UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA– EDUMATEC

CÍCERO PINHEIRO DOS SANTOS JUNIOR

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO 7º, 8º E 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA.

Recife
2013

CÍCERO PINHEIRO DOS SANTOS JUNIOR

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO 7º, 8º E 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Dr. Marcelo Câmara dos Santos.

Recife

2013

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S237e Santos Junior, Cícero Pinheiro dos.

Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. / Cícero Pinheiro dos Santos Junior. – Recife: O autor, 2013.

105 f.: il. ; 30 cm.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2013.

Inclui Referências.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Ensino fundamental. 3. Resolução de problemas. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marcelo Câmara dos. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2013-50)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ALUNO

CÍCERO PINHEIRO DOS SANTOS JUNIOR

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

“ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO 7º, 8º E 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA”.

COMISSÃO EXAMINADORA:

____
Presidente e Orientador
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

____
Examinador Externo
Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes

____
Examinador Interno
Profª. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Recife, 20 de Maio de 2013.

DEDICO ESTE TRABALHO,

A DEUS,

Ser Celestial, que me guia, me dá forças e faz sonhos se tornarem realidade. Sem ele nada é possível.

A Minha Mãe Biológica e de Santo, Maria de Betânia da S. P. dos Santos,

Pessoa humilde, capaz de dividir seu último pedaço de pão com centenas de pessoas. Sem ela esse sonho seria impossível, pois sempre foi mãe, amiga e companheira, dando-me forças para continuar lutando. Além de toda orientação espiritual.

A Minha Esposa, Selma Maciel Pinheiro dos Santos,

Companheira leal, sempre presente, por muitas vezes dormiu no sofá, enquanto eu escrevia na sala de star. Pessoa humilde, simples e brilhante. Sem ela esse sonho também não seria possível.

A Minha Querida Tia, Socorro Alcoforado,

Educadora extraordinária, me alfabetizou e sempre acreditou em meu potencial. Tia a você meus agradecimentos eternos.

***A Meu Pai, Cícero Pinheiro dos Santos** (in memorian),*

Apesar do pouco tempo que tivemos juntos, foi um grande amigo. Deu-me seu nome, porém pouco incentivava seus filhos aos estudos. Séria bom que estivesse vivo para saborear essa vitória. Pai onde estiveres "comemore"!

A Meu Pai, de Santo BILA,

Pelo apoio, amizade e orientação espiritual, dando-me forças nos momentos em que pensei em desistir e calma nos momentos de aflição, que foram muitos no ano de 2012.

A Meus Irmãos, Samantha, Anderson e Helcye Monalisa,

Pois sempre acreditaram e vibraram com minhas conquistas. A você Helcye Monalisa, meus sinceros agradecimentos por todo apoio dispensado durante essa jornada.

***A Meu Padrasto, Iran de Andrade**,*

Último mais não menos importante que os demais acima. Este homem é um pesquisador nato, sua essência está voltada para o ramo do aprender e ensinar, compartilhou com seus alunos tudo que melhor aprendeu, embora muitas vezes o sistema não lhe desse meio para tal. Apesar de pertencermos a áreas diferentes do conhecimento, posso dizer que aprendi muito com ele, seu amor pela educação é realmente entusiasmante. Ao contrário de meu pai biológico, sempre nos incentivou ao estudo, além de todo o apoio dispensado em nossa criação. Iram obrigado por tudo, jamais esquecerei o que fizeste por mim e por meus irmãos. Comemore, essa vitória também é sua!

AGRADECIMENTOS

Redigir essa parte do trabalho requer muito cuidado, pois muitas pessoas contribuíram para a construção desta pesquisa durante todo o processo.

Gostaria de expressar minha eterna gratidão a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a construção da nossa pesquisa, em especial, gostaria de agradecer,

*A **DEUS**, por proporcionar-me mais uma conquista.*

***AO MEU PAI OGUM**, que sempre me orientou e me deu força para lutar em busca de meus objetivos.*

***A TODOS OS IRMÃOS DO CASTELO DE IANSÃ,** em especial aos babalorixás Mãe Betânia e Pai Bila, pelo apoio, confiança, amizade e respeito.*

***À MINHA FAMÍLIA**, nas pessoas de minha **Mãe, Esposa, Irmãos, Tios e Primos**, que me deram todo o apoio necessário para que eu pudesse investir na realização de mais um sonho. Obrigado por vocês estarem sempre ao meu lado, nos momentos difíceis e felizes.*

***AO AMIGO DIÓGENES MACLYNNE**, companheiro incentivador, me fez acreditar e não desistir, mesmo quando fracassei. A você amigo, meus sinceros agradecimentos.*

***AOS AMIGOS POLICIAIS MILITARES SD LEONARDO E MAJ LEONARDO,** companheiros de farda, leais e incentivadores, sempre acreditaram que este sonho era possível.*

***Ao MEU ORIENTADOR**, ser simples, leal e principalmente amigo, mesmo nos momentos que fracassei esteve ao meu lado, orientando-me principalmente nas correções de atitudes. Quando tudo parecia perdido, mais uma vez esteve ao meu lado. Marcelo Câmara, Muito obrigado!*

A você, todo o meu respeito e admiração!

***Aos meus colegas da quarta turma do EDUMATEC 2011**, pela acolhida e apoio em muitas ocasiões durante o nosso percurso. Em especial, gostaria de mencionar nominalmente alguns deles (naturalmente, sem esquecer os demais) que marcaram a relação estabelecida durante o tempo de convivência: Emersson Rodrigues, Pablo, Rachel Aranha, Edna Matilde, Robson, Leonardo Morais, Wilkens Lenon e Cláudio. Agradeço pelo companheirismo, carinho e atenção dispensados.*

Aos meus colegas da Escola Estadual Várzea Fria, *na pessoa do Gestor Professor Francisco Bezerra de Queiroz e demais professores, pelo apoio e compreensão durante o período da pesquisa.*

Aos meus colegas da Escola João XXIII, *nas pessoas Rosângela Oliveira Neves e Verônica Luciano Pinto Ramos e dos colegas professores, pela receptividade quando de minha chegada, além de todo apoio no decorrer dessa pesquisa.*

A Professora Dra. Cláudia Helena Dezotti, *da Universidade Federal Rural de Pernambuco, pela orientação no Curso de Especialização no Ensino da Matemática e por mostrar-me que poderia continuar prosseguindo para o Mestrado. Cláudia Dezotti, Muito Obrigado.*

Ao Professor Dr. Marcus Bessa, *por aceitar fazer parte das Bancas de Qualificação no ano de 2012 e de defesa neste ano de 2013.*

A Professora Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles, *pessoa educada, humilde, gentil e altamente capaz, Rosinalda muito obrigado pela atenção, apoio e contribuições fornecidas no desenvolvimento dessa pesquisa, bem como pela participação nas bancas de Qualificação e Defesa.*

Aos meus colegas de trabalho da Polícia Militar de Pernambuco, *pertencentes a 2ª do EMG e Regimento de Polícia Montada, que também contribuíram com apoio, mensagens, incentivos, palavras, gestos de solidariedade e compreensão.*

Aos meus amigos do **GRUPO DE PESQUISA FENÔMENOS DIDÁTICOS**, *meu agradecimento pelas contribuições em forma de discussões e sugestões.*

A toda **Coordenação da Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE,** *agradeço pela postura profissional e pela simpatia e prontidão em atender nossas solicitações. Agradeço especialmente a Ruth Borba, Carlos Eduardo e Clara que nos acompanharam desde o início do Curso.*

Aos **PROFESSORES DA LINHA DE PESQUISA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA**, *nas pessoas de Paulo Figueiredo, Marcelo Câmara, Paula Baltar, Rosinalda Teles e Iranete Lima, meu agradecimento pelas contribuições em forma de discussões e sugestões.*

A todos os ***PROFESSORES*** *do Programa que deixaram suas impressões registradas nas minhas lembranças, oportunizando momentos de troca e riqueza de experiências, marcando, indiscutivelmente, com suas contribuições para reconstrução e ampliação do meu repertório de conhecimento e formação inicial de pesquisador.*

Aos meus colegas da Escola José da Costa Porto, *nas pessoas de Tereza, Verônica e Djair, pela receptividade quando de minha chegada, além de todo apoio no decorrer dessa pesquisa.*

A todos os demais amigos que diretamente ou indiretamente contribuíram para realização desse sonho e conquista pessoal.

Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então você poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.

George Polya.

RESUMO

A presente pesquisa investigou as estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8° e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. O referencial que fundamentou o estudo foi a pesquisa de Marchand e Bednarz (1999), nos livros didáticos de matemática canadenses, sobre problemas de estrutura algébrica. Foi realizada uma investigação envolvendo 251 alunos de três escolas do ensino fundamental do estado de Pernambuco. Utilizamos como instrumento para coleta dois tipos de testes, A e B, os quais continham sete questões cada um, com problemas de partilha, sendo uma questão de partida, duas questões tipo fonte, duas questões tipo composição e duas questões tipo poço, segundo encadeamento definidos por Marchand e Bednarz (1999). Adotamos como instrumento de coleta e categorias de análises os mesmos utilizados por Câmara e Oliveira (2008), que investigaram as estratégias e registros mobilizados por alunos do 6º ano do ensino fundamental do Brasil e do Canadá na resolução de problemas de estrutura algébrica tipo partilha. Na etapa seguinte, realizamos a análise dos dados coletados, constatando a performance e estratégias de base utilizadas pelos sujeitos por ano de escolarização. Os resultados obtidos mostraram que os sujeitos apresentam mais dificuldade na resolução dos problemas de partilha com encadeamento tipo poço. Os resultados mostraram também que os sujeitos utilizam as mesmas estratégias de resolução, independente do ano de escolarização.

Palavras–Chave: Estratégias. Performance. Problemas de Partilha. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The research investigated the strategies used by students in the 7th, 8th and 9th grade level in solving problems of sharing. The framework that the study was grounded research Marchand and Bednarz (1999) in mathematics textbooks Canadians on issues of algebraic structures. We conducted a study involving 251 students from three elementary schools in the state of Pernambuco. Used as a tool to collect two types of tests, A and B, which contained seven questions each, with problems of sharing, being a matter of starting two questions “font” type, two questions type composition and two questions well type, according chaining defined by Marchand and Bednarz (1999). Adopted as a tool for collecting and category analyzes the same used by the Câmara and Oliveira (2008), who investigated the strategies and records mobilized by students of the 6th year of primary education in Brazil and Canada in solving problems of algebraic structures type sharing. In the next step, we analyzed the data collected, noting the performance and strategies of base used by the subjects per year of schooling. The results showed that subjects have more difficulty in solving the problems of sharing with chaining type well. The results also showed that subjects use the same resolution strategies, regardless of the year of schooling.

Keywords: Strategies. Performance. Sharing Problems. Troubleshooting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema de um problema de estrutura aritmética................ 037

Figura 2 – Esquema de um problema de estrutura algébrica................. 038

Figura 3 – Esquema de um problema de transformação........................ 040

Figura 4 – Desenho de um Problema de taxa.. 041

Figura 5 – Esquema de um problema partilha....................................... 042

Figura 6 – Esquema problema partilha tipo fonte.................................. 044

Figura 7 – Esquema problema partilha tipo composição 045

Figura 8 – Esquema problema partilha tipo poço.................................. 046

Figura 9 – Sujeito 1 – Problema 3.. 068

Figura 10 – Sujeito 1 – Problema 2.. 068

Figura 11 – Sujeito 1 – Problema 4... 069

Figura 12 – Sujeito 1 – Problema 7.. 069

Figura 13 – Sujeito 2 – Problema 2... 070

Figura 14 – Sujeito 2 – Problema 3.. 070

Figura 15 – Sujeito 3 – Problema 5.. 071

Figura 16 – Sujeito 3 – Problema 6.. 071

Figura 17 – Sujeito 4 – Problema 7.. 077

Figura 18 – Sujeito 5 – Problema 3.. 078

Figura 19 – Sujeito 5 – Problema 5... 078

Figura 20 – Sujeito 6 – Problema 5.. 079

Figura 21 – Sujeito 6 – Problema 6... 079

Figura 22 – Sujeito 6 – Problema 7... 080

Figura 23 – Sujeito 7 – Problema 4.. 080

Figura 24 – Sujeito 7 – Problema 3.. 081

Figura 25 – Sujeito 7 – Problema 5.. 081

Figura 26 – Sujeito 7 – Problema 6.. 082

Figura 27 – Sujeito 8 – Problema 2.. 087

Figura 28 – Sujeito 9 – Problema 2.. 087

Figura 29 – Sujeito 9 – Problema 3.. 088

Figura 30 – Sujeito 9 – Problema 4.. 088

Figura 31 – Sujeito 10 – Problema 3.. 088

Figura 32 – Sujeito 11 – Problema 3.. 089

Figura 33 – Sujeito 12 – Problema 2.. 089

Figura 34 – Sujeito 12 – Problema 3.. 089

Figura 35 – Sujeito 12 – Problema 5.. 090

Figura 36 – Sujeito 12 – Problema 6.. 090

Figura 37 – Sujeito 12 – Problema 7.. 091

Figura 38 – Sujeito 13 – Problema 2.. 091

Figura 39 – Sujeito 13 – Problema 4 092

Figura 40 – Sujeito 13 – Problema 7.. 092

Figura 41 – Sujeito 14 – Problema 3.. 093

Figura 42 – Sujeito 15 – Problema 4.. 093

Figura 43 – Sujeito 16 – Problema 3.. 094

Figura 44 – Sujeito 16 – Problema 4.. 094

Figura 45 – Sujeito 16 – Problema 6.. 094

Figura 46 – Sujeito 17 – Problemas de 1 a 7.. 095

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Rendimento encadeamento das relações dos sujeitos do 7º ano do ensino fundamental.. 064

Gráfico 2 – Estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 7º ano.. 067

Gráfico 3 – Rendimento por encadeamento das relações dos sujeitos de 8° ano do ensino fundamental.. 074

Gráfico 4 – Estratégia de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 8º ano.. 077

Gráfico 5 – Rendimento por encadeamento das relações dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.. 084

Gráfico 6 – Estratégia de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.. 086

Gráfico 7 – Estratégias de base por ano de escolarização..................... 098

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Concepções da álgebra e uso das variáveis...................... 028

Quadro 2 – Rendimento por encadeamento do 6º ano......................... 052

Quadro 3 – Estratégia de base do 6º ano... 052

Quadro 4 – Estratégia por encadeamento do 6º ano............................ 053

Quadro 5 – Quantitativo de alunos por escola....................................... 057

Quadro 06 – Teste A.. 058

Quadro 07 – Teste B.. 059

Quadro 08 – Quantidade de sujeitos por escola................................... 061

Quadro 09 – Quantidade de sujeitos do 7º ano..................................... 062

Quadro 10 – Rendimento encadeamento das relações do 7º ano......... 063

Quadro 11 – Estratégia de base do 6º e 7º ano..................................... 065

Quadro 12 – Estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 6º e7º ano... 066

Quadro 13 – Quantidade de sujeitos do 8º ano..................................... 072

Quadro 14 – Rendimento por encadeamento de relações dos sujeitos de 8º ano do ensino fundamental... 072

Quadro 15 – Estratégias de base dos alunos do 8º ano......................... 074

Quadro 16 – Estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 8º ano... 076

Quadro 17 – Quantidade de sujeitos do 9º ano..................................... 082

Quadro 18 – rendimento por encadeamento de relações dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.. 083

Quadro 19 – Estratégia de base dos sujeitos do 9º ano 084

Quadro 20 – Estratégia de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental... 085

Quadro 21 – Rendimento por encadeamento de relações dos sujeitos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental.. 096

Quadro 22 – Estratégias de base por ano... 097

SUMÁRIO

Introdução.. 019

Capitulo 1 – Alguns elementos sobre álgebra escolar........................... 023

1.1 – O estudo da álgebra e seu contexto histórico 023

1.2 – O Processo de ensino aprendizagem da álgebra.......................... 027

1.3 – Alguns estudos inerentes ao ensino aprendizagem da álgebra..... 032

Capitulo 2 – Problemas em matemática.. 035

2.1 – Algumas concepções sobre os problemas em matemática........... 035

2.2 – Os problemas de estrutura algébrica.. 037

2.3 – Tipos de problema de estrutura algébrica..................................... 039

2.3.1 – Problemas de transformação... 040

2.3.2 – Problemas de taxa... 041

2.3.3 – Problemas de partilha.. 042

2.3.3.1 – Problemas de partilha tipo fonte... 044

2.3.3.2 – Problema partilha tipo composição.. 045

2.3.3.3 – Problema de partilha tipo poço... 046

2.4 – Os problemas de partilha nos livros didáticos de matemática........ 048

Capitulo 3 – Estratégias de resolução de problemas de partilha........... 049

3.1 – Estratégias e registros utilizados por alunos do 6º ano na resolução de problemas de estrutura algébrica...................................... 049

Capitulo 4 – Metodologia... 056

4.1 – Os sujeitos e as Escolas... 056

4.2 - Instrumentos de coleta utilizados.. 057

4.3 – Categorias de análises.. 059

Capítulo 5 061

5.1 – Análise.. 061

5.2 – análise por ano de escolarização.. 062

5.2.1 – Alunos do 7º ano do ensino fundamental.................................... 062

5.2.2 – Alunos do 8º do ensino fundamental... 072

5.2.3 – Alunos do 9º ano do ensino fundamental.................................... 082

5.3 – Análise comparativa entre os grupos de sujeitos............................ 096

Capitulo 6 – Considerações finais.. 100

Referencias.. 103

INTRODUÇÃO

A construção de uma pesquisa se faz a partir de longas trajetórias, a qual se origina em experiências e expectativas do pesquisador. Reflexos de suas conquistas e frustrações se tornam aparentes em meio às dificuldades vivenciadas, seja no ambiente escolar, no dia-dia ou até mesmo na realidade acadêmica.

No caso da pesquisa aqui relatada não foi diferente, já que ela teve início em abril de 2011 no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Algumas questões nos chamaram a atenção e contribuíram para a escolha do nosso objeto de estudo.

Primeiramente, dentre os diversos ramos do conhecimento, a matemática sempre teve papel de destaque entre as disciplinas de difícil assimilação por parte dos estudantes. Seria injusto não creditar parte da escolha da pesquisa a nossa função docente, que tanto acompanha as dificuldades do corpo discente no processo de construção do conhecimento matemático, em que o ato de decorar fórmulas, algoritmos e procedimentos mecânicos torna-se comum e usual.

Essa grande dificuldade na construção do conhecimento matemático e em todo processo educacional vem acarretando o desinteresse dos alunos por matérias que requeiram uma carga considerável de raciocínio, fato vivenciado por esse pesquisador durante 12 anos de sua vida docente.

É notável o problema do ensino de matemática no Brasil, podendo-se constatar tal fato por meio de avaliações realizadas externamente, ou seja, avaliações de larga escala como SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) em nível nacional e o SAEPE (Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco) em nível estadual, que demonstram baixos índices no rendimento dos alunos em relação à matemática.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (BRASIL, 1998), as provas de matemática aplicadas em 1993 pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB – indicavam que, na primeira série do ensino fundamental, 67,7% dos alunos acertava pelo menos metade dos testes. Esse índice caía para 17,7% na terceira série, tornava a cair para 3,1% na quinta série e subia para 5,9% na sétima série.

> *Nas provas de matemática, aplicadas em 1995, abrangendo alunos de quartas e oitavas séries do ensino fundamental, os percentuais de acerto por série/grau e por capacidades cognitivas, além de continuar diminuindo à medida que aumentavam os anos de escolaridade, indicavam também que as maiores dificuldades encontravam-se nas questões relacionadas à aplicação de conceitos e a resolução de problemas. (BRASIL, 1998, p.24).*

Em relação à dificuldade de aprendizagem por parte dos estudantes, nossa visão foi direcionada quando ingressamos no Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Esse grupo tem como um dos seus objetivos identificar erros e dificuldades dos estudantes na resolução de problemas envolvendo álgebra.

Segundo os PCN (BRASIL, p. 115), “o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas”.

Diversas pesquisas como Usiskin (1995); Kieran (1995); André (2007); Costa (2010); Almeida (2011) e Câmara e Oliveira (2008), demonstram a fragilidade do ensino da álgebra, e confirmaram a dificuldade que têm os estudantes em aprender matemática, especificamente álgebra.

Usiskin (1995) constatou em sua pesquisa a dificuldade por parte dos alunos em compreender a noção de variável, decorrente da mudança de concepção dessa ideia ao longo do tempo.

Kieran (1995) detectou, em sua pesquisa, dificuldades por parte dos alunos do high school ao propor a aplicação de problemas de equações em abordagens distintas da álgebra e da aritmética.

André (2007) investigou como estudantes do 8º ano (antiga 7ª série) do ensino fundamental de escolas da rede pública de ensino realizavam a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, ligada a problemas associados a equações polinomiais do 1º grau. A pesquisadora identificou que os alunos possuem sérias dificuldades em fazer a conversão da linguagem natural para a algébrica, ou seja, os sujeitos realizavam a conversão de modo mecânico e sem compreensão dos procedimentos utilizados.

Seguindo essa linha de pesquisa, Costa (2010) buscou investigar como alunos do 7º ano do ensino fundamental realizavam a conversão de problemas envolvendo equações do 1º grau com uma incógnita. Assim como André (2007), Costa também observou a dificuldade dos alunos em converter os problemas para a linguagem algébrica.

Almeida (2011), em sua pesquisa, analisou quais são os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita nos livros didáticos de Matemática do 7º ano do ensino fundamental no Brasil. Em sua pesquisa, realizada em dez livros didáticos de Matemática, aprovados pelo PNLD/2011, o pesquisador identificou que os problemas propostos nos livros sobre equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, não condizem com o que se propõem, pois em 90% dos livros analisados, os problemas constituem problemas de estrutura aritmética.

Almeida (2011) identificou, ainda, os falsos problemas, os quais constituem 33% dos problemas apresentados nos livros didáticos sobre equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita. Segundo o pesquisador, esse tipo de problema pode não favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico e a passagem da aritmética para a álgebra.

Ainda sobre pesquisas que apontam dificuldades dos alunos em álgebra, está o trabalho de Câmara e Oliveira (2008), que em pesquisa realizada no Brasil e no Canadá, investigaram as estratégias mobilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental em problemas de partilha. Na referida pesquisa identificaram dois tipos possíveis de estratégias a serem mobilizadas pelos sujeitos, as quais classificaram em estratégias aritméticas e estratégias algébricas.

Segundo Câmara e Oliveira (2008), 40% dos alunos brasileiros e 47% dos alunos canadenses do total dos 447 alunos investigados, utilizam estratégias aritméticas de base para resolução dos problemas algébricos. De modo geral, os pesquisadores constataram que 80% dos estudantes recorrem ao raciocínio aritmético e que apenas 13% dos estudantes se servem de estratégias mobilizando o pensamento algébrico.

Nossa pesquisa teve como base o estudo desenvolvido por Câmara e Oliveira (2008) e apresenta-se como uma continuidade nos anos seguintes de escolarização, ou seja, 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental. Entretanto, desenvolvemos nossa pesquisa no Brasil, mais especificamente no Estado de Pernambuco.

Temos como problema de pesquisa, investigar as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Buscamos analisar a performance e identificar se com o avanço da escolarização os alunos utilizam as mesmas estratégias de resolução, ou se ocorre variação de acordo com o ano escolar.

Para essa investigação utilizamos a categorização dos problemas de partilha propostos por Marchand e Bednarz (1999). Segundo as autoras, os problemas de partilha são aqueles em que a quantidade total é conhecida, sendo esta quantidade repartida em partes desiguais e desconhecidas.

Para Marchand e Bednarz (1999), as partes se relacionam levando em consideração o "número" de relações, a "natureza" dessas relações e o "encadeamento" dessas relações.

Para responder nossa questão de pesquisa construímos o texto da seguinte maneira. No 1º capítulo realizamos uma discussão sobre álgebra. Nesse momento apresentamos o estudo da álgebra e seu contexto histórico, o processo de ensino aprendizagem da álgebra e suas concepções e alguns estudos inerentes ao ensino aprendizagem da álgebra.

No 2º capítulo abordamos algumas concepções sobre os problemas em matemática, tratamos dos problemas de estrutura algébrica e dos tipos de problemas de estrutura algébrica, ressaltando os estudos de Marchand e Bednarz (1999).

No 3º capítulo temos a pesquisa realizada por Câmara e Oliveira (2008), que investigaram as estratégias e registros mobilizados por alunos brasileiros e canadenses, do 6º ano do ensino fundamental, na resolução de problemas de estrutura algébrica tipo partilha. Os resultados desse trabalho deram origem ao nosso estudo.

No 4º capítulo trazemos a metodologia, explicando como foi realizado o percurso e quais as categorias de análise adotadas.

No 5º capítulo apresentamos nossa análise comparativa dos resultados obtidos por ano de escolarização.

No 6º capítulo concluímos a pesquisa com as considerações finais, apontando algumas reflexões para pesquisas futuras, que podem esclarecer aspectos não contemplados em nosso trabalho.

CAPÍTULO 1

Em nossa pesquisa analisamos as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas algébricos tipo partilha. A análise dessas estratégias passa, necessariamente, pela observação das manipulações realizadas pelos alunos no momento de resolver esses problemas. Consideramos importante retratar um pouco sobre a álgebra, elencando o estudo da álgebra e seu contexto histórico, o processo de ensino aprendizagem da álgebra e suas concepções e alguns estudos inerentes ao ensino aprendizagem da álgebra.

1.1 – O estudo da álgebra e seu contexto histórico

O estudo da álgebra tem um papel importante na matemática. Queremos tratar das questões voltadas ao processo de ensino e aprendizagem da álgebra escolar, pois, mesmo merecendo destaque, a álgebra ainda é vista apenas como procedimentos e regras que tornam seu estudo muito difícil.

Percebemos, durante a vida como educador matemático, que nossos estudantes apresentam uma grande dificuldade em resolver questões matemáticas que envolvam álgebra. Colocações como porquê devo estudar álgebra? são muito comuns no dia a dia.

Segundo House (1995), há muito tempo a álgebra desfruta de um lugar de destaque no currículo de matemática, representando para muitos alunos a culminação de anos de estudo de aritmética e o início de mais anos de estudo de outros ramos da matemática. Poucos contestam sua importância, embora muitos só tenham noções superficiais de seu significado e alcance.

Segundo House (1995, p. 01), “a realidade de nossos dias obriga-nos a reexaminar, em toda a sua extensão, o currículo de matemática e a maneira como é ensinado”.

No contexto histórico e em sua origem, a álgebra referia-se a equações, mas hoje seu estudo vai além, e tem um significado muito mais amplo. Na Antiga Babilônia, foi verificada a presença de problemas expressos em forma geométrica, mas que não passam de problemas algébricos não triviais.

A origem da palavra álgebra é vista como estranha por alguns estudiosos, por não apresentar uma etimologia nítida como outras palavras. A palavra álgebra é uma variante latina da palavra árabe Al-jabr que significa reunir.

Segundo o dicionário da língua portuguesa, encontramos a definição de álgebra como "parte da matemática em que se estudam as leis e os processos formais de operações com entidades abstratas" (HOLANDA, 2004, p.38).

Por volta de 2000 a.C., a aritmética babilônica evoluiu para uma álgebra retórica desenvolvida; naquela época a álgebra era utilizada para resolver problemas de equações.

No Egito, na mesma época dos babilônicos, foram achados os primeiros estudos de álgebra, no papiro de Rhind, documento mais antigo da matemática, escrito por Ahmés. Este documento apresenta as soluções de 85 problemas de aritmética e de álgebra.

Segundo Dante (2010), o problema 24 do papiro de Rhind, traz o seguinte enunciado: "ah, seu inteiro, seu sétimo, fazem 19". Se traduzíssemos para a linguagem matemática atual, ficaria $X + \frac{X}{7} = 19$. A maioria dos problemas apresentados no papiro de Rhind era resolvida por uma equação linear com uma incógnita, e tinha origem prática, com questões sobre pão, cerveja, o balanceamento de rações para aves e gado.

Segundo Ribeiro (2009), os gregos aparecem no período da "idade heróica da matemática", período em que existia um grande número de matemáticos preocupados com os problemas que trouxeram desenvolvimento para a geometria. Nesse momento, a álgebra aritmética era substituída por uma álgebra geométrica.

> *[...] após o III século antes de Cristo segue-se um longo período de declínio interrompido apenas entre 250 a 350 d.C. em que surge o maior algebrista grego – Diofanto de Alexandria, que escreveu uma importante obra intitulada arithmética. Essa obra traz enormes contribuições para o desenvolvimento da álgebra, principalmente no que se refere à simbologia. Além disso, contempla a utilização de certas técnicas de natureza algébrica, como: transformações de expressões, substituição, eliminação, etc., mesmo que implícitas. (BOYER, 1978, Apud RIBEIRO, 2009, p. 73).*

Diofanto, matemático grego que viveu em Alexandria, no Egito, no século IV d.C., é conhecido como "Pai da Álgebra". Dante (2010) defende que Diofanto foi o primeiro a usar sistematicamente símbolos para representar incógnitas em uma equação.

> *Os símbolos de Diofanto marcam a passagem da Álgebra Retórica, em que as expressões são escritas totalmente em palavras, para a Álgebra Sincopada, na qual algumas expressões vêm escritas em palavras e outras abreviadas. Pareciam estar presentes neste momento todas as condições para a próxima etapa do desenvolvimento da álgebra – as equações expressas totalmente em símbolos, como as conhecemos hoje: a Álgebra Simbólica. (André, 2007, p.49).*

Segundo André (2007), há indícios que o uso de letras do alfabeto para indicar entes matemáticos teve inicio com o grego Hipócrates de Quios (460-380 a.C.), que usou letras do alfabeto para indicar pontos e retas de figuras geométricas. A autora defende que as situações algébricas eram descritas por palavras e símbolos.

André (2007) aponta a existência de limitação no trabalho desenvolvido por Diofanto, justamente pela falta de critério bem definido para distinguir quantidade conhecida (constante) e quantidade desconhecida (incógnita).

A matemática árabe se desenvolveu na busca de resolver problemas relacionados ao comércio, à arquitetura, à astronomia, à geografia, à ótica, etc. Na época, o matemático árabe Mohammed Ibn-Musa Al Khowarismi, escreveu duas importantes obras sobre aritmética e álgebra, dentre as quais destacamos "Ilm al-jabr wa Al muqabalah" (a arte de reunir desconhecidos para igualar uma quantidade conhecida). Essa obra foi uma das que mais trouxe contribuições para o estudo das equações.

Na Itália foi publicada a mais conhecida obra de álgebra, escrita por Luca Pacioli: "a suma de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita". Essa obra envolve aritmética, geometria, álgebra e contabilidade, discutindo na parte de álgebra, a resolução de equações lineares e quadráticas (RIBEIRO, 2009, p, 77).

Segundo Ribeiro (2009) no século XVII foi descoberta um dos maiores feitos matemáticos, a solução algébrica das equações cúbicas e quárticas. Scipione del Ferro foi o primeiro matemático que conseguiu resolver algebricamente equações cúbicas do tipo $x^3 + mx = n$.

François Viète (1540-1603) foi o primeiro algebrista a demonstrar as vantagens no uso de letras para designar quantidades desconhecidas, ou incógnitas. Sua obra trata o desenvolvimento do simbolismo algébrico. (RIBEIRO, 2009, p. 78).

No desenvolvimento da linguagem simbólica da álgebra, também merece destaque o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), que contribuiu para a continuidade do desenvolvimento da linguagem algébrica.

O estudo da álgebra nos leva especificamente a um enfoque voltado para duas fases, segundo (BAUMGART 1992):

A primeira, álgebra antiga ou elementar, que visava o estudo das equações e métodos de resolvê-las;

A segunda, álgebra moderna ou abstrata, que se prende ao estudo das estruturas matemáticas.

Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), afirmam que a história da álgebra contempla três estágios de evolução:

- **O retórico ou verbal** – nessa fase "não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento algébrico". (FIORENTINI; MIORIN e MIGUEL, 1993, p.79);

- **O sincopado** – fase que teve como precursor Diofanto de Alexandria, matemático que introduziu pela primeira vez uma letra no lugar de uma incógnita. Nessa fase da história da álgebra, começaram a surgir os símbolos utilizados hoje em dia. (ALMEIDA, 2011, p. 23);

- **A simbólica** – fase "em que as idéias algébricas de símbolos passam a ser expressos somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras" (FIORENTINI; MIORIN e MIGUEL, 1993, p.80).

Nosso objeto de pesquisa visa analisar as estratégias utilizadas pelos alunos do 7°, 8° e 9° do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Este estudo encontra-se próximo do estágio simbólico, justamente por ser um estágio presente nas escolas nos dias atuais.

1.2 – O Processo de ensino aprendizagem da álgebra e suas concepções

Segundo Câmara (2006), a álgebra escolar funciona, ainda hoje, como um elemento determinante para decidir se um aluno irá fracassar ou obter sucesso em sua escolarização matemática.

> *Implicitamente, em nossas salas de aula, dividimos os alunos em dois grupos. O grupo dos alunos que têm facilidade em manipular expressões algébricas, em resolver equações e sistemas, etc., tem o caminho aberto para continuação da escolaridade. Já o aluno que não consegue demonstrar habilidade nesse domínio está condenado ao fracasso. (CÂMARA, 2006, p. 01).*

Para Usiskin (1995), a álgebra ensinada na escola média tem uma conotação muito diferente daquela ensinada em cursos superiores de matemática. A álgebra na escola média tem a ver com a compreensão do significado das “letras” (hoje comumente chamadas variáveis) e das operações com elas.

> *A álgebra começa como a arte de manipular somas e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representem os números. Revela-se então que as mesmas regras valem para diferentes espécies de números [....] e que as regras inclusive se aplicam a coisas [....] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico, como veremos, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como a adição e a multiplicação, contanto apenas que essas operações satisfaçam certas regras básicas. (MAC LANE E BIRKHOFF, 1967, p. 01.).*

Segundo Usiskin (1995), as concepções de variável mudam com o tempo; hoje em dia a tendência é pensar em uma variável como um símbolo pelo qual se podem substituir coisas (mais precisamente, coisas de um determinado conjunto, enquanto consideradas indistintas). Muitos alunos acham que todas as variáveis são letras que representam números, porém sabemos que nem sempre os valores assumidos por uma variável são números.

Segundo Usiskin (1995), os alunos tendem a acreditar que uma variável é sempre uma letra, pois

$$3 + x = 7 \quad \text{e} \quad 3 + \Delta = 7$$

são em geral consideradas coisas da álgebra, ao passo que a expressão

$$3 + \_\_\_ = 7 \quad e \quad 3 + ? = 7$$

não seja, embora o traço e o ponto de interrogação sejam, na medida em que se deseja resolver uma equação, equivalentes ao x e ao Δ.

Para Usiskin (1995), as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma simplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra.

As finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis. O quadro abaixo mostra as diferentes concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995) e os correspondentes usos das variáveis.

Quadro 1 – Concepções da Álgebra e uso das Variáveis

CONCEPÇÕES DA ÁLGEBRA	**USO DAS VARIÁVEIS**
Aritmética Generalizada	Generalizadora de Modelos Traduzir - Generalizar
Meio de resolver certo tipo de problema	Incógnita, Constantes Resolver – Simplificar
Estudo das Relações	Argumentos, Parâmetros Relacionar – Gráficos
Estrutura	Sinais arbitrários no papel Manipular - Justificar

Fonte: Usiskin, 1995, p. 20.

Segundo Da Rocha Falcão (1993), a passagem da aritmética para a álgebra, em geral deflagrada no 7º ano do ensino fundamental nas escolas brasileiras, se constitui em um processo complexo do ponto-de-vista psicológico e didático, pois os alunos são desafiados a abandonar o raciocínio aritmético e iniciar o raciocínio algébrico.

Segundo Da Rocha Falcão (1993, p, 137-138), a resolução de problemas algébricos abrange, essencialmente, quatro etapas interligadas e com dificuldades especificas:

1. **Mapeamento do problema**, etapa que trata da primeira representação mental do problema, envolve a identificação da categoria, dos dados conhecidos e desconhecidos a se calcular;
2. **Escrita algébrica** (colocação do problema em equação), essa etapa trata da transposição dos dados e relações identificados na etapa anterior da linguagem natural para um sistema simbólico formal, com uma sintaxe especifica;
3. **Procedimento de resolução**, a característica fundamental dessa etapa, consiste na perda de um referencial semântico, ligado ao domínio especifico ao qual se refere o problema e no estabelecimento de um referencial sintático;
4. **Retomada do sentido** (formulação da resposta final) essa etapa diz respeito à passagem do resultado numérico, obtido ao final da etapa precedente, ou seja, a resposta propriamente dita, o que requer um retorno ao contexto específico do problema, num movimento oposto àquele que caracterizou a etapa 3.

Para Da Rocha Falcão (1996), epistemologicamente, a álgebra tem se caracterizado em um conjunto de conceitos e procedimentos (algoritmos) matemáticos que permitem a representação prévia e a resolução de um determinado tipo de problema, para o qual os procedimentos aritméticos mostram-se insuficientes.

Ponte (2005) defende que as dificuldades apresentadas pelos estudantes se justificam pela forma como foi desenvolvido o ensino da álgebra ao longo do tempo, pois não se dá a devida importância a alguns aspectos, como a resolução de problemas relativos à origem da álgebra na antiguidade, ou seja, que apresentava problemas ligados ao dia-dia.

Segundo Ponte (2005), algumas das dificuldades enfrentadas pelos alunos se relacionam ao uso das letras para representar incógnitas e variáveis. De acordo com o autor, os alunos não conseguem enxergar uma letra como representando um número qualquer desconhecido, tampouco reconhecer o sentido de uma expressão algébrica. Além disso, parece haver uma enorme dificuldade por parte dos estudantes em traduzir uma informação da língua natural para a linguagem algébrica.

Ponte (2005) ainda defende que o ensino da álgebra deve ser trabalhado desde a pré-escola.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) enfatizam a necessidade da compreensão dos objetivos de ensinar álgebra, valorizando a construção do saber e dos conceitos algébricos, e não simplesmente enfatizando as excessivas manipulações algébricas.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), tradicionalmente no quarto ciclo, em geral, o estudo dos conteúdos algébricos é realizado, de forma mecânica, distanciando-se ainda mais das situações que envolvam a realidade dos estudantes.

> *É como se, neste ciclo, o aluno tivesse de esquecer quase tudo o que aprendeu antes, porque esses conhecimentos já não lhe servem mais para resolver as situações que ora lhe são propostas. No entanto, essa situação poderá ser revertida se, para os novos conteúdos a serem estudados, esses alunos conseguirem estabelecer relações com os conhecimentos construídos anteriormente. (BRASIL, 1998, p. 80).*

Os PCN (BRASIL, 1998), apontam objetivos matemáticos para o quarto ciclo, os quais devem visar o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades – identificando as equações, inequações e sistemas;
- Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
- Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

  (BRASIL, 1998, p. 81)

Para os PCN (BRASIL, 1998) o trabalho com álgebra é fundamental para:

> *[...] a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetro, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador. (BRASIL, 1998, p. 84.)*

Esse documento salienta que não se pode, nesse ciclo, configurar o abandono da aritmética, pois, muitas vezes, os problemas aritméticos são esquecidos e as situações trabalhadas pelos professores privilegiam a aplicação de conceitos algébricos, mesmo em situações em que a álgebra não é necessária.

> *Desse modo o ensino de álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e as idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificados, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de álgebra (resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e formulas, estabelecer relações entre grandezas). (BRASIL, 1998, p. 84.)*

Dentre algumas questões importantes no ensino e na aprendizagem da álgebra, não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para resolução de certos problemas, mas também é mais que isso. Ela fornece meios para se desenvolver e se analisarem relações, e é importante para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas. “Não é de surpreender que a álgebra seja hoje a área-chave de estudo da matemática da escola secundária e que essa posição de destaque provavelmente perdure por muito tempo”. (USISKIN, 1995, p.21).

Para nossa pesquisa, utilizaremos o estudo das concepções de álgebra definidas por Usiskin (1995), quando trata de “álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas” e os PCN (BRASIL, 1998) que falam que o “ensino de matemática visa o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver situações-problema”.

1.3 – Alguns estudos inerentes ao ensino aprendizagem da álgebra

As pesquisas de Booth, (1995); André, (2007); Costa, (2010); Almeida, (2011), apontam algumas dificuldades dos alunos para a aprendizagem da álgebra. Assim, apresentaremos a seguir alguns resultados desses trabalhos.

O trabalho de Booth (1995) relata as dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra e aponta que uma maneira para descobrir tais dificuldades é investigar os tipos e as razões dos erros que os alunos comumente cometem.

> *A álgebra "é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos". Esse comentário faz parte de um estudo, feito na Inglaterra, de recordações de adultos sobre suas experiências ao aprender matemática na escola (Universidade de Bath, 1982). Obviamente, é um sentimento que poderia muito bem ter sido expresso por qualquer professor de matemática. Não há dúvidas de que muitos de seus alunos também concordariam. Uma das razões para esse estado de coisas é que os alunos parecem achar álgebra difícil. (BOOTH, 1995, p. 23).*

O estudo de Booth (1995), envolveu alunos com idade de treze a dezesseis anos que vinham estudando álgebra no contexto de um programa de matemática integrado desde a sétima série, em que todos os estudantes, mais velhos e mais novos, já tinham contato com conteúdos algébricos, na sua respectiva série.

Segundo Booth (1995, p. 24), as diferenças de idade não influenciaram no resultado, pois, independentemente da experiência com álgebra, os estudantes cometeram erros semelhantes. Após entrevistas com os alunos, a autora percebeu que muitos desses erros podiam ter origem nas ideias dos alunos sobre aspectos como:

a) O foco da atividade algébrica e a natureza das respostas, pois na aritmética o foco é encontrar determinadas respostas numéricas particulares, enquanto na álgebra, o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-las numa forma simplificada geral;
b) O uso da notação e da convenção em álgebra, nesse caso a autora defende que parte da dificuldade que os alunos têm para simplificar expressões diz respeito à interpretação do símbolo operatório;

c) O significado das letras e das variáveis, pois uma das diferenças que merecem destaque entre a aritmética e a álgebra, é que na álgebra existe utilização das letras para indicar valores;
d) Os tipos de relações e métodos usados em aritmética, pois nesse caso precisamos entender como os alunos assimilam à aritmética, suas convenções e os métodos informais.

> *[ ]... a álgebra não é isolada da aritmética; na verdade é, em muitos aspectos a "aritmética generalizada". E nisso está a fonte das dificuldades. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam aprendidos dentro do contexto aritmético. Se não foram reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas poderá ser afetado. Nesse caso, as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de problemas em aritmética que não foram corrigidos (BOOTH, 1995, p. 33).*

Segundo Booth (1995), as possíveis causas das dificuldades das crianças no aprendizado de álgebra poderão servir como luz na busca de minimizar e corrigir os problemas dos estudos que envolvam álgebra.

André (2007) investigou dificuldades de 343 alunos de sétima série de seis escolas da rede pública do Brasil, em que os alunos foram levados a "traduzir" (equacionar) questões da linguagem natural para a linguagem algébrica, utilizando diferentes representações.

André (2007) constatou que os estudantes têm dificuldades em realizar a conversão de problemas em linguagem natural para linguagem algébrica, ou seja, os sujeitos realizavam a conversão de modo mecânico e sem compreensão dos procedimentos utilizados.

Segundo André (2007), a maioria dos alunos não sabia como passar de uma linguagem a outra, pois mesmo naquelas situações consideradas mais simples, do ponto de vista da estrutura algébrica, poucos conseguiram fazer a tradução de forma correta.

> *Isto nos faz refletir ainda mais sobre de que maneira podemos minimizar os erros e concepções subjacentes à atividade algébrica, que terminam por gerar entraves ao avanço da construção e compreensão de conceitos e procedimentos necessários a resolução de problemas, seja na vida real, seja no ambiente escolar, seja dentro do próprio corpo de conhecimentos matemáticos. (ANDRÉ, 2007, p. 207).*

André (2007) confirma que muitas vezes os alunos enxergam a linguagem da álgebra como sendo um procedimento pelo qual se traduzem mecanicamente as palavras de um enunciado concernente a uma situação ou problema em símbolos algébricos correspondentes.

Costa (2010) investigou em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do 1º grau.

Segundo Costa (2010), os alunos iniciam a conversão para o registro algébrico, mas quando lhes falta o conhecimento de um signo no registro algébrico para substituir a escrita natural, eles escrevem as palavras por extenso, literalmente.

Almeida (2011) investigou os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita nos livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino fundamental. O autor realizou a análise em dez coleções de livros didáticos de matemática do 7º ano, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático 2011.

Almeida (2011) observou que nem sempre os problemas propostos nos livros didáticos de matemática do 7º ano para o ensino das equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita têm relação com o saber algébrico. Ele encontrou problemas de estrutura aritmética em 90% dos livros analisados (uma média de 10,5% dos problemas por livro didático).

Almeida (2011) encontrou ainda 33% dos problemas sendo falsos problemas. Esse tipo de problema pode não favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico e a passagem da aritmética à álgebra, uma vez que são problemas que demandam uma conversão direta do texto em linguagem natural para o texto em linguagem algébrica, sem ser necessário estabelecer relações entre os dados do problema.

Nossa pesquisa está relacionada com esses problemas de estrutura algébrica. Entretanto, não estamos, nesse estudo, preocupados em analisar a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, nem tampouco como esses problemas estão sendo abordados nos livros didáticos de matemática, mas sim em analisar as estratégias utilizadas pelos alunos do 7°, 8° e 9° ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha.

CAPÍTULO 2

Nesse capítulo abordamos os problemas em matemática, os problemas de estrutura algébrica e os tipos de problemas de estrutura algébrica segundo Marchand e Bednarz (1999). Consideramos importante essa abordagem pela análise realizada nos problemas de partilha, que fazem parte dos problemas de estrutura algébrica e, consequentemente, dos problemas matemáticos.

2.1 – Algumas Concepções sobre os problemas em Matemática

Primeiramente vamos definir o que é problema, já que, intuitivamente, todos nós carregamos uma ideia conceitual do que seja um problema.

Segundo Dante (2009), “de maneira genérica, pode-se dizer que problema é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar do indivíduo para solucioná-lo”.

Segundo o dicionário da língua portuguesa, “problema é uma questão matemática proposta para que lhe dê uma solução ou questão não resolvida, ou de solução difícil” (HOLANDA, 2004, p. 594).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) definem um problema matemático como uma “situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la”.

> *Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem necessidade de verificação para validar o processo de solução.*
> *(BRASIL, 1998, p. 41).*

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), no processo de ensino aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

Segundo Câmara (2002, p. 39) o papel da resolução de problemas no ensino de matemática foi, para muitos e durante muito tempo, pautado pela ideia de que "aprender matemática é resolver muitos problemas", no sentido de que os neurônios se assemelham a músculos, que seriam desenvolvidos à custa de "muita malhação". Nessa época a maioria dos livros didáticos, apresentava o conteúdo seguido de alguns "exercícios resolvidos", que serviriam de modelo para os "exercícios de fixação".

Nessa concepção, era fundamental o papel do problema fechado, que se caracteriza por uma aplicação de conhecimentos já supostamente aprendidos pelo estudante. Nesse caso, já de antemão, o estudante é conduzido a identificar o conhecimento a ser utilizado em sua resolução, sem que haja maiores estímulos à construção de conhecimentos e à utilização do raciocínio matemático. (CÂMARA e FIGUEIREDO, 2010, p. 09).

Em contraposição ao problema fechado, estudos em Educação Matemática têm colocado em evidência o trabalho com problemas abertos e situações-problema. Apesar de apresentarem objetivos diferentes, estes dois últimos tipos de problemas colocam o estudante, em certo sentido, em situação análoga àquela do matemático no exercício de sua atividade. Diante deles, o estudante deve realizar tentativas de resolução, estabelecer hipóteses, testá-las e validar seus resultados. (CÂMARA e FIGUEIREDO, 2010, p. 09).

> *Dessa forma, se o problema aberto objetiva levar o aluno a uma "postura", em relação ao conhecimento matemático, a situação-problema apresenta um objetivo distinto, ou seja, levar o aluno à "construção" do conhecimento de um novo conceito matemático. De maneira bastante sintética, podemos caracterizar a situação-problema como "uma situação geradora de um problema, cujo conceito necessário à sua resolução seja aquele conceito que queremos que o aluno construa", ou seja, na resolução do problema, o aluno sentirá o poder do novo conceito. (CÂMARA, 2002, p.40).*

Em nossa pesquisa, para os estudantes que já passaram pelo ensino formal de equações, trata-se de problemas fechados, em que ele já sabe que conhecimento deve mobilizar para resolver. Para aqueles que ainda não aprenderam equações, os problemas de partilha poderiam ser considerados como problemas abertos.

2.2 – Os problemas de estrutura algébrica

Ao longo da história, com o aparecimento do calculo diferencial e integral, começaram a surgir as estruturações dos conjuntos numéricos, envolvendo também estruturas algébricas.

A estruturação desses conjuntos numéricos exigiu o desenvolvimento da axiomatização de estruturas operatórias e, em meados do século XIX, surgem as estruturas de grupo e corpo, por meio dos trabalhos de Galois. O desenvolvimento e a necessidade de se resolver problemas levou à construção das estruturas algébricas.

Para Marchand e Bednarz (1999), em um problema de estrutura algébrica se faz necessária a construção de relações entre os dados (as informações) do enunciado para construir uma equação equivalente ao problema.

Marchand e Bednarz (1999) apontam duas concepções que diferenciam um problema de estrutura algébrica de um problema de estrutura aritmética:

- Em um problema de estrutura aritmética – temos valores conhecidos, que servem como base para se chegar aos valores desconhecidos, como mostra o exemplo a seguir:

Monalisa tem 15 livros, Samantha tem o triplo de livros da quantidade de livros que Monalisa tem e Anderson tem o quádruplo de livros do total que Monalisa possui. Quantos livros Monalisa, Samantha e Anderson têm ao todo.

Esse tipo de problema pode ser representado a partir de duas operações de multiplicação, conforme a estrutura abaixo.

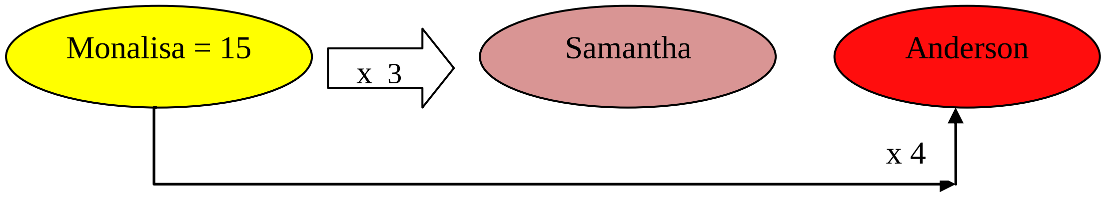


Figura 1: Esquema de um problema de estrutura aritmética.

$$15 + 3.15 + 4.15 = X$$
$$X = 120$$

Para chegar à resposta, partimos de um valor conhecido, o número de livros de Monalisa, o qual tem uma relação com os outros elementos do problema, Samantha e Anderson.

No caso do exemplo mostrado anteriormente, tem-se um problema de estrutura aritmética com duas relações. A primeira relação é “Samantha tem o triplo de livros da quantidade de livros que Monalisa tem”, e a segunda “Anderson tem o quádruplo de livros do total de livros que Monalisa possui”, sendo ambas as relações de natureza multiplicativa.

- Em um problema de estrutura algébrica – com base nas relações que podem ser estabelecidas, pode-se chegar aos valores desconhecidos, como mostra o exemplo a seguir:

Monalisa, Samantha e Anderson, têm, juntos, 240 livros. Samantha tem o dobro de livros da quantidade que Monalisa têm e Anderson tem o triplo de livros da quantidade de livros que Monalisa têm. Quantos livros possui cada um?

Esse tipo de problema pode ser representado a partir de duas operações de multiplicação, conforme a estrutura abaixo.

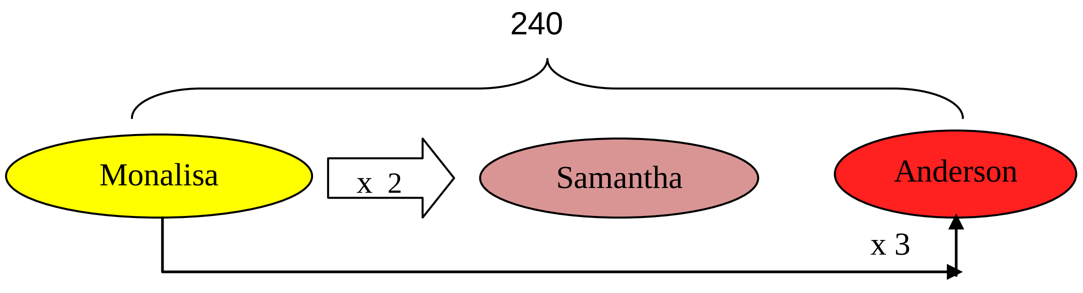


Figura 2: Esquema de um problema de estrutura algébrica.

Em uma situação desse tipo, não podemos partir de um valor conhecido, mas devemos estabelecer relações entre os elementos do problema, a fim de encontrar uma equação equivalente ao enunciado. Portanto, a resposta ao problema acima poderia ter a seguinte resolução.

Chamaremos M – Monalisa, S – Samantha e A – Anderson.

$$\begin{cases} M + S + A = 240 \text{ (I)} \\ S = 2.M \text{ (II)} \\ A = 3.M \text{ (III)} \end{cases}$$

Substituindo, (II) e (III) e (I) temos,

$$M + 2.\ M + 3.\ M = 240$$
$$6.M = 240$$
$$M = 40$$

Logo

Monalisa tem 40 livros;
Samantha tem 80 livros;
Anderson tem 120 livros.

Um problema de estrutura algébrica apresenta diversas formas de resolução. No Brasil, algumas pesquisas apontam para o exagero de uso de procedimentos aritméticos para a resolução de problemas algébricos, o que, muitas vezes, torna-se um procedimento limitado. Assim, para a resolução de problemas algébricos, como o apresentado anteriormente, os procedimentos algébricos de resolução são mais indicados, por facilitar a resolução.

2.3 - Tipos de problemas de estrutura algébrica

Marchand e Bednarz (1999) categorizam os problemas de estruturas algébricas em três tipos: problemas de transformação, problema de taxa e problema de partilha.

Nossa pesquisa pretende analisar as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Entretanto, iremos apresentar os três tipos de problemas, segundo Marchand e Bednarz (1999).

2.3.1 - Problemas de transformação

Os problemas de transformação se caracterizam pelas transformações que o valor inicial (desconhecido) sofre, gerando uma transformação também desconhecida para o valor final, como mostra o exemplo a seguir.

Selma tem o dobro da idade de Fátima. Se Selma tivesse oito anos a menos e Fátima quatro anos a mais, teriam a mesma idade. Qual a idade de Fátima?

Esse tipo de problema pode ser representado a partir de uma operação de multiplicação, uma de subtração e outra de adição. Conforme a estrutura abaixo.

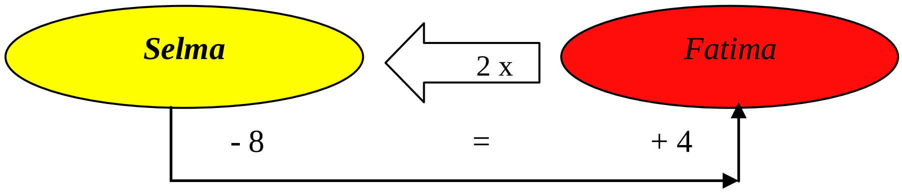


Figura 3: Esquema de um problema de transformação.

Em uma situação desse tipo, não temos um valor conhecido, mas estabelecendo relações entre os elementos do problema, podemos encontrar um sistema equivalente ao enunciado. Portanto, a resposta do problema acima poderia ter a seguinte resolução.

Chamaremos S – Selma e F – Fátima.

$$\begin{cases} S = 2.F \quad (I) \\ S - 8 = F + 4 \quad (II) \end{cases}$$

Substituindo I em II, temos que,

$$2.F - 8 = F + 4$$
$$2.F - F = 4 + 8$$
$$F = 12$$

Logo

Selma tem 24 anos e Fátima 12 anos.

2.3.2 - Problemas de taxa

Os problemas de taxa são os que possuem a característica de apresentar relações de grandezas não homogêneas, sendo preciso estabelecer uma relação entre elas, como mostra o exemplo a seguir:

Um homem viajou de moto de Recife a Surubim. Sabe-se que na ida a moto desenvolveu uma velocidade média de 100 Km/h e, voltando pela mesma estrada, uma velocidade média de 80 km/h. Se ele fez toda viagem de ida e volta entre as Cidades de Recife e Surubim em 5 horas, qual a distância entre essas duas cidades?

Esse tipo de problema pode ser representado conforme o desenho abaixo.

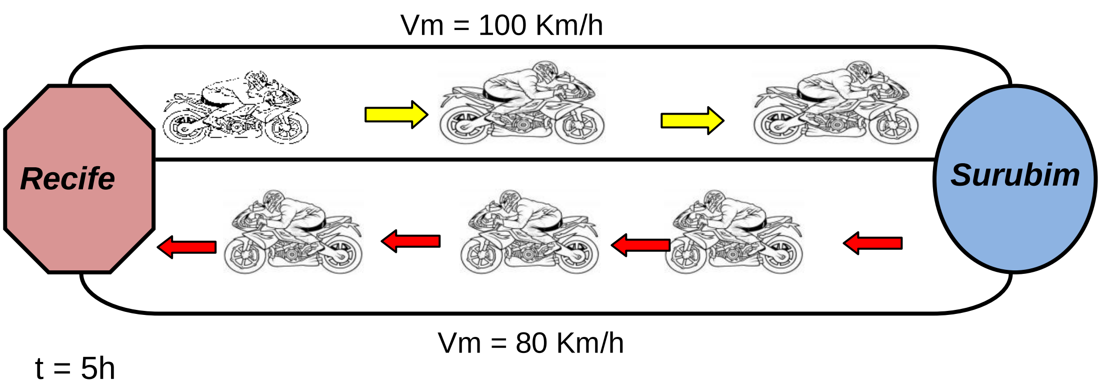


Figura 4: Desenho de um problema de taxa.

Chamamos de D a distância entre as duas cidades e de T o tempo gasto para a ida.

Na ida : $100 = \frac{D}{T}$, temos que, D = 100T (I)

Na volta: $80 = \frac{D}{T-5}$, temos que, D = 80 (5 – T) (II)

Igualando (I) e (II): 100T = 80 (5 – T) $\Rightarrow$ **T = 20/9 hs.**

Substituindo em (I): D = 100. 20/9, assim **D $\cong$ 222 km.**

Logo a distância entre as cidades é de aproximadamente 222 Km.

2.3.3 - Problemas de partilha

Segundo Marchand e Bednarz (1999), os problemas de partilha são aqueles em que a quantidade total é conhecida, sendo esta quantidade repartida em partes desiguais e desconhecidas. As partes se relacionam levando em consideração o "número" de relações, a "natureza" dessas relações e o "encadeamento" dessas relações, como mostra o exemplo a seguir:

Emerson, Rachel e Cláudio têm, juntos, 240 livros. Rachel tem o dobro de livros de Emerson e Cláudio tem 80 livros a mais que Emerson. Quantos livros têm cada um deles?

Podemos representar esse problema pela seguinte estrutura.

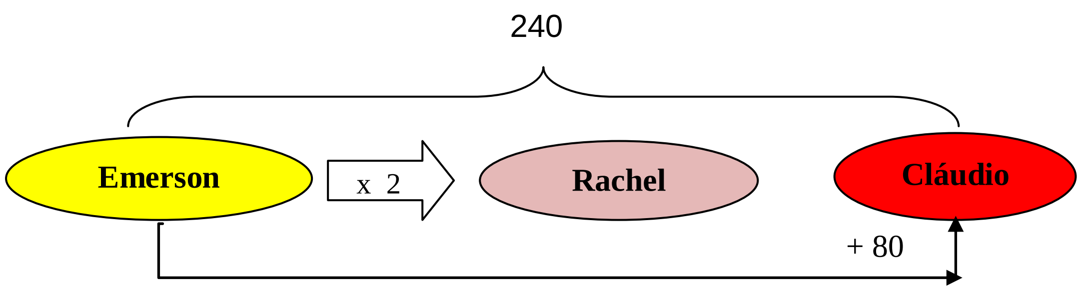


Figura 5: Esquema de um problema de partilha.

Resolvendo o problema acima,

Chamaremos E – Emerson, R – Rachel e C – Cláudio.

$$\begin{cases} E + R + C = 240 \text{ (I)} \\ R = 2.E \text{ (II)} \\ C = E + 80 \text{ (III)} \end{cases}$$

Substituindo, (II) e (III) em (I) temos,

$$E + 2.E + E + 80 = 240$$
$$4E = 240 - 80$$
$$4E = 160$$
$$E = 40.$$

Logo

Emerson tem 40 livros;

Rachel tem 80 livros;

Cláudio tem 120 livros.

Em uma situação desse tipo, partimos de um valor conhecido, 240 livros, para chegar às partes desiguais e desconhecidas. No caso desse problema de partilha, temos duas relações, "***Rachel tem o dobro de livros de Emerson" e "Cláudio têm 80 livros a mais que Emerson*,**" sendo a primeira relação multiplicativa e a segunda relação de natureza aditiva.

Marchand e Bednarz (1999) classificam a natureza das relações entre os dados de um problema, aditiva, quando se lança mão de somas ou subtrações e multiplicativa, quando de multiplicações ou divisões, ou diferentes, quando se tem em um mesmo problema uma natureza aditiva e uma multiplicativa.

Segundo Marchand e Bednarz (1999), um problema de partilha pode apresentar três tipos de encadeamento, "fonte", "composição" e "poço".

2.3.3.1 – Problema de partilha em que o encadeamento é tipo fonte

Em um problema tipo fonte, as grandezas são originadas em função de uma única grandeza, como mostra o exemplo a seguir:

Emerson, Rachel e Cláudio têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rachel tem 15 revistas a mais que Emerson e Cláudio têm o dobro de revistas de Emerson. Quantas revistas têm cada um?

Podemos representar esse problema pela seguinte estrutura.

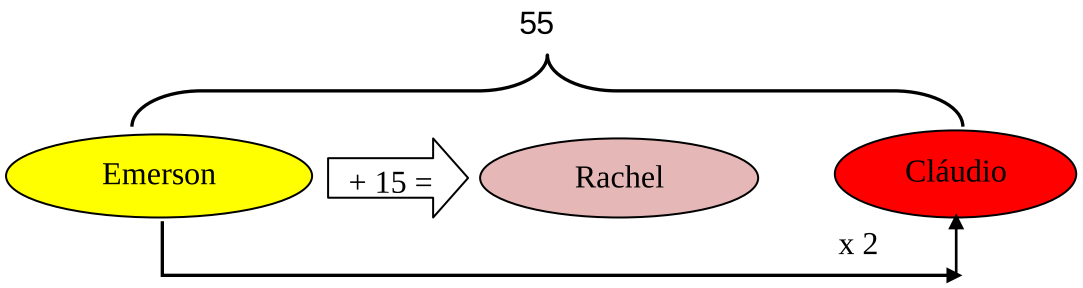


Figura 6: Esquema de um problema de partilha com encadeamento tipo fonte.

Esse problema apresenta duas relações de comparação (três incógnitas), sendo a primeira aditiva e a segunda multiplicativa – encadeamento tipo Fonte – **Emerson** é a **fonte** das relações, se relacionando com **Rachel** e **Cláudio.**

Resolvendo o problema acima,

Chamaremos E – Emerson, R – Rachel e C – Cláudio.

$$\begin{cases} E + R + C = 55 \ (I) \\ R = E + 15 \ \ (II) \\ C = 2.E \ \ (III) \end{cases}$$

Substituindo, (II) e (III) em (I) temos, E + E+ 15 + 2E = 55

4E = 55 - 15

4E= 40

E = 10.

Logo

Emerson tem 10 livros;

Rachel tem 25 livros;

Cláudio tem 20 livros.

2.3.3.2 – Problema de partilha em que o encadeamento é tipo composição

Nos problemas cujo encadeamento é tipo composição, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência, como mostra o exemplo a seguir:

Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?

Podemos representar esse problema pela seguinte estrutura.

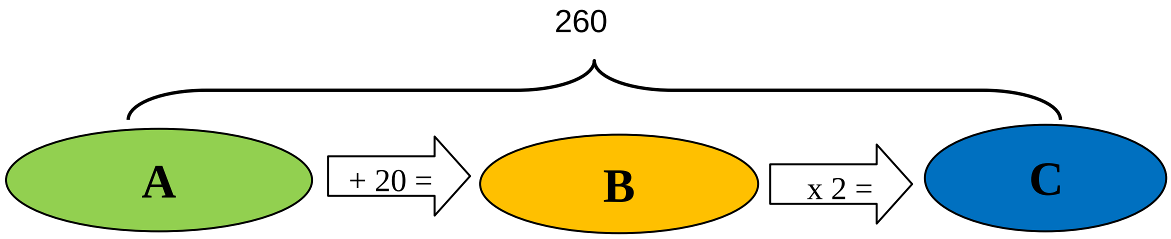


Figura 7: Esquema de um problema de partilha com encadeamento tipo composição.

Nesse tipo de problema, as relações seguem uma sequência, **“o time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B”,** o que não acontece com o problema anterior, pois em um problema tipo fonte as grandezas estão direcionadas em função de apenas uma grandeza.

Resolvendo o problema acima,

$$\begin{cases} A + B + C = 260 \ (I) \\ B = A + 20 \ (II) \\ C = 2.B \ (III) \longrightarrow \text{substituindo (II) em (III) } C = 2(A + 20) \ (IV) \end{cases}$$

Substituindo (II) e (IV) em (I), temos,

$$A + A + 20 + 2(A + 20) = 260$$
$$A + A + 20 + 2A + 40 = 260$$
$$4A = 260 - 60$$
$$4A = 200$$
$$A = 50$$

Logo

O time A fez 50 pontos;

O time B fez 70 pontos;

E o time C fez 140 pontos.

2.3.3.3 – Problema de partilha em que o encadeamento é tipo poço

Nos problemas de partilha com encadeamento tipo poço, as relações convergem para um dos dados do problema, como mostra o exemplo a seguir:

Emerson, Rachel e Cláudio, têm juntos, 160 livros. Rachel tem 25 livros a menos que Emerson e 15 livros a menos que Cláudio. Quantos livros tem cada um deles?

Podemos representar esse problema pela seguinte estrutura.

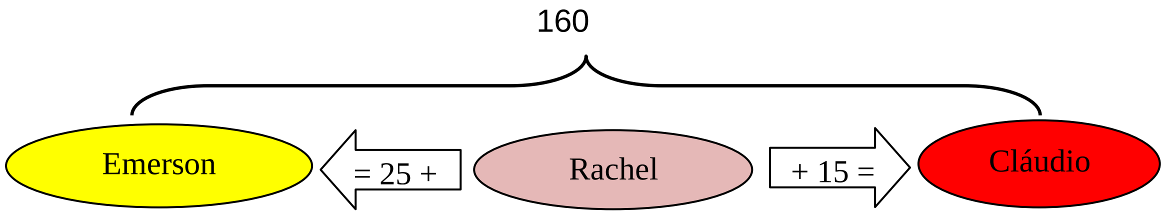


Figura 8: Esquema de um problema de partilha com encadeamento tipo poço.

Em uma situação desse tipo, partimos de um valor conhecido, 160 livros, para chegar às partes desiguais e desconhecidas. No caso desse problema de partilha, temos duas relações. “***Rachel tem 25 livros a menos que Emerson”*** *e “***Rachel têm 15 livros a menos que Cláudio***,” sendo as duas relações de natureza aditiva (a menos).

Resolvendo o problema acima,

Chamaremos E – Emerson, R – Rachel e C – Cláudio.

$$\begin{cases} E + R + C = 160 \text{ (I)} \\ R + 25 = E \text{ (II)} \\ R + 15 = C \text{ (III)} \end{cases}$$

Substituindo, (II) e (III) em (I) temos,

$$R + 25 + R + R + 15 = 160$$
$$3R = 160 - 40$$
$$3R = 120$$
$$R = 40.$$

Logo

Emerson tem 65 livros;
Rachel tem 40 livros;
Cláudio tem 55 livros.

No caso do problema apresentado acima, as relações convergem para Rachel, ou seja, todas as relações colocadas no enunciado do problema centralizam para um dos termos do problema.

Em nossa pesquisa utilizamos os problemas de partilha segundo encadeamento definido por Marchand e Bednarz (1999), ou seja, “Fonte”, “Composição” e “Poço”.

2.4 – Os problemas de partilha nos livros didáticos de matemática

As pesquisas de Marchand e Bednarz (1999) no Canadá e de Almeida (2011) no Brasil, mostram a realidade do que encontramos nos livros didáticos de matemática do ensino fundamental sobre problemas de estrutura algébrica.

Marchand e Bednarz (1999) investigaram os problemas propostos para o ensino de álgebra em duas coleções de livros didáticos de matemática do secundário 1, 2 e 3 (equivalente aos 6º, 7º e 8º ano do ensino fundamental no Brasil). Já Almeida (2011), analisou quais são os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita nos livros didáticos de Matemática do 7º ano do ensino fundamental, aprovados pelo PNLD/2011.

Apresentaremos a seguir os dados das respectivas pesquisas, apenas sobre os problemas de partilha, justamente por estarem compondo nosso objeto de estudo.

Em relação aos problemas de partilha do encadeamento tipo fonte, Marchand e Bednarz (1999) encontraram uma média de 40% nos livros didáticos pesquisados, enquanto Almeida (2011) encontrou 50% nos livros analisados. Percebemos que tanto no Canadá como no Brasil, os livros didáticos de matemática dão certa prioridade a problemas desse tipo.

Nos problemas de partilha com encadeamento tipo composição, Marchand e Bednarz (1999) encontraram uma média de 54% nos livros analisados. Já na pesquisa de Almeida (2011), apenas 15% dos livros analisados apresentavam problemas de partilha com encadeamento tipo composição. Assim, percebemos uma discrepância enorme entre os livros canadenses e os brasileiros.

Os problemas de partilha com encadeamento tipo poço, segundo Marchand e Bednarz (1999) são pouco propostos nos livros didáticos canadenses, uma vez que apenas 16% dos problemas aparecem nos livros didáticos. Já segundo Almeida (2011), os problemas de partilha com encadeamento tipo poço não aparecem nos livros didáticos brasileiros. Uma das hipóteses levantadas pelo autor é que talvez os livros didáticos de matemática no Brasil não apresentem esses tipos de problemas pelo grau de dificuldade na resolução.

Não sabemos se a ausência ou a pouca importância que os livros didáticos de matemática do ensino fundamental no Brasil dão aos problemas de partilha podem influenciar negativamente na construção do saber sobre esse objeto de estudo.

CAPÍTULO 3

Esse capítulo apresenta um recorte de uma pesquisa que foi desenvolvida em parceria com o CRIRES – Centre de Recherche sur l'Intervention et la Réussit Scolaire da Université Laval – Canadá, de autoria de Câmara e Oliveira (2008). Consideramos essencial relatar essa pesquisa, uma vez que nosso trabalho é uma continuidade do trabalho proposto por Câmara e Oliveira (2008).

Câmara e Oliveira (2008) investigaram as estratégias e registros utilizados por alunos do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de estrutura algébrica tipo partilha. Nossa pesquisa investigou as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Entretanto, não buscamos em nossa pesquisa analisar os tipos registros, mas sim se com o avanço do nível de escolaridade os alunos utilizam as mesmas estratégias de resolução, ou se elas se modificam de acordo com o nível de escolarização.

3.1 – Estratégias e registros utilizados por alunos de 6º ano na resolução de problemas de estrutura algébrica.

Câmara e Oliveira (2008) investigaram como alunos brasileiros e canadenses, se comportam em situação de resolução de problemas de estrutura algébrica. Os autores investigaram em maior dimensão, não somente as estratégias e registros de representação mobilizados pelos alunos, mas possíveis relações com o processo de ensino, com os programas e com os livros didáticos utilizados pelo aluno.

Apresentaremos a seguir as estratégias de base identificadas por Câmara e Oliveira (2008). Ressaltamos que essas estratégias também foram utilizadas como estratégias de base para o 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental, presentes em nossa pesquisa.

Na estratégia de base Atribuir Valor (AV), o aluno atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas, como mostra o exemplo a seguir.

Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério têm o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas têm cada um?

Nesse caso, o aluno atribui um valor a Frederico, chegando aos valores de Lúcia e Rogério, ou seja, considera que, Frederico = 10, como Lúcia tem 15 revistas a mais, então Lúcia = 25. Como Frederico têm o dobro de revistas de Rogério, então Rogério terá 20 revistas. ***Logo, Frederico tem 10 revistas, Lúcia tem 25 revistas e Rogério tem 20 revistas.***

Na estratégia de base dividir por 3 (D3), o sujeito inicia o problema dividindo o total fornecido para as três incógnitas do problema, como se a partilha desse valor fosse em partes iguais. Em seguida ele adota o valor encontrado como sendo o valor de uma das incógnitas. Após isso, estabelece as relações, encontrando os valores dos outros elementos desconhecidos, como mostra o exemplo a seguir.

> ***Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?***

Nesse caso o aluno divide o total 180 por 3, obtendo 60. Em seguida ele adota o valor encontrado (60) como sendo o valor de uma das Incógnitas. Na sequência estabelece relações, encontrando o valor dos outros elementos desconhecidos. Considerando Basquete = 60, como o número de alunos que jogam basquete é o dobro do número de alunos que jogam vôlei, então Vôlei = 30. Por fim, como o número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei, então F = 90. ***Logo, 90 alunos joga futebol, 60 jogam basquete e 30 joga vôlei.***

Na estratégia Algébrica (AL) o sujeito parte do total para determinar o valor das incógnitas, identificando as relações existentes, como mostra o exemplo a seguir.

> ***Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?***

Nesse caso aluno estabelece as relações, reduzindo a uma única incógnita para chegar ao resultado final das outras incógnitas envolvidas. Ou seja, considera M + R + A = 270, como R = 2M e A = 3R, logo M = 30, substituindo R = 60 e A = 180. Neste caso, Marta têm 30 chaveiros, Rafael têm 60 chaveiros e Ana têm 180 chaveiros.

A estratégia de base considerar o total como fonte (TF), consiste em associar o total do problema ao valor de uma das incógnitas, na resolução dos problemas. O sujeito, após adotar o total como o valor de uma das incógnitas, aplica as relações do enunciado e encontra os valores para as outras incógnitas, como mostra o exemplo a seguir.

> ***Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?***

Na resolução desse problema, o aluno após adotar o total como valor de uma das incógnitas, aplica as relações do enunciado e encontra os valores para as outras incógnitas. Uma das soluções possíveis é dividir 180 por 2 e depois, dividir novamente 180 por 3. Percebe-se que aluno encontraria 90 e 60 respectivamente, restando estabelecer relações para encontrar o valor restante correspondente, que seria 30.

Na estratégia de base denominada cálculo qualquer (CQ), o estudante não consegue se apropriar do significado do problema, momento em que efetua uma conta qualquer na tentativa de encontrar uma solução.

E por fim, quando não foi possível identificar a estratégia, utilizaremos o código (NI) para categorizar.

Câmara e Oliveira (2008) investigaram as estratégias utilizadas por alunos de 6º ano de 4 escolas da cidade do Recife, e cada aluno resolveu individualmente 7 problemas de estrutura algébrica. Segundo os autores, em relação ao rendimento, os alunos apresentaram o mesmo resultado da pesquisa realizada por Marchand e Bednarz (2000), em que os problemas de tipo poço se mostram mais difíceis para o aluno, ou seja, nesse tipo de problema, apenas 23% dos sujeitos obteve sucesso, contra 33% para o problema do tipo composição e 44% para problemas do tipo fonte, conforme mostra a tabela a seguir:

Quadro 2- Rendimento por encadeamento de relações dos alunos do 6º ano do ensino fundamental.

	Fonte	Composição	Poço
Acertos	44%	33%	23%
Erros	41%	43%	39%
Não resposta	15%	24%	38%

Fonte: Câmara e Oliveira, 2008, p. 5.

Câmara e Oliveira (2008) observaram, também, que no problema tipo poço o maior percentual de alunos deixou o problema em branco, o que reforça o aspecto de dificuldade desse tipo de encadeamento de relações, como indicam os trabalhos realizados anteriormente (MARCHAND e BEDNARZ, 1999).

No trabalho de Câmara e Oliveira (2008), as estratégias de base foram identificadas da seguinte forma: Atribuir Valores (AV), Dividir por 3 (D3), Algébrica (AL), considerar o Total como Fonte (TF) e realizar um Cálculo Qualquer (CQ), além dos casos em que não foi possível identificar a estratégia mobilizada pelo sujeito (NI). Em nosso trabalho no 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental, utilizamos as mesmas estratégias de base identificadas por Câmara e Oliveira (2008). O quadro abaixo mostra as estratégias de base utilizadas pelos alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Quadro 3 - estratégias de base .

Atribuir valores (AV)	40%
Dividir por 3 (D3)	34%
Algébrica (AL)	9%
Considerar o total como fonte (TF)	8%
Cálculo qualquer (CQ)	6%
Não identificada (NI)	3%

Fonte: Câmara e Oliveira, 2008, p. 5.

O quadro nos mostra que a grande maioria dos sujeitos adota as estratégias aritméticas (AV) e (D3) como estratégias de base, sendo a estratégia AV preferida por 40% dos alunos. Também aqui vemos que a estrutura do problema e o encadeamento das relações influenciam nessa escolha, pois, quando o total é múltiplo de três, essa situação aparece invertida; nesse caso, 40% dos sujeitos adotam a estratégia (D3) contra 34% que adotam a estratégia (AV). O quadro seguinte mostra como a escolha da estratégia de base se distribui em função do encadeamento das relações (CÂMARA e OLIVEIRA 2008, p. 05).

Quadro 04 - estratégias de base por encadeamento de relações.

	Fonte	Composição	Poço
Atribuir valores (AV)	37%	40%	44%
Dividir por 3 (D3)	32%	33%	36%
Algébrica (AL)	12%	9%	6%
Considerar o total como fonte (TF)	11%	6%	7%
Cálculo qualquer (CQ)	5%	9%	6%
Não identificada (NI)	3%	3%	2%

Fonte: Câmara e Oliveira, 2008, p. 6.

Câmara e Oliveira (2008) observaram que a escolha da estratégia de base (AV) cresce em função da complexidade das relações, atingindo o percentual de 44% em problemas do tipo poço. Já a escolha da estratégia (D3) mostra pouca variação em relação ao encadeamento das relações.

Segundo Câmara e Oliveira (2008), por outro lado, o recurso à estratégia algébrica (AL), contrariamente à estratégia (AV), decresce em função da dificuldade do problema, sendo mais adotada em problemas do tipo fonte. Em outros termos, os resultados parecem indicar que existe uma relação entre as estratégias (AV) e (AL), que precisa ser melhor investigada.

Segundo Câmara e Oliveira (2008), em problemas tipo fonte, 56% dos sujeitos adota a estratégia de base atribuir o valor (AV) e consegue atribuir valor correto à incógnita em uma primeira tentativa; os outros, após verificar a incoerência com o total, partem para a atribuição de novos valores. Já para os problemas tipo composição, 60% dos sujeitos precisaram realizar mais de uma tentativa, comparando os resultados obtidos com o total, até encontrar os valores adequados para as incógnitas.

Utilizar o resultado da divisão por três como o valor de uma das incógnitas determinando as relações do problema é mais adotada em problemas tipo composição (55%). A dificuldade em conseguir identificar a estrutura associada a um problema tipo poço aparece reforçada quando observamos que um a cada três alunos (34%), nesse tipo de encadeamento, ou abandona a resolução após dividir por três, ou adota como resposta para o problema o valor obtido nessa divisão, considerando apenas uma das incógnitas (CÂMARA e OLIVEIRA, 2008. p. 7).

Segundo Câmara e Oliveira (2008), na estratégia algébrica (AL), ao contrário das aritméticas, o sujeito parte do total para determinar o valor das incógnitas, identificando as relações entre elas. Os resultados mostram que problemas cujo encadeamento das relações é do tipo fonte, parecem facilitar, para o sujeito, a mobilização correta de estratégias algébricas. De fato, pode-se verificar que, no caso desse tipo de problema, 99% dos sujeitos que mobilizaram estratégias algébricas o fizeram corretamente; esse percentual decresce com os outros dois tipos de problema.

Câmara e Oliveira (2008) encontraram, ainda, 6% dos sujeitos que não conseguem se apropriar do significado do problema. Nesse caso, eles buscam efetuar uma conta qualquer, estratégia de base (CQ), na tentativa de encontrar uma solução.

Os resultados desse estudo mostram que, no caso de problemas de partilha, os alunos apresentavam mais dificuldade quando o encadeamento das relações é do tipo "poço" e a natureza das relações é multiplicativa/multiplicativa, como mostra o exemplo a seguir.

Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?

Lembramos que nos problemas de partilha com encadeamento tipo poço, as relações convergem para um dos dados do problema; no caso do problema acima, as relações convergem para Júlia. Já em relação à natureza das relações o problema apresenta duas relações, sendo a primeira "**Julia tem um terço dos selos de Ana**" e a segunda "**Júlia tem metade dos selos de Maria",** sendo a natureza de ordem multiplicativa/multiplicativa.

Para Marchand e Bednarz (1999), a natureza das relações entre os dados de um problema pode ser aditiva, quando se lança mão de somas ou subtrações, multiplicativa, quando de multiplicações ou divisões, ou naturezas diferentes, quando se tem em um mesmo problema uma natureza aditiva e uma multiplicativa.

Já em problemas tipo "composição", os alunos demonstram mais facilidade quando a primeira relação é multiplicativa e a segunda aditiva, o que pode estar relacionado ao tipo de representação que o aluno elabora a partir do enunciado do problema. Esses resultados corroboram os encontrados por Marchand e Bednarz (1999), como mostra o exemplo a seguir.

> ***Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?***

Percebemos que se o aluno utilizar a estratégia de resolução aritmética dividir por 3, ele terá 80 pontos para cada time, subtraindo 40 pontos do time A e somando com o time C, chega facilmente a resposta correta do problemas. Ou seja, o time A fez 40 pontos, o time B fez 80 pontos e o time C fez 120 pontos, atendendo o enunciado do problema. Temos assim uma ideia simples de representação aritmética.

Segunda Câmara e Oliveira (2008), estratégias que fazem recurso a raciocínios aritméticos, em que se busca partir de valores para as incógnitas, são mobilizadas por 80% dos alunos de 6° ano. Os autores encontraram que somente 10% deles se servem de estratégias mobilizando o pensamento algébrico, em que o ponto de partida são as relações estabelecidas entre as incógnitas. Isso parece reforçar o peso que o trabalho com a aritmética nas séries iniciais de escolaridade tem na formação do pensamento matemático dos alunos.

Câmara e Oliveira (2008) concluíram lembrando que se trata de um estudo com características de diagnóstico, cujo instrumento de coleta de dados comporta somente a resolução, com papel e lápis, de uma tarefa. É imprescindível, e isso está contemplado na continuidade do estudo, a aplicação de entrevistas com os alunos, para afinar as hipóteses.

CAPÍTULO 4

Metodologia

Esta pesquisa visa analisar as estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. A pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), que apresentamos no capítulo anterior, deu suporte ao nosso estudo, justamente por ser esse uma continuidade que busca atender os anos não contemplados no trabalho anterior.

A coleta de dados consistiu na aplicação de um teste por aluno, que foram classificados em dois tipos, A e B, os quais apresentavam a mesma estrutura e nível para resolução. Cada teste continha sete questões com problemas algébricos tipo partilha, conforme encadeamento proposto por Marchand e Bednarz (1999).

O tempo disponível para aplicação do teste foi duas aulas de 50 minutos, totalizando 1h40. Vale salientar que não havia diferença na duração das aulas de uma escola para outra, ou seja, todas as três escolas apresentavam aulas de 50 minutos. Entretanto, a maioria dos sujeitos, respondeu ou entregou o teste antes do tempo máximo permitido.

Utilizamos professores das instituições envolvidas para auxiliar este pesquisador na aplicação do teste, ou seja, distribuição dos testes, controle na saída da sala e fiscalização. Durante a aplicação o pesquisador procurou explicar para os alunos a razão da pesquisa, solicitando atenção e empenho para resolução dos problemas.

Os testes foram aplicados no mês de novembro de 2012 em todas as escolas.

4.1 – Os Sujeitos e as Escolas

O estudo em questão envolveu como sujeitos 251 alunos de três escolas do Estado de Pernambuco, sendo duas localizadas na Cidade de São Lourenço da Mata e uma na Cidade do Recife.

Em relação às turmas, foram escolhidos um 7º ano, um 8º ano e um 9º ano do ensino fundamental por escola, ou seja, três turmas por escola, perfazendo um total de 09 turmas, conforme mostra o quadro abaixo.

QUADRO 05 - Quantitativo de alunos por Escola

ESCOLA	ANO			TOTAL POR ESCOLA
	7º	**8º**	**9º**	
A	24	15	39	78
B	25	30	40	95
C	33	30	15	78
TOTAL GERAL				251

Os alunos, em sua maioria, encontravam-se dentro da faixa etária normal para a série especificada, havendo um pequeno numero de alunos que se encontrava em distorção idade-série.

4.2 – Instrumentos de coleta utilizados

A coleta consistiu da aplicação de um instrumento tipo teste, contendo problemas de partilha, os quais já foram aplicados na pesquisa anterior, proposta por Câmara e Oliveira (2008) no Brasil e no Canadá.

A aplicação do teste foi em uma única seção por cada escola, ou seja, aplicamos simultaneamente no turno da tarde os testes no 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental, repetindo a sistemática nas demais escolas.

O teste, conforme a pesquisa realizada por Câmara e Oliveira (2008), apresenta sete problemas de partilha, o primeiro problema tinha apenas uma relação, para facilitar a entrada do aluno na resolução, como mostra o exemplo a seguir.

> ***Paulo e Clara têm, juntos, 45 anos. Paulo tem 15 anos a mais que Clara. Qual a idade de cada um?***

Percebemos que o problema acima, apresenta apenas uma relação **"Paulo tem 15 anos a mais que Clara",** sendo essa relação de natureza aditiva.

Os outros problemas envolvem duas relações. Os problemas que envolvem duas relações variam o tipo de encadeamento (fonte, composição e poço), e a natureza das relações (aditivas e multiplicativas).

Cada teste contém uma questão de partida, duas questões tipo fonte, duas questões tipo composição e duas questões tipo poço, totalizando sete questões, nessa mesma ordem, conforme os quadros a seguir.

Quadro 06 – Teste A – Encadeamento e Natureza das Relações.

Nº	**Questão**	**Encadeamento das Relações**	**Natureza das Relações**
02	Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério têm o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas têm cada um?	Fonte	aditiva ⇒ multiplicativa
03	Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?	Fonte	multiplicativa ⇒ multiplicativa
04	Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?	Composição	aditiva ⇒ multiplicativa
05	Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?	Composição	Multiplicativa ⇒ multiplicativa
06	João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quanto carrinho tem cada um deles?	Poço	aditiva ⇒ aditiva
07	Clara, Marcos e Antônio têm, juntos, 125 bolinhas. Marcos tem a metade de bolinhas de Clara e 5 bolinhas a menos que Antônio. Quantas bolinhas têm cada um?	Poço	Multiplicativa ⇒ aditiva

Quadro 07– Teste B – Encadeamento e Natureza das Relações.

Nº	Questão	Encadeamento das Relações	Natureza das Relações
02	Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério têm o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas têm cada um?	Fonte	aditiva $\Rightarrow$ multiplicativa
03	Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?	Fonte	aditiva $\Rightarrow$ aditiva
04	Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?	Composição	Multiplicativa $\Rightarrow$ aditiva
05	Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?	Composição	aditiva $\Rightarrow$ aditiva
06	Ana Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?	Poço	multiplicativa $\Rightarrow$ multiplicativa
07	Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?	Poço	aditiva $\Rightarrow$ multiplicativa

4.3 - Categorias de Análises

As categorias de análise foram determinadas a priori, a partir das categorias definidas por Câmara e Oliveira 2008, ou seja, a partir de dois eixos, rendimento (acerto, erro e não resposta) e estratégia inicial privilegiada. Essa análise apoia-se sobre uma análise conceitual das estruturas algébricas, apresentada por Marchand e Bednarz (1999).

Para a estratégia de base, utilizamos as mesmas apresentadas por Câmara e Oliveira (2008), ou seja, cinco estratégias de base para resolução: Atribuir Valores (AV), Dividir por 3 (D3), Resolução Algébrica (AL), Considerando o Total como Fonte (CTF) e Realizar Calculo Qualquer (CQ), além dos casos que não seja possível identificar a estratégia utilizada pelos sujeitos (NI).

CAPÍTULO 5

Neste capitulo, apresentamos a análise dos dados obtidos nos testes que foram realizados pelos alunos do 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental de 03 escolas localizadas no Estado de Pernambuco, na resolução de problemas de partilha, segundo encadeamento definido por Marchand e Bednarz (1999). Em nossa análise buscamos verificar a performance dos sujeitos e a estratégia de base utilizada na resolução dos problemas.

É importante ressaltar que nosso estudo visa analisar as estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Ou seja, questionamos se, com o avanço do nível de escolarização, os alunos utilizam as mesmas estratégias e procedimentos de resolução.

5.1 – Análise

A análise dos testes foi realizada basicamente em dois momentos. Em um primeiro momento observamos a performance dos alunos na resolução dos problemas propostos e, na sequencia, analisamos a estratégia de base utilizada por eles.

Nossa análise dos dados teve o quantitativo de alunos apresentados na tabela abaixo. Portanto, chamaremos, na análise, as escolas como A, B e C. Já em relação aos alunos, os chamaremos de sujeitos.

Quadro 8 – Quantidade de sujeitos por escola.

ESCOLAS	Turmas / Quantitativo de Alunos			Total por Escola
	7º Ano	**8º Ano**	**9º Ano**	
A	24	15	39	78
B	25	30	40	95
C	33	30	15	78
Total Geral por Série	**82**	**75**	**94**	**251**

5.2 – Análise por ano de escolarização

Para cada ano de escolaridade apresentaremos uma análise individual, procurando diagnosticar as estratégias e procedimentos utilizados, de acordo com as pesquisas de Marchand e Bednarz (1999), Câmara e Oliveira (2008) e Almeida (2011).

Apresentamos também uma comparação com o ano anterior, para diagnosticar os avanços na resolução dos problemas e as estratégias de base utilizadas ano a ano.

5.2.1 – Alunos do 7º ano do Ensino Fundamental

No 7º ano do ensino fundamental, 82 sujeitos realizaram o teste, de acordo com o que apresenta o quadro abaixo.

Quadro 9 – Quantidade de Sujeitos do 7º Ano.

Ano	**Escolas / Quantitativo de Sujeitos**			**Total**
	A	**B**	**C**	
7º	24	25	33	**82**

Os resultados encontrados se mostraram próximos aos apresentados por Marchand e Bednarz (2000) e Câmara e Oliveira (2010), se levarmos em consideração o avanço de escolarização; percebemos que o desempenho do 7º ano foi inferior ao desempenho do 6º ano nos problemas composição e poço. A seguir mostraremos um quadro da performance dos sujeitos do 7º ano, resgatando a performance do 6º ano obtida no trabalho de Câmara e Oliveira (2008).

Quadro 10 - rendimento por encadeamento de relações dos sujeitos do 7º ano do ensino fundamental.

	Fonte		**Composição**		**Poço**	
	6° ano	**7° ano**	**6° ano**	**7° ano**	**6° ano**	**7° ano**
Acertos	44%	**54%**	33%	**29%**	23%	**15%**
Erros	41%	**27%**	43%	**38%**	39%	**34%**
Não resposta	15%	**19%**	24%	**33%**	38%	**51%**

Em relação ao rendimento, os sujeitos do 7º ano obtiveram melhor performance no problemas tipo fonte, com um percentual de 54%. Já em relação aos problemas tipo composição e poço os resultados foram 29% e 15% respectivamente.

Percebemos que nos problemas tipo fonte, os alunos do 7º ano obtiveram melhor resultado do que os alunos do 6º ano da pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), uma vez que o percentual de acerto foi de 54% e 44% respectivamente. Já nos problemas tipo composição e poço o resultado do 7º ano foi inferior ao 6º ano do ensino fundamental.

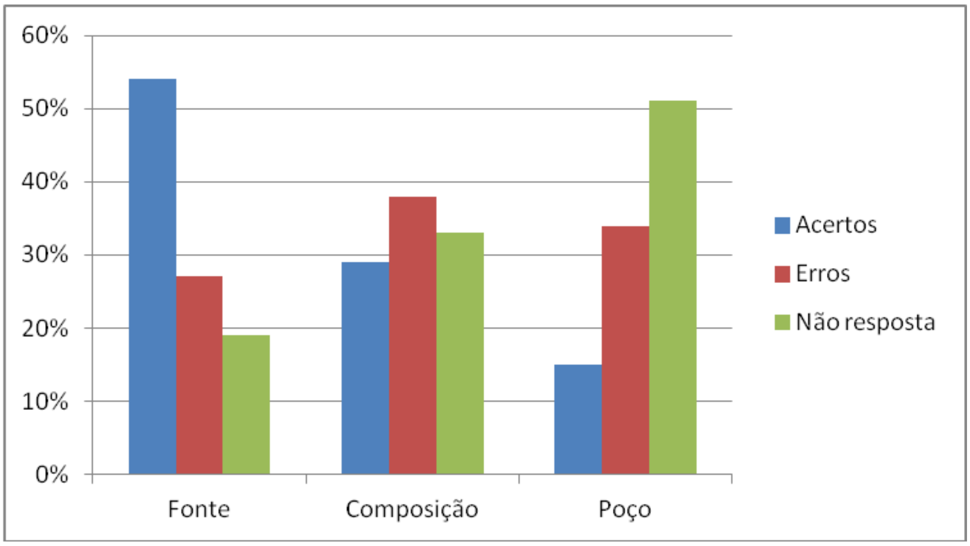
Foi possível constatar que, assim como a pesquisa do 6º ano de Câmara e Oliveira (2008), nossos sujeitos apresentaram alto grau de dificuldade para a resolução dos problemas tipo poço, uma vez que apenas 15% dos sujeitos resolveram este tipo de problema. Para Marchand e Bednarz (2000), os problemas de tipo poço se mostram mais difíceis para o aluno.

Podemos observar que nos problemas tipo poço, houve um percentual significativo de sujeitos que deixaram o problema em branco, o que reforça o grau de dificuldade nesse tipo de problema. O alto grau de não resposta pode indicar que o sujeito não conseguiu atribuir sentido ao problema e, nesse caso, ele deixa em branco. Quando ele consegue atribuir significado ele responde, mesmo que erre a questão.

Segundo Câmara e Oliveira (2008, p. 5), nos problemas tipo poço, a identificação da estrutura demanda que o sujeito considere as operações inversas daquelas presentes no enunciado. Exemplificando, dizer que Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio implica que o aluno estabeleça as relações $J = P + 25$ e $C = P + 15$.

Assim como na pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), os sujeitos obtiveram maior sucesso na resolução de problemas tipo Fonte, pois 54% dos sujeitos resolveram os problemas de forma correta, como mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 1– Rendimento por encadeamento das relações dos sujeitos do 7º ano do ensino fundamental



No 7º ano do ensino fundamental o número de sujeitos que não respondeu as questões tipo composição e poço foi muito alto, uma vez que 33% e 51% respectivamente deixaram os problemas em branco. Já na pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), apenas 24% e 38% dos sujeitos respectivamente, deixaram os problemas em branco. Assim como nos problemas tipo poço, acreditamos que os sujeitos não responderam os problemas tipo composição por não conseguirem atribuir sentido aos problemas.

Em relação às categorias de análise, utilizamos cinco estratégias de base, como apresentamos no capitulo 4: Atribuir Valores (AV), Dividir por 3 (D3), Algébrica (AL), Considerar o Total como Fonte (TF), Realizar um Cálculo Qualquer (CQ) além dos casos em que foi impossível identificar as estratégias utilizadas pelos sujeitos (NI). Em nossa pesquisa não surgiram outras estratégias de base, sendo possível constatar apenas as estratégias já pré-estabelecidas.

O quadro a seguir mostra as estratégias de base utilizadas pelos sujeitos do 6º e 7º ano do ensino fundamental.

Quadro 11 – Comparação das estratégias de base dos sujeitos do 6º e 7º ano do ensino fundamental.

ESTRATÉGIA DE BASE	ANO	
	6º	7º
Atribuir valores (AV)	40%	**52%**
Dividir por 3 (D3)	34%	**12%**
Algébrica (AL)	9%	**15%**
Considerar o total como fonte (CTF)	8%	**10%**
Cálculo qualquer (CQ)	6%	**5%**
Não identificada (NI)	3%	**6%**

O quadro mostra que a maioria dos sujeitos do 7º ano utiliza estratégias aritméticas, tais como (AV) e (D3), como estratégia de base, sendo a estratégia (AV) a preferida por 52% dos sujeitos, enquanto a estratégia (D3) foi preferida por 12% dos sujeitos. Em consideração ao nível de escolaridade, os sujeitos do 6º ano utilizaram a estratégias aritméticas em maior percentual que os do 7º ano, uma vez que, 40% utilizaram estratégia (AV), e 34% utilizaram estratégia de base (D3).

Percebemos que no 7º ano os sujeitos utilizam em maior percentual a estratégia de base (AL), uma vez que 15% dos sujeitos a preferiram. Já no 6º ano a estratégia (AL) foi de apenas 9%.

Assim, percebemos que no 7º ano houve um avanço significativo no uso das estratégias de base (AV) e (AL) pelos sujeitos, em relação ao 6º ano do ensino fundamental. Acreditamos que no 7º ano o avanço em relação à estratégia (AL), se deu pelo fato de os sujeitos já estarem vivenciando, na ocasião da coleta, conteúdos que envolvem álgebra.

Os dados do 7º ano se mostraram próximos do 6º ano da pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), em relação à utilização da estratégia de base (CQ) e dos casos que não conseguimos identificar a estratégia utilizada (NI). Enquanto no 7º ano esses dados atingiram 5% e 6% no 6º foi de 6% e 3%.

O quadro a seguir mostra como a escolha da estratégia de base se distribui em função do encadeamento das relações.

Quadro 12 - estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 6º e 7º ano do ensino fundamental.

ESTRATÉGIAS DE BASE	**Tipo de Problemas**					
	Fonte		**Composição**		**Poço**	
	6º	**7º**	**6º**	**7º**	**6º**	**7º**
(AV)	37%	**51%**	40%	**55%**	44%	**49%**
(D3)	32%	**12%**	33%	**11%**	36%	**12%**
(AL)	12%	**18%**	9%	**13%**	6%	**15%**
(CTF)	11%	**11%**	6%	**10%**	7%	**9%**
(CQ)	5%	**5%**	9%	**5%**	6%	**6%**
(NI)	3%	**3%**	3%	**6%**	2%	**9%**

Podemos observar que no 7º ano o uso da estratégia de base (AV) pelos sujeitos, cresce em função da complexidade das relações, chegando ao percentual de 55% em problemas do tipo composição. No trabalho de Câmara e Oliveira (2008) esse percentual atingiu 44%, nos problemas tipo poço, reforçando o grau de dificuldade nesse tipo de problema.

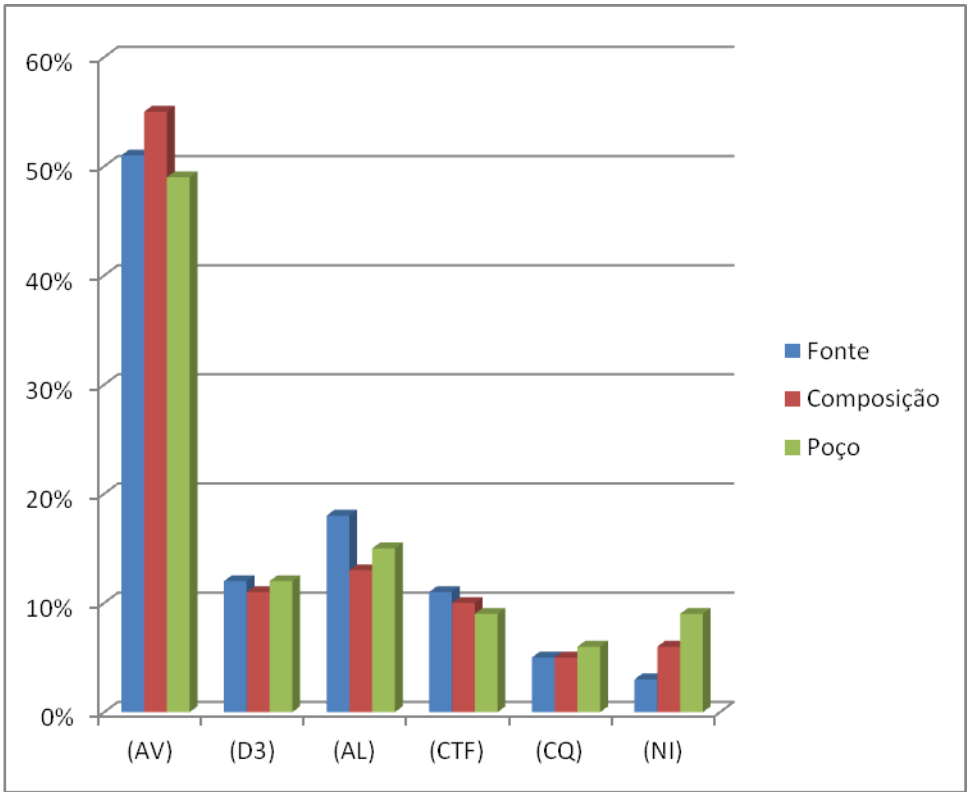
A escolha da estratégia de base (D3) pelos sujeitos no 7º ano, mostrou pouca variação em relação ao encadeamento das relações, atingindo o percentual de 12% nos problemas tipo fonte e poço. Esses dados se mostraram distantes aos da pesquisa de Câmara e Oliveira no 6º ano que atingiu o percentual de 33% nos problemas tipo poço.

Na estratégia algébrica (AL) por encadeamento das relações, observamos que os sujeitos do 7º ano do ensino fundamental atingem 18% nos problemas tipo fonte, 13% nos problemas tipo composição e 15% nos problemas tipo poço, ou seja, nos problemas tipo fonte apresentaram maior percentual. Acreditamos que esse percentual se justifica pela menor dificuldade em resolver os problemas tipo fonte, uma vez que, nesses problemas, as grandezas são originadas em função de apenas uma grandeza.

Os sujeitos do 7º ano do ensino fundamental utilizaram a estratégia algébrica (AL) de acordo o 6º ano do ensino fundamental da pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), uma vez que, a estratégia (AL), decresceu em função da dificuldade dos problemas.

O gráfico a seguir mostra a estratégia de base por encadeamento das relações.

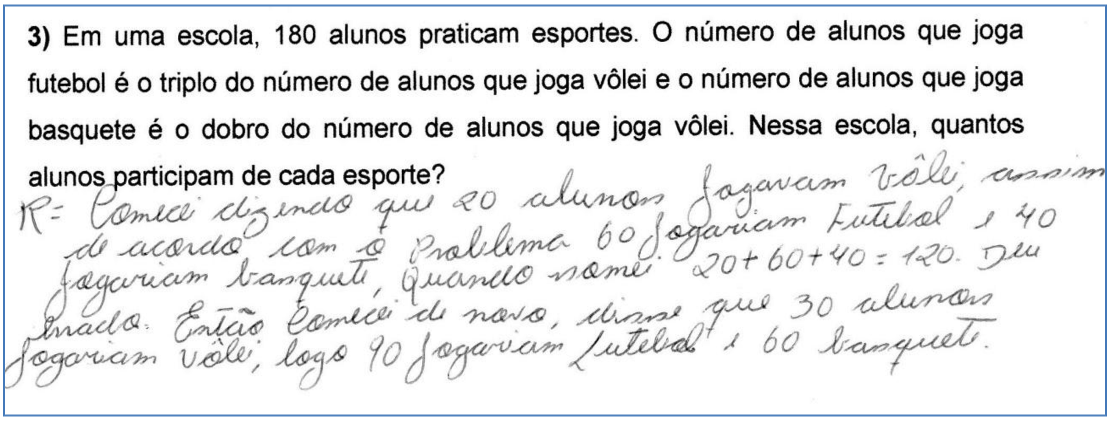
Gráfico 2 – Estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 7º ano do ensino fundamental



O gráfico mostra que, em relação à dificuldade dos problemas, as estratégias de base (D3), (TF) e (CQ) se mantiveram próximas, o que não aconteceu com os casos que não foi possível identificar (NI), que atingiu 9% nos problemas tipo poço.

A seguir apresentaremos alguns protocolos dos sujeitos e a estratégia utilizada para resolução dos problemas.

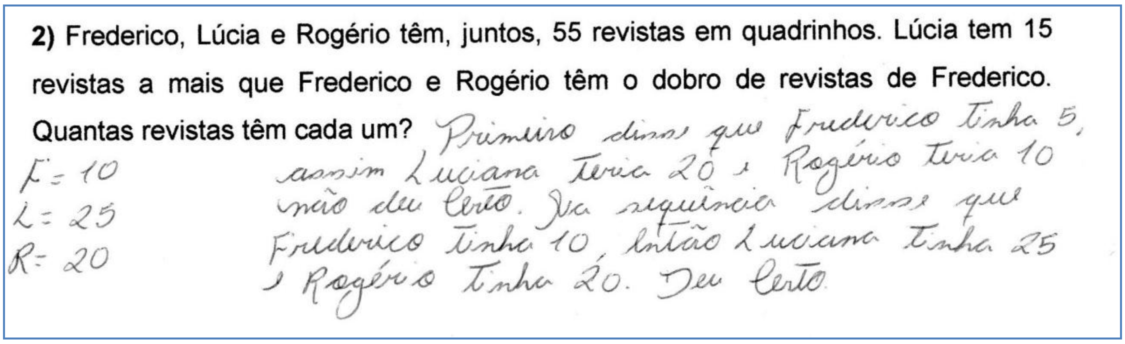
Figura 9 – Sujeito 1 – Problema 3



3) Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?

R= Comecei dizendo que 20 alunos jogavam vôlei, assim de acordo com o Problema 60 jogariam futebol e 40 jogariam basquete, quando somei 20+60+40 = 120. Deu errado. Então comecei de novo, disse que 30 alunos jogariam vôlei, logo 90 jogariam futebol e 60 basquete.

Figura 10 – Sujeito 1 – Problema 2



2) Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério têm o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas têm cada um?

F= 10
L= 25
R= 20

Primeiro disse que Frederico tinha 5, assim Luciana teria 20 e Rogério teria 10 não deu certo. Na sequência disse que Frederico tinha 10, então Luciana tinha 25 e Rogério tinha 20. Deu certo.

Podemos observar nas figuras 9 e 10 acima, problemas do tipo fonte, em que o sujeito utilizou a estratégia de atribuir valores; esse procedimento atingiu 51% nos problemas tipo fonte. Os problemas dessa natureza apresentam uma fonte que estabelece ordem em sequência.

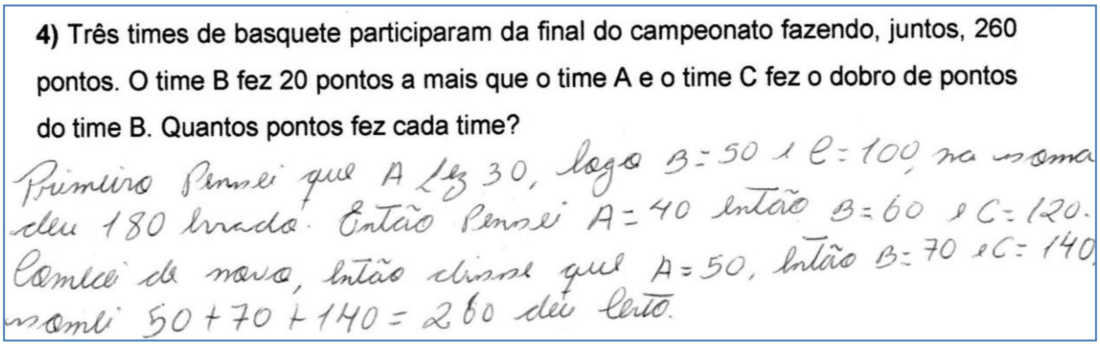
Na figura 9, o problema apresenta apenas uma relação, que é multiplicativa, enquanto que na figura 10, o problema apresenta duas relações diferentes sendo a primeira aditiva e segunda multiplicativa.

Normalmente, na estratégia (AV), os sujeitos lançam valores aleatoriamente até chegarem ao valor das respostas, como ocorreu nos problemas acima.

No caso da figura 9, observamos que o sujeito se preocupou em somar os valores obtidos, a fim de comprovar com exatidão a totalidade de 180 alunos praticantes dos esportes. Já na figura 10 o sujeito não realizou soma aparente, porém chegou ao resultado.

Percebemos que tanto no problema da figura 9 como no problema da figura 10, o sujeito chegou ao resultado correto. Nos problemas tipo composição, a estratégia de atribuir valores (AV) atingiu 55%, percentual maior que os problemas tipo fonte, como mostram as figuras a seguir.

Figura 11 – Sujeito 1 – Problema 4

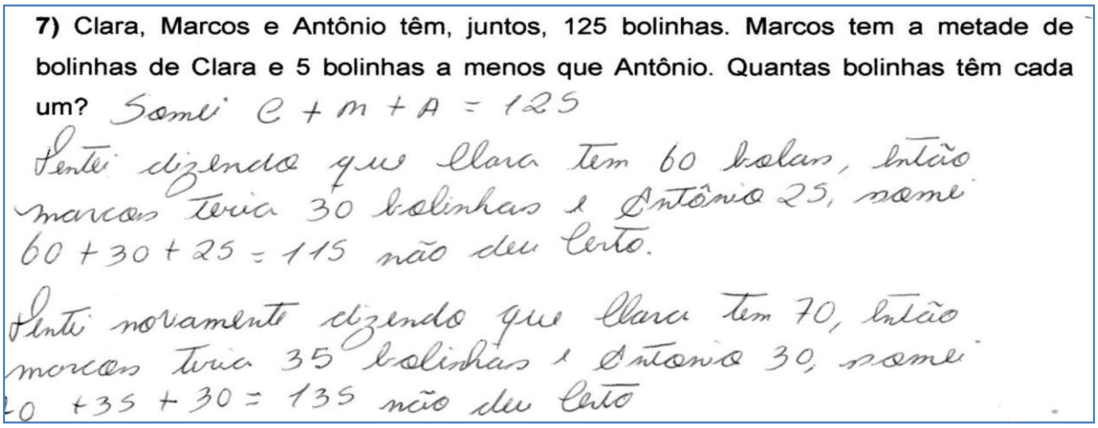


4) Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?

Primeiro Pensei que A fez 30, logo B=50 e C=100, na soma deu 180 errado. Então Pensei A=40 então B=60 e C=120. Comecei de novo, então disse que A=50, então B=70 e C=140 somei 50+70+140=260 deu certo.

A figura 11 apresenta um problema tipo composição, em que a estratégia predominante para a resolução também foi atribuir valores. Acreditamos que esse alto percentual ocorre pela dificuldade do problema, uma vez que ele apresenta duas relações diferentes, sendo a primeira aditiva e a segunda multiplicativa, o que leva o sujeito atribuir valores mais de uma vez, só chegando ao valor correto na segunda tentativa.

Figura 12 – Sujeito 1 – Problema 7



7) Clara, Marcos e Antônio têm, juntos, 125 bolinhas. Marcos tem a metade de bolinhas de Clara e 5 bolinhas a menos que Antônio. Quantas bolinhas têm cada um? Somei C + m + A = 125

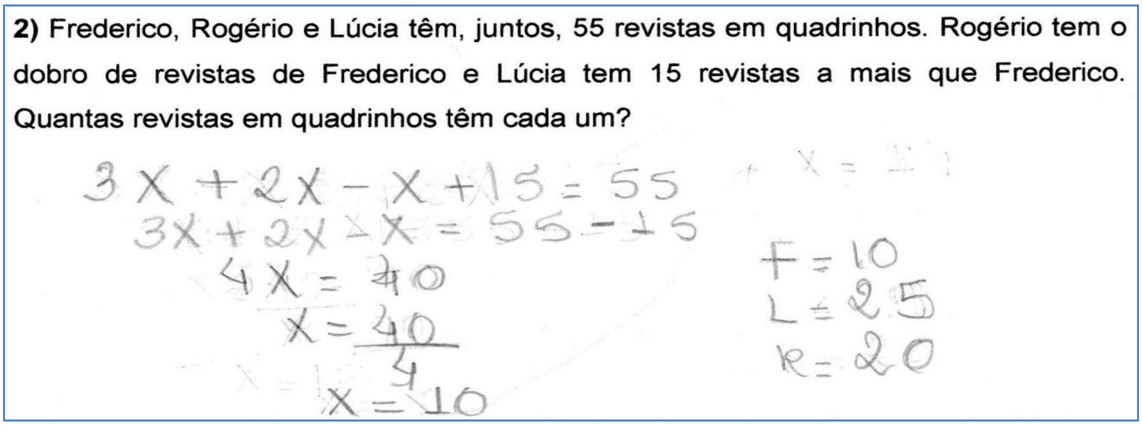
Tentei dizendo que Clara tem 60 balas, então marcos teria 30 bolinhas e Antônio 25, somei 60 + 30 + 25 = 115 não deu certo.

Tentei novamente dizendo que Clara tem 70, então marcos teria 35 bolinhas e Antonio 30, somei 0 + 35 + 30 = 135 não deu certo

A figura 12 apresenta um problema tipo poço, em que também foi utilizado como estratégia de base Atribuir Valores (AV) para a resolução. Podemos perceber que o sujeito não conseguiu resolver após duas tentativas, o que reforça o grau de dificuldade nesse tipo de problema. Esse problema apresenta relações diferentes, sendo a primeira multiplicativa e a segunda aditiva.

A segunda estratégia mais utilizada pelos alunos do 7º ano em todos os tipos de problema (fonte, composição e poço), foi a estratégia algébrica (AL), exemplificada pelos protocolos a seguir.

Figura 13 – Sujeito 2 – Problema 2



2) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

$3X + 2X - X + 15 = 55$

$3X + 2X - X = 55 - 15$

$4X = 40$

$X = \frac{40}{4}$

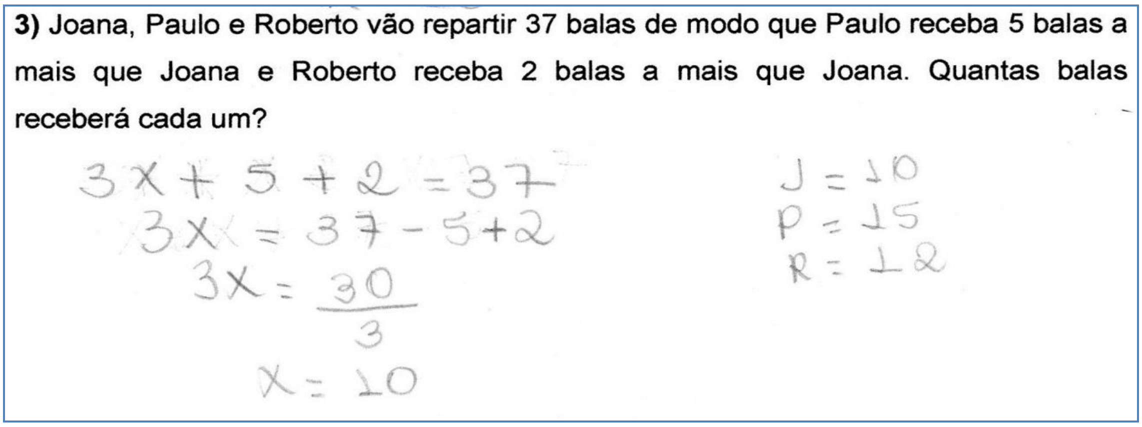
$X = 10$

F = 10

L = 25

R = 20

Figura 14 – Sujeito 2 – Problema 3



3) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

$3X + 5 + 2 = 37$

$3X = 37 - 5 + 2$

$3X = \frac{30}{3}$

$X = 10$

J = 10

P = 15

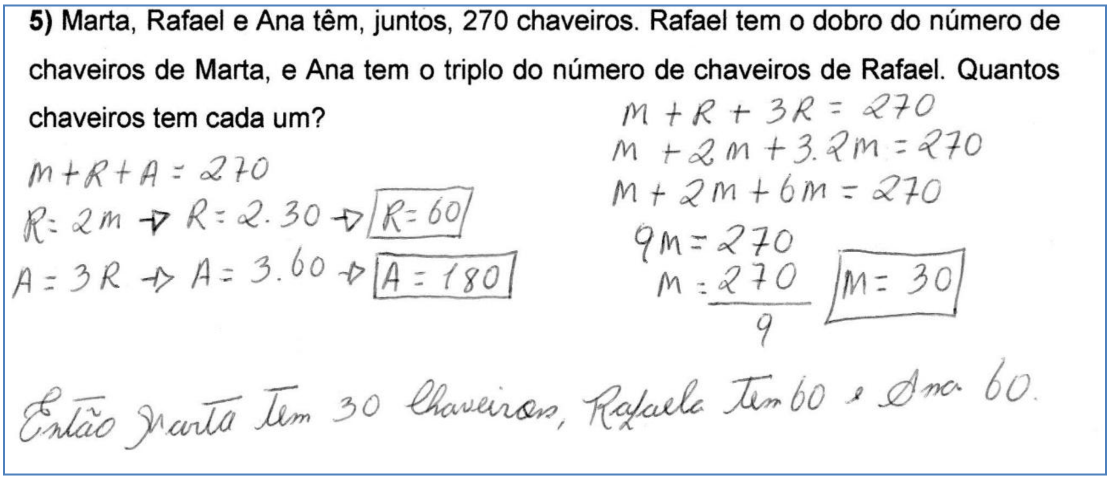
R = 12

As figuras 13 e 14 acima, que apresentam problemas tipo fonte, mostram a segunda estratégia mais utilizada, que foi a algébrica, a qual atingiu 15% nesses problemas. Percebemos que o sujeito utiliza apenas a apenas a letra **x** como incógnita, para estabelecer um valor base, de acordo com o enunciado do problema, e chega ao resultado correto. No caso das figuras 13 e 14, apesar de ser utilizada apenas a letra **x** como incógnita base, após estabelecer relações o sujeito chega ao número de revistas de Frederico, Rogério e Lucia constantes no problema 2 e número de balas de Joana, Paulo e Roberto pertencentes ao problema 3.

Acreditamos que o fato de o aluno usar apenas a letra **x** como incógnita para representar os dados do problema, é proveniente do trabalho com equações e problemas de equações do 1º grau, conteúdo matemático presente nos livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental, em que o uso da letra **x** como incógnita é privilegiado. Ao mesmo tempo, fica a dúvida, até que ponto os problemas de partilha estão sendo explorados em sala de aula.

Segundo Almeida (2011) os livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino fundamental, apresentam uma média de 44% de problemas de partilha. Desses problemas, 57% apresentam apenas uma relação e 39% apresentam duas relações como os problemas das figuras 13 e 14.

Figura 15 – Sujeito 3 – Problema 5



5) Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?

$M+R+A=270$

$R=2M \rightarrow R=2.30 \rightarrow \boxed{R=60}$

$A=3R \rightarrow A=3.60 \rightarrow \boxed{A=180}$

$M+R+3R=270$

$M+2M+3.2M=270$

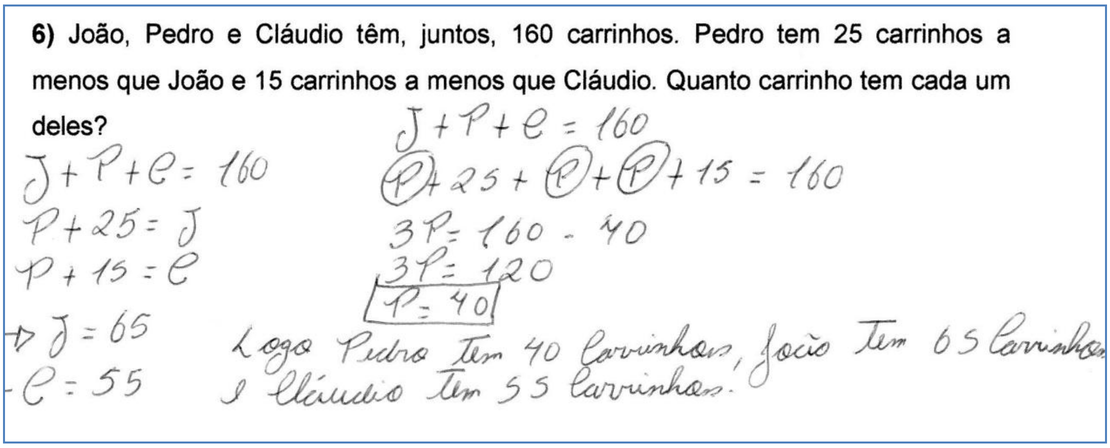
$M+2M+6M=270$

$9M=270$

$M=\frac{270}{9}$ $\boxed{M=30}$

Então Marta Tem 30 Chaveiros, Rafaela Tem 60 e Ana 60.

Figura 16 – Sujeito 3 – Problema 6



6) João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quanto carrinho tem cada um deles?

$J+P+C=160$

$P+25=J$

$P+15=C$

$\rightarrow J=65$

$C=55$

$J+P+C=160$

$P+25+P+P+15=160$

$3P=160-40$

$3P=120$

$\boxed{P=40}$

Logo Pedro Tem 40 Carrinhos, João Tem 65 Carrinhos e Cláudio Tem 55 Carrinhos.

As figuras 15 e 16 apresentam problemas do tipo composição e poço. Percebemos que, em ambos os casos, o sujeito já possui conhecimento para utilizar três incógnitas diferentes, uma vez que ele estabelece relações entre as incógnitas, reduzindo a uma única, chegando ao resultado correto. Consideramos esse procedimento de resolução completo, justamente por estar evidenciado que o sujeito interpretou corretamente os dados do problema.

No 7º ano do ensino fundamental os sujeitos já tentam se apropriar de estratégias algébricas (AL). Entretanto, ainda apresentam estratégias aritméticas, tais como (D3), que atingiu um total de 12% no 7º ano do ensino fundamental.

No 7º ano os sujeitos, em sua grande maioria, utilizaram estratégias aritméticas, porém tentam se apropriar da estratégia algébrica, quase sempre errando o resultado na resolução das questões, uma vez que conseguem estabelecer relações, mas não conseguem chegar ao valor da incógnita, abandonando a resolução antes do seu final.

5.2.2 – Alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

No 8º ano do ensino fundamental, 75 sujeitos realizaram o teste, de acordo com o que apresenta o quadro abaixo.

Quadro 13 – Quantidade de Sujeitos do 8º Ano.

Ano	Escolas / Quantitativo de Sujeitos			Total
	A	B	C	
8º	15	30	30	**75**

As escolas apresentavam pouca distorção em relação à faixa etária dos sujeitos, uma vez que a grande maioria dos sujeitos tinha 13 anos, ou seja, estavam no limite de idade estabelecido. Realizamos a seguir uma análise comparativa dos alunos do 8º ano com os alunos do 7º ano do ensino fundamental, assim como fizemos no tópico anterior.

Quadro 14 - rendimento por encadeamento de relações dos sujeitos de 8º ano do ensino fundamental.

	Fonte		Composição		Poço	
	7° ano	8º ano	7° ano	8º ano	7° ano	8° ano
Acertos	54%	**49%**	29%	**37%**	15%	**17%**
Erros	27%	**15%**	38%	**19%**	34%	**24%**
Não resposta	19%	**36%**	33%	**44%**	51%	**59%**

Os alunos do 8º ano do ensino fundamental apresentaram resultados que se mostraram próximos aos apresentados no 7º ano do ensino fundamental, se levarmos em consideração o aumento do grau de escolarização, uma vez que 37% e 17%, respectivamente, dos sujeitos, obteve sucesso nos problemas tipo composição e poço. Foi possível constatar que os sujeitos do 8º ano do ensino fundamental apresentaram um alto grau de dificuldade para a resolução dos problemas tipo poço, tendo apenas 17% dos sujeitos resolvido este tipo de problema, enquanto 59% não responderam este tipo de problema.

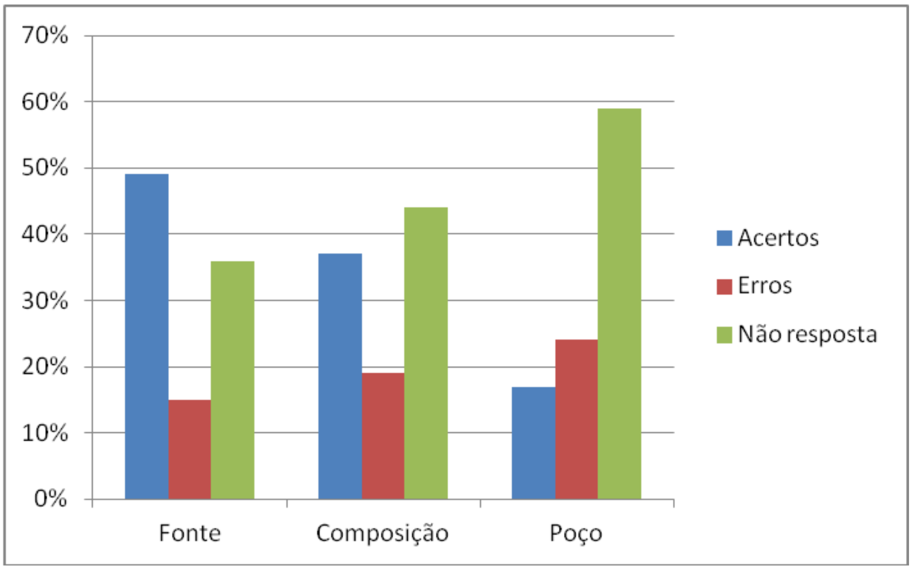
Os resultados obtidos nessa pesquisa evidenciam que no 8º ano do ensino fundamental apenas 49% dos sujeitos acerta a resolução dos problemas tipo fonte, percentual abaixo do obtido no 7º ano do ensino fundamental, em que 54% dos alunos obteve sucesso. Nos problemas tipo fonte percebemos um percentual discrepante dos alunos que deixaram os problemas em branco, um total de 36%, ao contrario do ocorrido no 7º ano, em que apenas 19% não responderam, e o que aconteceu com 15% dos sujeitos na pesquisa de Câmara e Oliveira (2008).

O grande percentual de sujeitos que deixou os problemas (fonte, composição e poço) sem resposta no 8º ano, nos parece estar ligado ao afastamento do trabalho com problemas dessa natureza em sala de aula.

Segundo Almeida (2011), apenas 15% dos livros didáticos possuem problemas de partilha com duas relações. Esse pesquisador constatou que os 10 livros didáticos analisados, apenas um, continha um único problema de partilha com encadeamento tipo poço.

Podemos observar, também, que nos problemas tipo poço houve um percentual significativo de sujeitos que deixaram o problema em branco ou que erraram na resolução, o que reforça o grau de dificuldade nesse tipo de problema, assim como indicam os trabalhos apresentados por Marchand e Bednarz (2000), Câmara e Oliveira (2008) e os resultados dos sujeitos de 7º ano de nossa pesquisa, como mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 3 – Rendimento por encadeamento das relações dos sujeitos de 8° ano do ensino fundamental



Percebemos que 37% dos sujeitos do 8º ano acerta os problemas tipo composição, percentual acima do 7º ano do ensino fundamental, em que 29% acertaram esse tipo de problema, e acima dos 33% da pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), no 6º ano do ensino fundamental.

Assim como os sujeitos do 7º ano, os sujeitos do 8º ano, também obtiveram melhor resultado nos problemas tipo fonte.

O quadro a seguir, mostra as estratégias de base utilizadas pelos sujeitos do 8º ano do ensino fundamental.

Quadro 15 - estratégias de base dos alunos do 8º do ensino fundamental.

ESTRATÉGIA DE BASE	**ANO**	
	7º	**8º**
Atribuir valores (AV)	52%	**53%**
Dividir por 3 (D3)	12%	**7%**
Algébrica (AL)	15%	**17%**
Considerar o total como fonte (CTF)	10%	**8%**
Cálculo qualquer (CQ)	5%	**3%**
Não identificada (NI)	6%	**12%**

Os resultados da estratégia de base dos alunos do 8º ano do ensino fundamental se mostrou muito próximo dos resultados do 7º ano, uma vez que os sujeitos continuam utilizando estratégias aritméticas, tais como Atribuir Valores (AV), como estratégia de base, sendo preferida por 53% dos sujeitos. Percebemos que boa parte dos sujeitos utiliza outras estratégias para a resolução dos problemas, sendo a estratégia algébrica (AL) uma das que merecem destaque, pois 17% dos sujeitos a utilizaram para resolução dos problemas.

Segundo os PNC (BRASIL, 1998, p.115), o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Entretanto, a ênfase dada a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em educação matemática, como pelo desempenho dos alunos nas avaliações de larga escala, como a SAEB.

Os resultados dos sujeitos do 8º ano do ensino fundamental se mostraram muito próximos aos dados relativos aos sujeitos do 7º ano do ensino fundamental, principalmente nas estratégias de base atribuir valor (AV) que variou um ponto percentual para mais, algébrica (AL) que variou dois pontos percentuais para mais, considerar o total como fonte (TF) que variou dois pontos percentuais para menos e cálculo qualquer (CQ) que variou dois pontos percentuais para menos.

Assim como ocorreu no 7º ano do ensino fundamental, um número pequeno dos sujeitos tentou realizar um cálculo qualquer ou utilizou um procedimento que não conseguimos identificar, o que representou respectivamente 3% e 12%.

Em relação ao uso da estratégia de base algébrica (AL), percebemos um avanço pouco considerável, uma vez que o percentual apresentou 15% relativo ao 7º ano e 17% relativo ao 8º ano do ensino fundamental.

Observamos que 8% dos sujeitos do 8º ano utilizam a estratégia (TF), percentual distante dos 2% relativo ao 7º ano do ensino fundamental de nossa pesquisa.

Os resultados evidenciam que do 7º para o 8º ano praticamente não ocorreu mudança na estratégia de base, uma vez que, em porcentagem, esses dados se mostraram muito próximos, ou seja, em relação à estratégia de base, não houve variações significativas, dando a entender que com o avanço da escolaridade as estratégias permanecem inalteradas. A seguir apresentaremos o quadro de estratégia de base por encadeamento das relações.

Quadro 16 - estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 8º ano do ensino fundamental.

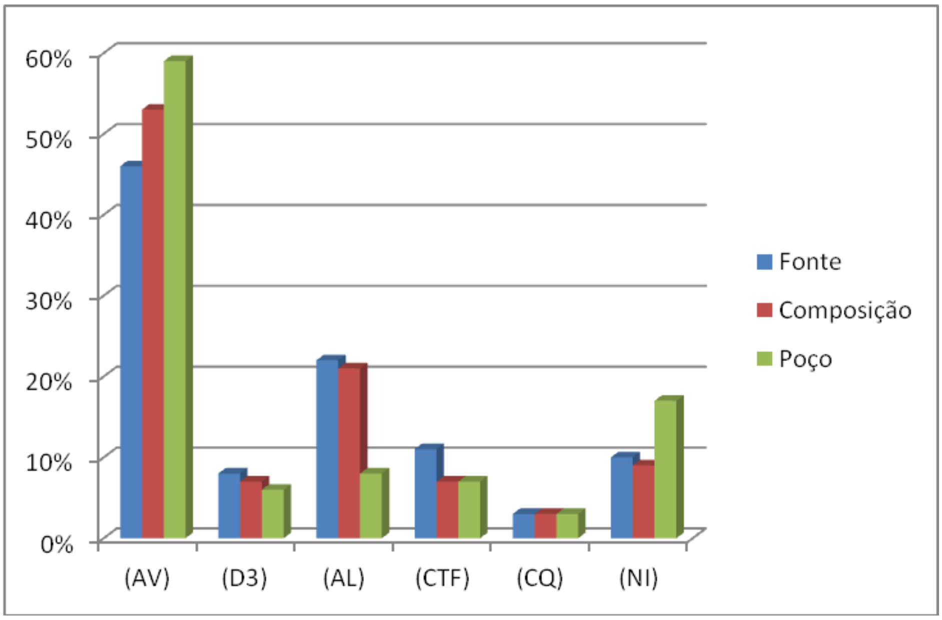
ESTRATÉGIAS DE BASE	Tipo de Problemas					
	Fonte		Composição		Poço	
	7º	8º	7º	8º	7º	8º
(AV)	51%	**46%**	55%	**53%**	49%	**59%**
(D3)	12%	**8%**	11%	**7%**	12%	**6%**
(AL)	18%	**22%**	13%	**21%**	15%	**8%**
(CTF)	11%	**11%**	10%	**7%**	9%	**7%**
(CQ)	5%	**3%**	5%	**3%**	6%	**3%**
(NI)	3%	**10%**	6%	**9%**	9%	**17%**

Podemos observar que no 8º ano, assim como ocorreu no 7º ano, o uso da estratégia de base (AV) pelos sujeitos, cresce em função da complexidade das relações, chegando ao percentual de 59% em problemas do tipo poço. No 7º ano esse percentual atingiu 55%, nos problemas tipo composição e 49% nos problemas tipo poço.

Assim como no 7º ano, a escolha da estratégia de base (D3) no 8º ano mostrou pouca variação em relação ao encadeamento das relações, atingindo o percentual de 8% nos problemas tipo fonte, 7% nos problemas tipo composição e 6% nos problemas tipo poço. Percebemos que a estratégia de base (D3) decresce em função da dificuldade dos problemas, segundo encadeamento definidos por Marchand e Bednarz (1999).

Percebemos que o uso da estratégia de base (AL) por encadeamento das relações também decresceu de acordo com a complexidade dos problemas, uma vez que os sujeitos do 8º ano apresentaram como resultado 22%, 21% e 8%, respectivamente, nos problemas tipo fonte, composição e poço.

Gráfico 4 – Estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 8º ano do ensino fundamental

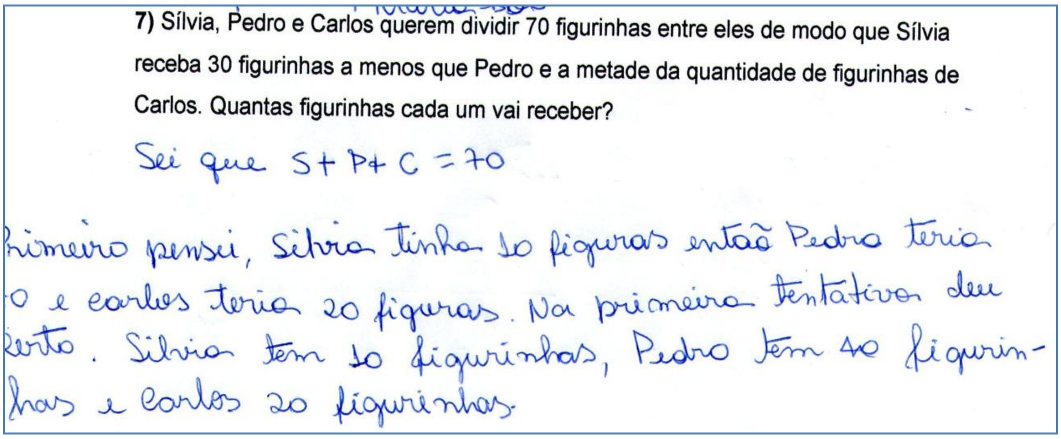


O gráfico 4, mostra que, em relação à dificuldade dos problemas, a estratégia de base (AV), cresce, enquanto a estratégia de base (AL) e (D3) decrescem. Já as estratégias (CTF) e (CQ) se mantiveram muito próximas em relação à dificuldade dos problemas.

A seguir apresentaremos alguns protocolos dos sujeitos e a estratégia utilizada para a resolução dos problemas.

As figuras a seguir mostram protocolos da produção dos sujeitos do 8º ano do ensino fundamental, e os procedimentos utilizados para resolução.

Figura 17 – Sujeito 4 – Problema 7


7) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?

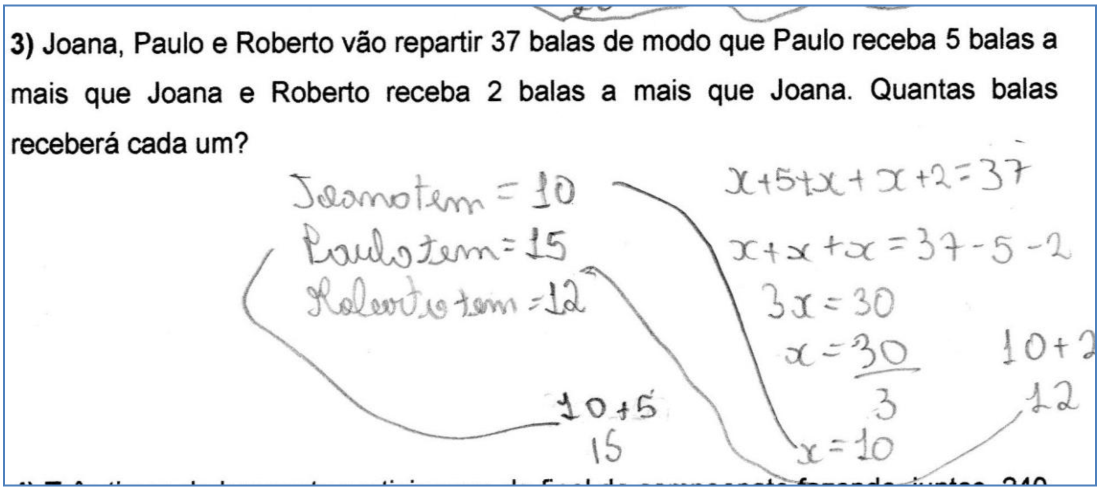
Sei que S+P+C=70

rimeiro pensei, Silvia tinha 10 figuras então Pedro teria
o e carlos teria 20 figuras. Na primeira tentativa deu
erto. Silvia tem 10 figurinhas, Pedro tem 40 figurin-
has e Carlos 20 figurinhas.

A figura 17 apresenta um problema tipo poço, em que a estratégia utilizada foi de atribuir valores. Esse procedimento atingiu 59% nos problemas tipo poço, percentual bem maior que os 49% relativos ao mesmo tipo de problema no 7º ano. Consideramos mais difícil para o sujeito atribuir valor a um problema tipo poço, com relações diferentes, como ocorre no problema da figura 17, e acertar a resolução. Fato constatado no problema 7, ou seja, mesmo sendo um problema com encadeamento tipo poço, o sujeito acertou o resultado utilizando a estratégia de base atribuir valor (AV).

Segundo Marchand e Bednarz (1999) os problemas tipo poço se mostram mais difíceis para os alunos. No caso do problema acima, apresenta relações diferentes sendo a primeira de ordem aditiva e a segunda de ordem multiplicativa.

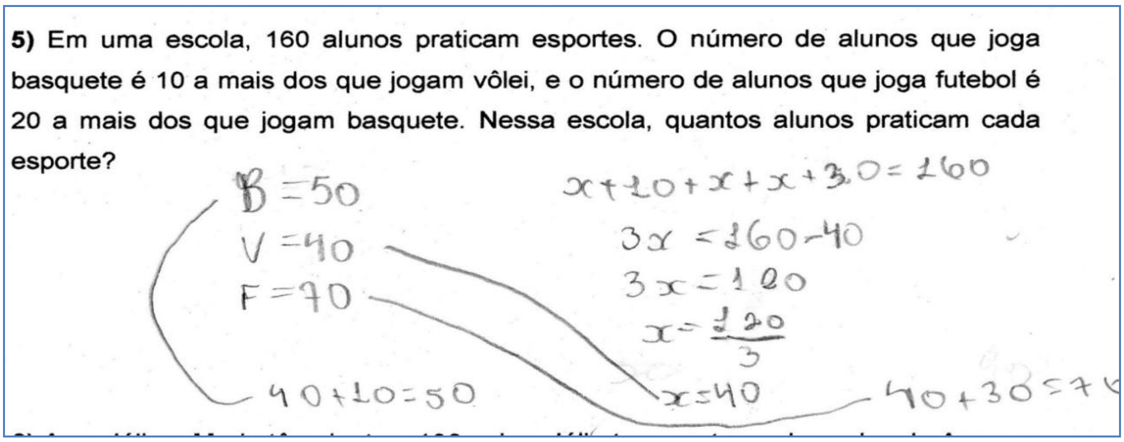
Figura 18 – Sujeito 5 – Problema 3



3) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

Joanatem = 10
Paulotem = 15
Robertotem = 12
$10+5$
15
$x+5+x+x+2=37$
$x+x+x=37-5-2$
$3x=30$
$x=\frac{30}{3}$
$x=10$
$10+2$
12

Figura 19 – Sujeito 5 – Problema 5



5) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

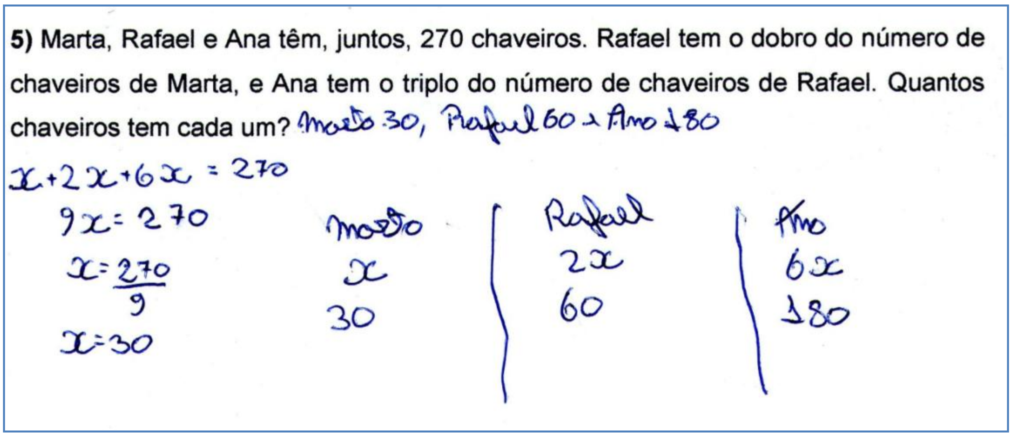
$B=50$
$V=40$
$F=70$
$40+10=50$
$x+10+x+x+30=160$
$3x=160-40$
$3x=120$
$x=\frac{120}{3}$
$x=40$
$40+30=7$

A figura 18 apresenta um problema do tipo fonte, enquanto a figura 19 apresenta um problema tipo composição. Percebemos que, assim como no 7º ano, os sujeitos utilizaram a estratégia algébrica (AL) e repetiram o procedimento de utilizar a letra **x** como incógnita para representar todos os dados desconhecidos do problema. Em ambas as questões, após relacionar o valor base encontrado **x** com os dados do problema, o sujeito chegou ao resultado correto.

Assim como no 7º ano, o sujeito preocupou-se em representar a totalidade correspondente a cada pessoa citada nos problemas, o que nos leva a acreditar que houve interpretação correta das questões.

No 8º ano, os sujeitos utilizaram estratégia algébrica (AL) sempre utilizando apenas a letra x como incógnita, como mostra as figuras a seguir.

Figura 20 – Sujeito 6 – Problema 5


5) Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um? Marta 30, Rafael 60 e Ana 180

$x+2x+6x=270$

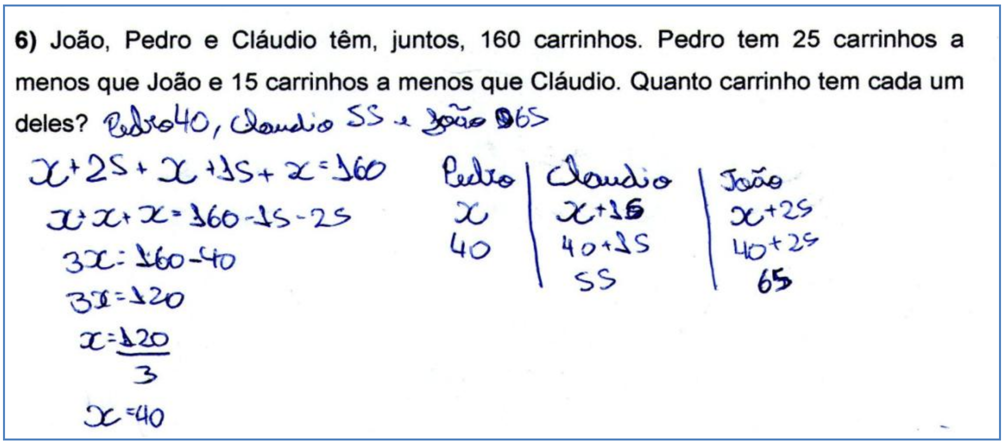
$9x=270$

$x=\frac{270}{9}$

$x=30$

Marta	Rafael	Ana
x	$2x$	$6x$
30	60	180

Figura 21 – Sujeito 6 – Problema 6


6) João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quanto carrinho tem cada um deles? Pedro 40, Cláudio 55 e João 65

$x+25+x+15+x=160$

$x+x+x=160-15-25$

$3x=160-40$

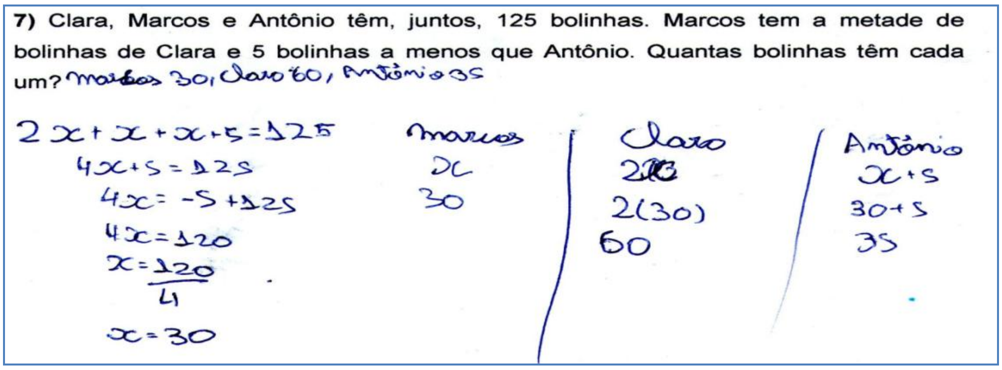
$3x=120$

$x=\frac{120}{3}$

$x=40$

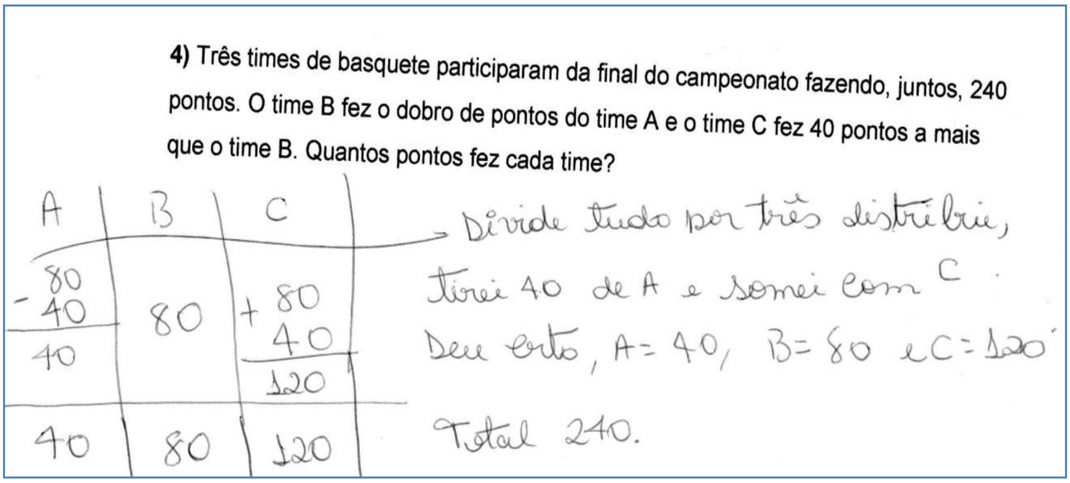
Pedro	Cláudio	João
x	$x+15$	$x+25$
40	$40+15$	$40+25$
	55	65

Figura 22 – Sujeito 6 – Problema 7



Nas figuras 20, 21 e 22 o sujeito utilizou a letra x como incógnita para todos os dados do problema e chegou ao resultado correto, assim como aconteceu com frequência no 7º ano do ensino fundamental, mesmo sendo um problema tipo composição e dois do tipo poço. Nesse caso, percebemos que utilizar três incógnitas diferentes, estabelecer relações entre elas, reduzindo a uma única para chegar ao resultado é um procedimento pouco utilizado pelos sujeitos do 8º ano do ensino fundamental.

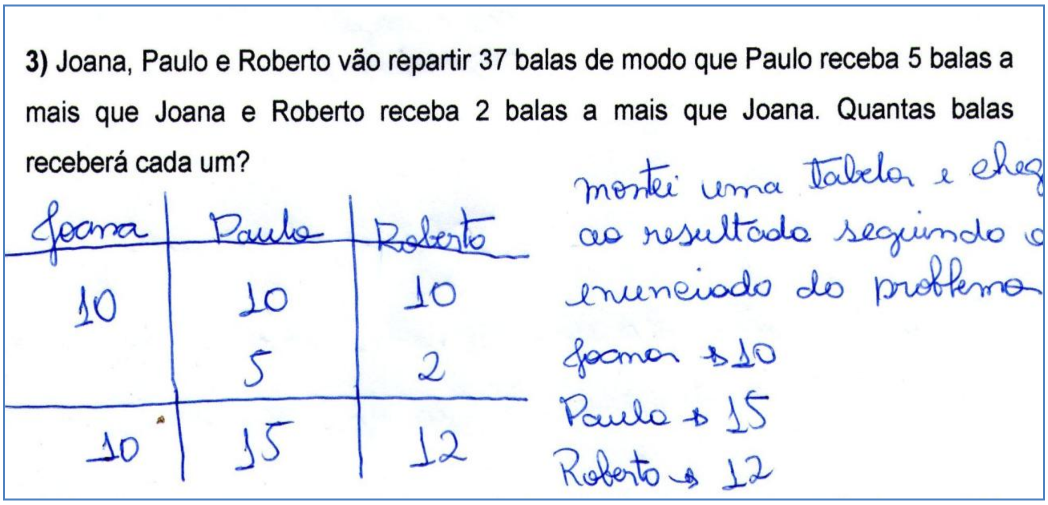
Figura 23 – Sujeito 7 – Problema 4



A figura 23 apresenta um problema tipo composição em que o sujeito utilizou a estratégia (D3). Percebemos que o total de pontos foi dividido por 3 e, após análise do enunciado do problema, o sujeito distribuiu os pontos a cada time especificado, chegando ao valor correto. Nesse procedimento fica claro que o sujeito compreendeu o enunciado da questão, além de estabelecer relações corretas para a resolução.

Nas figuras 24, 25, e 26 abaixo, apesar de o sujeito ter utilizado a estratégia de base atribuir valor (AV), aplicou um procedimento simples e interessante, uma vez que distribuiu os dados dos problemas em um diagrama, e com base no enunciado das questões chegou ao resultado.

Figura 24 – Sujeito 7 – Problema 3

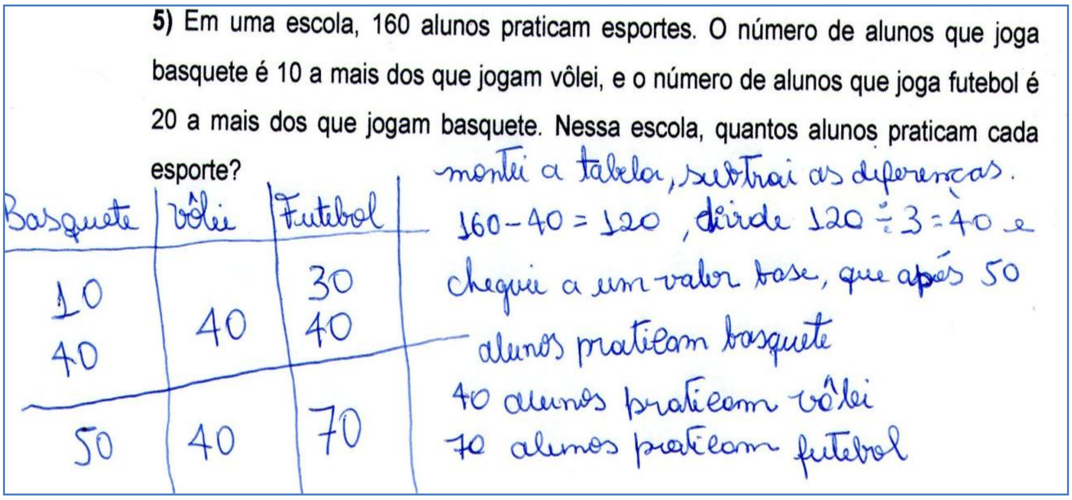


3) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

Joana	Paulo	Roberto
10	10	10
	5	2
10	15	12

montei uma tabela e cheg
ao resultado seguindo o
enunciado do problema
Joana → 10
Paulo → 15
Roberto → 12

Figura 25 – Sujeito 7 – Problema 5

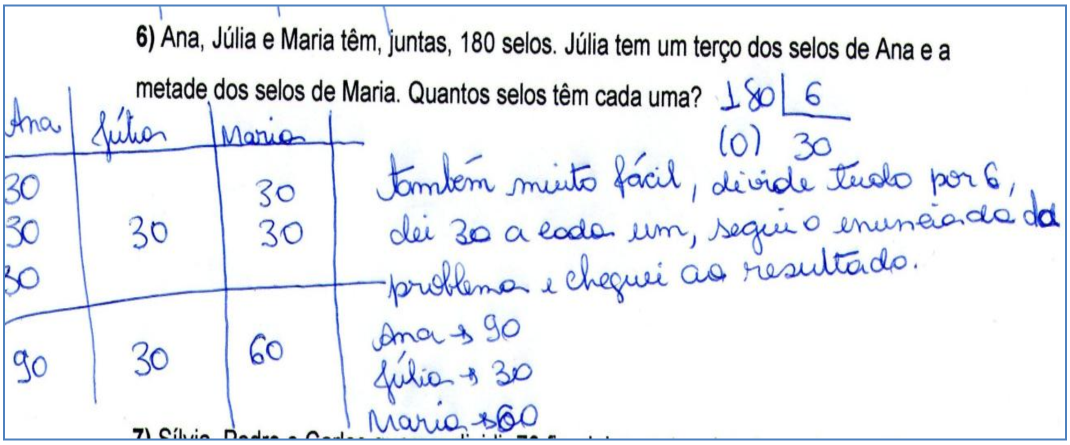


5) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

Basquete	vôlei	Futebol
10 40	40	30 40
50	40	70

montei a tabela, subtrai as diferenças.
160 − 40 = 120, divide 120 ÷ 3 = 40 e
cheguei a um valor base, que após 50
alunos praticam basquete
40 alunos praticam vôlei
70 alunos praticam futebol

Figura 26 – Sujeito 7 – Problema 6



Percebemos que as figuras 24, 25 e 26 acima, apresentam três tipos de problemas distintos e com diferentes relações; os problemas 24 e 25 são do tipo fonte e composição e apresentam duas relações de adição cada um, já o problema 26 é do tipo poço e apresenta duas relações multiplicativas. Mesmo diante da variedade dos problemas e de suas relações, o sujeito utilizou um procedimento matemático simples, que foi atribuir valor (AV), distribuindo os dados dos problemas em diagramas, para chegar ao resultado correto.

5.2.3 – Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental

No 9º ano do ensino fundamental, 94 sujeitos realizaram o teste, de acordo com o que apresenta o quadro abaixo.

Quadro 17 – Quantidade de Sujeitos do 9º Ano.

Ano	Escolas / Quantitativo de Sujeitos			Total
	A	B	C	
9º	39	40	15	**94**

Assim como nos anos anteriores, as turmas do 9º ano apresentavam pouca distorção em relação à faixa etária dos sujeitos, uma vez que a grande maioria dos sujeitos tinha 14 anos, e estava no limite de idade estabelecido.

Quadro 18: rendimento por encadeamento de relações dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.

	Fonte		Composição		Poço	
	8º ano	**9º ano**	**8º ano**	**9º ano**	**8° ano**	**9° ano**
Acertos	49%	**68%**	37%	**44%**	17%	**29%**
Erros	15%	**23%**	19%	**25%**	24%	**27%**
Não resposta	36%	**9%**	44%	**31%**	59%	**44%**

Os sujeitos do 9º ano do ensino fundamental, foram os que apresentaram melhor performance em todos os tipos de problemas (fonte, composição e poço), atingindo 68%, 44% e 29% de acerto, respectivamente.

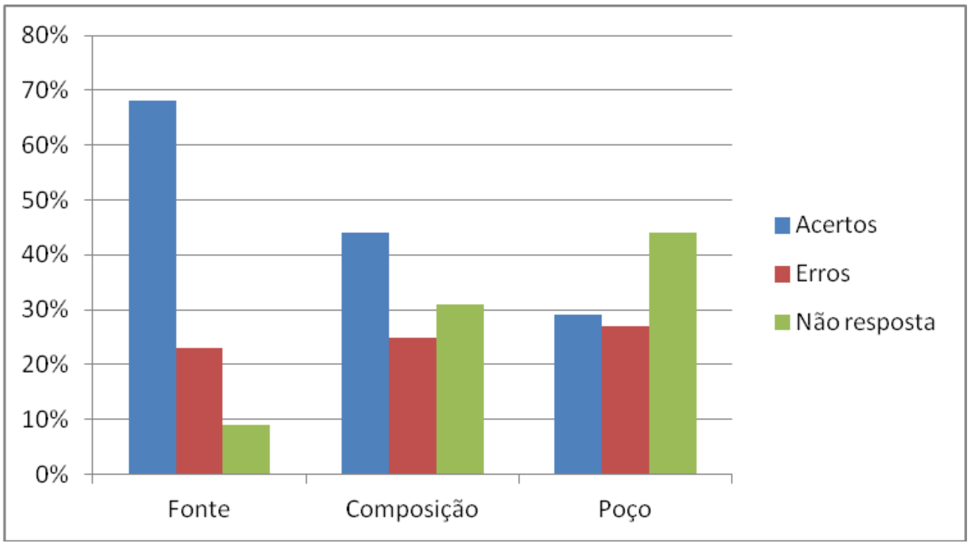
Os resultados do 9º ano se mostraram distantes aos do 8º ano, principalmente nos problemas fonte e composição, uma vez que no 8º ano o percentual de acerto nos problemas tipo fonte foi de 49%, enquanto no 9º ano foi de 68%. Já nos problemas do tipo composição, no 8º ano o percentual de acerto foi de 37% enquanto no 9º ano foi de 44%.

Os sujeitos do 9º ano do ensino fundamental também apresentaram melhor resultado nos problemas tipo poço, uma vez que o percentual de acerto foi de 29%, melhor percentual entre os anos e consequentemente melhor que o 8º ano que foi de 17%.

Acreditamos que o melhor desempenho evidenciado no 9º ano do ensino fundamental, está relacionado ao maior grau de escolaridade, o que possibilitou a esses sujeitos uma maior variedade de conteúdos e problemas que envolvem álgebra.

Foi possível constatar também que os sujeitos do 9º ano, apresentaram certo grau de dificuldade na resolução dos problemas tipo poço, uma vez que, 27% erraram este tipo de problema, além dos 44% que não responderam, como mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 5 – Rendimento por encadeamento das relações dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.



O gráfico mostra que, de acordo com a dificuldade dos problemas, há um decréscimo em relação ao acerto dos sujeitos. Percebemos ainda que, em relação ao percentual de erro, houve pouca variação.

Percebemos também que em relação à não resposta, houve acréscimo em relação à dificuldade dos problemas.

O quadro a seguir, mostra as estratégias de base utilizadas pelos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.

Quadro 19 - estratégias de base dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.

ESTRATÉGIA DE BASE	**ANO**	
	8º	**9º**
Atribuir valores (AV)	53%	45%
Dividir por 3 (D3)	7%	8%
Algébrica (AL)	17%	24%
Considerar o total como fonte (CTF)	8%	8%
Cálculo qualquer (CQ)	3%	8%
Não identificada (NI)	12%	7%

O quadro anterior mostra que no 9º ano do ensino fundamental os sujeitos continuam utilizando a estratégia aritmética (AV) como estratégia de base, sendo preferida por 45% dos sujeitos. Percebemos que o 9º ano, especificamente, apresentou o maior numero de sujeitos que utilizaram estratégia algébrica (AL), uma vez que 24% dos sujeitos a utilizam como estratégia de base.

No 9º ano do ensino fundamental os sujeitos utilizaram as estratégias (D3), (CTF) e (CQ) com um percentual de 8% cada.

O uso das estratégias de base utilizadas pelos sujeitos do 9º ano se mostraram muito próximas ao uso das estratégias utilizadas pelos sujeitos do 8º ano, havendo pouca variação, merecendo destaque a variação de oito pontos percentuais para menos na estratégia (AV) e de sete pontos percentuais para mais, na estratégia (AL).

Os dados evidenciam que do 8º para o 9º ano praticamente também não ocorreram mudanças significativas nas estratégias de base utilizadas pelos sujeitos para resolução dos problemas, uma vez que, em porcentagem, esses dados se mostraram muito próximos. Percebemos que com o avanço do grau de escolaridade as estratégias de resolução de problemas de partilha permanecem inalteradas. A seguir apresentaremos o quadro de estratégia de base por encadeamento das relações.

Quadro 20 - estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.

ESTRATÉGIAS DE BASE	**Tipo de Problemas**					
	Fonte		**Composição**		**Poço**	
	8º	**9º**	**8º**	**9º**	**8º**	**9º**
(AV)	**46%**	**51%**	**53%**	**41%**	**59%**	**44%**
(D3)	**8%**	**6%**	**7%**	**10%**	**6%**	**8%**
(AL)	**22%**	**30%**	**21%**	**26%**	**8%**	**16%**
(CTF)	**11%**	**7%**	**7%**	**8%**	**7%**	**8%**
(CQ)	**3%**	**4%**	**3%**	**10%**	**3%**	**9%**
(NI)	**10%**	**2%**	**9%**	**5%**	**17%**	**15%**

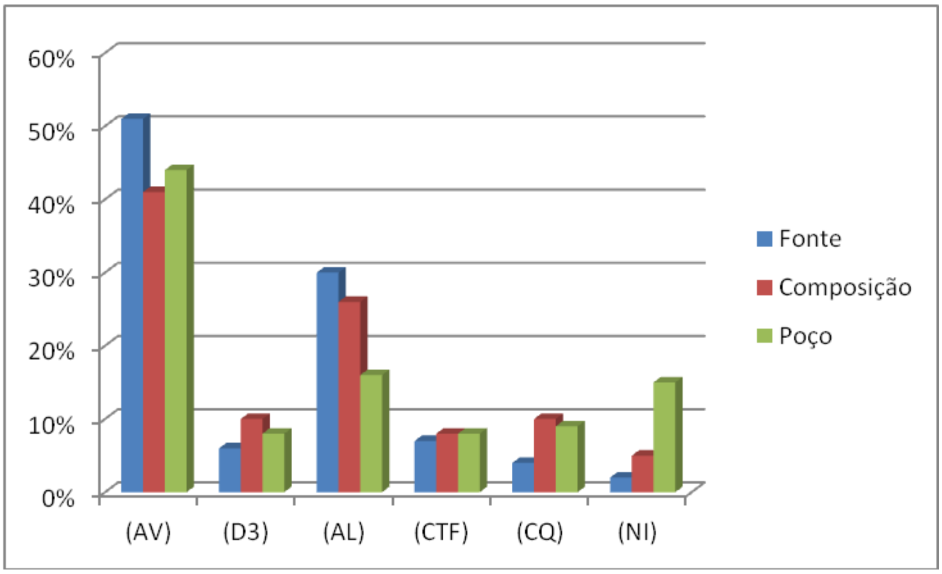
Podemos observar que no 9º ano o uso da utilização da estratégia de base (AV) pelos sujeitos não cresceu de acordo com a dificuldade dos problemas, fato ocorrido no 7º ano. A utilização pelos sujeitos da estratégia de estratégia de base (AV) foi de 51% nos problemas tipo fonte, já nos problemas composição e poço foi de 41% e 44%, respectivamente.

Percebemos que o uso da estratégia de base (D3) não apresentou variações significativas, apesar de ter apresentando uma queda, no 8º ano.

O uso da estratégia de base (AL), pelos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental, decresceu de acordo com a dificuldade dos problemas. Nos problemas tipo fonte o uso dessa estratégia foi feita por 30% dos sujeitos, nos problemas tipo composição foi de 26%, já nos problemas tipo poço foi de apenas 16%. Esse fato também ocorreu no 8º ano, com porcentagens diferentes.

As estratégias de base por encadeamento das relações, dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental, apresentaram grande percentual de cálculos, não identificáveis (NI), fato verificado nos problemas tipo poço.

Gráfico 6 – Estratégias de base por encadeamento das relações dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental.

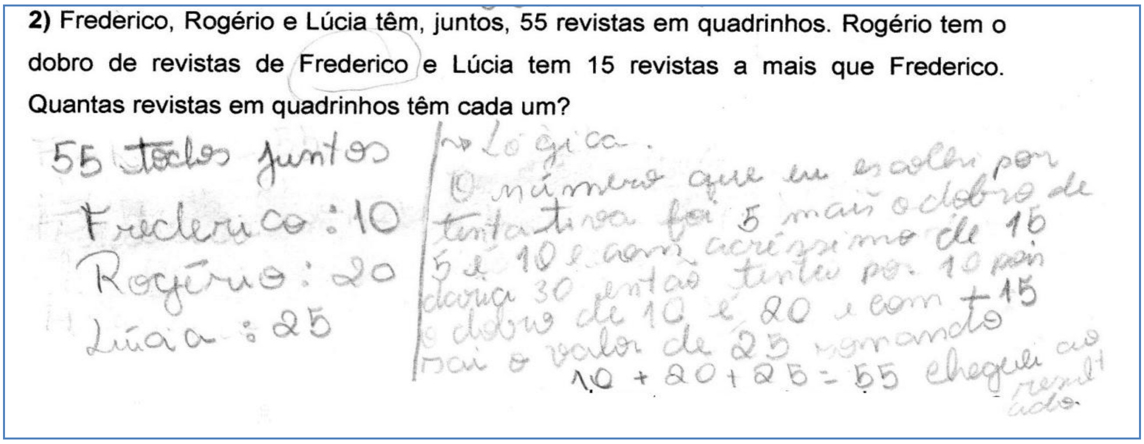


O gráfico mostra que o uso das estratégias de base (AV) e (AL) foram mais utilizadas nos problemas tipo fonte. Já em relação à dificuldade dos problemas, a estratégia de base (AL) decresce, fato também verificado no 8º ano do ensino fundamental.

O uso das estratégias de base (D3), (CTF) e (CQ) se mantiveram muito próximas sem alterações que mereçam destaque.

As figuras a seguir mostram a produção de alguns dos sujeitos do 9º ano do ensino fundamental na resolução dos problemas de partilha. Nesse ano, especificamente, foi possível verificar a maior variação de estratégias de resolução. Entretanto, o uso das estratégias (AV) e (AL) foram as mais utilizadas pelos sujeitos.

Figura 27 – Sujeito 8 – Problema 2



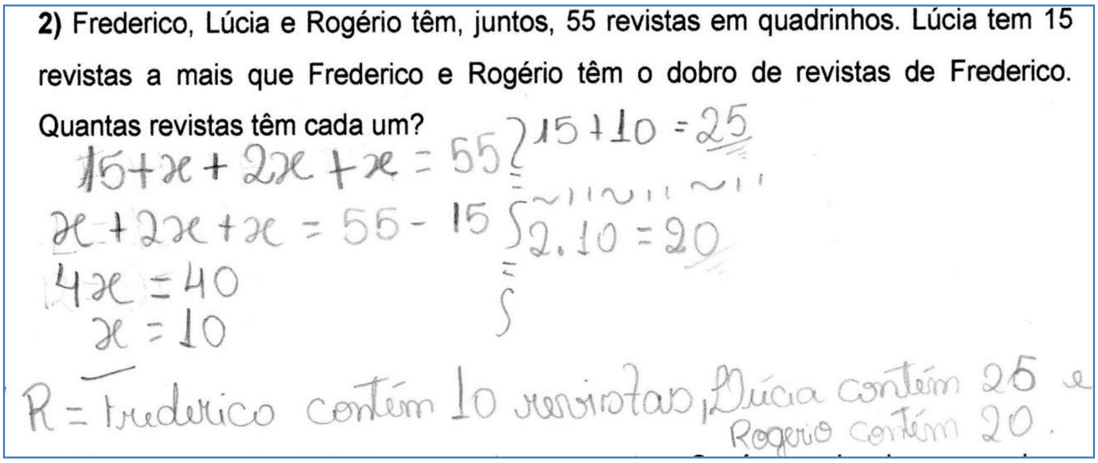
2) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

55 todos juntos
Frederico: 10
Rogério: 20
Lúcia: 25

Lógica.
O número que eu escolhi por tentativa foi 5 mais o dobro de 5 é 10 e com acréscimo de 15 daria 30 então tentei por 10 pois o dobro de 10 é 20 e com +15 o valor de 25 somando
10 + 20 + 25 = 55 cheguei ao resultado.

Na figura 27 acima, temos um problema tipo fonte, em que o sujeito utiliza a estratégia de base (AV) para a resolução. Percebemos que o sujeito se preocupa em explicar como chegou ao resultado, deixando claro que escolheu um valor numérico por tentativa. Nos problemas tipo fonte 51% dos sujeitos utilizaram a estratégia (AV) para chegar ao resultado.

Figura 28 – Sujeito 9 – Problema 2



2) Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério têm o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas têm cada um?

$15 + x + 2x + x = 55$

$x + 2x + x = 55 - 15$

$4x = 40$

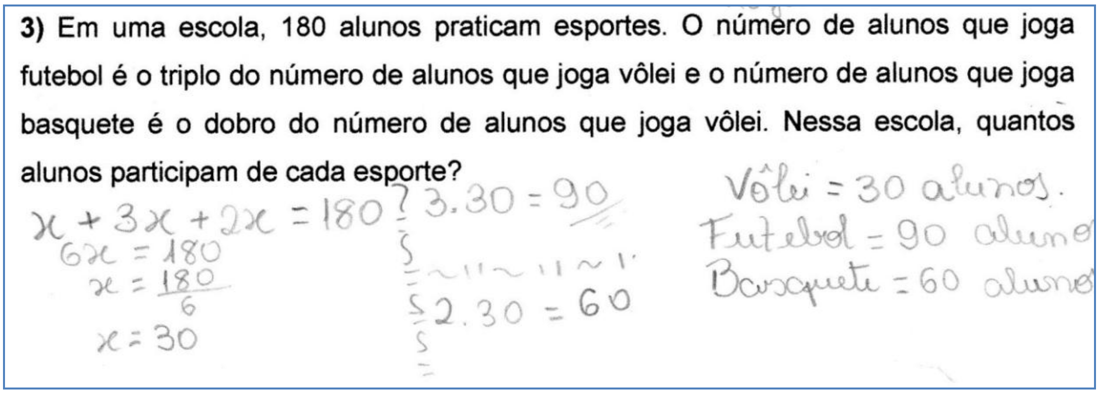
$x = 10$

$15 + 10 = 25$

$2 . 10 = 20$

R = Frederico contém 10 revistas, Lúcia contém 25 e Rogerio contém 20.

Figura 29 – Sujeito 9 – Problema 3

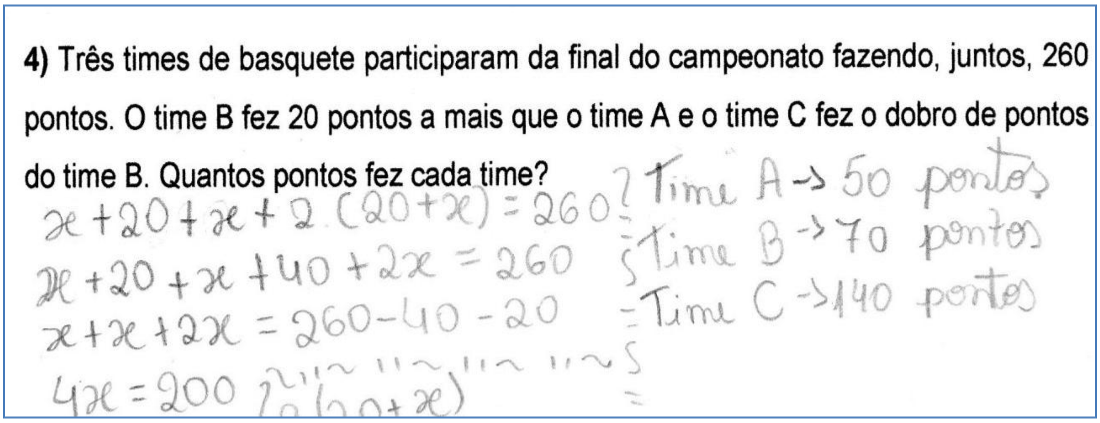

3) Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?

$x + 3x + 2x = 180$
$6x = 180$
$x = \frac{180}{6}$
$x = 30$

$3.30 = 90$
$2.30 = 60$

Vôlei = 30 alunos.
Futebol = 90 alunos
Basquete = 60 alunos

Figura 30 – Sujeito 9 – Problema 4

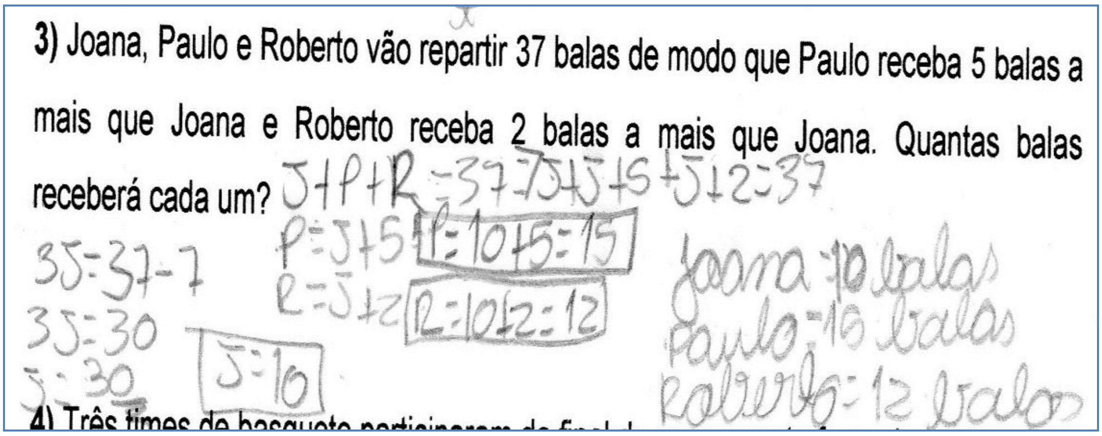

4) Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?

$x + 20 + x + 2.(20 + x) = 260$
$x + 20 + x + 40 + 2x = 260$
$x + x + 2x = 260 - 40 - 20$
$4x = 200$

Time A -> 50 pontos
Time B -> 70 pontos
Time C -> 140 pontos

As figuras 28, 29 e 30 acima, apresentam dois problemas tipo fonte e um tipo composição. Percebemos que o sujeito utiliza a letra x como incógnita e, após achar esse valor básico desconhecido, estabelece relações com os dados do problema chegando à resposta correta. Fato também presente nos anos anteriores.

Figura 31 – Sujeito 10 – Problema 3


3) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

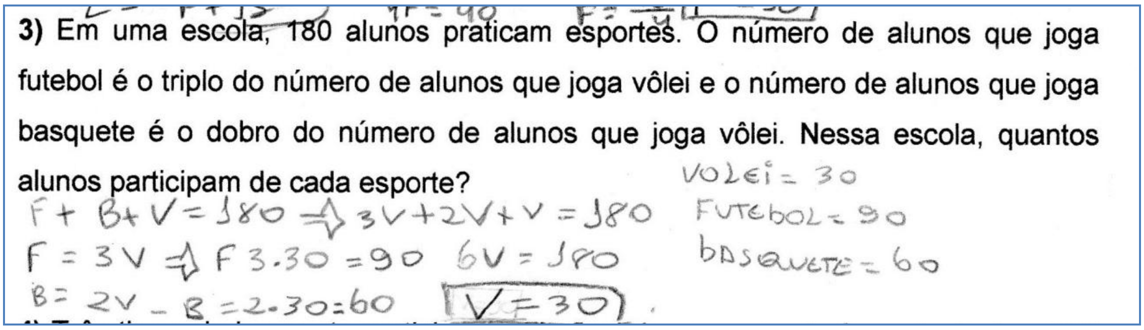
$J + P + R = 37$ $J + J + 5 + J + 2 = 37$
$P = J + 5$ $\boxed{P = 10 + 5 = 15}$
$R = J + 2$ $\boxed{R = 10 + 2 = 12}$
$3J = 37 - 7$
$3J = 30$
$J = \frac{30}{3}$ $\boxed{J = 10}$

Joana = 10 balas
Paulo = 15 balas
Roberto = 12 balas

4) Três times de basquete participaram da final ...

Na figura 31 acima temos um problema tipo fonte. Percebemos que o sujeito utiliza três incógnitas diferentes J, P, R, as quais representam as pessoas de Joana, Paulo e Roberto. Ele estabelece relações entre as incógnitas, reduzindo a uma única, e com base nos dados do problema chega ao resultado correto. Esse procedimento algébrico foi utilizado por 30% dos nossos sujeitos em problemas tipo fonte.

Figura 32 – Sujeito 11 – Problema 3

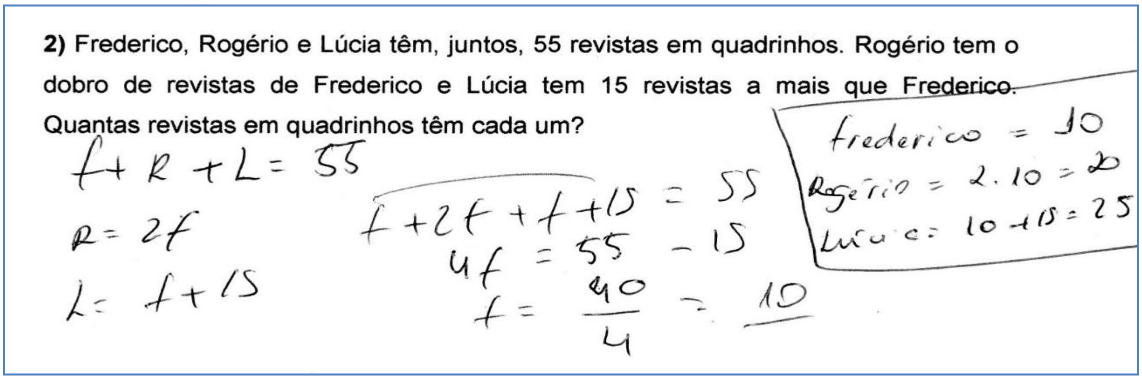


3) Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?

F + B + V = 180 ⇒ 3V + 2V + V = 180
F = 3V ⇒ F 3.30 = 90   6V = 180
B = 2V _ B = 2.30 = 60 $\boxed{V = 30}$

VOLEI = 30
FUTEBOL = 90
BASQUETE = 60

Figura 33 – Sujeito 12 – Problema 2



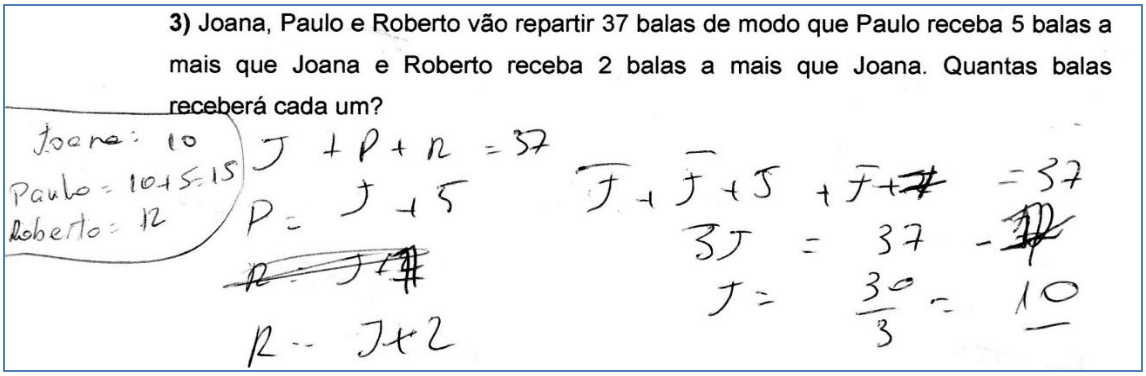
2) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

f + R + L = 55
R = 2f
L = f + 15

f + 2f + f + 15 = 55
4f = 55 − 15
f = 40/4 = 10

frederico = 10
Rogério = 2.10 = 20
Lúcia = 10 + 15 = 25

Figura 34 – Sujeito 12 – Problema 3



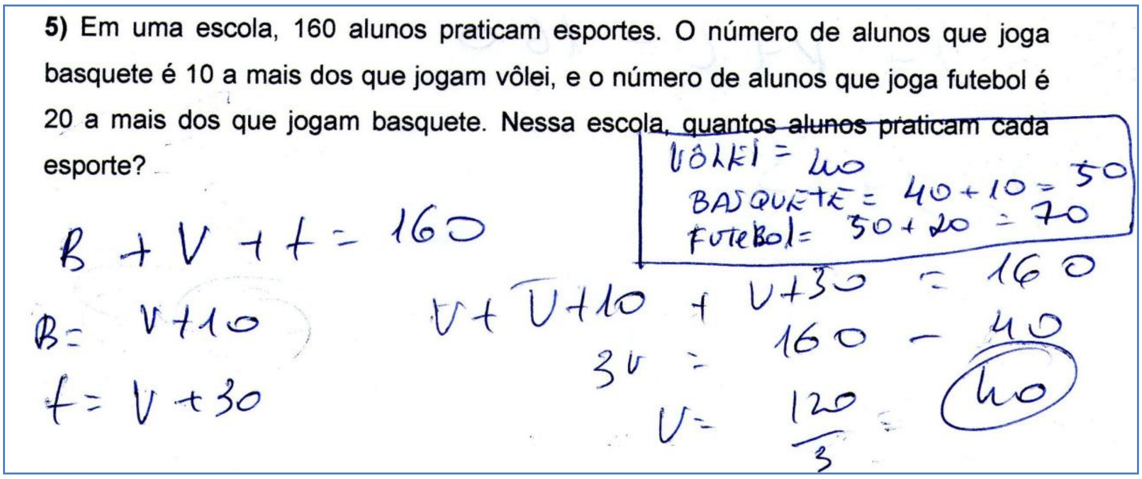
3) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

Joana: 10
Paulo = 10 + 5 = 15
Roberto = 12

J + P + R = 37
P = J + 5
~~R = J + 7~~
R = J + 2

J + J + 5 + J + ~~7~~ = 37
3J = 37 − ~~7~~
J = 30/3 = 10

Figura 35 – Sujeito 12 – Problema 5



5) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

VÔLEI = 40
BASQUETE = 40 + 10 = 50
FUTEBOL = 50 + 20 = 70

$B + V + f = 160$

$B = V + 10$

$f = V + 30$

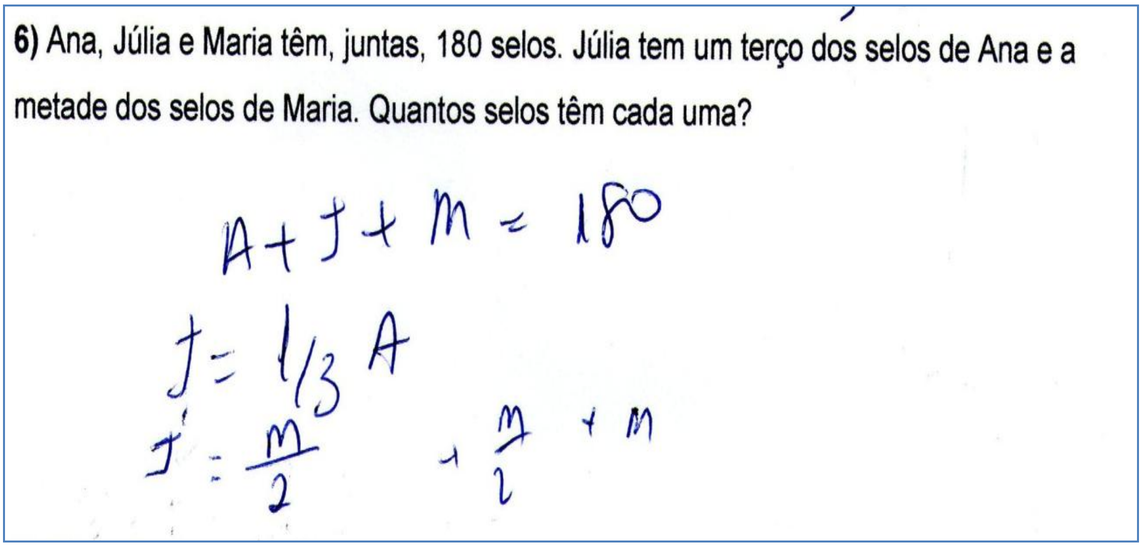
$V + V + 10 + V + 30 = 160$

$3V = 160 - 40$

$V = \frac{120}{3} = 40$

As figuras 32, 33 e 34, acima apresentam problemas tipo fonte, já a figura 35, apresenta um problema tipo composição. Em todos os problemas o sujeito utilizou a estratégia de base (AL), e chegou ao resultado correto. Percebemos que os sujeitos envolvidos utilizam estratégias algébricas de forma correta, e conseguem interpretar o enunciado dos problemas.

Figura 36 – Sujeito 12 – Problema 6



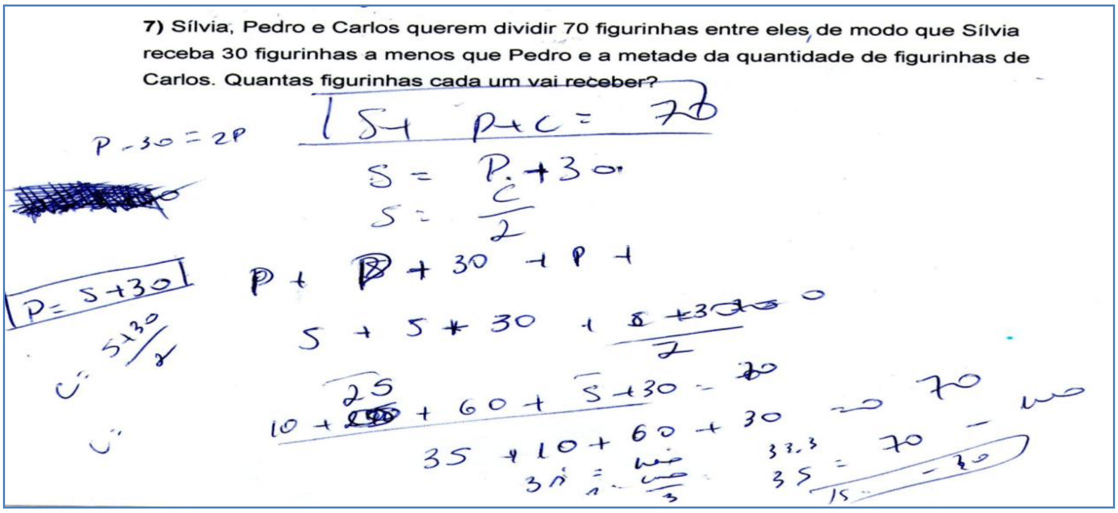
6) Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?

$A + J + M = 180$

$J = 1/3 \, A$

$J = \frac{M}{2}$ $\quad + \frac{M}{2} + M$

Figura 37 – Sujeito 12 – Problema 7


7) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles, de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?

As figuras 36 e 37 apresentam problemas tipo poço e percebemos que o sujeito 12, conseguiu resolver os problemas tipo fonte e composição (figuras 33, 34 e 35), utilizando a estratégia de base (AL). Já nos problemas tipo poço ele tenta relacionar os dados dos problemas utilizando a estratégia de base (AL), e, devido o grau de dificuldade do problema, o sujeito desiste. Acreditamos que o grau de dificuldade nesse tipo de problema levou grande parte dos sujeitos do 9º ano a utilizarem procedimentos que não conseguimos identificar (NI), o que correspondeu a 15% nos problemas tipo poço.

Um procedimento muito utilizado pelos alunos do 9º ano do ensino fundamental para a resolução dos problemas foi a estratégia de base (AV), em que os sujeitos distribuíam os dados constantes no enunciado das questões em diagramas, chegando à resposta correta, como mostra as figuras a seguir.

Figura 38 – Sujeito 13 – Problema 2

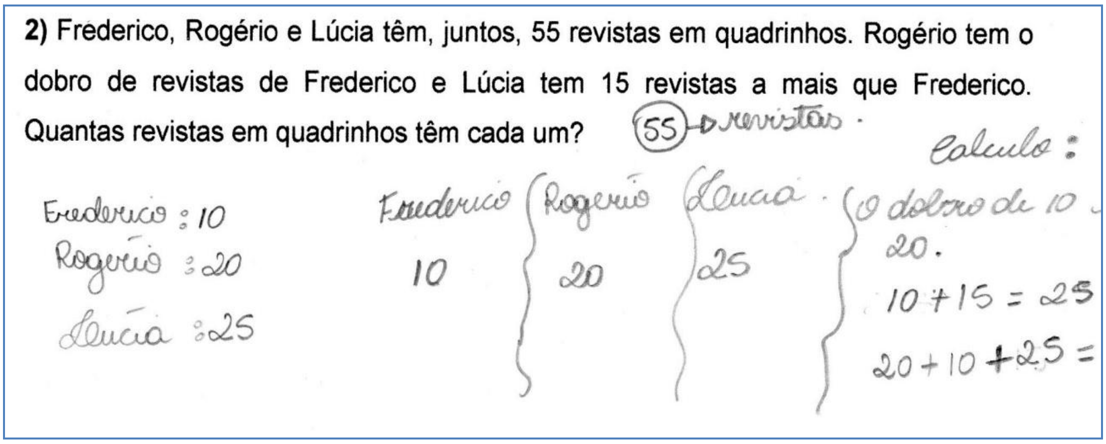
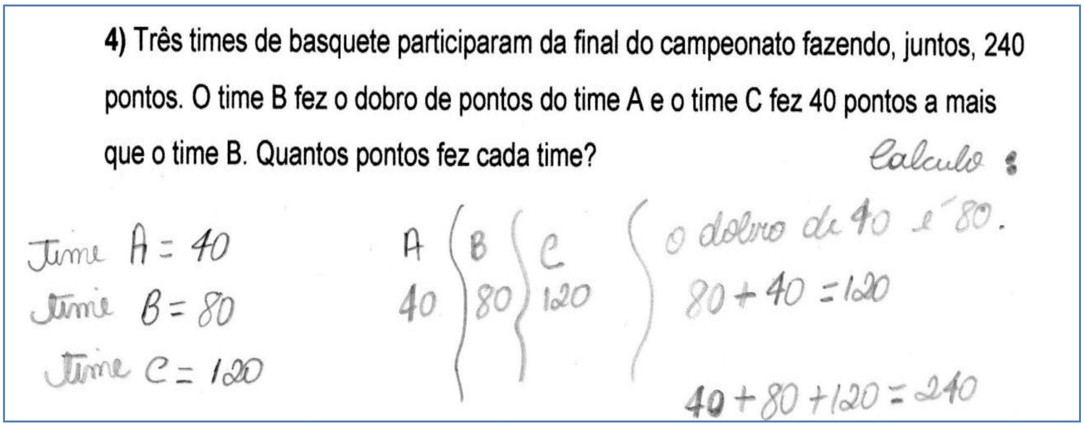
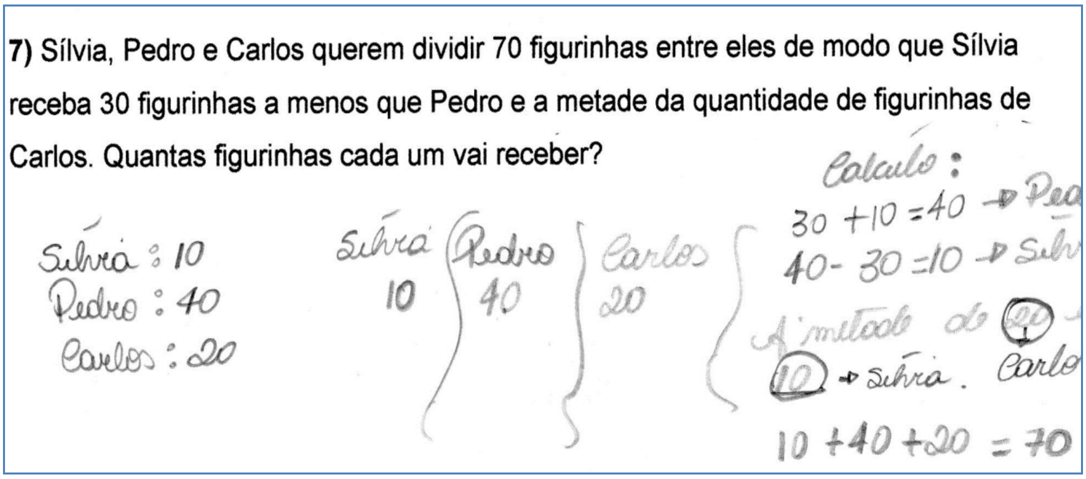

2) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

Figura 39 – Sujeito 13 – Problema 4



4) Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?

Figura 40 – Sujeito 13 – Problema 7



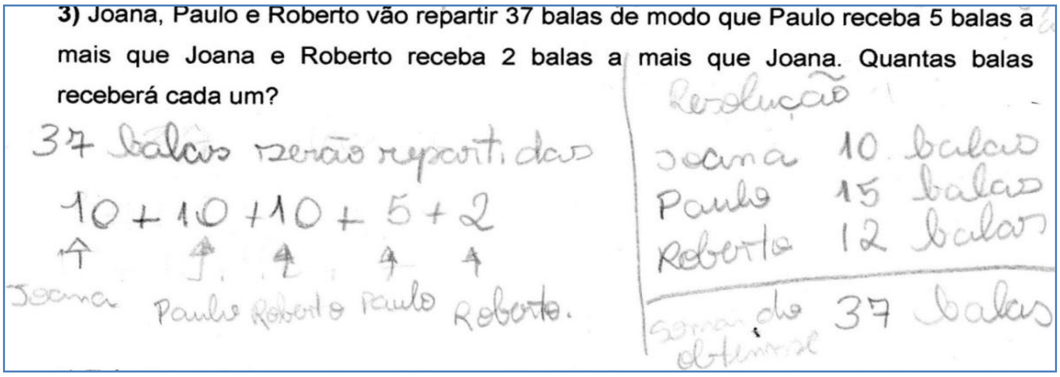
7) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?

As figuras 38, 39 e 40, pertencem ao mesmo sujeito, e apresentam problemas tipo fonte, composição e poço. É possível perceber que o sujeito utiliza um diagrama para distribuir os valores das respostas, na sequência realiza operações, mostrando como chegou ao resultado correto. Percebemos com isso que esse sujeito, especificamente, consegue resolver facilmente os problemas, inclusive, o problema tipo poço, que, segundo Marchand e Bednarz (1999), se mostra mais difícil para os estudantes.

Apesar de o percentual indicar um grande grau de dificuldade nos problemas tipo poço, verificamos que alguns sujeitos conseguem resolver esse tipo de problema com facilidade, como ocorreu na figura 40 acima.

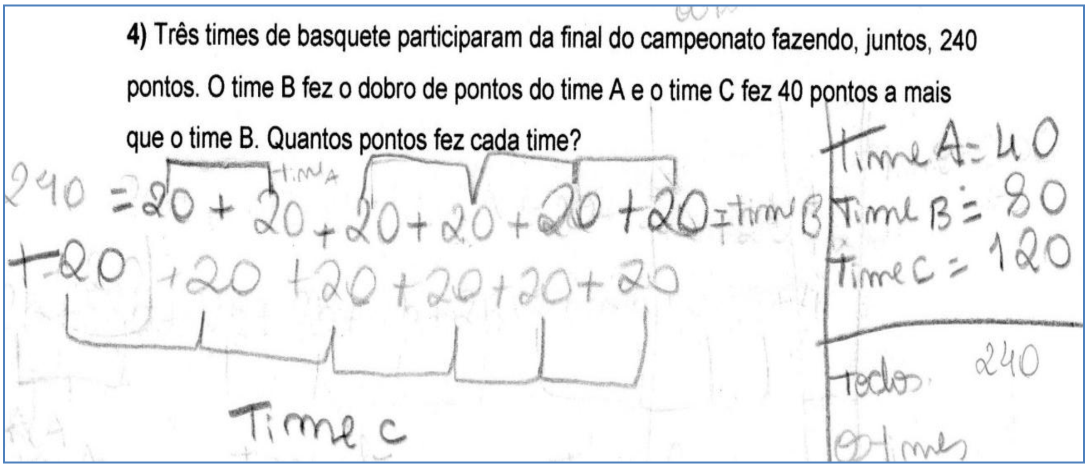
Como falamos anteriormente, os sujeitos do 9º ano do ensino fundamental foram os que apresentaram maior variedade de procedimentos para a resolução dos problemas de partilha, como mostra as figuras a seguir.

Figura 41 – Sujeito 14 – Problema 3



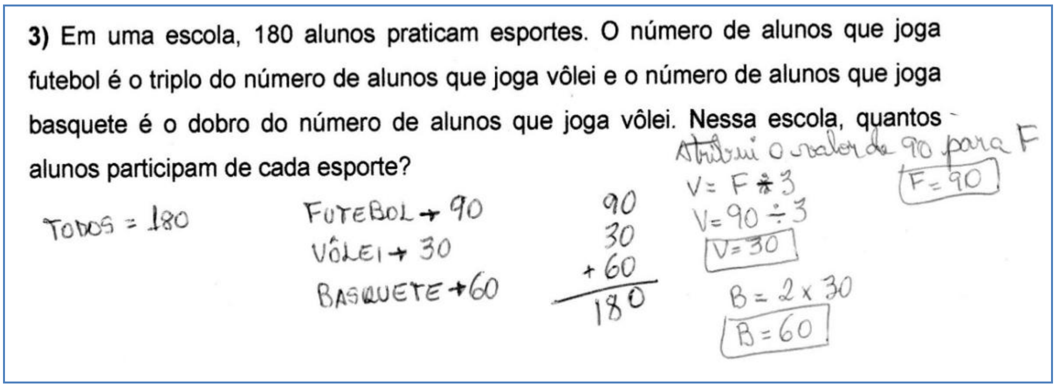
Percebemos pela figura 41, que o sujeito distribuiu 10 balas para cada uma das pessoas que constam no problema e, em seguida, de acordo com os dados do problema, distribuiu 5 balas para Paulo e 2 balas para Roberto, chegando ao resultado correto. Identificamos esse procedimento como sendo Atribui Valor (AV). Observamos também, que o problema é do tipo fonte, uma vez que Joana é a fonte entre Paulo e Roberto, e apresenta duas relações de adição. Segundo Marchand e Bednarz (2000), esse tipo de problema é considerado de fácil solução pelos estudantes, justamente por possibilitar resoluções aritméticas, como ocorreu acima.

Figura 42 – Sujeito 15 – Problema 4



A figura 42, mostra um problema do tipo composição com relações diferentes, sendo a primeira relação multiplicativa e a segunda aditiva. Percebemos que o sujeito repartiu 240 em 12 partes, cada uma contendo 20, e, de acordo com o enunciado do problema, chegou ao resultado correto. Esse procedimento aritmético requer mais tempo para a resolução, porém, quando realizado de forma correta, tem resultado satisfatório.

Figura 43 – Sujeito 16 – Problema 3



3) Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?

Atribui o valor de 90 para F

$\boxed{F = 90}$

TODOS = 180

FUTEBOL → 90

VÔLEI → 30

BASQUETE → 60

90
30
+ 60
180

V = F ÷ 3

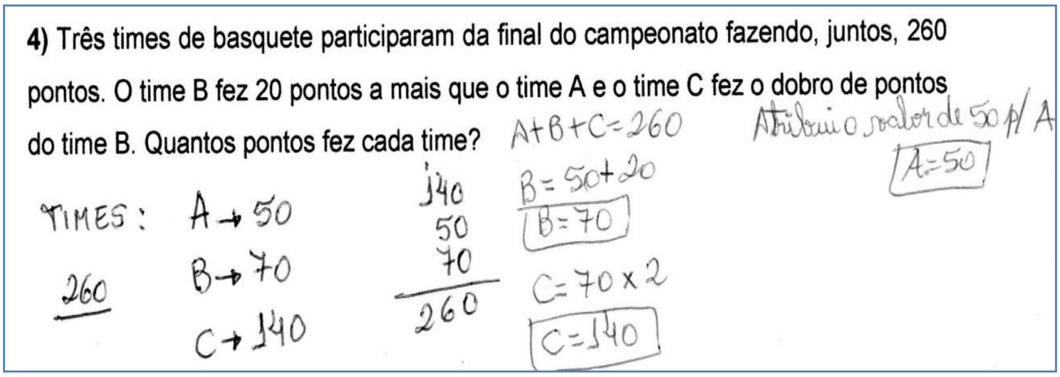
V = 90 ÷ 3

$\boxed{V = 30}$

B = 2 x 30

$\boxed{B = 60}$

Figura 44 – Sujeito 16 – Problema 4



4) Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?

A+B+C=260

Atribui o valor de 50 p/ A

$\boxed{A = 50}$

TIMES: 260

A → 50

B → 70

C → 140

140
50
70
260

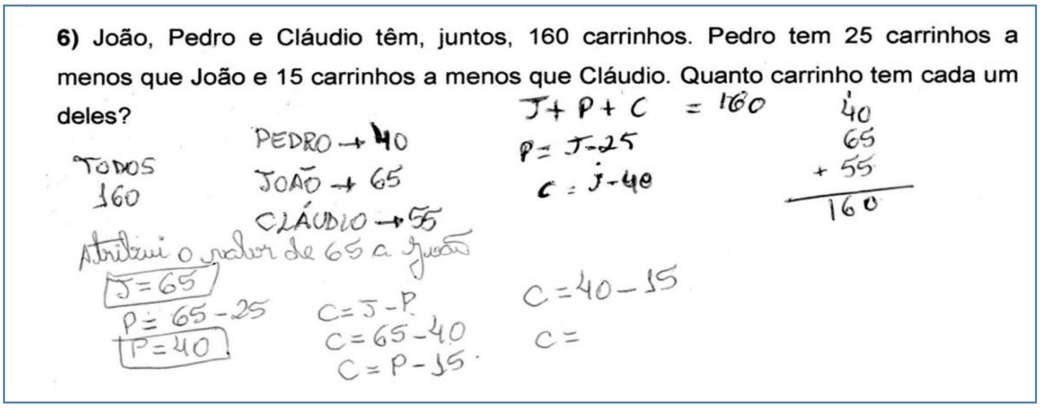
B = 50+20

$\boxed{B = 70}$

C = 70 x 2

$\boxed{C = 140}$

Figura 45 – Sujeito 16 – Problema 6



6) João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quanto carrinho tem cada um deles?

TODOS
160

PEDRO → 40

JOÃO → 65

CLÁUDIO → 55

J + P + C = 160

P = J-25

C = J-40

40
65
+ 55
160

Atribui o valor de 65 a João

$\boxed{J = 65}$

P = 65-25

$\boxed{P = 40}$

C = J - P

C = 65-40

C = P-15

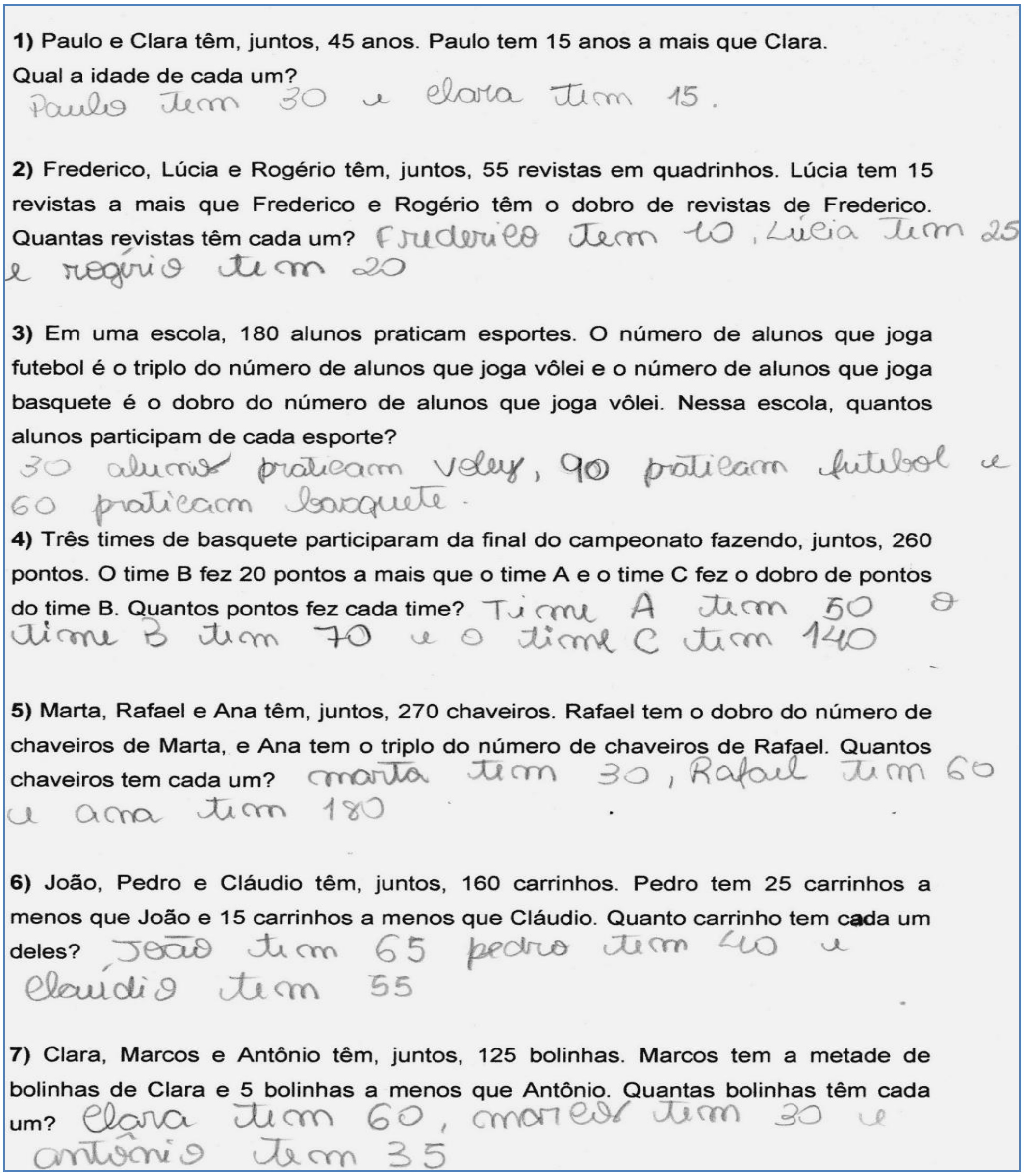
C = 40-15

C =

As figuras 43, 44 e 45 apresentam questões do teste A, contendo uma questão tipo fonte (43), uma questão tipo composição (44) e uma questão tipo poço (45). Percebemos que o sujeito utilizou realizou diversas operações matemáticas ao mesmo tempo, embora sempre deixe evidente que atribuiu valores (AV) para chegar a cada resposta. Observamos que ele consegue compreender bem o enunciado de cada problema, uma vez que acertou todas as questões.

Na figura 46 a abaixo, pertencente ao mesmo tipo de teste, o sujeito responde todas as questões de forma correta e não demonstra como chegou ao resultado; isso ocorreu com frequência no 9º ano do ensino fundamental.

Figura 46 – Sujeito 17 – Problemas de 1 a 7.



1) Paulo e Clara têm, juntos, 45 anos. Paulo tem 15 anos a mais que Clara. Qual a idade de cada um? Paulo tem 30 e clara tem 15.

2) Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério têm o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas têm cada um? Frederico tem 10, Lúcia tem 25 e rogério tem 20

3) Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte? 30 alunos praticam voley, 90 praticam futebol e 60 praticam basquete.

4) Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time? Time A tem 50 o time B tem 70 e o time C tem 140

5) Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um? marta tem 30, Rafael tem 60 e ana tem 180

6) João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quanto carrinho tem cada um deles? João tem 65 pedro tem 40 e cláudio tem 55

7) Clara, Marcos e Antônio têm, juntos, 125 bolinhas. Marcos tem a metade de bolinhas de Clara e 5 bolinhas a menos que Antônio. Quantas bolinhas têm cada um? clara tem 60, marcos tem 30 e antônio tem 35

No referido teste, figura 46, o sujeito não realizou cálculo ou procedimentos matemáticos aparentes, dificultando nossa análise.

Em relação ao 9º ano do ensino fundamental foi possível perceber que os sujeitos apresentam certa facilidade para interpretar os enunciados existentes nos problemas, o que, no caso, pode ter facilitado para se chegar à solução de forma correta.

5.3 – Análise comparativa entre os grupos de sujeitos

Apresentamos agora uma análise comparativa, levando em consideração os dados obtidos pelos sujeitos do 7°, 8º e 9º do ensino fundamental. Pretendemos com isso demonstrar como foi a desempenho e as estratégias de base ano a ano.

Quadro 21 - rendimento por encadeamento de relações dos sujeitos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental.

	Fonte			Composição			Poço		
	7º	8º	9º	7º	8º	9º	7º	8º	9º
Acertos	54%	49%	68%	29%	37%	44%	15%	17%	29%
Erros	27%	15%	23%	38%	19%	25%	35%	24%	27%
Não resposta	19%	36%	9%	33%	44%	31%	51%	59%	44%

Essa análise especifica mostra que os alunos do 9º ano acertaram em maior percentual os problemas tipo fonte, composição e poço, uma vez que a percentual de acerto foi respectivamente 68%, 44% e 29%. Já os alunos do 7º e 8º ano tiveram um percentual de acerto considerável nos problemas tipo fonte, 54% e 49%, dados que reforçam a facilidade de resolução nesse tipo de problema.

Para Marchand e Bednarz (1999) os problemas tipo fonte são mais fáceis de serem resolvidos e facilitam a utilização de procedimentos aritméticos em sua resolução.

O desempenho dos sujeitos nos problemas tipo composição teve resultado crescente em relação a acerto, por ano de escolarização, ou seja, 29%, 37% e 44% correspondente ao 7º, 8º e 9º ano, o mesmo verificado nos problemas tipo fonte que apresentou 15%, 17% e 29% respectivamente.

Acreditamos que o melhor desempenho apresentado por ano de escolarização está associado ao trabalho com álgebra por ano, ou seja, com o avanço escolar o estudante se depara com diversos conteúdos que envolvem o raciocínio algébrico.

Um resultado que chamou atenção em relação desempenho dos sujeitos foi o percentual de questões não respondidas nos problemas tipo poço que atingiu 51% no 7º ano, 59% no 8º ano e 44% no 9º ano. Consideramos que esse alto índice está associado à dificuldade na resolução desse tipo de problema.

Em relação à performance dos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha tipo (fonte, composição e Poço), nossa pesquisa evidenciou que os resultados melhoraram consideravelmente com o avanço da escolaridade. Salientamos que a melhora ocorreu em todos os tipos de problemas, segundo encadeamento definido por Marchand e Bednarz (1999).

A seguir apresentaremos um quadro que mostra a estratégia dos sujeitos por ano de escolarização do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental.

Pretendemos com isso ratificar se as estratégias de resolução permanecem as mesmas ou se sofrem alterações significativas com o avanço escolar.

Quadro 22 - estratégias de base por ano

ESTRATÉGIA DE BASE	ANO		
	7º	**8º**	**9º**
Atribuir valores (AV)	**52%**	**53%**	**45%**
Dividir por 3 (D3)	**12%**	**7%**	**8%**
Algébrica (AL)	**15%**	**17%**	**24%**
Considerar o total como fonte (CTF)	**10%**	**8%**	**8%**
Cálculo qualquer (CQ)	**5%**	**3%**	**8%**
Não identificada (NI)	**6%**	**12%**	**7%**

O quadro mostra pouca variação em pontos percentuais, levando em consideração o nível de escolaridade dos sujeitos, ou seja, 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental. Percebemos que o uso pelos sujeitos da estratégia de base atribuir valores (AV) se mantém muito próxima em relação ao 7º e 8º ano, atingindo percentuais de 52% e 53%, respectivamente, porém, no 9º ano essa estratégia decresce, atingindo 45%.

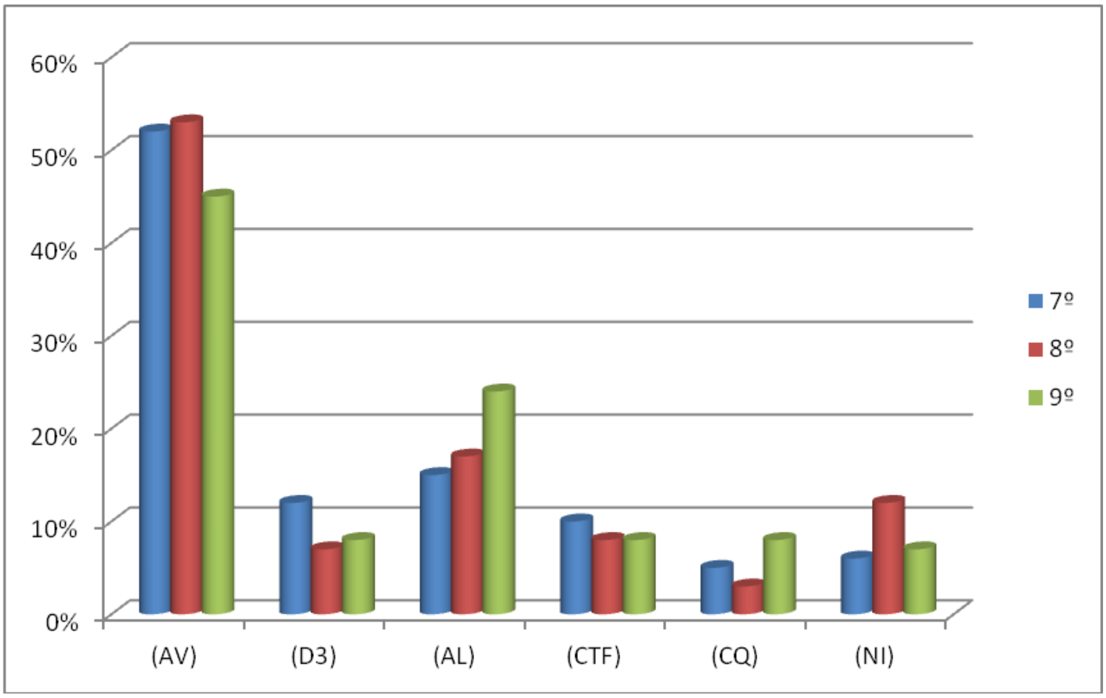
Apesar de existir variação, o uso da estratégia de base (AV) pelos sujeitos, obteve maior percentual em todos os anos, o que confirma não haver significativa mudança de estratégia para a resolução dos problemas de partilha, ano a ano.

O uso da estratégia de base dividir por 3 (D3) pouco foi utilizada pelos sujeitos e apresenta uma queda do 7º ano (12%) para os dois anos seguintes, 8º ano (7%) e 9º ano (8%).

O uso pelos sujeitos da estratégia de base algébrica (AL) apresentou resultados significativos, uma vez que, ela cresce de acordo com o avanço escolar, ou seja, 15% no 7º ano, 17% no 8º ano e 29% no 9º ano do ensino fundamental. Acreditamos que o maior percentual na utilização de estratégia algébrica (AL) para resolução dos problemas, por parte dos sujeitos, com o avanço escolar, está relacionado ao trabalho com diversos conteúdos algébricos e consequentimente com o desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Em relação às estratégias de base considerar um total como forte (CTF), cálculo qualquer (CQ), não houve mudanças significativas, como mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 7 - Estratégias de base por ano de escolarização



Em nossa análise conseguimos identificar que, em relação ao 7º ano do ensino fundamental, o rendimento dos alunos atingiu 54%, 29% e 15%, respectivamente, de acerto, nos problemas com encadeamento tipo fonte, composição e poço. Por outro lado ficou evidenciado na pesquisa, que, se levarmos em consideração erros e não resposta simultaneamente, esses índices nos problemas tipo composição e poço atingem 71% e 85%.

Os alunos do 8º ano do ensino fundamental atingiram 49%, 37% e 17% de acertos, respectivamente, nos problemas com encadeamento tipo fonte, composição e poço. Em relação aos índices de erros e não respostas, quando analisados simultaneamente, atingiram 51% nos problemas tipo fonte, 63% nos problemas tipo composição e 83% nos problemas tipo poço.

Em relação à performance, os alunos do 9º ano do ensino fundamental, apresentaram melhor resultado, uma vez que o índice de acerto foi de 68%, 44% e 29% respectivamente, nos problemas tipo fonte, composição e poço. Quando analisados juntos, erros e não resposta atingiram 32% nos problemas tipo fonte, 56% nos problemas tipo composição e 71% nos problemas tipo poço.

A pesquisa constatou que os alunos apresentam um alto grau de dificuldade nos problemas tipo poço, uma vez que os índices de erro e não resposta quando analisados simultaneamente, atingiram 85% no 7º ano, 83% no 8º ano e 71% no 9º ano do ensino fundamental, ou seja, nossa pesquisa se mostrou de acordo com a pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), em relação ao desempenho dos alunos nos problemas tipo poço.

Em relação às estratégias utilizadas para resolução dos problemas de partilha que foram propostos, ficou evidenciado que os alunos utilizam as mesmas estratégias de resolução ano a ano. Ou seja, mesmo com o avanço escolar, as estratégias de resolução se mantiveram inalteradas, merecendo destaque, a estratégia de base atribuir valor (AV), que atingiu 52% no 7º ano, 53% no 8º ano e 45% no 9º ano do ensino fundamental. Já o uso pelos alunos da estratégia de base (AL), atingiu 15%, 17% e 24%, respectivamente, nos 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental.

Os resultados finais da pesquisa indica que, com o avanço de escolarização, os sujeitos melhoram a performance na resolução de problemas de partilha, segundo encadeamento definido por Marchand e Bednarz (1999). Ao mesmo tempo, ficou evidente que os sujeitos não abandonam as estratégias de resolução dos problemas, ou seja, continuam mobilizando procedimentos aritméticos como atribuir valor (AV), independentimente do ano de escolarização, embora o uso da estratégia de base algébrica (AL) tenha apresentado percentual de crescimento com o avanço escolar.

CAPÍTULO 6

6.1 - Considerações Finais

Nossa questão de pesquisa foi investigar as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Buscamos dar continuidade à pesquisa de Câmara e Oliveira (2008).

Câmara e Oliveira (2008) investigaram as estratégias e registros mobilizados por alunos do 6º ano do ensino fundamental do Brasil e do Canadá na resolução de problemas de estrutura algébrica tipo partilha. A pesquisa de Câmara e Oliveira (2008), foi essencial para construção da nossa pesquisa, uma vez que, apresentou resultados que serviram de suporte para a nossa pesquisa.

Nossa pesquisa investigou as estratégias utilizadas pelos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Entretanto, não analisamos os tipos de registros, mas sim se com o avanço do nível de escolaridade, os alunos utilizam as mesmas estratégias de resolução, ou se elas se modificam de acordo com o nível de escolarização.

Em nossa pesquisa adotamos como referencial teórico a classificação dos problemas de estrutura algébrica segundo Marchand e Bednarz (1999). Essas autoras classificam os problemas algébricos em três categorias: problemas de transformação, problemas de taxa e problemas de partilha.

Como nosso trabalho é uma continuidade do trabalho de Câmara e Oliveira (2008), escolhemos a mesma categoria, ou seja, problemas de partilha.

Segundo Marchand e Bednarz (1999), os problemas de partilha são aqueles em que a quantidade total é conhecida, sendo esta quantidade repartida em partes desiguais e desconhecidas. As partes se relacionam levando em consideração o "número" de relações, a "natureza" dessas relações e o "encadeamento" dessas relações. Em nossa pesquisa foi fixado problemas com duas relações.

Para Marchand e Bednarz (1999), um problema de partilha pode apresentar três tipos de encadeamento, "fonte", "composição" e "poço". No problema de partilha com encadeamento fonte as grandezas são originadas em função de uma única grandeza. Em um problema de partilha tipo composição as relações são estabelecidas seguindo uma sequência. Já no problema de partilha com encadeamento poço as relações convergem para um dos dados do problema.

Os testes utilizados em nossa coleta foram os mesmos construídos por Câmara e Oliveira (2008) quando de suas pesquisas no Brasil e no Canadá. Os testes continham sete problemas de partilha, sendo um problema de partida com uma relação para facilitar a entrada do aluno, dois problemas de partilha com encadeamento tipo fonte, dois problemas de partilha com encadeamento tipo composição e dois problemas de partilha com encadeamento tipo poço. Esses problemas variavam quando ao número e ordem das relações, segundo a classificação de Marchand e Bednarz (1999).

Os testes foram aplicados pelo próprio pesquisador, juntamente com professores das escolas envolvidas.

Realizaram o teste 251 alunos, sendo 82 alunos do 7º ano, 75 alunos do 8º ano e 94 alunos do 9º ano do ensino fundamental de três escolas, sendo duas localizadas em São Lourenço da Mata e uma na cidade do Recife.

No primeiro momento analisamos a performance dos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental quanto a acerto, erro e não resposta, de acordo com o encadeamento das relações definidos por Marchand e Bednarz (1999).

No segundo momento investigamos como as estratégias de resolução variaram com o avanço escolar e em relação à complexidade dos problemas fonte, composição e poço.

Em relação à performance, ficou constatado que, de modo geral, com o avanço de escolarização, os sujeitos melhoram o desempenho na resolução de problemas de partilha, segundo encadeamento definido por Marchand e Bednarz (1999). Ou seja, quanto maior é o nível de escolaridade, melhor é o desempenho, uma vez que os alunos do 8º ano apresentaram melhor desempenho que os alunos do 7º ano e os alunos do 9º ano apresentaram melhor desempenho que os alunos do 8º ano do ensino fundamental.

Vale salientar que em relação a pesquisa base de nosso estudo, Câmara e Oliveira (2008), no 6º ano do ensino fundamental, os sujeitos do 7º ano da nossa pesquisa, apresentaram performance abaixo dos alunos do 6º ano, nos problemas tipo composição e poço, tendo obtido melhor resultado apenas nos problemas tipo fonte.

Foi possível perceber que se levarmos em consideração erros e não resposta, os problemas tipo composição e poço se mostraram mais difíceis para os alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental, uma vez que o percentual de erro e não resposta foi muito alto.

Em relação às estratégias utilizadas para resolução dos problemas de partilha que foram propostos, ficou evidenciado que os alunos não abandonam as estratégias de resolução dos problemas, ou seja, utilizam as mesmas estratégias de resolução ano a ano. Percebemos que com o avanço escolar, as estratégias de resolução se mantiveram inalteradas, merecendo destaque, a estratégia de base atribuir valor (AV), utilizada pela maioria absoluta dos alunos, seguida da estratégia de base algébrica (AL) que cresceu de acordo com o avanço escolar.

A estratégia de Base (D3), foi a que apresentou maior discrepância com o avanço da escolarização, uma vez que a grande maioria dos sujeitos a utilizou no 6º ano do ensino fundamental, enquanto no 8º e 9º ano do ensino fundamental essa estratégia foi pouco utilizada.

Uma das limitações que percebemos em relação à nossa pesquisa diz respeito ao objeto de coleta (teste), uma vez que o mesmo se apresentava de uma única forma para os alunos, ou seja, o 1º quesito continha um problema de entrada, o 2º e 3º quesito apresentavam problemas tipo fonte, o 4º e 5º quesito apresentavam problemas tipo composição, o 6º e 7º quesito apresentavam problemas tipo poço. Não foi possível investigar qual resultado obteríamos se a ordem dos quesitos fossem alteradas.

Como nossa pesquisa limitou-se a analisar a performance e estratégias de resolução do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha, em uma dimensão mais ampla, seria interessante avançar em outras pesquisas e analisar os registros de representação utilizados pelos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental.

Dentre as questões que ficaram abertas e merecem atenção, uma seria como os problemas de partilha com encadeamento tipo fonte, composição e poço são abordados nos livros didáticos de matemática do 8º e 9º ano do ensino fundamental? Como esses problemas estão sendo trabalhados em sala de aula? Seria importante avançar mais, e verificar o porquê da manutenção e perpetuação de procedimentos aritméticos que não estimulam o raciocínio algébrico.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. **Problemas proposto para o ensino de equações polinomiais do 1ª grau com uma incógnita: um estudo exploratório nos livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino fundamental.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2011.

ANDRÉ, R. C. M. **Investigando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica: o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

BAUMGART; J. K. **Historia da álgebra**. São Paulo, Atual. 1992.

BOOTH, R. L. Dificuldades das crianças que se iniciam com álgebra. In: COXFORD, A. F. & SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática 5ª a 8ª Série. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CÂMARA, M; FIGUEIREDO, P. Considerações sobre a matemática no ensino fundamental. In: **Anais do I Seminário Nacional: Currículo em Movimento – Perspectivas Atuais**, Belo Horizonte, 2010.

CÂMARA, M. (a) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: o que estamos fazendo em nossas salas de aulas? In: **Anais do X ENEM**, Salvador, 2010.

__________. (b) Estratégias utilizadas por alunos de 6º ano na resolução de problemas de estrutura algébrica. In: **Anais do X ENEM**, Salvador, 2010.

__________.(c) Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. In: **Revista do Professor de Matemática**. V. 50. Sociedade Brasileira de Matemática. 2002.

COSTA, W. R. **Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau.** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

COXFORD, Artur F e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática – Teoria e Pratica.** Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática – 7º Ano.** Paulo: Ática, 2010.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In Schillieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE; 1993.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A. & MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-Posições**. Vol. 4, nº 1[10]. 1993.

HOLANDA, Ferreira, Aurélio Buarque. **Mini-aurélio: O Minidicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2004.

HOUSE, A. Peggy. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: COXFORD, Artur F e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 2004.

KIERAN, C. Duas Abordagens Diferentes entre os Principiantes em Álgebra. In **As idéias da Álgebra.** Org. Coaxford, A. F & Shulte, A. P. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo: Atual, 1995.

MAC LANE e GARRET BIRKHOFF, **Álgebra Moderna**, Editora Teide, Barcelona, 1954.

MARCHAND, P. & BEDNARZ, N. L‟enseignement de l‟algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. **In Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. p. 30-42, Québec: AMQ, 1999.

__________________________. Développement de l‟algèbre dans un context de resolution de problems. **In Bulletin AMQ**, Vol. XL, N°4. Québec: AMQ, 2000.

PONTE, J. P. Números e Álgebra no currículo escolar. In Educação e Matemática, nº 85, p. 36-42, novembro, 2005.

RIBEIRO, A J. **A noção de equação e suas diferentes concepções**: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. vol 2, nº 1, São Paulo, 2009.

USISKIN, Zalman. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Artur F e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 2004.