



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA-CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## TESE DE DOUTORADO

OTIMIZAÇÃO E CONTROLE DE INTERFACES INSTÁVEIS E DE  
FORÇAS ADESIVAS EM FLUIDOS

Eduardo Olímpio Ribeiro Dias

Recife  
2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA-CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## TESE DE DOUTORADO

OTIMIZAÇÃO E CONTROLE DE INTERFACES INSTÁVEIS E DE  
FORÇAS ADESIVAS EM FLUIDOS

por

**Eduardo Olímpio Ribeiro Dias**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

**Banca examinadora:**

Prof. José Américo de Miranda Neto (Orientador, DF-UFPE)

Prof. José Wellington Rocha Tabosa (DF-UFPE)

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva (DF-UFPE)

Prof. Oscar Nassif de Mesquita (DF-UFMG)

Prof. Javier Alberto Diez (FCEEx-UNCPBA, Argentina)

Recife  
2014

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Dias, Eduardo Olímpio Ribeiro.

Otimização e controle de interfaces instáveis e de  
forças adesiva em fluidos / Eduardo Olímpio Ribeiro  
Dias. – Recife: O Autor, 2014.  
216 f.: fig.

Orientador: José Américo de Miranda Neto.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Física, 2014.  
Inclui referências.

1. Mecânica dos fluidos. 2. Fluxo viscoso. 3. Controle  
de instabilidades. 4. Adesão de fluidos. I. Miranda Neto,  
José Américo de (orientador). II. Título.

532

(22. ed.)

FQ 2014-34



**Universidade Federal de Pernambuco**  
**Departamento de Física – CCEN**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**  
**Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil**  
**Fone ( ++ 55 81) 2126-7640/2126-8449**  
<http://www.ufpe.br/ppgfisica> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## **Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado**

---

**Eduardo Olímpio Ribeiro Dias**

### **OTIMIZAÇÃO E CONTROLE DE INTERFACES INSTÁVEIS E DE FORÇAS ADESIVAS EM FLUIDOS**

A Banca Examinadora composta pelos Professores José Américo de Miranda Neto (Presidente e Orientador), Clécio Clemente de Souza Silva, José Wellington Rocha Tabosa, todos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Oscar Nassif Mesquita, do Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais e Javier Alberto Diez, da Faculdade de Ciências Exatas da Universidade Nacional do Centro da Província de Buenos Aires, Argentina, consideram o candidato:

( ) Aprovado

( ) Reprovado

( ) Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em vinte e oito de fevereiro de dois mil e catorze.

---

Prof. José Américo de Miranda Neto  
Presidente e Orientador

---

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva

---

Prof. José Wellington Rocha Tabosa

---

Prof. Oscar Nassif Mesquita

---

Prof. Javier Alberto Diez

## Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus por me guiar em todos os momentos de minha vida.

Sou imensamente grato ao meu orientador, professor José Américo, pela grande amizade e pelos ensinamentos científicos que foram fundamentais para minha formação profissional. Agradeço por todo apoio e ensinamento não só na vida científica como também na vida pessoal. Por ele ter sido o alicerce para que mais esse sonho se tornasse realidade.

Aos meus pais que se sacrificaram tanto para que essa conquista se tornasse possível. Sinto-me extremamente feliz em retribuir com o término de mais essa etapa, forçando-lhes o mínimo de alegria que eles de fato merecem. Serei eternamente grato por tudo! Aos meus queridos irmãos, Edmir e Renata, que sempre me apoiaram e estiveram juntos como uma verdadeira família ao longo desses anos de trabalho. Ainda no contexto familiar, gostaria de agradecer à minha companheira, Mariana, que realmente foi crucial para o desenvolvimento deste trabalho, ajudando-me nas mais diversas situações, inclusive na própria escrita da tese.

Um agradecimento especial a todos os meus amigos físicos, dentistas, administradores, médicos e engenheiros que me apoiaram nessa jornada acadêmica. Gostaria de agradecer especialmente ao meu grande amigo Rafael Alves, pela amizade e discussões que colaboraram bastante para a realização desse trabalho e para minha formação profissional. Ao meu amigo Sérgio, companheiro de pesquisa em dinâmica dos fluidos, que contribuiu em inúmeras maneiras para a construção e apresentação desta tese. E aos competentes amigos físicos da área de fluidos: Chico, Gabriel, Pedro e Rodolfo. Agradeço a João pela sua excelente colaboração em um dos artigos provenientes desta tese.

Ao professor Fernando Parísio pela colaboração de fundamental importância e pelas suas excelentes idéias em um dos projetos aqui apresentado. Também sou grato pela colaboração do professor Márcio Carvalho, que tornou possível minha experiência experimental em seu laboratório na PUC-RJ. Também agradeço à sua equipe pelo apoio na elaboração dos experimentos, em especial a Felicle e Ranena. Um agradecimento ao colaborador Enrique Alvarez pela suas atividades em simulações numéricas em um de nossos projetos.

Aos professores da banca examinadora: Javier Diez, Oscar Mesquita, Clécio Clemente e José Wellington Tabosa pelo tempo dedicado à leitura e estudo desta tese. Pelas correções e sugestões construtivas que tornaram o trabalho mais rico. Agradeço aos professores das excelentes disciplinas cursadas nesse período do Doutorado, Ernesto Raposo e Frederico Brito, contribuindo intensamente na minha formação acadêmica. Aos meus amigos que cursaram comigo as disciplinas e tornaram o aprendizado mais fácil e prazeroso com

nossas infidáveis horas de estudo e discussões: Plínio, Marcone, Fernanda, Fábio, Messias, Flavinha e Bruno. Agradeço a Weliton pela ajuda com o Latex.

Aos funcionários do departamento que ajudaram na realização desse projeto. Agradeço especialmente a Alexsandra, Hilda, Paula e Ari.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

(Eduardo Olímpio Ribeiro Dias)

## Resumo

A formação de padrões na natureza tem sido uma fonte de grande interesse acadêmico e tecnológico. Nesta tese, estudamos a dinâmica de interfaces instáveis de três sistemas fundamentais: a instabilidade hidrodinâmica de Saffman-Taylor (os chamados “dedos viscosos”), a instabilidade de Mullins-Sekerka (refere-se ao crescimento de cristais) e a propagação de ondas de ionização através de descargas elétricas. Dentre estes sistemas, o problema Saffman-Taylor é o mais abordado. Esta instabilidade surge na interface que separa dois fluidos viscosos confinados entre duas placas paralelas, num dispositivo conhecido como célula de Hele-Shaw, ou imersos em um meio poroso. Ao longo da tese, estudamos meios de selecionar o número de onda dominante dos padrões na interface fluido-fluido, os efeitos da inércia do fluido na instabilidade e, principalmente, métodos de controle e minimização das perturbações na interface. Um dos meios de controle das instabilidades é através de uma suave modificação geométrica no aparato no qual o fluido está confinado. Nesse contexto, fomos capazes tanto de favorecer quanto de inibir e, eventualmente, suprimir os dedos viscosos. Um outro protocolo de estabilização, que consiste no principal método de controle desta tese, é através do cálculo variacional. O objetivo desse procedimento é encontrar uma forma funcional para a taxa de injeção de fluido que minimize as instabilidades. Comprovamos experimentalmente e por simulações numéricas a eficácia desse processo. Tal método também é utilizado para minimizar instabilidades em crescimento de cristais e em processos de descarga elétrica. Além da investigação de interfaces instáveis, nós estudamos a força e a energia de adesão de fluidos complexos confinados entre placas paralelas. Neste caso, nosso método variacional visa obter a equação de levantamento ideal da placa superior a fim de minimizar a energia de adesão. Finalmente, efeitos de inércia na força de levantamento são estudados.

**Palavras-Chave:** Mecânica dos fluidos. Instabilidade de interfaces. Processos de controle de instabilidades. Efeitos de inércia. Célula de Hele-Shaw. Meio poroso. Força de adesão. Descargas elétricas. Crescimento de cristais.

# Abstract

The pattern formation in nature has been a major source of academic and technological interest. In this work, we study the dynamic of unstable interfaces of three key systems: hydrodynamic Saffman-Taylor instability (the so-called “viscous fingering”), the propagation of wave ionization by electrical discharges, and the Mullins-Sekerka instability (which refers to crystal growth). The Saffman-Taylor problem is the most discussed topic among these systems. This instability takes place at the interface separating two viscous fluids confined between two parallel plates, a device known as a Hele-Shaw cell, or immersed in a porous medium. Throughout this work, we propose a new method to determine the dominant wave number in interfacial patterns, we investigate the inertial effects in the Saffman-Taylor instability, and mainly we create protocols in order to control and minimize perturbations at the interface. One of the methods is performed by a slightly geometric modification of the apparatus where the fluids are confined. In this context, we verify the ability to promote as well as inhibit, and eventually, suppress the growth of the viscous fingers in unstable interfaces. Another stabilization protocol, which corresponds to the main method of this thesis, uses variational calculus. The goal of this procedure is to find a functional form for the fluid injection rate so that the interface can grow, but minimizing the disturbances at the fluid-fluid boundary. This method is applied for both Hele-Shaw cell and porous media flows. The efficacy of this process is confirmed experimentally and by numerical simulations. Such a protocol is also utilized to minimize instabilities in crystal growth and discharge electric processes. In addition, we study the strength and adhesion energy of complex fluids confined between parallel plates. In this case, we propose a variational method, similar to the one applied for unstable interfaces, which search for the ideal profile of the upper plate lifting which minimizes the adhesion energy of the fluid. Finally, the role of inertial effects in the adhesion (lifting) force is studied.

**Keywords:** Fluid Mechanics. Interface instabilities. Control instability processes.

Inertial effects. Porous media. Adhesion strength. Electrical discharges. Crystal growth.



# Lista de Figuras

- 1.1 À esquerda, visualizamos uma simulação numérica de dedos viscosos na interface entre fluidos miscíveis [1]. À direita, observamos uma ilustração da instabilidade de Saffman-Taylor no processo de extração de petróleo. A água é injetada por um poço, enquanto o óleo é expelido através de um outro poço. . . . . 24
- 1.2 Ilustração do fluxo viscoso na célula de Hele-Shaw retangular. Diagrama esquemático das instabilidades na célula de Hele-Shaw de geometria retangular (à direita). . . . . 26
- 1.3 Figura esquemática da injeção radial em Hele-Shaw (ilustração superior à esquerda). Na figura superior à direita, temos um experimento que ilustra a evolução temporal dos padrões obtidos na injeção na célula de Hele-Shaw radial [43]. Figura esquemática da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável (ilustração inferior à esquerda). Na figura inferior à direita, visualizamos um experimento que ilustra a competição dos dedos do fluido menos viscoso que se desloca em direção ao centro da placa [44]. . . . . 28
- 1.4 À esquerda, observamos um experimento da injeção radial em Hele-Shaw. Ilustração de uma interface intensamente ramificada de um sistema bastante instável [70]. À direita, estão ilustrados padrões experimentais gerados na célula de Hele-Shaw radial: (a) injeção constante e (b) injeção que escala no tempo com expoente  $-1/3$  [71] com  $C(7)$ . . . . . 30

- 1.5 Fluido de baixa viscosidade injetado a uma taxa constante em um óleo viscoso cria instabilidades na fronteira entre os fluidos (à esquerda). A bolha de água ganha uma forma de dedos viscosos. À direita, temos a ilustração de uma taxa de injeção dependente do tempo que inibe os dedos viscosos e que mantém a mesma taxa de injeção média de fluido em relação ao caso de injeção constante. Figura retirada de uma reportagem da Revista Pesquisa Fapesp na edição de Nov/2012 [86] sobre nosso periódico da Ref. [77]. . . . . 31
- 1.6 (a) Ilustração de uma célula de Hele-Shaw modificada, onde a placa superior é substituída por uma membrana elástica [78]. Os padrões de geometria radial da esquerda pra direita estão representam na seguinte ordem: placa rígida, membrana elástica (supressão das instabilidades) e membrana elástica de maior rigidez. (b) Representação da célula retangular com um pequeno gradiente de abertura. À esquerda está ilustrado um padrão em estágio estacionário com uma grande deformação. À direita vemos a completa supressão do dedo viscoso [81]. . . . . 32
- 1.7 Figura à esquerda: padrões gerados no deslocamento longitudinal de óleo mineral através de pentano em um meio poroso. Figura à direita: dedos viscosos gerados durante o deslocamento radial de óleo mineral por querosene em um meio poroso [116]. . . . . 34
- 1.8 (a) Interface resultante do crescimento de um cristal tridimensional, cuja temperatura longe da interface sólido-líquido foi mantida constante. Note a estrutura dendrítica similar à foto à esquerda de um cristal convencional. (b) Interface final utilizando um fluxo de calor que controla o número de dedos emergentes e, consequentemente, inibe efeitos dendríticos não lineares. Simulações extraídas da Ref. [20]. . . . . 35
- 1.9 À esquerda, temos uma foto de uma região plasmática bastante complexa gerada por uma descarga elétrica. À direita, visualizamos um experimento realizado na Ref. [129] que ilustra a evolução temporal da distribuição de carga em uma descarga gerada por uma alta diferença de potencial aplicada no centro dos padrões. . . . . 37

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.10 | À esquerda: imagem de descolamento de um adesivo convencional sensível à pressão, obtida através de microscopia eletrônica de varredura [131]. A propriedade de grande adesão do material se origina na formação das complexas estruturas fibrilares mostradas na figura. À direita: curvas de força-distância num gráfico log-log para diferentes valores de espaçamento inicial para um fluido newtoniano [132] . . . . .                                                           | 38 |
| 2.1  | Figura esquemática do fluxo viscoso na célula de Hele-Shaw retangular. . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 44 |
| 2.2  | Considerações físicas da interface fluido-fluido: (a) Dinâmica da interface sem molhamento das placas (modelo de Chuoke <i>et. al</i> , Saffman-Taylor e o de Park e Homsy). Ilustração do ângulo de contato $\beta_c$ . (b) Dinâmica da interface com efeito de molhamento, observa-se uma fina camada de líquido nas placas deixada pelo fluido que está sendo deslocado. . . . .                                                                                                   | 50 |
| 2.3  | Figura esquemática da injeção radial na célula de Hele-Shaw. O fluido externo (em cinza) possui viscosidade $\eta_1$ , enquanto o fluido interno possui viscosidade $\eta_2$ . A interface fluido-fluido não perturbada (curva tracejada) corresponde a um círculo de raio $R = R(t)$ dependente do tempo. A perturbação da interface é representada por $\zeta = \zeta(\theta, t)$ , onde $\theta$ é o ângulo polar. . . . .                                                         | 51 |
| 2.4  | Ilustração da evolução temporal da taxa de crescimento $\Lambda(n, R)$ para três modos de Fourier: $n = 6$ , $n = 8$ e $n = 10$ . Note o crescimento em “cascata” dos modos de perturbação. O tempo crítico de $n = 8$ (momento em que o modo 8 se torna instável) é representado na figura. . . . .                                                                                                                                                                                  | 55 |
| 2.5  | Figura retirada da Ref. [35]. Número de onda modificado em função do logaritmo do número de capilaridade. Vários modelos teóricos são ilustrados. Os pontos experimentais representam os seguintes valores de $b$ e $\eta$ : ( $\circ$ ) 0.034 cm, 1.17 P; ( $\nabla$ ) 0.065 cm, 1.17 P; ( $\triangle$ ) 0.128 cm, 1.17 P; ( $\square$ ) 0.191 cm, 1.17 P; ( $\bullet$ ) 0.0153 cm, 0.061 P; ( $\blacksquare$ ) 0.065 cm, 9.95 P; and, ( $\blacklozenge$ ) 0.128 cm, 9.95 P. . . . . | 57 |

- 2.6 Número de dedos viscosos na interface fluido-fluido em função do raio não perturbado  $R$  para  $Ca = 0.237$ : modelo de Paterson [37],  $n_{max}^{\Lambda}$  do modelo de Kim *et. al* [160] e utilizando nosso método da máxima amplitude,  $n_{max}^{\zeta}$ . 60
- 2.7 Número de onda modificado em função do logaritmo do número de capilaridade, para  $R=35$ :  $n_{max}^{\Lambda}$ , modelo de Kim *et. al* [160];  $n_{max}^{\Lambda_w}$ , modelo de Kim adicionado efeito de molhamento; e,  $n_{max}^{\zeta}$ , com  $R_0 = 25$ . A predição teórica de Paterson [37] é também ilustrada. Os pontos experimentais são os mesmos da Fig. 2.6, retirados do experimento de Maxworthy [35]. . . . . 62
- 2.8 Figura retirada da Ref. [35]. Fotografias da evolução da interface durante a injeção de ar deslocando um óleo que preenche a célula de Hele-Shaw. O intervalo de tempo de cada painel é de 0.3 s. Observe que 35 dedos podem ser contados na interface. A mudança na tonalidade de cinza na região central das fotografias é devido a uma fina camada de óleo deixada pra trás nas placas da célula (efeito de molhamento do óleo). . . . . 63
- 2.9 Número de onda modificado em função do logaritmo do número de capilaridade. (a) Curvas ilustrando o comportamento de  $n_{max}^{\Lambda}$  e  $n_{max}^{\zeta}$  (com  $R_0 = 25$ ), para  $R = 30$  (curvas contínuas),  $R = 40$  (curvas tracejadas). (b) Gráfico de  $n_{max}^{\Lambda}$  e  $n_{max}^{\zeta}$  (com  $R = 35$ ), para  $R_0 = 20$  (curva tracejada),  $R_0 = 25$  (curva contínua) e  $R_0 = 30$  (curva pontilhada). Os pontos experimentais são os mesmos da Fig. 2.6, retirados do experimento de Maxworthy [35]. . . . . 64
- 2.10 Figura esquemática da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável. O fluido interno (em verde) possui viscosidade  $\eta_1$ , enquanto o fluido externo possui viscosidade  $\eta_2$ . A interface fluido-fluido não perturbada (curva tracejada) corresponde a um círculo de raio  $R = R(t)$  dependente do tempo. A perturbação da interface é representada por  $\zeta = \zeta(\theta, t)$ , onde  $\theta$  é o ângulo polar. A direção de levantamento é ao longo do eixo  $z$  e o espaçamento entre as placas  $b = b(t)$  é função do tempo. . . . . 67

- 2.11 Figura retirada do artigo de Nase *et al.* [60]. Número de dedos  $N_{all}$  como uma função do tempo  $t'$ . A curva contínua representa o número de dedos calculado pelo máximo da taxa de crescimento (2.44), negligenciando efeitos de estresse normal e molhamento das placas ( $\mu = 0$  e  $\gamma = 0$ ), para  $\tau = 9.6 \times 10^{-6}$ . Os círculos, quadrados e losangos correspondem a raios iniciais iguais a 3 mm, 5 mm e 1.5 mm, respectivamente. Confimameto: símbolos pretos,  $q = 30$ ; símbolos verdes,  $q = 40$ ; símbolos laranja  $q = 60$ ; e símbolos brancos,  $q = 120$ . . . . . 70
- 2.12 Número de dedos  $n_{max}$  como uma função do tempo  $t$ , para  $q = 40$  e  $\tau = 4.5 \times 10^{-6}$ . Nesta figura, o efeito de molhamento é negligenciado ( $\gamma = 0$ ). Observa-se as seguintes curvas: curva teórica,  $n_{max}^{\Lambda}$ , calculada pelo máximo da taxa de crescimento negligenciando os efeitos dos estresses normal ( $\mu = 0$ ) [44, 47–60, 75];  $n_{max}^{\Lambda_s}$ , calculada usando Eq. (2.31) considerando os efeitos dos estresses normal ( $\mu = 1$ ) e também utilizando a abordagem do máximo da taxa de crescimento; e, finalmente,  $n_{max}^{\zeta_s}$ , o qual toma  $\mu = 1$ , mas utiliza o método da máxima amplitude [148]. Os pontos experimentais ( $\bullet$ ) foram retirados dos experimentos realizados por Nase *et al.* na Ref. [60]. . . . . 71
- 2.13 Número de dedos viscosos  $n_{max}$  em função do tempo  $t$ , para diversos valores do parâmetro de confinamento  $q$  e para dois valores do parâmetro de tensão superficial  $\tau$ :  $4.5 \times 10^{-6}$  [Figs. 2.13(a)-2.13(d)] e  $9.6 \times 10^{-6}$  [Figs. 2.13(e)-2.13(h)]. As curvas teórica contínuas e azuis foram calculadas pelo máximo da taxa de crescimento, onde efeitos de estresse normal e molhamento foram negligenciados ( $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0$ ) [44, 47–60, 75];  $n_{max}^{\zeta_s}$  calculada pela Eq. (2.31) considerando os efeitos de estresse normal, negligenciando os efeitos de molhamento ( $\mu = 1$ ,  $\gamma = 0$ ) e também utilizando a abordagem do máximo da taxa de crescimento; e, finalmente,  $n_{max}^{\zeta_{s,w}}$  calculado pela Eq. (2.31), assumindo  $\mu = 1$ ,  $\gamma = 2/3$  e considera o critério da máxima amplitude. Os pontos experimentais, assim como na Fig. 2.12, foram retirados dos experimentos realizados por Nase *et al.* na Ref. [60]. . . . . 73

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Taxa de injeção $Q(t)$ como função do tempo para o protocolo de injeção constante de dois estágios. A taxa de injeção equivalente $Q_0$ está representada pela linha horizontal azul tracejada. . . . .                                                                                                                                                                                                | 78 |
| 3.2 | Gráfico da esquerda: comportamento de $I'_{max} = I''_{max}$ como função de $\gamma$ . O mínimo absoluto para $\gamma^* = 3.72$ é indicado. Gráfico da direita: as curvas vermelha e azul contínuas representam $I'$ e $I''$ , respectivamente, em função de $n$ , calculado para $\beta^*$ e $\gamma^*$ . A curva tracejada ilustra $I_0$ para o processo de injeção constante equivalente. . . . .   | 82 |
| 3.3 | Comparação entre os padrões formado durante a injeção constante (a) e a injeção de dois estágios (b), incluindo 40 modos de Fourier com fases aleatórias. O mesmo vale para as figuras (c) e (d), respectivamente, mas considerando 30 modos com diferentes fases aleatórias . . . . .                                                                                                                 | 83 |
| 3.4 | Típicos padrões experimentais para $Q_0 = 2.91$ e $t_f = 7$ s, para (a) injeção constante e (b) sua correspondente taxa de injeção ótima de dois estágios. As formas experimentais ilustradas em (c) e (d) consideram $Q_0 = 2.91$ e $t_f = 10$ s com taxa de injeção constante e utilizando a taxa de bombeamento ideal de dois estágios, respectivamente. . . . .                                    | 85 |
| 3.5 | Representação da taxa de injeção ótima em função do tempo (curva contínua). A taxa de injeção constante equivalente é representada pela linha tracejada horizontal. O volume de fluido injetado no intervalo $[0, t_f]$ deve ser o mesmo para ambas injeções. . . . .                                                                                                                                  | 91 |
| 3.6 | Gráfico à esquerda: a curva contínua vermelha representa a integral $I$ como função do modo $n$ , calculada para taxa de injeção ótima (3.19). A curva tracejada ilustra a integral correspondente $I_0$ para o processo de bombeamento constante (3.20). O gráfico à direita ilustra a amplitude de perturbação dividida pelo raio final $R_f$ em $t = t_f$ em função do número de onda $n$ . . . . . | 92 |
| 3.7 | Razão das amplitudes $\zeta_0/\zeta$ em função de $T_f$ , para $Ca = 100, 130$ . $\zeta_0$ ( $\zeta$ ) representa o máximo da amplitude utilizando a injeção constante (ideal) em $t = t_f$ . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 93 |

- 3.8 Padrões experimentais típicos em  $t_f = 20$  s para (a)  $Q_0 = 2.08$  cm<sup>2</sup>/s e (b) a taxa de injeção ideal correspondente. Para (a) e (b)  $T_f = 65$  e  $Ca = 112$ . As interfaces (c) e (d) são ilustradas em  $t_f = 6.7$  s, considerando taxa de injeção  $Q_0 = 3.75$  cm<sup>2</sup>/s e a taxa de injeção ideal, respectivamente. Em (c) e (d)  $T_f = 40$  e  $Ca = 200$ . . . . . 94
- 3.9 Simulações numéricas não lineares ilustrando a evolução temporal das interface para a injeção constante  $Q_0 = 1.25$  cm<sup>2</sup>/s (padrões a esquerda) e para a taxa de injeção ideal (padrões a direita). Foi considerado  $t_f = 240$  s,  $R_f = 9.8$  cm e  $R_0 = 1.0$  cm. Além disso,  $T_f = 95$  e  $Ca = 95$ . . . . . 95
- 3.10 Figura esquemática (vista superior) do fluxo na célula de Hele-Shaw radial. O fluido interno tem viscosidade desprezível e o fluido externo é um fluido não newtoniano. A interface não perturbada (curva tracejada) corresponde a um círculo de raio  $R = R(t)$ . A amplitude de perturbação da interface é representada por  $\zeta$ . A injeção é realizada no centro da célula. . . . . 96
- 3.11 Taxa de injeção em função do tempo para a injeção ótima  $Q(t)$  (curvas contínuas) e para a taxa de injeção constante  $Q_0$  (curva tracejada). Assumimos  $\alpha = 1.4$ ,  $\alpha = 1.0$  e  $\alpha = 0.6$ . O volume total de fluido injetado (ou a área sob as curvas) no intervalo  $[0, t_f]$  deve ser a mesma para todas as taxas de bombeamento. . . . . 100
- 3.12 Amplitude de perturbação dividida pelo raio final  $R_f$  em  $t = t_f$ , para a taxa de injeção ótima  $\zeta_n(t_f)/R_f$  (curva contínua) e para a taxa de injeção constante equivalente (curva tracejada) em função do número de onda  $n$ . . . 101
- 3.13 Evolução linear das interfaces fluido-fluido durante a taxa de injeção constante (coluna da esquerda) e utilizando a taxa de bombeamento ótima (coluna da direita) para: 11.1 cm<sup>2</sup>/s e  $\alpha = 1.4$  [(a) e (b)], 2.26 cm<sup>2</sup>/s e  $\alpha = 1.0$ [(c) e (d)] e, 1.0 cm<sup>2</sup>/s e  $\alpha = 0.6$  [(e) e (f)]. Os comprimentos estão representados em centímetros. . . . . 102

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 | Ilustração da taxa de bombeamento como função do tempo para a taxa de injeção ótima $Q(t)$ (curva contínua) e para taxa de injeção constante equivalente $Q_0$ (linha tracejada). O volume total de fluido injetado (área sob as curvas) no intervalo $[0, t_f]$ é a mesma para ambas injeções. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 111 |
| 4.2 | Interface resultante em $t = t_f$ utilizando a taxa de injeção constante (superfície da esquerda) e para taxa de injeção ótima (superfície da direita). Essa figura foi selecionada para aparecer na seção Kaleidoscope do Physical Review E na sua edição de Dezembro de 2013 [185], porém neste trabalho sua cor foi modificada. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 112 |
| 4.3 | Razão das amplitudes $\zeta^0(t_f)/\zeta(t_f)$ em função de $Ca$ , para $R_0 = 0.2, 0.25$ . $\zeta^0(t_f)$ [ $\zeta(t_f)$ ] representa a amplitude máxima para a injeção constante (ótima) em $t = t_f$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 113 |
| 4.4 | Ilustração de uma descarga elétrica, onde $\sigma$ representa a densidade de carga negativa superficial. Note que o campo elétrico aponta para a região do plasma. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 115 |
| 4.5 | Evolução linear dos padrões formados durante a descarga elétrica com carga elétrica constante [(a) e (c)] e quando a carga com densidade temporal ótima é usada [(b) e (d)]. Os efeitos do termo com $\alpha_0$ na dispersão linear (4.23) são negligenciados em (a) e (b) [onde $R_0 = 0.14$ , $R_f = 0.44$ e $t_f = 0.08$ ] e considerados em (c) e (d) [onde $R_0 = 0.14$ , $R_f = 0.47$ e $t_f = 0.08$ ]. Os padrões lineares têm a mesma condição inicial (incluindo fases aleatórias para cada modo) e 40 modos de Fourier são considerados. As interfaces são ilustradas em intervalos de $t_f/5$ . Assumimos $\epsilon = 0.03$ . . . | 118 |
| 4.6 | Interface resultante em $t = t_f$ utilizando carga elétrica constante (painel da esquerda) e evolução ótima de carga elétrica (painel da direita) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 120 |
| 4.7 | Diagrama esquemático de um cristal perturbado imerso na sua fase líquida.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 120 |
| 4.8 | Evolução temporal linear das interfaces formadas durante o fluxo de calor constante [(a) e (c)] e o fluxo ótimo [(b) e (d)]. Efeitos anisotrópicos são negligenciados em (a) e (b), enquanto que (c) e (d) considera-se anisotropia com $m = 5$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 123 |



|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.9  | Razão das amplitudes $\zeta^0(t_f)/\zeta(t_f)$ em função do tempo final $t_f$ para $J_0 = 7, 10$ . $\zeta^0(t_f)$ ( $\zeta(t_f)$ ) representa a amplitude máxima para o fluxo de calor constante (ótimo) em $t = t_f$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 124 |
| 4.10 | Interfaces tridimensionais resultantes em $t = t_f$ utilizando fluxo de calor constante (painel da esquerda) e o fluxo de calor ótimo (painel da direita). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 126 |
| 5.1  | (Painel da esquerda) Ilustração do aparato utilizado no teste de adesão (probe-tack test) de constante elástica $k$ , onde um fluido de viscosidade $\eta$ é confinado entre duas placas paralelas separadas por uma distância $b = b(t)$ . A placa superior é movida verticalmente cujo deslocamento é representado pela função $L(t)$ por uma força $F$ que é medida durante esse processo. Note que $L(t)$ e $b(t)$ não estão em escala. (Painel da esquerda) Representação da curva força-deslocamento ( $F$ vs. $L$ ) típica obtida no probe-tack test. . . . . | 128 |
| 5.2  | Força de adesão $F$ em função do deslocamento $L$ . As curvas pretas referem-se ao levantamento ótimo (5.28), enquanto que as curvas cinzas ilustram o levantamento com velocidade constante $V$ (5.29). As curvas contínuas (tracejadas) representam o caso de um aparato elástico (rígido). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                | 141 |
| 5.3  | (a) Evolução temporal de $L$ e $L_{ot}$ e (b) evolução temporal das velocidades de levantamento $\dot{L} = V$ e $\dot{L}_{ot}$ para a situação ilustrada na Fig. 5.2 ( $L_0 = 0.3$ mm, $L_f = 1.1$ mm e $t_f = 100$ s). Note que em (a) temos $L(t = 0) = L_{ot}(t = 0)$ e $L(t = t_f) = L_{ot}(t = t_f)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 142 |
| 5.4  | Trabalho de separação $W$ em função do espaçamento inicial das placas $L_0$ , para dois valores da velocidade de levantamento $V$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 143 |
| 5.5  | Força de adesão $F$ em função do deslocamento $L$ , para as respostas adesivas de um fluido newtoniano ( $a = 0$ ), (b) de um fluido shear-thickening ( $a = 0.6$ ) e (b) de um fluido shear-thinning ( $a = -0.6$ ). As curvas cinzas (pretas) estão associadas ao levantamento convencional constante (ótimo). . . . .                                                                                                                                                                                                                                             | 144 |

- 5.6 Curva da força de adesão  $F$  como função do deslocamento  $L$  considerando que o papel da inércia do fluido ( $Re$ ) e a inércia do aparato ( $M$ ) no limite newtoniano  $a = 0$ . Em (a) o valor de  $M$  está em concordância com valores típicos usados em experimento de adesão [132,135–139,143]. Em (b) o valor de  $M$  foi aumentado significativamente a fim de visualizarmos a influência da inércia do dispositivo de medição. Vemos que a inércia do fluido leva a um aumento considerável do pico da força de adesão, seguido de oscilações que decaem no decorrer do descolamento. Além disso, nota-se que as oscilações persistem se a inércia do aparato é aumentada significativamente. Assumimos a separação inicial das placas  $b_0 = 1.7$ . . . . . 146
- 5.7 (a) Força de adesão máxima  $F_{max}$  em função do número de Reynolds  $Re$ .  
(b) Gráfico do crescimento relativo  $\Delta F_{max}$  [definido Eq. (5.30)] com respeito a variações de  $Re$ . Três diferentes valores de  $b_0$  são considerados: 1.6, 1.7 e 1.8. . . . . 147
- 5.8 Força de adesão  $F$  em função do deslocamento  $L$  para três valores diferentes do expoente da lei de potência  $a$  e do parâmetro não newtoniano  $\mathcal{N}(a)$ : 0.03 e  $\mathcal{N}(0.03) = 1.31$  (caso shear-thickening), 0 e  $\mathcal{N}(0) = 1$  (limite newtoniano) e, -0.03 e  $\mathcal{N}(-0.03) = 0.76$  (caso shear-thinning). Consideramos  $Re = 0.02$  e  $b_0 = 1.6$ . . . . . 148
- 5.9 (a) Valor máximo da força de adesão  $F_{max}$  em função do número de Reynolds  $Re$ , para cinco valores diferentes do expoente da lei de potência  $a$ . . . 149
- 6.1 Representação esquemática do fluxo na célula de Hele-Shaw retangular. . . 153
- 6.2 Taxa de crescimento linear  $\lambda(k)$  em função de  $k$ , para  $Re = 0$  e  $Re = 0.12$  e  $B = 0.001$ . Os máximos das curvas estão indicados pelos pequenos círculos. 158
- 6.3 Figura esquemática da influência da função  $T(2n, n)$  na forma dos dedos viscosos. Apesar da figura representar o mecanismo de bifurcação na geometria radial, essa mesma análise é válida para o fluxo retangular . . . . . 160
- 6.4 Função  $T(2k, k)$  em função do número de Reynolds  $Re$ , para dois diferentes valores de  $B$ : 0.001 (curva contínua) e 0.003 (curva tracejada). . . . . 161

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.5  | Comportamento de $a_{2n}/R(t)$ em relação a $a_n/R(t)$ na ausência ( $Re = 0$ ) e na presença ( $Re = 0.1$ ) dos efeitos inerciais. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 165 |
| 6.6  | Evolução linear da interface, ilustrada em intervalos de tempo iguais considerando dois modos cosseno, $n = 5$ e $2n = 10$ quando $Re = 0$ (painel da esquerda) e $Re = 0.1$ (painel da direita). A bifurcação dos dedos é claramente favorecida na interface da direita. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 166 |
| 6.7  | Representação esquemática do fluxo na célula de Hele-Shaw girante. O espaçamento entre as placas é dado por $b$ e a célula rotaciona em torno do eixo perpendicular ao plano da célula com velocidade angular $\Omega$ . O fluido mais viscoso e mais denso tem uma interface inicialmente circular de raio $R$ , o qual ocupa a área sombreada. As perturbações da interface são representadas por $\zeta$ e a tensão superficial entre os fluidos é dada por $\sigma$ . . .                                                                                                                                                                                            | 167 |
| 6.8  | Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função de $n$ , para $Re = 0$ e $Re = 1$ , e dois valores de $B$ : 0.003 (curvas contínuas) e 0.005 (curvas tracejadas). Para guiar o leitor, pequenos círculos indicam o máximo das curvas. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 171 |
| 6.9  | Descrição esquemática do mecanismo de competição. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 173 |
| 6.10 | $C(n)$ em função do número de Reynolds $Re$ , para dois valores de $B$ : 0.003 (curva contínua) e 0.005 (curva tracejada). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 174 |
| 7.1  | Representação esquemática (visão lateral) da célula de Hele-Shaw modificada por uma leve inclinação da placa superior ao longo da direção radial: (a) gradiente de abertura positivo (inclinação divergente) e (b) gradiente de abertura negativo (inclinação convergente). Nesta figura ilustramos o caso do fluxo gerado pelo levantamento da placa superior (representado pelas linhas tracejadas). O fluido de viscosidade está ilustrado em cinza e o espaçamento dependente do tempo entre as placas está descrito pela função $b(r, t)$ . $R(t)$ corresponde ao raio não perturbado da interface fluido-fluido, que muda no tempo durante o levantamento. . . . . | 177 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.2 | Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ como função de $n$ , para $Ca = 1.1 \times 10^{-4}$ e $\delta = 250$ : (a) $b' = 0$ (curva tracejada), $b' = 0.002$ (curva cinza clara) e $b' = b'_c = 0.0039$ (curva cinza escura); (b) $b' = 0$ (curva tracejada), $b' = -0.0017$ (curva cinza). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 182 |
| 7.3 | Padrões gerados pela dinâmica linear de levantamento em $t = 0.7$ para: (a) uma pequena inclinação negativa ( $b' = -0.0017$ ); (b) placas paralelas e (c) inclinação crítica ( $b'_c = 0.0039$ ). Essas simulações lineares incluem 40 modos de Fourier e a mesma fase aleatória. O fluido viscoso está representado em cinza. Essas interfaces resultantes referem-se às situações ilustradas na Fig. 7.2. . . . .                                                                                                                                                                                       | 183 |
| 7.4 | Gradiente de abertura crítico $b'_c$ em função do número de capilaridade $Ca$ para três valores de $\delta$ : 150, 200 e 250. Esse gráfico funciona como um “diagrama de fase” para a estabilidade da interface. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 184 |
| 7.5 | Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função de $n$ , para $Ca = 4 \times 10^{-5}$ e $\delta = 60$ : (a) $b' = 0$ (curva tracejada), $b' = -0.004$ (curva cinza clara) e $b' = -0.006$ (curva cinza escura). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 185 |
| 7.6 | Representação dos padrões no fluxo devido à compressão do fluido em $t = 0.27$ para: (a) placas paralelas ( $b' = 0$ ); (b) um pequeno gradiente ( $b' = -0.004$ ) e (c) um gradiente de abertura com ganitude ligeiramente maior ( $b' = -0.006$ ). A Fig. 7.6(d) ilustra uma sequência de padrões gerados no intervalo $0 \leq t \leq 0.27$ , cuja a interface final corresponde à Fig. 7.6(c). Essas simulações lineares incluem 10 modos de Fourier e as mesmas fases aleatórias. O fluido viscoso está representado em cinza. Essas interfaces referem-se às situações mostradas na Fig. 7.5. . . . . | 186 |
| 7.7 | Modo de Fourier que maximiza a amplitude de perturbação $\zeta_n(t)$ em $t = 0.3$ ( $n_{max}$ ) em função do gradiente de abertura $b'$ , para $Ca = 4 \times 10^{-5}$ e dois valores de $\delta$ : 60 (curva cinza clara) e 100 (curva cinza escura). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 186 |

- 7.8 Representação esquemática (visão lateral) da célula de Hele-Shaw girante modificada por um gradiente na abertura da placa superior, apresentando uma inclinação positiva (a) e uma inclinação negativa (b). Ilustramos o caso em que o fluido denso e viscoso (região cinza) corresponde ao fluido interno. . . . . 187
- 7.9 Taxa de crescimento linear em função de  $n$ , para  $\Omega = 300$  e  $\delta = 200$ : (a)  $b' = 0$  (curva tracejada),  $b' = 0.0015$  (curva cinza) e  $b' = b'_c = 0.0038$  (curva contínua preta); (b)  $b' = 0$  (curva tracejada),  $b' = -0.0028$  (curva cinza). Para guiar melhor o leitor, o máximo das curvas estão explicitamente indicados pelos pequenos círculos. . . . . 191
- 7.10 Padrões da interface resultante do processo de rotação da célula de Hele-Shaw em  $t = 0.5$  para: (a) placas paralelas ( $b' = 0$ ); (b) um pequeno gradiente de abertura ( $b' = 0.0015$ ); e (c) o gradiente de abertura crítico ( $b'_c = 0.0038$ ). Essas simulações incluem 40 modos de Fourier e as mesmas fases aleatórias. O fluido denso está representado pela região cinza. Essas interfaces resultantes referem-se à situação ilustrada na Fig. 7.9(a). . . . . 192
- 7.11 (a) Gradiente de abertura crítico  $b'_c$  em função do número de Bond rotacional  $\Omega$  para três valores de  $\delta$ : 150, 200 e 250; (b) O modo de Fourier que maximiza a taxa de crescimento ( $n_{max}$ ) como função da inclinação  $b'$  para os mesmos valores de  $\delta$  e  $\Omega = 300$ . . . . . 193
- 7.12 Padrões gerados na célula de Hele-Shaw girante em  $t = 0.8$  para: (a) placas paralelas ( $b' = 0$ ), (b) um pequeno gradiente ( $b' = 0.0035$ ) e (c) uma inclinação levemente maior ( $b' = 0.0044$ ). Essas simulações lineares incluem 40 modos de Fourier e as mesmas fases aleatórias. O fluido denso está representado em cinza. Nesse gráfico  $\Omega = 200$ ,  $\delta = 200$  e  $b'_c = 0.0025$ . . 193
- 7.13 Modo de Fourier que maximiza a taxa de crescimento ( $n_{max}$ ) em função da inclinação radial da placa superior  $b'$ , para  $\Omega = 200$  e três valores de  $\delta$ : 150, 200 e 250. . . . . 194

# Sumário

|          |                                                                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                                                                 | <b>24</b> |
| 1.1      | Padrões na natureza: um benefício ou um malefício? . . . . .                                                      | 24        |
| 1.2      | O problema de Saffman-Taylor e processos de controle . . . . .                                                    | 26        |
| 1.2.1    | Instabilidades na célula de Hele-Shaw (HS) . . . . .                                                              | 26        |
| 1.2.2    | Controle das instabilidades em meio poroso . . . . .                                                              | 34        |
| 1.3      | Instabilidades no crescimento de cristais e no processo de descarga elétrica:<br>mecanismos de controle . . . . . | 35        |
| 1.4      | A força de adesão de fluidos complexos: minimização de energia e efeitos<br>de inércia . . . . .                  | 38        |
| 1.5      | Roteiro dos próximos capítulos . . . . .                                                                          | 40        |
| 1.6      | Lista de Publicações . . . . .                                                                                    | 41        |
| <b>2</b> | <b>Determinando o número de onda da instabilidade de Saffman-Taylor: o<br/>método da máxima amplitude</b>         | <b>43</b> |
| 2.1      | Introdução . . . . .                                                                                              | 43        |
| 2.2      | Características gerais do fluxo na célula de Hele-Shaw . . . . .                                                  | 44        |
| 2.2.1    | A lei de Darcy . . . . .                                                                                          | 44        |
| 2.2.2    | As condições de contorno . . . . .                                                                                | 49        |
| 2.3      | Estimando o número de onda da interface no problema de injeção radial . .                                         | 51        |
| 2.3.1    | Análise de estabilidade linear . . . . .                                                                          | 51        |
| 2.3.2    | A estimativa do número de dedos viscosos e a atual discrepância<br>com os experimentos . . . . .                  | 56        |

|          |                                                                                                              |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3.3    | O método da máxima amplitude . . . . .                                                                       | 58         |
| 2.3.4    | A compatibilidade do critério de máxima amplitude com os experi-<br>mentos de Maxworthy . . . . .            | 60         |
| 2.4      | A seleção do número de onda na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável                                   | 66         |
| 2.4.1    | Introdução . . . . .                                                                                         | 66         |
| 2.4.2    | Análise de estabilidade linear . . . . .                                                                     | 67         |
| 2.4.3    | Estimando o número de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw de<br>espaçamento variável . . . . .             | 69         |
| <b>3</b> | <b>Minimização de instabilidades em interfaces de crescimento radial</b>                                     | <b>75</b>  |
| 3.1      | Introdução . . . . .                                                                                         | 75         |
| 3.2      | Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção cons-<br>tante em dois estágios . . . . . | 76         |
| 3.3      | Método variacional de minimização de instabilidades de interfaces . . . . .                                  | 86         |
| 3.3.1    | O método variacional . . . . .                                                                               | 86         |
| 3.3.2    | O método variacional no problema de injeção em Hele-Shaw . . . . .                                           | 88         |
| 3.3.3    | O método de minimização variacional para fluidos complexos em<br>Hele-Shaw . . . . .                         | 96         |
| <b>4</b> | <b>Aplicações do método de minimização variacional</b>                                                       | <b>104</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .                                                                                         | 104        |
| 4.2      | Minimização das instabilidades no fluxo radial em meio poroso . . . . .                                      | 105        |
| 4.3      | Minimização das instabilidades no processo de descarga elétrica . . . . .                                    | 114        |
| 4.4      | Minimização das instabilidades no processo de crescimento de cristais . . . . .                              | 120        |
| <b>5</b> | <b>Força de adesão de fluidos complexos: minimização da energia e efeitos<br/>de inércia</b>                 | <b>127</b> |
| 5.1      | Introdução . . . . .                                                                                         | 127        |
| 5.2      | Cálculo da força de adesão de um fluido não newtoniano incluindo efeitos<br>de inércia . . . . .             | 131        |
| 5.3      | Minimização da energia de adesão . . . . .                                                                   | 138        |

|          |                                                                                      |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3.1    | Caso newtoniano . . . . .                                                            | 141        |
| 5.3.2    | Caso não newtoniano . . . . .                                                        | 143        |
| 5.4      | Efeitos da inércia do fluido na força de adesão . . . . .                            | 145        |
| 5.4.1    | Caso newtoniano . . . . .                                                            | 145        |
| 5.4.2    | Caso não newtoniano . . . . .                                                        | 148        |
| <b>6</b> | <b>Efeitos de inércia nos padrões de dedos viscosos: fluxos retangular e radial</b>  | <b>150</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .                                                                 | 150        |
| 6.2      | Efeitos de inércia: geometria retangular . . . . .                                   | 153        |
| 6.2.1    | Equação diferencial de modos acoplados . . . . .                                     | 153        |
| 6.2.2    | Análise da estabilidade linear . . . . .                                             | 157        |
| 6.2.3    | Análise fracamente não linear: o fenômeno de alargamento e bifurcação . . . . .      | 159        |
| 6.3      | Efeitos de inércia: Geometria radial . . . . .                                       | 162        |
| 6.4      | Efeitos de inércia na célula de Hele-Shaw girante . . . . .                          | 167        |
| 6.4.1    | Análise da estabilidade linear . . . . .                                             | 170        |
| 6.4.2    | Análise fracamente não linear: o fenômeno de competição . . . . .                    | 172        |
| <b>7</b> | <b>Controle dos dedos viscosos via “suave” modificação da geometria de Hele-Shaw</b> | <b>175</b> |
| 7.1      | Introdução . . . . .                                                                 | 175        |
| 7.2      | O controle das instabilidades na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável         | 176        |
| 7.2.1    | Equações básicas e o cálculo da estabilidade linear . . . . .                        | 176        |
| 7.2.2    | Controle geométrico das instabilidades de Saffman-Taylor . . . . .                   | 181        |
| 7.3      | O controle dos dedos viscosos na célula de Hele-Shaw girante . . . . .               | 187        |
| 7.3.1    | Equações básicas e o cálculo da estabilidade linear . . . . .                        | 187        |
| 7.3.2    | Controle geométrico das instabilidades na célula de Hele-Shaw girante                | 190        |
| <b>8</b> | <b>Conclusões e Perspectivas</b>                                                     | <b>195</b> |



|                    |            |
|--------------------|------------|
| <b>Referências</b> | <b>204</b> |
|--------------------|------------|

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Padrões na natureza: um benefício ou um malefício?

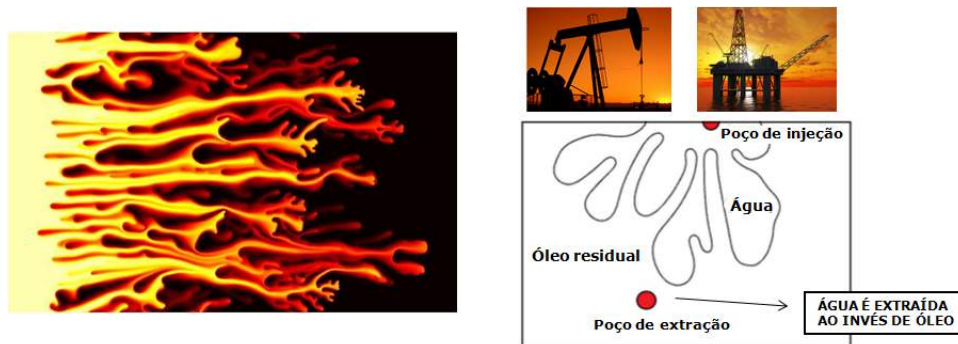


Figura 1.1: À esquerda, visualizamos uma simulação numérica de dedos viscosos na interface entre fluidos miscíveis [1]. À direita, observamos uma ilustração da instabilidade de Saffman-Taylor no processo de extração de petróleo. A água é injetada por um poço, enquanto o óleo é expelido através de um outro poço.

Os padrões gerados na natureza são observados em diversos ramos da ciência: em sistemas físicos, químicos e biológicos [2]. A dinâmica de interfaces que separam duas fases tem uma grande influência na formação espontânea desses padrões. Essa dinâmica determina a forma resultante das estruturas interfaciais e, portanto, desempenha um papel fundamental nas aplicações práticas em diversos campos interdisciplinares: na hidrodinâmica [3] (nos complexos padrões no contorno entre fluidos, Fig. 1.1), na ciência e

tecnologia de materiais [4] (referente ao crescimento dendrítico de cristais), em processos de descargas elétricas [5–7] e na biologia [8,9] (na forma de plantas, células, etc.).

A instabilidade de Saffman-Taylor (conhecida por “dedos viscosos”), sistema mais abordado nesta tese, tem sido estudada ativamente por mais de meio século [10]. Essa instabilidade ocorre quando um fluido de menor viscosidade desloca um fluido de maior viscosidade em um meio poroso ou quando confinados no estreito espaço entre duas placas paralelas, dispositivo conhecido como célula de Hele-Shaw [11]. Nesse processo, a interface entre os fluidos se torna instável e uma estrutura na forma de dedos é observada (Fig. 1.1). Esse sistema representa um arquétipo para a compreensão de fenômenos físicos em várias áreas da ciência e tecnologia. Vale ressaltar que em algumas aplicações práticas essas instabilidades podem ser desejadas ou procuram ser evitadas o máximo possível. No processo de mistura de fluidos miscíveis, por exemplo, essas perturbações otimizam o processo de mistura (ilustração da esquerda na Fig. 1.1), gerando grande interesse na busca de situações que favoreçam essas instabilidades. Por outro lado, é conhecido que na extração de petróleo (óleo muito viscoso) a formação dos dedos viscosos é bastante prejudicial. Nesse processo, água é injetada nas jazidas subterrâneas empurrando o óleo confinado nas rochas porosas em direção a um poço que conduz o petróleo para fora das jazidas (ver ilustração à direita na Fig. 1.1). No entanto, os dedos viscosos se manifestam em grandes escalas de modo a expulsar a água injetada nos reservatórios antes de retirar completamente o óleo entre as rochas.

Dois outros sistemas de origens físicas distintas, cujos padrões da interface receberam uma considerável atenção ao longo dos últimos anos, são: (i) o crescimento dendrítico de um sólido a partir de sua fase fundida [12–24], relacionado à célebre instabilidade de Mullins-Sekerka [25,26] e (ii) o crescimento e propagação de ondas de ionização através de descargas elétricas [5–7,27–30]. Ainda neste capítulo, discutiremos os fenômenos físicos por trás desses processos e veremos que, como no problema de Saffman-Taylor, essas instabilidades não são desejadas em algumas aplicações tecnológicas. Esses dois sistemas e o problema dos dedos viscosos possuem em comum a existência de uma dinâmica de contorno que separa duas fases, no qual a competição de forças estabilizantes e desestabilizantes determinam a evolução dos complexos padrões gerados nesse processo.

Nesta tese abordaremos alguns dos sistemas citados anteriormente e buscaremos compreender os mecanismos físicos por trás dos padrões gerados na dinâmica desses procedimentos. Porém, nosso foco principal será fornecer meios de controlar as instabilidades e eventualmente suprimi-las, visando uma melhor eficiência do processo prático que envolve esses sistemas. Os mecanismos de controle que deduziremos sempre buscarão a simplicidade necessária para possíveis adaptações experimentais e aplicações tecnológicas. Além dos estudos em formação de padrões, vamos elaborar um importante protocolo de controle em problemas de adesão envolvendo fluidos complexos, com objetivo de minimizar a energia dissipada no processo de descolar duas placas sólidas separadas por um filme líquido. O problema de adesão de fluidos será discutido na Seq. 1.10 deste capítulo.

## 1.2 O problema de Saffman-Taylor e processos de controle

### 1.2.1 Instabilidades na célula de Hele-Shaw (HS)

#### Aspectos gerais da célula de HS

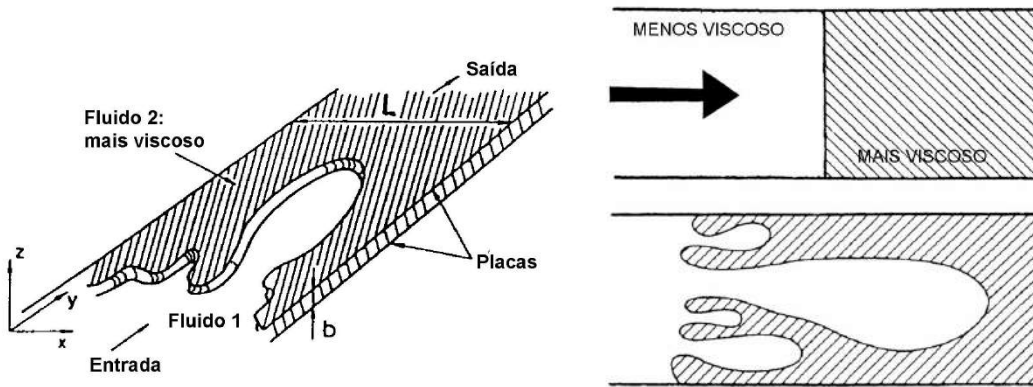


Figura 1.2: Ilustração do fluxo viscoso na célula de Hele-Shaw retangular. Diagrama esquemático das instabilidades na célula de Hele-Shaw de geometria retangular (à direita).

O problema Saffman-Taylor [3] é um dos mais estudados entre os sistemas hidrodinâmicos que apresentam a formação e evolução de padrões. Esse problema ocorre tradicio-

nalmente em uma célula de Hele-Shaw previamente preenchida por um fluido viscoso, com espaçamento  $b$  entre as placas da célula correspondendo ao menor comprimento do sistema ( $b \approx 1$  mm), de modo que o fluxo é efetivamente bidimensional. Duas geometrias básicas da célula de Hele-Shaw são amplamente estudadas: a retangular, ilustrada na Fig. 1.2 (fluxo longitudinal, fluido menos viscoso injetado ao longo do plano da célula) [3,31–36] e a radial, representada no painel superior da Fig. 1.3 (fluido menos viscoso injetado por um furo no centro da célula) [37–42]. A hidrodinâmica em Hele-Shaw é governada pela lei de Darcy (velocidade proporcional ao gradiente de pressão do fluido) [3,10,31–42]. Durante o fluxo, qualquer perturbação no contorno entre os fluidos gera a formação de pequenas ondulações na interface, provocando um aumento do gradiente de pressão na ponta dessas ondulações. Dessa forma, essa região adquire uma maior velocidade e uma estrutura na forma de dedo é formada. Por outro lado, caso esse dedo viscoso cresça afinando sua extremidade (aumentando sua curvatura), a tensão superficial entre os fluidos forçará a estabilização dessa perturbação. Portanto, a interação entre forças viscosas e tensões superficiais determina a dinâmica e a forma da interface fluido-fluido.

Como vemos na Fig. 1.2, no fluxo de geometria retangular os dedos viscosos competem entre si e, por fim, atingem um estágio estacionário onde uma estrutura de um único dedo é observada. Por outro lado, na dinâmica de geometria radial (ilustração superior da Fig. 1.3) o mecanismo morfológico predominante é a bifurcação dos dedos durante toda a evolução da interface, de modo que nenhum estado estacionário é alcançado. Além disso, dependendo do espaçamento das placas da célula de Hele-Shaw e das propriedades físicas dos fluidos (viscosidade, tensão superficial), podemos observar estruturas bastante ramificadas produzidas principalmente por sucessivas bifurcações dos dedos viscosos (imagem à esquerda na Fig. 1.4) [45,46]. Vale ressaltar que o fluxo inverso, no qual o fluido mais viscoso desloca o menos viscoso, é estável e a interface fluido-fluido permanece plana na geometria retangular e evolui circularmente na geometria radial.

Uma interessante variação do problema de Saffman-Taylor usual é obtida se, ao invés de injetarmos um fluido menos viscoso, levantarmos a placa superior da célula de Hele-Shaw mantendo a placa inferior fixa, com um fluido viscoso previamente confinado na célula (painel inferior da Fig. 1.3) [44,47–61]. As características da célula são as mesmas

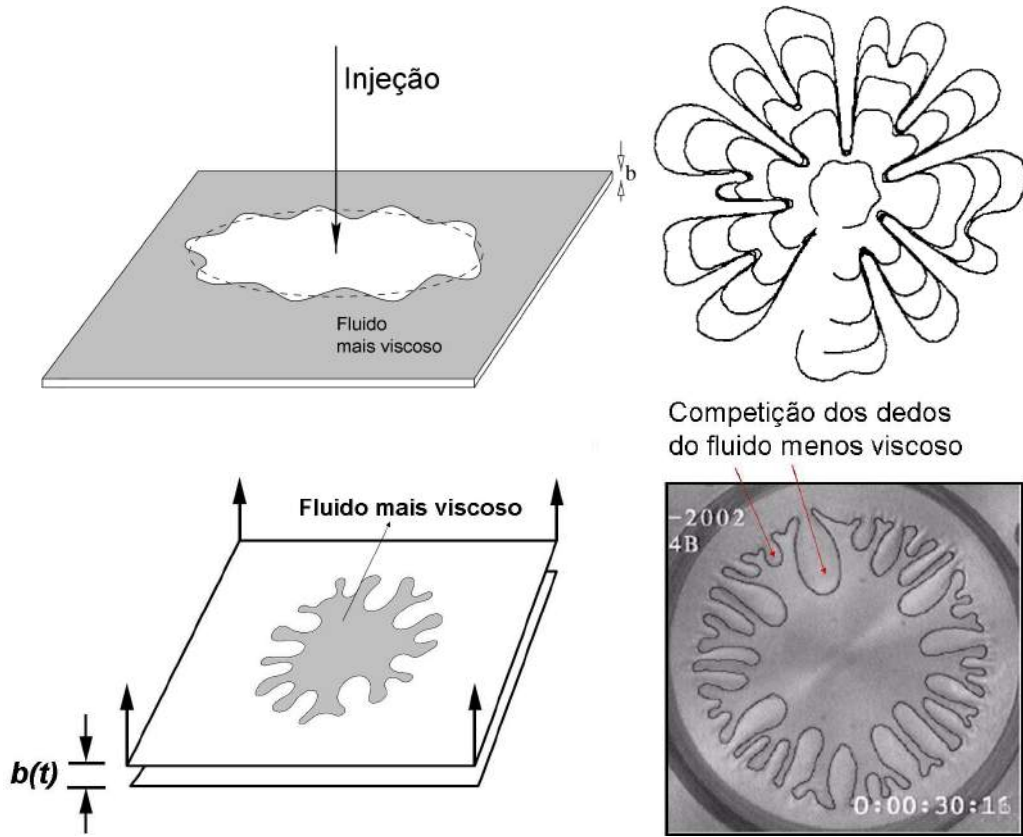


Figura 1.3: Figura esquemática da injeção radial em Hele-Shaw (ilustração superior à esquerda). Na figura superior à direita, temos um experimento que ilustra a evolução temporal dos padrões obtidos na injeção na célula de Hele-Shaw radial [43]. Figura esquemática da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável (ilustração inferior à esquerda). Na figura inferior à direita, visualizamos um experimento que ilustra a competição dos dedos do fluido menos viscoso que se desloca em direção ao centro da placa [44].

discutidas anteriormente, porém com espaçamento entre as placas  $b = b(t)$  dependente do tempo. À medida que a placa se desloca, o fluido externo e menos viscoso (por exemplo, ar) desloca o fluido interno em direção ao centro da célula, gerando uma estrutura bastante peculiar. No início da dinâmica, é observado um grande número de dedos na interface e uma intensa competição entre eles (Fig. 1.3). Em seguida, os dedos que dominam a competição se tornam mais largos, o número de dedos da interface diminui e, eventualmente, a interface se recirculariza. Esse processo também é observado no teste de adesão de fluidos confinados, como veremos mais adiante.

Mecanismos de predição morfológica na formação de padrões são de grande interesse no estudo da dinâmica de interfaces instáveis. De fato, o critério para determinar o número

de onda dominante (ou número de dedos) de padrões incentivou inúmeras investigações teóricas e experimentais, como por exemplo, no fluxo de Taylor-Couette [62], na convecção de Rayleigh-Bénard [63], em processos de solidificação direcional [64], na instabilidade de Rayleigh-Taylor [65] e no problema de Saffman-Taylor [3]. Nesse contexto, vamos responder uma pergunta bastante fundamental sobre essas instabilidades hidrodinâmicas: como podemos estimar o número de dedos viscosos da interface fluido-fluido? Apesar desse questionamento ser motivado pelo problema específico de Saffman-Taylor, a resposta a essa pergunta, que daremos no Cap. 2, será respondida independentemente do sistema físico que envolve uma interface instável.

### O controle das instabilidades na célula de HS

A instabilidade de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw tornou-se um protótipo para a compreensão de fenômenos mais complexos envolvendo a formação de padrões. Como discutido anteriormente, uma das situações práticas mais importantes relacionadas a esta instabilidade é o processo de recuperação de petróleo. Curiosamente, o comportamento dinâmico do fluxo na célula de Hele-Shaw é descrito por equações similares aos modelos teóricos mais simples para o fluxo em meios porosos [10]. Sabe-se também que os dedos viscosos têm um caráter potencialmente prejudicial em separação cromatográfica [66,67], em processos de revestimentos por rotação (*spin coating*) [68,69] e em testes de adesão (diminuindo a força adesiva de fluidos) [44,60]. Portanto, esses exemplos emblemáticos ilustram a importância para a ciência e tecnologia de compreender a dinâmica desses processos e desenvolver meios de controlar e até mesmo suprimir o crescimento dos dedos viscosos na célula de Hele-Shaw.

Uma recente área de pesquisa visa promover estratégias para o controle das instabilidade de dedos viscosos. Devido a sua relevância acadêmica e prática, este tema específico tem atraído a atenção de engenheiros, físicos e matemáticos [42,61,71–85]. Um primeiro conjunto de investigações foca em controlar o número de dedos na interface, evitando ramificações e complexas estruturas, através do ajuste adequado da taxa de injeção de fluido [42,71,74,75]: ao invés de usar a habitual taxa de bombeamento constante  $Q$  (área coberta por unidade de tempo pelo fluido injetado), que resulta na proliferação

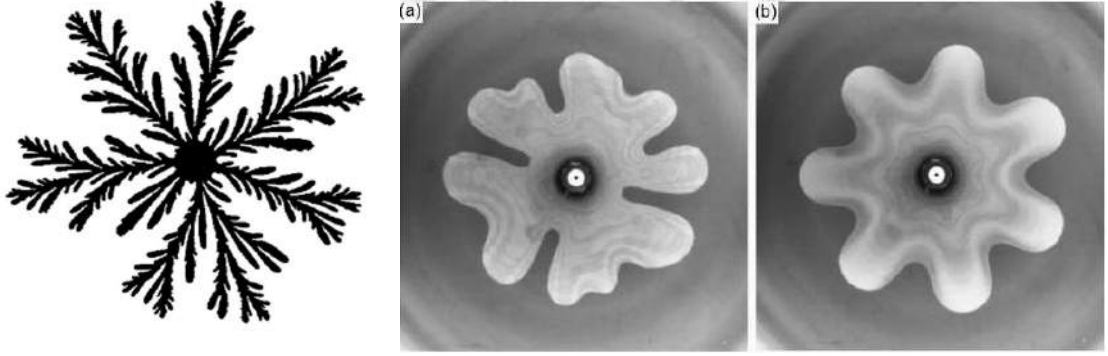


Figura 1.4: À esquerda, observamos um experimento da injeção radial em Hele-Shaw. Ilustração de uma interface intensamente ramificada de um sistema bastante instável [70]. À direita, estão ilustrados padrões experimentais gerados na célula de Hele-Shaw radial: (a) injeção constante e (b) injeção que escala no tempo com expoente  $-1/3$  [71] com  $C(7)$ .

de dedos, estes estudos empregam um fluxo de injeção dependente do tempo na forma  $Q(t) = C(n_{max})t^{-1/3}$ , onde  $C(n_{max})$  é uma função que determina o número de dedos  $n_{max}$  da interface [42]. Embora esse processo não seja capaz de eliminar os distúrbios gerados na interface, ele oferece uma útil maneira de preestabelecer e controlar a morfologia dos padrões, evitando o aparecimento inconveniente de ramificações da interface (veja Fig. 1.4).

Uma segunda linha de pesquisa [76–85] busca mecanismos que são capazes não só de conter a ramificação dos padrões, mas que também tentam inibir o crescimento dos dedos viscosos. Nesse contexto, o objetivo é permitir a propagação da interface mantendo uma forma estável. Esse tipo de controle foi bem sucedido em duas maneiras distintas. Uma dessas maneiras corresponde a um dos principais resultados desta tese e será abordado no Cap. 3: esse protocolo consiste em obter uma taxa de injeção dependente do tempo que permita o crescimento da interface fluido-fluido, porém inibindo o desenvolvimento dos dedos viscosos. Mais especificamente, desejamos injetar uma certa quantidade de fluido em um dado intervalo de tempo sem gerar instabilidades, apenas manipulando a taxa de injeção (ver Fig. 1.5) [76,77,86]. Considerando as possibilidades infinitas de taxas de injeção, vemos que esse problema é definitivamente não trivial. A relevância desse resultado é em parte por ser simples a implementação experimental e pela real possibilidade de aplicações tecnológicas. Nesse contexto, veremos que a eficácia de nosso simples, mas não



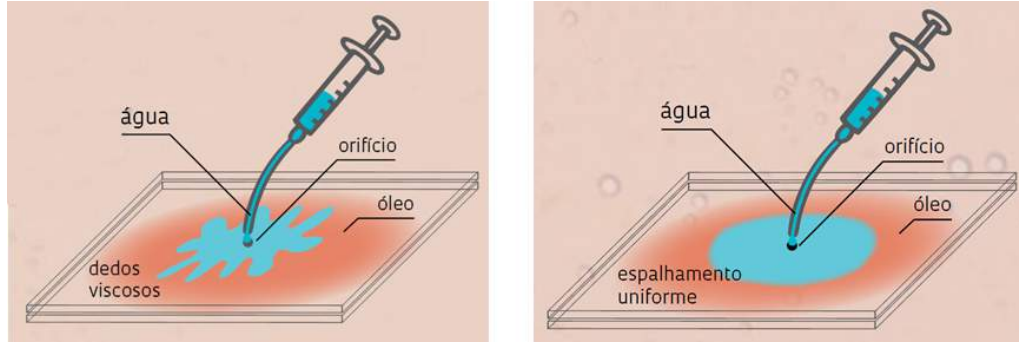


Figura 1.5: Fluido de baixa viscosidade injetado a uma taxa constante em um óleo viscoso cria instabilidades na fronteira entre os fluidos (à esquerda). A bolha de água ganha uma forma de dedos viscosos. À direita, temos a ilustração de uma taxa de injeção dependente do tempo que inibe os dedos viscosos e que mantém a mesma taxa de injeção média de fluido em relação ao caso de injeção constante. Figura retirada de uma reportagem da Revista Pesquisa Fapesp na edição de Nov/2012 [86] sobre nosso periódico da Ref. [77].

trivial, mecanismo de controle foi comprovada por experimentos e simulações numéricas em estágios bem avançados e fortemente não lineares da dinâmica [77].

O segundo protocolo de estabilização [78, 79] propõe uma modificação na estrutura tradicional da célula de Hele-Shaw, substituindo a placa superior por uma membrana elástica [Fig. 1.6(a)]. Nesse caso, as instabilidades da interface são inibidas devido às deformações da membrana que reduz o gradiente de pressão desestabilizante na ponta dos dedos. Nessa mesma linha de pensamento, investigações adicionais [80–83] mostraram que apenas a introdução de uma pequena inclinação na abertura entre as placas (declive ou aclave da placa superior) pode suprimir as instabilidades de dedos viscosos na interface fluido-fluido [Fig. 1.6(b)]. O mecanismo de estabilização dominante é devido à dependência espacial da curvatura transversal da interface (isto é, efeitos de capilaridade). Dando continuidade a esse método, no final desta tese (Cap. 8) consideraremos uma célula de Hele-Shaw com um pequeno gradiente de abertura e, com isso, promoveremos o controle das instabilidades dos dedos viscosos no problema da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável e nas instabilidades geradas na célula de Hele-Shaw girante [84,85]. Esse segundo sistema será detalhadamente explicado no Cap. 6.

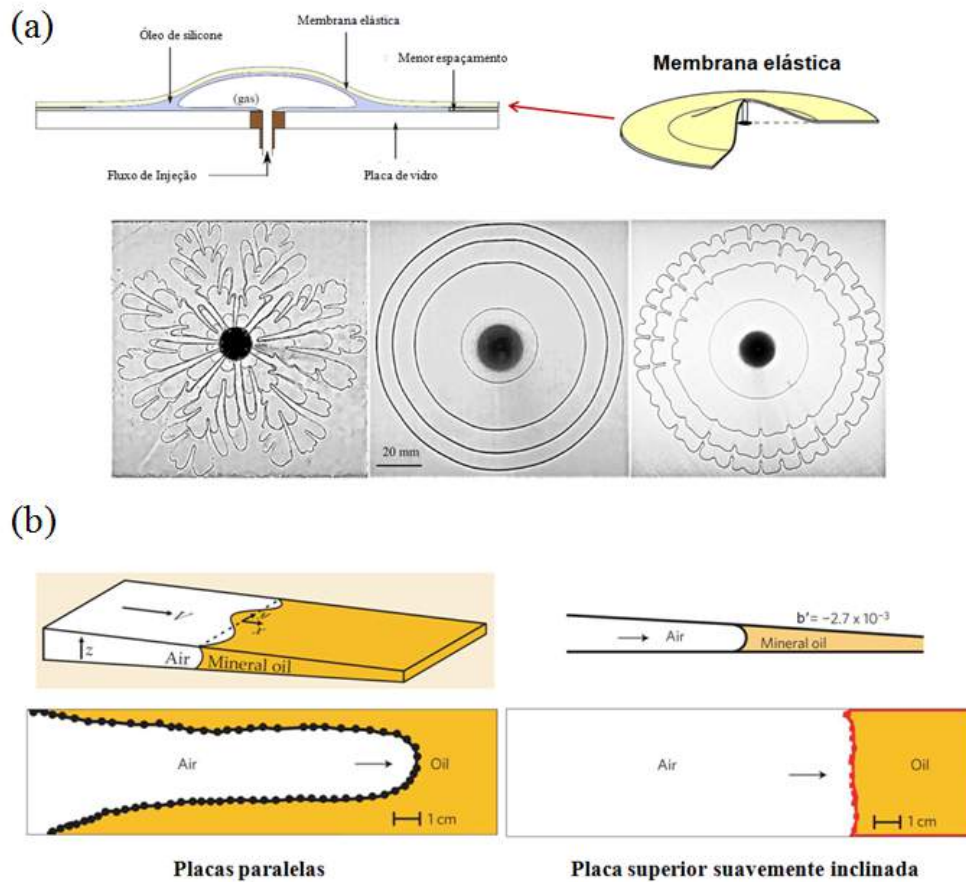


Figura 1.6: (a) Ilustração de uma célula de Hele-Shaw modificada, onde a placa superior é substituída por uma membrana elástica [78]. Os padrões de geometria radial da esquerda pra direita estão representados na seguinte ordem: placa rígida, membrana elástica (supressão das instabilidades) e membrana elástica de maior rigidez. (b) Representação da célula retangular com um pequeno gradiente de abertura. À esquerda está ilustrado um padrão em estágio estacionário com uma grande deformação. À direita vemos a completa supressão do dedo viscoso [81].

### O controle das instabilidades em HS com fluidos complexos

No contexto da tese, os fluidos complexos (ou fluidos não newtonianos) são caracterizados pela não linearidade entre as tensões de cisalhamento nas quais estão submetidos e a sua taxa de deformação. É conhecido que as propriedades reológicas de fluidos não newtonianos exercem efeitos importantes sobre a forma dos padrões interfaciais no fluxo em Hele-Shaw [55, 57, 87–107]. Experimentos envolvendo fluidos não newtonianos, como por exemplo soluções poliméricas, cristais líquidos, argilas e espumas, revelam padrões morfológicos com formas de flocos de neve [87] e estruturas apresentando “fraturas” [89, 90].

Vale ressaltar que os estudos discutidos anteriormente, que tentam controlar o número de dedos resultantes na interface [42, 71, 74, 75] ou que visam suprimir e minimizar as perturbações na interface fluido-fluido [76–85], sempre consideram o fluxo de fluidos *newtonianos*. Devido à relevância científica e prática dos fluidos não newtonianos, ainda no Cap. 3 aplicaremos o método de supressão via manipulação da taxa de injeção para fluidos cuja viscosidade depende do cisalhamento por uma lei de potência [108]. Esses tipos de fluidos são conhecidos por fluidos *power law*.

### Efeitos de inércia nas instabilidades em HS

Na hidrodinâmica, o papel da inércia pode ser quantificado pelo número de Reynolds (medida relativa das forças inerciais em relação às forças viscosas). No fluxo em Hele-Shaw esse parâmetro é proporcional à separação entre as placas, densidade do fluido, velocidade do fluxo e inversamente proporcional à viscosidade. Por outro lado, a grande maioria dos trabalhos experimentais e teóricos sobre a instabilidade de Saffman-Taylor abordam o fluxo na célula de Hele-Shaw com espaçamento entre as placas muito pequeno e considera o deslocamento de fluidos com alta viscosidade, de modo que o número de Reynolds é praticamente nulo e os efeitos inerciais podem ser negligenciados. Dessa maneira o sistema é descrito pela lei de Darcy usual. No entanto, correções da lei de Darcy e análises experimentais foram realizadas por alguns grupos de pesquisa que examinaram situações em que o papel da inércia é relevante [109–113]. No Cap. 6 desenvolveremos uma teoria perturbativa fracamente não linear para prever os resultados experimentais obtidos na Ref. [112] e extrair mais informações a respeito da estabilidade linear do sistema inercial [114, 115]. A compreensão do papel da inércia abre um leque para estender nossos protocolos de controle em modelos teóricos mais completos.

### 1.2.2 Controle das instabilidades em meio poroso

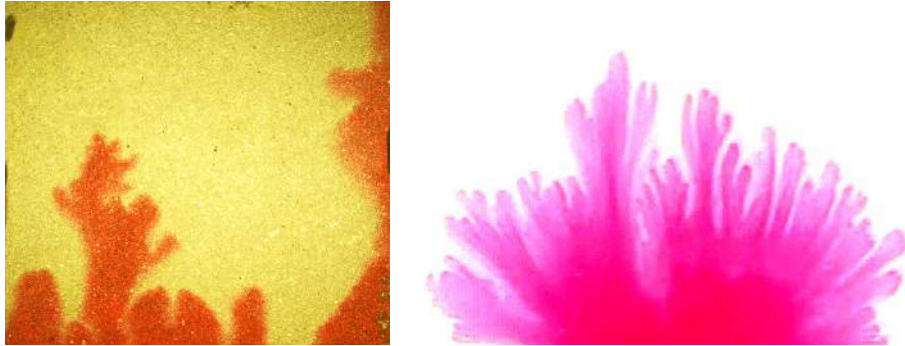


Figura 1.7: Figura à esquerda: padrões gerados no deslocamento longitudinal de óleo mineral através de pentano em um meio poroso. Figura à direita: dedos viscosos gerados durante o deslocamento radial de óleo mineral por querosene em um meio poroso [116].

Existem vários trabalhos que tentam inibir a formação de dedos viscosos em meios porosos visando a otimização da eficiência no processo de extração de petróleo [117–125]. Um dos métodos mais comuns é realizado através da injeção de um polímero no reservatório poroso antes do processo de deslocamento do óleo por meio do bombeamento de água. Mantendo esses fatos em mente, consideraremos a teoria de Chuoke *et al.* [126] para o fluxo em um meio poroso tridimensional uniforme e deduziremos uma equação dinâmica linear para a interface que separa dois fluidos imiscíveis com diferentes viscosidades. Porém, diferentemente dos trabalhos encontrados na literatura que visam estabilizar as perturbações da interface, no Cap. 4 utilizaremos o método de minimização dos dedos viscosos, discutido para o fluxo na célula de Hele-Shaw, que utiliza uma taxa de injeção dependente do tempo [127]. Essa extensão natural do protocolo de estabilização para o fluxo em Hele-Shaw é tecnologicamente importante devido a sua maior similaridade ao processo real de extração de petróleo.

## 1.3 Instabilidades no crescimento de cristais e no processo de descarga elétrica: mecanismos de controle

### Formação de cristais: processo de solidificação

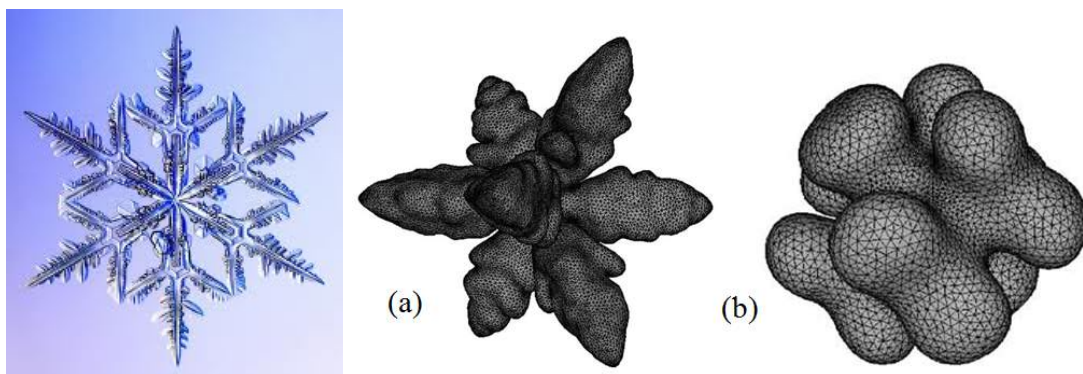


Figura 1.8: (a) Interface resultante do crescimento de um cristal tridimensional, cuja temperatura longe da interface sólido-líquido foi mantida constante. Note a estrutura dendrítica similar à foto à esquerda de um cristal convencional. (b) Interface final utilizando um fluxo de calor que controla o número de dedos emergentes e, conseqüentemente, inibe efeitos dendríticos não lineares. Simulações extraídas da Ref. [20].

Ainda no Cap. 4 estudaremos a formação de padrões no crescimento de cristais [25], focando no exemplo mais simples de solidificação de uma substância pura a partir de sua fase líquida [12, 13, 25, 26]. No modelo termodinâmico convencional, o mecanismo físico fundamental é a difusão de calor latente liberado na interface entre as fases líquida e sólida. Quando o sólido desenvolve uma deformação na interface, invadindo a fase líquida, essa região se depara com um gradiente de temperatura maior. Esse processo resulta em uma maior difusão de calor latente para a fase líquida na região perturbada e, portanto, ocasionando o crescimento mais rápido do sólido na região deformada. Por outro lado, se a perturbação se torna muito afilada (aguda), ela tende a derreter de volta por causa da tensão superficial (a temperatura de fusão de um sólido é reduzida proporcionalmente a sua curvatura [12, 13, 25, 26]). Em geral, a competição entre esses efeitos estabilizante e desestabilizante leva a um processo morfologicamente instável, produzindo estruturas como flocos de neve (ver foto à esquerda na Fig. 1.8).

Além dessas duas contribuições fundamentais, um outro importante efeito deve ser levado em consideração, a anisotropia do cristal. A energia média de ligação dos átomos na interface depende da orientação da interface em relação aos eixos de simetria interna do cristal. Portanto, a inclusão dessa anisotropia é necessária na dinâmica do contorno entre as fases sólida e líquida, induzindo o crescimento dendrítico típico no processo de solidificação (foto ilustrada na Fig. 1.8). De posse dos diversos estudos existentes sobre dinâmica de solidificação, estudaremos protocolos de estabilização em crescimento de cristais bidimensionais e tridimensionais.

Apesar de seu encanto visual e considerável interesse acadêmico, o surgimento de padrões com formas complexas não é sempre desejável em crescimento de cristais, como por exemplo, em processos de moldagem de cristais [22], em que é vantajoso prevenir a formação de dendritos. Nesse contexto, as Ref. [20, 22] propuseram uma dependência temporal para o fluxo de calor induzido que controla o número de dedos nas solidificações bidimensional e tridimensional e inibe os efeitos dendríticos não lineares [ver Fig.1.8(a) e (b)], da mesma maneira que a taxa de injeção que escala no tempo com expoente  $-1/3$  controla o número de dedos na interface fluido-fluido na célula de Hele-Shaw. Como podemos ver, o interesse pelo controle de instabilidades na interface entre duas fases vai além da tentativa de estabilizar a formação dos dedos viscosos. Nesse contexto, no Cap. 4 adaptaremos um dos protocolos de controle aplicados no fluxo em Hele-Shaw para minimizar as instabilidades geradas no processo de solidificação [128].

### Propagação de ondas de ionização em descargas elétricas

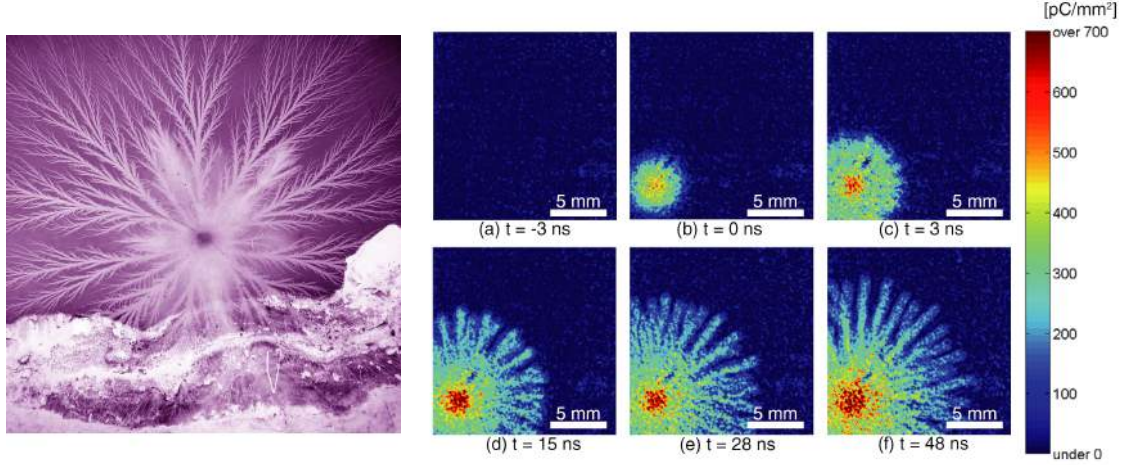


Figura 1.9: À esquerda, temos uma foto de uma região plasmática bastante complexa gerada por uma descarga elétrica. À direita, visualizamos um experimento realizado na Ref. [129] que ilustra a evolução temporal da distribuição de carga em uma descarga gerada por uma alta diferença de potencial aplicada no centro dos padrões.

É bem conhecido que durante o processo de descarga elétrica são observados padrões bem parecidos com as interfaces dendríticas do processo de solidificação discutido na seção anterior [ver Fig. 1.9]. Apesar do processo de descarga elétrica ser um fenômeno bastante complexo, com processos químicos e radiativos envolvidos, o início da dinâmica pode ser descrito de maneira simples. A descarga elétrica em um meio dielétrico ocorre quando esse meio é exposto a uma grande diferença de potencial. Se o campo elétrico criado por esse gradiente de potencial é suficientemente grande, um único elétron livre (desprendido por algum agente externo) viajando na presença desse campo adquire grandes velocidades de tal forma a ionizar o gás através de colisões com suas moléculas. Esse processo gera o movimento acelerado de mais elétrons livres e que geram outras colisões, iniciando uma reação de ionização em cadeia, chamada usualmente de “avalanche eletrônica”. Essa distribuição de cargas no dielétrico devido às moléculas ionizadas gera campos elétricos adicionais que promovem novas avalanches em outras direções, formando uma descarga na forma de dedos, conhecida como *streamers*.

A dinâmica de propagação de streamers foi recentemente descrita na Ref. [5] utilizando o modelo eletrohidrodinâmico de Taylor-Melcher [130] adaptado adequadamente para o

## 1.4 A força de adesão de fluidos complexos: minimização de energia e efeitos de inércia

processo de descarga elétrica. Nesse contexto, forças estabilizantes atuam na frente de propagação da descarga elétrica devido à difusão de elétrons, enquanto forças devido ao campo elétrico do meio tendem a desestabilizar a interface. Finalmente, é bem conhecido que muitas técnicas industriais seriam otimizadas se a formação das instabilidades no processo de descarga elétrica fossem evitadas [7], como por exemplo, em processos químicos de gases, lasers e em procedimentos de purificação de água. Portanto, percebemos mais uma vez que é de grande importância tecnológica e científica investigar meios de controlar, minimizar e possivelmente suprimir o crescimento de instabilidades na interface plasma-dielétrico. Nesse contexto, o mesmo método de minimização utilizado no problema de Saffman-Taylor e em crescimento de cristas será adaptado na propagação de ondas de ionização [128].

## 1.4 A força de adesão de fluidos complexos: minimização de energia e efeitos de inércia

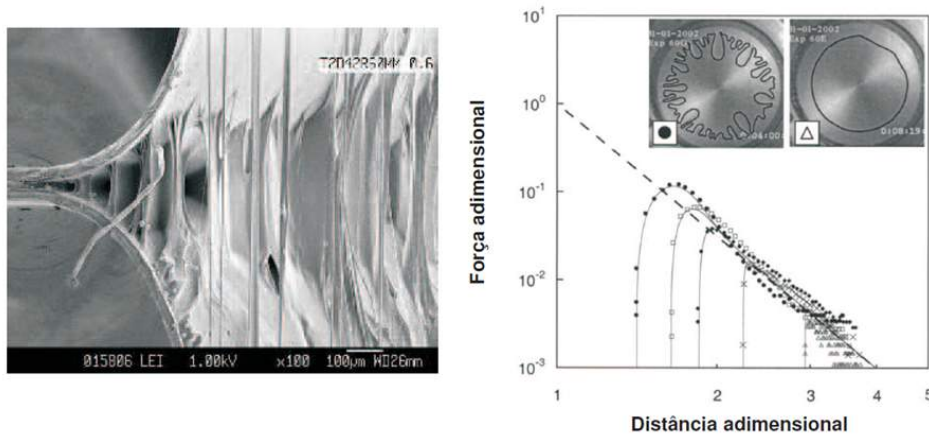


Figura 1.10: À esquerda: imagem de descolamento de um adesivo convencional sensível à pressão, obtida através de microscopia eletrônica de varredura [131]. A propriedade de grande adesão do material se origina na formação das complexas estruturas fibrilares mostradas na figura. À direita: curvas de força-distância num gráfico log-log para diferentes valores de espaçamento inicial para um fluido newtoniano [132]

A compreensão detalhada de processos de adesão é deveras complicada devido à complexidade inerente dos materiais adesivos típicos. Adesivos convencionais apresentam



propriedades reológicas bastante complexas, as quais muitas delas ainda não são totalmente compreendidas (ver ilustração à esquerda na Fig. 1.10) [133, 134]. Para contornar parte dessas dificuldades, e ainda obter *insights* sobre algumas propriedades adesivas, pesquisadores voltaram suas atenções para fenômenos de adesão em fluidos viscosos [44, 54–56, 132, 135–143]. Uma grande variedade de fluidos tem sido utilizada em estudos teóricos e experimentais, desde líquidos newtonianos simples a fluidos não newtonianos mais complexos (shear-thinning, shear-thickening, yield-stress, ferrofluidos e fluidos magnetoreológicos). Um aspecto comum em todos estes diferentes estudos é a necessidade de avaliação e caracterização da força de adesão de líquidos espacialmente confinados. Esse tipo de análise é fornecida pelo teste de adesão conhecido como *probe-tack test* [144, 145].

Na versão convencional do probe-tack test [144, 145], uma amostra de fluido é confinada entre duas placas paralelas e, então, a placa superior é levantada verticalmente com deslocamento  $L(t)$ , cuja dependência temporal é preestabelecida pelo motor do dispositivo. Durante o levantamento da placa superior, o dispositivo mede a força necessária para descolar as placas. Esse comportamento do fluido semelhante a uma cola é devido ao elevado atrito interno que dissipa energia durante o fluxo devido à separação das placas. Note que esse processo é similar ao experimento em Hele-Shaw de espaçamento variável discutido anteriormente (veja os padrões à direita na Fig. 1.10). O resultado do probe-tack test é uma curva “força-deslocamento” ( $F$  vs.  $L$ ) que quantifica a resposta adesiva da amostra de fluido em função do deslocamento do aparato (curva ilustrada à direita na Fig. 1.10). No Cap. 5, abordaremos uma questão que foi amplamente negligenciada entre os pesquisadores dessa área. Essa questão se refere à maneira ideal de separação das placas do dispositivo de modo que a energia de adesão dissipada seja minimizada. A solução desse problema além de fornecer uma maneira prática de economizar energia, fornece a possibilidade de descolar as placas utilizando uma força significativamente reduzida [146]. Isso nos leva a uma importante aplicação tecnológica: a possibilidade de medir forças de adesão evitando fraturas da amostra, processo indesejado que ocorre nos testes que utilizam velocidade constante e, conseqüentemente, exigem muita força para descolar as placas.

## 1.5 Roteiro dos próximos capítulos

- No Cap. 2, deduziremos um novo método para determinar o número de onda dominante na interface fluido-fluido. Mostraremos que esse método concorda muito bem com os resultados experimentais para o problema de injeção na célula de Hele-Shaw [147] e para a célula de Hele-Shaw de espaçamento variável [148].

- No Cap. 3, iremos propor dois métodos de minimização das instabilidades de Saffman-Taylor. O primeiro método constitui em um processo de injeção de dois estágios [76]. O segundo método, a partir de um cálculo variacional, visa obter uma taxa de injeção ideal que minimize as deformações da interface [77]. Também aplicaremos esse segundo método para fluidos não newtonianos [108]. Ambos os protocolos foram comprovados por sucessivas análises experimentais.

- No Cap. 4, aplicaremos o método de minimização deduzido no Cap. 3 a fim de inibir instabilidades em sistemas de importância científica e tecnológica: fluxos em meio poroso [127], crescimento de cristais e processos de descargas elétricas [128].

- No Cap. 5, estudaremos o problema de adesão de fluidos complexos. Deduziremos um protocolo variacional que nos informa a dependência temporal ideal para o perfil de afastamento das placas que confinam o fluido a fim de minimizar a energia dissipada no processo de descolagem [146]. Esse método é aplicado também para fluidos não newtonianos. Além disso, investigaremos o efeito da inércia do fluido na força de adesão [149].

- No Cap. 6, continuaremos estudando o efeito da inércia do fluido, porém agora nas instabilidades de Saffman-Taylor: na injeção na célula de Hele-Shaw radial e retangular [115], e no fluxo gerado pela rotação da célula de Hele-Shaw [114].

- No Cap. 7, deduziremos um método alternativo de controlar as instabilidades da interface no fluxo na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável [85] e na célula de Hele-Shaw girante [84]. Esse protocolo consiste em adicionar uma suave inclinação na placa superior da célula. Verificaremos que por esse método conseguimos suprimir completamente os dedos viscosos e ainda gerar instabilidades em situações originalmente estáveis.

- No Cap. 8, apresentaremos as conclusões de nossos resultados e perspectivas de trabalhos futuros.

## 1.6 Lista de Publicações

Durante a realização deste doutorado, nossa pesquisa resultou na publicação dos artigos científicos listados abaixo:

1. João V. Fontana, Eduardo O. Dias, e José A. Miranda, *Controlling and minimizing fingering instabilities in non-Newtonian fluids*, Physical Review. E, **89**, 013016 (2014).
2. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Minimization of instabilities in growing interfaces: A variational approach*, Physical Review. E, **88**, 062404 (2013).
3. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Determining the number of fingers in the lifting Hele-Shaw problem*, Physical Review E, **88**, 043002 (2013).
4. Eduardo O. Dias, *Viscous-fingering minimization in uniform three-dimensional porous media*, Physical Review E, **88**, 063007 (2013).
5. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Wavelength selection in Hele-Shaw flows: A maximum-amplitude criterion*, Physical Review. E, **88**, 013016 (2013).
6. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Taper-induced control of viscous fingering in variable-gap Hele-Shaw flows*, Physical Review. E, **87**, 053015 (2013).
7. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Control of centrifugally driven fingering in a tapered Hele-Shaw cell*, Physical Review E, **87**, 053014 (2013).
8. Eduardo O. Dias, Enrique Alvarez-Lacalle, Márcio S. Carvalho e José A. Miranda, *Minimization of Viscous Fluid Fingering: A Variational Scheme for Optimal Flow Rates*, Physical Review Letters, **109**, 144502 (2012).

9. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Variational scheme towards an optimal lifting drive in fluid adhesion*, Physical Review. E, **86**, 046322 (2012).
10. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Effect of fluid inertia on probe-tack adhesion*, Physical Review. E, **85**, 016312 (2012).
11. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Influence of inertia on viscous fingering patterns: Rectangular and radial flows*, Physical Review E, **83**, 006312 (2011).
12. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Inertial effects on rotating Hele-Shaw flows*, Physical Review E, **83**, 046311 (2011).
13. Eduardo O. Dias, Fernando Parísio e José A. Miranda, *Suppression of viscous fluid fingering: A piecewise-constant injection process*, Physical Review. E, **82**, 067301, (2010).
14. Eduardo O. Dias e José A. Miranda, *Finger tip behavior in small gap gradient Hele-Shaw flows*, Physical Review E, **82**, 056319 (2010).

## Capítulo 2

# Determinando o número de onda da instabilidade de Saffman-Taylor: o método da máxima amplitude

### 2.1 Introdução

Vamos iniciar nosso estudo de interfaces instáveis com a famosa instabilidade hidrodinâmica de Saffman-Taylor [3]. Sabemos do Cap. 1 que quando um fluido menos viscoso desloca um fluido mais viscoso no estreito espaço entre duas placas paralelas, dispositivo conhecido como célula de Hele-Shaw, a interface entre os fluidos é instável e observamos a formação dos dedos viscosos [10]. Nesse contexto, a evolução dinâmica da interface é descrita pela lei de Darcy juntamente com duas condições de contorno [3, 10, 37, 41, 45, 46, 74, 126, 150–154]: diferença de pressão entre as regiões ocupadas pelos fluidos na interface e a condição de continuidade da velocidade normal à interface na região de contorno entre os fluidos.

Durante os últimos anos, vários aspectos intrigantes do problema dos dedos viscosos têm sido abordados por um crescente grupo de pesquisadores [1, 42, 77, 78, 81]. Contudo, uma importante questão permanece não resolvida: as atuais previsões teóricas [3, 37, 126, 150, 151] que estimam o número de dedos na interface fluido-fluido não estão em

completa conformidade com os dados experimentais existentes. Essa discrepância foi claramente exposta por Maxworthy [35] em uma série de meticolosos experimentos. Neste capítulo, nós propomos uma maneira alternativa para selecionar o número típico de dedos da interface. Mostraremos a seguir que esse novo método proporciona uma excelente concordância com os dados experimentais realizados por Maxworthy.

Antes de abordar o problema de seleção do número de onda, devemos rever algumas características e equações básicas para o fluxo na célula de Hele-Shaw. Entre elas estão a lei de Darcy e as condições de contorno da interface.

## 2.2 Características gerais do fluxo na célula de Hele-Shaw

### 2.2.1 A lei de Darcy

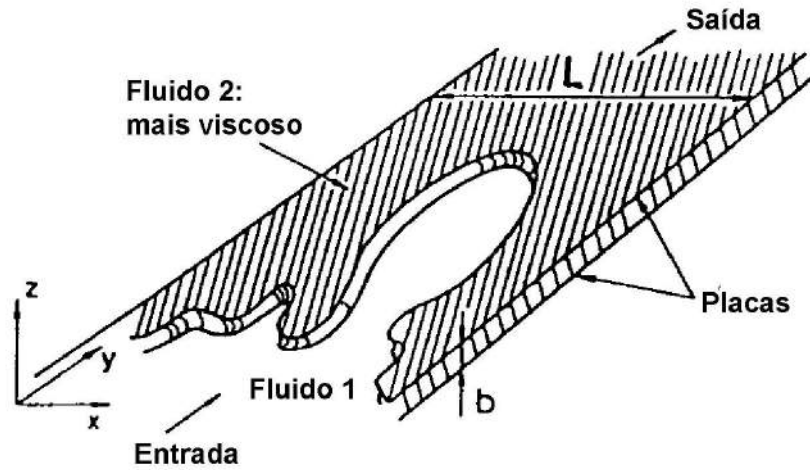


Figura 2.1: Figura esquemática do fluxo viscoso na célula de Hele-Shaw retangular.

Nesta seção, vamos obter uma equação fundamental do nosso trabalho, a lei de Darcy [155], que fornece a dinâmica de fluidos confinados na célula de Hele-Shaw. A lei de Darcy foi primeiro apresentada como uma relação empírica baseada nos experimentos de fluxos estáveis em uma coluna vertical de areia. Em 1856, Henry Darcy investigou

o fluxo de água em filtros de areia verticais e homogêneos usados para filtrar a água nas fontes públicas da cidade de Dijon, França, e observou que o fluxo de velocidade é proporcional ao gradiente de pressão aplicado. Utilizando a célula de Hele-Shaw podemos estudar experimentalmente a versão bidimensional da lei encontrada por Darcy em seus experimentos. A fim de obter a lei de Darcy, considere dois fluidos imiscíveis confinados no espaço estreito  $b$  entre as placas de uma célula de Hele-Shaw, como mostrado na Fig. 2.1. Vamos assumir que  $b$  é o menor comprimento existente e, portanto, o problema pode ser considerado efetivamente bidimensional. Uma pressão é aplicada em uma das extremidades da célula, empurrando o fluido menos viscoso 1 no fluido mais viscoso 2. Considere a largura da célula  $L$  e o fluxo no plano  $x - y$ .

A conservação de massa dos fluidos é dada pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_j \mathbf{u}_j) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $\rho_j$  e  $\mathbf{u}_j$  são a densidade e velocidade tridimensional dos fluidos  $j = 1$  e  $2$ , respectivamente. Considerando que os fluidos são incompressíveis,  $\rho_j$  é uma constante. Logo, a equação de continuidade resulta na expressão

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0. \quad (2.2)$$

O movimento dos fluidos é descrito pela equação de Navier-Stokes [156–158], que é a lei de Newton aplicada para fluidos. Seja  $d\mathbf{u}_j/dt$  a aceleração e  $\mathbf{f}$  a resultante das forças hidrodinâmicas por unidade de volume, a equação de Navier-Stokes é dada por

$$\rho_j \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = \mathbf{f}_j. \quad (2.3)$$

As forças viscosas surgem devido ao “atrito interno”, proporcionando resistência à deformação do fluido em movimento. Essa força depende do tensor de estresses viscosos  $\boldsymbol{\Pi}_j$  na

forma  $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_j$  [156–158]. Além disso, os estresses viscosos estão relacionados com a velocidade do fluido através da relação (para fluidos newtonianos incompressíveis) [156–158]

$$\mathbf{\Pi}_j = \eta_j \mathbf{e}_j = \eta_j [\nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T], \quad (2.4)$$

onde  $\eta_j$  é o coeficiente de viscosidade,  $\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T$  é chamado de tensor taxa de cisalhamento,  $T$  representa a transposição da matriz e  $(\nabla \mathbf{u})_{ik} = \partial_i u_k$ .

Por outro lado, a contribuição da pressão hidrodinâmica é dada por  $-\nabla p_j$ . Para visualizar essa expressão, considere a força de pressão que atua em um elemento infinitesimal de superfície  $dS$  dada por  $-p_j \hat{\mathbf{n}} dS$  (o sinal negativo é devido a definição de  $\mathbf{n}$  que aponta para fora da superfície). Dessa forma, a força total proveniente da pressão hidrodinâmica é dada por

$$-\int_S p_j \hat{\mathbf{n}} dS = -\int_V \nabla p_j dV. \quad (2.5)$$

Note que na Eq. (2.5) usamos o teorema da divergência para uma função escalar. Portanto,  $-\nabla p_j$  representa a força de pressão por unidade de volume que atua no fluido.

Calculando o divergente da Eq. (2.4), obtemos a expressão  $\mathbf{f}_j = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j$ . Assim, reescrevendo a Eq.(2.3) temos a equação de Navier-Stokes

$$\rho_j \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j. \quad (2.6)$$

O lado esquerdo de (2.6) corresponde à contribuição inercial do fluido. A eventual inclusão de outras forças (gravitacional, magnética, centrífuga, etc.) contribuem com termos adicionais no lado direito da Eq. (2.6).

Vamos considerar que o espaçamento  $b$  entre as placas é pequeno suficiente para que o fluxo na célula de Hele-Shaw seja completamente determinado pelo balanço entre as forças viscosas e de pressão. Nesta circunstância, o fluxo possui um baixo número de Reynolds  $\text{Re} = \rho U b^2 / (12 \eta L)$ , onde  $U$  representa a velocidade típica do fluido, e os termos inerciais  $\rho_j \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right]$  podem ser desprezados. No Cap. 5, em particular, estudaremos detalhadamente os efeitos inerciais na instabilidade de Saffman-Taylor onde ficará claro a definição de  $\text{Re}$  como o número que quantifica a razão entre forças de inércia e forças



viscosas. No regime físico abordado neste capítulo, assumiremos o fluxo usual em Hele-Shaw [10], no qual  $Re \ll 1$  e, portanto, podemos desprezar os termos do lado esquerdo da Eq. (2.6).

Para o fluxo descrito acima, como o fluido é incompressível e o espaçamento entre as placas é muito pequeno, assumimos que na Eq. (2.6)  $\mathbf{u}_j$  varia mais intensamente ao longo de  $z$  do que nas direções  $x$  e  $y$ . Além disso, consideramos ainda que a pressão é aproximadamente constante ao longo de  $z$ . Sob essas condições, obtemos a equação de Navier-Stokes para as componentes da velocidade e  $u_{jx}$  e  $u_{jy}$ :

$$\eta_j \frac{\partial^2 u_{jx}}{\partial z^2} = \frac{\partial p_j}{\partial x} \quad \text{e} \quad \eta_j \frac{\partial^2 u_{jy}}{\partial z^2} = \frac{\partial p_j}{\partial y}, \quad (2.7)$$

onde  $u_{jz} = 0$ , pois  $p_j$  independe da coordenada  $z$ . Para resolvermos as Eqs. (2.7), assumimos a condição de não deslizamento do fluido nas paredes das placas (*no-slip boundary condition*), ou seja, a velocidade do líquido é nula nas placas:  $\mathbf{u}_j = 0$  em  $z = 0$  e  $z = b$ . A partir dessas considerações, a solução de (2.7) pode ser escrita na forma

$$\eta_j \mathbf{u}_j(x, y, z) = \frac{z(z-b)}{2} \nabla p_j(x, y). \quad (2.8)$$

É importante notar que o perfil de velocidade do fluxo em Hele-Shaw é “parabólico”. Finalmente, calculando a média transversal da Eq. (2.8) definida por

$$\mathbf{v}_j(x, y) \equiv \frac{1}{b} \int_0^b \mathbf{u}_j(x, y, z) dz, \quad (2.9)$$

obtemos a lei de Darcy [155]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j. \quad (2.10)$$

Perceba que  $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(x, y)$  e  $p_j = p_j(x, y)$  são respectivamente as médias transversais da velocidade e da pressão ao longo do eixo  $z$ .

Observe que, pela lei de Darcy, o fluxo é irrotacional. Isso pode ser visto aplicando o operador rotacional em ambos os lados da Eq. (2.10). Como  $\nabla \times \nabla p_j = 0$ , temos que  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ . Nessa circunstância, podemos escrever

$$\mathbf{v}_j(x, y) = -\nabla \phi_j(x, y), \quad (2.11)$$

onde  $\phi_j$  representa o potencial de velocidade de cada um dos fluidos. No entanto, o fluxo pode ser considerado irrotacional e ainda ter uma região do espaço com vorticidade diferente de zero. Para o nosso caso, esse domínio de vorticidade surge apenas no contorno que separa os fluidos devido à uma descontinuidade das velocidades tangenciais à interface. Se substituirmos a equação (2.11) na Eq. (2.10), obtemos a lei de Darcy na forma escalar

$$\eta_j \phi_j = \frac{b^2}{12} p_j. \quad (2.12)$$

Por outro lado, calculando a média transversal da condição de incompressibilidade (2.2), obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0. \quad (2.13)$$

Da Eq. (2.13), temos uma nova equação para o potencial de velocidade dada por

$$\nabla^2 \phi_j = 0. \quad (2.14)$$

Aparentemente pode parecer fácil solucionar nosso problema, já que soluções da equação de Laplace (2.14) são bem conhecidas na literatura. Porém, temos um contorno dinâmico “livre” que envolve a região que separa dois fluidos. Isso proporciona uma condição de contorno que varia com o tempo, envolvendo a forma de uma interface desconhecida. Esse problema é conhecido como “*free boundary problem*”, que em geral não pode ser solucionado de uma forma fechada.

### 2.2.2 As condições de contorno

A partir desta seção e até o fim do capítulo, os resultados obtidos encontram-se nas Refs. [147, 148]. Para descrever completamente a evolução da interface, precisamos de duas condições de contorno. A primeira que vamos discutir é a condição dinâmica de contorno, que expressa o equilíbrio da componente normal do tensor das tensões  $\pi_j$  na interface fluido-fluido

$$\mathbf{n} \cdot (\pi_1 - \pi_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma \mathcal{K} + \frac{2\sigma \cos \beta_c}{b} JCa^\gamma, \quad (2.15)$$

onde para ambos os fluidos (omitindo o índice  $j$ ) temos

$$\pi_{ik} = p\delta_{ik} + \eta \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]. \quad (2.16)$$

Na Eq. (2.15),  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade do fluido,  $\delta_{ik}$  corresponde à delta de Kronecker e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à interface. O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.15) representa a contribuição relacionada à tensão superficial (tensão proveniente de forças microscópicas entre os átomos e moléculas localizados na região de contorno entre os fluidos [159]), onde  $\sigma$  corresponde ao coeficiente de tensão superficial e  $\mathcal{K}$  representa a curvatura média da interface fluido-fluido,

$$\mathcal{K} = \frac{\pi}{4} \kappa + \kappa_\perp. \quad (2.17)$$

Na Eq. (2.17),  $\kappa$  é uma medida da curvatura ao longo do plano da célula de Hele-Shaw [10]. O fator  $\pi/4$  é puramente um efeito de capilaridade estático vindo da média transversal da curvatura da interface [150, 151].

Além disso,

$$\kappa_\perp = \frac{2}{b} \cos \beta_c \quad (2.18)$$

representa a contribuição da curvatura da interface na direção perpendicular ao plano da célula de Hele-Shaw, onde  $\beta_c$  corresponde ao ângulo de contato estático medido entre as placas e o menisco do perfil da interface (assumido ser circular com raio  $b/2$  quando

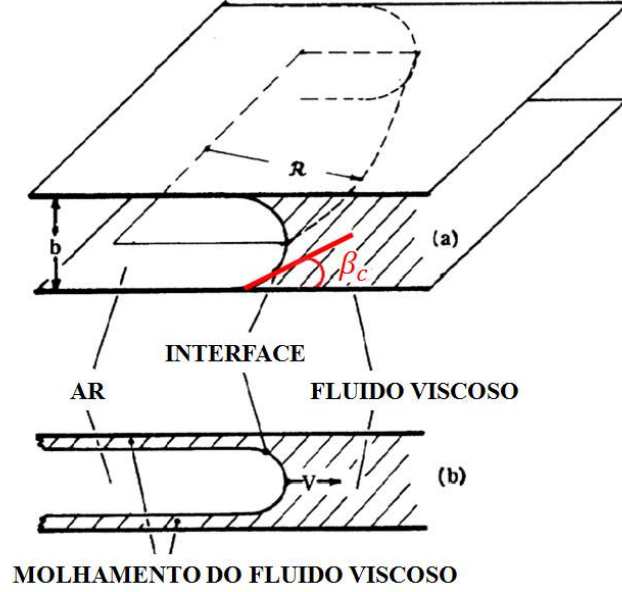


Figura 2.2: Considerações físicas da interface fluido-fluido: (a) Dinâmica da interface sem molhamento das placas (modelo de Chuoke *et. al*, Saffman-Taylor e o de Park e Homsy). Ilustração do ângulo de contato  $\beta_c$ . (b) Dinâmica da interface com efeito de molhamento, observa-se uma fina camada de líquido nas placas deixada pelo fluido que está sendo deslocado.

$\beta_c = 0$ , veja Fig. 2.2(a) retirada da Ref. [35]). Finalmente, o segundo termo do lado direito da Eq. (2.15) considera o efeito de molhamento das placas. Esse efeito é devido a um filme fino de fluido deixado para trás da interface em movimento [150–152], como ilustrado na Fig. 2.2(b). Assim como nos experimentos de Maxworthy [35] e nos modelos matemáticos das Refs. [150,151], consideramos que o fluido mais viscoso molha as placas de Hele-Shaw, de modo que  $\beta_c = 0$ . Ainda no segundo termo da Eq. 2.15,  $Ca = \eta v_n / \sigma$  representa o número de capilaridade (parâmetro adimensional que mede a razão das forças viscosas em relação às forças de tensão superficial),  $v_n$  é a componente normal da velocidade da interface,  $J = 3.8$  e  $\gamma = 2/3$ .

Reescrevendo a Eq. (2.16) em coordenadas polares  $(r, \theta)$  e substituindo a expressão resultante na Eq. (2.15), obtemos uma condição de contorno da pressão na interface que corresponde à equação de Young-Laplace [150–154, 160] generalizada dada por

$$p_1 - p_2 = \frac{\pi}{4} \sigma \kappa + \frac{2\sigma \cos \beta_c}{b} (1 + JCa^\gamma) - 2\mu \left( \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} \right). \quad (2.19)$$

O último termo do lado direito da Eq. (2.19) provém dos estresses viscosos normais que são relacionados com o gradiente da velocidade normal calculado na interface fluido-fluido [153, 154, 160]. O parâmetro  $\mu$  assume o valor 1 (0) caso (não) consideremos o efeito dos estresses viscosos normais.

A próxima condição de contorno é a condição cinemática, a qual corresponde à continuidade da componente normal da velocidade  $v_n = -\mathbf{n} \cdot \nabla \phi$  dos fluidos na interface. Isso nos permite escrever [156–158]

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_2. \quad (2.20)$$

Discutidas as características fundamentais do fluxo em Hele-Shaw, podemos estudar os efeitos lineares da dinâmica da interface fluido-fluido e, com isso, determinar o número de onda típico da interface.

## 2.3 Estimando o número de onda da interface no problema de injeção radial

### 2.3.1 Análise de estabilidade linear

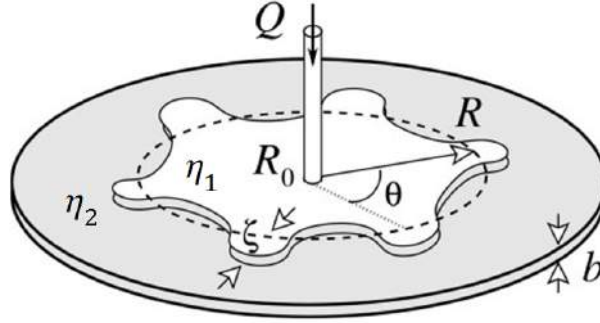


Figura 2.3: Figura esquemática da injeção radial na célula de Hele-Shaw. O fluido externo (em cinza) possui viscosidade  $\eta_1$ , enquanto o fluido interno possui viscosidade  $\eta_2$ . A interface fluido-fluido não perturbada (curva tracejada) corresponde a um círculo de raio  $R = R(t)$  dependente do tempo. A perturbação da interface é representada por  $\zeta = \zeta(\theta, t)$ , onde  $\theta$  é o ângulo polar.

Considere a célula de Hele-Shaw de espaçamento constante  $b$  contendo dois fluidos viscosos, imiscíveis e incompressíveis (veja Fig. 2.3). Sejam as viscosidades dos fluidos interno e externo,  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , respectivamente. Entre os dois fluidos há uma tensão superficial  $\sigma$ . O fluido 1 é injetado, deslocando o fluido 2, por um furo na placa superior a uma dada taxa de injeção  $Q$  (área preenchida pelo fluido por unidade de tempo). Ao longo desta tese, utilizaremos uma teoria de perturbação para descrever a dinâmica de contornos instáveis, de modo que a interface perturbada fluido-fluido é escrita como

$$\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t), \quad (2.21)$$

onde  $\theta$  representa o ângulo azimutal e  $R(t)$  corresponde ao raio não perturbado. Por conservação de volume,  $R(t)$  depende do tempo na forma

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^t Q(t') dt'}, \quad (2.22)$$

com  $R_0$  sendo o raio não perturbado em  $t = 0$ . A presença da integral no tempo na Eq. (2.22) é necessária porque a taxa de injeção não é necessariamente constante. Desse modo, expandimos a perturbação da interface em série de Fourier

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta), \quad (2.23)$$

onde  $\zeta_n(t)$  representa a amplitude de perturbação com números de onda azimutal discretos  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Neste capítulo, nosso objetivo é estudar a dinâmica de  $\zeta_n$  e, para isso, faremos uma análise de estabilidade linear de modo que nossa aproximação perturbativa mantém termos até primeira ordem em  $\zeta$ . Na expansão de Fourier de  $\zeta$ , nós incluímos o modo  $n = 0$  para manter a área da interface independente da perturbação. Porém, mais adiante veremos que esse modo apenas contribui na dinâmica da interface a partir da segunda ordem de perturbação [40] e, portanto, não participará da dinâmica linear abordada neste capítulo.

A fim de obter a equação de movimento da interface, vamos subtrair o termo  $\eta_j \phi_j$  na Eq. (2.12) para ambos os fluidos  $j = 1$  e  $2$  calculado no contorno entre eles ( $r = \mathcal{R}$ ). Através de simples operações algébricas podemos obter a expressão

$$A \frac{(\phi_1 + \phi_2)|_{\mathcal{R}}}{2} - \frac{(\phi_1 - \phi_2)|_{\mathcal{R}}}{2} = -\frac{b^2(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}}}{12(\eta_1 + \eta_2)}, \quad (2.24)$$

onde o parâmetro adimensional

$$A = \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{(\eta_2 + \eta_1)} \quad (2.25)$$

representa o contraste de viscosidade entre os fluidos e  $p$  a pressão hidrodinâmica. A Eq. (2.24) representará a dinâmica da interface fluido-fluido pois conseguiremos expressar o potencial de velocidade  $\phi_j$  na interface e o salto de pressão no contorno entre os fluidos  $(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}}$  em termos das amplitudes de perturbação  $\zeta$  e  $\dot{\zeta}$ .

Sob tais circunstâncias, expandimos em Fourier os potenciais de velocidade, os quais sabemos que obedecem a equação de Laplace  $\nabla^2 \phi_j = 0$ . Além disso, longe da interface o campo de velocidade deve se aproximar a um fluxo estacionário não perturbado. Portanto, a solução mais geral que satisfaz essas condições é dada por

$$\phi_j = -\frac{Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{R}\right) + \sum_{n \neq 0} \phi_{jn} \left(\frac{R^{|n|}}{r^{|n|}}\right)^{(-1)^j} \exp(in\theta). \quad (2.26)$$

Nosso objetivo é calcular a equação diferencial linear para as amplitudes de perturbação  $\zeta_n$ . Para isso, o primeiro passo é substituir as expressões (2.26) para os dois fluidos na equação de movimento (2.24), mantendo termos de primeira ordem em  $\zeta$ . Em seguida, aplicar a transformada de Fourier na equação resultante desse processo.

O próximo passo é expressar  $\phi_{jn}$  em termos das amplitudes de perturbação  $\zeta_n$ . Para isso, usaremos a condição cinemática de contorno (2.20) discutida na Seção 2.2. Observe que esta condição relaciona o movimento da interface com a cinemática dos fluidos. Sabendo

que o vetor unitário normal à interface pode ser escrito como  $\mathbf{n} = \nabla(r - \mathcal{R})/|\nabla(r - \mathcal{R})|$ , podemos expressar a condição cinemática em coordenadas polares  $(r, \theta)$  na forma [40]

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \right)_{r=\mathcal{R}} - \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right)_{r=\mathcal{R}}. \quad (2.27)$$

Expandindo a Eq. (2.27) até primeira ordem em  $\zeta$  e aplicando a transformada de Fourier, obtemos as relações não triviais entre  $\phi_{jn}$  e  $\zeta_n$  para  $n \neq 0$

$$\phi_{1n}(t) = -\frac{R}{|n|}\dot{\zeta}_n - \frac{Q}{2\pi R|n|}\zeta_n \quad \text{e} \quad \phi_{2n}(t) = \frac{R}{|n|}\dot{\zeta}_n + \frac{Q}{2\pi R|n|}\zeta_n. \quad (2.28)$$

Para concluir nossos cálculos, devemos agora expressar a curvatura da interface  $\kappa$  em termos da perturbação  $\zeta$ . Podemos desconsiderar a curvatura na direção perpendicular às placas de Hele-Shaw  $\kappa_\perp$  por ser constante e de gradiente desprezível, não afetando a dinâmica do problema. Na geometria radial, a expressão da curvatura da interface no plano da célula é dada por [161]

$$\kappa_\parallel = \frac{1}{R_\parallel} = \frac{\left[ \mathcal{R}^2 + 2 \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \right)^2 - \mathcal{R} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \theta^2} \right]}{\left[ \mathcal{R}^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left( \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) + O(\zeta^2). \quad (2.29)$$

Dando prosseguimento aos cálculos da estabilidade linear da interface, substituímos as expressões de (2.28) e a condição dinâmica de contorno (2.19) na Eq. (2.24), sempre mantendo termos até primeira ordem em  $\zeta$ . Aplicando a transformada de Fourier na equação resultante desse procedimento, encontramos a equação de movimento linear para as amplitudes de perturbação  $\zeta_n(t)$  dada pela equação

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n, R)\zeta_n. \quad (2.30)$$

O ponto acima de  $\zeta_n$  indica a derivada temporal total e

$$\Lambda(n, R) = \frac{1}{s(n) + w(n)} \left\{ \frac{1}{R^2} \left[ |n| \left( 1 + \mu \frac{1}{3R^2} \right) - s(n) \right] - \frac{\pi}{48R^4 \text{Ca}} |n|(n^2 - 1) \right\}, \quad (2.31)$$



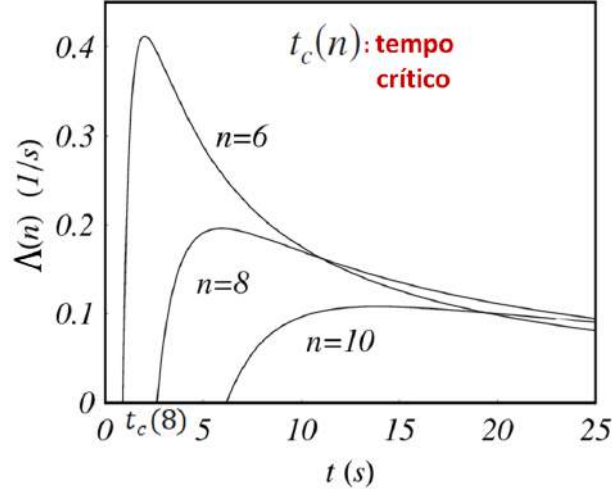


Figura 2.4: Ilustração da evolução temporal da taxa de crescimento  $\Lambda(n, R)$  para três modos de Fourier:  $n = 6$ ,  $n = 8$  e  $n = 10$ . Note o crescimento em “cascata” dos modos de perturbação. O tempo crítico de  $n = 8$  (momento em que o modo 8 se torna instável) é representado na figura.

representa a função taxa de crescimento linear na forma adimensional [147]. Na Eq. (2.31), a função

$$s(n) = 1 + \mu \frac{1}{6R^2} |n|(|n| + 1) \quad (2.32)$$

está associada aos efeitos de estresses viscosos normais e a função

$$w(n) = \frac{\gamma |n| J Ca^{\gamma-1}}{6R} \quad (2.33)$$

representa os efeitos de molhamento das placas, com  $Ca = \eta \dot{R}/\sigma$ . Na Eq. (2.31), consideramos  $\eta_1 \ll \eta_2$ , de modo que  $A = 1$ , e assumimos a taxa de injeção  $Q$  constante. Note que, quando  $\Lambda(n, R) > 0$ , o modo  $n$  de Fourier é instável e o crescimento das amplitudes  $\zeta_n$  é observado. Além disso, na Eq. (2.31) a competição entre forças viscosas e de tensão superficial definem o sinal da taxa de crescimento. O primeiro termo da Eq. (2.31) corresponde ao efeito desestabilizante do contraste de viscosidade entre os fluidos, juntamente com a contribuição dos estresses normais, e o segundo termo representa o efeito estabilizante proveniente da tensão superficial. Na Eq. (2.31), os comprimentos e as velocidades estão rescalonados por  $b$  e  $Q/(2\pi b)$ , respectivamente. Nesse contexto, definimos  $q \equiv R_0/b$  que corresponde a um parâmetro de medida de confinamento do fluido (razão entre o raio

inicial do fluido interno e o espaçamento entre as placas de Hele-Shaw). Esse parâmetro é usualmente chamado de *aspect ratio*. Desse modo,  $q$  corresponde a uma condição inicial do nosso problema no qual temos controle experimentalmente.

Antes de abordar o problema do número de dedos da interface fluido-fluido, é importante discutir um pouco sobre o comportamento típico da taxa de crescimento  $\Lambda(n, R)$  em função do tempo. A Fig. 2.4 ilustra a evolução temporal de  $\Lambda(n, R)$ , para  $n = 6, 8$  e  $10$ . Analisando a Fig. 2.4, observa-se que após um certo tempo [chamado de tempo crítico  $t_c(n)$ ], a taxa de crescimento se torna positiva, ou seja, o modo de Fourier se torna instável na dinâmica. Esse tempo é calculado pela equação  $\Lambda(n, R)|_{t=t_c} = 0$ . Além disso, note que para maiores valores de  $n$ , os modos demoram mais tempo para se tornarem instáveis, ocasionando um efeito de desestabilização em “cascata” dos modos de Fourier, onde os modos se tornam instáveis em sequência como ilustrado na Fig. 2.4. E, finalmente, podemos observar que maiores  $n$  atingem menores magnitudes de  $\Lambda(n, R)$ .

### 2.3.2 A estimativa do número de dedos viscosos e a atual discrepância com os experimentos

Na dinâmica dos dedos viscosos [1, 3, 10, 35, 37, 41, 42, 45, 46, 74, 77, 78, 81, 126, 150–154, 160, 162], assim como na maioria dos problemas de interfaces instáveis [62–65, 163–165], o procedimento teórico padrão para determinar o número de dedos (ou o número de onda dominante) da interface é obtido pelo modo de Fourier  $n_{max}^\Lambda$  que maximiza a função taxa de crescimento,

$$\left( \frac{d\Lambda(n, R)}{dn} \right) \bigg|_{n=n_{max}^\Lambda} = 0. \quad (2.34)$$

Todas as teorias até então realizadas utilizam essa abordagem padrão para estimar o comprimento de onda típico da interface perturbada. Como discutido no início do capítulo, para a instabilidade de Saffman-Taylor, experimentos realizados por Maxworthy [35] mostraram que os modelos teóricos não são satisfatórios em um certo regime de instabilidade do sistema.

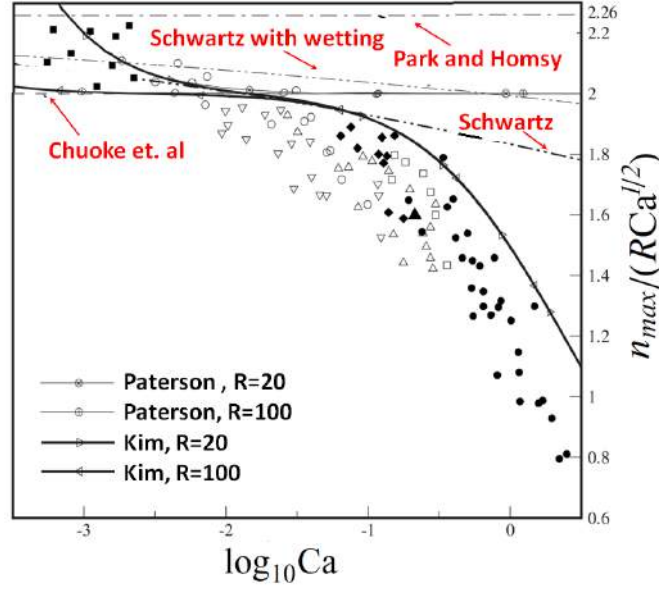


Figura 2.5: Figura retirada da Ref. [35]. Número de onda modificado em função do logaritmo do número de capilaridade. Vários modelos teóricos são ilustrados. Os pontos experimentais representam os seguintes valores de  $b$  e  $\eta$ : ( $\circ$ ) 0.034 cm, 1.17 P; ( $\nabla$ ) 0.065 cm, 1.17 P; ( $\triangle$ ) 0.128 cm, 1.17 P; ( $\square$ ) 0.191 cm, 1.17 P; ( $\bullet$ ) 0.0153 cm, 0.061 P; ( $\blacksquare$ ) 0.065 cm, 9.95 P; and, ( $\blacklozenge$ ) 0.128 cm, 9.95 P.

A Fig. 2.5, retirada do artigo de Maxworthy [35], ilustra o comportamento de um número de onda modificado  $n_{max}/(RCa^{1/2})$  em função do logaritmo do número de capilaridade  $Ca$ . Nesse gráfico, os símbolos correspondem aos dados experimentais de Maxworthy e as curvas representam os modelos teóricos que tentam estabelecer o número de onda dominante na interface fluido-fluido. É importante salientar que todas as curvas teóricas da Fig. 2.5 consideram que o número de dedos típico da interface é dado pelo modo de Fourier que possui maior taxa de crescimento  $\Lambda(n, R)$  naquele instante. A diferença entre esses modelos estão nos efeitos físicos considerados na condição dinâmica de contorno (2.19). No modelo de Paterson [37], por exemplo, apenas o termo de curvatura é considerado na condição de contorno (2.19). Park e Homsy [150], por outro lado, consideram o fator de  $\pi/4$  no termo de curvatura. Em uma dedução mais precisa, Schwartz [151] utilizou a condição de contorno completa proposta por Park e Homsy [150], levando em consideração efeitos de molhamento das placas. Para mais detalhes sobre as outras teorias, veja Ref. [35].

Da Fig. 2.5, Maxworthy concluiu que a teoria e o experimento concordam razoavelmente bem com os dados experimentais para pequenos valores do número de capilaridade. Por outro lado, todas as teorias superestimam o número de dedos viscosos na interface para maiores valores de  $Ca$ . Uma significativa melhora entre experimento e teoria nas previsões do comprimento de onda típico no problema de injeção radial em Hele-Shaw surgiu apenas 20 anos depois dos experimentos de Maxworthy. Esse estudo teórico foi realizado por Kim *et al.* [160] e obteve uma melhor concordância com os dados experimentais ao considerar os efeitos dos estresses viscosos normais [153, 154], como ilustrado na Fig. 2.5. Mais recentemente na Ref. [162], foi observado uma melhora na concordância das previsões teóricas, porém mais modesta em comparação com os resultados obtidos por Kim *et al.*. Na Ref. [162], o problema foi abordado de uma maneira mais complexa, baseada nas equações de Brinkman (ao invés de assumir a lei de Darcy). Apesar desses novos esforços [160, 162], as previsões teóricas do número de dedos viscosos ainda não são inteiramente satisfatórias para um intervalo significativo do número de capilaridade.

O objetivo principal deste capítulo é propor uma maneira alternativa para selecionar o número de dedos da interface. Para isso, consideramos que a discrepância observada nos experimentos de Maxworthy não está apenas nas contribuições físicas consideradas na teoria, mas sim, na maneira usual de “contagem” do número de dedos (pelo cálculo do modo de máxima taxa de crescimento).

### 2.3.3 O método da máxima amplitude

Após deduzir a função taxa de crescimento generalizada  $\Lambda(n, R)$  (2.31), nós discutiremos nosso método alternativo de estimar o número de onda dominante da interface. Primeiramente, note que o  $R$  varia no tempo e, portanto, a solução linear da Eq. (2.30) para as amplitudes de perturbação  $\zeta_n$  é dada por

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) \exp\{I(n, R)\}, \quad (2.35)$$

onde

$$I(n, R) = \int_{t_c(n)}^t \Lambda(n, R) dt', \quad (2.36)$$

com  $t_c(n)$  sendo o instante em que a taxa de crescimento começa a se tornar positiva. Além disso,  $\zeta_n(0)$  corresponde à amplitude inicial em  $t = t_c(n)$ , onde supusemos que  $\zeta_n(t) = \zeta_n(0)$  se  $0 \leq t < t_c(n)$  [40]. Como a taxa de injeção  $Q$  é constante, podemos reescrever a Eq. (2.36) na forma

$$I(n, R) = \int_{R_c(n)}^R \Lambda(n, R') R' dR', \quad (2.37)$$

com  $R_c(n) = R(t_c)$ . Observe que, pela Eq. (2.22) rescalonada,  $\dot{R} = 1/R$ .

Nossa maneira de “contagem” alternativa (*método da máxima amplitude*) afirma que o número de dedos na interface é obtido pelo modo de Fourier de máxima amplitude  $n_{max}^\zeta$  [147],

$$\left( \frac{d\zeta_n(t)}{dn} \right) \bigg|_{n=n_{max}^\zeta} = 0. \quad (2.38)$$

Note que pela Eq. (2.35), a condição de máxima amplitude pode ser reescrita na forma

$$\left( \frac{\partial I(n, R)}{\partial n} \right) \bigg|_{n=n_{max}^\zeta} = 0. \quad (2.39)$$

Como a relação de dispersão linear depende do tempo, em geral os valores de  $n_{max}^\Lambda$  e  $n_{max}^\zeta$  não coincidem durante a evolução da interface. Esse é o motivo da discrepância entre as previsões teóricas usuais e os experimentos de Maxworthy [35]. Mostraremos que a concordância entre teoria e experiento é significativamente melhorada quando utilizamos o critério de máxima amplitude [Eq. (2.38)] em conjunto com uma análise de estabilidade linear apropriada, que contempla a ação das tensões viscosas normais e o efeito de molhamento nas placas [Eq. (2.31)].

### 2.3.4 A compatibilidade do critério de máxima amplitude com os experimentos de Maxworthy

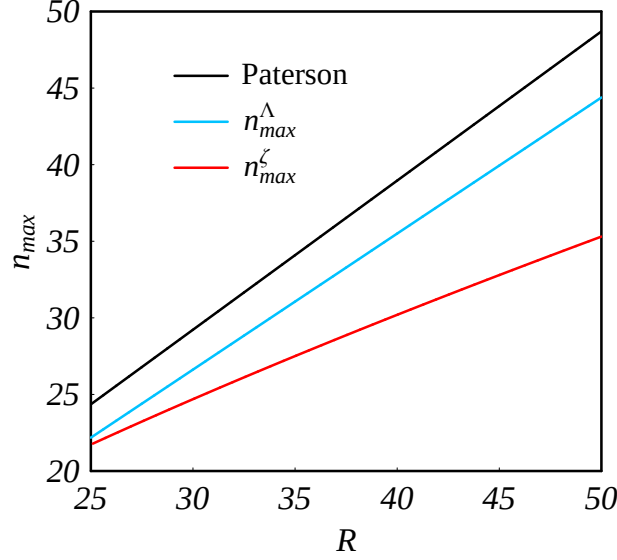


Figura 2.6: Número de dedos viscosos na interface fluido-fluido em função do raio não perturbado  $R$  para  $Ca = 0.237$ : modelo de Paterson [37],  $n_{max}^{\Lambda}$  do modelo de Kim *et al.* [160] e utilizando nosso método da máxima amplitude,  $n_{max}^{\zeta}$ .

Nesta seção, focaremos na comparação da predição teórica dada pelo máximo da amplitude com os resultados experimentais de Maxworthy [35]. Além disso, compararemos nossos resultados com os modelos teóricos realizados por Paterson [37] e por Kim *et al.* [160]. Primeiramente, a Fig. 2.6 ilustra como o número de dedos viscosos na interface ( $n_{max}$ ) evolui com o crescimento do raio adimensional  $R$ , para diferentes teorias. Para esse gráfico, nós consideramos o mesmo número de capilaridade ( $Ca = 0.237$ ) utilizado por Maxworthy em um dos seus experimentos ilustrados na Ref. [35], onde um padrão de 35 dedos é observado na interface no final do processo de injeção. As curvas representam o modelo de Paterson [37], Kim *et al.* [160] ( $n_{max}^{\Lambda}$ ) e nosso critério de máxima amplitude ( $n_{max}^{\zeta}$ ). É evidente que o número resultante de dedos estimados por Paterson e Kim é consideravelmente maior que a predição feita pelo nosso método. De fato, quando  $R = 50$  observamos  $n_{max}$  igual a: 49 (Paterson), 44 (Kim *et al.*) e 35 para o nosso modelo.

Uma análise mais interessante, é verificar como o critério de máxima amplitude se comporta no gráfico da Fig. 2.5 feito por Maxworthy. Assim como nas Refs. [35, 160], a

Fig. 2.7 ilustra como um número de onda modificado  $n_{max}/(RCa^{1/2})$  varia com o logaritmo do número de capilaridade  $Ca$ . Na Fig. 2.7, nós consideramos  $R = 35$  e consideramos três diferentes maneiras de calcular o número de onda: pelo máximo de  $\Lambda(n, R)$ , considerando apenas a contribuição do estresse viscoso normal, como feito por Kim *et al.* [160],  $n_{max}^\Lambda$ ; pelo máximo de  $\Lambda(n, R)$ , assumindo a contribuição de molhamento das placas e o efeito do estresse viscoso normal,  $n_{max}^{\Lambda_w}$ ; e pelo máximo da amplitude com ambos efeitos de estresse viscoso e molhamento incluídos, usando a Eq. (2.31),  $n_{max}^\zeta$ . Observe que o modelo de Paterson também é ilustrado.

É de grande importância descrever um pouco as condições iniciais do experimento de Maxworthy. Quando o raio inicial do fluido menos viscoso é suficientemente pequeno, como nos experimentos realizados por Cardoso e Woods [74], com o passar do tempo os modos de Fourier vão atingindo seu raio crítico  $R_c(n)$  [74] em sequência. Por outro lado, no experimento realizado por Maxworthy, o raio inicial do fluido menos viscoso é suficientemente grande de tal maneira que os modos relevantes na dinâmica apresentam raio crítico menor que o raio inicial  $R_0$  em  $t = 0$ . Em outras palavras, os modos com maiores amplitudes no final do processo de injeção já apresentam taxa de crescimento positiva (já são instáveis) em  $t = 0$  e a cascata desestabilizante dos modos não ocorre. Nessa circunstância, podemos considerar  $R_c(n) = R_0$  na Eq. (2.38) para todos os modos de Fourier. Em particular, na Fig. 2.7 consideramos  $R_0 = 25$ .

Como discutido anteriormente, vemos na Fig. 2.7 que os modelos de Paterson e Kim *et al.* superestimam o número de dedos da interface. Além das duas teorias (Paterson e Kim) já conhecidas na literatura, adicionamos na Fig. 2.7 uma curva tracejada que representa o modelo teórico de Kim com uma contribuição adicional dada pelo efeito de molhamento nas placas da célula de Hele-Shaw ( $n_{max}^{\Lambda_w}$ , curva tracejada). Note que, apesar do efeito de molhamento estar presente no modelo, as previsões teóricas não se tornam mais compatíveis com os dados experimentais de Maxworthy. Por outro lado, quando assumimos que o número de dedos é estabelecido pelo modo de máxima amplitude ( $n_{max}^\zeta$ , curva vermelha), considerando  $\mu = 1$  e  $\gamma = 3.8$ , verificamos uma considerável melhora na concordância com os dados experimentais. Podemos observar esse melhor comportamento tanto para menores quanto para maiores valores de  $Ca$ . A eficácia do nosso método para

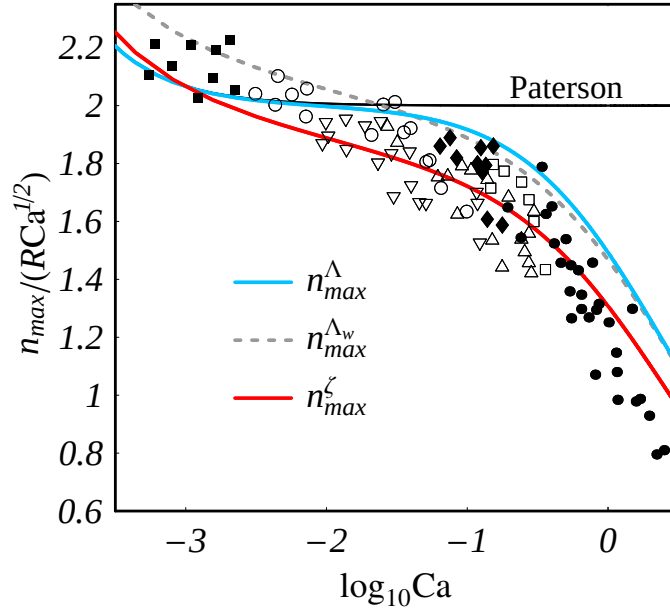


Figura 2.7: Número de onda modificado em função do logaritmo do número de capilaridade, para  $R=35$ :  $n_{max}^{\Lambda}$ , modelo de Kim *et. al* [160];  $n_{max}^{\Lambda_w}$ , modelo de Kim adicionado efeito de molhamento; e,  $n_{max}^{\zeta}$ , com  $R_0 = 25$ . A predição teórica de Paterson [37] é também ilustrada. Os pontos experimentais são os mesmos da Fig. 2.6, retirados do experimento de Maxworthy [35].

estimar o número de dedos viscosos na interface concentra-se, principalmente, no uso do critério de máxima amplitude, devidamente complementado pela ação das tensões normais viscosas e os efeitos de molhamento.

A fim de obter algo mais quantitativo da eficácia do método da máxima amplitude, realizamos o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov [166,167] usando os pontos experimentais da Fig. 2.7. Esse teste é muito utilizado em pesquisas de ciência e tecnologia e é muito útil quando deseja-se comparar dois tipos de medições ou cálculos. Para uma compreensão mais detalhada desse teste, veja por exemplo, Ref. [168]. E para mais detalhes computacionais, veja Refs. [168,169]. Considerando dois conjuntos de medidas (ou cálculos teóricos) de uma mesma grandeza, o teste de Kolmogorov-Smirnov baseia-se na hipótese nula a qual afirma que “o modelo teórico ajusta os dados experimentais”. Nessa circunstância, um valor  $p$  probabilístico calculado no teste indica se os dados que estão sob comparação diferem significativamente. Quanto menor o valor de  $p$ , maior a evidência favorecendo a rejeição da hipótese nula. Aplicando o teste de Kolmogorov-Smirnov uti-



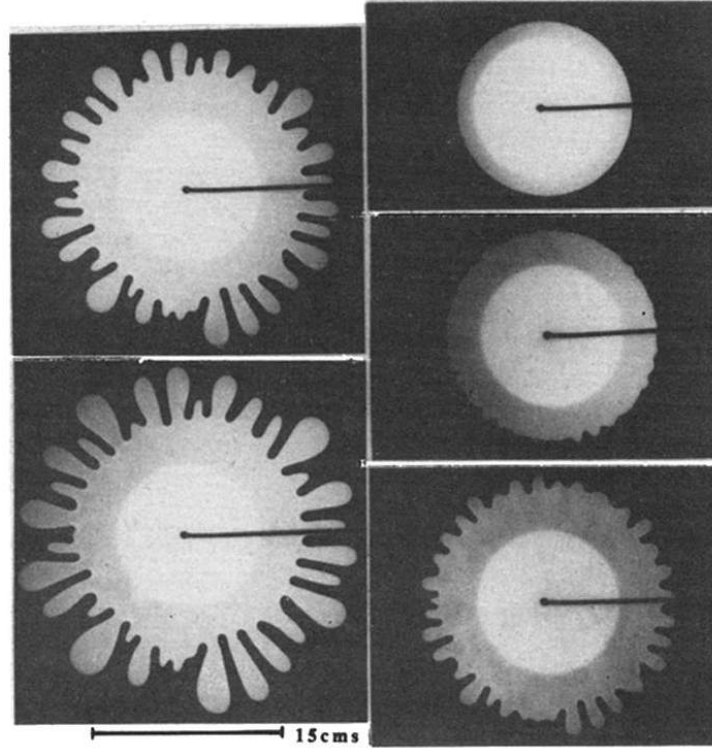


Figura 2.8: Figura retirada da Ref. [35]. Fotografias da evolução da interface durante a injeção de ar deslocando um óleo que preenche a célula de Hele-Shaw. O intervalo de tempo de cada painel é de 0.3 s. Observe que 35 dedos podem ser contados na interface. A mudança na tonalidade de cinza na região central das fotografias é devido a uma fina camada de óleo deixada pra trás nas placas da célula (efeito de molhamento do óleo).

lizando os dados experimentais de Maxworthy [35] e os valores extraídos da abordagem teórica de Kim *et al.* [160], nós obtemos  $p = 2.976 \times 10^{-5}$ . Por outro lado, aplicando o mesmo teste utilizando os dados experimentais [35] e os dados teóricos calculados pelo método da máxima amplitude, nós obtemos um valor de  $p$  igual a 0.493. Concluimos que, pelo teste de Kolmogorov-Smirnov, a abordagem de estabelecer o número de dedos viscosos pelo máximo da amplitude fornece uma significativa melhora na concordância com os dados experimentais.

Nos experimentos de Maxworthy, a contagem do número de dedos na interface é realizada para um valor de  $R$  em que a instabilidade aparece pela primeira vez, conforme o texto retirado da Ref. [35]: “A video camera and recorder or a motor-driven 35-mm camera were used to record the interface positions as a function of time, the interface radius at which instability first appeared  $R_i$ , and the number of waves formed  $n_{max}$ ”. Portanto,

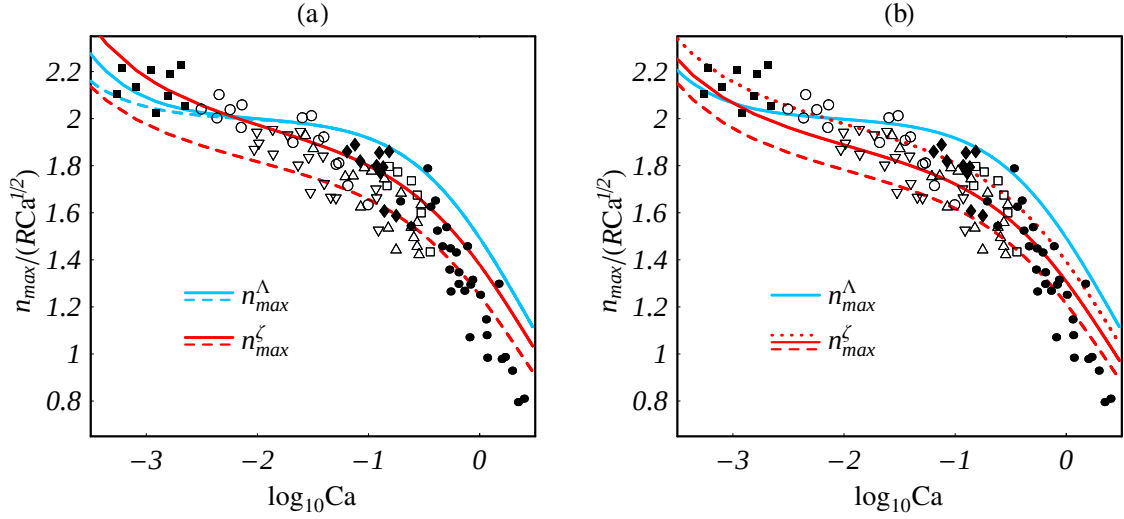


Figura 2.9: Número de onda modificado em função do logaritmo do número de capilaridade. (a) Curvas ilustrando o comportamento de  $n_{max}^{\Lambda}$  e  $n_{max}^{\zeta}$  (com  $R_0 = 25$ ), para  $R = 30$  (curvas contínuas),  $R = 40$  (curvas tracejadas). (b) Gráfico de  $n_{max}^{\Lambda}$  e  $n_{max}^{\zeta}$  (com  $R = 35$ ), para  $R_0 = 20$  (curva tracejada),  $R_0 = 25$  (curva contínua) e  $R_0 = 30$  (curva pontilhada). Os pontos experimentais são os mesmos da Fig. 2.6, retirados do experimento de Maxworthy [35].

como o experimento é realizado para diferentes valores de espaçamento  $b$  e números de capilaridade  $Ca$  distintos, o raio que determina o início da instabilidade não é bem definido. No entanto, pode-se estimar valores típicos de  $R$  examinando a Fig. 2.8 retirada da Ref. [35], onde é ilustrada a evolução da interface até o momento em que a contagem do número de dedos é realizada. Na Fig. 2.8, percebe-se que o raio não perturbado evolui até aproximadamente duas vezes o seu valor inicial. Nessa circunstância, na Fig. 2.9(a) nós fixamos  $R_0 = 25$  e ilustramos o número de onda modificado  $n_{max}/(RCa^{1/2})$  para dois valores de  $R$ : 30 (curvas sólidas) e 40 (curvas tracejadas). Fazendo isso, conseguimos “varrer” toda a região ocupada pelos pontos experimentais da Ref. [35]. Da Fig. 2.9(a), verifica-se que essa sensibilidade a mudanças em  $R$  não é observada na abordagem feita por Kim *et al.* [160] para maiores valores de  $Ca$ . Note que as curvas azuis tracejada e sólida eventualmente se colapsam. Assim como na Fig. 2.7, observamos que o critério da máxima amplitude fornece uma melhor concordância com os experimentos.

Como os experimentos de Maxworthy utilizam diferentes valores de  $b$ , é interessante investigar como a curva da Fig. 2.7 se comporta para diferentes valores de  $R_0$ . Verificamos

pela Fig. 2.9(b) que, modificando  $R_0$ , nós obtemos resultados similares àqueles obtidos para  $R_0 = 25$  e para diferentes valores de  $R$  [Fig. 2.9(a)]. Na Fig. 2.9(b), fixamos  $R = 35$  e usamos três diferentes valores de  $R_0$ : 20 (curva tracejada), 25 (curva contínua) e 30 (curva pontilhada). Dessa figura, observa-se que menores valores de  $R_0$  leva à formação de menos dedos viscosos na interface.

É importante fazer uma distinção física entre o critério de máxima amplitude e o método de máxima taxa de crescimento. Note que como a interface fluido-fluido é descrita por uma perturbação harmônica de um círculo, de fato o número típico de dedos é dado pelo modo que tiver maior amplitude e não pelo modo com maior taxa de crescimento. Quando a taxa de crescimento  $\Lambda(n, R)$  é independente do tempo, como acontece por exemplo na célula de Hele-Shaw retangular [3],  $n_{max}^\Lambda$  coincide com  $n_{max}^\zeta$ . Porém, quando  $\Lambda(n, R)$  depende do tempo, vemos que é necessário utilizar esse novo critério para estimar o número típico de dedos na interface.

Uma questão interessante é saber porque o método de maior amplitude prever menores números de onda na interface comparado ao procedimento padrão dado pelo máximo da taxa de crescimento. Durante a evolução da interface, a taxa de crescimento linear  $\Lambda(n, R)$  de cada modo de Fourier atinge uma magnitude máxima e decai com o passar do tempo (Fig. 2.4). Além disso, analisando a Fig. 2.4, percebe-se que os menores modos de Fourier são os que atingem maiores taxas de crescimento. Logo, em um dado tempo  $t$ , o modo que mais contribui na integral da Eq. (2.35) (modo de máxima amplitude) é tipicamente menor que aquele de máxima taxa de crescimento nesse mesmo instante  $t$ . Observe, por exemplo, que na Fig. 2.4 no instante  $t = 25$ , o modo  $n = 8$  possui uma taxa de crescimento maior que a taxa de crescimento do modo  $n = 6$ . Porém, a área abaixo da curva para  $n = 8$  é significativamente menor que a área correspondente quando  $n = 6$ . Ou seja, o modo  $n = 6$  possui uma contribuição maior na integral da Eq. (2.35) e, conseqüentemente, maior amplitude.

Nesta seção, nós propusemos um critério alternativo para estimar o número de onda no crescimento radial de dedos viscosos, dado pelo modo  $n$  de Fourier que possui amplitude de perturbação máxima. Essa abordagem proporcionou uma melhor concordância entre teoria e experimento. A relativa similaridade do problema de injeção na célula de

Hele-Shaw radial com outros problemas de interfaces instáveis de simetria radial sugere que o critério que nós introduzimos possa ser útil na remoção de discrepâncias similares em outros fenômenos de interesse atual. Em especial, veremos que a incompatibilidade existente entre teoria e experimento para a seleção do número de dedos na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável [96] é completamente removida quando utilizamos nosso método de máxima amplitude [148].

## 2.4 A seleção do número de onda na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável

### 2.4.1 Introdução

No problema de Saffman-Taylor na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável [44, 47–60, 75], discutido no Cap. 1, também encontramos uma discrepância entre o número de dedos na interface previstos pelos modelos teóricos e os dados experimentais. Nesse sistema, um fluido viscoso é confinado em uma célula de Hele-Shaw radial, cuja placa superior é levantada enquanto que a placa inferior é mantida em repouso. Por conservação de volume, durante o levantamento da placa superior, o fluido externo, menos viscoso, empurra o fluido interno em direção ao centro da célula de Hele-Shaw, formando padrões devido à diferença de viscosidade entre os fluidos. Como discutido no Cap. 1, no início da dinâmica observa-se a formação de vários dedos na interface que, com o passar do tempo, tendem a diminuir. No fim do processo de levantamento, a interface eventualmente se recirculariza.

Nas próximas seções, tentaremos prever precisamente a evolução temporal do número de dedos formados na interface durante o processo de levantamento em Hele-Shaw. Similarmente ao que acontece no problema convencional de injeção, a previsão teórica usual do número de onda da interface, a qual usa o máximo da taxa de crescimento, acarreta em uma grande discrepância com os valores observados experimentalmente [44, 55, 57, 58, 60]. Desse modo, utilizaremos o método da máxima amplitude e verificaremos novamente que esse critério promove uma excelente concordância com os experimentos.

### 2.4.2 Análise de estabilidade linear

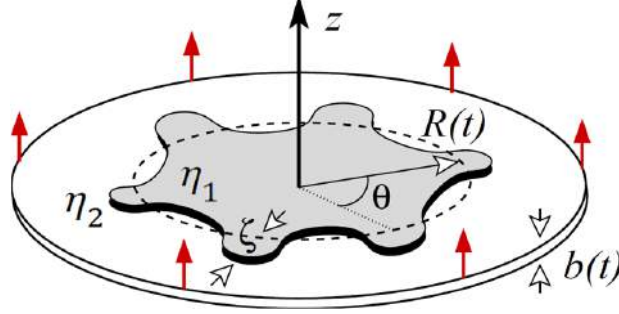


Figura 2.10: Figura esquemática da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável. O fluido interno (em verde) possui viscosidade  $\eta_1$ , enquanto o fluido externo possui viscosidade  $\eta_2$ . A interface fluido-fluido não perturbada (curva tracejada) corresponde a um círculo de raio  $R = R(t)$  dependente do tempo. A perturbação da interface é representada por  $\zeta = \zeta(\theta, t)$ , onde  $\theta$  é o ângulo polar. A direção de levantamento é ao longo do eixo  $z$  e o espaçamento entre as placas  $b = b(t)$  é função do tempo.

A geometria da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável é ilustrada na Fig. 2.10. Considere a célula com uma separação entre as placas de largura  $b(t)$  contendo dois fluidos imiscíveis, incompressíveis e viscosos. A placa de cima da célula pode ser levantada na direção perpendicular ao plano contendo os dois fluidos, enquanto que a placa inferior permanece imóvel. Assuma, inicialmente, que a interface fluido-fluido é circular de raio  $R_0$ . Pela conservação de volume, a dependência temporal do raio da interface não perturbada é dada por

$$R(t) = R_0 \sqrt{\frac{b_0}{b(t)}}. \quad (2.40)$$

Assim como no caso da injeção radial, nós usamos a lei de Darcy (2.24), a condição de diferença de pressão (2.19) e a condição cinemática (2.20) para obter a equação diferencial para as amplitudes de perturbação. Contudo, devido ao levantamento da placa superior, a média transversal (2.9) da condição de incompressibilidade (2.2) resulta na equação

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}. \quad (2.41)$$

Portanto, temos um potencial de velocidade obedecendo uma equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi_j = \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}. \quad (2.42)$$

Apesar disso, como o espaçamento da célula só tem dependência temporal, a solução da Eq. (2.42) difere da Laplaciana usual (2.26) pelo simples termo adicional  $\dot{b}r^2/(4b)$ . Pela condição cinemática (2.20), os potenciais de velocidade (2.28), em primeira ordem em  $\zeta$ , são dados por

$$\phi_{1n}(t) = -\frac{R}{|n|}\dot{\zeta}_n - \frac{\dot{b}R}{2b|n|}\zeta_n \quad \text{e} \quad \phi_{2n}(t) = \frac{R}{|n|}\dot{\zeta}_n + \frac{\dot{b}R}{2b|n|}\zeta_n. \quad (2.43)$$

De posse das expressões para os potenciais de velocidade (2.43) e seguindo os passos descritos na Seç. 2.3.1, a equação dinâmica em nível linear das amplitudes de Fourier é dada pela Eq. (2.30), porém com taxa de crescimento linear adimensional [148]

$$\Lambda(n, R) = \frac{1}{s(n) + w(n)} \left\{ \frac{1}{2b} [|n| - s(n)] - \frac{\pi}{4} \tau b^{7/2} |n| (n^2 - 1) \right\}. \quad (2.44)$$

Na Eq. (2.44), a função

$$s(n) = 1 + \mu \frac{b^3}{6q} |n| (|n| - 1) \quad (2.45)$$

está associada aos efeitos de estresse viscoso normal e a função

$$w(n) = \gamma J |n| \frac{b^{3/2}}{6q} [24b^{3/2} q^2 \tau]^{1-\gamma} \quad (2.46)$$

está relacionada à contribuição de molhamento das placas. O parâmetro de confinamento do fluido interno (*aspect ratio*) é  $q = R_0/b_0$ ,  $J = 3.8$  e

$$\tau = \frac{\sigma b_0^3}{12\eta \dot{b} R_0^3}. \quad (2.47)$$

é uma medida adimensional de tensão superficial [47, 55, 60]. Na Eq. (2.44), consideramos  $\eta_2 \ll \eta_1$ , de modo que  $A = -1$ , e supomos que a placa superior é levantada com velocidade

constante  $\dot{b}$ . Além disso, comprimentos e velocidades paralelos (perpendiculares) ao plano da célula de Hele-Shaw estão rescalonados por  $R_0$  ( $b_0$ ) e  $R_0\dot{b}/b_0$  ( $\dot{b}$ ), respectivamente.

### 2.4.3 Estimando o número de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável

Um estudo experimental meticuloso realizado por Nase *et al.* [60] investigou sistematicamente como o número de dedos previsto pelo tradicional método do máximo da taxa de crescimento se compara com os experimentos. A Fig. 2.11, retirada da Ref. [60], ilustra a evolução temporal do número de dedos da interface durante o processo de levantamento. Os símbolos no gráfico correspondem aos valores encontrados experimentalmente e a curva representa a previsão teórica calculada pelo máximo da taxa de crescimento ( $d\Lambda(n, R)/dn = 0$ ), negligenciando efeitos de molhamento e estresses viscosos [44, 47–60, 75]. Observando a Fig. 2.11, verifica-se que logo no início da dinâmica da interface, o número típico de dedos previstos pela teoria e pelos dados experimentais estão em razoável concordância. Porém, com o passar do tempo, observamos que o número de onda diminui bem mais lentamente nos experimentos que o previsto pelo cálculo teórico. Em outras palavras, a teoria subestima o número de onda dominante na interface.

Várias suposições foram feitas a fim de justificar o motivo dessa discrepância. A opinião comum entre os pesquisadores é que efeitos tridimensionais [60, 96] influenciavam nas medições experimentais e que não eram considerados no modelo teórico. Por outro lado, nós consideramos que o verdadeiro erro estava, assim como no problema de injeção, no método de “contagem” do número de dedos baseado no máximo da taxa de crescimento e não por outros efeitos físicos não considerados na teoria. Motivados pelo sucesso obtido na predição do número de onda típico da interface no problema de injeção em Hele-Shaw [147], nessa seção nós analisamos o contraste entre os dados experimentais obtidos por Nase *et al.* [60] e nossa predição teórica dada pela abordagem do máximo da amplitude [Eqs. (2.35) e (2.38)] discutida na Seção 2.3.

Nós começamos a discussão sobre o número de onda da interface, examinando o papel desempenhado pelo estresse normal viscoso na Fig. 2.12, negligenciando efeitos de

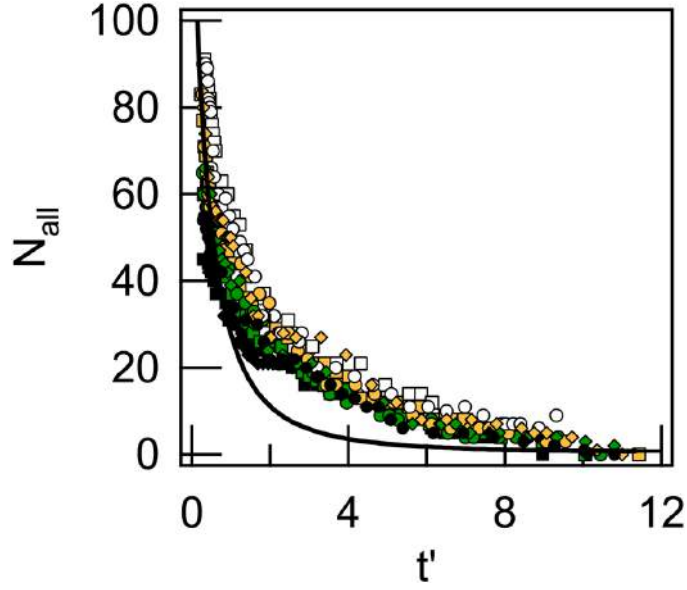


Figura 2.11: Figura retirada do artigo de Nase *et al.* [60]. Número de dedos  $N_{all}$  como uma função do tempo  $t'$ . A curva contínua representa o número de dedos calculado pelo máximo da taxa de crescimento (2.44), negligenciando efeitos de estresse normal e molhamento das placas ( $\mu = 0$  e  $\gamma = 0$ ), para  $\tau = 9.6 \times 10^{-6}$ . Os círculos, quadrados e losangos correspondem a raios iniciais iguais a 3 mm, 5 mm e 1.5 mm, respectivamente. Confimaneto: símbolos pretos,  $q = 30$ ; símbolos verdes,  $q = 40$ ; símbolos laranja  $q = 60$ ; e símbolos brancos,  $q = 120$ .

molhamento e utilizando o máximo da taxa de crescimento. Essa primeira abordagem é justificada pelo fato que, como discutido na Seção 2.3, a inclusão dos efeitos de estresse normal melhora bastante a compatibilidade entre teoria e experimento, mesmo quando o máximo da taxa de variação é utilizado [147,154,160]. A Fig. 2.12 ilustra como o número total de dedos  $n_{max}$  evolui com o passar do tempo, para  $q = 40$  e  $\tau = 4.5 \times 10^{-6}$ . As curvas teóricas estão relacionadas com as seguintes situações: (i)  $n_{max}^{\Lambda}$ , calculado pelo máximo de  $\Lambda(n, R)$ , desconsiderando os efeitos dos estresses normais ( $\mu = 0$ ) [44, 47–60, 75]; (ii)  $n_{max}^{\Lambda_s}$ , calculado pelo máximo de  $\Lambda(n, R)$ , incluindo os efeitos de estresse normal ( $\mu = 1$ ); (iii)  $n_{max}^{\zeta_s}$ , obtido pelo método da máxima amplitude e assumindo  $\mu = 1$ . Os dados experimentais aparecem como círculos pretos ( $\bullet$ ).

Analisando a Fig. 2.12, notamos que há uma clara discrepância entre a curva  $n_{max}^{\Lambda}$  e os dados experimentais. É também evidente que a inclusão dos estresses viscosos normais ( $n_{max}^{\Lambda_s}$ ) tende a diminuir o número de dedos na interface ainda mais. Dessas observações, concluímos que a predição do número de dedos baseada no máximo da taxa de crescimento



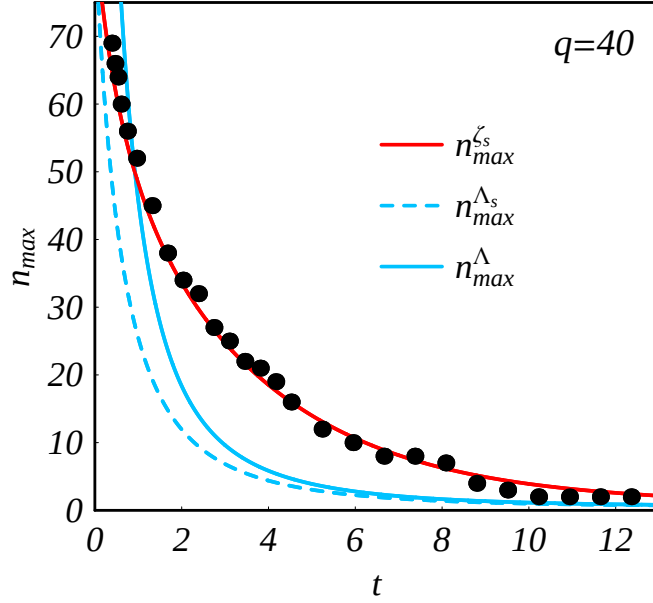


Figura 2.12: Número de dedos  $n_{max}$  como uma função do tempo  $t$ , para  $q = 40$  e  $\tau = 4.5 \times 10^{-6}$ . Nesta figura, o efeito de molhamento é negligenciado ( $\gamma = 0$ ). Observa-se as seguintes curvas: curva teórica,  $n_{max}^{\Lambda}$ , calculada pelo máximo da taxa de crescimento negligenciando os efeitos dos estresses normal ( $\mu = 0$ ) [44, 47–60, 75];  $n_{max}^{\Lambda_s}$ , calculada usando Eq. (2.31) considerando os efeitos dos estresses normal ( $\mu = 1$ ) e também utilizando a abordagem do máximo da taxa de crescimento; e, finalmente,  $n_{max}^{\zeta}$ , o qual toma  $\mu = 1$ , mas utiliza o método da máxima amplitude [148]. Os pontos experimentais (●) foram retirados dos experimentos realizados por Nase *et al.* na Ref. [60].

definitivamente não é satisfatória. Como já observado na Ref. [60], há apenas uma razoável compatibilidade com o experimento no início do processo de levantamento. Por outro lado, quando consideramos o número de dedos na interface dado pelo modo de maior amplitude ( $n_{max}^{\zeta}$ , curva vermelha), verificamos uma excelente concordância com os dados experimentais. A razão do sucesso dessa abordagem é a mesma discutida na Seção 2.3 e no artigo [147].

É importante perceber que, nas instabilidades hidrodinâmicas no fluxo na Hele-Shaw de espaçamento variável, o modo de Fourier de máximo  $\Lambda(n, R)$  diminui com o passar do tempo, assim como a própria magnitude da taxa de crescimento  $\Lambda(n, R)$ . Logo, em um dado instante  $t$ , o modo que mais contribui para integral da Eq. (2.35) (modo com máxima amplitude) é tipicamente maior que o modo com máxima taxa de crescimento nesse mesmo instante  $t$ . Essa é uma das razões pela qual o critério da máxima amplitude

seleciona maiores números de onda em comparação ao procedimento usual dado pelo máximo da taxa de crescimento.

A fim de comprovar o critério da máxima amplitude mais sistematicamente e de forma mais precisa, apresentamos nosso método para vários valores de confinamento  $q$  e para dois valores de  $\tau$ . Além disso, consideramos a influência do molhamento entre as placas. A Fig. 2.13 ilustra o número de dedos  $n_{max}$  como função do tempo  $t$ , para  $\tau = 4.5 \times 10^{-6}$  com  $q = 30, 40, 60$  e  $120$  [Figs. 2.13(a)-2.13(d)]; e para  $\tau = 9.6 \times 10^{-6}$  com  $q = 30, 40, 60$ , e  $122$  [Figs. 2.13(e)-2.13(h)]. As curvas teóricas estão associadas às seguintes situações: (i)  $n_{max}^\Lambda$ , calculado pelo máximo de  $\Lambda(n, R)$ , desconsiderando os estresses viscosos normais ( $\mu = 0$ ) [44, 47–60, 75]; (ii)  $n_{max}^{\zeta_s}$ , calculado pelo método da máxima amplitude, incluindo os estresses viscosos normais ( $\mu = 1$ ); (iii)  $n_{max}^{\zeta_{s,w}}$ , obtido pelo máximo da amplitude, assumindo  $\mu = 1$  e considerando os efeitos de molhamento das placas. Novamente, os dados experimentais foram retirados da Ref. [60] e estão representados pelos círculos pretos ( $\bullet$ ).

Analisando a Fig. 2.13, verifica-se que, independentemente dos valores de  $q$  e  $\tau$ , as previsões teóricas calculadas pelo máximo da taxa de crescimento falham na tentativa de estabelecer o número de dedos na interface, similarmente ao observado na Fig. 2.7. Por outro lado, as previsões teóricas obtidas pelo uso do critério da máxima amplitude estão em excelente acordo com o experimento durante toda evolução temporal do levantamento e para todos os valores de  $q$  e  $\tau$ . Contudo, nota-se que para maiores valores do parâmetro de confinamento ( $q \geq 60$ ), a curva  $n_{max}^{\zeta_s}$  começa a subestimar o número de dedos emergentes na interface. Com intuito de solucionar esse problema, nós adicionamos efeitos de molhamento em nosso modelo teórico (curvas  $n_{max}^{\zeta_{s,w}}$ ). Nessa circunstância, observa-se uma melhor concordância entre as previsões teóricas e os dados experimentais quando valores maiores de  $q$  são considerados [veja Fig. 2.13(c) e Fig. 2.13(g)]. Porém, quando  $q \approx 120$  [Fig. 2.13(d) e Fig. 2.13(h)] os pontos experimentais ainda se encontram abaixo das curvas  $n_{max}^{\zeta_{s,w}}$  em um certo intervalo de tempo durante o processo de levantamento. Esse leve desacordo talvez seja devido à influência de efeitos não lineares que não estão incluídos em nossa análise de estabilidade linear.

## 2.4 A seleção do número de onda na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável

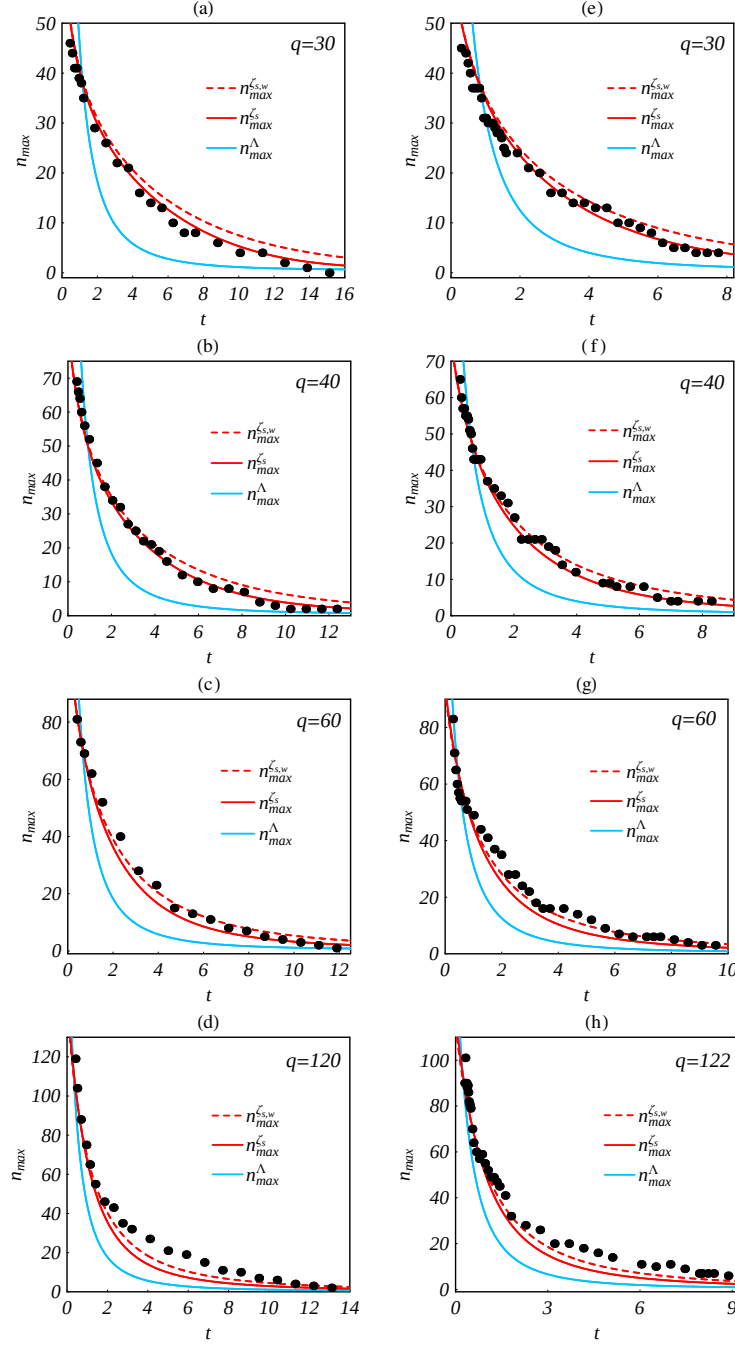


Figura 2.13: Número de dedos viscosos  $n_{max}$  em função do tempo  $t$ , para diversos valores do parâmetro de confinamento  $q$  e para dois valores do parâmetro de tensão superficial  $\tau$ :  $4.5 \times 10^{-6}$  [Figs. 2.13(a)-2.13(d)] e  $9.6 \times 10^{-6}$  [Figs. 2.13(e)-2.13(h)]. As curvas teóricas contínuas e azuis foram calculadas pelo máximo da taxa de crescimento, onde efeitos de estresse normal e molhamento foram negligenciados ( $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0$ ) [44, 47–60, 75];  $n_{max}^{\zeta}$  calculada pela Eq. (2.31) considerando os efeitos de estresse normal, negligenciando os efeitos de molhamento ( $\mu = 1$ ,  $\gamma = 0$ ) e também utilizando a abordagem do máximo da taxa de crescimento; e, finalmente,  $n_{max}^{\zeta_{s,w}}$  calculado pela Eq. (2.31), assumindo  $\mu = 1$ ,  $\gamma = 2/3$  e considera o critério da máxima amplitude. Os pontos experimentais, assim como na Fig. 2.12, foram retirados dos experimentos realizados por Nase *et al.* na Ref. [60].

O problema de levantamento em Hele-Shaw estudado nessa seção é, de fato, o segundo sistema físico para o qual o nosso método da máxima amplitude gera uma significativa melhora da concordância com os experimentos quando comparado com o tradicional método do máximo da taxa de crescimento. Os resultados obtidos nesse capítulo [147, 148] dão um suporte à eficácia do método de máxima amplitude em determinar o número de dedos emergentes na interface. Mostramos que essa abordagem fornece uma excelente compatibilidade com os dados experimentais realizados na Ref. [60]. O sucesso de nossos resultados também foi verificado para diferentes graus de confinamento e efeitos de capilaridade. Esperamos que esses resultados positivos motivem físicos experimentais e teóricos a continuarem testando nosso método de seleção do número de onda em outros problemas de formação de padrão.

## Capítulo 3

# Minimização de instabilidades em interfaces de crescimento radial

### 3.1 Introdução

Apesar da grande beleza e relevância acadêmica dos padrões formados na natureza, em algumas situações o crescimento dessas instabilidades de interface não é desejado. Como discutido no Cap. 1, é bem conhecido que o desenvolvimento dos dedos viscosos é uma das principais razões da ineficiência na extração do petróleo das rochas porosas [117]. Além disso, veremos mais adiante que o interesse pelo controle de instabilidades na interface entre duas fases não é apenas no problema de Saffman-Taylor, mas também em crescimento de cristais e em processos de descargas elétricas. Portanto, é de grande interesse científico e tecnológico investigar meios de controlar, minimizar e, possivelmente, suprimir o crescimento dessas perturbações.

Neste capítulo, continuaremos o estudo da instabilidade de Saffman-Taylor na célula de Hele-Shaw, entretanto, ao invés de estudar o desenvolvimento desses padrões, nosso principal objetivo é oferecer meios de controlá-los e eventualmente suprimi-los. Além disso, estenderemos nosso estudo para fluxos de fluidos complexos, cuja viscosidade varia com a taxa de cisalhamento. Nosso protocolo de controle deve permitir o crescimento da interface entre duas fases, no entanto estabilizando as perturbações que surgem na-

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

---

turalmente nesse processo. Pretendemos que esses métodos sejam simples e práticos de serem implementados experimentalmente, onde aplicaremos não só nas instabilidades de Saffman-Taylor, como também na instabilidade de Mullins-Sekerka e nas perturbações surgidas em processos de descargas elétricas (Cap. 4). O protocolo de estabilização mais abordado nesta tese será deduzido via o cálculo variacional. Particularmente no problema de injeção em Hele-Shaw, esse processo visa encontrar uma taxa de injeção capaz de minimizar as perturbações da interface. Na próxima seção, começaremos deduzindo nosso primeiro método de estabilização que utiliza uma taxa de bombeamento constante dividida em dois estágios. Os resultados obtidos neste capítulo encontram-se nas Refs. [76, 77, 108].

## 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

Como discutido no Cap. 1, alguns grupos de pesquisa [42, 71, 75] examinaram a possibilidade de evitar o mecanismo de bifurcação dos padrões no processo de injeção na célula de Hele-Shaw radial. Para isso, ao invés de considerar um fluxo de injeção constante, as Refs. [42, 71, 75] assumiram uma taxa de injeção particular que escala com o tempo na forma  $t^{-1/3}$ . Nesse procedimento, foram eliminados completamente os efeitos de ploriferação dos dedos viscosos controlando o número de onda da perturbação. Porém, a amplitude das perturbações geradas nesse processo de injeção não foi suprimida. De fato, um protocolo que evite a formação dos dedos viscosos ainda não tinha sido eficientemente abordado na literatura.

Diferentemente do que foi realizado nas Refs. [42, 71, 75], consideraremos um processo de injeção constante dividido em dois estágios com intuito de inibir a formação dos dedos viscosos. Na situação usual, uma certa quantidade de fluido é injetada em um dado período de tempo a uma taxa de injeção constante, gerando instabilidades na interface. No procedimento que sugerimos nesta seção, a taxa de injeção média é mantida inalterada, de modo que a mesma quantidade de fluido seja injetada no mesmo intervalo de tempo,

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

---

contudo inibindo o crescimento das instabilidades na interface. Os cálculos e resultados reproduzidos aqui nesta seção encontram-se na nossa Ref. [76].

Antes de descrever nosso protocolo de estabilização, considere o processo de injeção em Hele-Shaw e a análise de estabilidade linear discutidos no Cap. 2. O fluido menos viscoso é bombeado a uma taxa constante  $Q_0$ , que corresponde à taxa de variação da área ocupada pelo fluido bombeado na célula de Hele-Shaw. Portanto, temos da Eq. (2.22) que

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + \frac{Q_0 t}{\pi}}. \quad (3.1)$$

Além disso, em todo este capítulo, assumiremos que os efeitos dos estresses normais e de molhamento das placas são desprezíveis na condição dinâmica de contorno (2.19) ( $\mu = 0$  e  $\gamma = 0$ ). Nessa circunstância, a evolução das amplitudes de Fourier é dada pela Eq. (2.35)

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) \exp\{I_0(n, R)\} \quad \text{com} \quad I_0(n, R) = \int_0^t \Lambda(n, R) dt', \quad (3.2)$$

onde a taxa de crescimento linear  $\Lambda$  deduzida no Cap. 2 (2.31), pode ser escrita na forma dimensional como

$$\Lambda(n, R) = \left[ f(n) \frac{Q_0}{R^2} - g(n) \frac{1}{R^3} \right], \quad (3.3)$$

com  $f(n) = (A|n| - 1)/2\pi$  e  $g(n) = [b^2\sigma|n|(n^2 - 1)]/[12(\eta_1 + \eta_2)]$ . Na Eq. (3.3), notamos claramente o papel desestabilizante devido ao contraste de viscosidade  $A$  entre os fluidos e o efeito estabilizante da tensão superficial, dado pelo segundo termo da Eq. (3.3). Observe que na Eq. (3.3) consideramos  $t_c(n) = 0$ . Essa abordagem é válida desde que assumamos  $t_c(n) \ll t_f$ , onde os modos que satisfazem essa condição correspondem aos  $n$ 's mais instáveis na dinâmica, ou seja, que mais contribuem na integral (3.2). Note que esses modos de Fourier têm relativamente baixos valores, de modo que o  $t_c$  é atingido logo no início do processo de injeção (veja Fig. 2.4).

Para deduzir nosso protocolo de injeção, suponha que deseja-se injetar uma certa quantidade de fluido durante um dado intervalo de tempo  $[0, t_f]$ . Observe que isso define o raio não perturbado final da interface,  $R_f = \sqrt{R_0^2 + Q_0 t_f / \pi}$ , ou a área final ocupada pelo fluido,  $\mathcal{A}_f = \pi R_0^2 + Q_0 t_f$ . Pela Eq. (3.1), podemos reescrever o argumento acima

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

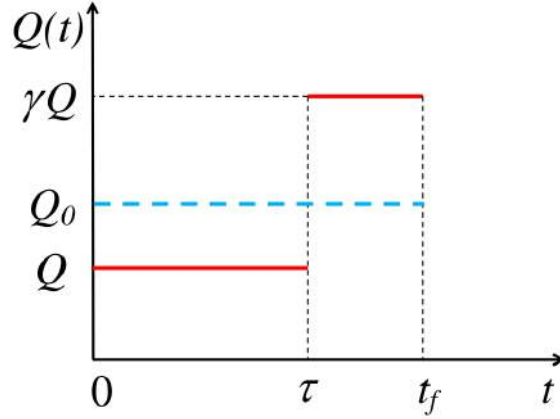


Figura 3.1: Taxa de injeção  $Q(t)$  como função do tempo para o protocolo de injeção constante de dois estágios. A taxa de injeção equivalente  $Q_0$  está representada pela linha horizontal azul tracejada.

supondo que queremos bombear um fluido a uma taxa de injeção média dada por  $Q_0$ , durante o intervalo de tempo  $[0, t_f]$ . Dadas as quantidades  $\mathcal{A}_f$  e  $t_f$  ou  $Q_0$  e  $t_f$ , nosso objetivo é formular um perfil simples e prático para uma taxa de injeção que iniba a formação dos dedos viscosos.

Os resultados apresentados nessa seção consideram  $\mathcal{A}_f \approx 140 \text{ cm}^2$  e  $t_f = 28.0 \text{ s}$  ( $Q_0 = 5.00 \text{ cm}^2/\text{s}$ ). Além disso, utilizamos os seguintes valores para os parâmetros físicos:  $R_0 = 0.30 \text{ cm}$ ,  $b = 0.10 \text{ cm}$ ,  $\zeta_0 = R_0/2400 \propto 10^{-4} \text{ cm}$ ,  $\sigma = 63.0 \text{ dyn/cm}$ ,  $\eta_2 = 5.21 \text{ g/cm s}$  e  $\eta_1 \approx 0$ . Esses parâmetros estão consistentes com os valores usados em experimentos típicos em Hele-Shaw [37,40,41,46,170]. Consideramos ainda o caso mais instável possível do sistema, onde  $A \approx 1$ .

Apesar de um cenário com uma infinidade de possibilidades para uma possível taxa de injeção dependente do tempo que estabilize a interface, o procedimento mais simples, mas não trivial, é utilizar um processo de injeções constantes dividido em dois estágios (Fig. 3.1). Essa escolha será justificada mais adiante. Para isso, dividimos o intervalo  $[0, t_f]$  no intervalo  $[0, \tau]$ , durante o qual a injeção permanece constante a uma taxa  $Q$ , e no intervalo  $[\tau, t_f]$ , em que a injeção é dada por  $\gamma Q$ . Expressaremos ainda  $t_f$  em termos



### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

---

de dois parâmetros de controle do nosso protocolo,  $t_f = (1 + \beta)\tau$ . A imposição que a taxa média de injeção permaneça constante nos leva à expressão

$$Q = \frac{(1 + \beta)}{(1 + \gamma\beta)} Q_0, \quad (3.4)$$

com  $\beta > 0$  e  $\gamma\beta > -1$ . Se o parâmetro  $\gamma$  é negativo, obtém-se um estágio de injeção seguido de um processo de sucção. Para  $\gamma > 0$ , duas possibilidades não triviais surgem no processo: se  $\gamma < 1$ , a taxa de injeção no primeiro estágio é maior que a do segundo estágio e, para  $\gamma > 1$ , a injeção mais fraca acontece durante o primeiro estágio. Finalmente, para  $\gamma = 1$ , recuperamos a situação usual de injeção constante durante todo o processo de bombeamento  $[0, t_f]$ . Verifique que os parâmetros livres, controlados experimentalmente, são  $\beta$  e  $\gamma$ . Qualquer outra grandeza do nosso protocolo de injeção pode ser obtida através deles. Lembre-se, ainda, que  $t_f$  e  $Q_0$  são quantidades previamente estabelecidas no problema que fixam a quantidade de fluido injetado e a duração do bombeamento.

Considerando que a injeção é feita em dois estágios de bombeamento constante (Fig. 3.1) o cálculo da estabilidade linear é dado por  $\zeta'_n(t) = \zeta_0 \exp\{I'(n)\}$ , com

$$\begin{aligned} I'(n) &= \int_0^\tau \Lambda_1(n, R) dt + \int_\tau^{t_f} \Lambda_2(n, R) dt \\ &= 2\pi f(n) \Omega(R_f, R_0) - \frac{2\pi g(n)(1 + \beta\gamma)}{Q_0(1 + \beta)} \left[ \frac{1}{\gamma} \Gamma(R_f, R_\tau) + \Gamma(R_\tau, R_0) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  representam a taxa de crescimento referentes ao primeiro e segundo estágios com suas respectivas taxas de injeção. Além disso,  $\Omega(x, y) = \ln(x/y)$  e  $\Gamma(x, y) = (1/y - 1/x)$ . Observe que o raio inicial  $R_0$  e o raio final  $R_f$  são constantes preestabelecidas, enquanto que o raio não perturbado da interface em  $t = \tau$  é uma função dos parâmetros livres do protocolo,  $R_\tau = R_\tau(\beta, \gamma)$ .

Se queremos estabilizar as amplitudes de Fourier  $\zeta'_n$ , então basta impor que  $\zeta'_n/\zeta_n = \exp\{I' - I_0\} < 1$  no final do processo  $t = t_f$ . Perceba que sempre nos referiremos à palavra “estabilização” quando o protocolo for comparado com o processo usual de injeção constante. Analisando o sinal do argumento dessa exponencial, verificamos numericamente que o único cenário em que ocorre estabilização do nosso protocolo é para  $\gamma > 1$ , ou seja,

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

---

quando o estágio inicial possui uma injeção menor que a injeção média  $Q_0$ , seguido de uma taxa de injeção mais forte dada por  $\gamma Q_0$ . Isso pode ser compreendido lembrando que, no início do crescimento da interface, os menores modos de Fourier atingem maiores magnitudes de  $\Lambda(n)$  em relação aos modos maiores (veja Fig. 2.4). Portanto, o início da evolução da interface corresponde à situação linearmente mais instável do processo. Com o intuito de estabilizar esse estado inicial crítico, é necessário utilizar uma baixa taxa de injeção. Vale salientar que nenhum outro cenário com diferentes valores de  $\beta$  e  $\gamma$  produz um efeito estabilizante. Além da injeção de duas etapas, também tentamos utilizar uma taxa de injeção oscilatória, envolvendo estágios de sucção. Lembrando que no período de sucção a interface tende a se estabilizar pois o fluido mais viscoso desloca o fluido menos viscoso. Entretanto, vimos que para esse tipo de injeção proporcionar uma taxa de bombeamento média de  $Q_0$ , o sistema se torna ainda mais instável que o usual.

A nossa tarefa agora se resume a estabelecer um protocolo geral e simples para obter os valores *ótimos*  $\beta^*$  e  $\gamma^*$  que inibam o máximo possível o crescimento dos dedos viscosos. Até então, só sabemos que eles devem satisfazer as relações  $\beta > 0$  e  $\gamma > 1$  para obtermos uma interface mais estável que o padrão obtido pelo bombeamento constante usual. Um ponto chave para otimizar esse processo é perceber que nessa nova injeção a cascata de modos no bombeamento de dois estágios ocorre de maneira distinta em relação ao processo usual de injeção constante. Note que, quando  $t = t_f/(1 + \beta) = \tau$ , a taxa de injeção muda abruptamente e, com isso, um efeito fundamental para a elaboração do protocolo ocorre: no momento do salto da força de injeção, um certo número de modos de Fourier tornam-se instáveis “instantaneamente”, com um  $\Lambda$  ainda maior que os modos inicialmente mais instáveis.

Na busca pelos parâmetros ótimos  $\beta^*$  e  $\gamma^*$ , devemos elaborar regras simples que sejam *independentes* do número de onda  $n$ . Por essa razão, nós supomos que os modos relevantes na dinâmica pertencem apenas a uma dessas duas classes: (i) modos que se tornam instáveis no início do primeiro estágio de injeção (modos menores) e (ii) modos que se desestabilizam exatamente em  $t = \tau$  ou logo após o salto de injeção (modos maiores). Os modos restantes, que se tornam instáveis no final do primeiro estágio [ $t \sim t_f/(1 + \beta)$ ] ou próximos do fim do segundo estágio ( $t \sim t_f$ ), não serão relevantes na busca dos parâmetros

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

---

ótimos pois seus regimes de instabilidade ocorrem em menor duração. A eficácia dessas considerações se tornará evidente mais adiante.

Para os modos do tipo (i), temos as perturbações descritas pela Eq. (3.5), enquanto que para os modos do tipo (ii) temos uma solução do tipo  $\zeta_m''(t) = \zeta_0 \exp\{I''(m)\}$ , onde

$$I''(m) = \int_{\tau}^{t_f} \lambda_2(m) dt = 2\pi f(m) \Lambda(R_f, R_0) - \frac{2\pi g(m)(1 + \beta\gamma)}{\gamma Q_0(1 + \beta)} \Gamma(R_f, R_{\tau}).$$

A fim de eliminar a dependência de  $n$  e  $m$ , focaremos nos modos de máxima amplitude para os dois tipos de evolução:  $n_{max}$  e  $m_{max}$ . Se conseguirmos minimizar o crescimento de  $n_{max}$  e  $m_{max}$ , nós minimizamos o limite superior das amplitudes de perturbação de todos os modos de Fourier. Isso é obtido através do cálculo  $\partial I'/\partial n = 0$  e  $\partial I''/\partial m = 0$ , que resulta em

$$n_{max} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2Q_0(\eta_1 + \eta_2)\gamma(1 + \beta)\Omega(R_f, R_0)}{\pi b^2 \sigma(1 + \beta\gamma) [\Gamma(R_f, R_{\tau}) + \gamma \Gamma(R_{\tau}, R_0)]}}, \quad (3.6)$$

e

$$m_{max} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2Q_0(\eta_1 + \eta_2)\gamma(1 + \beta)\Omega(R_f, R_{\tau})}{\pi b^2 \sigma(1 + \beta\gamma)\Gamma(R_f, R_{\tau})}}. \quad (3.7)$$

Logo, os limites superiores das amplitudes correspondem às integrais  $I'(n_{max})$  e  $I''(m_{max})$ .

Antes de impor qualquer condição de minimização para  $I'(n_{max})$  e  $I''(m_{max})$ , devemos garantir que a estabilização da interface seja uniforme. Ou seja, os modos maiores devem ser controlados da mesma forma que os modos menores. Essa condição pode ser realizada impondo

$$I'(n_{max}) = I''(m_{max}) \Rightarrow I'_{max}(\beta, \gamma) = I''_{max}(\beta, \gamma), \quad (3.8)$$

no qual reduz a dimensão de nosso espaço de parâmetros. Resolvendo numericamente a Eq.(3.8), obtemos uma relação entre  $\gamma$  e  $\beta$  [ $\beta = \beta(\gamma)$ ]. Usando essa relação, eliminamos a dependência em  $\beta$  na integral  $I'_{max}(\beta, \gamma)$  ou em  $I''_{max}(\beta, \gamma)$ . Com isso, obtemos as integrais como funções de uma única variável  $\gamma$ , como ilustrado no gráfico esquerdo da Fig. 3.2. Finalmente, escolhemos o valor de  $\gamma$  que minimiza  $I'_{max}$  e, automaticamente,  $I''_{max}$  pois  $I'_{max}(\beta, \gamma) = I''_{max}(\beta, \gamma)$ . Nas condições descritas no início dessa seção, em que desejamos

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

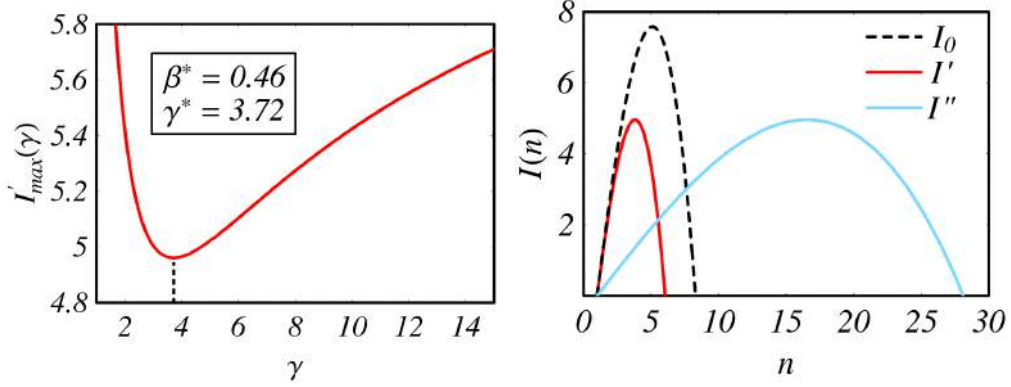


Figura 3.2: Gráfico da esquerda: comportamento de  $I'_{max} = I''_{max}$  como função de  $\gamma$ . O mínimo absoluto para  $\gamma^* = 3.72$  é indicado. Gráfico da direita: as curvas vermelha e azul contínuas representam  $I'$  e  $I''$ , respectivamente, em função de  $n$ , calculado para  $\beta^*$  e  $\gamma^*$ . A curva tracejada ilustra  $I_0$  para o processo de injeção constante equivalente.

injetar um fluido a uma taxa média  $Q_0 = 5.00 \text{ cm}^2/\text{s}$  durante  $t_f = 20 \text{ s}$ , obtemos o valor ótimo  $\gamma^* = 3.72$ , que resulta em  $\beta^* = \beta(\gamma^*) = 0.46$ . Esses dois valores caracterizam completamente nosso protocolo de estabilização via injeção de dois estágios. Para esses valores ótimos, obtemos  $\tau \approx 19.2 \text{ s}$ ,  $Q = 2.7 \text{ cm}^2/\text{s}$  para  $t < \tau$  e um bombeamento  $\gamma Q = 10 \text{ cm}^2/\text{s}$  para  $t > \tau$ , com duração de 8.8 s.

No gráfico do lado direito da Fig. 3.2, nós ilustramos  $I'(n)$ ,  $I''(n)$  (usando os parâmetros ótimos) e  $I_0$  representando a taxa de injeção constante  $Q_0$  como função do número de onda. A condição (3.8) é evidente quando observamos os máximos das curvas azul e vermelha. Além disso, verifica-se que  $I_0^{max} \approx 7.5$  e  $I'_{max} = I''_{max} \approx 4.9$ . Como as amplitudes são calculadas pela exponencial das integrais  $I$ , a diminuição do tamanho relativo das maiores amplitudes de perturbação é de uma ordem de magnitude.

A eficácia do nosso protocolo pode ser vista mais claramente na Fig. 3.3, onde ilustramos a evolução linear das interfaces para a injeção constante usual em (a) e (c), e para a injeção ótima equivalente em (b) e (d). Para visualizar as interfaces, reescrevemos, sem perda de generalidade, a perturbação da interface em termos apenas dos modos cossenos,

$$\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \sum_{n=1}^N \zeta_n(t) \cos(n\theta), \quad (3.9)$$

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

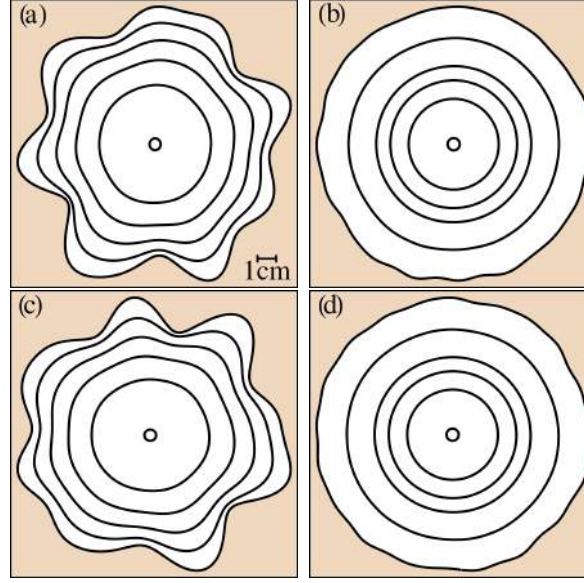


Figura 3.3: Comparação entre os padrões formado durante a injeção constante (a) e a injeção de dois estágios (b), incluindo 40 modos de Fourier com fases aleatórias. O mesmo vale para as figuras (c) e (d), respectivamente, mas considerando 30 modos com diferentes fases aleatórias

onde  $N$  é o número de modos participantes na dinâmica. Além disso, são atribuídas fases aleatórias para as amplitudes iniciais  $\zeta_n(0)$  [40, 170]. Os padrões da Fig. 3.3 localizados acima possuem a mesma condição inicial e 40 modos de Fourier são considerados. O mesmo é válido para as duas interfaces de baixo, porém incluindo 30 modos e um conjunto de fases aleatórias distinto. As interfaces são ilustradas em intervalos de  $t_f/5$ . Observe que as interfaces estão afastadas uma das outras de uma maneira mais uniforme quando a taxa de injeção constante é utilizada. Enquanto que para o processo de injeção de dois estágios os padrões se encontram inicialmente mais próximos e, em seguida, mais separados entre si. É importante enfatizar que as interfaces ilustradas na Fig. 3.3 levam em consideração a cascata de modos e nenhuma suposição é feita para plotá-las. Além disso, note que a estabilização nas Fig. 3.3(b) e Fig. 3.3(d) são similares, revelando que o protocolo não é sensível às condições iniciais.

Também investigamos efeitos fracamente não-lineares na evolução das interfaces, considerando perturbações  $\zeta$  até segunda ordem [40]. Com isso, verificamos que nosso protocolo produz padrões quase idênticos aos observados nas Fig. 3.3(b) e Fig. 3.3(d). Isso

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

---

indica que o aparecimento de efeitos não lineares é inibido, expandindo a duração do regime linear.

Para comprovar nossas previsões lineares e fracamente não lineares e ainda acessar a resposta do sistema ao nosso protocolo de minimização em estágios mais avançados da dinâmica, nós realizamos uma série de experimentos e simulações. Elaboramos os experimentos no Departamento de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em parceria com o professor Márcio Carvalho. O aparato experimental consiste de uma célula de Hele-Shaw radial feita de duas placas de vidro com 4.0 cm de espessura e 40.0 cm de diâmetro, uniformemente separadas por um pequeno espaçamento  $b = 2.0$  mm. Um fluido de baixa viscosidade (água) é injetado através de um furo localizado no centro da placa inferior, enquanto que um óleo mineral (Talpa 30/Shell,  $\eta_2 = 0.45$  Pa s) é utilizado como o fluido mais viscoso, preenchendo previamente a célula de Hele-Shaw. A tensão superficial entre os fluidos é de aproximadamente 10.0 mN/m. Uma bomba de injeção automática (Teledyne ISCO, model 500D) permite o uso das injeções constante e linear no tempo. A formação dos dedos viscosos foi gravada usando uma câmera de vídeo.

Padrões experimentais da interface fluido-fluido estão ilustrados na Fig. 3.4. Em (a) e (b), consideramos  $Q_0 = 2.91$  cm<sup>2</sup>/s e  $t_f = 7$  s. Utilizando essa injeção, as características materiais dos fluidos e o espaçamento  $b$  da célula de Hele-Shaw descritos anteriormente, obtemos  $\gamma^* = 3.95$  e  $\beta^* = 0.50$ , o que implica em  $\tau = 4.70$  s e  $Q = 1.47$  cm<sup>2</sup>/s. Na Fig. 3.4(a) observa-se uma estrutura bastante deformada, cujos tamanho e formato “achatado” dos dedos indicam que o padrão já se encontra em um regime não linear da dinâmica. Por outro lado, quando a injeção ótima de dois estágios é utilizada [Fig. 3.4(b)], vemos uma clara estabilização da interface resultante. A fim de comprovar o protocolo de bombeamento de dois estágios em períodos ainda mais avançados da dinâmica, nas Fig. 3.4(c) e (d) foram utilizadas as mesmas condições experimentais das Fig. 3.4(a) e (b), porém um tempo final mais longo foi considerado,  $Q_0 = 2.91$  cm<sup>2</sup>/s e  $t_f = 10$  s. Nessa circunstância, os novos valores ótimos obtidos são  $\gamma^* = 3.18$  e  $\beta^* = 0.42$ , resultando em uma nova injeção com  $\tau = 7.00$  s e  $Q = 1.80$  cm<sup>2</sup>/s. Verifica-se que mesmo em estágios ainda mais

### 3.2 Restrição do crescimento dos dedos viscosos: o processo de injeção constante em dois estágios

---

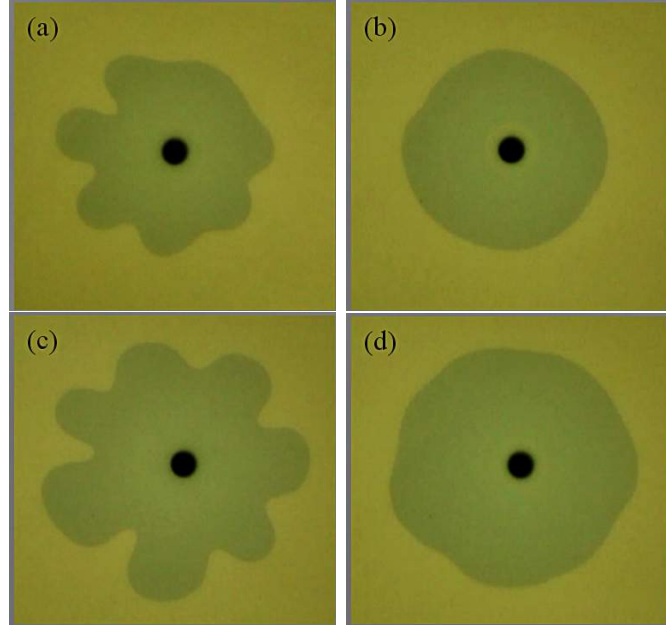


Figura 3.4: Típicos padrões experimentais para  $Q_0 = 2.91$  e  $t_f = 7$  s, para (a) injeção constante e (b) sua correspondente taxa de injeção ótima de dois estágios. As formas experimentais ilustradas em (c) e (d) consideram  $Q_0 = 2.91$  e  $t_f = 10$  s com taxa de injeção constante e utilizando a taxa de bombeamento ideal de dois estágios, respectivamente.

deformados dos padrões [Fig. 3.4(c)], ainda é observado uma forte inibição da formação dos dedos viscosos na Fig. 3.4(d).

Concluindo, introduzimos um simples processo de injeção cujos dedos viscosos são efetivamente estabilizados. Esse processo não requer propriedades não usuais dos fluidos ou modificações da geometria tradicional da célula de Hele-Shaw. É necessária apenas a implementação de um bombeamento constante composto de dois estágios, cujos parâmetros ótimos do processo podem ser calculados facilmente pelo protocolo descrito nesta seção. Essa estratégia de estabilização pode ser útil em otimizar a eficiência e o controle de vários sistemas físicos, biológicos e tecnológicos relacionados ao fenômeno de formação de dedos em interfaces. Na próxima seção apresentaremos um novo procedimento de estabilização também através da manipulação da taxa de injeção.

## 3.3 Método variacional de minimização de instabilidades de interfaces

### 3.3.1 O método variacional

Motivados pelo sucesso do protocolo de estabilização discutido na Seq. 3.2, no qual o único parâmetro de controle foi a taxa de injeção do fluido, fomos em busca de encontrar, a partir de primeiros princípios, uma forma funcional de uma taxa de injeção ideal que minimizasse as instabilidades da interface. A pergunta fundamental para explicar o processo de minimização pode ser formulada da seguinte forma: se você deseja injetar uma certa quantidade de fluido em um dado intervalo de tempo, qual é a taxa de injeção dependente do tempo  $Q(t)$  que deve ser utilizada para que as amplitudes de perturbação sejam, de fato, minimizadas? Note a clara diferença do nosso atual questionamento com a abordagem da injeção de dois estágios da Seq. 3.2, onde impusemos uma forma funcional para a taxa de bombeamento. Agora, considerando o cenário infinito de possibilidades para uma taxa de injeção que varie no tempo, a resposta a essa pergunta é definitivamente não trivial.

Apesar da nossa motivação ser a minimização das perturbações da interface fluido-fluido em Hele-Shaw, vamos deduzir nosso método variacional para instabilidades quaisquer na interface entre duas fases. Considere o crescimento bidimensional de uma interface separando duas fases descrita pelas Eqs. (2.21) e (2.22), definidas no Cap. 2,

$$\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t), \quad (3.10)$$

onde

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n \neq 0} \zeta_n(t) \exp(in\theta). \quad (3.11)$$



Considerando uma dinâmica para as amplitudes de Fourier do tipo  $\dot{\zeta}_n = \Lambda \zeta_n$  e um caso geral onde a taxa de crescimento  $\Lambda = \Lambda(n, R, \dot{R})$  pode possuir uma dependência explícita em  $\dot{R}$ , a solução (2.35) é escrita como

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) \exp \left\{ I(n, R, \dot{R}) \right\} \quad (3.12)$$

com

$$I(n, R, \dot{R}) = \int_{t_c(n)}^t \Lambda(n, R, \dot{R}) dt. \quad (3.13)$$

No Cap. 2, a Eq. (2.31) não tinha uma dependência em  $\dot{R}$  pois consideramos a taxa de injeção de fluido sendo uma constante no tempo. Uma importante informação, vista no Cap. 2, é o cálculo do modo de Fourier de maior taxa de crescimento  $n_{max}$ , que é obtido pela equação  $d\Lambda(n, R, \dot{R})/dn = 0$ . Observe que  $I(n, R, \dot{R})$  possui uma dependência temporal devido à evolução de  $R$  e  $\dot{R}$  com o passar do tempo.

O objetivo do nosso método é minimizar as amplitudes (3.12). Isso pode ser realizado extremizando a integral (3.13). Como  $n_{max}$  representa o modo de maior taxa de crescimento, focaremos em minimizar a integral

$$I(n_{max}, R, \dot{R}) = \int_0^t \Lambda(R, \dot{R}) dt', \quad (3.14)$$

onde  $\Lambda(R, \dot{R}) = \Lambda(n_{max}, R, \dot{R})$ . Perceba que  $t_c(n_{max}) = 0$  pois consideramos evoluções instáveis da interface e, portanto, uma banda de modos de Fourier deve possuir taxa de crescimento positiva no início do processo, o que implica em  $n = n_{max}$  sendo instável em  $t = 0$ . Além disso, vemos que  $\Lambda(n_{max}, R, \dot{R})$  depende apenas de  $R$  e  $\dot{R}$ . Observe que a pergunta fundamental do nosso protocolo, feita no início desta seção, pode ser substituída pela seguinte afirmação: desejamos que a interface evolua de um raio inicial  $R_0$  a um raio final  $R_f$  durante um intervalo de tempo  $[0, t_f]$  minimizando a Eq. 3.14. Portanto, percebemos que temos um problema variacional a ser resolvido, onde na Eq. (3.14)  $I$

representa a *ação* e  $\Lambda$  define a *lagrangiana* do sistema. A solução desse problema é dada pela equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{R}} \right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial R}, \quad (3.15)$$

com os extremos fixos  $R(t = 0) = R_0$  e  $R(t = t_f) = R_f$ . Substituindo a taxa de crescimento  $\Lambda$  na Eq. (3.15) obtém-se uma equação diferencial que descreve como o raio não perturbado da interface  $R(t)$  deve variar no tempo de modo que minimize as instabilidades descritas pela Eq. (3.11). É importante ressaltar que para cada tipo de sistema que envolva uma interface instável, devemos ter uma equação dinâmica que acopla o raio  $R(t)$  com um parâmetro de controle experimental do problema. Manipulando esse parâmetro, podemos impor um crescimento ideal da interface dado pela solução da Eq. (3.15). No fluxo em Hele-Shaw, por exemplo, esse parâmetro é dado pela taxa de injeção e a equação que relaciona essas duas grandezas é  $Q(t) = 2\pi R\dot{R}$ . Por outro lado, nas instabilidades de Mullins-Sekerka, veremos que a temperatura longe da interface sólido-líquido controla a evolução de  $R(t)$  (raio não perturbado do cristal). A descrição desse método variacional se encontra deduzida na Ref. [77].

#### 3.3.2 O método variacional no problema de injeção em Hele-Shaw

Vamos agora aplicar o método descrito anteriormente nas instabilidades da interface fluido-fluido geradas no processo de injeção radial em Hele-Shaw. Note que o método variacional visa obter a evolução temporal do raio não perturbado da interface de modo que as perturbações da interface sejam minimizadas. Perceba que pela Eq. (2.22), encontrar  $R(t)$  ótimo é o mesmo de obter uma taxa ideal de injeção  $Q(t)$ . Ao contrário das Refs. [42, 71–73, 76, 78], nosso método previne a formação dos dedos viscosos sem requerer modificações não convencionais da célula de Hele-Shaw e, nem mesmo, necessitar de propriedades físicas complexas do fluido. Veremos que nossos resultados analíticos são comprovados por experimentos e simulações numéricas em regimes completamente não lineares [77].

Considere o processo de injeção na célula de Hele-Shaw descrito em detalhes no Cap. 2. Nesta seção, a taxa de injeção  $Q(t)$  pode variar no tempo e, pela Eq.(2.22),  $Q(t) = 2\pi R\dot{R}$ . Reescrevendo a taxa de crescimento dimensional (3.3) levando em consideração a dependência temporal da injeção, temos

$$\Lambda(n, R, \dot{R}) = \frac{\dot{R}}{R}(A|n| - 1) - \frac{\alpha}{R^3}|n|(n^2 - 1), \quad (3.16)$$

onde  $\alpha = b^2\sigma/[12(\eta_1 + \eta_2)]$ .

O modo de máxima taxa de crescimento é dado por

$$n_{max}(R, \dot{R}) = \sqrt{\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{A\dot{R}R^2}{\alpha} \right)} \approx \sqrt{\frac{A\dot{R}R^2}{3\alpha}}. \quad (3.17)$$

No problema de formação de padrões em Hele-Shaw, a aproximação usada na Eq. (3.17) é justificada pelo fato de que em condições experimentais típicas, o parâmetro  $\alpha$  é muito pequeno ( $10^{-12} \leq \alpha \leq 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$ ), de tal forma que  $A\dot{R}R^2/\alpha \gg 1$  para situações instáveis da interface.

Como descrito na Seq. 3.3.1, devemos substituir a taxa de crescimento  $\Lambda(n_{max}, R, \dot{R})$  na equação de Euler-Lagrange (3.15). Esse procedimento nos leva a uma equação diferencial surpreendentemente simples:  $\ddot{R} = 0$ . Lembrando que desejamos evoluir a interface de  $R_0$  a  $R_f$  no intervalo  $[0, t_f]$ , a solução dessa equação diferencial é dada por

$$R(t) = R_0 + \frac{(R_f - R_0)}{t_f}t. \quad (3.18)$$

É importante ressaltar que, se a aproximação  $A\dot{R}R^2/\alpha \gg 1$  não for utilizada, a equação de Euler-Lagrange resulta em uma complicada equação diferencial não linear dada por  $A^2R^5\ddot{R} + 2\alpha AR^2\dot{R} + 4\alpha^2 = 0$ . Porém, para valores típicos de  $\alpha$ , a solução dessa equação é indistinguível da reta (3.18), como esperado.

Da relação  $Q(t) = 2\pi\dot{R}R$ , obtém-se uma taxa de injeção ótima que varia linearmente com o tempo

$$Q(t) = 2\pi \frac{(R_f - R_0)}{t_f} \left[ R_0 + \frac{(R_f - R_0)}{t_f}t \right]. \quad (3.19)$$

Esse é um resultado que dificilmente seria antecipado: diante das infinitas possibilidades de funções dependentes do tempo que representa  $Q(t)$ , aquela que minimiza as amplitudes de perturbação é dada por uma taxa de injeção que cresce linearmente com o tempo descrita pela Eq. (3.19). Novamente, observe que a taxa de injeção de dois estágios utilizada na Seq. 3.2 foi imposta como um possível processo de estabilização do sistema. Por outro lado, o bombeamento ótimo desta seção foi obtido a partir de primeiros princípios por um cálculo variacional que resultou em uma simples solução linear (3.19). Em contraste às estratégias baseadas na manipulação da taxa de injeção [42, 71–73, 75], é interessante notar que a taxa de bombeamento ótima (3.19) não depende das propriedades materiais do fluido. Enfatizamos que o *insight* do protocolo variacional é a analogia da taxa de crescimento  $\Lambda$  a uma lagrangeana e o uso da equação de Euler-Lagrange a fim de obter a taxa de injeção ideal.

Perceba que não incluímos efeitos de molhamento (2.19) no estudo desse capítulo que, como sabemos do Cap. 2 (2.31), afetam a instabilidade dos dedos viscosos. Da Fig. 2.7, vimos que a inclusão dos efeitos de molhamento tende a estabilizar a interface, porém o modo de máxima taxa de crescimento ( $n_{max}$ ) não é significantemente alterado para maiores valores do número de capilaridade. Isso significa que a Eq. (3.17) ainda pode ser válida mesmo quando efeitos de molhamento são considerados e, portanto, o protocolo é certamente útil para procurar a taxa de injeção ideal nessas circunstâncias. Contudo, antecipamos que uma equação diferencial não linear muito complicada para  $R(t)$  é obtida, de modo que um acesso analítico para tal bombeamento ótimo é improvável. Também verificamos que, embora não sendo a injeção ótima quando efeitos de molhamento são considerados, a solução linear (3.19) leva a uma estabilização significativa em comparação com o processo usual de injeção constante.

Prosseguimos examinando teoricamente e experimentalmente a eficácia do processo de estabilização da interface baseado na injeção ótima (3.19). Para um dado  $R_f$  e  $t_f$ , os experimentos usuais em Hele-Shaw consideram o bombeamento do fluido a uma taxa de injeção constante, que pela Eq. (2.22) é dada por

$$Q_0 = \pi \frac{(R_f^2 - R_0^2)}{t_f}. \quad (3.20)$$

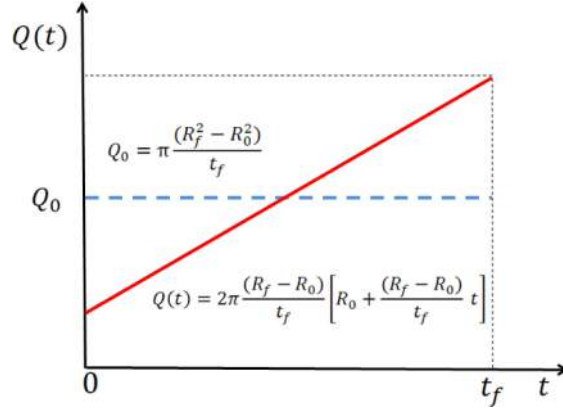


Figura 3.5: Representação da taxa de injeção ótima em função do tempo (curva contínua). A taxa de injeção constante equivalente é representada pela linha tracejada horizontal. O volume de fluido injetado no intervalo  $[0, t_f]$  deve ser o mesmo para ambas injeções.

Desejamos comparar o comportamento dinâmico e a interface resultante obtida usando a taxa de injeção constante (3.20) e o bombeamento ideal (3.19) em  $t = t_f$ . Uma representação esquemática do comportamento de  $Q(t)$  e  $Q_0$  com o passar do tempo é ilustrada na Fig. 3.5. Note que da Eq. (3.20), os parâmetros relevantes para manter fixos no mecanismo de controle podem ser  $R_f$  e  $t_f$  ou  $Q_0$  e  $t_f$ .

Os resultados lineares são obtidos utilizando valores que são consistentes com as realizações experimentais típicas do fluxo em Hele-Shaw [37, 42, 71, 171]:  $R_0 = 4.5$  mm,  $b = 1.0$  mm,  $\sigma = 25.0$  mN/m,  $\eta_2 = 0.485$  Pa s, com  $\eta_2 \gg \eta_1$ . Além disso, fixamos  $R_f = 4.8$  cm e  $t_f = 18$  s. Daqui em diante focaremos na situação mais instável possível  $A = 1$ , que corresponde à situação mais desafiadora.

Na Fig. 3.6, o gráfico da esquerda ilustra as integrais dadas pela Eq. (3.13) em  $t = t_f$ , para a taxa de injeção ótima  $I$  (curva contínua) e para a taxa de injeção equivalente  $I_0$  (curva tracejada) como função do número de onda  $n$ . Analisando a Fig. 3.6, observamos uma significativa redução do máximo de  $I(n)$  (definido por  $I^{max}$ ) quando o bombeamento ótimo é utilizado. Como as amplitudes de perturbação são calculadas pela exponencial das integrais  $I$  e  $I_0$  [Eq. (3.12)], a diminuição no tamanho relativo dos dedos viscosos é de aproximadamente uma ordem de grandeza. Essa discrepância pode ser vista claramente no gráfico da direita na Fig. 3.6, onde ilustra a amplitude de perturbação dividida pelo raio final  $R_f$  em  $t = t_f$ , para a taxa de injeção ótima  $\zeta_n(t_f)/R_f$  (curva contínua) e para a

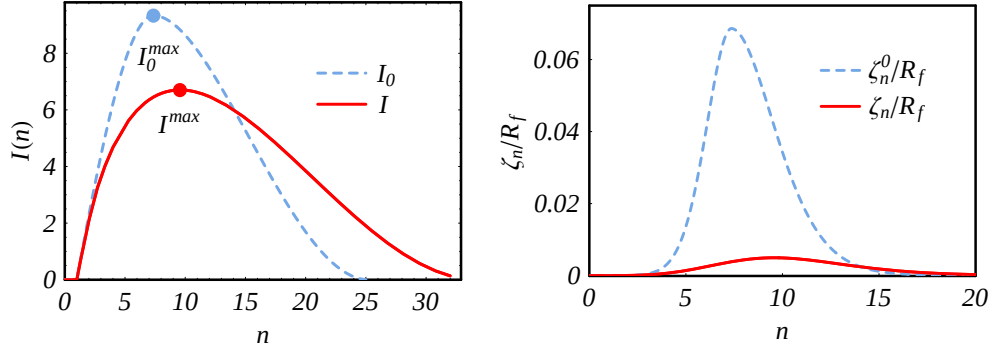


Figura 3.6: Gráfico à esquerda: a curva contínua vermelha representa a integral  $I$  como função do modo  $n$ , calculada para taxa de injeção ótima (3.19). A curva tracejada ilustra a integral correspondente  $I_0$  para o processo de bombeamento constante (3.20). O gráfico à direita ilustra a amplitude de perturbação dividida pelo raio final  $R_f$  em  $t = t_f$  em função do número de onda  $n$

taxa de injeção constante equivalente (curva tracejada) em função do número de onda  $n$ . A razão física pelo sucesso de nosso protocolo é dada pela mesma explicação do processo de injeção em duas etapas: inicialmente a taxa de injeção é suficientemente baixa [Fig. 3.5] de modo que a propagação de uma interface não perturbada é possível. Com o passar do tempo a taxa de bombeamento aumenta consideravelmente, mas como isso ocorre quando o raio da interface é relativamente grande, a injeção não é mais capaz de promover uma significativa desestabilização do contorno entre os fluidos. Em outras palavras, o início da instabilidade é atrasado e, quando eventualmente as perturbações se iniciam, a taxa de crescimento das amplitudes se encontra bastante reduzida.

É importante investigar a generalidade de nossos resultados lineares. Em especial, seria interessante investigar a robustez do nosso método quando aumentamos  $Q_0$  ou  $t_f$ . Essa questão pode ser quantitativamente expressa em termos de um tempo final adimensional e de um número de capilaridade *modificado*

$$T_f = \frac{Q_0 t_f}{\pi R_0^2} \text{ e } \text{Ca} = \frac{12\eta_2 Q_0}{\pi R_0 \sigma} \left( \frac{R_0}{b} \right)^2,$$

onde comprimentos e velocidades estão rescalonados por  $R_0$  e  $Q_0/(\pi R_0)$ , respectivamente. A Fig. 3.7 mostra a razão entre o máximo da amplitude de perturbação em  $t = t_f$ ,  $\zeta_0/\zeta \equiv \exp[I_0^{\max} - I^{\max}]$ , em função de  $T_f$ , para dois valores do número de capilaridade

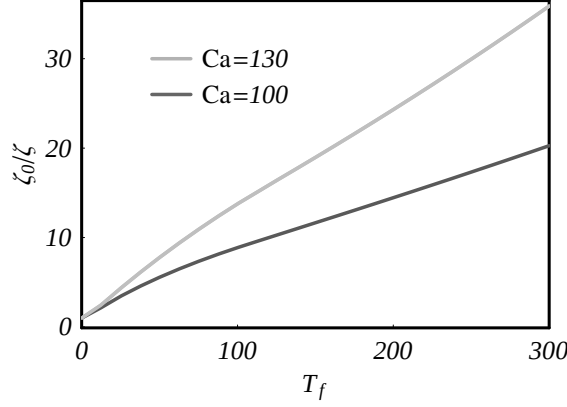


Figura 3.7: Razão das amplitudes  $\zeta_0/\zeta$  em função de  $T_f$ , para  $Ca = 100, 130$ .  $\zeta_0$  ( $\zeta$ ) representa o máximo da amplitude utilizando a injeção constante (ideal) em  $t = t_f$ .

Ca. Analisando a Fig. 3.7, é evidente que a razão  $\zeta_0/\zeta$  cresce com o aumento de  $T_f$  e de Ca. Vale salientar que utilizando a taxa de bombeamento ideal (3.19) para grandes valores de  $T_f$  e Ca, a interface pode eventualmente apresentar deformações. Porém, as amplitudes de tais perturbações sempre serão consideravelmente menores que aquelas obtidas pela taxa de injeção constante. Veremos que essa predição linear é consistente com nossos experimentos e simulações não lineares.

Assim como na Seq. 3.2, vamos comprovar nossas previsões lineares e ainda acessar a resposta do sistema ao nosso protocolo de minimização em estágios mais avançados da dinâmica. Para isso, realizamos uma série de experimentos e simulações. As características do aparato experimental são as mesmas utilizadas na Seq. 3.2. Padrões experimentais da interface fluido-fluido estão ilustrados na Fig. 3.8: (a) e (b)  $Q_0 = 2.08 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $t_f = 20$ ; (c) e (d)  $Q_0 = 3.75$  e  $t_f = 6.7 \text{ s}$ . É claramente visto que existem duas classes distintas de padrões. Quando a taxa de injeção é constante [(a) e (c)], observam-se estruturas de dedos viscosos bastante deformadas. Considerando o achatamento dos dedos, podemos afirmar que na Fig. 3.8(a) o padrão se encontra no começo do estágio não linear. Por outro lado, o grande comprimento dos dedos e a existência de bifurcação indica que em (c) a interface está em um regime fortemente não linear. Contudo, se a taxa de injeção ideal é utilizada [(b) e (d)] obtemos padrões consideravelmente menos deformados. Os dedos viscosos são suprimidos em (b) e o crescimento da instabilidade é fortemente inibido em (d).

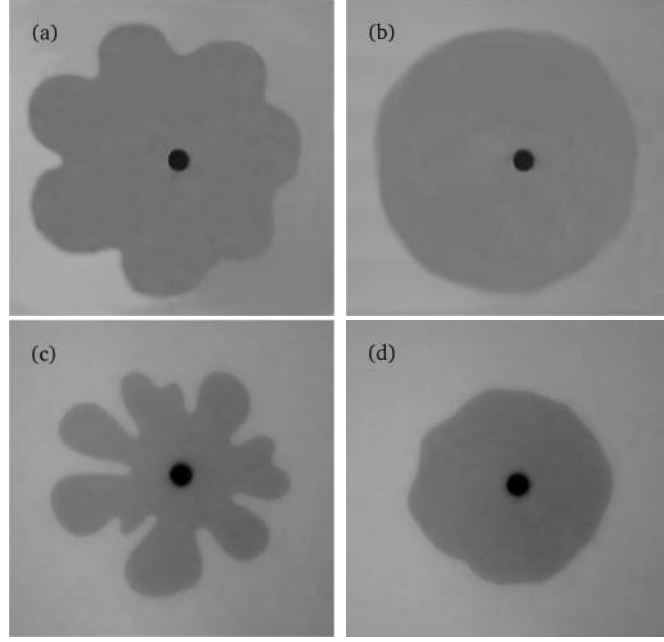


Figura 3.8: Padrões experimentais típicos em  $t_f = 20$  s para (a)  $Q_0 = 2.08$  cm<sup>2</sup>/s e (b) a taxa de injeção ideal correspondente. Para (a) e (b)  $T_f = 65$  e  $Ca = 112$ . As interfaces (c) e (d) são ilustradas em  $t_f = 6.7$  s, considerando taxa de injeção  $Q_0 = 3.75$  cm<sup>2</sup>/s e a taxa de injeção ideal, respectivamente. Em (c) e (d)  $T_f = 40$  e  $Ca = 200$ .

Finalmente, em colaboração com Enrique Alvarez-Lacalle da Universitat Politècnica de Catalunya, Espanha, foram realizadas simulações numéricas de integrais de contorno para a evolução não linear da interface, considerando injeção constante (painel da esquerda na Fig. 3.9) e a injeção ótima (painel da direita na Fig. 3.9). A mesma condição inicial foi usada para ambos os padrões: um círculo modulado por modos de 2 a 10, cada um com amplitudes de  $0.008R_0$  e fases aleatórias. O algoritmo numérico está descrito em detalhes na Ref. [172]. A Fig. 3.9 ilustra padrões com dedos de grande comprimento quando a taxa de injeção é constante e formas aproximadamente circulares quando a taxa de injeção ideal é utilizada. Note que as morfologias simuladas numericamente se assemelham àquelas obtidas pelo experimento ilustrado na Fig. 3.8.

Esses resultados experimentais e numéricos comprovam as nossas previsões teóricas, demonstrando a utilidade do nosso protocolo de controle dos dedos viscosos em estágios não lineares. Acreditamos que esse protocolo nos leva um passo a frente na pesquisa atual sobre o melhor controle possível dos padrões de interfaces instáveis. A minimização dos



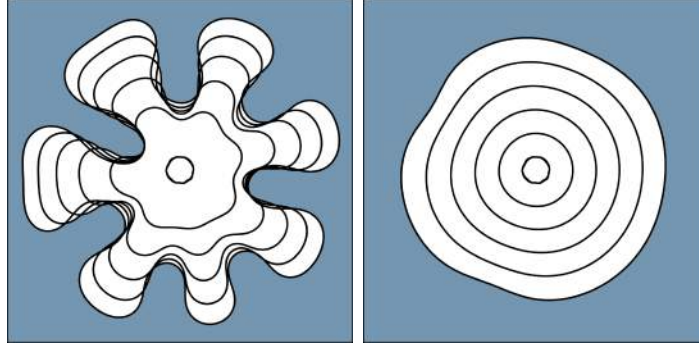


Figura 3.9: Simulações numéricas não lineares ilustrando a evolução temporal das interface para a injeção constante  $Q_0 = 1.25 \text{ cm}^2/\text{s}$  (padrões a esquerda) e para a taxa de injeção ideal (padrões a direita). Foi considerado  $t_f = 240 \text{ s}$ ,  $R_f = 9.8 \text{ cm}$  e  $R_0 = 1.0 \text{ cm}$ . Além disso,  $T_f = 95$  e  $\text{Ca} = 95$ .

dedos viscosos através do método variacional, que se encontra na Ref. [77], foi motivo de uma reportagem da Revista Pesquisa Fapesp na edição de Nov/2012 [86].

Antes de prosseguir, um importante esclarecimento sobre o método variacional deve ser dado: apesar da simplicidade, o processo de minimização descrito anteriormente não fornece uma prova matemática rigorosa de que realmente a solução de Euler-Lagrange nos fornece a verdadeira taxa de injeção ideal. Note que nossa principal aproximação nesse método é que minimizamos a integral  $I(n_{\max}, R, \dot{R})$ , onde  $n = n_{\max}$  corresponde ao modo de máxima taxa de crescimento, ao invés de minimizarmos  $I(n_{\max}^{\zeta}, R, \dot{R})$  que corresponde a uma tarefa bem mais complicada (relembrando que  $n_{\max}^{\zeta}$  corresponde ao modo de máxima amplitude  $\zeta_n$  em  $t = t_f$ ). Por outro lado, a validade e simplicidade de nosso modelo de minimização foram comprovadas por experimentos e simulações numéricas. Logo, apesar do fato de nosso protocolo não fornecer a solução ótima exatamente, ele oferece uma aproximação útil e simples para resolver o problema.

Na próxima seção aplicaremos esse método variacional ainda em instabilidades de interfaces fluido-fluido em Hele-Shaw, mas utilizando fluidos não newtonianos. Além dos problemas hidrodinâmicos em Hele-Shaw, no próximo capítulo utilizaremos nosso protocolo de minimização em importantes sistemas físicos: (i) fluxos em meio poroso, (ii) crescimento de cristais, (ii) descarga elétrica e (iii) forças adesivas em fluidos.

### 3.3.3 O método de minimização variacional para fluidos complexos em Hele-Shaw

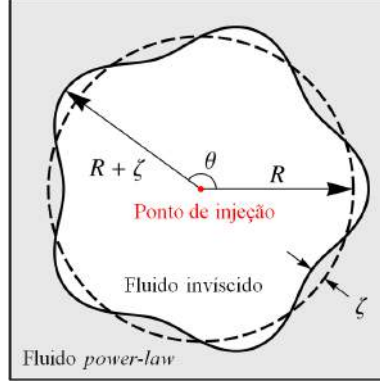


Figura 3.10: Figura esquemática (vista superior) do fluxo na célula de Hele-Shaw radial. O fluido interno tem viscosidade desprezível e o fluido externo é um fluido não newtoniano. A interface não perturbada (curva tracejada) corresponde a um círculo de raio  $R = R(t)$ . A amplitude de perturbação da interface é representada por  $\zeta$ . A injeção é realizada no centro da célula.

Considerando a importância científica e prática de fluxos não newtonianos em Hele-Shaw, examinamos nesta seção o processo variacional de minimização supondo que o fluido deslocado é não newtoniano [108]. Como na Ref. [95], estudamos uma situação em que o fluido externo possui a mais simples reologia não newtoniana: a viscosidade depende da taxa de cisalhamento por uma lei de potência (Fig. 3.10). Nessa circunstância, vamos nos concentrar na compreensão de como o protocolo de estabilização da Seç. 3.3 para fluidos newtonianos [77] é modificado ao considerarmos que o fluido deslocado possa ser tanto shear-thinning (viscosidade diminui com o aumento do cisalhamento) quanto shear-thickening (viscosidade aumenta com o aumento do cisalhamento).

Considere um fluido newtoniano de viscosidade desprezível deslocando um fluido viscoso não newtoniano. O fluido não newtoniano, abordado nesta seção, é descrito pela lei de potência de Oswald-de-Waele [88, 95, 173, 174] cuja equação constitutiva é dada por

$$\mathbf{\Pi} = 2m[2\mathbf{e} : \mathbf{e}]^{(\alpha-1)/2} \mathbf{e}, \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{\Pi}$  é o tensor de estresses viscosos, com  $\mathbf{u}$  sendo o vetor velocidade tridimensional e  $\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T$  é o tensor taxa de cisalhamento, onde  $T$  representa a transposição da matriz. Na Eq. (3.21), os dois pontos representam um produto interno duplo e  $m$  e  $\alpha$  são constantes materiais positivas. A constante  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2$ ) é o chamado “índice” da lei de potência. Perceba a diferença entre a relação constitutiva do fluido complexo descrito pela lei de Oswald-de-Waele (3.21) e do fluido newtoniano  $\mathbf{\Pi} = \eta \mathbf{e}$  (2.4), onde o coeficiente de viscosidade  $\eta$  da Eq. (2.4) é substituído pela função  $2m[2\mathbf{e} : \mathbf{e}]^{(\alpha-1)/2}$ . Quando  $\alpha = 1$  retornamos ao caso newtoniano, com  $m = \eta/2$  (3.21).

Ignorando efeitos de inércia, as equações que governam o sistema são a equação de Navier-Stokes

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \nabla p \quad (3.22)$$

e a condição de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.23)$$

Além disso, para o fluxo quase bidimensional da célula de Hele-Shaw, o problema é especificado por duas condições de contorno [3, 10], como discutidas no Cap.2: (i) a condição cinemática (2.27) e (ii) o salto de pressão na interface (2.19), para o qual vamos considerar, assim como nas seções anteriores, apenas a contribuição da curvatura paralela ao plano da célula ( $\mu = 0$  e  $\gamma = 0$ ).

Note que para esse sistema não temos uma lei de Darcy que governa a dinâmica do fluido de Oswald-de-Waele na célula de Hele-Shaw, e sim, uma equação de Navier-Stokes tridimensional (3.22). Porém, um procedimento similar àquele realizado nas Seções 2.2 e 2.3 permite obter a equação de movimento para as amplitudes de perturbação  $\zeta_n$ . Explicaremos brevemente os passos da análise de estabilidade linear. Para maiores detalhes ver a dedução realizada por Sader na Ref. [95]. Primeiramente, admitimos que a componente  $z$  da velocidade é nula no fluxo em Hele-Shaw e, então, realizamos uma média trasversal das Eqs. (3.22) e (3.23) impondo a condição de não deslizamento nas placas da célula ( $\mathbf{u} = 0$  em  $z = 0$  e  $z = b$ ). Do resultado desse processo, obtemos as Eqs. (3.22) e (3.23) em função da velocidade bidimensional do fluxo em Hele-Shaw (2.9) e, então, expandimos em série

de Fourier. Para relacionar  $\zeta_n$  e as amplitudes da expansão das velocidades, utilizamos a condição cinemática (2.27). Por outro lado, através da equação da continuidade relacionamos as componentes  $v_x$  e  $v_y$  da velocidade bidimensional. Finalmente, substituindo a condição dinâmica de contorno (2.19) na equação de Navier-Stokes calculada na interface ( $r = \mathcal{R}$ ) e aplicando a inversa de Fourier, obtemos a equação dinâmica  $\dot{\zeta}_n = \Lambda(n)\zeta_n$  com a taxa de crescimento

$$\Lambda(n) = \frac{\dot{R}}{R} \left[ \frac{n^2}{c(n)} - 1 \right] - \Gamma(\alpha) \frac{\dot{R}^{(\alpha-1)}}{R^{(5-2\alpha)}} \left[ \frac{n^2(n^2-1)}{c(n)} \right], \quad (3.24)$$

onde

$$c(n) = \frac{1 - \alpha + \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 4n^2\alpha}}{2} \quad (3.25)$$

e

$$\Gamma(\alpha) = \left[ \frac{4 - c(2)}{12} \right] \left( \frac{\sigma b^2}{2\eta} \right)^{(2-\alpha)}. \quad (3.26)$$

Na Eq. (3.26),  $\eta$  é uma constante de dimensão de viscosidade onde no limite  $\alpha = 1$  representa o coeficiente de viscosidade newtoniano do fluido. A Eq. (3.24) reproduz a dispersão linear clássica [(3.3) e (3.16)] para fluidos newtonianos quando fazemos  $\alpha = 1$ . A solução da equação diferencial linear para  $\zeta_n$  é dada pela Eq. (3.12).

Ressaltamos que os resultados teóricos apresentados ao longo desta seção são obtidos utilizando valores consistentes com os experimentos típicos em fluxo em Hele-Shaw, tanto para fluidos newtonianos [37, 42, 45, 71, 74, 175] quanto não newtonianos [87, 89–91]:  $\eta = 8$  g/(cm s),  $\sigma = 25$  dyne/cm,  $b = 0.1$  cm e  $R_0 = 0.45$  cm. Nesta seção, nosso objetivo é aplicar o método variacional de minimização neste sistema mais complexo, envolvendo o fluxo radial em Hele-Shaw de um fluido viscoso deslocando um fluido não newtoniano.

O número de onda de máxima taxa de crescimento  $[d\Lambda(n)/dn]_{n=n_{\max}} = 0$  é dado por

$$n_{\max} = \sqrt{\frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{(R^2 \dot{R})^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \right]} \approx \sqrt{\frac{(R^2 \dot{R})^{2-\alpha}}{3\Gamma(\alpha)}}. \quad (3.27)$$

### 3.3 Método variacional de minimização de instabilidades de interfaces

---

A aproximação acima é válida para situações instáveis da interface. Vamos agora aplicar o método de minimização variacional utilizando a taxa de crescimento (3.24). Substituindo  $n_{max}$  da Eq.(3.27) em (3.24), obtemos

$$\Lambda(n_{max}, R, \dot{R}) \approx \frac{2}{3\sqrt{3\alpha\Gamma(\alpha)}} \frac{\dot{R}^{2-\alpha/2}}{R^{\alpha-1}} - \frac{\dot{R}}{R}. \quad (3.28)$$

Esta taxa de crescimento simplificada é obtida considerando  $c(n) \approx n\sqrt{\alpha}$ . Verificamos que a aproximação  $c(n) \approx n\sqrt{\alpha}$  gera um erro menor que 5 % para o valor de  $n_{max}$  se  $0 < \alpha < 1.8$  e, portanto, em termos práticos, pode ser utilizada. Essa hipótese será utilizada no decorrer desta seção, e é um ponto chave para permitir o acesso analítico dos nossos resultados.

Relembrando que se deseja injetar uma certa quantidade de um fluido invíscido com um raio inicial  $R_0$  a um raio final  $R_f$ , durante um intervalo de tempo  $[0, t_f]$  minimizando (3.14). Aplicando Euler-Lagrange (3.15), obtemos a equação diferencial

$$\ddot{R} = \frac{2(\alpha - 1)}{(4 - \alpha)} \frac{\dot{R}^2}{R}, \quad (3.29)$$

com solução analítica dada por

$$R(t) = \left[ R_0^\gamma + \frac{(R_f^\gamma - R_0^\gamma)}{t_f} t \right]^{1/\gamma}, \quad (3.30)$$

onde

$$\gamma = \frac{3(2 - \alpha)}{(4 - \alpha)}. \quad (3.31)$$

Da Eq. (3.1)  $Q(t) = 2\pi R\dot{R}$  e a taxa de injeção ótima é dada por

$$Q(t) = 2\pi \frac{(R_f^\gamma - R_0^\gamma)}{\gamma t_f} \left[ R_0^\gamma + \frac{(R_f^\gamma - R_0^\gamma)}{t_f} t \right]^{(2-\gamma)/\gamma}. \quad (3.32)$$

É interessante notar que a taxa de bombeamento ideal (3.32) não depende do espaçamento  $b$  entre as placas da célula de Hele-Shaw ou das propriedades materiais dos fluidos ( $\eta$  e  $\sigma$ ),

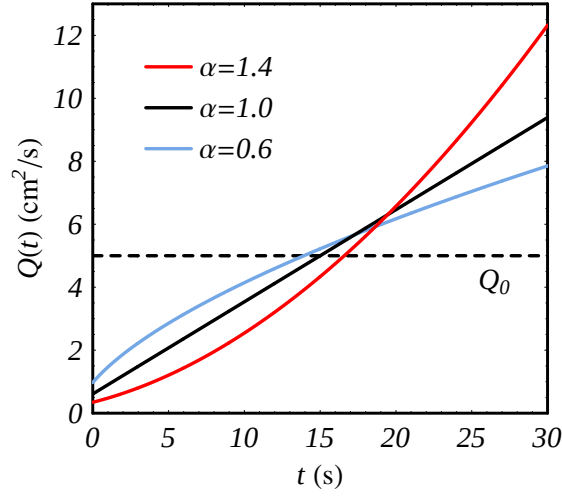


Figura 3.11: Taxa de injeção em função do tempo para a injeção ótima  $Q(t)$  (curvas contínuas) e para a taxa de injeção constante  $Q_0$  (curva tracejada). Assumimos  $\alpha = 1.4$ ,  $\alpha = 1.0$  e  $\alpha = 0.6$ . O volume total de fluido injetado (ou a área sob as curvas) no intervalo  $[0, t_f]$  deve ser a mesma para todas as taxas de bombeamento.

assim como a injeção ideal encontrada para fluidos newtonianos (3.19). No entanto, existe uma clara dependência do índice  $\alpha$  da lei de potência de Oswald-de-Waele. Observe que quando  $\alpha = 1$  ( $\gamma = 1$ ), a Eq. (3.32) reproduz o resultado newtoniano (3.19) originalmente obtido na Ref. [77], onde a taxa de injeção ideal evolui linearmente no tempo.

A Fig. 3.11 ilustra como a taxa de injeção ideal  $Q(t)$  [Eq. (3.19)] varia com o tempo, quando o fluido deslocado é newtoniano ( $\alpha = 1$ ), shear-thinning ( $\alpha = 0.6$ ) e shear-thickening ( $\alpha = 1.4$ ). A linha horizontal tracejada representa a taxa de injeção constante equivalente  $Q_0$  [Eq. (3.20)]. Consideramos  $Q_0 = 5 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $t_f = 30 \text{ s}$ . Vale a pena observar que, quando o fluido deslocado é do tipo shear-thinning (shear-thickening), para minimizar as amplitudes de perturbação deve-se primeiro injetar a uma taxa de injeção mais (menos) elevada do que o bombeamento ideal do caso newtoniano ( $\alpha = 1$ ). Com o passar do tempo a situação oposta deve ocorrer para garantir a injeção da mesma quantidade de fluido no mesmo intervalo de tempo: injeção inferior (superior) à taxa de bombeamento do caso newtoniano, se o fluido deslocado é shear-thinning (shear-thickening).

Assim como na Seq. 3.3, compararemos a interface resultante obtida utilizando o bombeamento constante (3.20) e a taxa de injeção ideal (3.32) em  $t = t_f$ . Os resultados apresentados na Fig. 3.12 são obtidos tomando a amplitude de perturbação inicial  $10^{-4}R_0$

### 3.3 Método variacional de minimização de instabilidades de interfaces

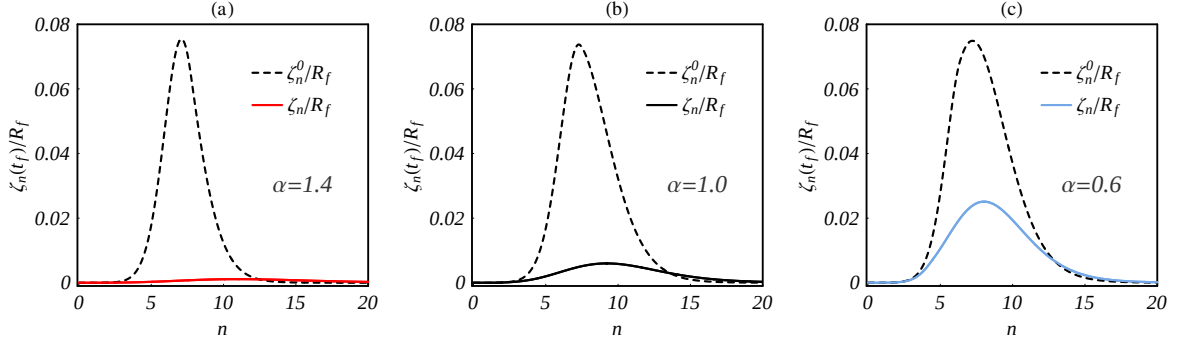


Figura 3.12: Amplitude de perturbação dividida pelo raio final  $R_f$  em  $t = t_f$ , para a taxa de injeção ótima  $\zeta_n(t_f)/R_f$  (curva contínua) e para a taxa de injeção constante equivalente (curva tracejada) em função do número de onda  $n$ .

e o tempo final  $t_f = 27$  s. A Fig. 3.12 ilustra a amplitude dada pela Eq. (3.12) dividida pelo raio não perturbado em  $t_f$ , para o bombeamento ótimo  $\zeta_n(t_f)/R_f$  (curvas contínuas) e para a taxa de injeção constante equivalente  $\zeta_n^0(t_f)/R_f$  (curvas tracejadas) como função do número de onda  $n$ . A taxa de injeção constante  $Q_0$  e  $\alpha$  são: (a)  $11.1 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $1.4$ ; (b)  $2.26 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $1.0$ ; (c)  $1.0 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $0.6$ . Note na Fig. 3.12 que os valores de  $Q_0$  foram escolhidos de modo que  $\zeta_n^0(t_f)/R_f$  possuisse a mesma magnitude ( $\approx 0.08$ ). Esse procedimento nos permite comparar a eficácia do método variacional para os diferentes índices  $\alpha$  da lei de potência.

Examinando a Fig. 3.12, vemos facilmente uma redução substancial das amplitudes de perturbação em  $t = t_f$  quando a taxa de injeção ideal é utilizada. Além disso, observa-se que o protocolo de estabilização é mais eficaz para fluidos shear-thickening [Fig. 3.12(a)]. A razão física para a grande estabilização do sistema é similar à justificativa discutida na Sec. 3.3.2 para fluidos newtonianos. O fato do protocolo ser mais eficaz para fluidos shear-thickening  $\alpha > 0$  (situação mais instável) é consistente com nossos resultados anteriores para fluidos newtonianos, onde foi observado que em situações mais instáveis da dinâmica (valores maiores de capilaridade), melhor era o efeito estabilizante da taxa de injeção ideal. Por fim, observe que a aceleração (ou concavidade) da taxa de injeção ótima depende da característica não newtoniana do fluido (shear-thickening ou shear-thinning).

A eficiência do protocolo variacional pode ser vista ainda mais facilmente na Fig. 3.13. Essa figura ilustra a evolução da interface para a taxa de injeção constante (painel es-

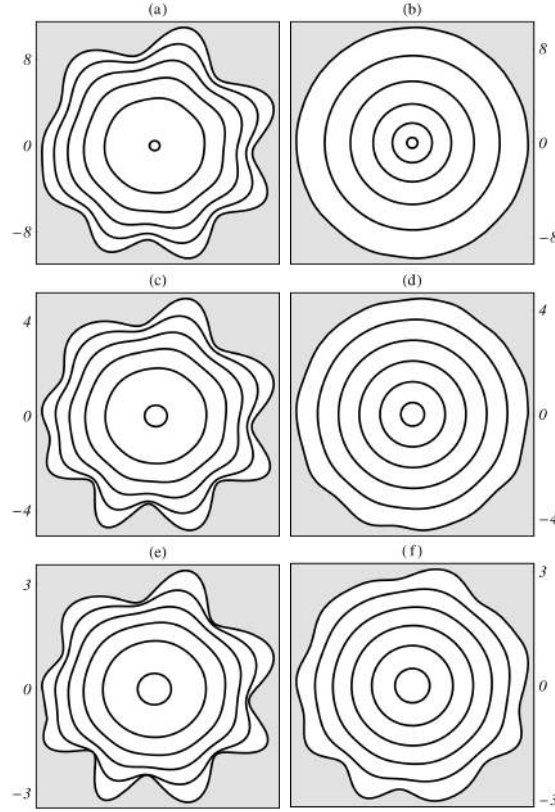


Figura 3.13: Evolução linear das interfaces fluido-fluido durante a taxa de injeção constante (coluna da esquerda) e utilizando a taxa de bombeamento ótima (coluna da direita) para:  $11.1 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $\alpha = 1.4$  [(a) e (b)],  $2.26 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $\alpha = 1.0$  [(c) e (d)] e,  $1.0 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $\alpha = 0.6$  [(e) e (f)]. Os comprimentos estão representados em centímetros.

querdo), e os padrões de interface para a situação ideal de bombeamento (painel direito) em  $t_f = 27 \text{ s}$ , em intervalos de tempo  $\Delta t = t_f/5$ . Os valores de  $Q_0$  e  $\alpha$  são os mesmos utilizados na Fig. 3.12: [(a) e (b)]  $11.1 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $1.4$ ; [(c) e (d)]  $2.26 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $1.0$ ; e [(e) e (f)]  $1.0 \text{ cm}^2/\text{s}$  e  $0.6$ . Os padrões da Fig. 3.13 têm as mesmas condições iniciais (incluindo fases aleatórias atribuídas a cada modo de Fourier) e 40 modos foram considerados.

É evidente que a formação de dedos é consideravelmente inibida nas interfaces mostradas no painel direito da Fig 3.13. Como observamos na Fig. 3.12, a Fig. 3.13 ilustra que a minimização dos dedos emergentes para fluidos shear-thickening é mais eficaz em comparação com o protocolo utilizado para fluidos shear-thinning. No entanto, como mostrado nas Figs. 3.13(e) e 3.13(f), o nosso método variacional ainda é capaz de diminuir consideravelmente a magnitude das perturbações interfaciais, mesmo no caso shear-thinning.



Outra possível extensão desse processo de estabilização seria a investigação de técnicas que minimizem outros tipos de fluidos complexos, como fluidos viscoelástico e fluidos yield-stress [92–94, 106, 176, 177], em que efeitos como a elasticidade e plasticidade devem ser levados em consideração.

## Capítulo 4

# Aplicações do método de minimização variacional

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a dinâmica de interface dos seguintes sistemas discutidos no Cap. 1: (i) a instabilidade de Saffman-Taylor em um meio poroso tridimensional; (ii) o crescimento dendrítico de cristais [12–24], que está associado com a instabilidade de Mullins-Sekerka [25, 26]; e (iii) o crescimento e a propagação de ondas de ionização através de descargas elétricas [5–7, 27–30]. Esses três sistemas distintos possuem uma característica em comum, dada pela existência de uma dinâmica de contorno entre duas fases, onde a competição entre forças estabilizantes e desestabilizantes determinam a evolução da interface existente. Neste capítulo, ao invés de estudar o desenvolvimento desses padrões, nosso principal objetivo é oferecer meios práticos de controlá-los e eventualmente suprimi-los. Os resultados obtidos neste capítulo encontram-se nas nossas Refs. [127, 128].

Assim como os dedos viscosos não são desejados em alguns procedimentos, como no processo de extração de petróleo, vimos no Cap. 1 que algo similar acontece no problema de crescimento de cristal, mais precisamente em processos de moldagem de cristais [22]. Nessa circunstância, é vantajoso suprimir as instabilidades de Mullins-Sekerka e prevenir a formação de dendritos. Além disso, sabemos que alguns processos industriais, como

por exemplo, a purificação de água e o processamento químico de gases otimizariam sua eficiência se a formação dos complexos padrões devido a descargas elétricas pudessem ser controlada [7]. Portanto, vemos que é de grande interesse científico e tecnológico investigar meios de minimizar o crescimento dessas complexas instabilidades. Utilizaremos o método variacional deduzido no Cap. 3, que foi bem sucedido na estabilização dos dedos viscosos na interface fluido-fluido, com o intuito de minimizar as perturbações que aparecem nos processos discutidos acima.

No problema de Saffman-Taylor, o método variacional forneceu uma taxa de injeção ideal com o intuito de estabilizar os dedos viscosos. Na instabilidade de Mullins-Sekerka, por outro lado, o método variacional é utilizado a fim de obter uma forma funcional do fluxo de calor (ou campo de temperatura) longe do contorno entre as fases que permita o crescimento do cristal porém minimizando as instabilidades de sua interface. Finalmente, no processo de descarga elétrica, obtemos a carga ou corrente elétrica ótima que deve ser introduzida no sistema.

## 4.2 Minimização das instabilidades no fluxo radial em meio poroso

Como já discutido anteriormente, a formação dos dedos viscosos acontece quando um fluido menos viscoso desloca um fluido mais viscoso confinados em uma célula de Hele-Shaw ou em um meio poroso. A equação dinâmica desses dois sistemas são similares, porém como a acessibilidade a um dispositivo de Hele-Shaw é maior, esse sistema tem fornecido numerosas contribuições na compreensão da instabilidade de Saffman-Taylor. Por outro lado, como o processo real de extração de petróleo é realizado em meios porosos, nos motivamos em estudar a dinâmica dos dedos viscosos nesse meio com o intuito de tentar estabilizá-la, como realizado na Seq. 3.3.1 [77]. Neste capítulo, desejamos deslocar um fluido viscoso em um meio poroso (como o petróleo preso nas rochas subterrâneas) através de um fluido menos viscoso sem proporcionar a formação de grandes deformações

da interface, que como sabemos é uma das grandes fontes de ineficiência na recuperação de petróleo.

Nesta seção, aplicaremos o método variacional discutido na Seq. 3.3.1, que constitui uma abordagem bem distinta dos métodos até então utilizados em meio poroso. Os resultados apresentados nesta seção encontram-se na Ref. [127]. A pergunta fundamental do protocolo de minimização é a mesma originalmente proposta no Cap. 3: caso desejamos injetar uma certa quantidade de fluido em um dado intervalo de tempo, que taxa de injeção ideal deveria ser utilizada para que as amplitudes de perturbação sejam minimizadas? Nós aplicaremos esse método em um fluxo radial de um fluido invíscido deslocando um fluido viscoso completamente em um meio poroso uniforme.

Em um meio poroso macroscopicamente uniforme, o início da instabilidade durante o deslocamento de dois fluido imiscíveis foi primeiramente compreendido pela teoria desenvolvida por Chuoke *et al.* [126] e por uma extensão realizada por Neuman e Chen [178]. Chuoke *et al.* propuseram que a interface fluido-fluido é sujeita a forças estabilizantes proporcionais à curvatura macroscópica da interface, onde o fator de proporcionalidade representa uma tensão superficial efetiva. Além disso, a Ref. [126] observou que quando um fluido de maior viscosidade e quando menores tensões superficiais são considerados, dedos viscosos de menor comprimento de onda são observados. Esse comportamento é similar à dinâmica de interfaces em Hele-Shaw. Além disso, a instabilidade dos dedos viscosos em meios porosos, assim como em Hele-Shaw, é bastante influenciada pelas propriedades de molhamento dos fluidos com o meio. Nas referências [179,180], foi observado que quando o óleo molha o meio poroso durante seu deslocamento (*oil-wet media*), os dedos formam padrões fractais com tamanho da ordem da largura dos poros do meio. Por outro lado, quando a água corresponde ao fluido molhante (*water-wet media*), os dedos emergentes são bem mais largos em comparação com o tamanho dos poros do meio [181]. Mais ainda, existem teorias alternativas para fluxos em meios porosos que consideram variações da saturação na região do fluido menos viscoso, ou seja, o fluido menos viscoso não desloca completamente o fluido mais viscoso, ocasionando um fluxo hidrodinâmico de duas fases. Uma das consequências desse processo é a redução da mobilidade dos fluidos [10]. Outros modelos consideram a heterogeneidade do meio poroso [171,182].

Não obstante, a teoria desenvolvida na Ref. [126] explica satisfatoriamente as observações experimentais das Refs. [37, 126, 181, 183].

Com esses fatos em mente, consideramos a teoria de Chuoke *et al.* para um meio poroso tridimensional uniforme. Então usamos o método variacional do Cap. 3 a fim de minimizar as perturbações durante um crescimento radial de uma interface fluido-fluido. Considere um meio poroso tridimensional uniforme contendo um fluido incompressível de viscosidade  $\eta_1$  inicialmente com um formato esférico de raio  $R_0$  e com seu centro localizado na origem do sistema de coordenadas. Um fluido de mais alta viscosidade  $\eta_2$  circunda o fluido 1 preenchendo todo o meio poroso. Então, o fluido menos viscoso é injetado a uma taxa  $Q(t)$  (volume ocupado por unidade de tempo, o qual pode variar no tempo) na origem do sistema de coordenadas, deslocando o fluido mais viscoso completamente e gerando o crescimento de uma interface instável. O cálculo de estabilidade linear desse sistema é similar à análise descrita no Cap. 2, Seç. 2.2, porém em uma extensão tridimensional. Consideramos perturbações harmônicas de uma interface esférica, cuja posição é escrita na forma

$$\mathcal{R}(\theta, \phi, t) = R(t) + \zeta(\theta, \phi, t), \quad (4.1)$$

onde  $\theta$  é o ângulo polar,  $\phi$  é o ângulo azimutal,  $\zeta(\theta, \phi, t)$  representa a perturbação da superfície esférica e  $R = R(t)$  é o raio não perturbado da interface fluido-fluido, o qual depende do tempo. Para a interface tridimensional, representamos por conveniência  $\zeta(\theta, \phi, t)$  em termos dos harmônicos esféricos

$$\zeta(\theta, \phi, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \zeta_{lm}(t) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.2)$$

com  $\zeta_{lm}(t)$  sendo as amplitudes dos harmônicos esféricos. Finalmente, a conservação de volume leva à equação que representa a evolução temporal de  $R$ ,

$$R(t) = \left( R_0^3 + \frac{3}{4\pi} \int_0^t Q(t') dt' \right)^{1/3}. \quad (4.3)$$

A equação hidrodinâmica em um meio poroso uniforme é governada pela lei de Darcy [126],

$$\mathbf{v}_j = -\frac{k}{\eta_j}(\nabla p_j - \rho_j g \mathbf{z}), \quad (4.4)$$

onde  $j = 1$  (2) para o fluido menos viscoso (mais viscoso),  $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(r, \theta, \phi, t)$  representa a velocidade tridimensional,  $k$  é a permeabilidade do meio poroso,  $\eta_j$  é a viscosidade do fluido,  $p_j = p_j(r, \theta, \phi, t)$  é a pressão hidrodinâmica,  $g$  é a aceleração gravitacional e  $\rho_j$  representa a densidade do fluido. De agora em diante, consideraremos que ambos os fluidos tem aproximadamente a mesma densidade  $\rho_1 \approx \rho_2$ . Para um meio isotrópico e homogêneo  $k$  é uma constante espacial. Nessa circunstância, podemos definir, assim como em Hele-Shaw, um potencial de velocidade  $\Phi_j$ , onde  $\mathbf{v}_j = -\nabla \Phi_j$ . Observando que  $\rho_j g \mathbf{z} = \nabla(\rho_j g z)$  e subtraindo a expressão  $\eta_i \Phi_i$  na Eq. (4.4) para  $j = 1$  e  $j = 2$  calculada na interface fluido-fluido ( $r = \mathcal{R}$ ), obtemos uma expressão similar à Eq. (2.24) do Cap. 2 dada por

$$A \frac{(\Phi_1|_{\mathcal{R}} + \Phi_2|_{\mathcal{R}})}{2} - \frac{(\Phi_1|_{\mathcal{R}} - \Phi_2|_{\mathcal{R}})}{2} = -\frac{k[(p_1 - p_2) + (\rho_2 - \rho_1)gz]|_{\mathcal{R}}}{\eta_1 + \eta_2}, \quad (4.5)$$

onde  $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ . Como consideramos  $\eta_1 \ll \eta_2$  ( $A = 1$ ) e  $|[(\rho_1 - \rho_2)gz]_{\mathcal{R}}| \ll |(p_1 - p_2)_{\mathcal{R}}|$ , temos

$$\Phi_2|_{\mathcal{R}} = -\frac{k}{\eta_2}(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}}. \quad (4.6)$$

Para um fluxo incompressível, sabemos que  $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$ , de modo que o potencial de velocidade satisfaz  $\nabla^2 \Phi_j = 0$ , cuja a solução para o fluido 2 é dada por

$$\Phi_2(r, \theta, \phi) = \frac{Q(t)}{4\pi r} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Phi_{lm}(t) \left(\frac{r}{R}\right)^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.7)$$

Assim como na Seq. 2.3.1, como  $A = 1$  apenas a solução para o fluido 2 é importante. Nesse contexto, podemos abordar o sistema como o problema de um único fluido. No decorrer desta seção utilizaremos a notação  $\Phi_2(r, \theta, \phi) = \Phi(r, \theta, \phi)$ .

Seguindo os mesmo passos realizados na Seq. 2.3.1, através da condição cinemática de contorno encontra-se uma relação entre  $\Phi_{lm}(t)$  da Eq. (4.7) e  $\zeta_{lm}(t)$ , que em primeira

ordem em  $\zeta$  é escrita na forma  $\partial\mathcal{R}/\partial t = (-\partial\Phi/\partial r)_{r=\mathcal{R}}$ . A outra importante condição de contorno é a condição dinâmica, o qual foi proposta por Chuoke *et al.* [126] de maneira análoga à equação de Young-Laplace (2.19). Chuoke *et al* afirmaram que a diferença de pressão no contorno entre os fluidos é proporcional à curvatura da interface,

$$(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}} = \sigma^* \left[ \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right] + p_c(t), \quad (4.8)$$

onde  $\sigma^*$  representa um coeficiente de tensão superficial macroscópica efetiva,  $r_a$  e  $r_b$  são os dois raios das curvaturas principais da interface e  $p_c(t)$  está relacionado à diferença de pressão capilar na interface microscópica dos poros (dependendo apenas do tempo e não da curvatura). Além disso, como o fluido 1 possui viscosidade desprezível, podemos assumir que a pressão na região ocupada por ele é constante. Chuoke *et al.* consideraram que  $\sigma^* = C\sigma$  e obtiveram  $C = 7.6$ , onde  $\sigma$  é o coeficiente de tensão superficial entre os fluidos. Em experimentos similares realizados na Ref. [181], foram encontrados valores para  $C$  variando de 5.45, em fluxos onde o óleo molha o meio poroso, até 306.25, em fluxos onde a água molha o meio. A curvatura na Eq. (4.8) pode ser reescrita em coordenadas esféricas na forma [184]

$$\left[ \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right] = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta + \nabla_\omega^2 \zeta}{R^2} + O(\zeta^2), \quad (4.9)$$

onde  $\nabla_\omega^2$  representa o laplaciano esférico unitário,

$$\nabla_\omega^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \quad (4.10)$$

Nos próximos cálculos, utilizaremos a propriedade dos harmônicos esféricos

$$\nabla_\omega^2 Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}. \quad (4.11)$$

Com esses resultados, seguindo os mesmos passos da Sec. 2.3.1 e obtemos a equação dinâmica linear para as amplitudes  $\zeta_{lm}$

$$\dot{\zeta}_{lm}(t) = \Lambda(l, R, \dot{R})\zeta_{lm}(t), \quad (4.12)$$

onde

$$\Lambda(l, R, \dot{R}) = \frac{\dot{R}}{R}(l-1) - \frac{1}{\text{Ca}R^3}(l+2)(l^2-1) \quad (4.13)$$

é a taxa de crescimento adimensional. Na Eq. (4.12), comprimento e tempo estão rescalonados por um comprimento e um tempo característicos  $L$  e  $T$ , respectivamente. Além disso,

$$\text{Ca} = \frac{\eta U}{\sigma^*} \frac{L^2}{k} \quad (4.14)$$

representa um número de capilaridade modificado com  $U = L/T$  (veja a primeira referência em [10]). Similar às Eqs. (2.35) e (2.36), a solução da Eq. (4.12) é dada por

$$\zeta_{lm}(t) = \zeta_{lm}(0) \exp\{I(l, R, \dot{R})\}, \quad (4.15)$$

na qual

$$I(l, R, \dot{R}) = \int_{t_c(l)}^t \Lambda(l, R, \dot{R}) dt'. \quad (4.16)$$

O modo de maior taxa de crescimento é obtido resolvendo  $d\lambda(l, R, \dot{R})/dl = 0$ , o que resulta em

$$l_{\max}(R, \dot{R}) = \sqrt{\frac{7}{9} \left(1 + \frac{3}{7} \text{Ca} \dot{R} R^2\right)} - \frac{2}{3} \approx \sqrt{\frac{1}{3} \text{Ca} \dot{R} R^2}. \quad (4.17)$$

Na Eq. (4.17), usamos  $\text{Ca} \dot{R} R^2 \gg 1$ , que é uma aproximação válida em experimentos típicos de fluxos em meio poroso [126]. Nesta seção, assim como em todo este capítulo, nosso objetivo é minimizar as amplitudes de perturbação (4.15). De posse de  $l_{\max}$  e notando que a taxa de crescimento (4.13) depende apenas do número angular  $l$  e não de  $m$ , podemos utilizar o método variacional da Sec. 3.3.1. Surpreendentemente, a equação obtida através de Euler-Lagrange (3.15) é a mesma obtida em Hele-Shaw  $\ddot{R} = 0$ . Considerando o comprimento característico sendo o raio final depois do processo de injeção ( $L = R_f$ )



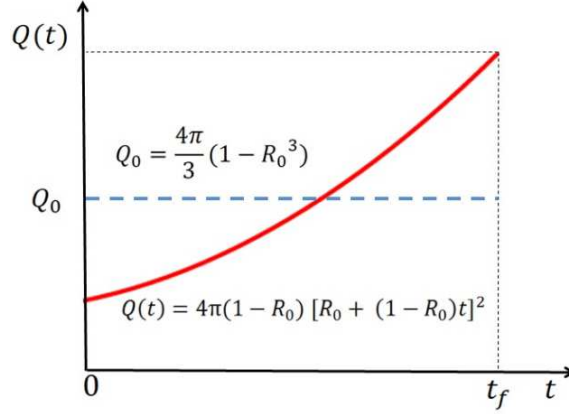


Figura 4.1: Ilustração da taxa de bombeamento como função do tempo para a taxa de injeção ótima  $Q(t)$  (curva contínua) e para taxa de injeção constante equivalente  $Q_0$  (linha tracejada). O volume total de fluido injetado (área sob as curvas) no intervalo  $[0, t_f]$  é a mesma para ambas injeções.

e o tempo característico sendo o tempo final do bombeamento ( $T = t_f$ ), a solução da equação de Euler-Lagrange na forma adimensional é escrita como

$$R(t) = R_0 + (1 - R_0)t. \quad (4.18)$$

Da Eq. (4.3),  $Q(t) = 4\pi\dot{R}R^2$ , e a taxa de injeção ideal é dada por

$$Q(t) = 4\pi(1 - R_0)[R_0 + (1 - R_0)t]^2. \quad (4.19)$$

Concluimos que a taxa de injeção deve variar quadraticamente com o tempo a fim de minimizar as amplitudes de perturbação. Note que a taxa de bombeamento ótima, assim como a Eq. (3.19), não depende das propriedades materiais do fluido ou das características do meio. Além disso, observe que a lei de potência da injeção ideal aumentou de uma unidade em relação ao sistema em Hele-Shaw (bombeamento ótimo linear), assim como a dimensão do problema.

De maneira similar à análise do Cap. 3, estudaremos a eficácia do protocolo de minimização (4.19). Considerando que deseja-se evoluir a interface esférica fluido-fluido no

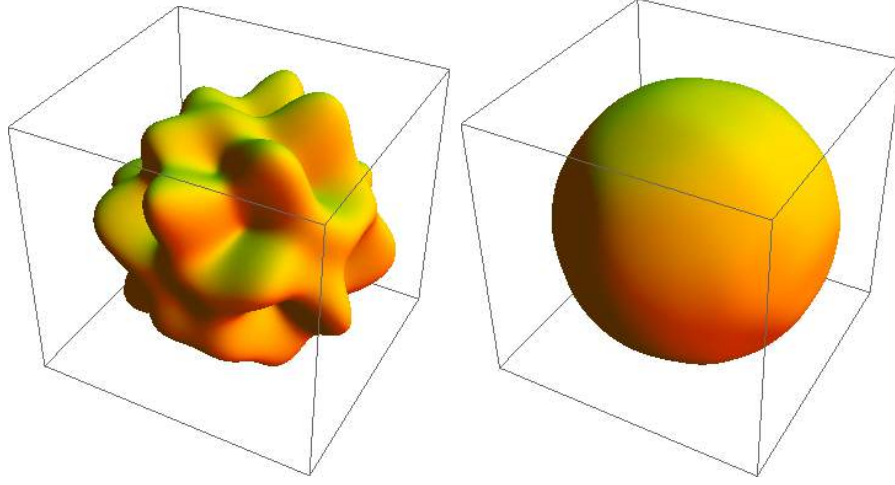


Figura 4.2: Interface resultante em  $t = t_f$  utilizando a taxa de injeção constante (superfície da esquerda) e para taxa de injeção ótima (superfície da direita). Essa figura foi selecionada para aparecer na seção Kaleidoscope do Physical Review E na sua edição de Dezembro de 2013 [185], porém neste trabalho sua cor foi modificada.

meio poroso até um certo raio final em um dado intervalo de tempo e a uma taxa de injeção constante, a Eq. (4.3) na sua forma adimensional com  $R_f = 1$  e  $t_f = 1$  é dada por

$$Q_0 = \frac{4\pi}{3}(1 - R_0^3). \quad (4.20)$$

Novamente, vamos comparar a interface resultante obtida pela taxa de injeção constante (4.20) e a taxa de bombeamento ideal (4.19) em  $t = t_f$ . Uma ilustração do comportamento de  $Q(t)$  e  $Q_0$  com o passar do tempo encontra-se na Fig. 4.1.

Vemos claramente na Fig. 4.2 a eficácia do processo de injeção. A superfície à esquerda ilustra a interface resultante para a taxa de injeção constante e a superfície à direita mostra o padrão final do processo de bombeamento quando a taxa de injeção ótima é utilizada. Para essas interfaces, consideramos  $R_0 = 0.2$  e  $Ca = 650$ . É evidente que a formação dos dedos viscosos são significativamente inibidas na interface ilustrada no painel direito da Fig. 4.2, onde a taxa de injeção ótima é utilizada. Para visualizar essas

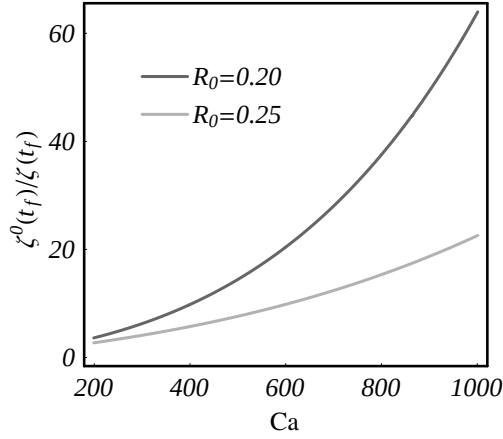


Figura 4.3: Razão das amplitudes  $\zeta^0(t_f)/\zeta(t_f)$  em função de  $Ca$ , para  $R_0 = 0.2, 0.25$ .  $\zeta^0(t_f)$  [ $\zeta(t_f)$ ] representa a amplitude máxima para a injeção constante (ótima) em  $t = t_f$ .

interfaces, reescrevemos, sem perda de generalidade, a interface tomando a parte real dos harmônicos esféricos,

$$\mathcal{R}(\theta, \phi, t) = R(t) + \sum_{l=1}^N \sum_{m=-l}^l \zeta_{lm}(t) \Re[Y_{lm}(\theta, \phi)], \quad (4.21)$$

onde  $N$  é o número de modos participantes na dinâmica. Além disso, são atribuídas fases aleatórias para as amplitudes iniciais  $\zeta_{lm}(0)$ .

Assim como na Seq. 3.3.2, vamos analisar como o processo de minimização se comporta quando aumentamos o número de capilaridade  $Ca$ , ou seja, quando o sistema se torna ainda mais instável. A Fig. 4.3 ilustra o máximo da amplitude para o bombeamento constante dividido pelo máximo da amplitude utilizando a taxa de injeção ideal  $[\zeta^0(t_f)/\zeta(t_f)]$  em função de  $Ca$ , no tempo final  $t = t_f$ . Consideramos ainda dois valores de  $R_0$ . Dessa figura, verifica-se que a razão  $\zeta^0(t_f)/\zeta(t_f)$  cresce quando  $Ca$  aumenta e quando valores menores de  $R_0$  são considerados. Esse comportamento indica que a estabilização da abordagem variacional se torna ainda mais eficaz em processos mais instáveis da dinâmica. Assim como na Seq. 3.3.2, como  $t_f$  e  $R_f$  podem ser arbitrariamente grandes, a interface proveniente do bombeamento ótimo pode apresentar deformações. Contudo, a Fig. 4.3 nos mostra que tais perturbações são consideravelmente menores que os distúrbios observados quando a taxa de injeção constante é utilizada, mesmo para altos valores de  $Q_0$  e  $t_f$  (ou

maiores valores  $Ca$  e menores valores  $R_0$ ). É importante ressaltar que o número de capilaridade não pode ser aumentado arbitrariamente, caso contrário as contribuições devido ao molhamento e outros efeitos mais complexos devem ser considerados na teoria.

Uma extensão natural desses resultados seria investigar estágios fortemente não lineares da dinâmica através de simulações e experimentos, assim como fizemos na Seq. 3.3.2. Além disso, a aplicação do protocolo em um modelo teórico mais completo para fluxos em meios porosos seria interessante: considerando fluidos com densidades distintas, variações na saturação, heterogeneidade do meio e diferença de pressão capilar entre os fluidos dependendo da velocidade da interface.

## 4.3 Minimização das instabilidades no processo de descarga elétrica

Nesta seção vamos estudar o crescimento de uma região ionizada através de uma descarga elétrica e usar o método variacional descrito na Seq. 3.3.1 para minimizar as instabilidades que surgem nesse processo. No limite de baixa difusão elétrica  $D \ll 1$ , um modelo de contorno dinâmico foi utilizado para descrever a frente de ionização em um processo de descarga elétrica [5–7]. Além disso, se  $D = 0$  obtemos a mesma dinâmica do fluxo em Hele-Shaw, desconsiderando efeitos de tensão superficial. Esse modelo descreve uma interface com uma densidade de carga superficial  $\sigma$ , separando um plasma de um gás neutro como mostrado na Fig. 4.4. A espessura do contorno entre as fases tende a zero por um fator proporcional à  $\sqrt{D}$ , deste modo o movimento dessa interface é governado pelas seguintes equações adimensionais

$$v_N = -E_\nu^+ + 2\sqrt{D} \alpha(|E_\nu^+|) - D\kappa,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \kappa v_N \sigma = -\frac{E_\nu^-}{\rho} - j_\nu^-. \quad (4.22)$$

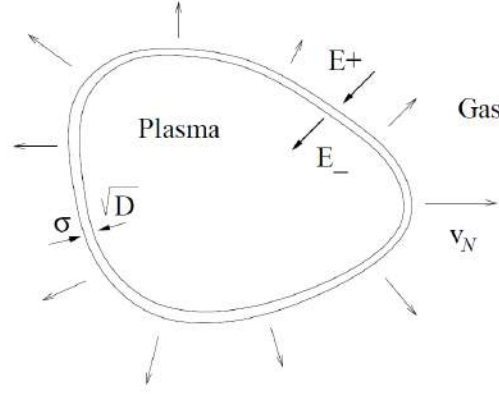


Figura 4.4: Ilustração de uma descarga elétrica, onde  $\sigma$  representa a densidade de carga negativa superficial. Note que o campo elétrico aponta para a região do plasma.

No sistema de Eqs. (4.22),  $v_N$  representa a velocidade normal da interface,  $\kappa$  corresponde ao dobro da curvatura média da interface,  $E_\nu^-$  ( $E_\nu^+$ ) é a componente normal do campo elétrico calculado dentro (fora) do plasma,  $j_\nu^-$  é a densidade de corrente na direção  $\nu$  proveniente de alguma força eletromotriz localizada na região ionizada em direção à interface,  $\rho$  representa a resistividade do plasma e  $\alpha(x) = x \exp(-1/x)$  [ver Fig. 4.4]. Para mais detalhes, recomendamos aos leitores as Refs. [5–7].

Estudaremos a estabilidade de uma frente de ionização de crescimento radial similar à geometria de injeção em Hele-Shaw radial. Nesta seção, ao invés de existir uma fonte de fluido na origem do sistema de coordenadas, há uma fonte de carga no centro da região ionizada [5,6]. Nesta circunstância, devido ao crescimento radial podemos descrever a interface bidimensional plasma-gás pelas Eq. (2.21) e (2.23). Além disso, como nas Refs. [5–7] consideramos o limite de alta condutividade do plasma  $1/\rho \gg 1$ . Para obter a evolução linear da interface, deve-se manter termos até primeira ordem em  $\zeta$  no sistema de Eqs. (4.22) e então aplicar a transformada de Fourier. Apesar do sistema ser bastante diferente em relação ao problema de Saffman-Taylor, a análise de estabilidade linear é similar à dedução realizada na Seq. 2.3.1. Desses cálculos, os quais encontram-se em detalhes na Ref. [6], obtém-se a Eq. (2.35) para as amplitudes de perturbação, cuja taxa de crescimento  $\Lambda$  é dada por

$$\Lambda(n, R, \dot{R}) = \frac{\dot{R}}{R}(n-1) - \frac{\epsilon}{R^2}(n^2-1) - \frac{\sqrt{\epsilon\alpha_0}}{R} \left(1 + \frac{2\pi R}{|Q(t)|}\right)(n-1). \quad (4.23)$$

Na Eq. (4.23),  $Q(t) = \int_0^t I(t)dt$ , onde  $I(t) = dQ(t)/dt$  representa a corrente elétrica introduzida por um fio isolado dentro do plasma (fonte de carga referida anteriormente),  $\alpha_0 = \alpha(|Q(t)|/2\pi R)$  e  $\epsilon \equiv D$ . O termo incluindo  $\alpha_0$  na Eq. (4.23) representa o efeito dinâmico da ionização pelo impacto dos elétrons com os átomos do dielétrico [5, 186, 187]. Assumimos o limite usado na Ref. [6] [Eq. (34) dessa referência], onde a contribuição da ionização por impacto na Eq. (4.23) é bem menor que o efeito desestabilizante do campo elétrico na interface (termo contendo  $\dot{R}/R$ ),

$$R \ll \frac{|Q(t)|}{4\pi\sqrt{\epsilon\alpha_0}} \quad \text{e} \quad \epsilon \ll 1. \quad (4.24)$$

Nessa circunstância, a Ref. [6] mostra que carga  $Q(t)$  está relacionada ao raio não perturbado da interface por

$$Q(t) \approx -2\pi R\dot{R}. \quad (4.25)$$

Trivialmente obtemos que o modo de máxima taxa de crescimento é dado por  $n_{max} = R\dot{R}/(2\epsilon)$ . Além disso, pela aproximação (4.24), vamos inicialmente negligenciar o termo contendo  $\sqrt{\epsilon\alpha_0}$  na Eq. (4.23) (veja Refs. [5, 6]).

Finalmente, aplicando o método variacional para a interface ionizada descrita pela Eq. (4.23), obtemos que o raio não perturbado deve obedecer a equação

$$\ddot{R}R^3 = -4\epsilon^2 \quad (4.26)$$

para minimizar as perturbações da frente ionizante durante a descarga elétrica. A solução dessa equação não-linear é dada por

$$R(t) = \sqrt{(C_1 t + C_2)^2 - 4\left(\frac{\epsilon}{C_1}\right)^2}, \quad (4.27)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes determinadas pelas condições inicial e final de  $R$ :  $R(0) = R_0$  e  $R(t_f) = R_f$ . Os valores obtidos dessas condições são

$$C_1 = -\frac{R_f - R_0}{t_f} \sqrt{1 + \frac{2R_f R_0}{(R_f - R_0)^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\epsilon t_f}{R_0 R_f} \right)^2} \right]}. \quad (4.28)$$

e

$$C_2 = \frac{R_f^2 - R_0^2 - (t_f C_1)^2}{2t_f C_1}. \quad (4.29)$$

Observe que quando  $4\epsilon t_f/(R_0 R_f) \ll 1$ , as constantes se tornam simplesmente  $C_1 = (R_f - R_0)/t_f$  e  $C_2 = R_0$ .

Utilizando a Eq. (4.25), obtemos a dependência temporal da carga e da corrente que minimiza as perturbações da frente de ionização

$$Q(t) = -2\pi C_1(C_1 t + C_2) \quad (4.30)$$

e

$$I = -2\pi C_1^2, \quad (4.31)$$

respectivamente. Da Eq. (4.27), observe que apesar de  $R$  não variar linearmente no tempo, a carga  $Q$  (4.30) deve ser uma reta a fim de minimizar as deformações da interface.

Vamos agora testar a eficácia do processo variacional, o qual impõe que a carga no plasma da descarga varie no tempo conforme a Eq. (4.30). Para isso, vamos comparar nosso método com uma descarga elétrica cujo plasma atinge um raio final  $R_f$  no intervalo  $[0, t_f]$  com carga elétrica constante (suposição assumida por simplicidade nas Refs. [5,6])

$$Q_0 = -\frac{\pi(R_f^2 - R_0^2)}{t_f}. \quad (4.32)$$

A evolução linear para  $\epsilon = 0.03$ ,  $R_0 = 0.14$ ,  $R_f = 0.44$  e  $t_f = 0.08$  utilizando a Eq. (4.32) e para a função ótima (4.30) estão ilustradas na Fig. 4.5: as Figs. 4.5(a) e 4.5(c) representam a carga constante (4.32), enquanto que as Figs. 4.5(b) e 4.5(d) corresponde à situação de carga ideal (4.30). As Figs. 4.5(a) e 4.5(b) não incluem o termo de  $\alpha_0$  na taxa de

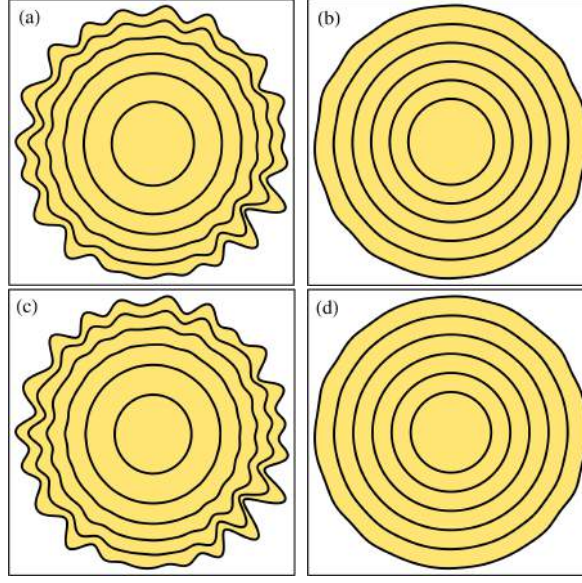


Figura 4.5: Evolução linear dos padrões formados durante a descarga elétrica com carga elétrica constante [(a) e (c)] e quando a carga com densidade temporal ótima é usada [(b) e (d)]. Os efeitos do termo com  $\alpha_0$  na dispersão linear (4.23) são negligenciados em (a) e (b) [onde  $R_0 = 0.14$ ,  $R_f = 0.44$  e  $t_f = 0.08$ ] e considerados em (c) e (d) [onde  $R_0 = 0.14$ ,  $R_f = 0.47$  e  $t_f = 0.08$ ]. Os padrões lineares têm a mesma condição inicial (incluindo fases aleatórias para cada modo) e 40 modos de Fourier são considerados. As interfaces são ilustradas em intervalos de  $t_f/5$ . Assumimos  $\epsilon = 0.03$ .

crescimento [6] e os padrões ilustrados nas Figs. 4.5(c) e 4.5(d) consideram esse efeito [5]. Vale ressaltar que assumimos valores para os parâmetros adimensionais consistentes com os usados nas Refs. [5, 6]. Observando a Fig. 4.5 é claramente visto que o método variacional estabiliza o crescimento de perturbações na interface do plasma mesmo quando o termo correspondente à ionização por impacto dos elétrons  $\alpha_0$  é considerado na taxa de crescimento  $\Lambda$  (4.23).

Para abordar o processo de estabilização durante uma descarga elétrica tridimensional, representamos a posição da interface utilizando a Eq. (4.1) e escrevemos as amplitudes de perturbação em termos dos harmônicos esféricos (4.2). Como na Ref. [7], o raio não perturbado e a carga elétrica no plasma são relacionados pela equação

$$Q(t) \approx -4\pi R^2 \dot{R}. \quad (4.33)$$



Utilizando o sistema de Eqs. (4.22) no limite de alta condutividade e mantendo termos até primeira ordem em  $\zeta$ , obtém-se  $\dot{\zeta}_{lm}(t) = \Lambda(l, R, \dot{R})\zeta_{lm}(t)$ , onde [7]

$$\Lambda(l, R, \dot{R}) = \frac{\dot{R}}{R}(l-1) - \frac{\epsilon}{R^2}(l+2)(l-1). \quad (4.34)$$

Como realizado anteriormente, por simplicidade consideramos  $\alpha_0$  muito pequeno de modo que negligenciamos os termos da expressão de Townsend devido à ionização por impacto [5, 7, 186, 187] na Eq. (4.34). Aplicando o método variacional para esse sistema, a evolução ótima do raio não perturbado é

$$R(t) = \sqrt{(C_1 t + C_2)^2 - 6 \left( \frac{\epsilon}{C_1} \right)^2}, \quad (4.35)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são os mesmos das Eqs. (4.28) e (4.29) porém note que há um fator de 6 no termo proporcional a  $\epsilon^2$  ao invés do fator de 4 da Eq. 4.27. Da Eq. (4.33), a dependência temporal para a carga elétrica ideal é

$$Q(t) = -4\pi C_1 (C_1 t + C_2)^2 \sqrt{1 - 6 \left[ \frac{\epsilon}{C_1 (C_1 t + C_2)} \right]^2}. \quad (4.36)$$

Como  $C_1 > 0$ , note que no limite  $6\epsilon/(C_1 C_2) \ll 1$ , a carga ideal (4.36) evolui quadraticamente no tempo.

A Fig. 4.6 ilustra as interfaces resultantes de uma descarga elétrica tridimensional admitindo uma descarga de carga constante

$$Q_0 = -\frac{4\pi(R_f^3 - R_0^3)}{3t_f} \quad (4.37)$$

[painel esquerdo da Fig. 4.6] e uma descarga cuja carga elétrica evolui de acordo com a Eq. (4.36) [painel direito da Fig. 4.6] em  $t = t_f$ . As interfaces tem as mesmas condições iniciais (incluindo fases aleatórias para cada modo) e 18 modos  $l$  são considerados. Assumimos  $\epsilon = 0.03$ ,  $R_0 = 0.13$ ,  $R_f = 0.43$  e  $t_f = 0.16$ . Observe que a estrutura “es-

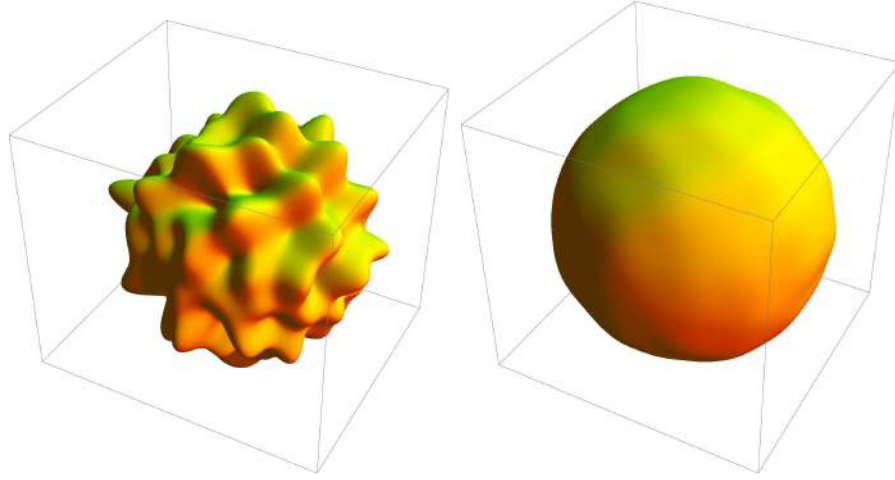


Figura 4.6: Interface resultante em  $t = t_f$  utilizando carga elétrica constante (painel da esquerda) e evolução ótima de carga elétrica (painel da direita)

pinhosa” obtida no processo com carga elétrica constante é substituída por uma esfera quase perfeita quando a carga ótima é utilizada.

## 4.4 Mimimização das instabilidades no processo de crescimento de cristais

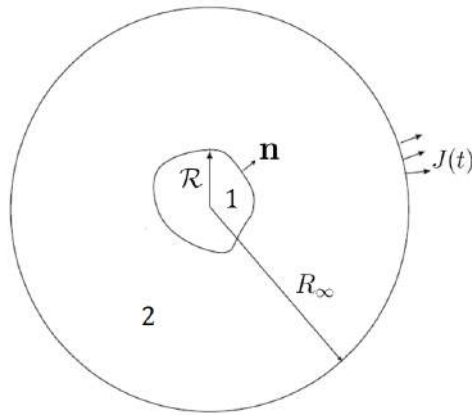


Figura 4.7: Diagrama esquemático de um cristal perturbado imerso na sua fase líquida.

Nesta seção vamos aplicar o método variacional no processo de solidificação, utilizando a análise de estabilidade linear primeiramente deduzida por Mullins e Sekerka [25]. Considere o crescimento quase estacionário de um sólido (fase 1) em um líquido super resfriado

(fase 2), de temperatura  $T_1$  e  $T_2$  [14, 15, 19–22, 25, 26], respectivamente (Fig. 4.7). Admitindo que o equilíbrio local da interface permanece durante a solidificação, as equações adimensionais do problema são [19–22]

$$\begin{aligned}\nabla^2 T_i &= 0 \quad i = 1, 2; \quad \mathbf{v} = [\nabla T_1 - \nabla T_2] \big|_{r=\mathcal{R}}; \\ T_i \big|_{r=\mathcal{R}} &= -\tau(\mathbf{n})\kappa; \quad J = \frac{1}{2\pi} \int_{r=\mathcal{R}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds; \\ \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{r=\mathcal{R}} &= \mathbf{v},\end{aligned}\tag{4.38}$$

onde  $T_i$  é o campo de temperatura ( $i = 1$  ou  $2$  para as fases sólida ou líquida, respectivamente),  $\mathbf{v}$  representa a velocidade da interface,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à interface,  $\tau$  é a tensão superficial anisotrópica,  $J$  é o campo de fluxo de calor longe da interface e  $\kappa$  corresponde à curvatura da interface sólido-líquido. Em nosso estudo, abordaremos o caso específico em que efeitos cinéticos são negligenciados na terceira expressão das Eqs. (4.38) e a condutividade térmica das fases são idênticas [20–22]. Essas considerações são válidas, por exemplo, para a substância orgânica *succinonitrile*, estudada na Ref. [20]. Note que  $J$  representa a derivada temporal da área ocupada pela fase sólida. No caso de um sólido tridimensional,  $J$  corresponde à taxa de variação do volume da fase sólida e o fator de  $1/2\pi$  é substituído pelo fator  $1/4\pi$ . Para maiores detalhes das expressões (4.38) que governam o sistema ver as Refs. [19–22]. Porém, facilmente observamos uma clara relação entre o sistema descrito pelo sistema de Eqs. (4.38) e o fluxo em Hele-Shaw descrito no Cap. 2. Comparando as equações (2.10), (2.14) e (2.19) com as Eqs. (4.38), verifica-se um comportamento semelhante entre o potencial de velocidade para o fluxo em Hele-Shaw e a temperatura  $T$  do processo de solidificação e, ainda, entre o fluxo de calor  $J$  e a taxa de injeção de fluido  $Q$ .

Como realizado nas Refs. [21, 23, 24], podemos incluir uma anisotropia geral do cristal na forma  $\tau(\theta) = 1 - (m^2 - 1)\nu_m \cos(m\theta)$ , onde  $\nu_m$  é uma amplitude que mede a força anisotrópica do modo de Fourier  $m$ . Além disso, consideramos que  $\nu_m$  é da mesma ordem

de  $\zeta_n$ , de modo que termos proporcionais a  $\nu\zeta$  podem ser negligenciados em uma análise linear de perturbação [21, 23]. Seguindo os mesmos passos da Seq. 2.3.1, mantendo termos até primeira ordem em  $\zeta$  no sistema de Eqs. (4.38) e tirando a transformada de Fourier, obtém-se a equação de movimento para as amplitudes de perturbação [21, 23]

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n, R, \dot{R}) \zeta_n + \delta_{nm} \frac{2\nu_m}{R^2} m(m^2 - 1), \quad (4.39)$$

onde

$$\Lambda(n, R, \dot{R}) = \frac{\dot{R}}{R}(n - 1) - \frac{2}{R^3} n(n^2 - 1) \quad (4.40)$$

com  $\delta_{nm}$  sendo a função delta de Kronecker. Além disso, a taxa de crescimento da área do cristal  $J$  e o campo de temperatura  $T$  longe da interface são relacionados pelo raio não perturbado pelas equações

$$J(t) = R\dot{R} \quad \text{e} \quad T_\infty(t) = -J(t) \log\left(\frac{R_\infty}{R}\right) - \frac{1}{R}, \quad (4.41)$$

respectivamente. Na Eq. (4.41),  $R_\infty$  é o raio de uma região muito grande comparada com o tamanho do cristal.

Aplicando o método variacional da Seq. 3.3.1 desprezando efeitos anisotrópicos e assumindo  $R^2\dot{R}/2 \gg 1$ , consistentemente com as Refs. [21, 22], obtemos  $\ddot{R} = 0$ , similarmente à Seq. 3.3.2, cuja solução é a Eq. (3.18). Esse resultado já era esperado devido à semelhança entre a Eq. (4.40) para  $\nu_m = 0$  e a taxa de crescimento  $\Lambda$  do fluxo em Hele-Shaw (3.16). Porém, a dependência temporal do parâmetro de controle experimental ( $T_\infty$ ) no processo de solidificação é bem diferente da dependência linear da taxa de injeção (3.19). Das Eqs. (4.41) e (3.18), obtemos

$$J(t) = \frac{(R_f - R_0)}{t_f} \left[ R_0 + \frac{(R_f - R_0)}{t_f} t \right], \quad (4.42)$$

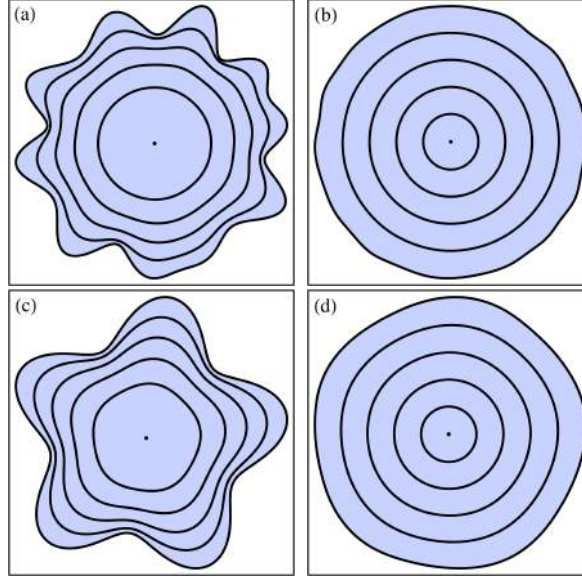


Figura 4.8: Evolução temporal linear das interfaces formadas durante o fluxo de calor constante [(a) e (c)] e o fluxo ótimo [(b) e (d)]. Efeitos anisotrópicos são negligenciados em (a) e (b), enquanto que (c) e (d) considera-se anisotropia com  $m = 5$ .

e

$$T_{\infty}(t) = -V(R_0 + Vt) \log \left( \frac{R_{\infty}}{R_0 + Vt} \right) - \frac{1}{R_0 + Vt}, \quad (4.43)$$

que descrevem como o fluxo de calor e a temperatura longe da interface devem variar no tempo de modo que minimizem as deformações do cristal durante seu crescimento de  $R_0$  a  $R_f$  no intervalo  $[0, t_f]$ . Na Eq. (4.43),  $V = (R_f - R_0)/t_f$  representa a velocidade da interface não perturbada.

Como usualmente procedemos, devemos comparar a eficácia do processo de estabilização baseado na taxa de fluxo ideal (4.42) com uma solidificação sujeita a uma taxa de fluxo de calor constante equivalente. Para um dado  $R_f$  e  $t_f$ , temos

$$J_0 = \frac{(R_f^2 - R_0^2)}{2t_f}. \quad (4.44)$$

Na Fig. 4.8, ilustramos a evolução linear das interfaces para o fluxo constante (4.44) [Figs. 4.8(a) and 4.8(c)] e o fluxo ideal de calor (4.42) [Figs. 4.8(b) and 4.8(d)]. Os padrões

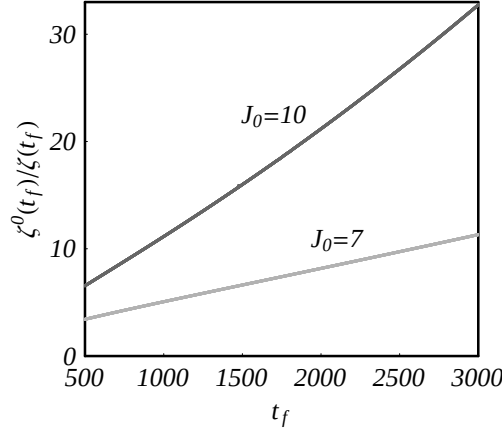


Figura 4.9: Razão das amplitudes  $\zeta^0(t_f)/\zeta(t_f)$  em função do tempo final  $t_f$  para  $J_0 = 7, 10$ .  $\zeta^0(t_f)$  ( $\zeta(t_f)$ ) representa a amplitude máxima para o fluxo de calor constante (ótimo) em  $t = t_f$ .

lineares têm a mesma condição inicial (incluindo fases aleatórias para cada modo) e 40 modos de Fourier são considerados. As interfaces são ilustradas em intervalos de  $t_f/5$ . Nas Figs. 4.8(a) e 4.8(b) os efeitos anisotrópicos são negligenciados e assumimos  $R_0 = 1$ ,  $R_f = 200$ , e  $t_f = 2000$ . Por outro lado, os efeitos de anisotropia são incluídos nas Figs. 4.8(c) e 4.8(d) para  $m = 5$ , com  $\nu_5$  sendo da mesma ordem de grandeza da condição inicial  $\zeta_n(0)$ . Além disso, assumimos  $R_0 = 1$ ,  $R_f = 170$  e  $t_f = 2000$ . É evidente que a formação dos dedos é inibida quando a taxa de fluxo ideal é utilizada. Relembrando que no cálculo da taxa de fluxo ótimo negligenciamos efeitos anisotrópicos. Todavia, como podemos ver nas Figs. 4.8(c) e 4.8(d), nosso protocolo de controle é ainda eficaz na presença de anisotropia.

Devemos analisar a estabilização do método variacional em períodos de solidificação mais longos, porém ainda no regime linear. Para isso, a Fig. 4.9 mostra a amplitude máxima para o fluxo constante dividido pela amplitude máxima calculada para o fluxo de calor ideal  $[\zeta^0(t_f)/\zeta(t_f)]$  em função do tempo final  $t_f$ , para dois valores de  $J_0$ . Da Fig. 4.9, verificamos que a razão  $\zeta^0(t_f)/\zeta(t_f)$  cresce quando aumentamos  $t_f$  e quando maiores valores de  $J_0$  são considerados. Concluimos que quando utilizamos o fluxo ideal, as amplitudes de perturbação ainda permanecem significativamente menores que as am-

plitudes obtidas pelo fluxo constante equivalente, mesmo quando maiores fluxos de calor e maiores períodos de tempo são considerados.

Vamos estender nosso processo de controle para as instabilidades da interface no crescimento quase-estático de um sólido tridimensional em um líquido super resfriado [19,20]. Similarmente ao fluxo hidrodinâmico em meios porosos, a interface é descrita de acordo com as Eqs. (4.1) e (4.2). Além disso, o fluxo de calor está relacionado com o raio não perturbado do cristal  $R$  de acordo com a equação [19,20].

$$J(t) = R^2 \dot{R} + O(\zeta/R)^2. \quad (4.45)$$

Usando o sistema de Eqs. (4.38) e seguindo os mesmo passos da Seq. 4.2, que é similar à dedução da Seq 2.3.1, a evolução linear da interface é descrita pela equação  $\dot{\zeta}_{lm}(t) = \Lambda(l, R, \dot{R})\zeta_{lm}(t)$ , onde [19,20]

$$\Lambda(l, R, \dot{R}) = \frac{\dot{R}}{R}(l-1) - \frac{1}{R^3}(l+2)(l-1)(1+2l) \quad (4.46)$$

é a taxa de crescimento tridimensional. Para maiores detalhes ver as Refs. [19,20]. Para o cristal tridimensional, negligenciamos efeitos anisotrópicos. Como na hidrodinâmica em meio poroso, a taxa de crescimento (4.46) não depende do modo azimutal  $m$ , podendo assim aplicar o método variacional de estabilização. Apesar da clara diferença entre (4.46) e a taxa de crescimento para o fluxo em meio poroso (4.13), o protocolo variacional nos leva à mesma solução linear para  $R$  dada pela Eq. (3.18). Contudo, da Eq. (4.45) vemos que o fluxo de calor ótimo deve ter um perfil quadrático no tempo, similar ao obtido na dinâmica de interface em meio poroso,

$$J(t) = \frac{(R_f - R_0)}{t_f} \left[ R_0 + \frac{(R_f - R_0)}{t_f} t \right]^2. \quad (4.47)$$

A temperatura longe da interface pode ser obtida pela relação tridimensional  $T_\infty(t) = -R(t)\dot{R}(t) - 2/R(t)$  [19,20] juntamente com a Eq. (4.45).

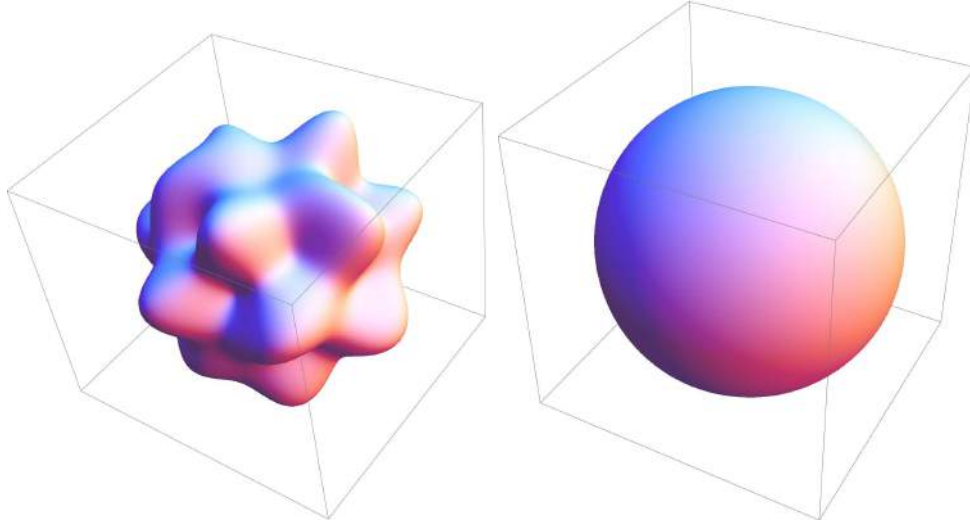


Figura 4.10: Interfaces tridimensionais resultantes em  $t = t_f$  utilizando fluxo de calor constante (painel da esquerda) e o fluxo de calor ótimo (painel da direita).

Na Fig. 4.10, comparamos a interface resultante obtida pelo fluxo de calor constante com  $R_0$  e  $R_f$  fixos (superfície da esquerda)

$$J_0 = \frac{(R_f^3 - R_0^3)}{3t_f}, \quad (4.48)$$

e a taxa de calor ótima (4.47) (superfície da direita) em  $t = t_f$ . Os padrões tridimensionais têm a mesma condição inicial (incluindo fases aleatórias para cada modo) e 18 modos  $l$  foram considerados. Assumimos  $R_0 = 1$ ,  $R_f = 11.6$  e  $t_f = 1.5$ . Da Fig. 4.10 vemos que o método de minimização é também eficaz no crescimento tridimensional de um cristal.



## Capítulo 5

# Força de adesão de fluidos complexos: minimização da energia e efeitos de inércia

### 5.1 Introdução

Como discutido no Cap. 1, a maneira convencional de determinar a força de adesão de líquidos é através do processo conhecido por *probe-tack test* [144, 145]. Uma das versões desse teste acontece quando a amostra de fluido é confinada entre duas placas paralelas e a placa superior é levantada verticalmente com deslocamento  $L(t)$ , cuja dependência temporal é preestabelecida pelo motor do dispositivo (Fig. 5.1). O resultado de tal medição é uma curva força-deslocamento ( $F$  vs.  $L$ ) que quantifica a resposta adesiva da amostra de fluido em função do deslocamento do aparato. Em uma curva  $F$  vs.  $L$  típica (painel da direita da Fig. 5.1) observa-se um crescimento acentuado de  $F$  no início da separação das placas. A força atinge um valor máximo e, então, decresce assintoticamente a zero no decorrer do descolamento. O pico da força na curva  $F$  vs.  $L$  serve como uma medida da força adesiva do fluido. Uma informação interessante é que as Refs. [132, 135, 137–139] mostraram que a formação desse máximo é devido à elasticidade do aparato de levantamento que se deforma durante o processo de separação das placas. Se o dispositivo

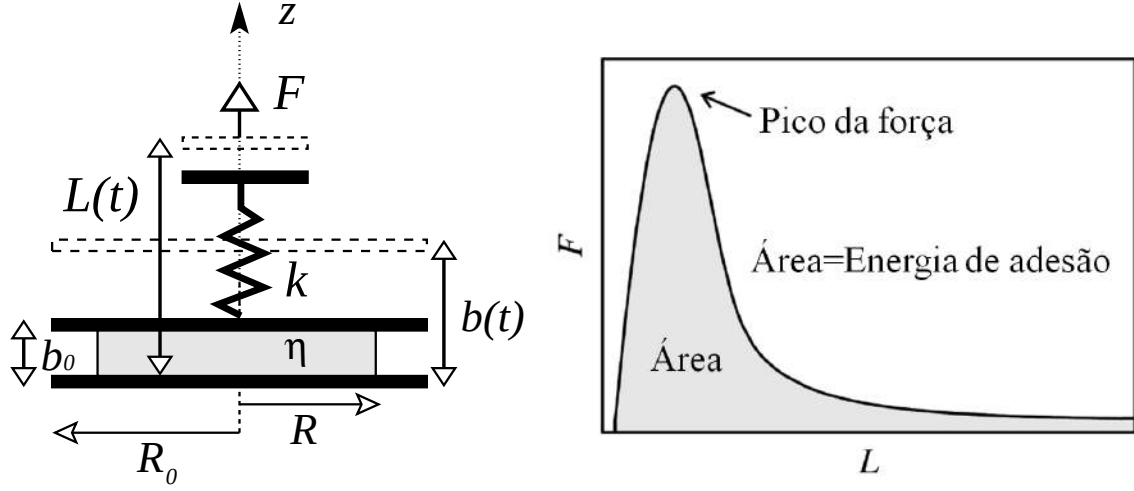


Figura 5.1: (Painel da esquerda) Ilustração do aparato utilizado no teste de adesão (probe-tack test) de constante elástica  $k$ , onde um fluido de viscosidade  $\eta$  é confinado entre duas placas paralelas separadas por uma distância  $b = b(t)$ . A placa superior é movida verticalmente cujo deslocamento é representado pela função  $L(t)$  por uma força  $F$  que é medida durante esse processo. Note que  $L(t)$  e  $b(t)$  não estão em escala. (Painel da esquerda) Representação da curva força-deslocamento ( $F$  vs.  $L$ ) típica obtida no probe-tack test.

fosse infinitamente rígido, a força começaria de um valor finito e decairia com o aumento da separação entre as placas. Além disso, note que a área sob a curva força-distância corresponde à energia de adesão do fluido ou ao trabalho da força de separação das placas  $W$  [132,135], definido como a integral da força em relação ao deslocamento  $L$ .

Neste capítulo, abordaremos uma importante questão referente à energia de adesão  $W$  do probe-tack test: se você deseja levantar a placa sólida superior até uma certa altura em um dado intervalo de tempo, como o deslocamento  $L(t)$  deve variar no tempo para que o trabalho de separação seja minimizado? A resposta a essa pergunta além de fornecer uma maneira prática de economizar energia, fornece a possibilidade de descolar as placas com uma força máxima requerida significativamente reduzida. Considerando a infinidade de cenários possíveis de levantamentos dependentes do tempo, a resposta a essa pergunta é, certamente, não trivial. Apresentaremos uma abordagem variacional, similar ao método apresentado na Seç. 3.3.1, que nos permite uma busca de uma função  $L(t)$  que leva ao meio mais econômico energeticamente para levantar a placa superior do aparato no teste de adesão. Deduziremos esse método a partir de primeiros princípios

nos quais os fluidos adesivos poderão ser newtonianos ou não newtonianos. Os fluidos complexos considerados neste capítulo são descritos pela equação constitutiva dada pela lei de potência de Oswald-de-Waele (3.21) [88, 95, 173, 174].

Além do estudo da minimização de energia no teste de adesão, investigaremos a contribuição de uma grandeza hidrodinâmica ainda não abordada na literatura em propriedades adesivas de fluidos viscosos: a inércia. Como sabemos, o papel da inércia do fluido pode ser quantificado pelo número de Reynolds  $Re$  (medida relativa das forças inerciais e viscosas). No contexto do teste de adesão (*probe-tack test*),  $Re$  é proporcional à separação entre as placas e à velocidade de levantamento, e inversamente proporcional à viscosidade da amostra do fluido confinado. No entanto, assim como nas instabilidades hidrodinâmicas em Hele-Shaw, na maioria dos estudos teóricos e experimentais do teste de adesão [44, 54–56, 132, 135–143] são utilizadas velocidades de levantamento relativamente baixas, fluidos bastante viscosos e separações entre as placas muito pequenas. Sob essas circunstâncias, o número de Reynolds é praticamente nulo e nenhum efeito de inércia é observado. Nesse caso, a aproximação de lubrificação pode ser usada de modo que o movimento do fluido é perfeitamente descrito pela lei de Darcy (2.10).

Embora a negligência dos efeitos de inércia ser inteiramente justificada para grande maioria dos estudos sobre o teste de adesão, há situações em que essa condição deve ser reavaliada. As velocidades de levantamento permitidas pelos dispositivos modernos no teste de adesão (variando de 1 mm/s a 40 mm/s) [138, 139, 188] e o possível uso de fluidos de baixa viscosidade (por exemplo água, mercúrio ou até mesmo alguns óleos de silicone [112]) poderiam levar a cenários nos quais a inércia do fluido pode desempenhar um papel relevante. Curiosamente, essas novas considerações são bastante similares às que recentemente foram utilizadas na instabilidade de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw [3, 10]. Como discutido no Cap. 2, usualmente efeitos de inércia não são relevantes no fluxo hidrodinâmico em Hele-Shaw. Contudo, estudos experimentais [112] e teóricos [113–115] demonstraram que quando consideramos um fluido de baixa viscosidade, além de um maior espaçamento entre as placas e uma elevada taxa de injeção, efeitos inerciais apresentam um papel chave na dinâmica e na forma dos padrões emergentes na interface. Nessa circunstância, a equação hidrodinâmica que governa o problema é modificada, dada

por uma lei de Darcy generalizada incluindo contribuições dos termos inerciais [109–111]. No próximo capítulo, discutiremos em detalhes os nossos resultados que se encontram na Ref. [114, 115] sobre os efeitos de inércia na formação dos padrões na injeção nas células radial e retangular de Hele-Shaw e no problema de Hele-Shaw de espaçamento variável.

Motivados pelos fatos discutidos acima, estudaremos os efeitos inerciais do fluido no teste de adesão e tentaremos entender sua influência na forma da curva força-deslocamento. Embora os efeitos de inércia tenham sido um tópico amplamente negligenciado no teste de adesão de fluidos, esses efeitos foram analisados em alguns problemas de compressão [174, 189, 190], envolvendo fluidos newtonianos [191, 192] e não newtonianos [193]. Os estudos teóricos [191–193] tratam o sistema com a equação de Navier-Stokes tridimensional e tentam encontrar, a partir de primeiros princípios, um perfil de velocidade para o fluxo hidrodinâmico. Porém, esse tratamento corresponde a uma tarefa bastante complicada devido à complexidade matemática das equações hidrodinâmicas. Por essa razão, essa abordagem leva à necessidade de métodos perturbativos ou simulações numéricas. Apesar da complexidade relativa desses modelos, todos eles concluem que a inércia do fluido pode ter uma contribuição significativa na força de compressão de fluidos.

Apesar da importância e utilidade dos estudos realizados em Refs. [191–193], ainda há uma carência na literatura de uma investigação teórica simples da influência da inércia do fluido no teste de adesão. Neste capítulo deduziremos uma expressão para a força de adesão considerando efeitos de inércia e propriedades não newtonianas de um fluido cuja relação constitutiva é dada pela lei de Oswald-de-Waele [60, 174]. Essa dedução e os resultados obtidos se encontram na Ref. [149]. Utilizando a abordagem originalmente proposta na Ref. [109], consideramos um número de Reynolds relativamente pequeno de modo que o perfil de velocidade é unicamente determinado pelos efeitos viscosos, não sendo alterados pela inércia. Além disso, usamos um perfil de velocidade generalizado considerando os efeitos viscosos não newtonianos [55]. Essas suposições levam a uma lei de Darcy generalizada não linear para a componente radial da velocidade e nos permite a determinação da força de adesão do fluido, incluindo contribuições inerciais e efeitos não newtonianos através de cálculos analíticos. Nesse contexto, a contribuição desses fatores físicos no comportamento da curva força-deslocamento pode ser elucidada.

O roteiro desse capítulo será da seguinte forma: na Seq. 5.2 apresentamos nossa abordagem teórica e deduzimos a força de adesão entre duas placas paralelas levando em consideração a ação combinada da inércia do fluido e as contribuições não newtonianas. Além disso, a inércia e a elasticidade do aparato também são consideradas. Na Seq. 5.3, consideraremos o caso em que os efeitos inerciais do fluido são desprezíveis e então aplicaremos o método variacional em busca de um perfil de levantamento ótimo a fim de minimizar a energia de adesão. Por fim, na Seq. 5.4 faremos uma discussão sobre o papel da inércia do fluido na curva força-deslocamento e no trabalho de separação das placas. O caso limite newtoniano será discutido na Seq. 5.4.1, enquanto que o caso não newtoniano será discutido na Seq. 5.4.2.

## 5.2 Cálculo da força de adesão de um fluido não newtoniano incluindo efeitos de inércia

O painel esquerdo da Fig. 5.1 ilustra a geometria do sistema probe-tack. Consideramos um fluido incompressível com viscosidade  $\eta$  descrita por uma lei de potência (representação alternativa da lei de Oswald-de-Waele) e densidade  $\rho$ , confinado entre duas placas planas e paralelas. Como nas Refs. [132, 135, 137, 141], consideramos que o aparato tem uma constante elástica  $k$ . A placa superior é levantada por uma força  $F$  que proporciona um deslocamento preestabelecido no dispositivo dado por  $L = L(t)$ . Por outro lado, a placa inferior é mantida em repouso em  $z = 0$ , onde o eixo  $z$  aponta na direção perpendicular ao plano das placas. Em um dado tempo  $t$ , a distância entre as placas é representada por  $b = b(t)$ , enquanto que a deformação devido à elasticidade do aparato é dada pela diferença  $L(t) - b(t)$ . Inicialmente as placas estão a uma distância  $b_0 = L_0$  e o raio inicial do fluido é dado por  $R_0$ . Observe que devido à elasticidade do aparato,  $b$  não é necessariamente igual a  $L$ . Contudo, no caso de um dispositivo completamente rígido, temos  $b = L$ .

O objetivo desta seção é calcular analiticamente uma expressão para a força de levantamento  $F$ , levando em consideração efeitos de inércia e efeitos não newtonianos. Como

nas Refs. [44, 132], assumimos que a interface do fluido permanece circular durante o processo de levantamento (o efeito dos dedos viscosos na força de adesão é negligenciado), com o raio dependente do tempo dado por  $R = R(t)$ . Lembrando do Cap. 2, a conservação de volume leva à equação

$$R^2 b = R_0^2 b_0. \quad (5.1)$$

Começamos escrevendo as equações que governam o fluxo hidrodinâmico em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ : a equação de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \quad (5.2)$$

e a equação da continuidade para fluidos incompressíveis

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (5.3)$$

onde  $u_r = u_r(r, z)$  e  $u_z = u_z(r, z)$  representam as componentes da velocidade tridimensional nas direções radial e ao longo do eixo  $z$ , respectivamente. Note que se desconsiderássemos efeitos de inércia e os efeitos não newtonianos, o fluxo seria descrito pela lei de Darcy (2.10). Além disso, como negligenciamos as instabilidades de Saffman-Taylor durante o processo de levantamento, a componente azimutal da velocidade  $u_\theta$  é nula. Observe que o lado esquerdo da Eq. (5.2) contém os termos inerciais, enquanto o lado direito incorpora contribuições da pressão e dos estresses viscosos. Similarmente às Refs. [55, 109] e ao fluxo em Hele-Shaw, assumimos uma situação de alto confinamento do fluido  $R/b \gg 1$ , de tal forma que a taxa de cisalhamento dominante é dada por  $\partial u_r / \partial z$ . Para tal confinamento, efeitos gravitacionais podem ser negligenciados [132, 135–139].

Pelas considerações discutidas acima, a lei de Oswald-de-Waele (3.21) pode ser reescrita supondo que a viscosidade do fluido na Eq. (5.2) é proporcional a uma potência da taxa de cisalhamento

$$\eta(a) = \eta_0 \left| \frac{\partial u_r}{\partial z} \right|^a, \quad (5.4)$$

onde  $a$ , assim como o parâmetro  $\alpha$  definido no Cap. 3, representa a natureza não newtoniana do fluido:  $a = 0$  corresponde ao limite newtoniano, enquanto que  $a < 0$  ( $a > 0$ ) descreve um fluido shear-thinning (-thickening). Note que apenas quando  $a = 0$ ,  $\eta_0$  representa a viscosidade de um fluido newtoniano.

Os experimentos reológicos [60] utilizando soluções de Xanthane (um polímero “rod-like” rígido) são satisfatoriamente descritos pela expressão (5.4), onde a viscosidade depende da taxa de cisalhamento por uma lei de potência. Dessa forma, os experimentos da Ref. [60] foram capazes de determinar o índice da lei de potência  $a$  e o parâmetro  $\eta_0$  para diferentes concentrações do polímero. Além disso, experimentos realizados por Leider [194] usando vários fluidos poliméricos [incluindo silicone e fluidos de polisobutileno (PIB)] concluíram que o modelo de lei de potência é bastante apropriado para descrever o comportamento reológico de tais materiais.

Encontrar uma solução analítica para a equação diferencial parcial (5.2) não é definitivamente uma tarefa simples. Ao invés de tentar resolver a Eq. (5.2) usando técnicas perturbativas ou sofisticadas simulações numéricas [191–193], vamos utilizar o procedimento originalmente proposto nas Refs. [55, 109], que considera a solução

$$u_r(r, z) = f(r)g(z), \quad (5.5)$$

onde

$$g(z) = \left| z - \frac{b}{2} \right|^\lambda - \left( \frac{b}{2} \right)^\lambda, \quad (5.6)$$

com  $\lambda = (a + 2)/(a + 1)$ . A ideia central por trás desse *ansatz* é considerar que o perfil de velocidade dado pela Eq. (5.6) (veja também Eq.(5) da Ref. [55]) é válido para baixo número de Reynolds e um alto confinamento do fluido. Essas são precisamente as circunstâncias que serão consideradas em nosso problema. Observe que o perfil parabólico padrão para velocidade dado pela Eq. (2.8) é retomado pela Eq. (5.6) no limite newtoniano ( $a = 0$ ).

Como nas Refs. [55, 109], adotamos uma abordagem do tipo lei de Darcy, onde definimos a média transversal da velocidade radial

$$v_r = v_r(r) = \frac{1}{b} \int_0^b u_r(r, z) dz. \quad (5.7)$$

Substituindo as Eqs. (5.5) e (5.6) em (5.7) obtemos

$$f(r) = -\frac{2^\alpha(1+\alpha)}{b^\alpha\alpha} v_r(r). \quad (5.8)$$

Note que tomando a derivada temporal da expressão da conservação de volume (5.1) obtemos a equação

$$v_r(r) = \dot{R} = -\frac{\dot{b}}{2b} r, \quad (5.9)$$

que relaciona as velocidades da interface e da placa superior. Da Eq. (5.8) e (5.9), obtemos automaticamente a dependência em  $r$  da função  $f(r)$ .

Com  $g(z)$  dado pela Eq. (5.6) e  $f(r)$  pela Eq. (5.8), podemos encontrar uma lei de Darcy generalizada para o problema. Seguindo a abordagem padrão usada em Hele-Shaw (Cap. 2) e em problemas de adesão de fluidos confinados [44, 54–56, 132, 135–143], calculamos a média transversal da Eq. (5.2) e utilizamos a Eq. (5.8) para expressar a equação resultante desse processo em termos de  $u_r$ . Desse processo obtemos uma lei de Darcy não linear generalizada

$$\rho \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\dot{b}}{b} v_r + \frac{(4a+6)}{(3a+5)} \left( 2v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r^2}{r} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2\eta_0}{b^{a+2}} \left( \frac{4a+6}{a+1} \right)^{a+1} |v_r|^{a+1}. \quad (5.10)$$

Perceba que a lei de Darcy usual (2.10) para fluidos newtonianos ( $a = 0$ ) é retomada quando os termos inerciais do lado esquerdo da Eq. (5.10) são negligenciados.

Vamos apresentar alguns detalhes da dedução da Eq. (5.10). Lembrando que  $u_r(r, z) = f(r)g(z)$ , as médias transversais dos dois primeiros termos do lado esquerdo da Eq. (5.2) são

$$\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial u_r}{\partial t} dz = \frac{1}{b} \frac{\partial f(r)}{\partial t} \int_0^b g(z) dz \quad (5.11)$$



e

$$\frac{1}{b} \int_0^b u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} dz = \frac{1}{b} f(r) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \int_0^b [g(z)]^2 dz. \quad (5.12)$$

O terceiro termo do lado esquerdo pode ser escrito como

$$\frac{1}{b} \int_0^b u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} dz = (u_r u_z) \Big|_{z=0}^{z=b} - \frac{1}{b} \int_0^b u_r \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.$$

Observe que o termo contendo  $u_r u_z$  é zero pois  $u_r(r, 0) = u_r(r, b) = 0$ . Além disso, usando a condição de incompressibilidade (5.3) o termo não nulo pode ser reescrito na forma

$$\frac{1}{b} \int_0^b \frac{u_r}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} dz = \frac{1}{b} \frac{f(r)}{r} \frac{\partial[r f(r)]}{\partial r} \int_0^b [g(z)]^2 dz. \quad (5.13)$$

Para a geometria confinada do sistema probe-tack, assim como em Hele-Shaw, a pressão é considerada aproximadamente constante ao longo da direção perpendicular ao plano das placas, de modo que a média transversal do primeiro termo do lado direito de (5.2) é calculada trivialmente. Por outro lado, a média transversal do segundo termo do lado direito é

$$\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) dz = \frac{1}{b} \eta \frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=b} = \frac{2}{b} \eta_0 [f(r)]^{a+1} \left[ \frac{\partial g(z)}{\partial z} \right]^{a+1} \Big|_{z=b}, \quad (5.14)$$

onde utilizamos a lei de potência para viscosidade (5.4). Note que as Eqs. (5.11)-(5.14) estão convenientemente escritas em termos das funções  $g(z)$  e  $f(r)$ . O restante da derivação consiste na substituição das Eqs. (5.6) e (5.8) nas Eqs. (5.11)-(5.14) e no cálculo de derivadas e integrais simples. Esse procedimento leva à lei de Darcy generalizada (5.10).

Dando prosseguimento ao cálculo da força de adesão, substituímos a Eq. (5.9) na Eq. (5.10) e integramos a equação resultante na coordenada  $r$ , obtendo o campo de pressão

$$\begin{aligned} p(r) = & p_0 + \rho \left[ \frac{\ddot{b}}{4b} - \frac{3(4a+6)}{8(3a+5)} \frac{\dot{b}^2}{b^2} \right] (r^2 - R^2) \\ & + \frac{2\eta_0}{2^a(a+2)} \frac{\dot{b}^{a+1}}{b^{2a+3}} \left( \frac{2a+3}{a+1} \right)^{a+1} (r^{a+2} - R^{a+2}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

## 5.2 Cálculo da força de adesão de um fluido não newtoniano incluindo efeitos de inércia

onde  $p_0$  representa a pressão atmosférica. Como demonstrado nas Refs. [132, 135–139], efeitos de tensão superficial, provenientes das curvaturas transversal e paralela da interface em relação às placas do aparato, podem ser negligenciados na força de adesão de fluidos para um certo regime de valores do número de capilaridade. Nas circunstâncias aqui estudadas, essa aproximação é válida.

A força de adesão é calculada integrando a pressão [Eq. (5.15)] em toda região ocupada pelo fluido  $F = \int_0^R [p_0 - p(r)] 2\pi r dr$ . Desse resultado, a força necessária para levantar o aparato a uma velocidade  $\dot{b}$ , a uma aceleração  $\ddot{b}$  e com espaçamento  $b$  entre as placas é dada por

$$F = \frac{\rho\pi R_0^4 b_0^2}{8} \left[ \frac{\ddot{b}}{b^3} - \frac{(6a+9)\dot{b}^2}{(3a+5)b^4} \right] + \frac{2\pi\eta_0 R_0^{a+4} b_0^{\frac{a}{2}+2}}{a+4} \left( \frac{2a+3}{a+1} \right)^{a+1} \frac{\dot{b}^{a+1}}{b^{\frac{5a}{2}+5}}. \quad (5.16)$$

Lembre-se que devido à elasticidade do aparato,  $L$  e  $b$  não são necessariamente iguais e, como temos o controle experimental apenas do deslocamento  $L$ , e não de  $b$ , a dependência de  $F$  com o deslocamento  $L$  ainda não está completamente determinada.

Uma expressão adimensional conveniente para a Eq. (5.16) pode ser obtida rescalonando comprimentos por  $\delta = [3\pi\eta(0)R_0^4 b_0^2 V/2k]^{1/6}$ , velocidades por  $V$  (velocidade típica de levantamento) [132, 135, 140, 141] e forças por  $k\delta$ . Mantendo a mesma notação da Eq. (5.16) porém enfatizando que todas as grandezas são agora adimensionais, esse rescalonamento resulta na expressão

$$F = \text{Re} \left[ \frac{\ddot{b}}{b^3} - \frac{(6a+9)\dot{b}^2}{(3a+5)b^4} \right] + \mathcal{N}(a) \frac{\dot{b}^{a+1}}{b^{\frac{5a}{2}+5}}, \quad (5.17)$$

onde a inércia do fluido é quantificada pelo número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho V \delta}{12 \eta(0)}, \quad (5.18)$$

e

$$\mathcal{N}(a) = \frac{4}{3(a+4)} \left( \frac{2a+3}{a+1} \right)^{a+1} \left( \frac{V R_0 \sqrt{b_0}}{\delta^{5/2}} \right)^a \quad (5.19)$$

representa um parâmetro não newtoniano. Note que quando  $\text{Re} = 0$  e  $a = 0$  ( $\mathcal{N}(0) = 1$ ), a Eq. (5.17) se reduz à situação usual do problema de adesão [132]. Por outro lado, quando  $\text{Re} = 0$  e  $a \neq 0$ , o caso não inercial para fluidos não newtonianos é retomado [174].

Como comentado no início do capítulo, a curva típica força-deslocamento aumenta rapidamente durante o estágio inicial do processo de separação entre as placas. Esse efeito não é devido à força hidrodinâmica (5.16), mas sim à elasticidade do aparato [132, 135, 138]. Concluimos essa seção discutindo como acessar a forma completa da curva força-deslocamento, incluindo efeitos viscosos e inerciais do fluido, além da elasticidade intrínseca do dispositivo. Mais ainda, consideraremos o efeito da própria inércia da máquina através da adaptação de um método originalmente proposto por Francis e Horn [135], no qual o fluido é confinado entre uma esfera e uma placa. No entanto, a Ref. [135] aborda apenas o caso newtoniano e negligencia efeitos da inércia do fluido.

Durante o processo de separação, há um balanço de forças de inércia, viscosas e da força elástica do dispositivo, proveniente da sua deflexão  $L - b$ . A influência da inércia do aparato é incorporada através de um termo de aceleração da placa superior na equação dinâmica. Com esses fatos em mente, podemos aplicar a segunda lei de Newton para a estrutura superior da máquina. Utilizando a Eq. (5.17) como a força que o fluido exerce sobre a placa superior, obtemos uma equação diferencial não linear de segunda ordem para  $b = b(t)$

$$(L - b) - \left\{ \text{Re} \left[ \frac{\ddot{b}}{b^3} - \frac{(6a + 9)\dot{b}^2}{(3a + 5)b^4} \right] + \mathcal{N}(a) \frac{\dot{b}^{a+1}}{b^{\frac{5a}{2}+5}} \right\} = M\ddot{b}, \quad (5.20)$$

onde  $M = mV^2/k\delta^2$  é a massa adimensional do aparato. Solucionamos a Eq. (5.20) para  $b(t)$  numericamente impondo um perfil de levantamento  $L(t)$  para a estrutura superior do aparato. O perfil considerado nos experimentos usuais assume uma velocidade constante  $V$  de modo que na forma adimensional  $L(t) = b_0 + t$ . Com isso, substituímos a solução numérica da equação não linear (5.20) na Eq. (5.17) para obter a força de levantamento  $F$  e, então, podemos finalmente traçar a curva força-deslocamento ( $F$  vs  $L$ ) cujo formato típico é ilustrado na Fig. 5.1.

### 5.3 Minimização da energia de adesão

Francis e Horn [135] demonstraram que o trabalho de descolamento é dado pela energia perdida através da dissipação viscosa durante o processo de levantamento e pode ser escrito como

$$W = \int_{L_0=b_0}^{L_f} F dL \approx \int_{b_0}^{b_f} F db, \quad (5.21)$$

desde que a energia elástica do aparato seja pequena no final do levantamento, ou seja, desde que  $L_f \approx b_f$ . O índice  $f$  representa a situação final do experimento. Nesta seção, em particular, trabalharemos com a versão dimensional das equações.

Como discutido no início do capítulo, nosso objetivo nesta seção é obter o perfil de deslocamento do aparato que minimiza a energia de adesão do fluido. Em outras palavras, queremos minimizar o trabalho de levantamento da placa superior quando deslocada de uma posição inicial  $b_0$  até uma posição final  $b_f$  em um intervalo de tempo  $[0, t_f]$ . Para isso, convenientemente reescrevemos a Eq. (5.21) na forma

$$W = \int_0^{t_f} P(b, \dot{b}) dt, \quad (5.22)$$

onde a função  $P = P(b, \dot{b}) = F\dot{b}$  representa a potência dissipada, com  $F$  dado pela Eq. (5.16). Nesse contexto, assim como no método variacional deduzido na Seç. 3.3.1,  $W$  na Eq. (5.22) representa uma *ação*, enquanto  $P$  uma lagrangeana do sistema. Portanto, novamente temos um problema variacional que pode ser solucionado via equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial P}{\partial \dot{b}} \right) = \frac{\partial P}{\partial b}. \quad (5.23)$$

Para obter o levantamento ideal, consideraremos o caso usual do teste de adesão, onde efeitos da inércia do fluido e do aparato são negligenciados ( $\text{Re} \ll 1$  e  $M \ll 1$ ). Substituindo a expressão da potência dissipada na Eq. (5.23) obtemos a equação diferencial não linear

$$5\dot{b}^2 - 2b\ddot{b} = 0. \quad (5.24)$$

Usando o fato que  $d(b/\dot{b})/dt = 1 - b\ddot{b}/\dot{b}^2$  e as condições de contorno preestabelecidas [i.e.,  $b(t=0) = b_0$  e  $b(t=t_f) = b_f$ ], a solução da Eq. (5.24) é dada por

$$b_{ot}(t) = b_0[1 - h(b_0, b_f, t_f) t]^{-2/3}, \quad (5.25)$$

onde

$$h = h(b_0, b_f, t_f) = \frac{1}{t_f} \left[ 1 - \left( \frac{b_0}{b_f} \right)^{3/2} \right]. \quad (5.26)$$

A Eq. (5.25) nos fornece a função  $b_{ot}(t)$  que minimiza o trabalho de separação das placas. É interessante perceber que nossa função de levantamento ideal (5.25) não depende das propriedades materiais do fluido, incluindo o parâmetro não newtoniano  $a$ .

Nos experimentos de teste de adesão (probe-tack test), o parâmetro que é acionado pelos motores do aparato é  $L(t)$ , e não  $b(t)$ . Para o caso de um dispositivo rígido  $L(t) = b(t)$  e, então, o deslocamento ótimo é  $L_{ot}(t) = b_{ot}(t)$  dado pela Eq. (5.25). Como discutido na seção anterior, quando o efeito de elasticidade é levado em consideração, há um balanceamento das forças hidrodinâmicas com a força elástica do aparato  $k(L - b)$ . Nas condições usuais do probe-tack test em que  $Re \ll 1$  e  $M \ll 1$ , a equação dinâmica (5.20) na forma dimensional é escrita

$$k(L - b) = \frac{2\pi\eta_0 R_0^{a+4} b_0^{\frac{a}{2}+2}}{a+4} \left( \frac{2a+3}{a+1} \right)^{a+1} \frac{\dot{b}^{a+1}}{b^{\frac{5a}{2}+5}}. \quad (5.27)$$

Observe que o lado direito da Eq. (5.27) representa a força de adesão (5.16), desconsiderando os efeitos da inércia do fluido.

A princípio, substituindo a Eq. (5.25) na Eq. (5.27) podemos obter  $L_{ot}(t)$  para situação na qual o aparato apresenta elasticidade. Contudo, esse procedimento leva a um  $L_{ot}(t)$  não plausível fisicamente, onde  $L_0 \neq b_0$ . Isso significa que em  $t = 0$  o aparato deve ter uma deformação inicial dada por  $L_0 - b_0$ , que não representa a condição inicial de um experimento de adesão, onde  $L_0 = b_0$ . A fim de evitar esse problema, utilizamos uma

estratégia alternativa: primeiro, como no caso rígido, vamos considerar  $L_{ot}(t) = b_{ot}(t)$  e  $L_f = b_f$ , logo a máquina deve levantar o aparato de acordo com a função

$$L_{ot}(t) = L_0[1 - h(L_0, L_f, t_f) t]^{-2/3} \quad (5.28)$$

a fim de deslocá-lo de  $L_0$  até  $L_f$  no intervalo  $[0, t_f]$  minimizando a energia de adesão. Para encontrar o perfil força-deslocamento, devemos obter  $b(t)$  gerado pelo levantamento ótimo (5.28). Para isso, substituímos a Eq. (5.28) na Eq. (5.27) e encontramos numericamente uma nova dependência temporal para  $b(t)$  e, conseqüentemente, a força de adesão do fluido (5.16) para o levantamento (5.28). Desses resultados, podemos finalmente plotar a curva força-deslocamento para a situação em que o gasto de energia é minimizado. Veremos que essa abordagem é bastante eficaz, levando a uma redução significativa do trabalho de levantamento quando  $L_f \approx b_f$ . Daqui em diante, utilizaremos o perfil de levantamento ótimo dado pela Eq. (5.28) tanto para o caso rígido quanto para a situação em que o aparato é elástico.

Para verificar a eficácia do levantamento ideal utilizamos valores consistentes com os parâmetros físicos experimentais no teste de adesão [132, 135, 137–139] e com as propriedades materiais dos fluidos utilizados nas Refs. [55, 60, 132, 194]. Na maioria dos estudos de força de adesão de fluidos viscosos [44, 54–56, 132, 135, 137–143, 149, 195], considera-se a situação em que a placa superior é levantada com velocidade constante  $V$ . Portanto, para  $L_0$ ,  $L_f$  e  $t_f$  fixos, temos

$$L(t) = L_0 + Vt, \text{ onde } V = \frac{L_f - L_0}{t_f}. \quad (5.29)$$

Nosso próximo passo é comparar o comportamento da força e da energia de adesão obtida pelo levantamento convencional (5.29) e pelo levantamento ideal dado pela Eq. (5.28). Note que devido à Eq. (5.29) o conjunto de parâmetros relevantes preestabelecidos no processo de levantamento pode ser qualquer par das grandezas  $L_f$ ,  $t_f$  e  $V$ .

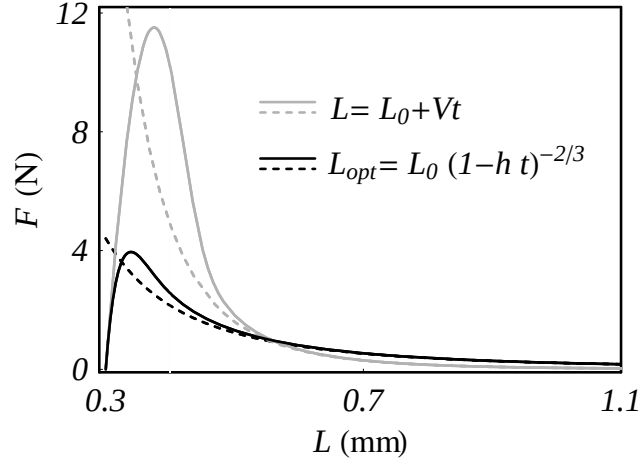


Figura 5.2: Força de adesão  $F$  em função do deslocamento  $L$ . As curvas pretas referem-se ao levantamento ótimo (5.28), enquanto que as curvas cinzas ilustram o levantamento com velocidade constante  $V$  (5.29). As curvas contínuas (tracejadas) representam o caso de um aparato elástico (rígido).

### 5.3.1 Caso newtoniano

Iniciamos nossa discussão analisando as curvas força-deslocamento ( $F$  vs.  $L$ ) para fluidos newtonianos ( $a = 0$ ). A Fig. 5.2 ilustra as curvas  $F$  vs.  $L$  considerando o levantamento com velocidade constante (5.29) (curvas cinzas) e o levantamento ótimo  $L_{ot}(t)$  (5.28) (curvas pretas). As curvas contínuas estão relacionadas para o caso em que o aparato tem uma constante elástica  $k$ , enquanto que as curvas tracejadas consideram a situação em que o aparato é rígido. Como discutido anteriormente, quando o aparato não possui elasticidade, não é observado um valor máximo para a força de adesão. Assumimos  $L_f = 1.1$  mm e  $V = 8.0 \times 10^{-6}$  mm/s (ou equivalentemente,  $L_f = 1.1$  mm e  $t_f = 100$  s). Além disso, os seguintes parâmetros são utilizados:  $\eta(0) = 92$  Pa s,  $R_0 = 2$  cm e  $L_0 = 0.3$  mm.

Analisando a Fig. 5.2, é evidente que o uso do procedimento ótimo resulta em uma diminuição significativa da energia de adesão (menor área sob a curva). Essa minimização é obtida para ambos as situações, rígida e elástica do aparato. Além disso, observe que no caso elástico há uma queda substancial do pico da força de adesão. Concluimos que apesar de em ambas os processos de descolamento (velocidade constante e levantamento ótimo) o aparato se deslocar de  $L_0$  à  $L_f$  no mesmo intervalo de tempo  $t_f$ , a força requerida para realizar esse procedimento é muito menor quando o levantamento ideal é utilizado.

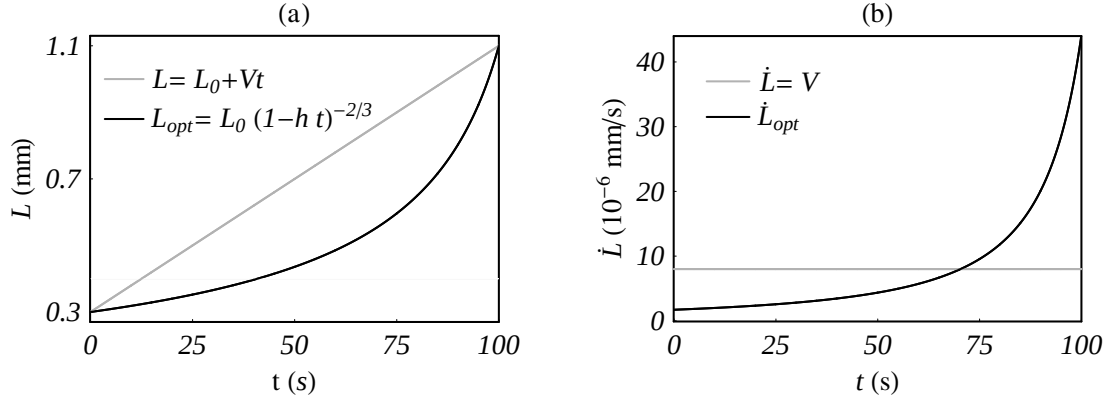


Figura 5.3: (a) Evolução temporal de  $L$  e  $L_{ot}$  e (b) evolução temporal das velocidades de levantamento  $\dot{L} = V$  e  $\dot{L}_{ot}$  para a situação ilustrada na Fig. 5.2 ( $L_0 = 0.3$  mm,  $L_f = 1.1$  mm e  $t_f = 100$  s). Note que em (a) temos  $L(t = 0) = L_{ot}(t = 0)$  e  $L(t = t_f) = L_{ot}(t = t_f)$ .

Lembrando que pela Eq. (5.16) a força de adesão cresce com o aumento da velocidade e decresce com o aumento do espaçamento entre as placas, a justificativa física da existência de um levantamento que minimize o trabalho de separação é a seguinte: no início do descolamento, a placa superior é levantada com uma velocidade mais baixa em relação à velocidade constante  $V$  do processo usual [veja Fig. 5.3], de modo que a força de adesão atinge um máximo bastante reduzido. Com o passar do tempo, a velocidade do levantamento ótimo cresce consideravelmente, porém esse aumento de velocidade ocorre quando maiores valores de  $L$  são alcançados, de tal maneira que a força necessária para essa separação é quase tão baixa quanto a força exercida no processo de levantamento constante. De fato, como ilustrado na Fig. 5.2, para maiores valores de  $L$  a força de separação para o caso ótimo é ligeiramente maior que a força correspondente obtida no levantamento com velocidade constante. Concluindo, utilizando o levantamento ideal é possível ir de  $L_0$  a  $L_f$  no mesmo intervalo de tempo  $t_f$ , mas com um pico de força menor e economizando uma quantidade razoável de energia.

A figura 5.4 ilustra o comportamento do trabalho de separação  $W$  quando variamos o espaçamento inicial das placas  $L_0$  para o caso rígido do aparato. As curvas pretas referem-se ao levantamento ideal, enquanto que as curvas cinzas identificam o levantamento convencional com velocidade constante. Para as curvas contínuas, fixamos  $V = 8.0 \times 10^{-6}$  mm/s e  $L_f = 1.1$  mm. Enquanto que para as curvas tracejadas  $V = 4.0 \times 10^{-6}$  mm/s



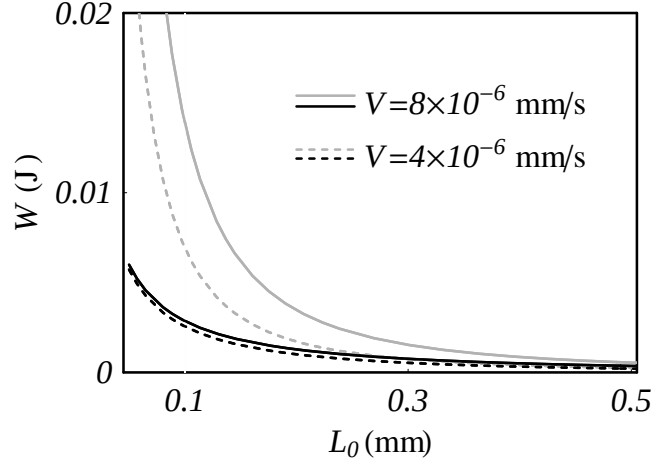


Figura 5.4: Trabalho de separação  $W$  em função do espaçamento inicial das placas  $L_0$ , para dois valores da velocidade de levantamento  $V$ .

e o mesmo  $L_f = 1.1$  mm. Os parâmetros restantes são os mesmo utilizados na Fig. 5.2. Primeiramente, observamos que nosso processo de controle é mais eficaz para menores valores do espaçamento inicial  $L_0$ . Em outras palavras, quanto mais confinado o fluido se encontra, melhor o processo de otimização. É também evidente que a distância entre as curvas sólidas é maior que a separação entre as curvas tracejadas. Isso significa que a eficiência de nosso protocolo de minimização é maior para maiores valores da velocidade de levantamento. Estes resultados confirmam a eficácia do protocolo de elevação ideal para fluidos newtonianos.

### 5.3.2 Caso não newtoniano

Devemos agora comparar o teste de adesão para o levantamento convencional e o levantamento ótimo quando o fluido confinado é não newtoniano. A Fig. 5.5 ilustra a curva força-deslocamento para velocidade constante (curvas cinzas) e para o levantamento ótimo (5.28) (curvas pretas) no caso de um aparato elástico. As curvas contínuas (tracejadas) estão associadas aos descolamentos utilizando fluidos newtonianos (não newtonianos). Os parâmetros usados são  $\eta(0) = 0.5$  Pa s,  $R_0 = 2$  cm e  $L_0 = 0.12$  mm. Além disso, fixamos  $L_f = 0.23$  mm e  $V = 10^{-6}$  mm/s. Relembre que apesar de  $L_{ot}$  [Eq. (5.28)] não depender do parâmetro não newtoniano  $a$ , a força de adesão obtida das Eqs. (5.16)

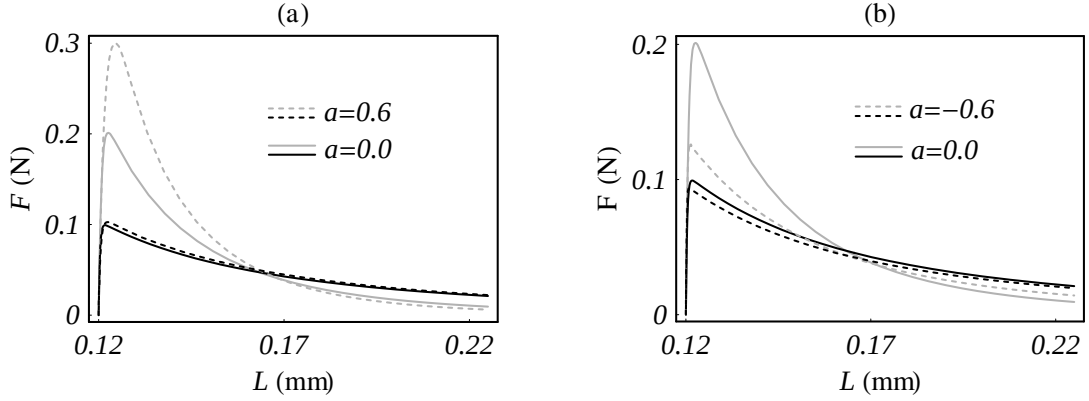


Figura 5.5: Força de adesão  $F$  em função do deslocamento  $L$ , para as respostas adesivas de um fluido newtoniano ( $a = 0$ ), (b) de um fluido shear-thickening ( $a = 0.6$ ) e (b) de um fluido shear-thinning ( $a = -0.6$ ). As curvas cinzas (pretas) estão associadas ao levantamento convencional constante (ótimo).

e (5.27) depende do parâmetro  $a$ . Examinando a Fig. 5.5(a), notamos que a natureza shear-thickening do fluido ( $a = 0.6$ ) potencializa a eficácia do processo de otimização em relação à otimização utilizando fluidos newtonianos. Isso pode ser observado notando que a distância entre as curvas tracejadas é maior que a distância entre as curvas contínuas. Por outro lado, para um fluido shear-thinning [Fig. 5.5(b), com  $a = -0.6$ ], verificamos o comportamento oposto, as curvas tracejadas se encontram mais próximas uma da outra quando comparamos com a distância entre as curvas contínuas, significando que a economia de energia e a queda da força de adesão não é tão significativa quando o levantamento ótimo é utilizado.

Uma das razões do protocolo de minimização ser mais (menos) eficaz para fluidos shear-thickening (shear-thinning) é que quando o levantamento ótimo é utilizado, as placas inicialmente se separam com baixa velocidade e o efeito não newtoniano perde sua potencialidade de modificar a força de adesão (ver curvas pretas na Fig. 5.5). Por outro lado, para o levantamento com velocidade constante o efeito não newtoniano é bastante significativo (ver curvas cinzas na Fig. 5.5), tornando as curvas tracejadas mais afastadas no caso shear-thickening em comparação à situação para o fluido shear-thinning.

## 5.4 Efeitos da inércia do fluido na força de adesão

Na Seq. 5.3 utilizamos o cálculo variacional para minimizar a energia de adesão de fluidos viscosos em situações em que as contribuições da inércia do fluido podem ser negligenciadas. Nesta seção, pretendemos entender a contribuição da inércia na curva força-deslocamento de um fluido viscoso newtoniano e não newtoniano. No escopo geral desta tese, uma questão pertinente é conhecer o perfil de levantamento ótimo  $L_{ot}$  que minimize a energia de adesão quando efeitos de inércia são considerados. Infelizmente, essa questão é apenas uma perspectiva de um trabalho futuro que não abordaremos nesta tese. Por conveniência, de agora em diante trabalharemos na versão *adimensional* das equações, onde a influência da inércia é explicitamente representada pelo número de Reynolds (5.18). Além disso, assumiremos nesta seção que o aparato é deslocado verticalmente com velocidade constante  $V$ , o que corresponde ao perfil de deslocamento experimental convencional. Logo, pelo rescalonamento realizado no final da Seq 5.2 podemos escrever  $L(t) = b_0 + t$ .

### 5.4.1 Caso newtoniano

Começamos a discussão desta seção examinando os efeitos inerciais do fluido na curva força-deslocamento ( $F$  vs  $L$ ) para fluidos newtonianos ( $a = 0$ ,  $\mathcal{N} = 1$ ), utilizando a equação dinâmica completa (5.20). A Fig. 5.6 ilustra a curva  $F$  vs  $L$  na forma *adimensional* considerando os efeitos combinados da inércia do fluido (controlado pelo parâmetro  $Re$ ) e a contribuição devido à inércia do aparato  $M$ , para  $b_0 = 1.7$ . Em ambas as Fig. 5.6(a) e Fig. 5.6(b) as curvas tracejadas representam a situação na qual os efeitos inerciais são completamente negligenciados ( $Re = 0$  e  $M = 0$ ). Por outro lado, as curvas contínuas pretas indicam a influência apenas da inércia do fluido ( $Re = 0.02$  e  $M = 0$ ), enquanto que a curva cinza contínua representa a circunstância em que a inércia do fluido e do aparato agem simultaneamente ( $Re = 0.02$  e  $M \neq 0$ ).

Analisando a Fig. 5.6 é evidente que a inércia do fluido aumenta de forma significativa o pico da força de adesão (note a diferença entre os picos das curvas contínuas e tracejadas). Fisicamente, isso é justificado pela resistência ao movimento devido ao termo inercial

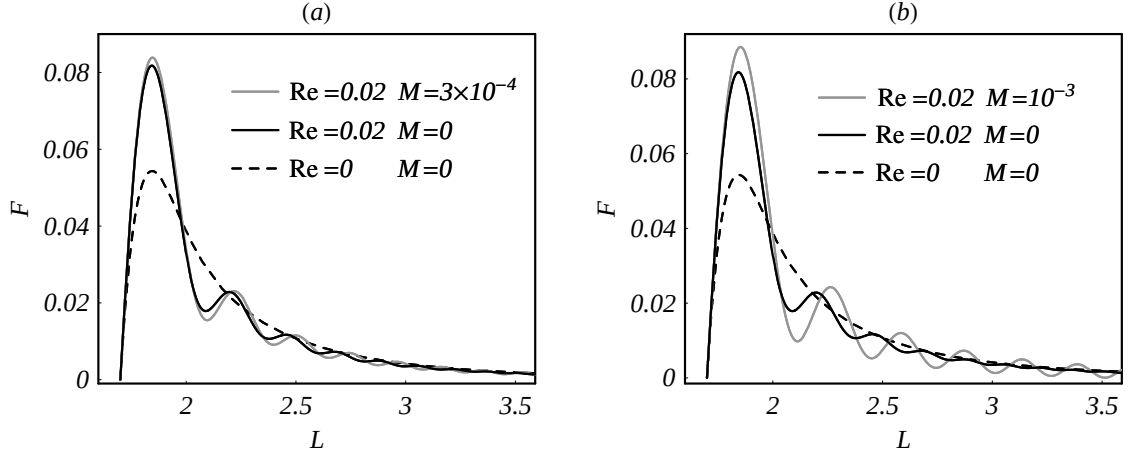


Figura 5.6: Curva da força de adesão  $F$  como função do deslocamento  $L$  considerando que o papel da inércia do fluido ( $Re$ ) e a inércia do aparato ( $M$ ) no limite newtoniano  $a = 0$ . Em (a) o valor de  $M$  está em concordância com valores típicos usados em experimento de adesão [132, 135–139, 143]. Em (b) o valor de  $M$  foi aumentado significativamente a fim de visualizarmos a influência da inércia do dispositivo de medição. Vemos que a inércia do fluido leva a um aumento considerável do pico da força de adesão, seguido de oscilações que decaem no decorrer do descolamento. Além disso, nota-se que as oscilações persistem se a inércia do aparato é aumentada significativamente. Assumimos a separação inicial das placas  $b_0 = 1.7$ .

proporcional à aceleração do lado esquerdo da Eq. (5.20). Também percebemos que a inércia do fluido induz oscilações na curva da força de adesão, que tendem a desaparecer rapidamente com o crescimento de  $L$ .

Além disso, é interessante diferenciar as contribuições da inércia do fluido e da inércia do aparato. Na Fig. 5.6(a), a curva cinza é plotada levando em consideração um valor típico de  $M$  em testes de adesão (algumas centenas de gramas) [132, 135–139, 143]. Dessa figura, observamos claramente que o efeito da inércia do aparato é negligenciável comparado com efeito da inércia do fluido. Para visualizar os efeitos da inércia do aparato, aumentamos o valor de  $M$  consideravelmente na Fig. 5.6(b). Nesse caso, notamos um crescimento suave no pico da força, acompanhado de uma intensificação das oscilações na “calda” da curva força-deslocamento. Esse comportamento pode ser compreendido analisando o termo total de aceleração  $[M + Re/b^3]\ddot{b}$  na Eq. (5.20), que é o responsável pelas oscilações da curva. Enquanto que o termo da inércia do fluido decai com o aumento da separação das placas pelo fator ( $\sim 1/b^3$ ), o coeficiente do termo da inércia do aparato é

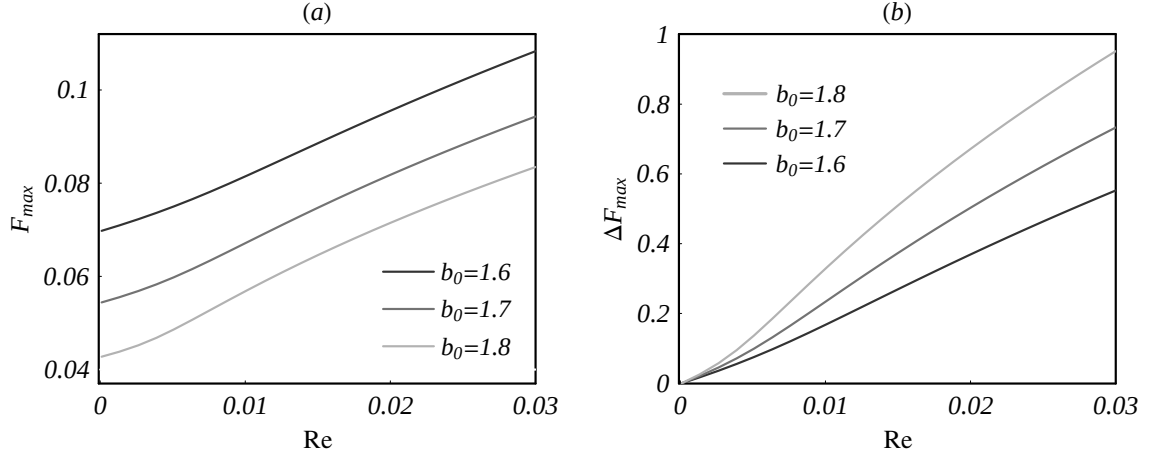


Figura 5.7: (a) Força de adesão máxima  $F_{max}$  em função do número de Reynolds  $Re$ . (b) Gráfico do crescimento relativo  $\Delta F_{max}$  [definido Eq. (5.30)] com respeito a variações de  $Re$ . Três diferentes valores de  $b_0$  são considerados: 1.6, 1.7 e 1.8.

uma constante igual a  $M$ . Isso justifica porque as oscilações devido à inércia do aparato tendem a sobreviver por mais tempo quando  $M$  é aumentado. Note que para o caso de um aparato rígido, não observaríamos picos e oscilações na curva força-deslocamento na Fig. 5.6.

Vale salientar que a contribuição da inércia do aparato já havia sido estudada na Ref. [136]. No entanto, a influência da inércia do fluido no comportamento da curva  $F$  vs.  $L$  e a importância relativa entre a inércia do fluido e a inércia do aparato ainda não havia sido examinada. Daqui em diante, negligenciaremos a inércia do aparato.

Procedemos examinando como o máximo da força de adesão  $F_{max}$  varia com o número de Reynolds  $Re$  para diferentes valores da separação inicial das placas  $b_0$  [Fig. 5.7(a)]. Observe que  $F_{max}$  cresce significativamente quando maiores valores de  $Re$  são considerados. Apesar de menores valores de  $b_0$  levarem a maiores magnitudes de  $F_{max}$ , a taxa de mudança de  $F_{max}$  com respeito a  $Re$  revela-se ser independente do valor de  $b_0$ . À primeira vista isso pode parecer um pouco contra-intuitivo pois poderíamos esperar um efeito inercial mais acentuado para maiores valores da separação inicial  $b_0$ . Para investigar essa questão mais a fundo, calculamos como o crescimento relativo da  $F_{max}$

$$\Delta F_{max} = \frac{F_{max}(Re) - F_{max}(Re = 0)}{F_{max}(Re = 0)} \quad (5.30)$$

varia com o número de Reynolds. Esse comportamento é ilustrado na Fig. 5.7(b) para os mesmos valores de  $b_0$  utilizados na Fig. 5.7(a). Nesse gráfico se torna claro que maiores valores de  $b_0$  promovem um crescimento mais acentuado de  $\Delta F_{max}$  quando  $Re$  é aumentado. Particularmente, para  $b_0 = 1.8$  o máximo da força cresce de aproximadamente 100% no intervalo  $0 \leq Re \leq 0.03$ . Esses resultados mostram uma clara influência da inércia na força de adesão de fluidos nesse intervalo de valores de  $Re$ .

### 5.4.2 Caso não newtoniano

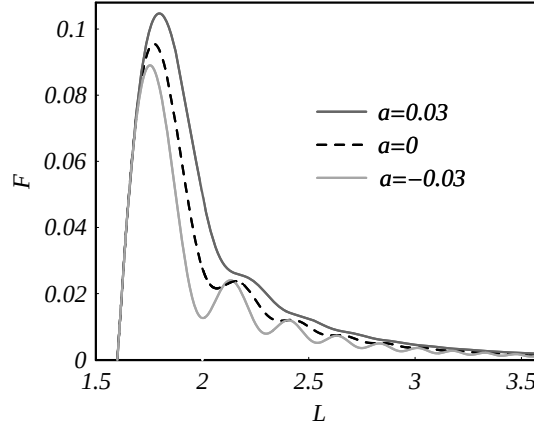


Figura 5.8: Força de adesão  $F$  em função do deslocamento  $L$  para três valores diferentes do expoente da lei de potência  $a$  e do parâmetro não newtoniano  $\mathcal{N}(a)$ : 0.03 e  $\mathcal{N}(0.03) = 1.31$  (caso shear-thickening), 0 e  $\mathcal{N}(0) = 1$  (limite newtoniano) e, -0.03 e  $\mathcal{N}(-0.03) = 0.76$  (caso shear-thinning). Consideramos  $Re = 0.02$  e  $b_0 = 1.6$ .

Nesta seção analisamos a influência da inércia na força de adesão quando o fluido considerado é não newtoniano. A Fig. 5.8 ilustra a curva força-deslocamento para  $Re = 0.02$ ,  $b_0 = 1.6$  e três valores do expoente da lei de potência:  $a$ : 0.03 (curva cinza escura), 0 (curva tracejada) e  $-0.03$  (curva cinza clara). Para o fluido shear-thinning ( $a = -0.03$ ), observamos uma diminuição na magnitude da força máxima em relação à situação observada com o fluido newtoniano. Isso indica uma redução da propriedade adesiva para fluidos shear-thinning. Além disso, notamos que as oscilações da curva força-deslocamento se tornam mais intensas. Por outro lado, para um fluido shear-thickening ( $a = 0.03$ ) verificamos o comportamento oposto, o pico da força é aumentado em comparação ao pico observado para fluidos newtonianos, no entanto, as oscilações da curva são atenuadas.

Finalizamos esse capítulo examinando a Fig. 5.9, que ilustra o máximo da força de adesão  $F_{max}$  como uma função do número de Reynolds  $Re$ , para diferentes valores de  $a$  e para  $b_0 = 1.6$ . A curva tracejada (caso newtoniano) na Fig. 5.9 corresponde à curva cinza escura plotada na Fig. 5.7, mas agora fixamos  $b_0$  e focamos na influência de  $a$  no comportamento de  $F_{max}$  quando a inércia do fluido é modificada. Podemos verificar que maiores valores negativos de  $a$  (curvas cinzas claras) induzem uma mudança significativa de  $F_{max}$  quando aumentamos a inércia do fluido. Consequentemente, as diferentes curvas tendem a convergir quando  $Re$  se torna maior. Em outras palavras, contribuições inerciais maiores tendem a inibir a capacidade dos efeitos não newtonianos de alterar a força de adesão do fluido.

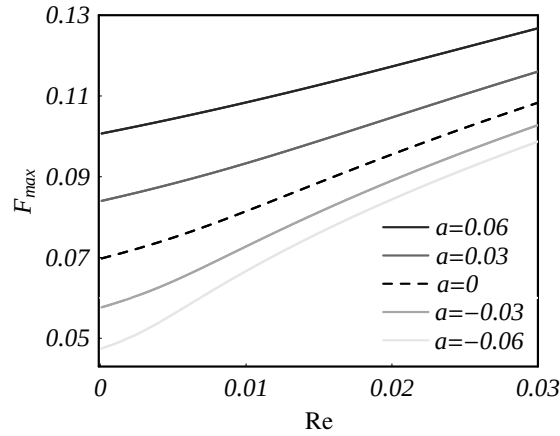


Figura 5.9: (a) Valor máximo da força de adesão  $F_{max}$  em função do número de Reynolds  $Re$ , para cinco valores diferentes do expoente da lei de potência  $a$ .

## Capítulo 6

# Efeitos de inércia nos padrões de dedos viscosos: fluxos retangular e radial

### 6.1 Introdução

A grande maioria dos trabalhos experimentais e teóricos sobre a instabilidade de Saffman-Taylor abordam o fluxo na célula de Hele-Shaw com espaçamento entre as placas muito pequeno e considera o deslocamento de fluidos de alta viscosidade, de modo que os efeitos inerciais podem ser negligenciados. Como discutido no Cap. 5, essas condições caracterizam um fluxo com número de Reynolds praticamente nulo de modo que o sistema pode ser descrito pela lei de Darcy (2.10) [3, 10, 31–42]. No entanto, correções da lei de Darcy foram propostas por alguns grupos de pesquisa que examinaram situações em que o papel da inércia é relevante [109–113]. Um exemplo importante, conhecido por fluxo paralelo em Hele-Shaw [109], ocorre quando dois fluidos escoam paralelamente à interface entre eles ao invés de um fluido menos viscoso empurrar um outro mais viscoso, como acontece no problema de Saffman-Taylor. Para esse tipo de fluxo foi deduzida uma equação de Kelvin-Helmholtz-Darcy que governa a hidrodinâmica do problema e, a partir daí, foi encontrado que a condição para se obter uma interface instável é determinada pelos efeitos inerciais. Basicamente, todos esses estudos realizam uma média transversal



da equação de Navier-Stokes tridimensional, levando a versões ligeiramente diferentes da lei de Darcy bidimensional (2.10).

Outro exemplo em que os efeitos inerciais são observados foi recentemente estudado na Ref. [112], onde o experimento tradicional de Saffman-Taylor é revisitado, mas agora considerando fluidos de baixa viscosidade e espaçamentos mais largos entre as placas da célula de Hele-Shaw retangular. Na Ref. [112], foi verificado que a largura dos dedos viscosos crescem com o aumento da velocidade do fluxo, ao contrário do que acontece no problema convencional (não inercial). A Ref. [112] assume que esse efeito peculiar de alargamento acontece devido às contribuições da inércia do fluido. Ainda mais recentemente, correções no problema de Hele-Shaw radial considerando valores relevantes do número de Reynolds foram realizadas teoricamente no limite em que a tensão superficial é nula [113]. Técnicas de mapeamento conforme foram utilizadas para efetuar uma análise de estabilidade linear desse sistema ideal (sem tensão superficial), sugerindo que os efeitos inerciais tendem a estabilizar as perturbações interfaciais.

Portanto, os trabalhos realizados até então sobre os efeitos de inércia nas instabilidades em Hele-Shaw examinaram *experimentos* na geometria retangular e deduziram uma análise *puramente linear* no limite de tensão superficial nula em deslocamentos radiais. Apesar da importância e utilidade desses resultados, um estudo teórico sobre a influência da inércia na morfologia dos padrões em Hele-Shaw é importante ser efetuado. Por exemplo, veremos mais adiante que uma análise teórica pode efetivamente atribuir o fenômeno de alargamento dos dedos observado nos experimentos da Ref. [112] aos efeitos inerciais do fluido. Essas importantes questões não lineares podem ser tratadas por uma abordagem perturbativa fracamente não linear. Esse é o nosso principal objetivo deste capítulo.

Neste capítulo, investigamos o papel desempenhado pela inércia nas características morfológicas dos padrões em ambas geometrias retangular e radial de Hele-Shaw. Essa análise é realizada empregando uma teoria de modos acoplados e assumindo a presença realística dos efeitos de tensão superficial. Note que até então estudamos as instabilidades de Saffman-Taylor em primeira ordem de perturbação  $\zeta$ , o que nos fornece apenas informações da estabilidade das amplitudes de Fourier. No entanto, para acessar características morfológicas dos padrões, uma abordagem não linear é necessária. Para o problema do

fluxo retangular, encontramos analiticamente importantes aspectos sobre estabilidade e morfologia durante estágios lineares e não lineares da dinâmica. Infelizmente, a mesma formulação puramente analítica dos efeitos inerciais para o fluxo radial em Hele-Shaw é bem mais complicada. Mesmo assim, uma análise de modos acoplados ainda permite o acesso a aspectos relevantes das instabilidades radiais, tais como a bifurcação dos dedos viscosos. Os resultados obtidos sobre esse problema encontram-se na Refs. [114, 115].

Além disso, investigamos o efeito da inércia em um outro tipo de sistema hidrodinâmico, conhecido por fluxo na célula de Hele-Shaw girante [196, 197]. Também assumindo uma tensão superficial não nula. O dispositivo da célula de Hele-Shaw girante é uma variação do problema usual de Saffman-Taylor, no qual a célula rotaciona e a ação de forças centrífugas e de tensão superficial determinam a estabilidade da interface. Nesse caso, as perturbações da interface são geradas pela diferença de densidade entre os fluidos. Durante as últimas duas décadas vários aspectos teóricos e experimentais desse problema foram abordados: o desenvolvimento de soluções exatas dependentes do tempo [198, 199], deslocamento de fluidos miscíveis [200, 201], a influência da viscosidade na morfologia dos padrões [153, 154, 202], efeitos de molhamento [203] e o desprendimento de gotas durante o processo de rotação [204], conhecido como “*pinch-off phenomena*”. Apesar de todas essas abordagens, os efeitos inerciais do fluido no processo de formação de padrões na célula de Hele-Shaw girante não foram explorados.

Assim como na geometria retangular, na célula de Hele-Shaw girante conseguimos desenvolver uma análise puramente analítica que permite descrever o papel da inércia em ambos os regimes linear e fracamente não linear da dinâmica. Nesse cenário, o efeito de inércia também é quantificado por um número de Reynolds  $Re$ , enquanto que a medida relativa entre tensão superficial e forças centrífugas é fornecida por um parâmetro de tensão superficial adimensional  $B$ . Os resultados obtidos desse problema encontram-se na Ref. [114].

A abordagem teórica deste capítulo encontra-se na seguinte ordem: na Seq. 6.2, apresentamos a derivação das equações fracamente não lineares para o fluxo na geometria retangular quando os efeitos de inércia são levados em consideração. Uma análise de estabilidade linear é realizada na Seq. 6.2.2. Informações analíticas sobre a influência da

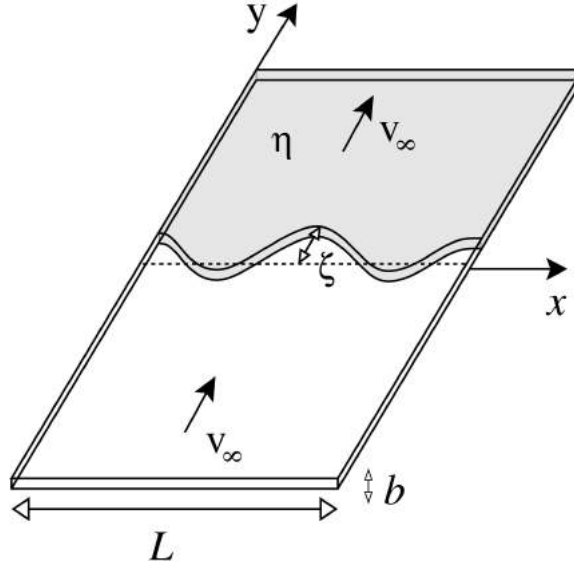


Figura 6.1: Representação esquemática do fluxo na célula de Hele-Shaw retangular.

inércia na largura dos dedos são discutidas na Seq. 6.2.3. O mesmo estudo teórico feito no caso retangular é realizado para o fluxo radial na Seq. 6.3, onde focamos no impacto da inercia no importante mecanismo de bifurcação dos dedos (discutido no Cap. 1). Finalmente, realizaremos essa abordagem perturbativa no problema do fluxo na célula de Hele-Shaw girante, obtendo importantes informações sobre estabilidade e morfologia dos padrões.

## 6.2 Efeitos de inércia: geometria retangular

### 6.2.1 Equação diferencial de modos acoplados

Considere o fluxo de dois fluidos imiscíveis confinados entre duas placas com espaçamento  $b$  de uma célula de Hele-Shaw retangular (Fig. 6.1). Assuma o caso em que o fluido injetado possui viscosidade desprezível e é bombeado a uma velocidade  $\mathbf{v}_\infty = v_\infty \hat{\mathbf{y}}$  em  $y = -\infty$  e desloca o fluido viscoso na mesma velocidade em  $y = +\infty$ .  $\hat{\mathbf{y}}$  representa o vetor unitário ao longo do eixo  $y$ . Descrevemos o sistema em um referencial em movimento com velocidade  $\mathbf{v}_\infty$ , de modo que a interface pode ser deformada, mas em média não é

deslocada do eixo  $y = 0$  (linha tracejada na Fig. 6.1). Algumas características desse fluxo foram discutidas no Cap. 2.

Assim como na geometria radial (2.21), durante o fluxo a interface assume uma forma perturbada descrita por uma série de Fourier  $y = \zeta(x, t) = \sum_k \zeta_k(t) \exp(ikx)$  no intervalo  $0 \leq x \leq L$  no referencial em movimento, onde  $\zeta_k(t)$  representa as amplitudes complexas dos modos de Fourier. O número de onda  $k$  pode assumir valores positivos e negativos. Observe que a amplitude do modo  $k = 0$  deve ser nula pois estamos no referencial em movimento da interface não perturbada. Além disso, condições periódicas de contorno são aplicadas ao longo do eixo  $x$  de modo que  $k = 2\pi n/L$ , para  $n$  inteiro. Neste capítulo, o método analítico que abordamos mantém termos até segunda ordem em  $\zeta$  e descreve a dinâmica no estágio linear e no início dos estágios não lineares da interface.

A fim de investigar a influência da inércia na instabilidade de Saffman-Taylor seguimos a abordagem teórica originalmente desenvolvida nas Refs. [109–113]. Essa análise assume uma lei de Darcy generalizada obtida por uma média transversal da equação de Navier-Stokes considerando efeitos inerciais. Isso nos leva a uma expressão similar àquela obtida na Seq. 5.2

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{6}{5}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \frac{12\eta}{b^2} \mathbf{v}. \quad (6.1)$$

Além disso, devemos considerar a condição de continuidade  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Nas equações anteriores,  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_\infty$ , onde  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x \hat{\mathbf{x}} + \bar{v}_y \hat{\mathbf{y}}$  representa a velocidade do fluido em relação ao referencial em movimento e  $p$  corresponde à pressão hidrodinâmica. Uma importante consideração assumida na Ref. [112,113] é que os efeitos inerciais não são significativamente fortes, de modo que o fluxo irrotacional é mantido ( $\mathbf{v} = -\nabla \phi$ ). Nessa circunstância, a Eq. (6.1) pode ser convenientemente reescrita na forma *adimensional*

$$\text{Re} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi|^2 \right] = p - \phi, \quad (6.2)$$

onde o parâmetro

$$\text{Re} = \frac{\rho U b^2}{12\eta L} \quad (6.3)$$

define um número de Reynolds que quantifica o efeito da inércia do fluido. Na Eq. (6.2), comprimentos e velocidades estão rescalonados por um comprimento característico  $L$  e por  $U = v_\infty$ , respectivamente. Daqui em diante, trabalharemos na versão adimensional das equações.

Devido à tensão superficial, a diferença de pressão na interface satisfaz a condição de contorno (2.19). Negligenciando efeitos de molhamento e dos estresses normais, temos a condição dinâmica na forma adimensional dada por

$$p = B\kappa, \quad (6.4)$$

onde  $p$  corresponde à pressão hidrodinâmica na região ocupada pelo fluido viscoso. Como o fluido injetado é invíscido, sua pressão hidrodinâmica é constante e podemos tratar o problema como o fluxo de apenas um fluido. O outro parâmetro adimensional

$$B = \frac{\sigma b^2}{12\eta U L^2} \quad (6.5)$$

representa uma tensão superficial efetiva. A última equação fundamental do sistema é a condição cinemática de contorno (2.27), que em coordenadas cartesianas é escrita na forma

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left( \bar{v}_y - \bar{v}_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{y=\zeta}, \quad (6.6)$$

que afirma que a interface se move de acordo com a velocidade local do fluido.

Para obter a equação dinâmica para as amplitudes de Fourier basta seguir os passos descritos no Cap. 2, porém mantendo nos cálculos termos até segunda ordem em  $\zeta$ . No entanto, um breve esclarecimento do processo até a equação dinâmica de modos acoplados é instrutivo: pela condição de incompressibilidade, o potencial de velocidade satisfaz a equação de Laplace. Expandimos a solução em série de Fourier e escrevemos  $\phi$  em termos das amplitudes  $\zeta_n$  utilizando a condição cinemática (6.6). Substituímos esses resultados e

a condição de pressão (6.4) na Eq. (6.2) e mantemos sempre termos até segunda ordem em  $\zeta$ . Finalmente, calculando a transformada de Fourier do resultado desse procedimento, obtemos a equação de movimento para as amplitudes de perturbação no fluxo retangular em Hele-Shaw (para  $k \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \text{Re } \ddot{\zeta}_k + \left(1 - \text{Re} \frac{|k|}{5}\right) \dot{\zeta}_k - \Lambda(k) \zeta_k = \\ + \sum_{k' \neq 0} \left[ G(k, k') + \text{Re } I(k, k') \right] \dot{\zeta}_{k'} \zeta_{k-k'} \\ + \text{Re} \sum_{k' \neq 0} \left[ G(k, k') \ddot{\zeta}_{k'} \zeta_{k-k'} + J(k, k') \dot{\zeta}_{k'} \dot{\zeta}_{k-k'} \right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde  $\Lambda(k) = |k|[1 - Bk^2]$ . Os termos de modos acoplados são dados por

$$G(k, k') = |k|[1 - \text{sgn}(kk')], \quad (6.8)$$

$$I(k, k') = \frac{|k|}{5} \left[ |k| \text{sgn}(kk') - |k'| \right] \quad (6.9)$$

e

$$J(k, k') = |k| \left\{ \frac{3}{5} \left[ 1 - \text{sgn}(k'(k - k')) \right] - \text{sgn}(kk') \right\}. \quad (6.10)$$

A função  $\text{sgn}$  é igual a  $\pm 1$  de acordo com o sinal de seu argumento. As Eqs. (6.7)-(6.10) correspondem a um dos principais resultados deste capítulo, as quais determinam a evolução temporal das amplitudes de perturbação calculadas até segunda ordem, com efeitos inerciais inclusos. Note que quando  $\text{Re} = 0$ , a Eq. (6.7) reproduz o resultado mais simples obtido na Ref. [36], onde os efeitos de inércia são desprezados.

Enfatizamos que os resultados obtidos nas Seções 6.2.2 e 6.2.3 utilizam valores para os parâmetros adimensionais,  $\text{Re}$  e  $B$ , consistentes com os valores das grandezas físicas consideradas nos experimentos da Ref. [112]. Essa afirmação também é válida para os resultados apresentados na Seção 6.3, para o problema de injeção radial [37–39].

### 6.2.2 Análise da estabilidade linear

A Eq. (6.7) em nível linear de perturbação é significativamente simplificada, levando a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\text{Re } \ddot{\zeta}_k + \left(1 - \text{Re} \frac{|k|}{5}\right) \dot{\zeta}_k - \Lambda(k) \zeta_k = 0. \quad (6.11)$$

Assumindo  $\zeta_k(t=0) = \zeta_k(0)$  e  $\dot{\zeta}_k(t=0) = 0$  a solução analítica linear pode ser escrita na forma

$$\zeta_k(t) = \frac{\zeta_k(0)}{\lambda_- - \lambda_+} [\lambda_- \exp(\lambda_+ t) - \lambda_+ \exp(\lambda_- t)], \quad (6.12)$$

onde

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2\text{Re}} \left[ \pm \sqrt{\left(1 - \text{Re} \frac{|k|}{5}\right)^2 + 4 \text{Re } \Lambda(k)} - \left(1 - \text{Re} \frac{|k|}{5}\right) \right]. \quad (6.13)$$

Para situações experimentais de interesse [112], o termo envolvendo  $\exp(\lambda_- t)$  decai rapidamente a zero. Então, depois de um transiente bastante curto, a solução linear pode ser reescrita de uma maneira mais simples dada por

$$\zeta_k(t) = \zeta_k(0) \left[ \frac{\left(1 - \text{Re} \frac{|k|}{5}\right) + \text{Re} \lambda(k)}{\left(1 - \text{Re} \frac{|k|}{5}\right) + 2\text{Re} \lambda(k)} \right] \exp[\lambda(k)t], \quad (6.14)$$

onde  $\lambda(k) = \lambda_+$  representa a taxa de crescimento linear. Enfatizamos que as soluções oscilatórias da Eq. (6.11) decaem exponencialmente no tempo, ou seja, são soluções estáveis. Podemos ver que no limite  $\text{Re} \rightarrow 0$ ,  $\lambda(k) \rightarrow \Lambda(k)$  retomando à expressão da taxa de crescimento obtida no problema não inercial da Ref. [36].

O número de onda crítico que separa a região instável da região estável é obtido pela condição  $\lambda(k) = 0$ , resultando em

$$k_c = \frac{1}{\sqrt{B}}. \quad (6.15)$$

Esse valor define a largura da banda de modos instáveis, onde observamos que é independente de  $\text{Re}$ . Enquanto que  $k_c$  não é modificado pela contribuição inercial, o modo de

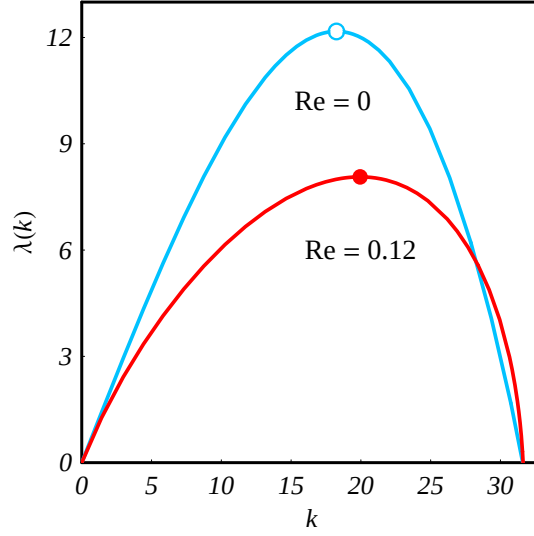


Figura 6.2: Taxa de crescimento linear  $\lambda(k)$  em função de  $k$ , para  $Re = 0$  e  $Re = 0.12$  e  $B = 0.001$ . Os máximos das curvas estão indicados pelos pequenos círculos.

maior taxa de crescimento [obtido pela equação  $d\lambda(k)/dk=0$ ] possui uma dependência no número de Reynolds bastante complicada, dada por uma solução de uma equação algébrica de quarta ordem em  $k$ . No entanto, considerando apenas a correção de ordem mais baixa em  $Re$ , o modo de maior taxa de crescimento pode ser escrito como

$$k_{max} \approx k_{max}^o \left( 1 + \frac{k_{max}^o}{15} Re \right), \quad (6.16)$$

onde  $k_{max}^o = 1/\sqrt{3B}$  é o modo de maior taxa de crescimento quando os efeitos de inércia são negligenciados. Observe que como  $\lambda(k)$  não depende do tempo, podemos obter o número de dedos na interface fazendo  $d\lambda(k)/dk=0$  e utilizando a relação  $k = 2\pi n/L$  ( $n$  inteiro).

A Fig. 6.2 ilustra  $\lambda(k)$  em função do número de onda  $k$ , para  $B = 0.001$  e para dois valores de  $Re$ : 0 e 0.12. Primeiramente, é evidente que a banda de modos instáveis não é modificada quando alteramos o número de Reynolds. No entanto, é claro que há uma diminuição significativa do máximo da taxa de crescimento quando os efeitos de inércia são considerados. Isso caracteriza o papel estabilizante da inércia nas instabilidades da geometria retangular. Além disso, observamos que a posição do modo de máximo  $\lambda(k)$  é deslocado para maiores valores de  $k$  quando  $Re$  é não nulo. Na próxima seção,



abordaremos a contribuição da inércia do fluido na morfologia dos padrões, como por exemplo no mecanismo de bifurcação dos dedos viscosos. Esse efeito só pode ser descrito analiticamente em um regime não linear da dinâmica.

### 6.2.3 Análise fracamente não linear: o fenômeno de alargamento e bifurcação

Para estabelecer uma melhor conexão com a análise fracamente não linear originalmente deduzida na Ref. [36] onde os efeitos inerciais são desconsiderados, realizamos uma pequena manipulação na equação de modos acoplados (6.7). Da simplicidade da solução linear (6.14), podemos escrever  $\dot{\zeta}_k = \lambda(k)\zeta_k$ . Portanto, a Eq. (6.7) pode ser escrita adequadamente como uma equação diferencial de primeira ordem no tempo

$$\dot{\zeta}_k = \lambda(k)\zeta_k + \sum_{k' \neq 0} Y(k, k')\zeta_{k'}\zeta_{k-k'}, \quad (6.17)$$

onde

$$Y(k, k') = \frac{\lambda(k')\{G + \text{Re}[I + \lambda(k')G + \lambda(k - k')J]\}}{1 + \text{Re}\left[\lambda(k) + \lambda(k') + \lambda(k - k') - \frac{|k|}{5}\right]} \quad (6.18)$$

é obtida substituindo a Eq. (6.17) na Eq. (6.7) e mantendo expressões até segunda ordem na perturbação  $\zeta$ . Na Eq. (6.18),  $G$ ,  $I$  e  $J$  representam as funções apresentadas nas Eqs. (6.8)-(6.10), respectivamente. Chamamos atenção ao fato que quando  $\text{Re} = 0$ , a Eq. (6.17) reproduz a forma da equação de segunda ordem de modos acoplados derivada originalmente na Ref. [36]. Ao invés de utilizar a Eq. (6.7), vamos analisar a Eq. (6.17) pois ela possui a forma apropriada que nos permite um estudo analítico dos aspectos morfológicos de uma maneira bastante simples.

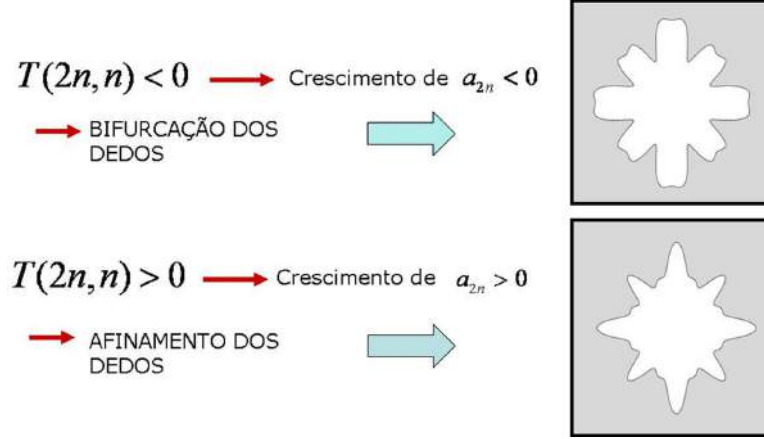


Figura 6.3: Figura esquemática da influência da função  $T(2n, n)$  na forma dos dedos viscosos. Apesar da figura representar o mecanismo de bifurcação na geometria radial, essa mesma análise é válida para o fluxo retangular

Assim como nas Refs. [36, 40], consideramos o acoplamento de apenas dois modos de Fourier, um modo fundamental e o seu primeiro harmônico, a fim de obter uma informação analítica do problema. Nossa discussão é simplificada ainda mais, reescrevendo a Eq. (6.17) em termos dos modos cosseno e seno, onde a amplitude do modo cosseno  $a_k = \zeta_k + \zeta_{-k}$  e a do modo seno  $b_k = i(\zeta_k - \zeta_{-k})$  são valores reais. Sem perda de generalidade, escolhemos a fase do modo fundamental  $a_k > 0$  e  $b_k = 0$ . A morfologia da ponta dos dedos, achatamento ou afinamento, está relacionada com a amplitude do primeiro harmônico  $2k$  em relação à amplitude do modo fundamental  $k$ , o qual tem magnitude dominante e determina a forma global da interface fluido-fluido. Para analisar esse comportamento na dinâmica de modos acoplados, estudaremos a influência do modo fundamental [assumindo  $\lambda(2k) = 0$ ] no crescimento do seu primeiro harmônico [36]. Nessa circunstância, as equações de movimento para os modos harmônicos são

$$\dot{a}_{2k} = \lambda(2k) a_{2k} + \frac{1}{2} T(2k, k) a_k^2, \quad (6.19)$$

$$\dot{b}_{2k} = \lambda(2k) b_{2k}, \quad (6.20)$$

onde definimos a função  $T(2k, k)$  como sendo

$$T(2k, k) = Y(2k, k), \quad (6.21)$$

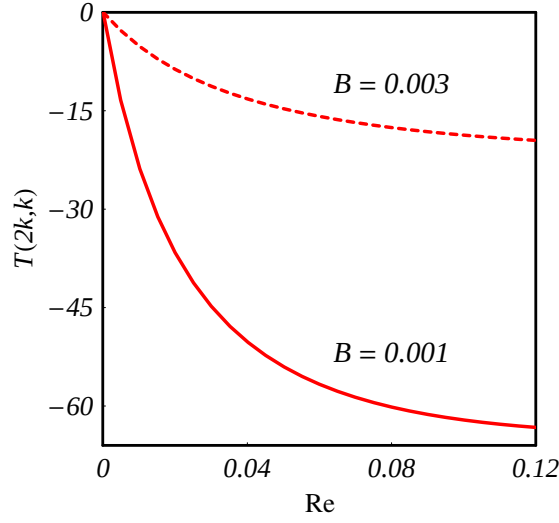


Figura 6.4: Função  $T(2k, k)$  em função do número de Reynolds  $Re$ , para dois diferentes valores de  $B$ : 0.001 (curva contínua) e 0.003 (curva tracejada).

que controla a forma da ponta dos dedos. A razão da definição de  $T(2k, k)$  é justificada pelo fato dessa função ter sido originalmente definida na Ref. [36] para o caso do sistema não inercial. Da Eq. (6.20), vemos que não há acoplamento de segunda ordem para o modo harmônico seno. O sinal de  $T(2k, k)$  dita se o achatamento dos dedos será favorecido pela dinâmica. Se  $T(2k, k) < 0$ , o termo de ordem  $a_k^2$  força o crescimento de  $a_{2k} < 0$ , que é o sinal que permite que os dedos se tornem mais achatados. Por outro lado, se  $T(2k, k) > 0$  contribui para o crescimento de  $a_{2k} > 0$ , levando a um afinamento dos dedos (ver Fig. 6.3). É importante notar que quando  $Re = 0$  a função  $T(2k, k)$  se anula, significando que não há acoplamento de segunda ordem quando o efeito da inércia do fluido é desprezível. Logo, se as contribuições inerciais são negligenciadas não detectamos nenhum sinal de achatamento dos dedos no fluxo de geometria retangular.

A Fig. 6.4 ilustra como a função  $T(2k, k)$  se comporta quando aumentamos  $Re$ . A curva contínua (tracejada) considera  $B = 0.001$  ( $B = 0.003$ ). Primeiramente, quando  $Re = 0$  a função  $T(2k, k)$  é nula, como esperado. Por outro lado, notamos que maiores valores de  $Re$  levam a maiores valores negativos de  $T(2k, k)$ . Portanto, efeitos de inércia tendem a favorecer o achatamento dos dedos. Além disso, vemos que tal efeito é mais intenso para

menores valores de  $B$ . Enfatizamos que esses resultados teóricos são consistentes com as observações experimentais da Ref. [112].

É interessante perceber que na Fig. 6.4 somos capazes de fixar o valor de  $B$  enquanto o número de Reynolds é aumentado. Porém, nos experimentos realizados na Ref. [112] o parâmetro de controle é o fluxo de velocidade  $U$ , de modo que alterando a velocidade os valores de  $B$  e  $Re$  são modificados. Isso implica em um balanço desses dois parâmetros a fim de determinar o comportamento da morfologia dos dedos no experimento realizado em [112]. No entanto, note que para um maior valor de  $U$ , temos um menor valor de  $B$  e um maior valor de  $Re$ , consequentemente temos  $T(2k, k)$  ainda mais negativo. Portanto, tanto em nosso trabalho quanto na Ref. [112], observamos a tendência de achatamento dos dedos quando efeitos inerciais são relevantes.

## 6.3 Efeitos de inércia: Geometria radial

Nesta seção investigamos o papel desempenhado pela inércia do fluido no problema de injeção na célula de Hele-Shaw radial, ilustrado na Fig. 2.3. Analisaremos a influência da inércia na característica morfológica principal dos padrões nesse sistema: o fenômeno de bifurcação dos dedos. Como discutido anteriormente, para estudar esse comportamento devemos ir além do estágio puramente linear e acessar o início da dinâmica não linear do sistema.

Utilizamos a análise perturbativa realizada para o fluxo na célula de Hele-Shaw radial, discutida no Cap. 2, porém mantendo termos até segunda ordem na perturbação  $\zeta$ , similarmente à Seq. 6.2.1. Na expansão de Fourier (2.23) de  $\zeta$ , incluímos o modo  $n = 0$  para manter a forma da interface perturbada independente da perturbação  $\zeta$ . A conservação de massa impõe que o modo zero seja escrito em termos de todos os outros modos de Fourier na forma  $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$ . Vale ressaltar que esse termo é nulo na geometria retangular. Perceba que na análise de estabilidade linear, não consideramos  $n = 0$  pois sua contribuição na dinâmica ocorre apenas em segunda ordem de perturbação.

Utilizando a lei de Darcy generalizada (6.2), as condições de contorno (6.4) e (2.27), e seguindo os mesmo passos descritos na Seq. 2.3 mantendo termos até segunda ordem

em  $\zeta$ , obtemos uma equação adimensional de modos acoplados para o fluxo radial (com  $n \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
 \text{Re } \ddot{\zeta}_n + \left[ 1 - \text{Re} \frac{\dot{R}}{R} \left( \frac{|n|}{5} - 2 \right) \right] \dot{\zeta}_n - \left[ \Lambda(n) - \text{Re} \frac{\dot{R}^2}{R^2} (|n| - 1) \right] \zeta_n = \\
 + \sum_{n' \neq 0} \left[ \mathcal{F}(n, n') + \text{Re } \mathcal{H}(n, n') \right] \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \\
 + \sum_{n' \neq 0} \left[ \mathcal{G}(n, n') + \text{Re } \mathcal{I}(n, n') \right] \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \\
 + \text{Re} \sum_{n' \neq 0} \left[ \mathcal{G}(n, n') \ddot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{J}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \dot{\zeta}_{n-n'} \right], \tag{6.22}
 \end{aligned}$$

onde  $\Lambda(n) = (|n| - 1)\dot{R}/R - B|n|(n^2 - 1)/R^3$ . Os termos de modos acoplados são dados por

$$\mathcal{F}(n, n') = \frac{|n|}{R} \left\{ \frac{\dot{R}}{R} \left[ \frac{1}{2} - \text{sgn}(nn') \right] - \frac{B}{R^3} \left[ 1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] \right\}, \tag{6.23}$$

$$\mathcal{G}(n, n') = \frac{1}{R} \{ |n|[1 - \text{sgn}(nn')] - 1 \}, \tag{6.24}$$

$$\mathcal{H}(n, n') = |n| \frac{\dot{R}^2}{R^3} \left\{ \left( \frac{|n|}{5} + 2 \right) \text{sgn}(nn') - 1 - \frac{|n'|}{5} - \frac{3}{5} \text{sgn}(n'(n - n')) \right\}, \tag{6.25}$$

$$\mathcal{I}(n, n') = |n| \frac{\dot{R}}{R^2} \left\{ \left( \frac{|n|}{5} - 1 \right) \text{sgn}(nn') + 1 - \frac{|n'|}{5} - \frac{6}{5} \text{sgn}(n'(n - n')) - \text{sgn}(n(n - n')) \right\} \tag{6.26}$$

e

$$\mathcal{J}(n, n') = \frac{1}{R} \left\{ \frac{3}{5} |n| \left[ 1 - \text{sgn}(n'(n - n')) \right] - |n| \text{sgn}(nn') - 1 \right\}. \tag{6.27}$$

Nessas equações, comprimentos estão rescalonados por  $L = R_0$  e velocidades por  $U = Q/2\pi R_0$ . Quando  $\text{Re} = 0$  as Eqs. (6.22)-(6.27) reproduzem os resultados obtidos na Ref. [40] para o problema sem inércia. Observe, por exemplo, que se  $\text{Re} = 0$ ,  $\Lambda(n)$  representa a taxa de crescimento linear para o sistema não inercial (3.3). Também verificamos que as Eqs. (6.22)-(6.27) se reduzem às equações de modos acoplados correspondentes ao fluxo retangular calculadas na Seq. 6.2.1 [Eqs. (6.7)-(6.10)] se tomamos o chamado “limite retangular”, especificamente:  $\mathcal{F} \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{G} \rightarrow G$ ,  $\mathcal{H} \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{I} \rightarrow I$  e  $\mathcal{J} \rightarrow J$ . O cálculo desse limite é melhor compreendido na versão dimensional das expressões: após a apropriada reintrodução das dimensões, fazemos  $R \rightarrow \infty$  e  $Q \rightarrow \infty$ , de tal maneira que  $Q/(2\pi R) \equiv v_\infty$  e  $n/R \equiv k$  permanecem constantes. Na versão adimensional, o limite retangular pode ser obtido tomando  $R \rightarrow \infty$  e  $\dot{R} \rightarrow 1$ .

Antes de iniciar a análise do impacto da inércia no mecanismo de bifurcação dos dedos, vamos comentar brevemente sobre a contribuição dos termos de primeira ordem em  $\zeta$  na equação de modos acoplados (6.22). Diferentemente da expressão obtida na Seq. 6.2.2 para o fluxo retangular [Eq. (6.11)], na geometria radial obtemos uma equação diferencial ordinária com coeficientes dependentes do tempo

$$\text{Re} \ddot{\zeta}_n + \left[ 1 - \text{Re} \frac{\dot{R}}{R} \left( \frac{|n|}{5} - 2 \right) \right] \dot{\zeta}_n - \left[ \Lambda(n) - \text{Re} \frac{\dot{R}^2}{R^2} (|n| - 1) \right] \zeta_n = 0, \quad (6.28)$$

lembrando que  $R = R(t)$ . Isso impede de obter uma forma analítica e simples para a solução das amplitudes de perturbação em nível linear, como conseguimos na geometria retangular pela equação (6.14). No entanto, em concordância com a Ref. [113], verificamos em um plot numérico da evolução temporal das amplitudes  $\zeta_n$  que, em nível linear, a inércia estabiliza as perturbações da interface.

Procedemos analisando a ação da inércia na forma dos padrões no início do regime não linear. Note que a análise analítica realizada na Seq. 6.2.3, através da obtenção da Eq. (6.17), não é possível para o caso radial pois não temos uma equação linear na forma  $\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n$ . Porém, ainda podemos examinar o fenômeno de bifurcação através do acoplamento do modo fundamental  $n$  e do seu primeiro harmônico  $2n$ .

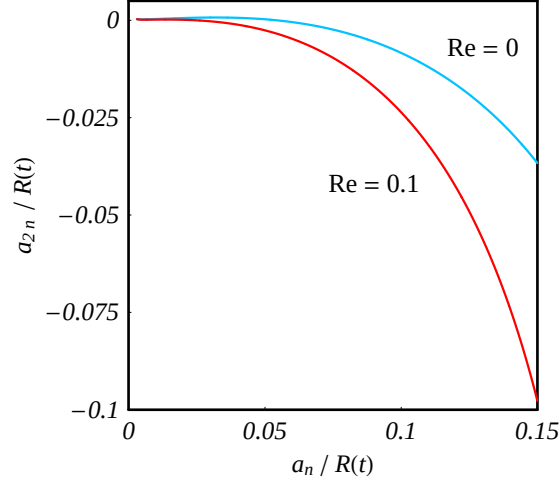


Figura 6.5: Comportamento de  $a_{2n}/R(t)$  em relação a  $a_n/R(t)$  na ausência ( $Re = 0$ ) e na presença ( $Re = 0.1$ ) dos efeitos inerciais.

A Fig. 6.5 faz um plot paramétrico do comportamento de  $a_{2n}/R$  em relação a  $a_n/R$  com o passar do tempo, para os modos acoplados  $n = 5$  e  $2n = 10$ . As amplitudes iniciais são  $a_n(0) = 3.0 \times 10^{-3}$  e  $a_{2n}(0) = 3.0 \times 10^{-4}$ . Para o caso em que  $Re = 0.1$ , as condições iniciais  $\dot{a}_n(0)$  e  $\dot{a}_{2n}(0)$  são as mesmas para o caso em que  $Re = 0$ . Esse tipo de gráfico é conveniente para comparar as morfologias entre as situações com e sem inércia. Relembrando a análise feita anteriormente, como estamos apenas considerando dois modos de Fourier,  $a_n/R$  está relacionado ao tamanho dos dedos e define a estrutura global da interface, enquanto que  $a_{2n}/R$  determina a morfologia da ponta dos dedos (se as pontas são mais achatadas e bifurcadas ou se são mais afinadas).

Situações envolvendo a ausência ( $Re = 0$ ) e a presença ( $Re = 0.1$ ) dos efeitos inerciais são apresentadas na Fig. 6.5 considerando  $B = 0.01$ . É evidente que quando  $a_n/R$  cresce,  $a_{2n}/R$  tende a se tornar mais negativo. A propósito, essa fase do harmônico favorece o achatamento e a possível bifurcação da ponta dos dedos. Além disso, para qualquer valor de  $a_n/R$ , é evidente que quando  $Re = 0.1$  a razão  $a_{2n}/R$  é mais negativa em relação à situação em que  $Re = 0$ . Essa observação sugere que devido à inércia, há um aumento dos efeitos não lineares que ocasionam a bifurcação dos dedos.

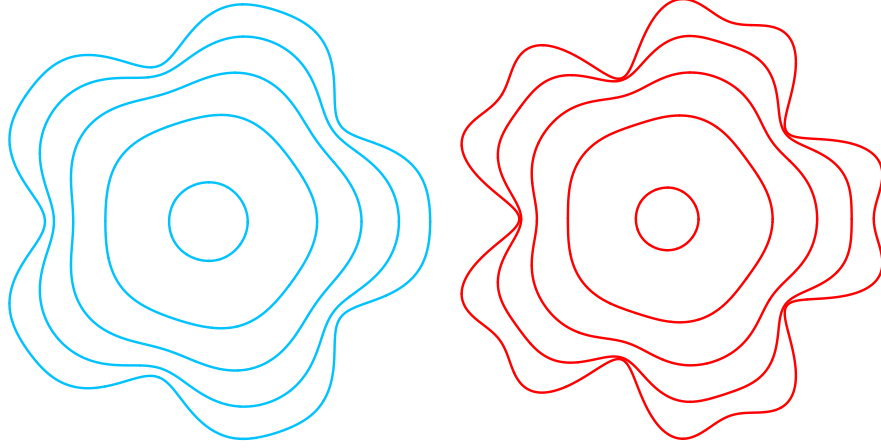


Figura 6.6: Evolução linear da interface, ilustrada em intervalos de tempo iguais considerando dois modos cosseno,  $n = 5$  e  $2n = 10$  quando  $Re = 0$  (painel da esquerda) e  $Re = 0.1$  (painel da direita). A bifurcação dos dedos é claramente favorecida na interface da direita.

Informações complementares sobre os efeitos inerciais no desenvolvimento dos eventos de bifurcação são fornecidas pela Fig. 6.6. Essa figura nada mais é que a evolução temporal das interfaces  $[\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + a_0(t) + a_n(t) \cos(n\theta) + a_{2n}(t) \cos(2n\theta)]$  obtida pelas amplitudes de perturbação da Fig. 6.5, ilustradas em intervalos de tempo iguais, assumindo  $Re = 0$  e  $0 \leq t \leq 12.5$  (painel da esquerda) e  $Re = 0.1$  e  $0 \leq t \leq 19.4$  (painel da direita). Observe que a evolução temporal ilustrada termina quando o mesmo valor para razão  $a_n/R \approx 0.15$  é atingido para ambos os números de Reynolds.

Enfatizamos que os padrões dos painéis esquerdo e direito da Fig. 6.6 não estão em escala. Isso é justificado pelo fato da inércia estabilizar a interface, logo um período maior de tempo é necessário para atingir a condição final preestabelecida dada pela razão  $a_n/R \approx 0.15$ . Por outro lado, como vemos na Fig. 6.6, apesar do atraso na formação dos dedos para  $Re = 0.1$ , os padrões que surgem são naturalmente mais bifurcados que as perturbações geradas para evolução equivalente quando  $Re = 0$ . Portanto, nossos resultados fracamente não lineares predizem o favorecimento da bifurcação dos dedos quando os efeitos inerciais são relevantes.



## 6.4 Efeitos de inércia na célula de Hele-Shaw girante

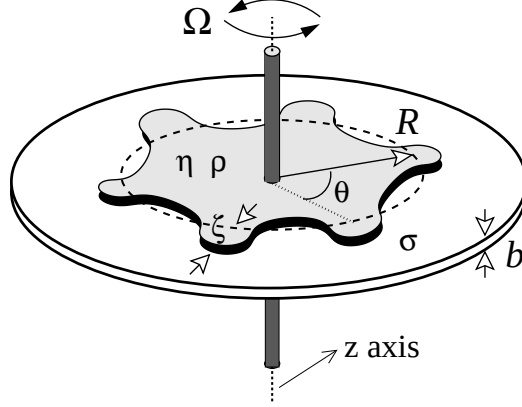


Figura 6.7: Representação esquemática do fluxo na célula de Hele-Shaw girante. O espaçamento entre as placas é dado por  $b$  e a célula rotaciona em torno do eixo perpendicular ao plano da célula com velocidade angular  $\Omega$ . O fluido mais viscoso e mais denso tem uma interface inicialmente circular de raio  $R$ , o qual ocupa a área sombreada. As perturbações da interface são representadas por  $\zeta$  e a tensão superficial entre os fluidos é dada por  $\sigma$ .

Nesta seção vamos estudar os efeitos inerciais em um sistema não convencional mas de grande aplicação prática, que é o fluxo na célula de Hele-Shaw girante. Como discutido no início desse capítulo, durante o processo rotatório, as instabilidades geradas na interface fluido-fluido é devido à diferença de densidade entre os fluidos, e não devido ao contraste de viscosidade (problema de Saffman-Taylor). A geometria da célula de Hele-Shaw girante está ilustrada na Fig. 6.7, cuja descrição é similar aos outros problemas em Hele-Shaw já abordados nesta tese. Considere a interface entre um fluido de viscosidade  $\eta$  e densidade  $\rho$ , e um outro fluido de viscosidade e densidade desprezíveis em uma célula de Hele-Shaw com espaçamento  $b$ . Ambos os fluidos são incompressíveis e existe uma tensão superficial  $\sigma$  entre eles. A célula rotaciona com velocidade angular constante  $\Omega$  em torno do eixo  $z$ , o qual é perpendicular ao plano da célula. O sistema de coordenadas é definido de tal maneira que sua origem está localizada no centro na placa inferior da célula.

Assim como outros sistema de geometria radial, definimos a posição da interface pela Eq. (2.21)  $[\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t)]$ , onde  $R$  representa o raio da interface inicialmente circular e  $\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$ . Observe que, diferentemente do problema de injeção radial e da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável, o raio  $R$  não evolui no

tempo pois não há nenhum tipo de injeção e o espaçamento entre as placas é mantido fixo.

Para investigar o papel desempenhado pela inércia, seguimos os mesmos passos descritos nas seções anteriores deste capítulo. Nesse contexto, descrevemos o fluxo no sistema de referência girante, onde a lei de Darcy generalizada (6.1) com um termo centrífugo adicional governa a dinâmica do problema,

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{6}{5}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \frac{12\eta}{b^2} \mathbf{v} - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (6.29)$$

onde  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$  ( $\hat{\mathbf{z}}$  é o vetor unitário ao longo do eixo  $z$ ) e  $\mathbf{r}$  é o vetor posição (no plano da célula) a partir do eixo de rotação do elemento de fluido. Além disso, devemos considerar a condição de incompressibilidade  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Note que a força centrífuga está representada pelo último termo do lado direito da Eq. (6.29). Focaremos em compreender a ação do termo inercial do lado esquerdo da Eq. (6.29) na estabilidade e morfologia dos padrões gerados pela força centrífuga, porém negligenciando efeitos de Coriolis. Relembramos que a Eq. (6.29) é derivada de uma média transversal da equação tridimensional de Navier-Stokes, mantendo termos inerciais.

Assim como na injeção retangular e radial, consideramos o fluxo descrito por um potencial de velocidade [112, 113]. Desse modo, a lei de Darcy modificada pode ser reescrita na forma *adimensional*

$$\text{Re}^2 \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi|^2 \right] = p - \phi + \frac{1}{2} r^2, \quad (6.30)$$

onde  $\phi$  ( $\mathbf{v} = -\nabla \phi$ ) é o potencial de velocidade. O parâmetro

$$\text{Re} = \frac{\rho \Omega b^2}{12\eta} \quad (6.31)$$

define um número de Reynolds para o sistema girante que quantifica o efeito da inércia do fluido. Da Eq. (6.30), vemos que efeitos inerciais podem ser negligenciados se  $\text{Re}^2 \ll 1$ . Além disso, comprimentos e velocidades estão rescalonados por  $R$  e  $U = \rho \Omega^2 b^2 R / (12\eta)$ ,

respectivamente. De agora em diante, trabalharemos com a versão adimensional das equações.

Para obter a equação de modos acoplados para as amplitudes de Fourier, seguimos os mesmos passos utilizados nas Seções 6.2 e 6.3. Neste sistema, as condições de contorno são representadas pela Eq. (6.4), porém com o parâmetro adimensional de tensão superficial dado por

$$B = \frac{\sigma}{\rho \Omega^2 R^3} \quad (6.32)$$

e pela condição cinemática (2.27). Mantendo termos da segunda ordem em  $\zeta$  e aplicando a transformada de Fourier, obtemos (para  $n \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \text{Re}^2 \ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n - \Lambda(n)\zeta_n = \\ + \sum_{n' \neq 0} \left[ F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \\ + \text{Re}^2 \sum_{n' \neq 0} \left[ G(n, n') \ddot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + H(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \dot{\zeta}_{n-n'} \right], \end{aligned} \quad (6.33)$$

onde  $\Lambda(n) = |n|[1 - B(n^2 - 1)]$ . E os termos de modos acoplados são dados por

$$F(n, n') = |n| \left\{ \frac{1}{2} - B \left[ 1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] \right\}, \quad (6.34)$$

$$G(n, n') = \{|n|[\text{sgn}(nn') - 1] - 1\} \quad (6.35)$$

e

$$H(n, n') = |n| \left\{ \text{sgn}(nn') + \frac{3}{5} [\text{sgn}(n'(n - n')) - 1] \right\} - 1. \quad (6.36)$$

Quando  $\text{Re} = 0$ , a Eq. (6.33) reproduz o caso mais simples obtido nas Refs. [40, 154], onde os efeitos de inércia são desconsiderados.

Enfatizamos que os parâmetros adimensionais (6.31) e (6.32) são consistentes com os valores experimentais do aparato e das propriedades materiais dos fluidos utilizados nas

Refs. [112, 153, 197]. Para os valores típicos relacionados à célula de Hele-Shaw girante temos  $b = 1.0 - 1.5$  mm,  $R = 3.0 - 8.0$  cm e  $f = \Omega/2\pi = 1 - 5$  Hz. Em relação às propriedades materiais do fluido, consideramos  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\sigma = 20$  m N/m e  $\eta = 5 - 100$  m Pa s. Assumindo essas quantidades específicas, é perfeitamente possível obter um número de Reynolds (6.31) da ordem de 1 utilizando fluidos convencionais e espaçamentos entre as placas ainda relativamente pequenos. Mais precisamente, nessas condições Re pode chegar ao valor de 1.17, de modo que nesta seção consideraremos apenas  $0 \leq \text{Re} \leq 1$ . Para o parâmetro adimensional de tensão superficial usamos  $B = 0.003$  e  $B = 0.005$ .

#### 6.4.1 Análise da estabilidade linear

Em nível linear de perturbação, a Eq. (6.33) é bastante simplificada,

$$\text{Re}^2 \ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n - \Lambda(n)\zeta_n = 0. \quad (6.37)$$

Ao contrário da equação diferencial (6.28), os coeficientes da (6.37) são independentes do tempo ( $R$  constante), assim como a dinâmica linear da injeção na geometria retangular (6.11). Considerando as perturbações com amplitude inicial  $\zeta_n(t = 0) = \zeta_n(0)$  e velocidade inicial nula  $[\dot{\zeta}_n(t = 0) = 0]$ , a solução linear é dada pela mesma solução da geometria retangular (6.12) com

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2\text{Re}^2} \left[ \pm \sqrt{1 + 4 \text{Re}^2 \Lambda(n)} - 1 \right]. \quad (6.38)$$

Similarmente ao problema de injeção na célula retangular, o termo contendo  $\exp(\lambda_- t)$  decai rapidamente e a solução a nível linear é reescrita na forma mais simples

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) \left[ \frac{1 + \text{Re}^2 \lambda(n)}{1 + 2\text{Re}^2 \lambda(n)} \right] \exp[\lambda(n)t], \quad (6.39)$$

para  $t = \tau \geq 2\text{Re}^2$ , onde  $\lambda(n) = \lambda_+$  corresponde à taxa de crescimento linear. Vale salientar que as soluções oscilatórias da Eq. (6.37) caem exponencialmente no tempo.

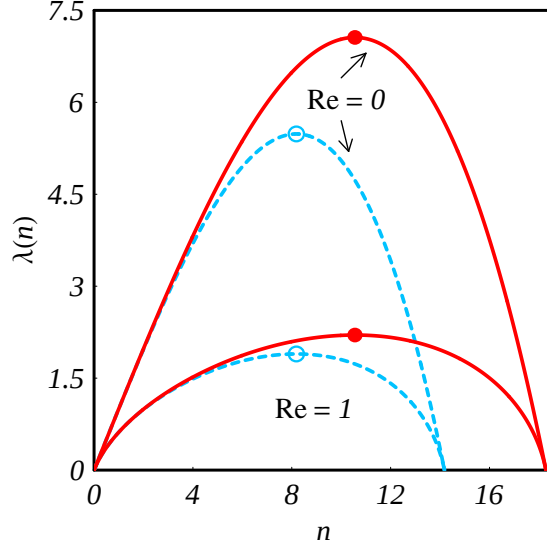


Figura 6.8: Taxa de crescimento linear  $\lambda(n)$  em função de  $n$ , para  $\text{Re} = 0$  e  $\text{Re} = 1$ , e dois valores de  $B$ : 0.003 (curvas contínuas) e 0.005 (curvas tracejadas). Para guiar o leitor, pequenos círculos indicam o máximo das curvas.

Além disso, no limite  $\text{Re} \rightarrow 0$ ,  $\lambda(n) \rightarrow \Lambda(n)$  retomando à expressão da taxa de crescimento obtida no problema não inercial das Refs. [153,154]. Diferentemente do fluxo de geometria retangular, o modo de máxima taxa de crescimento independe do número de Reynolds,

$$n_{\max} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{B}\right)}. \quad (6.40)$$

Além disso, o efeito inercial do fluido também não influencia no modo crítico  $n_c = \sqrt{3} n_{\max}$  [obtido pela condição  $\lambda(n) = 0$ ]. Mais uma vez, sabemos do Cap. 2 que como a taxa de crescimento é independente do tempo,  $n_{\max}$  fornece o número típico de dedos que surgem na interface, enquanto que  $n_c$  define a largura da banda de modos instáveis na dinâmica.

A Fig. 6.8 ilustra a taxa de crescimento em função do modo  $n$  para dois valores de  $\text{Re}$ : 0 e 1. As curvas contínuas (tracejadas) são traçadas para  $B = 0.003$  ( $B = 0.005$ ). Observamos que para um dado valor de  $B$ , a banda de instabilidade e a localização do modo de máxima taxa de crescimento não são modificadas pela inclusão do efeito inercial. No entanto, é evidente que para um específico valor de  $B$  há um significativo decaimento da magnitude de  $\lambda$  quando  $\text{Re} = 1$ . Isso indica que em nível linear, a inércia tende a estabilizar a interface, assim como nos sistemas anteriormente estudados nesse capítulo,

porém mantendo o número de dedos na interface inalterados. Além disso, notamos que menores valores de  $B$  implicam em efeitos inerciais mais acentuados.

Nosso próximo passo é ir um pouco além da análise de estabilidade linear da interface. Assim como nas Seções 6.2 e 6.3, utilizaremos a equação fracamente não linear (6.33) para acessar analiticamente os principais aspectos morfológicos do fluxo gerado pela rotação da célula de Hele-Shaw.

### 6.4.2 Análise fracamente não linear: o fenômeno de competição

Da mesma maneira da Seção 6.2.3, reescrevemos (6.33) na forma da Eq. (6.17), onde agora

$$Y(n, n') = \frac{F + \lambda(n')G + \text{Re}^2 \lambda(n')[\lambda(n')G + \lambda(n - n')H]}{1 + \text{Re}^2[\lambda(n) + \lambda(n') + \lambda(n - n')]} \quad (6.41)$$

Enfatizamos que quando  $\text{Re} = 0$ , a Eq. (6.17) com  $Y(n, n')$  definido pela Eq. 6.41 resulta na equação de modos acoplados originalmente deduzida na Ref. [40] para o problema não inercial.

Como discutido no Cap. 1, quando a inércia é desprezível, um dos aspectos morfológicos predominante nos padrões gerados na célula de Hele-Shaw girante é a forte competição entre os dedos que se dirigem em direção ao centro da célula [153, 154, 202]. Nossa tarefa é obter informações analíticas sobre o mecanismo de competição através da equação dos modos acoplados quando a inércia do fluido é relevante. Como nas Refs. [40, 154] isso é feito considerando o acoplamento de apenas dois modos de Fourier: um modo fundamental  $n$  e o seu sub-harmônico  $n/2$ . Simplificamos o problema reescrevendo a Eq. (6.17) em termos das amplitudes dos modos cosseno  $a_n$  e seno  $b_n$ . Sem perda de generalidade, escolhemos a fase do modo fundamental de tal maneira que  $a_n > 0$  e  $b_n = 0$ .

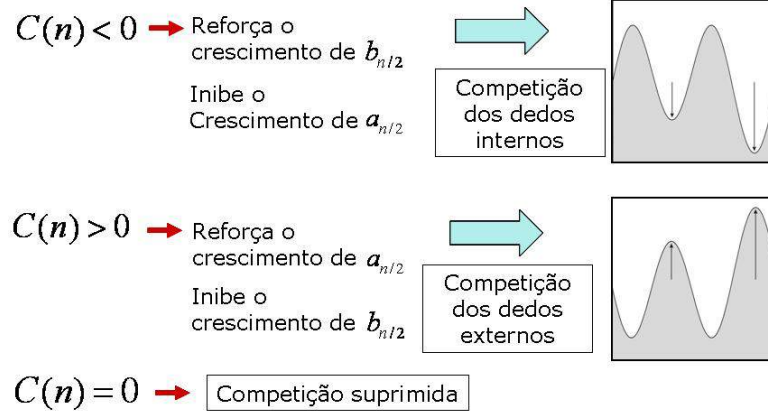


Figura 6.9: Descrição esquemática do mecanismo de competição.

A competição dos dedos está relacionada à influência do modo fundamental  $n$  [assumindo  $\lambda(n) = 0$ ] no crescimento de seu sub-harmônico  $n/2$  [40, 154]. As equações de movimento para o modo sub-harmônico são

$$\dot{a}_{n/2} = \left\{ \lambda(n/2) + \frac{1}{2} C(n) a_n \right\} a_{n/2} \quad (6.42)$$

e

$$\dot{b}_{n/2} = \left\{ \lambda(n/2) - \frac{1}{2} C(n) a_n \right\} b_{n/2}, \quad (6.43)$$

onde a função competição é definida como

$$C(n) = [Y(n/2, -n/2) + Y(n/2, n)], \quad (6.44)$$

que determina o comportamento da competição entre os dedos da interface.

Observando as Eq. (6.42) e (6.43) verificamos que  $C(n) > 0$  induz o crescimento dos modos sub-harmônicos cosseno  $a_{n/2}$ , enquanto que inibe o crescimento dos sub-harmônicos seno  $b_{n/2}$ . O resultado desse comportamento matemático é o aumento da diferença no comprimento dos dedos que se direcionam para fora da interface, ilustrando um efeito de competição entre os dedos do fluido interno que invadem o fluido externo (ver Fig. 6.9). Por outro lado, as amplitudes  $b_{n/2}$  contribuem para uma variação no comprimento dos dedos que penetram na interface. Como  $C(n) < 0$  induz o crescimento das amplitudes  $b_{n/2}$ , enquanto que inibe as amplitudes  $a_{n/2}$ , o sinal negativo de  $C(n)$  leva ao aumento da

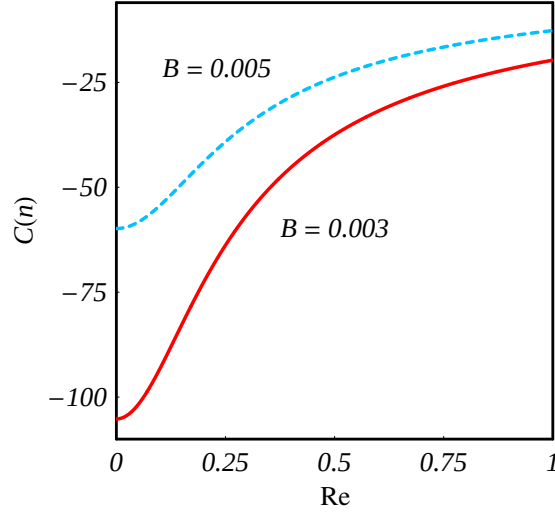


Figura 6.10:  $C(n)$  em função do número de Reynolds  $Re$ , para dois valores de  $B$ : 0.003 (curva contínua) e 0.005 (curva tracejada).

competição dos dedos que invadem o fluido interno. Portanto, observe que independente do sinal de  $C(n)$ , essa função mede a força do mecanismo de competição: maiores valores absolutos de  $C(n)$  leva ao aumento da competição dos dedos. Vale salientar que a validade dessa simples análise analítica durante estágios avançados e fortemente não lineares da dinâmica já foram extensivamente testados por simulações numéricas [201, 202].

O comportamento da função competição  $C(n)$  quando variamos  $Re$  é ilustrado na Fig. 6.10 para dois valores do parâmetro de tensão superficial  $B$ : 0.003 (curva contínua) e 0.005 (curva tracejada). Similarmente ao caso no qual os efeitos de inércia são negligenciados ( $Re = 0$ ),  $C(n)$  permanece negativo para  $Re > 0$ . Analisando a Fig. 6.10 é claro que independente do valor de  $B$ , a magnitude de  $C(n)$  decai com o aumento de  $Re$ . Portanto, a inércia tende a diminuir a competição dos dedos que invadem o fluido interno. Além disso, podemos ver que a distância entre as curvas contínua e tracejada decaem com o aumento de  $Re$ , significando que a competição se torna menos sensível a mudanças de  $B$  quando os efeitos inerciais são mais significantes. Considerando a relevância dos eventos de competição no fluxo da célula de Hele-Shaw girante [153, 154, 201, 202], essa análise caracteriza uma importante mudança morfológica dos padrões devido à inércia do fluido.



## Capítulo 7

# Controle dos dedos viscosos via “suave” modificação da geometria de Hele-Shaw

### 7.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos uma maneira alternativa de suprimir e controlar as instabilidades em dois sistemas nos quais protocolos de controle ainda não foram efetuados: o fluxo na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável e o problema da célula de Hele-Shaw girante. Sabemos do Cap. 1 que eventuais perturbações na interface de alguns sistemas não são desejadas, como por exemplo, sabe-se que a formação dos dedos viscosos diminui a força de adesão [44, 60, 137]. Portanto, o controle das instabilidades da interface na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável, inibindo ou favorecendo seu crescimento, é um possível meio de regular a força de adesão de fluidos. Além disso, essa possível manipulação da estabilidade da interface fluido-fluido na célula girante é de grande utilidade tanto na biologia (por exemplo, no crescimento de tecidos em bioreatores [205]) quanto em processos tecnológicos (spin coating [69]). Vimos também que os processos de misturas de microfluídicos são favorecidos pela formação de instabilidades. Neste capítulo, forneceremos um protocolo de controle que permitirá tanto a estabilização quanto o favorecimento da formação de instabilidades na interface.

O problema usual de Hele-Shaw considera a situação na qual as placas da célula de Hele-Shaw são perfeitamente paralelas. Estudaremos uma versão diferente do problema convencional, onde a placa superior é suavemente inclinada de modo que as placas não são mais paralelas entre si. Essa abordagem foi originalmente proposta nas Refs. [80, 81]. Assumiremos que a placa superior é radialmente inclinada (formando uma superfície cônica), isto é, ela apresenta um pequeno gradiente na abertura da placa superior ao longo da direção radial. Nesse contexto, consideramos os casos em que a placa apresenta uma leve convergência (gradiente de abertura negativo) e divergência (gradiente de abertura positivo) e, então, investigamos como o sinal e a magnitude de uma pequena inclinação afetam a estabilidade da interface. Além disso, a possibilidade de ativar ou inibir os dedos viscosos em tal geometria cônica é discutida. Esse problema é possível ser abordado analiticamente, permitindo uma descrição simplificada da inibição ou do favorecimento das instabilidades de Saffman-Taylor. A partir deste ponto, toda a abordagem teórica e os resultados obtidos se encontram nas Refs. [84, 85].

## 7.2 O controle das instabilidades na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável

### 7.2.1 Equações básicas e o cálculo da estabilidade linear

Considere um fluido de viscosidade  $\eta$  cercado por um fluido invíscido confinados em uma célula de Hele-Shaw de placa superior inclinada radialmente [veja Fig. 7.1]. Além disso, a placa superior pode se mover para cima ou para baixo, comprimindo o fluido. Em contraste ao dispositivo convencional de placas paralelas, a altura da placa superior possui um pequeno gradiente  $b'$  ( $|b'| \ll 1$ ) na direção radial, que pode assumir valores positivos [placas suavemente divergentes - Fig. 7.1(a)] ou negativos [placas suavemente convergentes - Fig. 7.1(b)]. Além disso, a placa pode se mover para cima (levantamento) ou para baixo (compressão) ao longo do eixo  $z$ . O sistema de coordenadas é definido de modo que sua origem está localizada no centro da placa inferior. Nessas condições, o espaçamento entre as placas (altura da placa superior) pode ser escrito como  $b(r, t) = b_0(t) + b'r$ , onde  $b_0(t)$

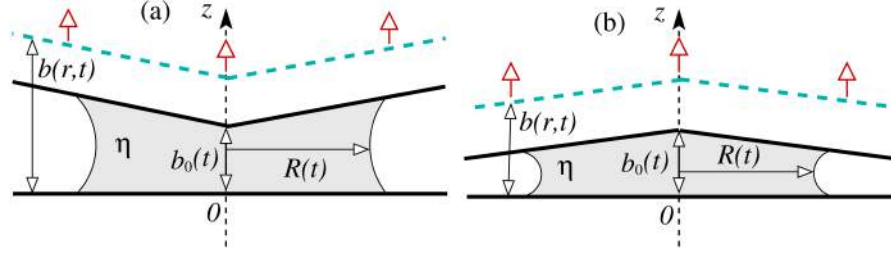


Figura 7.1: Representação esquemática (visão lateral) da célula de Hele-Shaw modificada por uma leve inclinação da placa superior ao longo da direção radial: (a) gradiente de abertura positivo (inclinação divergente) e (b) gradiente de abertura negativo (inclinação convergente). Nesta figura ilustramos o caso do fluxo gerado pelo levantamento da placa superior (representado pelas linhas tracejadas). O fluido de viscosidade está ilustrado em cinza e o espaçamento dependente do tempo entre as placas está descrito pela função  $b(r, t)$ .  $R(t)$  corresponde ao raio não perturbado da interface fluido-fluido, que muda no tempo durante o levantamento.

corresponde à abertura das placas no centro da célula, que depende do tempo devido ao processo de levantamento ou compressão da placa superior.

Como discutido anteriormente, durante o processo de levantamento ou compressão, a interface inicialmente circular pode se tornar instável e apresentar deformações. Nessa circunstância, sua posição é descrita por (2.21)  $[\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)]$ . Dado um perfil dependente do tempo para  $b_0(t)$ , a conservação de volume leva à equação que descreve a evolução temporal de  $R(t)$  dada por

$$\frac{2b'}{3}R^3(0) + R^2(0)b_0(0) = \frac{2b'}{3}R^3(t) + R^3(t)b_0(t). \quad (7.1)$$

Além disso, podemos reescrever o espaçamento  $b(r, t)$  em termos do raio não perturbado  $R(t)$  na forma

$$b(r, t) = b_i(t) + b'[r - R(t)], \quad (7.2)$$

onde  $b_i(t) = b_0(t) + b'R(t)$  representa o espaçamento da célula em  $r = R(t)$ . Note que a região do fluido interno é definido pelo intervalo  $0 \leq r \leq \mathcal{R}$ .

A equação hidrodinâmica é dada pela lei de Darcy (2.10)  $[\mathbf{v} = -b^2(r, t)/(12\eta)\nabla p]$  e a condição de incompressibilidade (2.41)  $[\nabla \cdot [b(r, t)\mathbf{v}] = -\dot{b}(r, t)]$ , onde  $\dot{b}(r, t) = \dot{b}_0(t)$ . De agora em diante, desde que estamos interessados no início da dinâmica das instabilidades e  $|b'| \ll 1$ , consideramos que  $3b'[r - R(t)]/b_i(t) \ll 1$  [206]. A fim de obter a dinâmica

linear do sistema, ao invés de definir um potencial de velocidade, vamos substituir a lei de Darcy na condição de incompressibilidade. Esse procedimento resulta em uma equação diferencial para a pressão

$$\nabla^2 p + \frac{3b'}{b_i(t)} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{12\eta \dot{b}_0(t)}{b_i^3(t)} = 0. \quad (7.3)$$

Uma solução geral da Eq. (7.3) pode ser escrita como [207, 208]

$$p(r, \theta) = f(r) + g(r)e^{in\theta}. \quad (7.4)$$

Substituindo a Eq. (7.4) na Eq. (7.3) temos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \frac{3b'}{b_i(t)} \frac{df}{dr} - \frac{12\eta \dot{b}_0(t)}{b_i^3(t)} = 0 \quad (7.5)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dg}{dr} \right) + \frac{3b'}{b_i(t)} \frac{dg}{dr} - \frac{n^2}{r^2} g(r) = 0. \quad (7.6)$$

Levando em consideração que  $3b'[r - R(t)]/b_i(t) \ll 1$ , a solução de  $f(r)$  é dada por

$$f(r) = \frac{12\eta \dot{b}_0(t)}{b_i^3(t)} \frac{r^2}{4}. \quad (7.7)$$

No limite em que as placas da célula de Hele-Shaw são paralelas ( $b' = 0$ ),  $b_i(t) = b_0(t)$  e a equação (7.7) reproduz o resultado obtido em [47]. Por outro lado, a solução para  $g(r)$  pode ser escrita como

$$g(r) = \sum_n p_n(t) r^{|n|} \Phi(|n|, 1+2|n|; -3b'r/b_i(t)) e^{in\theta}, \quad (7.8)$$

onde  $\Phi(|n|, 1+2|n|; -3b'r/b_i(t))$  corresponde à função hipergeométrica confluyente de Kummer [209]

$$\Phi(a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (7.9)$$

e  $(x)_k = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)$ . A função  $\Phi(a, b; z)$  é também conhecida por função hipergeométrica confluyente de primeiro tipo  ${}_1F_1(a, b; z)$ , sendo uma forma degenerada da função hipergeométrica  ${}_2F_1(a, b, c; z)$ , que surge da equação diferencial hipergeométrica confluyente [210].

Neste ponto, temos os elementos necessários para deduzir a análise de estabilidade linear. Como nos outros capítulos, expandimos a perturbação em série de Fourier  $\zeta(\theta, t) = \sum_{n \neq 0} \zeta_n(t) \exp(in\theta)$ . Para encontrar uma relação entre  $p_n(t)$  da Eq. (7.8) e  $\zeta_n(t)$ , consideramos a condição de contorno cinématica (2.27), que em primeira ordem em  $\zeta$  nos leva à expressão

$$p_n(t) = \frac{12\eta}{b_i^2(t)} \frac{R(t)}{[R(t)]^{|n|} |n| \phi_1} \times \left[ 1 - \frac{3b'R(t)}{b_i(t)} \frac{1}{(1+2|n|)} \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right]^{-1} \times \left\{ -\dot{\zeta}_n - \left( \frac{\dot{b}_0(t)}{2b_i(t)} + \frac{b'R(t)\dot{b}_0(t)}{b_i^2(t)} \right) \zeta_n \right\}, \quad (7.10)$$

onde  $\Phi_1 = \Phi(|n|, 1+2|n|; -3b'R(t)/b_i(t))$  e  $\Phi_2 = \Phi(1+|n|, 2+2|n|; -3b'R(t)/b_i(t))$ . Note que o produto  $3b'R(t)/b_i(t)$  não é necessariamente pequeno pois a razão  $R(t)/b_i(t)$  pode assumir valores grandes.

A condição dinâmica de contorno (2.19) desconsiderando os efeitos de molhamento e os estresses normais viscosos escreve-se

$$p(r = \mathcal{R}, \theta) = \left( \sigma\kappa + \frac{2\sigma \cos \beta_c}{b(r, t)} \right)_{r=\mathcal{R}}. \quad (7.11)$$

Diferentemente do problema de célula de Hele-Shaw de placas paralelas, o termo proporcional a  $1/b(r, t)$ , associado à curvatura perpendicular ao plano da célula, é uma função de  $r$  e terá uma participação fundamental nesse sistema. Assim como nas Refs. [80, 81], focamos na situação  $\beta_c = \pi$  em que o fluido viscoso molha as placas da célula. Enfatizamos que a contribuição tridimensional relevante dada pelo ângulo de contato  $\beta_c$  não exerce influência no problema tradicional de levantamento apresentado na Seq. 2.4 e nas Refs. [44, 47–56, 59, 60, 75] pois a curvatura perpendicular é uma função puramente temporal.

Daqui em diante, consideraremos que a placa superior possui velocidade constante  $\dot{b}_0(t) = \dot{b}$ , a qual pode assumir valores positivos (levantamento) ou negativos (compressão). Além disso, trabalharemos com a versão adimensional das equações, de modo que comprimentos transversais e paralelos ao plano da célula são rescalonados por  $b_i(0)$  e  $R(0)$ , respectivamente. O tempo é rescalonado por  $b_i(0)/|\dot{b}|$ . Perceba que na versão adimensional das equações, o parâmetro  $3b'\delta\zeta/b_i(t) \ll 1$  (situação de pequenas inclinações da placa superior e perturbações da interface de baixa magnitude), onde  $\delta = R(0)/b_i(0)$  representa um parâmetro de confinamento do fluido em  $t = 0$ .

Para obter a equação dinâmica linear, substituímos a Eq. (7.10) na Eq. (7.8) calculada em  $r = \mathcal{R}$ . Então, inserimos a expressão resultante desse procedimento juntamente com a solução  $f(r)$  [Eq. 7.7] na Eq. (7.4). Finalmente, igualamos essa expressão final do campo de pressão com a condição dinâmica (7.11). Mantendo termos até primeira ordem em  $\zeta$  e tirando a transformada inversa de Fourier, obtemos

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n, \quad (7.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda(n) = & \frac{\pm 1}{2b_i(t)}(|n| - 1) - \frac{b_i^2(t)}{[R(t)\delta]^3} \frac{|n|(n^2 - 1)}{\text{Ca}} \\ & + b' \left\{ \frac{2 \cos \beta}{R(t)\delta} \frac{|n|}{\text{Ca}} \mp \frac{R(t)\delta}{b_i^2(t)} + \frac{3|n|}{(1 + 2|n|)} \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \left[ \frac{b_i(t)}{[R(t)\delta]^2} \frac{(n^2 - 1)}{\text{Ca}} \mp \frac{R(t)\delta}{2b_i^2(t)} \right] \right\} \\ & + b'^2 \left\{ \frac{3|n|}{(1 + 2|n|)} \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \frac{2 \cos \beta_c}{b_i(t)} \frac{1}{\text{Ca}} \right\}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

representa a taxa de crescimento linear  $[\lambda(n) = \lambda(n, t)]$  e  $\text{Ca} = 12\eta|\dot{b}|/\sigma$  corresponde ao número de capilaridade do sistema. Os sinais de cima que aparecem na Eq. (7.13) estão relacionados ao problema do levantamento, enquanto que os sinais de baixo correspondem ao problema de compressão. A Eq. (7.13) é o resultado central desta seção, onde observamos uma dependência explícita da taxa de crescimento em relação ao gradiente  $b'$ , ao confinamento  $\delta$ , ao número de capilaridade  $\text{Ca}$  e ao modo  $n$ . Quando  $b' = 0$ , a Eq. (7.13) reproduz o resultado mais simples originalmente obtido na Ref. [47] para o

problema usual de levantamento em que a célula de Hele-Shaw possui placas paralelas. Mais adiante, veremos que a competição dos parâmetros  $b'$ ,  $\delta$  e  $Ca$  será fundamental para permitir o controle das instabilidades da interface.

### 7.2.2 Controle geométrico das instabilidades de Saffman-Taylor

Nesta seção usamos a relação de dispersão linear (7.13) para investigar como o gradiente de abertura pode ser utilizado para inibir ou promover a formação dos dedos viscosos na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável. Para isso, enfatizamos que os parâmetros adimensionais usados no problema estão consistentes com os valores das grandezas físicas utilizadas em experimentos relacionados aos sistemas de levantamento e compressão [44, 47–56, 59, 60, 75, 132, 135, 137–146, 149, 174, 189, 195, 211, 212].

#### Controle das instabilidades no levantamento

Primeiramente, vamos examinar o fluxo gerado pelo levantamento da placa superior na célula de Hele-Shaw, que corresponde a um sistema instável no limite em que as placas são paralelas. A Fig. 7.2 ilustra a taxa de crescimento linear  $\lambda(n)$  em função do número de onda  $n$  em  $t = 0$ , para valores do gradiente de abertura  $b'$  positivos [Fig. 7.2(a)] e negativos [Fig. 7.2(b)], assim como para o caso paralelo  $b' = 0$ . A escolha de  $t = 0$  é justificada pelo fato de que a situação mais instável no problema do levantamento ocorre logo no início da dinâmica. Isso é verdade devido ao decaimento monotônico de  $\lambda(n)$  com o passar do tempo para todos os modos de Fourier. De fato, suprimindo a instabilidade do sistema em  $t = 0$ , garantimos a estabilidade da interface para  $t > 0$ . Além disso, assumimos  $Ca = 1.1 \times 10^{-4}$  e  $\delta = 250$ . Analisando a Fig. 7.2(a) vemos claramente uma larga banda de modos de Fourier com  $\lambda(n) > 0$ , indicando como esperado que o sistema é instável quando consideramos a situação convencional em que as placas são paralelas ( $b' = 0$ , curva tracejada). A Fig. 7.2(a) também ilustra que a introdução de um pequeno gradiente positivo ( $b' = 0.002$ , curva cinza) tende a estabilizar a interface: a banda de modos instáveis e a magnitude da taxa de crescimento decaem.

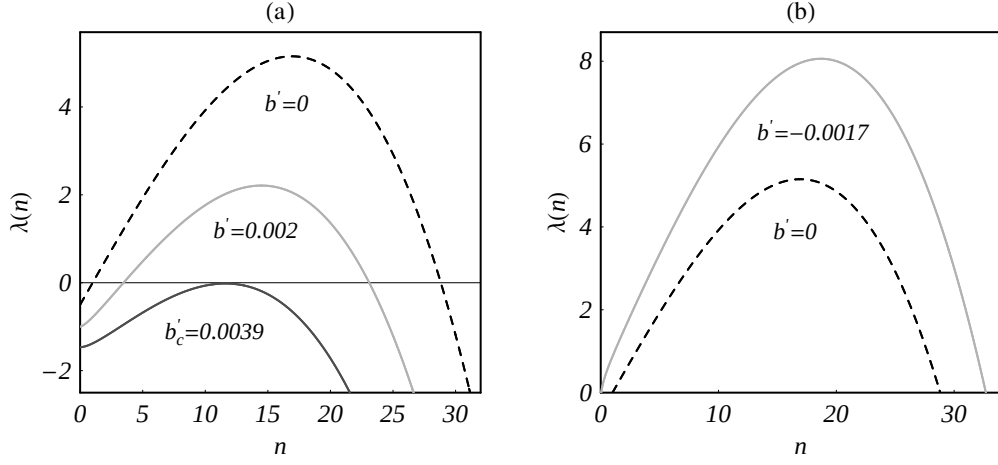


Figura 7.2: Taxa de crescimento linear  $\lambda(n)$  como função de  $n$ , para  $Ca = 1.1 \times 10^{-4}$  e  $\delta = 250$ : (a)  $b' = 0$  (curva tracejada),  $b' = 0.002$  (curva cinza clara) e  $b' = b'_c = 0.0039$  (curva cinza escura); (b)  $b' = 0$  (curva tracejada),  $b' = -0.0017$  (curva cinza).

O mecanismo físico por trás desse processo de estabilização é bem simples [81,82,213]: quando a interface se deforma em uma célula de Hele-Shaw com  $b' > 0$ , a extremidade da perturbação encontra uma região de maior abertura entre as placas, ou seja, de menor curvatura transversal. Como  $\beta_c = \pi$ , isso resulta em um aumento da pressão de resistência devido à tensão superficial [ver Eq. (7.11)], amortecendo o crescimento da perturbação. Esse sistema físico está representado na Fig. 7.1(a).

Como queremos estabilizar o máximo possível a interface, prosseguimos aumentando o valor do gradiente de abertura na Fig. 7.2(a). Fazendo isso, eventualmente um valor crítico de  $b'$  (definido como  $b'_c$ ) é atingido, de modo que as instabilidades dos modos de Fourier são completamente suprimidas. A Fig. 7.2(a) mostra que a adição de um pequeno gradiente na abertura entre as placas ( $b'_c = 0.0039$ ) fornece um meio geométrico simples de inibir a formação dos dedos viscosos. Além disso, da Fig. 7.2(a) é evidente que a transição de uma situação instável para uma situação estável é determinada pelas condições abaixo

$$\lambda(n)|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \lambda(n)}{\partial n}|_{t=0} = 0. \quad (7.14)$$

Isso define um gradiente de abertura  $b'$  no qual a interface se torna estável. Da Eq. (7.13), verificamos que a razão  $\Phi_2/\Phi_1 = 1$  representa um limite superior para  $\Phi_2/\Phi_1$  e corresponde



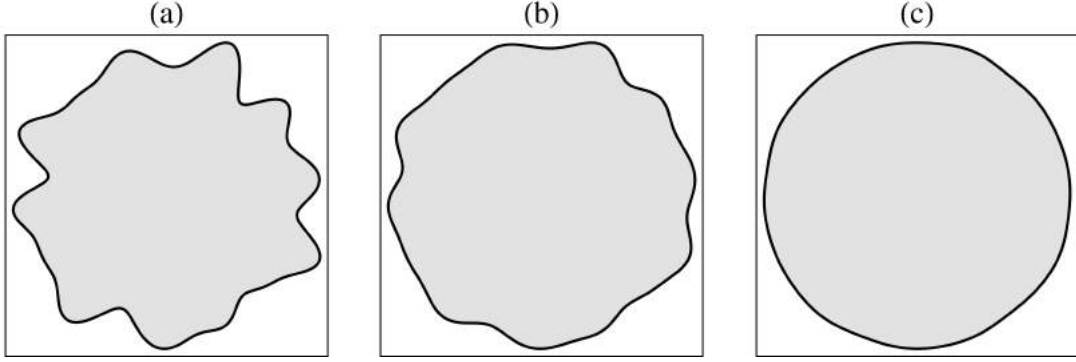


Figura 7.3: Padrões gerados pela dinâmica linear de levantamento em  $t = 0.7$  para: (a) uma pequena inclinação negativa ( $b' = -0.0017$ ); (b) placas paralelas e (c) inclinação crítica ( $b'_c = 0.0039$ ). Essas simulações lineares incluem 40 modos de Fourier e a mesma fase aleatória. O fluido viscoso está representado em cinza. Essas interfaces resultantes referem-se às situações ilustradas na Fig. 7.2.

à situação mais instável possível de  $\lambda(n)$ . Esse limite é conveniente pois permite o acesso ao comportamento de  $b'_c$  em termos dos parâmetros adimensionais  $Ca$  e  $\delta$ .

A Fig. 7.2(b) plota  $\lambda(n)$  em função de  $n$  para  $b' = 0$  (curva tracejada) e  $b' = -0.0017$  (curva cinza) em  $t = 0$ . É interessante notar que para um valor negativo suficientemente pequeno do gradiente de abertura ( $b' = -0.0017$ ), a interface se torna extremamente mais instável comparada com a situação de placas paralelas ( $b' = 0$ ). A eficácia de nosso processo de controle via adição de um gradiente na abertura das placas é ainda mais claro na Fig. 7.3, onde ilustra uma simulação linear para a situação representada na Fig. 7.2. O mecanismo físico que induz a desestabilização é bastante similar ao discutido no caso do gradiente positivo: quando a interface se deforma, a extremidade da perturbação encontra uma região de menor abertura entre as placas, ou seja, de maior curvatura transversal pois  $b' < 0$ . Como  $\beta_c = \pi$ , isso resulta em um decaimento da pressão de resistência devido à tensão superficial [ver Eq. (7.11)], favorecendo o crescimento da perturbação. Esse argumento pode ser utilizado daqui em diante para justificar efeitos estabilizantes e desestabilizantes da interface devido ao gradiente de abertura. Observe que esse sistema físico está representado na Fig. 7.1(b).

A fim de verificar o poder de estabilização dessa suave mudança geométrica em situações físicas ainda mais instáveis, a Fig. 7.4 representa a variação do gradiente de abertura crítico  $b'_c$  em função do número de capilaridade  $Ca$ , para três valores do parâmetro de

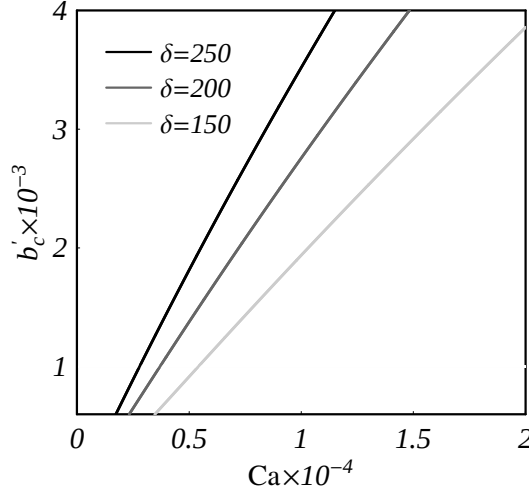


Figura 7.4: Gradiente de abertura crítico  $b'_c$  em função do número de capilaridade  $Ca$  para três valores de  $\delta$ : 150, 200 e 250. Esse gráfico funciona como um “diagrama de fase” para a estabilidade da interface.

confinamento:  $\delta = 150, 200$  e  $250$ . Esse gráfico funciona como um “diagrama de fase” para a estabilidade do sistema: para um dado valor de  $\delta$ , a região acima (abaixo) da curva corresponde a uma situação estável (instável) da interface. É evidente que para eliminarmos os dedos viscosos, maiores valores de  $b'_c$  são necessários quando aumentamos  $Ca$ , ou seja, quando tornamos o sistema mais instável. Além disso, verificamos que quando o sistema se encontra mais confinado, devemos adicionar um gradiente  $b'$  maior para estabilizar a interface. Observe que todos esses valores de  $b'_c$  ainda são muito menores que 1 (da ordem de  $10^{-3}$ ). Essa é a magnitude máxima de  $b'$  utilizada nos experimentos que tentam controlar e suprimir as instabilidades no processo de injeção na célula de Hele-Shaw de geometria retangular [81, 206]. Portanto, ajustando adequadamente os parâmetros  $b'$ ,  $Ca$  e  $\delta$  é possível regular a instabilidade que ocorre durante o processo de levantamento quando  $b' = 0$  [44, 47–56, 59, 60, 75].

### Controle das instabilidades na compressão

Nesta seção, analisamos a situação na qual a placa superior é deslocada em direção à placa inferior, comprimindo o fluido. A Fig. 7.5 plota  $\lambda(n)$  em  $t = 0$  em função de  $n$ , para três valores de  $b'$ . Como esperado, vemos que na situação usual em que as placas são paralelas ( $b' = 0$ , curva tracejada), o sistema é estável [ $\lambda(n) \leq 0$  para  $n \geq 1$ ] pois o

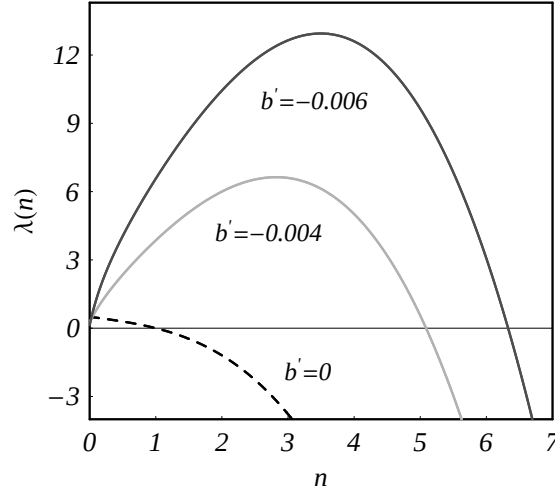


Figura 7.5: Taxa de crescimento linear  $\lambda(n)$  em função de  $n$ , para  $\text{Ca} = 4 \times 10^{-5}$  e  $\delta = 60$ : (a)  $b' = 0$  (curva tracejada),  $b' = -0.004$  (curva cinza clara) e  $b' = -0.006$  (curva cinza escura).

fluido mais viscoso desloca o fluido menos viscoso. No entanto, podemos tornar o sistema instável adicionando um pequeno gradiente negativo na abertura entre as placas. Na Fig. 7.5 identificamos situações instáveis para  $b' = -0.004$  (curva cinza clara) e para  $b' = -0.006$  (curva cinza escura). Todos esses fatores são reforçados pelas simulações lineares representadas na Fig. 7.6.

Como a taxa de crescimento (7.13) varia no tempo, sabemos do Cap. 2 que para estimar o número de dedos em um dado tempo  $t$  devemos obter o modo de Fourier  $n_{max}$  que maximiza a amplitude  $\zeta_n(t)$ . Além disso, sabemos que a solução da Eq. (7.12) é dada por

$$\zeta_n(t) = \zeta_n(0) \exp \left[ \int_0^t \lambda(n, t') dt' \right]. \quad (7.15)$$

A Fig. 7.7 ilustra  $n_{max}$  em função de  $b'$  para  $\text{Ca} = 4 \times 10^{-5}$ ,  $\delta = 60$  e 100. Intuitivamente esperado, são necessários valores negativos de  $b'$  com maiores magnitudes para obter um maior valor de  $n_{max}$ . Por outro lado, um aumento do confinamento (maior  $\delta$ ) favorece o crescimento do número de dedos. Portanto, a manipulação adequada do gradiente  $b'$  e do parâmetro de confinamento  $\delta$  serve não somente para tornar o sistema instável, mas também permite controlar convenientemente o número de dedos emergentes na interface.

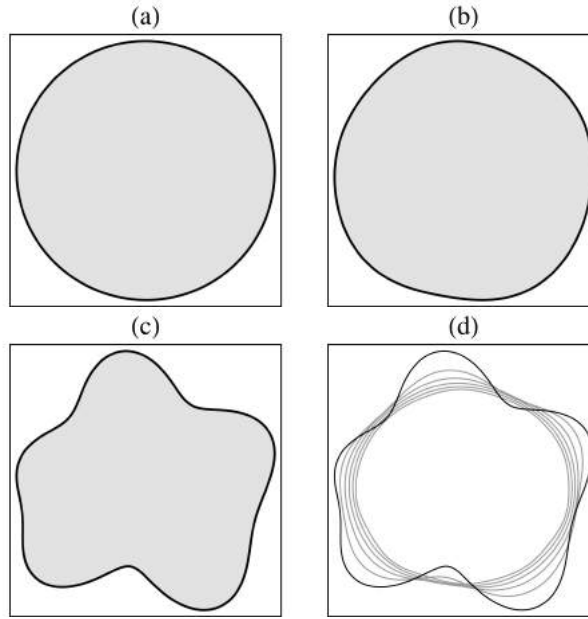


Figura 7.6: Representação dos padrões no fluxo devido à compressão do fluido em  $t = 0.27$  para: (a) placas paralelas ( $b' = 0$ ); (b) um pequeno gradiente ( $b' = -0.004$ ) e (c) um gradiente de abertura com ganitude ligeiramente maior ( $b' = -0.006$ ). A Fig. 7.6(d) ilustra uma sequência de padrões gerados no intervalo  $0 \leq t \leq 0.27$ , cuja a interface final corresponde à Fig. 7.6(c). Essas simulações lineares incluem 10 modos de Fourier e as mesmas fases aleatórias. O fluido viscoso está representado em cinza. Essas interfaces referem-se às situações mostradas na Fig. 7.5.

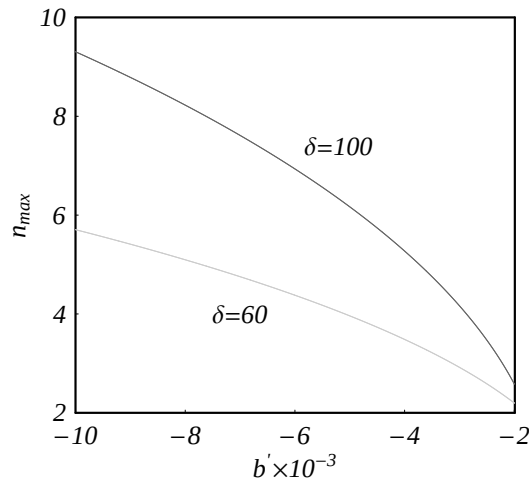


Figura 7.7: Modo de Fourier que maximiza a amplitude de perturbação  $\zeta_n(t)$  em  $t = 0.3$  ( $n_{max}$ ) em função do gradiente de abertura  $b'$ , para  $Ca = 4 \times 10^{-5}$  e dois valores de  $\delta$ : 60 (curva cinza clara) e 100 (curva cinza escura).

## 7.3 O controle dos dedos viscosos na célula de Hele-Shaw girante

### 7.3.1 Equações básicas e o cálculo da estabilidade linear

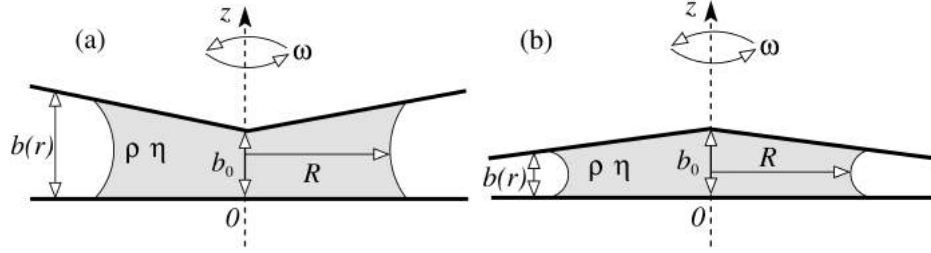


Figura 7.8: Representação esquemática (visão lateral) da célula de Hele-Shaw girante modificada por um gradiente na abertura da placa superior, apresentando uma inclinação positiva (a) e uma inclinação negativa (b). Ilustramos o caso em que o fluido denso e viscoso (região cinza) corresponde ao fluido interno.

O objetivo desta seção é adicionar um gradiente no espaçamento entre as placas de uma célula de Hele-Shaw girante a fim de controlar as instabilidades geradas devido ao contraste de densidade entre os fluidos. Considere a interface entre um fluido de viscosidade  $\eta$  e densidade  $\rho$ , e um outro fluido de viscosidade e densidade desprezíveis em uma célula de Hele-Shaw com um gradiente de abertura ao longo da direção radial [veja Fig. 7.8]. Nesta seção examinamos os casos nos quais o fluido denso e viscoso pode ser o fluido interno ou o fluido externo. A placa superior possui o mesmo perfil descrito na Sec. 7.2.1 ( $|b'| \ll 1$ ), de modo que escrevemos a altura da placa superior na forma  $b(r) = b_0 + b'r$ , onde  $b_0$  representa o espaçamento entre as placas no centro da célula. Observe que no problema da célula girante,  $b_0$  não depende do tempo como acontece no caso da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável. Da mesma forma que na seção anterior,  $b'$  pode ser positivo [placas suavemente divergentes - Fig. 7.8(a)] ou negativo [placas suavemente corregentes - Fig. 7.8(b)]. Similarmente ao Cap. 6, a célula rotacional com velocidade angular constante  $\omega$ , em torno do eixo  $z$ . Reescrevemos a altura da placa superior em termos do raio  $R$  da interface inicialmente circular como  $b(r) = b_i + b'(r - R)$ , onde  $b_i$  representa o espaçamento entre as placas em  $r = R$ , o qual não depende do tempo.

A equação hidrodinâmica do problema corresponde à lei de Darcy generalizada do Cap. 6, Eq. (6.29), negligenciando os termos inerciais:  $\mathbf{v} = b^2(r)/(12\eta) [-\nabla p + \rho\omega^2 \mathbf{r}]$ . Por outro lado, a condição de incompressibilidade é dada por  $\nabla \cdot (b\mathbf{v}) = 0$  [206, 207]. Analogamente à seção anterior, estamos interessados no início da dinâmica instável e assumimos  $|b'| \ll 1$ , logo o limite de validade de nossa teoria é dado por  $[b'(r-R)/b_i] \ll 1$  [206]. Substituindo a lei de Darcy na condição de incompressibilidade, obtemos uma equação diferencial para pressão

$$\nabla^2 p + \frac{3b'}{b_i} \frac{\partial p}{\partial r} - \rho\omega^2 \left( 2 + \frac{3b'}{b_i} r \right) = 0. \quad (7.16)$$

De agora em diante, consideraremos uma versão adimensional das equações, onde comprimentos e velocidades estão rescalonados por  $R$  e  $U = \rho\omega^2 b_i^2 R/(12\eta)$ , respectivamente. Considerando a Eq. (7.4) como solução de (7.16), a solução para  $f(r)$  é dada por

$$f(r) = \frac{r^2}{2} + C_1 \int \frac{e^{-3b'\delta r}}{r} dr + C_2, \quad (7.17)$$

onde  $\delta = R/b_i$  representa o parâmetro de confinamento da gota (fluido denso localizado na região interna) ou bolha (fluido denso localizado externamente). Para obter a Eq. 7.17 consideramos  $b'\delta(r-1) \ll 1$ . Perceba que no limite de placas paralelas ( $b' = 0$ ), a solução de  $f(r)$  é dada por  $f(r) = r^2/2$  [197], logo as constantes da Eq. (7.17) devem assumir os valores  $C_1 = C_2 = 0$ . Note que o produto  $b'\delta$  não é necessariamente pequeno desde que  $\delta$  pode ser muito grande. Em relação à função  $g(r)$  temos duas soluções independentes: (i) o fluido se encontra na região interna (relacionado aos sinais superiores na Eq. 7.18) e (ii) o fluido denso corresponde ao fluido externo (relacionado aos sinais de baixo que aparecem na Eq. 7.18). Seguindo essa notação temos

$$g(r) = \sum_n P_n(t) r^{\pm|n|} \Phi(\pm|n|, 1 \pm 2|n|; -3b'\delta r) e^{in\theta}, \quad (7.18)$$

onde  $\Phi(\pm|n|, 1 \pm 2|n|; -3b'\delta r)$  representa a função hipergeométrica confluyente de Kummer  $\Phi(a, b; z) = {}_1F_1(a, b; z)$  [209].

A partir deste ponto, temos todos os ingredientes para realizar a análise de estabilidade linear. Escrevendo a interface perturbada como  $\mathcal{R}(\theta, t) = 1 + \zeta(\theta, t)$  e seguindo os mesmos passos descritos na Seção 7.2.1, obtemos  $\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n$ , onde

$$\begin{aligned} \lambda(n) = & \pm|n| - \frac{|n|(n^2 - 1)}{\Omega} \\ & + b'\delta \left\{ \frac{2\delta \cos \beta_c}{\Omega} |n| + \frac{3|n|}{(1 \pm 2|n|)} \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \left[ \frac{(n^2 - 1)}{\Omega} \mp 1 \right] \right\} \\ & - b'^2 \delta^2 \left\{ \frac{2\delta \cos \beta_c}{\Omega} \frac{3|n|}{(1 \pm 2|n|)} \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right\} \end{aligned} \quad (7.19)$$

representa a taxa de crescimento linear,  $\Phi_1 = \Phi(\pm|n|, 1 \pm 2|n|; -3b'\delta)$ ,  $\Phi_2 = \Phi(1 \pm |n|, 2 \pm 2|n|; -3b'\delta)$  e

$$\Omega = \frac{\rho \omega^2 R^3}{\sigma} \quad (7.20)$$

corresponde ao parâmetro de rotação que mede a razão das forças centrífugas em relação às forças de tensão superficial. Focamos em dois valores básicos de  $\beta_c$ : (i)  $\beta_c = \pi$ , o fluido interno molha as placas e (ii)  $\beta_c = 0$ , o fluido externo molha as placas. Assim como nas Refs. [80, 81], assumimos que o fluido denso e viscoso sempre molha as placas. Logo,  $\beta_c = \pi$  está associado à situação em que o fluido denso se encontra na região interna e  $\beta_c = 0$  representa a situação em que o fluido denso está localizado na região externa. Vale ressaltar que quando  $b' = 0$ , a Eq. (7.19) reproduz o resultado mais simples originalmente obtido na Ref. [197] para o caso de placas paralelas, e também resulta na Eq. (6.37) quando os efeitos de inércia são negligenciados. Como nos capítulos precedentes, os parâmetros adimensionais utilizados são consistentes com os valores das grandezas físicas consideradas nos experimentos existentes [153, 197, 204], onde  $10^{-3} \leq b' \leq 10^{-2}$  [80, 81, 206].

É importante perceber que, ao contrário do problema de Saffman-Taylor (instabilidade gerada pela diferença de viscosidade dos fluidos), a taxa de crescimento linear  $\lambda(n)$  (7.19) da célula de Hele-Shaw girante não apresenta nenhuma dependência na viscosidade. Isso indica que  $\eta$  não determina a estabilidade linear do sistema, o que está de acordo com os resultados das Refs. [153, 197] que aborda o caso de placas paralelas. Por outro lado, note que reescrevendo a Eq. (7.19) na forma dimensional e variando a magnitude da viscosidade

do fluido, observamos um aumento ou um decaimento global da taxa de crescimento  $\lambda(n)$ . Isso significa que o sistema pode se tornar mais estável ou instável, no entanto mantendo a banda de modos instáveis e o número de dedos inalterados. Portanto, variações em  $\eta$  não ocasionam nenhuma mudança no sinal de  $\lambda(n)$ , de modo que as características da estabilidade linear do sistema não é afetada pelos efeitos viscosos. Enfatizamos que essa argumentação é válida independentemente do valor do gradiente  $b'$ .

O papel do contraste de viscosidade na dinâmica completamente não linear do fluxo na célula girante com placas paralelas foi investigado na Ref. [214] por intensivas simulações numéricas. Os resultados mostraram que em estágios avançados da dinâmica, a viscosidade atua modificando a morfologia final dos padrões, mas não altera propriedades de estabilidade do problema as quais são governadas exclusivamente por forças centrífugas.

### 7.3.2 Controle geométrico das instabilidades na célula de Hele-Shaw girante

#### Fluido localizado na região interna (instabilidade de uma gota)

Começamos nossa discussão analisando a situação usual instável em que o fluido se encontra na região interna. A Fig. 7.9 ilustra a taxa de crescimento linear  $\lambda(n)$  em função de  $n$ , para valores do gradiente de abertura positivos [Fig. 7.9(a)] e negativos [Fig. 7.9(b)], assim como  $b' = 0$ . Consideramos  $\Omega = 300$  e  $\delta = 200$ . Na Fig. 7.9(a) observamos que para a situação convencional ( $b' = 0$ ) o sistema é instável, com  $n_{max} = 10$  (número de dedos na interface). Além disso, a Fig. 7.9(a) indica que para uma célula de Hele-Shaw com gradiente positivo  $b' = 0.0015$  (curva cinza), a interface se torna mais estável comparado com o caso  $b' = 0$ : a banda de modos instáveis, a taxa de crescimento e o número de dedos na interface ( $n_{max} = 8$ ) são reduzidos. Assim como no problema de levantamento, isso sugere que aumentando  $b'$  podemos estabilizar completamente a interface. Por outro lado, a Fig. 7.9(b) ilustra o papel desestabilizante de  $b'$  quando o mesmo assume valores negativos. Particularmente, para o caso usual  $b' = 0$  (curva tracejada) temos  $n_{max} = 10$  e quando  $b' = -0.0028$  (curva cinza) observa-se uma banda de modos instáveis mais larga e um maior número de dedos na interface ( $n_{max} = 13$ ). A eficácia desse método de



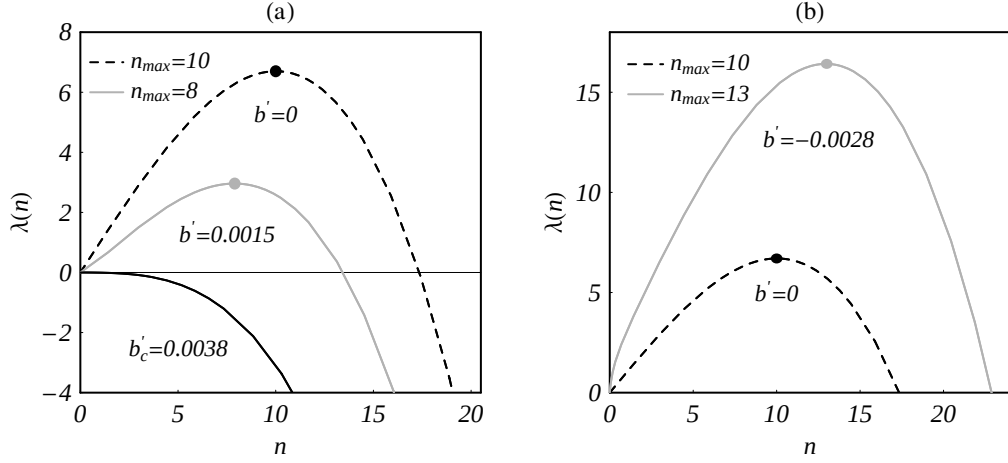


Figura 7.9: Taxa de crescimento linear em função de  $n$ , para  $\Omega = 300$  e  $\delta = 200$ : (a)  $b' = 0$  (curva tracejada),  $b' = 0.0015$  (curva cinza) e  $b' = b'_c = 0.0038$  (curva contínua preta); (b)  $b' = 0$  (curva tracejada),  $b' = -0.0028$  (curva cinza). Para guiar melhor o leitor, o máximo das curvas estão explicitamente indicados pelos pequenos círculos.

controle se encontra bem ilustrada na Fig. 7.10, onde plotamos simulações lineares para as situações físicas discutidas na Fig. 7.9(a).

Similar ao problema do levantamento, na Fig. 7.9(a) observamos que quando adicionamos um pequeno gradiente ( $b'_c = 0.0038$ ) a taxa de crescimento é sempre negativa para  $n > 1$  (curva preta contínua). No caso da célula girante, vemos que esse valor crítico do gradiente pode ser obtido através de  $\lambda(n) = 0$ . Por outro lado, da Eq. (7.19) verificamos que a instabilidade do sistema é aumentada se consideramos  $\Phi_2/\Phi_1 = 1$ , que representa o limite superior da razão  $\Phi_2/\Phi_1$ . Assim como no levantamento, esse limite é conveniente pois permite o acesso analítico de  $b'_c$ . Nesse contexto, obtemos  $b'_c$  em função dos parâmetros adimensionais, incluindo o modo  $n$ . Essa dependência do modo de Fourier é inconveniente para o nosso protocolo de controle pois desejamos fornecer um método que seja independente de  $n$ , ou seja, que estabilize todos os modos de Fourier. No entanto, observamos que a função  $b'_c = b'_c(n, \Omega, \delta)$  obtida de  $\lambda(n) = 0$ , decai monotonicamente com o aumento de  $n$ . Portanto, para suprimir qualquer possível perturbação da interface basta focarmos em estabilizar o modo  $n = 1$ , pois automaticamente o crescimento de todos os outros modos é inibido. Perceba que o modo  $n = 0$  corresponde a uma expansão uniforme do círculo, porém como esperado esse modo possui taxa de crescimento nula independentemente do valor de  $b'$ . Além disso, o modo  $n = 1$  não introduz nenhuma deformação na

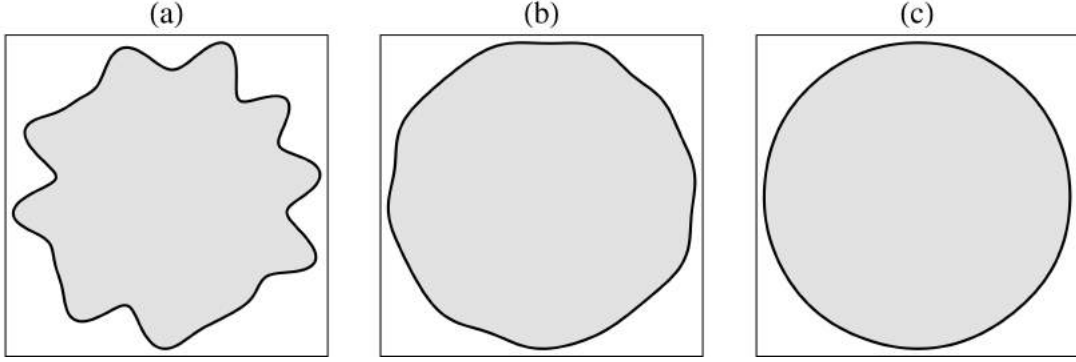


Figura 7.10: Padrões da interface resultante do processo de rotação da célula de Hele-Shaw em  $t = 0.5$  para: (a) placas paralelas ( $b' = 0$ ); (b) um pequeno gradiente de abertura ( $b' = 0.0015$ ); e (c) o gradiente de abertura crítico ( $b'_c = 0.0038$ ). Essas simulações incluem 40 modos de Fourier e as mesmas fases aleatórias. O fluido denso está representado pela região cinza. Essas interfaces resultantes referem-se à situação ilustrada na Fig. 7.9(a).

interface, ele apenas provoca um deslocamento global do círculo. Apesar de  $n = 1$  preservar a forma circular da interface, ele pode ser instável de modo a provocar uma translação da gota. Diante desses fatos, definimos o gradiente crítico como  $b'_c = b'_c(n = 1, \Omega, \delta)$  e obtemos uma forma surpreendentemente simples dada por

$$b'_c = \frac{\Omega}{2\delta^2}. \quad (7.21)$$

A Fig. 7.11(a) retrata como o gradiente crítico  $b'_c$  varia com a mudança do parâmetro de rotação  $\Omega$ , para três valores do parâmetro de confinamento:  $\delta = 150, 200$  e  $250$ . Como esperado, pela simples expressão (7.21) verificamos o crescimento linear de  $b'_c$  com o aumento de  $\Omega$ . Além disso, em contraste ao que observamos no problema do levantamento na célula de Hele-Shaw (Fig. 7.4), observamos na Fig. 7.11(a) que maiores valores de confinamento requerem um menor gradiente  $b'$  para estabilizar a interface.

Como comentado anteriormente, podemos determinar o número de dedos na interface manipulando a magnitude e o sinal do gradiente de abertura  $b'$ . Sabemos que a relação entre  $n_{max}$  e  $b'$  pode ser facilmente obtida por  $d\lambda(n)/dn = 0$ . Na Fig. 7.11(b) plotamos  $n_{max}$  como função de  $b'$ , para  $\Omega = 300$  e para os seguintes valores de  $\delta$ : 150, 200 e 250. Perceba que quando  $b' = 0$ , independentemente do valor de  $\delta$ , temos  $n_{max} = 10$ . Além disso, é importante observar que quanto mais confinada está a gota, a instabilidade da

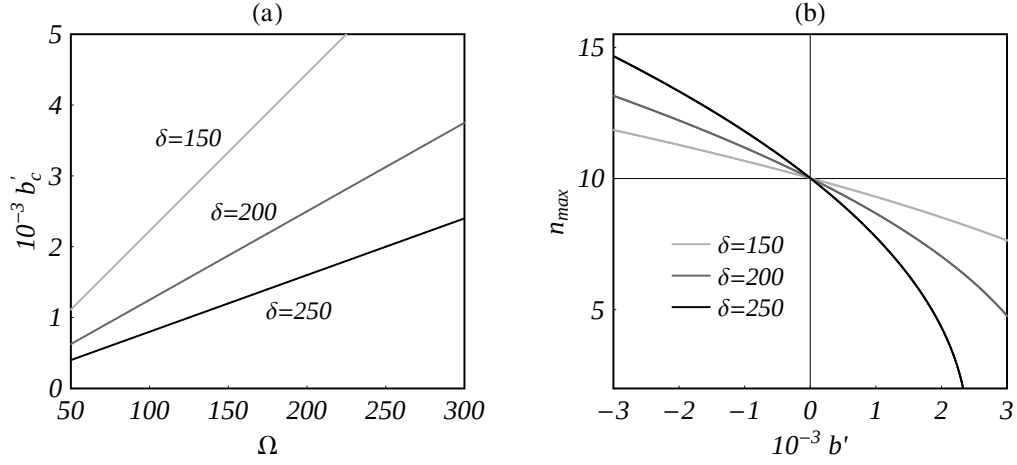


Figura 7.11: (a) Gradiente de abertura crítico  $b'_c$  em função do número de Bond rotacional  $\Omega$  para três valores de  $\delta$ : 150, 200 e 250; (b) O modo de Fourier que maximiza a taxa de crescimento ( $n_{max}$ ) como função da inclinação  $b'$  para os mesmos valores de  $\delta$  e  $\Omega = 300$ .

interface é mais sensível a mudanças no gradiente de abertura: para um dado valor de  $b'$ , um maior confinamento implica em menores (maiores) valores de  $n_{max}$  quando  $b' > 0$  ( $b' < 0$ ).

#### Fluido localizado na região externa (instabilidade de uma bolha)

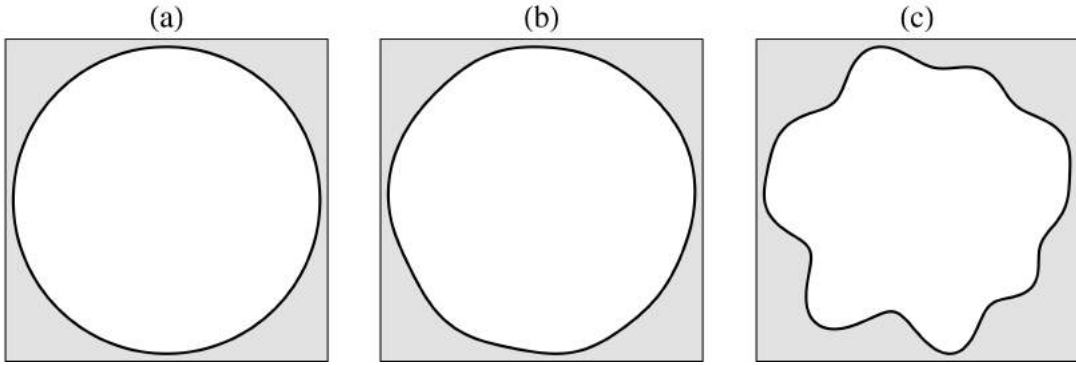


Figura 7.12: Padrões gerados na célula de Hele-Shaw girante em  $t = 0.8$  para: (a) placas paralelas ( $b' = 0$ ), (b) um pequeno gradiente ( $b' = 0.0035$ ) e (c) uma inclinação levemente maior ( $b' = 0.0044$ ). Essas simulações lineares incluem 40 modos de Fourier e as mesmas fases aleatórias. O fluido denso está representado em cinza. Nesse gráfico  $\Omega = 200$ ,  $\delta = 200$  e  $b'_c = 0.0025$ .

Agora abordaremos a situação na qual o fluido denso está na região de fora. Esse caso é ilustrado na simulação linear da Fig. 7.12. A Fig. 7.12(a) mostra que na situação

usual em que as placas são paralelas ( $b' = 0$ ) a força centrífuga tende a estabilizar a interface [ $\lambda(n) < 0$ ]. Contudo, note que a introdução de um pequeno gradiente  $b'$  na abertura das placas [Fig. 7.12(b) e Fig. 7.12(c)] leva a uma desestabilização da interface, similarmente ao que foi feito no caso em que o fluido denso correspondia ao fluido interno [Fig. 7.9(b)]. Não obstante, em contraste ao que acontece na Fig. 7.9(b), agora temos que utilizar um valor positivo de  $b'$  para desestabilizar a interface. Também verificamos que existe um valor crítico de  $b'$  acima do qual a interface se torna instável. Curiosamente, esse valor também é dado pela Eq. (7.21). Para os parâmetros utilizados na Fig. 7.12 obtemos  $b'_c = 0.0025$  e identificamos situações instáveis para  $b' = 0.0035$  [Fig. 7.12(b)] e para  $b' = 0.0044$  [Fig. 7.12(c)].

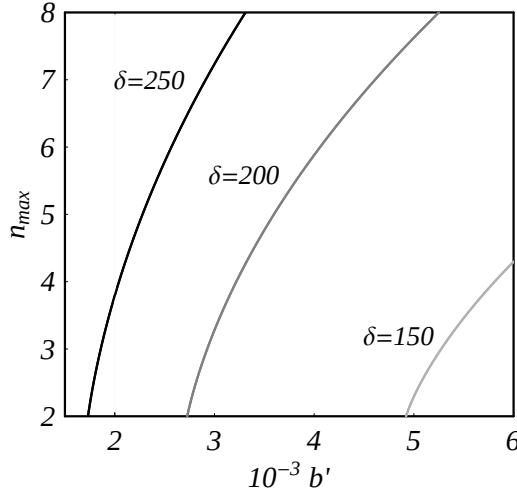


Figura 7.13: Modo de Fourier que maximiza a taxa de crescimento ( $n_{max}$ ) em função da inclinação radial da placa superior  $b'$ , para  $\Omega = 200$  e três valores de  $\delta$ : 150, 200 e 250.

Similarmente à Fig. 7.11(b), a Fig. 7.13 plota  $n_{max}$  em função de  $b'$  para  $\Omega = 200$ ,  $\delta = 150, 200$  e  $250$ . Como esperado, para obter um maior número de dedos na interface, maiores valores de  $b'$  são necessários. Além disso, quanto maior o confinamento da amostra, menor a magnitude requerida da inclinação da placa a fim de gerar um determinado número de dedos na interface. Portanto, um pequeno gradiente de abertura é útil não só para desestabilizar uma situação originalmente estável ( $b' = 0$ ), mas também nos permite selecionar o número de dedos na interface.

## Capítulo 8

# Conclusões e Perspectivas

Por fim, concluímos dando enfoque aos nossos principais resultados e discutindo as possíveis extensões e aplicações das técnicas que desenvolvemos em problemas físicos de interesse acadêmico e tecnológico. O foco principal da tese foi fornecer meios práticos de controle de interfaces instáveis e de forças de adesão de fluidos complexos, sempre buscando uma simplicidade que permitisse implementações experimentais e possíveis aplicações práticas sem grandes dificuldades. Dessa maneira, comprovamos experimentalmente dois de nossos protocolos de controle deduzidos no Cap. 3. Por outro lado, para desenvolver tais mecanismos de modo eficaz, devemos compreender bem os fenômenos físicos que estão por trás do problema. Ao longo da tese, focamos em alguns aspectos físicos fundamentais dos sistemas aqui estudados: o número de onda dominante (número de dedos) dos padrões, os efeitos de molhamento, as tensões normais viscosas e os efeitos da inércia do fluido em interfaces hidrodinâmicas e forças de adesão.

Antes de qualquer tentativa de controlar as instabilidades de Saffman-Taylor, devemos compreender bem seus aspectos morfológicos. No Cap. 2 visamos resolver um problema que já tinha sido proposto décadas atrás por Chuoke *et. al.* [126], mas que só foi detalhadamente exposto nos experimentos de Maxworthy em 1989 [35]. Esse problema está relacionado com a determinação do número de onda dominante na interface fluido-fluido no fluxo de injeção radial na célula de Hele-Shaw. O procedimento padrão para estimar o número de dedos em uma interface instável é dado pelo cálculo do modo de Fourier de

---

máxima taxa de crescimento, porém Maxworthy ilustrou uma clara discrepância entre os resultados experimentais e as previsões teóricas realizadas até aquele momento. Vários autores analisaram esse problema e alguns deles associaram essa discordância a efeitos físicos que não estavam sendo considerados no modelo teórico, como por exemplo, efeitos tridimensionais, contribuições não-lineares e etc.

Em contraste aos argumentos precedentes, assumimos que a incompatibilidade da teoria com o experimento estava não só em alguns efeitos físicos que não estavam sendo considerados, mas também na própria maneira de “contagem” do número de dedos na interface. No Cap. 2 nós propusemos uma maneira alternativa para determinar o número de dedos de uma interface instável de crescimento radial. Consideramos que o número de onda dominante está associado ao modo de Fourier de máxima amplitude. Para o problema de injeção em Hele-Shaw, juntamente com esse novo método de contagem, admitimos os efeitos conjuntos de molhamento e dos estresses viscosos normais. Mostramos que essa abordagem fornece uma grande melhora na concordância entre as previsões teóricas e os experimentos de Maxworthy. Ainda no Cap. 2, aplicamos o método de máxima amplitude nas instabilidades de interface geradas na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável. Situação na qual a placa inferior é mantida fixa, enquanto a placa superior é levantada com velocidade uniforme. Também nesse sistema, experimentos recentes realizados por Nase *et. al.* [60] mostraram uma significativa discordância com a teoria usual dada pelo máximo da taxa de crescimento. Mais uma vez, o método de máxima amplitude nos levou a uma excelente concordância teórica com esses recentes experimentos.

O Cap. 3 apresentou um dos resultados mais importante desta tese. O deslocamento de líquidos em geometrias confinadas por meio de um fluido de menor viscosidade é um problema importante para muitos processos tecnológicos. Nesse contexto, instabilidades hidrodinâmicas causam a formação de dedos viscosos que geralmente tornam o processo de deslocamento de fluidos ineficiente e antieconômico, como por exemplo, na recuperação de petróleo pela injeção de água. Portanto, é necessário desenvolver formas de reduzir ou eliminar os efeitos prejudiciais dessas instabilidades viscosas. A procura de um protocolo de estabilização é primeiramente abordada no problema de injeção na célula de Hele-Shaw radial. Propusemos um tipo de injeção composta por dois estágios de bombeamento

---

constante, de modo que a quantidade média de fluido injetada fosse a mesma quando comparada com o método de injeção constante usual. Esse processo de fácil adaptação experimental mostrou ser bastante eficaz na inibição do crescimento dos dedos viscosos na célula de Hele-Shaw. Comprovamos nossas previsões teóricas por sucessivas análises experimentais. Além disso, esse método não necessitou de propriedades não usuais dos fluidos nem de modificações da geometria tradicional da célula de Hele-Shaw.

Motivados pelo sucesso da estabilização pelo método de injeção de dois estágios, percebemos que uma questão fundamental relacionada à inibição de irregularidades de interface ainda estava em aberto: se você deseja injetar uma certa quantidade de fluido em um dado intervalo de tempo, qual seria a taxa de injeção ótima  $Q(t)$  que proporcionaria o crescimento radial da interface porém minimizando as amplitudes de perturbação? Note que anteriormente nós impusemos um tipo de injeção dada por um bombeamento composto de dois estágios. O questionamento acima é bem mais fundamental diante da infinidade de possibilidades de uma taxa de injeção  $Q(t)$  dependente do tempo cuja quantidade média de fluido injetada permaneça fixa. No Cap. 3, tentamos responder a tal questão utilizando a análise de estabilidade linear e, através de um cálculo variacional, minimizar as amplitudes de Fourier. Desse processo, encontramos, a partir de primeiros princípios, a dependência temporal da taxa de injeção ótima que deve ser utilizada a fim de minimizar a formação dos dedos viscosos. Encontramos uma solução surpreendentemente simples no qual a injeção ideal deve crescer linearmente no tempo. Além disso, mais uma vez ela não depende de nenhuma característica geométrica da célula de Hele-Shaw e nem das propriedades materiais dos fluidos. Realizamos experimentos e simulações numéricas que comprovaram nossas previsões de estabilidade linear, apoiando a eficácia e utilidade do processo proposto de controle dos dedos viscosos.

É bem conhecido que as propriedades reológicas do fluido deslocado pode ter uma influência significativa sobre os padrões de dedos viscosos e, portanto, na eficiência de processos destinados a controlá-los. Uma melhor compreensão da relação entre as propriedades do fluxo não newtoniano e as instabilidades da interface certamente melhora as diretrizes para selecionar protocolos de controle a nível científico e, com isso, fornecer uma base para futuras aplicações tecnológicas. Motivados por esses fatos, ainda no Cap. 3

---

consideramos o deslocamento de um fluido viscoso não newtoniano (descrito por uma lei de potência) por um fluido invíscido em uma célula de Hele-Shaw radial. Utilizamos nosso método variacional a fim de minimizar as perturbações da interface e obtivemos uma solução analítica para evolução temporal da taxa de injeção ótima, na qual observamos uma dependência apenas no índice da lei de potência que descreve o caráter não newtoniano do fluido. Diferentemente do caso newtoniano, nosso modelo teórico fez previsões específicas que ainda não foram submetidas a verificações numéricas e experimentais em regimes totalmente não lineares da dinâmica. Portanto, seria interessante analisar a robustez e validade do controle não newtoniano proposto para tempos mais avançados. Outra possível extensão desse trabalho seria a aplicação do método variacional de minimização para outros fluidos complexos, como viscoelástico e fluidos *yield-stress* [92–94, 106, 176, 177], onde efeitos como a elasticidade e plasticidade devem ser levados em consideração.

Apesar da motivação inicial do processo de estabilização ter sido a minimização dos dedos viscosos na interface fluido-fluido, o método de minimização variacional pode ser aplicado a qualquer interface radialmente crescente cuja a dinâmica linear das perturbações sejam governadas por uma equação do tipo  $\dot{\zeta}_n = \Lambda(n)\zeta_n$ . Através de uma equação de Euler-Lagrange para  $\Lambda(n)$ , esse protocolo nos fornece como o raio não perturbado  $R(t)$  da interface deve evoluir no tempo de modo a minimizar as amplitudes de perturbação. Uma diferença fundamental da aplicação desse método em diferentes problemas físicos é dada pelo parâmetro de controle experimental que deve ser manipulado a fim de impor o crescimento ótimo de  $R(t)$ . No caso da injeção em Hele-Shaw, através da conservação de volume podemos controlar a evolução de  $R(t)$  através da taxa de injeção de fluido.

No Cap. 4 decidimos aplicar o método variacional em outros sistemas físicos. Sabemos que a possibilidade de inibir os dedos viscosos tem fundamental relevância para indústrias de extração de petróleo. Com o objetivo de fornecer um protocolo de estabilização para um processo mais realístico em relação ao procedimento de recuperação de petróleo, deduzimos uma taxa de crescimento linear para as amplitudes de perturbação de uma interface que separa dois fluidos em um meio poroso tridimensional uniforme. Ao utilizar o método de minimização variacional nesse sistema, verificamos que as perturbações são de fato contidas se a taxa de injeção evolui no tempo em uma específica função quadrática. Para



---

analisar a eficácia do método variacional em nível linear, observamos que o protocolo de estabilização é robusto mesmo quando um número maior de capilaridade é considerado.

Esperamos que no futuro esse controle em meio poroso seja investigado em estágios completamente não lineares da dinâmica através de simulações numéricas e experimentos. Além disso, a aplicação do protocolo variacional para um modelo teórico mais completo para o fluxo em meios porosos seria interessante: considerando fluidos com densidades distintas, variações na saturação dos fluidos e a dependência da pressão capilar das interfaces microscópicas com a velocidade do fluxo.

Sabemos que em alguns processos de crescimento de cristais e de descargas elétricas as perturbações da interface também não são desejadas, como por exemplo em moldagem de cristais e em processos químicos de gases, respectivamente. Com esses fatos em mente, ainda no Cap. 4 utilizamos o método de minimização variacional a fim de promover o crescimento de uma interface sólido-líquido e de uma interface plasma-gás, porém estabilizando as perturbações no contorno entre as fases. Para esses dois sistemas, temos diferentes parâmetros de controle experimental que manipula o crescimento radial do cristal no processo de solidificação e da região dielétrica ionizada no processo de descarga elétrica. No caso da instabilidade de Mullins-Sekerka, empregando a técnica variacional fomos capazes de encontrar uma dependência temporal ideal para o fluxo de calor (ou campo de temperatura) longe da interface, enquanto que na descarga elétrica encontramos como a carga elétrica no plasma deve evoluir no tempo para minimizar as amplitudes de perturbação. Uma extensão natural dos resultados do Cap. 4 seria a investigação de estágios totalmente não lineares da dinâmica (tanto para situações tridimensionais quanto bidimensionais) de crescimento de cristais e de processos de descarga elétrica.

No Cap. 5 estudamos o procedimento convencional para medir as propriedades adesivas dos fluidos, chamado de *probe-tack test*, em que duas placas sólidas confinam uma fina camada de fluido. Para medir a força de descolar as placas em função do deslocamento do aparelho, levanta-se a placa superior a uma velocidade constante enquanto a placa inferior é mantida em repouso. Esse tipo de levantamento fornece curvas força-deslocamento que apresentam uma dada energia de adesão (área sob a curva) e grandes valores do pico de força aplicada pela máquina. O primeiro estudo realizado no Cap. 5 visa à minimização

---

da energia de separação das placas no teste de aderência de fluidos viscosos. Isto é feito através da utilização de uma abordagem variacional similar ao método utilizado nos capítulos precedentes. Equivalentemente ao problema de injeção em Hele-Shaw, o *insight* do nosso método é a analogia da potência dissipada com uma lagrangeana e a utilização da equação de Euler-Lagrange para encontrar a função de movimento para o levantamento ideal que minimize a energia de adesão.

Nossos resultados mostraram que através do emprego de tal condução ideal obtemos valores consideravelmente menores da energia de separação das placas. Além disso, verificamos uma diminuição significativa nos valores do pico da força de adesão. A eficácia do nosso processo de otimização foi verificada para os casos de fluidos newtonianos e fluidos não newtonianos (viscosidade dependendo da taxa de cisalhamento por uma lei de potência). Mostramos que a minimização de energia é maior no caso de um fluido shear-thickening comparado à situação newtoniana, e não é tão eficaz para um fluido do tipo shear-thinning. Como discutido no Cap. 1, nosso protocolo fornece a grande vantagem de minimizar a energia dissipada no levantamento. Além disso, devido à queda significativa do máximo da força de adesão, especulamos que podemos evitar fraturas da amostra que ocorre nos testes que utilizam velocidade constante de levantamento. Muitas vezes esse defeito impede de medir a força de adesão de um material de uma maneira não destrutiva [215].

Na maioria dos testes de adesão os efeitos inerciais do fluido são realmente insignificantes. No entanto, a ação da inércia do fluido pode se tornar relevante se considerarmos um maior espaçamento inicial entre as placas, fluidos de baixa viscosidade e velocidades de levantamento mais elevadas. Na segunda parte do Cap. 5, estudamos a influência da inércia do fluido na força de adesão de fluidos newtonianos e não newtonianos (descritos por uma lei de potência). A influência da elasticidade do aparelho de medição, assim como a própria inércia do dispositivo foram analisadas. Verificamos que se o fluido confinado é newtoniano, nossos resultados indicam que a inércia do fluido aumenta consideravelmente a magnitude do pico de força. Além disso, após o máximo da força ser atingido, a inércia induz leve oscilações na curva força-deslocamento cuja magnitude é atenuada no final do processo. Também mostramos que, sob habitual circunstâncias, a inércia do aparelho é

---

negligenciável em comparação com a contribuição da inércia do fluido. A principal contribuição da inércia do instrumento é fazer com que as oscilações persistam na cauda das curvas força-deslocamento. Uma perspectiva de trabalho futuro para esse sistema é a utilização do protocolo de minimização discutido na primeira parte do Cap. 5 quando efeitos inerciais são considerados.

Para fluidos não newtonianos, verificamos que a competição entre a inércia e as propriedades não newtonianas viscosas determinam o perfil da curva força-deslocamento. Para fluidos shear-thinning observamos uma redução do máximo da força adesiva e maiores oscilações na calda da curva. O comportamento oposto foi observado para os fluidos shear-thickening. Além de estudos experimentais, que poderiam confirmar nossas previsões teóricas, seria interessante investigar efeitos mais complexos na força de adesão: cavitação, elasticidade do fluido, interação da própria superfície do aparato com o fluido e propriedades de outros fluidos complexos (por exemplo, fluidos yield-stress).

No Cap. 6 continuamos nossa análise dos efeitos de inércia do fluido, porém agora nas instabilidades de Saffman-Taylor. Em contraste com a grande maioria dos estudos da dinâmica dos dedos viscosos, experimentos recentes do fluxo na célula de Hele-Shaw de geometria retangular [112] e análises em nível linear da geometria radial [109–111, 113], revelaram que a inércia pode introduzir modificações importantes na estabilidade e nos aspectos morfológicos dos padrões de dedos viscosos. Para aprofundar os estudos sobre a influência da inércia nas instabilidades em Hele-Shaw, abordamos o problema analiticamente através de uma teoria perturbativa de modos acoplados. O aspecto vantajoso e útil do nosso modelo teórico refere-se a sua capacidade de capturar as alterações morfológicas induzidas pela inércia já na ordem não linear mais baixa de perturbação  $O(\zeta^2)$ .

Em concordância com os resultados da estabilidade linear previamente relatados, verificamos que para as duas geometrias radial e retangular a inércia atua estabilizando as perturbações interfaciais. Além disso, conseguimos prever em nível fracamente não linear as observações experimentais da Ref. [112]: o aumento dos efeitos de inércia leva à formação de dedos mais largos no fluxo de geometria retangular. Na configuração de fluxo radial, apesar da natureza estabilizante da inércia em fases lineares, prevemos que o mecanismo de bifurcação da ponta dos dedos é favorecido pela ação dos efeitos inerciais.

---

Essa contribuição favorável à bifurcação dos dedos ainda precisa ser verificada experimentalmente ou numericamente. Ambos os métodos de integrais de contorno [216] e a técnica *phase-field* [204] parecem ser apropriados para abordar nossas previsões teóricas em regimes fortemente não lineares da dinâmica.

Além das geometrias radial e retangular, ainda estudamos no Cap. 6 os efeitos de inércia nas instabilidades geradas na célula de Hele-Shaw girante. Apesar de não ser o problema usual de Hele-Shaw, esse tipo de fluxo tem importantes aplicações práticas, como no problema de mistura de fluidos miscíveis. Em nível linear, verificamos analiticamente que a banda de modos instáveis e o número de dedos na interface não são afetados pela inércia do fluido, porém o aumento do número de Reynolds  $Re$  provoca uma queda na magnitude da taxa de crescimento linear, estabilizando o sistema. Na análise fracamente não linear, observamos que a inércia do fluido tende a inibir a característica morfológica principal do fluxo girante em Hele-Shaw quando  $Re = 0$ , a competição entre os dedos. Nesse contexto, uma interessante progressão para esse trabalho seria verificar a contribuição da inércia nas instabilidades em anéis de fluidos na célula girante [217, 218]. Outra situação importante, seria investigar o impacto de  $Re$  na célula girante quando as forças de Coriolis não são negligenciadas [219, 220].

As Refs. [80, 81] propuseram um método de controle de instabilidades particularmente simples e eficaz, onde a configuração paralela convencional da célula de Hele-Shaw é ligeiramente modificada, de modo que o espaçamento entre as placas varia linearmente ao longo da direção de deslocamento do fluido, com uma inclinação  $b'$  muito pequena. Para o fluxo radial, essa geometria define uma superfície cônica (ou gradiente de abertura radial) da placa superior da célula. Nesse dispositivo suavemente modificado, estudamos o fluxo devido ao levantamento e compressão da placa superior, investigando a influência do pequeno gradiente de abertura nas instabilidades da interface. Mostramos que o comportamento linear do sistema pode ser convenientemente descrito em termos de três parâmetros adimensionais: o gradiente de abertura  $b'$ , o número de capilaridade  $Ca$  e o parâmetro de confinamento  $\delta$ . Através da adição da inclinação  $b'$  e ajustando adequadamente  $Ca$  e  $\delta$  conseguimos estabilizar e até mesmo suprimir as instabilidades da interface no processo de levantamento. Por outro lado, conseguimos gerar instabilidades no pro-

---

cesso de compressão, que é originalmente estável no limite  $b' = 0$ . Estes resultados podem fornecer um ponto de partida para o controle de processos de descolamento de placas em contato com fluidos adesivos [44, 60, 137]. Por exemplo, poderíamos manipular a força de adesão de fluidos no probe-tack test discutido no Cap. 5 através de um gradiente na abertura das placas do dispositivo.

Ainda no Cap. 7, controlamos as instabilidades na célula de Hele-Shaw girante através da adição do gradiente de abertura  $b'$ . Focamos no comportamento da interface entre um fluido denso e viscoso e um outro fluido de densidade e viscosidade desprezíveis. Nessa circunstância, examinamos duas configurações diferentes: (i) o fluido denso se encontra na região interna, o que corresponde a uma situação instável quando  $b' = 0$ , devido às forças centrífugas no fluido; (ii) o fluido denso se encontra na região externa, situação originalmente estável para  $b' = 0$ . Nossa análise de estabilidade linear mostrou que podemos estabilizar a interface do caso (i) através de um gap de abertura positivo (placas divergentes). Além disso, encontramos analiticamente um gradiente de abertura crítico  $b_c$  que suprime completamente as perturbações da interface em função de  $\Omega$  (parâmetro que mede a razão das forças centrífugas em relação às forças de tensão superficial) e do parâmetro de confinamento  $\delta$ . Por outro lado, verificamos que a adição de uma inclinação negativa promove uma interface mais instável comparada com o caso  $b' = 0$ . Quando o fluido denso se encontra na região externa, conseguimos induzir instabilidades na interface adicionando um pequeno gradiente de abertura de sinal positivo. Esperamos que esse protocolo de estabilização seja investigado em regimes fortemente não lineares. Isso daria suporte para a otimização em aplicações práticas, como nos processos de revestimento por rotação [69] e no crescimento de tecidos em bioreatores [205]. Finalmente, os resultados obtidos nesta tese proporcionaram a publicação dos artigos [76, 77, 84, 85, 108, 114, 115, 127, 128, 146–149, 207].

# Referências

- [1] B. Jha, L. Cueto-Felgueroso e R. Juanes, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 194502 (2011).
- [2] P. Ball, *The Self-Made Tapestry: Pattern Formation in Nature* (Oxford University Press, New York, 2001) .
- [3] P. G. Saffman e G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **245** (1958).
- [4] B. Chalmers, *Principles of Solidification* (Wiley, New York, 1964).
- [5] M. Arrayás, M. A. Fontelos e C. Jimenéz, *Phys. Rev. E*, **81**, 035401(R) (2010) .
- [6] M. Arrayás e M. A. Fontelos, *Phys. Rev. E*, **84**, 026404 (2011) .
- [7] M. Arrayás, M. A. Fontelos e U. Kindelán, *Phys. Rev. E*, **86**, 066407 (2012) .
- [8] H. Meinhardt, *Models of Biological Pattern Formation* (Academic Press, New York, 1982) .
- [9] L. A. Segel, *Mathematical Models of Molecular and Cellular Biology* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980) .
- [10] G. Homsy, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 271 (1987).
- [11] H. S. Hele-Shaw, *Trans. Inst. Naval Arch.* **40**, 21 (1898) .
- [12] J. S. Langer, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 1 (1980) .
- [13] Para revisões sobre crescimento dendrítico veja, *Dynamics of Curved Fronts*, edited by P. Pelcé (Academic, Boston, 1988); D. A. Kessler, J. Koplik e H. Levine, *Adv.*

- Phys. **37**, 255 (1988). J. S. Langer, in *Chance and Matter*, Proceedings of the Les Houches Summer School Section **46**, editado por J. Souletie, J. Vannimenus e R. Stora (North-Holland, Amsterdam, 1986) .
- [14] S. R. Coriell e R. L. Parker, J. Appl. Phys. **36**, 632 (1965).
- [15] L. N. Brush e R. F. Sekerka, J. Crystal Growth **96**, 419 (1989).
- [16] J. M. A. Figueiredo, M. B. L. Santos, L. O. Ladeira e O. N. Mesquita, Phys. Rev. Lett. **71**, 26 (1993).
- [17] W. Losert, O. N. Mesquita, J. M. A. Figueiredo e H. Z. Cummins, Phys. Rev. Lett. **81**, 2 (1998).
- [18] O. A. Gomes, R. C. Falcão e O. N. Mesquita, Phys. Rev. Lett. **86**, 12 (2001).
- [19] V. Cristini e J. S. Lowengrub, J. Crystal Growth **240**, 267 (2002) .
- [20] V. Cristini e J. S. Lowengrub, J. Crystal Growth **266**, 552 (2004) .
- [21] S. Li, J. S. Lowengrub, P. H. Leo e V. Cristini, J. Crystal Growth **267**, 703 (2004) .
- [22] S. Li, J. S. Lowengrub, P. H. Leo e V. Cristini, J. Crystal Growth **277**, 578 (2005) .
- [23] S. Li, J. S. Lowengrub e P. H. Leo, Physica D **208**, 209 (2005) .
- [24] Y. Saito, *Statistical Physics of Crystal Growth* (World Scientific, Singapore, 2005) .
- [25] W. W. Mullins e R. F. Sekerka, J. Appl. Phys. **34**, 324 (1963).
- [26] W. W. Mullins e R. F. Sekerka, J. Appl. Phys. **35**, 444 (1964).
- [27] Y. P. Raizer, *Gas Discharge Physics* (Springer, Berlin, 1991) .
- [28] H. Raether, *Electron Avalanches and Breakdown in Gases* (Butterworths, London, 1964) .
- [29] V. P. Pasko, Nature (London) **423**, 927 (2003) .

- [30] A. N. Lagarkov e I. M. Rutkevich, *Ionization Waves in Electron Breakdown on Gases* (Springer-Verlag, New York, 1994) .
- [31] A. J. DeGregoria e L. W. Schwartz, J. Fluid Mech. **164**, 383 (1986) .
- [32] E. Meiburg e G. M. Homsy, Phys. Fluids **31**, 429 (1988) .
- [33] C. -W. Park e G. M. Homsy, Phys. Fluids **28**, 1583 (1985) .
- [34] P. Tabeling, G. Zocchi e A. Libchaber, J. Fluid Mech. **177**, 67 (1987) .
- [35] T. Maxworthy, Phys. Rev. A **39**, 5863 (1989).
- [36] J. A. Miranda e M. Widom, Int. J. Mod. Phys. B **12**, 931 (1998) .
- [37] L. Paterson, J. Fluid Mech. **113**, 513 (1981).
- [38] S. N. Rauseo, P. D. Barnes e J. V. Maher, Phys. Rev. A **35**, 1245 (1987) .
- [39] S. E. May e J. V. Maher, Phys. Rev. A **40**, 1723 (1989) .
- [40] J. A. Miranda e M. Widom, Physica D **120**, 315 (1998).
- [41] O. Praud e H. L. Swinney, Phys. Rev. E **72**, 011406 (2005).
- [42] S. W. Li, Lowengrub J. S. e Palffy-Muhoray, Phys. Rev. Lett. **102**, 174501 (2009).
- [43] K. V. McCloud e J. V. Maher, Phys. Rep. **260**, 139 (1995).
- [44] A. Lindner, D. Derks e M. J. Shelley, Phys. Fluids **17**, 072107 (2005).
- [45] J. D. Chen, J. Fluid Mech. **201**, 223 (1989).
- [46] S. W. Li, J. Lowengrub e P. H. Leo, Comput. Phys. **225**, 554 (2007).
- [47] M. J. Shelley, F.-R. Tian e K. Wlodarski, Nonlinearity **10**, 1471 (1997).
- [48] J. Bohr, S. Brunak e T. Nørretranders, Europhys. Lett **25**, 245 (1994).
- [49] S. Roy e S. Tarafdar, Phys. Rev. E **54**, 6495 (1996).



- [50] S. K. Thamida, P. V. Takhistov e H. -C. Chang, Phys. Fluids **13**, 2190 (2001).
- [51] S. Sinha, S. K. Kabiraj, T. Dutta e S. Tarafdar, Eur. Phys. J. B **36**, 297 (2003).
- [52] S. K. Kabiraj e S. Tarafdar, Physica A **328**, 305 (2003).
- [53] J. A. Miranda e R. M. Oliveira, Phys. Rev. E **69**, 066312 (2004).
- [54] C.-Y. Chen, C.-H. Chen e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **71**, 056304 (2005).
- [55] M. Ben Amar e D. Bonn, Physica D **209**, 1 (2005).
- [56] J. Nase, A. Lindner e C. Creton, Phys. Rev. Lett. **101**, 074503 (2008).
- [57] M. Ben Amar, J. -M. Allain, N. Puff e M. I. Angelova, Phys. Rev. Lett. **99**, 044503 (2007).
- [58] M. Ben Amar e A. Boudaoud, Eur. Phys. J. Special Topics **166**, 83 (2009) .
- [59] S. Sinha, T. Dutta e S. Tarafdar, Eur. Phys. J. E **25**, 267 (2008).
- [60] J. Nase, D. Derks e A. Lindner, Phys. Fluids **23**, 123101 (2011).
- [61] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **80**, 026303 (2009).
- [62] G. Ahlers, D. S. Cannel, M. A. Domingez-Lerma e R. Heinrichs, Physica D **23**, 202 (1986).
- [63] P. Manneville, Academic Press, New York (1990).
- [64] J.-M. Flesselles, A. J. Simon e A. J. Libchaber, Adv. Phys. **40**, 1 (1991).
- [65] L. Limat, P. Jenffer, B. Dagens, E. Tournon, M. FermCanneligier e J. E. Wesfreid, Physica D **61**, 166 (1992).
- [66] D. Cherrak, E. Guernet, P. Cardot, C. Herrenknecht e M. Czok, Chromatographia **46**(1), 647 (1997) .
- [67] G. Rousseaux, A. De Wit e M. Martin, J. Chromatogr. A **1149**(2), 254 (2007) .

- [68] L. W. Schwartz e R. V. Roy, Phys. Fluids **16**, 569 (2004) .
- [69] K. E. Holloway, P. Habdas, N. Semsarillar, K. Burfitt e J. R. de Bruyn, Phys. Rev. E **75**, 046308 (2007) .
- [70] M. B. M.-W. e. H. L. S. L. Ristroph, M. Thrasher.
- [71] A. Leshchiner, M. Thrasher, M. B. Mineev-Weinstein e H. L. Swinney, Phys. Rev. E **81**, 016206 (2010).
- [72] L. dos Reis e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **84**, 066313 (2011) .
- [73] A. He, J. S. Lowengrub e A. Belmonte, SIAM J. Appl. Math. **72**, 842 (2012) .
- [74] S. S. S. Cardoso e A. W. Woods, J. Fluid Mech. **289**, 351 (1995).
- [75] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **81**, 016312 (2010).
- [76] Eduardo O. Dias, F. Parisio e J. A. Miranda, *Suppression of viscous fluid fingering: A piecewise-constant injection process*, Phys. Rev. E **82**, 067301 (2010) .
- [77] Eduardo O. Dias, E. Alvarez-Lacalle, M. S. Carvalho e J. A. Miranda, *Minimization of Viscous Fluid Fingering: A Variational Scheme for Optimal Flow Rates*, Phys. Rev. Lett. **109**, 144502 (2012).
- [78] D. Pihler-Puzović, P. Illien, M. Heil A. Juel, Phys. Rev. Lett. **108**, 074502 (2012).
- [79] D. Pihler-Puzović, R. Périllat, M. Russell, A. Juel e M. Heil, J. Fluid Mech. **731**, 162 (2013) .
- [80] T. T. Al-Housseiny, I. C. Christov e H. A. Stone, Phys. Rev. Lett. **111**, 034502 (2013) .
- [81] T. T. Al-Housseiny, P. A. Tsai e H. A. Stone, Nature Phys. **8**, 747 (2012).
- [82] R. M. Wilson, Phys. Today **65**(10), 15 (2012) .
- [83] T. T. Al-Housseiny e H. A. Stone, Phys. Fluids **25**, 092102 (2013) .

- [84] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Control of centrifugally driven fingering in a tapered Hele-Shaw cell*, Phys. Rev. E **87**, 053014 (2013) .
- [85] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Taper-induced control of viscous fingering in variable-gap Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **87**, 053015 (2013) .
- [86] Igor Zolnerkevic, *Tensão sob controle*, Revista Pesquisa Fapesp, Edição 201, Novembro (2012) - [revistapesquisa.fapesp.br/2012/11/12/tensao-sob-controle/](http://revistapesquisa.fapesp.br/2012/11/12/tensao-sob-controle/) .
- [87] A. Buka, P. Palffy-Muhoray e Z. Racz, Phys. Rev. A **36**, 3984 (1987) .
- [88] S. D. R. Wilson, J. Colloid Interface Sci. **51**, 532 (1975).
- [89] H. Zhao e J. V. Maher, Phys. Rev. E **47**, 4278 (1993) .
- [90] J. Ignés-Mullol, H. Zhao e J. V. Maher, Phys. Rev. E **51**, 1338 (1995) .
- [91] N. Kagei, D. Kanie e M. Kawaguchi, Phys. Fluids **17**, 054103 (2005) .
- [92] E Lemaire, P. Levitz, G. Daccord e H. Van Damme, Phys. Rev. Lett. **67**, 2009 (1991) .
- [93] A. Lindner, P. Coussot e D. Bonn, Phys. Rev. Lett. **85**, 314 (2000) .
- [94] N. Maleki-Jirsaraei, A. Lindner, S. Rouhani e D. Bonn, J. Phys.: Condens. Matter **17**, S1219 (2005) .
- [95] J. E. Sader, D. Y. C. Chan e B. D. Hughes, Phys. Rev. E **49**, 420 (1994) .
- [96] M. Ben Amar e D. Bonn, Physica (Amsterdam) **209D**, 1 (2005); J. Nase, D. Derks e A. Lindner, Phys. Fluids **23**, 123101 (2011) .
- [97] L. Kondic, P. Palffy-Muhoray e M. J. Shelley, Phys. Rev. E **54**, R4536 (1996) .
- [98] V. A. Gorodtsov e V. M. Yentov, J. Appl. Math. Mech. **61**, 111 (1997) .
- [99] L. Kondic, M. J. Shelley e P. Palffy-Muhoray, Phys. Rev. Lett. **80**, 1433 (1998) .
- [100] P. Coussot, J. Fluid Mech. **380**, 363 (1999) .

## REFERÊNCIAS

---

- [101] P. Fast, L. Kondic, M. J. Shelley e P. Palffy-Muhoray, Phys. Fluids **13**, 1191 (2001).
- [102] M. Constantin, M. Widom e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **67**, 026313 (2003) .
- [103] P. Fast e M. J. Shelley, J. Comput. Phys. **195**, 117 (2004) .
- [104] S. Mora e M. Manna, Phys. Rev. E **80**, 016308 (2009) .
- [105] S. Nguyen, R. Folch, V. K. Verma, H. Henry e M. Plapp, Phys. Fluids **22**, 103101 (2010) .
- [106] J. V. Fontana, S. A. Lira e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **87**, 013016 (2013) .
- [107] S. W. McCue e J. R. King, Nonlinearity **24**, 613 (2013) .
- [108] J. Fontana, Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Controlling and minimizing fingering instabilities in non-Newtonian fluids*, Phys. Rev. E **89**, 013016 (2014).
- [109] P. Gondret e M. Rabaud, Phys. Fluids **9**, 3267 (1997) .
- [110] C. Ruyer-Quil, C. R. Acad. Sci., Ser. IIB: Mec., Chim. Astron. **329**, 337 (2001) .
- [111] F. Plouraboue e E. J. Hinch, Phys. Fluids **14**, 922 (2002) .
- [112] C. Chevalier, M. Ben Amar, D. Bonn e A. Lindner, J. Fluid Mech. **552**, 83 (2006).
- [113] A. He e A. Belmonte, J. Fluid Mech. **668**, 436 (2011) .
- [114] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Inertial effects on rotating Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **83**, 046311 (2011) .
- [115] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Influence of inertia on viscous fingering patterns: Rectangular and radial flows*, Phys. Rev. E **83**, 066312 (2011) .
- [116] Sítio da internet <http://www.ualberta.ca/~tayfun> .
- [117] S. B. Gorell e G. M. Homsy, SIAM J. Appl. Math. **43**, 79 (1983); J. P. Stokes, D. A. Weitz, J. P. Gollub, A. Dougherty, M. O. Robbins, P. M. Chaikin e H. M. Lindsay, Phys. Rev. Lett. **57**, 1718 (1986). .

- [118] N. Mungan, Can. J. Chem. Eng. **49**, 32 (1971) .
- [119] H. J. Pearson, *The Stability of Some Variables Viscosity Flow with Application in Oil Extraction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1977) .
- [120] D. Shar e R. Schechter, *Improved Oil Recovery by Surfactants and Polymer Flooding* (Academic Press, New York, 1977) .
- [121] R. L. Slobod e J. S. Lestz, Prod. Monthly **24**, 12 (1960) .
- [122] F. Fayers, *Enhanced Oil Recovery* (Elsevier, Amsterdam, 1981) .
- [123] G. Pope, Soc. Petrol. Eng. J. **20**, 191 (1980) .
- [124] P. Daripa e G. Pasa, Int. J. Eng. Sci. **42**, 2029 (2004) .
- [125] P. Daripa e X. Ding, Transp. Porous Med. **93**, 675 (2012) .
- [126] R. L. Chuoke, P. van Meurs e C. van der Poel, Petrol. Trans. AIME **216**, 188 (1959).
- [127] Eduardo O. Dias, *Viscous-fingering minimization in uniform three-dimensional porous media*, Phys. Rev. E **88**, 063007 (2013) .
- [128] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Minimization of instabilities in growing interfaces: A variational approach*, Phys. Rev. E **88**, 062404 (2013) .
- [129] D. Tanaka, S. Matsuoka, A. Kumada e K. Hidaka, J. Phys. D: Appl. Phys., **42**, 075204 (2009) .
- [130] D. A. Saville, Annu. Rev. Fluid. Mech. **29**, 27 (1997).
- [131] Sítio da internet <http://www.umr7615.espci.fr/spip.php?article250> .
- [132] D. Derks, A. Lindner, C. Creton e Bonn, J. Appl. Phys. **93**, 1557 (2003).
- [133] D. J. Yarusso, *Adhesion Science and Engineering - The Mechanics of Adhesion*, edited by D. A. Dillard and A. V. Pocius (Elsevier, Amsterdam, 2002) .

## REFERÊNCIAS

---

- [134] D. W. Aubrey, *Aspects of Adhesion*, edited by K. W. Allen (Elsevier, New York, 1988) .
- [135] B. A. Francis e R. G. Horn, J. Appl. Phys. **89**, 4167 (2005).
- [136] B. A. Francis, Ph.D. thesis (University of South Australia, 1999) .
- [137] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay e P. Fabre, Europhys. Lett. **62**, 244 (1989).
- [138] M. Tirumkudulu, W. B. Russel e T. J. Huang, Phys. Fluids **15**, 1588 (2003).
- [139] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay, J. Teisseire e P. Fabre, Eur. Phys. J. E **15**, 97 (2004).
- [140] J. A. Miranda, Phys. Rev. E **69**, 016311 (2004).
- [141] J. A. Miranda, R. M. Oliveira e D. P. Jackson, Phys. Rev. E **70**, 036311 (2004).
- [142] Q. Barral, G. Ovarlez, X. Chateau, J. Boujlel, B. Rabideau e P. Coussot, Soft Matter **6**, 1343 (2010).
- [143] R. H. Ewoldt, P. Tourkine, G. H. McKinley e A. E. Hosoi, Phys. Fluids **23**, 073104 (2011).
- [144] A. Zosel, Colloid Polym. Sci. **263**, 541 (1985).
- [145] H. Lakrout, P. Sergot e C. Creton, J. Adhes. **69**, 307 (1999).
- [146] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Variational scheme towards an optimal lifting drive in fluid adhesion*, Phys. Rev. E **86**, 046322 (2012).
- [147] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Wavelength selection in Hele-Shaw flows: A maximum-amplitude criterion*, Phys. Rev. E **88**, 013016 (2013).
- [148] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Determining the number of fingers in the lifting Hele-Shaw problem*, Phys. Rev. E **88**, 043002 (2013).
- [149] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Effect of fluid inertia on probe-tack adhesion*, Phys. Rev. E **85**, 016312 (2012).

- [150] C. -W. Park e G. M. Homsy, J. Fluid Mech. **139**, 291 (1984).
- [151] L. Schwartz, Phys. Fluids **29**, 3086 (1986).
- [152] L. M. Martyushev e A. I. Birzina, J. Phys.: Condens. Matter **20**, 045201 (2008).
- [153] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, Phys. Fluids **16**, 908 (2004).
- [154] H. Gadêlha e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **79**, 066312 (2009).
- [155] H. Darcy, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon: Distribution d'eau et Filtrage des Eaux* (Victor Dalmont, Paris, 1856).
- [156] D. J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics* (Oxford University Press, 1st ed. 1990) .
- [157] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Dover, New York, 1945).
- [158] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1967).
- [159] J. S. Langer, Rev. Mod. Phys. **52**, 1 (1980).
- [160] H. Kim, T. Funada, D. D. Joseph e G. M. Homsy, Phys. Fluids **21**, 074106 (2009).
- [161] S. D. R. Wilson, J. Colloid Interface Sci. **51**, 532 (1975).
- [162] M. Nagel e F. Gallaire, Phys. Fluids, **25**, 12 (2013) (2013).
- [163] M. C. Cross e P. C. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
- [164] D. A. Kessler, J. Koplik e H. Levine, Adv. Phys. **37**, 255 (1988).
- [165] J. P. Gollub e J. S. Langer, Rev. Mod. Phys. **71**, S396 (1999).
- [166] A. N. Kolmogorov, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari **4**, 83 (1933).
- [167] N. Smirnov, Annu. Math. Statistics **19**, 279 (1948).
- [168] M.G. Kendall e A. Stewart, *The Advanced Theory of Statistics*, 3rd ed. (Hafner, New York, 1973), Vol. 2 .

- [169] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky e W. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1986) (1989).
- [170] M. J. P. Gingras e Z. Rácz, Phys. Rev. A **40**, 5960 (2009).
- [171] J. D. Chen, J. Fluid Mech. **201**, 223 (1989).
- [172] E. Pauné, Ph.D. thesis, University of Barcelona (2002) .
- [173] R. B. Bird, W. E. Stewart e E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena* (Wiley, New York, 2002) .
- [174] R. B. Bird, R. Armstrong e O. Hassager *Dynamics of Polymeric Liquids* (Wiley, New York, 1977) .
- [175] H. Thomé, M. Rabaud, M. V. Hakim e Y. Couder, Phys. Fluids A **1**, 224 (1989).
- [176] H. A. Barnes, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **81**, 133 (1999) .
- [177] P. Moller, A. Fall, V. Chikkadi, D. Derks e D. Bonn, Phil. Trans. R. Soc. A **367**, 5139 (2009) .
- [178] S. P. Neuman e G. Chen, Water Resour. Res. **32**, 1891 (1996) .
- [179] H. J. de Haan, *Effect of capillary Forces in the Water-Drive Process*, Proc. 5th World Pet. Cong., New York, Sec II, 544, (1959) .
- [180] J. P. Stokes, D. A. Weitz, J. P. Gollub, A. Dougherty, M. O. Robbins, P. M. Chaikin e H. M. Lindsay, Phys. Rev. Lett., **57**, 1718 (1986) .
- [181] E. J. Peters e D. L. Flock, Soc. Pet. Eng. J., **21**, 249 (1981) .
- [182] A. Tartakovsky, S. P. Neuman e R. J. Lenhard, Phys. Fluids **15**, 11 (2003) .
- [183] I. White, P. M. Colombero e J. R. Philip, Soil Sci. Soc. Am. J. **41**, 483 (1976) .
- [184] M. Fontelos e A. Friedman, Arch. Ration. Mech. Anal. **172**, 267 (2004) .



- [185] Sítio da internet <http://pre.aps.org/kaleidoscope> .
- [186] U. Ebert, W. van Saarloos e C. Caroli, Phys. Rev. Lett., **77**, 4178 (1996) .
- [187] U. Ebert, W. van Saarloos e C. Caroli, Phys. Rev. E, **55**, 1530 (1997) .
- [188] J. Chen, M. Feng, Y. Gonzalez e L. A. Pagnaloni, J. Food Eng. **87**, 281 (2008) .
- [189] J. Engmann, C. Servais e A. S. Burbidge, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **132**, 1 (2005).
- [190] D. R. Oliver e M. Shahidullah, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **15**, 331 (1984) .
- [191] I. Ishizawa, J. Soc. Mech. Eng. **9**, 533 (1966) .
- [192] D. C. Kuzma, Appl. Sci. Res. **18**, 15 (1967) .
- [193] G. Ramanaiah, Appl. Sci. Res. **18**, 183 (1967) .
- [194] P. J. Leider, Ind. Eng. Chem. Fund. **13**, 342 (1974) .
- [195] Y.O.M. Abdelhay, M. Chaouche e H. Van Damme, Appl. Clay Sci. **42**, 163 (2008).
- [196] L. W. Schwartz, Phys. Fluids A **1**, 167 (1989) .
- [197] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt e J. Ortín, Phys. Rev. E **54**, 6260 (1996) .
- [198] V. M. Entov, P. I. Etingof e D. Ya. Kleinbock, Eur. J. Appl. Math. **6**, 399 (1995) .
- [199] F. X. Magdaleno, A. Rocco e J. Casademunt, Phys. Rev. E **62**, R5887 (2000) .
- [200] C.-Y. Chen e S.-W. Wang, Fluid Dyn. Res. **30**, 315 (2002) .
- [201] C.-Y. Chen, C.-H. Chen e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **73**, 046306 (2006).
- [202] J. A. Miranda e E. Alvarez-Lacalle, Phys. Rev. E **72**, 026306 (2005).
- [203] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, Phys. Rev. E **74**, 025302(R) (2006) .

- [204] R. Folch, E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, Phys. Rev. E **80**, 056305 (2009) .
- [205] S. L. Waters, L. J. Cummings, K. M. Shakesheff e F. R. A. J. Rose, IMA J. Math. Med. Biol. **23**, 311 (2006) .
- [206] H. Zhao, J. Casademunt, C. Yeung e J. V. Maher, Phys. Rev. A **45**, 4 (1991).
- [207] Eduardo O. Dias e J. A. Miranda, *Finger tip behavior in small gap gradient Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **82**, 056319 (2010) .
- [208] S.-Z. Zhang, E. Louis, O. Pla e F. Guinea, Eur. Phys. J. B **1**, 123 (1998) .
- [209] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1994) .
- [210] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover, New York, 1972) .
- [211] R. D. Welsh, M.Sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001 .
- [212] C. Y. Chen, C. W. Huang, H. Gadêlha e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **78**, 016306 (2008).
- [213] A. Juel, Nature Phys. **8**, 706 (2012) .
- [214] J. A. Miranda e E. Alvarez-Lacalle, Phys. Rev. E **72**, 026306 (2005) .
- [215] C. Creton e E. Papon, MRS Bull. **28**, 419 (2003) .
- [216] S. W. Li, J. S. Lowengrub e P. H. Leo, J. Comput. Phys. **225**, 554 (2007) .
- [217] Ll. Carrillo, J. Soriano e J. Ortín, Phys. Fluids **12**, 1685 (1998) .
- [218] D. Crowdy, Q. Appl. Math. **60**, 11 (2002) .
- [219] S. L. Waters e L. J. Cummings, Phys. Fluids **17**, 048101 (2005) .
- [220] E. Alvarez-Lacalle, H. Gadêlha e J. A. Miranda, Phys. Rev. E **78**, 026305 (2008) .