



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**EFEITOS DE ATRITO NA ROTAÇÃO REVERSA DE CORPOS RÍGIDOS
CIRCULARMENTE FORÇADOS**

Pablo Souza de Castro Melo

Recife - PE, Brasil
Fevereiro - 2014



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**EFEITOS DE ATRITO NA ROTAÇÃO REVERSA DE CORPOS RÍGIDOS
CIRCULARMENTE FORÇADOS**

por

Pablo Souza de Castro Melo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho (Orientador, DF-UFPE)

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva (DF-UFPE)

Prof. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar (IFGW-UNICAMP)

Recife - PE, Brasil
Fevereiro - 2014

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc Leão Salvador, CRB 4-572

Melo, Pablo Souza de Castro.

Efeitos de atrito na rotação reversa de corpos rígidos
circularmente forçados / Pablo Souza de Castro Melo. –
Recife: O Autor, 2014.

65 f.: fig., tab.

Orientador: Fernando Parisio.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física , 2014.

Inclui referências e apêndices.

1. Mecânica. 2. Dinâmica dos corpos rígidos.
3. Atrito. I. Parisio, Fernando. (orientador). II. Título.

531

(22. ed.)

FQ 2014-21



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-7640/2126-8449
<http://www.ufpe.br/ppgfisica> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Pablo Souza de Castro Melo

EFEITOS DE ATRITO NA ROTAÇÃO REVERSA DE CORPOS RÍGIDOS CIRCULARMENTE FORÇADOS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Fernando Roberto de Luna Parisio Filho (Presidente e Orientador), Clécio Clemente de Souza Silva, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Marcus Aloizio Martinez de Aguiar, do Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas, consideram o candidato:

Aprovado Reprovado Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em vinte de fevereiro de dois mil e catorze.

Prof. Fernando Roberto de Luna Parisio Filho
Presidente e Orientador

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva

Prof. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar

Aos meus pais.

Agradecimentos

Esses 2 anos de mestrado foram muito valiosos. Na verdade, muita coisa mudou desde que pisei pela primeira vez no Departamento de Física da UFPE, quando eu era aluno do ensino médio do Colégio Atual de Olinda. Caio Bispo era um dos monitores de Física por lá. Ele me convidou para conhecer o departamento e assistir uma aula do prof. Bruno Cunha. Decidi que iria fazer bacharelado em Física, ao invés de investir em outras grandes paixões (Filosofia e História). Agradeço fortemente por esse pontapé inicial.

Apesar de ter passado por situações nas quais eu quis desistir da graduação, pude contar com meu amigo Marcos George e o prof. Sérgio Coutinho. Serei eternamente grato pela palavra amiga nesses momentos. Aos meus amigos do coração Saulete, Tiago Araújo e Chico Rocha, obrigado. Passamos por muitas coisas boas nessa jornada dentro e fora da vida acadêmica. Fico feliz em agradecer ao prof. Clécio Clemente por dois grandes momentos. O primeiro deles aconteceu na disciplina de Instrumentação para o Ensino. O segundo momento se passou durante o mestrado, quando cursei Transições de Fase e Fenômenos Críticos. Essa foi, sem dúvida, a melhor disciplina que já cursei na minha vida, seguida de perto somente por Mec. Geral com o prof. Mauro Copelli. Elas renovaram minha vontade de aprender Física.

No último ano da graduação tive a oportunidade de começar um período convivendo de perto com o prof. Fernando Parisio, desde a disciplina de Mec. Quântica. Sob sua orientação, tive a chance de assisti-lo trabalhando e percebi que uma escolha melhor não haveria. Agradeço a paciência. Gostei muito do que descobrimos sobre o problema de rotações reversas com atrito. Obrigado por nos trazer esse problema tão interessante. Nesse período tive também o prazer de conviver diariamente com meus amigos João e Rebeca. Faremos doutorado em cidades diferentes, mas estaremos juntos. Sou grato por tudo que vivi com Cecília, Camila, Florentino, Kainã, Plínio, Mário, Maelyson, Renan, Igor, o Pinto, Tavinho, Marcelo Soares, os membros e ex-membros da minha banda Dillema. Agradeço pelo que aprendi com Eglânio Pessoa, um amigo especial. Eu, Victor e Chico faremos doutorado no mesmo país, se tudo der certo. Obrigado por fazerem eu me sentir sempre vivo. Na Física fiz amigos de verdade.

Agradeço a quem sempre esteve ao meu lado nas conquistas e fracassos: a Rafael, pelos 11 anos de companheirismo, a Celé e a Cícero, pela lealdade. Com amor, agradeço infinitamente à minha esposa Jéssyca Gomes de Castro por ser a pessoa que mais aguenta meus problemas e com quem pretendo passar o resto da minha vida. Por último e mais importante, agradeço à minha família, principalmente aos meus pais e irmãos. Sem o que vocês sempre fizeram por mim, nada teria se concretizado. Mainha e Painho, vocês são as pessoas mais importantes e sensacionais que tenho na minha vida. A educação que vocês se esforçaram para me dar foi o ponto chave. Esse título de Mestre em Física é nosso. Obrigado a todos por terem aguentado meus momentos de estresse. Somos como somos e vamos melhorar cada vez mais.

É preciso provocar sistematicamente confusão. Isso promove a criatividade. Tudo aquilo que é contraditório gera vida.

—SALVADOR DALÍ

Resumo

Nesta dissertação estudamos o comportamento mecânico de um disco circularmente forçado em um meio dissipativo. Inicialmente, descrevemos alguns resultados para outros problemas na dinâmica de corpos rígidos em superfícies planas. Em seguida, nós nos concentramos no papel desempenhado pelo atrito viscoso no movimento de rotação do disco, especialmente sobre o efeito chamado de rotação reversa, onde as rotações intrínsecas e orbitais são antiparalelas. Ao contrário do que acontece no caso sem atrito, onde rotações reversas estáveis são possíveis, nós encontramos que este comportamento dinâmico pode existir apenas como um transiente quando a dissipação é considerada. Se as rotações reversas de fato ocorrem é algo que depende das condições iniciais e de dois parâmetros, um relacionado com a viscosidade, a inércia e o forçamento e outro associado com a configuração geométrica do sistema. O valor crítico deste parâmetro geométrico (que separa as regiões onde a rotação reversa é possível daquelas em que é proibida) versus a viscosidade segue uma função q-exponencial, com $q \lesssim 1.7$. Finalmente, estudamos uma situação similar envolvendo atrito seco e mostramos que a maioria dos resultados obtidos se mantêm qualitativamente os mesmos.

Palavras-chave: Rotação reversa; Atrito; Dinâmica não-linear; Dinâmica de corpo rígido.

Abstract

In this thesis we study the mechanical response of a circularly-driven disk in a dissipative medium. Initially we describe some results for other problems on rigid body dynamics on plane surfaces. After that, we focus on the role played by viscous friction in the spinning motion of the disk, especially on the effect called reverse rotation, where the intrinsic and orbital rotations are antiparallel. Contrary to what happens in the frictionless case, where steady reverse rotations are possible, we find that this dynamical behavior may exist only as a transient when dissipation is considered. Whether or not reverse rotations in fact occur depend on the initial conditions and on two parameters, one related to dragging, inertia, and driving, the other associated with the geometric configuration of the system. The critical value of this geometric parameter (separating the regions where reverse rotation is possible from those where it is forbidden) as a function of viscosity follows a q-exponential function, with $q \lesssim 1.7$. Finally, we study a similar situation which involves dry friction and we show that most of those results remains qualitatively the same.

Keywords: Reverse rotation; Friction; Nonlinear dynamics; Rigid body dynamics.

Lista de Figuras

- 1.1 Esquerda: Vista global da superfície de Vênus retirada pelo *Magellan radar imaging* entre 1990 e 1994. Direita: Comportamento rotacional *reverso* de um cilindro imerso em um tambor girando preenchido com um fluido viscoso. 13
- 1.2 Esquerda: figura esquemática do movimento circularmente forçado de um disco rígido fino de raio R e massa m . No ponto P , fincamos uma haste em torno da qual o disco inteiro pode girar livremente. Direita: o ponto P descreve uma trajetória circular uniforme. 14
- 1.3 Movimento de uma roda-gigante 15
- 1.4 Movimento reverso (retrógrado) de Vênus. 16
- 1.5 (a) Esquema experimental. (b) Caso em que há um movimento de rotação normal do bastão cilíndrico dentro do tambor (também cilíndrico). 17
- 1.6 (a) Um disco deslizando e girando em uma superfície plana horizontal. (b)-(d) O campo de velocidade relativa na superfície de um disco com $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 5$, respectivamente ($\varepsilon = v/R\omega$). 18
- 1.7 Gráfico das funções $\mathcal{F}(\varepsilon)$ e $\mathcal{T}(\varepsilon)$, curvas vermelha (contínua) e azul (tracejada), respectivamente. O gráfico também mostra os dados coletados em um experimento executado pelos autores, mostrando concordância com o resultado analítico. Para fazer o papel do disco, foi utilizado um CD simples. 19
- 1.8 Solução numérica das equações de movimento modificadas. *Plot* de ω^* por v^* em (a), para várias condições iniciais. *Plot* de ε por v^* em (b), também para várias condições iniciais. 21
- 2.1 Movimento circularmente forçado de um disco rígido fino de raio R e massa m sobre uma superfície sem atrito. No ponto P , fincamos uma haste em torno da qual o disco inteiro pode girar também sem atrito. 22
- 2.2 O ponto P , localizado através do vetor \mathbf{d} , descreve uma trajetória circular ao redor da origem O . O vetor \mathbf{r} localiza a posição do centro de massa (*c.m.*) e \mathbf{l} é o vetor que conecta *c.m.* a P . 23
- 2.3 As regiões pontilhadas representam condições iniciais que levam a rotações reversas. Foi fixado $d = 10$ cm em (a) e $d = 40$ cm em (b). As linhas verdes e pretas são as linhas de sincronização e as curvas de condições iniciais, respectivamente. Na situação da figura (a) não é possível ser gerada uma rotação reversa já que as duas linhas não se cruzam. Na situação da figura (b) o comportamento reverso é possível para um intervalo centrado em $\phi_0 = \pi$. 28

LISTA DE FIGURAS

2.4	Evolução das condições iniciais indicadas na figura 2.3 (b): quadrado (preto), círculo (cinza) e triângulo (cinza claro).	28
2.5	Configurações localizadas acima da curva podem gerar rotações reversas. Abaixo da curva somente rotação normal é possível.	30
3.1	Biorreator de produção de tecido biológico.	33
3.2	Representação pictórica do sistema modelo proposto.	33
3.3	Visão superior, esquemática, do nosso sistema. As grandezas geométricas importantes estão desenhadas (a). Variáveis de integração para o cálculo de força e torque viscosos (b).	34
3.4	Placa superior se deslocando sobre a camada de fluido.	35
3.5	Trajетórias no espaço de fase para três condições iniciais diferentes. Mais detalhes podem ser encontrados no texto.	39
3.6	O ângulo ϕ como uma função de t para $\omega = 0.2 \text{ rad s}^{-1}$ e $b/m = 0.014 \text{ s}^{-1}$ (a), $b/m = 0.008 \text{ s}^{-1}$ (b) e $b/m = 0.004 \text{ s}^{-1}$ (c). Em todos os casos temos $H = 0.3$.	39
3.7	(Na esquerda, temos o tempo de <i>flip</i> adimensional $(b/m)t_f$ como uma função das condições iniciais ϕ_0 para quatro valores diferentes de b/m . O <i>plots</i> se superpõe completamente. Na direita, a figura mostra as curvas não colapsadas de t_f versus ϕ_0 . Mais detalhes podem ser encontrados no texto.	40
3.8	Tempo de <i>flip</i> t_f como uma função de b/m . As descontinuidades são devidas as passagens do mínimo global através de mínimos locais consecutivos no gráfico de $\phi(t)$.	41
3.9	No lado esquerdo temos o gráfico log-log do tempo de <i>flip</i> t_f , como uma função de b/m , mostrando o comportamento do tipo lei de potência no regime de baixa viscosidade. As descontinuidades são devidas as passagens do mínimo global através de mínimos locais consecutivos no gráfico de $\phi(t)$. No lado direito temos esse gráfico para uma região de viscosidade muito menor.	41
3.10	Tempo de <i>flip</i> t_f como uma função da frequência angular de forçamento ω .	42
3.11	Parâmetro geométrico H_c versus a variável adimensional $\mathcal{S}^{-1} = b/m\omega$. H_c ajustado por uma função do tipo exponencial <i>stretched</i> com $C_1 = -1.67795$ e $C_2 = 0.643255$ para $\phi_0 = \pi$. O círculo aberto representa $H_c = 0.793$.	43
3.12	Parâmetro geométrico crítico H_c versus a variável adimensional $\mathcal{S}^{-1} = b/m\omega$. H_c cai de acordo com uma função q-exponencial com $q = 1.7$ para $\phi_0 = \pi$. O círculo aberto representa $H_c = 0.793$.	44
3.13	D versus L para vários valores de $b/m\omega$, com $\phi_0 = \pi$. Acima das curvas fica a região onde as rotações reversas são possíveis. Abaixo delas somente rotações normais podem ocorrer. Da curva mais próxima da origem para a mais distante, os valores utilizados são equivalentes a $H_c = 0.793$ com $b/m\omega = 0$, $H_c = 0.39065$ com $b/m\omega = 0.266667$, $H_c = 0.19115$ com $b/m\omega = 0.7$, $H_c = 0.09625$ com $b/m\omega = 1.4$ e $H_c = 0.06025$ com $b/m\omega = 2.16667$.	45
3.14	O ângulo ϕ como uma função de t para $\omega = 0.2 \text{ rad s}^{-1}$. Temos $b/m = 0.014 \text{ s}^{-1}$ (linha sólida) e $b/m = 0.004 \text{ s}^{-1}$ (linha tracejada). Em todos os casos temos $H = 1$.	45

- 3.15 O ângulo ϕ como uma função de t para $\omega = 0.2 \text{ rad s}^{-1}$. Temos $b/m = 0.0025 \text{ s}^{-1}$ (curva superior), $b/m = 0.004 \text{ s}^{-1}$ (curva intermediária) e $b/m = 0.006 \text{ s}^{-1}$ (curva inferior). Em todos os casos temos $H = 0.3$. 46
- 3.16 Esquerda: Representação pictórica do movimento circularmente forçado de uma pequena esfera de massa m anexada a uma haste fina e sem massa. O forçamento é feito através de uma outra haste (vertical) fincada no ponto P . Direita: Geometria do problema. Note que l não é mais uma variável limitada entre 0 e R . 46
- 3.17 O ângulo ϕ em função do instante de tempo t para diferentes valores de $\mu g/d$. Curva superior: $\mu g/d = 1 \text{ s}^{-2}$; curva intermediária: $\mu g/d = 0.5 \text{ s}^{-2}$; curva inferior: $\mu g/d = 0.33 \text{ s}^{-2}$. 47
- 3.18 O tempo de *flip* como uma função da condição inicial ϕ_0 para diferentes valores de μ . 48
- 3.19 O tempo de *flip* como uma função da frequência de forçamento ω para $\mu = 0.3$. Comportamento tipo lei de potência para valores baixos de ω . 48
- 3.20 O tempo de *flip* como uma função da frequência de forçamento ω para $\mu = 0.3$. Para valores mais altos de ω , o tempo de *flip* volta a subir, indicando um valor ótimo de ω para o qual o tempo de *flip* é mínimo. 49
- 4.1 Mapa de Poincaré apresentando caos para o problema do disco circularmente forçado com gravidade. Foi usado um ângulo de inclinação de 30° , $H = 0.8$ e $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$. Note que usamos as variáveis θ e a sua derivada temporal, onde θ se relaciona com a variável angular original ϕ através de uma equação similar a que apresentamos nos capítulos anteriores, i.e., $\theta = \phi - \omega t + \text{constante}$. 51

Lista de Tabelas

- 3.1 Comparação entre os efeitos considerados nos trabalhos de Farkas *et al.* (2003), Parisio (2008) e de Castro e Parisio (2013). 32
- 3.2 Confiança estatística do ajuste dos dados numéricos de H_c versus $b/m\omega$ usando uma q-exponencial. Nível de confiança: 95 %. 43

Sumário

1	Rotações reversas e dinâmica de corpos rígidos em superfícies planas	13
1.1	O que são as rotações reversas?	14
1.2	Exemplos de rotações reversas	15
1.3	Dinâmica de corpos rígidos livres em superfícies planas com atrito	17
1.3.1	Acoplamento via atrito entre os movimentos de deslizamento e rotação	17
2	Rotações reversas: caso sem atrito	22
2.1	O sistema	22
2.2	Equação de movimento	24
2.3	Em que casos as rotações reversas acontecem?	25
3	Rotações reversas: caso com atrito	32
3.1	Caso com atrito viscoso	33
3.1.1	O sistema	33
3.1.2	Equação de movimento para o caso com atrito viscoso	34
3.1.3	Comparação com outros sistemas físicos	36
3.1.4	Casos limite	37
3.1.5	Viscosidade arbitrária	38
3.1.6	Em que casos as rotações reversas acontecem	42
3.1.7	Comportamento q-exponencial para parâmetro geométrico crítico	42
3.2	Caso com atrito seco	44
3.2.1	O sistema	45
3.2.2	Equação de movimento	47
3.2.3	Em que casos as rotações reversas acontecem	47
4	Conclusões e perspectivas	50
A	Cálculos da força de atrito viscoso e do torque	56
B	Artigo: O papel do atrito viscoso na rotação reversa de um disco	58

Rotações reversas e dinâmica de corpos rígidos em superfícies planas

Vênus gira em torno do seu eixo em um sentido diferente do qual o seu centro de massa gira em torno do sol [1, 2, 3] (figura 1.1 esquerda, retirada da Ref. [4]). Esse comportamento rotacional também acontece com o movimento de Urano. Entretanto, se analisarmos os movimentos de todos os outros planetas do sistema solar, verificaremos que esta resposta mecânica “estranha” não acontece: o sentido da rotação intrínseca é igual ao sentido da rotação orbital do planeta.

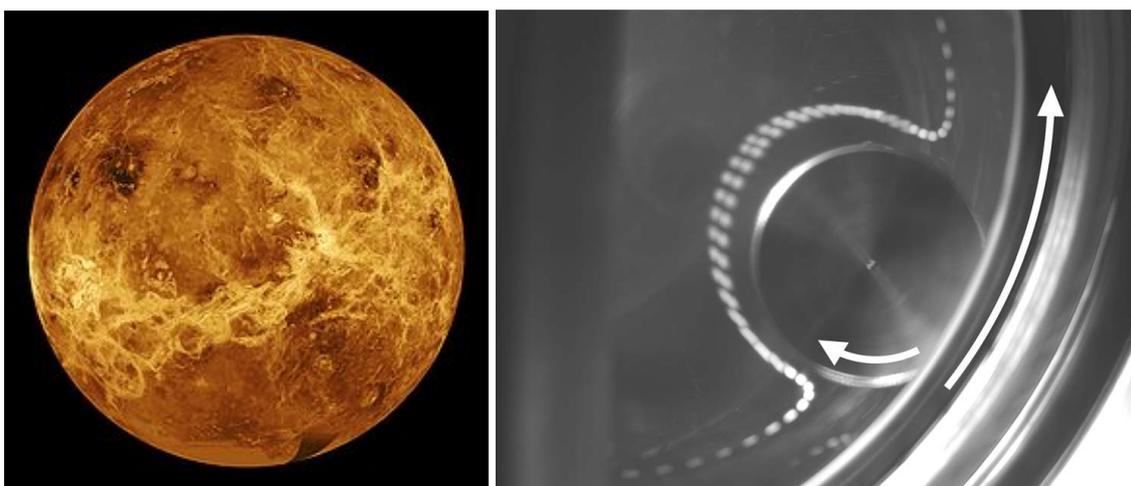


Figura 1.1 Esquerda: Vista global da superfície de Vênus retirada pelo *Magellan radar imaging* entre 1990 e 1994. Direita: Comportamento rotacional *reverso* de um cilindro imerso em um tambor girando preenchido com um fluido viscoso.

Ainda no estudo de sistemas dinâmicos, podemos nos deparar com alguns fatos intrigantes. Por exemplo: o comportamento rotacional de um bastão cilíndrico dentro de um tambor girando preenchido com um fluido viscoso pode ocorrer no sentido contrário ao qual poderia ser inicialmente esperado [5, 6] (figura 1.1 direita, retirada da Ref. [5]); um disco em cuja superfície é pivotada uma haste forçada a descrever um movimento circular uniforme pode girar em um sentido contrário ao sentido de forçamento [7, 8] (ver figura 1.2). Neste caso, dizemos que o disco está sofrendo um forçamento circular.

Os fatos acima ilustram alguns exemplos de rotações reversas (ou retrógradas), tema desta dissertação. Mas qual é a física por trás deste fenômeno? Vamos responder parcialmente esta pergunta ao longo desta dissertação. Veremos que alguns aspectos associados podem ser

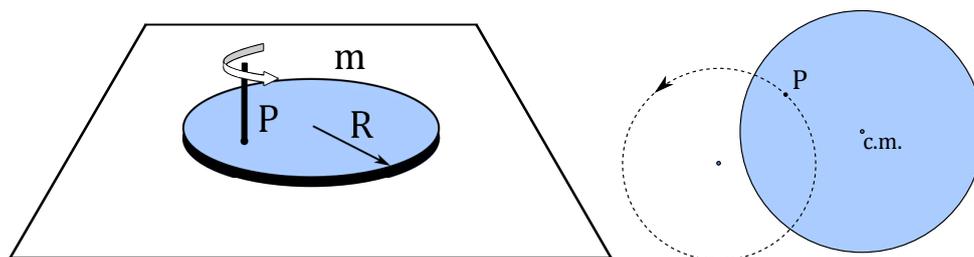


Figura 1.2 Esquerda: figura esquemática do movimento circularmente forçado de um disco rígido fino de raio R e massa m . No ponto P , fincamos uma haste em torno da qual o disco inteiro pode girar livremente. Direita: o ponto P descreve uma trajetória circular uniforme.

não-triviais. De fato, a mecânica clássica de sistemas integráveis, simples e de baixa dimensionalidade pode ser surpreendentemente rica devido a presença de não-linearidade (veja a seção 1.3).

Neste capítulo inicial, entenderemos o que significa uma rotação reversa e como esse fenômeno pode ser observado em várias situações físicas [9, 1, 2, 10, 5, 7, 6, 11, 3, 8]. Também vamos descrever alguns resultados publicados por outros autores sobre a dinâmica de corpos rígidos livres em superfícies planas com atrito [12, 13, 14]. Nos capítulos seguintes, vamos entrar em detalhes sobre a dinâmica de corpos rígidos forçados em superfícies sem e com atrito [7, 8]. Este último caso (com atrito) é o nosso principal objeto de estudo. Dessa forma, os capítulos 1 e 2 são introdutórios.

O problema a ser discutido ao final deste primeiro capítulo possui um papel crucial dentro de mecanismos mais complicados observados na mecânica estatística, i.e., na física dos sistemas granulares. Enquanto isso, descobrimos que o problema no qual trabalhamos possui ao menos uma relação matemática com problemas nas mais diversas áreas da Física, como será apontado ao longo desta dissertação.

1.1 O que são as rotações reversas?

Vamos definir uma *rotação reversa*. Nos capítulos seguintes essa definição será útil, já que estaremos interessados em encontrar quais são os parâmetros e as condições iniciais de certos sistemas dinâmicos que os levam ao regime de rotações reversas. Como explicado na Ref. [7], falando de forma geral, uma rotação reversa ocorre quando um sistema, ou parte dele, é forçado a girar no sentido anti-horário e seu grau de liberdade intrínseco desenvolve um movimento no sentido horário, ou vice-versa.

Na ref. [8] nota-se que a posição de um corpo rígido em duas dimensões é completamente caracterizada pela localização do seu centro de massa (c. m.) e pelo ângulo entre alguma linha de referência marcada sobre o corpo e um eixo coordenado arbitrário. Assim, entende-se que uma rotação reversa acontece quando o c. m. segue uma trajetória limitada no sentido, digamos, horário e, ao mesmo tempo, o grau de liberdade angular intrínseco evolui no sentido anti-horário, ou vice-versa. Sendo assim, podemos dizer que uma rotação reversa é caracterizada por uma situação na qual momento angular orbital e de *spin* são antiparalelos. Uma situação

mais concreta na qual o efeito ocorre surgirá em breve.

Uma rotação que não é reversa será denominada rotação normal. Quando um sistema se encontrar em um regime limiar (que separa o regime reverso do regime normal) poderemos dizer que ele se encontra no regime "*roda-gigante*": o movimento de uma das cabines de uma roda-gigante é irrotacional em relação a um eixo que passa pelo centro da cabine. Entretanto, a cabine é forçada a girar em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro da roda-gigante, em um sentido bem determinado (figura 1.3, retirada da Ref. [15]).



Figura 1.3 Movimento de uma roda-gigante

Sob um aspecto bastante informal, podemos pensar a rotação reversa da seguinte forma: em geral, um sistema girando com rotação reversa parecerá girar no sentido horário quando 'visto de muito longe' e no sentido anti-horário quando 'visto de muito perto', ou vice-versa. Este comentário só ficará mais claro quando explicarmos o modelo que utilizaremos nos capítulos seguintes, desenvolvido para o estudo de rotações reversas.

1.2 Exemplos de rotações reversas

Existem na literatura algumas respostas mecânicas que são chamadas de rotação reversa (ou *retrógrada*, como dito em alguns casos, e. g., o da rotação de Vênus - nesse contexto, a rotação normal é chamada de rotação *prógrada*, *direta* ou *progressiva*). Além do movimento de corpos rígidos circularmente forçados [7, 8], exemplos de comportamentos que podem ser incluídos na mesma classe são:

- O movimento de Vênus [1, 2, 3] e Urano;
- A dinâmica de um cilindro dentro de um tambor girante preenchido com um fluido viscoso [5, 11];
- O movimento caótico de um pêndulo parametricamente excitado [9];
- A resposta mecânica de certos maquinários de impressão [10].

Os dois primeiros exemplos têm uma analogia muito mais estreita com o problema que abordamos aqui.

No caso dos planetas, se pensarmos em relação à rotação que cada um deles faz em torno do Sol (rotação orbital), não há comportamento reverso: todos os planetas do Sistema Solar orbitam o Sol no sentido anti-horário, quando visto de cima do polo norte do Sol. A maioria deles também rotaciona no sentido anti-horário em torno de seus próprios eixos, mas Vênus completa uma rotação no sentido *horário* a cada 243 dias terrestres – a rotação intrínseca mais lenta do Sistema Solar [16]. Um dia sideral em Vênus tem um período maior do que um ano Venusiano (224.7 dias terrestres).

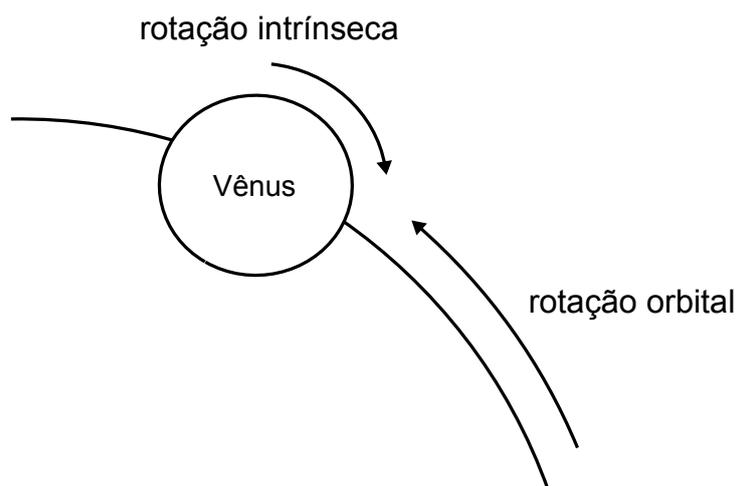


Figura 1.4 Movimento reverso (retrógrado) de Vênus.

Este comportamento reverso também acontece com o movimento de Urano, apesar de os trabalhos sobre Vênus serem mais difundidos na literatura. Dizemos, portanto, que os movimentos de rotação intrínseca de Vênus e Urano são retrógrados¹, como mostrado na figura 1.4, i. e., a rotação intrínseca é contrária a rotação orbital.

Acredita-se que, no passado, o eixo de rotação de Vênus foi girado de 180° devido ao atrito interno gerado entre o manto e o núcleo do planeta juntamente com a ajuda de efeitos do

¹Não confundir *revolução retrógrada* com *rotação retrógrada*. A primeira se dá quando a rotação orbital de um planeta ocorre em um sentido contrário ao sentido da rotação orbital dos demais planetas do mesmo sistema planetário (veja a Ref[17]). Entretanto, este fenômeno é também chamado, alguma vezes, de rotação retrógrada. Na verdade, verificamos que ainda não existe um consenso quanto a esta nomenclatura e recomenda-se cuidado ao se explorar a literatura envolvendo estes conceitos.

movimento das “marés” de sua atmosfera [18, 19, 20, 21, 22]. Entretanto, já existem trabalhos que abrem caminho para outras possibilidades [1, 2]. É possível que um esclarecimento mais amplo da física por trás das rotações reversas em situações da mecânica contribua para a solução deste mistério.

Já no segundo problema listado acima, o cenário que encontramos nos experimentos descritos em [5] é o seguinte: um bastão cilíndrico pesado é liberado para se mover dentro de um tambor horizontal cilíndrico que está rotacionando e é preenchido com um fluido muito viscoso (rever figura 1.1 direita e ver figura 1.5, adaptada da Ref. [5]). Os autores observaram que, em algumas situações, o bastão cilíndrico rotaciona muito lentamente no mesmo sentido de rotação do tambor. Entretanto, de forma contra-intuitiva, existem casos em que o bastão cilíndrico rotaciona muito lentamente em um sentido que é contrário ao giro do tambor, caracterizando o que foi chamado de rotação reversa (fig. 1.1 direita). Foi mostrado que o sentido de rotação, na verdade, é controlado pela presença de uma cadeia de bolhas que se formam em uma região de lubrificação entre o bastão e a parede do tambor. Estas bolhas regulam o fluxo de forma a proporcionarem um torque que muda o sentido de rotação do bastão cilíndrico.

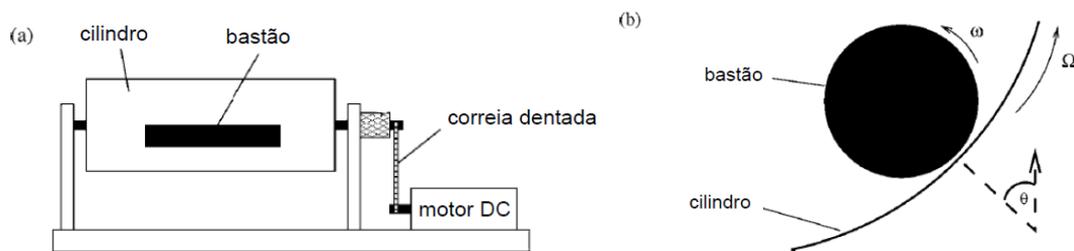


Figura 1.5 (a) Esquema experimental. (b) Caso em que há um movimento de rotação normal do bastão cilíndrico dentro do tambor (também cilíndrico).

1.3 Dinâmica de corpos rígidos livres em superfícies planas com atrito

Nesta seção vamos fazer uma pausa breve na nossa caminhada rumo ao problema das rotações reversas para que possamos analisar o movimento de corpos rígidos livres (não forçados) e de baixa dimensionalidade (como um disco fino, por exemplo) em superfícies planas com atrito. O sistema que utilizaremos como modelo tem várias similaridades com o que discutiremos a seguir.

1.3.1 Acoplamento via atrito entre os movimentos de deslizamento e rotação

Para aumentar a clareza, escolhemos discutir um artigo em específico. Esse é um dos principais trabalhos neste tema e trata da conexão entre os movimentos de translação e rotação de um disco livre (de raio R) se movendo em uma superfície com atrito *Coulombiano* (seco) [12]. Os autores mostraram, e. g., que a razão terminal entre as velocidades de translação (v) e rotação (ω), se anulando simultaneamente, é sempre $\varepsilon = v/R\omega \approx 0.653$ não importam quais sejam seus

valores iniciais. Vamos entrar em mais detalhes sobre este problema e os principais resultados obtidos.

A motivação para a análise deste problema tem sua origem na física de sistemas granulares. Como ressaltado por Farkas *et al.*, existem diversos mecanismos de dissipação entre dois grãos sólidos esféricos de um pacote granular. Um desses mecanismos gera uma espécie de acoplamento entre um dos graus de liberdade de translação e um dos graus de liberdade de rotação do grão sólido esférico, como explicado na Ref. [12]. Entretanto, aqui não entraremos em detalhes quanto a este aspecto.

O que mais importa em nosso contexto é que existe uma relação deste problema com o movimento de corpos rígidos em superfícies planas. Com o intuito de deixar mais clara a investigação sobre o acoplamento entre translação e rotação, ao invés de considerar a área de contato entre duas esferas, os autores consideraram um disco em uma superfície plana horizontal, com velocidades translacional e angular iniciais diferentes de zero. O disco está deitado sobre um dos seus lados e assume-se que este lado representa toda a área de contato com a mesa durante o movimento (figura 1.6, retirada da Ref. [12]). A força de atrito e o torque de atrito atuando no disco diminuem o movimento de deslizamento e o movimento de rotação (*spinning*) do disco até que ele pare de se movimentar. Portanto, torna-se um problema de dinâmica de corpos rígidos livres (neste caso, um disco) sobre uma superfície plana com atrito (neste caso, atrito seco).

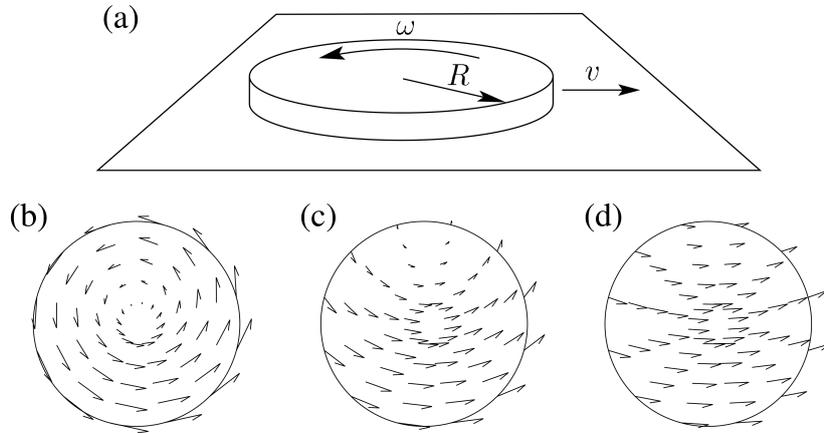


Figura 1.6 (a) Um disco deslizando e girando em uma superfície plana horizontal. (b)-(d) O campo de velocidade relativa na superfície de um disco com $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 5$, respectivamente ($\varepsilon = v/R\omega$).

Vamos denotar a velocidade do disco por \mathbf{v} e seu módulo por v . A velocidade angular é denotada por ω , o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a mesa por μ e $F_n = mg$ é a força normal que age sobre o disco, sendo m sua massa e g o módulo da aceleração da gravidade local. É conveniente usar $\varepsilon = v/R\omega$ e também os versores velocidade de translação $\mathbf{e}_v = \mathbf{v}/v$ e velocidade angular \mathbf{e}_ω .

Os autores calcularam na Ref. [12] que a força de atrito seco que age sobre o disco é $\mathbf{F} = -\mu F_n \mathcal{F}(\varepsilon) \mathbf{e}_v$, onde a função $\mathcal{F}(\varepsilon)$ é dada em termos das funções elípticas completas do

primeiro e segundo tipo, [23]. Também foi feito o cálculo para o torque de atrito, que resulta em $\mathbf{T} = -\mu F_n R \mathcal{T}(\varepsilon) \mathbf{e}_\omega$, onde $\mathcal{T}(\varepsilon)$ também consiste² de uma combinação de integrais elípticas completas do primeiro e segundo tipo. Na figura 1.7, retirada da Ref. [12], temos um gráfico das funções $\mathcal{F}(\varepsilon)$ e $\mathcal{T}(\varepsilon)$, curvas vermelha (contínua) e azul (tracejada), respectivamente. O gráfico também mostra o resultado de um experimento executado pelos autores, mostrando concordância com o resultado analítico.

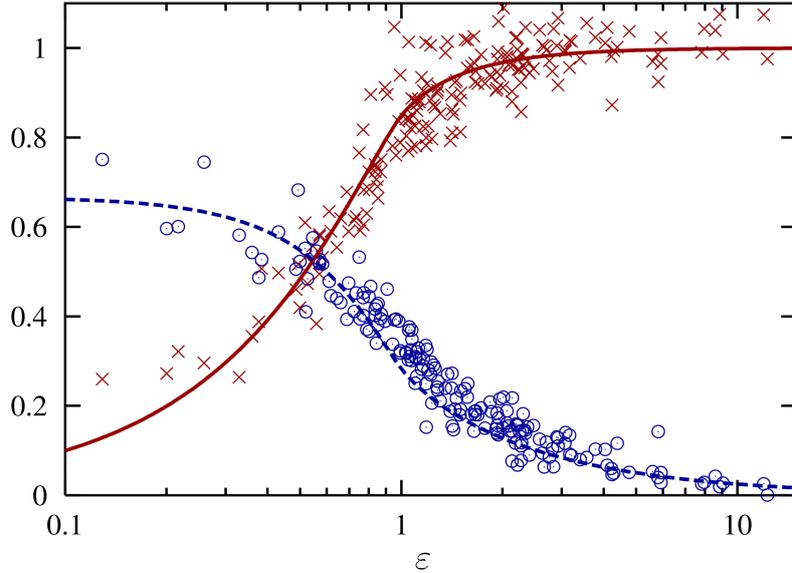


Figura 1.7 Gráfico das funções $\mathcal{F}(\varepsilon)$ e $\mathcal{T}(\varepsilon)$, curvas vermelha (contínua) e azul (tracejada), respectivamente. O gráfico também mostra os dados coletados em um experimento executado pelos autores, mostrando concordância com o resultado analítico. Para fazer o papel do disco, foi utilizado um CD simples.

Para facilitar a análise, vamos introduzir velocidades e tempo adimensionais através de $v^* = v/\sqrt{Rg\mu}$, $\omega^* = \omega\sqrt{Rg/\mu}$ e $t^* = t\sqrt{g/R}$. Da segunda lei de Newton, temos que as equações de movimento para o problema são

$$\frac{dv^*}{dt} = -\mathcal{F}(\varepsilon), \quad (1.1)$$

$$\frac{d\omega^*}{dt} = -2\mathcal{T}(\varepsilon). \quad (1.2)$$

²Para entender porque estas funções são complicadas e apresentam integrais elípticas completas do primeiro tipo, veja a referência [12]. Resumidamente, o que acontece é que o cálculo da força de atrito seco sobre o disco deve ser efetuado através de uma integral varrendo toda a superfície do disco. Mais detalhadamente, o vetor força em cada elemento de área só pode depender da direção do vetor velocidade que o disco tem naquele ponto (e não do módulo, onde os vetores força e velocidade tem direções contrárias). Assim, o integrando desta integral tem como denominador uma raiz quadrada, que serve para eliminar o módulo do vetor velocidade e contabilizarmos somente a sua direção. É a integral envolvendo essa raiz quadrada que dá origem à integral elíptica completa do primeiro tipo. Algo similar acontece no caso do torque de atrito seco.

com $\varepsilon = v^*/\omega^*$.

O leitor provavelmente espera que as velocidades translacionais e angulares do disco sejam funções monotonicamente decrescentes do tempo. Percebemos que isso pode ser concluído das equações de movimento apresentadas, pois $\mathcal{F}(\varepsilon)$ e $\mathcal{T}(\varepsilon)$ são positivas para $\varepsilon > 0$. Agora, surge uma questão importante: é possível que uma dessas velocidades se anule antes da outra? Em outras palavras: é possível que um disco inicialmente deslizando e rotacionando passe a somente deslizar ou somente rotacionar após algum tempo? Para responder a essa pergunta, Farkas *et al.* resolveram numericamente as equações de movimento acima para muitas condições iniciais diferentes e o resultado é o da figura 1.8 (a), retirada da Ref. [12]. Perceba que a velocidade v^* e a velocidade angular ω^* sempre se anulam juntas, o que significa que *o disco sempre termina seus movimentos de deslizamento e de rotação no mesmo instante*. Logo em seguida, é apresentada uma explicação qualitativa para esse fato: se a velocidade de translação é muito maior do que a velocidade angular ($v \gg R\omega$, i.e., $\varepsilon \gg 1$), a função associada ao torque de atrito é desprezível quando comparada com a função associada à força de atrito, o que pode ser verificado na figura 1.7. Portanto, a velocidade de translação decresce a uma taxa muito maior do que aquela com a qual velocidade angular decresce. Sendo assim, a variável ε diminuirá. Por outro lado, se a velocidade angular é muito maior que a velocidade de translação ($\varepsilon \ll 1$), a função associada ao torque de atrito é maior que a força de atrito e, dessa forma, ε aumenta. Assim, Farkas *et al.* concluem que existe um *feedback* negativo que equilibra efetivamente os movimentos de deslizamento e rotação.

De forma contundente, os resultados numéricos mostram esse comportamento, já que ε tende sempre para o mesmo valor, $\varepsilon \approx 0.653$, quando o movimento acaba [figura 1.8 (b), também retirada de Ref. [12]]. Isso não apenas significa que v^* e ω^* atingem o zero simultaneamente, mas também que a razão entre estas velocidades sempre tende a um valor universal, não importam quais sejam as condições iniciais, o coeficiente de atrito, a massa do disco, o raio do disco ou a aceleração da gravidade local! Uma demonstração analítica deste fato também pode ser encontrada na Ref. [12].

O primeiro parágrafo da Ref. [12] resume bem o fenômeno descrito. Segue uma tradução livre: "Imagine dois discos idênticos deslizando sobre uma mesa com a mesma velocidade inicial de translação. A única diferença é que um deles também está girando. O que você espera: (a) Os dois discos deslizam ao longo mesma distância até eles pararem, (b) o disco girante desliza ao longo de uma distância maior, ou (c) o disco não-girante desliza ao longo de uma distância maior? A resposta correta é que o disco girante desliza ao longo de uma distância maior, pois o movimento de giro reduz a força de atrito cinético que age sobre o disco. Além disso, os movimentos de giro e translação terminam no mesmo momento, não importam quais sejam as condições iniciais". Informamos ao final da Ref. [12] são esboçadas algumas consequências dos seus resultados para a física de sistemas granulares.

Vale ressaltar que foram feitos estudos na busca de se encontrar este tipo de acoplamento entre a força de atrito e o torque de atrito para outros tipo de fricção, e. g., o atrito viscoso [24], onde o módulo da força de atrito depende linearmente do módulo da velocidade v . Entretanto, este acoplamento permaneceu verificado apenas para o caso do atrito Coulombiano (seco).

Os resultados apresentados em [12] demonstram como sistemas integráveis de baixa dimensionalidade podem apresentar comportamentos inesperados, induzidos, por exemplo, pelo

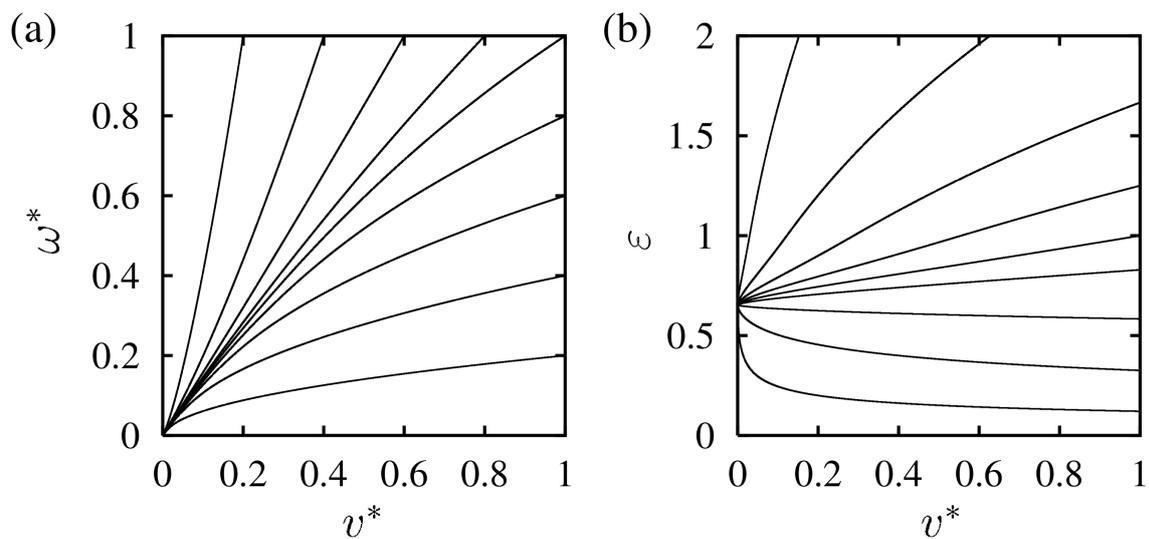


Figura 1.8 Solução numérica das equações de movimento modificadas. *Plot* de ω^* por v^* em (a), para várias condições iniciais. *Plot* de ε por v^* em (b), também para várias condições iniciais.

atrito.

Rotações reversas: caso sem atrito

Este capítulo trata-se de uma revisão do problema de rotação reversa abordado na Ref. [7]. Descreveremos um modelo mecânico simples que envolve o movimento de corpos rígidos em superfícies planas sem atrito. Em certo sentido, podemos dizer que este é um problema complementar em relação ao problema da Ref. [12] visto no capítulo anterior, já que tínhamos considerado dissipação sem forçamento e agora vamos considerar forçamento sem dissipação. Chegaremos a uma expressão livre de escala que define a separação entre os possíveis regimes de rotação.

2.1 O sistema

O sistema modelo de Parisio é esquematicamente mostrado na figura 2.1. Ele consiste em um disco uniforme de massa m e raio R que está sobre uma superfície horizontal sem atrito. Considera-se um disco somente por conveniência e, como veremos, os resultados do trabalho da Ref. [7] são válidos para qualquer corpo rígido. O sistema é, então, submetido a uma força externa horizontal \mathbf{F}_c , exercida por um aparato de forçamento, através de uma haste fina que é pivotada em algum ponto fixo (P) sobre o disco, ao redor do qual o corpo inteiro pode girar livremente.

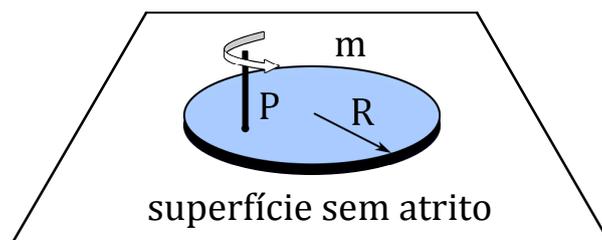


Figura 2.1 Movimento circularmente forçado de um disco rígido fino de raio R e massa m sobre uma superfície sem atrito. No ponto P , fincamos uma haste em torno da qual o disco inteiro pode girar também sem atrito.

Agora, se segue uma parte importante no entendimento do problema. Vamos considerar o caso em que o aparato de forçamento tira o disco do repouso e faz o ponto P seguir uma trajetória circular uniforme de raio d ao redor de uma origem fixa (O) com frequência angular ω ¹ (veja a figura 2.2). Isto é o que chamamos de *forçamento circular* do corpo rígido. Vamos assumir que o forçamento circular ocorre no sentido anti-horário e que, sem perda de

¹Perceba que ω denota a frequência angular de giro do ponto P , diferentemente do seu significado no problema

generalidade, o sistema de coordenadas é tal que o ponto P está localizado em algum ponto sobre a parte positiva do eixo- x no instante de tempo $t = 0$. Para tempos posteriores, vamos denotar o vetor posição do ponto P por \mathbf{d} e o vetor posição do centro de massa ($c.m.$) por \mathbf{r} . Tendo em vista que iremos admitir que o disco é perfeitamente rígido, o ponto P estará sempre a uma distância l fixa do centro de massa. A posição relativa entre estes dois pontos é dada pelo vetor \mathbf{l} , como mostrado na figura 2.2. Finalmente, o ângulo formado entre o eixo- x e a linha conectando o $c.m.$ ao ponto P é denotado pela letra ϕ . Note que as variáveis \mathbf{r} e ϕ especificam completamente a posição do disco, da mesma forma que acontece para qualquer corpo rígido em duas dimensões.

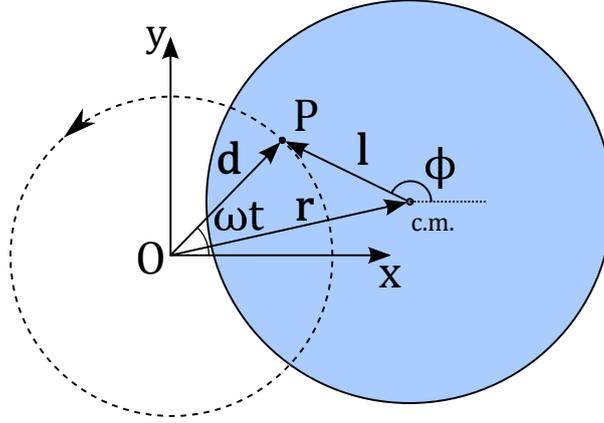


Figura 2.2 O ponto P , localizado através do vetor \mathbf{d} , descreve uma trajetória circular ao redor da origem O . O vetor \mathbf{r} localiza a posição do centro de massa ($c.m.$) e \mathbf{l} é o vetor que conecta $c.m.$ a P .

O principal objetivo do trabalho da Ref. [7] foi responder à seguinte questão: qual é o intervalo de ângulos iniciais ϕ_0 e parâmetros m , ω , R , l e d que levam a uma rotação horária do disco em torno do ponto P , se é que isso é possível? Em breve ficará evidente que esta pergunta faz sentido físico. Já que o ponto P está sendo forçado no sentido anti-horário, esta dinâmica horária caracteriza uma rotação reversa [$\phi(t)$ decrescente na média].

De acordo com as definições apresentadas, temos

$$\mathbf{d} = d \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + d \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.1)$$

onde d pode ter qualquer valor fixo dentro do intervalo $(0, \infty)$. O vetor \mathbf{l} conectando $c.m.$ a P é dado por

$$\mathbf{l} = l \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + l \sin \phi \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.2)$$

com $0 < l \leq R$. A posição do $c.m.$ é denotada por

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.3)$$

Estes três vetores devem satisfazer $\mathbf{r} + \mathbf{l} = \mathbf{d}$, o que nos leva a dois vínculos holonômicos:

$$x = d \cos(\omega t) - l \cos \phi \quad (2.4)$$

de Farkas *et al.*, no capítulo anterior, onde ω significava a velocidade angular de giro do disco em torno do seu centro de massa.

e

$$y = d \sin(\omega t) - l \sin \phi. \quad (2.5)$$

Vamos primeiramente pensar no problema sem nos preocuparmos em como o disco saiu do repouso; vamos pensar que ele já estava se movimentando. Mais adiante, nos preocuparemos com essa questão. Suponha que \mathbf{F}_c , desconhecida *a priori*, é uma força de vínculo que mantém a trajetória circular do ponto P . Assume-se que essa força é gerada por um aparato robusto, de tal forma que a trajetória circular uniforme do ponto P não é afetada pela inércia do disco.

2.2 Equação de movimento

As equações de movimento para os graus de liberdade do *c.m.* são $F_{c,x} = m\ddot{x}$, $F_{c,y} = m\ddot{y}$. A segunda lei de Newton para a coordenada angular² é dada por $\tau_c = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_c = I_{c.m.} \ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$, i.e.,

$$ml(\cos \phi \ddot{y} - \sin \phi \ddot{x}) = I_{c.m.} \ddot{\phi}, \quad (2.6)$$

onde $I_{c.m.}$ é o momento de inércia do disco com respeito ao centro de massa. Usando os vínculos holonômicos encontrados $\ddot{x} = l \sin \phi \ddot{\phi} + l \cos \phi \dot{\phi}^2 - d\omega^2 \cos(\omega t)$ e $\ddot{y} = -l \cos \phi \ddot{\phi} + l \sin \phi \dot{\phi}^2 - d\omega^2 \sin(\omega t)$ podemos desacoplar a equação de movimento angular. Esta torna-se: $ml[d\omega^2(\sin \phi \cos(\omega t) - \cos \phi \sin(\omega t)) - l\ddot{\phi}] = I_{c.m.} \ddot{\phi}$ ou

$$\ddot{\phi} - \frac{mld\omega^2}{I_P} \sin(\phi - \omega t) = 0, \quad (2.7)$$

onde $I_P = I_{c.m.} + ml^2$.

Agora, faremos a mudança de variável usada na Ref. [7]: $\theta = \phi - \omega t + \pi$, implicando que $\dot{\theta} = \dot{\phi} - \omega$ e $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$. Esta mudança transforma a Eq. (2.7) em uma equação de pêndulo simples

$$\ddot{\theta} + \frac{mld}{I_P} \omega^2 \sin \theta = 0. \quad (2.8)$$

Dessa forma, vemos que a dependência temporal de ϕ é dada por uma combinação de dois movimentos, um deles sendo pendular e o outro sendo uniforme (mais um fator constante),

$$\phi(t) = \theta_{p\text{êndulo}}(t) + \omega t - \pi. \quad (2.9)$$

Notemos que a solução (2.9) automaticamente nos dá $x(t)$, $y(t)$ e $\mathbf{F}_c(t)$. Isso também implica que nós temos uma constante de movimento escondida que corresponde à energia mecânica do *pêndulo auxiliar* [usaremos essa terminologia para nos referirmos ao termo pendular na solução (2.9)]

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} I_P \dot{\theta}^2 + 2mdl\omega^2 \sin^2(\theta/2), \quad (2.10)$$

²Na Ref. [7], o autor lembra que qualquer referencial anexado ao disco é não-inercial. A validade da Eq. (2.6) pode ser checada se escrevermos a equação de movimento angular no referencial inercial: $\mathbf{d} \times \mathbf{F}_c = d\mathbf{L}/dt$, onde $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + I_{c.m.} \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$, e usando a relação $\mathbf{r} + \mathbf{l} = \mathbf{d}$.

onde a energia potencial é escolhida como sendo zero na sua posição mais baixa. Usando a solução 2.9, podemos escrever a energia mecânica do pêndulo auxiliar em termos das condições iniciais da variável original:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}I_P(\dot{\phi}_0 - \omega)^2 + 2mdl\omega^2 \cos^2(\phi_0/2). \quad (2.11)$$

2.3 Em que casos as rotações reversas acontecem?

Chegamos até aqui para descobrir que condições iniciais e parâmetros levam a rotações reversas para um corpo rígido forçado de forma circular sobre uma superfície plana sem atrito. Podemos fazer isso analisando a equação de movimento do sistema e tentando entender de que forma sua solução muda, cobrindo os diferentes regimes possíveis. Quando inspecionamos a solução (2.9) notamos existe uma condição necessária para que ocorram rotações reversas do disco. Esta condição é a seguinte: $\theta_{p\grave{e}ndulo}$ deve descrever um movimento de rotação em vez de um movimento de libração, isto é, a energia mecânica do pêndulo auxiliar deve satisfazer $\mathcal{E} > 2mdl\omega^2$ no regime de ciclos pendulares negativos (ou seja, horários, já que, pela nossa definição anterior, o ponto de pivotação (P) gira no sentido anti-horário com variável angular crescente). A relação (2.11) juntamente com a igualdade $\mathcal{E} = 2mdl\omega^2$ define a curva que separa os movimentos de libração e de rotação descritos pela variável θ no espaço de condições iniciais $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$. Ainda na Ref. [7], Parisio encontrou que as condições entre as curvas³

$$\dot{\phi}_0 = \omega \left[1 \pm 2\sqrt{\frac{mdl}{I_P}} \sin(\phi_0/2) \right] \quad (2.12)$$

levam à libração da variável θ e, assim, leva à rotação normal do disco.

Será que todos os pontos que não se encontram nessa região levam a rotações reversas? Não, pois a rotação pendular deve ser no sentido horário e com frequência angular maior que ω , de forma a fazer $\phi(t)$ uma função decrescente de t , na média. Em outras palavras, $\phi(t)$ será decrescente se o termo pendular cair mais rápido do que cresce o termo ωt . Para isso, queremos que, na média, $\dot{\theta} < -\omega$ (em módulo, isso é $|\dot{\theta}| > \omega$). Usando a expressão para o período de rotação do pêndulo simples (fora do regime de librações), a condição que leva a rotação reversa da variável ϕ (do disco) é

$$T = \sqrt{\frac{8I_P}{\mathcal{E}}} K \left(\omega \sqrt{\frac{2mdl}{\mathcal{E}}} \right) < \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2.13)$$

para ciclos pendulares horários de período T , onde K denota a função elíptica completa de primeiro tipo⁴. Nas regiões onde T se iguala a $2\pi/\omega$, a constante \mathcal{E} satisfaz a equação transcendental

$$K \left(\omega \sqrt{\frac{2mdl}{\mathcal{E}}} \right) = \frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2I_P}}. \quad (2.14)$$

³Perceba o sinal de \pm , determinando as duas curvas.

⁴A função K é dada por $K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} d\theta$.

Usando esta prescrição e a Eq. (2.11) estaremos selecionando as condições iniciais $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ que levam a rotações reversas e normais. Estes regimes estão separados pela curva

$$\dot{\phi}_0 = \omega - \sqrt{\frac{2\tilde{\mathcal{E}}}{I_P} - \frac{4mdl\omega^2}{I_P} \cos^2(\phi_0/2)}, \quad (2.15)$$

onde $\tilde{\mathcal{E}}$ denota a solução da Eq. (2.14). A raiz com o sinal positivo foi descartada porque ela está relacionada com ciclos pendulares anti-horários (positivos) e, portanto, não podem nos levar a rotações reversas. Na Ref. [7] o autor nomeia a curva acima de *linha de sincronização*, pois as condições iniciais sobre essa curva não desenvolvem rotações normais nem reversas (que é quando a frequência angular de θ coincide com ω) e, portanto, a evolução temporal de ϕ , na média, alcança um valor constante. Este é o regime *roda-gigante* que comentamos anteriormente.

Antes de continuarmos nossa análise, vamos nos debruçar sobre o problema com as condições iniciais estáticas. Esta é a situação mais interessante, pois é como espera-se encontrar o aparato ao chegarmos ao laboratório. Além disso, podemos esperar que velocidades angulares iniciais suficientemente negativas (no sentido horário) $\dot{\phi}_0$ trivialmente levarão a rotações reversas.

Entretanto, notamos que \dot{x} , \dot{y} e $\dot{\phi}$ *nunca se anulam simultaneamente* e, assim, a energia cinética do disco $\mathcal{K} = m\dot{x}^2/2 + m\dot{y}^2/2 + I_{c.m.}\dot{\phi}^2/2$, ou seja⁵,

$$\mathcal{K} = md^2\omega^2/2 + (I_P\omega/2 + mdl\omega - \mathcal{E}/\omega)\dot{\phi} - I_P\dot{\phi}^2/2 + I_P\dot{\phi}^3/2\omega \quad (2.16)$$

é não-nula para todos os instantes de tempo.

Este problema foi solucionado pelo autor da seguinte forma: está claro que a força \mathbf{F}_c sozinha não é compatível com condições iniciais estáticas. Para que consigamos incluir estas condições iniciais, vamos assumir que uma *força impulsiva* age no disco, levando ele do repouso para o movimento em uma escala de tempo muito menor do que qualquer outras escala de tempo característica do problema, e. g., $2\pi/\omega$. Esta é uma suposição realística quando temos um motor forçando um corpo leve. Mais explicitamente, supõe-se que a força pode ser dividida em duas partes

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_0 & \text{para } t \in [0^-, 0^+] \\ \mathbf{F}_c & \text{para } t > 0^+ \end{cases} \quad (2.17)$$

onde \mathbf{F}_0 denota a força impulsiva que age durante um intervalo de tempo arbitrariamente pequeno centrado em $t = 0$. No caso limite, temos uma função delta, que podemos inicialmente escrever da forma genérica $\mathbf{F}_0 = \delta(t)(\alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}})$, onde α e β têm dimensão de momentum.

Mas como podemos determinar estas constantes? Estas constantes podem ser determinadas pelo movimento que nós *sabemos* que a força \mathbf{F}_0 causa ao disco. Mais especificamente, nós sabemos que, imediatamente após a sua aplicação, para obedecer à prescrição da nossa outra força⁶, \mathbf{F}_c , o ponto P tem que adquirir velocidade

$$\mathbf{v}_P(0^+) = \omega d \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.18)$$

⁵É algo curioso notar a presença de termos em $\dot{\phi}$ e $\dot{\phi}^3$.

⁶Vimos que a força \mathbf{F}_c , mesmo sem conhecê-la, faz o papel de girar o ponto P com velocidade angular positiva (no sentido anti-horário) e magnitude ω .

Esta é uma condição de consistência. Perceba que durante o intervalo infinitesimal $[0^-, 0^+]$ temos a atuação apenas da força impulsiva, de modo que as equações de movimento são $m\ddot{x} = \alpha\delta(t)$, $m\ddot{y} = \beta\delta(t)$ e $l\cos\phi\beta\delta(t) - l\sin\phi\alpha\delta(t) = I_{c.m.}\ddot{\phi}$. Integrando, podemos obter as velocidades logo após a aplicação de \mathbf{F}_0

$$\dot{x}(0^+) = \frac{\alpha}{m}, \quad \dot{y}(0^+) = \frac{\beta}{m}, \quad \dot{\phi}(0^+) = \frac{l}{I_{c.m.}}(\beta\cos\phi_0 - \alpha\sin\phi_0), \quad (2.19)$$

onde, aqui, as condições iniciais estáticas foram empregadas: $\dot{x}(0^-) = 0$, $\dot{y}(0^-) = 0$ e $\dot{\phi}(0^-) = 0$. Também foi usado que $\phi(0^-) = \phi(0^+) = \phi_0$ (já que a força impulsiva não causa descontinuidade nas coordenadas). A velocidade do ponto P em qualquer instante de tempo é dada por $\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\phi}l\hat{\phi} = (\dot{x} - l\dot{\phi}\sin\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\dot{y} + l\dot{\phi}\cos\phi)\hat{\mathbf{y}}$. Assim, a velocidade inicial em termos de α e β é

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P(0^+) = & \left[\frac{\alpha}{m} - \frac{l^2}{I_{c.m.}}\sin\phi_0(\beta\cos\phi_0 - \alpha\sin\phi_0) \right] \hat{\mathbf{x}} \\ & + \left[\frac{\beta}{m} + \frac{l^2}{I_{c.m.}}\cos\phi_0(\beta\cos\phi_0 - \alpha\sin\phi_0) \right] \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Aplicando a condição de consistência (2.18) obtemos um par de equações envolvendo α e β . Suas soluções são

$$\alpha = \frac{\omega dm^2 l^2}{I_P} \sin\phi_0 \cos\phi_0, \quad \beta = md\omega \left(1 - \frac{ml^2}{I_P} \cos^2\phi_0 \right).$$

Perceba que o que acabamos de encontrar são os parâmetros que determinam uma força impulsiva que é consistente com a evolução subsequente do sistema. Substituindo estes resultados na última equação em (2.19) obtemos uma relação simples entre o ângulo inicial ϕ_0 e a velocidade inicial $\dot{\phi}_0$ (onde suprimimos o argumento 0^+). Qual o significado desta relação? Dado um ângulo inicial do disco, estático, a velocidade angular que o disco adquire imediatamente depois de o aparato ser ligado é

$$\dot{\phi}_0 = \frac{mdl\omega}{I_P} \cos\phi_0. \quad (2.20)$$

Apenas pares $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ relacionados através desta expressão são condições iniciais válidas.

Vamos mostrar as curvas e regiões relevantes no espaço de condições iniciais. Na figura 2.3 (a) mostra-se as regiões normal (branca) e reversa (pontilhada) no espaço $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$, separadas pela linha de sincronização (curva verde). A linha preta representa as condições iniciais possíveis dadas pela relação (2.20). Para estes gráficos, foram utilizados os seguintes parâmetros: $\omega = 6$ rad/s ($\nu \sim 1$ Hz), $m = 100$ g, $R = 10$ cm, $l = 7$ cm e $d = 10$ cm. Para estes valores, a constante de movimento que satisfaz a Eq. (2.14) é $\tilde{\mathcal{E}} \approx 0.0543$ J. Vemos que, para estes parâmetros, não é possível ocorrer rotação reversa (a curva preta não alcança a região pontilhada). Contudo, se nós fixarmos $d = 40$ cm, mantendo os outros parâmetros inalterados (e nos levando a $\tilde{\mathcal{E}} \approx 0.2017$ J), vamos obter o resultado mostrado na figura 2.3 (b), retirada da Ref. [7], onde está claro (as curvas verde e preta se cruzam) que a rotação reversa aparece para

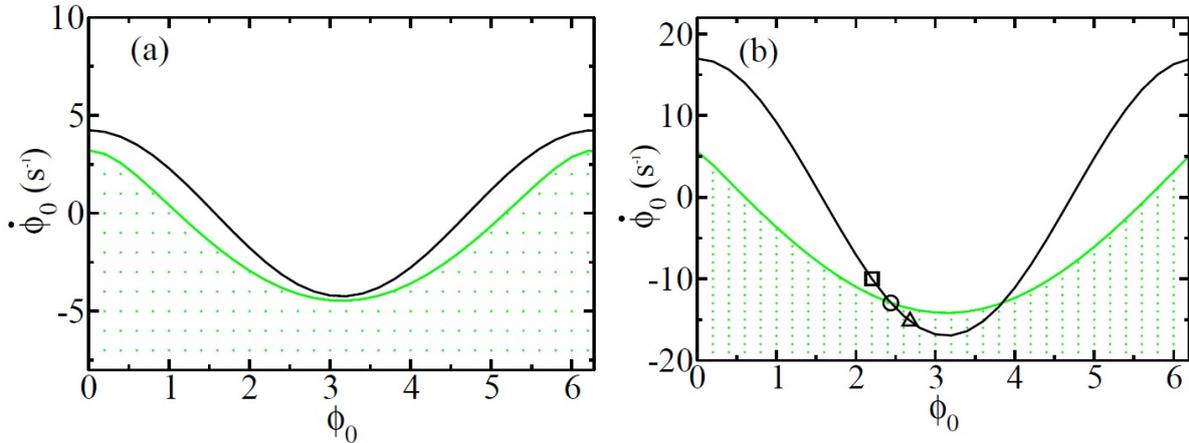


Figura 2.3 As regiões pontilhadas representam condições iniciais que levam a rotações reversas. Foi fixado $d = 10$ cm em (a) e $d = 40$ cm em (b). As linhas verdes e pretas são as linhas de sincronização e as curvas de condições iniciais, respectivamente. Na situação da figura (a) não é possível ser gerada uma rotação reversa já que as duas linhas não se cruzam. Na situação da figura (b) o comportamento reverso é possível para um intervalo centrado em $\phi_0 = \pi$.

um certo intervalo de condições iniciais centrado em $\phi_0 = \pi$. As três condições iniciais marcadas com um quadrado, um círculo e um triângulo representam os possíveis regimes: rotação normal, sincronização (ou "roda-gigante") e rotação reversa.

A evolução temporal de ϕ para estas três condições é mostrada na figura 2.4, retirada da Ref. [7]. Os ângulos iniciais correspondentes em radianos são: $\phi_0 \approx 2.20$ (preto), $\phi_0 \approx 2.44$ (cinza), e $\phi_0 \approx 2.68$ (cinza claro). Perceba que na curva preta, e. g., nós temos rotação normal e reversa, a depender do instante no qual nós registramos a velocidade $\dot{\phi}$. Desta forma, é importante ressaltar que os resultados apresentados na figura 2.3 se referem ao comportamento global de ϕ .

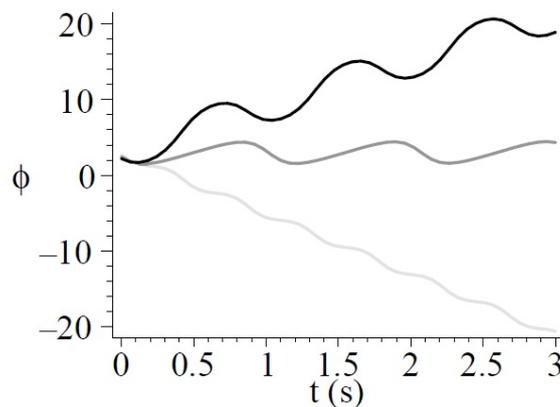


Figura 2.4 Evolução das condições iniciais indicadas na figura 2.3 (b): quadrado (preto), círculo (cinza) e triângulo (cinza claro).

É possível estabelecer de uma forma mais detalhada quais são as configurações iniciais que levam a rotações reversas. Primeiramente, notamos que a o intervalo de ângulos iniciais que levam a comportamento reverso é delimitado por interseções da linha de sincronização (2.15) e a curva de condições iniciais válidas (2.20). Estes dois ângulos de fronteira do intervalo são denotados por $\pi \pm \phi_B$, onde ϕ_B , portanto, é o máximo de ângulo que podemos nos afastar de π mantendo possíveis as rotações reversas (e o subíndice B representa *boundary*, que significa “fronteira” em Inglês)⁷. Eles são dados por

$$\cos^2(\pi \pm \phi_B) = \frac{I_P^2}{(mdl\omega)^2} \left(\frac{2\tilde{\mathcal{E}}}{I_P} - \frac{2mdl\omega^2}{I_P} - \omega^2 \right). \quad (2.21)$$

Tendo em vista que $0 \leq \cos^2(\pi \pm \phi_B) \leq 1$, se quisermos ver rotações reversas, devemos ter

$$2mdl + I_P < \frac{2\tilde{\mathcal{E}}}{\omega^2} < \frac{1}{I_P}(I_P + mdl)^2, \quad (2.22)$$

onde aparece uma condição imposta a $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}(m, d, l, I_P, \omega)$. Vamos analisar os casos limite: $\frac{2\tilde{\mathcal{E}}}{\omega^2} = 2mdl + I_P$ e $\frac{2\tilde{\mathcal{E}}}{\omega^2} = \frac{1}{I_P}(I_P + mdl)^2$. Substituindo estas expressões na equação transcendental (2.14) pode-se obter duas relações. Como ressaltado na Ref. [7], somente uma delas tem uma solução não-trivial. Esta relação é dada por

$$K \left(\frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{H^2 + 2H + \cos^2 \phi_B}} \right) = \frac{\pi}{2H} \sqrt{H^2 + 2H + \cos^2 \phi_B} \quad (2.23)$$

onde definimos o *parâmetro geométrico*⁸

$$H = \frac{I_P}{mdl}. \quad (2.24)$$

Para $\phi_B = 0$, o único ângulo que leva à dinâmica reversa é $\phi_0 = \pi$. Neste caso, a equação acima se reduz a $K(2\sqrt{H}/(H+1)) = \pi(H+1)/2H$, cuja solução não-trivial é $\tilde{H} = 0.793$. Dessa forma, configurações iniciais obedecendo $I_P/mdl = \tilde{H}$, separam regiões onde rotação reversa pode ocorrer daquelas onde somente rotação normal é possível. Note que, como a massa pode ser eliminada, esta relação envolve somente as escalas relativas $D = d/R \in (0, \infty)$ e $L = l/R \in (0, 1)$ e, *no caso do disco*, a relação pode ser escrita como

$$D = 0.631L^{-1} + 1.261L. \quad (2.25)$$

Chegamos a uma conclusão curiosa. O resultado acima é universal, no sentido de que é válido para quaisquer valores de m e ω , e *não depende das escalas absolutas* R , l e d . Como indicado na figura 2.5, configurações geométricas iniciais localizadas abaixo da curva (2.25) sempre levam a rotações normais, enquanto que configurações acima dela podem permitir rotações

⁷Na Ref. [7] usa-se $\phi_0^{(b)}$ ao invés de $\pi \pm \phi_B$

⁸Na Ref. [7] usa-se σ , que se relaciona com H através de $\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{H}$.

reversas, a depender do ângulo inicial ϕ_0 (de forma que os valores precisos de ϕ_0 são dados pela equação (2.21)). Também podemos perceber que existe um valor de d abaixo do qual nenhuma rotação reversa pode ocorrer. Ele é dado por $D_{min} = \sqrt{2}/\tilde{H}$, isto é, $d_{min} = 1.784R$. Para $L > 0.5$, variações neste parâmetro virtualmente não produzem mudança em D , que se torna o único parâmetro relevante para se definir os possíveis regimes do sistema (veja o platô na Fig. 2.5, retirada da Ref. [7]).

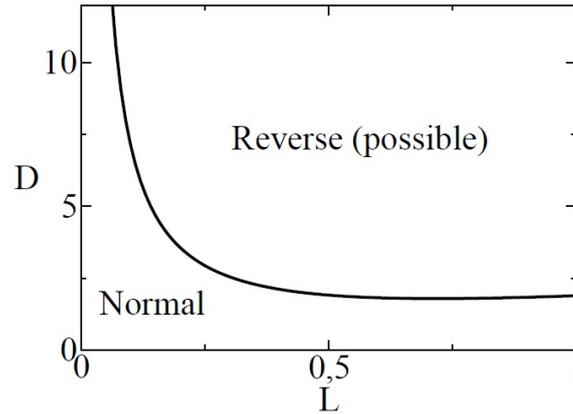


Figura 2.5 Configurações localizadas acima da curva podem gerar rotações reversas. Abaixo da curva somente rotação normal é possível.

É importante ressaltar que os resultados obtidos na Ref. [7] são muito gerais já que a forma particular de I_P foi usada apenas para obter a Eq. (2.25). Para um corpo rígido arbitrário, temos: $I_P = ml^2 + \gamma m\mathcal{R}^2$, onde γ é um parâmetro geométrico adimensional e \mathcal{R} é uma escala característica. Para o disco, temos $\gamma = 1/2$ e $\mathcal{R} = R$, enquanto para uma placa retangular de lados a e b temos $\gamma = 1/12$ e $\mathcal{R} = \sqrt{a^2 + b^2}$. A forma geral da Eq. (2.25) é

$$D = \frac{1}{\tilde{H}}(\gamma L^{-1} + L), \quad (2.26)$$

com $D = d/\mathcal{R}$ e $L = l/\mathcal{R}$, para $\mathcal{R} \neq 0$. Perceba que no caso "degenerado" de uma massa pontual conectada por uma haste sem massa ao ponto de pivotação, obtido do caso do disco fazendo $R = 0$, nós chegamos a $H = l/d$ e a condição para rotação reversa torna-se uma relação de um parâmetro $l/d < 0.793$.

Vamos fazer uma breve revisão do que foi apresentado neste capítulo. Foram investigadas na Ref. [7] as rotações reversas de corpos rígidos circularmente forçados e mostrou-se que o grau de liberdade angular intrínseco evolui segundo uma combinação de movimentos pendular e uniforme. Isso permitiu a completa determinação de quais são as configurações iniciais que levam a comportamento reverso (Eq. (2.22)). Além disso, foi obtida uma relação puramente geométrica e livre de escala, definindo as regiões onde rotação reversa é possível (Eq. (2.26)).

Os efeitos de atrito, que até aqui assumiu-se serem desprezíveis, transformam drasticamente a natureza das rotações reversas, apesar de não alterarem alguns aspectos que vimos aqui neste capítulo. Este é o assunto do nosso próximo capítulo, onde serão finalmente apresentados os resultados que foram obtidos no mestrado. Sem dúvida, é importante considerar

o atrito proporcionado pela presença de um fluido viscoso. À propósito, como veremos, isto está possivelmente relacionado com o movimento de um biorreator de crescimento de tecido celular [25, 26].

Rotações reversas: caso com atrito

Este capítulo é o mais importante desta dissertação tendo em vista que aqui apresentaremos os resultados encontrados durante a pesquisa de mestrado. Basicamente, iremos abordar o problema do capítulo anterior incluindo dissipação. Esta dissipação, a princípio, pode se originar de atrito Coulombiano (atrito seco) ou viscoso (atrito molhado). Escolhemos entender inicialmente o que acontece nesta segunda opção, quando forças viscosas agem sobre o corpo rígido forçado circularmente. Portanto, aqui estamos considerando forçamento e atrito simultaneamente (veja a tabela 3.1). Nosso principal objetivo é entender como a presença de atrito viscoso afeta os regimes de rotação reversa que existem para os discos¹ circularmente forçados no caso não-dissipativo [7]. Nosso trabalho resultou no artigo que pode ser encontrado no apêndice B (de Castro e Parisio, 2013 [8]).

Publicação	Atrito	Tipo de atrito	Forçamento	Tipo do Forçamento
Farkas <i>et al.</i> , 2003 [12]	Sim	Seco	Não	-
Parisio, 2008 [7]	Não	-	Sim	Circular
de Castro e Parisio, 2013 [8]	Sim	Viscoso	Sim	Circular

Tabela 3.1 Comparação entre os efeitos considerados nos trabalhos de Farkas *et al.* (2003), Parisio (2008) e de Castro e Parisio (2013).

De um ponto de vista mais aplicado, rotações reversas são potencialmente relevantes no problema de produção de tecido biológico. Um método amplamente usado para gerar camadas de tecido é o do biorreator de reservatório girante. Ele consiste de um contêiner cilíndrico cuja seção transversal circular gira em torno do seu eixo longitudinal com velocidade angular constante. Um disco poroso, semeado com células a serem cultivadas, está localizado dentro do reator que está, por sua vez, preenchido com um meio rico em nutrientes. O fluido girante mantém suspenso o tecido crescente, de forma que ele não sente os efeitos da gravidade (ver figura 3.1, retirada da Ref. [27]). Este sistema leva a regimes dinâmicos bastante complexos. Com mais atenção podemos perceber que esta situação é, essencialmente, a mesma que foi abordada na Ref. [5] e discutida no nosso capítulo 1, com a ressalva de que o papel do cilindro interno é feito pelo disco poroso. Existem vários estudos sobre as órbitas descritas pelo disco [25, 26], mas um entendimento dos seus regimes de rotação intrínseca, no espírito do trabalho desta dissertação, é necessário. Por exemplo, a existência de um transiente entre dois regimes de rotação distintos, como o que encontramos, produziria defeitos “topológicos” no tecido.

¹Veremos que é necessário especificar a forma do corpo rígido para contabilizar a força de atrito sobre ele. Para isso, escolhemos um disco.

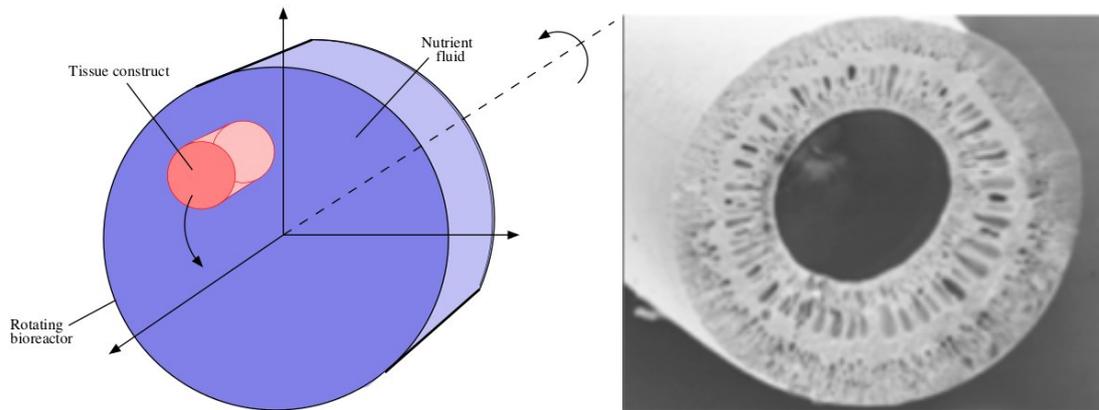


Figura 3.1 Biorreator de produção de tecido biológico.

Ao final deste capítulo, apresentaremos nossos resultados preliminares para o caso com atrito seco.

3.1 Caso com atrito viscoso

3.1.1 O sistema

O sistema modelo é muito parecido com o utilizado no capítulo anterior e está representado na figura 3.2. Mais uma vez, ele consiste de um disco uniforme de massa m e raio R , inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal. O sistema é submetido a uma força externa horizontal gerada por um aparato de forçamento através de uma haste fina fixada a um ponto (P) sobre o disco, em torno do qual o corpo inteiro pode girar livremente. O aparato de forçamento tira o disco do repouso e leva o ponto P a seguir uma trajetória circular uniforme de raio d em torno de uma origem fixa (O) com frequência angular constante ω [veja figura 3.3 (a)]. Vamos admitir que a rotação acontece no sentido anti-horário, como fizemos no capítulo anterior, e vamos usar um sistema de coordenadas para o qual o ponto P está sobre a parte positiva do eixo- x em $t = 0$. Denotaremos o vetor posição de P por \mathbf{d} e o vetor localizando o c. m. por

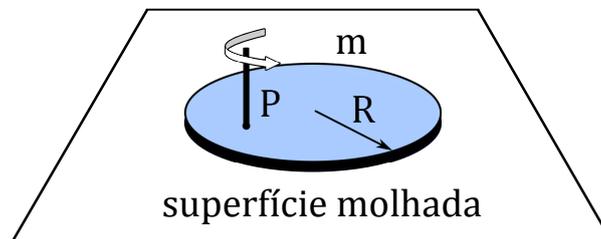


Figura 3.2 Representação pictórica do sistema modelo proposto.

\mathbf{r} , como fizemos anteriormente. Já que assumimos o disco perfeitamente rígido, P está sempre a uma distância l afastado do c. m. A posição relativa entre esses dois pontos é dada pelo vetor

\mathbf{l} , como mostrado na figura 3.3 (a). Finalmente, o ângulo entre o eixo- x e a linha conectando o c. m. e P é denotado por ϕ . As variáveis \mathbf{r} e ϕ especificam completamente a posição do disco, enquanto ω reflete a intensidade do forçamento.

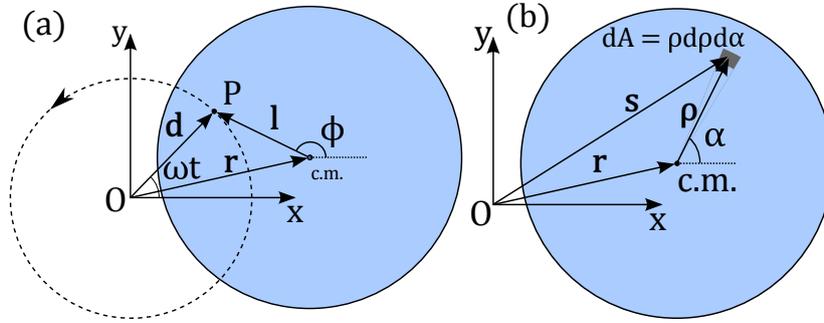


Figura 3.3 Visão superior, esquemática, do nosso sistema. As grandezas geométricas importantes estão desenhadas (a). Variáveis de integração para o cálculo de força e torque viscosos (b).

Como vimos, no capítulo anterior, o cenário de atrito desprezível foi considerado [7] e, aqui neste capítulo, vamos remover esta restrição considerando que uma camada fina de fluido existe entre o disco e a superfície horizontal, dando origem a um atrito molhado. Isso leva a forças e torques viscosos que são proporcionais à velocidade relativa local entre as superfícies. Em cada ponto da superfície do disco age uma força que é proporcional à velocidade local, com sentido contrário, cuja constante de proporcionalidade é a constante de arrasto b . Esta constante é proporcional à viscosidade η do fluido molhante de tal forma que

$$b \sim \frac{A\eta}{h} \quad (3.1)$$

onde A é área de contato entre o disco e o fluido e h é a espessura da camada de fluido presente. Note que consideramos um fluido *newtoniano*. Assim, temos

$$\eta \sim \frac{F/A}{\text{velocidade/espessura}}, \quad (3.2)$$

de onde podemos chegar na relação 3.1 (ver figura 3.4).

3.1.2 Equação de movimento para o caso com atrito viscoso

A força viscosa total atuando sobre o disco é dada pela integral de superfície

$$\mathbf{F} = -\frac{b}{\pi R^2} \int_{\text{disco}} \dot{\mathbf{s}} \rho d\alpha d\rho, \quad (3.3)$$

onde \mathbf{s} é o vetor que localiza o elemento de área $\rho d\alpha d\rho$ [veja fig 3.3(b)]. Levando em conta os vínculos $\mathbf{r} + \mathbf{l} = \mathbf{d}$ e $\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{s}$, o resultado corresponde àquele de um movimento retilíneo e

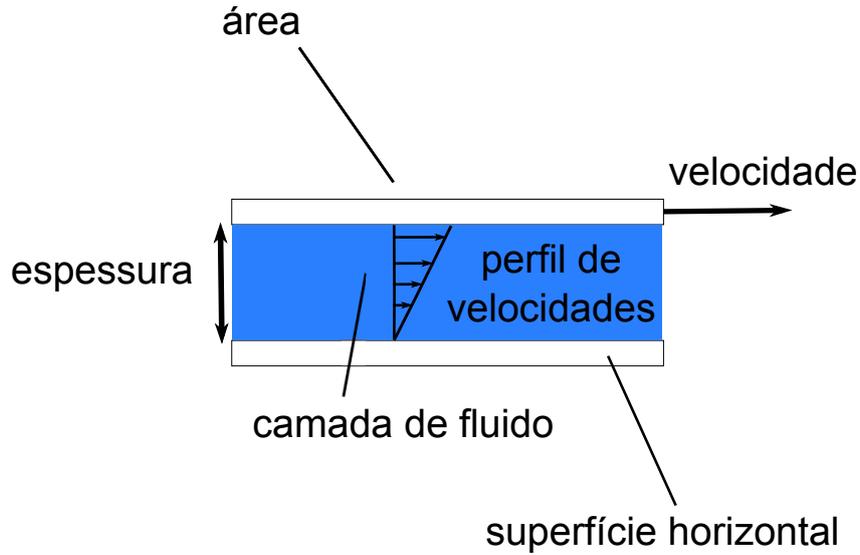


Figura 3.4 Placa superior se deslocando sobre a camada de fluido.

irrotacional do disco²: $\mathbf{F} = -b\dot{\mathbf{r}}$. A força em cada elemento de área também proporciona um torque:

$$\mathbf{T} = -\frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} \rho d\alpha d\rho = -b\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} - \frac{bR^2}{2} \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.4)$$

onde ϕ é o ângulo entre o vetor \mathbf{l} e o eixo- x , e $\hat{\mathbf{z}}$ é o vetor unitário perpendicular ao plano de movimento. Introduzindo estas expressões na segunda lei de Newton e eliminando os graus de liberdade do c. m. chegamos a

$$I_P \ddot{\phi} + b \left(l^2 + \frac{R^2}{2} \right) \dot{\phi} - mdl\omega^2 \sin(\phi - \omega t) - bdl\omega \cos(\phi - \omega t) = 0,$$

onde I_P é o momento de inércia com relação ao ponto de pivotação P . Escrevendo

$$\theta = \phi - \omega t + \arctan\left(\frac{b}{m\omega}\right) + \pi, \quad (3.5)$$

a equação de movimento é simplificada para

$$\mathcal{S} \frac{\ddot{\theta}}{\omega^2} + \frac{\dot{\theta}}{\omega} + \frac{\sqrt{\mathcal{S}^2 + 1}}{H} \sin \theta + 1 = 0, \quad (3.6)$$

onde o parâmetro geométrico, que é dado por

$$H = \frac{L^2 + 1/2}{DL}, \quad (3.7)$$

²Perceba que necessitamos efetuar uma integral sobre a superfície do corpo rígido para que possamos calcular a força e, subsequentemente, o torque totais sobre o objeto. Dessa forma, é preciso determinar sua forma, e. g., a de um disco. No apêndice A pode-se encontrar mais detalhes sobre estes cálculos.

neste caso do disco, contém toda a informação relevante sobre a geometria (livre de escala) do sistema, e $\mathcal{S} = m\omega/b$ dá a intensidade relativa de inércia e forçamento versus a força viscosa sobre o disco. Apesar de termos usado em nossos cálculos a Eq. (3.6), é possível obter uma equação formalmente mais simples usando o tempo adimensional $\tau = (\mathcal{S}\mathcal{A}/\omega)t$, com $\mathcal{A} = H^{1/2} \left(\mathcal{S} \sqrt{\mathcal{S}^2 + 1} \right)^{-1/2}$. A equação diferencial de dois parâmetros que resulta é

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \mathcal{A} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta + \mathcal{S}\mathcal{A}^2 = 0. \quad (3.8)$$

O custo envolvido em se fazer essas últimas mudanças é que \mathcal{A} é uma mistura de *geometria, inércia, forçamento e viscosidade*.

3.1.3 Comparação com outros sistemas físicos

Da Eq. (3.8) nós vemos que nosso problema pode ser mapeado na dinâmica de um pêndulo imerso em um fluido e sujeito a um torque constante [28]. É interessante notar que existe um número de sistemas físicos bastante distintos que podem, em certos regimes, ser descritos pela mesma equação (3.8). Exemplos são a dinâmica da diferença de fase entre as funções de onda coletivas através de uma junção Josephson [29, 30], o comportamento excitável de micropartículas sobre a ação de um torque óptico [31], e correntes alternadas em dispositivos eletrônicos [32, 33].

Entretanto, é importante notar duas coisas. Primeiro, a quantidade física que nos interessa, a que define rotação reversa ou normal, é a que está representada pela variável ϕ , e não θ . Segundo, para caracterizar completamente o problema, nós temos que analisar quais são as condições iniciais válidas. No caso presente é natural assumir, como fizemos, que, inicialmente, o disco está em repouso sobre uma superfície horizontal e, em certo instante, digamos que seja $t = 0$, o aparato de forçamento é ligado. Se o mecanismo de forçamento é robusto o suficiente, podemos assumir que esta dinâmica inicial é impulsiva, como fizemos anteriormente, isto é, o ponto de pivotação é tirado do repouso e levado a uma velocidade angular constante em um intervalo de tempo muito menor que qualquer outras escala de tempo do problema. Nessas condições, foi mostrado no capítulo anterior e, originalmente, em [7] que se for dada uma condição de ângulo inicial de um disco estático, a velocidade angular que ele adquire imediatamente depois que o aparato de forçamento é ligado é

$$\dot{\phi}_0 = \frac{\omega}{H} \cos\phi_0. \quad (3.9)$$

Na derivação original a força de atrito não foi levada em conta. Porém, isso não afeta o resultado acima já que a força que o motor exerce sobre o disco, em um intervalo de tempo infinitesimal centrado em $t = 0$, é impulsiva. Em outras palavras, a força que o motor exerce sobre o disco diverge como uma delta em $t = 0$. Dessa forma, a presença de atrito durante este intervalo não pode alterar a força resultante. Assim, nosso resultado é o mesmo.

Para ilustrar as restrições impostas pela relação anterior, podemos destacar que o sistema estudado no problema do pêndulo imerso em um fluido e submetido a torque constante da Ref. [28] apresenta um comportamento interessante de excitabilidade, especificamente, a existência

de uma dinâmica com picos pronunciados no gráfico de $\theta(t)$. Os autores observam este fenómeno acontecer para uma condição que, na nossa notação, se torna $\omega > (b/m)\sqrt{H^2 - 1}$ com condições iniciais $\dot{\theta}_0 = 0$ e θ_0 arbitrário. Substituindo esta condição em (3.9) nós chegamos em $H = \cos \phi_0$, o que implica em $H \leq 1$, levando a um argumento negativo na raiz quadrada. Portanto, nosso sistema não apresenta a excitabilidade observada em [28] devido às condições iniciais que nos interessam.

3.1.4 Casos limite

Vamos começar esta seção com um sumário das principais conclusões do capítulo anterior, caso sem atrito ($b = 0$). O autor da Ref. [7] encontrou que um regime de rotações reversas perenes é possível para um intervalo de ângulos iniciais $\{\pi - \phi_B, \pi + \phi_B\}$ centrado em π , desde que o vínculo geométrico

$$H < 0.793 \quad (3.10)$$

seja satisfeito. Assim, podemos falar de um valor crítico de H . Esse valor define exatamente a curva de separação 2.25 entre as regiões de regimes possíveis no espaço de parâmetros³ D e L , ou seja, é o valor de H que chamamos de \tilde{H} . Para todas as outras situações, onde $\phi_B \neq 0$, \tilde{H} (ou H_c , de *crítico*) assume valores menores. Para $H > 0.793$ não existem condições iniciais que permitam o disco entrar no regime de rotações reversas. Lembremos que esta condição necessária e suficiente não depende da frequência de forçamento ω , da massa m e dos valores absolutos dos comprimentos d , l , e R . Condições iniciais que não satisfaçam esses requerimentos irão levar o sistema ao regime permanente de rotações normais ou, na fronteira entre os dois regimes, a um movimento oscilatório com média temporal de $\dot{\phi}$ indo a zero (veja a figura 2.4 do capítulo anterior).

No limite oposto, temos $b \rightarrow \infty$. Isso leva à equação diferencial de movimento (Eq. 3.6) a

$$\dot{\theta} + \frac{\omega}{H} \sin \theta + \omega = 0. \quad (3.11)$$

Vamos sumarizar as três soluções qualitativamente distintas desta equação (como descritas no livro clássico de Strogatz [30]):

- Se $H < 1$, os pontos fixos θ^* satisfazem $\sin \theta^* = -H$, o que nos leva a $\cos \theta^* = \pm \sqrt{1 - H^2}$. Existe um ponto fixo estável (associado a $\cos \theta^* > 0$) e todas as trajetórias são atraídas para ele quando $t \rightarrow \infty$, de modo que não ocorre oscilação.
- Se $H = 1$, nós temos uma bifurcação sela-nó sem oscilações para qualquer tempo finito. Os pontos fixos se fundem em um único ponto fixo.
- Se $H > 1$, não existem pontos fixos e o sistema oscila com um período dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - H^{-2}}} \geq \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.12)$$

³Percebemos isso através do uso da definição de H (Eq. 3.7).

O ponto importante aqui é que, se inspecionarmos a Eq. (3.5), vamos notar que, em qualquer caso, $\phi(t)$ é uma função crescente do tempo, na média. Assim, o sistema só pode apresentar rotações normais. Portanto, concluímos que, enquanto no caso sem atrito as rotações reversas podem ocorrer por tempo indeterminado, elas são impossíveis para o limite de alta viscosidade. A questão que surge é a seguinte: O que acontece no meio do caminho? O que acontece nos casos de viscosidade intermediária?

3.1.5 Viscosidade arbitrária

Nós investigamos numericamente o comportamento do sistema para valores intermediários do parâmetro b/m . Todos os cálculos numéricos executados nos estudos que realizamos para esta dissertação foram efetuados no *software* Mathematica ©. As equações de movimento foram integradas a fim de se obter suas soluções numéricas. A função que utilizamos para isso foi a *NDSolve*.

Apesar de não termos uma solução analítica fechada para nosso problema com viscosidade arbitrária, podemos estabelecer os pontos fixos e suas propriedades de estabilidade antes de partir para soluções numéricas. Fixando $\ddot{\theta} = 0$ e $\dot{\theta} = 0$ em (3.6) obtemos que os pontos fixos estáveis satisfazem

$$\theta^* = -\arcsin\left(\frac{H}{\sqrt{\mathcal{S}+1}}\right) \pm 2n\pi, \quad (3.13)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$. Os pontos fixos instáveis são dados por $\pi - \theta^*$.

Nossa investigação numérica para valores intermediários do parâmetro b/m começa com algumas trajetórias típicas no plano $\theta - \dot{\theta}$. Estamos usando a variável auxiliar θ , já que é somente em termos dessa variável que a equação de movimento não contém o tempo de forma explícita. Na Fig. 3.5 mostramos o diagrama do espaço de fase para três condições iniciais: $\theta_0 \approx 2\pi$ ($\phi_0 = \pi$) para o triângulo, $\theta_0 \approx \pi$ ($\phi_0 = 0$) para o quadrado e $\theta_0 = 2\pi - \pi/8$ ($\phi_0 = \pi - \pi/8$) para o círculo, com as velocidades iniciais correspondentes dadas pela relação (3.9), representadas pela linha tracejada no diagrama. Os outros parâmetros são: $b/m = 0.09$, $\omega = 1.9$ e $H = 0.45$. Isso leva a $\sin \theta^* = -0.021$, $\theta^* \approx -1, 2^\circ$. A linha horizontal tracejada com pontos representa o negativo da frequência de forçamento ω . Lembramos que, para termos uma rotação reversa ($\langle \dot{\phi}(t) \rangle < 0$ sobre uma escala de tempo de $2\pi/\omega$), temos que ter $\langle \dot{\theta}(t) \rangle < -\omega$ sobre uma escala de tempo de $2\pi/\omega$. Notamos que a primeira condição inicial imediatamente leva a rotação normal, para a segunda o comportamento reverso se desenvolve por um único ciclo, enquanto para a terceira condição inicial apresenta dois ciclos de rotação reversa antes de espiralar para o ponto fixo estável mais à esquerda.

Indo para a variável física ϕ , a primeira coisa importante que devemos notar é: para cada condição inicial que começou a desenvolver uma rotação reversa, após algum tempo, o *spin* invariavelmente irá “*flipar*” (mudar de sentido) para um regime de rotação prógrada para qualquer valor de $b \neq 0$. Isso pode ser entendido se notarmos que as oscilações em $\phi(t)$ eventualmente morrem, com $\ddot{\phi} \rightarrow 0$ para tempos suficientemente longos, um efeito observado em todas as configurações. Quando este regime é alcançado, a equação de movimento se torna idêntica à Eq. (3.11), para a qual mostramos que as rotações reversas são impossíveis. Portanto, em algum momento o comportamento reverso é substituído por rotações normais. Quanto menor

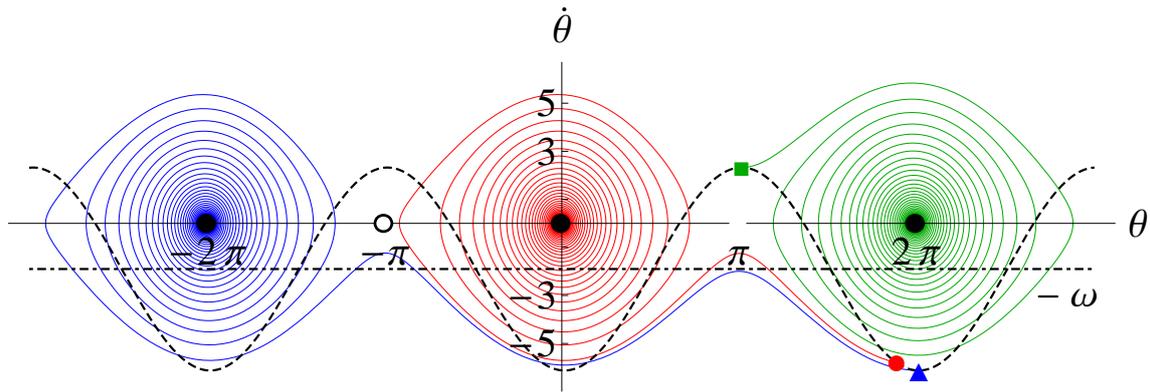


Figura 3.5 Trajetórias no espaço de fase para três condições iniciais diferentes. Mais detalhes podem ser encontrados no texto.

for a constante de arrasto, maior será o tempo de *flip* t_f , que é determinado através do mínimo global de $\phi(t)$. Na fig. 3.6 nós mostramos ϕ como uma função de t para $\omega = 0.2 \text{ rad s}^{-1}$, $H = 0.3$, e condição inicial $\phi_0 = \pi$ (a mais favorável para rotações reversas). As três curvas se referem a valores distintos do parâmetro de arrasto: $b/m = 0.014 \text{ s}^{-1}$ (a), $b/m = 0.008 \text{ s}^{-1}$ (b), e $b/m = 0.004 \text{ s}^{-1}$ (c). Portanto, nós concluímos que nenhum estado estacionário de rotação reversa é permitido para qualquer valor finito de b/m . Este regime, entretanto, pode existir como um transiente que é tão mais longo quanto menores forem os valores de viscosidade.

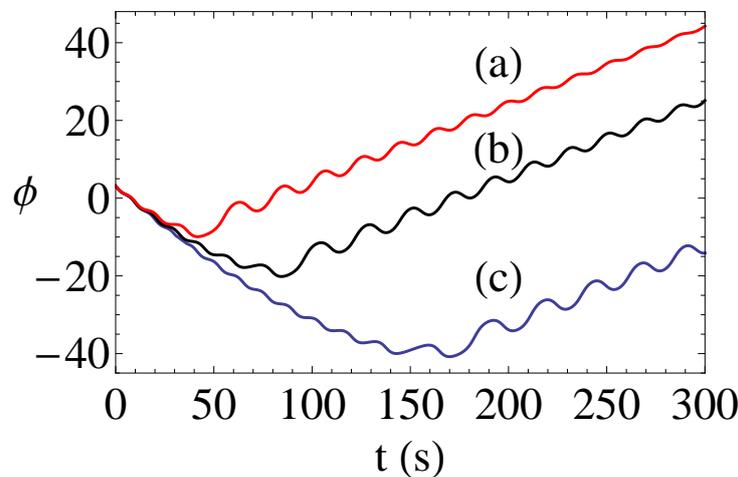


Figura 3.6 O ângulo ϕ como uma função de t para $\omega = 0.2 \text{ rad s}^{-1}$ e $b/m = 0.014 \text{ s}^{-1}$ (a), $b/m = 0.008 \text{ s}^{-1}$ (b) e $b/m = 0.004 \text{ s}^{-1}$ (c). Em todos os casos temos $H = 0.3$.

Outro fato importante observado é que a variável ϕ cresce com velocidade angular ω , na média, após o tempo de *flip*. Isso foi verificado numericamente em todas as situações analisadas. Perceba na figura 3.6 que a inclinação de $\phi(t)$ é a mesma para todos os valores de b/m , se calcularmos seu valor médio após o tempo de *flip*. Isso significa que o movimento do disco entra em um regime de rotação normal no qual gira simplesmente seguindo o forçamento.

Apesar disso, verificamos que as condições iniciais que levam a rotações reversas no caso

de viscosidade nula são as mesmas que levam ao transiente reverso, o intervalo $\{\pi - \phi_B, \pi + \phi_B\}$ sendo insensível ao valor de b . Isso era esperado, dada a natureza impulsiva do input inicial de energia. Além disso, devido a relação 3.14, que veremos a seguir, suspeitamos que dependência de t_f com ϕ_0 deve ser universal com respeito ao tempo adimensional $(b/m)t_f$. Este é, de fato, o caso; podemos verificar isto na figura 3.12 (esquerda), que mostra esta dependência para diferentes valores de b/m . Na direita, plotamos as curvas não colapsadas de t_f somente versus ϕ_0 . Usamos um alto valor de viscosidade angular, $\omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$, de forma a suprimir as oscilações e tornar a nossa ideia mais clara. Para valores mais baixos de ω os resultados são quantitativamente os mesmos e a Fig. 3.12 representaria o envólucro dos *plots* verdadeiros. Os outros parâmetros empregados são $H = 0.3$, e $b/m = 0.1 \text{ s}^{-1}$ (azul), $b/m = 0.2 \text{ s}^{-1}$ (verde), $b/m = 0.5 \text{ s}^{-1}$ (laranja), $b/m = 1.0 \text{ s}^{-1}$ (vermelho). O valor invariante de ϕ_B é, aproximadamente, $3\pi/5$.

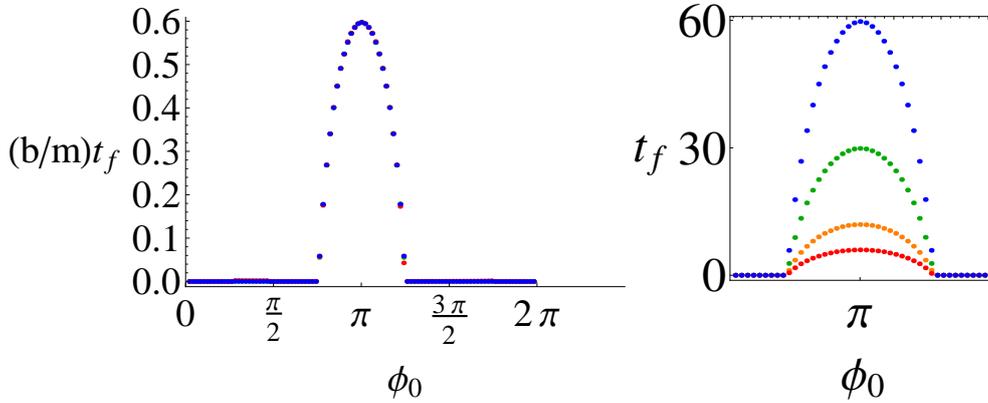


Figura 3.7 (Na esquerda, temos o tempo de *flip* adimensional $(b/m)t_f$ como uma função das condições iniciais ϕ_0 para quatro valores diferentes de b/m . O *plots* se superpõe completamente. Na direita, a figura mostra as curvas não colapsadas de t_f versus ϕ_0 . Mais detalhes podem ser encontrados no texto.

Além disso, o tempo de vida das rotações reversas tem que se anular no limite de alta viscosidade e tem que divergir no regime de atrito desprezível. Uma análise dimensional nos leva a inferir que, se esta divergência é descrita por uma lei de potência, então devemos ter $t_f \sim \omega^{\gamma-1} (b/m)^{-\gamma}$, com γ inteiro. Na figura 3.8 nós mostramos t_f como função de b/m . As discontinuidades acontecem quando um mínimo global pula entre dois mínimos locais no gráfico de $\phi(t)$. Na figura 3.9 está apresentado t_f como uma função de b/m em um *plot* log-log. Está claro que há uma divergência em lei de potência no limite de baixa viscosidade. A relação que obtivemos é

$$t_f \sim \left(\frac{b}{m}\right)^{-1}. \quad (3.14)$$

Encontramos que essa relação é assintoticamente independente⁴ de ω , como pode ser visto

⁴Nós encontramos uma dependência oscilatória de t_f com relação a velocidade angular para valores pequenos de ω . Entretanto, mesmo nesta situação, continuamos a encontrar $\gamma = 1$.

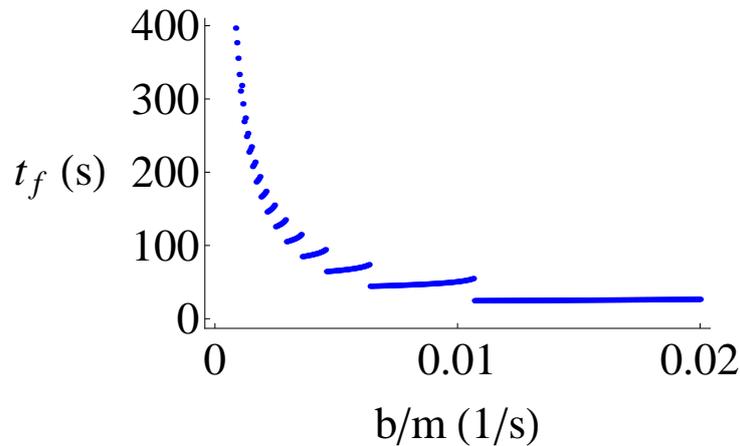


Figura 3.8 Tempo de *flip* t_f como uma função de b/m . As descontinuidades são devidas as passagens do mínimo global através de mínimos locais consecutivos no gráfico de $\phi(t)$.

no cálculo apresentado na figura 3.10⁵. A variação do parâmetro de arrasto tem um efeito muito menos dramático no regime de rotações normais, a única diferença sendo a taxa com a qual a amplitude das oscilações em $\phi(t)$ vai a zero.

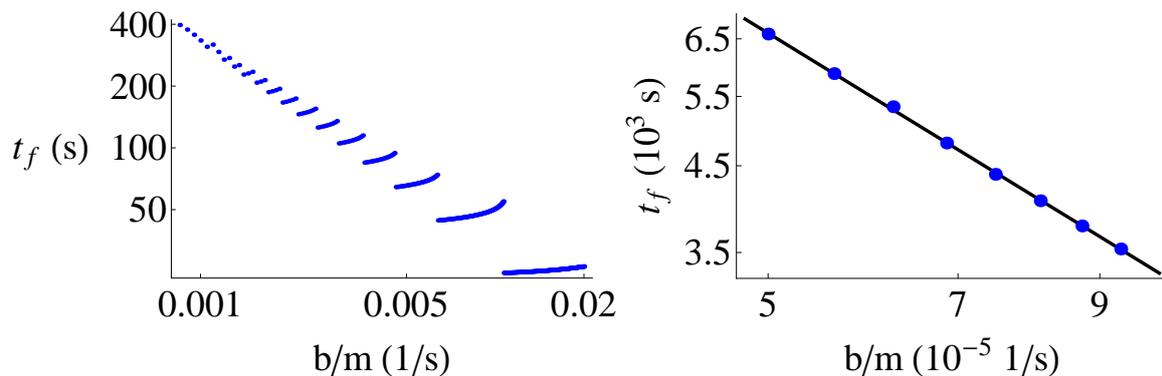


Figura 3.9 No lado esquerdo temos o gráfico log-log do tempo de *flip* t_f , como uma função de b/m , mostrando o comportamento do tipo lei de potência no regime de baixa viscosidade. As descontinuidades são devidas as passagens do mínimo global através de mínimos locais consecutivos no gráfico de $\phi(t)$. No lado direito temos esse gráfico para uma região de viscosidade muito menor.

⁵É importante que o leitor note que, apesar de terem sido usados valores pequenos de ω , todos os comportamentos analisados neste problema são qualitativamente iguais para valores altos de ω . Ainda do ponto de vista quantitativo, o valor -1 para o expoente da Eq. 3.14 não é alterado. O uso de valores altos apenas aumenta bastante o tempo de cálculo computacional.

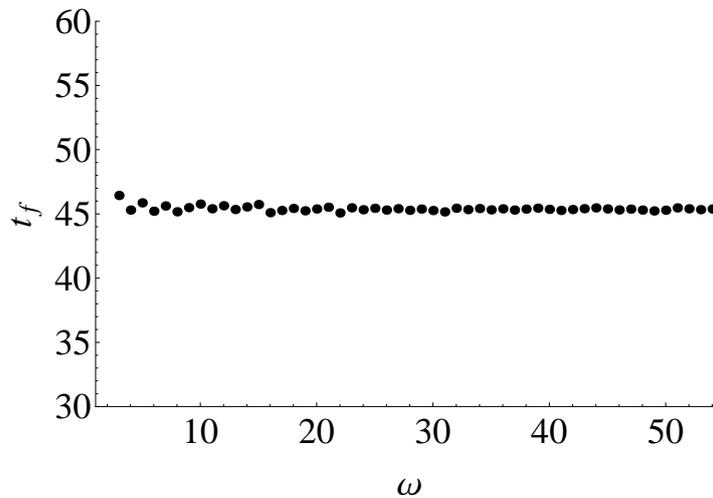


Figura 3.10 Tempo de *flip* t_f como uma função da frequência angular de forçamento ω .

3.1.6 Em que casos as rotações reversas acontecem

De forma análoga ao problema da Ref. [7], visto no capítulo anterior, também temos interesse aqui em determinar em que casos as rotações reversas acontecem. Porém, no caso com atrito, é importante lembrarmos que as rotações reversas só podem acontecer como um transiente.

Quanto aos ângulos iniciais que podem levar a rotações reversas, como vimos na seção anterior, eles são os mesmos do caso sem atrito. Em outras palavras, não existe nenhum efeito de forças viscosas sobre o intervalo de condições iniciais que levam às rotações reversas; este intervalo é o mesmo, independentemente da presença da lâmina de fluido viscoso.

Com relação aos outros parâmetros, vimos que a existência ou não de rotações reversas não depende da frequência de forçamento ω , da massa m e dos valores absolutos dos comprimentos d , l , e R . Entretanto, a rotação reversa poderá ocorrer, caso o sistema tenha uma condição inicial de ângulo dentro do intervalo adequado, se os comprimentos relativos D e L se combinarem no parâmetro geométrico H , definido na eq. (2.24), de forma que ele tenha um valor abaixo de H_c . Para valores acima de H_c , as rotações reversas transientes nunca ocorrerão: o sistema começará em um regime de rotação normal e permanecerá nele para sempre. Quando não há atrito, nós encontramos que as rotações reversas são possíveis somente se $H < 0.793 = H_c(0)$, de acordo com o vínculo (3.10). Apesar de rotações reversas perenes não serem possíveis para $b \neq 0$, podemos nos perguntar que valores de H permitem rotação reversa transiente. O resultado desta busca é apresentado na próxima seção.

3.1.7 Comportamento q-exponencial para parâmetro geométrico crítico

Na Fig. 3.11 nós exibimos o valor máximo de H abaixo do qual a dinâmica reversa pode ocorrer, como uma função da variável adimensional $\mathcal{S}^{-1} = b/m\omega$, fixando $\phi_0 = \pi$. Inicialmente, tentamos ajustar estes dados numéricos através de funções polinomiais e exponencial

sem resultados satisfatórios. Em seguida, tentamos uma função do tipo exponencial *stretched*

$$H_c(b/m\omega) = H_c(0) \exp \left[-C_1 \left(\frac{b}{m\omega} \right)^{C_2} \right] \quad (3.15)$$

onde C_1 e C_2 são os parâmetros do ajuste. No caso da fig. 3.11, os valores dos parâmetros são -1.67795 e 0.643255, respectivamente.

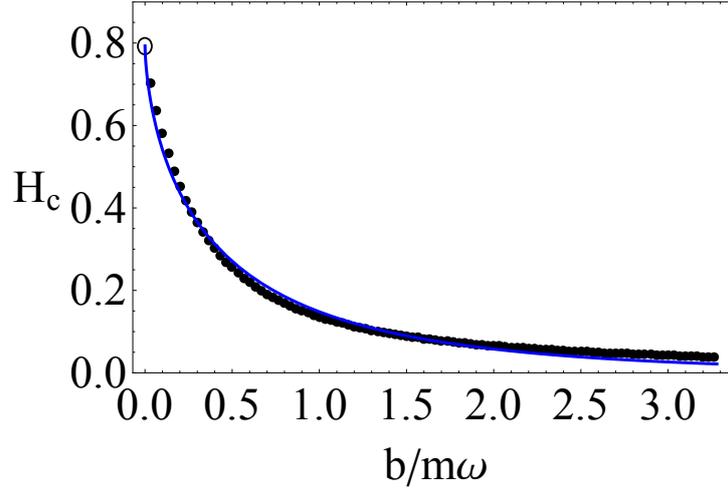


Figura 3.11 Parâmetro geométrico H_c versus a variável adimensional $\mathcal{S}^{-1} = b/m\omega$. H_c ajustado por uma função do tipo exponencial *stretched* com $C_1 = -1.67795$ e $C_2 = 0.643255$ para $\phi_0 = \pi$. O círculo aberto representa $H_c = 0.793$.

Entretanto, de forma curiosa, os dados numéricos são muito bem descritos por uma função q-exponencial (ver figura 3.12):

$$H_c(b/m\omega) = H_c(0) \left[1 - \lambda(1-q) \left(\frac{b}{m\omega} \right) \right]^{1/(1-q)}, \quad (3.16)$$

com $q = 1.7$ e $\lambda = 3.47$. Efetuamos o ajuste usando a q-exponencial para diversas situações (mudando os valores de ω) e não encontramos nenhuma diferença significativa. Apenas para ilustrar a qualidade do ajuste, mostramos a confiança estatística para um caso qualquer, apresentado na tabela 3.2.

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	Intervalo de Confiança
q	1.72441	0.00326411	1.71793, 1.73089
λ	3.5208	0.0113463	3.49826, 3.54331

Tabela 3.2 Confiança estatística do ajuste dos dados numéricos de H_c versus $b/m\omega$ usando uma q-exponencial. Nível de confiança: 95 %.

Quando ϕ_0 se afasta de π , ambos, os valores de q e $H_c(0)$ tendem a diminuir. Para $\phi_0 = 2.5$, e.g., nós obtivemos $q \approx 1.5$ e $\lambda \approx 2.23$, enquanto $H_c(0)$ caiu consideravelmente para 0.40. Os

valores de $H_c(0)$ rapidamente tornam-se muito restritivos ao movimento reverso como, por exemplo, $\phi_0 = 2.0$, levando a $H_c(0) \approx 0.09$. Para $L = 0.5$, tais condições para H seriam satisfeitas somente para $D \geq 17$, inibindo, na prática, a ocorrência de rotações reversas. Dessa forma, nós vemos que o aumento do atrito molhado não somente diminui o tempo de rotação reversa mas também reduz a região do espaço de parâmetros D e L para a qual elas são possíveis. Esse comportamento, em termos de D e L , pode ser observado na figura 3.13, onde a região onde só rotação normal é possível cresce com o aumento do parâmetro $b/m\omega$.

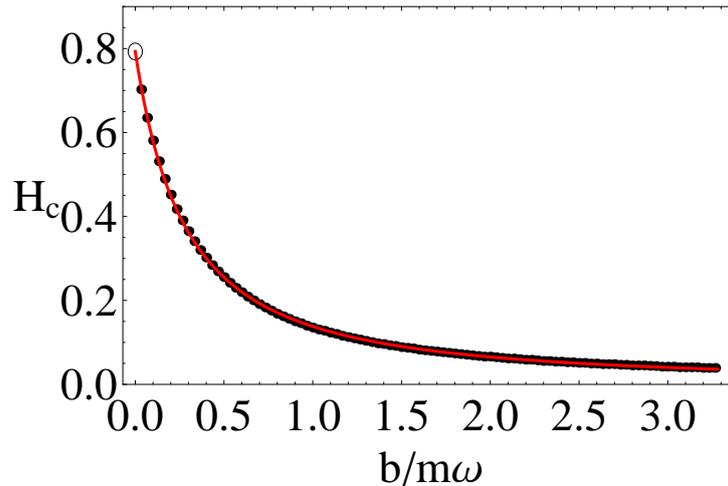


Figura 3.12 Parâmetro geométrico crítico H_c versus a variável adimensional $\mathcal{S}^{-1} = b/m\omega$. H_c cai de acordo com uma função q-exponencial com $q = 1.7$ para $\phi_0 = \pi$. O círculo aberto representa $H_c = 0.793$.

Sendo assim, os transientes de rotações reversas deixam de aparecer se $H > H_c(b/m\omega)$ ou se ϕ_0 estiver fora do intervalo $\{\pi - \phi_B, \pi + \phi_B\}$. Note que para b infinitamente alto chegaremos a um $H_c = 0$, implicando que qualquer H satisfaz $H > H_c(b/m\omega)$. Podemos visualizar na figura 3.14 um gráfico de $\phi(t)$ para $H = 1$. Este valor é mais alto que o maior H_c possível (0.793). Duas dinâmicas de rotação normal são apresentadas, cada uma para um valor de viscosidade diferente. Para um valor mais alto de viscosidade, a amplitude das oscilações morre mais rapidamente.

Na figura 3.15 mostramos a dinâmica $\phi(t)$ para um valor de ϕ_0 igual a 2π , i.e., um valor que não pode levar a rotações reversas. Perceba que entramos em um regime de rotações normais, mas ele é qualitativamente diferentes do regime de rotações normais que surge através do aumento de H . Existe um transiente com inclinação e oscilação diferentes, sendo a sua duração tão maior quanto menor for a viscosidade.

3.2 Caso com atrito seco

Uma extensão natural que devemos considerar é o caso com atrito Coulombiano (seco), i.e., substituir uma mesa molhada por uma mesa rugosa. Atualmente, estamos iniciando a análise deste problema, de forma que o conteúdo desta seção ainda pode ser considerado preliminar.

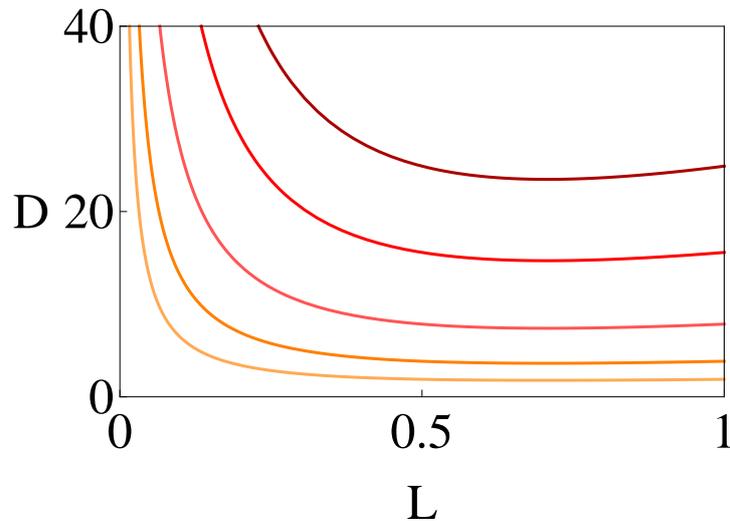


Figura 3.13 D versus L para vários valores de $b/m\omega$, com $\phi_0 = \pi$. Acima das curvas fica a região onde as rotações reversas são possíveis. Abaixo delas somente rotações normais podem ocorrer. Da curva mais próxima da origem para a mais distante, os valores utilizados são equivalentes a $H_c = 0.793$ com $b/m\omega = 0$, $H_c = 0.39065$ com $b/m\omega = 0.266667$, $H_c = 0.19115$ com $b/m\omega = 0.7$, $H_c = 0.09625$ com $b/m\omega = 1.4$ e $H_c = 0.06025$ com $b/m\omega = 2.16667$.

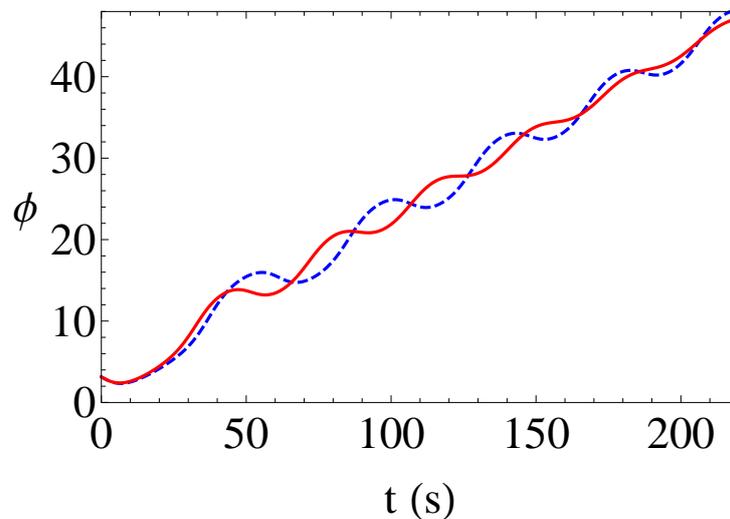


Figura 3.14 O ângulo ϕ como uma função de t para $\omega = 0.2 \text{ rad s}^{-1}$. Temos $b/m = 0.014 \text{ s}^{-1}$ (linha sólida) e $b/m = 0.004 \text{ s}^{-1}$ (linha tracejada). Em todos os casos temos $H = 1$.

3.2.1 O sistema

Verificamos que, para o caso de um disco rígido, isso resulta em uma equação de movimento com funções complicadas de argumentos intrincados, levando a uma análise numérica mais complexa. Uma boa simplificação (mas que ainda exige que o problema seja resolvido numericamente) é substituir o disco rígido por uma pequena massa esférica, cuja área superficial é

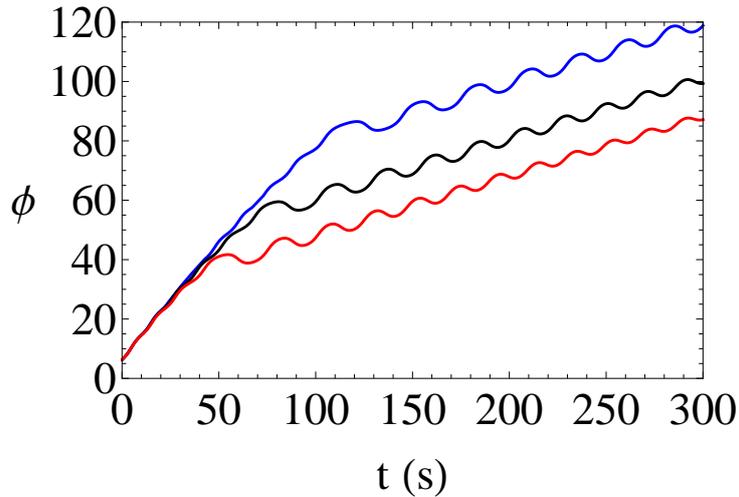


Figura 3.15 O ângulo ϕ como uma função de t para $\omega = 0.2 \text{ rad s}^{-1}$. Temos $b/m = 0.0025 \text{ s}^{-1}$ (curva superior), $b/m = 0.004 \text{ s}^{-1}$ (curva intermediária) e $b/m = 0.006 \text{ s}^{-1}$ (curva inferior). Em todos os casos temos $H = 0.3$.

desprezível, anexada a uma haste rígida e sem massa (ver figura 3.16). É de se esperar que isso não mude a essência da física do problema, mas verificamos que isso torna equação de movimento mais simples, já que não precisamos mais efetuar integrais de superfície para encontrarmos força e torque sobre o corpo rígido. São principalmente as funções que surgem dessas integrais que elevam o grau de dificuldade do problema.

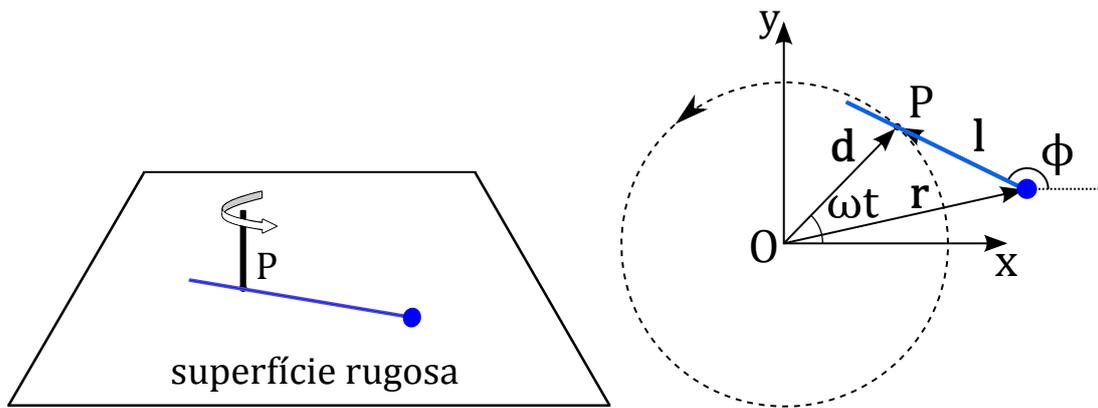


Figura 3.16 Esquerda: Representação pictórica do movimento circularmente forçado de uma pequena esfera de massa m anexada a uma haste fina e sem massa. O forçamento é feito através de outra haste (vertical) fixada no ponto P . Direita: Geometria do problema. Note que l não é mais uma variável limitada entre 0 e R .

3.2.2 Equação de movimento

A força de atrito que age sobre o corpo é $\mathbf{F} = -\mu mg \hat{v}$, onde μ é o coeficiente de atrito cinético entre o objeto e a mesa, m é a massa do objeto e g é o módulo da aceleração gravitacional local. Usamos isto para calcular o torque de atrito e colocamos estas informações dentro da segunda lei de Newton. Em consequência, a equação de movimento que encontramos após um certo esforço, nesta situação simplificada, é:

$$\ddot{\phi} - \frac{\omega^2}{H} \sin(\phi - \omega t) - \frac{\mu g}{Hd} \frac{\omega \cos(\phi - \omega t) - H\dot{\phi}}{\sqrt{\omega^2 + H^2\dot{\phi}^2 - 2\omega H\dot{\phi} \cos(\phi - \omega t)}} = 0, \quad (3.17)$$

onde $H = l/d$. Percebemos que a dinâmica $\phi(t)$ é qualitativamente igual à que descrevemos para o caso do disco com atrito viscoso, incluindo um transiente de rotação reversa antes de entrar em um regime perene de rotação normal (veja a figura 3.17).

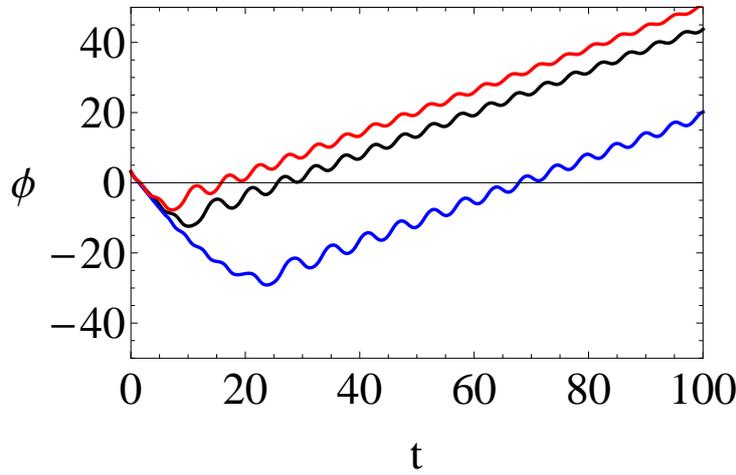


Figura 3.17 O ângulo ϕ em função do instante de tempo t para diferentes valores de $\mu g/d$. Curva superior: $\mu g/d = 1 \text{ s}^{-2}$; curva intermediária: $\mu g/d = 0.5 \text{ s}^{-2}$; curva inferior: $\mu g/d = 0.33 \text{ s}^{-2}$.

3.2.3 Em que casos as rotações reversas acontecem

O intervalo de ângulos iniciais centrado em π que possibilita a existência de rotações reversas se mostrou insensível à presença do atrito seco (figura 3.18). Similarmente, havíamos encontrado este mesmo resultado considerando atrito viscoso (rever figura 3.7).

Verificamos numericamente que o tempo de *flip* obedece à seguinte lei de potência:

$$t_f \sim (\omega\mu)^{-1}, \quad (3.18)$$

para pequenos valores de ω e μ . Perceba que o expoente que encontramos no caso do tempo de *flip* versus o coeficiente de arrasto b também foi -1 .

Apesar de muitos dos resultados neste caso com atrito seco serem similares aos que encontramos no caso com atrito viscoso, descobrimos que o tempo de *flip* depende do valor da frequência de forçamento ω , diferentemente do caso com atrito viscoso (ver figura 3.19).

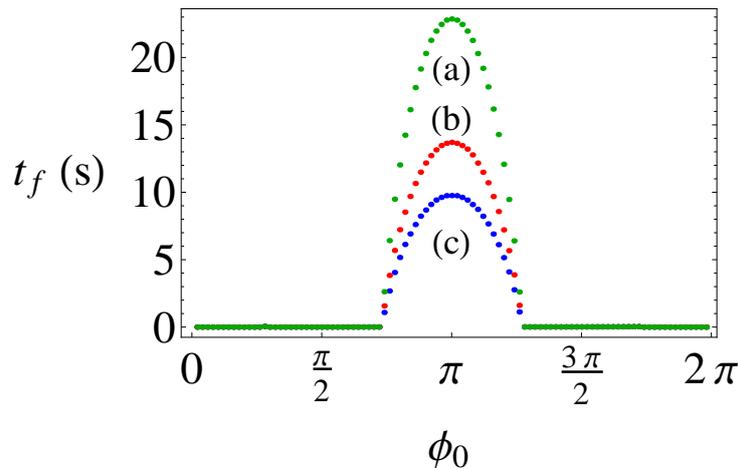


Figura 3.18 O tempo de *flip* como uma função da condição inicial ϕ_0 para diferentes valores de μ .

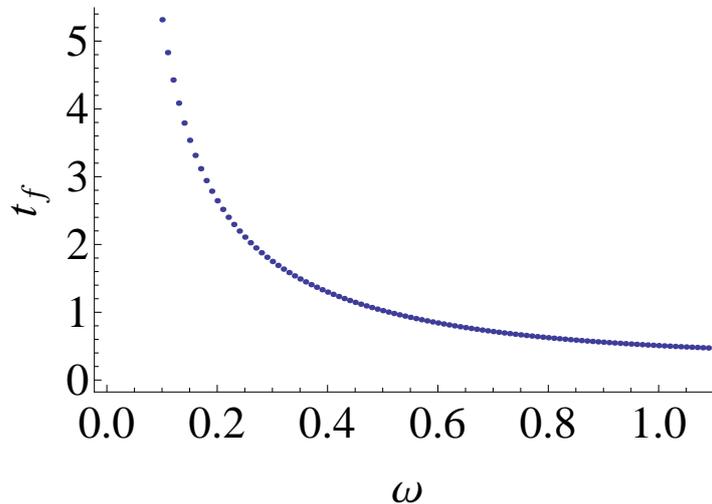


Figura 3.19 O tempo de *flip* como uma função da frequência de forçamento ω para $\mu = 0.3$. Comportamento tipo lei de potência para valores baixos de ω .

A relação 3.18 poderia ser um indicativo de que as rotações reversas de um objeto circularmente forçado poderiam ser totalmente suprimidas se usássemos um motor cuja frequência de forçamento fosse alta o suficiente. Entretanto, a coisa é um pouco mais complicada: quando acessamos valores mais altos de ω , o tempo de *flip* volta a subir (globalmente), indicando um valor ótimo de ω para o qual o tempo de *flip* é mínimo. Atualmente, estamos trabalhando para entender melhor este aspecto.

Toda esta riqueza quanto ao tempo de *flip* neste nosso caso com atrito seco talvez signifique que a dependência de t_f em ω se altere por causa da dependência da força de atrito F na velocidade v . Perceba que no caso com atrito viscoso $\mathbf{F} \sim \mathbf{v}$ e no caso com atrito seco $\mathbf{F} \sim \hat{v}$. Futuramente, investigaremos esta dependência, assim como a dependência entre H_c e μ .

Tendo em vista que neste capítulo apresentamos os principais resultados do mestrado, opta-

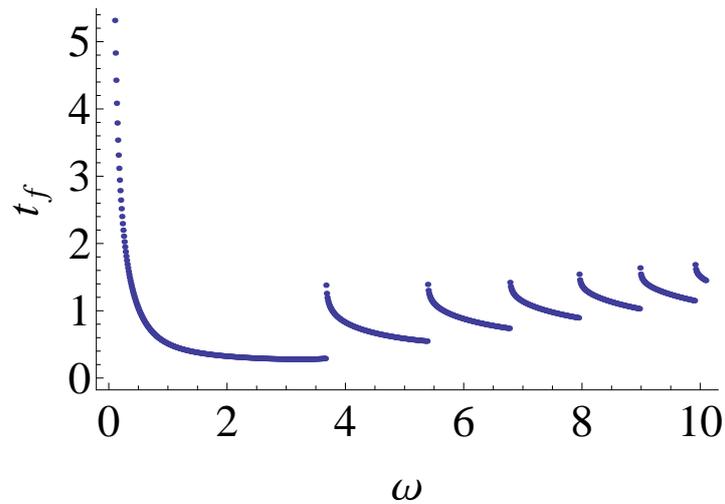


Figura 3.20 O tempo de *flip* como uma função da frequência de forçamento ω para $\mu = 0.3$. Para valores mais altos de ω , o tempo de *flip* volta a subir, indicando um valor ótimo de ω para o qual o tempo de *flip* é mínimo.

mos por resumir as suas conclusões no capítulo onde discutiremos as conclusões e perspectivas gerais desta dissertação (capítulo 4).

Conclusões e perspectivas

No capítulo 1, vimos o que é uma rotação reversa e em que situações na literatura essa nomenclatura foi utilizada para se referir a fenômenos similares. Em seguida, analisamos um problema na dinâmica de corpos rígidos sem forçamento e com a presença de atrito seco, focando no fenômeno do acoplamento entre o movimento translacional e rotacional de um disco rígido fino [12].

Já no capítulo 2, abordamos o problema de um corpo rígido circularmente forçado e sem atrito, chegando às condições iniciais e parâmetros que levam ao fenômeno da rotação reversa.

No capítulo principal (3), estudamos a influência de atrito molhado no movimento circularmente forçado de um disco. Nós encontramos que a dinâmica de giro do disco é dada por uma combinação (competição) entre um movimento uniforme e um movimento pendular amortecido e forçado (associado com um pêndulo imerso em um fluido viscoso e sujeito a um torque constante), veja Eq. 3.8. Enquanto no caso sem atrito as rotações reversas podem existir como regimes estacionários, para qualquer valor finito do amortecimento viscoso, este comportamento se torna um transiente e, portanto, tem um tempo de vida finito. Este transiente foi completamente caracterizado:

- Seu tempo de vida segue uma lei de potência $t_f \sim (b/m)^{-1}$;
- A presença de viscosidade reduz as possíveis configurações geométricas devido a diminuição de H_c , de acordo com uma q -exponencial;
- O intervalo de condições iniciais ϕ_0 que leva ao comportamento retrógrado é insensível ao valor de b .

O aparecimento de uma função q -exponencial (introduzida no contexto da física estatística por Tsallis [34]) descrevendo o comportamento de um parâmetro crítico em uma situação que não envolve explicitamente estatística é algo que pode ser considerado inesperado. Apesar dos fundamentos clássicos da mecânica estatística não-extensiva poderem ser formalmente entendidos via generalizações da equação de Langevin [35], onde o atrito viscoso exerce um papel essencial, não há relação evidente entre nosso resultado e este tipo de descrição microscópica. Uma possibilidade mais plausível é simplesmente atribuída à capacidade de q -exponenciais se ajustarem a uma ampla classe de funções decrescentes, como exemplificado no apêndice B. Se a Eq. (3.16) é um fato puramente matemático, como parece ser, ou se há uma explicação estatística mais profunda, é algo que ainda não se sabe. A mesma observação vale para o intervalo obtido para os valores do parâmetro q , que também aparece nos estudos estatísticos de sistemas complexos, e. g., na distribuição de aglomerados urbanos no Brasil e EUA[36].

Podemos dizer que a análise do problema com atrito seco indica que muitas das características qualitativas da dinâmica do problema com atrito independem dele ser seco ou viscoso. De forma mais geral, isto é um indício de que estes aspectos não são sensíveis à dependência específica da força de atrito com a velocidade. Como vimos, até alguns aspectos quantitativos são muito semelhantes, e.g, o tempo de *flip* vai com μ^{-1} , mesmo expoente que encontramos na relação entre o tempo de *flip* e o coeficiente de arrasto b no problema com atrito viscoso.

Uma outra perspectiva bastante interessante está na análise do problema do disco circularmente forçado em uma situação onde supomos que não há atrito mas que a mesa se encontra inclinada, dando a origem a efeitos gravitacionais. Descobrimos que este sistema pode entrar em regimes caóticos e fracamente caóticos, assim como em regimes de rotação reversa e rotação normal, a depender do ângulo de inclinação (ou seja, da gravidade efetiva) e do parâmetro geométrico H . De forma a investigar este fenômeno, estamos construindo um diagrama no qual indicamos os regimes possíveis em certas regiões do espaço de parâmetros (gravidade efetiva versus parâmetro geométrico H). De forma a analisar as condições que levam ao caos, além de encontrar a evolução temporal da separação entre trajetórias vizinhas, i.e., cálculo do expoente de Lyapunov, estamos gerando mapas de Poincaré para o problema. Um deles está apresentado na figura 4.1, mostrando uma situação em que o sistema é caótico.

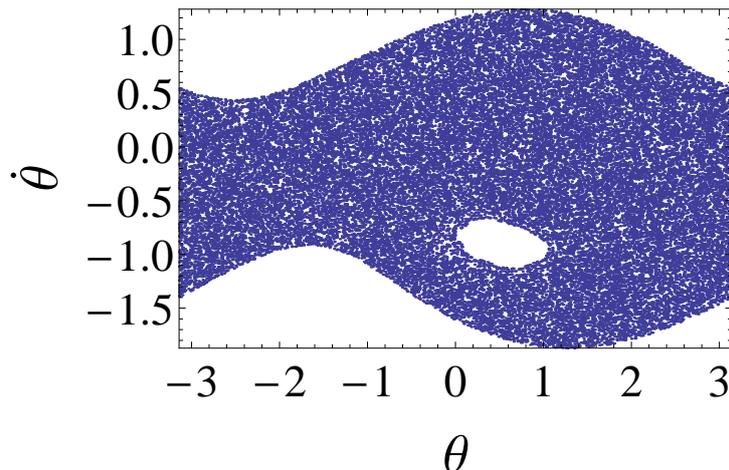


Figura 4.1 Mapa de Poincaré apresentando caos para o problema do disco circularmente forçado com gravidade. Foi usado um ângulo de inclinação de 30° , $H = 0.8$ e $\omega = 0.5$ rad/s. Note que usamos as variáveis θ e a sua derivada temporal, onde θ se relaciona com a variável angular original ϕ através de uma equação similar a que apresentamos nos capítulos anteriores, i.e., $\theta = \phi - \omega t + \text{constante}$.

Referências

- [1] A. C. Correia and J. Laskar, “The four final rotation states of Venus,” *Nature*, vol. 411, pp. 767–770, 2001.
- [2] A. C. M. Correia, J. Laskar, and O. N. de Surgy, “Long-term evolution of the spin of Venus: I. theory,” *Icarus*, vol. 163, no. 1, pp. 1–23, 2003.
- [3] NASA, “Solar system exploration,” 2013. <http://solarsystem.nasa.gov/planets/>.
- [4] W. Commons, “Venus globe,” 2005. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Venus_globe.jpg.
- [5] J. R. T. Seddon and T. Mullin, “Reverse rotation of a cylinder near a wall,” *Physics of Fluids (1994-present)*, vol. 18, no. 4, pp. 041703–041703–4, 2006.
- [6] C. SUN, T. O. M. MULLIN, L. VAN WIJNGAARDEN, and D. LOHSE, “Drag and lift forces on a counter-rotating cylinder in rotating flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 664, pp. 150–173, 2010.
- [7] F. Parisio, “Reverse rotations in the circularly driven motion of a rigid body,” *Phys. Rev. E*, vol. 78, p. 055601 (R), 2008.
- [8] P. de Castro and F. Parisio, “Role of viscous friction in the reverse rotation of a disk,” *arXiv*, p. 5, Sept. 2013.
- [9] K. Yoshida and K. Sato, “Characterization of reverse rotation in chaotic response of mechanical pendulum,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 33, no. 5, pp. 819–828, 1998.
- [10] S. DE CAMILLO, K. BROCKWELL, and W. DMOCHOWSKI, “Test Results Comparing the Effect of Reverse Rotation on Offset Pivot Journal Bearing Pad Temperatures,” *Tribology Transactions*, vol. 49, no. 3, pp. 305–314, 2006.
- [11] A. Merlen and C. Frankiewicz, “Cylinder rolling on a wall at low Reynolds numbers,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 685, pp. 461–494, 2011.
- [12] Z. Farkas, G. Bartels, T. Unger, and D. E. Wolf, “Frictional coupling between sliding and spinning motion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 248302, 2003.

- [13] P. D. Weidman and C. P. Malhotra, “Regimes of terminal motion of sliding spinning disks,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 264303, 2005.
- [14] P. D. Weidman and C. P. Malhotra, “On the terminal motion of sliding spinning disks with uniform Coulomb friction,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 233, no. 1, pp. 1–13, 2007.
- [15] W. Commons, “Rio de janeiro 2016 ferris wheel,” 2009. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rio_de_Janeiro_2016_Ferris_wheel_edit.jpg.
- [16] R. Carpenter, “A radar determination of the rotation of venus,” *The Astronomical Journal*, vol. 75, p. 61, 1970.
- [17] C. Seligman, “Retrograde motion,” 2014. <http://cseligman.com/text/sky/retrograde.htm>.
- [18] B. Lago and A. Cazenave, “Possible dynamical evolution of the rotation of venus since formation,” *The Moon and the planets*, vol. 21, no. 2, pp. 127–154, 1979.
- [19] A. R. Dobrovolskis, “Atmospheric tides and the rotation of venus ii. spin evolution,” *Icarus*, vol. 41, no. 1, pp. 18–35, 1980.
- [20] M. Shen and C. Zhang, “Dynamical evolution of the rotation of venus,” *Earth, Moon, and Planets*, vol. 43, no. 3, pp. 275–287, 1988.
- [21] J. McCue and J. Dormand, “Evolution of the spin of venus,” *Earth, Moon, and Planets*, vol. 63, no. 3, pp. 209–225, 1993.
- [22] S. W. Bougher, D. M. Hunten, and R. J. Phillips, *Venus II: geology, geophysics, atmosphere and solar wind environment*. University of Arizona Press, 1997.
- [23] M. Abramowitz and I. Stegun, “Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs and mathematical tables,” *Applied mathematical series. National Bureau of Standards*, no. 55, 1965.
- [24] G. Bartels, *Mesosopic Aspects of Solid Friction*. PhD thesis, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Physik, 2006.
- [25] L. J. Cummings and S. L. Waters, “Tissue growth in a rotating bioreactor. Part II: fluid flow and nutrient transport problems.,” *Mathematical medicine and biology : a journal of the IMA*, vol. 24, pp. 169–208, 2007.
- [26] L. J. Cummings, N. B. E. Sawyer, S. P. Morgan, F. Rose, and S. L. Waters, “Tracking large solid constructs suspended in a rotating bioreactor: A combined experimental and theoretical study,” *Biotechnology and Bioengineering*, vol. 104, no. 6, pp. 1224–1234, 2009.

- [27] U. of Oxford, “Tissue engineering,” 2014. <http://www.maths.ox.ac.uk/groups/ociam/research/biologymedicine/tissue-engineering>.
- [28] P. Couillet, J. M. Gilli, M. Monticelli, and N. Vandenberghe, “A damped pendulum forced with a constant torque,” *American Journal of Physics*, vol. 73, no. 12, 2005.
- [29] G. L. Baker, J. a. Blackburn, and K. S. Krane, “The Pendulum: A Case Study in Physics,” *Physics Today*, vol. 59, p. 52, 2006.
- [30] S. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Perseus Books Group, 2001.
- [31] F. Pedaci, Z. Huang, M. van Oene, S. Barland, and N. H. Dekker, “Excitable particles in an optical torque wrench,” *Nature Physics*, vol. 7, no. 3, pp. 259–264, 2010.
- [32] F. Tricomi, “Integrazione di un’equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica,” *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*, vol. 2, no. 1, pp. 1–20, 1933.
- [33] G. A. Leonov, *Mathematical Problems of Control Theory: An Introduction*. World Scientific, 2001.
- [34] C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 52, no. 1-2, pp. 479–487, 1988.
- [35] C. Beck, “Dynamical Foundations of Nonextensive Statistical Mechanics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, no. 18, p. 180601, 2001.
- [36] L. C. Malacarne, R. S. Mendes, and E. K. Lenzi, “q-exponential distribution in urban agglomeration,” *Phys. Rev. E*, vol. 65, no. 1, p. 17106, 2001.
- [37] S. R. Dahmen, Z. Farkas, H. Hinrichsen, and D. E. Wolf, “Macroscopic diagnostics of microscopic friction phenomena,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, p. 66602, June 2005.
- [38] S. R. Dahmen, H. Hinrichsen, A. Lysov, and D. E. Wolf, “Coupling between static friction force and torque for a tripod,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2005, no. 03, p. P03004, 2005.
- [39] M. Dutt and R. P. Behringer, “Effects of surface friction on a two-dimensional granular system: Cooling bound system,” *Phys. Rev. E*, vol. 70, no. 6, p. 61304, 2004.
- [40] M. Einax, M. Schulz, and S. Trimper, “Friction and second-order phase transitions,” *Phys. Rev. E*, vol. 70, no. 4, p. 46113, 2004.
- [41] T. C. Halsey, “Mechanics: Friction in a spin,” *Nature*, vol. 424, no. 6952, pp. 1005–1006, 2003.

- [42] E. T. Jensen and M. R. A. Shegelski, “The motion of curling rocks: Experimental investigation and semi-phenomenological description,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 82, no. 10, pp. 791–809, 2004.
- [43] S. L. Waters, L. J. Cummings, K. M. Shakesheff, and F. R. A. J. Rose, “Tissue growth in a rotating bioreactor. Part I: mechanical stability,” *Mathematical medicine and biology : a journal of the IMA*, vol. 23, pp. 311–337, 2006.
- [44] D. E. WOLF, S. R. DAHMEN, and H. HINRICHSEN, “SOLID FRICTION: SPINNING AT THE ONSET OF SLIDING,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 21, no. 23n24, pp. 4158–4163, 2007.
- [45] N. V. Brilliantov and T. Pöschel, “Rolling friction of a viscous sphere on a hard plane,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 42, no. 5, p. 511, 1998.
- [46] T. Pöschel, T. Schwager, and N. V. Brilliantov, “Rolling friction of a hard cylinder on a viscous plane,” *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 169–174, 1999.

Cálculos da força de atrito viscoso e do torque de atrito viscoso que agem sobre o disco

Neste apêndice faremos um breve desenvolvimento dos resultados para a força de atrito viscoso e para o torque de atrito viscoso que agem sobre o disco.

Inicialmente, vamos calcular a força de atrito viscoso. Da equação 3.3 e dos vínculos apresentados, temos que:

$$\mathbf{F} = -\frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \dot{\mathbf{s}} \rho d\alpha d\rho = -\frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}) \rho d\alpha d\rho \quad (\text{A.1})$$

onde lembramos que $\dot{\mathbf{r}}$ e $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ são vetores. Podemos separar o lado direito da equação em duas integrais:

$$\mathbf{F} = -\frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \dot{\mathbf{r}} \rho d\alpha d\rho - \frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \dot{\boldsymbol{\rho}} \rho d\alpha d\rho . \quad (\text{A.2})$$

Sem grandes dificuldades, podemos ver que a primeira integral resulta em $-b\dot{\mathbf{r}}$. Isso acontece porque o vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ do centro de massa do disco não depende de algum elemento de área sobre o disco e, portanto, pode sair da integral. Dessa forma, nos resta mostrar que a segunda integral se anula.

De fato, podemos observar que

$$\int_{disco} \dot{\boldsymbol{\rho}} \rho d\alpha d\rho \quad (\text{A.3})$$

pode ser escrita como

$$\int_{disco} \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\rho} \rho d\alpha d\rho , \quad (\text{A.4})$$

onde usamos o fato de que $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\rho}$. Já que o vetor velocidade angular do disco $\dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$ não depende de algum elemento de área sobre o disco, ele pode sair da integral. Ficamos com

$$\dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \times \int_{disco} \boldsymbol{\rho} \rho d\alpha d\rho , \quad (\text{A.5})$$

Esta última integral representa a soma de todos os vetores $\boldsymbol{\rho}$ sobre o disco. Para cada um deles, haverá um correspondente de mesmo módulo, mesma direção e de sentido contrário, já que estamos fazendo uma integral sobre um disco. Deste modo, a soma vetorial de todos estes vetores é zero, o que nos leva ao resultado que queríamos demonstrar: $\mathbf{F} = -b\dot{\mathbf{r}}$.

Feito isso, podemos usar argumentos semelhantes para encontrar a expressão para o torque de atrito viscoso que age sobre o disco. Devemos mostrar que:

$$\mathbf{T} = -\frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} \rho d\alpha d\rho = -b\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} - \frac{bR^2}{2} \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.6})$$

Com o uso do vínculo $\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{s}$, chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -\frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rho d\alpha d\rho - \frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \rho d\alpha d\rho \\ & - \frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \boldsymbol{\rho} \times \dot{\mathbf{r}} \rho d\alpha d\rho - \frac{b}{\pi R^2} \int_{disco} \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \rho d\alpha d\rho, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde a primeira integral é o primeiro termo do nosso resultado, as duas integrais seguintes se anulam pelo argumento de que a soma de todos os vetores $\boldsymbol{\rho}$ sobre o disco se anula e a última integral é o segundo termo do nosso resultado (que pode ser obtido lembrando que $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\rho}$). Assim, chegamos a expressão que queríamos demonstrar para o torque do atrito viscoso.

APÊNDICE B

Artigo: O papel do atrito viscoso na rotação reversa de um disco

Neste apêndice é apresentado o artigo intitulado "*Role of viscous friction in the reverse rotation of a disk*", submetido ao periódico *Physical Review E* em 2013. O artigo encontra-se atualmente publicado no serviço *e-print* arXiv e pode ser localizado pelo endereço <http://arxiv.org/abs/1309.6161>.

Role of viscous friction in the reverse rotation of a disk

Pablo de Castro* and Fernando Parisio†

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901, Recife, Pernambuco, Brazil

The mechanical response of a circularly-driven disk in a dissipative medium is considered. We focus on the role played by viscous friction in the spinning motion of the disk, especially on the effect called reverse rotation, where the intrinsic and orbital rotations are antiparallel. Contrary to what happens in the frictionless case, where steady reverse rotations are possible, we find that this dynamical behavior may exist only as a transient when dissipation is considered. Whether or not reverse rotations in fact occur depend on the initial conditions and on two parameters, one related to dragging, inertia, and driving, the other associated with the geometric configuration of the system. The critical value of this geometric parameter (separating the regions where reverse rotation is possible from those where it is forbidden) as a function of viscosity is well adjusted by a q-exponential function.

PACS numbers: 45.20.dc, 45.40.Bb, 81.40.Pq

I. INTRODUCTION

Classical mechanics of simple, low dimensional and integrable systems can be surprisingly rich, provided that non-linearity is present. These systems, although less complex than the chaotic ones, hardly allow for full analytical treatments and may present behaviors like reverse rotations, excitability, transients and hysteresis, thus, constituting an important resource in basic physics. Not less importantly, for obvious reasons, all sorts of machinery in industries work in non-chaotic regimes, however, displaying a variety of complex dynamical effects arising from non-linearities.

One class of problems that has been often considered in the literature is that of rigid body dynamics on flat surfaces. Farkas et al have explored the subtle connection between translational and spinning motions of a free disk (of radius R) moving on a surface with Coulombian friction [1]. They showed, e. g., that the terminal translational (v) and rotational (Ω) velocities, vanish simultaneously, and that the ratio $\epsilon = v/R\Omega$ always tends to ≈ 0.653 in the imminence of stopping, no matter its initial value (see also [2, 3]). Complementarily, the motion of driven disks sliding on frictionless surfaces has been shown to be quite non-trivial regarding a dynamical behavior called reverse rotation [4].

The position of a rigid body in two dimensions is completely characterized by the location of its center of mass (c.m.) and by the angle between some reference line marked on the body and an arbitrary coordinate axis. A reverse rotation develops when the c. m. follows a bounded trajectory in, say, the clockwise direction and, at the same time, the intrinsic angular degree of freedom evolves counterclockwise, or vice-versa. Thus, a reverse rotation is characterized by antiparallel orbital and spin rotations. Famous examples of such a phenomenon are

the reverse, or retrograde, rotations of Venus [5–7] and Uranus [5]. Behaviors belonging to the same class can be found in the dynamics of rolling cylinders immersed in viscous fluids [8–10] and in the chaotic response of a damped pendulum parametrically excited [11].

From a more applied point of view, reverse rotations may appear, being potentially deleterious, in bearings of journal machinery [12]. They also seem to be relevant in the problem of biological tissue production, where a commonly used method to generate tissue is the rotating vessel bioreactor. It consists of a cylindrical container rotating about its longitudinal axis with constant angular speed. A porous disk is seeded with cells to be cultured, placed within the bioreactor which, in turn, is filled with a nutrient-rich medium. The rotating fluid keeps the growing tissue construct suspended against gravity and leads to intricate dynamical regimes. Various studies on the orbits described by the disk exist [13, 14]. Although this system is not identical to the one we study here, it is clear that a better understanding of the regimes of intrinsic rotation, in the spirit of the present work, is needed. For example, the existence of a transient between two distinct spinning regimes, like the one we find here, would produce “topological” defects in the tissue.

In this work we consider both, driving and friction, simultaneously. Our main goal is to understand how the presence of viscous friction affects the regimes of reverse rotation that have been shown to exist for circularly-driven disks in the non-dissipative case [4]. Hereafter we refer to the regime where both angular momenta are parallel as normal or prograde.

II. SYSTEM AND EQUATION OF MOTION

Our model system is depicted in Fig. 1. It consists of a uniform disk of mass m and radius R , initially resting on a horizontal surface. The system is submitted to an external horizontal force, provided by a driving mechanism, through a thin rod attached to a fixed point (P) on the disk, around which the whole body can rotate freely. The

* pablo@df.ufpe.br

† parisio@df.ufpe.br

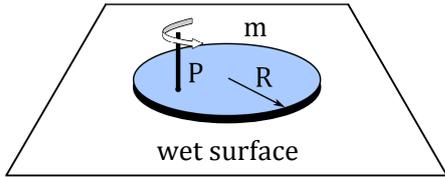


FIG. 1: (color online) Pictorial representation of the proposed model system

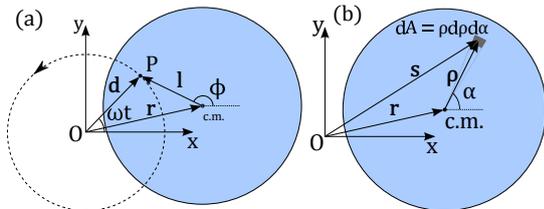


FIG. 2: (color online) Schematic upper view of the system where the relevant geometric quantities are depicted (a) and integration variables for the calculation of the viscous force and torque (b).

driving apparatus takes the disk from rest and makes the point P follow a uniform circular trajectory of radius d around a fixed origin (O) with angular frequency ω [see Fig. 2 (a)]. For definiteness we assume the rotation to be counterclockwise and, without loss of generality, we use a coordinate system for which the point P lies in the positive x -axis at $t = 0$.

For later times we denote the position vector of P by \mathbf{d} and the vector locating the c. m. by \mathbf{r} . Since the disk is assumed to be perfectly rigid, P is always a distance l apart from c.m. The relative position of these two points is given by the vector \mathbf{l} , as shown in Fig. 2 (a). Finally, the angle between the x -axis and the line connecting c.m. and P is denoted by ϕ . The variables \mathbf{r} and ϕ completely specify the position of the disk, while ω reflects the strength of driving.

In a previous work the scenario of negligible friction was assumed [4]. Here we remove this restriction by considering that a thin layer of fluid exists between the disk and the horizontal surface, giving rise to wet friction. This amounts to viscous forces and torques that are proportional to the local relative velocity between the surfaces.

A. Viscous friction

The overall viscous force acting on the disk is given by the surface integral

$$\mathbf{F} = -\frac{b}{\pi R^2} \int_{disk} \dot{\mathbf{s}} \rho d\alpha d\rho, \quad (1)$$

where b is the drag constant and \mathbf{s} is the vector that locates the element of area $\rho d\alpha d\rho$ [see fig 2(b)]. Taking

into account the constraints $\mathbf{r} + \mathbf{l} = \mathbf{d}$ and $\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{s}$, the result reduces to that of a rectilinear, irrotational, motion of the disk: $\mathbf{F} = -b\dot{\mathbf{r}}$. In addition, the forces on each element of area give rise to a torque:

$$\mathbf{T} = -\frac{b}{\pi R^2} \int_{disk} \mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} \rho d\alpha d\rho = -b\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} - \frac{bR^2}{2} \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2)$$

where ϕ is the angle between the vector \mathbf{l} and the x -axis, and $\hat{\mathbf{z}}$ is the unit vector perpendicular to the plane of motion. Plugging these expressions in Newton's second law and eliminating the c. m. degrees of freedom we get

$$I_P \ddot{\phi} + b \left(l^2 + \frac{R^2}{2} \right) \dot{\phi} - mdl\omega^2 \sin(\phi - \omega t) - bdl\omega \cos(\phi - \omega t) = 0, \quad (3)$$

where I_P is the inertia moment relative to the pivotation point P . By writing

$$\theta = \phi - \omega t + \arctan\left(\frac{b}{m\omega}\right) + \pi, \quad (4)$$

the equation of motion considerably simplifies to

$$\mathcal{S} \frac{\ddot{\theta}}{\omega^2} + \frac{\dot{\theta}}{\omega} + \frac{\sqrt{\mathcal{S}^2 + 1}}{H} \sin \theta + 1 = 0, \quad (5)$$

where the parameter

$$H = \frac{L^2 + 1/2}{DL}, \quad (6)$$

with $D = d/R \in [0, \infty)$ and $L = l/R \in [0, 1]$, contains all the relevant information on the scale-free geometry of the system, and $\mathcal{S} = m\omega/b$ gives the relative strength of inertia and driving versus viscous forces on the disk. Although in our calculations we will use Eq. (5), it is possible to obtain a formally simpler equation by using the dimensionless time $\tau = (\mathcal{S}\mathcal{A}/\omega)t$, with $\mathcal{A} = H^{1/2} (\mathcal{S}\sqrt{\mathcal{S}^2 + 1})^{-1/2}$. The resulting two-parameter differential equation reads

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \mathcal{A} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta + \mathcal{S}\mathcal{A}^2 = 0. \quad (7)$$

The cost is that \mathcal{A} is an involved mixture of geometry, inertia, driving and viscosity. From Eq. (7) we see that our problem can be mapped into the dynamics of a pendulum immersed in a fluid and subjected to a constant torque [15]. It is interesting to note that a number of quite distinct physical systems are, in some regimes, described by the very equation (7). Examples are the dynamics of the phase difference between the collective wave functions through a Josephson junction [16, 17], the excitable behavior of microparticles under the action of an optical torque wrench [20], and alternate currents in electrical devices [18, 19]. It is, however, important to note two points. First, the physical quantity we are interested in, which defines reverse or normal rotations, is ϕ and not

θ . Second, to completely characterize the problem, we must provide physically valid initial conditions. In the present case it is natural to assume that, at first, the disk is resting on the horizontal surface, and at a certain instant, say $t = 0$, the driving apparatus is turned on. If the driving mechanism is robust enough, we can assume that this initial dynamics is impulsive, that is, the pivotation point is taken from rest to the final constant angular velocity in a time interval much shorter than any other time scale in the problem. Under these conditions it has been shown in [4] that, given the initial angle of the static disk, the angular velocity it acquires immediately after the driving apparatus is switched on is

$$\dot{\phi}_0 = \frac{\omega}{H} \cos \phi_0. \quad (8)$$

Replacing this relation in the equation of motion we also find that $\ddot{\phi}_0 = (\omega^2/H) \sin \phi_0$. In the original derivation the friction was not taken into account. This, however, does not affect the above result due to the hypothesis of impulsivity.

To illustrate the restrictions imposed by the previous relation we remark that the system studied in [15] presents the interesting behavior of excitability, namely, the existence of a dynamical regime with sharp spikes in $\theta(t)$. The authors observe this phenomenon for a condition that, in our notation, reads $\omega > (b/m)\sqrt{H^2 - 1}$ with initial condition $\dot{\theta}_0 = 0$, and arbitrary θ_0 . Replacing this condition in (8) we get $H = \cos \phi_0$, which implies $H \leq 1$, leading to a negative argument in the square root. Therefore, our system, does not present the excitability observed in [15] due to the initial conditions we are concerned with.

B. Limit cases

We start this subsection with a summary of the main conclusions obtained in the frictionless ($b = 0$) case [4]. It was found that a regime of perennial reverse rotations is possible for an interval of initial angles $\{\pi - \phi_B, \pi + \phi_B\}$ centered at π (the subscript B stands for ‘‘boundary’’), provided that the geometrical constraint

$$H < 0.793 \quad (9)$$

is satisfied. In fact, it can be derived from Eqs. (5) and (11) of [4] that, fixed the angle ϕ_B , the critical value of H below which reverse rotations occur can be determined by the solution of the transcendental equation

$$K\left(\frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{H^2 + 2H + \cos^2 \phi_B}}\right) = \frac{\pi}{2H} \sqrt{H^2 + 2H + \cos^2 \phi_B}, \quad (10)$$

where K denotes the complete elliptic function of the first kind. For $\phi_B = 0$, the only angle leading to reverse dynamics is $\phi_0 = \pi$. In this case the above equation reduces to $K(2\sqrt{H}/(H+1)) = \pi(H+1)/2H$, whose non-trivial

solution is $H_c = 0.793$. For all other situations, where $\phi_B \neq 0$, H_c assumes smaller values. For $H > 0.793$ no initial condition may develop a reverse rotation. Note that this necessary and sufficient condition does not depend on the driving frequency ω , on the mass m and on the absolute values of the lengths d , l , and R . Initial conditions that do not satisfy the previous requirements, either lead to a permanent regime of normal rotations or, in the boundary between the two regimes, to an oscillatory motion with a vanishing average of ϕ as time goes by (see figure 3 of [4]).

In the opposite limit $b \rightarrow \infty$, Eq. (5) becomes

$$\dot{\theta} + \frac{\omega}{H} \sin \theta + \omega = 0, \quad (11)$$

whose fixed points are given by $\sin \theta^* = -H$ and $\cos \theta^* = \pm\sqrt{1 - H^2}$. Let us summarize the three qualitatively distinct solutions of this equation [17]. (i) If $H < 1$ we have two fixed points in the interval $[0, 2\pi)$, the stable one having $\cos \theta^* > 0$, and no oscillation. (ii) For $H = 1$ we have a saddle-node bifurcation with no oscillation for any finite time. (iii) If $H > 1$ there are no fixed points and the system oscillates with a period given by

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - H^{-2}}} \geq \frac{2\pi}{\omega}. \quad (12)$$

The important point is that, by inspecting Eq. (4), we note that, in any case, $\phi(t)$ is an increasing function of time, on average, thus, presenting normal rotations only.

Therefore, we conclude that while in the frictionless case reverse rotations may occur, they are forbidden in the high viscosity limit. The question arises what happens in the midway?

III. ARBITRARY VISCOSITY

Although a closed analytical solution for our problem with arbitrary viscosity is not available, we can establish the stationary points and their stability properties before going into numerical solutions. By setting $\dot{\theta} = 0$ and $\theta = 0$ in (5) we obtain stable fixed points satisfying

$$\theta^* = -\arcsin\left(\frac{H}{\sqrt{S+1}}\right) \pm 2n\pi, \quad (13)$$

with $n = 0, 1, 2, \dots$. The unstable stationary points are given by $\pi - \theta^*$. Our numerical investigation for intermediate values of the parameter b/m begins with some typical trajectories in the plane $\theta - \dot{\theta}$. We employed the auxiliary variables directly because only in terms of them the equation of motion does not contain time explicitly. In Fig. 3 we show a phase-space diagram for three initial conditions $\theta_0 \approx 2\pi$ ($\phi_0 = \pi$) for the triangle, $\theta_0 \approx \pi$ ($\phi_0 = 0$) for the square, and $\theta_0 = 2\pi - \pi/8$ ($\phi_0 = \pi - \pi/8$) for the circle, with the corresponding initial velocities given by relation (8), represented by the dashed line in the diagram. The other parameters are

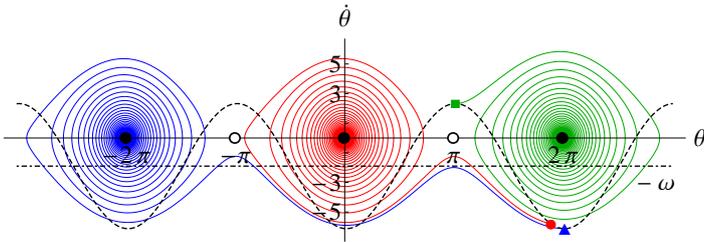


FIG. 3: (color online) Phase-space trajectories for three different initial conditions. More details in the text.

as follows, $b/m = 0.09$, $\omega = 1.9$, and $H = 0.45$. This leads to $\sin \theta^* = -0.021$, $\theta^* \approx -1, 2^\circ$. The horizontal dashed-dotted line represents the negative of the driving angular frequency ω . Recall that, to have a reverse rotation ($\langle \dot{\phi}(t) \rangle < 0$ over a time scale of $2\pi/\omega$), we must get $\langle \dot{\theta}(t) \rangle < -\omega$ over a time scale of $2\pi/\omega$. We note that the first initial condition immediately leads to normal rotation, for the second condition a reverse behavior develops during a single cycle, while the third initial condition presents two cycles of reverse rotation before spiraling to the leftmost stable fixed point.

Going to the physical variable ϕ , the first important thing to note is as follows. For every initial condition that started to develop a reverse rotation, after some time, the spin invariably flips to a regime of prograde rotation for any $b \neq 0$. This can be understood by noting that the oscillations in $\phi(t)$ eventually fade out, with $\phi \rightarrow 0$ for sufficiently long times, an effect observed in all investigated configurations. When this regime is reached the equation of motion becomes identical to Eq. (11), for which reverse rotations have been shown to be absent. Therefore, at some moment reverse dynamics is replaced by normal rotation, the smaller the drag the longer the flip time, t_f , which is determined by the global minimum of $\phi(t)$. In fig. 4 we show ϕ as a function of t for $\omega = 0.2$ rad s^{-1} , and initial condition $\phi_0 = \pi$ (the most favorable to reverse rotations). The first curve (a) occurs for $H = 1.0$ (no reverse motion) and $b/m = 0.008$ s^{-1} . The three other curves refer to $H = 0.3$ with distinct values of the drag parameter: $b/m = 0.014$ s^{-1} (b), $b/m = 0.008$ s^{-1} (c), and $b/m = 0.004$ s^{-1} (d). We, therefore, conclude that no steady reverse rotation is allowed for any finite value of b/m . This regime, however, can exist as a transient that lasts longer for smaller values of viscosity.

The life-time of reverse rotations must be null in the limit of high viscosity and has to diverge in the frictionless regime. Dimensional analysis leads us to infer that, if this divergence is described by a power law, then we should have $t_f \sim \omega^{\gamma-1} (b/m)^{-\gamma}$. In Fig. 5 we record t_f as a function of b/m in a log-log plot. The discontinuities happen when the global minimum jumps between neighbor local minima. Despite these jumps, a linear backbone is noticeable in a broad range of viscosity values, and a power-law divergence in the low viscosity limit is clear.

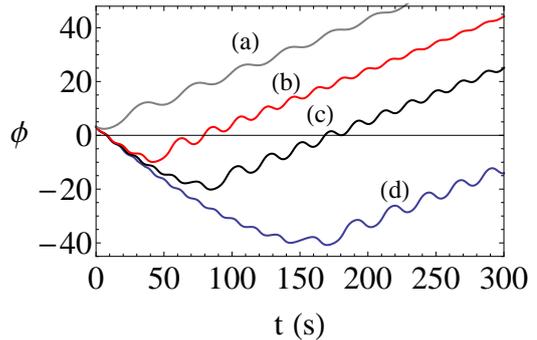


FIG. 4: (color online) The angle ϕ as a function of t for $\omega = 0.2$ rad s^{-1} , and $\phi_0 = \pi$. Curve (a) presents a prograde dynamics, as expected, since $H = 1.0 > H_c$. For $H = 0.3$ and $b/m = 0.014$ s^{-1} (b), $b/m = 0.008$ s^{-1} (c), and $b/m = 0.004$ s^{-1} (d), reverse rotations are observed.

The obtained relation is

$$t_f \sim \left(\frac{b}{m}\right)^{-1} \quad (14)$$

which we found to be asymptotically independent of ω [21]. The variation of the drag parameter has a much less dramatic effect on the regime of normal rotations, the only difference being the rate at which the amplitude of the oscillations in $\phi(t)$ goes to zero.

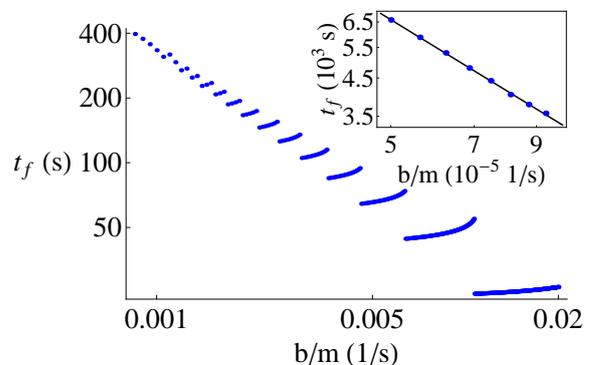


FIG. 5: (color online) Log-log plot of the flip time t_f , as a function b/m , showing a power-law behavior in the regime of low viscosity. The discontinuities are due to the passage of the global minimum through consecutive local minima. The inset depicts a region of much weaker viscosity.

In spite of this, we verified that the initial conditions that lead to reverse rotations in the case of vanishing viscosity are the same that give rise to the reverse transient, the interval $\{\pi - \phi_B, \pi + \phi_B\}$ being insensitive to the value of b . This is expected due to the impulsive nature of the initial energy input. In addition, due to relation (14) we suspected that the dependence of t_f with ϕ_0 might be universal with respect to the dimensionless

time $(b/m)t_f$. This is indeed the case, as figure 6 shows for different values of b/m . In the inset we plot the uncollapsed curves of t_f alone against ϕ_0 . We used a high angular velocity, $\omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$, in order to suppress oscillations and make the plot clearer. For lower values of ω the results are qualitatively the same and fig. 6 would represent the envelope of the actual plots. The other parameters employed are $H = 0.3$, and $b/m = 0.1 \text{ s}^{-1}$ (a), $b/m = 0.2 \text{ s}^{-1}$ (b), $b/m = 0.5 \text{ s}^{-1}$ (c), $b/m = 1.0 \text{ s}^{-1}$ (d). The invariant value of ϕ_B is approximately $3\pi/5$

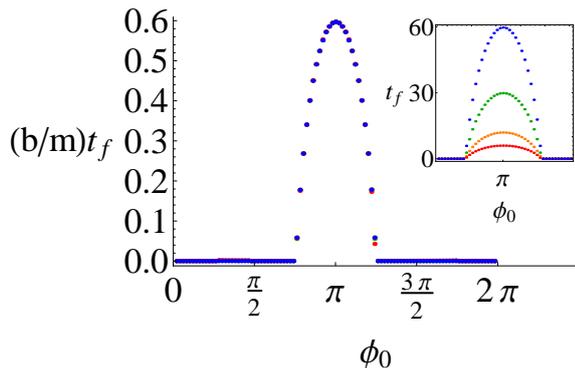


FIG. 6: (color online) Dimensionless flip time $(b/m)t_f$ as a function of the initial condition ϕ_0 for four different values of b/m . The plots completely overlap. The inset shows the uncollapsed curves of t_f against ϕ_0 . Further details in the text.

We now turn our attention to the geometric parameter defined in (6). In the absence of friction, we found that reverse rotations are possible only if $H < 0.793 = H_c(0)$, according to (9). Although perennial reverse rotations are not present for $b \neq 0$, one may ask which values of H allow for transient reverse behavior. In Fig. 7 we display the maximum value of H below which reverse dynamics can occur as a function of $b/m\omega$, with $\phi_0 = \pi$. Interestingly enough, the numerical data are very well described by a q-exponential function :

$$H_c(b/m\omega) = H_c(0) \left[1 - \lambda(1-q) \left(\frac{b}{m\omega} \right) \right]^{1/(1-q)}, \quad (15)$$

with $q = 1.7$ and $\lambda = 3.47$. When ϕ_0 departs from π , both, the values of q and $H_c(0)$ tend to decrease. For $\phi_0 = 2.5$, e.g., we get $q \approx 1.5$ and $\lambda \approx 2.23$, while $H_c(0)$ considerably drops to 0.40. The values of $H_c(0)$ quickly become very restrictive to reverse motion as, for example, $\phi_0 = 2.0$, leading to $H_c(0) \approx 0.09$. For $L = 0.5$, such a condition on H would be satisfied only for $D \geq 17$, hindering in practice the occurrence of reverse rotations. We, thus, see that increasing wet friction not only decreases the life time of reverse rotations, but also reduces the region in the space of parameters L and D for which they are possible.

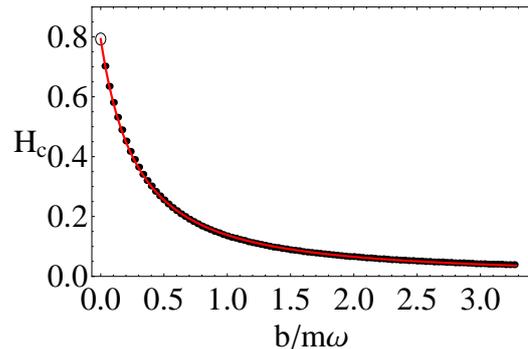


FIG. 7: (color online) Critical geometric parameter H_c versus the dimensionless variable $S^{-1} = b/m\omega$. H_c falls off following a q-exponential function with $q = 1.7$ for $\phi_0 = \pi$. The open circle represents $H_c = 0.793$.

IV. CONCLUSIONS

In this work we studied the influence of wet friction in the circularly driven motion of a disk. We found that the spinning dynamics of the disk is given by a combination (competition) between a uniform motion and a pendular motion (associated with a pendulum immersed in a viscous fluid and acted upon by a constant torque), see Eq. 7. While in the frictionless case reverse rotations may exist in steady regimes, for any finite value of viscous damping, this behavior becomes a transient, thus, having a finite life time. This transient have been completely characterized: (i) Its life time follows a power law with $t_f \sim m/b$; (ii) the presence of viscosity reduces the possible geometric configurations that lead to rotations that are initially reverse due to the fall of H_c , according to a q-exponential; (iii) however, the interval of initial conditions ϕ_0 that leads to retrograde behavior is insensitive to the value of b . In fact the whole shape of the function $(b/m)t_f(\phi_0)$ is independent of the dragging. A natural extension of the present work is to consider the analogous situation with Coulombian (dry) friction. This leads to a more complex equation of motion involving elliptic functions of intricate arguments and requires a full numerical treatment.

Regarding the appearance of a q-exponential (introduced in the context of statistical physics by Tsallis [22]) describing the behavior of a critical parameter in a situation that does not explicitly involve statistics, it might look unexpected. Although the classical foundations of non-extensive statistical mechanics may be formally understood via generalizations of the Langevin equation [23], where viscous friction plays an essential role, one cannot easily relate our result to this kind of microscopic description. A more plausible possibility is simply attributed to the ability of q-exponentials to fit a broad class of decreasing functions, as exemplified in the appendix. Whether Eq. (15) is a pure mathematical fact, as we strongly believe, or has a deeper statistical expla-

nation, is a matter to be investigated. The same observation is valid for the range of values we obtained for q , which also appears in the statistical studies of complex systems, e. g., in the distribution of urban agglomerates in Brazil and USA [24].

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank Tiago Araújo and Victor Pedrosa for many stimulating discussions on this work. Financial support from Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), and Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) (Grant No. APQ-1415-1.05/10) is acknowledged.

Appendix: q-exponentials without statistics

In this appendix we exemplify how q-exponentials may appear, quite naturally, in problems that have no connection to statistical mechanics.

Suppose you have very little knowledge about a decreasing function $f(x)$, for instance, its value $f(0) \neq 0$ and its derivative $f'(0)$ at $x = 0$. In this poor scenario the best thing one can do to extrapolate the values assumed by $f(x)$ for $x \neq 0$ is to write

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x. \quad (\text{A.1})$$

How should we proceed if we are given one more, incremental piece of information, e. g., the value assumed by f at a different point $x = x_0$?

Let us take a seemingly circular approach, namely, to estimate (also to first order) the function $F(x) = [f(x)]^Q \approx \tilde{F}(x)$, and then to write $f(x) \approx [\tilde{F}(x)]^{1/Q} \equiv \tilde{f}(x)$. First we have

$$\tilde{F}(x) = F(0) + F'(0)x, \quad (\text{A.2})$$

with $F(0) = [f(0)]^Q$ and $F'(0) = Q[f(0)]^{Q-1}f'(0)$. That is

$$\tilde{F}(x) = [f(0)]^Q + Q[f(0)]^{Q-1}f'(0)x, \quad (\text{A.3})$$

which amounts to

$$\tilde{f}(x)/f(0) = \left[1 - Q \frac{|f'(0)|}{f(0)} x \right]^{1/Q}. \quad (\text{A.4})$$

The above expression is exactly the definition of the q-exponential:

$$\tilde{f}(x) = f(0) [1 - Q\lambda x]^{1/Q} = f(0) \exp_Q(-\lambda x), \quad (\text{A.5})$$

with $\lambda = |f'(0)|/f(0)$. Note that we only assumed that f is a steadily decreasing function of x . These observations

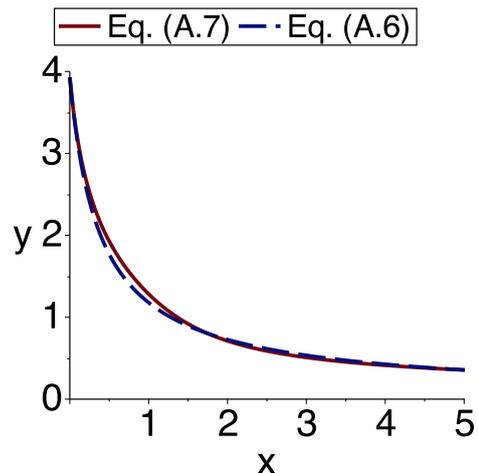


FIG. 8: (color online) Plots of $y = f(x)$ as given by (A.7) and of $y = \tilde{f}(x)$ as given by (A.6) with $Q = -1.162$.

would be mere curiosity if it weren't the fact that by expanding the previous expression to first order in x we get $\tilde{f}(x) = f(0) \exp_Q(-\lambda x) \approx f(0) + f'(0)x$, *no matter the value of Q* . So, we get a first order approximation at least as good as (A.1), with the difference that there is an adjustable parameter that can be used to improve the extrapolation, if one is given any extra information on $f(x)$.

As an illustration, consider the following game. Player \mathcal{A} picks a smooth decreasing function $f(x)$ and gives player \mathcal{B} three pieces of information, namely, $f(0) = 3.927$, $f'(0) = -0.2273$, and the extra datum $f(5) = 0.3561$. The objective of \mathcal{B} is to generate a good approximation to the actual function $f(x)$. If \mathcal{B} decides to use prescription (A.5), he gets

$$\tilde{f}(x) = 3.927 (1 - 0.0579 Qx)^{1/Q}. \quad (\text{A.6})$$

Now \mathcal{B} has to choose a value of Q . He makes a very simple decision, adjusting Q so that $\tilde{f}(5) = f(5)$, which leads to $Q = -1.162$. After that, \mathcal{A} reveals the true function f :

$$f(x) = \frac{\arctan(1-x) + \pi}{\sqrt{1+5x}}, \quad (\text{A.7})$$

which is indeed compatible with the information provided to \mathcal{B} : $f(0) = 5\pi/4$, $f'(0) = -1/2 - 25\pi/8$, and $f(5) = [\arctan(-4) + \pi]/\sqrt{26}$. The plots of $f(x)$ and $\tilde{f}(x)$ are shown in figure 8, which corresponds to a quite reasonable result for such a rough procedure. The reader is suggested to choose her (his) own function and proceed analogously. The results are poor only if f decreases faster than $\exp(-\alpha x)$ or if the function has the shape of a bell (because in this case one should use a q-Gaussian). Although our reasoning does not formally prove that q-exponentials are naturally suited to fit decreasing functions in scenarios of scarce data, it does provide evidence

for this belief. In particular, based on this peculiarity, one cannot state that the actual functional form of the

critical parameter H_c is that of a q-exponential function of S^{-1} .

-
- [1] Z. Farkas et al, Phys. Rev. Lett. **90**, 248302 (2003).
 [2] P. D. Weidman and C. P. Malhotra, Phys. Rev. Lett. **95**, 264303 (2005).
 [3] P. D. Weidman and C. P. Malhotra, Physica D **233**, 1 (2007).
 [4] F. Parisio, Phys. Rev. E **78**, 055601(R) (2008).
 [5] see, for example, <http://solarsystem.nasa.gov/planets>.
 [6] A. C. M. Correia and J. Laskar, Nature **411**, 767 (2001)
 [7] A. C. M. Correia, J. Laskar, and O. N. de Surgy, ICARUS, **163**, 1 (2003).
 [8] J. R. T. Seddon and T. Mullin, Phys. Fluids **18**, 041703 (2006).
 [9] C. Sun et al, J. Fluid Mech. **664**, 150 (2010).
 [10] A. Merlen and C. Frankiewicz, J. Fluid Mech. **685**, 461 (2011).
 [11] K. Yoshida and K. Sato, Int. J. Non-Linear Mech. **33**, 819 (1998).
 [12] S. DeCamilo, K. Brockwell, and W. Dmochowsky, Tribol. Trans. **49**, 305 (2006).
 [13] S. L. Waters et al, IMA J. Math. Med. Biol. **23**, 311 (2006) ; L. J. Cummings and S. L. Waters, ibid **24**, 169 (2007).
 [14] L. J. Cummings et al, Biotech. and Bioeng. **104**, 1224 (2009).
 [15] P. Coullet et al, Am. J. Phys. **73**, 1122 (2005).
 [16] G. L. Baker, *The Pendulum: A Case Study in Physics* (Oxford University Press, Oxford, 2005).
 [17] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Westview, Cambridge, MA, 2000).
 [18] F. Tricomi, Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, Classe di Scienze **2**, 1 (1933).
 [19] G. A. Leonov, *Mathematical Problems of Control Theory* (World Scientific, Singapore, 2001).
 [20] F. Pedaci et al, Nature Phys. **7**, 259 (2011).
 [21] We found a weak oscillatory dependence of t_f on angular velocity for small values of ω . However, also in this situation we obtain $\gamma = 1$.
 [22] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
 [23] C. Beck, Phys. Rev. Lett. **87**, 180601 (2001).
 [24] L. C. Malacarne, R. S. Mendes, and E. K. Lenzi, Phys. Rev. E **65**, 017106 (2001).

