Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação
Matemática e Tecnológica
Curso de Mestrado

JULIANA AZEVEDO

ALUNOS DE ANOS INICIAIS CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES:

É melhor no papel ou no computador?

RECIFE

2013

JULIANA AZEVEDO

ALUNOS DE ANOS INICIAIS CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES:
É melhor no papel ou no computador?

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

RECIFE

2013

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

A994a Azevedo, Juliana.
Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador? / Juliana Azevedo. – Recife: O autor, 2013.
126 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Ensino fundamental. 3. Combinatória. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2013-013)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ALUNA

JULIANA AZEVEDO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

“ALUNOS DE ANOS INICIAIS CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES: É MELHOR NO PAPEL OU NO COMPUTADOR?”

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientadora
Profa. Dra. Rute Elizabete de S. Rosa Borba

Examinadora Externa
Profa. Dra. Alina Galvão Spinillo

Examinadora Interna
Profa. Dra. Cristiane Azevedo S. Pessoa

Recife, 21 de fevereiro de 2013.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus,

À minha mãe, Helena, meu exemplo de vida: Sempre ao meu lado, me incentivando e me fazendo acreditar que posso realizar tudo aquilo que eu quiser!

À minha orientadora, Rute Borba: Mais que uma orientadora, uma mãe acadêmica! Mais que uma mãe acadêmica, uma amiga! Sempre ao meu lado, em todos os momentos! Uma mãe/amiga serena, companheira e atenciosa, sempre me acalmando, apoiando, orientando e incentivando a seguir o caminho que sempre almejei: A vida acadêmica! Além de tudo, agradeço pela sorte de tê-la em minha vida!

Ao meu pai, Luciano, meu herói: Que apesar da distância física sempre vibrou, junto comigo, todas as conquistas da minha vida.

Ao meu irmão, Guilherme: Meu professor, meu amigo.

À minha irmã, Isabella: Minha Josefina que tomou meu posto de caçula e eu nem liguei.

Ao meu namorado, Pedro Montenegro: Pela paciência, apoio, incentivo, companheirismo, amizade e amor!

À minha cachorra Lolly, companheira das minhas madrugadas, aquecendo meu pé embaixo da mesa do computador.

À minha avó, Isabel (in memoriam) e meu avô Ivanildo: Ajudando-me a percorrer meu caminho e ajudando minha mãe a me fazer ser o que sou hoje.

À minha avó Conceição (in memoriam): Quem pouco tive o privilégio de conviver, mas que, com certeza, está sempre presente em minha vida.

Às Minhas tias, Susana, Sandra, Ana e Flávia: Mais que tias, verdadeiras mães!

Aos meus tios, Gilberto (in memoriam), Ivan e Tonico.

Aos meus primos, Carla, Josué, Carolina, Renato, Pedro, Thiago, Gabriela, Vanessa, João, Gilbertinho e Davi: Uns mais presentes, outros mais distantes, mas todos sempre me incentivando e apoiando.

Aos amigos-irmãos, Rafael, Aline, Guto, Cecília e Adelmo: A nova família que Deus me permitiu escolher.

Aos meus amigos queridos, Julia e Sthenio: "Não fazemos amigos, reconhecemos-os!" (Vinícius de Moraes) Sim... eu os RE-conheci!

À minha amiga Carol: Pela amizade, amor, carinho e companheirismo dos tempos de colégio que perdura até hoje.

Às minha amigas de infância, Marianne e Camila: por provar "que verdadeiras amizades continuam a crescer mesmo a longas distâncias" (William Shakespeare)

Às minhas amigas, que sempre me fazem lembrar um tempo bom: Rayssa e Cati

Às amigas de graduação, Adry, Nathália, Roberta, Lygia e Débora e aos amigos do mestrado (turma 2011), principalmente:
Edilza, Edneri, Luciana, Márcio, Natércia, Renata, Robson e Tâmara.

Às amigas do Geração (Grupo de estudos em raciocínio combinatório) com quem sempre aprendi muito e, além disso... : Cris, minha mãe acadêmica adotiva: pela generosidade, carinho, atenção e cuidado de sempre!; Thalita, Adry, Mona e Dani: Pelo companheirismo, além de tudo (e principalmente) nas viagens para congressos!; Tiane, Mika, Glauce, Martha, Fernanda, Rita e Flavinha: Pela atenção, apoio, purpurina, vitalidade, alegria, carinho, juventude e pela alegria de estarmos juntas!

Às professoras Cristiane Pessoa, Alina Spnillo e Paula Baltar: Pela valiosa contribuição com a minha pesquisa.

Aos professores e amigos das turmas do mestrado Edumatec 2010, 2011 e 2012: Pela contribuição durante as disciplinas de seminários no decorrer do curso.

Ao REUNI e à CAPES pelo financiamento que permitiu maior dedicação a essa pesquisa

A todos que fazem parte do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC.

A Todos que, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização de um sonho, e que podem ter sido omitidos pela falha da memória!

RESUMO

Com o objetivo de analisar a influência da construção de *árvores de possibilidades* na resolução de problemas combinatórios, com *lápis e papel* ou com o uso de um *software educativo*, a presente pesquisa se fundamentou na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), que defende a existência de três dimensões fundamentais de conceitos: significados, invariantes e representações simbólicas. A pesquisa também se fundamentou em outros autores, entre eles, Pessoa e Borba (2009), que abordam a Combinatória, Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007), que analisam a aplicação do *software Diagramas de Árbol* com crianças, como também, Borba e Penteado (2010) e Goos (2010), que discutem o uso da tecnologia na sala de aula. Participaram da pesquisa 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública municipal do Recife, divididos em quatro grupos. Os alunos participaram de um pré-teste, de distintas formas de intervenção e de pós-testes (imediato e posterior). O Grupo 1 (G1) construiu *árvores de possibilidades* fazendo uso do *software Diagramas de Árbol*; o Grupo 2 (G2) construiu *árvores de possibilidades* fazendo uso do *lápis e papel*; o Grupo 3 (3) formou o Grupo Controle Assistido que trabalhou com problemas multiplicativos não combinatórios, por meio de *desenhos*; e o Grupo 4 (G4) formou o Grupo Controle Desassistido, que participou apenas do pré-teste e dos pós-testes. As intervenções foram realizadas, à luz da teoria de Vergnaud, utilizando situações combinatórias, seus significados, seus invariantes, e uma representação simbólica específica para o ensino e aprendizagem da Combinatória. Com apenas uma sessão de intervenção com *árvores de possibilidades,* virtual ou escrita, foi possível obter avanços quantitativos e qualitativos significativos, de alunos de anos iniciais dos grupos experimentais. Salienta-se, porém, que, embora não tenha havido diferença estatisticamente significativa entre os desempenhos dos Grupos 1 e 2, o G2 (*lápis e papel*) demonstrou um maior avanço, apresentando diferenças significativas entre ambos os grupos controle nos dois pós-testes, enquanto o G1 apresentou diferenças apenas com o G4, no pós-teste imediato. Uma possível explicação para o melhor desempenho do G2 pode estar relacionada com a necessidade da transferência da representação virtual para escrita que o G1 possui, ou seja, a aprendizagem com utilização do *software* e a resolução dos pós-testes em *lápis e papel*. A pesquisa revelou que os grupos com intervenção em Combinatória demonstraram avanços qualitativos, evidenciando uma maior variedade na utilização de representações simbólicas nos pós-testes, bem como a utilização de estratégias sistemáticas de resolução dos problemas, levando à conclusão que, com as intervenções, se aprendeu a pensar nas situações e não em um método para resolver os problemas. Já estudar problemas multiplicativos não combinatórios ou apenas o passar do tempo, em nada parece facilitar o aprendizado da Combinatória. Verificou-se melhor desempenho nos problemas de *produto cartesiano* e maior dificuldade nos de *permutação*, podendo a razão para isso estar relacionada ao número maior de etapas de escolha nos problemas de *permutação*. Conclui-se que é possível o trabalho com variados tipos de situações combinatórias desde os anos iniciais e por meio de representações simbólicas eficientes, como a árvore de possibilidades. Deseja-se, assim, com essa pesquisa, contribuir para a reflexão sobre melhores possibilidades de ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Combinatória. Árvores de possibilidades. *Software Diagramas de Árbol*. Lápis e papel. Anos iniciais do Ensino Fundamental.

ABSTRACT

With the aim of analysing the influence of building trees of possibilities in solving combinatorial problems with *pencil and paper* or with the use of *educational software*, this research was based on the Conceptual Fields Theory of Vergnaud (1986), which argues that there are three fundamental dimensions of concepts: meanings, symbolic representations and invariants. The research also relied on other authors, among them, Pessoa and Borba (2009), which address Combinatorics, Sandoval, Trigueiros and Lozano (2007), who analyse the application of the *software Diagramas de Árbol* with children, as well, as Borba and Penteado (2010) and Goos (2010), who discuss the use of technology in the classroom. Participants were 40 students in the 5th grade of Elementary School of two state-run schools city of Recife, divided into four groups. Students participated in a pre-test, of different forms of intervention and, post-tests (immediate and delayed). Group 1 (G1) constructed *trees of possibilities* making use of the *software Diagramas de Árbol*, Group 2 (G2) constructed *trees of possibilities* making use of *pencil and paper*, Group 3 (3) formed the assisted control group who worked with multiplicative but not combinatorial problems, through *drawings*, and Group 4 (G4) formed the unassisted control group, who took part only in the pre-test and post-tests. Interventions were made in the light of the theory of Vergnaud, using combinatorial situations, their meanings, their invariants, and a symbolic representation specific to the teaching and learning of Combinatorics. With just one intervention session with trees of possibilities, virtual or written, significant quantitative and qualitative improvements were achieved in students of early years of the experimental groups. It should be noted, however, that although there was no statistically significant difference between the performances of Groups 1 and 2, G2 (*pencil and paper*) demonstrated a greater improvement, with significant differences compared to the two control groups in the two post-tests, while G1 showed differences only with G4 in the immediate post-test. One possible explanation for the better performance of G2 may be related to the need to transfer the virtual representation to writing that G1 had, ie, learning to use the *software* and the resolution of post-tests with *pencil and paper*. The research showed that the intervention groups showed qualitative improvements in Combinatoriacs, revealing a greater variety in the use of symbolic representations in post-tests, and the use of systematic approaches to solving problems, leading to the conclusion that, with assistance, they learned how to think about situations and not only in a way to resolve problems. Not having studied combinatorial problems or just the passage of time, does not seem to facilitate the learning of Combinatorics. There was better performance in *Cartesian product* problems and greater difficulty in the *permutation* problems, and the reason for this may be related to the greater number of steps in the choice of *permutation* problems. It is concluded that it is possible to work with different kinds of combinatorial situations since the early years and through efficient symbolic representations, such as the tree of possibilities. With this the research aims to have contributed to the debate about the best possibilities of Combinatorics learning in the early years of Elementary School.

Keywords: Combinatorics. Trees of possibilities. *Software Diagramas de Árbol*. Pencil and paper. Early years of Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No ensino atual da Matemática defende-se esta disciplina como sendo muito rica na possibilidade de desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e hipotético-dedutivo dos alunos. Inhelder e Piaget (1976, p.241) assinalam que o desenvolvimento desse nível de raciocínio está relacionado com a “dissociação entre o possível, o real e o necessário”. Os autores destacam ainda que essa dissociação está vinculada a um nível do pensamento relacionado à Combinatória e Probabilidade.

A presente pesquisa se apoia no estudo da Combinatória, enfatizado que o trabalho com situações que envolvam esse pensamento, desde os anos iniciais de escolarização, pode ser útil para que seja desenvolvido no aluno esses raciocínios, ou seja, o aluno é incentivado a pensar em relações, e em possibilidades. Flavell (1988, p.210) afirma que o raciocínio hipotético-dedutivo é, fundamentalmente,

> Uma estratégia cognitiva que tenta determinar a realidade no contexto das possibilidades [...]. Tentar encontrar o real dentro do possível requer que primeiramente se considere o possível como um conjunto de hipóteses que devem ser sucessivamente confirmadas ou rejeitadas. As hipóteses rejeitadas pelos fatos podem ser descartadas; aquelas que os dados confirmam passam a integrar o setor da realidade.

Desse modo, o aprendizado da Combinatória pode auxiliar o aluno a desenvolver a capacidade de raciocinar logicamente, diferenciando o real do possível, o que pode influenciar diretamente no aprendizado de diversos outros conceitos matemáticos e de outras áreas do conhecimento. Isso porque na Combinatória há uma rica variedade de situações – que envolvem diversos contextos e variadas propriedades e relações e que podem ser representadas e trabalhadas com auxílio de diferentes simbologias – que podem levar o aluno a pensar em formas diversas de resolução de problemas, na essência do que seja um problema matemático (BORBA, 2010).

Contudo, apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) indicarem o aprendizado da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, este conteúdo só ganha maior espaço na sala de aula no Ensino Médio. Neste âmbito, vêm sendo desenvolvidas pesquisas de sondagem de conhecimento dos alunos sobre esse conteúdo, como por exemplo, Soares e Moro (2006), Pessoa e Borba (2009a; 2009b; 2010a; 2010b) e Silva e Spinillo (2011) e, faz-se necessário, também desenvolver pesquisas de intervenção que utilizem métodos com o intuito de fazer com que os alunos avancem em seus pensamentos combinatórios.

As pesquisas valorizam o aprendizado da Combinatória e pode-se destacar que seu aprendizado deve acontecer o quanto antes, pois, questões vistas desde os anos iniciais de escolarização, podem ser mais facilmente compreendidas posteriormente quando retratadas através das fórmulas. Esta orientação tem respaldo em Vergnaud (1986) que afirma que certos conceitos se desenvolvem durante um período de tempo maior que outros, desde os anos iniciais de escolarização até do Ensino Médio, aproximadamente.

A construção de conhecimentos matemáticos, em particular o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pode acontecer com o auxílio de diferentes recursos, como a resolução de problemas, o uso das tecnologias da informação e dos jogos, dentre outros como é destacado pelos PCN (BRASIL, 1997). A utilização de recursos e estratégias de ensino variadas visa facilitar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, e seus diversos conceitos.

Dentre as representações simbólicas para o ensino de Combinatória, tem-se a construção de *árvores de possibilidades.* Segundo Almeida (2010, p.22),

> Para os estudantes da Educação Básica, entendemos que a ênfase deve ser dada na resolução de problemas combinatórios, por meio de métodos como o diagrama de possibilidades e a observação de padrões, o que, possivelmente, levará à generalização desses modelos.

Em conformidade com esse pensamento, o presente estudo aborda a resolução de problemas combinatórios por meio de árvores de possibilidades, com uso de lápis e papel ou com utilização do computador como recursos facilitadores da aprendizagem. Acredita-se que essa representação simbólica possibilita que se entendam diferentes relações combinatórias, sendo possível, assim, trabalhar os variados tipos de problemas combinatórios, observando-se as semelhanças e diferenças entre eles. Assim, nesse estudo, a resolução de problemas estará presente tanto com o uso do lápis e papel, quanto com o uso do computador.

Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) afirmam que recursos tecnológicos – tal como o computador – podem motivar os alunos e podem instituir novas formas de aprendizagem. O computador possibilita o uso de linguagens variadas – textuais e de imagens que podem auxiliar o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos.

Espera-se então, que a motivação gerada pela utilização do computador, por meio de um *software* educacional, favoreça o aprendizado da Matemática, mais especificamente, da construção do raciocínio combinatório. Além da motivação, o computador também pode aliviar algum trabalho que seria efetuado pelo aluno, como por exemplo, a listagem de todas as possibilidades, permitindo que o aluno concentre sua atenção em outros aspectos importantes dos problemas, tais como nos invariantes de cada tipo de problema combinatório, as representações que podem ser utilizadas para a resolução desses problemas, bem como, investir na correta interpretação do enunciado.

Em contrapartida, a construção de *árvores de possibilidades* em lápis e papel pode demandar um raciocínio sobre a situação combinatória desde o início de sua resolução. Isso porque o aluno precisará efetuar escolhas sobre os elementos que constituirão as possibilidades, bem como terá que pensar sobre a ordenação dos elementos, dentre outras relações.

Vale ressaltar que as relações combinatórias são destacadas em ambas as formas de construção da árvore de possibilidades. Da primeira forma esse destaque acontece com maior ênfase depois que o *software* gera a árvore, no momento da validação dos casos possíveis, e, na segunda forma de construção, com lápis e papel, esse destaque acontece concomitantemente à construção da árvore.

Outro aspecto do aprendizado matemático é apontado por Vergnaud (1986) ao enfatizar que conceitos são articulados entre si, sendo esta inter-relação de conceitos, denominada de *campos conceituais*. Vergnaud (1996, p. 167) considera um campo conceitual

> [...] como um conjunto de situações. Por exemplo, para o campo conceitual das estruturas aditivas, o conjunto das situações que exigem uma adição, uma subtração ou uma *combinação* destas duas operações e, para as estruturas multiplicativas, o conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma *combinação* destas duas operações.

Sendo assim, espera-se, neste estudo, que a abordagem da Combinatória pela resolução de situações diversificadas que caracterizam este conteúdo favoreça seu domínio, uma vez que, como Vergnaud (1986) enfatiza, resolvendo variadas situações, conceitos inter-relacionados podem ser construídos pelos alunos. A construção articulada pode se dar pela observação de aspectos comuns e diferenciadores de conceitos constituintes de um mesmo campo.

Vergnaud (1996, p.184) também ressalta o papel das representações simbólicas no aprendizado de conceitos. Este autor afirma que “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas”. Dessa forma, espera-se também que a resolução de situações combinatórias por meio de *árvores de possibilidades* influencie diretamente no sucesso de seu aprendizado, uma vez que, Fischbein (1975), citado por Borba (2010, p.4), enfatiza que o uso dessa representação simbólica pode permitir avanços no desenvolvimento do raciocínio combinatório ao apontar as etapas de escolha necessárias.

Portanto, este trabalho visa analisar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, a influência da construção de árvores de possibilidades, com o uso de lápis e papel ou de um *software* educativo, voltado para o ensino e aprendizagem da Combinatória para alunos dos anos iniciais de escolarização. Para que isto aconteça, os alunos deste estudo experimentaram resolver situações combinatórias por meio de *árvores de possibilidades* fazendo uso de lápis e papel ou do *software* educacional *Diagramas de Árbol*, sendo, assim, possível refletir sobre os conceitos de Combinatória e estabelecer relações entre os mesmos para que desenvolvessem ricas aprendizagens.

Desta forma, acreditava-se que a construção de árvores de possibilidades pudesse permitir avanços no aprendizado da Combinatória e, sobretudo, que a construção de árvores ligada ao uso de um *software* educativo permitisse avanços significativos no aprendizado deste conteúdo, uma vez que a utilização do *software* em questão permite a visualização de todas as possibilidades, sem a necessidade do esforço para a construção da árvore. Entretanto, a construção realizada pelos próprios alunos, sem a utilização do *software*, também poderia caracterizar um contexto em que o pensamento mobilizado para essa construção favorecesse o aprendizado da Combinatória, podendo ser, portanto, um método também eficaz para o ensino de conceitos da Combinatória.

Assim, na presente dissertação é apresentada, no primeiro capítulo – *A Teoria dos Campos Conceituais e o raciocínio combinatório* – uma discussão sobre como o conceito de esquemas, da teoria de Piaget, está relacionado com a teoria de

Vergnaud, e como essa, por meio do campo conceitual das estruturas multiplicativas, está relacionada com a Combinatória. Também, nesse capítulo, são abordados os quatro tipos de problemas combinatórios, além de estudos anteriores que fundamentam o trabalho com a Combinatória, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

No segundo capítulo – *O uso da Tecnologia em favor da Educação Matemática* – são abordados os usos de diferentes tecnologias, informáticas ou não, ou seja, o uso do lápis e papel, como tecnologia predominante em sala de aula, e a inserção do computador, como uma tecnologia informática eficiente para o aprendizado de diferentes conceitos, principalmente por meio do uso de *softwares* educacionais. Segue-se uma discussão sobre os *softwares* educativos voltados para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, em particular, o *software Diagramas de Árbol* e são abordadas as pesquisas anteriores com o uso desse *software*.

No terceiro capítulo – *Objetivos e Método* – são explicitados os objetivos da presente pesquisa e é descrita a maneira como esta foi realizada, de modo a atender os objetivos explicitados.

No quarto capítulo – *Resultados: Apresentação e Discussão* – são apresentados os resultados do pré-teste, intervenção e pós-testes (imediato e posterior) e os mesmos são discutidos quantitativamente e qualitativamente, em relação ao aprendizado dos alunos com a utilização do lápis e papel ou do *software Diagramas de Árbol*.

As *Considerações Finais* do estudo vêm finalizar a presente pesquisa, trazendo a reflexão sobre as melhores possibilidades de ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 1:
A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS
E O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud (1986) toma por base a Teoria de Jean Piaget, fundamentada no processo de aquisição do conhecimento (via *assimilação* e *acomodação*) e nas estruturas mentais utilizadas nesse processo. Nesse sentido, Flavell (1988, p.54) afirma que

> [...] os esquemas se acomodam às coisas (adaptam e modificam sua estrutura, para enquadrar a realidade), enquanto as assimilam, atestam sua qualidade dinâmica e flexível. [...] Por serem estruturas os esquemas são criados e modificados pelo funcionamento intelectual.

Pozo (2002, p.181) acrescenta, de acordo com Piaget, que

> [...] os esquemas que o sujeito possui devem estar em equilíbrio com os esquemas que assimila. Assim, quando a “conduta” de um objeto [...] não se ajusta às predições do sujeito, se produz um desequilíbrio entre os seus esquemas de conhecimento.

Assim, segundo Piaget, citado por Pozo (2002), o sujeito *acomoda* o objeto a ser *assimilado* modificando os esquemas iniciais a partir de desequilíbrios cognitivos causados pela reflexão sobre ações.

Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005, p. 46) consideram que

> Dentre as mais importantes contribuições de Piaget para a Educação Matemática está sua teoria de que a compreensão das operações aritméticas tem origem nos *esquemas de ação* das crianças. O termo “esquema” é utilizado em psicologia com um significado semelhante àquele utilizado na vida quotidiana: um esquema é uma representação em que aparece apenas o essencial daquilo que é representado; os detalhes não aparecem.

Vergnaud (1996, p.161) também acredita que o conceito de *esquema* é peça-chave para o desenvolvimento da Educação Matemática, e, desse modo, esse conceito, é fundamental para a sua Teoria dos Campos Conceituais, uma vez que, para ele, “[...] o reconhecimento de *invariantes* é, pois, a chave da generalização do esquema”. Por essa visão, é importante investigar os *esquemas* mobilizados – a partir do reconhecimento de relações e propriedades que se mantêm constantes, *invariantes* – quando alunos estão desenvolvendo seus conhecimentos de conceitos matemáticos.

Além do reconhecimento de que *esquemas* são fundamentais ao desenvolvimento de conceitos, outro princípio básico da Teoria de Vergnaud (1996) é que os conceitos desenvolvidos por uma criança fazem parte de *campos conceituais*. Para Vergnaud (1986, p.84), “Um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão".

Vergnaud também considera que os conceitos amparam-se em três dimensões fundamentais: as situações que dão *significado* ao conceito (S); as relações e propriedades *invariantes* desse conceito (I) e as *representações simbólicas* que são usadas para representar o conceito (R). O autor acredita que (1996, p. 166), "[...] para estudar o funcionamento e o desenvolvimento de um conceito é necessário considerar estes três planos ao mesmo tempo", ou seja, articulados entre si.

Vergnaud (1986) afirma, ainda, que a aprendizagem de um conceito acontece por meio de resolução de problemas (situações), pois, é a partir dessa experiência que se explora o conceito, se elabora hipóteses e as mesmas são verificadas para que o problema seja solucionado. Smole e Diniz (2001, p.92) afirmam que no exercício de "[...] questionar as respostas obtidas e questionar a própria situação inicial", há uma "[...] atitude de investigação científica". Assim, nos questionamentos realizados, na elaboração de hipóteses e na sua verificação, por meio de análises de diferentes resoluções, o aluno está inserido em um contexto desafiador de investigação e pode desenvolver seus conhecimentos sobre conceitos.

Para Vergnaud (1986), a aprendizagem ocorre quando se percebe, em situações com significados variados, que o conceito envolve *invariantes*, ou seja, propriedades e relações que se mantêm constantes, assim como no contato com diversas representações simbólicas – desenhos, tabelas, listagens, árvores de possibilidades e fórmulas dentre outras (no caso da Combinatória) – que são utilizadas na representação do conceito.

Vergnaud (1996) reconhece a existência de diversos *campos conceituais* e investiga, com maior profundidade na Matemática, os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Como já visto anteriormente, ele define o *campo conceitual* das estruturas aditivas como o conjunto em que as situações são resolvidas por meio de uma adição, uma subtração ou o uso de ambas, assim como, o *campo conceitual* das estruturas multiplicativas é definido por Vergnaud como o conjunto em que as situações exigem uma multiplicação, divisão ou a *combinação* de ambas.

O raciocínio combinatório está inserido no *campo conceitual* das estruturas multiplicativas, uma vez que a base de resolução de problemas combinatórios envolve multiplicações e divisões. Detalha-se, a seguir, como a Combinatória está presente nas estruturas multiplicativas.

1.1 O campo conceitual das estruturas multiplicativas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é composto por diversos conceitos matemáticos. Vergnaud (1996) enumera: proporção simples e múltipla, função linear e não linear, análise dimensional, fração, números racionais, além da multiplicação e divisão, dentre outros. Salienta-se que o esquema base desse campo é de natureza distinta do esquema base do campo das estruturas aditivas.

As situações presentes nas estruturas multiplicativas podem ser vistas desde os primeiros anos de escolarização da criança, mas a multiplicação é ensinada, muitas vezes, meramente como uma soma de parcelas repetidas. Entretanto, como afirmam Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005, p. 84):

> [...] a conexão entre multiplicação e adição não é conceitual. A relação que existe entre multiplicação e adição está centrada no processo de cálculo da multiplicação: o cálculo da multiplicação pode ser feito usando-se a adição repetida porque a multiplicação é distributiva com relação à adição.

Dessa forma, percebe-se que é possível resolver a multiplicação através da soma de parcelas repetidas, mas isso não implica que a criança esteja realizando um raciocínio aditivo, uma vez que a base do raciocínio aditivo (relação parte-todo) é distinta da do pensamento multiplicativo (correspondência um-a-muitos). Observa-se isso analisando, por exemplo, o problema que segue.

<u>Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas há em seis carros?</u>

Para problemas como este, Nunes e Bryant (1997, p.143), afirmam que

> [...] as situações multiplicativas envolvem uma relação constante de correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos. [...] A fim de manter constante, por exemplo, a correspondência [...] somamos números diferentes de objetos a cada conjunto. Isso contrasta com a situação aditiva na qual, para manter constante a diferença entre dois conjuntos, somamos o mesmo número de elementos a cada conjunto.

Sendo assim, a criança pode responder realizando uma correspondência um-a-muitos, típica do raciocínio multiplicativo, ou seja, pode relacionar seis carros e contar quatro rodas para cada carro (parcelas repetidas), encontrando o total de rodas, Como é possível ver no exemplo a seguir.

Carro 1 → 4 rodas
Carro 2 → 8 rodas
Carro 3 → 12 rodas
Carro 4 → 16 rodas
Carro 5 → 20 rodas
Carro 6 → 24 rodas

Assim, o pensamento de uma criança que resolve uma situação multiplicativa da maneira como descrita acima não reflete um pensamento aditivo, uma vez que não há uma relação parte-todo, pois, não há um total resultando da soma das partes. Neste caso, há uma relação de proporção, ou seja, uma relação um-a-muitos, em que o fundamental é a razão existente entre os conjuntos.

Diversos autores classificam as situações que envolvem o campo das estruturas multiplicativas. A seguir serão destacadas algumas dessas classificações, seguidas de exemplos.

Vergnaud (1991) apresenta como classes de problemas multiplicativos, que se relacionam com a multiplicação e a divisão, o *Isomorfismo de Medidas*, o *Produto de Medidas* e as *Proporções múltiplas*. Pessoa e Borba (2009a) apresentam os exemplos que seguem para cada uma das classes, com suas subclasses – Multiplicação ou divisão.

- *Isomorfismo de medidas (multiplicação)*: Tenho três caixas de chocolate. Em cada caixa há 12 chocolates. Quantos chocolates eu tenho?
- P*roduto de Medidas (multiplicação)*: Tenho três saias (verde, azul e amarela) e duas blusas (branca e preta). Quantas combinações de roupas posso fazer, usando todas as blusas com todas as saias?
- *Produto de medidas (divisão)*: Com as saias e as blusas que tenho, posso fazer seis combinações. Tenho três saias. Quantas são as blusas?

O *Isomorfismo de medidas* da divisão se subdivide em problemas de *Partição* e *Quotição*.

- *Partição*: Paguei R$20,00 por quatro caixas de chocolate. Quanto custou cada caixa?
- *Quotição*: Gabriel tem R$20,00 e quer comprar caixas de chocolate que custam R$5,00 cada uma. Quantas caixas ele pode comprar?

Os problemas de *isomorfismo de medidas* e *produto de medidas* se diferenciam em função do surgimento de uma outra unidade nos problemas de medida, ou seja, no *isomorfismo* há uma relação quaternária, enquanto no *produto de medidas* há uma relação ternária. Os problemas multiplicativos relativos a *Proporções múltiplas* não são trabalhadas nos anos iniciais de escolarização e, portanto, não serão aqui discutidos.

Os PCN (BRASIL, 1997) classificam os problemas multiplicativos em situações que envolvem:

- Multiplicação Co*mparativa,* por exemplo: Marta tem 20 selos e João tem duas vezes mais selos que ela. Quantos selos tem João?
- *Proporcionalidade,* por exemplo: Marta vai comprar quatro pacotes de chocolate. Cada pacote custa R$ 20,00. Quanto ela vai pagar pelos quatro pacotes?
- *Configuração retangular,* por exemplo: Num auditório, as cadeiras estão dispostas em fileiras 20 e quatro colunas. Quantas cadeiras há no auditório?
- *Combinatória,* por exemplo: Tenho duas saias — uma preta e uma branca — e três blusas — uma rosa, uma azul e uma cinza —, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

Acrescenta-se que, para cada tipo de problemas de multiplicação, há uma divisão correspondente, como é possível visualizar nos exemplos a seguir.

- Divisão Co*mparativa,* por exemplo: João tem 40 selos e Marta tem a metade de selos de João. Quantos selos tem Marta?
- *Proporcionalidade,* por exemplo: Marta comprou quatro pacotes de chocolate e gastou R$ 80,00. Quanto custou cada pacote?
- *Configuração retangular,* por exemplo: Num auditório, há 80 cadeiras. Elas estão dispostas em 20 fileiras e algumas colunas. Quantas colunas de cadeiras há no auditório?

- *Combinatória inversa,* por exemplo: Tenho duas saias — uma preta e uma branca — e algumas blusas. Com elas posso formar seis conjuntos de sais e blusas. Quantas blusas eu tenho?

Na classificação de Nunes e Bryant (1997) afirma-se que há diferentes níveis de raciocínio multiplicativo, que envolvem vários tipos de problemas.

O primeiro tipo de raciocínio multiplicativo é associado a questões de *proporcionalidade*. A base da proporcionalidade é a correspondência um-a-muitos. Para estes autores, a proporcionalidade se subdivide em questões de:

- *Multiplicação*, por exemplo: Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas há em seis carros?
- *Problema inverso da multiplicação*, por exemplo: João tem quarenta bolinhas de gude e pretende dar duas bolinhas para cada um de seus amigos. Para quantos amigos João pode dar suas bolinhas?
- *Produto cartesiano*, por exemplo: Tenho duas saias — uma preta e uma branca — e três blusas — uma rosa, uma azul e uma cinza —, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

Nunes e Bryant (1997) relatam que o problema de *produto cartesiano* "[...] foi consistentemente verificado ser mais difícil do que outros problemas de correspondência um-a-muitos". Como já mencionado anteriormente, ainda há os problemas combinatórios inversos, que se constituem em problemas com ainda maior nível de dificuldade.

Em estudo realizado por Selva, Borba, Campos, Bivar, Ferreira e Luna (2008) com alunos da 3ª e 5ª série (4º e 6º ano do Ensino Fundamental) enfatizam, que, dentre os problemas multiplicativos trabalhados explicitamente desde os anos iniciais de escolarização (*Multiplicação*, *Quotição*, *Partição e Produto cartesiano*), os problemas de *produto cartesiano* são os mais difíceis. As autoras supracitadas ressaltam ainda que dentre os tipos de problemas multiplicativos (com exceção dos problemas combinatórios vistos explicitamente no Ensino Médio – *combinação*, *arranjo* e *permutação*), o mais difícil é o problema de *produto cartesiano inverso*.

O segundo tipo de raciocínio multiplicativo proposto por Nunes e Bryant (1997) é referente a questões de:

- *Relação entre variáveis – co-variação*, por exemplo: Pedro quer comprar 2,5 quilos de açúcar. Cada quilo custa R$1,25. Quanto Pedro gastará?

Os problemas de *relação entre variáveis* se diferenciam dos problemas de *proporcionalidade* descritos acima por envolver uma função, pois ambos os fatores da multiplicação numa *co-variação* podem ser números decimais. Dessa forma, há um contínuo em *relações entre variáveis*, pois, no exemplo descrito, para cada fração de quilo há um preço correspondente, o que não é observado em problemas de *proporção*, nos quais esse contínuo não existe. No exemplo anteriormente apresentado, não faz sentido falar em frações de carros ou de rodas, o que faz esta situação não se enquadrar numa *relação entre variáveis.*

O terceiro tipo de raciocínio multiplicativo proposto por Nunes e Bryant (1997) são questões de:

- *Distribuição*, por exemplo: Ana tem trinta figurinhas e quer distribuí-las entre as suas seis primas. Quantas figurinhas cada prima de Ana irá receber?

Além dos problemas de *distribuição*, Nunes e Bryant (1997) afirmam existir um outro tipo de divisão, chamado de divisão por *cortes sucessivos (Splits).* Esse tipo de divisão pode ser exemplificado por uma torta de chocolates que é partida na metade (2 pedaços); esses dois pedaços podem ainda ser divididos por mais dois pedaços cada, formando assim, quatro pedaços (ou ¼ da torta). Essa divisão sucessiva resulta, naturalmente, em frações.

As classificações citadas possuem muitas semelhanças e as que se destacam nesta pesquisa são as relacionadas ao raciocínio combinatório. Este pensamento é classificado por Vergnaud como *Produto de Medidas*; pelos PCN como *Combinatória*; e por Nunes e Bryant como *Produto cartesiano*. Além disso, em todas as classificações apresentadas há menção a apenas um tipo de significado (problema) combinatório. Na próxima seção serão apresentados, então, outros tipos de significados, sendo, portanto, as situações combinatórias tratadas de forma mais ampla.

1.2 O raciocínio combinatório

A Combinatória é um ramo da Matemática caracterizado como um tipo de contagem baseada no raciocínio multiplicativo. Esse conhecimento matemático é trabalhado de modo explícito e sistemático no Ensino Médio, apesar das indicações dos PCN (BRASIL, 1997) apontarem a necessidade de serem trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Sendo assim, há uma prática na qual nos anos iniciais de escolarização é trabalhado apenas um tipo de problema combinatório (*produto cartesiano*) e, somente no Ensino Médio, os outros tipos são trabalhados.

Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997, p. 181-199) afirmam que os problemas de Combinatória podem ser usados

> [...] para treinar os alunos na contagem, fazendo conjeturas, generalização e pensamento sistemático, que pode contribuir para o desenvolvimento de muitos conceitos, tais como as relações de equivalência e ordem, função, amostra, etc. [...] No entanto, a combinatória é um campo que a maioria dos alunos encontra muita dificuldade. Dois passos fundamentais para tornar o aprendizado deste assunto mais fácil é compreender a natureza dos erros dos alunos na resolução de problemas combinatórios e identificar as variáveis que podem influenciar esta dificuldade.

Pessoa e Borba (2009a) defendem a importância que, desde os anos iniciais de escolarização, os variados tipos de problemas combinatórios sejam vistos de maneira simultânea, pois, o conhecimento desenvolvido desta forma, contribuirá para novas aprendizagens, assim como influenciará na superação dos erros e das dificuldades apresentadas inicialmente, favorecendo, assim, o momento do aprendizado sistemático oferecido por ocasião do Ensino Médio. Esse argumento é amparado no que é ressaltado por Vergnaud (1986), como já mencionado anteriormente, quando o autor enfatiza que determinados conceitos são desenvolvidos durante um longo período de tempo e que, por isso, deverão ser vistos ao longo de toda a trajetória escolar do aluno.

Além do argumento de que diferentes tipos de problemas devem ser trabalhados desde os anos iniciais para possibilitar o seu longo desenvolvimento, outro argumento é o de que os diversos problemas combinatórios devem ser vistos simultaneamente, pois fazem parte de um mesmo campo conceitual e as semelhanças e diferenças entre os mesmos são ressaltadas quando trabalhados em conjunto, bem como é justificado pelo fato que o contato com variados tipos de problemas possibilita a comparação de aspectos que possuem em comum e os que diferenciam cada uma das situações combinatórias.

1.3 Os significados e os invariantes combinatórios

O tripé base da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986) indica como uma importante dimensão para a compreensão de um conceito as situações que dão *significado* ao conceito. Baseadas na Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1986), Pessoa e Borba (2007) classificam os significados combinatórios num agrupamento único, recomendando que sejam trabalhados ao longo de cada período de escolarização, mas variando o grau de dificuldade das situações propostas, sendo essa variação de dificuldade ligada à grandeza numérica para resolução do problema ou associada à quantidade de escolhas que deve ser realizada para a resolução.

As autoras, ao agruparem numa classificação única os quatro tipos de significados combinatórios, afirmam que há possibilidade do trabalho com todos eles desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e baseiam sua afirmativa em resultados de estudos empíricos. Os quatro tipos de significados são:

- *Produto cartesiano*;
- *Combinação*;
- *Arranjo*;
- *Permutação*.

Geralmente, problemas de *produto cartesiano* são os únicos trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, enquanto que os demais tipos são vistos, sobretudo, no Ensino Médio.

Borba (2010) destaca também os invariantes de cada tipo de problema, ou seja, a segunda dimensão citada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986). A autora ressalta que a natureza do primeiro invariante está relacionado aos conjuntos existentes na situação e, portanto, refere-se à escolha dos elementos de cada possibilidade e a natureza do segundo invariante está ligado à influência, ou não, da ordenação dos elementos dispostos nos subconjuntos formados. Assim, em problemas de *produto cartesiano* há dois ou mais conjuntos a partir dos quais são efetuadas as escolhas dos elementos, e nos demais tipos de problemas há um conjunto único a partir do qual as escolhas de elementos devem ser efetuadas. Em problemas de *produto cartesiano* e *combinação* a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, já nos problemas de *arranjo* e *permutação*, a ordem em que os elementos são escolhidos gera novas possibilidades.

Do significado *produto cartesiano* tem-se como exemplo a seguinte situação:

<u>Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?</u>

No caso do *produto cartesiano*, têm-se dois ou mais conjuntos distintos, que, ao ser combinado um elemento de cada conjunto, será formado um novo conjunto. Dessa forma, se uma situação de *produto cartesiano* indica, por exemplo, dois conjuntos, sendo o primeiro conjunto composto por quatro blusas (A, B, C e D) e o segundo conjunto composto de três saias (E, F e G), o novo conjunto será formado pela *combinação* (escolha) de um elemento de cada um dos conjuntos. Sendo assim, este novo conjunto será formado por todas as possibilidades de combinar blusas e saias, ou seja, blusa ‘A’ com saia ‘E’; blusa ‘A’ com saia ‘F’; blusa ‘A’ com saia ‘G’, blusa ‘B’ com saia ‘E’ e assim por diante. Neste caso, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, pois, usar a blusa ‘A’ com a saia ‘E’ é o mesmo que usar a saia ‘E’ com a blusa ‘A’.

Assim como nas situações de *produto cartesiano*, nas situações de *combinação* também não há influência na ordenação dos elementos dos subconjuntos. Entretanto, a principal diferença é que na *combinação* há apenas um conjunto maior, do qual são escolhidos elementos para serem formados subconjuntos. Assim, estes problemas possuem esta característica em comum, referente à ordenação, mas se diferenciam quanto à escolha de elementos – de conjuntos distintos ou conjunto único, respectivamente.

Um exemplo de *combinação* é:

<u>Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?</u>

No tipo de problema *combinação*, diferentemente do tipo *produto cartesiano*, tem-se apenas um conjunto do qual são extraídos subconjuntos. Dessa forma, em uma situação que traz, por exemplo, um conjunto composto por três bichinhos de estimação (H, I e J) em que uma criança quer comprar (escolher) dois destes, os subconjuntos serão formados por todas as possibilidades de dupla de bichinhos que podem ser comprados. Assim, poderá ter a dupla de bichinhos ‘H’ e ‘I’; bichinhos ‘H’ e ‘J’; e ‘I’ e ‘J’. Também, neste tipo de problema, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, uma vez que, a dupla de bichinhos ‘H’ e ‘I’ é a mesma que a dupla de bichinhos ‘I’ e ‘H’.

Os problemas em que a ordem dos elementos gera novas possibilidades são *arranjo* e *permutação*. Esses tipos de problemas se assemelham, assim, quanto à ordenação dos elementos, mas se diferenciam em termos de escolha dos mesmos.

Um exemplo de uma situação de *arranjo* é:

<u>Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no *Play Station*. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?</u>

Nessas situações tem-se um conjunto do qual são extraídos subconjuntos. Assim, por exemplo, em um conjunto de três alunos (L, M e N) que disputam uma corrida no vídeo game, podem ser extraídas (escolhidas) todas as possibilidades para primeiro e segundo colocados. Então, poderão ser encontrados, por exemplo, as seguintes possibilidades: criança ‘L’ e criança ‘M’; criança ‘L’ e criança ‘N’; e assim por diante. Neste caso, a possibilidade criança ‘L’ e criança ‘M’ é diferente da possibilidade criança ‘M’ e criança ‘L’, uma vez que na primeira a criança ‘L’ está em primeiro lugar e na segunda a criança ‘L’ está em segundo lugar.

Uma situação em que se tem o significado da *permutação* é:

<u>De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?</u>

Nas situações de *permutação*, tem-se um conjunto e utiliza-se todos os elementos desse conjunto para formar subconjuntos diferentes. Os subconjuntos se diferenciam quanto à disposição dos elementos. Por exemplo, em um conjunto composto por três pessoas (O, P e Q) intenciona-se saber de quantas maneiras diferentes elas podem posicionar-se numa fila do banco. Assim, uma possibilidade seria ’O’ em primeiro lugar, ‘P’ em segundo e ‘Q’ em terceiro da fila; ou o subconjunto poderia ser ‘O’ em primeiro, ‘Q’ em segundo e ‘P’ em terceiro lugar da fila e assim por diante. Neste caso, a possibilidade ‘O, P, Q’ é diferente da possibilidade ‘O, Q, P’, uma vez que a posição das pessoas da fila é diferente e, portanto, a ordem dos elementos influencia no número de casos possíveis da situação.

Entende-se que, matematicamente falando, *permutação* é um caso particular do *arranjo*, porém, sob o ponto de vista psicológico, levando em consideração a teoria de Vergnaud, os dois problemas são diferentes, uma vez que os invariantes mobilizados são distintos, mas especificamente o invariante de escolha. Assim, defende-se, neste estudo, que problemas de *permutação* são diferentes de problemas de *arranjo*, pois no primeiro é necessário que a criança perceba que, para formar subconjuntos, é preciso utilizar todos os elementos existentes no conjunto, enquanto que, no segundo tipo de problema são escolhidos apenas alguns elementos a serem utilizados na formação de subconjuntos.

Diante do exposto, destaca-se que as questões de Combinatória são especialmente desafiadoras, uma vez que possuem distintas relações e podem mobilizar variadas estratégias de resolução. Dentre as estratégias de resolução, pode-se citar o uso de diversas representações simbólicas. Pessoa (2009) menciona algumas representações utilizadas na resolução de situações combinatórias, como o *desenho*; a *listagem*; o *diagrama*/*quadro*; o *princípio fundamental da contagem* e a *árvore de possibilidades*.

Diante disso, no presente estudo, pretende-se estudar de que modo uma ação reflexiva, baseada na representação simbólica de *árvores de possibilidades* com foco nos significados e nos invariantes das situações, pode influenciar na compreensão de problemas combinatórios. Antes disso, porém, serão examinados, em estudos anteriores, como são levados em consideração os distintos significados da Combinatória, seus invariantes e possíveis representações simbólicas.

1.4 Estudos anteriores sobre Combinatória

O aprendizado da Combinatória é muito importante na construção de conceitos variados, como já apontado anteriormente. Isto acontece, principalmente porque a Combinatória é um conteúdo que pode agir diretamente no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos, principalmente, pelo fato de que no raciocínio combinatório é necessário distinguir entre a realidade e a possibilidade de acontecer, pois, a criança deverá ter em mente que antes de escolher uma determinada ação, pode elencar, com antecedência, todas as possibilidades de agir.

Inhelder e Piaget (1976) chegam à conclusão que o desenvolvimento do raciocínio combinatório está ligado ao desenvolvimento do pensamento lógico-matemático, uma vez que problemas de *combinação* são resolvidos, de modo sistemático, apenas quando se atinge o nível III A – “[...] subestádio III A de 11-12 a 14-15 anos” (INHELDER; PIAGET, 1976, p.1) – e *permutações* e *arranjos* são resolvidos sistematicamente apenas no nível IIIB – “[...] subestádio III B a partir de 14-15 anos” (INHELDER; PIAGET, 1976, p.1). Verificou-se, portanto, que situações combinatórias são dominadas após um longo período de desenvolvimento.

Adicionalmente, Fischbein (1975), como foi entendido por Pessoa e Borba (2010b), argumenta que apenas o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático não será suficiente para a resolução de problemas combinatórios. Fischbein, Pampu e Minzat (1970), citados por Pessoa e Borba (2010b), observaram o efeito de instruções específicas, com o uso do diagrama de *árvore de possibilidades*, com crianças de 10 anos e observaram que, desse modo, elas são capazes de aprender ideias combinatórias. Ressalta-se, ainda, que a instrução escolar é fundamental para o desenvolvimento deste raciocínio, uma vez que o uso da *árvore de possibilidades* possibilitou avanços na medida em que os alunos apresentaram maior sistematização na resolução de problemas combinatórios.

Entretanto, em estudo sobre as representações simbólicas utilizadas na resolução de problemas combinatórios com alunos do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática, Miguel e Magina (2003), relatam que, em nenhuma ocasião, o diagrama de *árvore de possibilidades* foi utilizado, e, mesmo quando os alunos já haviam passado por estudo formal deste conteúdo, a representação mais utilizada era a *listagem*, o que dificultava a resolução da questão quando esta tinha um número elevado de possibilidades. Dessa forma, nem sempre essa representação é utilizada, mesmo sendo uma eficiente forma de sistematizar o levantamento de possibilidades.

Borba, Pessoa e Rocha (2012) investigaram 99 estudantes e dois professores de anos iniciais do Ensino Fundamental. O objetivo era observar como os alunos resolviam os quatro tipos de problemas combinatórios e analisar o que os professores pensam sobre a compreensão dos alunos. Foi destacado que tanto alunos, como professores, tiveram dificuldades em diferenciar *arranjos* de *combinações*. Além disso, percebe-se que os alunos parecem desenvolver seus raciocínios combinatórios independentes do que está sendo trabalhado na escola, pois uma questão preocupante se diz respeito ao conhecimento que os professores têm sobre o conteúdo, que demonstrou ser muito frágil, principalmente porque os professores entrevistados não tiveram formação inicial ou continuada sobre a Combinatória.

Além destes estudos já citados – que investigaram efeitos da instrução em Combinatória – outros estudos buscaram observar o desenvolvimento do raciocínio combinatório antes e após instrução específica nesse conteúdo. Estes estudos envolveram participantes de diferentes níveis e modalidades de ensino.

Pessoa e Borba (2012) investigaram, por meio de material concreto, se crianças da Educação Infantil, de cinco e seis anos de idade, compreendem os invariantes de escolha e de ordenação presentes nos quatro significados combinatórios. As autoras destacam que, quanto à escolha dos elementos os alunos não apresentam muitas dificuldades, demonstrando, entretanto, maior dificuldade na compreensão de ordenação dos elementos e, principalmente no esgotamento das possibilidades da situação. Assim, crianças da Educação Infantil, já demonstram uma compreensão intuitiva da combinatória, sendo possível, então, trabalhar concretamente essas situações desde esse nível de ensino.

Soares e Moro (2006) investigaram o desenvolvimento do raciocínio combinatório de 31 crianças do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, especificamente com questões de *produto cartesiano,* e concluíram que as estratégias de resolução são, inicialmente, não sistematizadas e, com as experiências em instruções formais, passam a ser sistemáticas, incluindo, por vezes, o uso de *árvores de possibilidades.* Esse tipo de representação simbólica pode, assim, ser fonte de avanços no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Pessoa e Borba (2010a), em estudo de sondagem com alunos de 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, consideram a *árvore de possibilidades* como um dos tipos de representação simbólica utilizados na resolução de problemas combinatórios, entretanto, entre os alunos dos anos iniciais de escolarização, é a representação menos utilizada. As autoras destacam que as *listagens*, a *multiplicação* e a *adição de parcelas repetidas*, por exemplo, são mais usadas. Apesar do pouco uso da *árvore de possibilidades* por crianças em início de escolarização, as autoras enfatizam que esta representação é um bom caminho para que a Combinatória seja trabalhada na escola, uma vez que se configura numa representação que, quando utilizada por alunos, resultam em resoluções corretas, principalmente em situações de *produto cartesiano*.

Silva e Spinillo (2011), também investigaram o desenvolvimento do raciocínio combinatório, a partir de situações de *produto cartesiano*, com 40 crianças de sete e oito anos de idade. As autoras destacaram que, quando as crianças resolvem situações de *produto cartesiano* com explicitação de possibilidades no enunciado, tanto os seus desempenhos, quanto as estratégias de resolução utilizadas são mais sofisticadas, uma vez que envolvem, mais nitidamente, a correspondência um-para-muitos.

Além disso, apesar do estudo citado não possuir caráter de intervenção, destaca-se que, apenas explicitando um exemplo sistemático de possibilidades, as crianças melhoram seus desempenhos em situações com enunciados implícitos. Ressalta-se ainda que, em *árvores de possibilidades*, essa correspondência um-para-muitos e a explicitação sistemática podem ser evidenciadas, pois, nesses diagramas, para cada elemento pode-se relacionar os outros elementos aos quais deve ser associado e essa associação tem caráter sistemático.

Correa e Oliveira (2011) em estudo com 279 estudantes do 5º ao 9º ano investigaram o desempenho dos alunos em problemas com explicitação das opções (elementos do conjunto dado) presentes em problemas combinatórios, ou seja, das variáveis existentes no problema. As autoras perceberam que essa explicitação foi decisiva para o desempenho dos alunos em problemas de *arranjo e combinação*, em comparação com o desempenho em situações com enunciados tradicionais. Ressalta-se, entretanto, que a explicitação das opções não determinou efeito facilitador em problemas de *produto cartesiano* e *permutação*, considerados, respectivamente, mais fáceis e mais difíceis. As situações da presente pesquisa buscaram, também, explicitar os elementos, mas se acredita, especificamente, que a árvore de possibilidades pode ressaltar as características de todos os tipos de problemas combinatórios.

Em estudo longitudinal, Maher e Yankelewitz (2010) investigaram a compreensão inicial de crianças de 2ª série (3º ano), e, posteriormente, dessas mesmas crianças durante e 3ª série (4º ano) em um problema de *produto cartesiano*. As autoras enfatizam que é preciso convidar as crianças a usar representações diversas para expressar suas ideias e formas de raciocínio, pois, as autoras afirmam que as representações dão sentido ao problema e comunicam ideias. Com isso, as crianças podem encontrar padrões, serem sistemáticas, abstraírem e generalizarem resultados.

No problema de *produto cartesiano* apresentado aos alunos, as autoras solicitaram que as crianças combinassem camisas e calças. Além disso, também solicitaram que as crianças às convencessem que conseguiram encontrar todas as possibilidades. Nesse momento, segundo as autoras, as crianças construíam esquemas organizacionais que puderam facilitar a resolução do problema. Vale ressaltar que, segundo as autoras, as crianças desse estudo também se utilizaram da *árvore de possibilidades* para resolver problemas combinatórios.

Neste estudo foram acompanhados três alunos durante o tempo que estavam na 2ª e 3ª séries (3º e 4º anos). As autoras afirmam que na 2ª série (3º ano) os três estudantes faziam desenhos de camisas e calças para representar os elementos dos conjuntos citados no problema. Os alunos usavam as imagens nas suas tentativas de encontrar as diferentes combinações. Duas crianças encontraram cinco combinações diferentes e uma encontrou três combinações diferentes, quando na verdade havia seis combinações possíveis. Na 3ª série (4º ano) esses mesmos três alunos, quando se depararam com o mesmo problema de camisas e calças, não se utilizaram apenas de desenhos para resolver o problema, mas também de diagramas e listagens. Os três alunos encontraram seis combinações possíveis e chegaram, portanto, à solução do problema.

As autoras concluem que, já no 3º ano, os alunos, apesar de não terem chegado à solução correta do problema, construíram esquemas que poderiam levar à solução correta. Elas também citam que a interação entre os alunos revelaram boas aprendizagens e enfatizam ainda, que, já em tenra idade, os alunos podem construir ideias e formular soluções para problemas combinatórios e, uma dessas soluções, é por meio do diagrama de *árvore de possibilidades*.

Barreto e Borba (2011) analisaram o desempenho de 10 alunos do Módulo III da Educação de Jovens e Adultos – EJA (equivalente ao quarto e quinto anos do

Ensino Fundamental) em solucionar problemas que envolvem o raciocínio combinatório, antes e depois de intervenção com uso de *árvores de possibilidades* e *listagens*. As autoras destacam que, com apenas uma sessão de intervenção, os alunos da EJA já avançam em seus raciocínios combinatórios. Elas enfatizam que esse avanço é ainda superior quando são analisados os acertos parciais dos estudantes e concluem que ambas as formas de representação podem proporcionar desenvolvimentos no raciocínio combinatório.

Borba, Barreto e Azevedo (2012) analisaram o uso de *listagens* e *árvores de possibilidades* em apenas uma sessão de intervenção com crianças de anos iniciais do Ensino Fundamental e adultos em processo inicial de escolarização. As autoras concluíram que houve expressivos avanços de desempenho dos alunos na resolução de problemas combinatórios, pois os alunos foram levados a pensar nas relações e propriedades existentes nos diferentes tipos de problemas. Assim como *listagens*, *árvores de possibilidades* são, portanto, representações simbólicas que podem auxiliar na compreensão de situações combinatórias.

Desta forma, diante da possibilidade de aprendizagens por meio do uso de *árvores de possibilidade*, o presente estudo visa analisar, por meio desse tipo de representação simbólica, com ou sem o uso de um recurso computacional, o desempenho de crianças do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas combinatórios.

CAPÍTULO 2:
O USO DA TECNOLOGIA EM FAVOR DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A sociedade atualmente utiliza as tecnologias informáticas de forma bastante diversificada – em usos pessoais e coletivos, profissionais, comunicacionais e de lazer, dentre outros. A tecnologia também é bastante utilizada no âmbito educativo de maneira cada vez mais intensa. Segundo Borba e Penteado (2010, p.13) "[...] sempre há uma dada mídia envolvida na produção de conhecimento".

O lápis e papel atuam como uma tecnologia utilizada de forma predominante em sala de aula, entretanto, percebe-se que as tecnologias informáticas estão cada vez mais inseridas no contexto escolar. Isso acontece devido ao fato de que com essas tecnologias se pode pesquisar sobre qualquer área do conhecimento e encontrar discussões teóricas e práticas quanto ao ensino e a aprendizagem da referida área, bem como obter informações sobre recursos digitais que podem ser utilizados na escola.

Nesse contexto, Borba e Penteado (2010, p.12) destacam que há muitas discussões sobre o uso de tecnologias informáticas em sala de aula, principalmente em torno da real aprendizagem dos alunos que utilizam essa ferramenta. Os autores supracitados evidenciam que, há argumentos contrários à sua utilização enfatizando que educadores indagam "Se um estudante do Ensino Médio aperta uma tecla do computador e o gráfico da função já aparece, como ele conseguirá, 'de fato', aprender a traçá-lo?". Em contrapartida a esse argumento, os autores perguntam: "Será que o aluno deveria evitar o uso intensivo de lápis e papel para que não fique dependente dessas mídias?". Sendo assim, alguns professores atualmente vêm sendo capacitados, na formação inicial e em formações continuadas, a trabalhar fazendo uso de diversas tecnologias, incluindo as tecnologias informáticas, principalmente por meio do uso do computador.

Valente (1997, p.1) enfatiza que "[...] o uso inteligente do computador não é um atributo inerente ao mesmo, mas está vinculado à maneira como nós concebemos a tarefa na qual ele será utilizado". Desse modo, o uso de computador também pode facilitar e dar subsídios, por meio do auxilio da tecnologia, na resolução de problemas propostos, possibilitando, assim, o desenvolvimento conceitual. Isto porque o aprendizado por computador tem grande potencial, é um recurso presente no cotidiano e, como afirmam Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009, p.1), "[...] a tecnologia faz parte da vida do aluno, é um bem social e não pode, nem deve ser negada".

Uma das ferramentas, para que se possa trabalhar com o computador no ensino, é fazendo uso de *softwares educativos*. Estes, de acordo com Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009, p.4), “[...] consistem em programas para computador com o objetivo de contribuir para aquisição da aprendizagem, com fundamentação pedagógica”.

Não somente no campo da Matemática, mas também de outras áreas do conhecimento, é necessário que haja algumas preocupações no que diz respeito a certos aspectos dos *softwares educativos*. Gomes, Castro Filho, Gitirana, Spinillo, Alves, Melo e Ximenes (2002, p. 2), enumeram a importância dos seguintes aspectos: “[...] consistência da representação, usabilidade, qualidade da interface, qualidade do *feedback*”.

Assim, não é todo *software* que é apropriado ao ensino, mas, sim, aqueles que utilizam recursos que são entendidos pelos alunos e atrativos aos mesmos, sendo os ideais aqueles que oferecem retorno ao usuário para que ele possa refletir sobre as situações e sobre as suas ações referentes às mesmas. Entretanto, aqueles que não oferecem o *feedback* para o usuário precisam que o professor esteja capacitado para o seu trabalho em sala de aula. Desse modo, os PCN (BRASIL, 1997) afirmam que cabe ao professor escolher o *software* em função da construção do conhecimento objetivado para os alunos. Além disso, também deve ser analisada a qualidade do *software* escolhido.

Nesse sentido, Valente (1997, p. 1) enfatiza que

> Um *software* só pode ser tido como bom ou ruim dependendo do contexto e do modo como ele será utilizado. Portanto, para ser capaz de qualificar um *software* é necessário ter muito clara a abordagem educacional a partir da qual ele será utilizado e qual o papel do computador nesse contexto.

Dessa forma, é importante verificar a consistência da representação, no que diz respeito ao funcionamento do recurso, bem como adequações ao público-alvo, ou seja, observar os aspectos pedagógicos que estão pautados na resolução e nível dos exercícios, no manuseio e na qualidade do *software*, do som e da imagem, o alcance de objetivos propostos e a contribuição para aprendizagem do conteúdo no momento do *feedback*, dentre outros, mas sempre pautados no contexto no qual o *software* será utilizado.

Pode-se afirmar que, verificando tais critérios e estudando o contexto no qual esta ferramenta será utilizada, o *software* educativo pode fazer com que crianças dos anos iniciais de escolarização façam uso eficiente de um recurso manipulativo. Como enfatiza Gitirana (2009, p. 239), os *softwares educacionais* podem potencializar o aprendizado provendo “[...] alunos e professores com objetos virtuais manipuláveis que possibilitam os alunos a pensarem sobre elementos da matemática”, causando, desta forma, um diferencial para o ensino dessa disciplina.

Além disso, Goos (2010) enfatiza que a tecnologia informática deve fazer parte do ambiente escolar de forma a proporcionar a interação de ideias entre os alunos, pois, assim, essa tecnologia torna-se mais do que um substituto do lápis e papel. Segundo a autora, se assim não for, a tecnologia se torna apenas um recurso que realiza um trabalho mecânico, deixando, portanto, de ser parceira com o intuito de fomentar a discussão Matemática e a interação em sala de aula.

Nesse sentido, a presente pesquisa se propõe a investigar o efeito de intervenções pedagógicas no desempenho em problemas combinatórios com e sem o uso de *software*, ou seja, utilizando o lápis e papel ou fazendo uso do computador, um recurso cada vez mais presente na sociedade. Assim, pretende-se que as crianças participantes dessa pesquisa atinjam o objetivo do aprendizado da Combinatória e se avaliará o papel de recursos nesta aprendizagem.

2.1 *Softwares* educativos para o desenvolvimento do raciocínio combinatório

Na Matemática, os diversos assuntos abordados podem ser trabalhados fazendo uso de ferramentas variadas. Isso não é diferente com um conteúdo em especial – a Combinatória. Este conteúdo é, geralmente, estimulado ou visto em sala de aula, somente no Ensino Médio por meio de uso direto de fórmulas e abordado em menor extensão no Ensino Fundamental – de maneira não sistemática. Porém, a aprendizagem nos anos iniciais, apesar de não ser indicado o uso de fórmulas, pode acontecer por meio de estratégias sistemáticas.

Dentre as variadas ferramentas que possibilitam explorar esse conteúdo e desenvolver seus conceitos têm-se os *softwares educativos*. Visto que os *softwares* podem ser uma proposta e um recurso de ensino da Matemática e que podemos utilizá-los para a resolução de problemas ligados diretamente ao raciocínio combinatório, os mesmos poderão proporcionar diversas situações que estão presentes neste conteúdo do campo conceitual estudado.

Quando é trabalhado algum conteúdo, em particular a Combinatória, utilizando este recurso, o aluno pode aprimorar conceitos já em construção, bem como pode manusear, de maneira exploratória, conceitos ainda não desenvolvidos, estimulando, assim, seu raciocínio, fazendo relações do conteúdo visto em sala de aula com o seu dia-a-dia, buscando debater com o professor o porquê dos acontecimentos, dentre outros aspectos. Assim, com recursos tecnológicos, pode-se manipular os elementos dos subconjuntos agrupando-os para o levantamento de possibilidades. Dessa forma, com a manipulação do *software*, os alunos podem trabalhar as situações visualizando as possibilidades manuseando quase concretamente as situações.

Entretanto, mesmo sabendo da importância do uso de *softwares*, ainda é considerada escassa a produção de *softwares* voltados para o Ensino Fundamental, principalmente a respeito da Combinatória.

Em busca nos sites governamentais como os do Ministério da Educação – MEC, do Governo do Estado de Pernambuco, da Prefeitura do Recife, encontra-se, apenas no site do MEC, objetos de aprendizagem[1] voltados para o Ensino da Combinatória: RIVED, 2008 – *Combinação, Arranjo* e *Permutação* citado por Leite; Pessoa; Ferraz; Borba (2009).

Esses objetos de aprendizagem já foram analisados por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009). Nesta análise as autoras ressaltam que estes objetos de aprendizagem atendem isoladamente a distintos tipos de problemas combinatórios, bem como, levam, preferencialmente, à utilização de uma linguagem de fórmulas. Com isso, não seria possível o seu trabalho com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A partir do estudo de Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007), foi possível localizar o *software Diagramas de Árbol* (AGUIRRE, 2005), produzido pela Secretaría de Educación Pública de México*.* Este *software* foi analisado por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) e utilizado por Ferraz, Borba e Azevedo (2010),

---

[1] Entende-se *objeto de aprendizagem* (OA) como uma unidade de instrução tecnológica reutilizável. Caracteriza-se por ser de pequena extensão e de fácil manipulação. No caso dos objetos de aprendizagem identificados por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) – *Combinação* (RIVED, 2008), *Permutação* (RIVED, 2008) e *Arranjo* (RIVED, 2008) – são tratados significados específicos dentro da Combinatória, respectivamente *combinações*, *permutações* e *arranjos*.

Azevedo, Costa e Borba (2011) e Borba e Azevedo (2012) em estudos com finalidade de investigar o aprendizado da Combinatória por meio deste recurso [2].

Em função destes estudos, destaca-se que este *software*, através do diagrama de *árvore de possibilidades*, favorece a aplicação com crianças de nível inicial de escolarização, pois fornece todas as possibilidades de *combinação*, sejam elas válidas ou não, em todos os tipos de problemas (*produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*), sem objetivar o uso precoce de fórmulas.

2.2 O *Software Diagramas de Árbol*

Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009, p.9) enfatizam que se deve explorar

> [...] logo no início da introdução ao raciocínio combinatório, as representações para depois introduzir a formalização [...] [oportunizando] [...] o uso de diferentes tipos de representações, como: árvores de possibilidades, tabelas, forma pictórica, diagramas, etc, ao invés de propor somente a fórmula como forma de representação.

Sendo assim, é importante que o *software* seja utilizado com sua base de representação que antecede às fórmulas, aproveitando o caráter lúdico das suas representações, como é o caso do *software* escolhido: *Diagramas de Árbol* (Figura 1).

Figura 1: Página de abertura do *software Diagramas de Arbol* (AGUIRRE, 2005)

[2] O *software Diagramas de Árbol* não se trata de um *software livre*, este foi concedido pelas autoras (SANDOVAL; TRIGUEIROS; LOZANO, 2007l) para uso pelo Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (Geração).

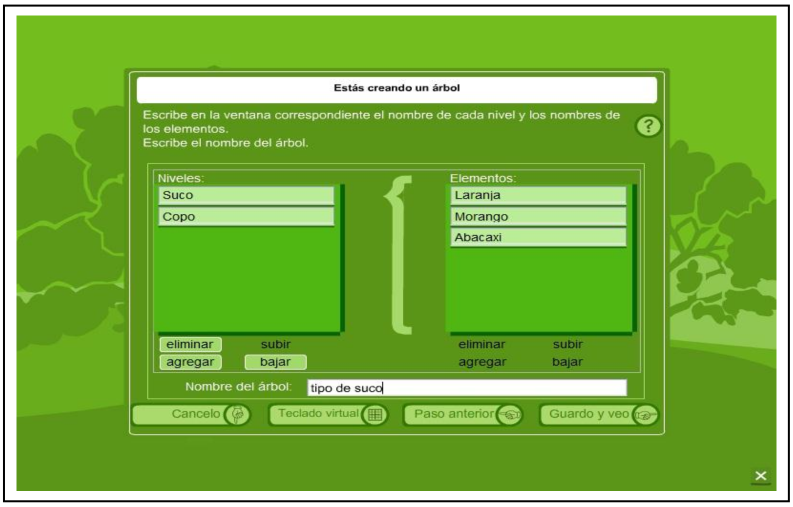
Como já foi mencionado, cada tipo de problema combinatório tem características especificas. Destaca-se que todas elas podem ser resolvidas por meio da análise de diagramas de árvores. Na terceira tela do *software Diagramas de Árbol* é possível escolher os níveis e inserir os elementos que a pergunta da questão de Combinatória traz e, a partir daí, é possível visualizar na tela seguinte todas as possibilidades para a resolução da questão.

Para exemplificar como o *software* trabalha problemas de *produto cartesiano*, será usada a primeira questão do teste aplicado aos participantes do presente estudo:

<u>Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?</u>

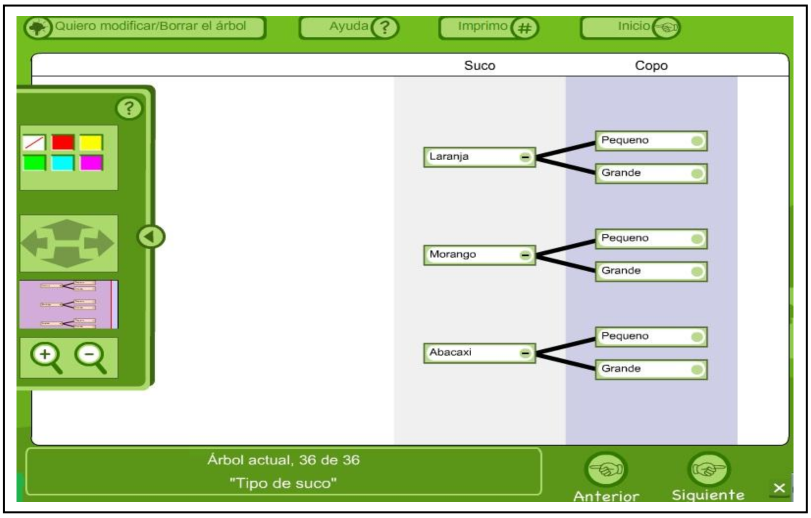
No *software,* os níveis da situação são os conjuntos de sucos e copos e os elementos são todos os objetos dos conjuntos, simbolizados pelas características (sabor e tamanho) de cada suco e copo. É necessário inserir essas informações na tela de criação da árvore (Figura 2) e gera-se, nesse caso, um total de seis possibilidades (Figura 3).

Figura 2: Página de escolha de níveis e elementos no *Diagramas de Árbol* (caso de um *produto cartesiano*).



Na Figura 3 pode-se observar que o *software* gera o total das possibilidades, entretanto é necessário que o professor questione o total das possibilidades válidas para que os alunos entendam a árvore de possibilidades que foi gerada pelo *software*.

Figura 3: Árvore de possibilidades no *Diagramas de Árbol* (caso de um *produto cartesiano*)



Para exemplificar como o *software* trabalha problemas de *combinação*, será usada a terceira questão do teste aplicado aos participantes do presente estudo:

<u>Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?</u>

No *software,* os níveis da situação correspondem à quantidade de bichinhos que serão escolhidos. Assim, como a questão solicita a escolha de dois bichinhos, têm-se dois níveis. Os elementos são os animais que podem ser escolhidos. É necessário inserir essas informações na tela de criação da árvore (Figura 4) e gera-se, nesse caso, um total de três possibilidades (Figura 5).

Figura 4: Página de escolha de níveis e elementos no *Diagramas de Árbol* (caso de uma *combinação*).

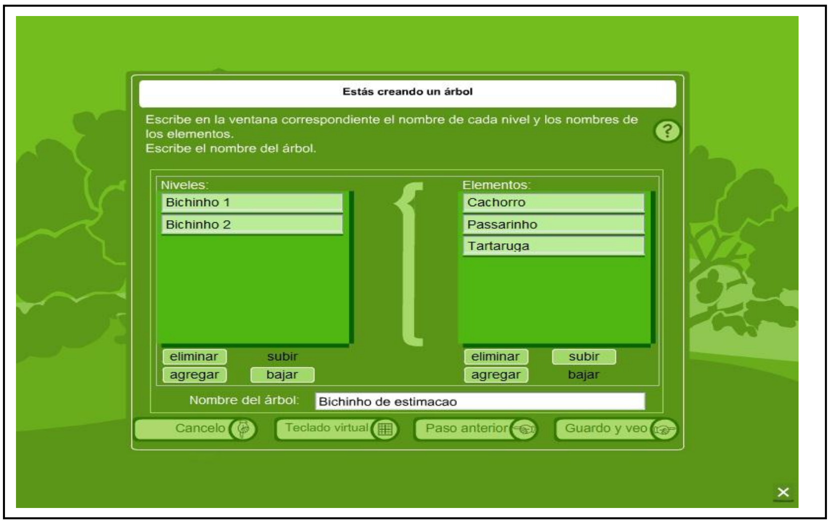
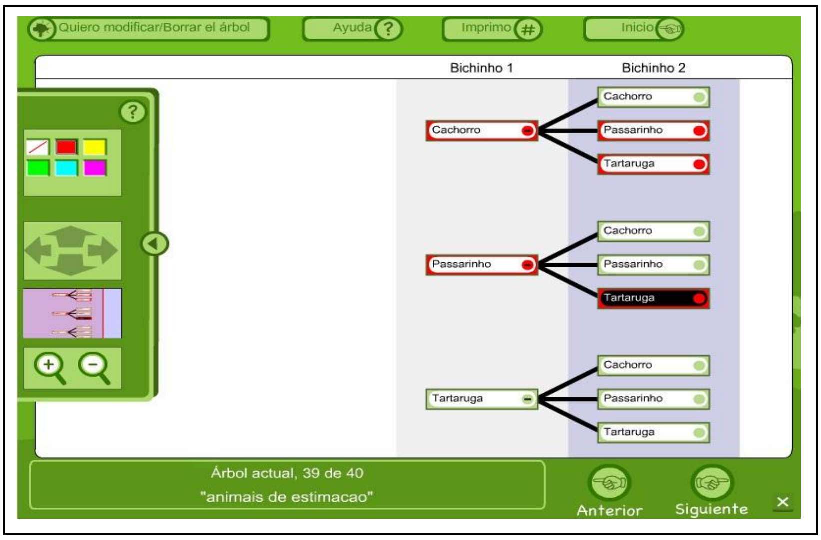


Figura 5: Árvore de possibilidades no *Diagramas de Árbol* (caso de uma *combinação*)



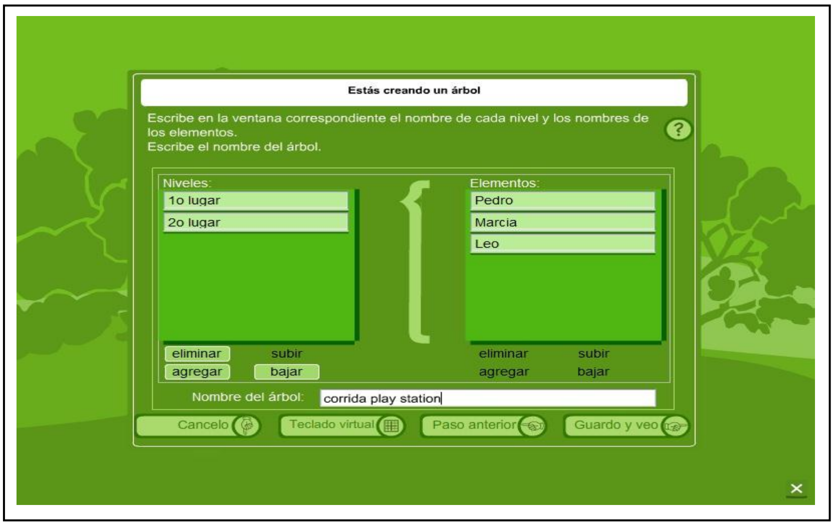
Observando a Figura 5, é possível verificar que a resposta apenas é solucionada com a validação dos casos possíveis, destacados na cor vermelha. Esta validação deve ser feita pelo usuário, no momento em que o *software* disponibiliza todos os casos da situação, sejam eles apropriados ou não. Na situação de *combinação* apresentada não é possível escolher dois animais iguais e a ordem desses animais não é uma nova possibilidade. Desse modo, os alunos deverão ser questionados sobre este aspecto e assim não deverão ser validados os casos "cachorro e cachorro"; "passarinho e passarinho"; "tartaruga e tartaruga"; "passarinho e cachorro" (o mesmo que "cachorro e passarinho"); "tartaruga e cachorro" (o mesmo que "cachorro e tartaruga") e "tartaruga e passarinho" (o mesmo que "passarinho e tartaruga").

Para exemplificar como o *software* trabalha problemas de *arranjo*, será usada a quinta questão do teste aplicado aos participantes do presente estudo:

<u>Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?</u>

No *software,* os níveis da situação consistem nos possíveis primeiro e segundo colocados da corrida e os elementos são todas as pessoas que disputam a corrida. É necessário inserir essas informações na tela de criação da árvore (Figura 6) e gera-se, nesse caso, um total de seis possibilidades (Figura 7).

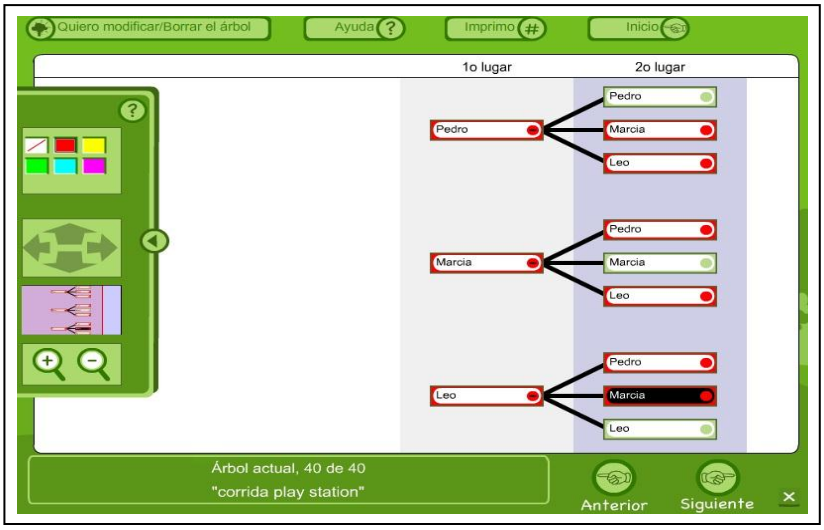
Figura 6: Página de escolha de níveis e elementos no *Diagramas de Árbol* (caso de um *arranjo*).



Observando a Figura 7, também é possível verificar que a resposta apenas é solucionada com a validação dos casos possíveis, destacados na cor vermelha.

Na situação de *arranjo* apresentada, não é possível escolher duas crianças iguais uma vez que, se uma criança já é a primeira colocada, a mesma não pode ser a segunda. Desse modo, os alunos deverão ser questionados sobre este aspecto e, assim, não deverão ser validados os casos “Pedro e Pedro”; “Márcia e Márcia”; “Léo e Léo”.

Figura 7: Árvore de possibilidades no *Diagramas de Árbol* (caso de um *arranjo*)



Para exemplificar como o *software* trabalha problemas de *permutação*, será usada a sétima questão do teste aplicado aos participantes do presente estudo:

<u>De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?</u>

Os níveis correspondem ao lugar em que cada pessoa pode ocupar na fila (1º, 2º ou 3º lugar da fila) e os elementos são todas as pessoas que irão ocupar esses lugares (três pessoas). É necessário inserir essas informações na tela de criação da árvore (Figura 8) e gera-se, nesse caso, um total de seis possibilidades (Figura 9).

Figura 8: Página de escolha de níveis e elementos no *Diagramas de Árbol* (caso de uma *permutação*).

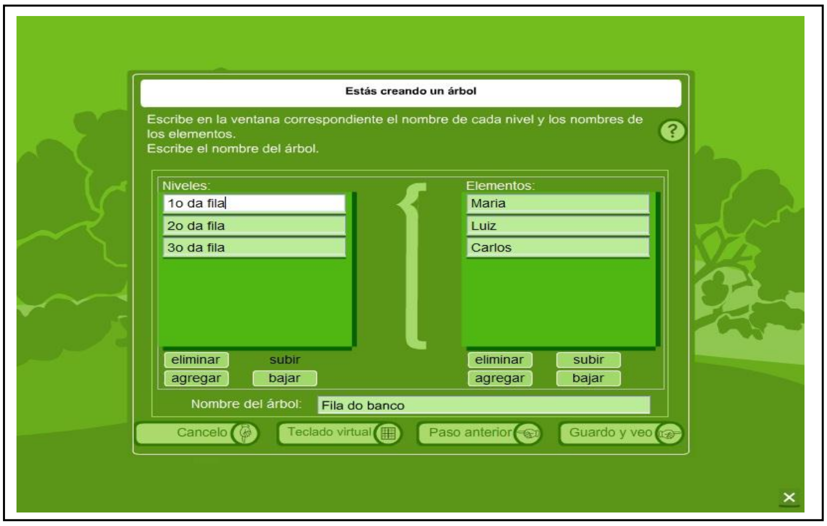
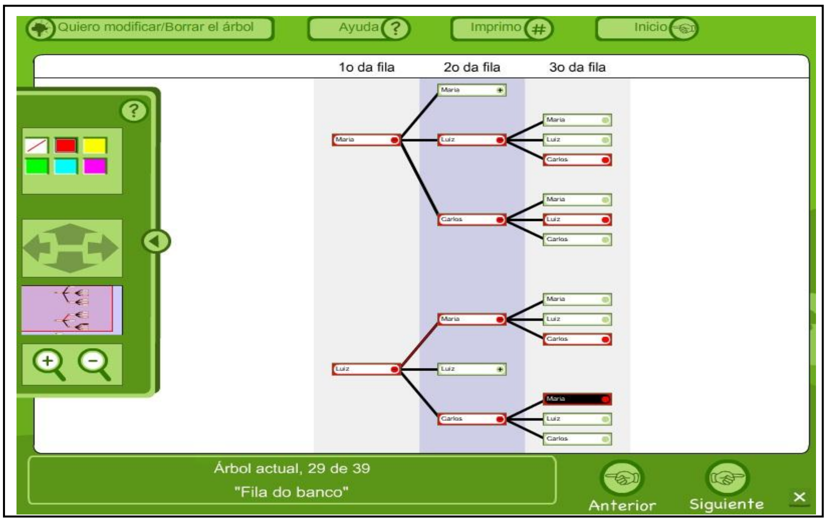


Figura 9: Árvore de possibilidades no *Diagramas de Árbol* (caso de uma *permutação*)



Observando a Figura 9, também é possível verificar que a resposta apenas é solucionada com a validação dos casos possíveis, destacados na cor vermelha. Na situação de *permutação* apresentada, não é possível escolher as mesmas três pessoas para ocupar os três lugares da fila, uma vez que, se uma pessoa já é a primeira da fila, a mesma não pode ser a segunda, nem a terceira. Desse modo, os alunos deverão ser questionados sobre este aspecto e assim não deverão ser validados os casos em que se repetem as pessoas da fila. Por exemplo: “Maria, Maria e Maria”; “Luís, Luís e Luís”; “Carlos, Carlos e Carlos”; “Maria, Luís e Maria”; “Maria, Luís e Luís”; dentre outros.

Verifica-se, desse modo, que nos três últimos tipos de problemas, o aluno precisa validar (pintando de vermelho) os casos possíveis. O *software* executa a ação de apresentar todos os casos, mas cabe ao usuário analisar e destacar, de alguma forma, os casos válidos. Dessa forma, por meio da indicação dos casos válidos realizada pelo usuário, o aluno percebe de maneira exploratória os invariantes de cada significado combinatório.

Pelo exposto, o *software Árbol* foi escolhido para o processo de intervenção do estudo aqui relatado por possibilitar o trabalho com os diversos tipos de problemas combinatórios, por meio de uma representação válida – a *árvore de possibilidades*; por permitir a análise de semelhanças e diferenças entre as situações combinatórias, e por não estimular o ensino de fórmulas.

2.3 Estudos anteriores com o *software Diagramas de Árbol*

Alguns estudos demonstraram grande avanço do raciocínio combinatório com crianças e adolescentes com idades entre 10 e 13 anos por uso do *software Diagramas de Árbol*. Estas pesquisas anteriores dão respaldo ao atual estudo que se diferencia dos demais principalmente por propor uma comparação entre alunos dos anos iniciais que usaram, ou não, o *software*.

Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007) propuseram a aprendizagem da Análise Combinatória utilizando o *software Diagramas de Árbol* com 25 crianças mexicanas de 11 a 13 anos. Essas autoras observaram o avanço principalmente quanto à escolha de estratégias de resolução mais eficientes.

Assim, ressalta-se que este *software*, por meio do diagrama de *árvore de possibilidades*, favorece a aplicação com crianças de nível inicial de escolarização, pois fornece todas as possibilidades de *combinação*, sejam elas válidas ou não, em todos os tipos de problemas (*produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*). Entretanto, as autoras supracitadas destacam que se requer investigar as implicações do uso deste *software* em ambientes de lápis e papel.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010), aplicaram um teste no qual, alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, deveriam resolver as situações, ora utilizando o *software Diagramas de Árbol*, ora utilizando apenas o lápis e papel, não havendo nessa pesquisa a presença de grupos controles. Em entrevistas com alguns dos alunos participantes da pesquisa, foi possível destacar na fala dos alunos a organização que o *software* oferece na resolução dos problemas combinatórios. Entretanto, os alunos também enfatizaram que o *software* apresenta algumas dificuldades, elencadas pelas autoras como: a não apresentação de *feedback*, assim como, dificuldades quanto à não visualização de todas as possibilidades e quanto ao idioma (espanhol).

Apesar das limitações do *software* apontadas pelos alunos, as autoras notaram que, com alunos dos anos finais de escolarização (7º ano), o uso deste *software* por meio da *árvore de possibilidades* pode ser um excelente recurso na compreensão de problemas combinatórios, tanto com a utilização do *software* quanto com o uso apenas do lápis e papel.

Azevedo, Costa e Borba (2011), em estudo de intervenção com uso do *software Diagramas de Árbol* com 8 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental observaram que o uso do *software* proporcionou avanços em todos os tipos de problemas combinatórios, porém com menos resultados favoráveis para as situações de *permutação*. As autoras destacam que o *software* utilizado permitiu que os alunos utilizassem uma forma de representação – árvore de possibilidades – na qual puderam refletir sobre a estrutura das situações, uma vez que ficaram livres da responsabilidade de listar todos os possíveis casos.

As autoras destacaram ainda que o *software* auxiliou no aprendizado, porém havia a necessidade que o professor apontasse os principais aspectos de cada tipo de questão, ou seja, os invariantes de cada situação. O primeiro relativo à escolha: se todos os elementos do conjunto devem ser usados; e o segundo relativo à ordenação: se a ordem desses elementos pode influenciar ou não no resultado.

Borba e Azevedo (2012), em um estudo de caso com uma dupla de alunas do 5º ano do Ensino Fundamental, participantes da pesquisa realizada por Azevedo, Costa e Borba (2011), analisaram o *software Diagramas de Árbol* como um possível recurso a ser utilizado para o ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. As autoras destacam que as alunas, que inicialmente demonstraram pouco conhecimento em situações combinatórias, após duas sessões de intervenção com o uso do *software* já mencionado, passaram à quase totalidade de questões respondidas corretamente. Em suas respostas, as alunas apresentavam a compreensão das relações e propriedades das diferentes situações combinatórias e, certamente, foram influenciadas em seu desenvolvimento pelo uso dos diagramas de *árvores de possibilidades* apresentados pelo *software*.

Assim, diante da aprendizagem com a utilização do *software Diagramas de Árbol*, a presente pesquisa busca investigar se a aprendizagem por meio do lápis e papel é tão promissora, como se mostrou a aprendizagem com a utilização do *software* nas pesquisas relatadas anteriormente.

Desta forma, diante da possibilidade de aprendizagens por *árvores de possibilidades*, o presente estudo, visa ampliar os dados encontrados em estudos anteriores, verificando como o uso de *árvores de possibilidades*, produzidas virtualmente ou em lápis e papel, oferece influência no aprendizado da Combinatória com alunos dos anos iniciais de escolarização, destacando as representações simbólicas utilizadas por eles.

Assim destaca-se que, a hipótese inicial previa um grande avanço do grupo que trabalhou problemas combinatórios por meio do *software*, uma vez que estudos anteriores já relatavam esse resultado. Entretanto, já se previa, também, a possibilidade do avanço acontecer também para o grupo que resolvia os problemas em lápis e papel, pois os alunos teriam que pensar nas relações presentes nas situações ao construírem, eles mesmos, as *árvores de possibilidades*.

Um caráter inovador da presente pesquisa é a inclusão da comparação de desempenhos entre os usuários de *software* e os que construíram manualmente as *árvores de possibilidades*, bem como a existência de dois grupos controle para verificar a necessidade de instrução específica para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Essa comparação visa compreender o papel que diferentes formas de representação (no lápis e papel e no *software*) em um determinado tipo de representação simbólica (*árvore de possibilidades*) desempenham no desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças do 5º ano do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 3:
OBJETIVOS E MÉTODO

3.1 Objetivos

3.1.1 Objetivo Geral

- Analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios.

3.1.2 Objetivos Específicos

- Investigar o efeito de intervenções pedagógicas, por meio da construção de árvores de possibilidades com *lápis e papel* ou com *software*, no desempenho em problemas combinatórios;
- Verificar os desempenhos de alunos em relação aos tipos de problemas combinatórios em função da representação utilizada na intervenção – virtual ou escrita;
- Observar a influência das distintas intervenções na utilização de diversificadas representações simbólicas e estratégias.

3.2 Método

3.2.1 Participantes e Procedimentos

O presente estudo foi realizado com 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública Municipal do Recife. A escolha de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental é baseada, principalmente no fato de que, esses alunos já aprenderam sobre as estruturas multiplicativas, e possuem maior autonomia na leitura e interpretação dos enunciados. As duas escolas foram escolhidas por conveniência e buscando atender ao quantitativo de alunos desejados para a realização da pesquisa. Além disso, não era objetivo comparar as duas escolas.

Foi realizado, em ambas as escolas, inicialmente um pré-teste, seguido de distintas formas de intervenção, realizadas em um encontro, e, finalmente, pós-testes, que permitiram avaliar os avanços obtidos por meio das intervenções realizadas.

Durante as intervenções os alunos trabalharam em duplas, pois se acredita que as interações entre as crianças podem contribuir para a compreensão e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Ainda durante as intervenções, a resolução do pré-teste dos alunos dos grupos experimentais era mantida ao alcance das crianças para que, se houvesse necessidade, as crianças verificassem o modo como haviam feito as questões anteriormente. As duplas foram distribuídas em quatro grupos distintos, de acordo com a intervenção proposta para cada grupo.

O primeiro grupo (G1) se caracterizou como o primeiro grupo experimental e trabalhou em duplas com o *software Diagramas de Árbol* – no qual são construídas árvores de possibilidades; o segundo grupo (G2), o segundo grupo experimental, construiu árvores de possibilidades com lápis e papel, também em duplas; o terceiro grupo (G3), formou o Grupo Controle assistido que, em duplas, trabalhou problemas multiplicativos (excluindo-se os de Combinatória) por meio de desenhos – que configuram uma forma de representação bastante utilizada nas resoluções de questões combinatórias. Dessa forma, pretendia-se observar se a instrução em problemas de estruturas multiplicativas – não Combinatória – seria suficiente para o avanço de desempenho em situações combinatórias do pós-teste, ainda que estas não tivessem sido trabalhas com os alunos desse grupo.

Houve, ainda, a participação do quarto grupo (G4) que caracterizou um grupo controle desassistido. Esse grupo realizou apenas o pré-teste e os pós-testes, objetivando certificar-se que apenas o passar de tempo não era suficiente para que se desse o aprendizado em Combinatória. Adiante neste capítulo serão descritos os roteiros utilizados para os grupos com intervenção em Combinatória e em estruturas multiplicativas (não combinatórias).

No pré-teste os alunos responderam oito situações-problema de Combinatória, como pode ser visto a seguir no Quadro 1, sendo duas questões para cada tipo de problema: *produto cartesiano, arranjo, combinação* e *permutação*. As questões foram adaptadas de um estudo anterior (AZEVEDO; COSTA; BORBA, 2011), no qual se optou por explicitar as opções a serem escolhidas, como forma de facilitar a resolução dos problemas.

Essas questões também foram trabalhadas nas intervenções dos grupos que trabalharam a Combinatória. Desse modo, no processo de intervenção, as questões do pré-teste foram usadas, visando comparar as respostas anteriores, com o intuito de que os alunos percebessem os seus erros e acertos das questões.

O pré-teste foi realizado com 46 alunos de duas escolas da Rede Municipal de Ensino do Recife em turmas do 5º ano do Ensino Fundamental, entretanto, a partir dos resultados encontrados no pré-teste, foram selecionados 40 alunos, para comporem os 4 grupos da presente pesquisa. Os alunos foram emparelhados nos quatro grupos descritos, sendo distribuídos nesses grupos de acordo com seus acertos.

Quadro 1: Problemas do pré-teste (todos os grupos) e trabalhados na intervenção do Grupo 1 (com *software*) e do Grupo 2 (com papel e lápis).

Produto cartesiano:

1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?
2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Combinação:

3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?
4. Márcia tem em casa sete frutas (mamão, pera, abacaxi, laranja, banana, jaca e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Arranjo:

5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no *Play Station*. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Permutação:

7. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
8. Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?

Fonte: AZEVEDO; COSTA; BORBA, 2011 (Adaptado)

Assim, os emparelhamentos levaram em consideração os resultados no pré-teste, distribuindo as duplas nos diferentes grupos de intervenção, de modo que houvesse duplas com desempenhos semelhantes em cada grupo. Isso buscava garantir que os grupos partiriam de uma mesma média de nível inicial. Desse modo, cada grupo foi constituído por cinco duplas, sendo três delas da Escola 1 e duas duplas da Escola 2.

As questões que foram propostas para os alunos do terceiro grupo (com intervenção em estruturas multiplicativas não combinatórias), que podem ser vistas no Quadro 2, foram baseadas na classificação de problemas multiplicativos sugerida por Nunes e Bryant (1997), já mencionada anteriormente. Desta forma, a lista de questões destinada a este grupo foi composta por oito situações-problema, sendo duas questões para o tipo *multiplicação*, duas questões do tipo *problema inverso da multiplicação*[3], duas questões para *relação entre variáveis – co-variação* – e duas questões de *distribuição*[4]. O único tipo de problema, abordado por Nunes e Bryant (1997), que não foi incluído é o de *produto cartesiano*, uma vez que este está relacionado à ideia de Combinatória, que não foi abordada por este grupo.

Quadro 2: Problemas trabalhados na intervenção com o Grupo 3 (grupo controle assistido).

Multiplicação:

1. Uma casa tem um quarto, uma cozinha, um banheiro e uma sala, fazendo um total de quatro cômodos. Cada cômodo tem duas janelas. Quantas janelas há na casa?
2. Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas há em seis carros?

Problema inverso da multiplicação (quotição):

3. A professora do terceiro ano comprou quinze livros e fará um sorteio entre os alunos da sua turma. Ela decidiu que cada aluno sorteado receberá cinco livros. Quantos alunos poderão receber o prêmio?
4. João tem quarenta bolinhas de gude e pretende dar duas bolinhas para cada um de seus amigos. Para quantos amigos João pode dar suas bolinhas?

Relação entre variáveis – co-variação

5. Pedro quer comprar oito pirulitos. Cada pirulito custa R$1,25. Quanto Pedro gastará com os pirulitos?
6. D. Isabel faz um vestido com 2,50 metros de tecido. Quanto de tecido ela usará para fazer nove vestidos?

Distribuição (partição)

7. Ana tem trinta figurinhas e quer distribuí-las entre as suas seis primas. Quantas figurinhas cada prima de Ana irá receber?
8. Fui ao mercado de artesanato e paguei R$ 60,00 reais por três chapéus. Quanto custou cada chapéu?

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Após cinco dias do processo de intervenção, foi aplicado com os 40 alunos as questões referentes a um pós-teste imediato, objetivando verificar os avanços obtidos por meio das intervenções realizadas. Os problemas do pós-teste imediato podem ser vistos no Quadro 3.

Nove semanas após os processos de intervenção foi realizado um pós-teste posterior (Quadro 4), com questões semelhantes às do pré e pós-teste imediato, com 38 dos 40 alunos presentes até o pós-teste imediato[5]. A aplicação deste teste

[3] Este tipo de problema também é conhecido como '*quotição*'.
[4] Este tipo de problema também é conhecido como '*partição*'.
[5] Destaca-se que no pré-teste e no pós-teste imediato havia 40 alunos participantes da pesquisa, e no pós-teste posterior havia 38 alunos. Isso porque dois alunos não estavam mais na mesma escola na época da realização do pós-teste posterior.

objetivou observar a retenção do aprendizado dos grupos de intervenção, verificando se, com o passar do tempo, os alunos esqueceram, ou não, o que haviam aprendido e, com isso, demonstrar se a aprendizagem foi apenas pontual ou permanente.

Quadro 3: Problemas do pós-teste imediato (para todos os grupos).

Produto cartesiano

1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?
2. Para um teste de teatro estão inscritos cinco meninos (João, Pedro, Rafael, Vinícius e Guilherme) e seis meninas (Aline, Cecília, Danielle, Kátia, Sandra e Natália). Desses, apenas um menino e uma menina serão selecionados. Quantos casais diferentes podem ser escolhidos?

Combinação:

3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?
4. Oito pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos, Marcos, Fátima, George e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?

Arranjo:

5. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os três algarismos 2, 4, 6 e 8 ?
6. A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há seis alunos (Luciana, Marcos, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras diferentes estes alunos podem ser eleitos para esses dois cargos (representante e vice-representante)?

Permutação:

7. Gabriela ganhou um porta-joias com três lugares. Ela possui um anel, um colar e um par de brincos para guardar no seu novo porta-joias. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizar suas joias?
8. Quatro torcedores irão para um jogo de futebol (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo). De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar em quatro cadeiras dispostas lado a lado?

Fonte: AZEVEDO; COSTA; BORBA, 2011 (Adaptado)

Os problemas foram apresentados na mesma ordem para todos os participantes, exatamente como se pode verificar nos quadros dos problemas do pré-teste e dos pós-testes, mas sem as especificações dos tipos de problemas, ou seja, inicialmente foram apresentados os problemas nos quais a ordem dos elementos não gera novas possibilidades (*produto cartesiano* e *combinação*) e posteriormente os problemas nos quais a ordem dos elementos não gera novas possibilidades (*arranjo* e *permutação*). Essa organização, que trazia os problemas de *arranjo* apresentados logo em seguida aos problemas de *combinação*, se deu com o intuito de observar se os alunos perceberiam que havia semelhanças quanto à escolha dos elementos, mas diferenças com relação à ordenação dos elementos.

Em seguida aos problemas de *arranjo*, eram apresentados os problemas de *permutação*, com o intuito de observar se os alunos perceberiam que, a *permutação* se assemelha ao *arranjo* com relação à ordenação dos elementos, mas apresenta diferenças quanto à escolha desses elementos.

Quadro 4: Problemas do pós-teste posterior (para todos os grupos).

Produto cartesiano

1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia quatro opções de comida (coxinha, empada, brigadeiro e bolo) e três tipos de bebida (suco de laranja, suco de uva, e refrigerante). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida e um tipo de bebida?
2. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Letícia e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas. Quantos casais diferentes podem ser formados?

Combinação:

3. Felipe, Sandra, Carla e Francisco vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?
4. Henrique, Sofia, Rodrigo, Ana, Miguel, Isabella, Bruno e Camila estão indo brincar no bate-bate do parque de diversões. Mas não é permitido entrar mais de duas pessoas no mesmo carrinho. Quantas duplas diferentes podem ser formadas para brincar no carrinho do bate-bate?

Arranjo:

5. Três turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e segundo lugar no torneio?
6. A senha do computador da casa de Lucas tem duas letras. Ele escolheu a senha decidindo entre as letras do nome dele (L, U, C, A ou S). Quantas são todas as senhas possíveis que Léo pode ter escolhido?

Permutação:

7. Quantas palavras com e sem sentido podem ser formadas com as letras da palavra SOL?
8. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5, 7 e 9?

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

As questões das listas elaboradas para os quatro grupos foram organizadas de forma que a primeira questão de cada tipo de problema não gerasse resultados maiores que doze (12) e a segunda questão de cada tipo de problema não gerasse resultados menores que vinte (20) nem maiores que trinta (30). Com as ordens de grandezas controladas dessa forma, pretendia-se estimular que os alunos observassem as regularidades existentes nos problemas combinatórios, não havendo necessidade de construir todos os ramos das árvores de possibilidades nos problemas com resultados maiores.

Acreditava-se que a curta intervenção prevista (um encontro apenas) fosse suficiente para que os alunos expressassem melhores desempenhos que os apresentados inicialmente, uma vez que estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009; AZEVEDO, COSTA; BORBA, 2011; BARRETO; BORBA, 2011; BORBA; AZEVEDO, 2012) evidenciaram compreensões intuitivas que podem ser desenvolvidas por uso de um recurso que auxilia no levantamento de possibilidades.

Foi realizada uma análise quantitativa das questões acertadas pelos 40 alunos da pesquisa, diferenciando-se o número de questões acertadas no pré-teste e nos pós-testes (imediato e posterior). Foram realizadas seis comparações: 1) os acertos antes e depois do processo de intervenção, 2) os acertos nos pós-testes dos grupos com uso de *software* (G1) e com uso de lápis e papel (G2), 3) os acertos nos pós-testes dos grupos com (G1 e G2) e sem intervenção em Combinatória (G3), 4) os acertos nos pós-testes dos grupos com intervenção em Combinatória (G1 e G2) e o grupo controle desassistido (G4), 5) os acertos por tipo de problema antes e depois do processo de intervenção e 6) os acertos por representação simbólica utilizada antes e depois do processo de intervenção. Todas essas análises foram realizadas por meio do uso do *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS.

Análises qualitativas acompanharam as quantitativas, buscando possíveis explicações para melhores desempenhos de certos grupos e em alguns tipos de problemas. Acredita-se, dessa forma, que análises quantitativas direcionaram o olhar para os destaques em desempenhos e as análises qualitativas auxiliaram na busca de explicações para as diferenças de desempenho observadas.

A seguir, nos roteiros de intervenção, descrevem-se as intervenções dos distintos grupos. Destaca-se que não há roteiro para o Grupo 4, uma vez que não houve intervenção neste grupo.

3.2.2 Roteiro para Intervenção com o Grupo 1 – construção de árvores de possibilidades com *software Diagramas de Árbol*

No primeiro grupo, como nos demais, as duplas foram chamadas separadamente e foi iniciado o processo de intervenção relembrando as questões resolvidas pelas crianças na ocasião do pré-teste, lendo as questões e perguntando sobre as respostas dadas por eles. Em seguida, foi apresentado às crianças o *software Diagramas de Árbol* – que trabalha os problemas combinatórios por meio de *árvores de possibilidades*. Durante a apresentação, foi explicado o contexto do *software* (construção de *árvores de possibilidades*) e o porquê do seu nome (*Árbol* –

significa árvore em espanhol). Após estes procedimentos iniciais, foi iniciada a resolução dos problemas contidos na lista já resolvida pelas crianças no pré-teste, porém, neste momento, fazendo uso do *software Diagramas de Árbol* e acompanhados pela pesquisadora.

A primeira questão de cada tipo de problema, que gerava resultados menores ou iguais a doze, foi resolvida pelas crianças juntamente com a pesquisadora. Após a leitura das situações, juntamente com os alunos, a pesquisadora os questionava com relação ao enunciado dessas situações. Já a segunda questão de cada tipo, que gerava resultados maiores que 20 e menores que 30, foi incentivada a ser resolvida primordialmente pelos alunos que compuseram a dupla, visando, nesse momento, uma maior interação entre os componentes da dupla, além da interação com a ferramenta.

Os alunos, durante as intervenções, eram levados a interpretar a árvore gerada pelo *software*, sendo questionados sobre:

1) Qual(is) a(s) variável(eis) existentes no problema (como por exemplo: portão de entrada e de saída);
2) Quais as opções de escolha (como por exemplo: Portões de entrada – A, B, C e D; e Portões de saída – E, F, G, H, I e J);
3) Quantas opções podiam ser escolhidas (como por exemplo: Portão A e Portão E – um elemento de cada conjunto)
4) A possibilidade de repetição dos elementos (Como por exemplo: É possível escolher “Portão A com Portão A”?
5) A ordenação das opções nos subconjuntos gerados (como por exemplo: “Portão A e Portão E” é o mesmo que “Portão E e Portão A?”);
6) A possibilidade de ainda haver mais algum caso que não tenha sido contado.

Após essa discussão, entre os alunos e a pesquisadora, em cada problema, eram registradas as respostas para cada uma das situações.

3.2.3 Roteiro para Intervenção com o Grupo 2 – construção de árvores de possibilidades com lápis e papel

No segundo grupo as duplas também foram chamadas separadamente, porém, neste caso não houve o uso do *software Diagramas de Árbol*, sendo incentivada a resolução dos problemas por meio da construção de árvores de possibilidades fazendo uso de lápis e papel. Entretanto, a intervenção seguiu basicamente os mesmos passos da intervenção realizada com o Grupo 1.

Assim, inicialmente, foram relembrados os problemas que já haviam sido resolvidos pelas crianças no momento do pré-teste e, em seguida, estes foram resolvidos levando em consideração a construção das situações por meio de árvores de possibilidades, bem como o método de resolução em que se destacavam os invariantes – relações e propriedades – de cada tipo de problema.

De modo semelhante como foi conduzida a intervenção do primeiro grupo, também foi realizada a intervenção do segundo, em que a pesquisadora resolveu as primeiras questões de cada tipo de problema, que geravam resultados menores ou iguais a 12, juntamente com os alunos. Na segunda questão de cada tipo de problema, que geravam resultados maiores que 20 e menores que 30, os alunos, assim com no Grupo 1, foram incentivados a resolvê-la em interação primordialmente com o seu companheiro de dupla.

A intervenção realizada com este grupo diferenciou-se da intervenção realizada com o grupo anterior na medida em que aqui, possivelmente, não houve a vantagem de isentar o aluno do trabalho mecânico de listar todas as possibilidades (e não deixar nenhuma possibilidade ser esquecida). Entretanto, podia haver a vantagem da listagem de todos os casos, uma vez que durante esse trabalho os alunos poderiam pensar mais demoradamente sobre cada uma das situações. Além disso, ter que selecionar os casos válidos, pensando sobre eles e decidindo, quais os que satisfaziam uma determinada situação poderiam facilitar a resolução dos alunos.

Vale ressaltar que nos dois grupos de intervenção, nos quais se trabalharam situações combinatórias a partir da construção de árvores de possibilidades, os alunos precisaram pensar sobre as variáveis existentes na situação, sobre os invariantes de escolha, de repetição e ordenação, além do esgotamento de todas as possibilidades, como foi explanado no roteiro para o Grupo 1 (*Árbol*).

3.2.4 Roteiro para Intervenção com o Grupo 3 – resolução com *desenhos* de problemas multiplicativos não combinatórios

Com o terceiro grupo, a intervenção foi realizada também com as duplas sendo atendidas separadamente. Entretanto, neste grupo a intervenção foi realizada com situações-problema que não envolviam a necessidade do raciocínio combinatório. Deste modo, as questões envolviam diferentes tipos de situações multiplicativas que não as combinatórias, e foram resolvidas incentivando-se o uso de desenhos.

Assim como nas intervenções anteriores, as primeiras situações de cada tipo de problema, que geravam resultados menores ou iguais a 12, foram resolvidas juntamente com a pesquisadora e, na segunda questão de cada tipo de problema, que geravam resultados maiores que 20 e menores que 30, os alunos resolveram sozinhos, contando primordialmente com o seu companheiro de dupla.

Neste grupo as crianças eram levadas a identificar a relação *um-para-muitos* entre as variáveis presentes nas situações de *multiplicação e co-variação.* Foi questionada, no caso das situações de *multiplicação*, a proporcionalidade existente nessas situações (como, por exemplo, a proporção 1:4 existente no problema: Um carro tem quatro rodas), para deixar clara a ideia de replicação proporcional de um determinado conjunto. No caso das situações de *co-variação*, as crianças eram questionadas quanto ao *fator* que conectava as duas (ou mais) variáveis da situação (como, por exemplo, na situação: *Preço* por *unidade* de *pirulito*). Assim, "[...] há uma taxa constante nas situações de correspondência um-a-muitos e uma função constante (ou fator) nas situações de co-variação" (NUNES; BRYANT, 1997, p.149)

Além disso, os alunos também precisavam identificar a relação existente entre as variáveis presentes nos problemas de divisão: *problema inverso da multiplicação* (*quotição*), e *distribuição* (*partição*). Nas situações *inversas da multiplicação* (*quotição*) era objetivo principal que as crianças percebessem a relação um-para-muitos existente nessa divisão (como, por exemplo, na situação: Num sorteio cada criança receberá cinco livros), entretanto, neste caso, ao invés de replicar eram removidas proporcionalmente as "[...] unidades correspondentes de cada grupo" (NUNES; BRYANT, 1997, p.144). Já nas situações de *distribuição*, envolvia-se uma clara *partição* equitativa de um determinado número de elementos de um conjunto (como, por exemplo, na situação: Serão distribuídas trinta figurinhas entre seis primas), sendo, portanto, essa característica fundamental das situações de *distribuição* a ser identificada pelos alunos deste grupo.

A identificação dessas relações acontecia como já mencionada anteriormente, por meio de *desenho*, uma representação simbólica muito utilizada em problemas combinatórios em estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009b).

Na situação em que se pretendia saber quantas janelas há numa casa de quatro cômodos, por exemplo, os alunos desenhavam os quatro cômodos e as duas janelas por cômodo, contando no final o total de oito janelas ou representavam, em outra situação, um carro com quatro rodas e contabilizavam – por contagem direta ou indireta – que no total havia 24 rodas em seis carros.

A partir do método aqui descrito, serão apresentados no capítulo que segue os resultados obtidos, bem como a discussão dos mesmos.

CAPÍTULO 4
RESULTADOS:
APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO

4.1 Pré-teste: Sondando os conhecimentos iniciais dos alunos

4.1.1 Acertos em problemas combinatórios no pré-teste.

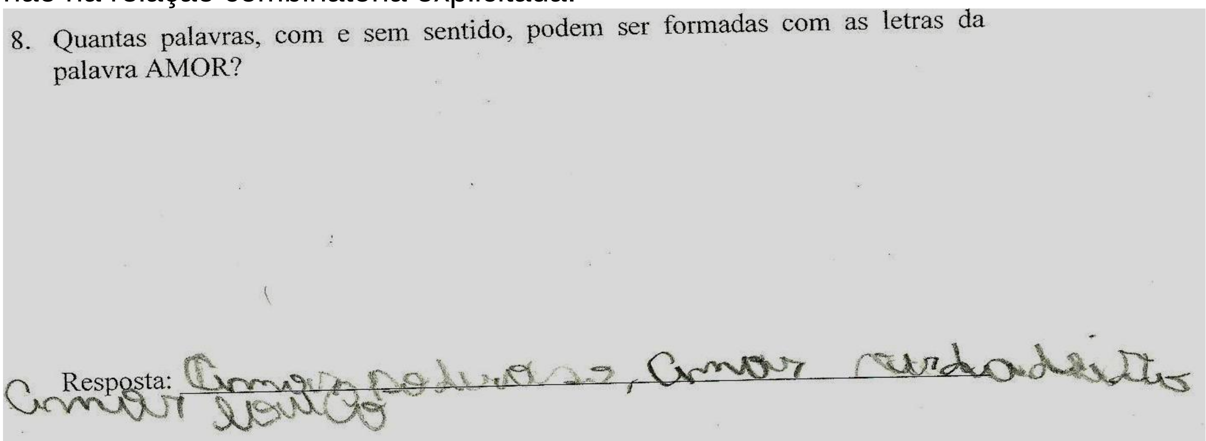
Após a aplicação do pré-teste foi decidido classificar o erro e o acerto das crianças segundo alguns critérios de pontuação, para qualificar o desempenho além de mero erro ou acerto pleno. A pontuação foi dividida em quatro níveis crescentes, iniciando pelo erro do aluno, passando por acertos parciais e terminando no acerto total da questão. No Quadro 5, é possível visualizar os tipos de resposta, com sua respectiva pontuação e descrição e, a seguir, seu respectivo exemplo.

Quadro 5: Níveis crescentes de pontuação por tipo de resposta

Tipo de resposta	Pontuação	Descrição
Resposta errada	0 ponto	Não apresenta relação com Combinatória, ou seja, na sua resolução a criança não aponta indícios de compreensão do problema proposto (Ver exemplo na Figura 10)
Resposta parcialmente correta 1	1 ponto	Escolhe apenas um caso, ou seja, a criança escolhe apenas uma possibilidade, não indicando perceber que podem existir outras (Ver exemplo na Figura 11)
Resposta parcialmente correta 2	2 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, mas limita os casos ao número de elementos de uma das quantidades citadas no problema (Ver exemplo na Figura 12)
Resposta parcialmente correta 3	3 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, não limita ao número de uma das quantidades citadas, mas não consegue esgotar todas as possibilidades (Ver exemplo na Figura 13)
Resposta correta	4 pontos	Esgota todas as possibilidades, ou seja, acerta a questão apontando todas as possibilidades da questão. (Ver exemplo na Figura 14)

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

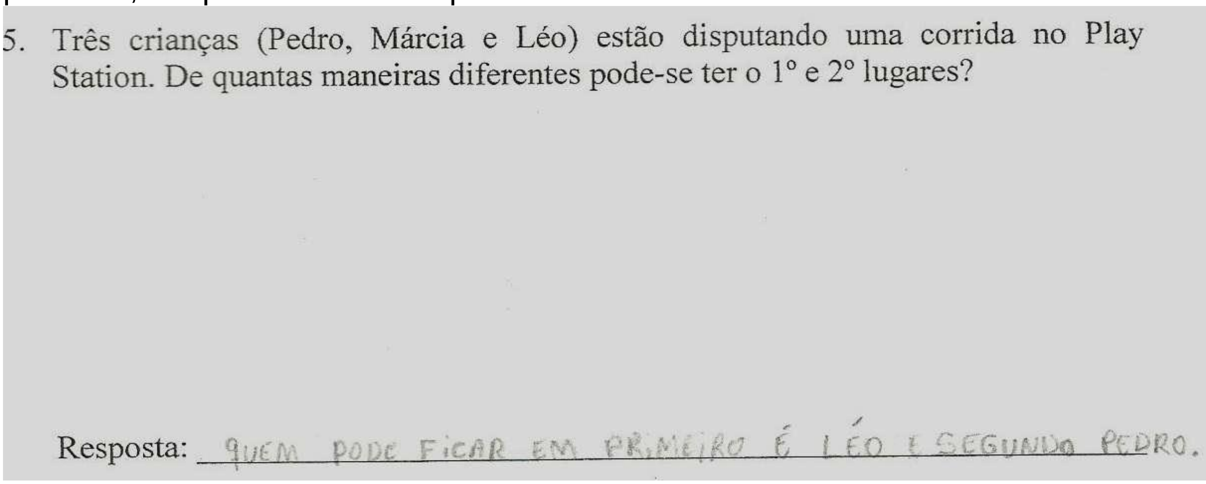
Figura 10: *Resposta errada* do Aluno 34, para a oitava questão do pré-teste, na qual não há relação combinatória explicitada.


8. Quantas palavras, com e sem sentido, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

Resposta:

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 11: *Resposta parcialmente correta 1* do Aluno 32, para a quinta questão do pré-teste, na qual é escolhido apenas um caso.

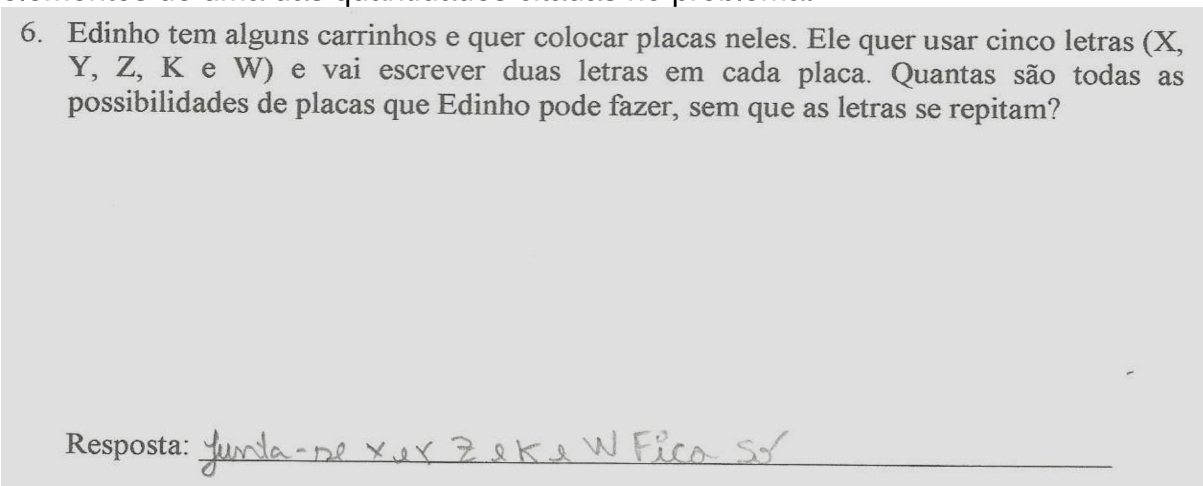


5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?

Resposta: QUEM PODE FICAR EM PRIMEIRO É LÉO E SEGUNDO PEDRO.

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 12: *Resposta parcialmente correta 2* do Aluno 22, para a sexta questão do pré-teste, na qual se enumera mais de um caso, mas limita os casos ao número de elementos de uma das quantidades citadas no problema.

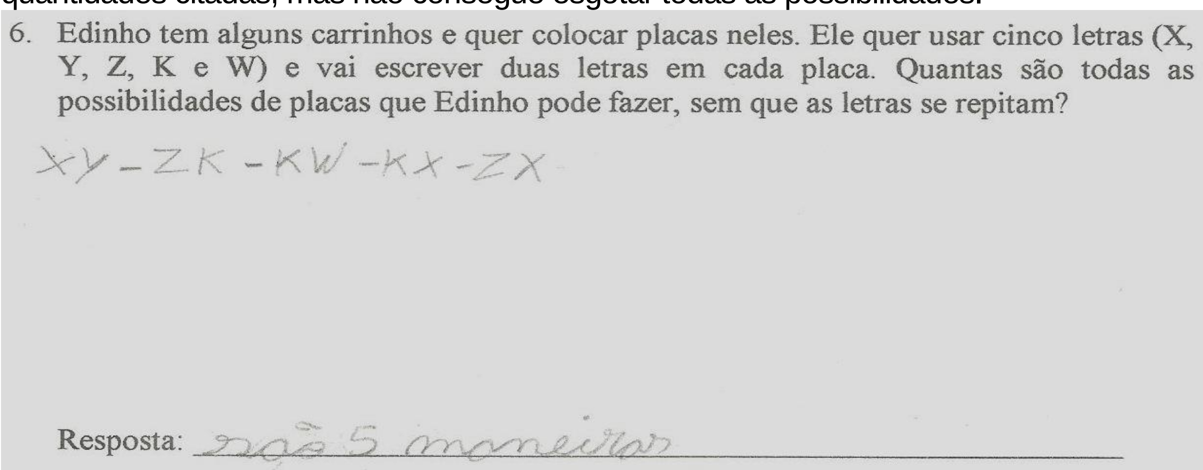


6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Resposta: Junta-se X e Y Z e K e W Fica só

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 13: *Resposta parcialmente correta 3* do Aluno 6, para a sexta questão do pré-teste, na qual se enumera alguns casos, não limitando ao número de uma das quantidades citadas, mas não consegue esgotar todas as possibilidades.



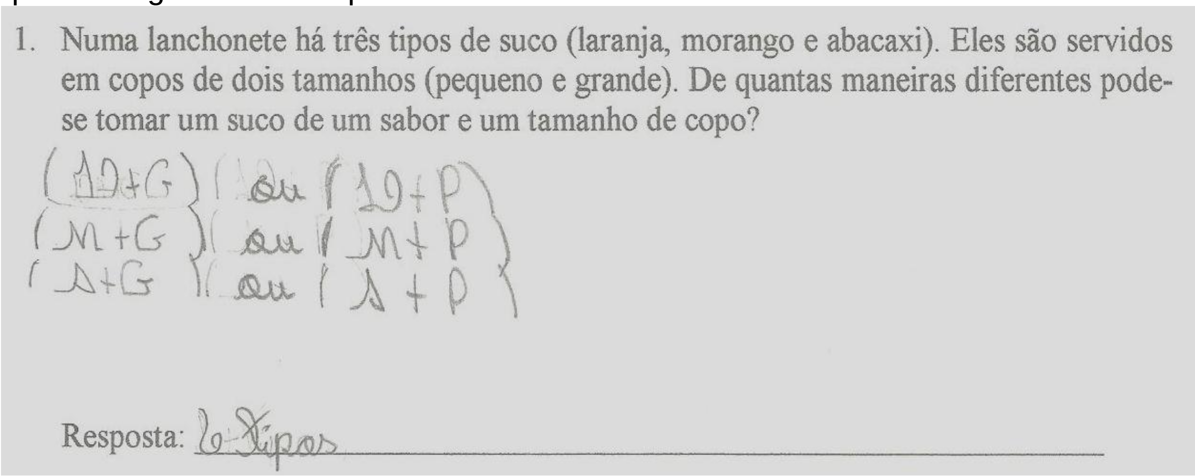
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

XY - ZK - KW - KX - ZX

Resposta: são 5 maneiras

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 14: *Resposta correta* do Aluno 15, para a primeira questão do pré-teste, na qual se esgota todas as possibilidades.


1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?

(LJ+G) ou (LJ+P)
(M+G) ou (M+P)
(A+G) ou (A+P)

Resposta: 6 tipos

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

No Quadro 6 pode-se observar que a formação das duplas, em função do tipo de intervenção que os alunos participaram, foi feita por meio do número de pontos alcançados pelos alunos no pré-teste. Assim, foi estabelecido o critério de que em cada grupo haveria duplas que fossem constituídas por alunos que tivessem obtido dois pontos ou menos no pré-teste; duplas que fossem constituídas por alunos que tivessem obtido entre três pontos e sete pontos no pré-teste; e duplas que fossem constituídas por alunos que tivessem obtido oito pontos ou mais no pré-teste. Essa distribuição ocorreu com o objetivo de que houvesse diferentes níveis de compreensão inicial em cada grupo e que a média de acertos de cada grupo fosse semelhante.

Quadro 6: Distribuição dos alunos em duplas por grupo, de acordo com a pontuação obtida no pré-teste.

Pontuação no pré-teste	G1	G2	G3	G4
De 0 a 2 pontos	A1 e A24; A27 e A38	A7 e A21; A30 e A35	A2 e A23; A12 e A14	A8 e A19; A11 e A26
De 3 e 7 pontos	A9 e A16; A32 e A36	A3 e A18; A25 e A33	A29 e A39; A31 e A37	A5 e A17; A28 e A40
De 8 pontos em diante	A6 e A20	A10 e A15	A4 e A22	A13 e A34

G1: Grupo 1 – *Software Árbol*; G2: Grupo 2 – Lápis e papel; G3: Grupo 3 – Controle (Estruturas Multiplicativas); G4: Grupo 4 – Controle (Desassistido); A: Aluno
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Não havia objetivo de examinar a interação dos alunos nos diferentes níveis de pontuação inicial, mas acreditava-se no potencial dessa forma de organização. Além disso, desejava-se reproduzir, de certo modo, a realidade da sala de aula, na qual os alunos possuem diferentes níveis de compreensão antes da intervenção em determinados tópicos. Também se desejava a distribuição nos grupos de modo que todos partissem de uma média de acertos similar, não havendo nenhum grupo com média inicial mais forte.

Sendo assim, como pode ser visto na Tabela 1, o Grupo 1, dos alunos que participaram da intervenção com o *software Diagramas de Árbol,* composto por 10 alunos, teve média de pontuação equivalente a 4,6 pontos. O Grupo 2, dos alunos que participaram da intervenção com lápis e papel, composto por outros 10 alunos, teve média de pontuação equivalente a 4,8 pontos. Ainda observando a Tabela 1, o Grupo 3, dos alunos que participaram da intervenção sobre estruturas multiplicativas, também composto por 10 alunos, teve média de pontuação equivalente a 4,7 pontos. O Grupo 4, dos alunos que não participariam de intervenção, formando assim o Grupo Controle desassistido, formado por 10 alunos, teve média de pontuação equivalente a 4,9 pontos.

Tabela 1: Média de desempenho por Grupo no pré-teste

Grupos	Média de Desempenho no Pré-teste
Grupo 1 (*Software Árbol*)	4,6
Grupo 2 (Lápis e papel)	4,8
Grupo 3 (Controle - Estruturas Multiplicativas)	4,7
Grupo 4 (Controle desassistido)	4,9

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Sabendo-se que o total de pontos possíveis de ser alcançado por um aluno era de 32 pontos, uma vez que o teste tinha oito questões e que, em cada questão, o aluno poderia obter no máximo quatro pontos, nota-se, na Tabela 2, que os alunos, em geral, não obtiveram bons resultados na resolução do teste inicial com problemas combinatórios, uma vez que a maior parte dos alunos (32 alunos) fez apenas de 0 a 7 pontos, no teste. Além disso, apenas um aluno conseguiu fazer mais da metade dos pontos (17 pontos).

Ainda observando a Tabela 2, observou-se, assim, um fraco conhecimento inicial em Combinatória. Apesar desse baixo desempenho inicial, destaca-se que a explicitação das opções de escolha pode ter possibilitado a resolução dos problemas por alguns poucos alunos, uma vez que Correa e Oliveira (2011) apontam que, principalmente nos problemas de *combinação* e *arranjo* essa explicitação implica em importantes diferenças quando comparado com os enunciados tradicionais. Enfatiza-se que, essa explicitação de opções – listando os elementos a serem escolhidos – é diferente da explicitação de exemplos de possibilidades, trabalhada por Silva e Spinillo (2011), que também se mostrou um fator facilitador da resolução de problemas combinatórios.

Tabela 2: Número de alunos por pontuação no pré-teste em cada grupo.

Grupos	Pontuação no pré-teste															T.
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14	17	
G1	1	**0**	3	1	2	**0**	**0**	1	**0**	1	**0**	**0**	1	**0**	**0**	10
G2	1	3	**0**	**0**	2	1	1	**0**	**0**	1	**0**	**0**	**0**	**0**	1	10
G3	2	**0**	2	**0**	1	1	**0**	2	1	**0**	**0**	1	**0**	**0**	**0**	10
G4	2	1	1	**0**	2	**0**	1	1	**0**	**0**	1	**0**	**0**	1	**0**	10
T.	6	4	6	1	7	2	2	4	1	2	1	1	1	1	1	40

G1: Grupo 1 – *Árbol*; G2: Grupo 2 – Lápis e papel; G3: Grupo 3 – Controle (Estruturas Multiplicativas); G4: Grupo 4 – Controle (Desassistido); T.: Total.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

4.1.2 Acertos em problemas combinatórios no pré-teste por tipo de problema

Estudos anteriores como os de Pessoa e Borba (2009a) e Correa e Oliveira (2011) ressaltaram que os alunos dos anos iniciais investigados apresentaram melhor desempenho em questões de *produto cartesiano*, seguido de *combinação*, *arranjo* e *permutação.* Entretanto, em outro estudo, Pessoa e Borba (2010b), apesar de concordarem que os problemas de *produto cartesiano* e *permutação* são, respectivamente, os mais fáceis e os mais difíceis, discordam com relação à ordem de facilidade dos problemas de *combinação* e *arranjo*.

A seguir, serão apresentados e discutidos os dados referentes aos acertos no pré-teste de presente estudo por tipo de problema. Na Tabela 3 é possível visualizar o desempenho por grupo no pré-teste em cada tipo de problema combinatório. Nesta tabela também foram destacados os problemas que obtiveram média superior a um ponto, denotando assim, algum conhecimento prévio em determinadas situações combinatórias.

Tabela 3: Média de acertos no pré-teste por grupo e tipo de problema (pontuação máxima em cada tipo de problema: 4,0).

Grupos	PC1	PC2	C1	C2	A1	A2	P1	P2
G1	0,40	0,20	0,30	0,90	0,60	**1,20**	0,30	0,70
G2	**1,00**	0,10	0,40	0,80	0,30	0,80	0,30	**1,10**
G3	0,50	0,30	0,50	0,50	0,40	**1,10**	0,50	0,90
G4	**1,40**	0,30	0,30	0,50	0,30	**1,00**	0,30	0,80
Total	1,05		1,05		1,43		1,22	

G1: Grupo 1 – *Software Árbol*; G2: Grupo 2 – Lápis e papel; G3: Grupo 3 – Controle (Estruturas Multiplicativas); G4: Grupo 4 – Controle (Desassistido); PC1: *Produto cartesiano* 1 (menor número de possibilidades) ;PC2: *Produto cartesiano* 2 (maior número de possibilidades); C1: *Combinação* 1 (menor número de possibilidades); C2: *Combinação* 2 (maior número de possibilidades); A1: *Arranjo1* (menor número de possibilidades); A2: *Arranjo* 2 (maior número de possibilidades); P1: *Permutação* 1 (menor número de possibilidades); P2: *Permutação* 2 (maior número de possibilidades).
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Nota-se, na Tabela 3, o baixo desempenho inicial dos alunos em todos os tipos de problemas combinatórios. Esse baixo desempenho inicial em problemas combinatórios de alunos de anos iniciais do Ensino Fundamental está de acordo com achados de estudos anteriores, como os de Pessoa e Borba (2009a; 2009b; 2010a, 2010b) e Correa e Oliveira (2011). A média de acertos por grupo em cada tipo de problema poderia chegar, no máximo, a quatro pontos, entretanto, essa média de acertos em cada tipo de problema não passa dos 35,75% de acerto – 1,43 de média, no caso dos problemas de *arranjo*.

Na Tabela 3, é possível notar, que diferentemente dos estudos de Pessoa e Borba (2009a e 2010b) e Correa e Oliveira (2011), os alunos da presente pesquisa apresentaram maior facilidade em problemas cuja ordem dos elementos no subconjunto gera novas possibilidades (*Arranjo* – 1,43; e *Permutação – 1,22*). Assim, com base nos estudos supracitados, esperava-se que a pontuação nos problemas de *produto cartesiano* fossem superiores à pontuação dos problemas de *permutação,* uma vez que esse resultado já foi apontado por esses estudos. Porém, os alunos do presente estudo obtiveram melhor desempenho em problemas de *arranjo*, seguidos pelos problemas de *permutação*, *produto cartesiano* e *combinação.*

Entretanto, por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi possível destacar que, no pré-teste, a diferença entre os desempenhos nos quatro tipos de problemas não foi significativa[6], o que salienta a dificuldade dos alunos na resolução

[6] Nesta pesquisa foi considerado índice de significância p<,05

de todos os problemas combinatórios do pré-teste (PC x C: t (39) = 0,000; p = 1,000; PC x A: t (39) = - 1,273; p = 0,211; PC x P: t (39) = - 0,672; p = 0,506; C x A: t (39) = - 1,922; p = 0,062; C x P: t (39) = - 0,805; p = 0,426; A x P: t (39) = 1,000; p = 0,323).

Sabendo que a primeira situação de cada tipo de problema tinha menor número de possibilidades como resposta final (até 12 possibilidades); e a segunda situação de cada tipo de problema gerava resultados com maior número de possibilidades (entre 20 e 30 possibilidades), pode-se observar, ainda na Tabela 3, que nem sempre os problemas com menor número de possibilidades tiveram maior acerto.

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* destaca-se que apenas nas situações de *produto cartesiano* (PC1 x PC2: t (39) = 2,561; p = 0,014) há diferenças significativas apontando para uma maior facilidade nos problemas em que há menor número de possibilidades. Nas situações de *combinação* (C1x C2: t (39) = - 2,149; p = 0,038)*, arranjo (*A1 x A2: t (39) = - 3,665; p = 0,001) *e permutação* (P1 x P2: t (39) = - 3,557; p = 0,001) há diferenças significativas apontando que os problemas com maior número de possibilidades foram mais fáceis que os problemas com menor número de possibilidades. Entretanto, os desempenhos foram tão baixos no pré-teste e os alunos não chegaram a listar o número total de possibilidades em nenhuma situação que, dessa forma, o número total de possibilidades não parece ter influenciado os desempenhos.

Quanto aos tipos de representações utilizadas no pré-teste, foi observado que os alunos, quando a explicitavam, usavam, preferencialmente, a *listagem de possibilidades*. Uma análise mais aprofundada sobre as representações simbólicas utilizadas será apresentada na seção 4.5.

4.2 Intervenção: o uso da *árvore de possibilidades*

As intervenções voltadas para a resolução de problemas combinatórios teve como foco principal o uso da *árvore de possibilidades* virtual ou em lápis e papel. No início das intervenções, em ambos os grupos foi explicado para os alunos que o teste continha oito situações-problemas já resolvidas por eles na ocasião do pré-teste. Também foi explicado que, no momento da intervenção, a pesquisadora ajudaria os alunos na resolução da primeira situação de cada tipo de problema, e os alunos, em duplas, resolveriam, sozinhos, a segunda situação de cada tipo de problema, no entanto, a pesquisadora poderia tirar dúvidas caso fosse necessário. A seguir, no Quadro 7, é possível ver um trecho da fala da pesquisadora explicando para a Dupla 2 do Grupo 2 como iria acontecer a intervenção.

Quadro 7: Trecho da fala da pesquisadora explicando para a Dupla 2 do Grupo 2 (Lápis e Papel) o processo de intervenção.

[...] P: Aí... vocês lembram daquele teste que eu passei para vocês naquele dia? [...] P: Pronto... aí hoje a gente vai responder as mesmas perguntas daquele teste...tá bom? Aí eu vou fazer junto com vocês, tá certo? Dessa vez eu vou ajudar vocês... [...] P: Aí a gente vai fazer um acordo, tá? Na primeira questão eu vou fazer junto com vocês, e na segunda vocês tentam fazer sozinhos, só um com o outro, mas eu posso ajudar também... A mesma coisa para a terceira questão, eu faço junto com vocês e na quarta vocês fazem sozinhos... na quinta eu faço junto com vocês e na sexta vocês fazem sozinhos, na sétima eu faço junto com vocês e na oitava vocês fazem sozinhos... Tá bom? [...]

P: Pesquisadora [Informação Verbal]
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Além disso, foram ressaltadas as diferenças existentes entre os tipos de problemas combinatórios. Desse modo, durante as intervenções em ambos os grupos que trabalharam esses problemas, foram ressaltadas as diferenças entre *produto cartesiano, combinação, arranjo* e *permutação*, ou seja, no momento da construção das árvores possibilidades foi chamada a atenção para os invariantes (relações/propriedades) de cada situação.

Sobre os invariantes, Pessoa e Borba (2009b) ressaltam que o primeiro invariante está relacionado à escolha de elementos, a partir de um ou mais conjuntos. O segundo invariante está relacionado à ordenação dos elementos, ou seja, se a ordem em que os elementos estão dispostos irá gerar novas possibilidades ou não.

Dessa forma, foi chamada a atenção – por meio de questionamentos e em termos compreensíveis pelas crianças, ou seja, termos não científicos, ou coloquiais – que em problemas de *produto cartesiano* tem-se: Invariante 1 – Elementos de dois (ou mais) conjuntos diferentes formam um novo conjunto; Invariante 2 – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Ressaltou-se que em problemas de *combinação* tem-se: Invariante 1 – Escolher alguns elementos de um conjunto maior gera subconjuntos; Invariante 2 – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Em problemas de *arranjo* chamou-se a atenção que: Invariante 1 – Escolher alguns elementos de um conjunto maior gera subconjuntos; Invariante 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades. Em problemas de *permutação* foi ressaltado que: Invariante 1 – Todos os elementos de um conjunto são utilizados; Invariante 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Além disso, os alunos eram questionados sobre quais os elementos faziam parte das opções que poderíamos escolher. As situações possuíam a explicitação das opções, ou seja, os elementos dos conjuntos eram nomeados, a fim de facilitar a interpretação do enunciado. Sobre isso, Correa e Oliveira (2011), como já afirmado anteriormente, afirmam que a explicitação desses elementos, facilita, especialmente, na resolução de problemas de *arranjo* e de *combinação*.

Apesar de não ter sido realizada uma entrevista com as crianças sobre o *software* utilizado, percebe-se que, neste estudo, diferentemente do estudo de Ferraz, Borba e Azevedo, os alunos não apresentaram dificuldades quanto ao idioma do *software* (espanhol), mas houve reclamações quanto à visualização da árvore construída pelo *software*.

A seguir são apresentados trechos das intervenções, com o uso ou não do *software Diagramas de Árbol*, em que foram destacados os invariantes de cada um dos tipos de problemas combinatórios. Dessa forma, as intervenções buscaram levar os alunos a pensarem sobre semelhanças e diferenças entre as situações combinatórias. Na intervenção com o uso dessa ferramenta foi explanado para todas as duplas que as situações do pré-teste seriam resolvidas, naquele momento, por meio do uso do computador, além da mediação da pesquisadora. Também foi explicado o passo a passo para a construção da árvore com o uso do *software* e, a partir desse momento, já foram destacados os invariantes das referentes situações, cada uma na sua vez de responder.

4.2.1 O significado *produto cartesiano* e seus invariantes

Na situação de *produto cartesiano* do Quadro 8, a seguir, é possível verificar o trecho da intervenção em que foram destacados os invariantes desse tipo de situação com a utilização do *software Diagramas de Árbol*.

Na situação de *produto cartesiano* destacada têm-se dois conjuntos diferentes: um conjunto de portões de entrada e outro conjunto de portões de saída, e combinando um elemento de cada conjunto serão formados novos conjuntos. Além disso, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, pois "Entrar pelo portão 'A' e sair pelo portão 'E'" é o mesmo que "Sair pelo portão 'E' e entrar pelo portão 'A'".

Inicialmente, como pode ser visto em destaque no Quadro 8, foi ressaltado que havia duas escolhas distintas para que as crianças percebessem a diferença entre os dois conjuntos (Conjunto 1: Portões de entrada; Conjunto 2: Portões de saída), pois, o aluno precisa escolher um elemento de cada conjunto para formar um novo conjunto (Novo conjunto: Portão de entrada e portão de saída do parque), ou seja, escolhendo um portão de entrada, do conjunto de portões de entrada, e um portão de saída, do conjunto de portões de saída, ele formará um novo conjunto, contendo duplas de um portão de entrada e um portão de saída. Assim, foi questionado aos alunos se, entrando pelo portão A, seria possível sair pelo portão B, e destaca-se que, imediatamente, o Aluno 6 respondeu que não, justificando que não se poderia sair pelo portão de entrada.

Nessa questão, os alunos não apresentaram dificuldades quanto à ordem, pois, eles sempre escolheram primeiro o portão de entrada, para depois escolher o portão de saída, uma vez que é nessa ordem que acontecem os fatos. Assim, salientar que não há diferença sobre a ordem de escolha apenas levantaria uma questão em que não havia dúvidas por parte das crianças. Essas questões também foram evidenciadas na intervenção com o Grupo 2 (Lápis e Papel), como pode ser visto no Quadro 9. Assim, neste grupo também foram ressaltados os conjuntos da situação e a necessidade de escolher um elemento de cada conjunto para serem combinados entre si.

Destaca-se que o Aluno 10, inicialmente, respondeu que seria possível sair pelo portão B, e após ser questionada a natureza do portão, ele percebeu que não é possível, pois este portão é de entrada. Dessa forma, buscava-se deixar claro aos alunos quais elementos eram possíveis de serem escolhidos. Em seguida, salienta-se que, quanto à escolha de outras possibilidades, sempre era enfatizado que se João entrasse pelo Portão ‘A’, ele poderia sair pelo ‘E’, mas que se ele desistisse de entrar pelo ‘E’ ele teria outras opções para escolher.

Isso porque, segundo Borba e Azevedo (2012), a Combinatória possui um caráter hipotético-dedutivo, havendo, portanto, dificuldades por parte de algumas crianças em distinguir entre o real e o possível, uma vez que, na realidade só escolhemos um caso, mas para escolher este caso temos, antes, que decidir entre várias possibilidades de escolha. Inhelder e Piaget (1976) afirmaram que a distinção entre o que acontece na realidade e o que é possível de acontecer é um pensamento considerado avançado, plenamente alcançado em um período denominado de operacional formal. No presente estudo acreditava-se que os alunos poderiam ser levados a pensarem sobre as possibilidades de escolha se fossem questionados quanto aos elementos a serem escolhidos.

Quadro 8: Intervenção com a Dupla 2 do Grupo 1 (*software Árbol*) na qual se ressalta os invariantes de *produto cartesiano*.

Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque? (Questão 2 – produto cartesiano)
[...]
P: Quais são os portões de entrada?
A6 e A20: A, B, C e D.
P: E os de saída?
A6 e A20: E, F, G, H, I e J. [...]
P: Para João entrar no parque de diversões, ele pode entrar pelo portão A?
A6 e A20: Pode.
P: E se ele entrar pelo A, ele pode sair por que portão?
A6: Pelo....
<u>P: Se ele entrar pelo A, ele podia sair pelo B?</u>
<u>A6: Não.</u>
P: Por quê?
A6: Porque o B é entrada.
P: Ahhhh... E se ele entrar pelo A, ele pode sair pelo E?
A6: Pode
P: Aí se ele desistir de sair pelo E, ele pode sair pelo...
A6 e A20: F
P: Ou então pelo?
A20: G, H, I e J.
P: Aí se ele não quiser entrar pelo A, ele pode entrar pelo B?
A6 e A20: Pode.
P: E se ele entrar pelo B, ele vai ter quantas opções?
A6: 6.
P: E quantas ele tinha no portão A?
A6 e A20: 6
P: Até agora a gente tem quantas opções?
A6 e A20: 12.
P: Se ele não quiser entrar nem pelo A, nem pelo B... Ele pode entrar pelo C?
A6 e A20: Pode.
P: E ele vai ter mais quantas opções?
A6: 6... tem 18
P: Se ele não quiser entrar nem pelo A, nem pelo B, nem pelo C... Ele pode entrar pelo D?
A20: Pode.
P: Aí ele ai ter quantas opções?
A6: 6.
P: Aí vai dar quanto?
A6: 24! [...]

P: Pesquisadora; A6: Aluno 6; A20: Aluno 20 [Informação Verbal]
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Quadro 9: Intervenção com Dupla 3 do Grupo 2 (Lápis e papel) no qual se ressalta os invariantes de *produto cartesiano.*

Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque? (Questão 2 – produto cartesiano) [...] <u>P: Se a gente entrar pelo A, a gente pode sair por qual portão?</u> <u>A10: Pelo B</u> A15: Pelo E P: Por que a gente poderia sair pelo E? ... A gente pode sair pelo B? ... <u>O A é um portão de entrada e o B é um portão de quê?</u> <u>A10 e A15: De entrada.</u> <u>P: A gente pode sair pelo portão de entrada?</u> <u>A15: Não</u> <u>P: Não né? Então a gente pode entrar pelo A, e sair pelo B?</u> <u>A15: Não!</u> P: E se a gente entrar pelo A, a gente pode sair por qual? A15: Pelo E, pelo F, G, H, I e J. P: Porque a gente pode sair pelo E, pelo F, pelo G...? A15: Porque é saída. P: Porque são de saída, né? ... <u>E se eu desistir de entrar pelo portão A? Eu posso entrar pelo portão B?</u> <u>A15: Pode!</u> P: E eu tenho quantas saídas? Se eu entrar pelo B eu posso sair por quantas saídas? A10 e A15: E, F, G H, I e J. P: Quantos são eles? P10: 6 P: E quantos portões de saída tinham para o A? A15:6 P: Eu tive 6 opções se entrasse pelo A, 6 se entrasse pelo B. E para o C vou ter quantos? A15: 6 P: E se eu entrar pelo D, eu posso sair por quais portões? A15: Pelos mesmos. [...] P: Quantas opções a gente teve para o A mesmo? [...]

P: Pesquisadora; A10: Aluno 10; A15: Aluno 15 [Informação Verbal]
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

4.2.2 O significado *combinação* e seus invariantes

Em seguida, é apresentado no Quadro 10 o trecho da intervenção em que, numa situação de *combinação*, foram destacados os invariantes dessa situação por meio do uso do *software Diagramas de Árbol*.

Na situação de *combinação*, destacada no Quadro 10, há um conjunto com três animais. É necessário escolher dois animais para Marcelo comprar, ou seja, escolher alguns elementos do conjunto maior e esses elementos escolhidos gerarão subconjuntos. Nessa situação, ao escolher os elementos, a ordem de escolha não irá gerar novas possibilidades, pois se Marcelo escolher o subconjunto “cachorro e passarinho” é o mesmo que escolher o subconjunto “passarinho e cachorro”.

Quadro 10: Intervenção com a Dupla 2 do Grupo 1 (*software Árbol*) no qual se ressalta os invariantes de *combinação.*

Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? (Questão 3 - combinação) [...] P: Se Marcelo chegar na loja, ele pode escolher o tartaruga? A6 e A20: Pode! [...] <u>P: Então ele pode escolher a tartaruga com um passarinho?</u> <u>A20: Pode.</u> P: Pode né? ... Se ele desistir de escolher tartaruga com passarinho, ele pode escolher tartaruga com cachorro? A20: Pode! P: Pode né... <u>e se ele quiser escolher passarinho com tartaruga?</u> <u>A6 e A20: Pode.</u> <u>P: Aí vê... ele escolheu aqui... tartaruga com passarinho... não foi?</u> <u>A:6 Foi....</u> <u>P: Aí se ele desistir... 'Não quero mais escolher tartaruga com passarinho, quero escolher passarinho com tartaruga'. Ele ia estar escolhendo os mesmos bichinhos?</u> <u>A6 e A20: Ia.</u> <u>P: Ia dar na mesma coisa?</u> <u>A6 e A20: Dava.</u> P: Preciso contar duas vezes? A6 e A20: Não. P: Não né? ... Então não vou nem marcar ele... Porque já tinha escolhido antes a mesma coisa... A6: Aí pode ir com o cachorro... P: O passarinho pode ir com o cachorro? A6 e A20: Pode. P: E passarinho com passarinho pode? A6 e A20: Não. <u>P: E aqui? O cachorro pode ser com a tartaruga?</u> <u>A20: Pode.</u> <u>P: Ele já tinha sido escolhido antes com a tartaruga?</u> <u>A6: Já...</u> <u>P: Onde...</u> <u>A6: Aqui...</u> <u>P: Tartaruga com cachorro aqui em cima né? E Escolher cachorro e passarinho e passarinho com cachorro, é a mesma coisa?</u> <u>A6 e A20: É!</u> <u>P: Então coloca?</u> <u>A6 e A20: Não.</u> <u>P: E cachorro com passarinho?</u> <u>A6: Já tem.</u> P: Já tem... Então quantas possibilidades de escolher dois bichinhos Marcelo tem? A6 e A20: 3. P: 3... Quais são elas? A6 e A20: Tartaruga e passarinho, tartaruga e cachorro e passarinho e cachorro. [...]

P: Pesquisadora; A6: Aluno 6; A20: Aluno 20 [Informação Verbal] Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Ressalta-se, que os alunos não apresentavam dificuldades quanto ao invariante de escolha dos elementos, ou seja, os alunos percebiam com facilidade que, de um conjunto maior, nesse caso, o conjunto de quatro animais de estimação da loja, era preciso escolher um conjunto com menor número de elementos, o de dois animais que seriam comprados. É possível perceber por meio do trecho transcrito no Quadro 10 que, durante a intervenção, a questão de *combinação* gerava dúvidas quanto à ordem de escolha dos elementos. Observa-se que os Alunos 6 e 20 acreditavam que é possível escolher 'passarinho com tartaruga' mesmo que já tivesse sido escolhido 'tartaruga com passarinho'.

Nesse sentido, foi necessário questionar se essa escolha era igual à que já tinha sido realizada anteriormente. Assim, nesse momento da intervenção foi necessário chamar atenção mais de uma vez para o fato de que em *combinações* a escolha dos mesmos elementos gera apenas um subconjunto, independente da ordem em que foram escolhidos. Salienta-se que a dificuldade na ordenação dos elementos nos problemas de *combinação* também foi ressaltada por Correa e Oliveira (2011), em seu estudo de sondagem; e por Azevedo, Costa e Borba (2011), em seu estudo de intervenção.

No Quadro 11 é transcrito o trecho da intervenção em que foram destacados os invariantes de uma situação de *combinação* para o Grupo 2 (Lápis e Papel).

Quadro 11: Intervenção com a Dupla 2 do Grupo 2 (Lápis e papel) no qual se ressalta os invariantes de *combinação.*

Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? (Questão 3 - combinação) [...] P: Se Marcelo escolher comprar o cachorro... ele pode comprar mais qual outro bicho da loja? A7: Ou a tartaruga ou o passarinho P: Ou tartaruga ou passarinho... mas se ele não quer escolher nem o cachorro com o passarinho, nem o cachorro com a tartaruga.... ele pode escolher ainda outro bichinho? A7: Pode.... P: Pode? Qual? A7: Se ele não quiser escolher o cachorro, ele pode escolher o passarinho com a tartaruga... <u>P: Hum... e se ele quiser escolher passarinho com cachorro... ele pode?</u> <u>A7 e A21: Pode...</u> <u>P: Pode... Mas e se ele escolher cachorro e passarinho... e depois ele desistir... não quer escolher cachorro e passarinho... quer escolher passarinho e cachorro... é a mesma coisa?</u> <u>A7 e A21: É...é...</u> P: Então a gente precisa fazer de novo? A21: Não... P: Então a gente escolheu cachorro com passarinho, cachorro com tartaruga e passarinho com tartaruga... tem mais algum pra escolher? A21: ... Não... [...]

P: Pesquisadora; A7: Aluno 7; A21: Aluno 21 [Informação Verbal] Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

No Quadro 11, é possível perceber que as dúvidas com relação à ordenação dos elementos nos subconjuntos formados estavam presentes também nas intervenções com os alunos do Grupo 2 (Lápis e papel), uma vez que, ao serem indagados sobre a possibilidade de escolher ‘passarinho e cachorro’ os Alunos 7 e 21 responderam que é possível, mas só depois perceberam que já haviam escolhido antes ‘cachorro com passarinho’.

4.2.3 O significado *arranjo* e seus invariantes

No Quadro 12 é transcrito o trecho da intervenção em que foram destacados os invariantes de uma situação de *arranjo* para o Grupo 1 (Árbol).

Quadro 12: Intervenção com Dupla 3 do Grupo 1 (*software Árbol*) no qual se ressalta os invariantes de *arranjo.*

Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares? (Questão 5 - arranjo)
[...]
P: Pronto... Aí veja... se Pedro ficar em primeiro lugar, Pedro pode ficar em segundo?
A16: Não.
P: Por que?
A16: Porque ele já vai estar em primeiro!
P: Hum.... e se Pedro ficar em primeiro, Márcia pode ficar em segundo?
A16: Não.... Pode!!
P: Pode?
A16: Pode!
P: E se Pedro jogar e ficar em primeiro, mas Márcia não ficar em segundo... quem pode ficar?
A9 e A16: Léo.
P: Aí se Pedro não ficar em primeiro... Quem ficou em primeiro foi Márcia...
A9: Léo pode ficar em segundo....
P: Hum... E Pedro?
A16: Pode!
P: E se Márcia ficar em primeiro, Márcia pode ficar em segundo?
A16: Não...
P: Se Márcia ficar em primeiro Léo pode ficar em segundo, né?
A16: É.
P: Aí vê... ali em cima... Pedro tinha ficado em primeiro e Márcia ficou em segundo. E aqui Márcia ficou em primeiro e Pedro em segundo. É a mesma coisa?
A16: É...
P: É a mesma coisa? ..... Se Pedro ali estava em primeiro lugar e Márcia em segundo... e depois Márcia estava em primeiro e Pedro em segundo... é a mesma coisa ser primeiro ou segundo lugar?
A9 e A16: Não.
P: Por que?
A16: Porque aqui ela é primeiro e aqui ela é segundo... Aqui Pedro é segundo e depois ele é primeiro...
P: Então, eu escolher Pedro e Márcia, é a mesma coisa de escolher Márcia e Pedro?
A16: Não...
P: Por que?
A16: Porque em um tá em primeiro e no outro tá em segundo... [...]

P: Pesquisadora; A9: Aluno 9; A16: Aluno 16 [Informação Verbal]
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Na situação de *arranjo* do Quadro 12 há um conjunto maior de cinco crianças e deste serão extraídos subconjuntos de duas crianças (primeiro e segundo lugar).

Além disso, a ordem das crianças nos subconjuntos irá gerar novas possibilidades, uma vez que ser primeiro lugar é diferente de ser segundo lugar, ou seja, um pódio formado pelas crianças ‘Pedro e Márcia’ é diferente de um pódio formado por ‘Márcia e Pedro’, já que no primeiro subconjunto Pedro está em primeiro lugar e no segundo subconjunto ele está em segundo lugar.

É possível destacar que esta dupla, possivelmente influenciada pela resolução da situação de *combinação*, inicialmente acreditava que não era necessário escolher de novo a mesma dupla para o pódio, uma vez que se tratavam das mesmas pessoas, entretanto, quando questionados sobre a ordem na classificação os alunos perceberam a diferença entre ser primeiro ou segundo lugar. Dessa forma, foram levados a perceber que a ordem dos elementos indica possibilidades distintas em casos de *arranjos*.

A dificuldade na diferenciação da ordenação dos elementos em situações de *combinação* e *arranjo* é destacada também por Azevedo, Costa e Borba (2011), porém as autoras enfatizam que essa dificuldade na relação de ordenação desses problemas é possível de ser superada com intervenção, uma vez que houve importantes avanços nessa compreensão pelos alunos da referida pesquisa.

Na situação de *arranjo* do Quadro 13 em que foi transcrito um trecho da intervenção com os Alunos 25 e 33 do Grupo 2 (Lápis e papel) percebe-se a mesma dificuldade quanto à ordenação dos elementos no subconjunto. Assim, destaca-se que tanto os alunos do Grupo 1 (*software Árbol*), quanto os alunos do Grupo 2 (Lápis e papel) apresentavam as mesmas dificuldades iniciais quanto à ordenação em situações de *arranjo*.

Percebe-se com isso, que, nos trechos destacados nos Quadros 12 e 13 é enfatizada para os alunos a diferença na formação dos pódios. Observa-se que, nas situações de *combinação*, os alunos inicialmente acreditavam que a escolha de ‘cachorro e passarinho’ era diferente da escolha de ‘passarinho e cachorro’ e, a partir da intervenção, foram levados a pensar que escolher um era o mesmo que escolher o outro. Assim, influenciados pela resolução das situações de *combinação*, que precederam a resolução das situações de *arranjo*, os alunos inicialmente não aceitaram que, já tendo escolhido ‘Pedro e Márcia’, fosse possível escolher ‘Márcia e Pedro’.

Quadro 13: Intervenção com a Dupla 4 do Grupo 2 (Lápis e papel) no qual se ressalta os invariantes de *arranjo.*

Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares? (Questão 5 - arranjo) [...] P: Se Pedro for primeiro... quem pode ser segundo? A25 e A33: Márcia. A25: E Léo perde. P: E Léo perde... mas se Pedro ganhar e Márcia não ficar em segundo... quem ficar em segundo for Léo... pode? A25: Pode P: Hum.. aí vê... aqui foi Pedro que ganhou em primeiro lugar aí quem podia ficar em segundo era Márcia... A25 e A33: Márcia ou Léo P: Mas aí, se Pedro não ficar em primeiro lugar, Márcia pode? A25 e A33: Pode. P: E se Márcia ficar em primeiro lugar, quem pode ficar em segundo? A25 e A33: Pedro ou Léo. <u>P: Aí vê... a gente fez aqui... Pedro e Márcia e depois a gente fez Márcia e Pedro. É a mesma coisa?</u> <u>A25: É.</u> <u>P: Por quê?</u> <u>A25: Porque é Pedro com Márcia e Márcia com Pedro.</u> <u>P: Vê... mas aqui Pedro está em primeiro lugar e aqui está em segundo...</u> <u>A25: Só mudou que aqui Pedro ganhou a corrida e aqui ele ficou em segundo.</u> <u>P: Na questão passada se a gente escolhesse 'Mamão e Jaca' ou 'Jaca e Mamão' era a mesma salada não era?</u> <u>A25 e A33: Era.</u> <u>P: Aqui se a gente escolher 'Pedro e Márcia' ou 'Márcia e Pedro' é a mesma coisa?</u> <u>A33: Não...</u> <u>P: Não né?</u> <u>A25: Já sei... Vão ser seis maneiras... </u> [...]

P: Pesquisadora; A25: Aluno 25; A33: Aluno 33 [Informação Verbal]
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Entretanto, no momento da intervenção com situações de *arranjo*, os alunos foram questionados com o objetivo de perceber que existem situações em que a ordem dos elementos nos subconjuntos gera novas possibilidades, diferentemente do que havia sido mostrado até então, pois, tanto nas situações de *produto cartesiano*, quanto nas questões de *combinação*, a ordem dos elementos nos subconjuntos formados não gera novas possibilidades. Assim, quando os alunos perceberam que o pódio formado por 'Pedro e Márcia' é diferente do pódio formado por 'Márcia e Pedro', eles usaram um esquema que considerou a ordenação, reconhecendo o invariante de que em *arranjos* as diferentes ordens dos elementos implicam em distintas possibilidades.

4.2.4 O significado *permutação* e seus invariantes

No Quadro 14 é transcrito o trecho da intervenção em que foram destacados os invariantes de uma situação de *permutação*.

Quadro 14: Intervenção com a Dupla 4 do Grupo 1 (*Software Árbol*) no qual se ressalta os invariantes de *permutação.*

De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco? *(Questão 7 - permutação)* [...] P: Maria pode ser a primeira da fila? A32 e A36: Pode. P: Se Maria é a primeira da fila, Maria pode ser a segunda? A32 e A36: Pode. P: E quem é a primeira da fila? A32: Maria. P: E quem é a primeira da fila, pode ser segundo também? A32 e A36: Pode. P: Pode? Se tu tiver numa fila, o primeiro da fila. Tu pode ser segundo também? Ocupar dois lugares? A32 e A36: Não... P: E se Maria for a primeira da fila ela também pode ser a segunda? A36: Pode não.... P: Por quê? A32: Se ela já ta em um ela vai ficar em outro é? P: Se ela já é a primeira ela precisa ser a segunda? Ela pode ficar em dois lugares ao mesmo tempo? A32 e A36: Não... P: Então Luís pode ser o segundo? A32 e A36: Pode... P: E quem vai ser terceiro? A32: Carlos. P: Então nessa fila Maria foi a primeira, Luís o segundo e Carlos o terceiro. Mas se Maria for a primeira e Luís não chegar em segundo, quem pode chegar em segundo? A32 e A36: Carlos. P: E se Carlos for o segundo, quem é o terceiro? A32 e A36: Luís. P: Aí quantas filas tem aqui? [...] Maria, Luís e Carlos é uma fila? A32 e A36: é P: E a fila tem quantas pessoas? A32 e A36: 3. P: E quem está nesse outra fila? A32: Maria, Carlos e Luís. P: A fila Maria, Luís e Carlos é a igual a fila Maria, Carlos e Luís? A32: É não... P: E porquê não? A32: Porque aqui Maria tá em primeiro, Luís em segundo e Carlos em terceiro e na outra Carlos é segundo e Luís é terceiro. P: E se Luís que tivesse chegado primeiro no banco... ele é que seria o primeiro da fila né? A36: É. P: E quem podia ser o segundo? A32: Maria e terceiro Luís... P: Hum... A gente fez outra... A36: Fila. [...]

P: Pesquisadora; A32: Aluno 32; A36: Aluno 36 [Informação Verbal]
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

A situação de *permutação* do Quadro 14 apresenta um conjunto de três pessoas, em que a ordem que elas se posicionam na fila do banco gera todas as possibilidades de conjuntos. No Quadro 14 nota-se a maior resistência das crianças quanto à percepção da ordenação da fila, uma vez que as crianças precisavam perceber que estar em primeiro da fila é diferente de estar em segundo ou terceiro, e que por isso, um novo conjunto seria formado a partir da ordem dos elementos.

Até então, as crianças tinham sido solicitadas que formassem subconjuntos menores que o conjunto dado na situação problema, em que a diferença dos subconjuntos era, principalmente, os elementos que fariam parte do mesmo, além da ordenação em que os elementos estariam dispostos, como no caso do *arranjo*.

Assim, percebe-se na situação transcrita no Quadro 14 a maior necessidade de tempo para que os alunos dessa dupla entendessem que, se Maria já está em primeiro lugar da fila, ela não poderia, então, ocupar uma outra posição. Entretanto, nota-se que, ao final, os alunos percebem a diferença das filas na comparação da ordem dos elementos, o que fica explícito na fala do Aluno 32.

Na mesma situação de *permutação* transcrita no Quadro 15 também é possível notar que, assim como no Grupo 1 (*Árbol*), o Grupo 2 (Lápis e papel) também apresentou dificuldades iniciais na escolha da posição dos elementos, entretanto há um claro entendimento durante a intervenção que, apesar das filas serem formadas pelas mesmas pessoas, a diferença está exatamente no lugar em que essa pessoa ocupa na fila.

A maior dificuldade das situações de *permutação* pode estar relacionada ao fato de ser incluída mais uma etapa de escolha nessa situação, ou seja, nas situações de *produto cartesiano* era necessário distinguir dois grupos; nas situações de *combinação* deveriam se escolher duas pessoas ou duas frutas; nas situações de *arranjo* a escolha estava entre primeiro e segundo colocados; mas nas situações de *permutação* deveriam ser usados todos os três (ou quatro) elementos do conjunto, acrescentando com isso, apenas nessas situações, uma (ou duas) etapa (s) de escolha.

Em relação a isso Pontes e Borba (2012, p. 11) enfatizam que "[...] responder problemas do tipo *permutação* com três etapas de escolha é significativamente mais fácil que responder problemas de quatro etapas para esse grupo de alunos do Ensino Fundamental". Assim, é possível que, responder os demais tipos de significados combinatórios com duas etapas de escolha seja mais fácil que responder problemas de *permutação* com três etapas de escolha.

Nesse caso os alunos tinham que usar todos os elementos do conjunto dado para formarem novos conjuntos. A percepção da diferença entre os novos conjuntos se dá estritamente pela ordem em que os elementos são dispostos, gerando nas crianças uma dificuldade na necessidade de escolher três ou quatro elementos, mas, quando escolhidos, ficava clara a diferença dos conjuntos formados.

Quadro 15: Intervenção com a Dupla 5 do Grupo 2 (Lápis e papel) no qual se ressalta os invariantes de *permutação.*

De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco? *(Questão 7 - permutação)* [...] <u>P: Se Maria chegou primeiro, quem pode ser o segundo?</u> <u>A30: Luís</u> <u>P: E terceiro?</u> <u>A30: Carlos.</u> <u>P: Carlos... Mas aí, Maria chegou em primeiro mas não foi Luís que chegou em segundo... quem pode ter sido? [...]</u> <u>P: Aqui a fila era Maria, Luís e Carlos. E agora? Se Luís não foi o segundo, quem pode ter sido?</u> <u>A35:Pode ser Carlos.</u> <u>P: Hummm... E se Maria foi primeiro e Carlos em segundo, quem é o terceiro?</u> <u>A35: Luís.</u> P: Hum... aí ficou assim... Maria chegou em primeiro e Luís em segundo e o terceiro foi Carlos. <u>Aí depois desistiu... Não foi Luís que chegou em segundo, foi Carlos. Aí ficou Maria em primeiro, Carlos em segundo e quem foi terceiro?</u> <u>A35: Maria.</u> <u>P: Maria pode ser terceiro? ... Ela já chegou antes?</u> <u>A35: Eitaaaa é primeiro. Então é Luís.</u> P: Luís... Então vamos fazer agora com Luís em primeiro lugar na fila do banco. A35: Ah... já sei... a gente já fez duas filas... falta só a de Luís. P: Luís em primeiro lugar na fila do banco... A35: Sim... aí bota Maria e Carlos... P: Hum.. E se não for Maria em segundo lugar, quem pode ser? A35: Carlos. P: E o terceiro? A35: Luís. A30: Não... é Maria... A35: Eita, é Maria. P: A gente teve Maria em primeiro lugar e depois Léo em primeiro lugar. Ainda falta alguém ficar em primeiro lugar? A35: Carlos. P: E se Carlos tá em primeiro, quem pode ser segundo? A35: Maria. P: E em terceiro? A30 e A35: Carlos. P: Se Carlos é primeiro, Maria em segundo, quem pode ser terceiro? A35: Luís, Luís!!! P: Aqui Carlos chegou em primeiro, mas não quero que Maria seja segundo... quem pode ser? A30: Luís. A35:Aí depois Maria. [...]

P: Pesquisadora; A30: Aluno 30; A35: Aluno 35 [Informação Verbal]
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

4.3 Pós-teste imediato: os resultados da intervenção

4.3.1 Acertos em problemas combinatórios no pós-teste imediato

No pós-teste aplicado poucos dias após a última intervenção os critérios de pontuação permaneceram os mesmos. A pontuação máxima era 32 pontos e pode-se notar, observando a Tabela 4 o avanço dos alunos, quando comparado aos resultados do pré-teste (Tabela 2), uma vez que no pré-teste apenas um aluno fez mais da metade dos pontos (17 pontos) e no pós-teste imediato oito alunos somaram no teste mais da metade dos pontos (acima de 16 pontos). Além disso, também é possível notar que os alunos que não participaram de intervenção por meio de resolução de problemas combinatórios (do G3 e G4) não avançaram em seus conhecimentos, uma vez que esses alunos somaram, no máximo, 10 pontos no pós-teste imediato.

Tabela 4: Número de alunos por pontuação no pós-teste imediato em cada grupo.

Grupos	Desempenho Total Pós-teste imediato																	T.
	0	3	4	5	6	7	8	10	12	14	15	19	20	21	22	26	27	
G1	0	0	1	0	1	1	1	**2**	**1**	0	0	0	**1**	0	**2**	0	0	10
G2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	0	**1**	**1**	**1**	**1**	10
G3	3	2	1	1	0	0	2	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	10
G4	6	0	1	0	1	0	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	10
T.	11	2	4	1	2	1	4	4	1	1	1	1	1	1	3	1	1	40

G1: Grupo 1 – *Árbol*; G2: Grupo 2 – Lápis e papel; G3: Grupo 3 – Controle (Estruturas Multiplicativas); G4: Grupo 4 – Controle (Desassistido); T.: Total. Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Na Tabela 5, observa-se a média de acertos por grupos, antes e depois do processo de intervenção.

Assim, percebe-se o avanço que ambos os grupos com intervenção em Combinatória (G1 e G2) apresentaram, uma vez que o salto na pontuação média é evidente. O Grupo 1 com média de 4,6 pontos iniciais passou a ter uma média de 12,1 pontos finais. O Grupo 2, que antes obteve uma média de 4,8 pontos, posteriormente chegou à média de 14,8 pontos. Já os grupos que não participaram da intervenção diminuíram sua média de acertos no pós-teste imediato. Antes os Grupos 3 e 4 tinham, respectivamente, 4,7 e 4,9 pontos de média, e no pós-teste imediato apresentaram 4,1 e 2,8 pontos de média.

Tabela 5: Média de desempenho por grupo no pré-teste e no pós-teste imediato.

Grupos	Pré-teste	Pós-teste imediato
Grupo 1 (*Árbol*)	4,6	12,1
Grupo 2 (lápis e papel)	4,8	14,8
Grupo 3 (Controle – Estruturas Multiplicativas)	4,7	4,1
Grupo 4 (Controle - desassistido)	4,9	2,8

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Quanto ao Grupo 1, que trabalhou com o *software Árbol*, observou-se que os alunos, em sua maioria, avançaram em seus conhecimentos em problemas combinatórios. Destaca-se que no pós-teste apenas três alunos deste grupo obtiveram pontuação menor ou igual a sete pontos. Também foi possível verificar que três alunos obtiveram mais que 20 pontos.

Quanto ao Grupo 2, que construiu árvores de possibilidades com lápis e papel, também nota-se o avanço dos alunos nos problemas combinatórios após a intervenção. Observa-se, na Tabela 5, que o avanço dos alunos deste grupo foi um pouco maior que o avanço dos alunos do Grupo 1.

O desempenho um pouco superior do Grupo 2 pode estar relacionado ao fato de que os alunos deste segundo grupo, durante a intervenção, resolveram as situações utilizando a mesma representação (escrita com lápis e papel) adotada no pré-teste e no pós-teste imediato, enquanto os alunos do Grupo 1, durante a intervenção, resolveram as situações por meio de um *software* (representação virtual) e no pós-teste imediato tiveram que utilizar outra forma de representação: escrita com lápis e papel. Assim, acredita-se que a transferência de representação, ou seja, aprendizagem com utilização do *software* e resolução do pós-teste imediato em lápis e papel, necessária para o Grupo 1, tenha tido efeito direto na menor média de desempenho desse grupo em comparação com o Grupo 2, que participou da intervenção com a mesma representação que resolveu o pós-teste imediato, a representação escrita, ou seja, com uso do lápis e papel.

Além disso, outra explicação pode estar relacionada ao fato de que o G2, que construiu árvores de possibilidades com lápis e papel, envolvia-se mais ativamente na construção das árvores, tendo que pensar nos invariantes das situações concomitantemente à sua construção. Já o G1, que trabalhou com o *software Árbol*, tinha que selecionar os casos válidos – o que requeria também reconhecimento dos invariantes das situações – mas não tinha que, de início, refletir sobre todas as relações envolvidas.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010) destacaram em sua pesquisa que o *software* também pode dificultar, em certa extensão, a compreensão das situações por não propiciar a visualização de todas as possibilidades em algumas situações com números maiores de possibilidades. Em contrapartida a isso, também se destaca a pesquisa de Azevedo, Costa e Borba (2011), que enfatiza o grande avanço dos alunos que aprenderam Combinatória por meio deste mesmo *software.* O avanço pode, portanto, estar relacionado à necessidade de selecionar os casos válidos, mesmo que, inicialmente, não seja necessária a reflexão sobre todas as relações de cada tipo de significado.

O Grupo 3, composto pelos alunos que fizeram parte do grupo controle assistido – com aulas de estruturas multiplicativas – diminuiu um pouco a sua média de acertos em comparação com o pré-teste, como ainda pode ser visto na Tabela 5. Isto pode estar relacionado à natureza das situações que foram diferentes entre as do pré-teste e pós-teste e as trabalhadas na intervenção – que não eram de natureza combinatória. Assim, os alunos podem ter tentando aplicar procedimentos discutidos na intervenção (Sobre isso, ver seção 4.5). Dessa forma, observa-se que trabalhar problemas multiplicativos, mas não combinatórios, não parece ter auxiliado o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos que fizeram parte do G3 (Grupo Controle Assistido).

O Grupo 4, que foi formado pelos alunos que não receberam nenhum tipo de instrução, diminuiu ainda mais o seu rendimento ao se comparar a média dos resultados no pré-teste e no pós-teste imediato destes alunos (ver Tabela 5). Assim, a falta de instrução de qualquer natureza provocou uma diminuição no desempenho.

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi possível destacar que ambos os grupos com intervenção em Combinatória apresentaram diferenças significativas de desempenhos entre pré-teste e pós-teste imediato. No Grupo 1, quando comparado o pré-teste e o pós-teste imediato dos seus respectivos alunos, foi observado um diferença significativa ($t(9) = -3,822$; $p = 0,004$). Já para o Grupo 2, neste mesmo panorama de comparação, também foi observada uma diferença significativa ($t(9) = -3,205$; $p = 0,011$). Isso não aconteceu na comparação do pré e pós-teste do Grupo 3 ($t(9) = 0,688$; $p = 0,509$) e nem do Grupo 4 ($t(9) = 1,233$; $p = 0,249$).

Utilizando a prova paramétrica ANOVA com *post hoc* Tukey, foi observada diferença significativa do Grupo 1, quando comparado com Grupo 4 (p = 0,018), mas apenas próximo de significativo com o Grupo 3 (p = 0,052). Além disso, foi observado um maior avanço do Grupo 2, uma vez que nesse grupo foram identificadas diferenças significativas quando comparado com ambos os grupos controle (Grupo 2 x Grupo 3: p = 0,005; Grupo 2 x Grupo 4: p = 0,002). Foi observado, ainda, que não houve diferenças significativas na comparação dos Grupos 3 e 4 entre si (p = 0,972) nem entre os Grupos 1 e 2 (p = 0,803).

Com isso, é possível destacar que aprender a construir árvores de possibilidades tem um efeito positivo na resolução de problemas combinatórios e que a aprendizagem em ambiente informático (uso do *software*) ou não (uso de lápis e papel) tem o mesmo impacto no desenvolvimento deste conceito, com um desempenho um pouco melhor do grupo que teve intervenção com a mesma representação (escrita) presente nos testes.

4.3.2 Acertos em problemas combinatórios no pós-teste imediato por tipo de problema

Como já dito anteriormente, os alunos dos anos iniciais, geralmente, apresentam maior facilidade na resolução de problemas de *produto cartesiano*, seguido de problemas de *combinação*, *arranjo* e *permutação (*PESSOA; BORBA, 2009a; CORREA; OLIVEIRA, 2011). Entretanto, na ocasião do pré-teste, os alunos do presente estudo não apresentaram facilidade de resolução nessa ordem, ou seja, os alunos apresentaram facilidade na seguinte ordem: *arranjo*, *permutação* e *combinação*, apesar da diferença da média de pontos entre eles não ser significativa, como já apresentado na seção 4.1.2. Sabendo que a média máxima de pontuação por tipo de problema era de quatro pontos, nota-se que, após as diferentes intervenções com cada grupo, os alunos passaram a ter maior facilidade em questões de *produto cartesiano* (3,13), seguido de *arranjo* (2,63)*, combinação* (2,30) e *permutação* (0,40), como pode ser visto na Tabela 6.

Nota-se, nesta tabela, o avanço no desempenho dos alunos em problemas combinatórios com apenas uma sessão de intervenção, quando comparados com a média de acertos no pré-teste por grupo e tipo de problema (Ver Tabela 3). A média de acertos por grupo em cada tipo de problema poderia chegar, no máximo, a quatro pontos, e, percebe-se que a média de desempenho, por vezes, superou os 50% de acerto, chegando a 65% de acerto no segundo problema de *produto cartesiano* do Grupo 1, quando, na ocasião do pré-teste não passou dos 35% de acerto – 1,40 de média (no caso da média do G4 no primeiro problema de *produto cartesiano*).

Tabela 6: Média de acertos no pós-teste imediato por grupo e tipo de problema. (Pontuação máxima em cada tipo de problema: 4,0).

Grupos	PC1	PC2	C1	C2	A1	A2	P1	P2
G1	1,90	**2,60**	1,80	1,40	**2,20**	1,70	,50	0,00
G2	**2,40**	**2,50**	**2,50**	**2,10**	**2,30**	**2,00**	,60	0,40
G3	1,00	0,80	,60	,00	1,20	,50	,00	0,00
G4	0,60	0,70	,50	,30	,40	,20	,10	0,00
Total	3,13		2,30		2,63		0,40	

G1: Grupo 1 – *Árbol*; G2: Grupo 2 – Lápis e papel; G3: Grupo 3 – Controle (Estruturas Multiplicativas); G4: Grupo 4 – Controle (Desassistido); PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2; A1: *Arranjo1*; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Ainda é possível notar, assim como no estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011), após a intervenção os alunos passaram a ter maior facilidade em problemas de *produto cartesiano*, seguido de *arranjo e combinação* e uma grande dificuldade em problemas de *permutação.*

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foram observadas diferenças significativas na comparação dos três primeiros tipos de problemas (*produto cartesiano*, *arranjo e combinação*) com a *permutação* (PC x P: $t(39) = 5{,}120$; $p < 0{,}001$; C x P: $t(39) = 4{,}441$; $p < 0{,}001$; A x P: $t(39) = 5{,}638$; $p < 0{,}001$), o que salienta a dificuldade dos alunos nesse tipo de problema (*permutação*), sejam eles participantes da intervenção em situações combinatórias, ou não.

Ainda utilizando a prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi observado que houve também diferenças significativas quando comparados os problemas de *produto cartesiano* com *combinação* (PC X C: $t(39) = 2{,}329$; $p = 0{,}025$), entretanto, não houve diferenças significativas na comparação de *produto cartesiano* com *arranjo* (PC X A: $t(39) = 1{,}229$; $p = 0{,}226$). Foi possível destacar ainda, que não houve diferença significativa entre as médias de desempenho de *arranjo e combinação* ($t(39) = -0{,}960$; $p = 0{,}343$).

Sabendo que a primeira situação de cada tipo de problema tinha menor número de possibilidades como resposta final (até 12 possibilidades); e a segunda situação de cada tipo de problema gerava resultados com maior número de possibilidades (entre 20 e 30 possibilidades), observa-se, ainda nesta Tabela que, nem sempre, os problemas com menor número de possibilidades tiveram maior acerto, assim como aconteceu no pré-teste (Ver Tabela 3).

Assim, no pós-teste imediato, destaca-se que o menor número de possibilidades teve melhor desempenho apenas nos problemas de *arranjo e combinação.* O que chama atenção para a possibilidade da grandeza numérica não ser influente para as situações que são consideradas mais fáceis (*produto cartesiano*) ou que são consideradas mais difíceis (*permutação*).

Esse fato pode ser comprovado por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* em que se destaca que nas situações mais fáceis (*produto cartesiano* – PC1 x PC2: t (39) = - 1,096; p = 0,280) e mais difíceis (*permutação* – P1 X P2: t (39) = 1,309; p = 0,198) não há diferenças significativas, apontando que, de fato, a grandeza numérica não influencia na sua resolução. Já nas situações de *combinação* (C1 x C2: t (39) = 2,046; p = 0,047), há influência da grandeza numérica para a resolução e nas situações de *arranjo (*A1 x A2: t (39) = 1,879; p = 0,068) há diferenças próximas de significativas, apontando que os problemas com maior número de possibilidades são possivelmente mais difíceis que os problemas com menor número de possibilidades.

4.4 Pós-teste posterior: a retenção da aprendizagem

4.4.1 Acertos em problemas combinatórios no pós-teste posterior

Para observar se o aprendizado, evidenciado no primeiro pós-teste, era meramente imediato e temporário, ou se havia sido retido por mais tempo, realizou-se um pós-teste posterior entre 9 e 10 semanas após aplicação do pós-teste imediato. Os resultados verificados no pós-teste posterior podem ser observados na Tabela 7 que indica o desempenho de todos os participantes dos quatro grupos.

No pós-teste posterior os alunos também poderiam somar 32 pontos no teste e, assim como no pós-teste imediato, foi possível constatar que os alunos que participaram da intervenção em Combinatória (G1 e G2) avançaram em seus conhecimentos combinatórios.

Tabela 7: Número de alunos por pontuação no pós-teste posterior em cada grupo.

Grupos	Desempenho Total Pós-teste posterior																	T
	0	2	3	4	5	6	8	11	16	18	20	22	26	27	28	29	30	
G1	1	0	0	2	0	0	2	0	0	**1**	**1**	0	0	**1**	0	0	**1**	9
G2	2	0	0	0	0	0	0	1	**2**	0	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**	0	9
G3	2	1	1	2	2	1	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	10
G4	2	2	0	1	0	3	2	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	10
T.	7	3	1	5	2	4	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	38

G1: Grupo 1 – *Árbol*; G2: Grupo 2 – Lápis e papel; G3: Grupo 3 – Controle (Estruturas Multiplicativas); G4: Grupo 4 – Controle (Desassistido); T.: Total. Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Destaca-se que uma aluna conseguiu somar 30 pontos, dos 32 possíveis. Observando ainda a Tabela 7 percebe-se que, assim como no pós-teste imediato, os alunos de ambos os grupos controles (G3 e G4) não avançaram em seus conhecimentos combinatórios, uma vez que não participaram de intervenções voltadas para a aprendizagem desse conteúdo. Isso enfatiza que as aprendizagens retidas são, provavelmente, consequência das intervenções realizadas neste estudo, pois, se fossem consequência apenas do desenvolvimento cognitivo, ou de outros aprendizados escolares, os alunos dos Grupos 3 e 4 também deveriam ter avançado em seus desempenhos.

Na Tabela 8 observa-se o desempenho médio por grupo nas distintas etapas do estudo. É possível perceber que os alunos dos grupos com intervenção específica em Combinatória (G1 e G2) avançaram em seus conhecimentos sobre este conteúdo. Além disso, percebe-se que houve um aumento nas médias de acerto também na comparação com o pós-teste imediato. Vale salientar que não houve entre o pós-teste imediato e o pós-teste posterior intervenções em Combinatória – nem pela pesquisadora nem pela escola – que justificassem esse aumento na média de acertos, sendo, portanto, uma evidência de que o conteúdo trabalhado na intervenção do presente estudo foi de fato aprendido.

Ainda observando a Tabela 8 pode-se perceber o maior avanço do Grupo 2 em relação ao Grupo 1. Esse desempenho um pouco superior do Grupo 2 pode estar relacionado ao fato de que os alunos deste segundo grupo resolveram as situações utilizando a mesma representação (escrita - com lápis e papel) adotada no pré-teste e nos pós-testes, enquanto os alunos do Grupo 1 resolveram as situações por meio de um *software* e no pós-teste tiveram que utilizar uma representação escrita com uso do lápis e papel. Além disso, o Grupo 2 pode ter sido beneficiado por ter que pensar nas relações combinatórias concomitantemente à construção da *árvore de possibilidades*, enquanto que o Grupo 1 teve a *árvore de possibilidades* construída pelo *software*, sendo necessário pensar nessas relações apenas no momento de selecionar os casos válidos.

Tabela 8: Comparação da média de desempenho por grupo no pré-teste, pós-teste imediato e pós-teste posterior.

Grupos	Pré-teste	Pós-teste Imediato	Pós-teste Posterior
Grupo 1 (*Árbol*)	4,6	12,1	13,22
Grupo 2 (lápis e papel)	4,8	14,8	16,44
Grupo 3 (Controle – Estruturas Multiplicativas)	4,7	4,1	4,0
Grupo 4 (Controle - desassistido)	4,9	2,8	4,2

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

O Grupo 3, composto pelos alunos que fizeram parte do grupo controle assistido – com aulas de estruturas multiplicativas – manteve, nos pós-testes, a sua média de acertos em comparação com o pré-teste, como ainda pode ser visto na Tabela 8. Dessa forma, observa-se que trabalhar problemas multiplicativos, mas não combinatórios, parece não ter auxiliado o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

O Grupo 4, que foi formado pelos alunos que não receberam nenhum tipo de instrução, diminuiu bastante seu rendimento na comparação da média dos resultados desses alunos no pré-teste (4,9) com o pós-teste imediato (2,8), entretanto, no pós-teste posterior diminui pouco seu rendimento na comparação com o pré-teste (4,9 – 4,2). Assim, esse grupo, que não teve nenhum tipo de instrução, não só não teve influência positiva no desempenho, como parece ter provocado um efeito negativo imediato e depois um retorno ao desempenho anterior.

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares,* foi possível destacar que ambos os grupos com intervenção em Combinatória apresentam diferenças significativas de desempenhos entre pré-teste e o pós-teste posterior, avançando substancialmente em seus conhecimentos combinatórios. O Grupo 1 (*software*), quando comparado o pré-teste com o pós-teste posterior obteve diferença significativa entre as respectivas médias (t (8) = - 2,920; p = 0,019), mas não houve diferenças significativas na comparação do pós-teste imediato com o pós-teste posterior nesse grupo (t (8) = - 0,472; p = 0,649). Já no Grupo 2 (lápis e papel), neste mesmo panorama de comparação, também foi observada diferença significativa com o pós-teste posterior (t (8) = - 3,447; p = 0,009). Assim como para o Grupo 1, também nesse grupo não houve diferenças significativas na comparação do pós-teste imediato com o pós-teste posterior nesse grupo (t (8) = - 1,541; p = 0,162). O fato de não ter havido diferença significativa nesses dois grupos entre os desempenhos no pós-teste imediato e pós-teste posterior atesta que os dois grupos mantiveram estável os seus conhecimentos desenvolvidos durante as intervenções.

Com o intuito de comprovar a influencia da intervenção nos resultados dos grupos experimentais foi observado, ainda pela prova paramétrica *t-teste de amostras em pares,* que não houve diferenças significativas na comparação do pré-teste com o pós-teste posterior do Grupo 3 (controle – estruturas multiplicativas), (t (9) = 0,751; p = 0,472) nem do pós-teste imediato com o pós-teste posterior (t (9) = 0,0750; p = 0,946); Assim como, não houve diferenças significativas na comparação do pré-teste com o pós-teste posterior do Grupo 4 (controle desassistido) (t (9) = 0,391 ; p = 0,705), nem do pós-teste imediato com o pós-teste posterior (t (9) = - 0,782; p = 0,454).

Utilizando a prova paramétrica ANOVA com post hoc Tukey, foi observado que no pós-teste posterior, diferentemente do pós-teste imediato, o Grupo 1 não apresentou diferenças significativas com nenhum outro grupo, isso provavelmente porque não houve avanços suficientes no desempenho da maioria dos participantes desse grupo. Entretanto, foi observado um maior avanço do Grupo 2, uma vez que nesse grupo foram identificadas diferenças significativas quando comparado com ambos os grupos controle no pós-teste posterior (Grupo 2 X Grupo 3: p = 0,008; Grupo 2 X Grupo 4: p = 0,009). Foi identificado ainda que não houve diferenças significativas na comparação dos Grupos 3 e 4 entre si no pós-teste posterior (Grupo 3 X Grupo 4 pós-teste posterior: p = 1,000), nem dos Grupos 1 e 2 entre si no pós-teste posterior (Grupo 1 X Grupo 2 pós-teste posterior: p = 0,820).

Assim, percebe-se que, os alunos participantes da intervenção em Combinatória, tanto com uso do *software* (G1), quanto com o uso de lápis e papel (G2), avançaram consideravelmente seus rendimentos em problemas dessa natureza, na comparação entre os seus próprios desempenhos antes e após o processo de intervenção, entretanto, na comparação entre grupos, foi revelado uma maior vantagem para o Grupo 2, que evidenciou diferenças significativas em todas as comparações com os grupos controle.

Estes dados ratificam que, a aprendizagem específica em Combinatória é possível desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e intervenções parecem ser necessárias para desenvolver o raciocínio combinatório desses alunos, uma vez que os alunos dos grupos controle não apresentaram melhores desempenhos na ocasião dos pós-testes. Acredita-se, assim, que o avanço dos alunos se deve, principalmente, às intervenções realizadas, seja com o uso do *software* ou com lápis e papel.

As intervenções buscaram, portanto, possibilitar aos alunos a construção de compreensões articuladas, como sugerido por Vergnaud (1986), incentivando o uso de uma eficiente representação e levando em consideração as relações combinatórias presentes nas diferentes situações. Sabe-se, entretanto, que outros fatores podem ter influenciado na melhora de desempenho dos participantes, mas, acredita-se que, esses fatores externos não são suficientes para o grande avanço ocorrido nos Grupos 1 e 2, uma vez que os Grupos 3 e 4, que não vivenciaram a intervenção em Combinatória não avançaram em seus desempenhos.

4.4.2 Acertos em problemas combinatórios no pós-teste posterior por tipo de problema

No pós-teste posterior, após o intervalo de 9 a 10 semanas entre ambos os pós-testes, os alunos passaram a ter maior facilidade em questões de *produto cartesiano*, seguido de *combinação, arranjo* e *permutação*, como pode ser visto na Tabela 9, diferentemente do pós-teste imediato, quando havia maior facilidade nas questões de *produto cartesiano* seguidas de *arranjo, combinação* e, por fim, *permutação*. Essa inversão na ordem de facilidade entre os problemas de *arranjo e combinação* pode ser mais um destaque para que se afirme a ocasionalidade dessa ordem. Por outro lado, tem-se a confirmação da maior facilidade nos problemas de *produto cartesiano* e a maior dificuldade nos problemas de *permutação*.

Entretanto, salienta-se que no pós-teste posterior, por meio da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, não foram identificadas diferenças significativas entre os tipos de problemas (PC X C: $t\ (37) = 0{,}671$; $p = 0{,}506$; PC X A: $t\ (37) = 1{,}204$; $p = 0{,}236$; PC x P: $t\ (37) = 1{,}436$; $p = 0{,}159$; C X A: $t\ (37) = 0{,}888$; $p = 0{,}380$; C x P: $t\ (39) = 1{,}302$; $p = 0{,}201$; A x P: $t\ (39) = 0{,}651$; $p = 0{,}519$).

Tabela 9: Média de desempenho por tipo de problema no pós-teste posterior.

Grupos	PC1	PC2	C1	C2	A1	A2	P1	P2
G1	**2,22**	**2,00**	**2,00**	1,89	1,78	1,22	1,22	0,89
G2	**2,11**	**2,44**	**2,33**	**2,44**	**2,22**	**2,22**	1,33	1,33
G3	0,60	0,20	0,50	0,00	0,20	0,70	0,90	0,90
G4	0,80	0,60	0,60	0,40	0,20	0,50	0,40	0,70
Total	2,66		2,45		2,18		1,89	

G1: Grupo 1 – *Árbol*; G2: Grupo 2 – Lápis e papel; G3: Grupo 3 – Controle (Estruturas Multiplicativas); G4: Grupo 4 – Controle (Desassistido); PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2; A1: *Arranjo1*; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Destaca-se, ainda observando a Tabela 9, que os grupos com intervenção em Combinatória (Grupo 1 e Grupo 2) tiveram médias de desempenho maiores que as médias dos grupos sem intervenção em Combinatória (Grupo 3 e Grupo 4) em todos os tipos de problemas, uma vez que esses grupos sem intervenção não chegaram a 1,00 ponto de média de acertos em nenhum dos problemas.

Sabendo que a primeira situação de cada tipo de problema tinha menor número de possibilidades como resposta final (até 12 possibilidades); e a segunda situação de cada tipo de problema gerava resultados com maior número de possibilidades (entre 20 e 30 possibilidades), observa-se, ainda nesta tabela que, nem sempre, os problemas com menor número de possibilidades tiveram maior acerto.

Entretanto, por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi possível observar que não houve diferenças significativas na comparação dos resultados de problemas com menor ou maior grandeza numérica em nenhum dos quatro tipos de significados da Combinatória no pós-teste posterior apontando que, nesse momento, a grandeza numérica da situação não significava maior ou menor dificuldade na sua resolução. (PC1 x PC2: t (37) = - 0,758; p = 0,453; C1 x C2: t (37) = 1,045; p = 0,303; A1 x A2: t (37) = - 0,362; p = 0,719; e P1 X P2: t (37) = 0,000; p = 1,000)

4.5 As representações simbólicas utilizadas: Pré-teste, pós-teste imediato e pós-teste posterior.

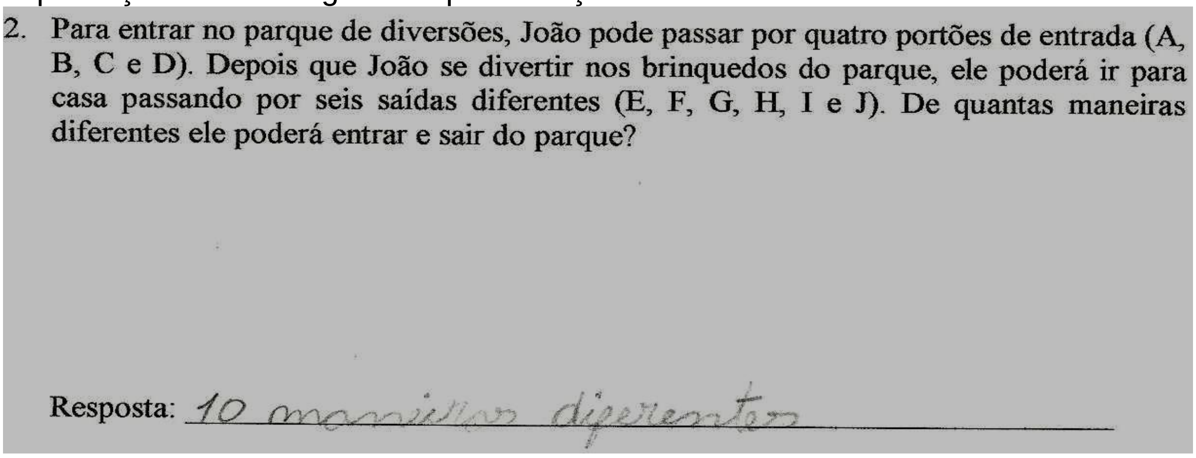
Os tipos de representação simbólica para a resolução dos problemas combinatórios podem ser as mais variadas: *desenhos*, *listagens*, *árvores de possibilidades*, *quadros*, *diagramas*, cálculos ou uso de *fórmulas*, entre outras

(PESSOA; BORBA 2009a). Dessa forma, os alunos, ao se depararem com problemas combinatórios, buscam utilizar essa variedade, uma vez que esses problemas possibilitam diferentes formas de solução. Assim, no presente estudo foram classificadas as possíveis representações simbólicas de resolução de acordo com os critérios descritos no Quadro 16.

Na Tabela 10 podem ser visualizados os percentuais de uso dos tipos de representação simbólica apresentadas pelos alunos do Grupo 1 - *Árbol* (que participaram da intervenção com construção virtual de *árvore de possibilidades* – uso do *software Diagramas de Árbol*) da presente pesquisa no pré-teste, no pós-teste imediato e no pós-teste posterior.

Assim, é possível notar que, inicialmente, quando os participantes do G1 (*software Árbol*) ainda não haviam participado de intervenções envolvendo o raciocínio combinatório, os alunos, em sua maioria, não explicitaram estratégia ou representação simbólica de resolução do problema em questão. Um caso desse tipo pode ser observado na Figura 15, em que o Aluno 6 não explicitou estratégia ou representação simbólica para a resolução do Problema 2 de *produto cartesiano*, apesar de ser possível inferir que este aluno somou os números dos elementos dos conjuntos do problema.

Figura 15: *Resposta errada* do Aluno 6 do G1 (*Árbol*) no pré-teste, em que não há explicitação de estratégia ou representação simbólica.



2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Resposta: 10 maniras diferentes

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Quadro 16: Representações simbólicas apresentadas pelos alunos ao resolverem os problemas de *raciocínio combinatório* propostos

1. Não explicitou um tipo de estratégia ou representação simbólica.	O aluno apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta. Desse modo fica difícil precisar com certeza qual representação ou estratégia foi utilizada para a resolução.
2. Adição/Subtração das variáveis envolvidas no problema	O aluno utilizou os valores apresentados no enunciado numa destas operações. A resposta, geralmente, é *incorreta sem relação.*
3. Desenho	O aluno desenhou as possibilidades, utilizando-se dos dados, podendo a resposta ser correta, parcialmente correta ou incorreta.
4. Árvore de Possibilidades	O aluno construiu uma *árvore de possibilidades*, podendo apresentar uma resposta *correta, parcialmente correta* ou *incorreta*, *com ou sem sistematização dos elementos.*
5 . Diagrama/Quadro	O aluno construiu um quadro ou um diagrama para representar o processo de solução. Pode haver resposta *correta, parcialmente correta,* ou *incorreta*, *com* ou *sem sistematização*.
6. *Listagem de possibilidades*	O aluno listou as possibilidades, podendo a resposta ser correta parcialmente correta ou incorreta, havendo, ou não, o estabelecimento de relação e *com ou sem sistematização dos elementos.*
7. Adição Inadequada de Parcelas repetidas	O aluno utilizou a adição de parcelas repetidas, mas esta é inadequada para o que o problema solicita. A resposta é *incorreta sem relação*.
8. Adição Adequada de Parcelas repetidas	O aluno percebeu que pode utilizar uma *adição de parcelas* repetidas para resolver o problema, geralmente substituindo a *multiplicação adequada*. A resposta pode ser *correta, parcialmente correta* ou *incorreta*.
9. Multiplicação Inadequada	O aluno relacionou o problema a um produto, entretanto, em situações nas quais ela não se aplica.
10. Multiplicação Adequada	O aluno relacionou o problema a um produto, com a possibilidade correta de seu uso.
11. Percepção da Regularidade	O aluno iniciou a resolução através de uma representação qualquer, geralmente a *listagem* ou a *árvore de possibilidades* ou o *quadro/diagrama* e, no decorrer desta, percebeu que pode generalizar as descobertas iniciais para os casos seguintes. A resposta pode ser *correta, parcialmente correta* ou *incorreta*.

Fonte: Pessoa e Borba (2009b) e Pessoa (2009) [adaptado]
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Tabela 10: Percentual de representações simbólicas utilizadas por etapa da pesquisa pelo G1 (*Árbol*).

		Não Explicitou representação ou Estratégia	Adição/ Subtração	Desenho	Árvore de Possibilidades	Diagrama/ Quadro	*Listagem de possibilidades*	Adição Inadequada de Parcelas repetidas	Adição Adequada de Parcelas repetidas	Multiplicação Inadequada	Multiplicação Adequada	Percepção da Regularidade
G1 Pré-teste	PC1	**70**	30	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0
	PC2	**70**	20	0	0	0	**10**	0	0	0	0	0
	C1	**60**	10	0	0	0	**30**	0	0	0	0	0
	C2	**40**	10	0	0	0	**50**	0	0	0	0	0
	A1	**40**	10	0	0	0	**50**	0	0	0	0	0
	A2	**30**	10	0	0	0	**60**	0	0	0	0	0
	P1	**50**	10	0	0	0	**40**	0	0	0	0	0
	P2	**50**	10	0	0	0	**40**	0	0	0	0	0
G1 Pós-teste 1	PC1	**50**	0	0	10	0	**40**	0	0	0	0	0
	PC2	**50**	0	0	0	0	**30**	0	0	0	10	10
	C1	**70**	0	0	10	0	**10**	0	0	10	0	0
	C2	**70**	0	0	0	0	**10**	0	0	0	0	10
	A1	**70**	0	0	10	0	**20**	0	0	0	0	0
	A2	**70**	10	0	0	0	**10**	0	0	0	0	20
	P1	**70**	10	0	10	0	**10**	0	0	10	0	0
	P2	**80**	0	0	0	0	**0**	0	0	10	0	0
G1 Pós-teste 2	PC1	**44,4**	0	0	0	11,1	**33,3**	0	0	0	11,1	0
	PC1	**44,4**	11,1	0	0	11,1	**33,3**	0	0	0	0	0
	C1	**77,7**	0	0	0	11,1	**11,1**	0	0	0	0	0
	C2	**77,7**	0	0	0	11,1	**11,1**	0	0	0	0	0
	A1	**66.6**	0	0	0	0	**33,3**	0	0	0	0	0
	A2	**66,6**	0	0	0	0	**33,3**	0	0	0	0	0
	P1	**55,5**	0	0	0	0	**44,4**	0	0	0	0	0
	P2	**55,5**	0	0	0	0	**33,3**	0	0	0	0	11,1

G1: Grupo 1 (*Árbol*); PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2; A1: *Arranjo* 1; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2;
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

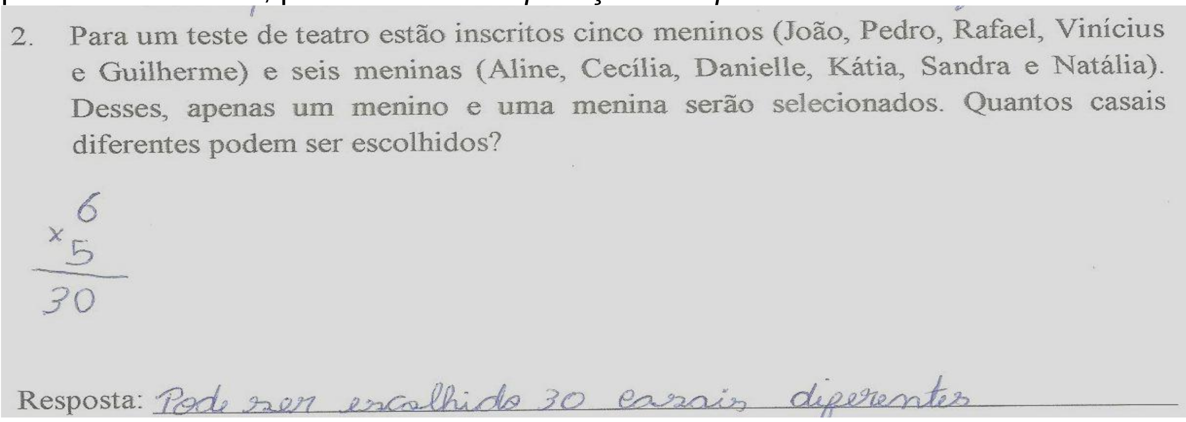
Percebe-se ainda, que, no pré-teste quando os alunos do G1 explicitaram representações simbólicas, utilizaram a *listagem* como procedimento preferido de resolução, entretanto, essa *listagem*, por vezes, não apresentava relação com o que o problema estava pedindo. Além disso, é possível observar que no pré-teste a *árvore de possibilidades* não foi utilizada pelos alunos desse grupo. Além disso, também há um pequeno percentual de alunos que fizeram uso de procedimentos aditivos, não reconhecendo o caráter multiplicativo das situações. Pessoa e Borba (2009b) também destacam essa realidade em seu estudo.

Ainda observando a Tabela 10 é possível notar que o percentual de alunos do G1 (*software*), que não explicitou representação após a intervenção, não diminuiu. Acredita-se que isto pode ser reflexo da necessidade de transformação da forma de representação virtual, na qual os alunos desse grupo aprenderam a Combinatória, para a escrita. Além disso, há a possibilidade de, na falta de conhecimento de como efetuar uma representação escrita, muitos alunos podem ter resolvido apenas mentalmente as situações.

Entretanto, os alunos, quando explicitaram uma representação simbólica, utilizaram, na maioria das vezes, a *listagem*, com evidências de pensamento combinatório. Além da *listagem*, também foram apresentadas pelos alunos outras representações eficientes, após a intervenção, como o *diagrama*, a *árvore de possibilidades*, a *multiplicação adequada*, além da *percepção de regularidades* na situação, entretanto, a preferência no tipo de representação, para este grupo, permaneceu, nos pós-testes, pela *listagem de possibilidades*.

Na Figura 16 é possível ver que o Aluno 6, participante do Grupo 1, se utiliza da *multiplicação adequada* como um tipo de representação para a resolução de uma situação. A solução via multiplicação direta para esse tipo de problema foi uma opção correta para responder essa situação no momento do pós-teste imediato. Já no pós-teste posterior, esse mesmo aluno se utilizou do tipo de representação *listagem de possibilidades* por meio de uma estratégia sistemática, ou seja, organizada, para a resolução do problema, e não mais por meio de multiplicação adequada, como no pós-teste imediato (Ver Figura 17).

Figura 16: *Resposta correta* do Aluno 6 do G1 (*Árbol*) para a segunda questão do pós-teste imediato, por meio de *multiplicação adequada*.



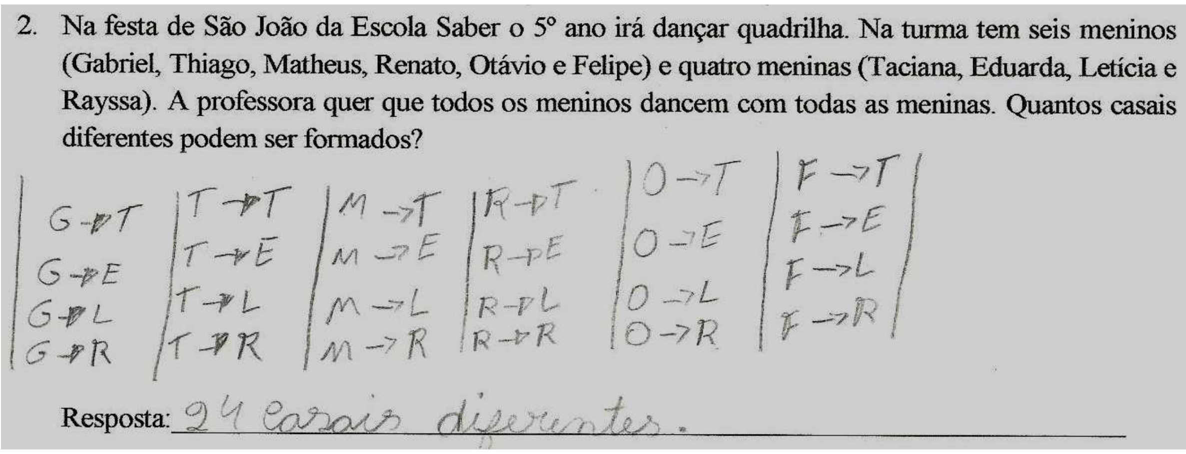
2. Para um teste de teatro estão inscritos cinco meninos (João, Pedro, Rafael, Vinícius e Guilherme) e seis meninas (Aline, Cecília, Danielle, Kátia, Sandra e Natália). Desses, apenas um menino e uma menina serão selecionados. Quantos casais diferentes podem ser escolhidos?

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 5 \\ \hline 30 \end{array}$$

Resposta: Pode ser escolhido 30 casais diferentes

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 17: *Resposta correta* do Aluno 6 do G1 (*Árbol*) para a segunda questão do pós-teste posterior, por meio de *listagem de possibilidades*.



2. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Letícia e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas. Quantos casais diferentes podem ser formados?

G → T	T → T	M → T	R → T	O → T	F → T
G → E	T → E	M → E	R → E	O → E	F → E
G → L	T → L	M → L	R → L	O → L	F → L
G → R	T → R	M → R	R → R	O → R	F → R

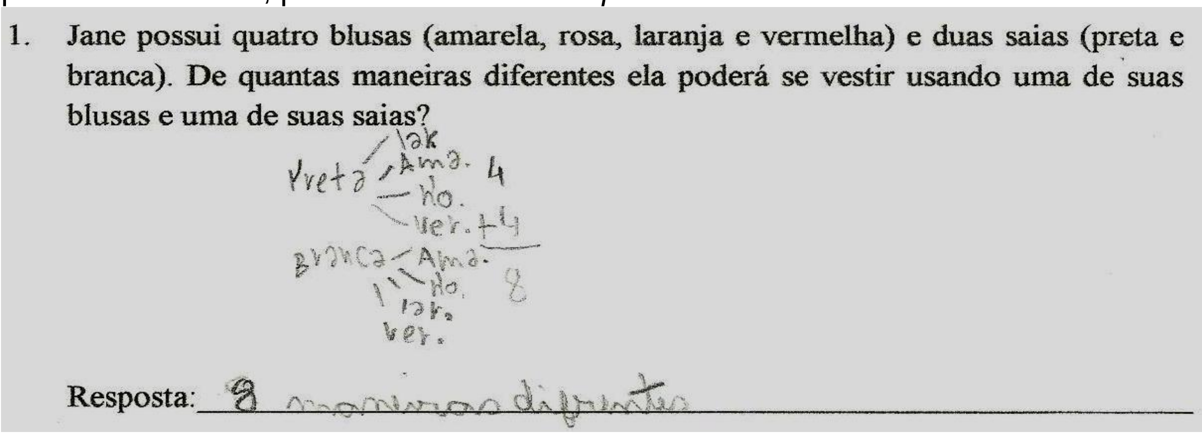
Resposta: 24 casais diferentes.

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Esse fato chama a atenção para o fato de que o aluno em questão não aprendeu um método de resolução do problema, ou seja, o aluno não foi *treinado* para resolver problemas combinatórios por meio de *árvore de possibilidades*, uma vez que há evidencia que o aluno aprendeu a refletir sobre o que o problema está perguntando, pois, o aluno resolve a situação por meio da representação que lhe parece mais conveniente para a solução correta da situação.

Destaca-se no Grupo 1 o baixo percentual de utilização da *árvore de possibilidades* no pós-teste imediato. Foi identificado que, no pós-teste imediato, apenas um aluno (Aluno 38) fez uso dessa representação. Entretanto, observa-se que, quando ela foi utilizada, foi feita de maneira sistemática. Destaca-se, ainda, que a eficácia do uso da *árvore de possibilidades* aconteceu, nos problemas de *produto cartesiano,* como é possível ver na Figura 18, e *combinação*. Assim, nos problemas de *arranjo* e *permutação*, quando essa representação foi utilizada, não foi obtido sucesso na resposta. Acrescenta-se que o referido aluno respondeu a situação de *arranjo* levando em consideração o invariante de ordem se uma *combinação*, destacando-se assim, que pensar na influência da ordem foi, possivelmente, mas trabalhoso.

Figura 18: *Resposta correta* do Aluno 38 do G1 (*Árbol*) para a primeira questão do pós-teste imediato, por meio de *árvore de possibilidades*.



1. **Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?**

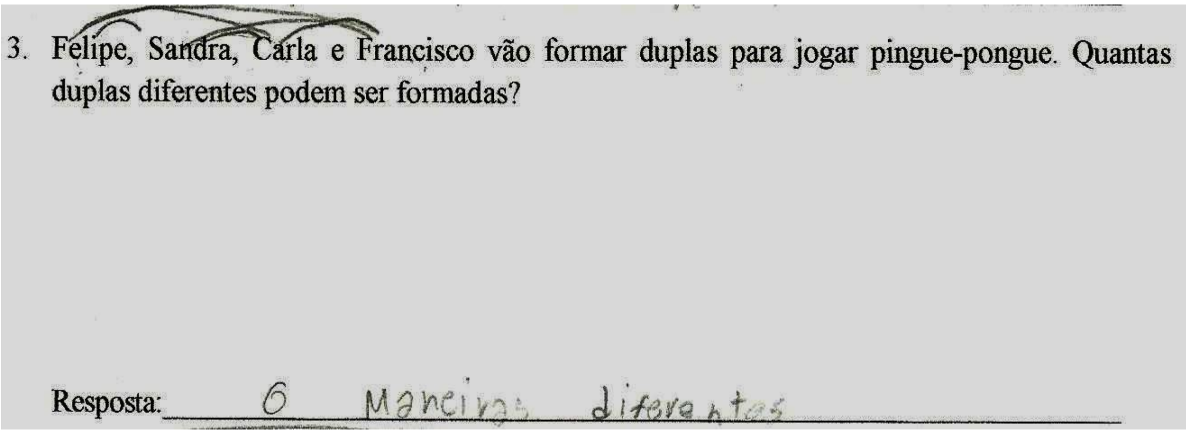
Resposta: 8 maneiras diferentes

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

A baixa utilização dessa representação no pós-teste imediato repercutiu no pós-teste posterior, de modo que não houve utilização desse tipo de representação naquele momento da presente pesquisa. Entretanto, é possível que a *árvore de possibilidades,* que foi trabalhada por meio do *software* com esse aluno, tenha forte influência na utilização de *diagramas* como representação para resolução de problemas combinatórios.

Dessa forma, destaca-se o uso do *diagrama* no pós-teste posterior, salienta-se, todavia, que essa representação não havia sido utilizada no pós-teste imediato. Entende-se que esse tipo de representação é possível de responder de forma bem sucedida os problemas combinatórios, entretanto, no uso desse tipo de representação, é necessário que o aluno organize, ou seja, sistematize seu pensamento, de modo que ele não se perca na contagem dos subconjuntos. A seguir, na Figura 19 é possível visualizar um *diagrama* formado utilizando o próprio enunciado do problema. Assim como no presente estudo, Pessoa (2009), em seu estudo de sondagem, também destaca que, nos anos iniciais, a de *árvore de possibilidades* e o diagrama também possuem percentuais muito baixos de utilização.

Figura 19: *Resposta correta* do Aluno 38 do G1 (*Árbol*) para a terceira questão do no pós-teste posterior, por meio de Diagrama.



3. Felipe, Sandra, Carla e Francisco vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

Resposta: 6 Maneiras diferentes

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Na Tabela 11 podem ser visualizados os percentuais de uso das representações simbólicas apresentadas pelos alunos do Grupo 2 – Lápis e Papel (que participaram da intervenção com construção escrita de *árvores de possibilidades*) da presente pesquisa no pré-teste, no pós-teste imediato e no pós-teste posterior.

Assim como no Grupo 1, é possível notar que, também no Grupo 2, inicialmente, quando os alunos ainda não haviam participado de intervenções envolvendo o raciocínio combinatório, os alunos em sua maioria, não explicitaram o tipo de representação simbólica ou a estratégia de resolução do problema em questão.

Quando os alunos explicitavam uma representação simbólica, utilizavam a *listagem de possibilidades*. A *listagem* apresentada pelos alunos, no pré-teste, normalmente não relacionava a situação com o pensamento combinatório; não se percebia que pode haver mais de uma possibilidade (Ver Figura 20), ou seja, o aluno parece ter escolhido o seu caso preferido; ou não apresentava sistematização.

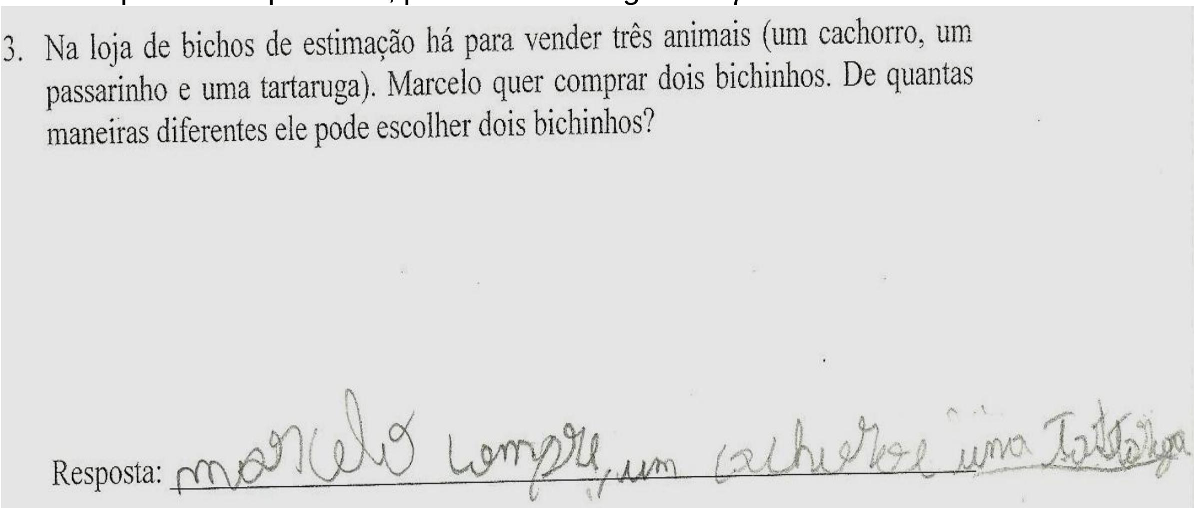
Ainda observando a Tabela 11 é possível notar que o percentual de alunos, que não *explicita um tipo de representação simbólica ou estratégia* e dos alunos que *listam as possibilidades* diminui após a intervenção, surgindo um baixo percentual de alunos que utilizam a *adição/subtração*. Acrescenta-se quanto ao uso da *listagem*, entretanto, que, apesar da diminuição do seu uso, quando esta era utilizada, houve uma melhora qualitativa das produções, como é possível visualizar na Figura 21.

Tabela 11: Percentual de representações simbólicas utilizadas por etapa da pesquisa pelo G2 (Lápis e Papel).

		Não Explicitou representação ou Estratégia	Adição/Subtração	Desenho	Árvore de Possibilidades	Diagrama/Quadro	*Listagem de possibilidades*	Adição Inadequada de Parcelas repetidas	Adição Adequada de Parcelas repetidas	Multiplicação Inadequada	Multiplicação Adequada	Percepção da Regularidade
G2 Pré-teste	PC1	**70**	0	0	0	0	30	0	0	0	0	0
	PC2	**80**	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0
	C1	**50**	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0
	C2	**50**	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0
	A1	**70**	0	0	0	0	30	0	0	0	0	0
	A2	**60**	0	0	0	0	40	0	0	0	0	0
	P1	**70**	0	0	0	0	**30**	0	0	0	0	0
	P2	**20**	0	0	0	0	**80**	0	0	0	0	0
G2 Pós-teste 1	PC1	**20**	20	0	**40**	0	**10**	0	0	0	10	0
	PC2	**10**	10	0	**60**	0	**10**	0	10	0	0	0
	C1	**10**	10	0	**60**	0	**10**	0	0	10	0	0
	C2	**20**	10	0	**50**	0	**0**	20	0	0	0	0
	A1	**10**	10	0	**30**	0	**50**	0	0	0	0	0
	A2	**10**	20	0	**40**	0	**20**	0	0	0	0	10
	P1	**10**	10	20	**20**	0	**30**	0	0	10	0	0
	P2	**40**	0	20	**10**	0	**20**	10	0	0	0	0
G2 Pós-teste 2	PC1	**33,3**	0	0	**44,4**	11,1	**11,1**	0	0	0	0	0
	PC1	**33,3**	0	0	**55,5**	11,1	**0**	0	0	0	0	0
	C1	**33,3**	0	0	**44,4**	11,1	**11,1**	0	0	0	0	0
	C2	**33,3**	0	0	**55,5**	11,1	**0**	0	0	0	0	0
	A1	**33,3**	0	0	**33,3**	11,1	**22,2**	0	0	0	0	0
	A2	**33,3**	0	0	**44,4**	11,1	**11,1**	0	0	0	0	0
	P1	**33,3**	0	0	**11,1**	11,1	**44,4**	0	0	0	0	0
	P2	**22,2**	0	0	**22,2**	11,1	**33,3**	0	0	0	0	11,1

G2: Grupo 2 (Lápis e Papel); PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2; A1: *Arranjo* 1; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 20: *Resposta parcialmente correta 1* do Aluno 33 do G2 (Lápis e Papel) para a terceira questão do pré-teste, por meio de *listagem de possibilidades*.

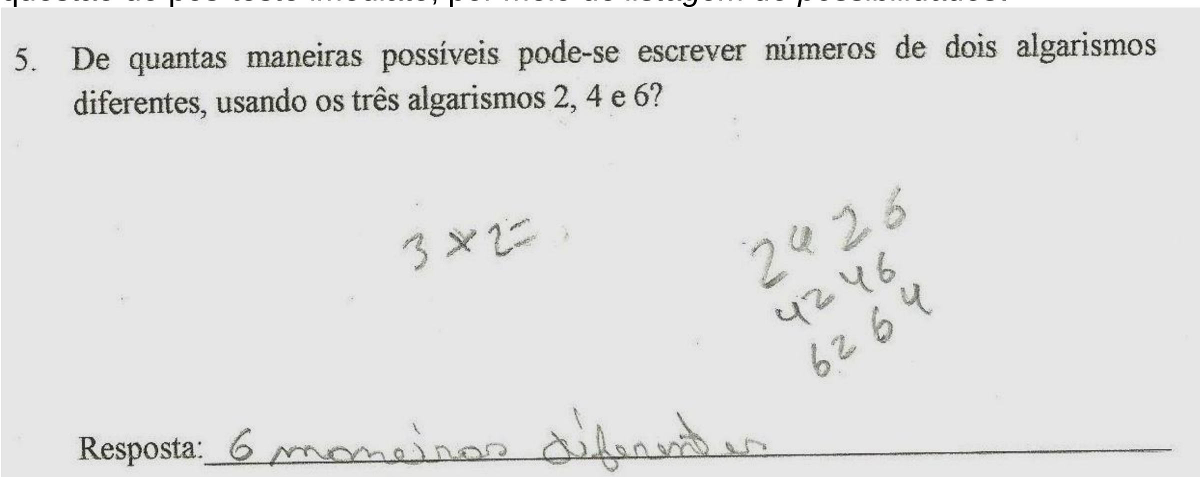


3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

Resposta: marcelo compru, um cachorro e uma Tartaruga

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 21: *Resposta correta* do Aluno 30 do G2 (Lápis e Papel) para a quinta questão do pós-teste imediato, por meio de *listagem de possibilidades*.



5. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os três algarismos 2, 4 e 6?

3 × 2 =

24 26
42 46
62 64

Resposta: 6 maneiras diferentes

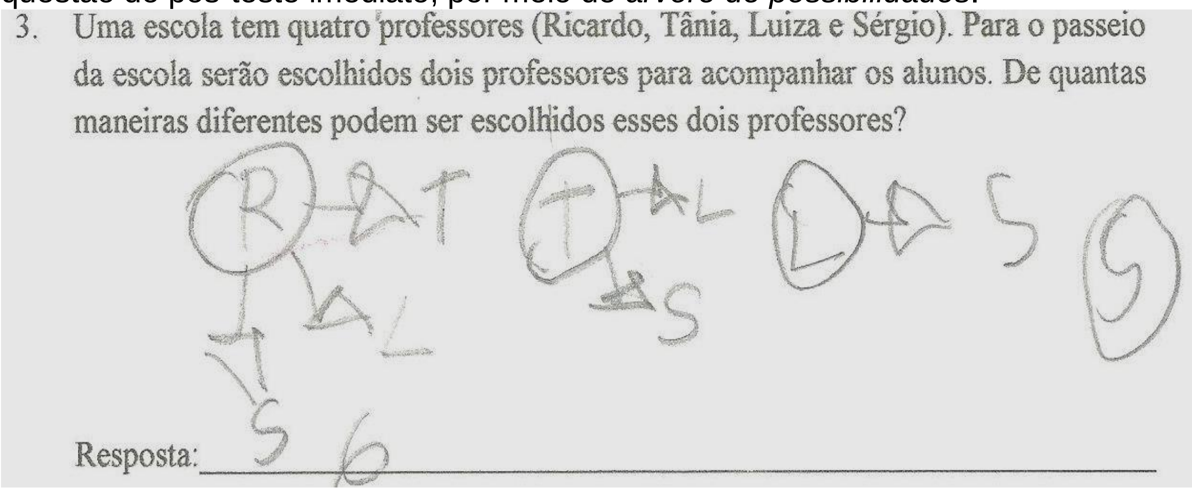
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Além disso, a utilização da *árvore de possibilidades* passa a ser predominante neste grupo, ao contrário do que acontece no Grupo 1. Destaca-se, entretanto, que essa representação foi menos utilizada nas situações de *permutação*, o que pode ser indicativo da maior dificuldade em realizar um diagrama de árvore que tenha mais níveis (ramos) em sua construção.

Também há indicativo de utilização de outros tipos de representação, como a *o desenho, diagrama, adição inadequada de parcelas repetidas, adição adequada de parcelas repetidas, multiplicação inadequada, multiplicação adequada e percepção da regularidade.* Chama-se atenção de que a *adição/subtração*, o *desenho*, a *adição inadequada de parcelas repetidas,* a *adição adequada de parcelas repetidas,* a *multiplicação inadequada* e a *multiplicação adequada* aparecem apenas no pós-teste imediato e que o *diagrama* aparece apenas no pós-teste posterior. A escolha pela utilização do *diagrama* pode estar relacionada ao fato desta se assemelhar, de forma mais simplificada, com o diagrama de *árvore de possibilidades*.

Essas representações, após a intervenção apresentavam indícios de pensamento combinatório, o que não aconteceu com frequência no pré-teste. Na Figura 22 é possível observar o avanço qualitativo do Aluno 33, em comparação com o pré-teste deste mesmo aluno (Figura 20), nas respostas, quando ele resolveu corretamente o problema no pós-teste imediato, por meio de *árvore de possibilidades*, representação trabalhada durante a intervenção. Esse mesmo aluno, no pós-teste posterior, utilizou a mesma representação simbólica para resolução do referente problema de *combinação* (Ver Figura 23).

Figura 22: *Resposta correta* do Aluno 33 do G2 (Lápis e Papel) para a terceira questão do pós-teste imediato, por meio de *árvore de possibilidades*.

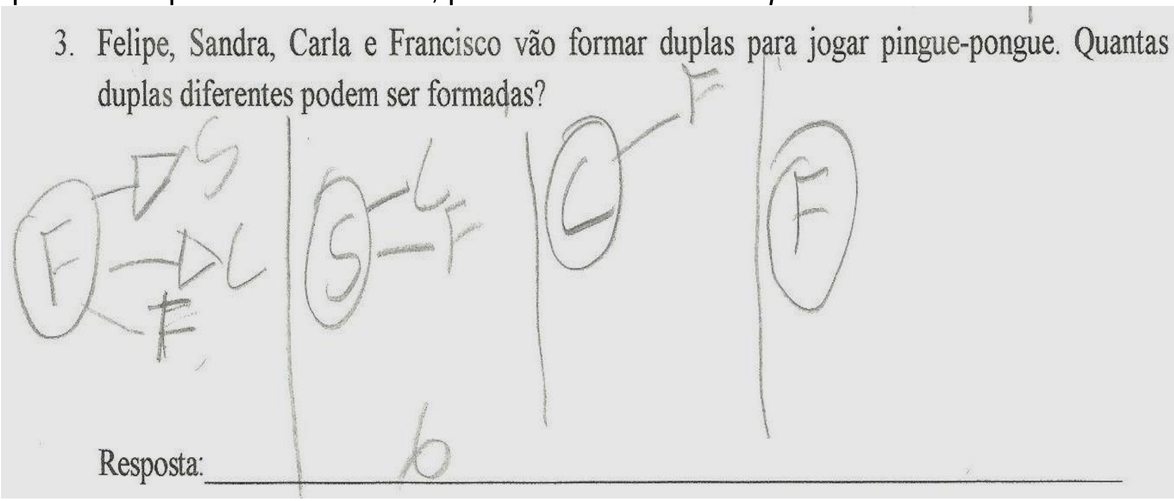


Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Além desses tipos de representação, salienta-se que alguns alunos perceberam a regularidade do problema e generalizam suas respostas, ou seja, como pode ser visto no exemplo do Aluno 7 (Figura 24), em que ele percebeu que para números de quatro algarismos iniciados com certo algarismo há seis possibilidades. Se há quatro algarismos que podem iniciar os números para um algarismo, é possível generalizar que para todos os demais também haverá seis possibilidades, permitindo assim, multiplicar o número de algarismos (quatro) pelo número de possibilidades por algarismo (seis). A *percepção da regularidade* normalmente é realizada após o aluno adotar uma *listagem* ou *árvore de possibilidades* sistemáticas, entretanto, assim como no estudo de Pessoa e Santos

(2012) são poucos os alunos do 5º ano do Ensino fundamental que fazem uso dessa generalização.

Figura 23: *Resposta correta* do Aluno 33 do G2 (Lápis e Papel) para a terceira questão do pós-teste imediato, por meio de *árvore de possibilidades*.

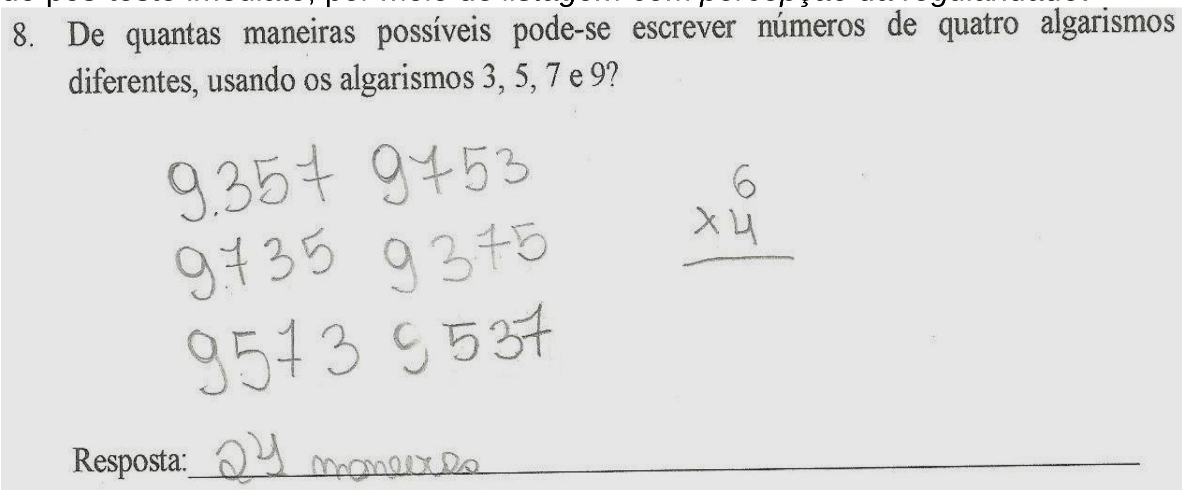


3. Felipe, Sandra, Carla e Francisco vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

Resposta: 6

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 24: *Resposta correta* do Aluno 7 do G2 (Lápis e Papel) para a oitava questão do pós-teste imediato, por meio de *listagem* com *percepção da regularidade*.



8. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5, 7 e 9?

9357 9753
9735 9375
9573 9537

6×4

Resposta: 24 maneiras

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Na Tabela 12 podem ser visualizados os percentuais de uso das representações apresentadas pelos alunos do Grupo 3 - Controle assistido (que participaram da intervenção em problemas multiplicativos não combinatórios por meio de *desenhos*) da presente pesquisa no pré-teste, no pós-teste imediato e no pós-teste posterior.

Tabela 12: Percentual de representações simbólicas utilizadas por etapa da pesquisa pelo G3 (Controle – Estruturas Multiplicativas).

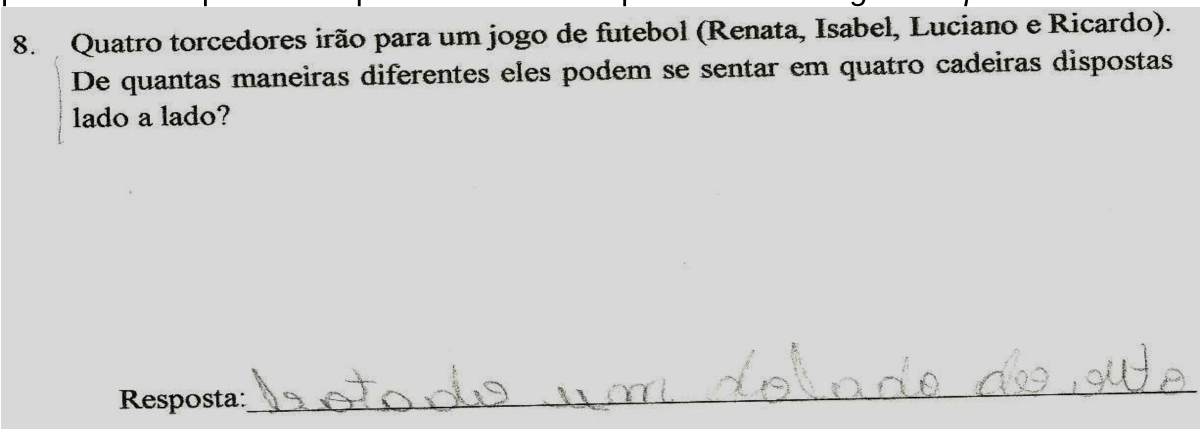
		Não Explicitou representação ou Estratégia	Adição/Subtração	Desenho	Árvore de Possibilidades	Diagrama/Quadro	*Listagem de possibilidades*	Adição Inadequada de Parcelas repetidas	Adição Adequada de Parcelas repetidas	Multiplicação Inadequada	Multiplicação Adequada	Percepção da Regularidade
G3 Pré-teste	PC1	**50**	**30**	0	0	0	**10**	0	0	0	10	0
	PC2	**40**	**30**	0	0	0	**30**	0	0	0	0	0
	C1	**20**	**20**	0	0	0	**50**	0	0	10	0	0
	C2	**10**	**20**	0	0	0	**60**	0	0	10	0	0
	A1	**50**	**10**	0	0	0	**40**	0	0	0	0	0
	A2	**40**	**10**	0	0	0	**50**	0	0	0	0	0
	P1	**50**	**0**	0	0	0	**50**	0	0	0	0	0
	P2	**40**	**0**	0	0	0	**60**	0	0	0	0	0
G3 Pós – teste 1	PC1	**20**	**20**	10	0	0	**40**	0	0	0	10	0
	PC2	**30**	**20**	10	0	0	**30**	0	0	0	10	0
	C1	**20**	**20**	0	0	0	**50**	0	0	10	0	0
	C2	**80**	**10**	0	0	0	**0**	0	0	10	0	0
	A1	**30**	**20**	0	0	0	**50**	0	0	0	0	0
	A2	**60**	**10**	0	0	0	**30**	0	0	0	0	0
	P1	**90**	**10**	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0
	P2	**80**	**20**	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0
G3 Pós-teste 2	PC1	**50**	20	10	0	0	**20**	0	0	0	0	0
	PC1	**90**	0	0	0	0	**10**	0	0	0	0	0
	C1	**80**	0	0	0	0	**20**	0	0	0	0	0
	C2	**100**	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0
	A1	**80**	0	0	0	0	**20**	0	0	0	0	0
	A2	**50**	0	0	0	0	**50**	0	0	0	0	0
	P1	**50**	0	0	0	0	**50**	0	0	0	0	0
	P2	**40**	0	0	0	0	**60**	0	0	0	0	0

G3: Grupo 3 (Controle Assistido); PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2; A1: *Arranjo* 1; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Nesta tabela é possível observar que os alunos que não participaram de intervenção em problemas combinatórios não aumentam a variedade de representações simbólicas apresentadas, ou seja, permanecem apresentando *adição/subtração*, *listagem de possibilidades*, *multiplicação inadequada* e *adequada*. A única representação que passa a ser utilizada somente após a intervenção é o *desenho*, que foi a representação utilizada por esse grupo na intervenção. Destaca-se, entretanto, que, tanto no pré-teste, como nos pós-teste que a frequência de alunos que *não explicitam um tipo de representação ou estratégia* e de alunos que utilizam a *adição/subtração* e *listagem de possibilidades* permanecem com os percentuais elevados.

Diferentemente dos grupos experimentais, nos quais os alunos melhoram qualitativamente suas *listagens* e, além disso, apresentam *árvores de possibilidades*, *diagramas*, *soma de parcelas repetidas* e, até mesmo *percebem a regularidade* da situação, os alunos que fizeram parte do Grupo Controle Assistido não variam as representações utilizadas e permanecem utilizando a *listagem* que não apresenta indícios de pensamento combinatório, como é possível visualizar na Figura 25.

Figura 25: *Resposta errada* do Aluno 29 do G3 (Controle - Estruturas Multiplicativas) para a oitava questão do pós-teste imediato por meio de *listagem de possibilidades*.


8. Quatro torcedores irão para um jogo de futebol (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo). De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar em quatro cadeiras dispostas lado a lado?

Resposta: ledado um dolado do outo

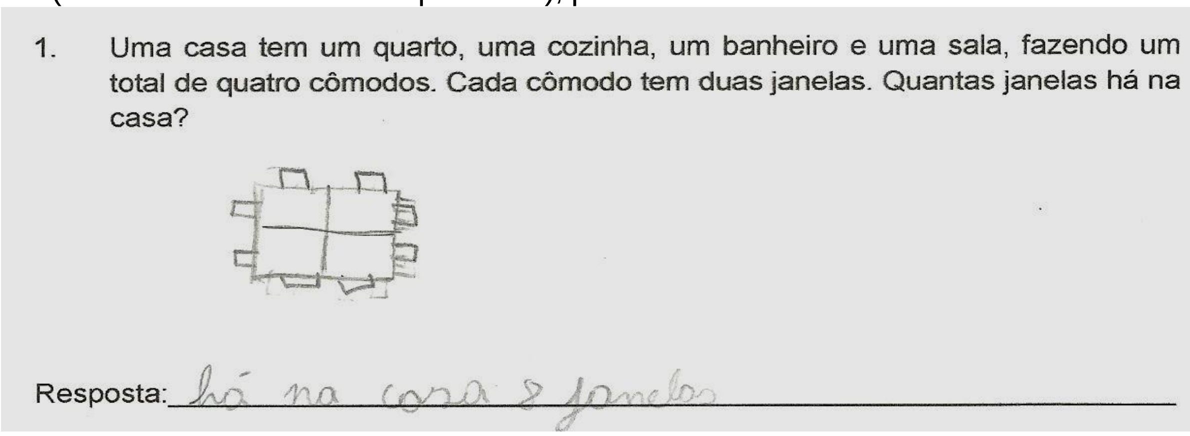
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Apesar da pouca variedade de representações simbólicas utilizadas, um dos alunos respondeu as situações de *produto cartesiano* utilizando o *desenho*, que foi o tipo de representação incentivada durante a intervenção. Um dos tipos de problemas discutidos foi os de *multiplicação* relacionados, por Nunens e Bryant (1997) com a proporcionalidade. Assim como a *multiplicação*, os problemas de *produto cartesiano* também estão relacionados com a proporcionalidade, segundo Nunes e Bryant

(1997). Assim, as situações de *multiplicação* podem ter influenciado esse aluno na resolução dos problemas de *produto cartesiano.*

Assim, é possível observar na Figura 26 a resolução do Aluno 31, para o primeiro problema da intervenção por meio de desenho, como foi incentivado pela pesquisadora durante a intervenção. Nessa resolução ele desenhou os quatro cômodos da casa e colocou duas janelas em cada cômodo, fazendo um total de oito janelas. Entretanto, este aluno preferiu, na segunda situação da intervenção, do tipo de problema *multiplicação,* em que se é perguntado quantas rodas há em seis carros, não desenhar todos os carros, fazendo o desenho de apenas um e indicando que se em um carro há quatro rodas, em seis carros há 24 rodas, como é possível visualizar na Figura 27.

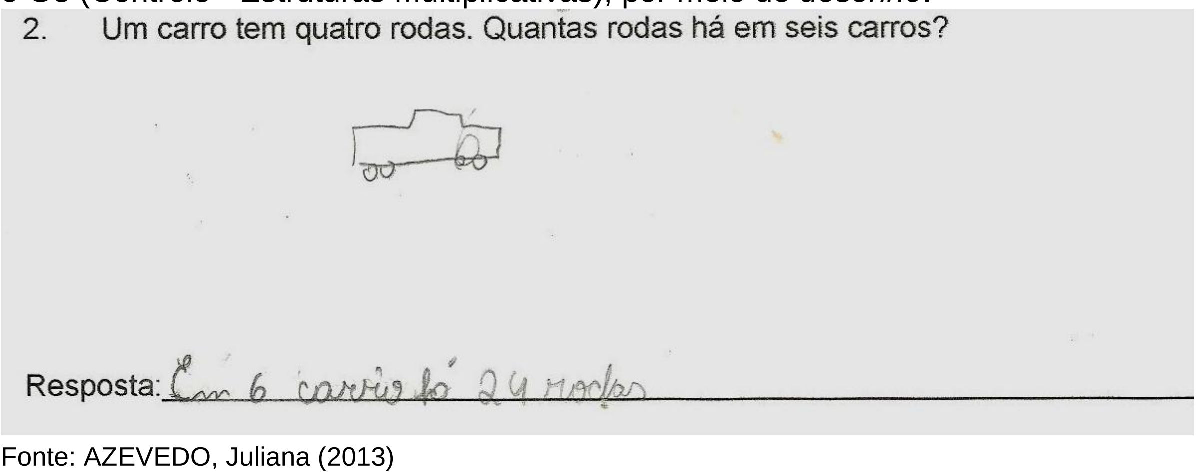
Figura 26: *Resposta correta* do Aluno 31 para a primeira questão da intervenção para o G3 (Controle - Estruturas Multiplicativas), por meio de *desenho*.


1. Uma casa tem um quarto, uma cozinha, um banheiro e uma sala, fazendo um total de quatro cômodos. Cada cômodo tem duas janelas. Quantas janelas há na casa?

Resposta: há na casa 8 janelas

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 27: *Resposta correta* do Aluno 31 para segunda questão da intervenção para o G3 (Controle - Estruturas Multiplicativas), por meio de *desenho*.

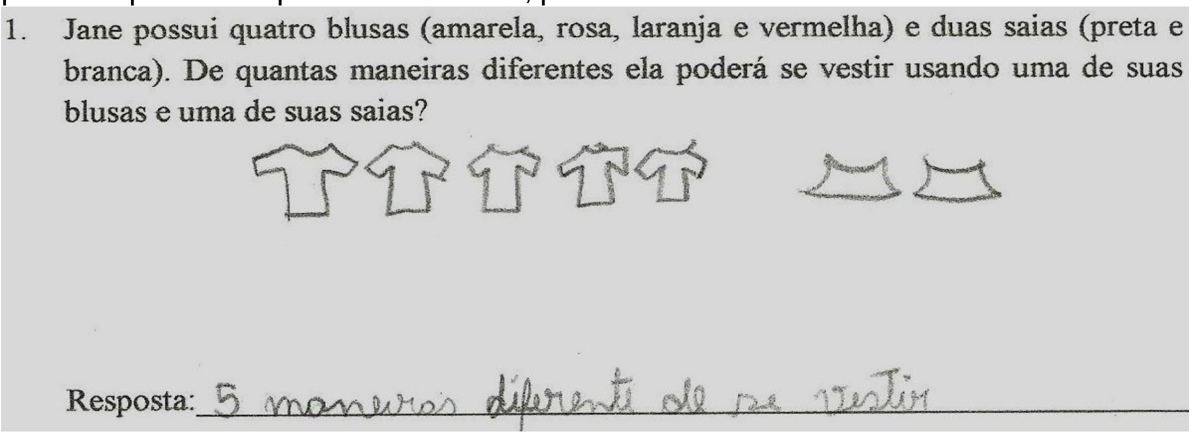

2. Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas há em seis carros?

Resposta: Em 6 carros há 24 rodas

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Provavelmente, influenciado pela intervenção, como já mencionado anteriormente, o mesmo aluno resolveu a primeira situação de *produto cartesiano* do pós-teste imediato por meio de desenho, como pode ser observado na Figura 28. Destaca-se que, novamente, no pós-teste posterior, o mesmo aluno tentou utilizar esse tipo de representação na sua resolução, conseguindo, desta vez, listar algumas possibilidades de resolução da situação, como é possível visualizar na Figura 29.

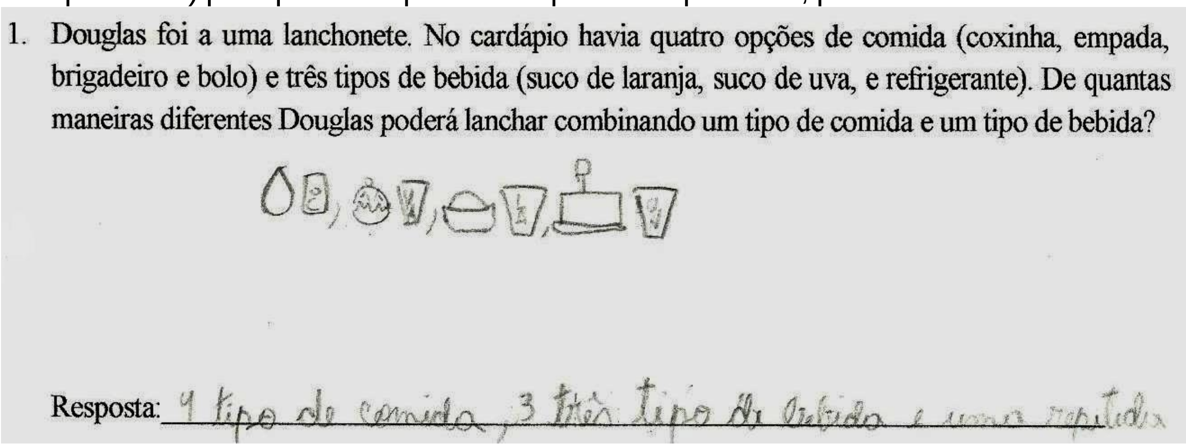
Figura 28: *Resposta errada* do Aluno 31 do G3 (Controle - Estruturas Multiplicativas) para primeira questão do pós-teste imediato, por meio de *desenho*.


1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?

Resposta: 5 maneiras diferente de se vestir

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 29: *Resposta parcialmente correta 2* do Aluno 31 do G3 (Controle - Estruturas Multiplicativas) para primeira questão do pós-teste posterior, por meio de *desenho*.


1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia quatro opções de comida (coxinha, empada, brigadeiro e bolo) e três tipos de bebida (suco de laranja, suco de uva, e refrigerante). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida e um tipo de bebida?

Resposta: 4 tipo de comida, 3 três tipo de bebida e uma repetida

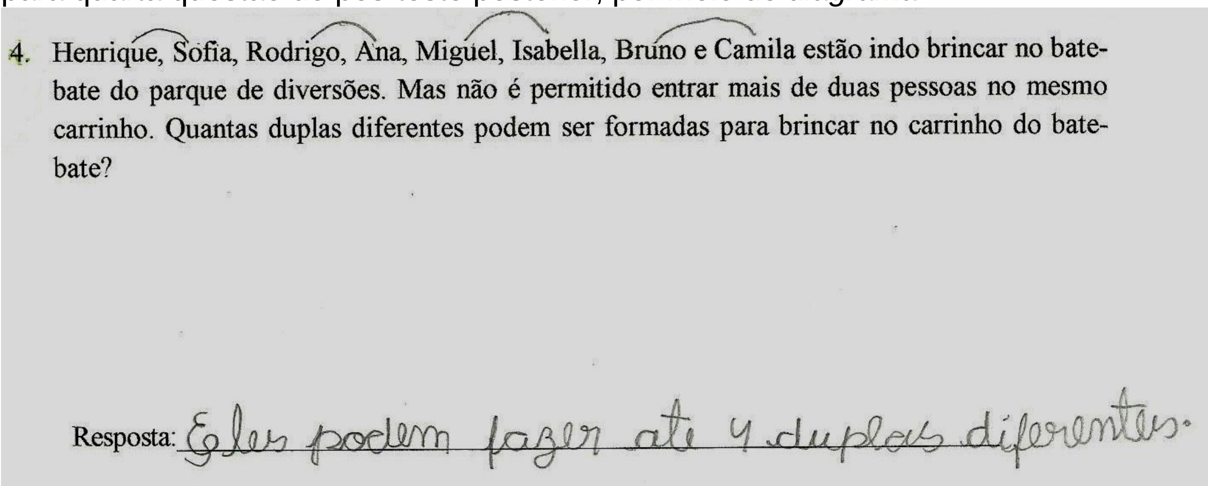
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Assim, é possível afirmar que, trabalhar problemas multiplicativos não combinatórios não é suficiente para desenvolver o raciocínio combinatório de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Também se pode destacar que trabalhar problemas multiplicativos por meio de *desenho* não parece ter incentivado os alunos a utilizarem diversificadas representações para a solução de problemas combinatórios. Chama-se a atenção para o fato de que o *desenho* é uma forma de representação possível de ser utilizada para a solução de problemas combinatórios, mas não parece evidente a todos os alunos como o desenho pode ser utilizado nessas situações.

Na Tabela 13 podem ser visualizados os percentuais de uso das representações apresentadas pelos alunos do Grupo 4 - Controle desassistido (que não participaram de intervenção) da presente pesquisa no pré-teste, no pós-teste imediato e no pós-teste posterior.

Assim como o exposto para o Grupo 3 (Controle Assistido), o Grupo 4 (Controle Desassistido) também permaneceu com altos índices de percentual nas categorias *não explicitou tipo de representação ou estratégia*; *Adição*/*Subtração* e *Listagem de possibilidades*. Além disso, alguns alunos utilizaram o *diagrama* (ver Figura 30), a *adição adequada de parcelas repetidas* e a *multiplicação inadequada* (ver Figura 31) e *adequada*.

Figura 30: *Resposta parcialmente correta 2* do Aluno 5 do G4 (Controle - desassistido) para quarta questão do pós-teste posterior, por meio de *diagrama*.

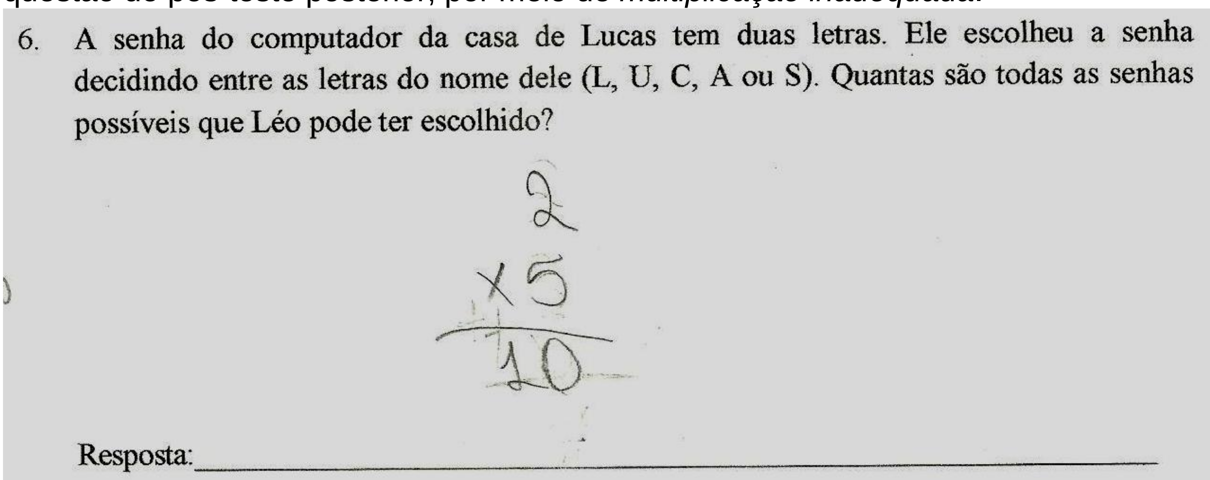


4. Henrique, Sofia, Rodrigo, Ana, Miguel, Isabella, Bruno e Camila estão indo brincar no bate-bate do parque de diversões. Mas não é permitido entrar mais de duas pessoas no mesmo carrinho. Quantas duplas diferentes podem ser formadas para brincar no carrinho do bate-bate?

Resposta: Eles podem fazer até 4 duplas diferentes.

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 31: *Resposta errada* do Aluno 17 do G4 (Controle - desassistido) para quarta questão do pós-teste posterior, por meio de *multiplicação inadequada*.



6. A senha do computador da casa de Lucas tem duas letras. Ele escolheu a senha decidindo entre as letras do nome dele (L, U, C, A ou S). Quantas são todas as senhas possíveis que Léo pode ter escolhido?

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 5 \\ \hline 10 \end{array}$$

Resposta:

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Tabela 13: Percentual de representações simbólicas utilizadas por etapa da pesquisa pelo G4 (Controle – desassistido).

		Não Explicitou representação ou Estratégia	Adição/Subtração	Desenho	Árvore de Possibilidades	Diagrama/Quadro	*Listagem de possibilidades*	Adição Inadequada de Parcelas repetidas	Adição Adequada de Parcelas repetidas	Multiplicação Inadequada	Multiplicação Adequada	Percepção da Regularidade
G4 Pré-teste	PC1	**40**	**10**	0	0	0	**20**	0	0	0	30	0
	PC2	**30**	**40**	0	0	0	**30**	0	0	0	0	0
	C1	**40**	**30**	0	0	0	**30**	0	0	0	0	0
	C2	**40**	0	0	0	0	**40**	0	0	20	0	0
	A1	**40**	0	0	0	0	**40**	0	0	20	0	0
	A2	**30**	0	0	0	0	**50**	0	0	20	0	0
	P1	**40**	**20**	0	0	0	**40**	0	0	0	0	0
	P2	**60**	0	0	0	0	**40**	0	0	0	0	0
G4 Pós-teste 1	PC1	**50**	**10**	0	0	0	**40**	0	0	0	0	0
	PC2	**50**	**10**	0	0	0	**40**	0	0	0	0	0
	C1	**50**	0	0	0	0	**30**	0	0	20	0	0
	C2	**70**	**10**	0	0	0	**20**	0	0	0	0	0
	A1	**60**	**20**	0	0	0	**20**	0	0	0	0	0
	A2	**50**	**20**	0	0	0	**30**	0	0	0	0	0
	P1	**70**	**10**	0	0	0	**20**	0	0	0	0	0
	P2	**70**	**20**	0	0	0	**10**	0	0	0	0	0
G4 Pós-teste 2	PC1	**40**	**20**	0	0	0	**20**	0	10	0	10	0
	PC2	**50**	**30**	0	0	0	**10**	0	0	0	10	0
	C1	**60**	**10**	0	0	10	**20**	0	0	0	0	0
	C2	**70**	**10**	0	0	20	**0**	0	0	0	0	0
	A1	**50**	**30**	0	0	0	**20**	0	0	0	0	0
	A2	**50**	**10**	0	0	0	**30**	0	0	10	0	0
	P1	**70**	0	0	0	0	**30**	0	0	0	0	0
	P2	**50**	0	0	0	0	**50**	0	0	0	0	0

G3: Grupo 3 (Controle Assistido); PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2; A1: *Arranjo* 1; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Nota-se, com isso, que não trabalhar problemas combinatórios desde os anos iniciais parece não favorecer que os alunos desenvolvam de maneira expressiva esse raciocínio. Trabalhar problemas multiplicativos não combinatórios e não trabalhar nenhum tipo de problema multiplicativo, deixando que o passar do tempo se encarregue do desenvolvimento de problemas combinatórios, não parece, portanto, favorecer o aprendizado deste conteúdo.

Assim, é possível destacar que, dos tipos de representação utilizados, a *listagem de possibilidades* foi a mais frequente na análise do total de participantes da presente pesquisa. Para os alunos que fizeram parte de grupos experimentais, houve um aumento na variedade de representações simbólicas possíveis de ser utilizadas, além de seu avanço qualitativo.

Nesta análise destaca-se que a *listagem de possibilidades* é a representação simbólica que os alunos apresentaram a maior preferência no momento da resolução do pré-teste. Além disso, também é possível constatar que, apesar das intervenções dos grupos experimentais utilizarem a *árvore de possibilidades*, os alunos desses grupos também continuam utilizando essa representação simbólica para a resolução dos problemas combinatórios. Vale salientar ainda que esse tipo de representação continuou sendo o preferido para os alunos do Grupo 1 (*Árbol*). Já os alunos do Grupo 2 (Lápis e papel) preferiram utilizar a *árvore de possibilidades*, na resolução dos problemas dos pós-testes imediato e posterior.

Barreto e Borba (2011) destacam em seu estudo com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) que a *listagem* foi o tipo de representação mais utilizada na resolução de problemas combinatórios pelos estudantes que fizeram parte da pesquisa, mesmo após a intervenção utilizando a *árvore de possibilidades*. Ressalta-se, portanto, a preferência pela utilização dessa representação tanto por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental regular, quanto por alunos da EJA. Além disso, esses alunos resolvem problemas combinatórios principalmente de forma não sistemática, o que ocasiona, na maioria das vezes, no não esgotamento de todas as possibilidades da situação proposta. Esse panorama também foi observado no pré-teste do presente estudo.

Ressalta-se, entretanto, que, nos pós-testes imediato e posterior dos grupos experimentais, o uso da *listagem de possibilidades* passou a ser mais sistematizado, ou seja, antes do processo de intervenção, as listagens, em sua maioria, eram desorganizadas, dificultando o raciocínio acerca da existência das variadas possibilidades. Além disso, a *listagem*, anteriormente, não apresentava relação com o raciocínio combinatório, ou, quando apresentava, estava ligada à escolha de apenas uma possibilidade.

Também é possível salientar o aparecimento de problemas sendo resolvidos por meio de *árvore de possibilidades*. Percebe-se que, anteriormente, tal tipo de representação simbólica não era utilizado pelos alunos participantes dessa pesquisa, se fazendo presentes, portanto, após o processo de intervenção.

Observa-se que, em geral, os alunos dos grupos de intervenção em Combinatória desenvolveram qualitativamente as representações apresentadas, uma vez que há maior sistematização nas resoluções das situações. Além disso, os alunos, após a intervenção, passaram a aceitar como possível a escolha de diferentes possibilidades. Dessa forma, acredita-se que, chamar atenção para a diferença entre o real e o possível, ou seja, enfatizar que temos diversas possibilidades de escolha antes de tomar a decisão de que opção se quer escolher, instiga nos alunos a possibilidade de levantar hipóteses e incentiva o pensamento crítico que todo aluno precisa desenvolver.

Apesar da *árvore de possibilidades* não ser o tipo de representação simbólica mais utilizada pelos alunos do Grupo 1 (*Árbol*), o seu uso na intervenção parece ter feito com que eles entendessem melhor cada tipo de situação combinatória e, assim, fizeram melhor uso de *listagens de possibilidades* nos pós-testes, uma vez que houve maior organização nas respostas por *listagens* apresentada pelos alunos. Desse modo, a intervenção possibilitou que se fizesse melhor uso das representações simbólicas, em particular das *listagens* como forma de refletir sobre relações combinatórias.

A partir das figuras apresentadas verifica-se que, ambos os grupos que participaram da intervenção sobre Combinatória se saíram bem nas suas resoluções, com avanços quantitativos e qualitativos.

Nas questões de *produto cartesiano e combinação*, se nota esse avanço qualitativo nas resoluções, pois, antes, as crianças, quando relacionavam a situação com um pensamento combinatório, não percebiam que havia mais possibilidades de subconjuntos, escolhendo, por vezes, apenas uma possibilidade, e, após a intervenção, os alunos enumeraram mais possibilidades, conseguindo, por vezes, esgotar todas elas.

Observa-se também a melhora qualitativa no desempenho dos alunos participantes dos grupos experimentais nas questões de *arranjo*, uma vez que, após a intervenção houve maior enumeração de possibilidades e o aparecimento de acertos totais (esgotamento das possibilidades).

Já nas questões de *permutação*, o avanço qualitativo aconteceu, entretanto, com índices menores quando comparado aos outros significados da Combinatória. Ainda foi mais frequente a escolha de apenas uma possibilidade ou de possibilidades em que se limitam os casos ao número de elementos de uma das quantidades citadas no problema, indicando que os alunos ainda não haviam percebido que é possível formar mais subconjuntos utilizando todos os elementos de um conjunto dado, apenas permutando a ordem desses elementos.

Além disso, percebe-se que alguns alunos desta pesquisa apresentaram dificuldades em diferenciar *arranjos* e *combinações*, mesmo após a intervenção. Assim, houve alunos que responderam *arranjos* adotando o invariante de ordem das combinações, ou seja, considerando que a ordem dos elementos no subconjunto não gera novas possibilidades, assim como já foi apontado no estudo de Borba, Pessoa e Rocha (2012).

Assim, com a análise e discussões apresentadas neste capítulo, acredita-se que há fortes evidências de que as intervenções realizadas com os grupos experimentais possibilitaram grandes e importantes avanços nos raciocínios combinatórios dos alunos. Evidencia-se que alunos do 5º ano do Ensino Fundamental (em torno de 10 anos) que tenham acesso a esse tipo de trabalho em sala de aula, são capazes de desenvolver esse tipo de raciocínio de forma sistemática se forem incentivados para que isso aconteça. Diferentemente do que foi apontado por Inhelder e Piaget (1976), que afirmam que resoluções sistemáticas espontâneas só começam a ser efetuadas por alunos entre 11 e 15 anos (*combinação*) e 14-15 anos (*arranjo* e *permutação*), sendo possível, portanto, a partir dos resultados desse estudo, antecipar a idade em que acontecem essas sistematizações, por meio de intervenções.

No capítulo a seguir serão apresentadas considerações relativas aos principais resultados obtidos e as implicações educacionais sugeridas a partir do presente estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do que foi apresentado e analisado, pode-se concluir que os alunos da presente pesquisa, participantes dos grupos de intervenção em Combinatória, com uso de *lápis e papel* ou com uso do *software Diagramas de Árbol*, avançaram em seus raciocínios combinatórios. Os dois grupos demonstraram desempenhos significativamente melhores nos pós-testes imediato e posterior, comparado ao teste respondido antes da intervenção.

Salienta-se, porém, que o Grupo 2 (*lápis e papel*), apesar de não apresentar diferenças significativas na comparação com o Grupo 1 (*Árbol*), demonstrou um maior avanço, isso porque foram identificadas diferenças significativas quando o Grupo 2 (*lápis e papel)* foi comparado com ambos os grupos controle no pós-teste imediato e posterior, enquanto que o Grupo 1 (*Árbol*) apresentou diferenças significativas apenas na comparação com o Grupo 4 (controle desassistido) no pós-teste imediato e não apresentou diferenças significativas na comparação com ambos os grupos controle no pós-teste posterior.

Isso revela que o trabalho com *árvores de possibilidades* pode resultar em eficiente estratégia de ensino com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O avanço se evidencia mais quando os alunos são avaliados na mesma representação em que foram trabalhadas as situações, uma vez que, os alunos do Grupo 1 (*Árbol*) precisavam ainda transformar o conhecimento aprendido no *software* para a representação escrita utilizada no pós-teste. Contudo, entende-se que, representar a *árvore de possibilidades* em diferentes meios, virtual e escrito, por exemplo, pode ser um aspecto positivo para o aprendizado da Combinatória. É preciso, entretanto, perceber que nem sempre será possível para os alunos representar por escrito o que aprenderam virtualmente. Conclui-se que, possivelmente, o trabalho com o *software Diagramas de Árbol*, articulado com a representação escrita, possa ser um diferencial para a aprendizagem de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Nota-se, ainda, que estudar problemas multiplicativos que não envolvem o raciocínio combinatório não é suficiente para desenvolvê-lo, uma vez que o grupo que não resolveu problemas combinatórios não obteve avanços ao comparar seus resultados do pré-teste com os resultados do pós-teste. Além disso, pode-se observar que, tanto o Grupo 3 (controle assistido) como o Grupo 4 (controle desassistido) não avançaram em seus raciocínios combinatórios, levando à conclusão que, estudar problemas multiplicativos, ou não estudar nenhum tipo de assunto específico, parecem não facilitar o aprendizado da Combinatória.

À luz da teoria de Vergnaud, foi possível realizar, nesse estudo, análises voltadas para as situações combinatórias, seus significados, seus invariantes e as representações simbólicas utilizadas.

Quanto aos significados, foi observado, que nos pós-testes imediato e posterior os alunos tiveram mais facilidade para responder os problemas de *produto cartesiano*. Quanto à maior dificuldade, destacam-se os problemas de *permutação,* uma vez que os alunos continuaram apresentando baixas médias de desempenho nesse significado, principalmente no pós-teste imediato.

Nos estudos de sondagem realizados por Pessoa e Borba (2009), e Correa e Oliveira (2011), as questões de *permutação* foram as que os alunos apresentaram maior dificuldade na resolução. Ressalta-se que, no presente estudo, no momento do pré-teste (sondagem) os alunos apresentavam dificuldades em todos os tipos de problemas, entretanto, a maior dificuldade não foi com os problemas de *permutação*. Em contrapartida, após a intervenção esse tipo de problema passou a ser de mais difícil resolução para os alunos. Este resultado está em conformidade com o estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011, p. 9), em que após a intervenção realizada os alunos ainda apresentavam dificuldade neste tipo de problema. No estudo as autoras destacam que "[...] essa dificuldade pode ser consequência da grande quantidade de ramos apresentada pelo *Software Diagramas de Árbol* para a solução da questão, o que dificulta a visualização do total de possibilidades.". Entretanto, no presente estudo constatou-se que, a dificuldade pode estar além da visualização das possibilidades proporcionada pelo *software*. Esta conclusão é efetuada pelo fato de que a dificuldade com *permutação* não é exclusiva dos alunos que fizeram uso do *software*, e sim, também é apresentada pelos alunos que utilizaram o *lápis e papel* na resolução dos problemas.

Também se pode perceber a importância de se chamar a atenção para os invariantes (relações e propriedades) de cada situação combinatória, pois se acredita que, somente assim, os alunos terão maior compreensão dos problemas combinatórios. Nesse sentido se evidencia a necessidade de formação continuada sobre a Combinatória para os professores que irão trabalhar este conteúdo em sala de aula. No estudo, foi possível perceber ainda que, em geral, os alunos não apresentavam dificuldades quanto ao invariante relacionado com a escolha, sendo, portanto, o invariante relacionado à ordenação dos elementos de mais difícil entendimento para os alunos. Contudo, percebe-se que, nas situações de *permutação* o invariante de escolha também gerou dificuldades nos alunos.

Acredita-se, entretanto, com o presente estudo, que a dificuldade quanto à *permutação* esteja relacionada, principalmente, à quantidade de etapas de escolhas a serem realizadas para a resolução deste tipo de problema, ou seja, os demais significados apresentavam apenas duas etapas de escolha, por exemplo, primeiro e segundo colocados no torneio, ou primeiro o tipo de comida e depois o tipo de bebida; enquanto que os problemas de *permutação* apresentavam três e quatro etapas de escolha, ou seja, deveria ser escolhido, por exemplo, a primeira, depois a segunda, e por fim, a terceira pessoa da fila do banco. Essa hipótese está atualmente sendo avaliada por Pontes e Borba (2012).

Quanto às representações simbólicas utilizadas, ressalta-se, que no pré-teste, tanto os grupos experimentais, quanto os grupos controles, apresentaram grande percentual de respostas que *não explicitam um tipo de representação simbólica ou estratégia* de resolução, assim como elevado uso da *listagem*, para os alunos que explicitaram um tipo de representação simbólica ou estratégia. Este resultado está em conformidade com Pessoa (2009) e Barreto e Borba (2010) que observaram que a *listagem* é o tipo de representação simbólica mais utilizada por alunos de anos iniciais do Ensino Fundamental Regular e de Educação de Jovens e Adultos, respectivamente.

Destaca-se, ainda, que, no Grupo 1 (*Árbol*) o percentual de respostas sem explicitação de um *tipo de representação simbólica ou estratégia* ainda é alto nos pós-testes, apesar do avanço quantitativo de acertos deste grupo. Acredita-se que isto pode ser reflexo da necessidade de transformação da forma de representação virtual para a escrita, ou seja, a aprendizagem com utilização do *software* e a resolução dos pós-testes em *lápis e papel*.

Salienta-se ainda, que, apesar das intervenções terem sido realizadas por meio da representação *árvore de possibilidades*, os alunos do Grupo 1 (*Árbol*) que explicitaram um tipo de representação simbólica ou estratégia mantiveram a preferência pela utilização da *listagem*. Contudo, a *listagem* passou a ser utilizada com maior sistematização, revelando, assim, que a resolução dos pós-testes não foi influenciada diretamente por uma representação simbólica que foi ensinada, e sim, pela maior compreensão dos invariantes de cada situação.

Já nos pós-testes do Grupo 2 (*lápis e papel)*, o percentual de respostas que *não explicitou um tipo de representação simbólica ou estratégia* diminuiu, aumentando, por outro lado o percentual de uso de *árvores de possibilidades*, listagens e diagrama. A *árvore de possibilidades* foi a estratégia de maior preferência dos alunos desse grupo. Observa-se que, assim como no Grupo 1 (*Árbol*), o Grupo 2 (*lápis e papel*) também apresentou melhoras qualitativas nas *listagens* apresentadas nos pós-testes, mas, diferentemente do G1 o G2 maior uso de *árvores de possibilidades* e, na maioria das vezes, esse uso era correto. Ressalta-se, entretanto, que poucos alunos, de ambos os grupos experimentais perceberam a regularidade dos problemas e generalizaram suas respostas.

Acrescenta-se, ainda, que, nos grupos controle o percentual de alunos que *não explicitaram um tipo de representação simbólica ou estratégia* e que utilizou a *listagem de possibilidades* permaneceu alto, com listagens com um baixo nível qualitativo das respostas, sendo, portanto, as *listagens* utilizadas na maioria das vezes sem relação com a Combinatória ou listando apenas uma possibilidade.

Com o presente estudo é possível concluir que o trabalho com *árvores de possibilidades* é um excelente caminho para o aprendizado da Combinatória, uma vez que, utilizando essa representação os alunos foram capazes de responder situações combinatórias. Acredita-se, ainda, em conformidade com Vergnaud (1986), que trabalhar múltiplas representações permite aos alunos uma visão ampla do conhecimento matemático, desde que se reflita sobre as similaridades entre as variadas formas de representar o conceito estudado.

Dessa forma, concorda-se com Fischbein (1975), e Fischbein, Pampu e Minzat (1970), que, apenas o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático não será suficiente para o aprendizado da Combinatória, sendo necessário, portanto, uma instrução específica, que pode ser com o uso de um recurso computacional – o *software educacional* – ou com *lápis e papel*, como no caso deste estudo. Recomenda-se, assim, o uso da *árvore de possibilidades* e o uso de outras representações simbólicas, desde os primeiros anos de escolarização.

Esta pesquisa foi caracterizada por um estudo de intervenção focado no uso de diferentes formas de representação – virtual ou escrita, bem como, a utilização de uma representação simbólica específica – a *árvore de possibilidades*. Entende-se, porém, que outros estudos de intervenção podem ser realizados a fim de responder perguntas ainda em aberto. Estudos, por exemplo, que verifiquem o uso da forma de representação virtual articulada à forma de representação escrita, visando perceber se, dessa forma, os avanços serão maiores. Além disso, outros tipos de representação podem ser utilizados, uma vez que, trabalhar com essa diversidade pode caracterizar num conhecimento mais amplo sobre problemas combinatórios. Ainda outras questões podem ser investigadas, como a viabilidade de intervenções nesse formato com grupos-classe inteiros e a observação de avanços com um período de intervenção mais prolongado.

Deseja-se, assim, com essa pesquisa, contribuir para a reflexão sobre melhores possibilidades de ensino da Combinatória nas salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao apontar o uso de *árvores de possibilidades* como recurso que permite que os alunos observem diferentes relações e propriedades de distintas situações combinatórias. Antes do ensino formal da Combinatória os alunos evidenciam noções intuitivas, mas o trabalho em sala de aula pode aproveitar esse conhecimento inicial e possibilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório, trabalhando-se uma variedade de situações combinatórias por meio de estratégias eficientes – como a construção de *árvores de possibilidades* – bem como uso de formas de representação variadas: virtuais e escritas.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, C. **Diagrama de *Árbol*.** Multimidea. 2005.

ALMEIDA, Adriana Luzie. **Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com Ênfase na Comunicação Matemática:** Um estudo com o 2º ano do Ensino Médio. 2010. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Adriana_Luzie.PDF>. Acesso em: 13 dez. 2012.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. O ensino da Combinatória por meio da construção de árvores de possibilidades com e sem o uso do *software Diagramas de Árbol*. **Anais...** 16 Ebrapem – Encontro Brasileiro de Estudantes de pós-graduação em Educação Matemática. Canoas, Rio Grande do Sul. 2012

AZEVEDO, J.; COSTA, D.; BORBA, R. O impacto do *software Árbol* no raciocínio combinatório. **Anais...** 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011

BARRETO, F. L. S; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos de um programa de correção de fluxo na modalidade da educação de jovens e adultos. **Anais**... do 6 Encontro Paraibano de Educação Matemática. Monteiro - PB, 9 a 11 de novembro de 2010.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais...** 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011

BATANERO, C. NAVARRO-PELAYO, V. GODINO, J.D. Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils**.** In: **Educational Studies in Mathematics**, v.32, n.2, p.181-199, fev, 1997. Disponível em: < http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Implicitmodel.htm>. Acesso em: 13 dez. 2012.

BORBA, Rute. *O Raciocínio Combinatório na Educação Básica.* In: **Anais**... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Bahia, 2010.

BORBA, Rute; BARRETO, Fernanda; AZEVEDO, Juliana. Use of Different Symbolic Representations in the Teaching of Combinatorics. **Proceedings…** 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 249. Taipei, Taiwan.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades com recurso tecnológico: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória**.** In: SPINILLO, Alina; LAUTERT, Síntria (Org.) **A pesquisa em Psicologia e**

suas implicações para a Educação Matemática. Recife: Editora Universitária. 2012

BORBA, Rute; PESSOA, Cristiane; ROCHA, Cristiane. How Primary School Students and Teachers Reason About Combinatorial Problems. **Proccedings…** 12th International Congress on Mathematical Education. COEX, Seoul, Korea. Jul 2012.

BORBA, Marcelo.; PENTEADO, Miriam. Informática e Educação Matemática. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. Coleção tendências em Educação Matemática. 2010

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. **A** escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitiv*o acerca da combinatória.* **Educar em Revista**, Editora UFPR: Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 77-91, 2011.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children***,* Reidel, Dordrecht, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana & MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. **The British Journal of Educational Psychology,** n. 40, 1970.

FLAVELL, John H. **A Psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget.** São Paulo: Editora Pioneira. 1988

FERRAZ, Martha; BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. Usando o *software Árbol* na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios*.* **Anais...** 10 Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.

GITIRANA, Verôrica. Função matemática: o entendimento dos alunos a partir do uso de *software*s educacionais. In: BORBA, Rute; GUIMARÃES, Gilda (Orgs.). **A Pesquisa em Educação Matemática**: repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p. 212 – 240.

GOMES, Alex Sandro; CASTRO FILHO, José Aires; GITIRANA, Verônica; SPINILLO, Alina; ALVES, Mirella; MELO, Milena ; XIMENES, Julie. Avaliação de *Software* Educativo para o Ensino da Matemática. **Anais**... 22 Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2002, Florianópolis.

GOOS, Merrilyn. **Technology and mathematics teaching and learning**: What counts? *Teacher*, *215*, 22-25. 2010.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976

LEITE, Maici; PESSOA, Cristiane; FERRAZ, Martha; BORBA, Rute. *Software*s Educativos e Objetos de Aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. **Anais...** 10 Encontro Gaúcho de Educação Matemática – 10 EGEM, Ijuí, 2009.

MAHER, Carolyn; YANKELEWITZ, Dina. Representations as tools for building arguments. In: MAHER, Carolyn; POWELL, Arthur; UPTEGROVE, Elizabeth (Editors). **Combinatorics and Reasoning**: Representing, Justifying and Building Isomorphisms**.** New York: Springer (2010)

MIGUEL, Maria Inez; MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. In: **Anais...** Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Santos, 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra.; BRYANT, Peter. **Educação Matemática 1**: Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. (Tese Doutorado)- Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório de alunos de 1ª à 4ª série. **Anais**... 9 Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, 2007.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **Quem Dança com Quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp – v.17, n.31 – jan./jun. – 2009a.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Mério. **Anais...** 4 SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília, OUT. 2009b.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. **Anais**... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010a.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **O Desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica.** Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n.1. 2010b.

PESSOA, Cristiane. BORBA, Rute. Do Young Children Notice what Combinatorial Situations Require? **Proceedings...** 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 1, p. 261. Taipei, Taiwan: PME. 2012.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita. Listagem, Invariantes, Sistematização e Generalização: Um caminho para o ensino de Combinatória em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. Anais... 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEMAT. Fortaleza, 2012.

PONTES, Danielle Avanço; BORBA, Rute. A Influência das Etapas de Escolha e das Representações Simbólicas na Resolução de Problemas Combinatórios por Estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental. **Anais...** 16 Ebrapem – Encontro Brasileiro de Estudantes de pós-graduação em Educação Matemática. Canoas, Rio Grande do Sul. 2012

POZO, Juan Ignácio. **Teorias Cognitivas da Aprendizagem**. Porto Alegre; Artes Médicas. 1998

RIVED. Rede Interativa Virtual de Educação. SEED/MEC. **Objetos de Aprendizagem *Combinação*, *Permutação*, *Arranjo***. Disponível em: <http://RIVED.mec.gov.br/atividades/matematica/combinacao/combinacao.swf>. Acesso em: set. 2008.

SANDOVAL, I.; TRIGUEIROS, M.; LOZANO, D. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. **Anais...** 12 Comitê Interamericano de Educação Matemática, Querétaro, México, 2007.

SELVA, Ana; BORBA, Rute; CAMPOS, Tânia; BIVAR, Dayse; FERREIRA, Maria Neuza; LUNA, Maria Helena. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: O que compreendem? Que dificuldades apresentam? **Anais...** 2 Simpósio Internacional de Educação Matemática. Recife, 2008.

SILVA, J.; SPINILLO, A. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. **Anais**... 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil.2011

SMOLE , Kátia C. S. ; DINNIZ, Maria Ignez (Org.). **Ler escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOARES, M. T; MORO, M. L. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de *produto cartesiano* na escola fundamental. **Anais**... 3 Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia, SP. 2006.

VALENTE, J. A. **O uso inteligente do computador na educação.** 1997. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/EDUCACAO_E_TECNOLOGIA/USOINTELIGENTE.PDF>. Acesso em: 16 fev. 2012

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, n. 1, 1986, p. 75-90.

VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. Mexico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gerard. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.