



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Soluções fracas para fluidos assimétricos incompressíveis com densidade variável

Eduardo Gonçalves dos Santos

TESE DE DOUTORADO

RECIFE
2009



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Soluções fracas para fluidos assimétricos incompressíveis com densidade variável

por

Eduardo Gonçalves dos Santos [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN-UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

S237s Santos, Eduardo Gonçalves dos
Soluções fracas para fluidos assimétricos incompressíveis
com densidade variável / Eduardo Gonçalves dos Santos –
Recife: O Autor, 2009.
144 f.

Orientador: Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN, Matemática, 2009.
Inclui referências.

1. Análise (matemática). 2. Equações diferenciais parciais. I.
Braz e Silva, Pablo Gustavo Albuquerque. (orientador). II. Título.

515

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2015-23

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, *UFPE*
Orientador

Miguel Fidencio Loayza Lozano, *UFPE*

Fábio Vitoriano e Silva, *UFG*

Marivaldo Pereira Matos, *UFPB*

Marcelo Martins dos Santos, *UNICAMP*

**SOLUÇÕES FRACAS PARA FLUIDOS ASSIMÉTRICOS
INCOMPREENSÍVEIS COM DENSIDADE VARIÁVEL**

Por

Eduardo Gonçalves dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Fevereiro – 2009

Dedicatória

Para Glebya e Beatriz, o que de
melhor a vida me deu.

Agradecimentos

Ao meu orientador, o professor Pablo Braz e Silva, pela oportunidade que me deu em um momento muito delicado de minha vida acadêmica e pela orientação dedicada, atenciosa e objetiva durante o tempo em que tive o prazer de ser seu orientando.

Aos senhores membros da banca por terem aceitado o convite e pelas sugestões que deram.

Aos meus colegas de trabalho na Universidade Federal da Paraíba - professores, funcionários e estudantes - pela atenção e carinho comigo desde minha chegada a João Pessoa e pelo grande estímulo que sempre me deram.

Aos meus professores durante o curso de doutorado na Universidade Federal de Pernambuco pelos ótimos cursos dados que enriqueceram sobremaneira a minha cultura e vivência na Matemática.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, muito especialmente à Tânia Maranhão e Raquel Ferreira Estevam, pelo zelo e atenção com que sempre me trataram.

Aos Professores Manoel Lemos e Claudio Cuevas por dirigirem minha fase inicial do doutorado.

Ao Professor Marko Antonio Rojas-Medar, pelas conversas estimulantes que tivemos sobre os problemas tratados nessa tese e pela atenção a mim dispensada em suas visitas ao Brasil.

Aos colegas de curso Mario Santiago Saldanha, José Alberto Duarte Maia, Luciana Rôze de Freitas e Joseilson Raimundo de Lima por uma convivência bastante agradável.

Ao Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, na pessoa do seu ex-vice-diretor, Professor Nelson Nery de Oliveira e Castro, pela ajuda de custo para algumas de minhas viagens a Recife.

À minha família pelo estímulo e torcida para que esse feito se concretizasse.

À minha querida filha Beatriz pela sua compreensão, principalmente nesses últimos meses, quando teve o pai um pouco ausente do seu convívio, e pelo seu sorriso constante, o que foi, com certeza, um estímulo maior.

À minha querida esposa Zelma Glebya, companheira de todas as horas, que com sua confiança sempre me fez acreditar que esse momento se realizaria. Sem a sua força e insistência talvez esse sonho nunca tivesse se tornado real.

Ao povo brasileiro que, através do CNPq, financiou parte deste curso.

Resumo

Estudamos a existência de solução fraca global e local no tempo para o sistema que descreve o fluxo de um fluido assimétrico incompressível com densidade variável em domínios limitados e ilimitados. Primeiro estudamos a existência de solução fraca global no tempo em um domínio tridimensional limitado. Em seguida fazemos um estudo sobre a existência de solução fraca local com condições iniciais satisfeitas em um sentido mais forte. Finalizamos com um estudo sobre a existência de soluções em um domínio tridimensional ilimitado.

Palavras-chave: Solução fraca.Fluido assimétrico.Domínio ilimitado

Abstract

We study the existence of local and global in time weak solutions for the system describing the flow of an incompressible asymmetric fluid with variable density both in bounded and unbounded domains. First, we study the existence of weak global in time solutions in bounded three-dimensional domains. Afterwards, we study the existence of weak solutions with initial conditions satisfied in a stronger sense. Finally, we study the existence of solutions in unbounded three-dimensional domains.

Keywords: Weak solution.Asymmetric fluid.Unbounded domain.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Espaços de Sobolev	15
1.2 Espaços de Nikolskii	19
1.3 Resultados Técnicos	21
1.4 Espaços relacionados à divergência nula	22
2 Existência de solução em domínios limitados	24
2.1 Enunciado do resultado principal	24
2.2 Demonstração do Teorema 2.1.1	26
2.2.1 Escolha de uma base apropriada para os espaços V e $(L^2(\Omega))^3$. .	26
2.2.2 Regularização de $\mathbf{f}$ e de $\mathbf{g}$	27
2.2.3 Regularização dos dados Iniciais	27
2.2.4 Formulação do problema aproximado	28
2.2.5 Existência de solução para o problema aproximado	29
2.2.6 Estimativas <i>a priori</i> das soluções aproximadas	33
2.2.7 Passagem ao limite	52
2.2.8 Condições Iniciais	69
3 Existência de solução em domínios limitados - mais resultados	73
3.1 Primeiro resultado	73
3.2 Segundo resultado	80

3.2.1	Construção de Bases especiais para V e $L^2(\Omega)^3$	82
3.2.2	Estimativas adicionais para a solução do problema aproximado . .	82
3.2.3	Passagem ao limite e propriedades adicionais da solução	95
3.3	Existência de solução global	100
4	Existência de solução em domínios ilimitados	102
4.1	Enunciado do resultado principal	102
4.2	Existência e propriedades de $\rho_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{w}_R, p_R$	104
4.3	Estimativas	107
4.3.1	Estimativas das funções	108
4.3.2	Estimativas nas derivadas com relação ao tempo	109
4.3.3	Estimativas fracionárias no tempo	112
4.4	Passagem ao limite	122
4.4.1	Escolha das subsequências	122
4.4.2	Sentido das convergências	126
4.4.3	Passando o limite	136
4.5	Condições iniciais	139
	Referências	142

Introdução

A descrição do movimento de uma porção de fluido incompressível no espaço tridimensional é formulada matematicamente por duas leis de conservação da Física: a da conservação da massa e a da conservação do momento linear. Entretanto, quando se leva em consideração a rotação das partículas constituintes do fluido, faz-se necessário incluir uma outra lei da Física, a saber, a lei de conservação do momento angular. Com essa inclusão, surgem modelos como os chamados **Fluidos assimétricos**, assim denominados por terem tensor de estresse assimétrico. Esse modelo de fluido descreve o comportamento de uma grande variedade de situações como, por exemplo, cristais líquidos e certos fluidos corpóreos. Para maiores detalhes remetemos o leitor para [8], [10] ou [19]

O modelo matemático que descreve o comportamento desse tipo de fluido é representado pelo sistema de equações diferenciais parciais acopladas

$$\rho (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w} + \rho \mathbf{f}, \quad (0.0.1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (0.0.2)$$

$$\begin{aligned} \rho (\mathbf{w}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}) - (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \text{div } \mathbf{w} + \\ 4\mu_r \mathbf{w} = 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (0.0.4)$$

com as condições de fronteira e iniciais

$$\mathbf{u}(x, t) = 0 \text{ e } \mathbf{w}(x, t) = 0, \quad (0.0.5)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0(x), \rho(x, 0) = \rho_0(x). \quad (0.0.6)$$

As funções $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são dadas e representam forças externas ao sistema. As constantes positivas μ, μ_r, c_0, c_a e c_d caracterizam propriedades físicas do fluido. A hipótese $c_0 + c_d > c_a$ também será feita, tendo em conta motivações de natureza física. As incógnitas no sistema acima são ρ , a densidade do fluido, $\mathbf{u}$, a velocidade, $\mathbf{w}$, a velocidade angular e p , a pressão. A equação (0.0.1) reflete a conservação do momento linear, a equação (0.0.2) reflete o fato de que a porção de fluido não se deforma, o que caracteriza a incompressibilidade do mesmo, a equação (0.0.3) reflete a conservação do momento angular e a equação (0.0.4) refere-se à conservação da massa. Convém notar que, se desprezarmos o efeito de rotação, o sistema acima reduz-se às equações de Navier-Stokes, que são objeto de intensa pesquisa nos dias atuais.

Para se ter uma idéia do estado da arte relativo ao estudo do sistema acima, remetemos o leitor ao livro de Lukaszewicz [19], bem como às referências nele contidas. Em nosso trabalho trataremos do caso de evolução não homogêneo, isto é, com densidade variável. Faremos a seguir um breve relato sobre alguns trabalhos que serviram de motivação para a formulação e o desenvolvimento dos resultados obtidos nesta tese. Em [16], o autor obtém a existência, unicidade e regularidade das soluções para o sistema assimétrico homogêneo e estacionário (i.e. independente do tempo). Já em [17], o autor estabelece a existência de uma única solução fraca global no tempo para o sistema de evolução homogêneo, mediante a hipótese de que a viscosidade é estritamente positiva e de que, quando a ela comparados, os dados iniciais são pequenos. Em [18], considerando as forças externas em L^2 , os dados iniciais $\mathbf{u}_0$ e $\mathbf{w}_0$ em H^1 e a densidade inicial ρ_0 não negativa, mas satisfazendo $\|\rho_0^{-1}\|_{L^3} < \infty$, o autor prova, mediante um argumento de linearização e de quase-ponto-fixo, a existência de solução fraca local no tempo para o problema de evolução não-homogêneo. Em [6], foi obtida a existência e unicidade de soluções fortes no caso não-homogêneo de evolução, através de um processo iterativo.

Em [20], os autores provam a existência de soluções fracas para o sistema assimétrico no caso homogêneo e de evolução em um domínio dependente do tempo. Em [7], os autores provam a existência e unicidade de solução forte utilizando um processo iterativo que envolve problemas lineares para o caso não-homogêneo. Por sua vez, em [3], os autores obtêm solução forte local no tempo e a unicidade e resultados sobre soluções globais no caso não-homogêneo de evolução utilizando um argumento do tipo semi-Galerkin. Por fim, em [21], os autores mostram a existência e unicidade de solução forte mediante a hipótese de pequenez dos dados iniciais para o sistema assimétrico no caso homogêneo e de evolução.

Vamos nos deter agora em comentar nossas contribuições ao estudo dos fluidos assimétricos não-homogêneos. Nosso propósito é obter resultados sobre existência de soluções fracas para o problema (0.0.1)-(0.0.6), em domínios limitados e ilimitados. Com esse intuito, seguimos a seguinte seqüência. No capítulo 2, fixamos a notação a ser utilizada e enunciamos alguns resultados que tornarão o texto mais auto-contido. Evitamos dar demonstrações pois os resultados são clássicos e constam na literatura de forma bastante satisfatória, tanto em qualidade como em quantidade. No capítulo 3, o principal resultado é o Teorema 2.1.1 que estabelece a existência de solução fraca, global no tempo, para o sistema (0.0.1)-(0.0.6), no caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ser um aberto limitado e a densidade inicial ser apenas não negativa. Para fluidos assimétricos, um tal resultado ainda não havia sido provado, e foi comunicado em [4]. O resultado mais próximo havia sido obtido no trabalho de Lukaszewicz [18] onde, conforme observamos acima, é permitida a nulidade da densidade inicial, desde que seja imposta uma condição de integrabilidade do seu inverso e, ainda nesse caso, o resultado obtido é local no tempo. Obtivemos nosso resultado através de aproximações do tipo semi-Galerkin (conforme [23] e [3]) e argumentos de compacidade. Há que se destacar uma forte intervenção dos resultados sobre compacidade nos espaços de Nikolskii. No capítulo 4, a linha dos resultados muda em relação ao Teorema 2.1.1 no sentido de que as condições iniciais são satisfeitas de uma maneira mais forte, enquanto que naquele elas são satisfeitas num sentido mais fraco. O preço pago para isso é exigir mais regularidade sobre os dados iniciais e/ou sobre a solução obtida no Teorema 2.1.1. No primeiro resultado, o Teorema 3.1.1, mediante con-

venientes hipóteses sobre a solução obtida no Teorema 2.1.1 e sobre a densidade inicial, obtém-se as condições iniciais satisfeitas num sentido forte. No segundo resultado, o Teorema 3.2.1, tais condições são obtidas quando fazemos uma escolha dos dados iniciais com maior regularidade e uma hipótese adicional sobre a integrabilidade do inverso da densidade inicial. Em consequência disso, obtemos estimativas *a priori* adicionais. Ressaltamos aqui que esse resultado melhora o resultado obtido por Lukaszewicz em [18] no sentido em que diminui a potência da integrabilidade do inverso da densidade inicial. Mais especificamente o expoente exigido em [18] é 3 e conseguimos diminuí-lo para 2. No terceiro resultado, o Teorema 3.3.1, com uma hipótese acerca do tamanho dos dados iniciais, obtemos uma propriedade a mais da solução obtida no Teorema 3.2.1 que é a sua existência global no tempo. No capítulo 4, tratamos o caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ser um domínio ilimitado e obtemos um resultado análogo ao Teorema 2.1.1 que é o Teorema 4.1.1. Esse resultado, conforme o Teorema 2.1.1, ainda não havia sido provado para a categoria dos fluidos assimétricos. Em nosso trabalho, adaptamos técnicas de [22],[13],[12],[14], [2], dentre outros.

Capítulo 1

Preliminares

Reunimos aqui algumas notações e resultados que serão utilizados com frequência durante o trabalho. Omitiremos as demonstrações, fornecendo a referência onde elas podem ser encontradas.

1.1 Espaços de Sobolev

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, $m, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$, definimos os espaços de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m\},$$

que são espaços de Banach quando munidos da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ se } p < \infty,$$

ou

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sup_{|\alpha| \leq m} (\sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)|), \text{ se } p = \infty.$$

Seja $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ e de suporte compacto contido em Ω . Denotaremos o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ na norma de $W^{m,p}(\Omega)$ por $W_0^{m,p}(\Omega)$. Esse último espaço ainda é um espaço de Banach com a norma induzida de $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, denotaremos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Nesse caso, $W_0^{m,2}(\Omega)$ será denotado por $H_0^1(\Omega)$. Esse

caso é de particular interesse, pois os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert relativamente ao produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u(x) \partial^{\alpha} v(x) \, dx.$$

Um resultado importante, que aparecerá seguidas vezes durante este trabalho, refere-se ao caso em que Ω é limitado (pelo menos em uma direção). Nesse caso, dado $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, existe uma constante C que depende de Ω e de p tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde

$$\|\nabla u\|_{L^p} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Essa desigualdade é conhecida como desigualdade de Poincaré-Friedrichs. Como consequência dessa desigualdade é que $u \mapsto \|\nabla u\|_p$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente à norma que é herdada de $W^{1,p}(\Omega)$.

Denotaremos por $W^{-1,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, onde p' é o expoente conjugado de p , isto é, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. No caso em que $p = 2$, o espaço $W^{-1,2}(\Omega)$ será denotado por $H^{-1}(\Omega)$, o dual de $H_0^1(\Omega)$.

Outra categoria importante de espaços de Sobolev com os quais lidaremos são aqueles com valores vetoriais. Para defini-los, sejam B um espaço de Banach, $\|\cdot\|_B$ sua norma. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; B)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ , tomando valores em B e com suporte compacto contido em $(0, T)$. Dado $p \in [1, +\infty)$, definimos o espaço $L^p(0, T; B)$ como sendo o conjunto das (classes de) funções $f : (0, T) \rightarrow B$ para as quais

$$\int_0^T \|f(t)\|_B^p dt < \infty.$$

Munido da norma

$$\|f\|_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_B^p dt \right)^{1/p},$$

$L^p(0, T; B)$ se torna um espaço de Banach. Se $p = \infty$, definimos $L^\infty(0, T; B)$ como sendo

o conjunto das (classes de) funções $f : (0, T) \rightarrow B$ para as quais

$$\sup_{t \in (0, T)} \|f(t)\|_B < \infty.$$

Munido da norma

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; B)} = \sup_{t \in (0, T)} \|f(t)\|_B,$$

$L^\infty(0, T; B)$ se torna um espaço de Banach. Pode-se mostrar que $\mathcal{D}(0, T; B)$ é denso em $L^p(0, T; B)$. Definiremos os espaços de Sobolev com valores em B como sendo

$$W^{m, p}(0, T; B) = \left\{ f \in L^p(0, T; B); \frac{d^k f}{dt^k} \in L^p(0, T; B), \forall k = 0, \dots, m \right\},$$

onde a derivada deve ser entendida no sentido das distribuições. Conforme o valor de p seja finito ou infinito, temos as seguintes possibilidades de norma para esse espaço:

$$\|f\|_{W^{m, p}(0, T; B)} = \left(\sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^p(0, T; B)}^p \right)^{1/p}$$

no caso de $p < \infty$ e, caso contrário,

$$\|f\|_{W^{m, \infty}(0, T; B)} = \max_{0 \leq k \leq m} \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^\infty(0, T; B)}.$$

Como antes, para o caso de $1 \leq p < \infty$, definimos $W^{-m, p'}(0, T; B')$ como sendo o dual de $W^{m, p}(0, T; B)$, onde p' é o expoente conjugado de p e B' é o dual de B . A seguir enunciaremos três lemas referentes à imersões de Sobolev nos casos de domínios limitados e ilimitados, respectivamente.

Lema 1.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado e com fronteira Lipschitziana. Então*

(i) *Para $1 \leq r \leq +\infty$, $W^{1, r}(\Omega) \subset L^{r_\star}(\Omega)$, com a imersão sendo contínua, onde $r_\star$ é dado por*

$$1. \quad \frac{1}{r_\star} = \frac{1}{r} - \frac{1}{3}, \text{ se } r < 3,$$

$$2. \quad r_\star = \infty \text{ se } r > 3, \text{ e}$$

3. r_* é qualquer número real finito se $r = 3$.

A imersão $W^{1,r}(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ é compacta se $s < r_*$.

(ii) Para $1 \leq s \leq r \leq \infty$, a aplicação produto

$$W^{1,r}(\Omega) \times W^{1,s}(\Omega) \rightarrow W^{1,t}(\Omega),$$

com $\frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, onde r_* é obtido como antes, está bem definida e é contínua se $t \geq 1$.

(iii) Para $1 \leq r \leq +\infty$ e $1 < s \leq +\infty$, a aplicação produto

$$W^{1,r}(\Omega) \times W^{-1,s}(\Omega) \rightarrow W^{-1,t}(\Omega),$$

definida por

$$\langle \mu u, v \rangle_{W^{-1,t}(\Omega)} = \langle \mu, uv \rangle_{W^{-1,s}(\Omega)},$$

para todos $\mu \in W^{-1,s}(\Omega)$, $u \in W^{1,r}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,t'}(\Omega)$, onde t é como antes, está bem definida e é contínua, se $t \geq 1$.

Lema 1.1.2. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto. Então

(i) A imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_*}(\Omega)$ é contínua, onde p_* é dado por

1. $\frac{1}{p_*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}$, se $p < 3$,
2. $p_* = \infty$ se $p > 3$, e
3. $p_* \in [p, +\infty)$, se $p = 3$.

Ademais, se a fronteira de Ω é Lipschitziana valem resultados semelhantes para $W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) $W^{1,1}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$,

(iii) Se $1 \leq p < 3$ e p_* é como antes, vale

$$\|\phi\|_{L^{p_*}} \leq C \|\nabla \phi\|_{L^p}, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

O próximo resultado versa sobre espaços de Sobolev com expoentes negativos.

Lema 1.1.3. *Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^d$ e $1 \leq r \leq \infty$. Então*

$$L^r(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega),$$

para todo q tal que $1 \leq q \leq \infty$ satisfazendo $\frac{1}{d} > \frac{1}{r} - \frac{1}{d}$, se $r = 1$ ou $r = d$ e $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{r} - \frac{1}{d}$, caso contrário.

Provas para os lemas 1.1.1 e 1.1.2 podem ser encontradas em Adams [1], enquanto que a prova de (1.1.3) pode ser vista em Simon [22].

1.2 Espaços de Nikolskii

Algumas estimativas *a priori* que serão obtidas em capítulos posteriores serão feitas no contexto dos chamados Espaços de Nikolskii que passaremos a definir agora. Sejam B um espaço de Banach, $f : (0, T) \rightarrow B$ e $h > 0$. Definimos a função transladada no tempo de f , $\tau_h f : (-h, T - h) \rightarrow B$ por

$$(\tau_h f)(t) = f(t + h), \forall t \in (-h, T - h).$$

O espaço de Nikolskii de ordem $s, 0 < s \leq 1$, e expoente $q, 1 \leq q \leq +\infty$, é definido por

$$N^{s,q}(0, T; B) := \left\{ f : f \in L^q(0, T; B), \|\tau_h f - f\|_{L^q(0, T-h; B)} \leq Ch^s, \forall h \in (0, T) \right\}.$$

A última condição equivale a afirmar que

$$\sup_{0 < h < T} \left[h^{-s} \|\tau_h f - f\|_{L^q(0, T-h; B)} \right] < \infty.$$

Pode-se demonstrar que $N^{s,q}(0, T; B)$ com as operações usuais, possui uma estrutura de espaço vetorial e que, munido da norma

$$\|f\|_{N^{s,q}(0,T;B)} := \|f\|_{L^q(0,T;B)} + \sup_{0 < h < T} \left[h^{-s} \|\tau_h f - f\|_{L^q(0,T-h;B)} \right],$$

é um espaço de Banach. No que segue, enunciaremos um importante resultado de compacidade que desempenhará papel fundamental nos resultados futuros.

Lema 1.2.1. *Sejam $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$, espaços de Banach com imersões contínuas, sendo a de X em B compacta. As seguintes imersões são compactas*

- (i) $L^q(0, T; X) \cap \left\{ \phi; \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^1(0, T; Y) \right\} \hookrightarrow L^q(0, T; B)$, se $1 \leq q \leq \infty$,
- (ii) $L^\infty(0, T; X) \cap \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^r(0, T; Y) \right\} \hookrightarrow C([0, T]; B)$ se $1 < r \leq +\infty$,
- (iii) $L^q(0, T; X) \cap N^{s,q}(0, T; Y) \hookrightarrow L^q(0, T; B)$ se $0 < s \leq 1, 1 \leq q \leq +\infty$.

Ademais, se $K \in L^1(0, T)$ é uma função dada, então

- (iv.a) *A interseção de um conjunto limitado de $L^\infty(0, T; X)$ com*

$$\left\{ \phi; \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_Y \leq K, \text{ q.t.p. em } [0, T] \right\}$$

é um conjunto relativamente compacto em $C([0, T]; B)$.

- (iv.b) *A interseção de um conjunto limitado de $L^\infty(0, T; X)$ com*

$$\left\{ \phi; \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_Y \leq K + \psi, \text{ q.t.p. em } [0, T], \text{ para alguma } \psi \text{ tal que } \|\psi\|_{L^r(0,T)} \leq C \right\},$$

onde C é uma constante, é um conjunto relativamente compacto em $C([0, T]; B)$, se $r > 1$.

As demonstração do lema 1.2.1 encontra-se em [22] ou [23], onde também encontram-se comentários diversos sobre extensões e optimalidade dos expoentes envolvidos.

1.3 Resultados Técnicos

Enunciamos um resultado envolvendo os espaços L^p , cuja demonstração está em [5].

Lema 1.3.1. *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência, com $f_n \in L^p$, e $f \in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

1. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, q.t.p. em Ω ,
2. Existe $h \in L^p$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo k e q.t.p. em Ω .

O próximo resultado trata de continuidade fraca e a demonstração pode ser encontrada em [25].

Lema 1.3.2. *Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$ com imersão contínua. Se $\phi \in L^\infty(0, T; X)$ é fracamente contínua com valores em Y então ϕ é fracamente contínua com valores em X .*

Os próximos resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [22] ou em [23], tratam de desigualdades do tipo Gronwall.

Lema 1.3.3. *Sejam $g \in W^{1,1}(0, T)$ e $k \in L^1(0, T)$ tais que*

$$\frac{dg}{dt} \leq F(g) + k \text{ q.t.p. em } (0, T) \text{ e } g(0) \leq g_0,$$

onde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente limitada. Nessas condições, para cada $\epsilon > 0$, existe T_ϵ , ($0 < T_\epsilon \leq T$) que depende de ϵ, g_0, F e k (mas não de g), tal que

$$g(t) \leq g_0 + \epsilon, \text{ para todo } t \in [0, T_\epsilon].$$

Lema 1.3.4. *Seja $g \in W^{1,1}(0, T)$, $g \geq 0$ e $k \in L^1(0, T)$, $k \geq 0$, satisfazendo*

$$\frac{d}{dt}g^2 \leq gk, \quad g(0) \leq g_0.$$

Então

$$g(t) \leq g_0 + \frac{1}{2} \int_0^T k(s) ds, \quad \forall t \in (0, T).$$

1.4 Espaços relacionados à divergência nula

A fim de que possamos tratar a questão da incompressibilidade dos fluidos que estamos estudando, faz-se necessário introduzir certos espaços funcionais. Para isso, seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^3$. Denotaremos por

$$\mathcal{V} := \left\{ \mathbf{v} \in (C_0^\infty(\Omega))^3; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\},$$

$$V = \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } (H_0^1(\Omega))^3, \text{ munido da norma de } (H_0^1(\Omega))^3.$$

$$H = \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } (L^2(\Omega))^3, \text{ munido da norma de } (L^2(\Omega))^3.$$

Pode-se demonstrar, veja [25], que, se a fronteira de Ω for Lipschitziana, valem as seguintes igualdades

$$V = \left\{ \mathbf{v}; \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$H = \left\{ \mathbf{v}; \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

onde $\mathbf{n}$ é o campo de vetores normais a $\partial\Omega$. Quando estivermos lidando com domínios ilimitados, será necessário considerar o espaço

$$K^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u}; \mathbf{u} \in L^6(\Omega)^3 \text{ e } \nabla \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^9 \right\}.$$

Esse espaço munido da norma

$$\|\mathbf{u}\|_{K^1} = \|\mathbf{u}\|_{L^6} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}$$

é um espaço de Banach. Convém lembrarmos que se Ω é limitado, então $K^1(\Omega)$ coincide com $H^1(\Omega)$. Denotaremos por $K_0^1(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ em $K^1(\Omega)$. Em virtude do Lema 1.1.2, temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow K_0^1(\Omega)$, com a imersão sendo contínua. Ainda mais, a função

$$\mathbf{u} \mapsto \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}$$

é uma norma em $K_0^1(\Omega)$ que é equivalente à norma herdada de $K^1(\Omega)$. Denotaremos também por $W(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{V}(\Omega)$ em $K_0^1(\Omega)^3$. Quando introduzirmos uma formulação

variacional do problema adequada ao nosso caso, haverá uma perda da incógnita p . Para recuperá-la, faremos uso do seguinte resultado que é uma generalização de um resultado de De Rham

Lema 1.4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto com fronteira Lipschitziana. Se $h \in \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ é tal que $\langle h, v \rangle = 0$ em $\mathcal{D}'(0, T)$, para cada $v \in \mathcal{V}$, então existe $g \in \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ tal que $h = \nabla g$. Ademais, se $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq r \leq +\infty$, para cada $h \in W^{s,r}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$, nas condições acima, podemos escolher g de tal maneira que a aplicação $h \mapsto \bar{L}h := g$ seja linear e contínua nas normas de $W^{s,r}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ e $W^{s,r}(0, T; L^2(\Omega))$.*

A demonstração do lema 1.4.1 pode ser encontrada em [24]. A seguir temos um Lema envolvendo continuidade de produtos e cuja demonstração pode ser encontrada em [22]

Lema 1.4.2. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ seja um conjunto aberto.*

- (i) *Se s e p satisfazem $1 \leq s \leq p \leq \infty$, $p_\star$ é como no Lema 1.1.2 e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_\star} + \frac{1}{s}$ então a aplicação $(u, v) \mapsto uv$ de $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,s}(\Omega)$ em $W^{1,r}(\Omega)^3$ está bem definida e é contínua.*
- (ii) *Se $\frac{6}{5} \leq s < 3$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{6} + \frac{1}{s}$, então a aplicação $(u, v) \mapsto vu$ de $K_0^1 \times W_0^{1,s}(\Omega)$ em $W_0^{1,r}(\Omega)^3$, está bem definida e é contínua,*
- (iii) *Se s e p satisfazem $1 \leq s, p \leq \infty$, $s > 1$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_\star} + \frac{1}{s}$. Para qualquer $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e qualquer $\mu \in W^{-1,s}(\Omega)$, introduzimos a distribuição μu , dada por*

$$\langle \mu u, v \rangle = \langle \mu, uv \rangle_{W^{-1,s}}, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então a aplicação $(u, \mu) \mapsto \mu u$ de $W^{1,p}(\Omega) \times W^{-1,s}(\Omega)$ em $W^{-1,r}(\Omega)$ está bem definida e é contínua,

- (iv) *Se $s > 2$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{6} + \frac{1}{s}$, então a aplicação $(u, \mu) \mapsto \mu u$ de $K_0^1(\Omega) \times W^{-1,s}(\Omega)$ em $W^{-1,r}(\Omega)^3$ está bem definida e é contínua.*

Capítulo 2

Existência de solução em domínios limitados

Neste capítulo obteremos um resultado de existência de solução fraca global no tempo para o sistema (0.0.1)-(0.0.6), dado na introdução, no cilindro $\Omega \times (0, T)$, onde Ω é um aberto limitado em $\mathbb{R}^3$ e $T > 0$ é um número real dado.

2.1 Enunciado do resultado principal

O principal resultado deste capítulo é estabelecido pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado, com fronteira lipschitziana, e $T > 0$, um número real dado. Se $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{w}_0 \in L^2(\Omega)^3$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, com $\rho_0 \geq 0$, em Ω e $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^1\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$, então existem*

- $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$,
- $\mathbf{w} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3)$,
- $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ e
- $\rho \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$,

tais que

$$(3.0.a) \quad \rho \mathbf{u} \in L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right) \cap N^{\frac{1}{4}, 2} \left(0, T, W^{-1, 3}(\Omega)^3 \right),$$

$$(3.0.b) \quad \rho \mathbf{w} \in L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right) \cap N^{\frac{1}{4}, 2} \left(0, T, W^{-1, 3}(\Omega)^3 \right),$$

$$(3.0.c) \quad \inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho(x, t) \leq \sup_{\Omega} \rho_0, \text{ em } \Omega \times (0, T),$$

e que satisfazem as equações

$$(3.1) \quad \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} - \rho \mathbf{f} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} = 0, \text{ em } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{w}) - (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + 4\mu_r \mathbf{w} - \rho \mathbf{g} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \text{ em } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ em } \Omega \times (0, T),$$

$$(3.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ em } \Omega \times (0, T).$$

juntamente com as condições de contorno

$$(3.5) \quad \mathbf{u} = 0, \text{ em } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$(3.6) \quad \mathbf{w} = 0, \text{ em } \partial\Omega \times (0, T),$$

e as condições iniciais

$$(3.7) \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \text{ em } \Omega,$$

$$(3.8) \quad \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} dx, \text{ para todo } \mathbf{v} \in V,$$

$$(3.9) \quad \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z} dx, \text{ para todo } \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Antes de passarmos à demonstração, faremos algumas observações acerca de alguns pontos que aparecem no enunciado do teorema.

Observação 2.1.1. Como $\rho \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ e $\frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^2(0, T; W^{-1, 6}(\Omega))$, o Lema 1.2.1, parte (ii), implica que $\rho \in C([0, T]; B)$, para qualquer espaço B que satisfaça

$$L^\infty(\Omega) \mapsto B \hookrightarrow W^{-1, 6}(\Omega).$$

Se considerarmos $B = W^{-1, \infty}(\Omega)$, teremos $\rho \in C([0, T]; W^{-1, \infty}(\Omega))$.

Observação 2.1.2. *No caso particular de $\rho_0 \geq \alpha > 0$, em Ω , temos*

$$\mathbf{u}, \mathbf{w} \in L^\infty \left(0, T; \left(L^2(\Omega) \right)^3 \right) \cap N^{\frac{1}{4}, 2} \left(0, T, W^{-1, 3}(\Omega)^3 \right).$$

Observação 2.1.3. *O sentido em que as igualdades (3.1)-(3.6) ocorrem se tornará preciso no decorrer da demonstração do teorema apresentada a seguir.*

2.2 Demonstração do Teorema 2.1.1

A idéia da demonstração é, em primeiro lugar, considerar um problema aproximado e obter uma formulação do tipo semi-Galerkin. Em seguida, mostrar que este problema aproximado possui solução local. Feito isso, obter estimativas para as soluções do problema aproximado e para suas derivadas com respeito às variáveis espaciais e suas “derivadas fracionárias no tempo”, sendo que, estas últimas, são obtidas nos espaços de Nikolskii. Posteriormente, efetuar a passagem ao limite sobre as equações aproximadas. No decorrer deste processo, recupera-se a incógnita p , que é perdida durante a formulação variacional. Dividiremos a demonstração do Teorema 2.1.1 em várias etapas.

2.2.1 Escolha de uma base apropriada para os espaços V e $(L^2(\Omega))^3$

Como $(C_c^1(\overline{\Omega}))^3 \cap V$ é denso em V e este último é um espaço de Hilbert separável, podemos escolher uma base hilbertiana em V , que denotaremos por $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots\}$ de tal maneira que

$$\mathbf{v}^i \in (C_c^1(\overline{\Omega}))^3, \text{ para todo } i$$

e

$$(\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j)_{(L^2(\Omega))^3} = \delta_{i,j}, \text{ para todos } i, j \geq 1.$$

Denotaremos por V^m o subespaço de V gerado por $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m$. Como $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, com inclusão densa, e, sendo este último espaço de Hilbert separável, existe uma base

Hilbertiana $\{\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \dots\}$ de $(L^2(\Omega))^3$ tal que

$$\mathbf{z}^i \in (\mathcal{D}(\Omega))^3, \text{ para todo } i$$

e

$$(\mathbf{z}^i, \mathbf{z}^j)_{(L^2(\Omega))^3} = \delta_{ij}, \text{ para todos } i, j \geq 1.$$

Denotaremos por W^m o subespaço de $(L^2(\Omega))^3$ gerado por $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^m$.

2.2.2 Regularização de $\mathbf{f}$ e de $\mathbf{g}$.

Como $\mathcal{D}\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$ é denso em $L^1\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$ e $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ pertencem a este último, podemos encontrar, seqüências $\mathbf{f}^m$ e $\mathbf{g}^m$ ambas em $\mathcal{D}\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$ tais que $\mathbf{f}^m \rightarrow \mathbf{f}$ e $\mathbf{g}^m \rightarrow \mathbf{g}$, em $L^1\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$.

2.2.3 Regularização dos dados Iniciais

Vamos definir $\mathbf{u}_0^m$ como sendo a projeção de $\mathbf{u}_0$ sobre V^m , isto é, $\mathbf{u}_0^m \in V^m$ é tal que

$$(\mathbf{u}_0^m, \mathbf{v})_{L^2} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})_{L^2}, \text{ para todo } \mathbf{v} \in V^m.$$

Com esta escolha, temos que $\mathbf{u}_0^m \rightarrow \mathbf{u}_0$ em H e que $\|\mathbf{u}_0^m\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}$, para todo $m \geq 1$. De forma análoga, definiremos $\mathbf{w}_0^m$ como sendo a projeção de $\mathbf{w}_0$ sobre W^m , isto é, $\mathbf{w}_0^m \in W^m$ é tal que

$$(\mathbf{w}_0^m, \mathbf{z})_{L^2} = (\mathbf{w}_0, \mathbf{z})_{L^2}, \text{ para todo } \mathbf{z} \in W^m.$$

Com esta escolha, temos que $\mathbf{w}_0^m \rightarrow \mathbf{w}_0$ em $(L^2(\Omega))^3$ e que $\|\mathbf{w}_0^m\|_{L^2} \leq \|\mathbf{w}_0\|_{L^2}$, para todo $m \geq 1$. Prolongando ρ_0 por 0 fora de Ω , consideremos, para cada $h > 0$, as funções regularizadas de ρ_0 obtidas por convolução, denotadas por ρ_0^h , ou seja,

$$\rho_0^h(x) := (\rho_0 * \rho_h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x-y) \rho_h(y) dy.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_h = 1$, segue que

$$\inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho_0^h \leq \sup_{\Omega} \rho_0.$$

Ademais a sequência ρ_0^h é limitada em $L^\infty(\Omega)$ e converge a ρ_0 quando $h \rightarrow 0$, por exemplo, em $L^2(\Omega)$. Concluimos então que $\rho_0^h \rightarrow \rho_0$ fraco-* em $L^\infty(\Omega)$. Agora, tomando $\rho_0^m = \frac{1}{m} + (\rho_0)_{\frac{1}{m}}$, resulta que ρ_0^m satisfaz às seguintes condições

1. $\rho_0^m \in C^1(\overline{\Omega})$, $\rho_0^m \rightarrow \rho_0$ fraco-* em $L^\infty(\Omega)$,
2. $\frac{1}{m} + \inf_{\Omega} \rho_0 \leq \rho_0^m \leq \frac{1}{m} + \sup_{\Omega} \rho_0$ em Ω .

2.2.4 Formulação do problema aproximado

Após as considerações acima, podemos formular o problema aproximado associado ao problema (0.0.1)(0.0.6), da seguinte maneira: determinar funções

$$\rho^m \in C^1(\overline{\Omega}), \mathbf{u}^m \in C^1([0, T]; V^m) \text{ e } \mathbf{w}^m \in C^1([0, T]; W^m),$$

tais que

$$\int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{u}_t^m + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m - \mathbf{f}^m) \cdot \mathbf{v} + (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v} - 2\mu_r \mathbf{w}^m \cdot \text{rot } \mathbf{v} dx = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho^m (\mathbf{w}_t^m + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m - \mathbf{g}^m) \cdot \mathbf{z} + (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \cdot \nabla \mathbf{z} \\ + (c_0 + c_d - c_a) \text{div } \mathbf{w}^m \cdot \text{div } \mathbf{z} + 4\mu_r \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z} - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{z}) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\rho_t^m + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \rho^m = 0, \text{ em } \Omega \times (0, T), \quad (2.2.3)$$

onde a igualdade (2.2.1) é válida para todo $\mathbf{v} \in V^m$, e a igualdade (2.2.2), para todo $\mathbf{z} \in W^m$, e com as condições iniciais

$$\mathbf{u}^m|_{t=0} = \mathbf{u}_0^m, \quad \text{em } \Omega, \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{w}^m|_{t=0} = \mathbf{w}_0^m, \quad \text{em } \Omega, \quad (2.2.5)$$

$$\rho^m|_{t=0} = \rho_0^m, \quad \text{em } \Omega. \quad (2.2.6)$$

2.2.5 Existência de solução para o problema aproximado

Nosso objetivo agora é estabelecer a existência de soluções para o problema aproximado (2.2.1)-(2.2.6). Em primeiro lugar, dado $\mathbf{u}^m \in C([0, T]; V^m)$, com $\operatorname{div} \mathbf{u}^m = 0$, em $\Omega \times (0, T)$ e $\mathbf{u}^m = 0$ em $\partial\Omega \times [0, T]$, vamos investigar a existência de solução $\rho^m \in C^1(\overline{Q})$ para o problema linear

$$\begin{cases} \rho_t^m + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \rho^m = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho^m|_{t=0} = \rho_0^m, & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Considere as trajetórias das partículas

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\mathbf{u}^m(y, t), \\ y(0) = x. \end{cases}$$

Se y_x^m denota a solução do problema anterior, então $\rho^m(x, t) = \rho_0(y_x^m(t))$. Ademais, essa solução satisfaz

$$0 < \frac{1}{m} \leq \inf_{\Omega} \rho_0^m \leq \rho^m(x, t) \leq \sup_{\Omega} \rho_0^m, \quad (2.2.7)$$

uma vez que estamos assumindo que $\mathbf{u}^m$ é suficientemente regular. Resolvido o problema linear anterior, investigaremos agora a existência de solução

$$(\mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m) \in C^1([0, T]; V^m) \times C^1([0, T]; W^m),$$

para o problema não-linear (2.2.1)-(2.2.2) com as condições iniciais (2.2.4) e (2.2.5).

Buscaremos uma solução $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ da forma

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{j=1}^m \phi_j(t) \mathbf{v}^j(x) \text{ e } \mathbf{w}(x, t) = \sum_{j=1}^m \psi_j(t) \mathbf{z}^j(x),$$

onde $\phi_j, \psi_j \in C^1([0, T])$. Substituindo essas expressões de $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ e ρ^m na equação (2.2.1), teremos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \rho^m \phi_j'(t) \mathbf{v}^j \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \sum_{l,j,s,p=1,1,1,1}^{3,m,m,3} \rho^m \phi_j(t) v_l^j \phi_s(t) \frac{\partial \mathbf{v}_p^s}{\partial x_l} \mathbf{v}_p dx \\ & + \int_{\Omega} (\mu + \mu_r) \sum_{j=1}^m \phi_j(t) \nabla \mathbf{v}^j \cdot \nabla \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} dx - 2\mu_r \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \psi_j(t) \mathbf{z}^j \cdot \text{rot } \mathbf{v} dx = 0, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in V^m$. Em particular, para $\mathbf{v} = \mathbf{v}^i, i \in \{1, \dots, m\}$, ficamos com

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \phi_j'(t) \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{v}^j \cdot \mathbf{v}^i dx + \sum_{l,j,s,p=1,1,1,1}^{3,m,m,3} \phi_j(t) \phi_s(t) \int_{\Omega} \rho^m v_l^j \frac{\partial v_p^s}{\partial x_l} v_p^i dx \\ & + (\mu + \mu_r) \sum_{j=1}^m \phi_j(t) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}^j \cdot \nabla \mathbf{v}^i dx - \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v}^i dx \\ & + \sum_{j=1}^m \psi_j(t) \int_{\Omega} (-2\mu_r) \mathbf{z}^j \cdot \text{rot } \mathbf{v}^i dx = 0, \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, em $(0, T)$. Essa equação pode ser escrita na forma mais compacta

$$A(\Phi) \Phi' + F(\Phi, \Psi) = 0,$$

onde

$$\Phi = [\phi_i(t)]_{m \times 1}, \Psi = [\psi_i(t)]_{m \times 1},$$

$$\Psi = [\psi_i(t)]_{m \times 1}, \Phi = [\phi_i(t)]_{m \times 1},$$

$$A(\Phi) = (a_{ij}), \text{ onde } a_{ij} = \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{v}^j \cdot \mathbf{v}^i dx,$$

$$\begin{aligned}
F(\Phi, \Psi)_i &= \sum_{l,j,s,p=1,1,1,1}^{3,m,m,3} \phi_j(t) \phi_s(t) \int_{\Omega} \rho^m v_l^j \frac{\partial v_p^s}{\partial x_l} v_p^i dx + (\mu + \mu_r) \sum_{j=1}^m \phi_j(t) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}^j \cdot \nabla \mathbf{v}^i dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v}^i dx + B \Psi,
\end{aligned}$$

sendo $B = (b_{ij})$, com $b_{ij} = -2\mu_r \int_{\Omega} \mathbf{z}^j \cdot \text{rot } \mathbf{v}^i dx$, com $i, j = 1, \dots, m$.

Agora vamos substituir as expressões de $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ e ρ^m na equação (2.2.2). Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \rho^m \psi_j'(t) \mathbf{z}^j \cdot \mathbf{z} dx + \int_{\Omega} \sum_{l,j,s,p=1,1,1,1}^{3,m,m,3} \rho^m \psi_j(t) z_l^j \psi_s(t) \frac{\partial z_p^s}{\partial x_l} z_p dx \\
&+ \sum_{j=1}^m \psi_j(t) \int_{\Omega} \{4\mu_r \mathbf{z}^j \cdot \mathbf{z} + (c_a + c_d) \nabla \mathbf{z}^j \cdot \nabla \mathbf{z} + (c_0 + c_d - c_a) \text{div } \mathbf{z}^j \cdot \text{div } \mathbf{z}\} dx \\
&\quad - 2\mu_r \sum_{j=1}^m \phi_j(t) \int_{\Omega} \mathbf{v}^j \cdot \text{rot } \mathbf{z} dx - \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{z} dx = 0,
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{z} \in W^m$. Em particular, para $\mathbf{z} = \mathbf{z}^i, i \in \{1, \dots, m\}$, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m \int_{\Omega} \rho^m \psi_j'(t) \mathbf{z}^j \cdot \mathbf{z}^i dx + \sum_{l,j,s,p=1,1,1,1}^{3,m,m,3} \psi_j(t) \psi_s(t) \int_{\Omega} \rho^m \frac{\partial z_p^s}{\partial x_l} z_l^j z_p^i dx \\
&+ \sum_{j=1}^m \psi_j(t) \int_{\Omega} \{4\mu_r \mathbf{z}^j \cdot \mathbf{z}^i + (c_a + c_d) \nabla \mathbf{z}^j \cdot \nabla \mathbf{z}^i + (c_0 + c_d - c_a) \text{div } \mathbf{z}^j \cdot \text{div } \mathbf{z}^i\} dx \\
&\quad - \sum_{j=1}^m \phi_j(t) \int_{\Omega} (2\mu_r) \mathbf{v}^j \cdot \text{rot } \mathbf{z}^i dx - \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{z}^i dx = 0,
\end{aligned}$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$, em $(0, T)$. Esta equação pode ser escrita na forma mais compacta

$$\overline{A}(\Phi) \Psi' + \overline{F}(\Phi, \Psi) = 0,$$

onde

$$\Phi = [\phi_i(t)]_{m \times 1}, \Psi = [\psi_i(t)]_{m \times 1},$$

$$\Psi = [\psi_i(t)]_{m \times 1}, \Phi = [\phi_i(t)]_{m \times 1},$$

$$\overline{A}(\Phi) = (\overline{a_{ij}}), \text{ onde } \overline{a_{ij}} = \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{z}^j \cdot \mathbf{z}^i dx,$$

$$\begin{aligned}
\overline{F}(\Phi, \Psi)_i &= \sum_{l,j,s,p=1,1,1,1}^{3,m,m,3} \rho^m \psi_j(t) \psi_s(t) \int_{\Omega} \frac{\partial z_p^s}{\partial x_l} z_l^j z_p^i dx \\
&+ \sum_{j=1}^m \psi_j(t) \int_{\Omega} \{4\mu_r \mathbf{z}^j \cdot \mathbf{z}^i + (c_a + c_d) \nabla \mathbf{z}^j \cdot \nabla \mathbf{z}^i + (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{div} \mathbf{z}^j \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}^i\} dx \\
&- \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{z}^i dx + \overline{B} \Phi,
\end{aligned}$$

sendo $\overline{B} = (\overline{b_{ij}})$, com $\overline{b_{ij}} = -2\mu_r \int_{\Omega} \mathbf{v}^j \cdot \operatorname{rot} \mathbf{z}^i dx$. Assim, o problema não linear anterior transforma-se no sistema

$$\begin{cases} A(\Phi) \Phi' + F(\Phi, \Psi) = 0, \\ \overline{A}(\Phi) \Psi' + \overline{F}(\Phi, \Psi) = 0, \\ \Phi(0) = \{\phi_j(0)\}_{j=1}^m = \text{componentes de } \mathbf{u}_0^m, \\ \Psi(0) = \{\psi_j(0)\}_{j=1}^m = \text{componentes de } \mathbf{w}_0^m. \end{cases}$$

O sistema anterior ainda pode ser escrito como

$$\begin{cases} X' = \mathcal{F}(X), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (*)$$

onde

$$X = (\Phi, \Psi),$$

$$X_0 = (\Phi(0), \Psi(0)),$$

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(\Phi, \Psi) = \begin{bmatrix} A(\Phi) & 0 \\ 0 & \overline{A}(\Phi) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F(\Phi, \Psi) \\ -\overline{F}(\Phi, \Psi) \end{bmatrix}.$$

Observamos que o par $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ é solução de (2.2.1)-(2.2.2) juntamente com as condições iniciais (2.2.4)-(2.2.5) se e somente se o par (Φ, Ψ) é solução do sistema (*). Esse último possui solução local, por ser $\mathcal{F}$ uma função contínua. Portanto, o sistema (2.2.1)-(2.2.2) juntamente com as condições iniciais (2.2.4)-(2.2.5) possui uma solução $(\mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$, definida em $[0, T_m]$.

2.2.6 Estimativas *a priori* das soluções aproximadas

Denotemos por $(\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$ uma solução do problema aproximado definida em $[0, T_m]$. Vamos obter agora estimativas que nos permitam estendê-las ao intervalo $[0, T]$.

Estimativas das funções

Multiplicando a equação (2.2.3) por $|\mathbf{u}^m(t)|^2$ e integrando em Ω , ficamos com

$$\int_{\Omega} \rho_t^m |\mathbf{u}^m(t)|^2 + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \rho^m |\mathbf{u}^m(t)|^2 dx = 0.$$

Fazendo $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}^m$ na equação (2.2.1), obtemos

$$\int_{\Omega} 2\rho^m (\mathbf{u}_t^m + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m) \cdot \mathbf{u}^m + 2(\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m dx = \int_{\Omega} 4\mu_r \mathbf{w}^m \cdot \text{rot } \mathbf{u}^m + 2\rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{u}^m dx.$$

Somando as duas últimas igualdades e escrevendo o resultado na forma de produto interno, chegamos a

$$\begin{aligned} (2\rho^m \mathbf{u}^m, \mathbf{u}_t^m) + \left\| (\rho_t^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + (2\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m, \mathbf{u}^m) &+ (|\mathbf{u}^m|^2 \mathbf{u}^m, \nabla \rho^m) \\ &+ 2(\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\ &= 4\mu_r (\text{rot } \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m) + (2\rho^m \mathbf{f}^m, \mathbf{u}^m). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{u}^m \in V^m$, temos

$$(2\rho^m \mathbf{u}^m, \mathbf{u}_t^m) + \left\| (\rho_t^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt} \left(\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 \right),$$

$$(2\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m, \mathbf{u}^m) + (|\mathbf{u}^m|^2 \mathbf{u}^m, \nabla \rho^m) = 0,$$

e, portanto, a igualdade anterior transforma-se em

$$\frac{d}{dt} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + 2(\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 = 4\mu_r (\text{rot } \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m) + 2(\rho^m \mathbf{f}^m, \mathbf{u}^m). \quad (2.2.8)$$

Multiplicando a equação (2.2.3) por $|\mathbf{w}^m(t)|^2$ e integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} \rho_t^m |\mathbf{w}^m(t)|^2 + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \rho^m |\mathbf{w}^m(t)|^2 dx = 0.$$

Fazendo $\mathbf{z} = 2\mathbf{w}^m$ na equação (2.2.2), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\rho^m \mathbf{w}_t^m \cdot \mathbf{w}^m &+ 2\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{w}^m + 2(c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \cdot \nabla \mathbf{w}^m \\ &+ 2(c_0 + c_d - c_a) \operatorname{div} \mathbf{w}^m \cdot \operatorname{div} \mathbf{w}^m + 8\mu_r \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{w}^m dx \\ &= \int_{\Omega} 2\rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{w}^m + 4\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{u}^m dx. \end{aligned}$$

Agora, somando as duas últimas equações e escrevendo o resultado na forma de produto interno, ficamos com

$$\begin{aligned} (\rho^m \mathbf{w}_t^m, 2\mathbf{w}^m) &+ \left\| (\rho_t^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + 2(c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\ &+ 2(c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|^2 + 8\mu_r \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 = (2\rho^m \mathbf{g}^m, \mathbf{w}^m) + 4\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{u}^m \in V^m$, temos

$$\begin{aligned} (2\rho^m \mathbf{w}^m, \mathbf{w}_t^m) &+ \left\| (\rho_t^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt} \left(\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \right), \\ (2\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m, \mathbf{w}^m) &+ (|\mathbf{w}^m|^2 \mathbf{u}^m, \nabla \rho^m) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade anterior transforma-se em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 &+ 2(c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 2(c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|^2 + 8\mu_r \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\ &= (2\rho^m \mathbf{g}^m, \mathbf{w}^m) + 4\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m). \quad (2.2.9) \end{aligned}$$

Adicionando as igualdades (2.2.8) e (2.2.9), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 &+ \frac{d}{dt} \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + 2(\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\ &+ 2(c_0 + c_d - c_a) |\operatorname{div} \mathbf{w}^m|^2 + 2(c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 8\mu_r \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\ &= 2(\rho^m \mathbf{f}^m, \mathbf{u}^m) + 4\mu_r (\mathbf{w}^m, \operatorname{rot} \mathbf{u}^m) + 4\mu_r (\mathbf{u}^m, \operatorname{rot} \mathbf{w}^m) + 2(\rho^m \mathbf{g}^m, \mathbf{w}^m). \end{aligned}$$

Agora, levando em conta que $(\mathbf{w}^m, \operatorname{rot} \mathbf{u}^m) = (\operatorname{rot} \mathbf{w}^m, \mathbf{u}^m)$, a igualdade anterior pode

ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 &+ \frac{d}{dt} \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + 2(\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\
&+ 2(c_0 + c_d - c_a) |\operatorname{div} \mathbf{w}^m|^2 + 2(c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 8\mu_r \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&= 2 \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{f}^m, (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right) + 8\mu_r (\mathbf{w}^m, \operatorname{rot} \mathbf{u}^m) + 2 \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{g}^m, (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right).
\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades

$$(\rho^m \mathbf{f}^m, \mathbf{u}^m) = \left((\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}^m, (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^m \right) \leq \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}^m \right\|_{L^2} \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{w}^m, \mathbf{u}^m) \leq \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2},$$

$$(\rho^m \mathbf{g}^m, \mathbf{w}^m) = \left((\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}^m, (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}^m \right) \leq \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}^m \right\|_{L^2} \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2},$$

na última igualdade, ficamos com

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\{ \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \right\} &+ 2(\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + 2(c_0 + c_d - c_a) |\operatorname{div} \mathbf{w}^m|^2 \\
&+ 2(c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 8\mu_r \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&\leq 8\mu_r \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} + 2 \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}^m \right\|_{L^2} \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2} \\
&+ 2 \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}^m \right\|_{L^2} \left\| (\rho^m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade

$$\|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} \leq \frac{1}{4} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2,$$

que é decorrência da desigualdade de Cauchy-Schwarz, na desigualdade anterior, ficaremos com

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\{ \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \right\} &+ 2\mu \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\
&+ 2(c_0 + c_d - c_a) |\operatorname{div} \mathbf{w}^m|^2 + 2(c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&\leq C[\|\mathbf{f}^m\|_{L^2} + \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}][\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2} + \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}] \\
&\leq C[\|\mathbf{f}^m\|_{L^2} + \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}] \sqrt{\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, teremos

$$\frac{d}{dt} \left\{ \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \right\} \leq C[\|\mathbf{f}^m\|_{L^2} + \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}] \cdot \sqrt{\|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2}.$$

Agora, pelo Lema 1.3.4, temos que

$$\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 \leq C \quad \text{e} \quad \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \leq C,$$

onde C é uma constante que não depende de m e nem de T_m . Logo essas funções estão definidas em todo o intervalo $[0, T]$. Em consequência disso, temos

$$\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right)_m \text{ é limitada em } L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right) \quad (2.2.10)$$

e

$$\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right)_m \text{ é limitada em } L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right). \quad (2.2.11)$$

Integrando a igualdade (2.2.8) de 0 a T , teremos

$$\begin{aligned} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 (T) &= \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 (0) + 2(\mu + \mu_r) \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt \\ &= 4\mu_r \int_0^T (\text{rot } \mathbf{w}^m, \mathbf{u}^m) dt + 2 \int_0^T ((\rho^m)^{1/2} \mathbf{f}^m, (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m) dt, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que

$$\begin{aligned} 2(\mu + \mu_r) \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt &\leq \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 (0) + 4\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{f}^m \right\|_{L^2} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2} dt. \end{aligned}$$

As limitações (2.2.7) e (2.2.10) nos permitem reescrever a desigualdade anterior como

$$\begin{aligned} 2(\mu + \mu_r) \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt &\leq C + 4\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} dt \\ &\quad + 2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2} \int_0^T \|\mathbf{f}^m\|_{L^2} dt. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{f}^m$ é limitada em $L^1\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$, a última igualdade se escreve sob a forma

$$2(\mu + \mu_r) \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt \leq C + 4\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} dt, \quad (2.2.12)$$

onde C é uma constante que não depende de m . Integrando a igualdade (2.2.9) de 0 a T , ficamos com

$$\begin{aligned} \left\|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m\right\|_{L^2}^2(T) - \left\|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m\right\|_{L^2}^2(0) &+ 2(c_a + c_d) \int_0^T \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt \\ &+ 2(c_0 + c_d - c_a) \int_0^T |\operatorname{div} \mathbf{w}^m|^2 dt + 8\mu_r \int_0^T \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt \\ &= 4\mu_r \int_0^T (\operatorname{rot} \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m) dt \\ &+ 2 \int_0^T \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{g}^m, (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right) dt. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} 2(c_a + c_d) \int_0^T \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt + 8\mu_r \int_0^T \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt &\leq \left\|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m\right\|_{L^2}^2(0) \\ &+ 4\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} dt \\ &+ 2 \int_0^T \left\|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{g}^m\right\|_{L^2} \left\|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m\right\|_{L^2} dt. \end{aligned}$$

As limitações (2.2.7) e (2.2.11) nos permitem reescrever a igualdade anterior como

$$\begin{aligned} 2(c_a + c_d) \int_0^T \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt + 8\mu_r \int_0^T \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt &\leq C + 4\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} dt \\ &+ 2C \int_0^T \|\mathbf{g}^m\|_{L^2} dt. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{g}^m$ é limitada em $L^1\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$, a última igualdade toma o seguinte aspecto

$$2(c_a + c_d) \int_0^T \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt + 8\mu_r \int_0^T \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt \leq C + 4\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} dt. \quad (2.2.14)$$

Somando as desigualdades (2.2.12) e (2.2.14), temos

$$\begin{aligned} 2(\mu + \mu_r) \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt + 2(c_a + c_d) \int_0^T \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt + 8\mu_r \int_0^T \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt \\ \leq C + 8\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} dt. \end{aligned}$$

Como

$$8\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2} dt \leq 2\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt + 8\mu_r \int_0^T \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt,$$

segue que

$$\begin{aligned} 2(\mu + \mu_r) \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt + 2(c_a + c_d) \int_0^T \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt + 8\mu_r \int_0^T \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt \\ \leq C + 2\mu_r \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt + 8\mu_r \int_0^T \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2\mu \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt + 2(c_a + c_d) \int_0^T \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 dt \leq C.$$

Daí,

$$(\nabla \mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } L^2\left(0, T; (L^2(\Omega))^9\right) \quad (2.2.15)$$

e

$$(\nabla \mathbf{w}^m)_m \text{ é limitada em } L^2\left(0, T; (L^2(\Omega))^9\right) \quad (2.2.16)$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, temos

$$\int_0^T \|\mathbf{u}^m\|_{L^6}^2 dt \leq \int_0^T C \|\mathbf{u}^m\|_{H_0^1}^2 dt \leq \int_0^T C \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt.$$

Devido às limitações anteriores, temos que

$$(\mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } L^2 \left(0, T; (L^6(\Omega))^3 \right). \quad (2.2.17)$$

Por um raciocínio semelhante, temos que

$$(\mathbf{w}^m)_m \text{ é limitada em } L^2 \left(0, T; (L^6(\Omega))^3 \right). \quad (2.2.18)$$

Graças à regularidade de $\mathbf{u}^m$, e às estimativas anteriores, temos que

$$(\mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; V). \quad (2.2.19)$$

De forma semelhante, podemos concluir que

$$(\mathbf{w}^m)_m \text{ é limitada em } L^2 \left(0, T; (H_0^1(\Omega))^3 \right). \quad (2.2.20)$$

Vamos agora obter estimativas para $\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m$ e $\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m$. Para esse fim, vamos estabelecer algumas estimativas preliminares. Inicialmente, vamos mostrar que

$$\left((\rho^m)^{1/8} \mathbf{u}^m \right)_m \text{ é limitada em } L^{\frac{8}{3}} \left(0, T; (L^4(\Omega))^3 \right). \quad (2.2.21)$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} \left\| (\rho^m)^{1/8} \mathbf{u}^m \right\|_{L^4}^{\frac{8}{3}} &= \left(\left(\int_{\Omega} |(\rho^m)^{1/8} \mathbf{u}^m|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{8/3} = \left(\int_{\Omega} |(\rho^m)^{1/8} \mathbf{u}^m|^4 dx \right)^{2/3} \\ &= \left(\int_{\Omega} |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m| |\mathbf{u}^m|^3 dx \right)^{2/3} \leq \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^{2/3} \|\mathbf{u}^m\|_{L^6}^2. \end{aligned}$$

Daí

$$\int_0^T \left\| (\rho^m)^{1/8} \mathbf{u}^m \right\|_{L^4}^{8/3} dt \leq \int_0^T \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^{2/3} \|\mathbf{u}^m\|_{L^6}^2 dt.$$

Como $\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right)_m$ é limitada em $L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right)$ e $(\mathbf{u}^m)_m$ o é em $L^2 \left(0, T; (L^6(\Omega))^3 \right)$, segue que $\left\| \mathbf{u}^m \right\|_{L^4}^{\frac{8}{3}}$ é limitada em $L^1(0, T)$, o que mostra nossa afirmação. De uma forma

semelhante, podemos mostrar que

$$\left((\rho^m)^{1/8} \mathbf{w}^m \right)_m \text{ é limitada em } L^{\frac{8}{3}} \left(0, T; (L^4(\Omega))^3 \right). \quad (2.2.22)$$

Passamos agora a obter as estimativas sobre $\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m$. Inicialmente, observamos que

$$\begin{aligned} \|\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m\|_{L^2} &= \left(\int_{\Omega} |\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j} (\rho^m u_i^m u_j^m)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\sum_i ((\rho^m)^{1/2} u_i^m)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j ((\rho^m)^{1/2} u_j^m)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m|^2 |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^4}^2. \end{aligned}$$

A estimativa (2.2.21) obtida para $(\rho^m)^{1/8} \mathbf{u}^m$ acarreta, em particular, que

$$\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right)_m \text{ é limitada em } L^{\frac{8}{3}} \left(0, T; (L^4(\Omega))^3 \right),$$

donde

$$(\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (L^2(\Omega))^9 \right). \quad (2.2.23)$$

A seguir, veremos uma estimativa para $\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m$. Temos

$$\begin{aligned} \|\rho^m \mathbf{w}^m \mathbf{u}^m\|_{L^2} &= \left(\left(\int_{\Omega} |\rho^m \mathbf{w}^m \mathbf{u}^m|^2 dx \right) \right)^{1/2} = \left(\left(\int_{\Omega} \sum_{i,j} (\rho^m w_i^m u_j^m)^2 dx \right) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\sum_i ((\rho^m)^{1/2} w_i^m)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j ((\rho^m)^{1/2} u_j^m)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m|^2 |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
\|\rho^m \mathbf{w}^m \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{4/3} &\leq \left(\int_{\Omega} |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m|^2 |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m|^2 dx \right)^{2/3} \\
&\leq \left(\left(\int_{\Omega} |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m|^4 dx \right)^{1/2} \right)^{2/3} \\
&= \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^4}^{4/3} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^4}^{4/3}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\rho^m \mathbf{w}^m \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{4/3} dt &\leq \int_0^T \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^4}^{4/3} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^4}^{4/3} dt \\
&\leq \left(\int_0^T \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right\|_{L^4}^{8/3} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right\|_{L^4}^{8/3} dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

As estimativas (2.2.21) e (2.2.22) obtidas sobre $(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m$ e $(\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m$ implicam, em particular, que

$$\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \right)_m \text{ é limitada em } L^{\frac{8}{3}} \left(0, T; (L^4(\Omega))^3 \right),$$

e

$$\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}^m \right)_m \text{ é limitada em } L^{\frac{8}{3}} \left(0, T; (L^4(\Omega))^3 \right),$$

donde

$$(\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m)_m \text{ é limitada em } L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (L^2(\Omega))^9 \right). \quad (2.2.24)$$

Estimativas das derivadas com relação ao tempo

Inicialmente notemos que

$$(\rho^m \mathbf{u}^m)_m \text{ e } (\rho^m \mathbf{w}^m)_m \text{ são limitadas em } L^2 \left(0, T; (L^6(\Omega))^3 \right) \cap L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right),$$

uma vez que $(\mathbf{u}^m)_m$ e $(\mathbf{w}^m)_m$ o são e $(\rho^m)_m$ é limitada em $L^\infty(\Omega \times (0, T))$. Por outro lado, a equação do transporte acarreta que

$$\left(\frac{\partial \rho^m}{\partial t}\right)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega)). \quad (2.2.25)$$

De fato, basta notar que as derivadas são efetuadas nas variáveis espaciais e as inclusões

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \text{ e } L^6(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,6}(\Omega)$$

são contínuas. Agora, veremos estimativas na derivada com relação a t de $\int_\Omega \rho^m \mathbf{u}^m dx$ e de $\int_\Omega \rho^m \mathbf{w}^m dx$. Para isso, vamos considerar as formulações variacionais conservativas para as equações dadas na introdução. Essas formulações são

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m) \right) \cdot \mathbf{v} + (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v} dx &= \int_\Omega 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{v} \\ &+ \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} dx \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m) + 4\mu_r \mathbf{w}^m \right) \cdot \mathbf{z} + (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \cdot \nabla \mathbf{z} \\ + \int_\Omega (c_0 + c_d - c_a) \text{div } \mathbf{w}^m \cdot \text{div } \mathbf{z} dx &= \int_\Omega 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{z} + \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{z} dx, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m) = 0, \quad (2.2.28)$$

$$\text{div } \mathbf{u}^m = 0, \quad (2.2.29)$$

sendo a igualdade (2.2.26) válida para todo $\mathbf{v} \in V^m$ e a igualdade (2.2.27) válida para todo $\mathbf{z} \in W^m$. Passamos agora às estimativas, começando com a da derivada de $\int_\Omega \rho^m \mathbf{u}^m dx$. Observamos que, devido à regularidade de $\rho^m \mathbf{u}^m$, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\rho^m \mathbf{u}^m) \cdot \mathbf{v} dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} dx.$$

Substituindo na formulação variacional (2.2.26) ficamos com

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m - (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m) \cdot \nabla \mathbf{v} + (\rho^m \mathbf{f}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^m) \cdot \mathbf{v} dx \right| \\
&\leq \| \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m - (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m \|_{L^2} \| \nabla \mathbf{v} \|_{L^2} + \| \rho^m \mathbf{f}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \|_{L^2} \| \mathbf{v} \|_{L^2} \\
&\leq [\| \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m - (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m \|_{L^2} + \gamma \| \rho^m \mathbf{f}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \|_{L^2}] \| \nabla \mathbf{v} \|_{L^2},
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Poincaré. Sabemos que $\| \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m - (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m \|_{L^2}$ é limitada em $L^{\frac{4}{3}}(0, T)$ e que $\| \rho^m \mathbf{f}^m \|_{(L^2)^3}$ é limitada em $L^1(0, T)$. Como $\| \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \|_{L^2} \leq C \| \nabla \mathbf{w}^m \|_{L^2}$ e, como esta última é limitada em $L^2(0, T)$, temos que $\| \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \|_{L^2}$ é limitada em $L^2(0, T)$ sendo também limitada em $L^1(0, T)$. Portanto

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} dx \right| \leq r_m \| \nabla \mathbf{v} \|_{L^2}, \quad (2.2.30)$$

para todo $\mathbf{v} \in V^m$, onde

$$r_m = \| \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m - (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m \|_{L^2} + \gamma \| \rho^m \mathbf{f}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \|_{L^2} \in L^1(0, T).$$

Vejamos agora uma estimativa semelhante sobre a derivada de $\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m$ com relação a t . Pela regularidade de $\rho^m \mathbf{w}^m$ temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{z} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z} dx.$$

Agora substituindo na formulação variacional (2.2.27), temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z} dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \{ \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \} \cdot \nabla \mathbf{z} \right. \\
&\quad \left. + (\rho^m \mathbf{g}^m + 4\mu_r \mathbf{w}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^m) \cdot \mathbf{z} - (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{div} \mathbf{w}^m \cdot \operatorname{div} \mathbf{z} dx \right| \\
&\leq \| \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \|_{L^2} \| \nabla \mathbf{z} \|_{L^2} \\
&\quad + \| \rho^m \mathbf{g}^m + 4\mu_r \mathbf{w}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \|_{L^2} \| \mathbf{z} \|_{L^2} \\
&\quad + \left| \int_{\Omega} (c_0 + c_d - c_a) |\operatorname{div} \mathbf{w}^m| |\operatorname{div} \mathbf{z}| dx \right| \\
&\leq \| \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \|_{L^2} \| \nabla \mathbf{z} \|_{L^2} \\
&\quad + \gamma \| \rho^m \mathbf{g}^m + 4\mu_r \mathbf{w}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \|_{L^2} \| \nabla \mathbf{z} \|_{L^2} \\
&\quad + k (c_0 + c_d - c_a) \| \operatorname{div} \mathbf{w}^m \|_{L^2} \| \operatorname{div} \mathbf{z} \| \\
&\leq [\| \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \|_{L^2} + \gamma \| \rho^m \mathbf{g}^m + 4\mu_r \mathbf{w}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \|_{L^2} \\
&\quad + k (c_0 + c_d - c_a) \| \nabla \mathbf{w}^m \|_{L^2}] \| \nabla \mathbf{z} \|_{L^2} .
\end{aligned}$$

e, por argumento semelhante ao usado no caso de $(\mathbf{u}^m)_m$, temos que

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z} dx \right| \leq l_m \| \nabla \mathbf{z} \|_{L^2} , \quad (2.2.31)$$

para todo $\mathbf{z} \in W^m$, onde

$$\begin{aligned}
l_m &= \| \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m + (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \|_{L^2} + \gamma \| \rho^m \mathbf{g}^m + 4\mu_r \mathbf{w}^m + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \|_{L^2} \\
&\quad + \gamma k (c_0 + c_d - c_a) \| \nabla \mathbf{w}^m \|_{L^2} \in L^1(0, T) .
\end{aligned}$$

Estimativas fracionárias no tempo

Obteremos agora limitações sobre $(\rho^m \mathbf{u}^m)_m$ e $(\rho^m \mathbf{w}^m)_m$ nos Espaços de Nikolskii. Mais especificamente, provaremos que

$$(\rho^m \mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } N^{1/4,2} \left(0, T; (W^{-1,3}(\Omega))^3 \right) \quad (2.2.32)$$

e que

$$(\rho^m \mathbf{w}^m)_m \text{ é limitada em } N^{1/4,2} \left(0, T; (W^{-1,3}(\Omega))^3 \right). \quad (2.2.33)$$

Tendo em conta o fato de que $(\rho^m \mathbf{u}^m)_m$ e $(\rho^m \mathbf{w}^m)_m$ são limitadas em $L^2 \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right)$ e que $L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,3}(\Omega)$, é suficiente mostrar que existe uma constante $C > 0$, independente de m , tal que

$$\|\tau_h(\rho^m \mathbf{u}^m) - \rho^m \mathbf{u}^m\|_{L^2(0, T-h; (W^{-1,3}(\Omega))^3)} \leq Ch^{1/4}, \forall h \in (0, T)$$

e

$$\|\tau_h(\rho^m \mathbf{w}^m) - \rho^m \mathbf{w}^m\|_{L^2(0, T-h; (W^{-1,3}(\Omega))^3)} \leq Ch^{1/4}, \forall h \in (0, T).$$

Começaremos com o caso de $(\rho^m \mathbf{u}^m)_m$, cuja análise será dividida em três etapas.

Primeira Etapa: Inicialmente, observamos que, dado $\mathbf{v} \in V^m$, arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{u}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{u}^m(t)] \cdot \mathbf{v} dx &= \int_t^{t+h} \left(\frac{d}{ds} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m(s) \cdot \mathbf{v} dx \right) ds \\ &\leq \left(\int_t^{t+h} r_m(s) ds \right) \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}, \end{aligned}$$

onde $r_m \in L^1(0, T)$, pela estimativa (2.2.30). Pondo $\mathbf{v} = \mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t) \in V^m$ e integrando com respeito a t entre $(0, T-h)$, teremos

$$\begin{aligned} &\int_0^{T-h} \int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{u}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{u}^m(t)] \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] dx dt \\ &\leq \int_0^{T-h} \|\nabla \mathbf{u}^m(t+h) - \nabla \mathbf{u}^m(t)\|_{L^2} \cdot \left(\int_t^{t+h} r_m(s) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Fazendo

$$I_1 := \int_0^{T-h} \int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{u}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{u}^m(t)] \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] dx dt,$$

temos, pelo Teorema de Fubini, que

$$I_1 \leq \int_0^T r_m(s) \left(\int_{(s-h)^*}^{s^*} \|\nabla \mathbf{u}^m(t+h) - \nabla \mathbf{u}^m(t)\|_{L^2}^2 dt \right) ds,$$

onde

$$s^* = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0, \\ s, & \text{se } 0 \leq s \leq T - h, \\ T - h, & \text{se } s \geq T - h. \end{cases}$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^T r_m(s) \left(\int_{(s-h)^*}^{s^*} 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{(s-h)^*}^{s^*} \|\nabla \mathbf{u}^m(t+h) - \nabla \mathbf{u}^m(t)\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq 2h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \int_0^T r_m(s) ds \\ &\leq Ch^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$I_1 \leq Ch^{\frac{1}{2}}.$$

Segunda Etapa: Façamos

$$I_2 := \int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] \mathbf{u}^m(t) \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] dx \right) dt.$$

Dado $t \in [0, T - h]$, multiplicando a equação

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho^m \mathbf{u}^m)$$

por $k \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$, e integrando em Ω , ficaremos com

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m}{\partial t} \cdot k dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho^m \mathbf{u}^m) \cdot k dx = \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \nabla k dx.$$

A regularidade de ρ^m nos permite escrever

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m}{\partial t}(t) \cdot k dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m(t) \cdot k dx.$$

Logo, integrando as igualdades anteriores em $(t, t+h)$, teremos

$$\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] \cdot k dx = \int_t^{t+h} \left(\int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m)(s) \cdot \nabla k dx \right) ds.$$

Tomando módulo e usando a Desigualdade de Hölder generalizada para $1 = 1/6 + 1/6 + 1/(3/2)$, já que a função constante e igual a 1 está em $L^6(\Omega)$, $\nabla k \in (L^{3/2}(\Omega))^3$ e $\mathbf{u}^m \in (L^6(\Omega))^3$, e tendo em conta o fato de que $\nabla \mathbf{u}^m$ é limitada em $L^2\left(0, T; (L^2(\Omega))^9\right)$, ficamos com

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] \cdot k dx \right| &\leq \int_t^{t+h} \|\rho^m(s)\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}^m(s)\|_{L^6} \|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}} |\Omega|^{\frac{1}{6}} ds \\ &\leq b |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}} \int_t^{t+h} \|\mathbf{u}^m(s)\|_{L^6} ds \\ &\leq C b |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}} \int_t^{t+h} \|\mathbf{u}^m(s)\|_{H_0^1} ds \\ &\leq C \gamma b |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}} \int_t^{t+h} \|\nabla \mathbf{u}^m(s)\|_{L^2} ds \\ &\leq C \gamma b |\Omega|^{\frac{1}{6}} \|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}} \left(\int_t^{t+h} 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+h} \|\nabla \mathbf{u}^m(s)\|_{L^2}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C h^{\frac{1}{2}} \|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

onde $|\Omega|$ indica a medida de Ω . Portanto,

$$\int_{\Omega} (\rho^m(t+h) - \rho^m(t)) \cdot k dx \leq C h^{\frac{1}{2}} \|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.2.34)$$

para cada $k \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$. Consideremos $k = \mathbf{u}^m(t) \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)]$. Notamos que, pelo Lema 1.4.2, parte (i), o produto $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow W_0^{1,3/2}(\Omega)$ é contínuo e, portanto, $k \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$. Pela Desigualdade de Poincaré, temos que

$$\|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq C \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\nabla (\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t))\|_{L^2}.$$

Sabemos que o lado direito da desigualdade anterior é limitado em $L^1(0, T-h)$.

Portanto, integrando (2.2.34) com respeito a t em $(0, T - h)$, chegamos a

$$\int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] \mathbf{u}^m(t) \cdot [\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)] \right) dx dt \leq Ch^{\frac{1}{2}},$$

ou seja, existe uma constante C tal que

$$I_2 \leq Ch^{1/2}.$$

Terceira Etapa: Observemos agora que

$$I_1 - I_2 = \int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho^m(t+h) |\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t)|^2 \right) dx dt.$$

Daí, pelas estimativas obtidas anteriormente sobre I_1, I_2 e ρ^m , temos

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\rho^m(t+h) (\mathbf{u}^m(t+h) - \mathbf{u}^m(t))|^2 \right) dx dt \leq Ch^{\frac{1}{2}},$$

que acarreta

$$\|\tau_h \rho^m (\tau_h \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^m)\|_{L^2(0, T-h; (L^2(\Omega))^3)} \leq Ch^{1/4}. \quad (2.2.35)$$

Agora, observemos que

$$(\tau_h \rho^m - \rho^m)(t) = \rho^m(t+h) - \rho^m(t) = \int_t^{t+h} \frac{\partial \rho^m}{\partial t}(s) ds = - \int_t^{t+h} \operatorname{div}(\rho^m \mathbf{u}^m)(s) ds,$$

para todo $t \in (0, T - h)$. Portanto, tomando normas em $W^{-1,6}(\Omega)$ e levando em conta que $\rho^m \mathbf{u}^m$ é limitada em $L^2(0, T; (L^6(\Omega))^3)$, temos que

$$\begin{aligned} \|(\tau_h \rho^m - \rho^m)(t)\|_{W^{-1,6}} &\leq C \int_t^{t+h} \|\rho^m \mathbf{u}^m(s)\|_{L^6} ds \\ &\leq Ch^{1/2} \|\rho^m \mathbf{u}^m\|_{L^2(0, T; (L^6(\Omega))^3)} \\ &\leq Ch^{1/2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\tau_h \rho^m - \rho^m\|_{L^\infty(0, T-h; W^{-1,6}(\Omega))} \leq Ch^{1/2}. \quad (2.2.36)$$

Como, em particular, $\mathbf{u}^m$ é limitada em $L^2\left(0, T-h; (H^1(\Omega))^3\right)$, utilizamos a continuidade do produto $H^1(\Omega) \times W^{-1,6}(\Omega) \rightarrow W^{-1,3}(\Omega)$, conforme Lema 1.4.2, parte (iii), e concluimos que

$$\|(\tau_h \rho^m - \rho^m) \mathbf{u}^m\|_{L^2(0, T-h; (W^{-1,3}(\Omega))^3)} \leq Ch^{1/2}. \quad (2.2.37)$$

Agora, observemos que

$$\tau_h \rho^m (\tau_h \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^m) + (\tau_h \rho^m - \rho^m) \mathbf{u}^m = \tau_h (\rho^m \mathbf{u}^m) - \rho^m \mathbf{u}^m.$$

Portanto, agrupando as duas desigualdades (2.2.36) e (2.2.37), obtemos

$$\|\tau_h (\rho^m \mathbf{u}^m) - \rho^m \mathbf{u}^m\|_{L^2(0, T-h; (W^{-1,3}(\Omega))^3)} \leq Ch^{1/2} + Ch^{1/4} \leq Ch^{1/4}, \quad (2.2.38)$$

onde C é uma constante que não depende de m .

No que segue, obteremos uma estimativa semelhante para $\mathbf{w}^m$. Novamente, dividiremos a análise em três etapas.

Primeira Etapa: Inicialmente observamos que, dado $\mathbf{z} \in W^m$ arbitário, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{w}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{w}^m(t)] \cdot \mathbf{z} \, dx &= \int_t^{t+h} \left(\frac{d}{ds} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m(s) \cdot \mathbf{z} \, dx \right) ds \\ &\leq \left(\int_t^{t+h} l_m(s) \, ds \right) \|\nabla \mathbf{z}\|_{L^2}, \end{aligned}$$

onde $l_m \in L^1(0, T)$, pela estimativa (2.2.31). Pondo $\mathbf{z} = \mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t) \in W^m$ e integrando com respeito a t entre $(0, T-h)$, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{w}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{w}^m(t)] \cdot [\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t)] \, dx \, dt &\leq \\ &\int_0^{T-h} \|\nabla \mathbf{w}^m(t+h) - \nabla \mathbf{w}^m(t)\|_{(L^2)} \cdot \left(\int_t^{t+h} l_m(s) \, ds \right) dt. \end{aligned}$$

Fazendo

$$J_1 := \int_0^{T-h} \int_{\Omega} [\rho^m \mathbf{w}^m(t+h) - \rho^m \mathbf{w}^m(t)] \cdot [\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t)] dx dt,$$

teremos, pelo Teorema de Fubini

$$J_1 \leq \int_0^T l_m(s) \left(\int_{(s-h)^*}^{s^*} \|\nabla \mathbf{w}^m(t+h) - \nabla \mathbf{w}^m(t)\|_{L^2} \right) ds,$$

onde

$$s^* = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0, \\ s, & \text{se } 0 \leq s \leq T-h, \\ T-h, & \text{se } s \geq T-h. \end{cases}$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_0^T l_m(s) \left(\int_{(s-h)^*}^{s^*} 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{(s-h)^*}^{s^*} \|\nabla \mathbf{w}^m(t+h) - \nabla \mathbf{w}^m(t)\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq 2h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2} \int_0^T l_m(s) ds \\ &\leq Ch^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que $J_1 \leq Ch^{\frac{1}{2}}$.

Segunda Etapa: Fazendo

$$J_2 := \int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] \mathbf{w}^m(t) \cdot [\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t)] dx \right) dt,$$

o mesmo argumento usado anteriormente nos permite concluir que

$$\int_{\Omega} (\rho^m(t+h) - \rho^m(t)) \cdot k dx \leq Ch^{\frac{1}{2}} \|\nabla k\|_{L^{\frac{3}{2}}},$$

para cada $k \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$. Vamos tomar $k = \mathbf{w}^m(t) \cdot [\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t)]$. Invocando o Lema 1.4.2, parte (i), temos que o produto $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow W_0^{1,3/2}(\Omega)$ é

contínuo, de onde segue que $k \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$. Pela desigualdade de Poincaré, temos

$$\|\nabla k\|_{L^{3/2}} \leq C \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2} \|\nabla (\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t))\|_{L^2}.$$

Sabemos que o lado direito da desigualdade anterior é limitado em $L^1(0, T-h)$.

Portanto, integrando (2.2.39) com respeito a t em $(0, T-h)$, chegamos a

$$\int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} [\rho^m(t+h) - \rho^m(t)] \mathbf{w}^m(t) \cdot [\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t)] \right) dx dt \leq Ch^{\frac{1}{2}}.$$

Agora observemos que

$$J_1 - J_2 = \int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho^m(t+h) |\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t)|^2 \right) dx dt.$$

Daí, pelas estimativas obtidas anteriormente, temos

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho^m(t+h) |\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t)|^2 \right) dx dt \leq Ch^{\frac{1}{2}},$$

o que acarreta

$$\int_0^{T-h} \left(\int_{\Omega} \rho^m(t+h) |\mathbf{w}^m(t+h) - \mathbf{w}^m(t)|^2 \right) dx dt \leq Ch^{1/2},$$

que, escrita numa outra forma, fica

$$\|\tau_h \rho^m (\tau_h \mathbf{w}^m - \mathbf{w}^m)\|_{L^2(0, T-h; (L^2(\Omega))^3)} \leq Ch^{1/4}. \quad (2.2.39)$$

Em seguida, observamos que

$$(\tau_h \rho^m - \rho^m)(t) = \rho^m(t+h) - \rho^m(t) = \int_t^{t+h} \frac{\partial \rho^m}{\partial t}(s) ds = - \int_0^{t+h} \operatorname{div}(\rho^m \mathbf{u}^m)(s) ds,$$

para todo $t \in (0, T-h)$. Portanto, tomando normas em $W^{-1,6}(\Omega)$ e, levando em

conta que $\rho^m \mathbf{w}^m$ é limitada em $L^2 \left(0, T; (L^6(\Omega))^3 \right)$, temos

$$\begin{aligned} \|(\tau_h \rho^m - \rho^m)(t)\|_{W^{-1,6}} &\leq C \int_t^{t+h} \|\rho^m \mathbf{w}^m(s)\|_{L^6} ds \\ &\leq Ch^{1/2} \|\rho^m \mathbf{w}^m\|_{L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)} \\ &\leq Ch^{1/2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\tau_h \rho^m - \rho^m\|_{L^\infty(0,T-h;W^{-1,6}(\Omega))} \leq Ch^{1/2}.$$

Como, em particular, $\mathbf{w}^m$ é limitada em $L^2 \left(0, T-h; (H^1(\Omega))^3 \right)$, utilizamos a continuidade do produto $H^1(\Omega) \times W^{-1,6}(\Omega) \rightarrow W^{-1,3}(\Omega)$ e concluímos que

$$\|(\tau_h \rho^m - \rho^m) \mathbf{w}^m\|_{L^2(0,T-h;(W^{-1,3}(\Omega))^3)} \leq Ch^{1/2}. \quad (2.2.40)$$

Agora observamos que

$$\tau_h \rho^m (\tau_h \mathbf{w}^m - \mathbf{w}^m) + (\tau_h \rho^m - \rho^m) \mathbf{w}^m = \tau_h (\rho^m \mathbf{w}^m) - \rho^m \mathbf{w}^m.$$

Portanto, agrupando as duas desigualdades (2.2.39) e (2.2.40), obtemos

$$\|\tau_h (\rho^m \mathbf{w}^m) - \rho^m \mathbf{w}^m\|_{L^2(0,T;(W^{-1,3}(\Omega))^3)} \leq Ch^{1/2} + Ch^{1/4} \leq Ch^{1/4},$$

onde C é uma constante que não depende de m .

2.2.7 Passagem ao limite

De posse das limitações obtidas na seção anterior, provaremos agora alguns fatos relacionados às seqüências envolvidas com vistas à extração de subsequências convenientes. Usando as estimativas (2.2.7) e (2.2.25), juntamente com o Lema 1.2.1, parte (ii) para os espaços $X = L^\infty(\Omega)$, $B = W^{-1,\infty}(\Omega)$ e $Y = H^{-1}(\Omega)$, concluímos que

$$(\rho^m)_m \text{ está contida em um compacto de } C([0, T]; W^{-1,\infty}(\Omega)). \quad (2.2.41)$$

Usando as estimativas (2.2.7), (2.2.10) e (2.2.17) concluimos que

$$(\rho^m \mathbf{w}^m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; L^6(\Omega)^3). \quad (2.2.42)$$

Usando as estimativas (2.2.42), (2.2.32) e o Lema 1.2.1, parte (iii), para os espaços $X = L^6(\Omega)^3$, $B = W^{-1,\infty}(\Omega)^3$ e $Y = W^{-1,3}(\Omega)^3$, concluimos que

$$(\rho^m \mathbf{u}^m)_m \text{ está contida em um compacto de } L^2\left(0, T; (W^{-1,\infty}(\Omega))^3\right). \quad (2.2.43)$$

Usando as estimativas (2.2.7), (2.2.11) e (2.2.18), concluimos que

$$(\rho^m \mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; L^6(\Omega)^3). \quad (2.2.44)$$

Agora, usamos as estimativas (2.2.44), (2.2.33) e o Lema 1.2.1, parte (iii), para os espaços $X = L^6(\Omega)^3$, $B = W^{-1,\infty}(\Omega)^3$ e $Y = W^{-1,3}(\Omega)^3$ para concluirmos que

$$(\rho^m \mathbf{w}^m)_m \text{ está contida em um compacto de } L^2\left(0, T; (W^{-1,\infty}(\Omega))^3\right). \quad (2.2.45)$$

As inclusões (2.2.41), (2.2.43) e (2.2.45), o Teorema de Alaoglu e a reflexividade dos espaços L^p , com $1 < p < \infty$ nos permitem extrair subsequências de $\{\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m\}$, que denotaremos da mesma forma, com as seguintes propriedades

(i) Existe $\rho \in L^\infty(Q)$ com $\rho^m \rightarrow \rho$ em

$$\begin{cases} C^0([0, T]; W^{-1,\infty}(\Omega)) \text{ forte,} \\ L^\infty(Q) \text{ fraco-} \star. \end{cases}$$

(ii) Existe $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ com $\mathbf{u}^m \rightarrow \mathbf{u}$, em $L^2(0, T; V)$ fraco.

(iii) Existe $\mathbf{w} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3)$, com $\mathbf{w}^m \rightarrow \mathbf{w}$ em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3)$ fraco.

(iv) Existe χ_1 , com $\rho^m \mathbf{u}^m \rightarrow \chi_1$ em

$$\begin{cases} L^2 \left(0, T; (L^6(\Omega))^3 \right) \text{ fraco,} \\ L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right) \text{ fraco-}\star, \\ L^2 \left(0, T; (W^{-1,\infty}(\Omega))^3 \right) \text{ forte.} \end{cases}$$

(v) Existe χ_2 , com $\rho^m \mathbf{w}^m \rightarrow \chi_2$ em

$$\begin{cases} L^2 \left(0, T; (L^6(\Omega))^3 \right) \text{ fraco,} \\ L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right) \text{ fraco-}\star, \\ L^2 \left(0, T; (W^{-1,\infty}(\Omega))^3 \right) \text{ forte.} \end{cases}$$

(vi) Existe χ_3 , com $\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \rightarrow \chi_3$ em $L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (L^2(\Omega))^9 \right)$ fraco.

(vii) Existe χ_4 , com $\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m \rightarrow \chi_4$ em $L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (L^2(\Omega))^9 \right)$ fraco.

Mostraremos agora propriedades muito importantes dos limites dessas subsequências.

Pelo Lema 1.4.2, parte (iii), a aplicação produto $H_0^1(\Omega) \times W^{-1,\infty}(\Omega) \rightarrow W^{-1,6}(\Omega)$ é contínua. Logo, por (i) e (ii) temos

$$\rho^m \mathbf{u}^m \rightarrow \rho \mathbf{u} \in L^2 \left(0, T; (W^{-1,6}(\Omega))^3 \right) \text{-fraco.}$$

Agora, comparando com (iv), temos

$$\chi_1 = \rho \mathbf{u}.$$

Utilizando o mesmo Lema, juntamente com (i) e (ii), podemos concluir que

$$\rho^m \mathbf{w}^m \rightarrow \rho \mathbf{w} \in L^2 \left(0, T; (W^{-1,6}(\Omega))^3 \right) \text{-fraco.}$$

Comparando com (v), temos que

$$\chi_2 = \rho \mathbf{w}.$$

Temos

$$\rho^m \mathbf{u}^m \rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ em } L^2 \left(0, T; (W^{-1, \infty}(\Omega))^3 \right) \text{-fraco}$$

e

$$\mathbf{u}^m \rightarrow \mathbf{u} \text{ em } L^2(0, T; V) \text{-fraco.}$$

O Lema 1.4.2, parte (iii), nos permite concluir que

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \rightarrow \rho \mathbf{u} \mathbf{u}, \text{ em } L^2 \left(0, T; (W^{-1, 6}(\Omega))^9 \right) \text{-fraco.}$$

Por outro lado,

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \rightarrow \chi_3 \text{ em } L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (L^2(\Omega))^9 \right) \hookrightarrow L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (W^{-1, 6}(\Omega))^9 \right) \text{-fraco.}$$

Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e $L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \rightarrow \chi_3 \text{ em } L^1 \left(0, T; (W^{-1, 6}(\Omega))^9 \right) \text{-fraco}$$

e

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \rightarrow \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \text{ em } L^1 \left(0, T; (W^{-1, 6}(\Omega))^9 \right) \text{-fraco.}$$

Daí,

$$\chi_3 = \rho \mathbf{u} \mathbf{u}.$$

Usando esse mesmo tipo de argumento, podemos provar que

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m \rightarrow \rho \mathbf{u} \mathbf{w}, \text{ em } L^2 \left(0, T; (W^{-1, 6}(\Omega))^9 \right) \text{-fraco}$$

e que

$$\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m \rightarrow \chi_4 \text{ em } L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (W^{-1, 6}(\Omega))^9 \right) \text{-fraco.}$$

Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e $L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que

$$\chi_4 = \rho \mathbf{u} \mathbf{w}.$$

Equação de $\mathbf{u}$

Vamos agora passar o limite na forma conservativa da equação (2.2.1), ou seja,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m) - \rho^m \mathbf{f}^m \right) \cdot \mathbf{v} + (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{v} \, dx = 0,$$

que ainda pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} - \rho^m \mathbf{f}^m \right) \cdot \mathbf{v} + ((\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m - \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m) \cdot \nabla \mathbf{v} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{v} \, dx = 0, \quad (2.2.46)$$

para todo $\mathbf{v} \in V^m$, sendo esta igualdade vista em $C([0, T])$. Em particular, ela também vale em $\mathcal{D}'(0, T)$. Nosso objetivo será atingido da seguinte forma:

1. Para m' e $\mathbf{v} \in V^{m'}$ fixados, raciocinando com $m \geq m'$ obteremos a convergência de cada parcela da igualdade anterior, num sentido que será precisado.
2. Mediante um raciocínio de densidade, deduziremos que a igualdade se verifica para todo $\mathbf{v} \in V$.

Em primeiro lugar, vamos obter alguns fatos acerca das convergências das parcelas de (2.2.46) e do sentido em que essas convergências se dão. Inicialmente, temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, dx \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle_{H^{-1}} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \text{ para cada } \mathbf{v} \in V^{m'}.$$

Primeiramente, vamos mostrar que

$$\rho^m \mathbf{u}^m \rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3). \quad (2.2.47)$$

De fato, a terceira convergência de (iv) acarreta que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m(t) g(t) \, dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}(t) g(t) \, dx dt, \quad (2.2.48)$$

para todo $\mathbf{g} \in L^1 \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right)$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \rho^m \mathbf{u}^m \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \rho \mathbf{u} \varphi(t) dt, \text{ em } H^{-1}(\Omega)^3,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$. Mas isso é equivalente a mostrar que

$$\left\langle \int_0^T \rho^m \mathbf{u}^m(t), \mathbf{g}(x) \right\rangle \rightarrow \left\langle \int_0^T \rho \mathbf{u}(t), \mathbf{g}(x) \right\rangle,$$

para todo $\mathbf{g} \in H_0^1(\Omega)^3$. Tomando então $\mathbf{g} \in H_0^1(\Omega)^3$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_0^T \rho^m \mathbf{u}^m \varphi(t) \cdot \mathbf{g}(x) \right) dt - \left(\int_0^T \rho \mathbf{u} \varphi(t) \cdot \mathbf{g}(x) \right) dt \right| \\ = \left| \int_0^T \int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m - \rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{g}(x) \varphi(t) \right|. \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

Como $\mathbf{g}(x) \varphi(t) \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega)^3)$, segue que o último termo converge para zero, graças à convergência (2.2.48), provando assim que vale a convergência (2.2.47). Daí temos

$$\frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3),$$

ou seja, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$, temos que

$$\left\langle \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t}, \varphi \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle \text{ em } H^{-1}(\Omega)^3.$$

Em particular, para cada $\mathbf{v} \in V^{m'}$, temos

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \mathbf{v} \right\rangle_{H^{-1}} \rightarrow \left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \mathbf{v} \right\rangle_{H^{-1}}.$$

Pela regularidade que as soluções aproximadas possuem, temos

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \mathbf{v} \right\rangle_{H^{-1}} = \int_{\Omega} \left(\int_0^T \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \varphi dt \right) \cdot \mathbf{v} dx = \int_0^T \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{v} dx \right) \varphi dt.$$

Agora, usando a notação do Lema 1.4.1, temos

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \mathbf{v} \right\rangle_{H^{-1}} = \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle_{H^{-1}} (\varphi).$$

O que acarreta

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m \mathbf{u}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{v} dx \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle_{H^{-1}},$$

em $\mathcal{D}'(0, T)$, como queríamos.

Agora vamos mostrar que

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \text{ em } L^1(0, T)\text{-fraco para todo } \mathbf{v} \in V^{m'}. \quad (2.2.50)$$

Com efeito, devemos mostrar que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} g dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} g dx dt,$$

para todo $g \in L^\infty(0, T)$. Como $\mathbf{f}^m \rightarrow \mathbf{f}$ de maneira forte em $L^1\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$, temos que $\mathbf{f}^m \rightarrow \mathbf{f}$ fracamente em $L^1\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$. Isso significa que

$$\int_0^T \varphi(t) \cdot \mathbf{f}^m(t) dt \rightarrow \int_0^T \varphi(t) \cdot \mathbf{f}(t) dt, \quad (2.2.51)$$

para todo $\varphi \in L^\infty\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$. A segunda convergência de (i) acarreta que

$$\int_0^T \rho^m(t) g(t) dt \rightarrow \int_0^T \rho(t) g(t) dt, \quad (2.2.52)$$

para todo $g \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot g \mathbf{v} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot g \mathbf{v} dx dt \right| &\leq \left| \int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot g \mathbf{v} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f} \cdot g \mathbf{v} dx dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f} \cdot g \mathbf{v} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot g \mathbf{v} dx dt \right| \\ &= \left| \int_0^T \int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{f}^m - \mathbf{f}) \cdot g \mathbf{v} dx dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^T \int_{\Omega} (\rho^m - \rho) \mathbf{f} \cdot g \mathbf{v} dx dt \right| \end{aligned}$$

Agora note que, por um lado

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{f}^m - \mathbf{f}) \cdot g \mathbf{v} \right| \leq \|\rho^m\|_{L^\infty} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{f}^m - \mathbf{f}) \cdot g \mathbf{v} dx dt.$$

Como $g \in L^\infty(0, T)$ e $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$, segue que $g \mathbf{v} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ e esta parcela converge para zero por (2.2.51). Por outro lado, $\mathbf{f} \cdot g \mathbf{v} \in L^1(0, T; L^1(\Omega)^3)$, o que acarreta que a segunda parcela também converge para zero, por (2.2.52), o que conclui a prova de nossa afirmação. Mostraremos agora que

$$\int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m) \cdot \nabla \mathbf{v} dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx \equiv -\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}}, \text{ em } L^{\frac{4}{3}}(0, T)\text{-fraco,} \quad (2.2.53)$$

para todo $\mathbf{v} \in V^{m'}$. Com efeito, a convergência (vi) implica que

$$\int_0^T \int_{\Omega} g \cdot \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} g \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u},$$

para todo $g \in L^4(0, T; L^2(\Omega)^9)$. O que queremos mostrar é que, para toda $\varphi \in L^4(0, T)$ e todo $\mathbf{v} \in V^{m'}$, vale

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v} dx \right) \cdot \varphi dt \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx \right) \cdot \varphi dt.$$

Mas,

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v} dx \right) \cdot \varphi dt = \int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{u}^m \cdot (\varphi \nabla \mathbf{v}) dx dt,$$

bem como

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) dx \cdot \varphi dt = \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot (\varphi \nabla \mathbf{v}) dx dt.$$

Ademais, $\varphi \nabla \mathbf{v} \in L^4(0, T; L^2(\Omega)^9)$ e, portanto, concluímos a prova. Provaremos agora que

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v} dx &\rightarrow (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v} dx \\ &\equiv -(\mu + \mu_r) \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}}, \text{ em } L^2(0, T)\text{-fraco, (2.2.54)} \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in V^{m'}$. Com efeito, a convergência (ii) acarreta

$$\int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}^m \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \rangle dt,$$

para todo $\mathbf{g} \in L^2(0, T; V')$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v} dx \right) \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx \right) \varphi(t) dt,$$

para todo $\varphi \in L^2(0, T)$ e todo $\mathbf{v} \in V^{m'}$. Como $\mathbf{v} \in V^{m'} \hookrightarrow V \hookrightarrow H_0^1(\Omega)^3$, segue que $\Delta \mathbf{v} \in H^{-1}(\Omega)^3 \hookrightarrow V'$. Portanto, $\varphi(t) \Delta \mathbf{v} \in L^2(0, T; V')$. Daí,

$$\int_0^T \langle \varphi(t) \Delta \mathbf{v}, \mathbf{u}^m \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \varphi(t) \Delta \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle dt.$$

Usando a notação do Lema 1.4.1, a última convergência nos diz que

$$\langle \Delta \mathbf{v}, \mathbf{u}^m \rangle \rightarrow \langle \Delta \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \text{ fraco em } L^2(0, T).$$

Mas, pela regularidade das soluções aproximadas, temos que

$$\langle \Delta \mathbf{v}, \mathbf{u}^m \rangle = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^m dx = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}^m dx.$$

Adotando uma notação semelhante para $\langle \Delta \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{H^{-1}}$, podemos escrever

$$\langle \Delta \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{H^{-1}} = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx = \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}},$$

o que prova a afirmação. Vamos mostrar agora que

$$2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{v} dx \rightarrow 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dx, \text{ em } L^2(0, T) \text{-fraco,} \quad (2.2.55)$$

para todo $\mathbf{v} \in V^{m'}$. Com efeito, a convergência (iii) acarreta

$$\int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}^m \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle dt, \quad (2.2.56)$$

para todo $g \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{v} dx \right) \varphi dt \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dx \right) \varphi dt,$$

para todo $\varphi \in L^2(0, T)$ e todo $\mathbf{v} \in V^{m'}$. Como $\mathbf{v} \in V^{m'} \hookrightarrow V \hookrightarrow H_0^1(\Omega)^3$, temos que $\operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)^3$. Logo $\varphi \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ e, pela convergência (2.2.56), temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi(t) \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^m dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \varphi(t) \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx dt.$$

Após uma integração por partes, essa convergência toma o aspecto

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{v} dx \right) \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dx \right) \varphi(t) dt,$$

que é a convergência desejada.

Com os fatos acima estamos habilitados a passar o limite na equação (2.2.46). Tendo em conta que todas as convergências anteriores se verificam, em particular, em $\mathcal{D}'(0, T)$, fazendo $m \rightarrow +\infty$, temos que

$$\left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f}, \mathbf{v} \right\rangle = 0, \quad (2.2.57)$$

para todo $\mathbf{v} \in V^{m'}$. Por densidade, essa igualdade vale para todo $\mathbf{v} \in V$, e, conseqüentemente, para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Agora note que

1. $\rho \mathbf{u} \in L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right) \Rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \in W^{-1, \infty} \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right),$
2. $\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \in L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (L^2(\Omega))^9 \right) \Rightarrow \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \in L^{\frac{4}{3}} \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right),$
3. $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \Rightarrow \Delta \mathbf{u} \in L^2 \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right),$
4. $\rho \mathbf{f} \in L^1 \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right) \hookrightarrow L^1 \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right),$
5. $\mathbf{w} \in L^2 \left(0, T; (H_0^1(\Omega))^3 \right) \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{w} \in L^2 \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right).$

Como

$$L^p \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right) \hookrightarrow W^{-1, \infty} \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right),$$

para cada $p \in [1, +\infty)$, segue que

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} \in W^{-1, \infty} \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right).$$

Usando o Lema 1.4.1, com $s = 1, p = +\infty$, concluimos que existe $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} \text{ em } W^{-1, \infty} \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right).$$

Equação de $\mathbf{w}$

Vamos agora passar o limite na forma conservativa da equação (2.2.2), ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m) - \rho^m \mathbf{g}^m \right) \cdot \mathbf{z} &+ (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m \cdot \nabla \mathbf{z} dx \\ &+ \int_{\Omega} (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{div} \mathbf{w}^m \cdot \operatorname{div} \mathbf{z} \\ &- 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{z} dx = 0, \end{aligned}$$

que ainda pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t} - \rho^m \mathbf{g}^m \right) \cdot \mathbf{z} + ((c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m - \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m) \cdot \nabla \mathbf{z} \\ + (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{div} \mathbf{w}^m \cdot \operatorname{div} \mathbf{z} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{z} \, dx = 0, \end{aligned} \quad (2.2.58)$$

para todo $\mathbf{z} \in W^m$, sendo esta igualdade vista em $C([0, T])$. Em particular, ela também vale em $\mathcal{D}'(0, T)$. De forma análoga ao caso da equação de $\mathbf{u}$, faremos isso através de um raciocínio de densidade. Como algumas passagens são semelhantes, em certos pontos seremos bastante concisos. O processo de passagem ao limite baseia-se nos seguintes passos:

1. Para m' e $\mathbf{z} \in W^{m'}$ fixados, e com $m \geq m'$ obteremos a convergência de cada parcela da igualdade anterior, num sentido que será tornado preciso,
2. Mediante um raciocínio de densidade, deduziremos que a igualdade se verifica para todo $v \in L^2$.

Começamos obtendo alguns fatos acerca das convergências das parcelas de (2.2.58) e do sentido em que essas convergências se dão. Inicialmente temos a convergência

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{z} \, dx \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{z} \right\rangle_{H^{-1}} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T), \quad (2.2.59)$$

para cada $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Para prová-la, vamos mostrar primeiramente que

$$\rho^m \mathbf{w}^m \rightarrow \rho \mathbf{w} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}). \quad (2.2.60)$$

De fato, a segunda convergência de (v) acarreta que

$$\int_0^T \langle \rho^m \mathbf{w}^m(t), \mathbf{g}(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \rho \mathbf{w}(t), \mathbf{g}(t) \rangle dt, \quad (2.2.61)$$

para todo $\mathbf{g} \in L^1(0, T; (L^2(\Omega))^3)$. Como consequência dessa convergência, temos

$$\frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3),$$

ou seja, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$, temos que

$$\left\langle \frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t}, \varphi \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Em particular, para cada $\mathbf{z} \in W^{m'}$, temos

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \mathbf{z} \right\rangle_{H^{-1}} \rightarrow \left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \mathbf{z} \right\rangle_{H^{-1}}.$$

A regularidade que as soluções aproximadas possuem juntamente com a notação do Lema 1.4.1 nos permitem escrever

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho^m \mathbf{w}^m}{\partial t} \cdot \mathbf{z} dx \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{z} \right\rangle_{H^{-1}}, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T),$$

como queríamos. Agora, temos

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{z} dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{z} dx \text{ em } L^1(0, T)\text{-fraco}, \quad (2.2.62)$$

para todo $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Com efeito, a convergência forte de $\mathbf{g}^m$ para $\mathbf{g}$ em $L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$ e a segunda convergência de (i) acarretam que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{z} h dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{z} h dx dt, \forall h \in L^\infty(0, T).$$

Mas essa convergência é justamente o que se quer provar. Agora provaremos que

$$\int_{\Omega} (\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m) \cdot \nabla \mathbf{z} dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z} dx \equiv -\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{w}), \mathbf{z} \rangle_{H^{-1}} \text{ em } L^{\frac{4}{3}}(0, T)\text{-fraco}, \quad (2.2.63)$$

para todo $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Com efeito, a convergência (vii) implica que

$$\int_0^T \int_{\Omega} h \cdot \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} h \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{w} dx dt,$$

para todo $h \in L^4(0, T; L^2(\Omega)^9)$. Mas,

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m \cdot \nabla \mathbf{z} dx \right) \cdot \varphi dt = \int_0^T \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m \cdot (\varphi \nabla \mathbf{z}) dx dt,$$

bem como

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z} dx \right) \cdot \varphi dt = \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \cdot (\varphi \nabla \mathbf{z}) dx dt.$$

Ademais, $\varphi \nabla \mathbf{z} \in L^4(0, T; L^2(\Omega)^9)$. Portanto, está demonstrada a afirmação. Provaremos agora que

$$\begin{aligned} (c_a + c_d) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^m \cdot \nabla \mathbf{z} dx &\rightarrow (c_a + c_d) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^m \cdot \nabla \mathbf{z} dx \\ &\equiv -(c_a + c_d) \langle \Delta \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle_{H^{-1}} \text{ em } L^2(0, T)\text{-fraco,} \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Com efeito, a convergência (iii) implica que

$$\int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}^m \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle dt, \quad (2.2.64)$$

para todo $\mathbf{g} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. Sejam $\varphi \in L^2(0, T)$ e $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Como $W^{m'} \hookrightarrow H_0^1(\Omega)^3$, segue que $\Delta \mathbf{z} \in H^{-1}(\Omega)^3$. Portanto, $\varphi \Delta \mathbf{z} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. A convergência (2.2.64), reescrita usando a notação do Lema 1.4.1, nos diz que

$$\langle \Delta \mathbf{z}, \mathbf{w}^m \rangle \rightarrow \langle \Delta \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle \text{ fraco em } L^2(0, T).$$

Mas, pela regularidade das soluções aproximadas, temos que

$$\langle \Delta \mathbf{z}, \mathbf{w}^m \rangle_{H^{-1}} = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}^m dx = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{w}^m dx.$$

Adotando uma notação semelhante para $\langle \Delta \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_{H^{-1}}$, podemos escrever

$$\langle \Delta \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle_{H^{-1}} = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} dx = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z} dx = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx = \langle \Delta \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle_{H^{-1}},$$

o que prova nossa afirmação. Agora, mostraremos que

$$2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{z} dx \rightarrow 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} dx \text{ em } L^2(0, T) \text{-fraco,} \quad (2.2.65)$$

para todo $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Com efeito, a convergência (ii) acarreta

$$\int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{u}^m \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \rangle dt, \quad (2.2.66)$$

para todo $\mathbf{g} \in L^2(0, T; V'(\Omega)^3)$. Sejam $\varphi \in L^2(0, T)$ e $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Como $\mathbf{z} \in W^{m'} \hookrightarrow H_0^1(\Omega)^3$, temos que $\operatorname{rot} \mathbf{z} \in H^{-1}(\Omega)^3 \hookrightarrow V'$. Logo $\varphi \operatorname{rot} \mathbf{z} \in L^2(0, T; V')$ e, pela convergência (2.2.66), temos

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{z} dx \right) \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} dx \right) \varphi(t) dt,$$

que é a convergência desejada. Agora, mostraremos que

$$4\mu_r \int_{\Omega} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z} dx \rightarrow 4\mu_r \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx \text{ em } L^2(0, T) \text{-fraco,} \quad (2.2.67)$$

para todo $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Com efeito, a convergência (iii) acarreta

$$\int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{w}^m \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle dt, \quad (2.2.68)$$

para todo $\mathbf{g} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z} dx \right) \varphi dt \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx \right) \varphi dt,$$

para todo $\varphi \in L^2(0, T)$ e todo $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Como $\mathbf{z} \in W^{m'} \hookrightarrow H_0^1(\Omega)^3 \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)^3$, segue que $\varphi \mathbf{z} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. Em virtude da convergência (2.2.68), temos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi(t) \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}^m dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \varphi(t) \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} dx dt,$$

que é a convergência desejada. Agora, provaremos que

$$(c_0 + c_a + c_d) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w}^m \cdot \operatorname{div} \mathbf{z} dx \rightarrow (c_0 + c_a + c_d) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z} dx \text{ em } L^2(0, T)\text{-fraco,} \quad (2.2.69)$$

para todo $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Com efeito, usamos um argumento semelhante aos anteriores, uma vez que $\mathbf{z} \in W^{m'}$ acarreta $\operatorname{div} \mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3$, donde $\nabla(\operatorname{div} \mathbf{z}) \in H^{-1}(\Omega)^3$. Dispondo dos fatos acima podemos passar o limite na equação (2.2.58). Tendo em conta que todas as convergências anteriores se verificam, em particular, em $\mathcal{D}'(0, T)$, temos, fazendo $m \rightarrow +\infty$, que

$$\left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{w}) - (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u} - \rho \mathbf{g}, \mathbf{z} \right\rangle = 0, \quad (2.2.70)$$

para todo $\mathbf{z} \in W^{m'}$. Por densidade, essa igualdade vale para todo $\mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3$. Agora note que

1. $\rho \mathbf{w} \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \Rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} \in W^{-1, \infty}(0, T; (L^2(\Omega))^3)$.
2. $\rho \mathbf{u} \mathbf{w} \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; (L^2(\Omega))^9) \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{w}) \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$.
3. $\mathbf{w} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3) \Rightarrow \Delta \mathbf{w} \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$.
4. $\rho \mathbf{g} \in L^1(0, T; (L^2(\Omega))^3) \hookrightarrow L^1(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$.
5. $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{u} \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$.
6. $\mathbf{w} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \Rightarrow \nabla(\operatorname{div} \mathbf{w}) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$.

Como

$$L^p \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right) \hookrightarrow W^{-1,\infty} \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right),$$

para cada $p \in [1, +\infty)$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{w}) - (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} &= \rho \mathbf{g} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u} + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} \\ &= 0 \text{ em } W^{-1,\infty} \left(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3 \right). \end{aligned} \quad (2.2.71)$$

Equação do Transporte

Vamos agora passar o limite na equação

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{u}^m) = 0.$$

Observemos que a convergência (i) implica que $\rho^m \rightarrow \rho$ em $\mathcal{D}'(Q)$, e, portanto,

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

A convergência (iv) acarreta que $\operatorname{div}(\rho^m \mathbf{u}^m) \rightarrow \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Fazendo $m \rightarrow +\infty$, temos a igualdade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

válida em $\mathcal{D}'(Q)$. Ademais, pela regularidade obtida para ρ e $\rho \mathbf{u}$, temos também que a igualdade é válida em

$$W^{-1,\infty}(0, T; L^\infty) \cap L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega)),$$

pois $\rho \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ implica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \in W^{-1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega)),$$

enquanto $\rho \mathbf{u} \in L^2 \left(0, T; (L^6(\Omega))^3 \right) \cap L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right)$ implica

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \in L^2 \left(0, T; W^{-1,6}(\Omega) \right) \cap L^\infty \left(0, T; H^{-1}(\Omega) \right).$$

2.2.8 Condições Iniciais

Verificaremos agora as condições iniciais sobre as soluções ρ , $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$. Começemos por ρ . A primeira convergência de (i) acarreta que

$$\rho^m(0) \rightarrow \rho(0) \text{ em } W^{-1,\infty}(\Omega).$$

As condições iniciais impostas sobre ρ^m , isto é, $\rho^m(0) = \rho_0^m$ bem como a convergência $\rho_0^m \rightarrow \rho_0$, fraco- $\star$ em $L^\infty(\Omega)$, acarretam $\rho(0) = \rho_0$, pelo menos em $W^{-1,\infty}(\Omega)$. Passemos agora a $\mathbf{u}$. Vamos provar que

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} dx,$$

para todo $\mathbf{v} \in V$. Seja $\mathbf{v} \in V$ e considere $\mathbf{v}^m \in V^m$ tal que $\mathbf{v}^m \rightarrow \mathbf{v} \in V$. Temos

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m dx \leq \|\rho^m \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\mathbf{v}^m\|_{L^2} = \|\rho^m \mathbf{u}^m\|_{L^2}.$$

Como $\rho^m \mathbf{u}^m$ é limitada em $L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right)$, concluímos que

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m dx$$

é limitada em $L^\infty(0, T)$. A convergência no sentido forte de $\mathbf{f}^m$ para $\mathbf{f}$ em $L^1 \left(0, T; (L^2(\Omega))^3 \right)$ acarreta que $\|\mathbf{f}^m\|_{L^2} \rightarrow \|\mathbf{f}\|_{L^2}$ em $L^1(0, T)$. Pelo Lema 1.3.1, existe $k \in L^1(0, T)$, que independe de m , tal que

$$\|\mathbf{f}^m\|_{L^2} \leq k, \text{ q.t.p. em } (0, T).$$

Agora, levando em conta que $\|\nabla \mathbf{v}^m\|_{L^2}$ é limitada, temos, pela estimativa (2.2.30), que

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m dx \right| \leq r_m \|\nabla \mathbf{v}^m\|_{L^2} \leq C (bk + \psi_m),$$

onde $\psi_m = (\|\rho^m \mathbf{u}^m - (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} + \|\gamma 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}^m\|_{L^2})$ é limitada em $L^{\frac{4}{3}}(0, T)$. Logo, pelo Lema 1.2.1, parte (iv.b), temos que $\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m dx$ pertence a um compacto de $C[0, T]$. Por outro lado, temos

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx,$$

em $L^{\infty}(0, T)$ fraco- $\star$, como decorrência das convergências (iv) e de $\mathbf{v}^m$ para $\mathbf{v}$ em V . Logo, a convergência anterior também se dá em $C[0, T]$ no sentido forte, o que acarreta $\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \in C[0, T]$. Particularizando em $t = 0$, teremos

$$\left(\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v}^m \right) (0) \rightarrow \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx) (0).$$

As condições iniciais impostas a ρ^m e $\mathbf{u}^m$ nos permitem escrever a convergência anterior como

$$\int_{\Omega} \rho^m(0) \mathbf{u}^m(0) \cdot \mathbf{v}^m dx = \int_{\Omega} \rho_0^m \mathbf{u}_0^m \cdot \mathbf{v}^m dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} dx,$$

ou seja,

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v},$$

como queríamos. Passemos agora a $\mathbf{w}$. Vamos provar que

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z} dx,$$

para todo $\mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3$. Seja $\mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3$ e considere $\mathbf{z}^m \in W^m$ tal que $\mathbf{z}^m \rightarrow \mathbf{z} \in L^2(\Omega)^3$.

Temos

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z}^m dx \leq \|\rho^m \mathbf{w}^m\|_{L^2} \|\mathbf{z}^m\|_{L^2} = \|\rho^m \mathbf{w}^m\|_{L^2}.$$

Como $\rho^m \mathbf{w}^m$ é limitada em $L^\infty \left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$, concluímos que

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z}^m dx$$

é limitada em $L^\infty(0, T)$. A convergência no sentido forte de $\mathbf{g}^m$ para $\mathbf{g}$ em $L^1 \left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$ acarreta que $\|\mathbf{g}^m\|_{L^2(\Omega)^3} \rightarrow \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega)^3}$ em $L^1(0, T)$. Pelo Lema 1.3.1, existe $l \in L^1(0, T)$, independente de m , tal que

$$\|\mathbf{g}^m\|_{L^2(\Omega)^3} \leq l, q.t.p. \text{ em } (0, T).$$

Agora, levando em conta que $\|\nabla \mathbf{z}^m\|_{L^2}$ é limitada, temos, pela estimativa (2.2.31), que

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z}^m dx \right| \leq l_m \|\nabla \mathbf{z}^m\|_{L^2} \leq C(b_l + \xi_m),$$

onde

$$\xi_m = (\|\rho^m \mathbf{u}^m \mathbf{w}^m - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2} + \|\gamma 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^m + 4\mu_r \mathbf{w}^m\|_{L^2})$$

é limitada em $L^{\frac{4}{3}}(0, T)$. Logo, pelo Lema 1.2.1, parte (ii), temos que $\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z}^m dx$ pertence a um compacto de $C[0, T]$. Por outro lado,

$$\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z}^m dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx,$$

em $L^\infty(0, T)$ fraco- $\star$, como decorrência das convergências (v) e de $\mathbf{z}^m$ para $\mathbf{z}$ em $L^2(\Omega)^3$. Logo, a convergência anterior também se dá em $C[0, T]$ no sentido forte, o que acarreta $\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx \in C[0, T]$. Particularizando em $t = 0$, teremos

$$\left(\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{z}^m dx \right) (0) \rightarrow \int_{\Omega} (\rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx) (0).$$

As condições iniciais impostas a ρ^m e $\mathbf{w}^m$ nos permitem escrever a convergência anterior como

$$\int_{\Omega} \rho^m(0) \mathbf{w}^m(0) \cdot \mathbf{z}^m dx = \int_{\Omega} \rho_0^m \mathbf{w}_0^m \cdot \mathbf{z}^m dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z} dx,$$

ou seja,

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z} dx,$$

como queríamos.

Capítulo 3

Existência de solução em domínios limitados - mais resultados

O Teorema 2.1.1 garante a existência de uma solução fraca, global no tempo, para o sistema de fluidos assimétricos proposto na introdução. Nesse resultado, as condições iniciais são satisfeitas em um sentido fraco. O objetivo do presente capítulo é provar a existência de uma solução fraca que satisfaça as condições iniciais em um sentido mais forte que aquele obtido anteriormente. Provaremos três resultados. No primeiro, o Teorema 3.1.1, são utilizadas fortemente hipóteses sobre a continuidade das soluções $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ na variável t . O que se obtém são condições iniciais satisfeitas em um sentido mais forte. No segundo resultado, o Teorema 3.2.1, faz-se um relaxamento sobre as hipóteses dos dados iniciais e, através de estimativas adicionais, obtém-se as condições iniciais satisfeitas, outra vez, num sentido mais forte. Uma outra diferença entre o Teorema 2.1.1 e o Teorema 3.2.1 diz respeito ao fato de que este é local no tempo, enquanto que aquele é global. Finalmente no último resultado dessa seção, que é o Teorema 3.3.1, fazemos uma hipótese sobre o tamanho dos dados iniciais e provamos que a solução obtida no Teorema 3.2.1 é global no tempo.

3.1 Primeiro resultado

O primeiro resultado nessa direção é:

Teorema 3.1.1. *Seja $\{\rho, p, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ uma solução fornecida pelo Teorema 2.1.1.*

(i) *Se existe um espaço de Banach X tal que $(L^2(\Omega))^3 \hookrightarrow X$ e $\rho \mathbf{u} \in C([0, T]; X)$, então*

1. $(\rho \mathbf{u})(t) \in (L^2(\Omega))^3, \forall t \in [0, T]$.
2. $\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u})(0) - \rho_0 \mathbf{u}_0] \cdot \mathbf{v} dx = 0, \forall \mathbf{v} \in H$.
3. *Existe $\lambda \in H^1(\Omega)$ tal que $(\rho \mathbf{u})(0) = \rho_0 \mathbf{u}_0 + \nabla \lambda$ em $(L^2(\Omega))^3$.*

(ii) *Se $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$, então*

$$\rho \mathbf{u} \in C([0, T]; (H^{-1}(\Omega))^3) \text{ e } (\rho \mathbf{u})(0) = \rho(0) \mathbf{u}(0) = \rho_0 \mathbf{u}_0 \text{ em } \Omega.$$

Se, ademais, $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$, então $\rho \mathbf{u} \in C([0, T]; (W^{-1, \infty}(\Omega))^3)$.

(iii) *Se $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$ e $\rho_0 > 0$, q.t.p. em Ω , então $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ em Ω .*

(iv) *Se existe um espaço de Banach X tal que $(L^2(\Omega))^3 \hookrightarrow X$ e $\rho \mathbf{w} \in C([0, T]; X)$, então*

1. $(\rho \mathbf{w})(t) \in (L^2(\Omega))^3, \forall t \in [0, T]$.
2. $\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{w})(0) - \rho_0 \mathbf{w}_0] \cdot \mathbf{v} dx = 0, \forall \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3$.
3. *Existe $\lambda \in H^1(\Omega)$ tal que $(\rho \mathbf{w})(0) = \rho_0 \mathbf{w}_0 + \nabla \lambda$ em $(L^2(\Omega))^3$.*

(v) *Se $\mathbf{w} \in C([0, T]; (L^2(\Omega))^3)$, então*

$$\rho \mathbf{w} \in C([0, T]; (H^{-1}(\Omega))^3) \text{ e } (\rho \mathbf{w})(0) = \rho(0) \mathbf{w}(0) = \rho_0 \mathbf{w}_0 \text{ em } \Omega.$$

Se, ademais, $\mathbf{w} \in C([0, T]; (H_0^1(\Omega))^3)$, então $\rho \mathbf{w} \in C([0, T]; (W^{-1, \infty}(\Omega))^3)$.

(vi) *Se $\mathbf{w} \in C([0, T]; H)$ e $\rho_0 > 0$, q.t.p. em Ω , então $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$ em Ω .*

Demonstração:

(i) (1) Por hipótese e pelo Teorema 2.1.1, temos que

$$\rho \mathbf{u} \in C([0, T]; X) \cap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2).$$

Pelo Lema 1.3.2, podemos concluir que $\rho \mathbf{u}$ é contínua de $[0, T]$ em $(L^2(\Omega))^3$, no sentido fraco. Então $(\rho \mathbf{u})(t) \in (L^2(\Omega))^2, \forall t \in [0, T]$. Em particular, para $t = 0$, temos

$$(\rho \mathbf{u})(t) \rightarrow (\rho \mathbf{u})(0) \text{ em } (L^2(\Omega))^3 \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

e a prova está concluída.

(2) Agora, observamos que

$$\int_{\Omega} (\rho \mathbf{u})(0) \cdot \mathbf{v} dx = \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) (0) dx = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} dx, \forall \mathbf{v} \in V,$$

donde podemos concluir

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u})(0) - \rho_0 \mathbf{u}_0] \cdot \mathbf{v} dx = 0, \forall \mathbf{v} \in V.$$

Por densidade, a igualdade acima se verifica para todo $\mathbf{v} \in H$.

(3) Usando o Lema 1.4.1, podemos garantir que existe $\lambda \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(\rho \mathbf{u})(0) - \rho_0 \mathbf{u}_0 = \nabla \lambda.$$

Como $(\rho \mathbf{u})(0)$ e $\rho_0 \mathbf{u}_0 \in (L^2(\Omega))^3$, segue que $\lambda \in H^1(\Omega)$.

(ii) Como, por hipótese, $\mathbf{u} \in C([0, T]; H)$, segue que $\mathbf{u}(0) \in H$ e também

$$\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}(0), \text{ em } H, \quad (3.1.1)$$

quando $t \rightarrow 0^+$. O Teorema 2.1.1 implica que $\rho \in C([0, T]; W^{-1, \infty}(\Omega))$ e que $\rho(0) = \rho_0$. Portanto, $\rho(t) \rightarrow \rho_0$ em $W^{-1, \infty}(\Omega)$ no sentido forte. Também pelo Teorema 2.1.1, temos que $\rho \in L^\infty(Q)$ e, portanto, $\|\rho(t)\|_{L^\infty}$ é limitada *q.t.p.* em $(0, T)$.

Como $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow W^{-1, \infty}(\Omega)$, segue que ρ é contínua de $[0, T]$ em $L^\infty(\Omega)$ no sentido

fraco, isto é:

$$\langle \eta, \rho(t) \rangle \rightarrow \langle \eta, \rho_0 \rangle,$$

para todo $\eta \in (L^\infty(\Omega))'$. Dado $g \in L^1(\Omega)$, consideramos o funcional $\phi_g : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $\phi_g(h) = \int_\Omega g \cdot h dx$. Daí

$$\int_\Omega g \cdot \rho(t) dx \rightarrow \int_\Omega g \cdot \rho_0 dx.$$

Logo, temos

$$\rho(t) \rightarrow \rho_0, \text{ em } L^\infty(\Omega) \text{ fraco-}\star, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \quad (3.1.2)$$

Observamos agora que, dado $g \in L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \|\rho(t) \mathbf{u}(t) g - \rho_0 \mathbf{u}(0) g\|_{L^1} &= \|\rho(t) \mathbf{u}(t) g - \rho(t) \mathbf{u}(0) g + \rho(t) \mathbf{u}(0) g - \rho_0 \mathbf{u}(0) g\|_{L^1} \\ &\leq \|(\rho(t) - \rho(0)) \mathbf{u}(0) g\|_{L^1} + \|(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)) \rho(t) g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

e por (3.1.2)

$$\|(\rho(t) - \rho(0)) \mathbf{u}(0) g\|_{L^1} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Além disso

$$\|(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)) \rho(t) g\|_{L^1} \leq \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)\|_{L^2} \|\rho(t)\|_{L^\infty} \|g\|_{L^2}.$$

Mas $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)\|_{L^2} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, por (3.1.1), donde podemos concluir que

$$\rho(t) \mathbf{u}(t) \rightarrow \rho_0 \mathbf{u}(0) \text{ em } (L^2(\Omega))^3 \text{ fraco.} \quad (3.1.3)$$

Como a imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ é compacta, temos que

$$\rho(t) \mathbf{u}(t) \rightarrow \rho_0 \mathbf{u}(0) \text{ em } (H^{-1}(\Omega))^3 \text{ forte.} \quad (3.1.4)$$

Procedendo de forma semelhante ao que foi feito anteriormente para qualquer ins-

tante $t \in [0, T]$, concluímos que

$$\rho \mathbf{u} \in C\left([0, T]; (H^{-1}(\Omega))^3\right),$$

o que prova a primeira afirmação. Suponhamos agora que $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$. O mesmo argumento usado na prova de (3.1.3) se aplica para mostrarmos que aquela convergência se dá também em $(L^6(\Omega))^3$ no sentido fraco. Como a imersão $L^6(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,\infty}(\Omega)$ é compacta, concluímos que

$$\rho \mathbf{u} \in C\left([0, T]; (W^{-1,\infty}(\Omega))^3\right),$$

o que mostra a segunda afirmação. Com isso, estamos nas condições da parte (i), com $X = (H^{-1}(\Omega))^3$. Como

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{u})(0) - \rho_0 \mathbf{u}_0] \cdot \mathbf{v} dx = 0, \forall \mathbf{v} \in H,$$

e $\rho(0) \mathbf{u}(0) = \rho_0 \mathbf{u}(0)$, segue que

$$\int_{\Omega} [\rho_0 \mathbf{u}(0) - \rho_0 \mathbf{u}_0] \cdot \mathbf{v} dx = 0, \forall \mathbf{v} \in H.$$

Agora, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0 \in H$, chegamos a $\int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0|^2 dx = 0$. Como $\rho_0 \geq 0$, segue que

$$\rho_0 |\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0|^2 = 0, q.t.p. \text{ em } \Omega$$

o que implica $\rho_0 \mathbf{u}(0) = \rho_0 \mathbf{u}_0$, $q.t.p.$ em Ω . Combinando as igualdades anteriores, ficamos com

$$(\rho \mathbf{u})(0) = \rho(0) \mathbf{u}(0) = \rho_0 \mathbf{u}_0, q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

finalizando assim a prova da última afirmação.

(iii) Como $\rho_0 > 0$ $q.t.p.$ em Ω , estamos nas condições da parte (ii) e, portanto, teremos

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

(iv) A demonstração segue os mesmos passos da prova da parte (i) e por isso omitiremos certas passagens.

(1) Pelo Teorema 2.1.1, temos que

$$\rho \mathbf{w} \in C([0, T]; X) \cap L^\infty\left(0, T; (L^2(\Omega))^2\right).$$

O Lema 1.3.2 nos permite concluir que $\rho \mathbf{w}$ é contínua de $[0, T]$ em $(L^2(\Omega))^3$, no sentido fraco. Daí em $t = 0$ temos

$$(\rho \mathbf{w})(t) \rightarrow (\rho \mathbf{w})(0) \text{ em } (L^2(\Omega))^3 \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

(2) Como

$$\int_{\Omega} (\rho \mathbf{w})(0) \cdot \mathbf{v} dx = \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \right) (0) dx = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v} dx, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3,$$

concluimos que

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{w})(0) - \rho_0 \mathbf{w}_0] \cdot \mathbf{v} dx = 0, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Agora, por densidade, vemos que isso se verifica para todo $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$, e está finalizada a demonstração.

(3) Pelo Lema 1.4.1, existe $\lambda \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(\rho \mathbf{w})(0) - \rho_0 \mathbf{w}_0 = \nabla \lambda.$$

Como $(\rho \mathbf{w})(0)$ e $\rho_0 \mathbf{w}_0 \in (L^2(\Omega))^3$, segue que $\lambda \in H^1(\Omega)$, o que finaliza a prova.

(v) Como $\mathbf{w} \in C([0, T]; (L^2(\Omega))^3)$, segue que $\mathbf{w}(0) \in (L^2(\Omega))^3$ e também que

$$\mathbf{w}(t) \rightarrow \mathbf{w}(0), \text{ em } (L^2(\Omega))^3, \quad (3.1.5)$$

quando $t \rightarrow 0^+$. Pelo Teorema 2.1.1, $\rho(t) \rightarrow \rho_0$ em $W^{-1,\infty}(\Omega)$ no sentido forte e $\|\rho(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ é limitada *q.t.p.* em $(0, T)$. Como $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,\infty}(\Omega)$, segue que ρ é contínua de $[0, T]$, em $L^\infty(\Omega)$ no sentido fraco. Isso quer dizer que

$$\langle \eta, \rho(t) \rangle \rightarrow \langle \eta, \rho_0 \rangle,$$

para todo $\eta \in (L^\infty(\Omega))'$. Tomando $g \in L^1(\Omega)$ e considerando o funcional $\phi_g : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $\phi_g(h) = \int_\Omega g \cdot h dx$, teremos

$$\int_\Omega g \cdot \rho(t) dx \rightarrow \int_\Omega g \cdot \rho_0 dx.$$

Logo

$$\rho(t) \rightarrow \rho_0 \text{ em } L^\infty(\Omega) \text{ fraco-} \star. \quad (3.1.6)$$

Agora, observamos que

$$\rho(t) \mathbf{w}(t) \rightarrow \rho_0 \mathbf{w}(0) \text{ em } (L^2(\Omega))^3 \text{ fraco}, \quad (3.1.7)$$

e como a imersão $(L^2(\Omega)) \hookrightarrow (H^{-1}(\Omega))$ é compacta, temos que

$$\rho(t) \mathbf{w}(t) \rightarrow \rho_0 \mathbf{w}(0) \text{ em } (H^{-1}(\Omega))^3 \text{ forte}.$$

Para qualquer instante $t \in [0, T]$, podemos concluir que

$$\rho \mathbf{w} \in C\left([0, T]; (H^{-1}(\Omega))^3\right),$$

o que prova a primeira afirmação. Tomando $\mathbf{w} \in C([0, T]; V)$, o mesmo argumento usado para $\rho \mathbf{u}$ nos permite concluir que

$$\rho \mathbf{w} \in C\left([0, T]; (W^{-1,\infty}(\Omega))^3\right),$$

o que mostra a segunda afirmação. Com isso, estamos nas condições da parte (iv),

com $X = (H^{-1}(\Omega))^3$. Como

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{w})(0) - \rho_0 \mathbf{w}_0] \cdot \mathbf{v} dx = 0, \forall \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3$$

e $\rho(0) \mathbf{w}(0) = \rho_0 \mathbf{w}_0$, segue que

$$\int_{\Omega} [\rho_0 \mathbf{w}(0) - \rho_0 \mathbf{w}_0] \cdot \mathbf{v} dx = 0, \forall \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3.$$

Agora, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_0 \in (L^2(\Omega))^3$ chegamos a

$$\int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_0|^2 dx = 0.$$

Como $\rho_0 \geq 0$, segue que

$$\rho_0 |\mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_0|^2 = 0, q.t.p. \text{ em } \Omega$$

o que implica $\rho_0 \mathbf{w}(0) = \rho_0 \mathbf{w}_0$, *q.t.p.* em Ω . Combinando as igualdades anteriores, ficamos com

$$(\rho \mathbf{w})(0) = \rho(0) \mathbf{w}(0) = \rho_0 \mathbf{w}_0, q.t.p. \text{ em } \Omega,$$

finalizando assim a prova da última afirmação.

(vi) Como $\rho_0 > 0$, *q.t.p.* em Ω , estamos nas condições da parte (v) e, portanto, teremos

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Assim finalizamos a prova do Teorema. ■

3.2 Segundo resultado

O próximo resultado é mais forte que o Teorema 2.1.1 no sentido em que as condições iniciais são satisfeitas de uma maneira forte. Entretanto, ele é local no tempo, ao contrário

daquele.

Teorema 3.2.1. *Sejam Ω um aberto limitado cuja fronteira é de classe C^2 , $\mathbf{u}_0 \in V$, $\mathbf{w}_0 \in H_0^1(\Omega)^3$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, e $\frac{1}{\rho_0} \in L^2(\Omega)$. Então*

(i) *Existem $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \rho$ e p satisfazendo as propriedades do Teorema 2.1.1 e $T_* > 0$ satisfazendo*

1. $\mathbf{u} \in L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty(0, T_*; V)$,
2. $\mathbf{w} \in L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3)$,
3. $p \in L^2(0, T_*; L^6(\Omega))$,
4. $\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{w} \in C([0, T_*]; W^{-1, \infty}(\Omega)^3)$,
5. $\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} \in L^2(0, T_*; W^{-1, 6}(\Omega)^3)$,
6. $\frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^\infty(0, T_*; W^{-1, 6}(\Omega))$,
7. $(\rho \mathbf{u})(0) = \rho_0 \mathbf{u}_0 + \nabla \lambda$, com $\lambda \in W^{1, 6}(\Omega)$,
8. $(\rho \mathbf{w})(0) = \rho_0 \mathbf{w}_0 + \nabla \theta$, com $\theta \in W^{1, 6}(\Omega)$,

O tempo T_ depende somente dos dados $\Omega, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \rho_0$.*

(ii) *Além disso, valem*

1. $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ é contínua em $t = 0$, em H ,
2. $t \mapsto \mathbf{w}(t)$ é contínua em $t = 0$, em $L^2(\Omega)^3$,
3. $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ e $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$,
4. $(\rho \mathbf{u})(0) = \rho_0 \mathbf{u}_0$ e $(\rho \mathbf{w})(0) = \rho_0 \mathbf{w}_0$.

(iii) *Se, ademais, $\inf_\Omega \rho_0 > 0$, então*

1. $\mathbf{u} \in C([0, T_*]; V)$, $\mathbf{w} \in C([0, T_*]; H_0^1(\Omega)^3)$,
2. $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0, T_*; H)$, $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \in L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3)$.

Demonstração: A demonstração será feita por etapas. Na primeira, obteremos bases especiais para V e para $L^2(\Omega)^3$; na segunda, obteremos estimativas sobre soluções aproximadas e, na última, obteremos propriedades especiais da solução.

3.2.1 Construção de Bases especiais para V e $L^2(\Omega)^3$

O operador $P\Delta : H^2(\Omega)^3 \cap V \rightarrow H$ é bijetivo, linear e contínuo. O operador $(P\Delta)^{-1}$ é linear e contínuo de H em $H^2(\Omega)^3 \cap V$. Vamos denotar por T a aplicação composta de $(P\Delta)^{-1}$, que é linear e contínua, com a imersão de $H^2(\Omega)^3 \cap V$, que é compacta. Então $T \in \mathcal{L}(H, H)$ é compacta. Ademais, T é um operador autoadjunto. Como H é separável, existe uma seqüência enumerável de autovalores reais de T , que denotaremos por (β_m) , com $\beta_m \searrow 0$, tais que as autofunções associadas, $\mathbf{g}^m \in H$, constituem um sistema ortonormal e completo de H . Como $T\mathbf{g}^m = \beta^m \mathbf{g}^m$, se definirmos $\mathbf{v}^m = T\mathbf{g}^m \in H^2(\Omega)^3 \cap V$ e $\lambda_m = 1/\beta_m$, teremos que $P(\Delta \mathbf{v}^m) = \lambda_m \mathbf{v}^m$, para todo m . Temos que $(\mathbf{v}^m)$ é uma base de V e que está nas condições do Teorema 2.1.1. Por outro lado, de acordo com [5], Théorème IX.31, podemos escolher uma base $(\mathbf{z}^m)$ de $L^2(\Omega)^3$ com $\mathbf{z}^m \in H_0^1(\Omega)^3 \cap C^\infty(\Omega)^3$, constituída por autofunções do operador $-\Delta$ com domínio $H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3$, também nas condições do Teorema 2.1.1.

3.2.2 Estimativas adicionais para a solução do problema aproximado

Fazendo, na equação aproximada (2.2.1), $v = 2\mathbf{u}_t^m$, teremos

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \rho^m |\mathbf{u}_t^m|^2 + (\mu + \mu_r) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^m|^2 \\ = 2 \int_{\Omega} \rho^m (-\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{u}_t^m + 2 \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{u}_t^m + 4\mu_r \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{u}_t^m. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

As estimativas

$$\begin{aligned}
4\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{u}_t^m &= 4\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}^m, \mathbf{u}_t^m) \\
&\leq 8\mu_r^2 \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + 1/2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2, \\
2 \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{u}_t^m &= 2 \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{f}^m, (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right) \\
&\leq 2b \left\| \mathbf{f}^m \right\|_{L^2}^2 + 1/2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2, \\
2 \int_{\Omega} \rho^m (-\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{u}_t^m &= 2 \left((\rho^m)^{1/2} (-\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m, (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right) \\
&\leq 2 \left\| (\rho^m)^{1/2} (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + 1/2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

quando levadas à identidade (3.2.8), fornecem

$$\begin{aligned}
\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 + (\mu + \mu_r) \frac{d}{dt} \left\| \nabla \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 &\leq 2 \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + 2b \left\| \mathbf{f}^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + 8\mu_r^2 \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + 1/2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Fazendo $\mathbf{v} = \epsilon P \Delta \mathbf{u}^m$ na equação (2.2.1), onde $\epsilon > 0$ será escolhido posteriormente, ficaremos com

$$\begin{aligned}
\epsilon \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}_t^m \cdot P \Delta \mathbf{u}^m &+ \epsilon (\mu + \mu_r) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^m \cdot \nabla P \Delta \mathbf{u}^m \\
&+ \epsilon \int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m \cdot P \Delta \mathbf{u}^m - \epsilon \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot P \Delta \mathbf{u}^m \\
&- 2\epsilon \mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot P \Delta \mathbf{u}^m \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Agora, usando as estimativas

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{u}_t^m \cdot P \Delta \mathbf{u}^m &= (\rho^m \mathbf{u}_t^m, P \Delta \mathbf{u}^m) \\
&\leq b(\mu + \mu_r)^{-1} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} (\mu + \mu_r) \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2, \\
\int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m \cdot P \Delta \mathbf{u}^m &= (\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m, P \Delta \mathbf{u}^m) \\
&\leq b(\mu + \mu_r)^{-1} \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} (\mu + \mu_r) \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2, \\
2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \cdot P \Delta \mathbf{u}^m &= 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}^m, P \Delta \mathbf{u}^m) \\
&\leq 8\mu_r^2 (\mu + \mu_r)^{-1} \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{(\mu + \mu_r)}{8} \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2, \\
\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{f}^m \cdot P \Delta \mathbf{u}^m &= (\rho^m \mathbf{f}^m, P \Delta \mathbf{u}^m) \\
&\leq \epsilon b^2 (\mu + \mu_r)^{-1} \|\mathbf{f}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon (\mu + \mu_r)}{4} \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

na identidade (3.2.10), ficamos com

$$\begin{aligned}
-\epsilon (\mu + \mu_r) ((\nabla \mathbf{u}^m, \nabla P \Delta \mathbf{u}^m)) &= \epsilon (\rho^m \mathbf{u}_t^m, P \Delta \mathbf{u}^m) + \epsilon (\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m, P \Delta \mathbf{u}^m) \\
&\quad - \epsilon (\rho^m \mathbf{f}^m, P \Delta \mathbf{u}^m) - 2\mu_r \epsilon (\operatorname{rot} \mathbf{w}^m, P \Delta \mathbf{u}^m) \\
&\leq \epsilon b (\mu + \mu_r)^{-1} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon (\mu + \mu_r)}{4} \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b (\mu + \mu_r)^{-1} \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon (\mu + \mu_r)}{4} \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b^2 (\mu + \mu_r)^{-1} \|\mathbf{f}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon (\mu + \mu_r)}{4} \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + 8\epsilon \mu_r^2 (\mu + \mu_r)^{-1} \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon (\mu + \mu_r)}{8} \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes e usando as propriedades do operador projeção, ficamos com

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} \epsilon (\mu + \mu_r) \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 &\leq \epsilon b (\mu + \mu_r)^{-1} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \epsilon b (\mu + \mu_r)^{-1} \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b^2 (\mu + \mu_r)^{-1} \|\mathbf{f}^m\|_{L^2}^2 + 8\epsilon \mu_r^2 (\mu + \mu_r)^{-1} \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Somando as desigualdades (3.2.9) e (3.2.11) e usando as propriedades dos operadores $P\Delta$ e $-\Delta$, ficamos com

$$\begin{aligned}
[1/2 - \epsilon b (\mu + \mu_r)^{-1}] \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 &+ (\mu + \mu_r) \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon (\mu + \mu_r)}{8} \|P\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\
&\leq (2 + \epsilon b (\mu + \mu_r)^{-1}) \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + (2b + \epsilon b^2 (\mu + \mu_r)^{-1}) \|\mathbf{f}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + 8\mu_r^2 \epsilon (\mu + \mu_r)^{-1} \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 8\mu_r^2 \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Escolhendo ϵ tal que $\epsilon b (\mu + \mu_r)^{-1} < 1/2$, ficamos com

$$\begin{aligned}
&\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|P\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \left(\left\| (\rho^m)^{1/2} (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{f}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Fazendo $z = 2\mathbf{w}_t^m$, na equação aproximada (2.2.2) ficamos com

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}_t^m \cdot \mathbf{w}_t^m &+ 2 \int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{w}_t^m + (c_a + c_d) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}^m|^2 \\
&+ (c_0 + c_d - c_a) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{w}^m|^2 + 8\mu_r \int_{\Omega} \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{w}_t^m \\
&- 4\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{w}_t^m - 2 \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{w}_t^m \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Agora, usando as estimativas

$$\begin{aligned}
4\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{w}_t^m &= 4\mu_r \left((\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m, (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right) \\
&\leq 8\mu_r^2 \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + 1/2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2, \\
2 \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{w}_t^m &= 2 (\rho^m \mathbf{g}^m, \mathbf{w}_t^m) \\
&\leq 2b^2 \left\| \mathbf{g}^m \right\|_{L^2}^2 + 1/2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2, \\
2 \int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{w}_t^m &= (\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m, \mathbf{w}_t^m) \\
&\leq 2 \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + 1/2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

na identidade (3.2.13), ficamos com

$$\begin{aligned}
2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 &+ (c_a + c_d) \frac{d}{dt} \left\| \nabla \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{w}_t^m \right\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \frac{d}{dt} |\operatorname{div} \mathbf{w}^m|^2 \\
&= 4\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{u}^m, \mathbf{w}_t^m) + 2 (\rho^m \mathbf{g}^m, \mathbf{w}_t^m) + 2 (\rho^m (-\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m, \mathbf{w}_t^m) \\
&\leq 8\mu_r^2 \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + 1/2 \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 + 2b \left\| \mathbf{g}^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 &+ (c_a + c_d) \frac{d}{dt} \left\| \nabla \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + (c_0 + c_d - c_a) \frac{d}{dt} \left\| \operatorname{div} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\leq 8\mu_r^2 \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + 2b \left\| \mathbf{g}^m \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Agora vamos fazer na equação aproximada (2.2.2), $z = \epsilon \Delta \mathbf{w}^m$, onde $\epsilon > 0$ será escolhido posteriormente. Fazendo isso, ficamos com

$$\begin{aligned}
\epsilon \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}_t^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m &+ \epsilon \int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m - \epsilon \int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m \\
&+ \epsilon (c_0 + c_d) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^m \cdot \nabla \Delta \mathbf{w}^m + \epsilon (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w}^m \cdot \operatorname{div} \Delta \mathbf{w}^m \\
&+ 4\mu_r \epsilon \int_{\Omega} \mathbf{w}^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m - 2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Agora estimamos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{g}^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m &= (\rho^m \mathbf{g}^m, \Delta \mathbf{w}^m) \\
&\leq b^2 (c_a + c_d)^{-1} \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 + \frac{(c_a + c_d)}{4} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2, \\
2\mu_r \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m &= 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{u}^m, \Delta \mathbf{w}^m) \\
&\leq 8\mu_r^2 (c_a + c_d)^{-1} \|\operatorname{rot} \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \frac{(c_a + c_d)}{8} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2, \\
\int_{\Omega} \rho^m \mathbf{w}_t^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m &= (\rho^m \mathbf{w}_t^m, \Delta \mathbf{w}^m) \\
&\leq b^2 (c_a + c_d)^{-1} \|\mathbf{w}_t^m\|_{L^2}^2 + \frac{(c_a + c_d)}{4} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2, \\
\int_{\Omega} \rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m \cdot \Delta \mathbf{w}^m &= (\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m, \Delta \mathbf{w}^m) \\
&\leq b (c_a + c_d)^{-1} \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{(c_a + c_d)}{4} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Ademais, se definirmos o operador $\mathcal{L}$ por

$$\mathcal{L} \mathbf{w} = (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w},$$

então $\mathcal{L}$ é um operador fortemente elíptico que satisfaz

$$(\mathcal{L} \mathbf{w}, \Delta \mathbf{w}) \geq (c_a + c_d) \|\Delta \mathbf{w}\|_{L^2}^2 - C_1^* \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2,$$

onde C_1^* é uma constante que depende de $c_a + c_d$, $c_0 + c_d - c_a$ e $\partial\Omega$. Para a prova desse fato, veja [15]. Levando em conta esse fato e as estimativas em (3.2.15), ficamos com

$$\begin{aligned}
-\epsilon(c_a + c_d)((\nabla \mathbf{w}^m, \nabla \Delta \mathbf{w}^m)) &= \epsilon(c_0 + c_d - c_a)(\operatorname{div} \mathbf{w}^m, \operatorname{div} \Delta \mathbf{w}^m) \\
&= \epsilon(\rho^m \mathbf{w}_t^m, \Delta \mathbf{w}^m) + \epsilon(\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m, \Delta \mathbf{w}^m) \\
&\quad - \epsilon(\rho^m \mathbf{g}^m, \Delta \mathbf{w}^m) + 4\mu_r \epsilon(\mathbf{w}^m, \Delta \mathbf{w}^m) - 2\mu_r \epsilon(\operatorname{rot} \mathbf{u}^m, \Delta \mathbf{w}^m) \\
&\leq \epsilon b^2 (c_a + c_d)^{-1} \|\mathbf{w}_t^m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon(c_a + c_d)}{4} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b (c_a + c_d)^{-1} \left\| ((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon(c_a + c_d)}{4} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b^2 (c_a + c_d)^{-1} \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon(c_a + c_d)}{4} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 4\mu_r \epsilon(\mathbf{w}^m, \Delta \mathbf{w}^m) \\
&\quad + 8\mu_r^2 (c_a + c_d)^{-1} \|\operatorname{rot} \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon(c_a + c_d)}{8} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
-\epsilon(c_a + c_d)(\nabla \mathbf{w}^m, \nabla \Delta \mathbf{w}^m) &= \epsilon(c_0 + c_d - c_a)(\operatorname{div} \mathbf{w}^m, \operatorname{div} \Delta \mathbf{w}^m) \\
&= \epsilon(c_a + c_d)(\Delta \mathbf{w}^m, \Delta \mathbf{w}^m) + \epsilon(c_0 + c_d - c_a)(\nabla \operatorname{div} \mathbf{w}^m, \Delta \mathbf{w}^m) \\
&= \epsilon(\mathcal{L} \mathbf{w}^m, \Delta \mathbf{w}^m).
\end{aligned}$$

Portanto, pelas estimativas acima, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\epsilon(c_a + c_d) \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 4\mu_r \epsilon \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 &\leq \epsilon C_1^* \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \epsilon b (c_a + c_d)^{-1} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{7\epsilon}{8} (c_a + c_d) \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b (c_a + c_d)^{-1} \left\| ((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b^2 (c_a + c_d)^{-1} \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 + 8\mu_r^2 \epsilon (c_0 + c_d)^{-1} \|\operatorname{rot} \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon(c_a + c_d)}{8} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 4\mu_r \epsilon \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 &\leq C_1^* \epsilon \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \epsilon b(c_a + c_d)^{-1} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b(c_a + c_d)^{-1} \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \epsilon b^2(c_a + c_d)^{-1} \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + 8\mu_r^2 \epsilon(c_a + c_d)^{-1} \|\text{rot } \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2. \tag{3.2.16}
\end{aligned}$$

Agora, adicionando (3.2.14) a (3.2.16), ficamos com

$$\begin{aligned}
[1/2 - \epsilon(c_a + c_d)^{-1}] \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 &+ (c_a + c_d) \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + (c_0 + c_d - c_a) \frac{d}{dt} \|\text{div } \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&+ 4\mu_r \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon(c_a + c_d)}{8} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 4\mu_r \epsilon \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&\leq [2 + \epsilon b(c_a + c_d)^{-1}] \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + [\epsilon b^2(c_a + c_d)^{-1} + 2b] \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + 8\mu_r^2 \epsilon(c_a + c_d)^{-1} \|\text{rot } \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + C_1^* \epsilon \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + 8\mu_r^2 \left\| (\rho^m)^{-1/2} \text{rot } \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ de sorte que $[1/2 - \epsilon(c_a + c_d)^{-1}] > 0$, ficamos com

$$\begin{aligned}
\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 &+ \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} \|\text{div } \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \left[\left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\text{rot } \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{-1/2} \text{rot } \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 \right] \tag{3.2.17}
\end{aligned}$$

Combinando (3.2.12) e (3.2.17), ficamos com

$$\begin{aligned}
& \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \|P\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{d}{dt} [\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2] \\
& \leq C \left[\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \right. \\
& + \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 + \left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 \\
& + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
& \left. + \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{f}^m\|_{L^2}^2 \right] \tag{3.2.18}
\end{aligned}$$

Obteremos, agora, novas estimativas. Utilizando a desigualdade de Hölder e desigualdades de interpolação, conforme, [22] ou [23], temos

$$\begin{aligned}
\left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} \left| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right|^2 \\
&\leq \beta^2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}^m|^2 |\nabla \mathbf{u}^m|^2 \\
&\leq \beta^2 \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}^m|^6 \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^m|^3 \right)^{2/3} \\
&= \beta^2 \|\mathbf{u}^m\|_{L^6}^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^3}^2 \\
&\leq \beta^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \|\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{3/2} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, ficamos com

$$\beta^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \|\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{3/2} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2}^{1/2} \leq \overline{C} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{10} + \frac{1}{2C} \|P\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2. \tag{3.2.19}$$

Assim,

$$\left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 \leq \overline{C} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{10} + \frac{1}{2C} \|P\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2. \tag{3.2.20}$$

De maneira semelhante, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} \left| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right|^2 \\
&\leq \beta^2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}^m|^2 |\nabla \mathbf{w}^m|^2 \\
&\leq \beta^2 \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}^m|^6 \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}^m|^3 \right)^{2/3} \\
&= \beta^2 \|\mathbf{u}^m\|_{L^6}^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^3}^2 \\
&\leq \beta^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^{3/2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Novamente usando a desigualdade de Young, temos

$$\beta^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^{3/2} \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^{1/2} \leq \overline{C} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^8 \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2C} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2.$$

Assim,

$$\left\| \left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m \cdot \nabla \right) \mathbf{w}^m \right\|_{L^2}^2 \leq \overline{C} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^8 \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2C} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2. \quad (3.2.21)$$

Agora, observe que

$$\left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \right\|^2 = \int_{\Omega} |(\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{w}^m|^2 = \int_{\Omega} |(\rho^m)^{-1}| |\operatorname{rot} \mathbf{w}^m|^2.$$

Daí

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |(\rho^m)^{-1}| |\operatorname{rot} \mathbf{w}^m|^2 &\leq \|(\rho^m)^{-1}\|_{L^2} \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&= \|(\rho^m)^{-1}\| \|\operatorname{rot} \mathbf{w}^m\|_{L^4}^2 \\
&\leq C \|(\rho^m)^{-1}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^4}^2 \\
&\leq \sqrt{2} \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^{3/2} \\
&\leq \overline{C} \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2C} \|\nabla \nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 \\
&\leq \overline{C} \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2C} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Agora, note que

$$\left\| (\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m \right\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |(\rho^m)^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{u}^m|^2 = \int_{\Omega} |(\rho^m)^{-1}| |\operatorname{rot} \mathbf{u}^m|^2.$$

Dáí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(\rho^m)^{-1}| |\operatorname{rot} \mathbf{u}^m|^2 &\leq \|(\rho^m)^{-1}\|_{L^2} \|\operatorname{rot} \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\ &= \|(\rho^m)^{-1}\|_{L^2} \|\operatorname{rot} \mathbf{u}^m\|_{L^4}^2 \\ &\leq C \|(\rho^m)^{-1}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^4}^2 \\ &\leq \sqrt{2} \|\nabla \mathbf{u}^m\|^{1/2} \|\nabla \nabla \mathbf{u}^m\|^{3/2} \\ &\leq \bar{C} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2C} \|\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \\ &\leq \bar{C} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2C} \|P \Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Usando as estimativas (3.2.20), (3.2.21), (3.2.22) e (3.2.23) em (3.2.18), podemos concluir que

$$\begin{aligned} &\left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} [\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2] \\ &\leq C [\|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{f}^m\|_{L^2}^2] + C [\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{10} + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^8 \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2] \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

ou ainda que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} [\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2] \\ &\leq C [\|\mathbf{g}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2] + C [\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2]^{5/2} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Agora, vamos usar o Lema 1.3.3. No presente caso,

1. $g(t) = \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2,$
2. $F(t) = Ct^5,$
3. $k(t) = \|\mathbf{g}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2.$

Verifiquemos as condições do Lema. Temos que $g \in W^{1,1}(0, T)$, já que $g \in L^1(0, T)$ e $\frac{dg}{dt}$ é majorada por funções que estão em $L^1(0, T)$. A regularidade de $\mathbf{f}$ e a de $\mathbf{g}$ na variável t acarretam que $k \in L^1(0, T)$. É imediato ver que a função F é localmente limitada. Agora vamos mostrar que $g(0)$ é limitada. Inicialmente observamos que $\|\mathbf{w}^m\|_{L^2} \leq C \|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2$, pois $\mathbf{w}^m \in H_0^1(\Omega)^3$ e que $\|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\| \leq C \|\nabla \mathbf{w}^m\|$. Portanto, apenas duas parcelas serão relevantes na análise da limitação de $g(0)$, a saber, $\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2(0)$ e $\|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2(0)$. Começamos pela limitação de $\|\nabla \mathbf{u}^m\|^2(0)$. Como $\mathbf{u}_0 \in V$ e $\{\mathbf{v}^i\}$ é uma base de Schauder de V , podemos escrever

$$\mathbf{u}_0 = \sum_i u_{0,i} \mathbf{v}^i, \text{ em } V,$$

onde $u_{0,i}$ são as coordenadas de $\mathbf{u}_0$ com respeito à base $\{\mathbf{v}^i\}$. Agora vamos fixar como um dos dados iniciais do problema aproximado (4.1)-(4.6) do Teorema 2.1.1, $\mathbf{u}_0^m = \sum_{i=1}^m u_{0,i} \mathbf{v}^i \in V^m$, o que implica $\mathbf{u}_0^m \rightarrow \mathbf{u}_0$ em V , e também em H . Por outro lado, a base $\{\mathbf{v}^i\}$ verifica

$$(\nabla \mathbf{v}^i, \nabla \mathbf{v}^j) = 0,$$

Com efeito, temos

$$(\Delta \mathbf{v}^i, \mathbf{v}) = (P \Delta \mathbf{v}^i, \mathbf{v}) = \lambda^i (\mathbf{v}^i, \mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{v} \in H$. Tomando, em particular $\mathbf{v} = \mathbf{v}^j \in V$, temos que a igualdade anterior acarreta que

$$-(\nabla \mathbf{v}^i, \nabla \mathbf{v}^j) = \lambda^i (\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j) = 0,$$

se $i \neq j$. Portanto

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^m|^2 \right) (0) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}_0^m|^2 = \sum_{i=1}^m |u_{0,i}|^2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}^i|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}_0|^2. \quad (3.2.26)$$

Como $\mathbf{w}_0 \in H_0^1(\Omega)^3$ e $\{\mathbf{z}^i\}$ é uma base de Schauder de $H_0^1(\Omega)^3$, podemos escrever

$$\mathbf{w}_0 = \sum_i w_{0,i} \mathbf{z}^i, \text{ em } H_0^1(\Omega)^3,$$

onde $w_{0,i}$ são as coordenadas de $\mathbf{w}_0$ com respeito à base $\{\mathbf{z}^i\}$. Agora vamos fixar como um dos dados iniciais do problema aproximado (4.1)-(4.6) do Teorema 2.1.1, $\mathbf{w}_0^m = \sum_{i=1}^m w_{0,i} \mathbf{z}^i \in W^m$, o que implica $\mathbf{w}_0^m \rightarrow \mathbf{w}_0$ em $H_0^1(\Omega)^3$, e também em $L^2(\Omega)^3$. Por outro lado, a base $\{\mathbf{z}^i\}$ verifica

$$(\nabla \mathbf{z}^i, \nabla \mathbf{z}^j) = 0,$$

para $i \neq j$, via integração por partes e pela escolha da base $\{\mathbf{z}^i\}$. Portanto

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}^m|^2 \right) (0) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}_0^m|^2 = \sum_{i=1}^m |w_{0,i}|^2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{z}^i|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}_0|^2. \quad (3.2.27)$$

Em virtude de (3.2.26) e de (3.2.27), temos que $g(0)$ é limitada e, portanto, vale a limitação do Lema 1.3.3 para $\epsilon = 1$. Assim existe T_* tal que

$$\begin{aligned} & \left[\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \right] (t) \\ & \leq \left[\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \right] (0) + 1, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_*]$. Portanto, podemos concluir que

$$(\mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_*; V) \quad (3.2.28)$$

e

$$(\mathbf{w}^m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3). \quad (3.2.29)$$

Recordemos que, na demonstração do Teorema 2.1.1, mostramos que $\mathbf{u}^m$ é limitada em $L^\infty(0, T_*; L^2(\Omega)^3)$. Agora, integrando (3.2.24) entre 0 e T_* , ficamos com

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_*} \|\Delta \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \int_0^{T_*} \|\Delta \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \int_0^{T_*} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right\|_{L^2}^2 + \int_0^{T_*} \left\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right\|_{L^2}^2 \\ & + \left[\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \right] (T_*) \\ & - \left[\|\nabla \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \right] (0) \\ & \leq C \int_0^{T_*} \left[\|\mathbf{w}_t^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_t^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{g}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{f}^m\|_{L^2}^2 \right] + C. \end{aligned}$$

Dessa estimativa, podemos concluir que

$$\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3), \quad (3.2.30)$$

$$\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{w}_t^m \right)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3), \quad (3.2.31)$$

$$(\mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3), \quad (3.2.32)$$

$$(\mathbf{w}^m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3). \quad (3.2.33)$$

3.2.3 Passagem ao limite e propriedades adicionais da solução

Repetindo o processo de passagem ao limite feito na demonstração do Teorema 2.1.1, obteremos $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \rho, p\}$, solução do problema assimétrico dado na introdução. Obteremos agora algumas propriedades adicionais da solução $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \rho, p\}$. Pelo Teorema de Alaoglu, pela reflexividade dos espaços L^p , com $1 < p < \infty$, e pelas limitações (3.2.28) e (3.2.29), temos

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3)$$

e

$$\mathbf{w} \in L^\infty(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3) \cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3).$$

Como $\mathbf{u}^m$ é limitada em $L^\infty(0, T_*; V)$, segue que ela também o é em $L^\infty(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$, já que $V \hookrightarrow H_0^1(\Omega)^3 \hookrightarrow L^6(\Omega)^3$. De forma análoga, concluimos que $\mathbf{w}^m$ é limitada nesse mesmo espaço. Portanto, a equação do transporte nos fornece

$$\left(\frac{\partial \rho^m}{\partial t} \right)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)).$$

Temos ainda que ρ , o limite de ρ^m , também é tal que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)).$$

Como $\mathbf{u}^m$ é limitada em $L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3)$ e $H^2(\Omega) \hookrightarrow W^{1,6}(\Omega)$, segue que

$$(\mathbf{u}^m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; W^{1,6}(\Omega)^3).$$

Procedendo de forma análoga, podemos mostrar que vale uma limitação semelhante para $\mathbf{w}^m$. Pelo Lema 1.4.2, parte (iii), o produto $W^{1,6}(\Omega) \times W^{-1,6}(\Omega) \rightarrow W^{-1,6}(\Omega)$ é contínuo, donde

$$\left(\mathbf{u}^m \frac{\partial \rho^m}{\partial t} \right)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3). \quad (3.2.34)$$

Por um raciocínio semelhante, mostramos que $\mathbf{w}^m \frac{\partial \rho^m}{\partial t}$ é limitada no mesmo espaço. Integrando a desigualdade (3.2.24) entre 0 e T_* , obtemos

$$\left((\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m \right)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3). \quad (3.2.35)$$

Pela limitação (3.2.35) e pelo fato de que ρ^m é limitada em $L^\infty(0, T_*; L^\infty(\Omega))$, segue que

$$(\rho^m \mathbf{u}_t^m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3).$$

Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,6}(\Omega)$, temos

$$(\rho^m \mathbf{u}_t^m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3).$$

Daí, podemos concluir que

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3).$$

De forma semelhante obtemos as mesmas limitações para $\mathbf{w}^m$ e as mesmas conclusões para $\frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}$. Além disso temos que $\rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$ pois $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3) \hookrightarrow L^\infty(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$ e $\rho \in L^\infty(0, T_*; L^\infty(\Omega))$. De forma semelhante, obtemos que $\rho \mathbf{w} \in L^\infty(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$. Usando o Lema 1.2.1, parte (ii), obtemos

$$\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{w} \in C([0, T_*]; W^{-1,6}(\Omega)^3).$$

Em virtude das propriedades acima, temos

- (I) $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \in L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3)$, pois $\rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$ e $\mathbf{u} \in L^2(0, T_*; W^{1,6}(\Omega)^3)$.
- (II) $\Delta \mathbf{u} \in L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3)$, pois $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V) \hookrightarrow L^2(0, T_*; V) \hookrightarrow L^2(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3) \hookrightarrow L^2(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$.
- (III) $\rho \mathbf{f} \in L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3)$, pois $\rho \mathbf{f} \in L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3) \hookrightarrow L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3)$.
- (IV) $\operatorname{rot} \mathbf{w} \in L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3)$, pois $\mathbf{w} \in L^\infty(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3) \hookrightarrow L^2(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3) \hookrightarrow L^2(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$.

Portanto, podemos concluir que $\nabla p \in L^2(0, T_*; W^{-1,6}(\Omega)^3)$, donde $p \in L^2(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$.

Como $\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{w} \in C([0, T_*]; W^{-1,6}(\Omega)^3)$, o Teorema 2.1.1 nos garante que

$$\rho \mathbf{u}(0) = \rho_0 \mathbf{u}_0 + \nabla \lambda,$$

com $\lambda \in H^1(\Omega)$ e

$$\rho \mathbf{w}(0) = \rho_0 \mathbf{w}_0 + \nabla \theta,$$

com $\theta \in H^1(\Omega)$. Na realidade, o argumento usado em [23] nos permite concluir que λ e $\theta \in W^{-1,6}(\Omega)$. Com isso provamos a parte (i). Vejamos agora a parte (ii). Pela parte (i), $\frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^\infty(0, T; W^{-1,6}(\Omega))$ e, pelo Teorema 2.1.1, $\rho(0) = \rho_0$. Então,

$$\|\rho_0 - \rho(t)\|_{W^{-1,6}} \leq Ct,$$

para $0 \leq t \leq T_*$. Pelo fato de que $\mathbf{u}(t)$ é limitada em $H^2(\Omega)^3$, segue que ela o é em $H^1(\Omega)^3$, para $0 \leq t \leq T_*$. Portanto, pelo Lema 1.4.2, parte (iii), temos que

$$\|\rho_0 \mathbf{u}(t) - \rho(t) \mathbf{u}(t)\|_{W^{-1,3}} \leq \|\rho_0 - \rho(t)\|_{W^{-1,6}} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1} \leq Ct,$$

q.t.p. em $[0, T_*]$. Assim a aplicação

$$t \mapsto \rho_0 \mathbf{u}(t) - \rho(t) \mathbf{u}(t)$$

é contínua em $t = 0$, com valores em $W^{-1,3}(\Omega)^3$. Como $W^{-1,6}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,3}(\Omega)$ e $\rho \mathbf{u} \in C([0, T_*]; W^{-1,3}(\Omega)^3)$, segue que

$$t \mapsto \rho_0 \mathbf{u}(t)$$

é contínua em $t = 0$ com valores em $W^{-1,3}(\Omega)^3$. Mas $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V)$, o que acarreta $\rho_0 \mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; L^6(\Omega)^3)$. Invocamos agora o Lema 1.3.2 bem como o fato de que $L^6(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,3}(\Omega)$, para concluirmos que

$$t \mapsto \rho_0 \mathbf{u}(t)$$

é fracamente contínua em $t = 0$ com valores em $L^6(\Omega)^3$. Como $\frac{1}{\rho_0} \in L^{6/5}(\Omega) = (L^6(\Omega))'$, segue que

$$t \mapsto \mathbf{u}(t)$$

é fracamente contínua em $t = 0$ com valores em $L^1(\Omega)^3$. Com efeito, a continuidade de $t \mapsto \rho_0 \mathbf{u}(t)$ acarreta que

$$\int_{\Omega} \phi \rho_0 \mathbf{u}(t) dx \rightarrow \int_{\Omega} \phi \rho_0 \mathbf{u}(0) dx,$$

quando $t \rightarrow 0$, para toda $\phi \in L^{6/5}(\Omega)$. Mas $\frac{1}{\rho_0}$ pertence a esse último espaço. Daí, para toda $\phi \in L^\infty(\Omega)^3$, segue que $\frac{\phi}{\rho_0} \in L^{6/5}(\Omega)$. Portanto

$$\int_{\Omega} \frac{\phi}{\rho_0} \rho_0 \mathbf{u}(t) dx = \int_{\Omega} \phi \mathbf{u}(t) dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\phi}{\rho_0} \rho_0 \mathbf{u}(0) dx = \int_{\Omega} \phi \mathbf{u}(0) dx,$$

quando $t \rightarrow 0$, o que prova a afirmação. Como $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V) \hookrightarrow L^\infty(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3)$, pelo Lema 1.4, página 263 de [25], segue que

$$t \mapsto \mathbf{u}(t)$$

é fracamente contínua em $t = 0$ com valores em L^2 , e também em H . Relembrando que na demonstração da parte (ii) do Teorema 3.1.1 foi usada apenas a continuidade forte em $t = 0$ para que ela fosse válida. E é justamente isso que temos aqui. Daí,

$$(\rho \mathbf{u})(0) = \rho(0) \mathbf{u}(0) = \rho_0 \mathbf{u}_0,$$

ou seja,

$$\rho_0 (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0) = 0.$$

Multiplicando essa última igualdade por $\frac{1}{\rho_0}$, temos que

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Repetindo os argumentos acima, com as modificações eventuais, a saber, trocar V por $L^2(\Omega)^3$, podemos concluir que ele também vale para $\mathbf{w}$, ou seja

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Com isso finalizamos a prova da parte (ii). Passemos à parte (iii). Como $\mathbf{u}^m$ e $\mathbf{w}^m$ satisfazem as estimativas obtidas no Teorema 2.1.1, a sequência $(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m$ é limitada em $L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3)$ e $\rho^m \geq \inf \rho_0 > 0$. Segue daí que $\mathbf{u}_t^m$ é limitada em $L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3)$, o mesmo valendo para $\mathbf{w}_t^m$. Como $\mathbf{u}_t^m \in C([0, T_*]; V)$ e $\mathbf{w}_t^m \in C([0, T_*]; L^2(\Omega)^3)$, segue que $\mathbf{u}_t^m$ é limitada em $L^2(0, T_*; H)$, $\mathbf{w}_t^m$ é limitada em $L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3)$, e seus respectivos limites satisfazem $\mathbf{u}_t \in L^2(0, T_*; H)$ e $\mathbf{w}_t \in L^2(0, T_*; L^2(\Omega)^3)$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in L^2(0, T_*; H^2(\Omega)^3)$, segue que

$$\mathbf{u}, \mathbf{w} \in C([0, T_*]; H^1(\Omega)^3).$$

Pelo fato de que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_*; V)$ e $\mathbf{w} \in L^\infty(0, T_*; H_0^1(\Omega)^3)$, temos que

$$\mathbf{u} \in C([0, T_*]; V) \text{ e } \mathbf{w} \in C([0, T_*]; H_0^1(\Omega)^3),$$

finalizando a prova da parte (iii).

3.3 Existência de solução global

Nesta seção mostraremos que, escolhendo-se os dados iniciais suficientemente pequenos, podemos tornar a solução obtida no Teorema 3.2.1 global. Mais especificamente, temos o seguinte

Teorema 3.3.1. *Com as hipóteses do Teorema 3.2.1 e admitindo que*

$$(i) \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^\infty([0, +\infty); H^1(\Omega)^3)$$

$$(ii) \quad \|\mathbf{u}_0\|_{H_0^1}, \|\mathbf{w}_0\|_{H_0^1}, \|\mathbf{f}\|_{L^\infty([0, +\infty); H^1(\Omega)^3)}, \|\mathbf{g}\|_{L^\infty([0, +\infty); H^1(\Omega)^3)} \text{ são suficientemente pequenas,}$$

a solução obtida existe globalmente no tempo.

Demonstração: Da demonstração do Teorema 3.2.1, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2] &\leq C [\|\mathbf{g}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2] \\ &+ C [\|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{L^2}^2]^5. \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

Pondo $\psi(t) = \|\nabla \mathbf{w}(t)\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2}^2$, obtemos a seguinte inequação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} \leq C_1 \psi^5 + C_2 \\ \psi(0) = \|\nabla \mathbf{w}(0)\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}(0)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}(0)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}(0)\|_{L^2}^2, \end{cases}$$

Consideremos a equação diferencial associada, ou seja

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = C_1 \phi^5 + C_2 = F(C_2, \phi) \\ \phi(0) = \|\nabla \mathbf{w}(0)\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}(0)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}(0)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}(0)\|_{L^2}^2, \end{cases}$$

Resultados sobre inequações diferenciais implicam que $\psi(t) \leq \phi(t)$, para todo t no intervalo de existência. Observe que, para $C_2 = \sup \{ \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2}^2 \}$ suficientemente pequeno, podemos encontrar uma raiz $r(C_2)$ próxima de 0. Assim, se $0 < \psi(0) = \phi(0) < r(C_2)$, teremos $0 \leq \psi(t) \leq \phi(t) \leq r(C_2) < +\infty$, para todo t no intervalo de existência. Portanto, existe uma constante $M > 0$, tal que

$$\sup \{ \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \} = M < \infty.$$

o que finaliza a prova do Teorema.

Capítulo 4

Existência de solução em domínios ilimitados

Neste capítulo, obteremos um resultado sobre existência de solução fraca global no tempo para o sistema dado na introdução quando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio ilimitado. A técnica por nós utilizada será a mesma utilizada por Ladyzhenskaya [14] e Heywood [12] e que foi utilizada por Guillén e Fernández-Cara em [9] para estender os resultados de Simon [22] para o caso ilimitado. A idéia consiste em aproximar Ω por domínios limitados Ω_R , satisfazendo $\Omega_R \rightarrow \Omega$ quando $R \rightarrow +\infty$. Então usa-se o Teorema 2.1.1 para obter-se uma solução $\{\rho_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{w}_R, p\}$, para cada $\Omega_R \times (0, T)$. Em seguida, mostra-se que essas soluções são convenientemente limitadas independentemente de R . Passa-se a seguir à escolha de uma subsequência e verifica-se que o limite desta subsequência é uma solução para o problema proposto.

4.1 Enunciado do resultado principal

Teorema 4.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $T > 0$ um número real dado e $Q = \Omega \times (0, T)$. Se $\mathbf{u}_0 \in H, \mathbf{w}_0 \in L^2(\Omega)^3, \rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, com $\rho_0 \geq 0$, em Ω e $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3)$, então existem*

- $\rho \in L^\infty(Q) \cap C([0, T]; W_{loc}^{-1, \infty}(\Omega))$,
- $\mathbf{u} \in L^2(0, T; W(\Omega))$,
- $\mathbf{w} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3)$,
- $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L_{loc}^2(\Omega))$, $\nabla p \in W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$,

tais que

$$(5.0.a) \quad \rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in C([0, T]), \forall \mathbf{v} \in V(\Omega),$$

$$(5.0.b) \quad \rho \mathbf{w} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \int_\Omega \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \in C([0, T]), \forall \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3,$$

$$(5.0.c) \quad \inf_{ess} \rho_0 \leq \rho(x, t) \leq \sup_{ess} \rho_0, \text{ q.t.p. em } \Omega \times (0, T),$$

e que satisfazem as equações, no sentido das distribuições,

$$(5.1) \quad \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = \rho \mathbf{f} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}, \text{ em } \Omega \times (0, T),$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{w}) - (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + 4\mu_r \mathbf{w} = \rho \mathbf{g} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u}, \\ \text{ em } \Omega \times (0, T),$$

$$(5.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \text{ em } \Omega \times (0, T),$$

$$(5.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ em } \Omega \times (0, T).$$

e as condições iniciais

$$(5.5) \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \text{ em } \Omega,$$

$$(5.6) \quad \left(\int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \right) (0) = \int_\Omega \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}, \text{ para todo } \mathbf{v} \in V(\Omega),$$

$$(5.7) \quad \left(\int_\Omega \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx \right) (0) = \int_\Omega \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}, \text{ para todo } \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Dividiremos a demonstração em várias etapas. A estratégia será semelhante àquela que foi usada em [9], ou seja, primeiro aplicaremos os resultados obtidos no capítulo 1 para obtermos uma solução $\{\rho_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{w}_R, p_R\}$ em $Q_R = \Omega_R \times (0, T)$, para cada $R > 0$, onde Ω_R é a interseção de Ω com a bola aberta centrada na origem e de raio R . Então, estimaremos $\rho_R, \mathbf{u}_R$ e $\mathbf{w}_R$, uniformemente com respeito a R . Finalmente, escolheremos uma subsequência convergente, cujo limite será solução do nosso problema.

4.2 Existência e propriedades de $\rho_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{w}_R, p_R$

Vamos escolher dados $\mathbf{u}_{0R}, \mathbf{w}_{0R}, \rho_{0R}, \mathbf{f}_R$ e $\mathbf{g}_R$ com as propriedades

$$(3.1) \quad \mathbf{u}_{0R} \in \mathcal{V}_R \text{ e } \mathbf{u}_{0R} \rightarrow \mathbf{u}_0 \text{ forte em } H(\Omega),$$

$$(3.2) \quad \mathbf{w}_{0R} \in \mathcal{D}(\Omega_R)^3 \text{ e } \mathbf{w}_{0R} \rightarrow \mathbf{w}_0 \text{ forte em } L^2(\Omega)^3,$$

$$(3.3) \quad \rho_{0R} \in L^\infty(\Omega_R), \text{ com } \rho_{0R} = \rho_0, \text{ q.t.p. em } \Omega_R,$$

$$(3.4) \quad \mathbf{f}_R \in L^1(0, T; L^2(\Omega_R)^3 \cap L^{6/5}(\Omega_R)^3), \text{ com } \mathbf{f}_R(t) = \mathbf{f}(t), \text{ q.t.p. em } \Omega_R,$$

$$(3.5) \quad \mathbf{g}_R \in L^1(0, T; L^2(\Omega_R)^3 \cap L^{6/5}(\Omega_R)^3), \text{ com } \mathbf{g}_R(t) = \mathbf{g}(t), \text{ q.t.p. em } \Omega_R.$$

Passamos a justificar a possibilidade de tais escolhas. As escolhas (3.3), (3.4) e (3.5) são possíveis, bastando para isso tomar as respectivas restrições. Vejamos agora as escolhas (3.1) e (3.2). Usaremos o conhecido processo da diagonal de Cantor. Como V é denso em H , existe uma seqüência $\{\mathbf{v}_m\}$ em V tal que $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{u}_0$ em H , de maneira forte. Também sabemos que $\mathcal{V}$ é denso em V . Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência $\{\phi_{m,n}\} \subset \mathcal{V}$, tal que $\phi_{m,n} \rightarrow \mathbf{v}_m$ em V , também de maneira forte. Vamos extrair uma subsequência de $\{\phi_{m,n}\}$. Sejam

$$n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|\phi_{1,n_1} - \mathbf{v}_1\|_{L^2} < \frac{1}{2^0},$$

$$n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1 \text{ tal que } \|\phi_{2,n_2} - \mathbf{v}_2\|_{L^2} < \frac{1}{2^1},$$

$$n_3 \in \mathbb{N}, n_3 > n_2 \text{ tal que } \|\phi_{3,n_3} - \mathbf{v}_3\|_{L^2} < \frac{1}{2^2},$$

.....

$$n_k \in \mathbb{N}, n_k > n_{k-1} \text{ tal que } \|\phi_{k,n_k} - \mathbf{v}_k\|_{L^2} < \frac{1}{2^{k-1}},$$

.....

Observamos que, com essa escolha, a subsequência $\{\phi_{k,n_k}\}$ é uma seqüência em $\mathcal{V}$ que converge fortemente para $\mathbf{u}_0$ em H . Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$1/2^{N_1-1} < \epsilon/2$ e $\|\mathbf{v}_k - \mathbf{u}_0\|_{L^2} < \epsilon/2$, para todo $k > N_2$. Logo, para $k > \max\{N_1, N_2\}$, temos

$$\|\phi_{k,n_k} - \mathbf{u}_0\|_{L^2} \leq \|\phi_{k,n_k} - \mathbf{v}_k\|_{L^2} + \|\mathbf{v}_k - \mathbf{u}_0\|_{L^2} \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

pois $1/2^{N_1-1} < \epsilon/2$ e para $k > N_1$, $1/2^{k-1} < 1/2^{N_1-1}$. Definimos então $\mathbf{u}_{0R} := \phi_{R,n_R}|_{\Omega_R}$.

Agora, veremos a escolha **(3.2)**. Como $H_0^1(\Omega_R)^3$ é denso em $L^2(\Omega_R)^3$, existe uma sequência $\mathbf{z}_m^R$ em $H_0^1(\Omega_R)^3$ tal que $\mathbf{z}_m^R \rightarrow \mathbf{w}_{0R}$ em $L^2(\Omega_R)^3$ no sentido forte. Tomando a extensão por zero fora de Ω , temos que $\widetilde{\mathbf{z}_m^R} \rightarrow \widetilde{\mathbf{w}_{0R}}$ em $L^2(\Omega)^3$, forte. Sabemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$. Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{\psi_{m,n}\}$ em $\mathcal{D}(\Omega)^3$ satisfazendo $\psi_{m,n} \rightarrow \mathbf{z}_m$ em $H_0^1(\Omega)^3$ fortemente. Vamos tomar $R = m$, de sorte que $\widetilde{\mathbf{z}_m^R}$ será denotada apenas por $\mathbf{z}_m$. Agora vamos extrair uma subsequência $\{\psi_{m,n}\}$. Sejam

$$n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|\psi_{1,n_1} - \mathbf{z}_1\|_{L^2} < \frac{1}{2^0},$$

$$n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1 \text{ tal que } \|\psi_{2,n_2} - \mathbf{z}_2\|_{L^2} < \frac{1}{2^1},$$

$$n_3 \in \mathbb{N}, n_3 > n_2 \text{ tal que } \|\psi_{3,n_3} - \mathbf{z}_3\|_{L^2} < \frac{1}{2^2},$$

.....

$$n_k \in \mathbb{N}, n_k > n_{k-1} \text{ tal que } \|\psi_{k,n_k} - \mathbf{z}_k\|_{L^2} < \frac{1}{2^{k-1}},$$

.....

Com essa escolha, a subsequência $\{\psi_{k,n_k}\}$ é uma sequência em $\mathcal{D}(\Omega)^3$ que converge fortemente para $\mathbf{w}_0$ em $L^2(\Omega)^3$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existem $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ tais que

1. $1/2^{N_1-1} < \epsilon/3$,
2. $\|\mathbf{z}_n - \mathbf{w}_0\|_{L^2} < \epsilon/3$, para todo $k > N_2$,
3. $\int_{\Omega - \Omega_k} \|\mathbf{w}_0\|_{L^2}^2 < \epsilon/3$, para todo $k > N_3$.

Logo, para $k > \max \{N_1, N_2, N_3\}$, temos

$$\|\psi_{k,n_k} - \mathbf{w}_0\|_{L^2} \leq \|\psi_{k,n_k} - \mathbf{z}_k\|_{L^2} + \|\mathbf{z}_k - \widetilde{\mathbf{w}_{0k}}\|_{L^2} + \|\widetilde{\mathbf{w}_{0k}} - \mathbf{w}_0\|_{L^2} \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon,$$

pois $1/2^{N_1-1} < \epsilon/2$ e para $k > N_1$, $1/2^{k-1} < 1/2^{N_1-1}$. Definimos $\mathbf{w}_{0R} := \psi_{R,n_R}|_{\Omega_R}$.

De posse dessas seqüências, obtemos as estimativas

$$(3.6) \quad \|\widetilde{\mathbf{u}_{0R}}\|_{L^2} \leq C, \text{ independente de } R, \text{ em virtude da convergência (3.1) ,}$$

$$(3.7) \quad \|\widetilde{\mathbf{w}_{0R}}\|_{L^2} \leq C, \text{ independente de } R, \text{ em virtude da convergência (3.2) ,}$$

$$(3.8.1) \quad a = \infess \rho_0 \leq \infess \rho_{0R},$$

$$(3.8.2) \quad b = \supess \rho_0 \geq \supess \rho_{0R},$$

$$(3.8.3) \quad \widetilde{\rho_{0R}} \rightarrow \rho_0 \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(\Omega),$$

$$(3.9) \quad \|\mathbf{f}_R\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega_R)^3)} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega)^3)}, \forall q \in [6/5, 2],$$

$$(3.10) \quad \|\mathbf{g}_R\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega_R)^3)} \leq \|\mathbf{g}\|_{L^1(0,T;L^q(\Omega)^3)}, \forall q \in [6/5, 2].$$

Usando o Teorema 2.1.1, obtemos uma solução $\{\rho_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{w}_R, p_R\}$ do problema **(3.0.a)-(3.9)**, com

$$\Omega, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \rho_0, \mathbf{f} \text{ e } \mathbf{g}$$

substituídos, respectivamente, por

$$\Omega_R, \mathbf{u}_{0R}, \mathbf{w}_{0R}, \rho_{0R}, \mathbf{f}_R \text{ e } \mathbf{g}_R.$$

Assim, a solução $\{\rho_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{w}_R, p_R\}$ satisfaz

$$(3.11) \quad \rho_R \in L^\infty(\Omega_R),$$

$$(3.12) \quad \mathbf{u}_R \in L^2(0, T; W_R),$$

$$(3.13) \quad \mathbf{w}_R \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_R)^3),$$

$$(3.14) \quad \rho_R^{1/2} \mathbf{u}_R \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_R)^3),$$

$$(3.15) \quad \rho_R^{1/2} \mathbf{w}_R \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_R)^3),$$

$$(3.16) \quad \inf_{\text{ess}} \rho_{0R} \leq \rho_R \leq \sup_{\text{ess}} \rho_{0R},$$

$$(3.17) \quad \frac{\partial \rho_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_R \mathbf{u}_R) = 0, \text{ em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_R)) \cap L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega_R)),$$

$$(3.18) \quad \left\langle \frac{\partial \rho_R \mathbf{u}_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{u}_R) - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u}_R - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}_R - \rho_R \mathbf{f}_R, \mathbf{v}_R \right\rangle = 0, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T),$$

para todo $\mathbf{v}_R \in W_R$,

$$(3.19)$$

$$\left\langle \frac{\partial \rho_R \mathbf{w}_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{w}_R) - (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w}_R + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \text{div } \mathbf{w}_R + 4\mu_R \mathbf{w}_R \right. \\ \left. - 2\mu_R \text{rot } \mathbf{u}_R - \rho_R \mathbf{g}_R, \mathbf{z}_R \right\rangle = 0,$$

$$\text{em } \mathcal{D}'(0, T), \text{ para todo } \mathbf{z}_R \in L^2(\Omega_R)^3,$$

$$(3.20) \quad \rho_R \in C([0, T]; W^{-1,\infty}(\Omega_R)), \rho_R(0) = \rho_0, q.t.p. \text{ em } \Omega_R,$$

$$(3.21) \quad \left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R dx \right) \in C([0, T]), \text{ para todo } \mathbf{v}_R \in V_R,$$

$$(3.22) \quad \left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R dx \right)(0) = \int_{\Omega_R} \rho_{0R} \mathbf{u}_{0R} \cdot \mathbf{v}_R dx, \text{ para todo } \mathbf{v}_R \in V_R,$$

$$(3.23) \quad \left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{z}_R dx \right) \in C([0, T]), \text{ para todo } \mathbf{z}_R \in H_0^1(\Omega_R)^3,$$

$$(3.24) \quad \left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{z}_R dx \right)(0) = \int_{\Omega_R} \rho_{0R} \mathbf{w}_{0R} \cdot \mathbf{z}_R dx, \text{ para todo } \mathbf{z}_R \in H_0^1(\Omega_R)^3,$$

4.3 Estimativas

Obteremos agora estimativas que nos permitirão obter subsequências convenientes e, conseqüentemente, fazer a passagem ao limite nas equações do sistema assimétrico. Essas estimativas independem de R , num sentido que será tornado preciso adiante.

4.3.1 Estimativas das funções

Inicialmente notamos que, pelas limitações (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3) e (3.16) da seção anterior, temos

$$\|\rho_R\|_{L^\infty} \leq C \quad \text{e} \quad \inf \rho_0 \leq \rho_R \leq \sup \rho_0 \quad (4.3.1)$$

Conforme a demonstração do Teorema 2.1.1, as limitações obtidas sobre $\mathbf{u}_R$ e $\mathbf{w}_R$ dependem dos dados iniciais mas não de Ω . Portanto

$$\|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_R)^3)} \leq C \quad (4.3.2)$$

e

$$\|\rho_R \mathbf{w}_R\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_R)^3)} \leq C, \quad (4.3.3)$$

onde C é uma constante que depende dos dados iniciais de $\mathbf{f}$ e de $\mathbf{g}$. Ainda nos reportando à demonstração do Teorema 2.1.1, as estimativas obtidas para $\nabla \mathbf{u}_R$ e $\nabla \mathbf{w}_R$ também o foram de forma independente de Ω , valendo portanto

$$\|\nabla \mathbf{u}_R\|_{L^2} \leq C \quad (4.3.4)$$

e

$$\|\nabla \mathbf{w}_R\|_{L^2} \leq C. \quad (4.3.5)$$

Observemos que as estimativas (4.3.4) e (4.3.5) nos mostram que

$$\|\mathbf{u}_R\|_{L^2(0,T;W_R)} \leq C \quad (4.3.6)$$

e

$$\|\mathbf{w}_R\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega_R)^3)} \leq C. \quad (4.3.7)$$

Os mesmos argumentos que usamos anteriormente também nos permitem concluir que

$$\|\rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{u}_R\|_{L^{4/3}(0,T;L^2(\Omega_R)^9)} \leq C \quad (4.3.8)$$

e

$$\|\rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{w}_R\|_{L^{4/3}(0,T;L^2(\Omega_R)^9)} \leq C, \quad (4.3.9)$$

onde C é uma constante que independe de R . Em virtude dessa independência as estimativas anteriores continuam válidas se trocarmos $\rho_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{w}_R, \Omega_R, Q_R$ e W_R , respectivamente por $\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}_R, \tilde{\mathbf{w}}_R, \Omega, Q$ e W .

4.3.2 Estimativas nas derivadas com relação ao tempo

Inicialmente, mostraremos que

$$\left(\frac{\partial \tilde{\rho}_R}{\partial t} \right)_R \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\omega)), \quad (4.3.10)$$

para todo conjunto aberto limitado $\omega \subset \Omega$. Em primeiro lugar, devemos notar que, para um tal ω , existe $\tilde{R} > 0$ que satisfaz $\omega \subset \Omega_R$, para todo $R > \tilde{R}$. Nessas condições, teremos

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R) = 0 \text{ em } \omega \times (0, T).$$

A estimativa (4.3.2) nos mostra que isso é verdade, pois as derivadas são efetuadas nas variáveis espaciais. A seguir obteremos uma estimativa para derivadas na variável t das funções $\rho_R \mathbf{u}_R$ e $\rho_R \mathbf{w}_R$. A igualdade (3.18) pode ser reescrita como

$$\left\langle \frac{\partial \rho_R \mathbf{u}_R}{\partial t}, \mathbf{v}_R \right\rangle = \langle \rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{u}_R - (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}_R, \nabla \mathbf{v}_R \rangle + \langle 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}_R + \rho_R \mathbf{f}_R, \mathbf{v}_R \rangle,$$

ainda em $\mathcal{D}'(0, T)$, para todo $\mathbf{v}_R \in W_R$. As distribuições anteriores podem ser vistas como produtos internos e, como possuem derivadas temporais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \right| &\leq \|\rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{u}_R - (\mu - \mu_r) \nabla \mathbf{u}_R\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2} \\ &\quad + \|\rho_R \mathbf{f}_R + 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}_R\|_{L^{6/5}} \|\mathbf{v}_R\|_{L^6} \end{aligned}$$

Como $\|\operatorname{rot} \mathbf{w}_R\|_{L^2} \leq C \|\nabla \mathbf{w}_R\|_{L^2}$, $\|\nabla \mathbf{w}_R\|_{L^2}$ é limitada e $L^2(\Omega_R) \hookrightarrow L^{6/5}(\Omega_R)$, segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \right| &\leq \|\rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{u}_R - (\mu + \mu_R) \nabla \mathbf{u}_R\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2} \\ &\quad + b \|\mathbf{f}_R\|_{L^{6/5}} \|\mathbf{v}_R\|_{L^6} + 2\mu_R C \|\nabla \mathbf{w}_R\|_{L^2} \|\mathbf{v}\|_{L^6}. \end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 1.1.2, parte (iii), temos que

$$\|\mathbf{v}_R\|_{L^6} \leq C \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \right| &\leq \|\rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{u}_R - (\mu + \mu_r) \nabla \mathbf{u}_R\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_r\|_{L^2} \\ &\quad + b \|\mathbf{f}_R\|_{L^{6/5}} \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2} + C \|\nabla \mathbf{w}_R\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ainda podemos escrever essa última desigualdade como

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \right| \leq C (\varphi_1 + \psi_{1R}) \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2}, \quad (4.3.11)$$

onde

$$\varphi_1 = b \|\mathbf{f}\|_{L^{6/5}},$$

$$\psi_{1R} = \|\rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{u}_R - (\mu + \mu_R) \nabla \mathbf{u}_R\|_{L^2} + C \|\nabla \mathbf{w}_R\|_{L^2}.$$

Temos que ψ_{1R} é uniformemente limitada em $L^{4/3}(0, T)$, em virtude das estimativas (4.3.6) e (4.3.8). Obteremos agora uma estimativa semelhante para $\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{z}_R \right|$.

A igualdade (3.19) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \rho_R \mathbf{w}_R}{\partial t}, \mathbf{z}_R \right\rangle &= \langle \rho_R \mathbf{u}_R \mathbf{w}_R - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}_R, \nabla \mathbf{z}_R \rangle \\ &\quad + \langle 2\mu_R \operatorname{rot} \mathbf{u}_R + \rho_R \mathbf{g}_R - 4\mu_R \mathbf{w}_R, \mathbf{z}_R \rangle + \langle (c_0 + c_d - c_a) \operatorname{div} \mathbf{w}_R, \operatorname{div} \mathbf{z}_R \rangle, \end{aligned}$$

em $\mathcal{D}'(0, T)$, para todo $\mathbf{z}_R \in L^2(\Omega_R)^3$, de onde resulta

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{z}_R \right| &\leq \| \rho \mathbf{u}_R \mathbf{w}_R - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}_R \|_{L^2} \| \nabla \mathbf{z}_R \|_{L^2} \\ &\quad + \| \rho_R \mathbf{g}_R - 4\mu_R \mathbf{w}_R + 2\mu_R \text{rot } \mathbf{u}_R \|_{L^{6/5}} \| \mathbf{z}_R \|_{L^6} \\ &\quad + \| (c_0 + c_a + c_d) \text{div } \mathbf{w}_R \|_{L^2} \| \text{div } \mathbf{z}_R \|_{L^2}. \end{aligned}$$

Tendo em conta as seguintes desigualdades

$$\| \text{rot } \mathbf{u}_R \|_{L^2} \leq C \| \nabla \mathbf{u}_R \|_{L^2},$$

$$\| \text{div } \mathbf{z}_R \|_{L^2} \leq C \| \nabla \mathbf{z}_R \|_{L^2},$$

$$\| \mathbf{z}_R \|_{L^6} \leq \| \nabla \mathbf{z}_R \|_{L^2},$$

temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{z}_R \right| &\leq \| \rho \mathbf{u}_R \mathbf{w}_R - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}_R \|_{L^2} \| \nabla \mathbf{z}_R \|_{L^2} \\ &\quad + \| \rho_R \mathbf{g}_R \|_{L^{6/5}} \| \nabla \mathbf{z}_R \|_{L^2} \\ &\quad + \| 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}_R - 4\mu_R \mathbf{w}_R \|_{L^{6/5}} \| \nabla \mathbf{z}_R \|_{L^2} \\ &\quad + \| (c_0 + c_d - c_a) \text{div } \mathbf{w}_R \|_{L^2} \| \nabla \mathbf{z}_R \|_{L^2} \end{aligned}$$

que ainda pode ser escrita como

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{z}_R \right| \leq [\varphi_2 + \psi_{2R}] \| \nabla \mathbf{z}_R \|_{L^2}, \quad (4.3.12)$$

onde

$$\varphi_2 = C \| \mathbf{g} \|_{L^{6/5}},$$

$$\psi_{2R} = \| \rho \mathbf{u}_R \mathbf{w}_R - (c_a + c_d) \nabla \mathbf{w}_R \|_{L^2} + \| 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}_R - 4\mu_R \mathbf{w}_R \|_{L^{6/5}} + \| (c_0 + c_d - c_a) \text{div } \mathbf{w}_R \|_{L^2},$$

Observe que ψ_{2R} é uniformemente limitada em $L^{4/3}(0, T)$, em virtude das estimativas (4.3.7) e (4.3.9).

4.3.3 Estimativas fracionárias no tempo

Nosso objetivo agora é obter estimativas sobre $\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R$ e $\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R$ nos Espaços de Nikolskii. Mais especificamente, vamos mostrar que

$$(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R)_R \text{ e } (\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R)_R \text{ são uniformemente limitadas em } N^{1/4,2}(0, T; W^{-1,3}(\omega)^3), \quad (4.3.13)$$

para todo conjunto aberto e limitado $\omega \subset \Omega$. A nossa estratégia será mostrar, no caso de $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R)_R$, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\tau_h(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R) - \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\omega)^3)} \leq Ch^{1/4},$$

para qualquer ω nas condições acima. Note que, feito isso, teremos

$$\begin{aligned} \|\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R\|_{N^{1/4,2}(0, T; W^{-1,3}(\omega)^3)} &= \|\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R\|_{L^2(0, T; W^{-1,3}(\omega)^3)} \\ &\quad + \sup_{0 < h < T} h^{-1/4} \|\tau_h(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R) - \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\omega)^3)} \\ &\leq \|\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R\|_{L^2(0, T; L^2(\omega)^3)} + C \\ &\leq C, \end{aligned}$$

onde usamos a estimativa (4.3.2) e o fato de que $L^2(\omega) \hookrightarrow W^{-1,3}(\omega)$. Estratégia semelhante será tomada no caso de $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R)_R$. Para atingirmos nosso objetivo, vamos adaptar os argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.1.1. Faremos inicialmente o caso de $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R)_R$. Dividiremos a nossa análise em quatro etapas a fim de que fiquem perfeitamente claras as idéias envolvidas. Em primeiro lugar, observe que para um tal ω existe $\tilde{R} > 0$ tal que $\omega \subset \Omega_R$, para todo $R > \tilde{R}$.

Primeira Etapa: Devido à regularidade de $\rho_R \mathbf{u}_R$ e pela estimativa (4.3.10) temos, para

cada $h \in (0, T)$ e $\mathbf{v}_R \in V_R$,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h)\mathbf{u}_R(t+h) - \rho_R(t)\mathbf{u}_R(t)] \cdot \mathbf{v}_R &= \left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \right)(t+h) - \left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \right)(t) \\
 &= \int_t^{t+h} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \right)(s) ds \\
 &\leq \int_t^{t+h} C [\varphi_1 + \psi_{1R}] \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2} \\
 &= C \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2} \left(\int_t^{t+h} [\varphi_1 + \psi_{1R}] ds \right).
 \end{aligned}$$

Fazendo $\mathbf{v}_R = \mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)$ e integrando a desigualdade anterior em t , para $t \in (0, T-h)$, com $h > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) - \rho_R \mathbf{u}_R] \cdot [\tau_h(\mathbf{u}_R) - \mathbf{u}_R] dx dt \\
 &\leq \int_0^{T-h} C \|\nabla \mathbf{u}_R(t+h) - \nabla \mathbf{u}_R(t)\|_{L^2} \left(\int_t^{t+h} [\varphi_1 + \psi_{1R}] ds \right) dt. \quad (4.3.14)
 \end{aligned}$$

Fazendo

$$I_1 := \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) - \rho_R \mathbf{u}_R] \cdot [\tau_h(\mathbf{u}_R) - \mathbf{u}_R] dx dt,$$

e usando o Teorema de Fubini na integral do lado direito de (4.3.14), ficamos com

$$I_1 \leq \int_0^T (\varphi_1 + \psi_{1R})(s) \left(\int_{(s-h)^*}^{s^*} \|\nabla \mathbf{u}_R(t+h) - \nabla \mathbf{u}_R(t)\|_{L^2} dt \right) ds.$$

Usando a desigualdade de Hölder na segunda integral de (4.3.14), teremos

$$\int_{(s-h)^*}^{s^*} \|\nabla \mathbf{u}_R(t+h) - \nabla \mathbf{u}_R(t)\|_{L^2} \leq 2 \|\nabla \mathbf{u}_R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_R)^9)},$$

onde

$$s^* = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0, \\ s, & \text{se } 0 \leq s \leq T-h, \\ T-h & \text{se } s \geq T-h. \end{cases}$$

Assim ficamos com

$$I_1 \leq 2h^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_R)^9)} \int_0^T (\varphi_1 + \psi_{1R})(s) ds.$$

Como $\|\nabla \mathbf{u}_R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_R)^9)}$ e $\int_0^T (\varphi_1 + \psi_{1R})(s) ds$ são uniformemente limitadas, temos

$$I_1 := \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) - \rho_R \mathbf{u}_R] \cdot [\tau_h(\mathbf{u}_R) - \mathbf{u}_R] dx dt \leq Ch^{1/2}, \quad (4.3.15)$$

onde C é uma constante que não depende de R .

Segunda Etapa: Suponha que $z \in W_0^{1,3/2}(\Omega_R)$. Multiplicando a igualdade

$$\frac{\partial \rho_R}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_R \mathbf{u}_R)$$

por z e integrando em Ω_R , teremos

$$\int_{\Omega_R} \frac{\partial \rho_R}{\partial t} \cdot z dx = - \int_{\Omega_R} \operatorname{div}(\rho_R \mathbf{u}_R) \cdot z dx = \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \nabla z dx.$$

Ademais, temos que

$$\int_{\Omega_R} \frac{\partial \rho_R}{\partial t} \cdot z dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \cdot z dx,$$

pela regularidade que ρ_R possui. Assim, em vista dessa última igualdade, ficaremos com

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \rho_R \cdot z dx = \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \nabla z dx.$$

Integrando a igualdade anterior entre t e $t+h$, ficaremos com

$$\int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) - \rho_R(t)] \cdot z dx = \int_t^{t+h} \int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R(s) ds dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, ficaremos com

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) - \rho_R(t)] \cdot z dx \right| &\leq \int_t^{t+h} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^3} \|\nabla z\|_{L^{3/2}} \\
&= \|\nabla z\|_{L^{3/2}} \int_t^{t+h} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^3} ds \\
&\leq \|\nabla z\|_{L^{3/2}} \left(\int_t^{t+h} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^3}^4 \right)^{1/4} \left(\int_t^{t+h} 1 ds \right)^{3/4} \\
&\leq \|\nabla z\|_{L^{3/2}} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^4(0,T;L^3(\Omega_R)^3)} h^{3/4}. \quad (4.3.16)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^3}^4 = \left(\int_{\Omega_R} |\rho_R \mathbf{u}_R|^2 |\rho_R \mathbf{u}_R| \right)^{4/3} \leq \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^4}^{8/3} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^2}^{4/3}.$$

Como $L^6(\Omega_R) \hookrightarrow L^4(\Omega_R)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^3}^4 &\leq C \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^6}^{8/3} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^2}^{4/3} \\
&\leq C b^{16} \|\mathbf{u}_R\|_{L^6} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^2}. \quad (4.3.17)
\end{aligned}$$

Como as quantidades envolvidas na última desigualdade são todas uniformemente limitadas, segue que

$$\int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) - \rho_R(t)] \cdot z dx \leq C \|\nabla z\|_{L^{3/2}} h^{3/4}, \quad (4.3.18)$$

para todo $z \in W_0^{1,3/2}(\Omega_R)$. Façamos $z = -\mathbf{u}_R \cdot [\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)]$. Com essa escolha segue que $z \in W_0^{1,3/2}(\Omega_R)$ pelo Lema 1.1.2,(i) e pelo fato de $\mathbf{u}_R \in W_0^{1,2}(\Omega_R)$. Antes de prosseguirmos, faremos uma estimativa adicional. Temos

$$\begin{aligned}
\nabla z &= \nabla(-\mathbf{u}_R(t) \cdot (\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t))) \\
&= -\nabla \mathbf{u}_R(t) \cdot (\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)) - \mathbf{u}_R(t) \cdot \nabla(\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \|\nabla z\|_{L^{3/2}} &= \|\nabla \mathbf{u}_R(t) \cdot (\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)) + \mathbf{u}_R(t) \cdot \nabla (\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t))\|_{L^{3/2}} \\
 &\leq \|\nabla \mathbf{u}_R(t) \cdot (\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t))\|_{L^{3/2}} \\
 &\quad + \|\mathbf{u}_R(t) \cdot \nabla (\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t))\|_{L^{3/2}} \\
 &\leq \|\nabla \mathbf{u}_R(t)\|_{L^2} \|\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)\|_{L^6} \\
 &\quad + \|\mathbf{u}_R(t)\|_{L^6} \|\nabla (\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t))\|_{L^2}.
 \end{aligned}$$

Agora, integrando (4.3.17) em $(0, T-h)$, ficamos com

$$\begin{aligned}
 - \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) - \rho_R(t)] \mathbf{u}_R(t) \cdot [\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)] dx dt \\
 = - \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h \rho_R - \rho_R] \mathbf{u}_R \cdot [\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R] dx dt \\
 \leq \int_0^{T-h} C h^{3/4} \|\nabla (-\mathbf{u}_R(t) \cdot [\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)]) \mathbf{u}_R\|_{L^{3/2}} dt.
 \end{aligned}$$

Pelas estimativas feitas anteriormente, temos que

$$\|\nabla (-\mathbf{u}_R(t) \cdot [\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)])\|_{L^{3/2}} \leq C,$$

onde C é uma constante independente de R . Assim, tendo em conta que T é constante, temos

$$- \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) - \rho_R(t)] \mathbf{u}_R(t) \cdot [\mathbf{u}_R(t+h) - \mathbf{u}_R(t)] dx dt \leq C h^{3/4}. \tag{4.3.19}$$

Terceira Etapa: Adicionando (4.3.15) e (4.3.19), ficamos com

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) - \rho_R \mathbf{u}_R] \cdot [\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R] - [\tau_h \rho_R - \rho_R] \mathbf{u}_R \cdot [\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R] \\
&= \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} \tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) \cdot \tau_h \mathbf{u}_R - \tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) \cdot \mathbf{u}_R - \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \tau_h \mathbf{u}_R + \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{u}_R \\
&\quad - \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} \tau_h \tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) \cdot \tau_h \mathbf{u}_R + \tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) \cdot \mathbf{u}_R + \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \tau_h \mathbf{u}_R - \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{u}_R \\
&= \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} \rho_R(t+h) |\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R|^2 dx dt \\
&\leq Ch^{1/2} + C^{3/4}.
\end{aligned}$$

Usando a estimativa (4.3.1), temos

$$\int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} |\tau_h \rho_R [\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R]|^2 \leq Ch^{1/2} (1 + h^{1/4}) \leq Ch^{1/2},$$

ou seja,

$$\|\tau_h \rho_R [\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R]\|_{L^2(0, T-h; L^2(\Omega_R)^3)} \leq Ch^{1/4}.$$

Quarta Etapa: Usando a igualdade (3.19), temos

$$\int_t^{t+h} \frac{\partial \rho_R}{\partial t} ds = - \int_t^{t+h} \nabla \cdot (\rho_R \mathbf{u}_R)(s) ds \text{ em } W^{-1,6}(\Omega_R),$$

ou seja,

$$\rho_R(t+h) - \rho_R(t) = \int_t^{t+h} \nabla \cdot (\rho_R \mathbf{u}_R) \text{ em } W^{-1,6}(\Omega_R),$$

quase sempre em $(0, T-h)$. Por outro lado, por causa das estimativas (4.3.1) e (4.3.6), segue que $\rho_R \mathbf{u}_R$ é uniformemente limitada em $L^2(0, T; L^6(\Omega_R)^3)$. Assim

$$\begin{aligned}
\|\tau_h \rho_R - \rho_R\|_{L^\infty(0, T-h; W^{-1,6}(\Omega_R))} &\leq C \int_t^{t+h} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^6} ds \\
&\leq Ch^{1/2} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^2(0, T; L^6(\Omega_R)^3)} \\
&\leq Ch^{1/2}.
\end{aligned}$$

Sabemos, pelo Lema 1.4.2, parte (iv) que $(u, \mu) \mapsto \mu u$ é uma aplicação bem definida

e contínua de $K_0^1(\Omega) \times W^{-1,6}(\Omega)$ em $W^{-1,3}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|(\tau_h \rho_R - \rho_R) \mathbf{u}_R\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega))} &\leq \|(\tau_h \rho_R - \rho_R)\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,6}(\Omega_R))} \|\mathbf{u}_R\|_{L^2(0, T; W_R)} \\ &\leq Ch^{1/2}. \end{aligned}$$

Como

$$\tau_h(\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R) + (\tau_h \rho_R - \rho_R) \mathbf{u}_R = \tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) - \rho_R \mathbf{u}_R,$$

segue que

$$\begin{aligned} \|\tau_h(\rho_R \mathbf{u}_R) - \rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega_R)^3)} &\leq \|(\tau_h \rho_R - \rho_R) \mathbf{u}_R\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega_R)^3)} \\ &\quad + \|\tau_h \rho_R (\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R)\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega_R)^3)} \\ &\leq Ch^{1/2} + C \|\tau_h \rho_R (\tau_h \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_R)\|_{L^2(0, T-h; L^2(\Omega_R)^3)} \\ &\leq Ch^{1/2} + Ch^{1/4} \\ &\leq Ch^{1/4}. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Faremos agora uma estimativa semelhante para $\widetilde{\rho_R \mathbf{w}_R}$. O nosso objetivo é mostrar que existe uma constante $C > 0$ de modo que

$$\|\tau_h(\widetilde{\rho_R \mathbf{w}_R}) - \widetilde{\rho_R \mathbf{w}_R}\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\omega)^3)} \leq Ch^{1/4},$$

para qualquer $\omega \subset \Omega$, aberto e limitado. Atingiremos esse objetivo mostrando que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\tau_h(\widetilde{\rho_R \mathbf{w}_R}) - \widetilde{\rho_R \mathbf{w}_R}\|_{L^2(T-h; W^{-1,3}(\omega)^3)} \leq Ch^{1/4},$$

para qualquer ω nas condições acima. Em primeiro lugar, observe que para um tal ω , existe $\widetilde{R} > 0$ tal que $\omega \subset \Omega_R$, para todo $R > \widetilde{R}$. Analogamente ao que foi feito no caso de $\widetilde{\rho_R \mathbf{u}_R}$, essa estimativa também fornecerá o que desejamos. Da mesma forma que no caso anterior, dividiremos nossa análise em etapas, bastante semelhantes às anteriores. Por isso mesmo omitiremos as provas de algumas passagens.

Primeira Etapa: A regularidade de $\rho_R \mathbf{w}_R$ e a estimativa (4.10), acarretam, para cada

$$h \in (0, T) \text{ e } \mathbf{z}_R \in H_0^1(\Omega_R)^3,$$

$$\int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) \mathbf{w}_R(t+h) - \rho_R(t) \mathbf{w}_R(t)] \cdot \mathbf{z}_R \leq C \|\nabla \mathbf{z}_R\|_{L^2} \left(\int_t^{t+h} [\varphi_2 + \psi_{2R}] ds \right),$$

onde C é uma constante que não depende de R . Fazendo $\mathbf{z}_R = \mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)$ e integrando a desigualdade anterior em t , para $t \in (0, T-h)$, com $h > 0$, ficamos com

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h(\rho_R \mathbf{w}_R) - \rho_R \mathbf{w}_R] \cdot [\tau_h(\mathbf{w}_R) - \mathbf{w}_R] dx dt \\ & \leq \int_0^{T-h} C \|\nabla \mathbf{w}_R(t+h) - \nabla \mathbf{w}_R(t)\|_{L^2} \left(\int_t^{t+h} [\varphi_2 + \psi_{2R}] ds \right) dt. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Fazendo

$$J_1 := \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h(\rho_R \mathbf{w}_R) - \rho_R \mathbf{w}_R] \cdot [\tau_h(\mathbf{w}_R) - \mathbf{w}_R] dx dt,$$

usando o Teorema de Fubini e a desigualdade de Hölder no membro direito de (4.3.21), ficamos com

$$J_1 \leq 2h^{1/2} \|\nabla \mathbf{w}_R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_R)^9)} \int_0^T (\varphi_2 + \psi_{2R})(s) ds.$$

Como $\|\nabla \mathbf{w}_R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_R)^9)}$ e $\int_0^T (\varphi_2 + \psi_{2R})(s) ds$ são uniformemente limitadas então temos que

$$J_1 := \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h(\rho_R \mathbf{w}_R) - \rho_R \mathbf{w}_R] \cdot [\tau_h(\mathbf{w}_R) - \mathbf{w}_R] dx dt \leq Ch^{1/2}, \quad (4.3.22)$$

onde C é uma constante que não depende de R .

Segunda Etapa: Lembramos que, para cada $z \in W_0^{1,3/2}(\Omega_R)$, vale

$$-\int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) - \rho_R(t)] \cdot z dx dt \leq Ch^{3/4} \|\nabla z\|_{L^{3/2}}.$$

Fazendo $z = -\mathbf{w}_R \cdot [\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)]$, temos que $z \in W_0^{1,3/2}(\Omega_R)$ pelo Lema 1.4.2, parte (i) e pelo fato de que $\mathbf{w}_R \in W_0^{1,2}(\Omega_R)$. Ademais temos

$$\begin{aligned}\nabla z &= \nabla (-\mathbf{w}_R(t) \cdot (\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t))) \\ &= -\nabla \mathbf{w}_R(t) \cdot (\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)) - \mathbf{w}_R(t) \cdot \nabla (\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\nabla z\|_{L^{3/2}} &= \|\nabla \mathbf{w}_R(t) \cdot (\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)) + \mathbf{w}_R(t) \cdot \nabla (\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t))\|_{L^{3/2}} \\ &\leq \|\nabla \mathbf{w}_R(t) \cdot (\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t))\|_{L^{3/2}} \\ &\quad + \|\mathbf{w}_R(t) \cdot \nabla (\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t))\|_{L^{3/2}} \\ &\leq \|\nabla \mathbf{w}_R(t)\|_{L^2} \|\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)\|_{L^6} \\ &\quad + \|\mathbf{w}_R(t)\|_{L^6} \|\nabla (\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t))\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}& - \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) - \rho_R(t)] \mathbf{w}_R(t) \cdot [\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)] dx dt \\ &= - \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h \rho_R - \rho_R] \mathbf{w}_R \cdot [\tau_h \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_R] dx dt \\ &\leq \int_0^{T-h} Ch^{3/4} \|\nabla (-\mathbf{w}_R(t) \cdot [\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)]) \mathbf{w}_R\|_{L^{3/2}} dt.\end{aligned}$$

Pelas estimativas encontradas anteriormente, temos

$$\|\nabla (-\mathbf{w}_R(t) \cdot [\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)])\|_{L^{3/2}} \leq C,$$

uniformemente, ou seja, independentemente de R . Como T é constante, temos

$$- \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\rho_R(t+h) - \rho_R(t)] \mathbf{w}_R(t) \cdot [\mathbf{w}_R(t+h) - \mathbf{w}_R(t)] dx dt \leq Ch^{3/4}. \quad (4.3.23)$$

Terceira Etapa: Adicionando (4.3.22) e (4.3.23) ficaremos com

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} [\tau_h(\rho_R \mathbf{w}_R) - \rho_R \mathbf{w}_R] \cdot [\tau_h \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_R] - [\tau_h \rho_R - \rho_R] \mathbf{w}_R \cdot [\tau_h \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_R] dx dt \\ \leq Ch^{1/2} + Ch^{3/4}. \end{aligned}$$

Tendo em conta a estimativa (4.3.1), temos

$$\int_0^{T-h} \int_{\Omega_R} |\tau_h \rho_R [\tau_h \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_R]|^2 dx dt \leq Ch^{1/2} (1 + h^{1/4}) \leq Ch^{1/2},$$

ou seja,

$$\|\tau_h \rho_R [\tau_h \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_R]\|_{L^2(0, T-h; L^2(\Omega_R)^3)} \leq Ch^{1/4}.$$

Quarta Etapa: Sabemos que

$$\begin{aligned} \|\tau_h \rho_R - \rho_R\|_{L^\infty(0, T-h; W^{-1,6}(\Omega_R))} &\leq C \int_t^{t+h} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^6} ds \\ &\leq Ch^{1/2} \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^2(0, T; L^6(\Omega_R)^3)} \\ &\leq Ch^{1/2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|(\tau_h \rho_R - \rho_R) \mathbf{w}_R\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega))} &\leq \|(\tau_h \rho_R - \rho_R)\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,6}(\Omega_R))} \|\mathbf{w}_R\|_{L^2(0, T; W_R)} \\ &\leq Ch^{1/2}. \end{aligned}$$

Como

$$\tau_h(\tau_h \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_R) + (\tau_h \rho_R - \rho_R) \mathbf{w}_R = \tau_h(\rho_R \mathbf{w}_R) - \rho_R \mathbf{w}_R,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|\tau_h(\rho_R \mathbf{w}_R) - \rho_R \mathbf{w}_R\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega_R)^3)} &\leq \|(\tau_h \rho_R - \rho_R) \mathbf{w}_R\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega_R)^3)} \\
&\quad + \|\tau_h \rho_R (\tau_h \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_R)\|_{L^2(0, T-h; W^{-1,3}(\Omega_R)^3)} \\
&\leq Ch^{1/2} + C \|\tau_h \rho_R (\tau_h \mathbf{w}_R - \mathbf{w}_R)\|_{L^2(0, T-h; L^2(\Omega_R)^3)} \\
&\leq Ch^{1/2} + Ch^{1/4} \\
&\leq Ch^{1/4}.
\end{aligned}$$

4.4 Passagem ao limite

Dividiremos a passagem ao limite em algumas etapas a fim de favorecer o entendimento.

4.4.1 Escolha das subsequências

Sabemos que $\|\tilde{\rho}_R\|_{L^\infty} \leq C$, uma vez que $\|\rho_R\|_{L^\infty} \leq C$, para todo $R > 0$, e a extensão foi feita por zero. Por outro lado, a estimativa (4.3.10) nos mostra que

$$\left(\frac{\partial \tilde{\rho}_R}{\partial t}\right)_R \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\omega)),$$

para todo conjunto aberto e limitado $\omega \subset \Omega$. O Lema 1.2.1, parte (i), aplicado aos espaços $X = L_{loc}^\infty(\Omega)$, $B = W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega)$ e $Y = H_{loc}^{-1}(\Omega)$, acarreta que

$$(\tilde{\rho}_R)_R \text{ está contida em um subconjunto compacto de } C([0, T]; W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega)). \quad (4.4.24)$$

Pelas estimativas (4.3.2) e (4.3.13) e pelo Lema 1.2.1, parte (ii), aplicado aos espaços $X = L_{loc}^2(\Omega)$, $B = W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega)$ e $Y = W_{loc}^{-1,3}(\Omega)$, segue que

$$(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R)_R \text{ está contida num subconjunto compacto de } L^2(0, T; W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega)^3). \quad (4.4.25)$$

Pelas estimativas (4.3.3) e (4.3.13) e pelo Lema 1.2.1, parte (ii), aplicado aos espaços $X = L^2_{loc}(\Omega)$, $B = W^{-1,\infty}_{loc}(\Omega)$ e $Y = W^{-1,3}_{loc}(\Omega)$, segue que

$$(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R)_R \text{ está contida num subconjunto compacto de } L^2(0, T; W^{-1,\infty}_{loc}(\Omega)^3). \quad (4.4.26)$$

Observe que, para cada $\mathbf{v}_R \in V_R$ com $\|\mathbf{v}_R\|_{L^2(\Omega_R)^3}^2 + \|\nabla \mathbf{v}_R\|_{L^2}^2 \leq C$, temos

$$\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \leq \|\rho_R \mathbf{u}_R\|_{L^2} \|\mathbf{v}_R\|_{L^2}.$$

As estimativas (4.3.2) e (4.3.11) e o Lema 1.2.1, parte (iii), acarretam que

$$\left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{v}_R \right)_R \text{ está contida em um subconjunto compacto de } C([0, T]). \quad (4.4.27)$$

Observe que, para cada $\mathbf{z}_R \in H^1_0(\Omega_R)^3$, com $\|\mathbf{z}_R\|_{H^1_0} \leq C$, temos

$$\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{z}_R \leq \|\rho_R \mathbf{w}_R\|_{L^2} \|\mathbf{z}_R\|_{L^2}.$$

As estimativas (4.3.3) e (4.3.12) e o Lema 1.2.1, parte (iii), acarretam que

$$\left(\int_{\Omega_R} \rho_R \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{z}_R \right)_R \text{ está contida em um subconjunto compacto de } C([0, T]). \quad (4.4.28)$$

Faremos agora escolha de subsequências que desempenharão importante papel na passagem ao limite. Para não carregar a notação, denotaremos as subsequências da mesma forma que as seqüências. Pela inclusão (4.4.24) e pela limitação (4.3.1), temos que $(\tilde{\rho}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \rightarrow \rho \text{ forte em } C([0, T]; W^{-1,\infty}_{loc}(\Omega)). \quad (4.4.29)$$

e

$$\tilde{\rho}_R \rightarrow \rho \text{ fraco} - \star \text{ em } L^\infty(Q). \quad (4.4.30)$$

Da limitação (4.3.6), temos que $(\tilde{\mathbf{u}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \mathbf{u} \text{ fraco em } L^2(0, T; W). \quad (4.4.31)$$

Da limitação (4.3.7), temos que $(\tilde{\mathbf{w}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \mathbf{w} \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3). \quad (4.4.32)$$

Da limitação (4.3.2), temos que $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \theta \text{ fraco} - \star \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (4.4.33)$$

Da inclusão (4.4.25), temos que $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \theta \text{ forte em } L^2(0, T; W_{loc}^{-1, \infty}(\Omega)^3). \quad (4.4.34)$$

Das limitações (4.3.1) e (4.3.6), temos que $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \theta \text{ fraco em } L^2(0, T; L^6(\Omega)^3). \quad (4.4.35)$$

Da limitação (4.3.3), temos que $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \xi \text{ fraco} - \star \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (4.4.36)$$

Da inclusão (4.4.26), temos que $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \xi \text{ forte em } L^2(0, T; W_{loc}^{-1, \infty}(\Omega)^3). \quad (4.4.37)$$

Das limitações (4.3.1) e (4.3.7), temos que $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \xi \text{ fraco em } L^2(0, T; L^6(\Omega)^3). \quad (4.4.38)$$

Da limitação (4.3.8), temos que $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{u}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \chi \text{ fraco em } L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^9). \quad (4.4.39)$$

Da limitação (4.3.9), temos que $(\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{w}}_R)_R$ possui uma subsequência que satisfaz

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \kappa \text{ fraco em } L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^9). \quad (4.4.40)$$

A seguir, mostraremos propriedades importantes dos limites das seqüências acima. Pelo Lema 1.4.2, parte (iv), a aplicação produto de $K_0^1(\Omega) \times W^{-1,\infty}(\Omega)$ em $W^{-1,6}(\Omega)$ é contínua. Logo, pelas convergências (4.4.29) e (4.4.32), segue que

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ fraco em } L^2(0, T; W_{loc}^{-1,6}(\Omega)^9).$$

Comparando com a convergência (4.4.35) e lembrando que $L_{loc}^6(\Omega) \subset W_{loc}^{-1,6}(\Omega)$, segue que

$$\theta = \rho \mathbf{u}.$$

Sabemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow K_0^1(\Omega)$. O Lema 1.4.2, parte (iv), juntamente com as convergências (4.4.29) e (4.4.32), acarretam que

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \rho \mathbf{w} \text{ fraco em } L^2(0, T; W_{loc}^{-1,6}(\Omega)^3).$$

Comparando com a convergência (4.4.38) usando a inclusão $L_{loc}^6(\Omega) \subset W_{loc}^{-1,6}(\Omega)$, temos que

$$\xi = \rho \mathbf{w}.$$

A convergência (4.4.34) aliada ao fato de que $\theta = \rho \mathbf{u}$ acarretam que

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ fraco em } L^2(0, T; W^{-1,\infty}(\Omega)^3).$$

Juntando isso à convergência (4.4.31) e ao Lema 1.4.2, parte (iv), temos

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ fraco em } L^2(0, T; W_{loc}^{-1,6}(\Omega)^9).$$

Comparando com a convergência (4.4.39), segue que

$$\chi = \rho \mathbf{u}.$$

Analogamente, convergência (4.4.37) juntamente com o fato de que $\xi = \rho \mathbf{w}$ acarretam

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \rho \mathbf{w} \text{ fraco em } L^2(0, T; W^{-1,\infty}(\Omega)^3).$$

Esse fato somado à convergência (4.4.31) e ao Lema 1.4.2, parte (iv), nos dão

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \text{ fraco em } L^2(0, T; W_{loc}^{-1,6}(\Omega)^9).$$

Comparando com a convergência (4.4.40), temos

$$\kappa = \rho \mathbf{u} \mathbf{w}.$$

4.4.2 Sentido das convergências

Veremos agora o sentido em que ocorrem algumas convergências a fim de que possamos efetuar a passagem ao limite. Vamos fixar $R' > 0$ e consideremos os termos da equação de $\mathbf{u}$. Inicialmente vamos provar que

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R}{\partial t}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \text{ para todo } \mathbf{v} \in V_{R'}.$$

Com efeito, sabemos que

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ fraco-} \star \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Em decorrência disso, temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \mathbf{h} \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{h}, \quad (4.4.41)$$

para todo $\mathbf{h} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Para $\mathbf{s} \in H_0^1(\Omega)^3$ e $\varphi \in \mathcal{D}'(0, T)$, temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \varphi \mathbf{s} \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \varphi \mathbf{s}, \quad (4.4.42)$$

em virtude da convergência (4.4.41). Como $\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R$ e $\rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$, a convergência (4.4.42) implica que

$$\int_0^T \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \varphi \rightarrow \int_0^T \rho \mathbf{u} \varphi \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}'(0, T)$, ou seja,

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \rho \mathbf{u} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3).$$

Dai

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3).$$

Isso implica que, para cada $\varphi \in \mathcal{D}'(0, T)$, vale

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \varphi \right\rangle \rightarrow \left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \varphi \right\rangle \text{ em } H^{-1}(\Omega)^3.$$

Em particular, para cada $\mathbf{v} \in V_{R'}$, temos

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle_{H^{-1}} \rightarrow \left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle_{H^{-1}}. \quad (4.4.43)$$

Usando a notação do Lema 1.4.1, podemos escrever

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R}{\partial t}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle(\varphi)$$

e

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle = \left\langle \frac{\rho \mathbf{u}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle (\varphi).$$

Com essas notações, a convergência (4.4.43) fica

$$\left\langle \frac{\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R}{\partial t}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle (\varphi) \rightarrow \left\langle \frac{\rho \mathbf{u}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle (\varphi),$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ e $\mathbf{v} \in V_{R'}$, ou seja

$$\left\langle \frac{\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R}{\partial t}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\rho \mathbf{u}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle \text{ em } \mathcal{D}'(0, T)$$

para cada $\mathbf{v} \in V_{R'}$. Agora, mostraremos que

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{f}}_R \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \text{ em } L^1(0, T) - \text{fraco, para todo } \mathbf{v} \in V_{R'}.$$

Com efeito, sabemos que

$$\tilde{\mathbf{f}}_R \rightarrow \mathbf{f} \text{ forte em } L^1(0, T; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3).$$

Isso acarreta que

$$\tilde{\mathbf{f}}_R \rightarrow \mathbf{f} \text{ fraco em } L^1(0, T; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3).$$

Isso significa que

$$\int_0^T \varphi \tilde{\mathbf{f}}_R \rightarrow \int_0^T \varphi \mathbf{f}$$

para toda $\varphi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \hookrightarrow L^\infty\left(0, T; \left(L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3\right)'\right)$. Por outro lado, o fato de $\tilde{\rho}_R \rightarrow \rho$ fraco- $\star$ em $L^\infty(Q)$ acarreta que

$$\int_0^T \tilde{\rho}_R \mathbf{h} \rightarrow \int_0^T \rho \mathbf{h}$$

para cada $h \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$. Assim sendo, dados $s \in L^\infty(0, T)$ e $\mathbf{v} \in V_{R'}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{f}}_R \cdot s \tilde{\mathbf{v}} - \int_0^T \int_\Omega \rho \mathbf{f} \cdot s \tilde{\mathbf{v}} \right| &\leq \left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{f}}_R \cdot s \tilde{\mathbf{v}} - \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R \mathbf{f} \cdot s \tilde{\mathbf{v}} \right| \\ &\quad + \left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R \mathbf{f} \cdot s \tilde{\mathbf{v}} - \int_0^T \int_\Omega \rho \mathbf{f} \cdot s \tilde{\mathbf{v}} \right| \\ &= \left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R (\tilde{\mathbf{f}}_R - \mathbf{f}) \cdot s \tilde{\mathbf{v}} \right| + \left| \int_0^T \int_\Omega (\tilde{\rho}_R - \rho) \mathbf{f} \cdot s \tilde{\mathbf{v}} \right|. \end{aligned}$$

Agora note que, por um lado,

$$\left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R (\tilde{\mathbf{f}}_R - \mathbf{f}) \cdot s \tilde{\mathbf{v}} \right| \leq \|\tilde{\rho}_R\|_{L^\infty} \int_0^T \int_\Omega (\tilde{\mathbf{f}}_R - \mathbf{f}) \cdot s \tilde{\mathbf{v}}.$$

Como $s \in L^\infty(0, T)$ e $\mathbf{v} \in V_{R'} \subset L^2(\Omega)^3$, segue que $s \tilde{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ e esta parcela converge para zero. Por outro lado, $\mathbf{f} \cdot s \tilde{\mathbf{v}} \in L^1(0, T; L^1(\Omega)^3)$, acarretando que a segunda parcela também converge para zero o que prova a nossa afirmação.

Provaremos agora que

$$\int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \int_\Omega \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \text{ em } L^{4/3}(0, T) - \text{fraco, para cada } \mathbf{v} \in V_{R'}.$$

De fato, a convergência (4.4.39) acarreta que

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \mathbf{s} \rightarrow \int_0^T \int_\Omega \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s},$$

para todo $\mathbf{s} \in L^4(0, T; L^2(\Omega)^9)$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi \rightarrow \int_0^T \left(\int_\Omega \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi,$$

para todo $\varphi \in L^4(0, T)$ e $\mathbf{v} \in V_{R'}$. Mas observe que

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi = \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot (\varphi \nabla \tilde{\mathbf{v}})$$

e

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi = \int_0^T \int_\Omega \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot (\varphi \nabla \tilde{\mathbf{v}}),$$

o que conclui a prova de nossa afirmação. Agora, provaremos que

$$(\mu + \mu_R) \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rightarrow (\mu + \mu_R) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \text{ em } L^2(0, T) - \text{fraco, para todo } \mathbf{v} \in V_{R'}.$$

Com efeito, a convergência (4.4.31) acarreta

$$\int_0^T \langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{u}}_R \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{s}, \mathbf{u} \rangle,$$

para cada $\mathbf{s} \in L^2(0, T; W')$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi,$$

para cada $\varphi \in L^2(0, T)$ e $\mathbf{v} \in V_{R'}$. Como $V_{R'} = W_{R'}$, temos que $\tilde{\mathbf{v}} \in W$ e, como W é um espaço de Hilbert com o produto interno do gradiente, temos que $\tilde{\mathbf{v}}$ determina um funcional em W . Logo, $\varphi \tilde{\mathbf{v}} \in L^2(0, T; W')$, ou seja,

$$\int_0^T \langle \varphi \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{u}}_R \rangle = \int_0^T \nabla \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \nabla \varphi \tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \int_0^T \langle \varphi \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u} \rangle = \int_0^T \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \tilde{\mathbf{v}},$$

como queríamos.

Agora provaremos que

$$2\mu_R \int_{\Omega} \text{rot } \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rightarrow 2\mu_R \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \text{ em } L^2(0, T) - \text{fraco para todo } \mathbf{v} \in V_{R'}.$$

Com efeito, a convergência (4.4.32) acarreta que

$$\int_0^T \langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{w}}_R \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{s}, \mathbf{w} \rangle,$$

para todo $\mathbf{s} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \text{rot } \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi,$$

para todo $\mathbf{v} \in V_{R'}$ e $\varphi \in L^2(0, T)$. Como $\tilde{\mathbf{v}} \in V \subset H_0^1(\Omega)^3$, segue que $\text{rot } \tilde{\mathbf{v}} \in L^2(\Omega)^3 \subset H^{-1}(\Omega)^3$. Portanto,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{v}} \varphi \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{v}} \varphi,$$

que após a integração por partes fornece o que queremos. Analisaremos agora os termos da equação de $\mathbf{w}$. A análise é semelhante ao caso de $\mathbf{u}$ e por isso omitiremos certas passagens. Primeiramente mostraremos que

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R}{\partial t}, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \text{ para todo } \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})^3.$$

Com efeito, sabemos que

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \rho \mathbf{w} \text{ fraco-} \star \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Em decorrência disso, temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \mathbf{h} \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \mathbf{h}, \quad (4.4.44)$$

para todo $\mathbf{h} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Para $\mathbf{s} \in H_0^1(\Omega)^3$ e $\varphi \in \mathcal{D}'(0, T)$, temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \varphi \mathbf{s} \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \varphi \mathbf{s}, \quad (4.4.45)$$

em virtude da convergência (4.4.44). Como $\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R$ e $\rho \mathbf{w} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$, a convergência (4.4.45) implica que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \varphi \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \varphi \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}'(0, T)$, ou seja,

$$\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \rho \mathbf{w} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3).$$

Daí

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega)^3).$$

Isso implica que, para cada $\varphi \in \mathcal{D}'(0, T)$, vale

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R}{\partial t}, \varphi \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \varphi \right\rangle \text{ em } H^{-1}(\Omega)^3.$$

Em particular, para cada $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})$, temos

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle_{H^{-1}} \rightarrow \left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle_{H^{-1}}. \quad (4.4.46)$$

Usando a notação do Lema 1.4.1, podemos escrever

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R}{\partial t}, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle(\varphi)$$

e

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \varphi \right\rangle, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle(\varphi).$$

Assim, a convergência (4.4.46) toma o seguinte aspecto

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R}{\partial t}, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle(\varphi) \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle(\varphi),$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ e $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})$, ou seja

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R}{\partial t}, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{z}} \right\rangle \text{ em } \mathcal{D}'(0, T)$$

para cada $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})^3$.

Agora, mostraremos que

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{g}}_R \cdot \tilde{\mathbf{z}} \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{z}}, \text{ em } L^1(0, T) - \text{fraco, para todo } \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'}).$$

Com efeito, sabemos que

$$\tilde{\mathbf{g}}_R \rightarrow \mathbf{g} \text{ forte em } L^1(0, T; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3).$$

Isso acarreta

$$\tilde{\mathbf{g}}_R \rightarrow \mathbf{g} \text{ fraco em } L^1(0, T; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3).$$

Portanto

$$\int_0^T \varphi \tilde{\mathbf{g}}_R \rightarrow \int_0^T \varphi \mathbf{g},$$

para todo $\varphi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \hookrightarrow L^\infty(0, T; (L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3)')$. Por outro lado, o fato de $\tilde{\rho}_R \rightarrow \rho$ fraco- $\star$ em $L^\infty(Q)$ acarreta que

$$\int_0^T \tilde{\rho}_R h \rightarrow \int_0^T \rho h,$$

para toda $h \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$. Assim sendo, dados $s \in L^\infty(0, T)$ e $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{g}}_R \cdot s \mathbf{z} - \int_0^T \rho \mathbf{g} \cdot s \mathbf{z} \right| &\leq \left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R (\tilde{\mathbf{g}}_R - \mathbf{g}) \cdot s \mathbf{z} \right| \\ &\quad + \left| \int_0^T \int_\Omega (\tilde{\rho}_R - \rho) \mathbf{g} \cdot s \mathbf{z} \right|. \end{aligned}$$

Agora, note que, por um lado,

$$\left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\rho}_R (\tilde{\mathbf{g}}_R - \mathbf{g}) \cdot s \tilde{\mathbf{z}} \right| \leq \|\tilde{\rho}_R\|_{L^\infty} \int_0^T \int_\Omega (\tilde{\mathbf{g}}_R - \mathbf{g}) \cdot s \tilde{\mathbf{z}}.$$

Como $s \in L^\infty(0, T)$ e $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3 \subset L^2(\Omega)^3$, segue que $s \tilde{\mathbf{z}} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ e esta parcela converge para zero. Por outro lado, $\mathbf{g} \cdot s \tilde{\mathbf{z}} \in L^1(0, T; L^1(\Omega)^3)$, o que acarreta que a segunda parcela também converge para zero, o que prova nossa afirmação. Provaremos agora que

$$\int_\Omega \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \rightarrow \int_\Omega \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \text{ em } L^{4/3}(0, T) - \text{fraco, para cada } \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'}).$$

De fato, a convergência (4.4.40) acarreta que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \mathbf{s} \rightarrow \int_0^T \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \cdot \mathbf{s},$$

para todo $\mathbf{s} \in L^4(0, T; L^2(\Omega)^9)$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \right) \varphi \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \right) \varphi,$$

para todo $\varphi \in L^4(0, T)$ e $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})$. Mas observe que

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \right) \varphi = \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot (\varphi \nabla \tilde{\mathbf{z}})$$

e

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \right) \varphi = \int_0^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{w} \cdot (\varphi \nabla \tilde{\mathbf{z}}).$$

o que conclui a prova de nossa afirmação.

Mostraremos agora que

$$(c_a + c_d) \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \rightarrow (c_a + c_d) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \text{ em } L^2(0, T)\text{-fraco, para todo } \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'}).$$

Com efeito, a convergência (4.4.32) acarreta

$$\int_0^T \langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{w}}_R \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{s}, \mathbf{w} \rangle, \quad (4.4.47)$$

para cada $\mathbf{s} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. Queremos mostrar que

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \right) \varphi \rightarrow \int_0^T \left(\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \right) \varphi,$$

para cada $\varphi \in L^2(0, T)$ e $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})^3$. Como $\tilde{\mathbf{z}} \in H_0^1(\Omega)^3$ e este último é um espaço de Hilbert com o produto interno do gradiente, temos que $\tilde{\mathbf{z}}$ determina um funcional em

$H_0^1(\Omega)^3$. Logo, $\varphi \tilde{\mathbf{z}} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$, ou seja,

$$\int_0^T \langle \varphi \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{w}}_R \rangle = \int_0^T \nabla \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \varphi \rightarrow \int_0^T \langle \varphi \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{w} \rangle = \int_0^T \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{z}} \varphi,$$

como queríamos. Agora mostraremos que

$$2\mu_R \int_{\Omega} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \tilde{\mathbf{z}} \rightarrow 2\mu_R \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{z}} \text{ em } L^2(0, T) - \text{fraco para todo } \mathbf{z} \in W_0^{1,6/5}(\Omega)^3.$$

Com efeito, a convergência (4.4.31) acarreta que

$$\int_0^T \langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{u}}_R \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{s}, \mathbf{u} \rangle, \quad (4.4.48)$$

para todo $\mathbf{s} \in L^2(0, T; W')$. Como $(L^6(\Omega))' \subset W'$, tomando $\mathbf{s} \in L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega_{R'})^3)$, a convergência (4.4.48) transforma-se em

$$\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}.$$

Seja $\varphi \in L^2(0, T)$ e $\mathbf{z} \in W_0^{1,6/5}(\Omega_{R'})^3$. Assim sendo, $\varphi \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{z}} \in L^2(0, T; L^{6/5}(\Omega)^3)$. Logo

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{z}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_R \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u},$$

que é o que desejamos.

Agora, provaremos que

$$4\mu_R \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \tilde{\mathbf{z}} \rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{z}}, \text{ em } L^2(0, T) - \text{fraco para cada } \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})^3.$$

Com efeito, sabemos que

$$\int_0^T \langle \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{w}}_R \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{h}, \mathbf{w} \rangle,$$

para todo $\mathbf{h} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. Sejam $\varphi \in L^2(0, T)$ e $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_{R'})^3$. Temos $\varphi \tilde{\mathbf{z}} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$, donde

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi \mathbf{z} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \mathbf{z} \cdot \mathbf{w},$$

e assim nossa afirmação está provada. Provaremos agora que

$$(c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \operatorname{div} \mathbf{z} \rightarrow (c_0 + c_d - c_a) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}, \text{ em } L^2(0, T) - \text{fraco},$$

para cada $\mathbf{z} \in W_0^{2,2}(\Omega_{R'})^3$. De fato, sabemos que

$$\int_0^T \langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{w}}_R \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{s}, \mathbf{w} \rangle,$$

para todo $\mathbf{s} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$. Observe que, se tomarmos $\varphi \in L^2(0, T)$ e $\mathbf{z} \in W_0^{2,2}(\Omega_{R'})^3$, então, novamente usando o fato de que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno do gradiente, temos que

$$\int_0^T \langle \varphi \mathbf{z}, \tilde{\mathbf{w}}_R \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \nabla \operatorname{div} \mathbf{z} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_R = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{z} \cdot \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}_R \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{z} \cdot \operatorname{div} \mathbf{w},$$

que é o que queríamos.

4.4.3 Passando o limite

Tendo em conta que as convergências relativas aos termos da equação (3.18) valem em $\mathcal{D}'(0, T)$ e fazendo $R \rightarrow +\infty$, temos que:

$$\left\langle \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_R \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f}, \mathbf{v} \right\rangle = 0,$$

para todo $\mathbf{v} \in V_{R'}$. Como R' é arbitrário, podemos fazer $R' \rightarrow +\infty$ e concluir que a igualdade anterior vale para todo $\mathbf{v} \in V$. Logo, por densidade, ela também vale em $\mathcal{V}$. Temos

$$1. \rho \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \Rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3),$$

2. $\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \in L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)_{loc}^3) \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \in L^{4/3}(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3),$
3. $\mathbf{u} \in L^2(0, T; W) \Rightarrow \Delta \mathbf{u} \in L^2(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3),$
4. $\rho \mathbf{f} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3) \hookrightarrow L^1(0, T; L_{loc}^2(\Omega)^3) \hookrightarrow L^1(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3),$
5. $\mathbf{w} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3) \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{w} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3).$

Como $L^p(0, T; H^{-1}(\Omega)^3) \hookrightarrow W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$, para cada $p \in [1, \infty)$, segue que

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - (\mu + \mu_R) \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} - 2\mu_R \operatorname{rot} \mathbf{w} \in W^{-1, \infty}(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3).$$

Usando o Lema 1.4.1, com $s = 1$ e $p = \infty$, concluímos que existe $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L_{loc}^2(\Omega)^3)$ tal que

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - (\mu + \mu_R) \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f} + 2\mu_R \operatorname{rot} \mathbf{w} \in W^{-1, \infty}(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3).$$

De forma semelhante, fazendo $R' \rightarrow +\infty$, na equação (3.19), temos que a igualdade anterior vale para todo $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3$. Temos

1. $\rho \mathbf{w} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \Rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)^3),$
2. $\rho \mathbf{u} \mathbf{w} \in L^{4/3}(0, T; L^2(\Omega)^9) \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{w}) \in L^{4/3}(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3),$
3. $\mathbf{w} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3) \Rightarrow \Delta \mathbf{w} \in L^2(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3),$
4. $\rho \mathbf{g} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3 \cap L^{6/5}(\Omega)^3) \Rightarrow \rho \mathbf{g} \in L^1(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3),$
5. $\mathbf{u} \in L^2(0, T; W) \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{u} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3) \hookrightarrow L^2(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3),$
6. $\mathbf{w} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3) \Rightarrow \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} \in L^2(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3).$

Como $L^p(0, T; H^{-1}(\Omega)^3) \hookrightarrow W^{-1, \infty}(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3)$, para cada $p \in [1, +\infty)$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{w}) - (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} - \rho \mathbf{g} \\ - 2\mu_R \operatorname{rot} \mathbf{u} + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \text{ em } W^{-1, \infty}(0, T; H_{loc}^{-1}(\Omega)^3). \end{aligned}$$

Vamos agora passar o limite na equação do transporte

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R) = 0.$$

Observemos que a convergência (4.4.30) implica que

$$\tilde{\rho}_R \rightarrow \rho \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Portanto

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_R}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

A convergência (4.4.33) acarreta que

$$\operatorname{div} (\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R) \rightarrow \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Fazendo $R \rightarrow +\infty$, temos que a igualdade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

é válida em $\mathcal{D}'(Q)$. Ademais, pela regularidade obtida para ρ e $\rho \mathbf{u}$, temos também que a igualdade é válida em

$$W^{-1,\infty}(0, T; L^\infty) \cap L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega)),$$

pois $\rho \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ implica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \in W^{-1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega)),$$

enquanto que

$$\rho \mathbf{u} \in L^2\left(0, T; (L^6(\Omega))^3\right) \cap L^\infty\left(0, T; (L^2(\Omega))^3\right)$$

implica

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \in L^2(0, T; W^{-1,6}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

4.5 Condições iniciais

Verificaremos agora as condições iniciais satisfeitas por ρ , $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$. O procedimento é semelhante ao caso de domínios limitados. Começamos com ρ . A convergência (4.4.29) acarreta que

$$\tilde{\rho}_R(0) \rightarrow \rho(0), \text{ em } W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega).$$

Como $\tilde{\rho}_R(0) = \widetilde{\rho_{0R}}$ e vale a convergência (3.8.3), temos que

$$\rho(0) = \rho_0,$$

pelo menos em $W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega)$. Vejamos agora as condições iniciais satisfeitas $\mathbf{u}$. Seja $\mathbf{v} \in V$ e considere $\mathbf{v}_R \in V_R$ tal que $\mathbf{v}_R \rightarrow \mathbf{v}$ em V . Temos

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \mathbf{v}_R \leq \|\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R\|_{L^2(\Omega)^3} \|\mathbf{v}_R\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Como $\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R$ é limitado em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ e $\mathbf{v}_R$ o é em $L^2(\Omega)^3$, segue que

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \mathbf{v}_R \text{ é limitada em } L^\infty(0, T).$$

Por outro lado, juntando esse fato à limitação (4.3.11) e usando o Lema 1.2.1, parte (iv.a), podemos concluir que

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \mathbf{v}_R \text{ pertence a um subconjunto compacto de } C[0, T].$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \mathbf{v}_R \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \text{ em } L^\infty(0, T) - \text{fraco-} \star.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in C[0, T].$$

Particularizando em $t = 0$, teremos

$$\left(\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{u}}_R \cdot \mathbf{v}_R \right) (0) \rightarrow \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) (0).$$

As condições impostas a $\tilde{\rho}_R$ e $\tilde{\mathbf{u}}_R$ nos permitem escrever a convergência anterior como

$$\int_{\Omega} \widetilde{\rho_{0R}} \widetilde{\mathbf{u}_{0R}} \cdot \mathbf{v}_R \rightarrow \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}.$$

Conseqüentemente,

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}.$$

De forma semelhante, obteremos as condições iniciais sobre w . De fato, seja $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^3$ e considere $\mathbf{z}_R \in H_0^1(\Omega_R)^3$ tal que $\mathbf{z}_R \rightarrow \mathbf{z}$ em $H_0^1(\Omega)^3$. Temos

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \mathbf{z}_R \leq \|\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R\|_{L^2(\Omega)^3} \|\mathbf{z}_R\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Como $\tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R$ é limitado em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ e $\mathbf{z}_R$ o é em $L^2(\Omega)^3$, segue que

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \mathbf{z}_R \text{ é limitada em } L^\infty(0, T).$$

Por outro lado, juntando esse fato à limitação (4.3.12) e usando o Lema 1.2.1, parte (iv.a), podemos concluir que

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \mathbf{z}_R \text{ pertence a um subconjunto compacto de } C[0, T].$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \mathbf{z}_R \rightarrow \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \text{ em } L^\infty(0, T) - \text{fraco-} \star.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \in C[0, T].$$

Particularizando em $t = 0$, teremos

$$\left(\int_{\Omega} \tilde{\rho}_R \tilde{\mathbf{w}}_R \cdot \mathbf{z}_R \right) (0) \rightarrow \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \right) (0).$$

As condições impostas a $\tilde{\rho}_R$ e $\tilde{\mathbf{w}}_R$, nos permitem escrever a convergência anterior como

$$\int_{\Omega} \widetilde{\rho_{0R}} \widetilde{\mathbf{w}_{0R}} \cdot \mathbf{z}_R \rightarrow \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}.$$

Conseqüentemente,

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \right) (0) = \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}.$$

Referências

- [1] ADAMS, R.A.; FOURNIER, J.J.F. **Sobolev spaces**. 2.ed. Amsterdam: Academic Press, 2003.
- [2] BEIRÃO DA VEIGA, H. Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions. **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.** v.10, n.2, p.341-355, 1983.
- [3] BOLDRINI, J.L. et al. Semi-Galerkin approximation and strong solutions to the equations of the nonhomogeneous asymmetric fluids. **J. Math. Pures Appl.** v.9, n.82, p.1499-1525, 2003.
- [4] BRAZ E SILVA, P. et al. Global weak solutions for asymmetric incompressible fluids with variable density. **C. R. Math. Acad. Sci. Paris**, v.346, n.9-10, p.575-578, 2008.
- [5] BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle: Théorie et applications**. Paris: Masson, 1983.
- [6] CONCA, C. et al. The equations of non-homogeneous asymmetric fluids: an iterative approach. **Math. Methods Appl. Sci.**, v.25, n.15, p.1251-1280, 2002.
- [7] CONCA, C. et al. Existence and uniqueness of a strong solution for nonhomogeneous micropolar fluids. In: LIONS, J.L.; CIONARESCU, D.(Org). **Nonlinear partial differential equations and their applications**. Amsterdam: North-Holland, 2002, p.213-241.
- [8] CONDIFF, D. et al. Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. **Phys. Fluids**, v.11, n.9, p.842-854, 1964.

- [9] FERNÁNDEZ-CARA, E. et al. The existence of nonhomogeneous, viscous and incompressible flow in unbounded domains. **Comm. Partial Differential Equations**, v.17, n. 7-8, p.1253-1265, 1992.
- [10] ERINGEN, A.C. Theory of micropolar fluids. **J. Math. Mech.** v.16, n.1, p.1-18, 1966.
- [11] EVANS, L. **Partial differential equations**. Providence: American Mathematical Society, 1998.
- [12] HEYWOOD, J.G. The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions. **Indiana Univ. Math. J.** v.29, n.5, p.639-681, 1980.
- [13] KIM, J.U. Weak solutions of an initial-boundary value problem for an incompressible viscous fluid with nonnegative density. **SIAM J. Math. Anal.** v.18, n.1, p.89-96, 1987.
- [14] LADYZHENSKAYA, O.A. **The mathematical theory of viscous incompressible flow**. 2.ed. New York: Gordon and Breach, Science Publishers, 1969.
- [15] LADYZHENSKAYA, O.A. On integral estimates, convergences of approximate methods and solutions in functionals for linear elliptic operators. **Vestnik Leningrad University**, n.7, p.60-69, 1958.
- [16] LUKASZEWICZ, G. On stationary flows of asymmetric fluids. **Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat.** v.12, n.1, p.35-44, 1988.
- [17] LUKASZEWICZ, G. On the existence, uniqueness and asymptotic properties for solutions of flows of asymmetric fluids. **Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat.** v.13, n.1, p.105-120, 1989.
- [18] LUKASZEWICZ, G. On nonstationary flows of incompressible asymmetric fluids. **Math. Methods Appl. Sci.** v.13, n.3, p.219-232, 1990.
- [19] LUKASZEWICZ, G. **Micropolar fluids**. Theory and applications. Boston: Birkhauser, 1999.

- [20] RESÉNDIZ, B.A.J. et al. Existence of weak solution of micropolar fluid equations in a time dependent domain. **Rev. Mat. Apl.** v.23, n.1-2, p.27-46, 2002.
- [21] ROJAS-MEDA, M.A. et al. The equations of a viscous asymmetric fluid: an interactive approach. **ZAMM Z. Angew. Math. Mech.** v.85, n.7, p.471-489, 2005.
- [22] SIMON, J. **Existencia de Solución del Problema de Navier-Stokes con Densidad Variable**, Sevilla, 1991. Disponível em <http://math.unice.fr/jsimon/pubs/Simon-F9.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2007.
- [23] SIMON, J. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure. **SIAM J. Math. Anal.** v.21, n.5, p.1093-1117, 1990.
- [24] TARTAR, L. **Topics in nonlinear analysis**. Orsay: Universite de Paris-Sud, Departement de Mathematique, 1978.
- [25] TEMAM, R. **Navier-Stokes equations**. Theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1977.