3 e PEM5 não conseguiram abordar sobre as transformações de permutação em produto cartesiano e produto cartesiano em permutação.

No geral, os professores tiveram mais dificuldade em discutir as transformações de permutação em produto cartesiano e de produto cartesiano em permutação, pois levamos em consideração que produto cartesiano foi o tipo de problema que teve menor quantidade de acertos.

A atividade de transformar um problema em outro permitiu que os professores refletissem sobre a estrutura do problema, sobre os invariantes e sobre os contextos envolvidos, sendo então uma atividade que pode ser trabalhada nos cursos de formação de professor. Percebemos que transformar um tipo de problema em outro é uma atividade que reflete diretamente nos conceitos combinatórios envolvidos, permitindo, assim, que o professor faça uma avaliação do seu próprio conhecimento.

6.CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente estudo, buscamos compreender a elaboração de problemas combinatórios por professores do Ensino Médio. Como objetivo geral, analisamos o domínio conceitual de professores sobre os *invariantes* de problemas combinatórios a partir da elaboração de problemas. Como objetivos específicos, buscamos: identificar as dificuldades e as possibilidades de professores do Ensino Médio ao elaborarem problemas envolvendo o raciocínio combinatório e verificar se os professores aplicam os *invariantes* presentes nos problemas de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano. Para isso, utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais abordada por Vergnaud (1986), que defende o tripé que forma o conceito: as *situações*, os *invariantes* e as *representações simbólicas*.

Na entrevista aplicada aos sete professores, buscamos, no primeiro momento, traçar o perfil dos professores participantes da pesquisa. No segundo momento, analisamos as elaborações feitas a partir das *situações* e dos *invariantes* que dão sentido ao conceito. No terceiro momento, buscamos informações sobre o conceito, o currículo, o ensino e a aprendizagem relacionada aos problemas combinatórios. E no último momento procuramos entender a compreensão dos professores a respeito das transformações de um tipo de problema combinatório em outro tipo, pois nessa última atividade acreditamos ser possível os professores explicitarem o que sabem acerca da Combinatória e de seus *invariantes*.

Alguns professores tiveram dificuldade em diferenciar os problemas combinatórios, tomando como base as *situações* presentes na Combinatória e também os *invariantes* relacionados à ordem e à escolha dos elementos.

Os professores, ao elaborarem problemas de permutação, utilizaram contextos comuns dos livros didáticos, como é o caso do anagrama citados por Silva, (2015). A falta de estruturação para contextualizar o problema de permutação também foi um fato ocorrido na elaboração.

Outro fato verificado foi a elaboração de problemas sem relação com a Combinatória por alguns professores. De modo geral, a maioria dos professores conseguiu elaborar corretamente os problemas de permutação a partir das *situações*. Já a partir da elaboração por *invariantes*, os professores confundiram arranjo e permutação, trocando assim, os *invariantes*. Parece-nos que os *invariantes* apresentados não foram claros e suficientes para os professores diferenciarem um tipo de problema do outro e também elaboraram problemas sem relação com a Combinatória.

Nos problemas de arranjo elaborados a partir das *situações*, houve acerto da maioria dos professores. Porém, as dificuldades encontradas por alguns se referem aos *invariantes* de

ordem e de escolha relacionados aos tipos de problemas e também à determinação do que seja problema, pois houve dificuldade de diferenciar exercício de problema.

Na elaboração de problemas partindo dos *invariantes* do arranjo, houve poucos acertos, pois os professores tiveram dificuldade em diferenciar os *invariantes*, não reconheceram como sendo de arranjo e alguns elaboraram problemas sem relação com a Combinatória. Houve dificuldade de inserir os conceitos envolvidos em um contexto, pois teve professor que fez um exercício no lugar dos problemas combinatórios.

A elaboração dos problemas de produto cartesiano a partir das *situações* e dos *invariantes* não foi comum para os professores, pois o termo produto cartesiano não é conhecido no contexto combinatório, isso, provavelmente, fez com que alguns professores relacionassem ao plano cartesiano e ao par ordenado. No entanto, constatamos ter sido mais fácil elaborar problemas a partir das *situações* do que a partir dos *invariantes* apresentados.

Nos problemas de permutação, arranjo e produto cartesiano, foi mais fácil elaborar problemas a partir das *situações*. Já nos problemas de combinação, foi mais fácil elaborar a partir dos *invariantes*. No entanto podemos entender que os *invariantes* de combinação foram melhor compreendidos pelos professores.

De modo geral, percebemos que a relação de ordem e de escolha apresentada nos problemas combinatórios necessita ser discutida e trabalhada nos cursos de formação de professores. No momento da elaboração o conhecimento do professor, a respeito do conceito, é colocado em prática e o mesmo tem a possibilidade de refletir sobre os *invariantes* de cada tipo de problema e as *situações* envolvendo a Combinatória. Compreendemos que os conceitos envolvidos, os contextos elaborados e a estrutura de cada tipo de problema são importantes para os problemas serem elaborados corretamente.

Percebemos não ser comum a elaboração de problemas por parte dos professores, pois eles costumam trabalhar com problemas já prontos, encontrados nos livros didáticos, em atividades de resolução, embora haja indicação dos Parâmetros de Matemática de Pernambuco (2012) de não só resolver problemas, mas também de elaborar. Compreendemos ser essa, uma estratégia relevante para refletir sobre o raciocínio combinatório.

A atividade de elaboração permitiu aos professores refletirem de forma direta a respeito dos *invariantes* contidos nos problemas elaborados e sobre as dificuldades a respeito do próprio conceito. Para alguns professores, o domínio conceitual não foi suficiente para que elaborassem os problemas. Além disso, a falta de contexto não possibilitou a elaboração de um problema e sim de um exercício. No entanto, elaborar problemas é importante para o

professor refletir sobre o conceito e também poder diferenciar: problema combinatório e exercício.

Em relação às semelhanças e às diferenças dos problemas, notamos que alguns professores tiveram dificuldade em perceber os aspectos conceituais. Consideram que os problemas combinatórios envolvem contagem e são contextualizados. A importância de perceber as especificidades de cada tipo de problema combinatório, destacando, então, os *invariantes* presentes.

Sobre em qual ano/etapa escolar o trabalho com a Combinatória pode ser trabalhado, alguns professores apontaram que pode ser desenvolvido um trabalho nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, apesar de reconhecerem que o conteúdo é apresentado no 2º ano do Ensino Médio. Afirmaram também já existir *situações* as quais envolvem o raciocínio combinatório no dia a dia do aluno.

A maioria dos professores aponta ser mais difícil elaborar problemas que resolvê-los, devido à falta de formação, pois não se trabalha com a elaboração de problemas e porque costumam utilizar em sala de aula os problemas prontos do livro didático. E indicam que no processo de elaboração o professor precisa pensar nos aspectos pedagógicos, estruturais do problema e sobre o próprio conceito. Indicam que resolver problemas apenas requer do professor a aplicabilidade do conhecimento e a identificação de alguns pontos importantes do problema.

Apenas um professor apontou ser a resolução mais complicada que a elaboração dos problemas, pois indica que temos que diferenciar um tipo de problema combinatório do outro e, no momento da elaboração, o professor já determina o objetivo que deseja ser alcançado.

Os professores indicaram que os alunos precisam perceber as especificidades de cada tipo de problema combinatório para poder diferenciá-los. Alguns chamam a atenção para a ordem e a escolha dos elementos dos problemas e apontam a interpretação como sendo uma dificuldade para o aluno. Indicam também a importância de diferenciar um problema do outro para que seja utilizada a fórmula adequada.

Alguns professores conseguiram perceber que, para transformar um problema de arranjo em combinação e combinação em arranjo, precisam mudar a estrutura do texto e a forma de agrupar os elementos. Os professores que não tinham entendimento sobre os *invariantes* de ordenação e de escolha dos elementos, não conseguiram propor mudanças significativas para transformar um tipo de problema em outro.

Apesar dos problemas de permutação serem apresentados nos livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio, os de produto cartesiano não aparecem no contexto que envolve a

Combinatória. Os professores reportam-se ao par ordenado e ao plano cartesiano, tendo dificuldade de contextualizar e de refletir sobre a possibilidade de transformar um problema de permutação em produto cartesiano e de produto cartesiano em permutação. Então, para os professores não foi uma atividade fácil de pensar nas mudanças necessárias para transformar um tipo de problema em outro. Houve poucos acertos nas elaborações de produto cartesiano, devido às relações que os professores fizeram.

Os professores que conseguiram elaborar os problemas combinatórios a partir das *situações* e dos *invariantes* discutiram com mais propriedade a possibilidade de transformação. Já os que tiveram dificuldade de elaborar problema, seja por desconhecimento do conceito, dos *invariantes* e/ou da falta de contexto, não conseguiram propor transformações de um tipo de problema em outro. Apesar das transformações não serem uma tarefa fácil e nem comum para os professores, percebemos que foi importante para os mesmos pensarem nos aspectos estruturais de cada tipo de problema, nos *invariantes* e nos conceitos envolvidos.

Apontamos novas pesquisas a serem feitas a fim de analisar a grandeza numérica dos problemas e as etapas de escolha em um processo de elaboração de problemas combinatórios por professores de Matemática. Levantamos novas possibilidades de pesquisas que analisem com professores os aspectos conceituais, os estruturais e os pedagógicos dos problemas já prontos encontrados nos livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio, já que é um recurso bastante utilizado pelo professor. Outra possibilidade é analisar a elaboração de problemas combinatórios por alunos do Ensino Médio antes e após serem introduzidos formalmente a esse conceito.

REFERÊNCIAS

ASSIS, A. **Conhecimentos de Combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada**: reflexões e prática de uma professora. Dissertação. Pós – graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2014.

ASSIS, A; PESSOA, C. Um processo de formação continuada com professores dos anos iniciais: a Combinatória a partir dos significados, invariantes e representações simbólicas. **Anais...** 21º Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste (XXI EPENN). Recife, 2013 a. Internacionalização da Educação e Desenvolvimento Regional: implicações para a pós-graduação.

BALL, D.L. et al. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? In: **Journal of teacher education**. 2008 v.59 n.5 pp. 389-407.

BARRETO, F.; BORBA, R. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório em Alunos de um Programa de Correção de Fluxo na Modalidade da Educação de Jovens e Adultos. **Anais...** 6º Encontro Paraibano de Educação Matemática (VI EPBEM). Monteiro, PB – 09 10 e 11 de novembro de 2010.

BORBA, R. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: **Anais...**10º Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia, 2010.

_____. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo a Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. **Anais...** 11º Encontro Nacional de Educação Matemática Curitiba (XI ENEM), PR. 18 A 21 de julho de 2013.

BORBA, R; AZEVEDO, J; A construção de árvore de possibilidades com recurso computacional: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, A. G; LAUTERT, S. L. **A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação Matemática**. Recife, Ed. Universitária da UFPE. Artmed, 2012, pp. 89-138.

BORBA, R. ;BRAZ, F. O que é necessário para se compreender problemas combinatórios condicionais. **Anais...** III SIPEMAT - Simpósio Internacional de Pesquisas em Educação Matemática – Fortaleza, 2012.

BORBA, R; LIMA. R. O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o Ensino Médio. **X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**. Salvador, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais, 3 Matemática**. Brasília: 1997.

_____. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 3º e 4º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, Brasília, 1998.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

_____. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática** / Ministério da Educação. — Brasília: MEC, 2007.

CALVINO, I. **As seis propostas para o próximo milênio**. Trad. Ivo Barroso. São Paulo: Companhia das Letras, 1990.

CARRASCO, L. H. Leitura e Escrita na matemática. In: NEVES, C; SOUZA, J; SCHÄFFER, N (orgs.). **Ler e escrever: compromisso de todas as áreas**. Porto Alegre, UFRGS, 2006, pp. 192-203.

CARVALHO, M. **Problema? Mas que problemas?: Estratégias de resolução de problemas na sala de aula**. Editora Vozes Ltda. Petrópolis Rio de Janeiro: 2005.

CHICA, C. Por que formular problemas? In: SMOLE, kátia; DINIZ, Maria (org). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CURI, E; PIRES, C. M. C. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 10, n.1, p. 151-189, 2008.

DANTE, L.R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1ª edição. São Paulo. Ática, 2009.

FISCHBEIN, E. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht, 1975.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GUIMARÃES, G. L; SANTOS, R. R. Criança elaborando problemas de estrutura multiplicativa. **Educação matemática em revista**, ano 14, nº26, março 2009. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/revista14_26.pdf>. Acesso em 10 de abril de 2015.

ITACARAMBI, R.R. **Resolução de problemas: anos iniciais do Ensino Fundamental**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 1ª edição, 2010.

JUNTUNE, J. “**Project Reach: a teacher training program for developing creative thinking skills in students**”, *Gifted Child Quarterly*, 23, p. 461 – 471 1979.

KLÜSENER, R. Ler, escrever e compreender a matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos. In: NEVES, C. B; SOUZA, J. V; SCHÄFFER, N. O (orgs.). **Ler e escrever: compromisso de todas as áreas**. 7. ed. Porto Alegre, UFRGS, 2006, pp. 177-191.

LERNER, D. **Ler e escrever na escola: o real, o possível e o necessário**. Porto Alegre, Artmed, 2002.

LIMA, E.L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2,. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

LIMA, A. P; BORBA, R. Professores de matemática reconhecem o princípio fundamental da contagem como estratégia de resolução de problemas combinatórios? **Encontro de Pesquisa Educacional de Pernambuco – EPEPE**, Garanhuns, 2014.

MAGINA, S; CAMPOS, T; NUNES, T; GITIRANA, V. **Repensando a adição e a subtração**. São Paulo: Ed. PROEM, 2008.

MATIAS, P; SANTOS, M; PESSOA, C. Crianças de Educação Infantil Resolvendo Problema de Arranjo. **Anais...** 13º Conferência de Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM) Recife, 2011.

MIGUEL, J. C. **Alfabetização matemática: implicações pedagógicas**. 2005, Disponível em<<http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2005/artigos/capitulo%205/alfabetizacaomatematica.pdf>> Acesso em: 26 de dezembro de 2014.

MORGADO, A; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J; PINTO DE CARVALHO, P. e FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. -9. ed.- Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NOLLER, R. B. Mentoring: a voiced scarf – An experience in creative problem solving. Buffalo, Ny: **Bearly Limited**, 1982.

NUNES, T. & BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Parâmetros para a educação básica do Estado de Pernambuco: Matemática**. Recife: SE, 2012.

PESSOA, C. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese. Pós – graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, C; BORBA, R. Como Crianças de 1ª à 4ª série Resolvem Problemas de Raciocínio Combinatório? **Anais...** 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recife, 2008.

_____. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. **IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM**, BRASÍLIA – DF, 25 A 28 DE OUTUBRO DE 2009.

_____. Resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos do 6º ao 9º ano. **Anais...** 19º Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste. João Pessoa, 2009.

_____. **Quem Dança Com Quem**: O desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese de doutorado. UFPE: Programa de Pós-graduação em Educação, 2009.

_____. O Raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. **ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**: Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

PESSOA, C; SANTOS, L. T. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais...** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011.

_____. Estudo de Caso: como duas crianças passam a compreender a Combinatória a partir de intervenções? **Revista Eletrônica de Educação**. V. 6, n. 1, maio, 2012.

PONTES, D; BORBA, R. A Influência das Etapas de Escolha e das Representações Simbólicas na Resolução de Problemas Combinatórios por Estudantes do 5º Ano do Ensino

Fundamental. **Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - EBRAPEM**. Canoas - Rio Grande do Sul, 2012.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

POZO, J. I (org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RENZULLI, J. S. “**What makes a problem real: stalking the illusive meaning of quantitative differences in gifted education**”, *Gifted Child Quarterly*, 26, p. 147 – 156, 1982.

RENZULLI, J. S; CALLAHAN, C. “**Developing creativity training exercises**”, *Gifted Child Quarterly*, 19, p. 38-45, 1975.

ROCHA, C. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos**. Dissertação. Pós - graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2011.

SANTOS, L; PESSOA, C. A Influência do Contexto e do Tipo de Problema na Compreensão de Problemas Combinatórios por Alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista**, v. 43, p. 40-48, 2014.

SANTOS, S. A. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasandin (orgs.). **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009, pp. 127-141.

SHULMAN, L. S. **El saber y entender de la profesión docente**. *Estudios Públicos*, n. 99, 2005, Santiago-Chile, 2005a. p. 195-224.

SHULMAN, L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. **Revista de currículo y formación del profesorado**. Granada-España, ano 9, n. 2, 2005b, p. 1-30. Disponível em: <<http://www.ugr.es/local/recfpro/rev92art1.pdf>>. Acesso em: 03 maio 2015.

SILVA, J. R. **A produção de problemas de multiplicação pode ajudar na sua resolução?** Dissertação. Pós - graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2014.

SILVA, P. **Problemas Combinatórios Condicionais: como são explorados nos livros didáticos do Ensino Médio?** Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - EBRAPEM – Vitória - ES, 2013.

SILVA, M; PESSOA, C. **Ensino de Combinatória para alunos do 9º ano do ensino fundamental a partir de estratégias bem sucedidas levantadas em estudos anteriores.** Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, 2013. DMATE-UFPE, RECIFE – PE.

SMOLE, k. Por que formular problemas? In: SMOLE, kátia; DINIZ, Maria (org). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

SMOLE, K.; DINIZ, M. I.. Ler e Aprender Matemática. In: SMOLE, Kátia. DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas.** Porto Alegre, Artmed, 2001, pp. 69-86.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis, Rio de Janeiro Editora Vozes, 2002.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations thoughtinvolved in addition and subtraction problems. In Carpenter, Thomas, Moser, Joseph & Romberg, Thomas. (Eds.), **Addition and subtraction: a cognitive perspective.**Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

_____. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das Matemáticas um exemplo:** as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 1986, p 75-90.

_____. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **JMB – Journal of Mathematical Behavior.** CRNS, Paris, nº 17 (2), 1998, pp. 167-181.

_____. **La théorie des champs conceptuels. Recherches em Didactiques des Mathématiques**, vol.10,23, p.133-170, 1990.

_____. **El niño, las Matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria. Mexico : Trillas, 1991.

_____. **Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation.** In: Actes de la VIIIe Ecoled' Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 174 – 185). Paris: 1995.

_____. A gênese dos Campos Conceituais. **In:** GROSSI, E. (org) Por que ainda há quem não aprende? A teoria. Ed. Vozes, RJ: Petrópolis, 2003.

APÊNDICE: O ROTEIRO DA ENTREVISTA

APÊNDICE - O ROTEIRO DA ENTREVISTA

Solicitamos as informações citadas abaixo a respeito da Combinatória que serão utilizadas em uma pesquisa na Universidade Federal de Pernambuco no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Lembramos que o anonimato do(a) professor(a) entrevistado(a) será garantido e as informações serão divulgadas de forma geral. Agradecemos desde já as contribuições disponibilizadas.

ENTREVISTA

INFORMAÇÕES SOBRE O PERFIL DO PROFESSOR

a)Tempo de docência:

- Ensino Fundamental: Ensino Médio:

b)Atualmente trabalha com qual modalidade de ensino?

- Ensino Fundamental: Ensino Médio:

c)Escola pública que trabalha:

- Municipal: Estadual: Ambas:

d)Formação:

- Graduação: Especialização: Mestrado: Doutorado:

INFORMAÇÕES SOBRE OS PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

1ª) Elabore um problema de:

- a)** Permutação.
- b)** Arranjo.
- c)** Combinação.
- d)** Produto cartesiano.

2º) O que os problemas elaborados têm de semelhante e de diferente?

3º) Os problemas que você elaborou dariam para trabalhar em que ano do Ensino Básico?

4º) É possível iniciar o trabalho com o raciocínio combinatório a partir de que ano?

5º) No livro didático, geralmente em que ano encontramos os problemas combinatórios?

6º) É mais fácil elaborar ou resolver os problemas combinatórios?

8º) Para o aluno, o que seria importante perceber ao resolver os problemas que você criou?

9º) Quais as dificuldades dos alunos em relação aos enunciados dos problemas combinatórios?

10ª) O que seria necessário para transformar um problema de:

- a) Arranjo em combinação.
- b) Combinação em arranjo.
- c) Permutação em produto cartesiano.
- d) Produto cartesiano em permutação.

11ª) Elabore problemas combinatórios a partir das características apresentadas:

- a) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos; a ordem dos elementos gera novas possibilidades.
- b) De um conjunto maior são selecionados elementos para formar subconjuntos. A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.
- c) De dois ou mais conjuntos diferentes são combinados os elementos para formar um novo conjunto.
- d) A partir de um conjunto dado, todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar novos conjuntos. A ordem dos elementos gera novas possibilidades.