



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

CLÁUDIO ROBERTO CAVALCANTI DA FONSECA

CONCEITO DE SIMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA
PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Orientador: Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima

Recife

2013

CLÁUDIO ROBERTO CAVALCANTI DA FONSECA

**CONCEITO DE SIMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA
PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima

Recife
2013

Catálogo na fonte

F676c Fonseca, Cláudio Roberto Cavalcanti da.
Conceito de Simetria em livros didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental . – Recife: O autor, 2013.
90 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof^o Dr^o Paulo Figueiredo Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2013.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Matemática – Simetria. 3. Matemática – Livros Didáticos. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Lima, Paulo Figueiredo. II. Título.

CDD 510.7(22. ed.)

UFPE (CE2013-14)



ALUNO

CLÁUDIO ROBERTO CAVALCANTI DA FONSECA

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

**CONCEITO DE SIMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O
ENSINO FUNDAMENTAL**

COMISSÃO EXAMINADORA

Presidente e Orientador
Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima

Examinador Externo
Prof. Dr. Abraão Juvêncio de Araújo

Examinador Interno
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife, 18 de Fevereiro de 2013.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder sabedoria e discernimento com sua imensa bondade.

A minha família, por ser o meu pilar diante dos enfrentamentos aos desafios que a vida estabelece em cada momento.

Em especial ao Professor Dr. Paulo Figueiredo Lima pelo exemplo de profissionalismo, por sua amizade e incentivo a pesquisa acreditando no meu potencial nessa parceria de construção do saber.

A todo o corpo docente do EDUMATEC que me possibilitou um aprofundamento teórico acerca da Educação Matemática e Tecnológica.

Aos companheiros de mestrado que tanto colaboraram na edificação deste trabalho com trocas de ideias e discussões ao longo de dois anos.

As professoras Dr^a. Rosinalda Teles e Dr^a Paula Baltar pelo incentivo desde o início e colaboração nos ensinamentos de saber lidar com os obstáculos inerentes ao aprendizado.

A minha esposa, Micheline por ter paciência com a minha ausência, mesmo que presente fisicamente. E aos meus filhos, Gabriela, Maria Cláudia e Giovani que suas existências são mais do que um incentivo na labuta diária que me faz crescer de mente e espírito para que os dias que se seguem sejam sempre melhores do que os passados.

Aos meus pais, especialmente a minha mãe, Professora Elineide que sempre me incentivou e mostrou desde pequeno que a educação é o alicerce na formação humana.

Esses agradecimentos se estendem a todos que fizeram parte, mesmo que anonimamente, da consecução deste trabalho e que hoje fazem parte da minha vida.

Há pessoas que desejam saber só por saber, e isso
é curiosidade;
outras, para alcançarem fama, e isso é vaidade;
outras, para enriquecerem com a sua ciência, e isso
é um negócio torpe;
outras, para serem edificadas, e isso é prudência;
outras, para edificarem os outros, e isso é caridade"

Santo Agostinho

RESUMO

Esta pesquisa analisa a abordagem do conceito de simetria nos livros didáticos de Matemática para o ensino fundamental, em especial os aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), dada a importância e abrangência desse programa. Consideramos, também, a importância científica do conteúdo simetria, particularmente como um modelo matemático útil em vários contextos. O estudo envolveu uma revisão da literatura e de textos educacionais oficiais sobre o tema. Procuramos investigar algumas questões propostas na literatura, tomando como objeto de pesquisa coleções mais recentes do PNLD. Como suporte teórico para categorizar a coleta de dados no universo de livros escolhido, adotamos uma modelização matemática do conceito de simetria, além de questões oriundas da literatura em Educação Matemática. A modelização matemática é fundada na ação de um grupo de isometrias sobre o plano euclidiano e na invariância de figuras geométricas com respeito a essas transformações. Nos procedimentos metodológicos consideramos a pesquisa como do tipo descritiva e baseada em análise documental. A coleta de dados foi realizada, de modo exploratório, em 15 coleções dos anos iniciais do ensino fundamental aprovadas pelo PNLD 2010 e por 10 coleções dos anos finais do ensino fundamental aprovadas pelo PNLD 2011. Desse universo mais amplo, extraímos um conjunto de quatro coleções completas, do 1º ao 9º anos, das quais foram extraídos os dados finais do estudo. Observamos, no universo analisado, a predominância da simetria de reflexão, a quase ausência do estudo das isometrias no plano, as ambiguidades relativas a conceitos como “figura geométrica simétrica” e “figura geométrica simétrica a outra figura”. A inclusão da cor como critério de simetria foi também investigada. Observamos fortes indícios de que não há um planejamento didático global para o ensino de simetria ao longo dos nove volumes das coleções pesquisadas. O estudo aponta para possibilidades de investigações futuras que procurem aprofundar os resultados encontrados e aplicá-los no campo da didática do conceito de simetria.

Palavras-chave: Simetria – Livro didático – Ensino fundamental – Modelo matemático.

ABSTRACT

This research analyzes the approach to the concept of symmetry in mathematics textbooks for 1st to 12th grades, especially those approved by the Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), given the importance and scope of this program. We also consider the scientific importance of the symmetry concept, particularly as a mathematical model useful in various contexts. The study involved a review of literature and of educational texts on the subject. We sought to investigate some issues proposed in the literature, taking as research object more recent collections of the PNLD. As theoretical support for categorizing data collected in the universe of books chosen, we adopt a mathematical modeling of the concept of symmetry, as well as issues arising from the literature in mathematics education. The mathematical modeling is based on the action of a group of isometries of the Euclidean plane and the invariance of geometric figures with respect to these transformations. In methodological procedures we consider research as a descriptive and based on documentary analysis. Data were collected, first in an exploratory manner, from 15 collections of the early years of elementary school approved by PNLD 2010 and from 10 collections of the final years of elementary school approved by PNLD 2011. From this broader universe, we extract a set of four complete collections for 1st to 12th grades, from which were extracted the final data of the study. Observed, in the universe analyzed, the predominance of reflection symmetry, the near absence of isometries in the study plan, the ambiguities related to concepts like “symmetry geometric figure” and “geometric figure symmetry to another figure”. The inclusion of the color as a criterion of symmetry was also investigated. We observed strong evidence that is not a global educational planning for teaching symmetry throughout the nine volumes of collections searched. The study points to opportunities for future research seeking to deepen the results and apply them in the field of teaching the concept of symmetry.

Keyword: symmetry – Textbooks – Elementary - Mathematical model.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 2 PROBLEMÁTICA	11
2.1. Importância científica do conceito de simetria	11
2.2. Referências ao conceito de simetria em textos educacionais oficiais	12
2.3. O livro didático no ensino básico atual de Matemática	15
2.4. O conceito de simetria nos Guias do Livro Didático do PNLD	17
CAPÍTULO 3 ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE SIMETRIA	21
3.1. Pesquisas envolvendo sequências didáticas utilizando o aplicativo Cabri- Géomètre	21
3.2. Simetria de reflexão: outros dois estudos	23
CAPÍTULO 4 O CONCEITO DE SIMETRIA	27
4.1. Preliminares	27
4.2. Conceito de modelo	29
4.3. Simetria	32
4.3.1. Uma primeira observação	32
4.3.2. Simetrias geradas por isometrias do plano euclidiano	34
4.3.3. Simetria e cor	36
4.3. Isometrias básicas	37
4.4. Retorno aos exemplos iniciais do capítulo	41
4.4.1 Simetria de reflexão	42
4.4.2 Simetria de rotação	43
4.4.2 Simetria de translação e de reflexão seguida de translação	46
4.5 Comentário final do capítulo	47
CAPÍTULO 5 OBJETIVOS	49
5.1 Objetivo Geral	49
5.2 Objetivos específicos	49
CAPÍTULO 6 PERCURSO METODOLÓGICO	51
6.1 Preliminares	51

6.2 Preparação das informações	52
6.2 Categorização (classificação)	56
6.3 Interpretação (análise)	57
CAPÍTULO 7 ANÁLISE DOS DADOS	58
7.1 Seleção e distribuição do conteúdo simetria	58
7.2 Tipos de simetria abordados	64
7.3 Figura geométrica simétrica e figura geométrica simétrica a outra figura	68
7.4 Abordagem das isometrias no plano e de sua relação com o conceito de simetria	73
7.5 Cor como critério de simetria	78
CAPÍTULO 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	85
REFERÊNCIAS.....	88

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata do conteúdo simetria nos livros didáticos de Matemática para o ensino fundamental.

Por que abordar este tema?

Em primeiro lugar, porque o conceito de simetria ocupa um lugar privilegiado no saber científico nos campos da: Matemática, Física, Química, Biologia, entre outras. Também é um conceito central na Arquitetura e nas Artes. No capítulo seguinte, voltaremos a comentar, brevemente, sobre essa posição de destaque da simetria.

Além disso, a maioria das recomendações curriculares nacionais refere-se ao conceito de simetria. Em especial, há referências ao tema nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), na Base Curricular Comum para as redes públicas de ensino de Pernambuco (BCC), nas matrizes de avaliações institucionais, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), e no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). Essas recomendações e matrizes de avaliações constituem-se em um referencial de qualidade para a educação básica em todo o país, e tem influenciado na elaboração dos currículos estaduais e municipais. No Capítulo seguinte, este ponto é abordado.

A escolha de analisar o conceito de simetria em livros didáticos ampara-se na constatação de que esses instrumentos ocupam um lugar importante no ensino escolar atual. A sua utilização ajuda o cotidiano do professor e do aluno na organização do ensino e da aprendizagem.

A despeito da importância do tema simetria e do papel relevante do livro didático, a leitura dos Guias do Livro Didático do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ministério da Educação revela-nos que tem havido deficiências persistentes no tratamento daquele conteúdo nas obras destinadas ao ensino básico. Sabemos que o PNLD é responsável pela distribuição de livros didáticos para todos os alunos do ensino básico, o que garante a representatividade de um

estudo dedicado às obras aprovadas nesse programa. No próximo capítulo retomaremos este assunto.

Desde o século XIX, o conceito de simetria vem sendo modelizado na Matemática em diferentes graus de generalidade e existe muita literatura nesse campo científico que aborda esse tema. No entanto, o mesmo não ocorre no campo da Educação Matemática, em especial com relação aos textos em língua portuguesa. A este respeito, faremos, no Capítulo 3, uma breve revisão da literatura em Educação Matemática que aborda o conceito de simetria. No Capítulo 4, vamos nos deter sobre um desses modelos.

No Capítulo 5, identificaremos os objetivos gerais e específicos do estudo. O Capítulo 6 contém a escolha metodológica por uma pesquisa documental descritiva. O capítulo 7, os dados coletados nas obras e a análise desses dados. As considerações finais são feitas no Capítulo 8, seguidas das referências bibliográficas.

CAPÍTULO 2 PROBLEMÁTICA

2.1. Importância científica do conceito de simetria

A simetria é um dos princípios básicos na formulação de modelos matemáticos para muitos fenômenos naturais. Tal princípio contém uma das ideias mais ricas na Matemática e nas ciências e pode ser associada a transformações efetuadas em espaços e à invariância de certos subconjuntos desses espaços com relação a tais transformações.

Os comentários acima amparam-se em uma vasta literatura sobre simetria nos campos científicos. A este respeito consultar Weil (1997), Armstrong (1988), Stewart (2012), Silva (2011), Petitjean (2007). Citemos este último, que afirma:

É essencial compreender que as construções matemáticas são modelos de situações físicas reais, e que um modelo matemático de simetria é uma imagem simplificada em nossa mente de alguma situação física em que se gostaria de ver a simetria¹.

Ao perpassar vários campos científicos, a simetria é um conceito que pode ser uma base privilegiada para a prática bem fundada da interdisciplinaridade. Este último conceito entendido como o apresenta Fortes (2011 apud JAPIASSU, 1976, p. 74) quando afirma que “A interdisciplinaridade caracteriza-se pela intensidade entre os especialistas e pelo grau de interação real das disciplinas no interior de um mesmo projeto de pesquisa”. Na mesma direção, aponta Silva (1998): “A interdisciplinaridade requer um árduo esforço no sentido de um redimensionamento epistemológico das disciplinas científicas para a reaproximação de seus objetos que, na verdade, são indissociáveis”. Não há dúvida que o conceito de simetria constitui-

¹ Tradução do autor da dissertação. Texto original: It is crucial to understand that mathematical constructs are models of real physical situations, and that a mathematical model of symmetry is a simplified image in our mind of some physical situation in which we would like to see symmetry.

se em um desses objetos de investigação que podem aproximar os saberes científicos.

Na Matemática, como se sabe, é reservado um lugar de inegável importância à geometria e não se concebe um ensino básico sem que se dedique uma atenção privilegiada a esse campo do saber matemático (Carvalho e Lima, 2010). Por sua vez, nesse campo, o ensino do conceito de simetria ganha particular relevância quando se abordam as transformações geométricas.

2.2. Referências ao conceito de simetria em textos educacionais oficiais

No ensino fundamental em nosso país, em especial, a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997 e 1998), ganhou corpo a ideia de que os conceitos matemáticos são adquiridos ao longo de um extenso período de aprendizagem, em que muitos tópicos matemáticos devem ser estudados desde o início da escolaridade e retomados, nos anos seguintes, em graus crescentes de abrangência e de complexidade.

Para citar algumas das orientações encontradas nesse documento relacionadas aos conteúdos de isometria e de simetria, ao longo do ensino fundamental, iniciamos por:

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes (Brasil, 1998, p. 51).

Para o terceiro ciclo, que corresponde aos 6º e 7º anos do ensino fundamental, encontramos o seguinte trecho:

Neste ciclo, os alunos reorganizam e ampliam os conhecimentos sobre Espaço e Forma abordados no ciclo anterior, trabalhando com problemas mais complexos de localização no espaço e com formas nele presentes. Assim é importante enfatizar as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, as classificações das figuras geométricas (quanto à planicidade, quanto à dimensionalidade), as relações entre figuras espaciais e suas representações planas, a exploração das figuras geométricas planas, pela sua decomposição e composição, transformações (reflexão, translação e rotação), ampliação e redução (Brasil, 1998, p. 68).

Para o quarto ciclo, correspondente aos 8º e 9º anos do ensino fundamental, podemos destacar o seguinte extrato:

Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias) (Brasil, 1998, p. 86).

É inegável a influência dos PCN sobre as recomendações curriculares que o sucederam, tanto no âmbito federal quanto nos entes federados. Escolhemos um desses documentos, a Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (BCC).

Nesse documento, para a primeira etapa do ensino fundamental, afirma-se:

Podem-se explorar malhas de diferentes tipos (quadradas, retangulares, triangulares), e situações que levam o aluno a perceber transformações que ampliem, deformem, reduzam ou mantenham inalteradas figuras planas e suas propriedades (BCC-PE, 2008, p. 91).

Para a segunda etapa do ensino fundamental, diz-se:

As atividades explorando as **transformações isométricas** de figuras planas (reflexão, translação e rotação) são importantes para desenvolver, no aluno, habilidades de percepção espacial, favorecendo também a construção da noção de congruência de figuras planas (BCC-PE, 2008, p. 102).

No que tange às matrizes de avaliação, sabemos que o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) tem o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes no final da escolaridade básica, mas seus conteúdos devem ser tratados, em seus aspectos preliminares, também no ensino fundamental. Na matriz de referência para o ENEM 2009 na área de *Matemática e suas tecnologias*, foi identificado explicitamente o conteúdo simetria, nos “Objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência”:

Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; **simetrias de figuras planas ou espaciais**; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo. (grifo nosso).

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), é um projeto de avaliação comparativo, coordenado pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico). Atualmente, participam mais de sessenta países, entre eles o Brasil, sob a coordenação do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais Anísio Teixeira (INEP). O principal objetivo do PISA é produzir indicadores de desempenho estudantil voltados para as políticas educacionais, fornecendo orientações, incentivos e instrumentos para melhorar a efetivação da educação. A aplicação do PISA é de forma amostral, segundo critérios da OCDE, e o público alvo são estudantes de quinze anos de idade, matriculados no 8º ano em diante, até o final do ensino médio, em que serão examinados pela capacidade de analisar, raciocinar e refletir sobre seus conhecimentos e experiências, enfocando competências relevantes para suas vidas futuras.

O letramento matemático² para o PISA vai além do conhecimento da terminologia dos dados e dos procedimentos matemáticos e das destrezas para realizar certas operações e cumprir certos métodos. As competências matemáticas implicam na combinação desses elementos para satisfazer as necessidades da vida real dos indivíduos na sociedade. Nas suas competências o aluno deve demonstrar a capacidade de: raciocínio; argumentação; comunicação; modelagem; colocação e solução de problemas; representação; uso de linguagem simbólica, formal e técnica; e o uso de ferramentas matemáticas. No conteúdo espaço e forma podemos identificar temas relacionados com simetria:

Em toda parte encontram-se padrões: em palavras faladas, música, vídeo, trânsito, construção de edifícios e arte. Formas podem ser consideradas como padrões: casas, prédios de escritórios, pontes, estrela do mar, flocos de neve, planos de cidade, trevos rodoviários, cristais e sombras.

Como observamos, o documento do PISA não explicita o conceito de simetria, mas podemos considerar que a referência ao estudos dos padrões presentes no mundo físico remete claramente ao conceito alvo deste trabalho.

2.3. O livro didático no ensino básico atual de Matemática

É consenso nos meios educacionais que o livro didático é uma importante fonte de consulta para muitos professores e, muitas vezes, único material de apoio à aprendizagem para os alunos. Diversos pesquisadores, especialmente os que trabalham com instrumentos de ensino e aprendizagem, dedicam-se ao estudo sobre esses recursos didáticos.

² Letramento matemático refere-se à capacidade de identificar e compreender o papel da Matemática no mundo moderno, de tal forma a fazer julgamentos bem embasados e a utilizar e envolver-se com a Matemática, com o objetivo de entender as necessidades do indivíduo no cumprimento de seu papel de cidadão consciente, crítico e construtivo (http://portal.inep.gov.br/internacional-novo-pisa-marcos_referenciais).

Segundo Molina (1988, p. 17), um livro didático é uma obra escrita (ou organizada, como acontece tantas vezes), com a finalidade específica de ser utilizada numa situação didática, o que a torna, em geral, anômala em outras situações. Parece que para esse pesquisador, o livro didático é um material único e exclusivamente usado em sala de aula.

De acordo com Rojo (2005, p. 3), o conceito de livro didático proposto por Molina implica uma sala de aula regida basicamente pelo manual, pelo livro didático.

Goldberg (1983, p. 7) considera que o livro didático tem a intenção de fazer com que o aluno aprenda, razão pela qual apresenta conteúdos selecionados, simplificados e sequenciados.

Carvalho e Lima (2010, p. 15) afirmam:

O livro didático traz para o processo de ensino- aprendizagem mais um personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado – no nosso caso a Matemática –; os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade. Estabelece-se, assim, uma teia de relações interligando quatro polos: um deles é formado pelo autor e o livro didático; o professor, o aluno e a Matemática compõem os outros três.

O reconhecimento da importância do livro didático encontra respaldo também na literatura estrangeira. Por exemplo, Gérard & Roegiers (1998) sintetizam as funções do livro didático no processo de ensino e aprendizagem em um elenco de funções a seguir apresentado:

Para o aluno:

- favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos;
- propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades do aluno, que contribuam para aumentar sua autonomia;
- contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Com respeito ao professor:

- auxiliar no planejamento didático-pedagógico anual e na gestão das aulas;
- favorecer a formação didático-pedagógica;
- auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno;
- favorecer a aquisição de saberes profissionais pertinentes, assumindo o papel de texto de referência.

Desse modo, esses estudos apontam para a relevância do livro didático no ensino escolar e, como sabemos, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como objetivo central por à disposição da escola pública tais livros, após a avaliação do seu conteúdo. Um dos frutos desse processo de avaliação é a edição de um Guia do Livro Didático, que é divulgado a cada PNLD e é um instrumento que permite ao professor conhecer os princípios e critérios que norteiam a avaliação, bem como, resenhas das obras para subsidiar as escolhas do professor.

De acordo Guia do PNLD 2010:

O livro didático é um importante material de apoio ao processo de ensino e aprendizagem, pois contribui, ao mesmo tempo, para o trabalho do professor e para o estudo do aluno. Embora a prática pedagógica do professor envolva diversas dimensões, como sua pesquisa constante para o aprimoramento de seu trabalho em sala de aula, um livro didático com textos adequados, ilustrações pertinentes e informações atualizadas auxilia no planejamento de ensino. Para que suas possibilidades sejam aproveitadas ao máximo, o livro didático deve estar adequado às necessidades da escola, do aluno e do professor.

2.4. O conceito de simetria nos Guias do Livro Didático do PNLD

Mencionamos a importância do tema alvo desta pesquisa, tanto nas áreas científicas como nas recomendações curriculares para o ensino fundamental e nos referimos ao papel importante que o livro didático desempenha em nossa vida escolar. Apesar disso, o tratamento dado ao conceito de simetria nos livros

didáticos distribuídos nas escolas pelo PNLD tem apresentado deficiências que podem dificultar a sua aprendizagem.

Algumas dessas deficiências têm sido apontadas na extensa relação de resenhas das obras que estão publicadas nos Guias do PNLD (Brasil, 2005, 2007, 2008, 2010, 2011, 2013). Além dessas indicações nas resenhas, que focalizam obras específicas, no texto geral introdutório ao Guia do PNLD 2007, com obras destinadas aos anos iniciais do ensino fundamental, são feitas considerações sobre o conceito de simetria que apontam para uma modelização do fenômeno baseada nas ideias de transformações atuando em um conjunto e de invariância de seus subconjuntos:

Do ponto de vista matemático [...], o conceito de simetria envolve três noções básicas: um conjunto de elementos; uma transformação “interna” desse conjunto em si mesmo; a existência de um subconjunto desse conjunto maior que fica invariante quando submetido a tal transformação. Os exemplos mais simples de simetria surgem na geometria nos casos em que o conjunto mencionado é o plano, a transformação é uma de suas isometrias e o subconjunto em causa é uma figura simétrica em relação a tal isometria. Mais particularmente, se a isometria é a reflexão em relação a uma reta (eixo de simetria), diz-se que a figura possui simetria de reflexão. Ainda no plano, a rotação em torno de um ponto é uma isometria que dá origem a figuras com simetria de rotação – aliás, muito pouco presente nos livros didáticos. (Brasil, 2007. p. 31)

A reduzida atenção dedicada à simetria de rotação, apontada no final da citação, é uma das deficiências que se junta a outras como:

Quase todas as coleções que constam deste Guia apresentam atividades em torno do conceito de simetria. Muitas dessas atividades são adequadas para o início da construção desse conceito pela criança, em particular, aquelas que se valem da construção de figuras simétricas. No entanto, várias limitações foram observadas em algumas coleções, que merecem a atenção do professor para que se favoreça uma melhor aprendizagem do conceito. Por exemplo, são consideradas de **modo indiscriminado**, as noções de

“figura simétrica” e de “simétrico de parte de uma figura”. (Brasil, 2007. pp. 31, 32) (grifo nosso)

Outra questão levantada no mesmo documento, diz respeito à simetria de imagens coloridas:

Ainda outro ponto a ser observado, é que várias coleções incluem as cores dos desenhos como critério de simetria. Apesar de ser defensável esse ponto de vista, à luz de uma conceituação ampla de simetria seria desejável que ficasse explícita a inclusão da cor – uma propriedade não geométrica – como critério de produção de figuras simétricas. Essa explicitação é feita em algumas coleções, mas é omitida em outras. (Brasil, 2007. p. 32).

As críticas mencionadas sugerem a hipótese de que, na abordagem do conceito de simetria não se tem como objetivo didático a construção de um modelo matemático mais abrangente, que ultrapasse a simetria de reflexão em relação a uma reta e que permita atribuir sentido, sem ambiguidades, às duas expressões “figura simétrica” e de “simétrico de parte de uma figura” e ao critério de cor na abordagem da simetria.

A leitura do Guia do PNL D 2008, destinado a coleções para os anos finais do ensino fundamental, as considerações feita no Guia do PNL D 2007 voltam a ser feitas e adiciona-se:

A discussão acima, relativa ao conceito de simetria, evidencia a importância do estudo das transformações geométricas, em especial as isometrias no plano: reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento. Apenas algumas obras dedicam-se a esse tema e o fazem de modo apropriado. No entanto, mesmo nesses casos, a necessária articulação dessas transformações com o conceito de simetria, nos termos mencionados acima, não é feita. (Brasil, 2008. p. 46)

A consulta aos Guias do PNLD e à literatura em Educação Matemática despertou nosso interesse em investigar algumas questões ligadas ao conceito de simetria e à sua abordagem nos livros didáticos aprovados no PNLD. Resumidamente, podemos listar:

1. Qual seria essa “conceituação ampla de simetria” mencionada no Guia do PNLD 2007?
2. Confirma-se, no PNLD 2010 (para os anos iniciais do ensino fundamental) e no PNLD 2011 (para os anos finais do ensino fundamental), o predomínio do estudo da simetria de reflexão e a limitada atenção às demais simetrias no plano?
3. Repete-se, em tais coleções, a reduzida atenção ao estudo das isometrias no plano e, a ausência de articulação delas com o conceito de simetria? Em que consistiria essa articulação? Seriam o mesmo conceito, sob diferentes pontos de vista?
4. Persiste a ambiguidade criticada com respeito aos conceitos de “figura geométrica simétrica” e de “figura geométrica simétrica a outra figura”?
5. Perdura a falta de clareza sobre a admissão da cor como critério de simetria?
6. No universo das obras mencionadas na questão anterior, há indícios de que não há um plano didático, de longa duração, para o ensino fundamental, voltado para o conceito de simetria?

O elenco de questões acima mencionado guiou a presente investigação, que será descrita no Capítulo 5. Antes dessa descrição, faremos uma breve revisão da literatura em Educação Matemática voltada para o conceito de simetria e discutiremos a conceituação de simetria.

CAPÍTULO 3 ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE SIMETRIA

Nesta breve revisão da literatura, iniciamos por nos referir a estudos que envolveram sequências didáticas que empregam o aplicativo Cabri-Géomètre. Do ponto de vista teórico, nesses trabalhos, recorre-se ao conceito de simetria associado a transformações isométricas no plano e à invariância de figuras geométricas com relação a essas isometrias.

3.1. Pesquisas envolvendo sequências didáticas utilizando o aplicativo Cabri-Géomètre

Siqueira (2001) realizou um trabalho sobre o conceito de simetria de reflexão, cujo título é “Explorando a Simetria de Reflexão: uma sequência didática no Cabri-Géomètre”, tendo como público alvo estudantes do 7º ano do ensino fundamental.

O objetivo do trabalho de Siqueira (2001) foi apresentar o desenvolvimento e os resultados de uma nova pesquisa que se constitui na continuidade dos projetos “O Conceito de Simetria de Reflexão no Ensino Fundamental” e “Explorando a simetria de reflexão: uma sequência didática no Cabri-Géomètre” que tiveram início em 1998, sob a orientação dos professores Paulo Figueiredo Lima e Verônica Gitirana Gomes Ferreira, ambos da Universidade Federal de Pernambuco.

É destacado o conceito de simetria de reflexão tratado no ensino fundamental. Considera-se que este conceito possui uma formulação matemática já estabelecida, cujos elementos essenciais são os conceitos de isometria e de invariância de uma figura geométrica por isometrias.

De acordo com Siqueira (2001):

Entre as isometrias do plano destacam-se as **reflexões com relação a uma reta (isometria axial)**. Dada uma reta r , diz-se que $\sigma: \Pi \rightarrow \Pi$ é uma reflexão com relação a r (referida como **eixo de simetria**) se

esta reta é a mediatriz do segmento de extremidades P e $\sigma(P)$, P representando um ponto qualquer do plano.

A pesquisa foi realizada com alunos de uma turma do 7º ano, pois se considerou que eles já haviam vivenciado assuntos de geometria que servem de suporte para o conceito de simetria de reflexão (distância de ponto a reta, perpendicularidade, entre outros). Dessa forma, teriam possibilidade de compreender e realizar as atividades propostas no Cabri-Geomètre. A pesquisa incluiu a construção de uma sequência de atividades elaborada com base em constatações feitas em experimento anterior relativamente a alguns erros persistentes na resolução das atividades de simetria de reflexão, entre os quais a ausência de correspondência ortogonal entre o ponto objeto e o ponto refletido e a invariância do eixo na reflexão. O pré-teste e o pós-teste incluíam a identificação do eixo de simetria de figuras geométricas dadas, algumas com eixo de simetria de reflexão, outras com simetria de rotação ou de translação. Continham, ainda, atividades de completar figuras geométricas de modo que a figura final tivesse simetria de reflexão e atividades em que intervinha a questão dos ângulos de uma reta e sua refletida com relação a um eixo e da equidistância do ponto e seu refletido em relação ao eixo. Além disso, no contexto de papel quadriculado, pedia-se para o sujeito construir uma figura e o seu eixo de simetria. A sequência foi desenvolvida em quatro encontros de 2 horas/aula cada, nos quais foram propostas as atividades no Cabri-Géomètre agrupadas em três blocos. No primeiro, para o sujeito obter a reflexão de figuras geométricas fornecidas na tela do computador, com recurso ao menu *simetria axial* desse aplicativo, após a escolha de um eixo. No segundo, os sujeitos deviam recorrer à ferramenta Rasto/Onf⁶, que simula um lápis, para produzirem a figura geométrica simétrica de uma figura dada. No terceiro bloco, era proposta a identificação de eixos de simetria (quando existiam), em figuras geométricas dadas. Em seguida transcreveria o procedimento adotado para o papel.

Ao analisar os resultados das atividades constatou-se uma melhora de 10,01% do pré-teste para o pós-teste, nos acertos dos alunos e alguns dos erros do pré-teste, como a equidistância e a correspondência ortogonal, mencionados acima foram minimizados ou completamente eliminados.

Outra pesquisa é a de Araújo e Gitirana (2000), na qual foi proposta e analisada uma sequência didática para a construção dos conceitos de rotação e de simetria de rotação no plano, com sujeitos do 7º ano do ensino fundamental. Nas considerações teóricas, os autores salientam que, no estudo da simetria, três elementos intervêm de forma indissociável: (i) transformações isométricas no plano; (ii) figuras geométricas planas e (iii) invariância dessas figuras, face a essas transformações. Diz-se, no trabalho citado: uma figura é simétrica relativamente a uma transformação isométrica T se a figura F é invariante por T , ou seja, se a transformação aplicada à figura F tem como imagem a própria figura $F[T(F) = F]$.

O estudo do conceito de rotação inspirou-se na pesquisa de Hart (1982) relativo a isometrias de reflexão e de rotação. Entre outros aspectos positivos, a pesquisa de Araújo e Gitirana lançou o foco na simetria de rotação sobre a qual praticamente não há pesquisas a serem consultadas na literatura de Educação Matemática. As atividades propostas por eles envolveram os elementos constitutivos de uma rotação no plano, a saber, a posição do centro de rotação e a equidistância do ponto original e do ponto imagem pela rotação com relação ao centro. No caso das figuras geométricas, as atividades propostas envolvem a ação de uma rotação produzindo uma figura isométrica que é congruente à figura original, mas em uma posição tal que as distâncias de cada um de seus pontos ao centro permaneçam constantes durante a rotação. Essas exigências geram várias dificuldades de aprendizagem que são bem investigadas no mencionado trabalho. O conceito de simetria de rotação surge quando, para uma rotação diferente de 360^0 , ocorre que a figura original e a sua imagem pela rotação são o mesmo conjunto. As atividades nessa altura, visaram, entre outros aspectos, a identificação de ângulos de rotação menores do que 360^0 que garantiam a simetria de uma figura dada, além de demandar a identificação do centro de rotação em causa. Em todas as atividades propostas na pesquisa, procurou-se favorecer a construção dos dois conceitos acima referidos, levando em conta as dificuldades antecipadas por uma análise a priori.

3.2. Simetria de reflexão: outros dois estudos

A pesquisa desenvolvida por Melo (2010) abordou a simetria de reflexão focalizando a problemática da modelização de conhecimentos dos alunos do ensino fundamental. Para isso utilizou como metodologia o modelo cK ϕ desenvolvido por Nicolas Balacheff, que é ancorado na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

Tratou-se de um estudo experimental realizado com 51 alunos do 9º ano de escolas das redes pública. Os estudantes resolveram problemas de construção e de identificação de figuras simétricas em relação a um eixo de simetria. As concepções dos alunos foram analisadas com base no conceito de estruturas de controle, que é parte do modelo cK ϕ . Foram identificadas estruturas de controle ligados ao eixo de simetria e ao tipo de figura geométrica e foram observados indícios da interferência importante dos dados visuais obtidos nas figuras pelos sujeitos.

Uma das etapas preliminares do trabalho de Melo (2010), que é relevante para o presente trabalho foi a análise de livros didáticos destinados à segunda etapa do ensino fundamental, cinco das quais faziam parte do Guia de Livros Didáticos do PNLD 2008. Convém observar, preliminarmente, que no trabalho de Melo (2010) as simetrias são identificadas com as isometrias. Assim, os dados obtidos referem-se a problemas de reflexão, translação e rotação. Entre as sete coleções estudadas, apenas quatro abordavam as isometrias e, mais importante, prevalece o estudo da simetria de reflexão. É o que evidencia o quadro a seguir:

Tabela 1. Problemas de reflexão, rotação e translação nos livros didáticos analisados

Problemas		Quantidades	% (aproximados)
Reflexão	Axial	51	75
	No espaço tridimensional	02	03
Rotação		03	04
Translação		04	14
Mistos		03	04

A pesquisa de Santos (2010), cujo título é “Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino da Simetria e das Artes Visuais em Livros Didáticos de Matemática para séries iniciais do Ensino Fundamental”, analisou as atividades que articulam geometria e artes visuais na abordagem do conteúdo simetria nos livros didáticos de Matemática para as séries iniciais do ensino fundamental. A pesquisa tem o foco nas ricas e complexas relações entre geometria e artes visuais e alguns resultados do estudo têm interesse especial para o nosso trabalho.

Considerou-se o conceito de simetria de acordo com os pesquisadores Lopes e Nasser (1996), Mabuchi (2000), Mega (2001) e Ripplinger (2006) que definem simetria como “movimentos rígidos”, porque fazem as figuras apenas mudarem a sua posição. Desse modo, também nessa pesquisa, as simetrias e as isometrias no plano são identificadas como um mesmo conceito. De modo análogo ao trabalho de Siqueira, são investigados aspectos específicos da simetria de reflexão, em particular o papel do eixo de simetria e a conectividade das figuras geométrica.

O estudo de Santos (2010) também constatou que a propriedade de cor das imagens é utilizada como critério para produção de figuras simétricas sem a devida explicitação.

No âmbito mais geral, afirma-se que, nas atividades identificadas, tanto em relação às artes visuais como em relação à simetria, não haver variedade, pois as atividades propostas nos diversos volumes de uma mesma coleção são repetidas e sem uma gradativa complexificação dos conteúdos. Isso nos permite supor que o tratamento do conteúdo simetria não se apresenta uniformemente e nem gradativamente nos livros didáticos de matemática.

Talvez essa limitação se dê devido a planos didáticos inadequados quando visam o ensino desse conceito. Não iremos propor um plano didático global nem uma sequência didática local sobre o conceito de simetria. Apesar de ser possível supor a ausência de um planejamento didático global no ensino do conceito de simetria, em particular nos livros didáticos vinculados ao PNLD, a magnitude dessa tarefa extrapola, em muito, os limites do presente trabalho. Quanto a sequências didáticas locais, em especial sobre a simetria de reflexão no plano, a literatura em Educação Matemática é relativamente extensa, se levarmos em conta os trabalhos citados neste capítulo e na bibliografia que os acompanha.

Se referirmos às questões abordadas nesta pesquisa, resumidas no Capítulo 2, em especial na página 14, e que a distinguem, parcialmente, dos quatro trabalhos anteriormente referenciados vamos procurar:

- um tratamento teórico mais amplo que nos permita esclarecer uma possível relação entre simetria e isometria que não seja apenas de identificação entre os dois conceitos e que seja fundado na abordagem matemática desses conceitos. O conceito de ação de um grupo sobre um conjunto é central nesse tratamento;
- não nos fixarmos em um tipo de simetria no plano, mas abordar, no nível diagnóstico, as quatro possibilidades de simetria de reflexão, rotação, translação e translação seguida de reflexão;
- confirmar, no universo de livros do PNLD 2010 (1º ao 5º) e do PNLD 2011 (6º ao 9º), os diagnósticos presentes na literatura referenciada o tratamento privilegiado dedicado à simetria de reflexão face às demais simetrias, sem que alguma concepção didática seja explicitada em amparo a tal orientação;
- esclarecer de que modo se pode incluir a cor como critério de simetria de imagens.

CAPÍTULO 4 O CONCEITO DE SIMETRIA

4.1. Preliminares

Para a maioria das pessoas, o termo 'simetria' está relacionado à arte e a certas propriedades de objetos do mundo físico e é empregado, na linguagem coloquial com muitos significados, como, por exemplo: equilíbrio, harmonia, repetição, perfeição, igualdade entre partes de um objeto.

Neste trabalho, vamos nos restringir a analisar a simetria de figuras geométricas planas. Nesse contexto, as imagens seguintes, sugerem a presença de simetria:

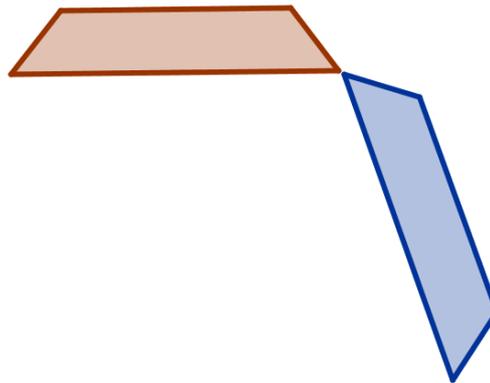


Figura 01 (Simetria de reflexão)

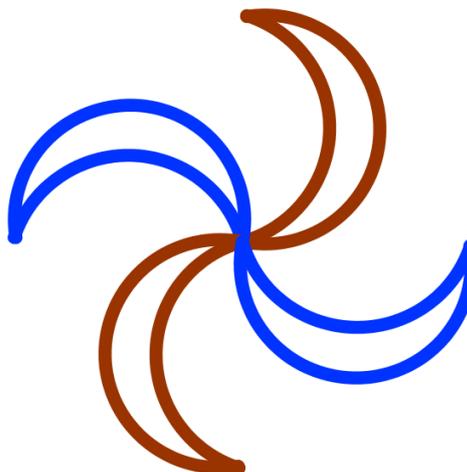


Figura 02 (Simetria de rotação)

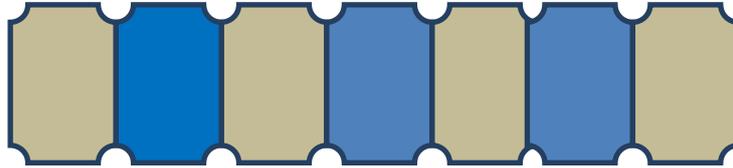


Figura 03 (Simetria de translação)

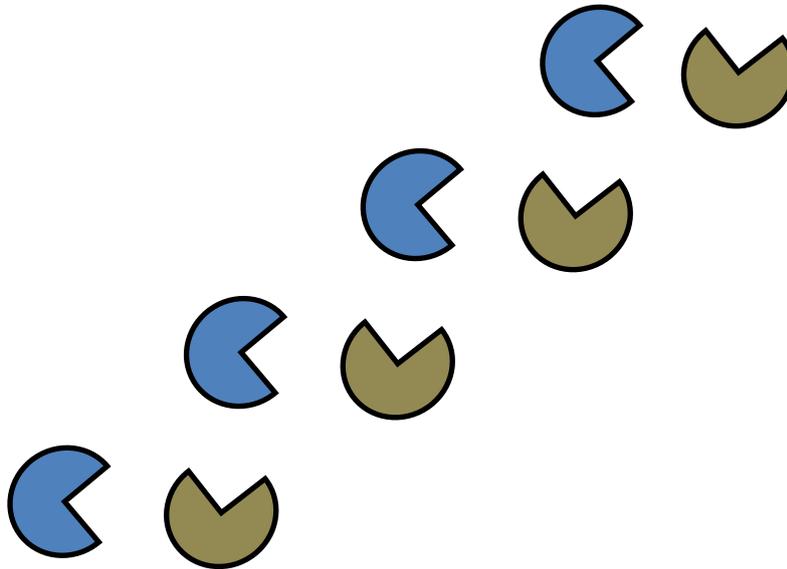


Figura 04 (Simetria de reflexão seguida de translação)

Apesar de ser fácil reconhecer que em todas essas imagens há algo em comum, algo que chamamos 'simetria', encontrar um modelo matemático abstrato que possa enfeixar essas várias situações não é tão simples.

Conceitualmente, um modelo matemático é uma representação abstrata de objetos ou fenômenos existentes no contexto real. Convém que, na seção seguinte, façamos alguns comentários prévios sobre o conceito de modelo.

4.2. Conceito de modelo

A literatura sobre o conceito de modelo é muito extensa e, acima de tudo, com grande variedade de enfoques. No presente trabalho, nossos breves comentários são baseados em Barreto (1998) e filiam-se a uma vertente matemática do conceito de modelo.

Conforme Chorley & Haggett (1975) (Apud Barreto, 1998), um modelo matemático é, basicamente, uma representação aproximada e seletiva de uma dada situação. Outros autores têm pontos de vistas convergentes, como Sodré (2007), quando afirma:

Um modelo é normalmente uma simplificação do mundo real ou alguma forma conveniente de trabalhar com este mundo, mas as características essenciais do mundo real devem aparecer no modelo, de modo que o seu comportamento seja igual ou semelhante aquele do sistema modelado.

E, analogamente, Lima (2006):

Um modelo não é construído para resolver um problema que se impõe a uma comunidade, ele tem antes de tudo a função de fornecer os elementos que podem auxiliar de forma significativa na compreensão de um fenômeno. Um modelo pode ter vários objetivos. Ele pode ser usado, por exemplo, como meio de comunicação, de intercâmbio de pontos de vista. Ele pode também funcionar como uma ferramenta aqueles que o constroem ou aqueles que utilizam a compreender um problema de uma maneira mais precisa. Ele pode ainda dar conta, de maneira simplificada, do funcionamento de um sistema complexo tornando-o mais compreensível. Quanto mais um problema é complexo, mais o modelo pode se tornar pertinente, porque ele permite um maior nível de visibilidade do fenômeno estudado, em termos de detalhes de abstração, do que a situação real (LIMA, 2006, p. 11-12).

Segundo Barreto (1998), um modelo matemático é o resultado de tentativas no sentido de matematizar uma situação dada, que, segundo ele, “pode ser um fenômeno em ciências físicas, químicas, biológicas, humanas e sociais, um processo tecnológico, uma obra literária ou musical, uma tarefa com etapas bem definidas.” Salientamos, que a ideia de modelo matemático pode ser estendida para abranger situações no próprio contexto matemático. Noutras palavras os fenômenos em jogo pode ser fatos matemáticos específicos que são modelizados por uma estrutura mais geral e mais abstrata. Tal será o caso quando tratarmos dos fenômenos que permeiam a ocorrência de simetria.

Recorrendo à simbologia matemática, um **modelo matemático** é definido como uma função bijetiva que associa elementos de um conjunto, denominado **situação**, denotado por S , a elementos de uma **estrutura matemática** M :

$$m : S \rightarrow M \\ x \mapsto m(x) = x'$$

Como a função acima é bijetiva, ela admite uma função inversa m' , que também é bijetiva:

$$m' : M \rightarrow S \\ x' \mapsto m'(x') = x$$

Agora, suponhamos que estejam definidas uma relação R , entre elementos de S , e uma relação R' , entre elementos de M . Além de associar elementos de S a elementos de M entre si, é fundamental que as funções m e m' preservem essas relações. Mais uma vez em símbolos:

$$xRy \Leftrightarrow x'R'y'$$

O modelo matemático m também pode ser chamado de: uma representação matemática, uma modelagem matemática; ou uma matematização. A função inversa m' é chamada uma **interpretação** de M ou um **modelo concreto** de M .

Nas palavras de Barreto: “Enquanto m abstrai uma situação, tem-se que m' situa uma abstração.”

Os esquemas abaixo, extraídos de Barreto (1988), ilustram essas ideias:

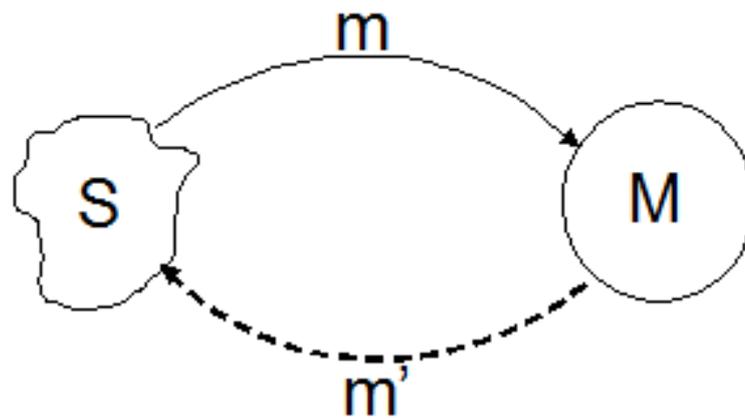


Figura 05

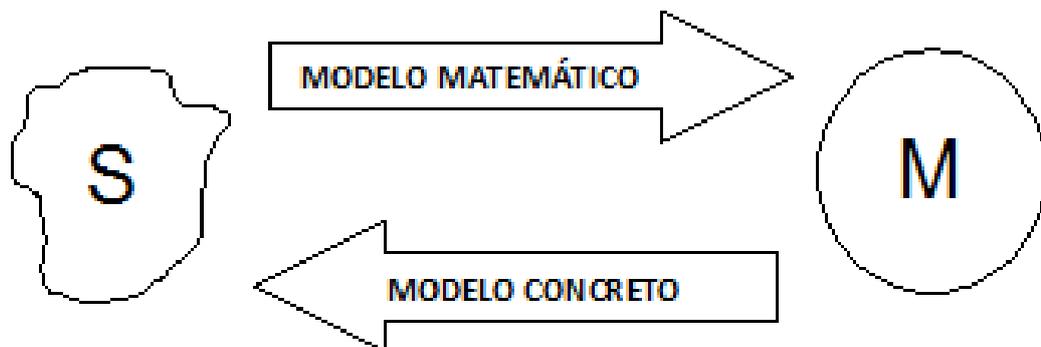


Figura 06

Em suma:

- m identifica a estrutura M como um modelo matemático da situação S .
- m' identifica a situação S como sendo um modelo concreto da estrutura M .

Vamos, agora, procurar utilizar essas ideias gerais na construção de um modelo matemático.

4.3. Simetria

4.3.1. Uma primeira observação

Já comentamos que não é simples a tarefa de encontrar um modelo matemático com um grau de generalidade compatível com a multiplicidade de ocorrência do fenômeno de simetria. Além do mais, observa-se que a simetria recebe um tratamento conceitual bastante diversificado na literatura matemática. A despeito disso, há razoável consenso de que o modelo matemático para a simetria deve incluir os conceitos de ação de um grupo de transformações sobre um espaço e de invariância de subconjuntos desse espaço relativamente a tais transformações.

O modelo³ aqui apresentado é inegavelmente de um grau elevado de generalidade. Como ocorre frequentemente no saber científico, um modelo desse tipo requer, para o convencimento de sua validade, que sejam apresentados exemplos relevantes de fenômenos por ele modelizados. Como dissemos, o foco de nosso estudo é o conceito de simetria no ensino fundamental, por isso devemos buscar modelizar as situações encontradas nessa etapa escolar. É um fato interessante que, mesmo no ensino fundamental, precisemos de certa generalidade para modelizar as situações mencionadas, como procuramos mostrar a seguir.

Se nos ativermos ao campo da geometria, podemos formular a questão básica: que conceito expressa o que há de comum às quatro imagens reproduzidas no início deste capítulo. Mais especificamente, que conceito geométrico “unifica” os fenômenos expressos nas figuras geométricas representadas?

Das noções intuitivas mencionadas anteriormente – equilíbrio, harmonia, repetição, perfeição, congruência entre partes – iremos, inicialmente, escolher a de **repetição de partes da figura geométrica**. Essa repetição pode ser modelizada pela iteração de transformações geométricas no plano e pela ação delas sobre figuras geométricas contidas nesse plano. Em seguida, entra em cena o outro

³ O modelo aqui discutido, como ocorre com frequência com conceitos fundamentais, inclui, como parte integrante, outros modelos matemáticos, o que o torna, na verdade, um macromodelo (Lima, 2012).

aspecto da simetria: a invariância da figura geométrica “inteira” com respeito à ação dessa transformação, feitas algumas hipóteses matemáticas adicionais no caso das duas últimas imagens.⁴

No entanto, mesmo no material tratado no ensino fundamental surgem questões que requerem modelos mais gerais do os que se obtêm como iteração de transformações puramente geométricas no plano. Por exemplo, surge a indagação:

Podemos levar em conta a cor das figuras no estudo de simetria em geometria, sabendo-se que a cor não é um atributo geométrico das figuras?

Em particular, considerando as cores, a simetria que existe nas figuras geométricas não é perdida?

A ideia para a construção de um modelo no qual possamos levar em conta as cores é considerar não apenas as figuras geométricas (que são subconjuntos do plano), mas as figuras geométricas acompanhadas por uma **função de atributos**. Tal função associa a cada ponto do plano um atributo desse ponto. Essa ideia é análoga à que se emprega no campo da computação gráfica, no qual pontos do plano são associados a um valor em um espaço de cores. Por exemplo, esse espaço pode ser formado por triplos ordenados (x,y,z) em que x , y , z representam, respectivamente, os percentuais das cores vermelho (R), verde (G), azul (B) na constituição da ‘cor do ponto’. Esse é o chamado sistema tricromático RGB.

Vemos, nesta altura, que o objeto a respeito do qual desejamos falar de simetria é formado por um par: uma figura geométrica e uma função de atributos dessa figura. Além disso, desejamos um conjunto de transformações que atue sobre esses objetos, gerando “repetição de padrões”.

Na seção seguinte, procuramos abordar a questão acima. Vamos nos apoiar em Lima (2012).

⁴ Como veremos adiante no caso da translação e da translação seguida de uma reflexão, é necessário supormos que a imagem é repetida nos dois sentidos de modo ilimitado.

4.3.2. Simetrias geradas por isometrias do plano euclidiano

Para apresentar um modelo para as simetrias que iremos analisar nos livros didáticos, denotemos por E o plano euclidiano, no qual é tomada a distância usual entre dois de seus pontos, aqui denotada por d .

Uma isometria é uma função de E sobre E que preserva distâncias, ou seja, é uma transformação sobrejetiva $T : E \rightarrow E$, tal que, para todo x e para todo y :

$$d(T(x), T(y)) = d(x,y).$$

Não é difícil provar que toda isometria definida em E é injetiva e, portanto, uma bijeção de E sobre E .

Representemos por Π o grupo das isometrias no plano euclidiano E (subgrupo do conjunto de todas as bijeções de E sobre E).

Tomemos uma isometria T definida no plano euclidiano. Agora, sejam A e B duas figuras geométricas planas, ou seja, dois subconjuntos do plano euclidiano.

Definição

Diremos que a figura B é simétrica à figura A , se existe uma isometria T , tal que $T(A) = B$.

Neste caso, sabemos que $A = T^{-1}(B)$ e diremos, então que A e B são simétricas entre si com respeito à isometria T .

Suponhamos que A é uma figura geométrica e que T é uma isometria no plano euclidiano tal que

$$T(A) = A.$$

Dizemos, então, que

A é T -simétrica a si mesmo,

ou, simplesmente,

A é T -simétrica.

Quando A é T -simétrica, observamos que a figura A é **invariante** pela isometria T .

Um fato importante é que o conjunto de todas as isometrias em E que deixam A invariante forma um subgrupo das isometrias em E , denominado

grupo das simetrias da figura geométrica A .

Pode ser demonstrado que o grupo de simetrias do plano euclidiano E , contém quatro subgrupos fundamentais, os subgrupos das: reflexões relativamente a um eixo; rotações em torno de um ponto; translações; e translações seguidas de uma reflexão. Isso será detalhado na seção 4.3.4.

Se T é uma transformação em E , podemos provar que, para todo número natural n , também são transformações em E as seguintes funções:

$$T T = T^2; \quad T T^2 = T^3; \quad \dots; \quad T T^{n-1} = T^n,$$

$$T^{-1} T^{-1} = T^{-2}; \quad T^{-1} T^{-2} = T^{-3}; \quad \dots, \quad T^{-1} T^{-(n-1)} = T^{-n}.$$

É comum adotarmos a convenção de escrever a transformação identidade como:

$$I(x) = T^0(x).$$

Dessa forma, se T é uma transformação em E , obtemos uma sequência de transformação em E , dada por:

$$\dots, T^{-n}, \dots, T^{-3}, T^{-2}, T^{-1}, T^0, T^1, T^2, T^3, \dots, T^n, \dots$$

Esse conjunto de transformações constitui-se em um subgrupo do grupo das transformações em E , denominado subgrupo cíclico gerado por T . Tal subgrupo por ser finito ou infinito. Será finito e de ordem k , se $T^k = I, k > 1$.

Resulta do que se disse acima, que a existência de uma simetria em uma figura geométrica implica em outras simetrias da mesma figura. Essas podem ser em número finito ou infinito.

Antes de prosseguir com as considerações sobre essas transformações básicas, abordaremos um modelo que permita que se leve em conta as figuras geométricas coloridas.

4.3.3. Simetria e cor

A ideia básica para que se possa considerar a simetria de figuras com cores é definir o conceito de imagem gráfica⁵.

Definição

Uma **imagem gráfica** é um par ordenado (A, λ) em que A denota uma figura geométrica e λ é uma função de atributos.

Já mencionamos que uma função de atributos pode ser construída como uma função definida no plano euclidiano que associa a cada ponto um triplo ordenado de números que representam os percentuais de determinadas cores básicas na composição da cor do ponto. Podemos dizer, então, que λ é uma função definida no plano e assumindo valores no conjunto \mathbb{R}^3 .

Nesse contexto, se T é uma isometria, dizemos que os objetos gráficos são T -simétricos entre si quando:

$$\begin{aligned} T(A) &= B, \\ \lambda(x) &= \lambda(Tx), x \in A, \\ \lambda(y) &= \lambda(T^{-1}y), y \in B. \end{aligned}$$

⁵ Este conceito é análogo ao de objeto gráfico, adotado por Gomes e Velho (2008).

Dizer que imagem gráfica (A, λ) é T -simétrica a si mesmo equivale a afirmar que:

$$\begin{aligned} T(A) &= A, \\ \lambda(x) &= \lambda(Tx), x \in A, \\ \lambda(y) &= \lambda(T^{-1}y), y \in A. \end{aligned}$$

Podemos afirmar que a transformação T deixa invariante a figura A e o seu colorido. Fixada uma imagem gráfica (A, λ) , podemos provar que o conjunto $\Sigma_{(A, \lambda)}$ das isometrias que deixam a imagem gráfica (A, λ) invariante é um subgrupo das isometrias do plano euclidiano no plano euclidiano.

4.3. Isometrias básicas

No ensino escolar atual, o termo simetria, na maioria das vezes, é tomado como sinônimo de simetria de reflexão. Contudo, no plano há quatro tipos básicos de transformações que preservam distâncias, isto é, há quatro tipos de isometrias: reflexão, translação, rotação e reflexão seguida de translação. Cada uma dessas isometrias gera figuras geométricas planas⁶ simétricas a outras figuras geométricas e também figuras geométricas simétricas a si mesmo.

Essas isometrias básicas são descritas, resumidamente, a seguir.

Seja r uma reta no plano euclidiano. Dado um ponto P , a **reflexão** de P em relação à reta r é o ponto $T(P) = P'$, dado por:

- Se P pertencer à reta r , $P' = P$;
- Se P não pertencer à reta r , P' é tal que a reta r é a mediatriz do segmento PP' .

⁶ Chamaremos apenas de figuras geométricas.

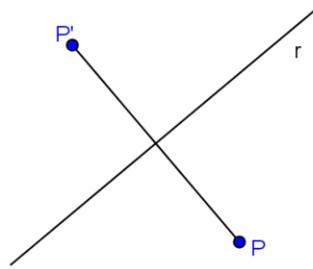


Figura 07

A noção de translação está intimamente relacionada com o conceito de vetor (do Latim “vehere” = transportar).

Uma translação fica completamente determinada quando conhecemos um segmento orientado AB em que A é a origem e B a extremidade. E o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes⁷ a AB é o vetor $v = \overrightarrow{AB}$.

Dados um segmento orientado AB não nulo e um ponto P não alinhado com a AB em um plano, existe um único ponto Q nesse plano que é o quarto vértice do paralelogramo $ABPQ$ que tem AB e AP como lados.

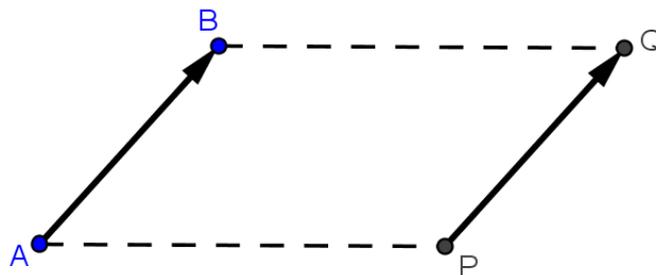


Figura 08

Diz-se que o segmento orientado AB trasladou o ponto P para a posição Q .

Se o ponto P for alinhado com A e B , tomamos outro segmento orientado CD equipolente ao segmento orientado AB e procedemos como no caso anterior formando a translação do ponto Q pelo segmento orientado CD .

⁷ Dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

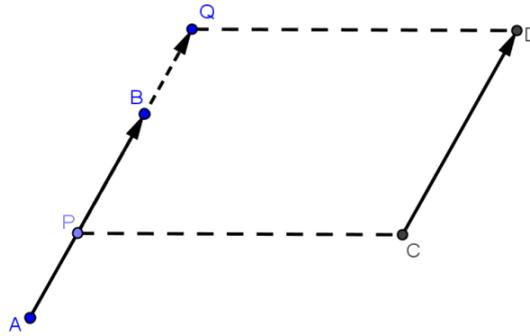


Figura 09

Podemos, então, definir outra transformação no plano euclidiano. Dado o segmento orientado AB e um ponto P a **translação** T_{AB} é definida por $T_{AB}(P) = Q$, sendo Q o ponto obtido pelo processo descrito nos parágrafos antecedentes.

Passemos para as rotações.

Sejam O um ponto tomado no plano euclidiano E e $A\hat{O}B$ um ângulo orientado de vértice O . A orientação do ângulo $A\hat{O}B$ pode ser dada considerando OA a primeira semirreta e OB a segunda. Seja α a medida da amplitude do ângulo orientado $A\hat{O}B$. A **rotação** de centro O e medida α é a transformação, definida para todo P $\rho_{O,\alpha}(P) = P'$, tal que, para todo P :

- P' e P são equidistantes de O ;
- A medida da amplitude do ângulo orientado definido por P, O e P' é igual a α .

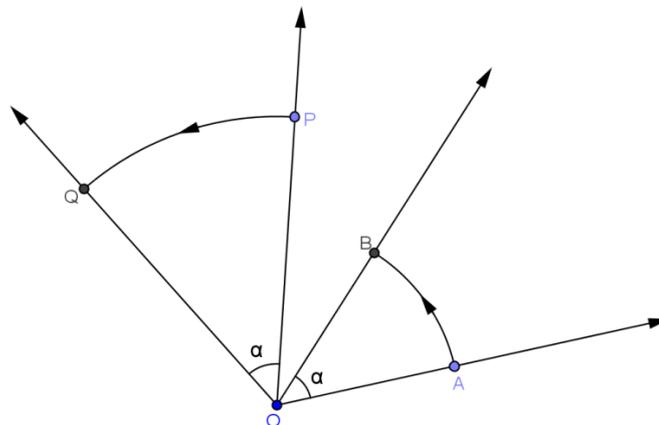


Figura 10

A **reflexão seguida de translação** (ou reflexão com deslizamento) é definida do modo seguinte.

Sejam $v = \overrightarrow{AB}$ um vetor não-nulo e r uma reta paralela a v no plano E .

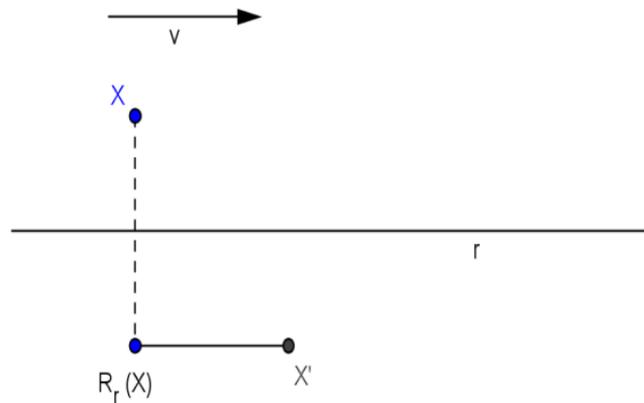


Figura 11

A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor v e pela reta r , é a transformação $T = T_v \circ R_r$, obtida fazendo a translação T_v seguida da reflexão R_r .

É possível demonstrarmos que as quatro transformações definidas nos parágrafos precedentes são isometrias no plano euclidiano, ou seja, são transformações que preservam a distância entre dois pontos quaisquer e suas respectivas imagens pela transformação.

Nas definições, fica estabelecida a imagem de um ponto arbitrário no plano. Para cada ponto P da figura geométrica original existe um correspondente ponto P' na figura transformada. Considerando todos os pontos P de uma figura os pontos imagens, pela transformação, formam a figura imagem. Um fato que distingue uma translação ou uma rotação de uma reflexão é que nas duas primeiras o sentido de percurso de uma curva fechada é preservado após a ação da transformação, enquanto na última tal sentido é invertido⁸. Dizemos que uma isometria preserva a

⁸ O conceito de sentido de percurso pode ser modelizado sem apelo a movimentos físicos, mas evitaremos fazê-lo aqui. Em vez disso, recorremos a uma ideia intuitiva: uma curva fechada simples no plano pode ser percorrida em apenas dois sentidos, um deles concordante com movimento **horário** dos ponteiros de um relógio analógico apoiado no plano e o outro contrário a tal movimento,

orientação do plano quando o ponto P' percorre a figura geométrica transformada mantendo o mesmo sentido de percurso determinado pelo ponto P , ao percorrer a figura geométrica original. A relação entre as isometrias no plano e a preservação do sentido de percurso, a despeito de ser um fato importante no estudo da simetria, não será abordado neste trabalho.

O quadro a seguir ilustra as isometrias básicas, acrescentado informações sobre os seus pontos fixos e preservação ou não do sentido de percurso.

Quadro 01: Isometrias Básicas

Isometria	Figura geométrica	Pontos fixos	Sentido de percurso
Reflexão com relação a uma reta (produzir sua imagem no “espelho”)		Infinitos	Inverte
Translação (mover sem girar ou refletir)		Nenhum	Preserva
Rotação (girar ao redor de um ponto)		Um	Preserva
Reflexão seguida de translação (combinar uma reflexão com uma translação)		Nenhum	Inverte

4.4. Retorno aos exemplos iniciais do capítulo

que se denomina movimento **anti-horário** de tal relógio. Quando tratamos de um curva simples fechada no plano e escolhemos um desses dois sentidos, dizemos que temos uma **curva orientada**.

É legítimo indagarmos como se podem entender os exemplos iniciais do capítulo como modelos concretos do modelo geral proposto nas seções anteriores. E procuramos fazer nesta última seção.

4.4.1 Simetria de reflexão

Tomemos a figura geométrica representada na Figura 1, no início do capítulo, e vamos indicar progressivamente os elementos componentes do modelo apresentado nas seções anteriores.

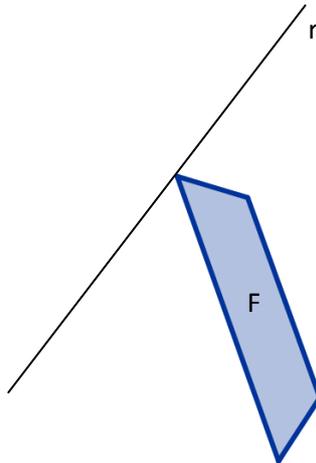


Figura 12

Consideremos a reta r que é perpendicular a um dos lados do quadrilátero, conforme indicado no desenho acima e definamos a isometria T_r do plano euclidiano que consiste na reflexão em relação ao eixo r . A imagem da figura geométrica F pela transformação T_r é a figura geométrica $G = T_r(F)$ indicada no desenho a seguir. Observamos que a reunião de F com G constitui-se na figura geométrica representada na Figura 1, no início do capítulo.

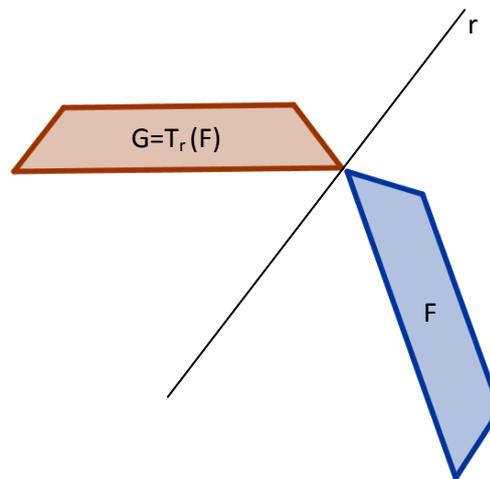


Figura 13

Diremos que a figura geométrica G é T_r -simétrica à figura geométrica F . Além disso, como $T_r T_r = I$, concluímos que $T_r^{-1} = T_r$ e que F é T_r -simétrica a G .

Agora, se considerarmos a figura geométrica $H = F \cup G$, resulta que H é T_r -invariante e, portanto, T_r -simétrica a si mesmo, ou, mais simplesmente, T_r -simétrica. Podemos dizer que a figura geométrica H possui simetria de reflexão com relação ao eixo r .

Observamos, também que a sequência de iterados da isometria T_r que deixa H invariante consiste apenas de dois elementos I e T_r , constituindo-se, assim, em um subgrupo de ordem dois do grupo das isometrias do plano.

As considerações acima dizem respeito à figura geométrica H e não à figura colorida. Se levarmos em conta a cor, a imagem gráfica (que é um par figura geométrica - cor) não possui simetria com respeito à isometria T_r .

4.4.2 Simetria de rotação

Tomemos a figura geométrica representada pela Figura 2 e procedamos de modo análogo ao da seção anterior. Consideremos uma das “pétalas”, que denotamos por F_1 . Definamos a isometria $T = \rho_{O,90^\circ}$ como a rotação de 90° no sentido anti-horário, em torno do ponto O indicado no desenho a seguir.

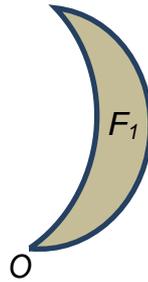


Figura 14

O efeito de T sobre F_1 é produzir a figura geométrica $F_2 = T(F_1)$:

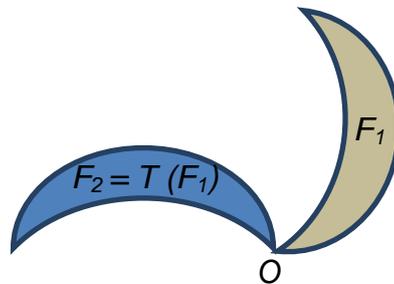


Figura 15

Diremos que a figura geométrica F_2 é T -simétrica à figura geométrica F_1 . Além disso, se $T^{-1} = \lambda_{O, 90^\circ}$ é a rotação de 90° em torno do ponto O , no sentido anti-horário, concluímos que F_1 é T^{-1} -simétrica a F_2 .

Prosseguindo, de modo análogo, obteremos a figura geométrica

$$F_3 = T(F_2) = T(T(F_1)) = T^2(F_1),$$

que é T -simétrica a F_2 e é T^2 -simétrica a F_1 :

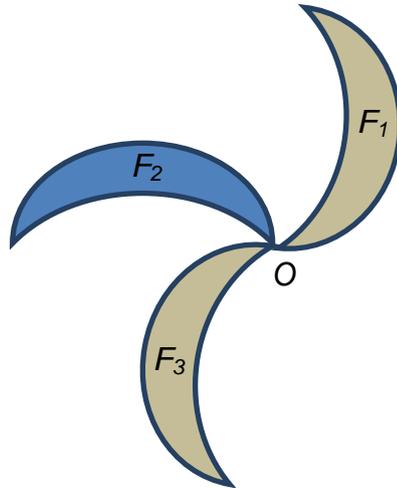


Figura 16

Na etapa seguinte, obtemos uma figura geométrica que é congruente à representada na Figura 2 do início do capítulo e observamos que:

$$F_4 = T(F_3) = T(T(F_2)) = T^2(F_2) = T^2(T(F_1)) = T^3(F_1).$$

Podemos dizer que: F_4 é T -simétrica a F_3 ; T^2 -simétrica a F_2 ; e T^3 -simétrica a F_1

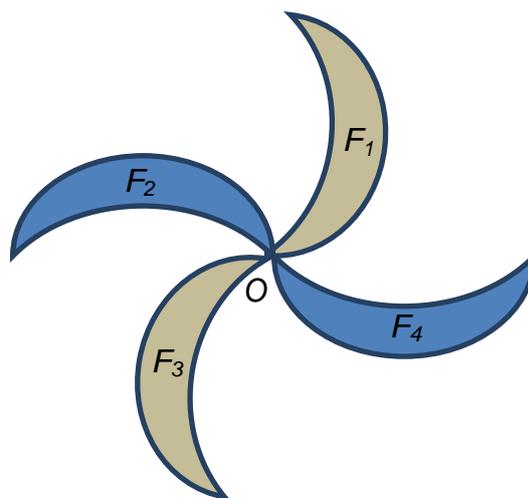


Figura 17

O fato importante é que, se considerarmos a figura geométrica F como:

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4,$$

concluimos que F é T -invariante e, portanto, T -simétrica a si mesmo, ou, mais simplesmente, T -simétrica. Podemos dizer que a figura geométrica F possui simetria de rotação de 90° no sentido anti-horário, em torno do ponto O . Da exposição teórica feita em seções anteriores, resulta que a figura F possui uma sequência infinita de simetrias de rotação dada por:

$$\dots, T^{-n}, \dots, T^{-3}, T^{-2}, T^{-1}, T^0, T^1, T^2, T^3, \dots, T^n, \dots$$

Como $T^4 = T^0 = I$, notamos que tal sequência possui apenas quatro elementos distintos e o subgrupo das simetrias da figura geométrica tem ordem quatro. Mais detalhadamente, verificamos que a figura geométrica F tem simetria relativa às rotações de 180° , 270° , 360° , 450° , ... Se considerarmos, analogamente, a rotação no sentido horário, representada pelo ângulo de medida -90° , a figura geométrica F terá então, simetria em relação às rotações de $\dots, -270^\circ, -180^\circ, -90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, \dots$. De todas essas rotações as únicas distintas entre si são as de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

Novamente aqui, aplicam-se as considerações feitas com respeito a se levar em conta a imagem gráfica e não apenas a figura geométrica. De fato, a imagem gráfica associada à figura F não possui simetria relativamente ao grupo de isometrias gerado por T .

4.4.2 Simetria de translação e de reflexão seguida de translação

Os dois tipos de isometria apontados na seção 4.3, de translação e de reflexão seguida de translação geram simetrias correspondentes e que modelizam as duas situações representadas nas Figuras 3 e 4, apresentadas no início deste capítulo. O procedimento a ser adotado nessa modelização e as considerações sobre simetria são análogas às que foram feitas relativamente às simetrias de reflexão e de rotação, com uma diferença importante, que passamos a explicar.

Tomemos o caso da figura geométrica indicada na Figura 3 e tomemos uma de suas “células” F_1 como a figura geométrica que poderia gerar uma figura geométrica simétrica a si mesmo relativamente a uma translação T :

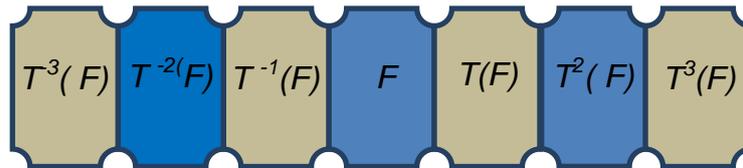


Figura 18

Como é primordial que a figura F venha a ser invariante pela sequência infinita de translações

$$\dots, T^{-n}, \dots, T^{-3}, T^{-2}, T^{-1}, T^0, T^1, T^2, T^3, \dots, T^n, \dots$$

é necessário supor que F seja representada por uma sequência infinita de “células” básicas. Noutras palavras para podermos falar de simetria de translação temos que supor que a figura geométrica em estudo seja ilimitada.

Comentário análogo podemos fazer na modelização da situação representada na Figura 4 do início do capítulo, em que a isometria em causa passa a ser uma reflexão seguida de translação.

Feita essas ressalvas importantes valem para os presentes casos de isometria as considerações feitas sobre simetria nas seções relativas às isometrias de reflexão e de rotação, incluídas a que se referem à questão da cor.

4.5 Comentário final do capítulo

Do exposto neste capítulo, resumimos que um modelo matemático para o conceito de simetria recorre a dois elementos básicos:

- a ação de um grupo de transformações sobre um conjunto, que pode ser constituído por uma figura geométrica ou por uma figura geométrica emparelhada com uma função de atributos;
- a invariância de alguns subconjuntos com respeito a ação do grupo de transformações.

No âmbito das figuras geométricas no plano e considerando o grupo das isometrias no plano euclidiano, diremos que:

- uma figura geométrica G é T -simétrica à figura geométrica F se $G = T(F)$, sendo T uma isometria no plano;
- uma figura geométrica F é T -simétrica a si mesma, ou apenas T -simétrica, se F é invariante pela ação de T , isto é, se $F = T(F)$, sendo T uma isometria no plano.
- há quatro isometrias básicas no plano euclidiano – reflexão em relação a um eixo, rotação em torno de um ponto, translação definida por um vetor e reflexão seguida de translação. Tais isometrias que geram as simetrias correspondentes.

No presente estudo, um dos nossos objetivos é investigar se os elementos básicos acima resumidos são construídos de modo planejado e consistente na abordagem adotada em coleções de livros didáticos presentes no ensino fundamental.

CAPÍTULO 5 OBJETIVOS

5.1 Objetivo Geral

Investigar, nos livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2010 (1º ao 5º ano) e 2011 (6º ao 9º ano), a abordagem do conceito de simetria.

5.2 Objetivos específicos

- Explicitar por meio de estudo teórico os conceitos constitutivos do conceito de simetria: um conjunto; ação de uma transformação sobre um conjunto; e a invariância em face dessas transformações.
- Identificar como são tratados nos livros didáticos de Matemática os conceitos constitutivos do conceito de simetria:
 - Identificar quais os tipos de simetria segundo a transformação a ele associada. Em particular, procurar confirmar no universo dos livros didáticos analisados a constatação feita na literatura de que há uma predomínio não devidamente justificado do estudo da simetria de reflexão no plano.
 - Verificar se os conceitos de figura geométrica simétrica a outra figura e de figura geométrica simétrica a si mesmo são tratados de forma coerente e explícita.
 - Identificar se as isometrias no plano são estudadas e, além disso, se o estudo de simetria é articulado com esse estudo.
- Identificar como é tratada a questão da cor nas imagens gráficas como critério de simetria.

- Investigar que atenção é dedicada nos livros ao conceito de simetria e como se distribuem, em cada livro e ao longo das coleções, os textos que tratam desse conceito.
- Verificar se os dados obtidos revelam a existência de um planejamento consistente na abordagem do conceito de simetria.

CAPÍTULO 6 PERCURSO METODOLÓGICO

6.1 Preliminares

A metodologia descrita por Rudio (2007), em “Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica”, fornece-nos subsídios para caracterizarmos uma pesquisa como descritiva quando comparada com uma pesquisa experimental. Uma das diferenças mais fundamentais entre a pesquisa descritiva e a experimental é que, na primeira, procura-se conhecer e interpretar a realidade, sem que haja interferência. Já na pesquisa experimental, o pesquisador manipula algum aspecto da realidade, com a finalidade de produzir determinados efeitos.

Porém, nas duas pesquisas, descritiva e experimental, há a necessidade de se trabalhar com variáveis.

De acordo com Bravo (apud RUDIO, 2007, p. 70) distinguem-se três tipos de variáveis:

- Variáveis gerais – referem-se à realidade, mas não são imediatamente empíricas e mensuráveis.
- Variáveis intermediárias – mais concretas e mais perto da realidade.
- Variáveis empíricas ou indicadoras – que apresentam aspectos da realidade, diretamente mensuráveis e observáveis.

Essas variáveis classificam-se em independentes e dependentes. A variável independente é preparadora e contribui para causar a variável dependente, que assume o papel subordinado, de efeito.

Na distinção entre pesquisa descritiva e experimental, Rudio (2007, p. 71) afirma que “descrever é narrar o que acontece e explicar é dizer como acontece”.

Na pesquisa documental os documentos são investigados com a finalidade de poder escrever e comparar usos e costumes, tendências, diferenças etc., distinguindo-se de pesquisa histórica, pois esta refere-se ao passado, enquanto que a documental estuda o presente.

Também obtemos elementos informativos em Triviños (1987), em “Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais – A Pesquisa Qualitativa em Educação”, obra em que é indicado que a maioria dos estudos realizados no campo da educação é de natureza descritiva. Contudo, as pesquisas descritivas não ficam, simplesmente, na coleta, ordenação e classificação dos dados, pois é possível estabelecer relações entre as variáveis, o que se constitui em um estudo denominado descritivo correlacional.

Outros estudos descritivos denominam-se “estudos de caso”, cujo objetivo é aprofundar a descrição de determinada realidade.

Segundo Triviños (1987, p. 111) “a análise documental” é outro tipo de estudo descritivo que fornece ao investigador a possibilidade de reunir uma grande quantidade de informação sobre leis estaduais de educação, processos e condições escolares, planos de estudo, requisitos de ingresso, livros-texto etc.”

No estudo descritivo, o investigador deve ter uma precisa delimitação de técnicas, métodos, modelos e teorias que orientarão a coleta e interpretação dos dados. E deve-se ter uma clara delimitação da população e da amostra.

Nas seções seguintes, seguiremos as etapas propostas por Triviños (1987) para uma pesquisa da natureza pretendida por nós.

6.2 Preparação das informações

No Capítulo 2, foi mencionada a relevância do PNLD no contexto do ensino fundamental em nosso país. Em vista disso, decidimos analisar os livros de Matemática destinados ao ensino fundamental aprovados no PNLD 2010 (1º ao 5º ano) e no PNLD 2011 (6º ao 9º ano), com respeito à abordagem o conceito de simetria. Tais livros estão resenhados nos respectivos guias do PNLD, que é de domínio público (www.fnnde.gov.br), e os originais encontram-se nas escolas públicas que os adotaram, tornando o material de fácil acesso.

A seguir, temos os quadros com as coleções aprovadas no PNLD 2010 e no PNLD 2011:

Quadro 02: Coleções aprovadas no PNLD 2010 (1º ao 5º ano)

Título	Autoria	Editora
A escola é nossa	Vieira, F. & Ribeiro J. & Pessoa K.	Scipione
Projeto Conviver	Milani, E. & Imenes, L. M & Lellis, M.	Moderna
Aprendendo Sempre	Luiz Roberto Dante	Ática
Porta aberta	Centurión, M. & Rodrigues, A & Neto, M.	FTD
Projeto Buriti	Gastaldi, M. R. & Gay, M. R. G.	Moderna
Ler o Mundo	Aidar, M.	Scipione
Hoje é dia de Matemática	Tosatto, C. M. & Peracchi, E. F. & Tosatto, C. C.	Positivo
Ponto de partida	Cerullo, M. I. & Shirahige, M. T. & Chacur, R.	Saraiva
Asas para voar	Souza, M. H. & Spinelli, W.	Ática
Pode contar comigo	Bonjorno, J. R. & Azenha, R. & Gusmão, T.	FTD
Fazendo e compreendendo	Sanchez, L. B. & Liberman, M. P.	Saraiva
Linguagens da Matemática	Reame, E. & Montenegro, P.	Saraiva
Projeto Pitangua	Barroso, J. M. & Corá, A.	Moderna
De Olho no Futuro	Passos, A. M. & Passo, M. M.	FTD
Novo Bem Me Quer	Rego, A. L. G. B.; Borges, E. M. F.; Miguel, V. M. S.; Marques, E. O.; Rubinstein, C.	Do Brasil

Quadro 03: Coleções aprovadas no PNLD 2011 (6º ao 9º ano)

Título	Autoria	Editora
Radix	Ribeiro, J.	Scipione
Matemática	Imenes, L. M. & Lellis, M.	Moderna
Tudo é Matemática	Dante, L. R.	Ática
Matemática na Medida Certa	Centurión, M. R. & Jakubovic, J.	FTD
Matemática	Bianchini, E.	Moderna
Matemática e Realidade	Iezzi, G. & Dolce, O. & Machado, A.	Atual
Matemática – Ideias e Desafios	Mori, I. & Onaga, D. S.	Saraiva
Vontade de Saber matemática	Souza, J. & Pataro, P. M.	FTD
A Conquista da Matemática	Giovanni Jr, J. R. & Castrucci, G.	FTD
Aplicando a Matemática	Carvalho, A. L. T. & Reis, L. F.	Casa Publicadora

Como podemos observar, o conjunto de livros aprovados nas duas edições do PNLD (2010/2011) é composto de 15 coleções destinadas aos primeiros anos do ensino fundamental e de 10 coleções voltadas para os anos finais dessa etapa escolar. O total, nesse universo, é de 115 volumes. Nesses livros, realizamos um levantamento exploratório, de todos os textos – explicações, atividades resolvidas e propostas, orientações no manual do professor, glossário, etc – que faziam referência ao conceito de simetria ou de isometrias.

Após esse levantamento, foi realizada uma análise preliminar, tomando como base algumas das categorias originadas da leitura dos Guias do PNLD e da literatura sobre o tema.

Os resultados desse extenso levantamento prévio já confirmaram a afirmação, reiterada nas fontes acima citadas, de que há uma predominância nítida do estudo da simetria de reflexão em todas as obras destinadas ao ensino fundamental. Além disso, as limitações na abordagem desse tipo de simetria, também já referidas na literatura, foram observadas nas coleções examinadas. Por exemplo, a vinculação excessiva da ideia de simetria de reflexão à ideia de “metade da figura”, o uso impreciso do espelho como suporte material associado à ideia de simetria, as ambiguidades entre plano de simetria nos objetos do mundo físico e de eixo de simetria em suas imagens gráficas, entre outras. Apesar de não as focalizarmos, no presente estudo, tais limitações didáticas trazem elementos relevantes para o entendimento do quadro geral do ensino do conceito de simetria em nossas escolas.

Na fase inicial de preparação das informações, verificamos que a investigação das questões surgidas nos estudos preliminares e no levantamento acima referido deveria focar em um universo mais restrito de obras, em benefício de maior aprofundamento. Além disso, um dos objetivos do presente trabalho era investigar a existência de um planejamento didático global para o ensino fundamental no tocante ao ensino do conceito de simetria. O exame inicial dos livros selecionados revelou que, em 4 (quatro) casos, seria possível agrupar os volumes destinados à primeira etapa do ensino fundamental com os volumes destinados à segunda fase, de modo que houvesse pelo menos um autor em comum em todos eles. Fizemos, então, a escolha de tomar como universo a ser analisado essas quatro coleções, totalizando 36 livros. Nossa escolha permitiria, assim, verificar a existência, nas quatro coleções de 1º ao 9º, de um planejamento didático para todo esse período.

O quadro a seguir mostra os quatro pares de coleções completas mencionados acima, com seus respectivos códigos:

Quadro 04: Pares de coleções do 1º ao 9º anos selecionados

Coleção Completa			Código
Título	Autoria	Editora	
A escola é nossa 1º ao 5º	Vieira, F. & Ribeiro, J. & Pessoa, K	Scipione	A
Radix 6º ao 9º	Ribeiro, J.		
Projeto Conviver 1º ao 5º	Milani, E. & Imenes, L. M. & Lellis. M.	Moderna	B
Matemática 6º ao 9º	Imenes, L. M. & Lellis, M.		
Aprendendo sempre 1º ao 5º	Dante, L. R.	Ática	C
Tudo é Matemática 6º ao 9º	Dante, L. R.		
Porta aberta 1º ao 5º	Centurión, M. & Rodrigues, A. & Neto, M	FTD	D
Matemática na medida certa 6º ao 9º	Centurión, M. R. & Jakubovic, J.		

Para analisar o universo de obras didáticas escolhido, estabelecemos as categorias a seguir descritas.

6.2 Categorização (classificação)

De acordo com os objetivos visados, fundamentados pelo quadro teórico adotado e guiados pelos levantamentos exploratórios realizados por nós nas obras escolhidas, foram estabelecidas as seguintes categorias de análise dessas coleções:

- Seleção (o quanto se estuda) e distribuição (onde se localiza) do conteúdo simetria.

- Tipos de simetria abordados: de reflexão; de translação e de rotação⁹.
- Tratamento dado aos conceitos de figuras geométricas simétricas ou de figuras geométricas simétricas a outras figuras.
- Abordagem da cor como critério de simetria.
- Abordagem das isometrias no plano e de sua relação com o conceito de simetria.

6.3 Interpretação (análise)

Esta etapa, na qual são organizados e analisados, com base nas categorias mencionadas acima, os dados obtidos nas obras escolhidas, estende-se bastante e demanda que lhe destinemos um capítulo, que será o seguinte deste trabalho.

⁹ O levantamento preliminar revelou que, nas obras analisadas, não ocorre o estudo da simetria de reflexão seguida de translação. Isso já se constitui um resultado interessante a ser analisado.

CAPÍTULO 7 ANÁLISE DOS DADOS

7.1 Seleção e distribuição do conteúdo simetria

Nesta seção, observamos qual a atenção dedicada ao conteúdo de simetria em cada volume das coleções estudadas, medida pelo número de páginas nos quais esse conteúdo é abordado.

Para a **coleção A**, os gráficos 01 e 02, que se seguem, procuram mostrar, por volume, quantas páginas trazem o conteúdo simetria e o percentual dessas páginas em relação ao total do respectivo volume.

Gráfico 01: Coleção A – Quantidade de páginas em valor absoluto do conteúdo simetria por volume.

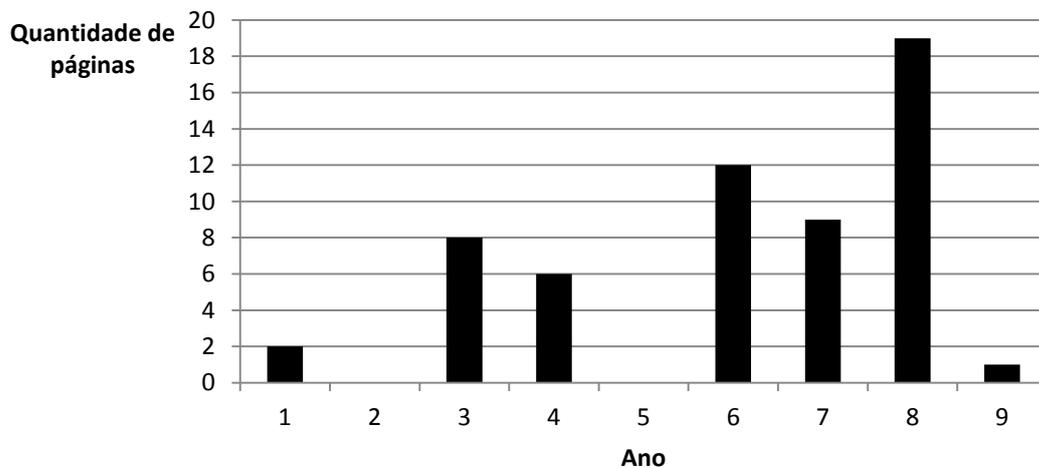
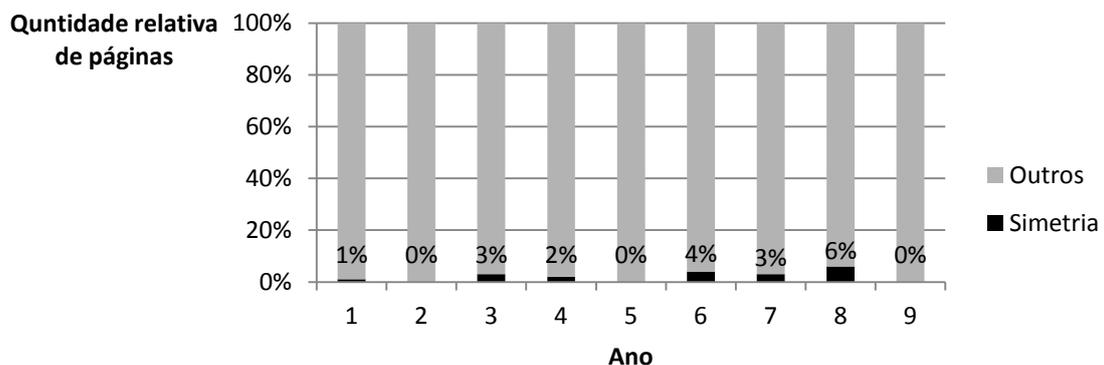


Gráfico 02: Coleção A – Quantidade relativa de páginas por volume.



Agora, para a **coleção B**, mostram-se os gráficos que representam a quantidade de páginas que contém o conteúdo simetria em valor absoluto e em valor relativo.

Gráfico 03: Coleção B – Quantidade de páginas do conteúdo simetria por volume.

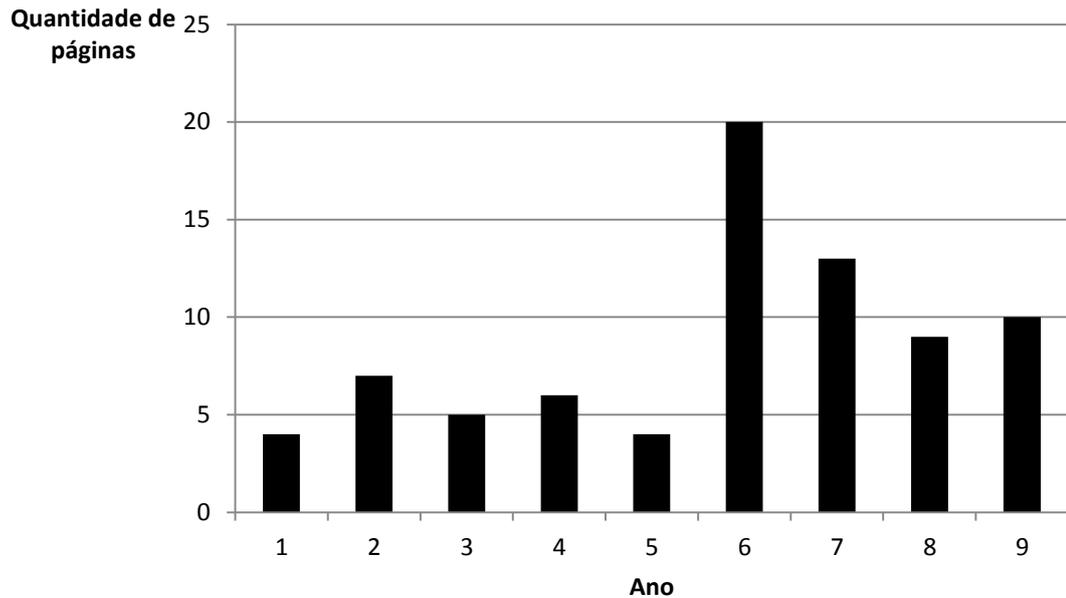
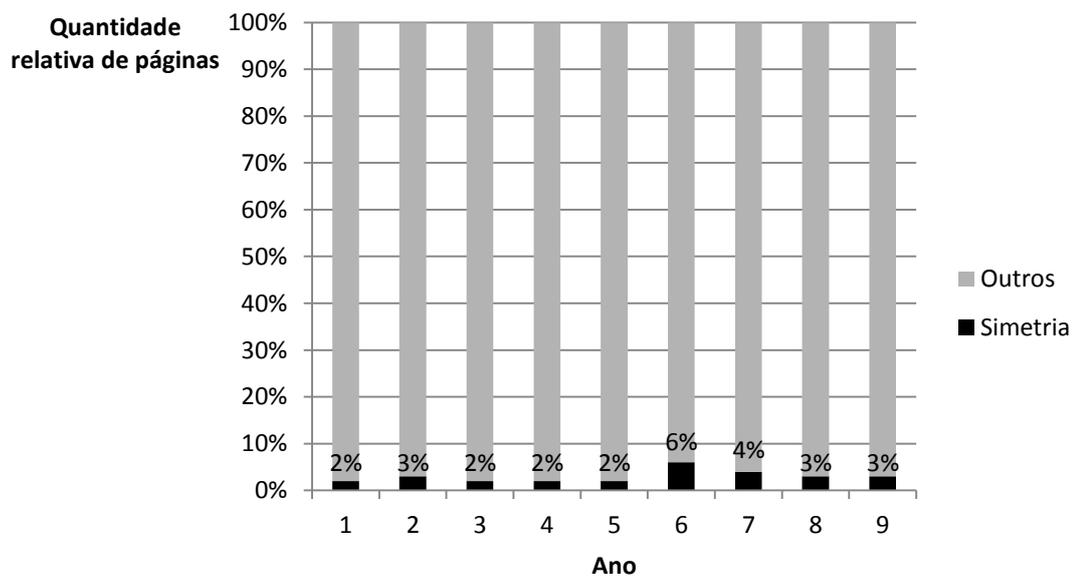


Gráfico 04: Coleção B – Quantidade relativa de páginas por volume.



A seguir, os dados referentes às **coleções C e D**.

Gráfico 05: Coleção C – Quantidade de páginas do conteúdo simetria por volume.

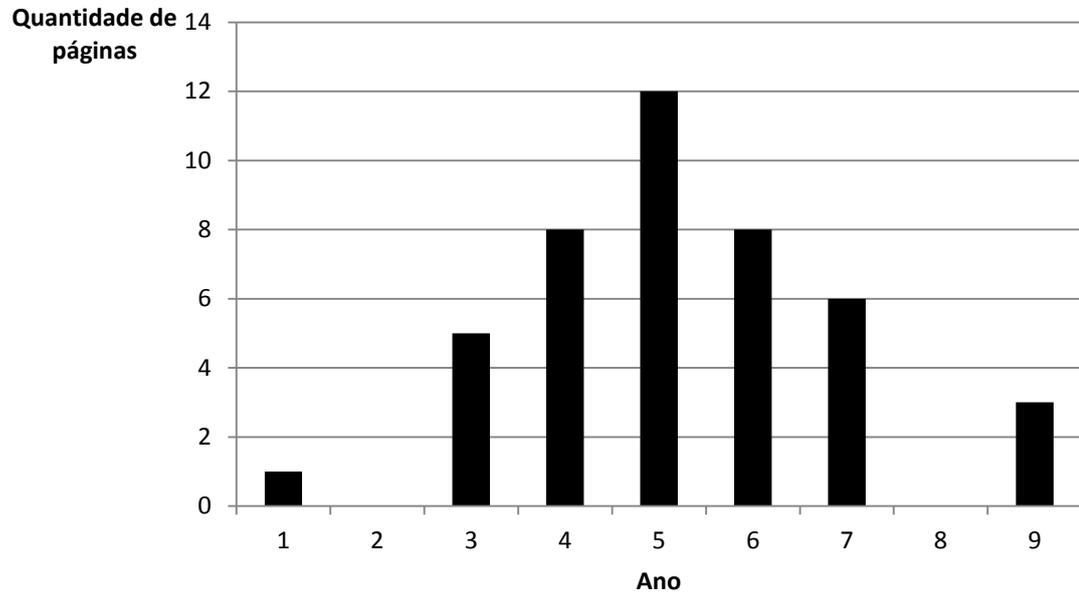


Gráfico 06: Coleção C – Quantidade relativa de páginas por volume.

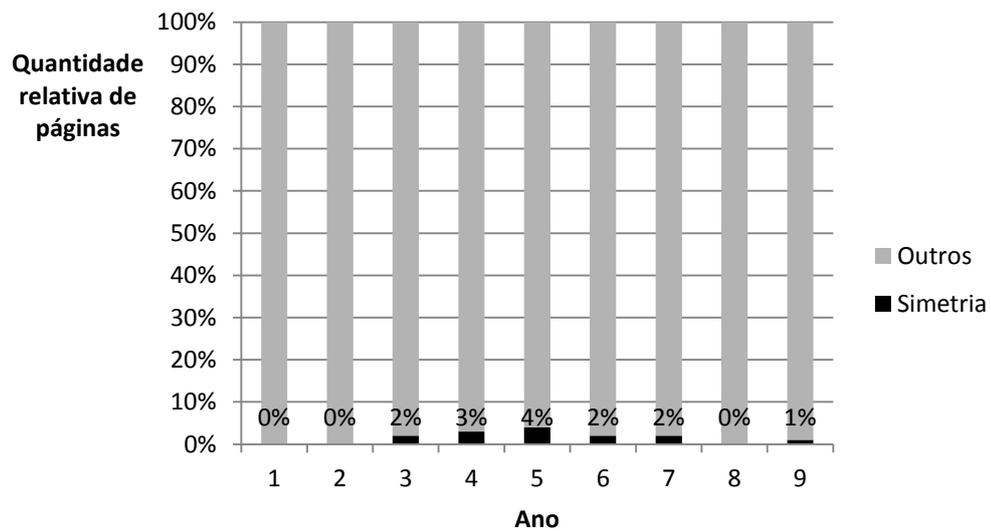


Gráfico 07: Coleção D – Quantidade de páginas do conteúdo simetria por volume

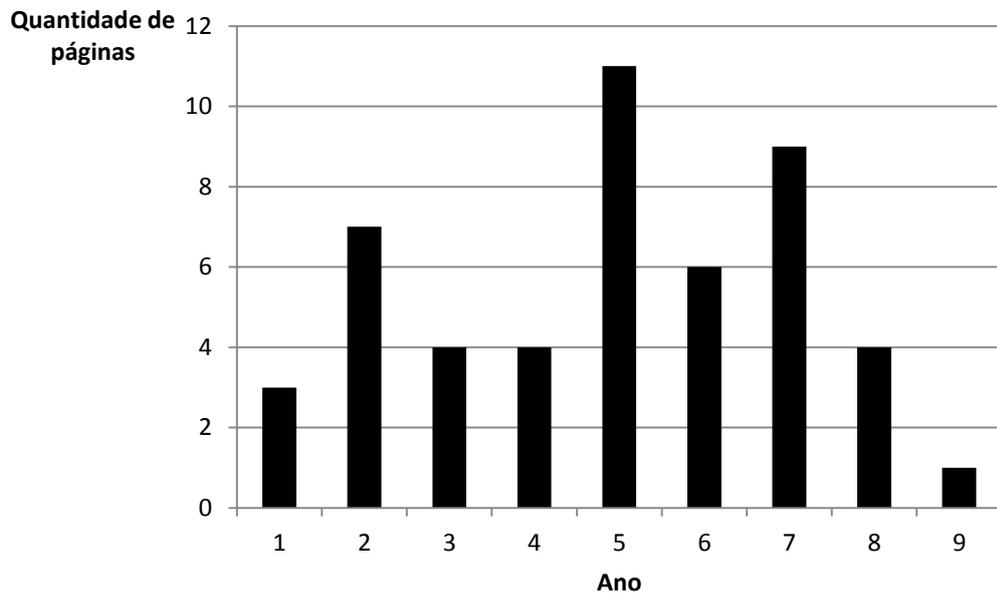
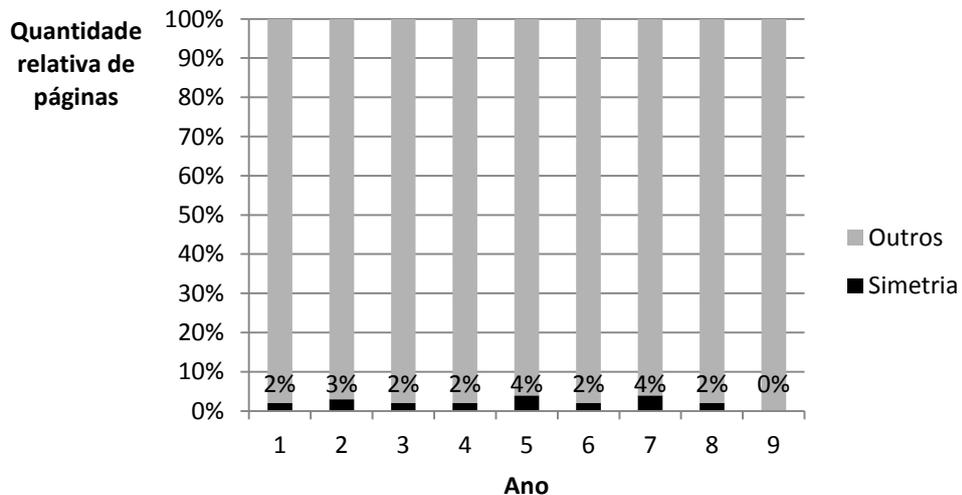


Gráfico 08: Coleção D – Quantidade relativa de páginas por volume.



A observação dos gráficos apresentados revela que não ocorre, em nenhuma das coleções, um crescimento consistente do número de páginas dedicadas ao conteúdo de simetria, ao longo dos nove anos do ensino fundamental. Ao contrário, as coleções A e C exibem uma variação muito irregular ao longo do período em foco, com ausência total do conteúdo simetria em alguns anos e concentração em outros anos. As coleções B, C e D mostram uma intrigante concentração do conteúdo no 5º ou no 6º ano, que são anos intermediários do ensino fundamental.

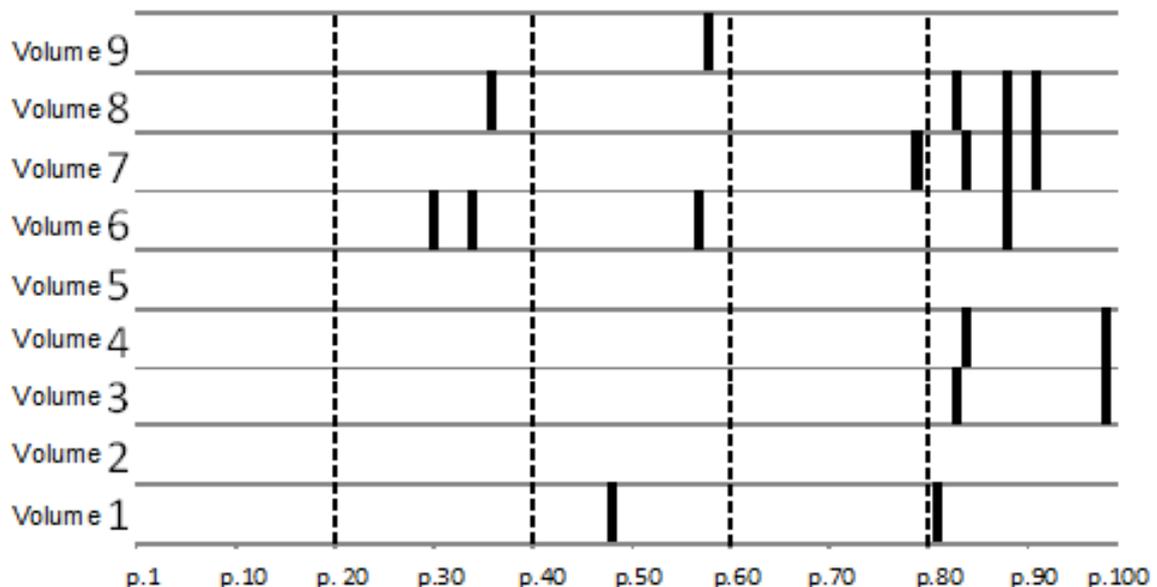
Em contrapartida, no último ano do ensino fundamental, o conteúdo simetria é praticamente ausente nas coleções A e D.

Quando levamos em conta a importância do conceito de simetria na formação científica do estudante e adotamos a concepção de que os conceitos devem ser abordados durante um longo período e em níveis progressivos de extensão e de complexidade, interpretamos como bastante insatisfatório o planejamento didático expresso nos dados obtidos nas obras analisadas.

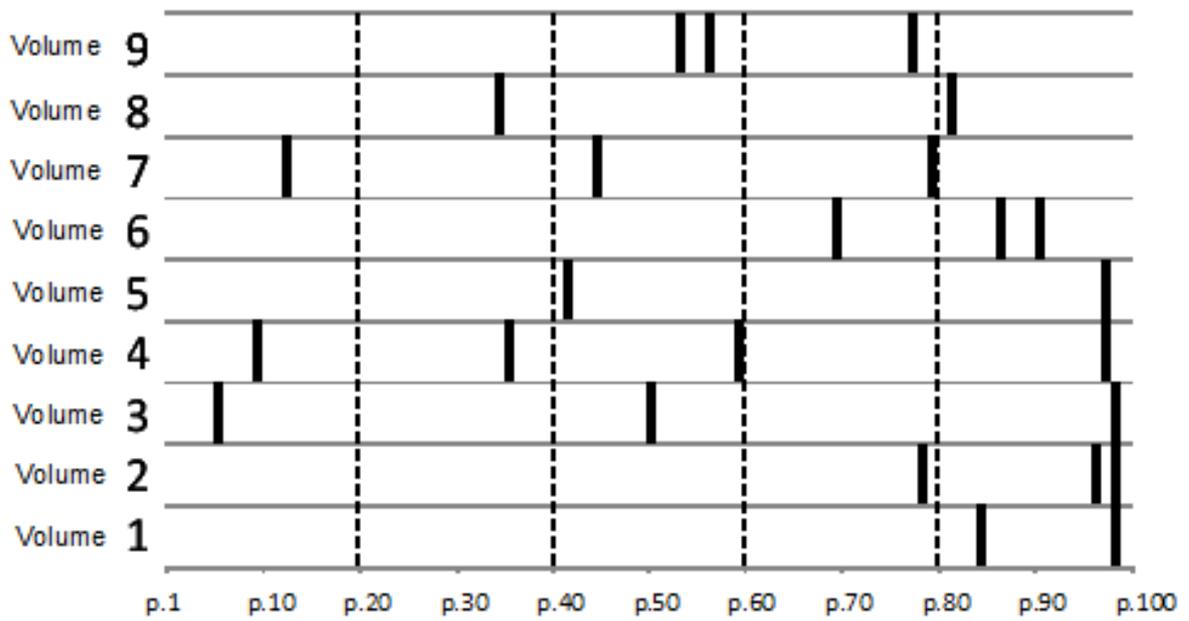
No tocante à distribuição interna do conteúdo de simetria foram coletados dados que procuram situar em que pontos de cada volume são estudados os conteúdos de simetria.

As representações gráficas que se seguem procuram mostrar essa localização relativa do conteúdo de simetria em cada volume da coleção. Para isso, uniformizamos a quantidade de páginas em toda a coleção.

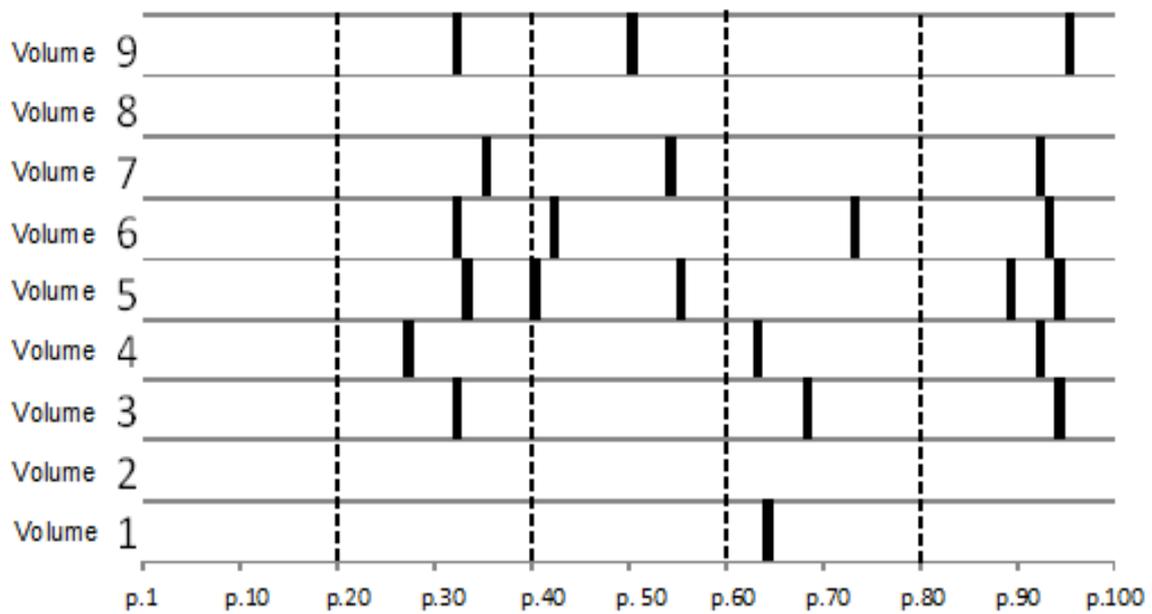
Representação Gráfica 01: Coleção A – Posições relativas das páginas em que se aborda o conteúdo simetria em cada volume.



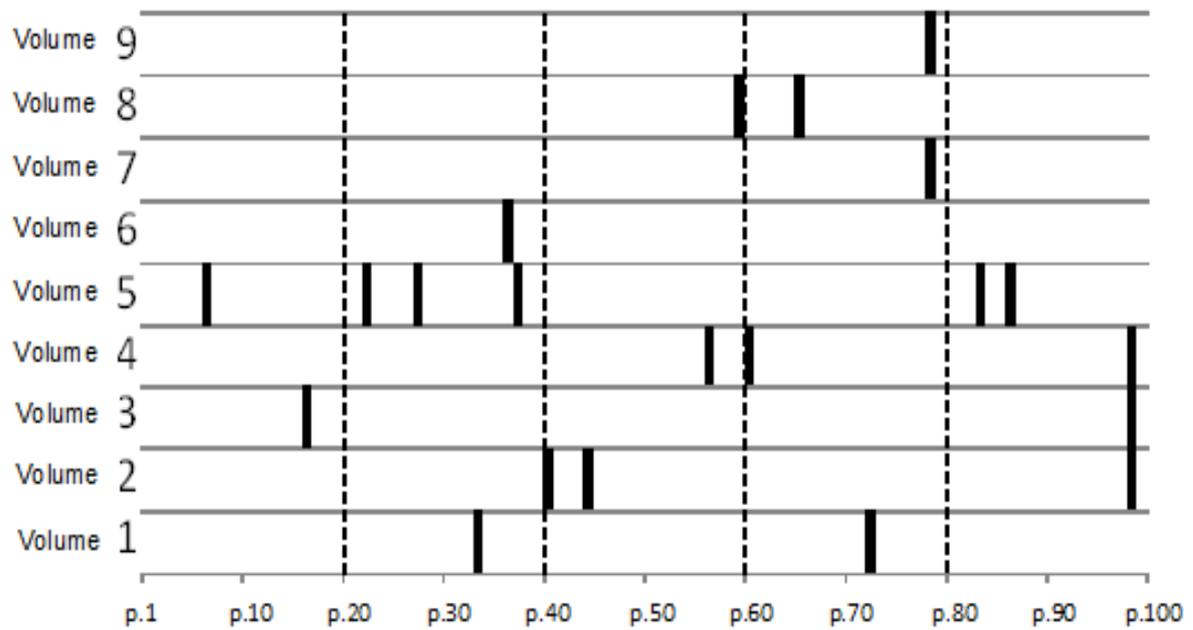
Representação Gráfica 02: Coleção B – Posições relativas das páginas que contém o conteúdo simetria em cada volume.



Representação Gráfica 03: Coleção C – Posições relativas das páginas que contém o conteúdo simetria em cada volume.



Representação Gráfica 04: Coleção D – Posições relativas das páginas que contém o conteúdo simetria em cada volume.



A coleção A destaca-se das demais por concentrar no quinto final de cada livro a abordagem do conteúdo de simetria. Dadas as limitações usuais do tempo escolar, conteúdos que se situam no fim dos livros têm menor chance de serem estudados de modo adequado. As demais coleções afastam-se dessa distorção, ainda que mantenham o viés de situar com maior frequência o estudo da simetria no quarto final de cada livro, e de quase não abordarem o tema no primeiro quinto dos volumes.

7.2 Tipos de simetria abordados

Como mencionamos no Capítulo 2, que abordou a problemática da presente investigação, tem sido apontada uma atenção quase exclusiva ao estudo da simetria de reflexão nos livros didáticos destinados ao ensino fundamental. O levantamento prévio que realizamos no universo dos livros aprovados no PNLD 2010 e no PNLD 2011, confirmaram essa constatação. É legítimo supor, em face desse viés, que para muitos estudantes do ensino fundamental simetria seja sinônimo de simetria de reflexão, em oposição ao conceito matemático de simetria.

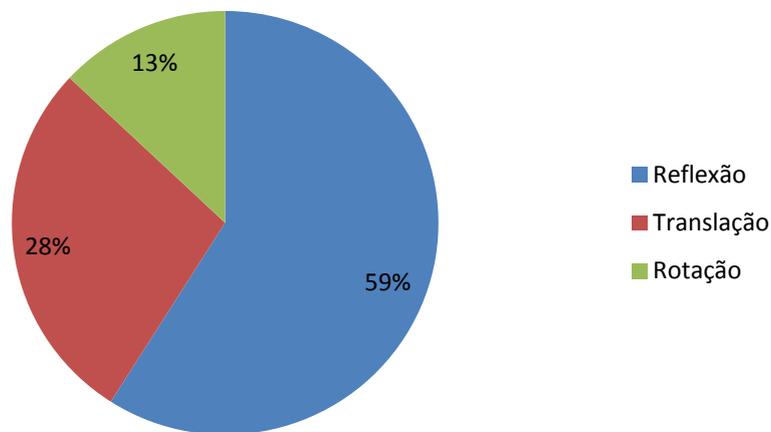
Os dados referentes às quatro coleções objeto do presente trabalho serão mostrados a seguir e, como podemos observar, apontam na mesma direção.

Quadro 05: Coleção A – Distribuição das quantidades de atividades por tipo de simetria: reflexão, translação ou rotação.

Simetria	Quantidade de atividades									Total
	Vol.1	Vol.2	Vol.3	Vol.4	Vol.5	Vol.6	Vol.7	Vol.8	Vol.9	
Reflexão	4	-	8	7	-	14	10	1	-	44
Translação	-	-	-	-	-	-	-	10	-	10
Rotação	-	-	-	-	-	-	4	17	-	21
Total	4	-	8	7	-	14	14	28	-	75

O quadro acima pode ser traduzido no gráfico:

Gráfico 09: Coleção A – Tipos de simetria

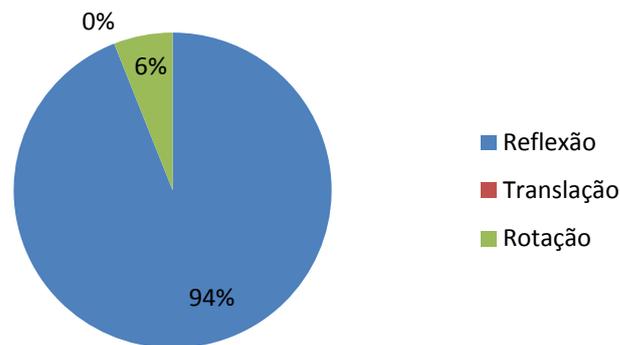


Observamos a predominância da simetria de reflexão, seguida pela de translação e de rotação, com os respectivos percentuais aproximados: 59%, 28% e 13%.

Quanto às outras três coleções, os dados expressos nos quadros e nos gráficos seguintes mostram uma atenção ainda mais acentuada na simetria de reflexão, que assume quase a exclusividade na coleção C, na qual, além disso, está ausente a simetria de translação.

Rotação	-	-	-	-	-	-	4	-	-	4
Total	8	-	7	15	19	9	9	-	-	67

Gráfico 11: Coleção C – Tipos de simetria

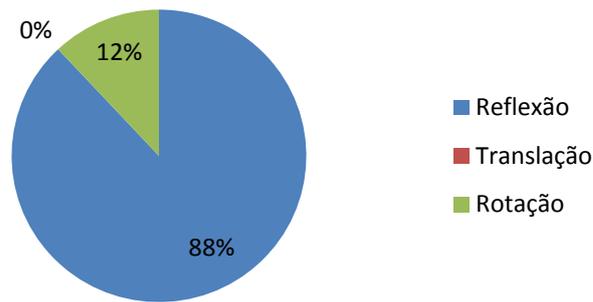


Quadro 08: Coleção D – Distribuição das quantidades de atividades por tipo de simetria: reflexão, translação ou rotação.

Simetria	Quantidade de atividades									Total
	Vol.1	Vol.2	Vol.3	Vol.4	Vol.5	Vol.6	Vol.7	Vol.8	Vol.9	
Reflexão	2	9	8	9	13	7	11	1	-	60
Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
Rotação	-	-	-	-	-	-	8	-	-	8
Total	2	9	8	9	13	7	19	1	0	68

Podemos interpretar o quadro 08 no seguinte gráfico:

Gráfico 12: Coleção D – Tipos de simetria



Cabe observar que, na coleção D foram identificadas atividades envolvendo a denominada “simetria central” que é um caso particular de simetria de rotação e que, por isso, não foi destacada no presente estudo.

7.3 Figura geométrica simétrica e figura geométrica simétrica a outra figura

Na discussão do quadro teórico, no Capítulo 4, estabelecemos o significado preciso dos conceitos “figura geométrica simétrica” e “figura geométrica simétrica a outra figura”. Tais conceitos aparecem com bastante frequência e simultaneamente nos livros didáticos. Em particular, elas foram observadas nas obras analisadas neste trabalho.

O que se torna uma questão didática relevante é que a abordagem desses conceitos em situações muito próximas se dá sem nenhuma explicação das relações existentes entre eles. O estudante é chamado a realizar atividades relativas ora a um deles ora a outro de modo indiscriminado. Pode-se mesmo conjecturar que não haja clareza de um modelo matemático, como o que é proposto no Capítulo 4 que permita a atribuição de significado preciso a cada uma das expressões em foco.

Vejamos um exemplo típico, extraído da Coleção C e que é análogo a muitos outros presentes nas demais coleções analisadas:

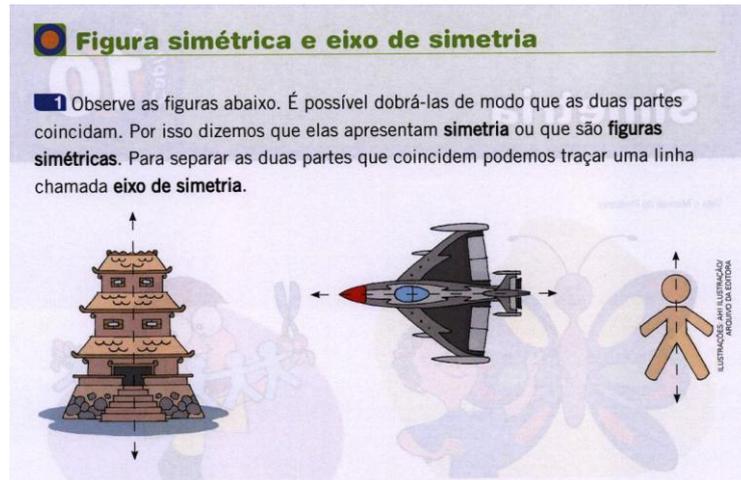


Figura 19 - Coleção C, vol. 4, p. 162

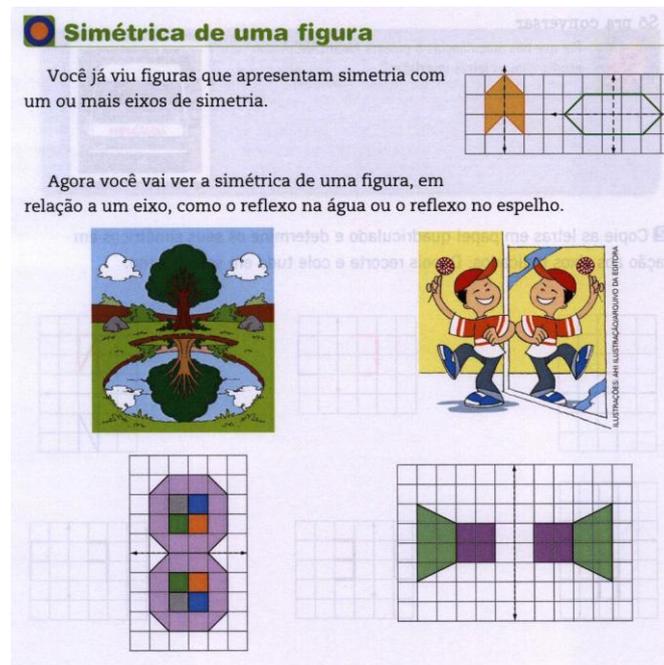


Figura 20 - Coleção C, vol. 4, p. 165

Fazemos a hipótese que a aprendizagem do conceito de simetria fica prejudicada por abordagens como essa, em que falta a explicitação de que no primeiro exemplo trata-se de figuras simétricas a si mesmas e de que, no segundo texto, também há figuras simétricas, a saber, o par formado pelas “duas partes”.

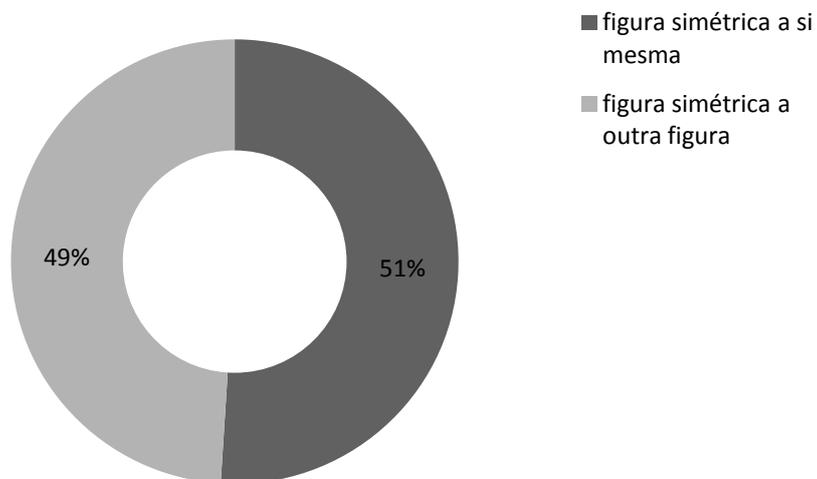
Os dados a seguir apresentados indicam que a lacuna apontada é muito disseminada nas obras analisadas. Foram observadas as numerosas ocorrências de

um objeto e do conceito sem o estabelecimento de um nexu explícito entre eles. Tais ocorrências foram representadas em uma legenda com dois itens: a) figura simétrica si mesma; b) figura simétrica a outra figura. Convém notar que a primeira dessas expressões não aparece nos livros analisados.

Quadro 09: Coleção A – Distribuição das quantidades de atividades que envolvem figura simétrica a si mesma ou figura simétrica a outra figura.

Categoria	Simetria	Quantidade de atividades									Total	Total Geral
		v.1	v. 2	v. 3	v. 4	v. 5	v. 6	v. 7	v. 8	v. 9		
Figura simétrica a si mesma	Reflexão	4	-	7	6	-	11	3	1	-	32	38
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	-	6	-	6	
Figura simétrica a outra figura	Reflexão	-	-	1	1	-	3	7	-	-	12	37
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	10	-	10	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	4	11	-	15	

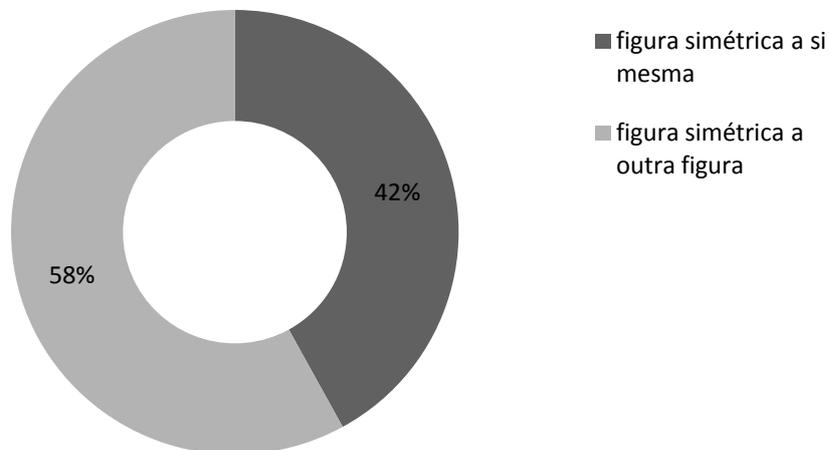
Gráfico 13: Coleção A – Atividades envolvendo figura simétrica a si mesma ou figura simétrica a outra figura.



Quadro 10: Coleção B – Distribuição das quantidades de atividades que envolvem figura simétrica a si mesma ou figura simétrica a outra figura.

Categoria	Simetria	Quantidade de atividades									Total	Total Geral
		v. 1	v. 2	v. 3	v. 4	v. 5	v. 6	v. 7	v. 8	v. 9		
Figura simétrica a si mesmo	Reflexão	4	5	8	6	3	11	4	-	3	44	52
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	4	4	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	-	2	2	4	
Figura simétrica a outra figura	Reflexão	-	-	1	-	2	19	10	8	8	48	72
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	10	4	10	24	

Gráfico 14: Coleção B – Atividades que envolvem figura simétrica a si mesma ou figura simétrica a outra figura

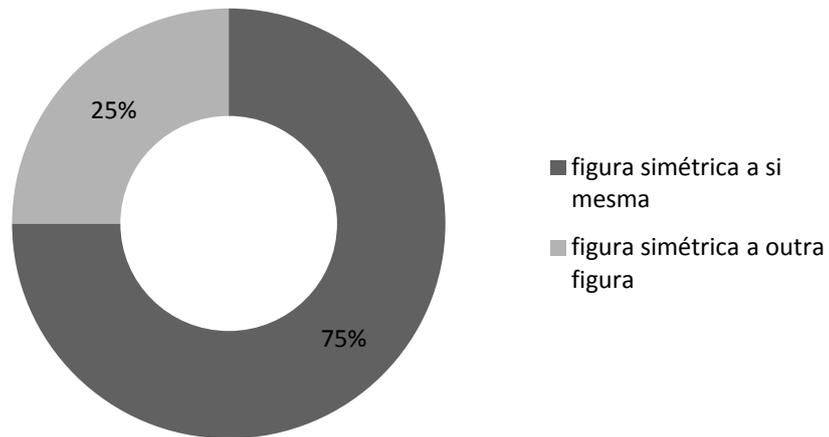


Quadro 11: Coleção C – Distribuição das quantidades de atividades que envolvem figura simétrica a si mesma ou figura simétrica a outra figura.

Categoria	Simetria	Quantidade de atividades									Total	Total Geral
		v. 1	v. 2	v. 3	v. 4	v. 5	v. 6	v. 7	v. 8	v. 9		
Figura	Reflexão	8	-	7	11	13	6	5	-	-	50	50

simétrica a si mesmo	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
Figura simétrica a outra figura	Reflexão	-	-	-	4	6	3	-	-	-	13	17
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	4	-	-	4	

Gráfico 15: Coleção C – Atividades que envolvem figura simétrica a si mesma ou figura simétrica a outra figura.

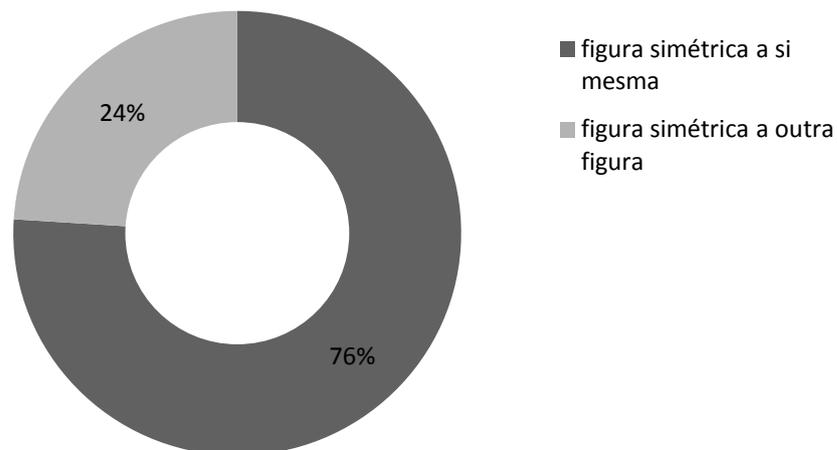


Quadro 12: Coleção D – Distribuição das quantidades de atividades que relacionam figura simétrica a si mesma e figura simétrica a outra figura.

Categoria	Simetria	Quantidade de atividades									Total	Total Geral
		v. 1	v. 2	v. 3	v. 4	v. 5	v. 6	v. 7	v. 8	v. 9		
Figura simétrica a si mesmo	Reflexão	1	8	8	6	10	5	7	1	-	46	52
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	6	-	-	6	
Figura	Reflexão	1	1	-	3	3	2	4	-	-	14	16

simétrica a outra figura	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	2	-	-	2	

Gráfico 16: Coleção D – Atividades que envolvem figura simétrica a si mesma ou figura simétrica a outra figura.



7.4 Abordagem das isometrias no plano e de sua relação com o conceito de simetria

Na descrição do modelo matemático para o conceito de simetria, fica evidenciado o papel fundamental que cabe às transformações isométricas no plano euclidiano.

Os dados obtidos no levantamento preliminar realizado em todas as coleções e, em particular, na análise detalhada das quatro coleções completas, objeto deste trabalho, evidenciou um contraste acentuado com tal concepção. De fato, o enfoque específico e explícito das isometrias é quase ausente no universo investigado. Além disso, quando esse conteúdo é abordado, suas conexões com o conceito de simetria são, quase sempre, implícitos ou muito tênues. A seguir, procuramos justificar tais afirmações, no universo das quatro coleções completas de 1^o ao 9^o anos.

De início, convém observar que os dados coletados no universo investigado mostraram uma predominância absoluta do estudo, no plano, da simetria de reflexão em relação a um eixo. Isso explica que haja nítida predominância de textos e atividades que envolvem, entre outras ações:

- a) identificar se uma dada figura geométrica possui simetria de reflexão em relação a um eixo indicado;
- b) verificar se uma figura geométrica dada possui simetria de reflexão, identificando o eixo de simetria;
- c) construir figuras geométricas com simetria em relação a um eixo dado, conhecendo uma parte da figura, em especial com suporte na malha quadriculada ou com recurso a um espelho real ou imaginado;
- d) obter figuras geométricas com simetria de reflexão recorrendo a dobradura em torno de um vinco no papel;
- e) produzir, com os recursos mencionados acima, a figura geométrica simétrica a uma dada figura, conhecendo-se o eixo de reflexão.

Podemos observar que, em nenhum desses casos, explicita-se a intervenção de uma isometria no plano, mesmo no caso da dobradura, que envolve uma rotação espacial em torno de um eixo.

Apenas nas situações, em número relativamente pequeno, que envolvem as simetrias de rotação e de translação ocorrem referências explícitas às isometrias no plano.

Tomemos a coleção A como um primeiro exemplo. Em toda a coleção, apenas nos volumes 7 e 8 estuda-se a simetria de rotação e somente no volume 8 a de translação. Convém reproduzir alguns trechos desses livros, para mostrar que, mesmo quando são tratadas as isometrias a relação delas com as simetrias não é suficientemente esclarecida. Vejamos o extrato seguinte.

Simetria de rotação

As imagens a seguir representam a figura ao lado rotacionada em torno do ponto O.

sentido horário: é o sentido do movimento dos ponteiros do relógio.

sentido anti-horário: é o sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.

Nesse caso, a figura sofreu uma **rotação** de 90° em relação ao ponto O no sentido horário.

Nesse caso, a figura sofreu uma **rotação** de 90° em relação ao ponto O no sentido anti-horário.

Nesse caso, a figura sofreu uma **rotação** de 160° em relação ao ponto O no sentido horário.

Nesse caso, a figura sofreu uma **rotação** de 180° em relação ao ponto O no sentido horário ou anti-horário.

Note que as figuras representadas acima quando giradas em torno do ponto O, de acordo com o sentido e o ângulo em que foram rotacionadas, ocupam uma posição diferente da inicial. Essas figuras são **simétricas por rotação**, em relação ao ponto O, que é o centro de simetria.

saiba QUE...

Chamamos **simetria de rotação** a transformação em que a imagem de uma figura é obtida ao girar essa figura em torno de um ponto O, percorrendo um ângulo no sentido horário ou anti-horário.

Figura 21 - Coleção A, vol. 8, p. 115

É possível supor que surjam dificuldades de aprendizagem quando o estudante depara-se com o texto acima, pois, o termo 'simetria' quase sempre vinculado, na coleção, a uma propriedade das figuras geométricas passa a ser uma transformação no plano, sem que haja uma referência explícita a essa mudança de ponto de vista. Além disso, a frase "Essas figuras são **simétricas por rotação** em relação ao ponto O, que é o centro de simetria" não deixa clara a que figuras ela se refere.

Abordagem análoga é feita com relação à simetria de translação e também neste caso, podem ser geradas ambiguidades que dificultam a aprendizagem:

Simetria de translação

Observe as figuras desenhadas na malha quadriculada.

Todos os pontos da figura A se repetem a uma mesma distância e são deslocados de forma paralela em um mesmo sentido e direção. As figuras reproduzidas mantêm tamanho e forma iguais aos da figura A. Nesse caso, dizemos que essas figuras são simétricas por translação.

Na malha quadriculada abaixo, as figuras II e III são translações da figura I.

Note que os pontos vermelhos indicados na figura II se repetem a uma mesma distância, direção e sentido em relação à figura I. O mesmo ocorre na figura III.

saiba QUE...

Chamamos **simetria de translação** a transformação em que a imagem de uma figura é obtida pelo deslocamento paralelo de todos os seus pontos a uma mesma distância, direção e sentido. Nessa simetria, são mantidos o tamanho e a forma da figura original.

Figura 22 - Coleção A, vol. 8, p. 119

No caso da coleção B, repete-se o panorama geral de ênfase na simetria de reflexão e só nos livros do 7º, 8º e 9º anos aborda-se a simetria de rotação. A simetria de translação é tratada brevemente e só no volume 9, além disso, como uma aplicação da ideia de reflexões repetidas. A questão da invariância da figura geométrica com respeito à ação de uma transformação não é tratada no caso da translação mas é mencionada de modo pontual, no caso da rotação. Além disso, é mal explicado o conceito de invariância da figura, ao se apelar para a ideia de “mesma posição”. É o que nos mostra o extrato a seguir.

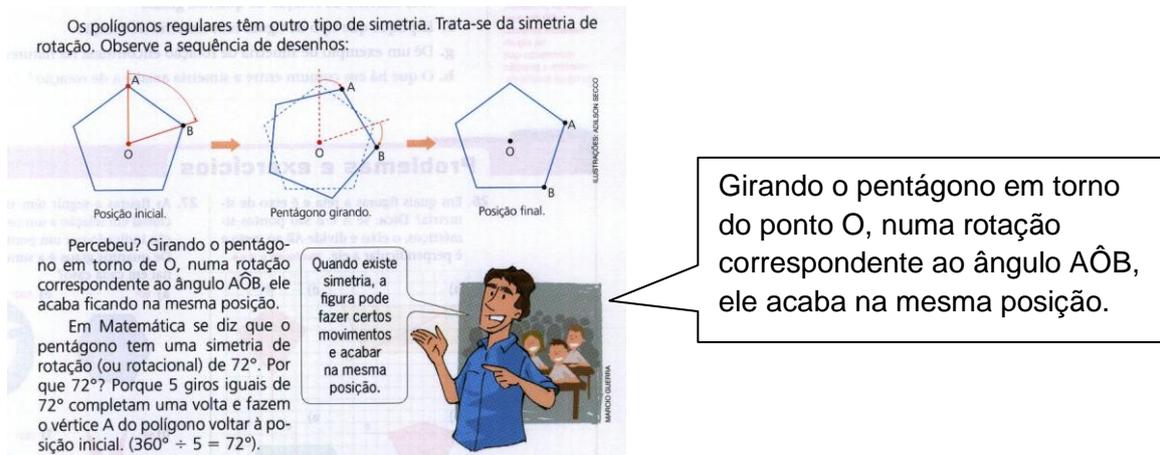


Figura 23 - Coleção B, vol. 7, p. 39

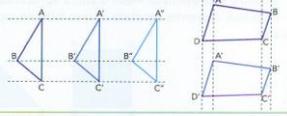
A análise da coleção C revela um caso de acentuada desvinculação do conceito de simetria do conceito de isometria no plano. Apenas no volume 7, há um reduzido número de atividades envolvendo a simetria de rotação sob a forma de simetria central. As isometrias do plano são mencionadas em uma única página no volume 9, como um texto facultativo e sem a menor referência ao conceito de simetria, como se pode verificar na reprodução a seguir.

3. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Podemos fazer certos movimentos ou transformações com figuras do plano de modo que sua forma e seu tamanho sejam conservados. Acompanhe alguns exemplos:

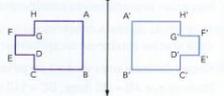
Translação

Podemos deslocar ou transladar uma figura de modo que a figura obtida seja congruente à original.



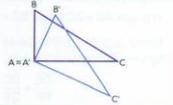
Reflexão

Podemos refletir uma figura em relação a uma reta obtendo a figura simétrica e congruente à original.



Rotação

Podemos girar uma figura obtendo outra congruente a ela.



Translação, reflexão e rotação são movimentos ou transformações geométricas que preservam a congruência, isto é, a figura transformada é sempre congruente à figura original. Esses movimentos são fundamentais em geometria. Por não deformar a figura original, esses três movimentos são chamados de *movimentos rígidos* ou de *isometrias* (iso = mesma; metria = medida).

Translação, reflexão e rotação são movimentos ou transformações geométricas que preservam a congruência, isto é, a figura transformada é sempre congruente à figura original. Esses movimentos são fundamentais em geometria. Por não deformar a figura original, esses três movimentos são chamados de movimentos rígidos ou de isometrias.

Figura 24 - Coleção C, vol. 9, p. 162

A coleção D revela um padrão análogo às demais: a única simetria estudada é a de reflexão exceto por breves referências no volume 7. A invariância da figura geométrica em relação à rotação é exposta sem a devida clareza, como se comprova no extrato a seguir:

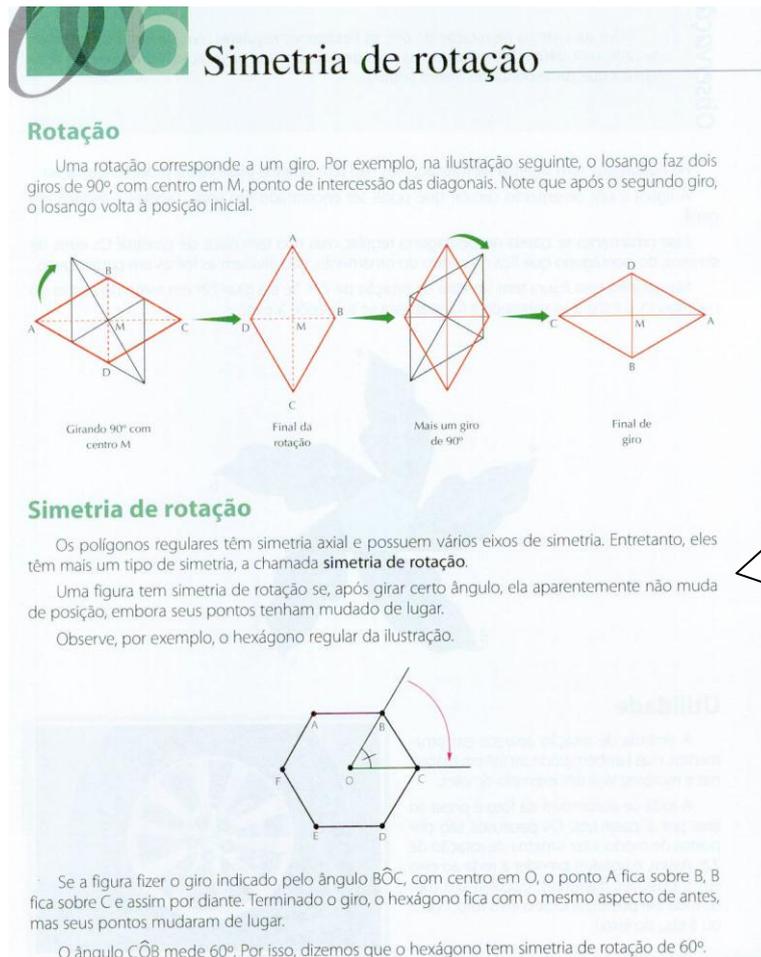


Figura 25 - Coleção D, vol. 7, p. 39

7.5 Cor como critério de simetria

A questão analisada nesta seção tem sido objeto de discussões na comunidade de Educação Matemática. Nessas discussões, uns defendem que a cor da imagem não deve ser aceita como um critério de simetria e que apenas devemos admitir critérios geométricos. Outros, em contrapartida, afirmam que o conceito de simetria admite uma modelização mais ampla que inclui atributos físicos, a exemplo da cor. Como já afirmamos no Capítulo 4, optamos pela segunda ideia e nesse capítulo apresentamos um modelo matemático que permite incluir o critério de cor. Um dos argumentos para optarmos por essa direção é que os livros didáticos de Matemática para o ensino fundamental trazem a questão ao proporem atividades em que, implícita ou mesmo explicitamente inclui-se o critério de cor. Outro argumento é

que um modelo mais amplo de simetria que permita o critério de cor representa uma ponte para interdisciplinaridade com as artes visuais.

A título de exemplo trazemos a seguir uma atividade extraída da Coleção B:

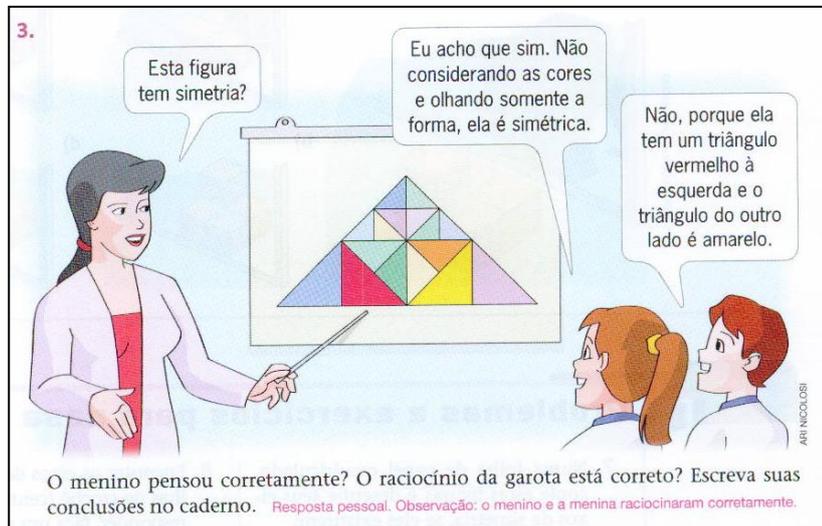


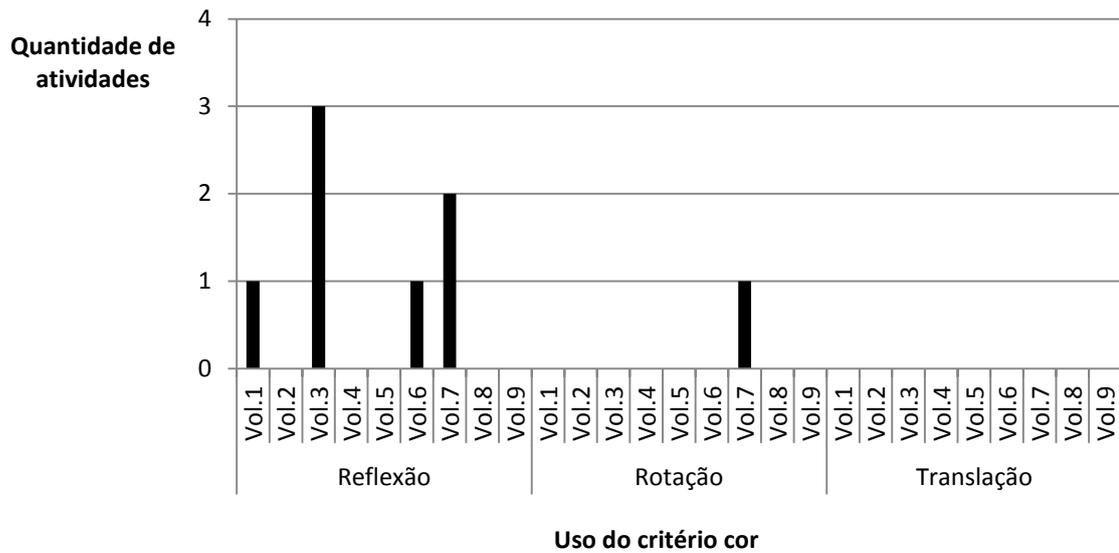
Figura 26 - Coleção B, vol. 6, p. 231

Reconhecemos que a frequência com que são propostas atividades de simetria envolvendo a cor não é grande, mas não é desprezível, como mostram os dados coletados que são apresentados a seguir.

Quadro 13: Coleção A – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.

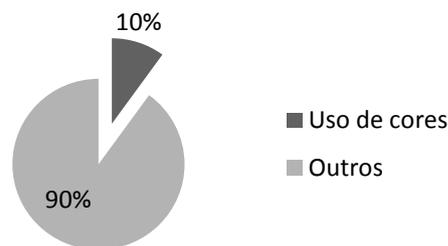
Categoria	Simetria	Quantidade de atividades									Total	Total Geral
		v.1	v.2	v.3	v.4	v.5	v.6	v.7	v.8	v.9		
Uso de cores	Reflexão	1	-	3	-	-	1	2	-	-	7	8
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	1	-	-	1	

Gráfico 17: Coleção A – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.



Observamos a predominância da simetria de reflexão com atividades que utilizam o critério cor. Há apenas uma atividade de simetria de rotação com uso de cores no sétimo ano e a total ausência da simetria de translação.

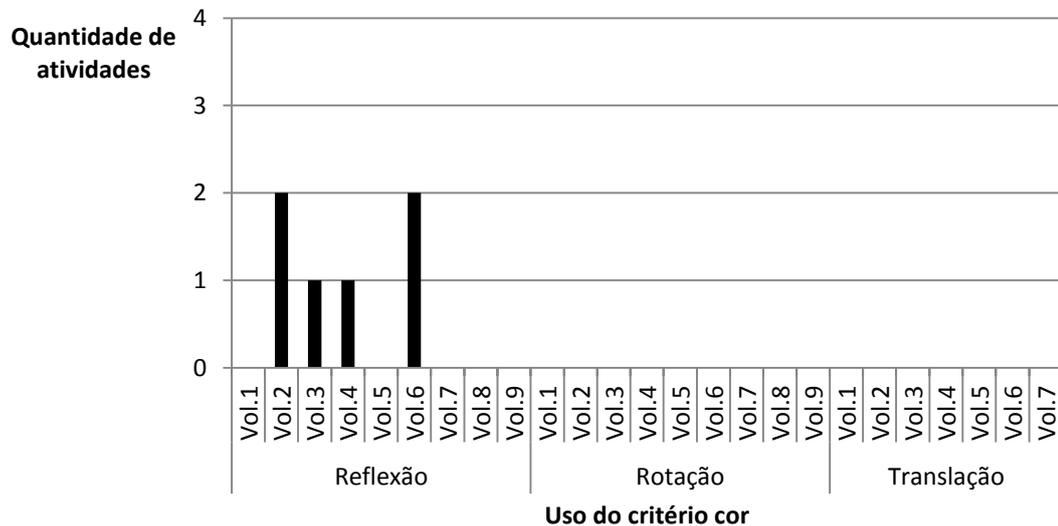
Gráfico 18: Coleção A – Relação das atividades com o uso de cores e o total de atividades



Quadro 14: Coleção B – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.

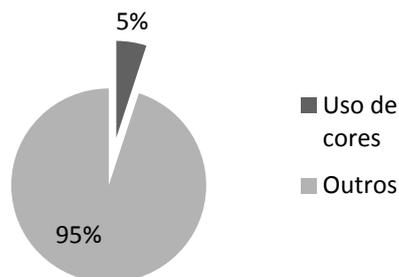
Categoria	Simetria	Quantidade de atividades									Total	Total Geral
		v.1	v.2	v.3	v.4	v.5	v.6	v.7	v.8	v.9		
Uso de cores	Reflexão	-	2	1	1	-	2	-	-	-	6	6
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	

Gráfico 19: Coleção B – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.



Observa-se que as atividades que apresentam o uso de cores na simetria estão apenas na simetria de reflexão e em quatro volumes da coleção.

Gráfico 20: Coleção B – Relação das atividades com o uso de cores e o total de atividades

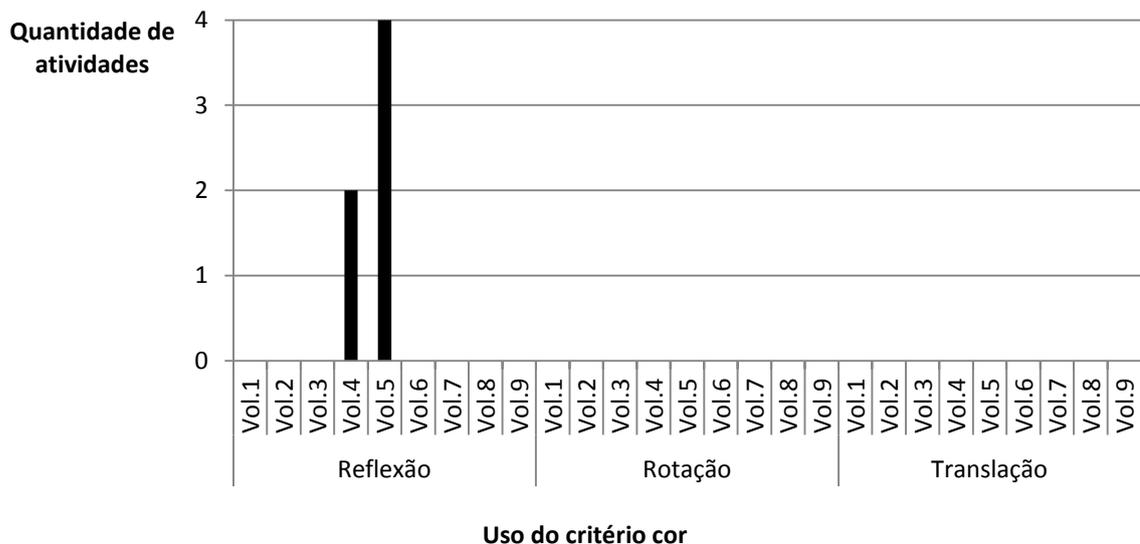


Quadro 15: Coleção C – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.

Categoria	Simetria	Quantidade de atividades									Total por simetria	Total
		v.1	v.2	v.3	v.4	v.5	v.6	v.7	v.8	v.9		
Uso de cores	Reflexão	-	-	-	2	4	-	-	-	-	6	6
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

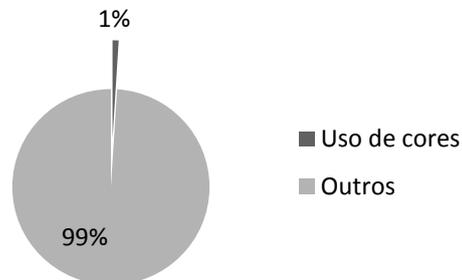
Traduziremos o quadro 14 no gráfico a seguir:

Gráfico 21: Coleção C – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.



Esta coleção apresenta as atividades com o uso de cores apenas na simetria de reflexão e em dois volumes, 4 e 5.

Gráfico 22: Coleção C – Relação das atividades com o uso de cores e o total de atividades



Nesta coleção a quantidade de atividades que utilizam o critério cor na simetria é muito pequena, apresentando apenas 1% do total de atividades com simetria.

Quadro 16: Coleção D – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.

Categoria	Simetria	Quantidade de atividades									Total	Total Geral
		v.1	v.2	v.3	v.4	v.5	v.6	v.7	v.8	v.9		
Uso de cores	Reflexão	-	3	-	-	-	-	-	-	-	3	3
	Translação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
	Rotação	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	

Gráfico 23: Coleção D – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.

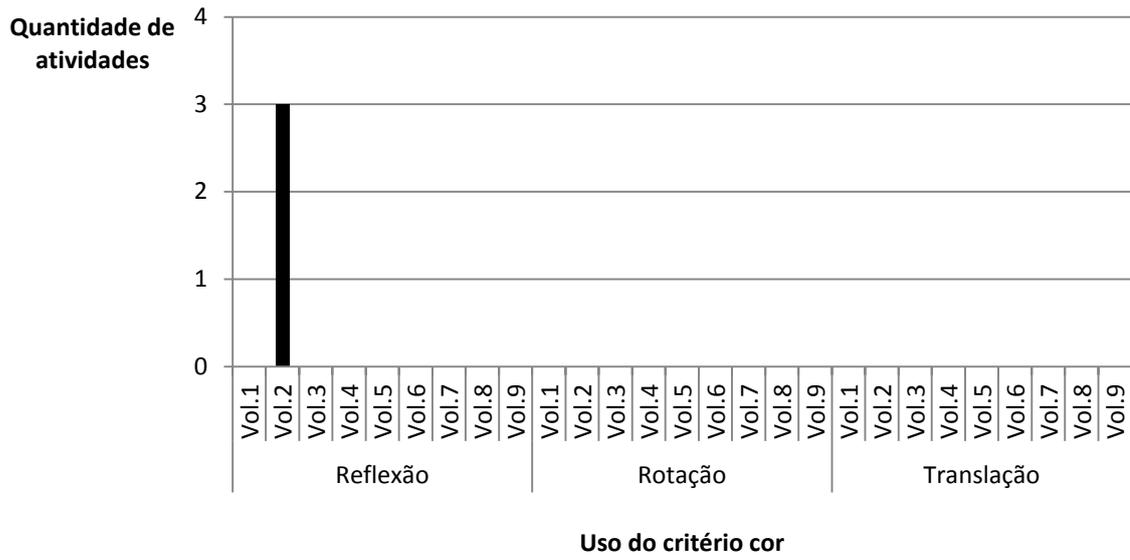
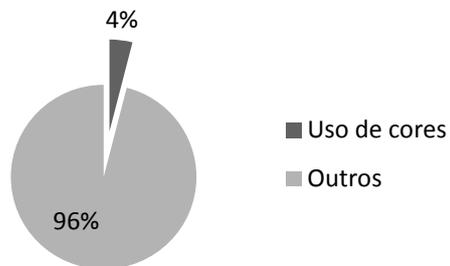


Gráfico 24: Coleção D – Distribuição das quantidades de atividades em que intervém o critério de cor por tipo de simetria.



CAPÍTULO 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho tratou do conteúdo simetria nos livros didáticos de Matemática para o ensino fundamental, tema escolhido com apoio na inegável importância que ocupa no saber científico e em outras práticas sociais. O reconhecimento dessa importância é traduzido em recomendações curriculares e nas matrizes de avaliação destinadas ao ensino fundamental. O foco nos livros didáticos, por sua vez, foi amparado no papel destacado que esse recurso desempenha em nossa prática escolar.

Em que pese a importância que se pode atribuir ao ensino escolar de simetria, a literatura em Educação Matemática tem apontado limitações persistentes tanto no ensino em geral quanto nos materiais didáticos em particular.

Um estudo mais detalhado da literatura conduziu-nos a elaborar um conjunto de perguntas que fossem alvo de nossa investigação. De modo resumido, escolhemos investigar se, no conjunto da obras aprovadas no PNLD 2010 (para os anos iniciais do ensino fundamental) e no PNLD 2011 (para os anos finais do ensino fundamental), seriam confirmadas as críticas apontadas com relação a livros didáticos de PNLD anteriores. Em particular:

- o predomínio absoluto do ensino da simetria de reflexão no plano em detrimento das demais simetrias;
- a reduzida atenção ao estudo das isometrias no plano e, a ausência de articulação delas com o conceito de simetria.
- persiste a ambiguidade criticada com respeito aos conceitos de “figura geométrica simétrica” e de “figura geométrica simétrica a outra figura”?
- a falta de clareza sobre a admissão da cor como critério de simetria.

A leitura da literatura também apontava para a hipótese que não haveria, nas obras didáticas distribuídas nas nossas escolas públicas pelo PNLD, um planejamento didático global para o ensino fundamental que garantisse uma progressão coerente e gradual para a construção do conceito de simetria. Essa

literatura indicava ainda a possibilidade de uma modelização matemática que desse suporte ao referido planejamento didático.

Os dados obtidos nas obras objeto de nosso estudo dão fortes indícios de que não há, de fato, uma progressão coerente na abordagem do conceito de simetria, na medida em que há muita irregularidade na atenção dedicada ao tema ao longo dos nove volumes das coleções.

Com respeito ao elenco de perguntas específicas, mencionadas nos parágrafos anteriores, interpretamos que os dados obtidos nas coleções confirmam todas as críticas listadas, no universo das quatro coleções completas – do 1º ao 9º anos – escolhidas neste estudo.

Ainda que não tenha sido objeto de estudo detalhado, a análise preliminar realizada por nós no universo maior das coleções aprovadas no PNLD 2010 e no PNLD 2011, nos conduziram a constatações análogas em particular no que tange às falhas na abordagem da simetria de reflexão, a que recebe a atenção quase exclusiva nas coleções.

Quanto à questão da proposta de um modelo matemático mais geral para o conceito de simetria, recorreremos à literatura em Matemática, na qual, há muito tempo, adota-se como conceitos nucleares do (macro)conceito de simetria, a ação de um grupo de transformações sobre um conjunto e a invariância de subconjuntos desse conjunto maior com respeito a essa ação. Uma descrição simplificada desse modelo constituiu-se em nosso Capítulo 4.

Destacou-se naquele capítulo que o modelo proposto é bastante geral e pode ser interpretado em um amplo leque de situações em que surge o conceito de simetria. Em particular, permite esclarecer a dúvida sobre a inclusão ou não da cor como critério de simetria.

Este trabalho terá cumprido seu objetivo se, além das constatações já referidas, ele pudesse despertar o interesse no aprofundamento das pesquisas didáticas sobre o conceito de simetria no ensino fundamental e, além dele, no ensino médio. Tais pesquisas poderiam dirigir-se para um leque amplo de questões entre as quais gostaríamos de sugerir apenas algumas:

- É possível justificar didaticamente a predominância do ensino de simetria de reflexão? Ou se trata da persistência de uma tradição da matemática escolar a ser modificada?
- São possíveis sequências didáticas locais visando a construção de conceitos componentes do (macro)conceito de simetria, no ensino básico?
- É possível um planejamento didático global para o ensino básico que vise à construção do conceito de simetria em sua maior generalidade?

REFERÊNCIAS

ARMSTRONG, M. A. **Groups and Symmetry**. Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag New York, 1988.

ARAÚJO, A. J. e GITIRANA, V. **Simetria de Rotação: uma sequência didática com o Cabri-Géomètre**, Dissertação (Mestrado em Educação) – Recife. UFPE/PE, 2000.

BARRETO, A C. **Modelos matemáticos nas ciências não-exatas**. Rio de Janeiro: PUC, texto mimeo, 1998.

BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, Ensino de 1ª a 4ª série. Brasília, MEC/SEF, 1997.

BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, Ensino e 5ª a 8ª série. Brasília, MEC/SEF, 1998.

_____. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1998.

_____. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Guia do Livro Didático: Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 2007.

_____. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Guia do Livro Didático: Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 2008.

_____. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Guia do Livro Didático: Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 2010.

_____. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Guia do Livro Didático: Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 2011.

_____. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Guia do Livro Didático: Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 2013.

CARVALHO. J. B.; Lima, P. F. **Matemática**, v. 17, Brasília. 2010.

CHORLEY, R. S.; HAGGETT, P. **Modelos socioeconômicos em geografia**. LTC, Rio de Janeiro, 1975

DOMOLEN, J. VAN. **Textual Analysis**, 141-171, In Christiansen, B. & Howson, A. G., Otte, M., D. Reidel. **Perspectives on Mathematics Education**, Publishing Company, pp141-171, 1986.

FORTES, C. C. **A Temática da Interdisciplinaridade no Curso de Especialização em gestão Educacional no período de**. Monografia (especialização) – UFSM/RS, 2011.

GERARD, F. M. & ROEGIERS, X. **Conceber e Avaliar Manuais Escolares**. Coleção Ciências da Educação. Portugal: Porto Editora, 2002.

GOLDBERG, M. A. A.; SOUZA, C. P. **Avaliação de programas educacionais**. São Paulo: Ed. EPU, p.38-45, 1983.

GOMES J. & VELHO, L. **Fundamentos da Computação Gráfica**, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

LIMA, E. L. **Isometrias**. Publicação da SBM. Rio de Janeiro, 1996.

LIMA, P. F., **Um ensaio sobre o conceito de simetria no ensino básico**, 2012, no prelo.

LOVE, E. & PIMM, D., **'This is so' a text on texts**. In Bishop, A. J. et al (eds), International Handbook of Mathematics Education, 371-409, The Netherlands Kluwer Academic Publisher, 1996.

MELO, D. M. B. **A Simetria de Reflexão: Elementos de Concepções Mobilizadas por alunos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Recife. UFPE/PE, 2010.

MOLINA, O. **Quem engana quem? Professor x livro didático**. Vol. 2. ed. Campinas, SP: Ed. Papirus, 1988.

PERNAMBUCO. SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO, **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: Matemática**, Recife, 2008.

PETITJEAN, M. **A Definition of Symmetry**. Symmetry: Science and Art, 2007.

ROJO, R. **Recomendações para uma política e materiais didáticos**. MEC: Brasil, 2005.

RUDIO, F. V. **Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica**. ed. Petrópolis, Vozes, 2007.

SANTOS, L. F. **Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino de simetria e das artes visuais em livros didáticos de matemática para séries iniciais do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Recife. UFPE/PE, 2010.

SILVA, A. C. **Simetria passo a passo – Um novo olhar sobre simetria.** Artigos Klein, 2011

SILVA, M. V. **Interdisciplinaridade: História, Teoria e Pesquisa.** Uberlândia: EDUFU, 1998.

SIQUEIRA, J. E. (2000). **Explorando a simetria de reflexão: uma sequência didática no Cabri-Géomètre.** Monografia (Licenciatura) – Recife. UFPE/PE.

SODRÈ, U., **Matemática – UEL** – Londrina, 2007.

STEWART, I. **Uma história da simetria na matemática.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: A Pesquisa Qualitativa em Educação.** – São Paulo: Atlas, 1987.

WEYL, H. **Simetria.** Trad. Victor Baranauskas - São Paulo: Edusp, 1997.