Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Educação

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica

Curso de Mestrado

Fernanda Lopes Sá Barreto

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

RECIFE

2012

Fernanda Lopes Sá Barreto

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª Drª Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

RECIFE

2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

B273p Barreto, Fernanda Lopes Sá.
O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos / Fernanda Lopes Sá Barreto. – Recife: O autor, 2012.
104 f. ; 30 cm.

Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Análise combinatória - Estudo e ensino. 3. Educação de adultos. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa. II. Título.

CDD 372.7 (22. ed.) UFPE (CE2012-45)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ALUNA

FERNANDA LOPES SÁ BARRETO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

"O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS NO DESENVOLVIMENTO DO RACICÍNIO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS"

COMISSÃO EXAMINADORA:

____
Presidente e Orientadora
Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

____
Examinadora Interna
Profª. Drª. Ana Coelho Vieira Selva

____
Examinadora Externa
Profª. Drª. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Recife, 29 de fevereiro de 2012.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus. Agradeço a minha família. À minha querida mãe Joana (*in memoriam*) pelo incentivo, apoio e amor incondicional. À Dalva, irmã de coração que a vida me presenteou, obrigada pelas palavras de estímulo e pela ajuda em todos os momentos que precisei. À minha mãe Maria do Carmo (Carminha) que mesmo distante, sempre se faz presente na minha vida.

A Emerson Emiliano, meu namorado, companheiro e amigo. Obrigada pelo apoio, carinho e pelas horas dedicadas a me ouvir falar sobre cada etapa de construção deste trabalho.

À Rute Borba, minha querida orientadora, pela dedicação, carinho, paciência e tantos valiosos ensinamentos desde a graduação. Nos momentos mais difíceis, suas palavras sempre me acalmaram e me ajudaram a enxergar novos e melhores caminhos.

A todos os amigos que tanto me apoiaram e com os quais compartilhei momentos felizes. Em especial às amigas que trabalham comigo na Escola Municipal Monsenhor Viana.

Às amigas do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (GERAÇÃO – UFPE): Cristiane Pessoa, Cristiane Rocha, Flávia, Glauce, Juliana, Martha, Mika, Monalisa, Rita e Thalita. Meninas queridas, agradeço pelas discussões que tanto contribuíram neste trabalho.

Às professoras Ana Selva e Claudia Groenwald, pela disponibilidade e contribuições dadas desde a qualificação.

A todos os meus companheiros de turma, pelas trocas de experiência e pelos momentos de alegria que passamos juntos.

Ao corpo docente do Programa de Pós-Gradução de Educação Matemática e Tecnológica. Em especial, aos professores da disciplina Seminários pelas contribuições que auxiliaram na construção desta pesquisa.

Às funcionárias da Secretaria do Programa, sempre prontas a ajudar.

Agradeço à direção das escolas em que foram realizadas as coletas de dados, às professoras das turmas e principalmente aos estudantes que participaram deste estudo.

E à CAPES, pelo incentivo à pesquisa.

RESUMO

Neste estudo investigou-se a influência de diferentes tipos de representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por alunos da Educação de Jovens e Adultos. Participaram da pesquisa 24 alunos, que pertenciam a turmas com equivalência ao quarto e quinto anos do Ensino Fundamental regular. Os alunos foram separados em três grupos: Grupo 1 – resolveu metade dos problemas usando listagens e a outra metade usando árvores de possibilidades; Grupo 2 – resolveu todos os problemas com árvores de possibilidades; e Grupo 3 – resolveu todos os problemas usando listagens. Os procedimentos metodológicos realizados foram: pré-teste, intervenção e pós-teste. Ambos os testes foram compostos por oito situações-problema contendo os diferentes significados da Combinatória que estão presentes na organização proposta por Pessoa e Borba (2009). Na intervenção foram resolvidos os problemas do pré-teste, sendo que em cada grupo foram usadas formas de representação simbólica distintas. Na análise do pré-teste verificou-se que a maioria das respostas não apresentou relação combinatória, evidenciando dificuldades dos estudantes na resolução de problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*. Entre as representações simbólicas, a listagem foi a mais utilizada. Durante a intervenção buscou-se, por intermédio de listagens e/ou árvores de possibilidades, chamar a atenção dos participantes para as propriedades invariantes do conceito, referentes à escolha de elementos, à ordenação dos mesmos e ao esgotamento de possibilidades. Os dados do pós-teste mostraram que houve avanço significativo no desempenho dos participantes e que os grupos progrediram de modo idêntico. Foram identificados tipos de resposta que apontaram um maior nível de compreensão dos estudantes. A listagem foi a representação simbólica mais usada no pós-teste em todos os grupos, inclusive naquele que não fez uso de tal representação na intervenção. O estudo ressalta a importância de trabalhos sistematizados que abordem as dimensões conceituais propostas por Vergnaud (1986): situações e seus significados, propriedades/relações invariantes e representações simbólicas. Representações simbólicas passam a ser mais bem estruturadas à medida que estudantes possuem uma melhor compreensão das propriedades dos conceitos, estabelecendo diferenças entre significados envolvidos nas situações.

Palavras-chave: Combinatória; Educação de Jovens e Adultos; Representações simbólicas.

ABSTRACT

In this study we investigated the influence of different types of symbolic representations in solving combinatorial problems by adults and young people in initial process of schooling. 24 students participated in the investigation, that belonged to classes equivalent to the fourth and the fifth grades of regular Elementary School. Students were divided into three groups: Group 1 - solved half the problems using lists and the other half using trees of possibilities, Group 2 - solved all the problems with trees of possibilities, and Group 3 - all problems solved using lists. The methodological procedures performed were: pre-test, intervention and post-test. Both tests were composed of eight problems containing the different meanings of Combinatorics which are present in the organization proposed by Pessoa and Borba (2009). During the intervention the problems of the pre-test were solved and each group used different forms of symbolic representation. The pre-test analysis showed that the majority of the responses was not associated to Combinatorics, showing student's difficulties in solving problems involving combinatorial reasoning. Among the symbolic representations, lists were the most used. During the intervention lists and/or trees of possibilities drew the attention of participants to the invariant properties of the concept, referring to the choice of elements, the ordering of these elements and the exhaustion of possibilities. Post-test data showed that there was significant improvement in the performance of participants and the groups progressed similarly. Types of response were identified that showed a higher level of understanding of students. List was the symbolic representation used in most post-tests in all groups, including those that did not use such a representation in the intervention. The study points out the importance of systematic studies that address the conceptual dimensions proposed by Vergnaud (1986): situations and their meanings, properties/relation that are invariant and symbolic representations. Symbolic representations become more structured as students have a better understanding of the properties of concepts, establishing differences between meanings involved in situations.

Keywords: Combinatorics, Youth and adult initial schooling; Symbolic representations.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente estudo se propôs a analisar, por meio de intervenções (sessões de resolução de problemas), a influência de distintas formas de representações simbólicas no desenvolvimento do *raciocínio combinatório* de estudantes da Educação de Jovens e Adultos. Essa forma de raciocínio está presente no cotidiano, tanto no que diz respeito a atividades rotineiras (como em jogos, brincadeiras e atividades classificatórias), quanto a diversos procedimentos profissionais e acadêmicos (nas quais combinações de elementos também se fazem necessárias). Eizenberg e Zaslavsky (2002, apud MORO e SOARES, 2006, p.104), ressaltam que a Combinatória integra-se a "vários aspectos da Matemática, bem como a outras áreas como a Computação, a Comunicação, a Genética e a Estatística".

Segundo Borba (2010), *o raciocínio combinatório* é uma forma de pensamento que analisa a formação de grupos de possibilidades a partir de critérios específicos – considerando repetição, ou não, de elementos, a escolha dos mesmos e sua ordenação. A sistematização na formação de grupos evidencia uma forma elaborada de pensamento e é um procedimento que deve ser aprendido por meio de práticas sociais – incluindo as de sala de aula.

De acordo com Batanero, Godino e Pelayo (1996), a Combinatória é um elemento fundamental da Matemática discreta, mostrando-se essencial para a construção do pensamento formal. Além disso, esse conceito é extremamente relevante para desenvolver a compreensão sobre a Probabilidade. Para Groenwald, Zoch e Homa (2009, p.32), o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* traz importantes contribuições, uma vez que estimula "a capacidade de abstração do estudante para resolver problemas, sendo possível desenvolver atividades contextualizadas socioculturalmente, aproximando-o da realidade".

Apesar da presença da Combinatória no cotidiano, estudos anteriores (SCHLIEMANN, 1988; MIGUEL e MAGINA, 2003; SANDOVAL, TRIGUEROS e LOZANO 2007; ROCHA, 2007; PESSOA e BORBA 2009 e 2010; LIMA e BORBA, 2010; BARRETO e BORBA, 2010) mostram que estudantes da educação básica (crianças e adolescentes, como também jovens e adultos da modalidade da EJA), assim como ingressos no Ensino Superior, apresentam dificuldades em solucionar problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*.

Para Nunes e Bryant (1997), o desenvolvimento do trabalho com as operações aritméticas deve resgatar seus diferentes significados. Entre os significados de multiplicação encontra-se a Combinatória. É importante ressaltar que os problemas combinatórios apresentam natureza multiplicativa mais complexa. Estudos, como o de Selva, Borba, Campos, Bivar, Ferreira e Luna (2008), realizado com estudantes do 4º e 6º anos do Ensino Fundamental regular, e o de Lima e Borba (2010), realizado com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), mostram que entre os problemas que abordam as estruturas multiplicativas, os que envolvem os significados da Combinatória são os que os alunos apresentam os desempenhos mais baixos. Para que os estudantes desenvolvam os seus conhecimentos acerca das estruturas multiplicativas, mostra-se relevante a abordagem dos diferentes tipos de problemas multiplicativos na sala de aula, incluindo os que envolvem *raciocínio combinatório*.

Particularmente na EJA, o percentual de problemas de Combinatória propostos nos livros didáticos específicos para essa modalidade apresenta uma baixa representatividade, quando comparados aos percentuais dos demais problemas multiplicativos, conforme foi verificado na pesquisa de Martins e Borba (2010). Desse modo, o trabalho pedagógico na EJA necessita de intervenções sistemáticas sobre a Combinatória, uma vez que se as abordagens ficarem restritas ao que é apresentado nos livros didáticos, os alunos terão poucas oportunidades de melhorarem suas compreensões deste conteúdo.

A Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986) traz importantes reflexões para a prática docente, pois apresenta uma concepção de interatividade entre os conceitos, defendendo que esses se desenvolvem em campos conceituais. A Combinatória está inserida no campo conceitual das Estruturas Multiplicativas, o qual inclui a multiplicação e a divisão, bem como outros conceitos que têm base na proporcionalidade. Ainda segundo Vergnaud (1986), os conceitos são formados por três dimensões – situações que dão significado ao conceito, invariantes (propriedades/relações do conceito) e representações simbólicas do conceito. Essas dimensões são interligadas e é importante que sejam consideradas ao se analisar o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, pois apresentam contribuições significativas para a formalização e ampla compreensão conceitual da Combinatória. Isto é, defende-se que o trabalho escolar precisa promover a análise de diferentes situações que atribuem significados ao conceito, explorando, para isso, as suas propriedades invariantes e como essas se apresentam em cada situação. Nesse trabalho também é imprescindível a abordagem de diferentes representações simbólicas para operar com o conceito, já que cada representação pode deixar mais evidentes determinadas propriedades invariantes de tal conceito. Ressalta-se que é importante que os estudantes, além de aprenderem diferentes formas de representação simbólica, também possam aprimorar o uso de representações que já utilizam.

Embora esteja ocorrendo um crescente aumento de estudos na Educação de Jovens e Adultos (EJA), a investigação acerca da Matemática nessa modalidade de ensino "ainda se encontra em estágio inicial que precisa ser intensificado, se vislumbramos uma transformação social a partir da aquisição do conhecimento matemático pelas pessoas que compõem a população brasileira" (KOORO, 2008, p.14). Dessa forma, a escolha de realizar a presente pesquisa com alunos da Educação de Jovens e Adultos deve-se ao fato de que é preciso ampliar os estudos sobre a Combinatória na Educação Básica, em especial na Educação de Jovens e Adultos, principalmente no que diz respeito a estudos de intervenção, ou seja, pesquisas que incluam no método sessões em que os estudantes realizem atividades como a resolução de problemas com alguma forma de mediação - de um professor ou de um *software*, por exemplo – que os auxiliem a refletir sobre os conceitos.

Os jovens e adultos, de um modo geral, "dominam noções matemáticas que foram aprendidas de maneira informal ou intuitiva" (BRASIL, MEC, 2002, p.100). Esse conhecimento informal, entretanto, não é usualmente utilizado como ponto primordial na construção das intervenções didáticas. Por esse motivo, muitas vezes, os trabalhos pedagógicos são inadequados às peculiaridades dos alunos da Educação de Jovens e Adultos.

Segundo Fonseca (2006), o planejamento das ações pedagógicas precisa questionar quais as aspirações e necessidades dos estudantes. A proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (Brasil, MEC, 2002) enfatiza que particularmente nessa modalidade de ensino, mais do que em outras, os conhecimentos matemáticos são habitualmente muito variados, devido às diversas experiências vivenciadas por esse grupo. Este fato é, equivocadamente, entendido, em muitos casos, como impedimentos à aprendizagem. Torna-se papel do professor planejar atento a essa diversidade de conhecimentos, buscando "transformá-la em elemento de estímulo, explicação, análise e compreensão” (Ibidem, p.100). Desse modo, é importante que as propostas de intervenção que abordem a Combinatória trabalhem situações que façam a mediação entre o conhecimento já desenvolvido pelos alunos e o conhecimento formal.

Apesar do crescimento do quantitativo de estudos que abordam a Matemática na EJA, conforme mencionado anteriormente, ainda são necessários mais estudos de intervenção, que investiguem como os conceitos são desenvolvidos pelos estudantes. Também são poucas as pesquisas que apresentam intervenções que investiguem especificamente a influência de representações simbólicas na resolução de problemas que envolvem o *raciocínio combinatório.* Dentre as investigações realizadas com alunos da Educação Básica, pode-se destacar o estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011) que analisou as contribuições do *software* Diagrama de *Árbol* na compreensão de situações combinatórias por alunos do quinto ano do Ensino Fundamental regular. As autoras observaram importantes avanços dos estudantes após a utilização do *software*, os quais passaram a usar estratégias mais eficientes na resolução dos diversos tipos problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*. Com estudantes da Educação Superior, ressalta-se o trabalho de Groenwald, Zoch e Homa (2009), realizado com graduandos do quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Os autores investigaram a utilização de uma sequência didática com multicaminhos que abordava a Combinatória fazendo uso do *e-learning* (aprendizado eletrônico). Os resultados mostraram avanços nos desempenhos dos estudantes, apontando a relevância da diversificação didática para o atendimento dos diferentes ritmos e perfis de aprendizagem. É importante que estudos como esses sejam desenvolvidos em diferentes níveis e modalidades de ensino, especialmente na EJA, na qual não há registro de estudos de intervenção em Combinatória.

Dessa forma, a presente pesquisa buscou investigar os efeitos relacionados às representações simbólicas no ensino e aprendizagem da Combinatória na modalidade da Educação de Jovens e Adultos. Apesar do foco nas representações, é válido salientar que as demais dimensões também foram consideradas, uma vez que, como defendido por Vergnaud (1986), as dimensões conceituais inter-relacionam-se. Procurou-se, dessa maneira, analisar o uso de representações simbólicas para melhor compreensão de situações combinatórias e de suas respectivas propriedades e relações.

Esta dissertação está organizada em sete capítulos. Os quatro primeiros apresentam uma revisão de literatura. O primeiro capítulo discute especificidades do ensino e aprendizagem da Matemática na EJA. No segundo capítulo aborda-se a Teoria dos Campos Conceituais e as estruturas multiplicativas. Já no terceiro capítulo realiza-se a apresentação de resultados de estudos anteriores sobre o *raciocínio combinatório*. No quarto capítulo discutem-se trabalhos anteriores que abordaram especificamente o *raciocínio combinatório* na EJA. No quinto capítulo apresenta-se o método do estudo, discutindo-se os objetivos e os procedimentos realizados. No sexto capítulo são apresentados e analisados os resultados obtidos. E por fim, no sétimo capítulo são realizadas as considerações finais sobre a pesquisa.

CAPÍTULO 1 - A MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Neste capítulo serão discutidos aspectos próprios da Educação de Jovens e Adultos, enfatizando as especificidades do ensino da Matemática nessa modalidade de ensino. Embora haja aspectos gerais sobre o ensino de Matemática – tais como os referentes à construção de conhecimentos – deve-se considerar, também, que há aspectos específicos aos diferentes níveis e às variadas modalidades de ensino.

Ao se pensar no jovem e no adulto dentro do contexto da Educação de Jovens e Adultos (EJA), é necessário ter o discernimento que tais estudantes passaram por processos de exclusão da escola, ou seja, são pessoas que passaram por experiências de vida, na maioria das vezes decorrentes de baixas condições socioeconômicas, que ocasionaram o afastamento da vida escolar. Dessa forma, Fonseca (2006) alerta que, apesar da nomenclatura da modalidade de ensino se reportar à idade dos estudantes, "o grande traço definidor da EJA é a caracterização sociocultural do seu público" (Ibidem, p.15). Ressalta-se também que a EJA não atende a um grupo qualquer de jovens e adultos, mas a um grupo "relativamente homogêneo no interior da diversidade de grupos culturais da sociedade contemporânea" (OLIVEIRA, 1999, p.59).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº9. 394/96 (BRASIL, MEC, 2011) estabelece em seu Artigo 37 que a EJA é direcionada para todos os indivíduos que, em idade própria, não ingressaram ou que não permaneceram na Educação Básica. É válido ressaltar que atualmente, o público da EJA apresenta-se bastante diversificado, sendo constituído por jovens e adultos que se afastaram por um longo período e depois retornaram à escola, assim como há também os que realizam o seu primeiro ingresso escolar e, ainda, existem os que estão se profissionalizando.

O Parecer 11/2000 do Conselho Nacional de Educação (BRASIL, MEC, 2000), que faz uma apreciação sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos, destaca três funções atribuídas à EJA: reparadora, equalizadora e qualificadora. A função reparadora é entendida como a recuperação de direitos que foram negados, ou seja, busca sanar uma dívida social e histórica com uma parcela da população que não teve acesso e garantia de permanência em uma escola pública de qualidade. A função equalizadora atua no sentido de garantir a igualdade de oportunidades, favorecendo novas inserções sociais, culturais e no mercado de trabalho. A função qualificadora discute a necessidade de uma educação permanente, que exige constante atualização, sendo essa função o principal sentido da EJA, já que enfatiza a importância da construção de uma "sociedade educada para o universalismo, a solidariedade, a igualdade e a diversidade" (Ibidem, p.11)

Oliveira (1999) defende que os estudos que investigam o pensamento e a aprendizagem de estudantes da EJA precisam necessariamente refletir sobre as condições desse grupo enquanto: não-crianças, excluídos da escola e membros de determinados grupos culturais. As análises dessas condições são extremamente relevantes, entretanto, é necessário certo cuidado, pois, como afirma Fantinato (2004), há uma tendência histórica das políticas educacionais em caracterizar os estudantes da EJA levando em consideração apenas aspectos que os descrevem negativamente, isto é apresentam predominantemente características ausentes em tais indivíduos. Fantinato (idem, p.109) afirma a relevância de uma caracterização que de fato expresse o aluno da EJA em relação "ao que ele é, o que faz, como vive, o que sabe, o que pensa, como se pensa, o que aprende na escola, o que o faz voltar à escola".

Dessa forma, percebe-se a importância de se contextualizar socialmente a Educação de Jovens e Adultos, para compreender algumas especificidades que integram essa modalidade de ensino. É fundamental, portanto, que o pesquisador de acordo com seus objetivos, esteja atento para que o seu estudo não se detenha apenas aos limites do ensino e da aprendizagem na EJA, mas, principalmente, aponte possibilidades dentro dessa modalidade de ensino.

Oliveira (1999) discute, ainda, dois pontos que auxiliam na análise de como a exclusão escolar influencia na definição de peculiaridades do processo de aprendizagem dos jovens e adultos. O primeiro desses pontos diz respeito à inadequação escolar, já que a EJA não é o público alvo para o qual a escola foi construída. A organização curricular traz, muitas vezes, implicitamente no plano ideológico, a concepção de que o aluno apenas alcançará êxito em sua formação seguindo o percurso regular do ensino. Segundo essa concepção, o fato do individuo não ter cursado o sistema regular é considerado como um potencializador do seu fracasso. O segundo ponto trazido pela autora supracitada está relacionado à linguagem própria do ambiente escolar, uma vez que a falta de apropriação dessa linguagem pode se tornar um dificultador da aprendizagem dos conteúdos. Pode-se entender que a falta de familiarização dos alunos com o discurso escolar pode distanciá-los da apropriação formal de conceitos, os quais eles, em muitos casos, já possuem algum domínio informal.

Fonseca (2006) aponta outra dificuldade que é bastante frequente no ensino da Matemática na EJA: a presença de restrições relacionadas à pequena flexibilidade da organização da escola. Ainda perduram "mitos como o da linearidade com que se devem apresentar os conteúdos matemáticos aos alunos, ou o da necessidade de vencer uma etapa para passar à subsequente" (ibidem, p.18).

A análise, especificamente, sobre as discussões e reflexões da Educação Matemática na modalidade da Educação de Jovens e Adultos, segundo Fonseca (2006) deve focar "uma ação educativa dirigida a um sujeito de escolarização básica incompleta ou jamais iniciada e que acorre aos bancos escolares na idade adulta ou na juventude" (Ibidem, p.14). Portanto, as práticas pedagógicas não podem deixar de atender as peculiaridades desse grupo de estudantes.

Tais alunos apresentam bastante interesse em aprender o conhecimento matemático formal (BRASIL, MEC, 2002). Entretanto, muitos se colocam na condição de incapazes de se apropriar do conhecimento escolar. Além das limitações próprias da organização escolar, existem outros fatores que contribuem para que os estudantes da EJA não acreditem em seu potencial de desenvolvimento. Entre esses fatores está à concepção disseminada pelo senso comum de que a fase adulta é ausente de progressos em relação à aprendizagem, dispondo, desse modo, o fracasso escolar como algo inerente a essa faixa etária.

Além do discurso do senso comum, Fonseca (2006) chama atenção para o fato de que são raros os estudos sobre os processos cognitivos na idade adulta. Para Palácios (1995, p.312 apud FONSECA, 2006, p.22) "as pessoas humanas têm um bom nível de competência cognitiva até uma idade avançada (desde logo, acima dos 75 anos)". Tal autor defende que as delimitações cognitivas são definidas por diversos aspectos como "o nível de saúde, o nível educativo e cultural, a experiência profissional e o tônus vital da pessoa (sua motivação, seu bem-estar psicológico...)" (ibidem). Não é coerente, portanto, afirmar que apenas a idade cronológica pode determinar o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo.

Vergnaud (2009) também ressalta que há uma formação consistente dos psicólogos no que diz respeito a pesquisas sobre o desenvolvimento infantil, mas o desenvolvimento dos adultos não tem o mesmo nível de aprofundamento. É, portanto, indispensável que estudos sobre processos cognitivos considerem o desenvolvimento humano em sua continuidade, assim como os currículos escolares, os quais devem atender às peculiaridades de cada fase.

A Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (BRASIL, MEC, 2002) foi desenvolvida com o objetivo de disponibilizar orientações para auxiliar a construção de programas curriculares. O documento, portanto não se configura em um currículo finalizado que deverá ser utilizado, mas pode ser considerado como um importante subsídio para a elaboração de planos de ensino, os quais devem atender às finalidades dos programas a que pertencem.

A Proposta Curricular para EJA (ibidem) sugere que a abordagem dos conteúdos matemáticos ocorra através da resolução de problemas a fim de que os processos de aprendizagem se tornem mais significativos. A resolução de uma situação-problema deve mobilizar as habilidades dos alunos em "compreender o problema; elaborar um plano de solução; executar o plano; verificar ou comprovar a solução; justificar a solução; comunicar a resposta" (Ibidem, p.104). Ao ter a oportunidade de analisar diferentes problemas, o estudante desenvolve a compreensão de que "um problema pode ser resolvido por diferentes operações, assim como uma mesma operação pode estar associada a problemas diferentes" (ibidem, p.118). Isto corresponde ao que é defendido pela Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1983), já que, segundo essa, um conceito não está ligado apenas a um tipo de situação, assim como uma situação não apresenta apenas um conceito.

Pelo exposto, mostra-se relevante o desenvolvimento de estudos que investiguem, especialmente na Educação de Jovens e Adultos, de que forma as sequências de atividades, que articulam os conhecimentos formais e informais, podem auxiliar na superação das dificuldades e na elevação da autoconfiança dos estudantes, contribuindo para uma ampla compreensão dos significados dos conceitos. É importante, também, que a abordagem de determinados conceitos apresente situações que envolvam conceitos correlatos, como a Combinatória e a multiplicação, a fim de que os estudantes sejam estimulados a perceberem conexões entre esses conceitos.

O capítulo seguinte aborda a teoria que fundamenta a presente pesquisa: a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Dentro dessa teoria se discute o *campo conceitual das estruturas multiplicativas*, no qual a Combinatória está inserida.

CAPÍTULO 2 - A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Este capítulo trata da teoria utilizada como base neste estudo para investigar o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* na Educação de Jovens e Adultos. A seguir, serão discutidos os principais pressupostos da teoria, as dimensões que constituem os conceitos, bem como o *campo conceitual das estruturas multiplicativas*.

2.1 Os Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud, trata-se de uma teoria cognitivista que tem como objetivo principal apresentar um quadro que favoreça as análises e discussões sobre ligações e distanciamentos entre os conhecimentos, sendo esses compreendidos "tanto como o saber fazer como os saberes expressos" (VERGNAUD, 1996, p.155).

Vergnaud (1986) defende uma concepção interativa de formação dos conhecimentos, na qual o saber, tanto nos seus aspectos teóricos quanto nos seus aspectos práticos, é construído nos momentos em que o individuo se depara com problemas a resolver, isto é, situações que ele tem que dominar. Para compreender como estudantes se apropriam de conhecimentos, o autor supracitado acredita que é de fundamental importância entender o desenvolvimento de conceitos dentro de campos conceituais. Segundo Vergnaud (1986, p.84), "um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão".

Portanto, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, o indivíduo desenvolve a compreensão de conceitos dentro de um amplo contexto de problemas. Dessa forma, pode-se entender, como já mencionado anteriormente, que um conceito não está ligado apenas a um tipo de situação, assim como uma determinada situação, geralmente, não apresenta um único conceito, nem esgota as propriedades do mesmo. Assim, quando se tem como objetivo o estudo da aprendizagem de um determinado conceito, esse não pode estar restrito à sua definição, uma vez que é por meio da resolução de variadas situações e problemas que o sentido do conceito é construído.

Vergnaud (1986, p.83) defende que todo conceito é constituído por um "tripé de três conjuntos" interdependentes: a) o conjunto de situações que atribui significados ao conceito; b) o conjunto de propriedades invariantes do conceito e c) o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas para representar e operar com o conceito. Essas três dimensões dos conceitos são interligadas. Entretanto, para se analisar um conceito, é possível observar o efeito de cada dimensão, a fim de se identificar como os aspectos dessas dimensões são mais facilmente compreendidos, ajudando desse modo, a redirecionar as intervenções didáticas, avaliando novas possibilidades nas investigações.

Os dois tópicos seguintes tratarão de aspetos destacados por Gérard Vergnaud sobre as dimensões conceituais, quais sejam *situações* e a relação entre *significados* e *significantes*, esses últimos dizem respeito às representações simbólicas.

Situações

No estudo das situações, as quais dão sentido aos conceitos, Vergnaud (1996) ressalta duas ideias fundamentais: a de variedade e a de história. A ideia de variedade está associada à diversidade de situações de um determinado campo conceitual. Essas situações podem ser organizadas sistematicamente a fim de se identificar o conjunto de classes possíveis. Já a ideia de história envolve as situações vivenciadas e que gradualmente o individuo passa a dominar. A associação de ambas as ideias pode auxiliar o pesquisador, o que não simplifica o seu trabalho, uma vez que a primeira ajuda na análise e decomposição das situações, enquanto que a segunda, ajuda na busca de situações que sejam funcionais.

Significados e Significantes

O significado dos conhecimentos matemáticos não é encontrado apenas nas situações nem apenas nos significantes, ou seja, nas representações simbólicas. O significado diz respeito à "relação do sujeito com as situações e os significantes" (VERGNAUD, 1996, p.179), ou seja, o sentido de uma situação ou de um significante é constituído pelos esquemas[1] utilizados pelo individuo.

[1] Vergnaud (1996, p.157) baseado na teoria de Jean Piaget define esquema como “a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações”.

Vergnaud (1996) explica que os significantes possuem três funções: ajuda à designação (identificação dos invariantes); ajuda ao raciocínio e à inferência; e ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos. Cada forma de representação simbólica pode destacar determinadas propriedades e relações de um conceito. Desse modo, já que cada tipo de representação ajuda a ressaltar alguns aspectos do conceito, é importante que o estudante tenha a oportunidade de trabalhar com diferentes formas de representação simbólica, a fim de que os conceitos sejam desenvolvidos de maneira mais ampla. A linguagem natural é considerada a forma fundamental de representar e identificar as categorias matemáticas, entretanto, não possui a mesma precisão necessária à escolha e ao tratamento adequado das relações e informações, o que é possivelmente verificado na utilização de outros significantes como os diagramas e as fórmulas.

A conceitualização matemática (VERGANAUD, 1996) compreende a análise das relações e das propriedades - os invariantes conceituais - como ferramentas, assim como a transformação de tais ferramentas em objetos de pensamento. O simbolismo matemático não é considerado como indispensável para a conceitualização, entretanto é compreendido como instrumento bastante útil, sobretudo no que diz respeito à transformação das categorias de pensamento em objetos matemáticos.

A operacionalidade conceitual precisa ser analisada por meio da experimentação de situações diversas. Cabe ao pesquisador, a análise da multiplicidade de esquemas e condutas para a compreensão de determinado conceito. Desse modo, percebe-se a Teoria dos Campos Conceituais como importante base teórica para estudos que enfoquem as ações dos indivíduos na resolução de problemas. Para Vergnaud (1996, p167), a abordagem dos conceitos em campos conceituais possibilita "uma classificação que assenta na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser postos em jogo em cada uma delas". Dentre os distintos campos conceituais, na seção seguinte é realizada uma discussão sobre o campo das *estruturas multiplicativas*, no qual a Combinatória está inserida.

2.2 O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

O campo das *estruturas multiplicativas* é definido como "o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações" (VERGNAUD, 1996, p.168). Entre os conceitos que estão ligados a esse conjunto encontram-se: proporção simples e proporção múltipla, funções lineares e não-lineares, espaços vetoriais, fração, números racionais, múltiplos e divisores. A Combinatória, por sua natureza multiplicativa, também é um componente importante desse campo conceitual.

Pessoa e Borba (2009) chamam a atenção para o fato de que no Ensino Fundamental, de maneira geral, tanto nos livros didáticos quanto em sala de aula, a introdução aos problemas que envolvem o raciocínio multiplicativo ocorre apresentando-se a multiplicação como uma adição de parcelas repetidas. Nunes e Bryant (1997) ressaltam que a multiplicação, por vezes, pode ser resolvida por meio de adições sucessivas, mas as bases conceituais da multiplicação e da adição são distintas. Esses autores afirmam que a base das operações multiplicativas é a proporcionalidade. Restringir a multiplicação à adição de parcelas iguais pode limitar uma mais ampla compreensão do campo multiplicativo, em particular da Combinatória.

A Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (BRASIL, MEC, 2002) também faz a mesma ressalva sobre o trabalho com problemas multiplicativos na EJA. A Proposta Curricular enfatiza que devem ser explorados todos os significados da multiplicação, entre esses os conceitos envolvidos no *raciocínio combinatório*.

Apesar da possibilidade de solucionar problemas multiplicativos por meio da adição repetida, a adição e a multiplicação possuem bases de raciocínio distintas, já que os problemas aditivos têm como base situações de composição e decomposição, enquanto que os multiplicativos baseiam-se na correspondência um-para-muitos (discutido a seguir). Por isso, é de fundamental importância que o trabalho em sala de aula estimule o aluno a descobrir essas diferenças, através do contato com várias situações-problema, para que o educando possa estabelecer diferentes relações, fazendo-o progredir no que diz respeito à reflexão e utilização do *cálculo relacional* e do *cálculo numérico*, em particular das operações multiplicativas.

Com base em Vergnaud (1986) pode-se definir o *cálculo relacional* como as operações e sistematizações mentais necessárias para a escolha de estratégias de resolução de um problema, enquanto que o *cálculo numérico* diz respeito à aplicação de procedimentos – como heurísticas e algoritmos – utilizados para solucionar determinado problema. A distinção desses tipos de cálculo é de fundamental importância no ensino de Matemática, por possibilitar que se identifique a natureza das dificuldades evidenciadas pelos alunos.

A seguir, serão apresentadas as classificações realizadas por Vergnaud (1983), por Nunes e Bryant (1997) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, MEC, 1997) para os problemas multiplicativos. Buscou-se, sobretudo, com essa apresentação analisar as formas, encontradas na literatura, de classificar problemas combinatórios.

Vergnaud (1983) apresenta três classes de problemas multiplicativos, as quais compreendem a relações ternárias e quaternárias: 1) os problemas de *isomorfismo de medidas*, os quais possuem uma relação quaternária, apresentando proporções diretas simples; 2) os problemas de *produto de medidas* que envolvem três variáveis, sendo que uma das quantidades é produto das demais, como ocorre com problemas de *produto cartesiano* e 3) os problemas de *proporções múltiplas* que envolvem um número superior a quatro elementos e se baseiam no isomorfismo de medidas.

Nunes e Bryant (1997) estabelecem a seguinte classificação para os problemas que envolvem as estruturas multiplicativas: 1) *correspondência-um-a-muitos,* que possuem como formas de problemas: multiplicação, problema inverso de multiplicação e *produto cartesiano*. Essas situações baseiam-se na ideia de proporção; 2) *relação entre variáveis*– situações que apresentam variáveis contínuas e 3) *distribuição* – situações nas quais são necessários três valores: o todo, o número de partes e o tamanho das partes.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, MEC, 1997) são apresentados quatro conjuntos de situações que envolvem problemas multiplicativos. São eles: 1) *comparativa* – estabelece uma comparação entre quantidades, 2) *proporcionalidade* – aborda a ideia de proporção, comparando razões, 3) *configuração retangular* – envolve a distribuição espacial e 4) *combinatória* – relacionado a situações que envolvem o *raciocínio combinatório*.

A Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (BRASIL, MEC, 2002), que atende ao primeiro segmento do Ensino Fundamental, também apresenta a mesma classificação de significados que é encontrada nos PCN.

Reconhece-se, dessa forma, essa organização dos problemas multiplicativos para as distintas modalidades de ensino.

As três classificações apresentadas anteriormente mostram-se semelhantes, pois definem conjuntos de problemas que possuem relações ternárias e quaternárias. O presente estudo se concentrará nos problemas de natureza combinatória que Nunes e Bryant (1997) usam a denominação de *produto cartesiano* (uma das formas de problemas de correspondência um-a-muitos), Vergnaud (1983) denomina *produto de medidas* e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, MEC, 1997), assim como a Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (BRASIL, MEC, 2002), nomeiam como *combinatória*. Essas três nomenclaturas dizem respeito ao um mesmo tipo de problema e, de um modo geral, à abordagem do *raciocínio combinatório* no Ensino Fundamental limita-se explicitamente a esses problemas. Já no Ensino Médio, são ressaltados outros tipos de problemas combinatórios: *arranjo*, *permutação* e *combinação*.

Para que haja um desenvolvimento sólido dos conceitos combinatórios, é importante que todos os significados sejam trabalhados adequadamente na Educação Básica. Desse modo, no presente trabalho defende-se que os diversos tipos de problemas que envolvem o *raciocínio combinatório* sejam abordados na escola a partir do início do Ensino Fundamental.

No próximo capítulo serão discutidos os significados da Combinatória, defendendo a articulação entre os mesmos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o final do Ensino Médio.

CAPÍTULO 3 - O RACIOCINIO COMBINATÓRIO

Nesse capítulo se fará uma discussão sobre os diferentes significados da Combinatória apresentados na organização de Pessoa e Borba (2009), a qual foi usada no método da presente pesquisa. Também serão discutidos estudos anteriores que investigaram o conhecimento de estudantes sobre a resolução de problemas combinatórios.

A Combinatória é tida como a arte de contar, entretanto é válido ressaltar que não se trata de uma simples contagem, mas, sim, da enumeração - direta ou indireta - de agrupamentos que podem ser formados a partir de determinados critérios. Pode-se entender desse modo, que a Combinatória "se constitui num ramo da Matemática que estuda técnicas de contagem - direta e implícita - de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições" (BORBA, 2010, p1).

De acordo com Borba (2010), o *raciocínio combinatório* diz respeito à maneira de pensar necessária para analisar situações que envolvem agrupamentos de elementos atendendo a condições especificas, as quais estão relacionadas às ações de escolher e/ou ordenar os elementos, podendo esses serem repetidos, ou não, ou, ainda, terem que atender critérios específicos de proximidade, ou não, de elementos, dentre outros.

Pessoa e Borba (2009) indicam a seguinte organização para os significados de Combinatória a serem trabalhados ao longo de todo o Ensino Básico: *arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano.* Nos currículos, em geral, trabalha-se explicitamente com *produtos cartesianos* nos anos iniciais de escolarização básica e os outros tipos de problemas nos anos finais (Ensino Médio).

O problema que envolve o *produto cartesiano* é composto, no mínimo, por dois conjuntos básicos, sendo necessário, combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro para formar o conjunto-solução. Para Nesher (1988), esses problemas são mais complexos dentre os multiplicativos, uma vez que a correspondência um-para-muitos não está explicitamente indicada no momento da leitura do problema.

Outros estudos evidenciaram as dificuldades com *produtos cartesianos*, como Selva, Borba, Campos, Bivar, Ferreira e Luna (2008) as quais analisaram a resolução de diferentes problemas de estrutura multiplicativa. Participaram da pesquisa 180 crianças, sendo 90 do 4º ano e 90 do 6º do Ensino Fundamental. Cada participante resolveu dez situações-problema que abordavam diferentes significados (multiplicação, divisão partitiva, divisão por quotas, produto cartesiano direto e produto cartesiano inverso). Os problemas de *produto cartesiano* - as únicas situações combinatórias incluídas na sondagem - foram os que se apresentaram mais difíceis para os estudantes dos dois anos de escolarização. Ressalta-se a enorme dificuldade dos participantes em resolverem problemas de *produto cartesiano* de ordem inversa, ou seja, situações que indicavam o número total de possibilidades de combinações e o número de elementos de um dos conjuntos e solicitava-se a determinação da quantidade de elementos do outro conjunto combinado.

As operações com problemas que envolvem os conceitos de *arranjo*, *permutação* e *combinação*, consistem basicamente, em formar conjuntos ou subconjuntos, a partir de um conjunto, atendendo a determinadas condições peculiares a cada um desses significados (com todos os elementos – no caso da *permutação* – ou com alguns dos elementos – nos casos do *arranjo* e da *combinação* – e levando em consideração se a ordem dos elementos gera, ou não, novas possibilidades). Portanto, nesses casos, o *raciocínio combinatório* se desenvolverá na organização dos elementos de um conjunto básico, diferente do *produto cartesiano* que envolve a associação entre dois ou mais conjuntos básicos.

A seguir são apresentados cada um dos significados com a descrição de suas principais características e um exemplo de situação-problema. É importante ressaltar que os problemas de *arranjo, combinação* e *permutação* que serão abordados nessa pesquisa não envolverão repetições.

3.1 Arranjo simples (sem repetição)

Segundo Dias Filho e Fevorini (1985, p.155), ao se considerar um conjunto com *n* elementos distintos, "chama-se *arranjo simples* de ordem *p* cada maneira de escolher e ordenar *p* elementos entre eles ($p \leq n$)". Dessa forma, compreende-se que a partir de um conjunto maior são formados subconjuntos, nos quais a ordem em que os elementos são dispostos gera a formação de subconjuntos distintos. No exemplo a seguir a possibilidade *José e Marcos* é distinta de *Marcos e José*, uma vez que a ordem determina distintos posicionamentos obtidos pelos competidores.

Exemplo: Quatro competidores (José, Marcos, Bruno e Sérgio) estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?

3.2 Combinação simples (sem repetição)

Partindo de um conjunto com *n* elementos distintos, "chama-se *combinação simples* de ordem *p* cada maneira de escolher *p* elementos entre eles, com p ≤ n." (DIAS FILHO e FEVORINI, 1985, p.161). Tanto na *combinação* como no *arranjo*, os subconjuntos são constituídos a partir da seleção de elementos de um determinado conjunto, sendo que no *arranjo* a ordem determina a formação de novas possibilidades, entretanto, na *combinação* a ordem dos elementos não gera novos subconjuntos. No exemplo a seguir, o problema solicita que sejam identificadas todas as possibilidades de escolha de dois funcionários a partir de um grupo maior composto por cinco trabalhadores. Nesse sentido, a possibilidade Luíza e Gabriela é idêntica a Gabriela e Luíza, pois a ordem em que estão dispostos os elementos não influencia a formação de subconjuntos diferentes.

Exemplo: Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos?

3.3 Permutação simples (sem repetição)

A partir de um conjunto constituído por *n* elementos distintos, "chama-se *permutação simples* desses elementos cada uma das maneiras de ordená-los" (Ibidem, p.155), sem repetir elementos. As *permutações* são, desse modo, casos particulares de *arranjos*. Na *permutação* todos os elementos do conjunto são utilizados em cada uma das possibilidades, buscando-se todas as formas de organizá-los. Na resolução do problema a seguir é necessário formar números de três algarismos e em todas as possibilidades serão usados todos os elementos do conjunto dado (2, 4 e 6).

Exemplo: Utilizando os algarismos 2, 4 e 6, de quantas maneiras diferentes pode-se escrever números de três algarismos diferentes?

3.4 Produto Cartesiano

O problema com significado de *produto cartesiano* "envolve dois conjuntos básicos, mais um outro conjunto, que é formado pela combinação de cada elemento de um conjunto básico, com cada elemento do outro conjunto básico" (NESHER, 1988, apud NUNES e BRYANT, 1997, p.158). *Produtos cartesianos* podem, evidentemente, envolver a combinação de três ou mais conjuntos básicos. Na situação-problema a seguir, para se chegar ao resultado esperado é preciso combinar cada elemento do conjunto *sucos* com cada elemento do conjunto *salgados*.

Exemplo: Em uma lanchonete existem cinco opções de suco (laranja, maracujá, goiaba, caju e pitanga) e dois tipos de salgados (coxinha e cachorro-quente). De quantas formas diferentes uma pessoa pode escolher um tipo de suco e um tipo salgado?

3.5 Estudos anteriores sobre a Combinatória

Schliemann (1988), com o objetivo de analisar como o uso de algoritmos pode auxiliar no desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, realizou um estudo com três grupos: vinte cambistas do jogo do bicho, vinte estudantes recém-aprovados no vestibular (dez das Ciências Exatas e dez das Ciências Humanas) e vinte trabalhadores para os quais não era exigida a utilização da Combinatória em suas funções profissionais e que possuíam o mesmo nível sócio-econômico dos cambistas. Cada participante resolveu dois problemas que envolviam *permutações*. Ao analisar os resultados, Schliemann relatou que as vivências profissionais dos cambistas, assim como suas experiências escolares, consideradas em sua totalidade, ajudaram no desenvolvimento de respostas sistemáticas que levaram ao resultado esperado. No que diz respeito às vivências escolares específicas sobre a Combinatória, percebeu-se que essas não apresentaram influência relevante para a resolução dos problemas. Segundo a autora, o desempenho do grupo de estudantes apresentou uma maior relação com os anos de escolarização do que com o trabalho escolar específico sobre a Combinatória. Ao se comparar o grupo de cambistas como o outro grupo de trabalhadores, observou-se que os cambistas apresentaram desempenhos mais altos. Os melhores desempenhos foram obtidos pelos participantes que interligaram a experiência cotidiana e a experiência escolar. Os resultados apontam, dessa maneira, que apenas a experiência informal ou somente a formação escolar são insuficientes para a construção da compreensão acerca da Combinatória. Schliemann enfatiza a importância de o currículo escolar interligar conhecimentos escolares e experiências extra-escolares para que as abordagens dos conceitos estejam relacionadas a situações significativas.

Eizenberg e Zaslavsky (2002, apud MORO e SOARES, 2006) analisaram as estratégias, utilizadas por alunos adultos, para verificar as soluções de problemas que envolvem *raciocínio combinatório*. Entre as estratégias mais eficientes, destacaram-se a de acrescentar justificativa para os resultados e a de usar outro modo de solução. Os autores ressaltam que a estratégia de "reexaminar a solução", a qual foi uma das mais utilizadas, apresentou baixa eficiência. Isto pode ser atribuído à dificuldade em realizar estimativas dos resultados nesses tipos de problemas. Embora estudos mostrem que crianças pequenas já começam a desenvolver o *raciocínio combinatório*, os autores ponderam que os problemas que envolvem esse tipo de raciocínio apresentam características que elevam a dificuldade em operá-los. Os pesquisadores discutem que existem obstáculos tanto no ensino quanto na aprendizagem da Combinatória, uma vez que existem incertezas em como trabalhar determinado conteúdo. Além disso, no que diz respeito à verificação das respostas, o fato de identificar um erro pode não ser o suficiente para se chegar ao resultado correto.

Miguel e Magina (2003) analisaram as estratégias de resolução de problemas combinatórios por estudantes do 1º ano de Licenciatura em Matemática. Participaram do estudo 12 estudantes que responderam um teste composto por problemas envolvendo os conceitos de *arranjo*, *combinação* e *permutação*. Entre as estratégias a que mais se destacou foi a listagem de possibilidades, apresentando ou não sistematização. As autoras ressaltam que mesmo sendo graduandos de Licenciatura em Matemática, os estudantes apresentaram dificuldades na resolução de problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*.

Moro e Soares (2006) analisaram como alunos dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental resolvem problemas de *produto cartesiano*, buscando realizar a identificação de progressivas formas de resoluções desse tipo de problema. As autoras organizaram as resoluções encontradas em níveis e subníveis, sendo o *nível 0* o mais elementar e o *nível IV* o mais avançado. Os níveis e subníveis descritos foram os seguintes: *nível 0* – soluções que não demonstraram relação com o que era solicitado no problema; *nível I* – resoluções contextualizadas, mas sem indício de relação combinatória, as quais foram divididas em três subníveis, *subnível IA* (apresenta escolha de variáveis sem nenhuma forma de combiná-las), *subnível IB* (apresenta adição de valores envolvidos incluindo ou não distratores[2]), *subnível IC* (uso de algoritmos variados para composições numéricas com valores das variáveis e valores de distratores); *Nível II* – soluções que se aproximam da relação combinatória, as quais foram classificadas em três subníveis, *subnível IIA* (apresenta apenas uma possibilidade de combinação), *subnível IIB* (apresenta alguns casos, mas envolve também valores que não fazem parte do problema), *subnível IIC* (possuem uma quantidade limitada de casos que fazem parte da resposta); *Nível III* – resoluções que mostram algumas combinações, as quais se dividem em três subníveis, *subnível IIIA* (mostra uma procura inicial por muitas combinações por meio de cálculos aditivos e multiplicativos, mas há interferência de valores distratores), *subnível IIIB* (apresenta a busca por um número maior de combinações por meio de cálculos aditivos, multiplicativos e de divisão, sem a interferência de distratores), *subnível IIIC* (mostra a procura por muitos casos, obtidos por combinações aditivo-multiplicativas) e *nível IV* – soluções combinatórias, nas quais os alunos encontram todos os casos.

Os resultados de Moro e Soares (2006) mostraram que o tipo de resolução mais utilizado pelos alunos foram as respostas contextualizadas sem indício de combinação, denominadas como *nível I*. Dentro do *nível I*, o *subnível IB*, que correspondia à adição de valores apresentados no enunciado envolvendo ou não distratores, apresentou os maiores percentuais de utilização. Vale ressaltar que em grande parte das respostas com cálculo aditivo, os alunos utilizaram "os recursos algorítmicos aritméticos de que dispõem, "arriscando" uma "continha”" (Ibidem, p.120). Essa constatação aponta a possibilidade desses alunos não estarem sendo estimulados a fazerem uso de outras representações simbólicas, além do algoritmo. A utilização de algoritmos, geralmente, é a forma mais prática de resolver uma situação-problema, entretanto, essa compreensão não deve ser imposta, mas sim construída por cada individuo, podendo utilizar-se de procedimentos menos formais no início da construção de conceitos. Tão importante quanto chegar aos resultados

[2] Moro e Soares (2006), com base em Vergnaud (1983) compreendem valores distratores como valores presentes no enunciado, mas que não influenciam na situação-problema.

corretos é conseguir argumentar sobre tais resultados, assim como testá-los e estabelecer comparações entre diferentes estratégias de resolução.

O referido estudo também aponta progressos nas formas de soluções dos participantes do 5º ano quando comparadas às soluções usadas pelos alunos do 4º ano, uma vez que somente estudantes do 5º ano conseguiram atingir os *níveis III* (obtenção de algumas combinações) e IV (presença de solução combinatória). Além disso, nenhum dos alunos do 5º ano fez uso do *nível 0* (resposta alheia ao contexto), o que foi observado, somente, por alunos do 4º ano. Percebeu-se, então, avanços das soluções que levam em consideração relações combinatórias com o passar dos anos de escolarização.

A pesquisa de Sandoval, Trigueros e Lozano (2007) foi realizada com estudantes mexicanos de 5º e 6º anos de escolarização com o objetivo de investigar o uso do *software* Diagrama de Árbol na resolução de situações combinatórias. O *software* Diagrama de Árbol foi utilizado pelas autoras como uma forma de auxiliar na superação dos baixos desempenhos apresentados por alunos da escola primária do México ao resolverem tais situações. O *software* utiliza a construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios. As autoras observaram que com o uso do Árbol os estudantes conseguiram representar os problemas e apresentaram estratégias com maior eficiência. As pesquisadoras salientaram a importância de aprofundar, em estudos posteriores, as investigações sobre a influência do *software* no desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, bem como as implicações desse recurso para situações em que são utilizados o lápis e o papel.

O estudo de Groenwald, Zoch e Homa (2009) analisou o desenvolvimento de uma sequência didática sobre a Combinatória, utilizando o *e-learning* (aprendizado eletrônico), nos padrões SCORM (Sharable Content Object Reference Model), como recurso didático. Disponibilizada na plataforma colaborativa ILIAS, a sequência buscava favorecer o aprendizado individualizado, uma vez que os conteúdos possuíam diferentes formas de apresentação, permitindo que os alunos seguissem diferentes caminhos, de acordo com as suas necessidades de aprendizagem. A sequência didática estava organizada em quatro etapas, sendo que três delas apresentavam três de abordagens (cenários) diferenciadas dos conteúdos (Cenário 1 - apresentação formal dos conteúdos; Cenário 2 - construção conceitual, através de atividades didáticas; Cenário 3 - atividades de recuperação). No Cenário 1 eram realizadas as apresentações dos conceitos e de exercícios, com posteriores atividades de avaliação, as quais tinham a finalidade de verificar se os objetivos foram alcançados. Se esses não fossem atingidos, o Cenário 2 era, então, apresentado. Nesse novo cenário, fazia-se, mais uma vez, a apresentação dos conceitos, mas com uso de um outro formato didático, seguida por uma atividade avaliativa. Caso o estudante não chegasse ao esperado, havia a apresentação do Cenário 3 que disponibilizava atividades de recuperação dos conteúdos. Os autores destacam que houve o cuidado de promover o uso de diferentes formas de representação simbólica (árvore de possibilidades, tabela, fórmulas, entre outros) a fim de auxiliar os estudantes na superação de dificuldades relacionadas à compreensão dos problemas. Os participantes da investigação foram nove alunos do quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática. As atividades foram resolvidas no laboratório de informática com a presença do professor, o qual, sempre que solicitado, mediava as situações. Alguns alunos resolveram apenas as atividades que pertenciam ao Cenário 1 de cada etapa, pois não precisaram dos demais recursos para compreender os conceitos abordados. Outros alunos, de acordo com os desempenhos que obtiveram nas atividades avaliativas, utilizaram os Cenários 2 e 3. Dessa forma, cada participante seguiu o caminho que mais se adequava ao seu ritmo de aprendizagem. Os autores pontuam que entre as dificuldades de utilização do recurso estão: a exigência de um maior envolvimento docente para a elaboração de três maneiras diferentes de apresentar os conteúdos e a necessidade de uma parceria entre equipe pedagógica e especialistas em informática, o que não é possível em todas as instituições educacionais. Entretanto, os pontos positivos da experiência se destacaram em relação aos negativos, já que o trabalho com uma sequência didática multicaminhos, proporcionou o avanço dos desempenhos dos estudantes, respeitando o perfil de cada um deles, assim como permitiu que o professor atuasse como orientador nas atividades, ampliando sua interação com os alunos.

O estudo de Salgado e Trigueros (2009) teve como objetivo desenvolver e analisar intervenções abordando a Combinatória, fazendo uso da teoria APOE (ações, processos, objetos e esquemas) a qual possui um enfoque construtivista. Nessas intervenções, as autoras buscaram compreender o desenvolvimento dos estudantes em problemas de ordenação e em problemas em que a ordem não influencia a geração de novas possibilidades. No estudo, foram consideradas situações de ordenação os problemas que envolvem o *arranjo,* a *permutação* e o *produto cartesiano*, já os problemas sem ordenação dizem respeito às situações de *combinação*. Os participantes da pesquisa cursavam a disciplina Álgebra Superior em uma universidade do México. Os melhores desempenhos foram obtidos, quando foram abordados tanto os problemas que as autoras nomearam como ordenação quanto os problemas sem ordenação. O trabalho com ambos os tipos de problemas proporcionou uma maior percepção das diferenças entre eles. Foi possível observar que os alunos, ao resolverem os problemas pela primeira vez utilizavam métodos gráficos, buscando contar todas as possibilidades uma a uma. Destacou-se, nesse início, a utilização de diagramas como estratégia de resolução. Na medida em que foram resolvendo mais problemas, as ações começaram a ser interiorizadas, permitindo assim os processos de generalizações, os quais auxiliaram os alunos a deduzirem as fórmulas. Os problemas de *combinação* foram os que os estudantes apresentaram os mais fracos desempenhos, uma vez que havia dificuldades na maneira de diferenciá-los dos demais tipos de significados da Combinatória.

Pessoa e Borba (2010) analisaram como alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio compreendem os problemas que envolvem a Combinatória e quais estratégias utilizam. Os estudantes resolveram um teste constituído por oito problemas que abordavam os diferentes significados da Combinatória, sendo essa uma das maiores contribuições do estudo: abordar tanto *produtos cartesianos*, quanto *arranjos, combinações* e *permutações*. As autoras realizaram as análises dos dados por tipo de problema e por ano de escolaridade. Os resultados apontaram que a principal dificuldade dos alunos em resolver problemas de Combinatória está relacionada ao esgotamento de todas as possibilidades. A maioria dos acertos foi observada nos problemas que apresentaram uma grandeza numérica pequena, uma vez que a maioria das estratégias utilizadas não facilitava o esgotamento de um número extenso de possibilidades. Também se observou que o *produto cartesiano* foi o significado que os estudantes obtiveram os melhores desempenhos. As maiores dificuldades foram identificadas nas resoluções dos problemas de *permutação* e de *combinação*. Foram observadas diferenças significativas entre os níveis de escolarização ($p < 0,001$), isto é, os desempenhos dos estudantes do Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) foram superiores aos desempenhos do Ensino Fundamental I (2º ao 5º) e os desempenhos do Ensino Médio foram significativamente melhores que os desempenhos obtidos no Ensino Fundamental II. Desse modo, verificaram-se avanços dos desempenhos no decorrer dos anos de escolarização. Os estudantes de todos os níveis de ensino fizeram uso de diferentes formas de resolução (desenho, listagem de possibilidades, algoritmo da multiplicação, entre outras). Ressalta-se que o uso de fórmulas foi a única representação que foi usada exclusivamente por estudantes do Ensino Médio. De uma maneira geral, os estudantes desse nível, apesar de já terem vivenciado a instrução formal sobre o conceito, faziam uso inadequado das fórmulas e apresentavam preferência pela utilização de estratégias menos formais. Assim, os dados apontam que a instrução formal provavelmente não está auxiliando na compreensão dos significados, para que as fórmulas sejam utilizadas de modo adequado. As autoras salientam a necessidade do desenvolvimento de trabalhos que auxiliem a compreensão dos diversos significados da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010) investigaram como o *software* Diagrama de Árbol pode auxiliar no desenvolvimento do *raciocínio combinatório* por meio da construção de árvores de possibilidades. Participaram da pesquisa 19 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Primeiramente o *software* foi apresentado e, em seguida, os estudantes responderam, em duplas ou trios, uma ficha composta por oito problemas. Cada problema apresentava dois itens, o item A gerava um número menor de possibilidades e deveria ser resolvido usando o *software*, enquanto que no item B, que possuía a solução com um número maior de possibilidades, cabia ao aluno a escolha da representação simbólica para resolvê-lo. Os estudantes resolviam primeiro o item A. De um modo geral, as autoras perceberam que a resolução dos problemas com uso do Diagrama de Árbol (item A) foi insuficiente para ajudar os participantes a realizar generalizações no item B. Posteriormente, foi realizado um teste escrito individual e também uma entrevista com integrantes de cada dupla ou trio para se conhecer as vantagens e desvantagens do uso do *software* que foram apontadas pelos alunos. Entre as desvantagens encontram-se: o fato de não serem visualizadas, ao mesmo tempo, todas as possibilidades formadas; o idioma utilizado (espanhol); a ausência de alguma forma de *feedback* e a necessidade de encontrar todos os casos para posteriormente destacar os que são válidos. Uma das principais vantagens indicadas pelos alunos diz respeito à organização e praticidade proporcionadas pelo Diagrama de Árbol na resolução das questões. O estudo mostra que apesar das limitações do uso do *software*, o trabalho com a árvore de possibilidades pode auxiliar os alunos a compreender melhor as relações combinatórias.

O estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011) analisou a influência do mesmo *software*, o Diagrama de Árbol, na compreensão de situações combinatórias. Participaram do estudo dois grupos, cada um composto por oito estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Os grupos realizaram um teste inicial e um teste final (ambos usando lápis e papel), sendo que em um desses grupos (Grupo 1) foram realizadas duas sessões de intervenção com a utilização do *software*. Na primeira sessão o *software* foi apresentado aos participantes que responderam as questões do teste inicial com uso de tal recurso. Durante a resolução, as pesquisadoras realizaram questionamentos e comentários para auxiliar na compreensão das propriedades invariantes da Combinatória. Na segunda sessão foram usados outros problemas e os alunos usaram o *software* com maior autonomia. Na análise dos dados do teste inicial verificou-se um baixo desempenho dos estudantes, já que, considerando-se os dois grupos, havia um total de 128 acertos possíveis, mas foram encontradas apenas 18 respostas corretas. O *produto cartesiano* foi o tipo de problema que os estudantes demonstram maior compreensão. No teste final verificou-se um percentual de 93,75% de respostas corretas no Grupo 1, enquanto que o Grupo 2 apresentou um percentual 68,75% desse tipo de resposta. Desse modo, os resultados do teste final ressaltam a importância do uso do *software* para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório. O produto cartesiano* permaneceu como tipo de problema com maior número de acertos nos dois grupos, ressaltando-se que o grupo que passou pela intervenção obteve quase 100% de acertos nesse tipo de problema. Já a *permutação* foi o tipo de problema que apresentou os menores percentuais de acertos nos dois grupos. Além dos avanços quantitativos, foram observados, no Grupo 1, progressos no uso das estratégias de resolução, como a construção de árvore de possibilidades. As autoras destacam que mesmo com as contribuições do *software*, é fundamental a mediação docente para chamar atenção sobre os aspectos que diferenciam cada tipo de problema.

Os estudos apresentados mostraram importantes contribuições para a compreensão de aspectos referentes à resolução de problemas que envolvem o *raciocínio combinatório.* Entre essas contribuições ressaltam-se: a articulação entre experiências escolares e extra-escolares, o trabalho como os diversos significados da Combinatória, as reflexões sobre as propriedades invariantes e o uso de diferentes representações simbólicas. O próximo capítulo apresentará estudos que discutem a Combinatória na Educação de Jovens e Adultos. Essa discussão é bastante pertinente, uma vez que o presente trabalho buscou analisar o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* na EJA.

CAPÍTULO 4 - O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Neste capitulo serão apresentados estudos que abordam a Combinatória especificamente na Educação de Jovens e Adultos. Três desses estudos investigaram a compreensão de alunos dessa modalidade de ensino acerca do *raciocínio combinatório* - Santos (2008), Lima e Borba (2010) e Barreto e Borba (2010). Uma outra pesquisa - Martins e Borba (2010) - realizou a análise de livros didáticos voltados para o público da EJA.

Santos (2008) fez o relato de uma sequência de ensino sobre a Combinatória que realizou com 20 alunos de uma turma de Módulo III da EJA (correspondente ao quarto e quinto anos do Ensino Fundamental). A sequência tinha como objetivo analisar a compreensão sobre as estruturas multiplicativas, por meio do *raciocínio combinatório*. A turma foi organizada em duplas e na primeira atividade da sequência, os estudantes resolveram um problema de *produto cartesiano*, nesse momento a pesquisadora estimulou os alunos a utilizarem diferentes formas de representação simbólica (desenhos, gráficos, árvore de possibilidades). Na segunda atividade os alunos resolveram mais três problemas, sendo um de *permutação*, um de *combinação* e um de *produto cartesiano.* Buscou-se com essa atividade, fazer com que os alunos operassem com diferentes tipos de problemas combinatórios, o que seria importante para a realização da próxima atividade. Após a resolução, os estudantes apresentaram para o restante da turma como haviam resolvido cada problema. Por fim, na terceira atividade cada dupla elaborou situações-problema para que os demais colegas resolvessem. Após as intervenções realizadas pela pesquisadora, os alunos passaram a refletir melhor sobre os problemas, fazendo uso das representações exploradas durante a sequência. A atividade de elaboração de problemas foi de difícil realização para os estudantes, pois esses apresentaram dúvidas na compreensão das propriedades invariantes. A autora pode perceber que houve uma grande dificuldade dos alunos compreenderem que os problemas que envolvem a Combinatória estão inseridos no Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. Isto é, os estudantes não relacionavam as resoluções dos problemas combinatórios ao uso da multiplicação.

Lima e Borba (2010) realizaram uma pesquisa com alunos que pertenciam a diferentes etapas da Educação de Jovens e Adultos (anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), com o objetivo de analisar como esses alunos compreendiam problemas de estrutura multiplicativa, especialmente os que envolvem a Combinatória. Para isso, os participantes, 150 ao todo, resolveram, individualmente, 16 questões que abordavam diferentes tipos de problemas multiplicativos (*arranjo*, *combinação*, multiplicação, partição, *permutação*, *produto cartesiano direto*, *produto cartesiano inverso* e quotição). Os estudantes, de uma forma geral, apresentaram melhores desempenhos na resolução de problemas de multiplicação direta, partição e quotição, do que em situações que abordavam a Combinatória. Entre os significados que envolvem esse conceito, os alunos mostraram maior compreensão na resolução de problemas de *produto cartesiano*. Os resultados do estudo apontam a resistência dos alunos em fazer uso de representações simbólicas não-formais para resolver problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*, sendo a listagem de possibilidades a representação não-formal mais utilizada pelos estudantes. Em suas análises, as autoras constataram que fatores, como anos de escolarização, série que cursavam e o tipo de problema, tiveram forte influência no desempenho dos alunos. O estudo também verificou melhoras nos desempenhos dos estudantes, na medida em que iam avançando os anos de escolarização. Nesse sentido, a investigação, assim como a de Schliemann (1988), aponta que os desempenhos progridem à medida que as vivências escolares e não-escolares aumentam. Portanto, tais experiências, consideradas em sua totalidade, ajudam no desenvolvimento da compreensão das relações combinatórias.

Barreto e Borba (2010) investigaram a compreensão acerca da Combinatória em alunos da EJA, os quais faziam parte de um programa de correção de fluxo do Ensino Médio (Programa Travessia). Os participantes desse estudo foram 15 alunos de uma turma que já haviam vivenciado o módulo em que eram ministradas aulas de Matemática e 15 alunos de outra turma que ainda não havia recebido aulas de Matemática, totalizando assim 30 estudantes. Todos responderam um teste composto por oito problemas combinatórios, sendo dois de cada tipo (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*). Na análise dos dados não foram identificadas diferenças significativas entre os desempenhos das turmas ($p = 0,868$), o que mostra que a escolarização não se apresentou como um diferencial entre essas turmas. O significado que os alunos apresentaram maior compreensão foi o *produto cartesiano*. A maioria dos participantes não explicitou as estratégias utilizadas nas questões, limitando-se à escrita de respostas incorretas. Entre as estratégias que foram explicitadas, destacou-se o uso da listagem de possibilidades, entretanto, os alunos tiveram muita dificuldade em esgotar todas as possibilidades.

Martins e Borba (2010) fizeram uma análise de conteúdo de 19 livros didáticos da EJA, os quais foram aprovados pelo Plano Nacional do Livro de Alfabetização de 2008, com o objetivo de investigar a abordagem dos problemas que envolvem as estruturas multiplicativas. As pesquisadoras constataram que a quantidade de atividades matemáticas sugeridas é bem inferior ao número de atividades que trabalham a Língua Portuguesa. Entre as situações matemáticas encontradas ligadas às estruturas multiplicativas, foi identificada uma ênfase maior (88%) nos problemas de multiplicação e divisão. Os problemas de Combinatória apresentaram uma pequena representatividade (9%). As demais atividades (3%) estavam relacionadas aos números racionais. A maioria das atividades analisadas possuía contextos coerentes com o universo do público da EJA, como cálculos a partir de situações de compra e venda, valores usados para o consumo de alimentos, cálculos de orçamentos, entre outras. As autoras observaram que, de um modo geral, há uma pequena variação de representações simbólicas, tanto das que são utilizadas na apresentação dos problemas, quanto das que são solicitadas pelos autores para a resolução de tais problemas. O estudo ressalta a importância da exploração de diferentes representações simbólicas, para que os estudantes "percebam que diferentes simbologias podem ser utilizadas e que as mesmas dão destaque a diferentes aspectos dos conteúdos matemáticos" (MARTINS e BORBA, 2010, p.8).

A pesquisa de Martins e Borba (2010), em que foram analisadas coleções de livros didáticos, traz importantes contribuições sobre a relevância da abordagem de diferentes formas de representações simbólicas no trabalho com as estruturas multiplicativas, uma vez que cada forma de representação ajuda a evidenciar distintas propriedades invariantes. É importante ressaltar que o livro didático ainda é uma das principais fontes de pesquisa utilizadas pelos professores e, dessa forma, necessita ser bem elaborado para possibilitar amplos desenvolvimentos conceituais dos alunos.

A partir da análise dos estudos realizados com estudantes, os quais foram descritos acima, foi possível perceber que os alunos da EJA apresentam dificuldade em operar com os significados da Combinatória. Desse modo, é relevante que sejam realizadas investigações que analisem as contribuições de intervenções para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

No próximo capítulo serão apresentados os objetivos (geral e específico), os participantes e os procedimentos metodológicos do presente estudo.

CAPÍTULO 5 - MÉTODO

Neste capítulo serão apresentados os objetivos, os participantes, os procedimentos metodológicos e a forma como foi realizada a análise dos dados do presente estudo. Inicialmente são descritos os objetivos gerais e específicos e, em seguida, apresentam-se os participantes, caracterizando-os em relação ao quantitativo e como esses foram organizados em grupos. Posteriormente, são expostos os procedimentos da coleta de dados, descrevendo-se os testes e as formas de intervenção que foram realizados pelos grupos. Por fim, é apresentado o modo como foram realizadas as análises dos dados.

5.1 Objetivos

Geral

Investigar a influência de diferentes tipos de representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por alunos da Educação de Jovens e Adultos.

Específicos

- Analisar o desempenho de alunos da EJA na resolução de problemas combinatórios antes de um processo de intervenção.
- Observar as formas de representação simbólica utilizadas pelos alunos antes de um processo de intervenção.
- Analisar o desempenho dos alunos após a intervenção em diferentes grupos.
- Verificar as formas de representação simbólica utilizadas após a intervenção.
- Comparar os desempenhos entre os grupos e as formas de representação simbólica usadas após a intervenção.

5.2 Participantes

Participaram da pesquisa 24 estudantes de escolas públicas da Região Metropolitana do Recife, os quais pertenciam a turmas da Modalidade da Educação de Jovens e Adultos correspondentes ao 4º e 5º anos do Ensino Fundamental regular. Tais turmas possuem nomenclaturas diferentes dependendo da rede de ensino. Na rede estadual são denominadas *Fase 2*, já na rede municipal são as chamadas *Módulo III*, mas ambas referem-se à mesma etapa da EJA, na qual os alunos cursam em um ano letivo o que seria equivalente ao 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

Foram investigadas três turmas de escolas diferentes, sendo duas da rede estadual de ensino e uma da rede municipal e em cada turma foram selecionados oito participantes. Desse modo, formaram-se três grupos, cada um composto por oito estudantes de uma mesma turma.

5.3 Procedimentos metodológicos

Os procedimentos de coleta de dados do presente estudo consistiram em três momentos: o pré-teste, a intervenção e o pós-teste. Primeiramente, três turmas da EJA (Módulo III ou Fase 2) realizaram um pré-teste com o objetivo de verificar o desempenho dos estudantes anterior à intervenção e para, a partir dessas informações, selecionar os participantes da pesquisa, formando três grupos. A intervenção consistiu na resolução dos problemas do pré-teste. A distinção entre os grupos se deu em relação às formas de representação simbólica usadas em cada um desses. Após esse momento, foi realizado o pós-teste, no qual os alunos resolveram uma nova relação de problemas para que fossem avaliados os possíveis avanços na resolução de problemas combinatórios.

Pré-teste

Inicialmente, foi elaborada uma sequência de situações-problema, a partir dos resultados de um estudo piloto e com base nos estudos de Barreto e Borba (2010), Martins e Borba (2010), Pessoa e Borba (2009), Lima e Borba (2010) e Azevedo, Costa e Borba (2011). Essa sequência foi composta por oito problemas sendo dois envolvendo cada um dos significados da Combinatória: *arranjo, combinação, permutação* e *produto cartesiano*. Para cada significado havia um problema com resultado menor e outro com resultado maior. Os menores resultados ficaram entre seis e 12 enquanto os maiores estão entre 15 e 24. Ao controlar esses valores, buscou-se que todas as questões pudessem ser resolvidas por listagem das possibilidades, não sendo, desse modo, necessário o domínio de procedimentos mais formais (tais como multiplicações simples, princípio fundamental da contagem ou fórmulas) para se chegar ao resultado esperado. Os problemas utilizados no pré-teste foram retomados na intervenção. A seguir, estão os problemas do pré-teste na ordem em que foram apresentados aos participantes. Essa ordem foi escolhida de forma aleatória – com os tipos de problemas alternados entre si – e foi a mesma para todas as turmas.

1. Maria tem em sua casa sete tipos de frutas (morango, acerola, cajá, graviola, laranja, pitanga e uva). Ela fabrica sucos em casa e decidiu fazer sucos que combinem duas frutas. Quantos são todos os tipos de sucos diferentes que ela pode fabricar combinando duas dessas frutas? (***combinação***)

2. Quatro competidores (José, Marcos, Bruno e Sérgio) estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares? (***arranjo***)

3. Para entrar em um estádio de futebol, Pedro pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C, D). Depois do jogo, para sair do estádio, Pedro possui cinco opções de saídas diferentes (E, F, G, H, J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do estádio? (adaptado de Azevedo, Costa e Borba, 2010) (***produto cartesiano***)

4. Quatro costureiras (Alda, Vera, Joana e Creusa) formaram um grupo para participar de uma competição. Elas precisam dar um nome ao grupo, combinando as letras iniciais dos seus nomes. Quantos nomes diferentes elas podem formar? (***permutação***)

5. Quatro vereadores (Carlos, Luís, Amanda e Daniel) da cidade de Camaragibe querem participar de um encontro das cidades de Pernambuco. Cada cidade enviará apenas dois vereadores. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos dois vereadores para representar a cidade de Camaragibe? (***combinação***)

6. Três amigas (Camila, Dalva e Luci) estão tirando fotografias. De quantas maneiras diferentes elas podem se posicionar lado a lado para tirar fotografias? ***(permutação***)

7. Utilizando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, quantos números de dois algarismos diferentes, sem repeti-los, podem ser formados?(***arranjo***)

8. Uma loja de estofados vende sofás de três tamanhos diferentes (pequeno, médio e grande) e também possui as opções de quatro cores diferentes (branco, marrom, verde e laranja). Quantos tipos de sofás diferentes são vendidos nessa loja? (***produto cartesiano***)

Foram testadas três turmas de diferentes escolas públicas. A escolha desse número de turmas ocorreu devido à forma como foi estruturada a intervenção, que investigou o uso de diferentes formas de representações simbólicas, com grupos distintos (conforme descrito na Tabela 1, a seguir).

Na análise dos dados do pré-teste foram identificados os tipos de resposta e tipos de representação simbólica mais utilizados pelos estudantes. A partir do pré-teste, foram selecionados, em cada turma, oito alunos formando, desse modo, três grupos. O critério de escolha utilizado foi o quantitativo de acertos. Procurou-se garantir que os grupos apresentassem médias de acertos próximas, apresentando, assim, formações semelhantes.

O procedimento seguinte consistiu no momento de intervenção, no qual foram resolvidas as mesmas questões do pré-teste.

Intervenção

Após a seleção dos participantes do estudo, por meio da análise do pré-teste, foi realizada a intervenção. Tal procedimento ocorreu de modo coletivo com todos os estudantes presentes nas turmas. Entretanto, com já foi explicitado no tópico anterior, os participantes da pesquisa não foram todos os estudantes. A realização com toda classe, e não apenas com os oito selecionados, permitiu que a prática pedagógica se aproximasse da realidade que é vivenciada no cotidiano escolar. A pesquisadora foi quem realizou as intervenções em cada uma das três turmas. As questões foram resolvidas seguindo a ordem do pré-teste e para isso a pesquisadora utilizou o quadro da sala. Durante a resolução foram lançadas perguntas problematizadoras para estimular a reflexão e envolver os estudantes nas resoluções. De um modo geral, na realização da intervenção utilizou-se, em cada turma, um período de aproximadamente duas horas.

Em cada uma das turmas, a resolução das questões teve uma diferente organização na utilização de representações simbólicas. As representações exploradas foram a listagem e a árvore de possibilidades, ambas representações escritas. Estudos anteriores como Lima e Borba (2010) e Barreto e Borba (2010) observaram que a listagem de possibilidades é uma forma de representação que apresenta um relevante número de utilizações por alunos da EJA, quando esses resolvem problemas que envolvem a Combinatória. Entretanto, os estudantes apresentam muita dificuldade no esgotamento das possibilidades. A decisão de utilizar a listagem se justifica, portanto, no que foi evidenciado nesses estudos anteriores, que mostram que o uso da listagem é algo praticado pelos alunos, mas que precisa ser explorado para que esses alcancem os resultados das questões.

A escolha pelo uso da árvore de possibilidades deve-se ao fato de que se trata, assim como a listagem, de uma representação simbólica expressa através da escrita das possibilidades, sendo que, a árvore de possibilidades proporciona uma organização que permite uma melhor evidenciação de regularidades dos problemas, auxiliando os alunos na percepção de tais regularidades. Estudos como o de Azevedo, Costa e Borba (2011) evidenciaram sucessos em intervenções com árvores de possibilidades geradas por meio de um *software* denominado Diagrama de Árbol.

Outras formas de representação, como manipulativos – que podem ser mais indicados para o público infantil – e uso de *software* – que já apresenta estudos que obtiveram resultados positivos no ensino regular, também são bastante relevantes para o desenvolvimento do raciocínio, mas a opção pela utilização de representações escritas também está relacionada ao fato de que essas podem ser utilizadas em qualquer sala de aula.

É importante que o estudante tenha a oportunidade de conhecer e explorar diferentes formas de representações simbólicas, já que cada representação ajuda a evidenciar alguma/algumas propriedades invariantes de um determinado conceito, mas não consegue apresentar claramente todas as suas propriedades. Dessa forma, é muito relevante que a prática pedagógica garanta ações que contemplem o uso de diferentes representações simbólicas, a fim de que o aluno crie estratégias para testar as soluções encontradas, estimulando a compreensão acerca de um determinado objeto matemático.

A Tabela 1 mostra como se deu a intervenção em cada um dos grupos.

Tabela 1 – Organização do uso das representações simbólicas em cada grupo

Grupos	Tipos de Representações Simbólicas	
Grupo 1	Listagem – quatro primeiros problemas (combinação – arranjo. – produto cartesiano – permutação)	Árvore de Possibilidades - quatro últimos problemas (combinação – permutação – arranjo – produto cartesiano)
Grupo 2	Apenas árvore de possibilidades (oito problemas)	
Grupo 3	Apenas listagem (oito problemas)	

Como visto na tabela, o Grupo 1 vivenciou a resolução das quatro primeiras situações-problema da sequência por meio da listagem de possibilidades. Em seguida, foram resolvidas as demais questões, nas quais foram utilizadas árvores de possibilidades. É importante ressaltar que em todos os significados (*arranjo, combinação, permutação* e *produto cartesiano*), um dos problemas foi resolvido por meio da listagem e o outro com o uso da árvore de possibilidades.

O Grupo 2 utilizou apenas árvores de possibilidades na resolução de todos os problemas.

O Grupo 3, semelhante ao Grupo 2, resolveu todos os problemas fazendo uso de apenas um tipo de representação que nesse caso foi a listagem de possibilidades.

Às professoras das turmas foi informado que os alunos estavam resolvendo problemas multiplicativos e se questionou qual o conteúdo que eles estavam trabalhando naquele momento. Em todas as turmas, as professoras estavam desenvolvendo trabalhos sobre o Sistema de Numeração Decimal e sobre estruturas aditivas (adição e subtração). As educadoras permaneceram nas salas durante a realização dos procedimentos, apenas como observadoras.

A seguir será apresentado o roteiro usado na intervenção. Buscou-se segui-lo em cada um dos grupos, a fim de que o diferenciador entre esses estivesse centrado nas formas de representação simbólicas utilizadas. A intervenção de cada grupo foi áudio gravada.

Roteiro da intervenção

- A pesquisadora informou aos alunos que as questões do pré-teste seriam resolvidas e que, neste momento todos poderiam expressar suas opiniões e dar sugestões.
- Foi esclarecido para o grupo que as resoluções seriam organizadas no quadro da sala pela pesquisadora, levando em consideração as discussões que seriam realizadas. Em seguida, entregou-se a cada estudante uma folha contendo os mesmos problemas do pré-teste, sem resoluções, para que os alunos pudessem acompanhar a leitura e fazer os seus registros.
- Após ler cada questão, a pesquisadora pediu para que os alunos comentassem como compreenderam o problema e que dessem sugestões de como solucioná-lo. Em cada problema, era ressaltada a representação simbólica que deveria ser utilizada. Caso algum aluno apresentasse outra forma de resolução (o uso da multiplicação, por exemplo), a pesquisadora pediria para que o problema fosse resolvido através da utilização da representação simbólica (árvore de possibilidades ou listagens) que foi informada ao grupo, mas nenhum aluno sugeriu o uso de representações diferentes das que foram abordadas na intervenção.
- À medida que os estudantes expressavam como compreenderam a questão, a pesquisadora realizava perguntas que chamavam atenção para as seguintes propriedades invariantes da Combinatória: esgotamento das possibilidades, número de elementos utilizados em cada possibilidade e influência exercida pela ordem dos elementos para a formação de novas possibilidades. Esperava-se que com tais perguntas, os alunos avançassem na compreensão, ajudando-os a entender o que foi solicitado pelos problemas e como resolvê-los. A seguir serão apresentados exemplos de questionamentos usados sobre cada uma dessas propriedades.
    - Esgotamento das possibilidades: *Vocês acreditam que encontramos todas as possibilidades? Qual possibilidade poderia ainda ser formada? Será que conseguimos encontrar todas as formas possíveis de combinar determinado elemento? Agora que encontramos todas as combinações com o elemento X o que se deve fazer?*
    - Número de elementos usados em cada possibilidade: *Quantos elementos serão usados em cada uma das possibilidades deste*

problema? Como escolheremos os elementos (se de um único conjunto ou um elemento de cada conjunto)?

- Influência exercida pela ordem dos elementos para a formação de novas possibilidades: *(observando determinada possibilidade) Vocês acham que trocar a ordem de desses elementos vai criar uma nova possibilidade? Por quê?*

- A pesquisadora sistematizou no quadro as respostas dadas pelos estudantes. Quando as respostas dos alunos não se aproximavam dos procedimentos esperados, a pesquisadora fazia os devidos esclarecimentos e iniciava a resolução do problema, fazendo, em seguida, novos questionamentos para que o grupo participasse da continuidade da resolução.
- Durante as resoluções, a pesquisadora sugeriu e demonstrou o uso da letra inicial para representar cada elemento ao invés da escrita do nome completo, o que teve a finalidade de estimular os estudantes a usar linguagem simbólica, auxiliando-os, dessa forma, a agilizar suas respostas e avançar no pensamento matemático.
- Foi questionado aos alunos se havia alguma estratégia que ajudasse a verificar se todos os elementos foram utilizados adequadamente nas respostas, encontrando-se, desse modo, todas as possibilidades. O objetivo desse questionamento foi chamar a atenção dos estudantes para o uso de estratégias que garantissem o esgotamento das possibilidades. A utilização da ordem em que estão dispostos os elementos no conjunto foi uma dessas estratégias que foi bastante útil para que nenhum dos elementos deixasse de ser usado nas respostas.
- Nos grupos que utilizaram a árvore de possibilidades, a pesquisadora, após ler a primeira questão em que seria utilizada essa representação e discutir com os alunos o que era solicitado no problema, apresentou como a árvore de possibilidades é construída, uma vez que essa representação não é comumente usada pelos alunos e muitos a desconheciam, conforme já havia se verificado no estudo piloto e que foi confirmado pelos participantes do presente estudo.

- No Grupo 1 foi questionado aos alunos, ao término da intervenção, qual das duas representações eles consideraram que melhor auxiliou nas resoluções dos problemas.

Pós-teste

Posteriormente às atividades de intervenção, foi realizado um pós-teste com todos os grupos, a fim de verificar se ocorreram avanços nos desempenhos dos estudantes. Também buscou-se analisar se o uso de diferentes representações, assim como as formas de alternar tais representações influenciaram o desempenho dos participantes.

A seguir serão apresentadas as questões do pós-teste. São oito questões, duas de cada um dos significados da Combinatória que, igualmente ao pré-teste, foram elaboradas tendo como base um estudo piloto e os estudos de Barreto e Borba (2010), Martins e Borba (2010), Pessoa e Borba (2009), Lima e Borba (2010) e Azevedo, Costa e Borba (2011), os quais já foram citados anteriormente. Os valores dos resultados foram novamente controlados, para garantir que os problemas pudessem ser resolvidos através do uso das representações simbólicas trabalhadas nas intervenções. Os menores valores estão entre seis e 12 e os maiores entre 20 e 24. A ordem em que os problemas estão dispostos é a mesma que foi apresentada aos estudantes, a qual foi organizada de modo aleatório.

1. Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos? (***combinação***)

2. Em uma lanchonete existem cinco opções de suco (laranja, maracujá, goiaba, caju e pitanga) e dois tipos de salgados (coxinha e cachorro-quente). De quantas formas diferentes uma pessoa pode escolher um tipo de suco e um tipo salgado? (***produto cartesiano***)

3. Sete pessoas (João, Camila, Beatriz, Tatiana, Marcos, Danilo e Flávio) participaram de uma reunião. No final, cada uma cumprimentou outra, apenas

uma vez, através de um aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados? (***combinação***)

4. Cinco candidatos (Lucas, Vitor, Cláudio, Jorge e Marina) são os finalistas de um concurso de cantores. De quantas formas diferentes pode se ter o primeiro e o segundo lugares? (***arranjo***)

5. Para uma entrevista de emprego, estão inscritos quatro rapazes (Bruno, Rodrigo, Valter e Gustavo) e seis moças (Celina, Mônica, Andrea, Iara, Rita e Fabiana). Desses, apenas um casal será selecionado. Quantos casais diferentes podem ser formados? (***produto cartesiano***)

6. Quatro pessoas (Ana, Miguel, Érica e Felipe) estão, em pé, na fila do caixa de uma padaria. De quantas maneiras elas podem estar posicionadas nessa fila? (***permutação***)

7. Quatro times do estado de Pernambuco (Santa Cruz, Porto, Náutico e Sport) estão disputando a semifinal do campeonato estadual de futebol. De quantas maneiras diferentes podemos ter o campeão e o vice-campeão? (adaptado de Azevedo, Costa e Borba, 2010) (***arranjo***)

8. Utilizando os algarismos 2, 4 e 6, de quantas maneiras diferentes pode-se escrever números de três algarismos diferentes? (***permutação***)

5.4 Análise de dados

As análises dos dados coletados foram qualitativas e quantitativas. Qualitativamente buscou-se verificar o desempenho dos estudantes antes e após a intervenção por meio de análises dos tipos de resposta e formas de representação simbólicas utilizadas no pré e no pós-teste.

Nas análises quantitativas foi utilizado o *software* estatístico Statistical Package for the Social Sciences – SPSS. Com o auxilio do SPSS foi possível analisar o desempenho dos participantes em relação à grandeza numérica dos resultados, aos significados da Combinatória, além de comparar os desempenhos no pré-teste e no pós-teste em cada grupo e também entre os grupos.

CAPÍTULO 6 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISES DOS RESULTADOS

Como descrito no método, o pré-teste foi realizado por três turmas de EJA, todas com equivalência ao quarto e quinto anos do Ensino Fundamental regular. Os estudantes resolveram oito problemas combinatórios e, a partir das análises dessas resoluções, selecionaram-se oito estudantes em cada turma para serem os participantes da pesquisa. Assim sendo, foram formados três grupos, denominados Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3, cada um constituído por estudantes de uma mesma turma. Na seleção dos participantes buscou-se garantir que os três grupos tivessem médias semelhantes. Para tanto, o critério utilizado foi o quantitativo de um dos tipos de resposta verificado nas análises (acerto parcial). Posteriormente, cada grupo passou por uma sessão de intervenção, sendo que em cada um deles foram usadas representações simbólicas distintas. E, por fim, foi realizado o pós-teste com os grupos.

Neste capítulo será realizada a apresentação e a análise dos resultados obtidos nos procedimentos metodológicos.

6.1 ANÁLISES DO PRÉ-TESTE

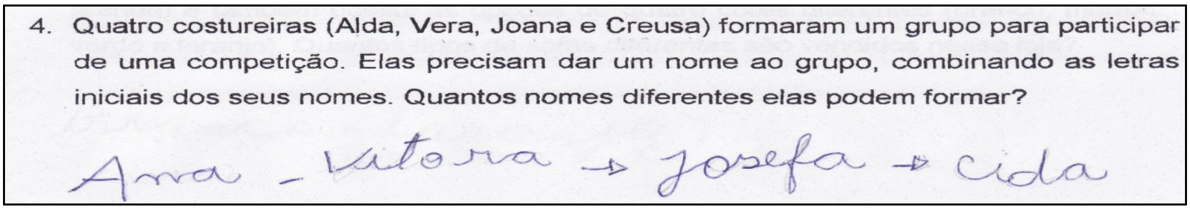
Nesta seção serão apresentados os resultados do pré-teste. A partir desse teste, buscou-se verificar, antes de uma intervenção na temática, o desempenho dos estudantes na resolução de problemas combinatórios. Para isso foram analisados os tipos de resposta e as formas de representação simbólica usados por esses estudantes. Os resultados do pré-teste também foram utilizados para selecionar os participantes do estudo.

6.1.1 Tipos de resposta no pré-teste

Nas análises do pré-teste não foram encontradas respostas corretas. Categorizaram-se as respostas verificadas em: incorreta sem relação combinatória e incorreta com relação combinatória.

Resposta incorreta sem relação combinatória – fazem parte dessa categoria as respostas em branco e as respostas nas quais não foi evidenciado o estabelecimento de relação combinatória. A seguir (Figura 1) há um exemplo desse tipo de resposta.

Figura 1 – Exemplo de resposta incorreta sem relação combinatória

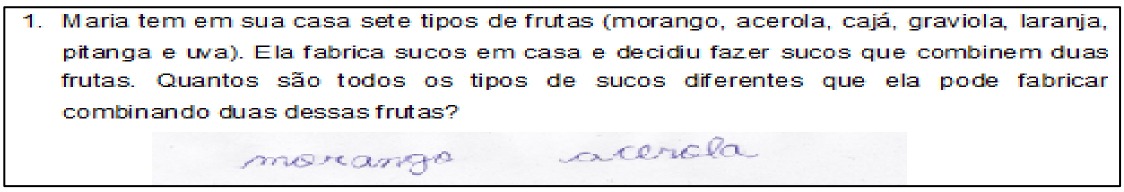

4. Quatro costureiras (Alda, Vera, Joana e Creusa) formaram um grupo para participar de uma competição. Elas precisam dar um nome ao grupo, combinando as letras iniciais dos seus nomes. Quantos nomes diferentes elas podem formar?

Ana - Vitoria → Josefa → Cida

Como pode ser visto na Figura 1, o estudante deveria identificar as formas possíveis de permutar as letras AVJC, entretanto, compreendeu que era necessário escrever quatro palavras, cada uma começando com uma dessas letras. Desse modo, percebe-se que não houve uma solução combinatória que atendesse ao que foi solicitado pelo problema.

Resposta incorreta com relação combinatória (acerto parcial) – nesse tipo de resposta verificou-se o estabelecimento de relação combinatória, atendendo de forma parcial ao que foi solicitado na questão, uma vez que eram apresentados um ou dois casos pertencentes à resposta correta. Dessa maneira, essas respostas foram consideradas como acertos parciais, sendo esse o tipo de resposta com maior nível de elaboração que foi encontrado no pré-teste. A Figura 2 apresenta uma resolução em que há um acerto parcial. O problema pede a identificação do número de possibilidades de se combinar duas frutas diferentes a partir de um conjunto composto por sete frutas. O estudante compreende que deverá combinar duas frutas, entretanto lista apenas uma possibilidade, não demonstrando a compreensão da propriedade invariante referente ao esgotamento dos casos.

Figura 2 – Exemplo de resposta incorreta com relação combinatória


1. Maria tem em sua casa sete tipos de frutas (morango, acerola, cajá, graviola, laranja, pitanga e uva). Ela fabrica sucos em casa e decidiu fazer sucos que combinem duas frutas. Quantos são todos os tipos de sucos diferentes que ela pode fabricar combinando duas dessas frutas?

morango acerola

6.1.2 Tipos de resposta por significado da Combinatória no pré-teste

A Tabela 2 mostra os percentuais dos tipos de respostas considerando-se os significados da combinatória (*arranjo, combinação, permutação* e *produto cartesiano*). Por meio da análise dessa tabela é possível verificar que nos três grupos, a *permutação* e o *produto cartesiano* foram os significados que apresentaram inicialmente os menores percentuais de *acertos parciais*, sendo, portanto, os tipos de problema que os participantes demonstraram menor compreensão inicial. Nos dos problemas de *produto cartesiano*, os estudantes mostraram não compreender a relação existente entre os dois conjuntos para se chegar ao resultado, já que seria necessário combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro conjunto para obter o total de possibilidades. Nos problemas de *permutação*, a principal dificuldade dos estudantes estava relacionada ao número de etapas de escolha inerente a esse tipo de problemas, uma vez que em todas as possibilidades são utilizados todos os elementos do conjunto.

O *arranjo* e a *combinação* foram, em todos os grupos, os significados que obtiveram inicialmente os maiores percentuais de *acertos parciais*. Os estudantes conseguiram elencar possibilidades desses problemas (no máximo duas), mas havia dificuldades na compreensão da influência ou não da ordem dos elementos e no esgotamento de possibilidades. Ressalta-se que desses dois tipos de problema, a *combinação* apresentou os percentuais mais elevados de *acertos parciais.* Desse modo, pode-se observar que entre os significados da Combinatória, os participantes, antes da introdução formal ao conceito, conseguiram uma maior aproximação dos resultados esperados nos problemas que envolviam a *combinação*. Já no estudo de Pessoa e Borba (2010), crianças do segundo ao quinto anos do Ensino Fundamental apresentaram maior dificuldade na resolução de problemas de *permutação* e de *combinação*. Esse estudo mostrou que os maiores percentuais de acertos estavam relacionados aos problemas de *produto cartesiano.* O que, segundo as autoras, pode estar relacionado ao fato de que os problemas de *produto cartesiano* são, entre os demais problemas de Combinatória, abordados de forma mais explícita desde os anos iniciais do Ensino Fundamental regular.

No presente estudo, em nenhuma das três turmas havia sido abordada a multiplicação. Entre os conteúdos desenvolvidos estavam, de acordo com as professoras, a adição, a subtração, o Sistema de Numeração Decimal e a resolução de problemas. Dessa forma, pode-se perceber que ainda não havia ocorrido a introdução formal às estruturas multiplicativas e, consequentemente, ao *raciocínio combinatório.*

Tabela 2 – Percentuais dos tipos de respostas no pré-teste por significados da combinatória em cada grupo

Tipo de problema	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3	
	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial
Arranjo	81,2	18,8	68,8	31,2	75	25
Combinação	43,8	56,2	56,2	43,8	43,8	56,2
Permutação	93,8	6,2	81,2	18,8	100	0
Produto Cartesiano	87,5	12,5	100	0	87,5	12,5

A Tabela 3 mostra os percentuais de tipos de resposta em cada um dos problemas, considerando a grandeza numérica dos resultados, uma vez que no pré-teste existiam dois problemas de cada significado da Combinatória, sendo um com maior número de casos e o outro com um número menor. Foram considerados como problemas com poucas possibilidades (PP) os que apresentaram entre seis e 12 casos, já os denominados como problemas com muitas possibilidades (MP) tinham entre 15 e 24 possibilidades. O objetivo dessa análise foi verificar a possível ocorrência de diferenças entre os problemas, avaliando se o número de possibilidades envolvidas influenciou as respostas dos participantes.

Levando-se em consideração a Tabela 3, foi realizado com os dados de cada grupo, o Teste t-student para diferenças de médias de amostras emparelhadas, entre os desempenhos dos participantes nos problemas com poucas possibilidades e com muitas possibilidades. Os resultados não indicaram, em nenhum dos grupos, diferenças significativas no que diz respeito à grandeza numérica dos problemas, Grupo 1 $t(7)= -1,158$; $p= 0,285$; Grupo 2 $t(7)= -2,198$; $p=0,064$; Grupo 3 $t(7)= -2,198$; $p=0,064$. Essa análise também foi confirmada pelo teste não paramétrico Wilcoxon Signed Ranks, que não evidenciou, nos grupos, diferença significativa na comparação das médias supracitadas, Grupo 1 ($p=0,257$); Grupo 2 ($p= 0,068$);

Grupo3 (p=0,068). Esses resultados apontam que não houve diferenças em número de acertos em função da grandeza numérica dos resultados.

Tabela 3 – Percentual de tipos de respostas em cada problema por grupo

Tipo de problema	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3	
	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial
Arranjo (PP)	75	25	75	25	75	25
Arranjo (MP)	87,5	12,5	62,5	37,5	75	25
Combinação (PP)	62,5	37,5	75	25	75	25
Combinação (MP)	25	75	37,5	62,5	12,5	87,5
Permutação (PP)	100	0	100	0	100	0
Permutação (MP)	87,5	12,5	62,5	37,5	100	0
Produto Cartesiano (PP)	87,5	12,5	100	0	100	0
Produto Cartesiano (MP)	87,5	12,5	100	0	75	25

Obs: PP – poucas possibilidades; MP- muitas possibilidades

6.1.3 Tipos de representação simbólica no pré-teste

As representações simbólicas utilizadas pelos estudantes no pré-teste foram divididas nas seguintes categorias: não identificada, escrita de dado(s) do enunciado, algoritmo inadequado e listagem.

Não identificada – não há como identificar o processo usado pelo estudante.

Escrita de dados do enunciado – o estudante utilizou como resposta dado(s) do problema, escrevendo trechos do enunciado ou o número de elementos do(s) conjunto(s).

Algoritmo inadequado – o aluno usou algum algoritmo, adição ou multiplicação, mas de forma inadequada sem relação com o problema.

Listagem – o estudante listou casos que podiam pertencer ou não ao resultado do problema.

A Tabela 4 apresenta os percentuais de utilização de cada tipo de representação simbólica em cada grupo. De acordo com a tabela, nos três grupos a listagem e a escrita de dado(s) do enunciado foram as representações que inicialmente apresentaram os maiores percentuais, portanto, foram as mais utilizadas pelos estudantes. Os trabalhos de Lima e Borba (2010) e Barreto e Borba (2010) também identificaram a listagem como uma das formas de representação mais utilizadas pelos estudantes da EJA ao resolverem problemas que envolvem a Combinatória. Apesar de ser uma representação usual, os alunos identificaram apenas uma ou duas possibilidades, apresentando dificuldades no esgotamento de casos.

Tabela 4 – Percentuais de tipos de representação simbólica usadas no pré-teste

Tipos de Representação	Percentuais do Grupo 1	Percentuais do Grupo 2	Percentuais do Grupo 3
Listagem	37,5	46,9	37,5
Escrita de dado(s) do enunciado	32,8	32,8	46,8
Algoritmo inadequado (adição/multiplicação)	1,6	1,6	0
Não identificada	28,1	18,7	15,6

6.1.4 Seleção dos participantes do estudo

A escolha dos participantes da pesquisa foi realizada levando em consideração o número de acertos parciais obtidos pelos estudantes, procurando-se selecionar os desempenhos que foram mais frequentes nas turmas.

Em cada uma das três turmas foram selecionados oito estudantes, formando três grupos, sendo cada grupo composto por participantes de uma mesma turma. Ao selecionar os participantes objetivou-se formar grupos que apresentassem médias semelhantes, para que assim tais grupos partissem de desempenhos iniciais similares. É importante esclarecer que em cada grupo havia estudantes com desempenhos correspondentes nos demais.

A seguir na Tabela 5 é apresentado como cada grupo foi composto em relação aos tipos de respostas.

Tabela 5 – Distribuição dos participantes em cada grupo por tipos de respostas

Quantidade de estudantes em cada grupo	**Quantidade de acertos parciais dentre 8**
1	0 acertos parciais
1	1 acerto parcial
4	2 acertos parciais
2	3 acertos parciais

Conforme visto na Tabela 5, em cada grupo havia um estudante que não apresentou *acertos parciais*; um estudante que em suas respostas havia apenas um *acerto parcial*; quatro alunos que apresentaram dois *acertos parciais*; e dois estudantes que obtiveram três *acertos parciais*, totalizando assim oito participantes em cada grupo. As demais respostas dos estudantes faziam parte da categoria *resposta incorreta sem relação combinatória*.

O percentual inicial de *acertos parciais* em cada grupo foi de 23,4% do total de respostas, isto é, a maioria das respostas não apresentou relação combinatória, o que apontou que os alunos possuíam dificuldades em operar com problemas que envolviam o *raciocínio combinatório*, reafirmando o que foi constatado em estudos anteriores como Lima e Borba (2010) e Barreto e Borba (2010).

Salienta-se que apesar da escolha dos participantes do estudo, todos os estudantes que estavam presentes nas turmas realizaram os demais procedimentos do método (intervenção e pós-teste).

6.2 ANÁLISES DAS INTERVENÇÕES

Nesta seção serão analisadas as intervenções realizadas nos grupos do presente estudo. Cada grupo passou por uma intervenção que durou aproximadamente duas horas, na qual foram resolvidos os problemas do pré-teste. Buscou-se seguir um roteiro comum aos três grupos, conforme descrito no método, com o objetivo de que as diferenças nos procedimentos realizados se concentrassem nas representações simbólicas usadas em cada grupo. A análise está dividida em duas partes: a primeira sobre o que foi comum aos grupos e a segunda relacionada ao que foi específico a cada um deles.

6.2.1 Análise dos aspectos comuns aos grupos

De um modo geral, os grupos foram bastante semelhantes no que diz respeito aos questionamentos, dúvidas e compreensões dos estudantes em relação às propriedades invariantes da Combinatória. Por esse motivo, considera-se bastante importante a primeira parte da análise, a qual levará em consideração tais aspectos em comum.

Inicialmente em cada grupo informou-se aos participantes que seriam resolvidas as questões do pré-teste e que todos poderiam participar das resoluções, as quais a pesquisadora sistematizaria no quadro. Nesse momento, a pesquisadora aproveitou para comentar sobre as formas de resolução (representações simbólicas) que seriam utilizadas. É importante ressaltar que os grupos utilizaram formas de representação distintas: listas e árvores de possibilidade, apenas árvores de possibilidades ou apenas listas.

Em seguida, depois de entregar uma folha a cada estudante contendo os problemas do pré-teste, as resoluções foram iniciadas. Após a leitura de cada situação-problema, a pesquisadora questionou o que os estudantes compreenderam e como poderiam resolvê-la. Nessa conversa inicial, a pesquisadora relembrou a representação simbólica que deveria ser usada naquele determinado problema. Durante as resoluções, buscou-se, por meio de questionamentos, chamar a atenção dos estudantes para a compreensão de propriedades invariantes da Combinatória: esgotamento de possibilidades, número de elementos utilizados em cada possibilidade e influência da ordem dos elementos para a formação de novas possibilidades. A seguir, será discutido como os estudantes chegavam à compreensão de tais propriedades e relações combinatórias.

Formação de possibilidades – foi possível perceber nos grupos que mesmo nos problemas que os alunos diziam não ter compreendido nada ao realizar a leitura, após alguns esclarecimentos e questionamentos, começavam a compreender as situações e a pensar sobre a formação de possibilidades. A seguir, será apresentado um extrato referente à resolução do Problema 3 (*produto cartesiano*) no Grupo 2, na qual após um esclarecimento da pesquisadora, um dos alunos compreende a situação-problema e procura ajudar o colega que demonstra ainda não ter entendido.

PROBLEMA 3. Para entrar em um estádio de futebol, Pedro pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C, D). Depois do jogo, para sair do estádio, Pedro possui cinco opções de saídas diferentes (E, F, G, H, J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do estádio?

Depois de ler o problema, a pesquisadora perguntou aos estudantes como poderiam resolvê-lo. Todos permaneceram calados. A pesquisadora esclareceu, então que na resolução é preciso encontrar o número de possibilidades de se combinar cada portão de entrada com cada portão de saída. Um dos alunos começou a responder:

Aluno 1 – *Então o A com E.*

Pesquisadora – *Certo, essa é uma das formas que Pedro tem para entrar e sair do estádio.*

Aluno 2 – *O A e o D.*

Aluno 1 – *O A e o D? Não minha senhora, aí é só entrada. E a saída? Aí não pode, é um pra entrar e outro pra sair.*

Aluno 2 – *Ah, então o D e o J. Aí pode?*

Aluno 1 – Como *é? O D e o J? É aí pode. O D é pra entrar e o J pra ele sair.*

Os demais alunos começam a citar outras possibilidades de associar um portão de entrada a um de saída. A pesquisadora lembra que é importante sistematizar as respostas e não apenas identificar os casos de forma aleatória. Como no Grupo 2 a forma de representação usada foi a árvore de possibilidades, a pesquisadora pediu para que os alunos iniciem a árvore com todas as possibilidades de se ter o portão A como alternativa de entrada.

Esgotamento de possibilidades – inicialmente, os estudantes em todos os grupos não demonstraram atenção à necessidade de serem encontrados todos os casos que faziam parte das respostas. De uma forma geral na resolução dos primeiros problemas, os estudantes diziam uma ou duas possibilidades que muitas vezes estavam associadas à preferência pessoal desses. A resolução do Problema 1 (*combinação*) ilustra bem essa situação. O problema solicita que seja encontrada a quantidade de possibilidades de se combinar duas frutas partindo de um conjunto formado por sete frutas. A seguir é apresentado o problema e um extrato da intervenção realizada no Grupo 1, na qual a pesquisadora chama a atenção dos estudantes para a importância de se esgotar todas as possibilidades. Essa situação ocorreu semelhantemente nos demais grupos.

PROBLEMA 1. Maria tem em sua casa sete tipos de frutas (morango, acerola, cajá, graviola, laranja, pitanga e uva). Ela fabrica sucos em casa e decidiu fazer sucos que combinem duas frutas. Quantos são todos os tipos de sucos diferentes que ela pode fabricar combinando duas dessas frutas?

Após ler o problema para a turma, a pesquisadora perguntou aos estudantes o que entenderam da questão. Alguns alunos começaram a falar combinações de duas frutas, sendo que cada um falava apenas uma combinação (laranja e acerola; cajá e graviola; morango e acerola; laranja e uva, por exemplo). A pesquisadora anotou tais combinações no quadro da sala.

Aluno1 – Mas cajá e graviola não combina.

Pesquisadora – *É... As nossas preferências são bem pessoais, vão de acordo com o gosto de cada um, mas não é isso que está sendo solicitado no problema. Imagine que você é a Maria do problema. Se ela for vender apenas os sucos que ela gosta, vai deixar de ganhar dinheiro, não acha?*

Aluno1 – *É verdade, professora. Então, pensando assim, dá pra fazer um monte de suco, né? E se ela vai vender tem que pensar no gosto de todo mundo.*

Pesquisadora – *Mas como é que eu faço para saber quais são todas as possibilidades que Maria tem?*

Aluno2 – *Não, ela tem três opção.* – A aluna compreendeu que por haver sete elementos no conjunto só é possível realizar três combinações diferentes que possuam duas frutas.

Pesquisadora – *Essas quatro possibilidades que vocês disseram estão todas corretas, mas existem mais.Precisamos organizar de alguma forma para descobrir todas as possibilidades* *de combinar cada uma dessas frutas. Vamos começar com morango, o morango eu posso combinar como o quê?*

A pesquisadora sugeriu, desse modo, que os alunos utilizassem a ordem como os elementos estão dispostos, identificando todas as possibilidades com o primeiro desses e assim com os seguintes, com o objetivo de chamar atenção para a necessidade de usar alguma estratégia que auxilie a verificar se todos os casos foram identificados. Os alunos seguiram falando as possibilidades, listando-as adequadamente.

Percebe-se no trecho do diálogo apresentado acima que para o Aluno1, a palavra *combinar* estava restrita a formar pares de frutas que estivessem de acordo com o seu gosto particular. Após o comentário da pesquisadora, o estudante mostra compreender melhor o problema, uma vez que percebe a necessidade de listar um número maior de possibilidades. Acredita-se que o contexto envolvido também auxiliou a compreensão.

Verificou-se também a intervenção da pesquisadora no sentido de ressaltar que é necessária a utilização de algum procedimento que auxilie a constatar que todos os casos foram encontrados. A sugestão dada foi que os alunos usassem a ordem de apresentação dos elementos como forma de organização da resposta, o que pode ajudar para que não deixassem de listar possibilidades referentes a determinado elemento.

Como pode ser visto nos dois extratos apresentados anteriormente, não havia uma preocupação que partisse dos estudantes em utilizar estratégias para alcançar o esgotamento das possibilidades, o que, em todos os grupos, teve que ser enfatizado ao longo da intervenção. A partir da análise do pré-teste, já se esperava que os alunos não mostrassem essa preocupação, uma vez que a maioria das resoluções não apresentava relação combinatória e as que tinham tal relação estavam em um nível bastante elementar, apresentando apenas um ou dois casos que faziam parte da resposta. No momento da intervenção foi notável o progresso dos estudantes em relação ao levantamento de casos, superando desse modo, a concepção inicial de haver apenas uma ou no máximo duas possibilidades em cada resolução.

Número de elementos utilizados em cada possibilidade – não houve dúvida dos estudantes sobre a quantidade de elementos que deveriam ser usados em cada um dos casos dos problemas de *arranjo, combinação* e *produto cartesiano*. Entretanto, foram evidenciadas dificuldades em perceber que na permutação em cada um dos casos deveriam ser utilizados todos os elementos do conjunto apresentado no problema. O extrato do Problema 4 (*permutação*), a seguir, foi retirado da intervenção com o Grupo 3 e mostra o trabalho realizado para que os estudantes tivessem mais atenção a esse invariante.

PROBLEMA 4. Quatro costureiras (Alda, Vera, Joana e Creusa) formaram um grupo para participar de uma competição. Elas precisam dar um nome ao grupo, combinando as letras iniciais dos seus nomes. Quantos nomes diferentes elas podem formar?

A pesquisadora leu o problema e depois questionou os alunos:

Pesquisadora – *Primeira coisa, o que é letra inicial?*

Alunos – *A primeira letra.*

Pesquisadora – *Então quais as letras iniciais desses nomes?* – Refere-se aos nomes dos elementos do conjunto.

Alunos – *A, V, J e C.* – A pesquisadora anota essas letras no quadro.

Pesquisadora – *Os nomes que serão formados não necessariamente existem ou fazem sentido para outro uso, mas dentro da competição vai ser o identificador do grupo dessas quatro costureiras. Como poderia ser um desses nomes?*

Aluno1 – *A com V.*

Pesquisadora – *Não. Veja só, a pergunta é quantos nomes diferentes podem ser formados usando essas quatro letras. Nas outras questões, na dos sucos, por exemplo, tinham sete frutas e a gente foi combinando de quantas e quantas frutas?*

Aluno 2 – *De duas em duas.*

Pesquisadora – *Muito bem! Os competidores* – referindo-se ao segundo problema – *a gente viu quem poderia chegar em primeiro e em segundo lugar.*

Aluno 2 – *Combinou de dois em dois também.*

Pesquisadora – *Na questão do estádio era sempre um portão de entrada com um portão de saída. Mas aqui nós vamos usar as quatro letras em cada um dos nomes que vamos formar.*

Aluno 3 – *Então só muda a ordem?*

Pesquisadora – *Isso. Vamos descobrir quantas formas diferentes temos para ordenar as quatro letras, formando nomes diferentes para o grupo de costureiras participar da competição. Vamos começar a listar esses nomes.*

Na sequência, os alunos foram ajudando a encontrar as possibilidades que pesquisadora sistematizou no quadro.

Conforme pode ser visto no exemplo do extrato acima foi necessário ressaltar que na *permutação* em todos os casos seriam usados todos os elementos. Desse modo, percebe-se que diferentemente dos outros tipos de problemas, a *permutação* apresenta um maior número de etapas de escolha, o que gerou equívocos na resolução dos estudantes.

Ordem dos elementos – Quando os estudantes chegavam à compreensão do problema, entendiam com facilidade se a ordem dos elementos determinaria ou não novas possibilidades. O extrato apresentado a seguir mostra o momento em que um estudante, após entender o que era solicitado no problema, consegue justificar se a ordem dos elementos vai influenciar a formação de novas possibilidades. Tal extrato faz parte da intervenção realizada no Grupo 1 durante a resolução do Problema 2 (*arranjo*) e ilustra o que ocorreu de forma parecida nos demais grupos.

PROBLEMA 2. Quatro competidores (José, Marcos, Bruno e Sérgio) estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?

Os alunos relataram que não entenderam o problema. A pesquisadora começa a realizar perguntas e os estudantes conseguem dar respostas que estabelecem relação com o problema:

Pesquisadora – *Bem, está sendo realizada uma corrida. São quantos competidores?*

Alunos – *Quatro.*

Pesquisadora – *Isso, eles estão em uma corrida e a pergunta é de quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugares? Quem poderia chegar em primeiro lugar e ser o campeão da corrida?*

Aluno1 – *José.*

Pesquisadora – *Certo. E se não fosse José, quem poderia chegar em primeiro lugar?* – Os alunos dizem os nomes dos demais competidores. – *E se José for o primeiro quem poderá ser o segundo lugar?* – os alunos novamente dizem os nomes dos outros competidores. – *Perceberam quantas possibilidades de resultados diferentes, podem ser o resultado dessa corrida?*

Aluno2 – *Tem muitos.*

Pesquisadora – *Deixa eu fazer uma pergunta para vocês, no problema das frutas eu perguntei se a combinação morango e acerola seria a mesma coisa que acerola e morango, vocês disseram que sim, que a ordem das frutas não mudaria o sabor do suco, não foi isso?*

Agora, José chegar em primeiro lugar e Marcos em segundo é a mesma coisa que Marcos ser o primeiro lugar e José ser o segundo ? – Falou apontando para essas possibilidades que estavam listadas no quadro.
Aluno 2 – *Não.*
Pesquisadora – *Por quê?*
Aluno 2 – *Porque os número é diferente*. – Ao dizer a palavra números referia-se às colocações 1º e 2º.
Aluno 3 – *A colocação*.
Pesquisadora – *Isso, porque quem chegar em primeiro lugar, caso haja uma premiação, receberá um prêmio melhor do que quem chegar em segundo lugar. Então, nesse problema a ordem que estamos colocando vai criar duas formas de resultados diferentes.*

Como visto, a maior dificuldade dos estudantes no que diz respeito à propriedade invariante que envolve influência da ordem dos elementos para geração ou não de novas possibilidades estava relacionada à interpretação textual dos enunciados dos problemas. Depois que conseguiam interpretá-los, os estudantes analisavam com facilidade a influência da ordem dos elementos.

No decorrer das resoluções nos grupos, a pesquisadora demonstrou para os alunos e incentivou o uso da letra inicial para representar os elementos, ao invés de escrever os nomes desses repetidas vezes, o que auxiliaria a agilizar as respostas. Entretanto, essa forma de linguagem simbólica não foi bem aceita pelos participantes que se mostraram mais seguros na escrita completa dos nomes de cada elemento.

No próximo tópico serão analisados os aspectos que foram particulares de cada grupo.

6.2.2 Análise das especificidades de cada grupo

Intervenção do Grupo 1

Nesse grupo foram usadas duas formas de representação simbólica: a listagem – nos quatro primeiros problemas – e a árvore de possibilidades – nos quatro últimos.

Partiu-se da hipótese que o grupo poderia apresentar avanços, pois seriam abordadas duas representações simbólicas distintas, em que cada uma ajudaria a evidenciar distintas propriedades do conceito. A listagem já era uma das representações usadas pelos participantes, como visto no pré-teste e a árvore de possibilidades se tratava de uma representação também escrita que estudos anteriores mostraram avanços nos desempenhos de alunos após intervenções com o uso de tal representação.

Durante a intervenção, os estudantes mostraram-se participativos e não apresentaram resistência alguma ao trabalho com as duas formas de representação. Nas primeiras quatro situações-problema utilizou-se a listagem e a partir da quinta situação foi usada a árvore de possibilidades. Como essa última tratava-se de uma representação que os estudantes não conheciam, foi necessário explicar como ela deveria ser sistematizada. O Problema 5 envolvia uma *combinação*. Foi realizada a leitura do problema e os alunos foram questionados sobre a compreensão do mesmo. A pesquisadora aproveitou para lembrar ao grupo que as últimas questões seriam resolvidas com a utilização da árvore. Os alunos enumeraram algumas possibilidades que faziam parte da resposta. Na sequência, a pesquisadora explicou que iriam organizar as respostas de forma diferente do que haviam feito com a listagem e que a árvore de possibilidades tem uma organização que parece uma árvore real. A pesquisadora escreveu no quadro o primeiro elemento da ordem de apresentação do problema "*Carlos*" e perguntou aos estudantes quais as combinações possíveis usando determinado elemento. Os alunos disseram adequadamente (*Carlos* e *Luis*; *Carlos* e *Amanda*; *Carlos* e *Daniel*). A pesquisadora chamou atenção para o fato de que é preciso relacionar o elemento *Carlos* aos demais por meio de "*galhinhos"* que ligariam tais elementos. A palavra "*galhinhos"* diz respeito às ramificações que interligam os elementos, indicando a formação de possibilidades. Dando continuidade à resolução, a pesquisadora pediu aos alunos que identificassem os casos com outro elemento *"Luís".* Os estudantes seguiram falando os casos que foram sistematizados no quadro pela pesquisadora. Desse modo, não se percebeu dificuldades dos alunos com relação específica à essa representação simbólica.

Ao final dos procedimentos, quando questionados sobre a representação que ajudava na melhor compreensão e organização das resoluções, os estudantes afirmaram não ter diferenças entre elas.

Intervenção do Grupo 2

O grupo utilizou apenas a árvore de possibilidades na intervenção. A hipótese inicial foi que os estudantes poderiam melhorar seus desempenhos, já que o trabalho com a árvore, conforme estudos anteriores já citados mostraram, pode auxiliar no desenvolvimento do *raciocínio combinatório.* Além disso, os participantes desse grupo teriam a oportunidade de trabalhar com uma representação que ainda não dominavam.

Antes de sistematizar a primeira resolução no quadro da sala foi necessário apresentar a árvore de possibilidades para os estudantes. Para isso, a pesquisadora agiu de forma semelhante ao Grupo 1. Após ler o primeiro problema (*combinação*) perguntou o que o grupo havia compreendido. Alguns estudantes falaram alguns possíveis casos, os quais a pesquisadora anotou no quadro. Depois de uma discussão inicial para esclarecimentos de dúvidas sobre o que realmente era solicitado no problema, a árvore de possibilidades foi construída junto com os alunos. Procurou-se utilizar termos que facilitassem a compreensão. Foi explicado aos estudantes que as possibilidades ditas por eles estavam corretas, mas ao invés de encontrar casos de forma aleatória sem nenhuma organização, eles utilizariam a árvore de possibilidades, cuja estrutura lembra realmente uma árvore. A pesquisadora anotou o nome do primeiro elemento (*morango*) apresentado no problema. Em seguida, disse que partindo de tal fruta encontrariam as diferentes formas de combiná-la com as demais e que para tanto utilizariam "*galhinhos*" para realizar tais combinações, não sendo necessário repetir a escrita da palavra morango e apenas partir dessa para a formação das combinações possíveis. Ao mencionar "*galhinhos*", a pesquisadora referia-se às ramificações usadas na representação. Depois de sistematizar as combinações com o *morango,* a pesquisadora sugeriu que continuassem usando a árvore para identificar as combinações com a *acerola.* E assim foi dado seguimento à resolução, com a participação dos estudantes.

Os estudantes mostraram compreender a estrutura da árvore de possibilidades. As dúvidas e dificuldades decorrentes estavam relacionadas à compreensão dos invariantes e não ao uso da forma de representação.

Intervenção do Grupo 3

Todas as resoluções da intervenção desse grupo foram realizadas com a utilização da listagem de possibilidades. Como essa forma de representação já era usada pelos estudantes no pré-teste, havia a hipótese de que uma intervenção que usasse apenas a listagem auxiliaria os alunos no aprimoramento do uso de tal representação, ajudando-os na obtenção de desempenhos melhores na resolução de problemas.

Durante a intervenção, os estudantes mostraram-se, em muitas ocasiões, surpresos com as quantidades de casos apresentados em cada problema, algo que até então não julgavam possível, já que no pré-teste o número máximo que conseguiram identificar foram dois casos. Esse fato também ocorreu nos outros grupos, mas apresentou-se de forma mais acentuada do Grupo 3.

As discussões realizadas no decorrer das resoluções auxiliaram os estudantes no uso mais sistemático das listagens. Eles já usavam essa forma de representação antes, mas a intervenção os ajudou a utilizá-la de modo mais eficiente.

6.3 ANÁLISES DO PÓS-TESTE

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados obtidos pelos grupos no pós-teste. Primeiramente serão analisados os desempenhos de cada um dos grupos e por fim será realizada uma análise comparativa entre esses.

Antes de iniciar a discussão dos resultados de cada grupo, serão apresentados os tipos de resposta que foram encontrados nos pós-teste. Faz-se necessária tal apresentação uma vez que estas categorias de resposta foram comuns a todos os grupos, embora cada um possua um percentual distinto de apresentação dessas categorias.

Tipos de resposta do pós-teste

Diferente do pré-teste, no qual os alunos apresentaram apenas *resposta incorreta sem relação combinatória* e *acerto parcial*, no pós-teste também foram verificados, em todos os grupos, outros tipos respostas que demonstram um maior nível de compreensão. No que diz respeito aos acertos parciais foram encontradas, além da forma já verificada no pré-teste, mais duas outras formas desse tipo de resposta, ambas apresentando um nível maior de elaboração. Desse modo, os acertos parciais foram categorizados em: *acerto parcial 1* (resposta que também verificou-se no pré-teste), *acerto parcial 2* e *acerto parcial 3*, esses dois últimos apresentados apenas no pós-teste, sendo o *acerto parcial 3* o que estava mais próximo da resposta correta. Também foram verificadas respostas que os estudantes atingiram o resultado esperado. Diante dos tipos de respostas utilizadas pelos alunos, foi realizada a seguinte classificação:

Resposta incorreta sem relação combinatória – quando a resposta não apresenta relação combinatória que atenda ao solicitado pelo problema. Também fazem parte dessa categoria as respostas em branco.

O exemplo a seguir ilustra essa situação.

Figura 3 – Exemplo de resposta incorreta sem relação combinatória no pós-teste

8. Utilizando os algarismos 2, 4 e 6, de quantas maneiras diferentes pode-se escrever números de três algarismos diferentes? 12 MANEIRAS

Acerto parcial 1 – quando a resposta apresenta relação combinatória e são elencados um ou dois casos. Ressalta-se que esse foi o único tipo de acerto parcial encontrado no pré-teste. A Figura 4 mostra esse tipo de resposta. Ao resolver um problema que envolve a *combinação*, o estudante lista apenas dois casos que fazem parte da resposta.

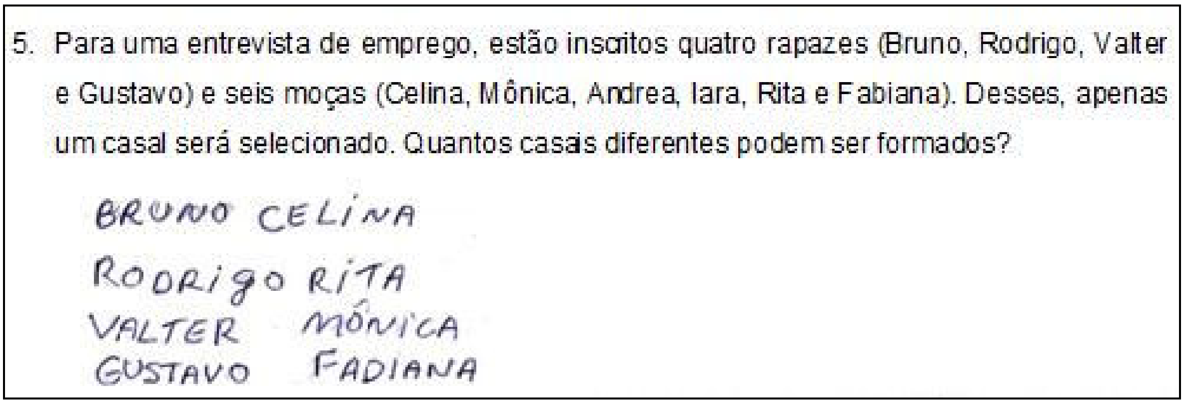
Figura 4 – Exemplo de acerto parcial 1 no pós-teste

1. Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos?

luiza e - Ricardo
luiza Gabriela

Acerto parcial 2 – quando a resposta apresenta relação combinatória, mas o número de casos está restrito ao número de elementos do conjunto. A Figura 5 exemplifica essa forma de resposta. O problema da Figura é um *produto cartesiano,* no qual é necessário identificar o número de casais diferentes que podem ser formados ao combinar cada elemento do conjunto rapazes (quatro elementos) com cada elemento do conjunto moças (seis elementos). Ao resolvê-lo, o estudante demonstra compreender que o número de possibilidades está limitado a quantidade de elementos do conjunto de rapazes, pois forma uma possibilidade com cada um dos rapazes, mas não percebe que com cada um desses poderiam ser formados mais cinco pares diferentes.

Figura 5 – Exemplo de acerto parcial 2

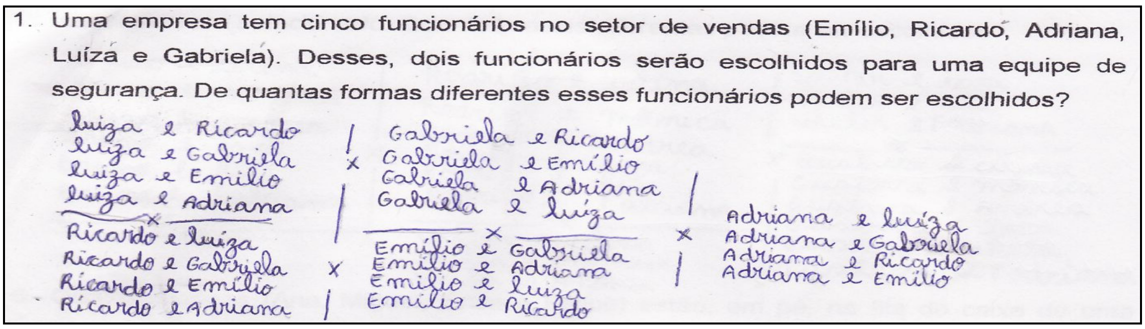

5. Para uma entrevista de emprego, estão inscritos quatro rapazes (Bruno, Rodrigo, Valter e Gustavo) e seis moças (Celina, Mônica, Andrea, Iara, Rita e Fabiana). Desses, apenas um casal será selecionado. Quantos casais diferentes podem ser formados?

BRUNO CELINA
RODRIGO RITA
VALTER MÔNICA
GUSTAVO FADIANA

Acerto parcial 3 – quando a resposta apresenta relação combinatória e são elencados diversos casos. Entretanto, não há o esgotamento ou limitação das possibilidades, uma vez que faltam casos ou são apresentados casos repetidos.

Na Figura 6 há um exemplo de acerto parcial 3, no qual o participante ao resolver um problema de *combinação* não elimina os casos repetidos não percebendo, dessa forma, que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

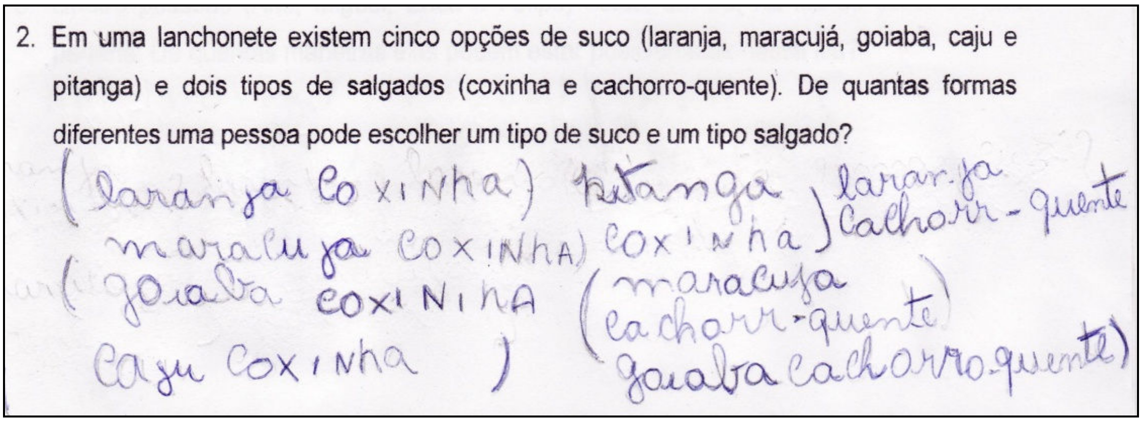
Figura 6 – Exemplo de acerto parcial 3 em que ocorre casos repetidos


1. Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos?

luiza e Ricardo
luiza e Gabriela
luiza e Emilio
luiza e Adriana
Ricardo e luiza
Ricardo e Gabriela
Ricardo e Emilio
Ricardo e Adriana
Gabriela e Ricardo
Gabriela e Emilio
Gabriela e Adriana
Gabriela e luiza
Emilio e Gabriela
Emilio e Adriana
Emilio e luiza
Emilio e Ricardo
Adriana e luiza
Adriana e Gabriela
Adriana e Ricardo
Adriana e Emilio

Na Figura 7 apresenta-se um problema de *produto cartesiano* em que são listados casos que fazem parte da resposta, mas não há o esgotamento de todos os casos. Portanto, nas respostas classificadas como acerto parcial 3 houve dificuldade na compreensão de propriedades invariantes relacionadas ao esgotamento das possibilidades e à influência da ordem dos elementos para a formação de novas possibilidades.

Figura 7 – Exemplo de acerto parcial 3 em que faltam casos

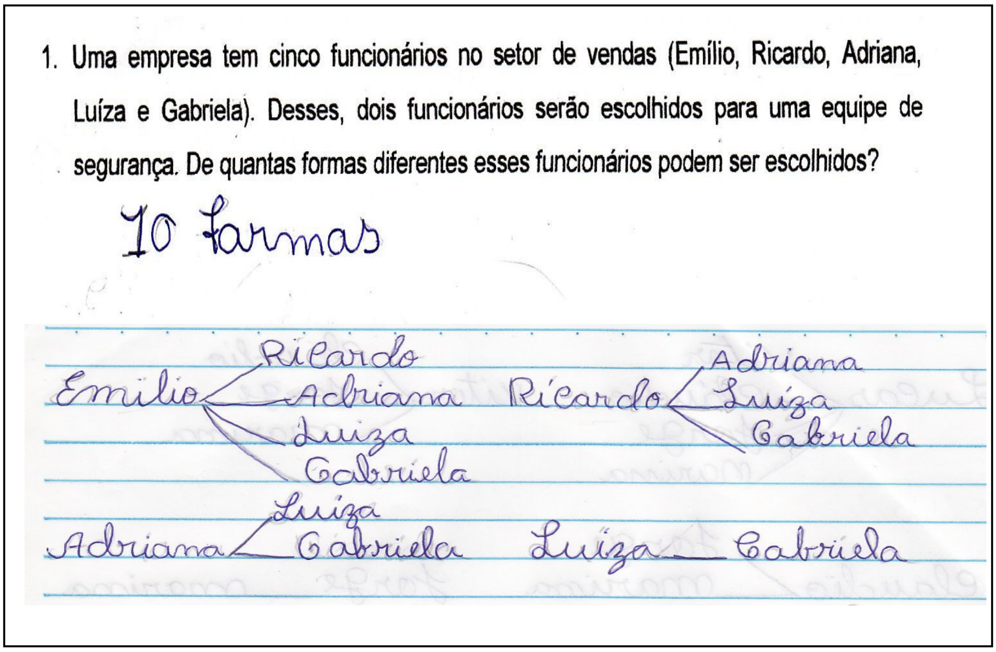

2. Em uma lanchonete existem cinco opções de suco (laranja, maracujá, goiaba, caju e pitanga) e dois tipos de salgados (coxinha e cachorro-quente). De quantas formas diferentes uma pessoa pode escolher um tipo de suco e um tipo salgado?

(laranja coxinha) pitanga laranja cachorr-quente
maracuja coxinha) coxinha)
(goiaba coxinha (maracuja cachorr-quente)
Caju coxinha) goiaba cachorro-quente)

Resposta correta – quando a resposta é a esperada para o problema.

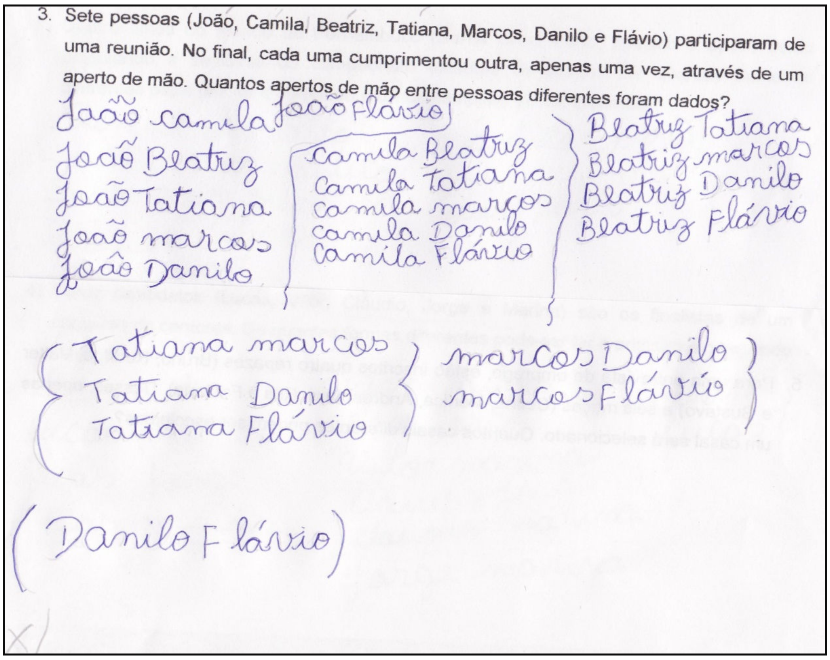
As Figuras 8 e 9 mostram esse tipo de resposta, sendo que na primeira delas foi a usada a árvore de possibilidades e na segunda a listagem de possibilidades.

Figura 8 – Exemplo de resposta correta com uso de árvore de possibilidades


1. Uma empresa tem cinco funcionários no setor de vendas (Emílio, Ricardo, Adriana, Luíza e Gabriela). Desses, dois funcionários serão escolhidos para uma equipe de segurança. De quantas formas diferentes esses funcionários podem ser escolhidos?

10 formas

Figura 9 – Exemplo de resposta correta com uso de listagem



6.3.1 Resultados do Grupo 1

Nesta seção serão discutidos os resultados obtidos pelo Grupo 1, no que diz respeito aos desempenhos dos estudantes e aos tipos de representações simbólicas utilizados. Na intervenção desse grupo foram utilizadas a listagem e árvore de possibilidades.

Os resultados do pós-teste apontam que os participantes apresentaram avanços em seus desempenhos, como pode ser visto no Gráfico 1, o qual mostra os percentuais de tipos de respostas dos estudantes no pré e no pós-teste. No pós-teste, além do *acerto parcial 1*, que foi o tipo de resposta com maior nível de compreensão encontrado no pré-teste, foram verificadas as categorias: *acerto parcial 2, acerto parcial 3 e resposta correta.*

Ao se comparar o quantitativo de *respostas incorretas sem relação combinatória* em ambos os testes, pode-se verificar uma redução do percentual de 76,6% para 23,4%, havendo, desse modo uma redução relevante desse tipo de resposta.

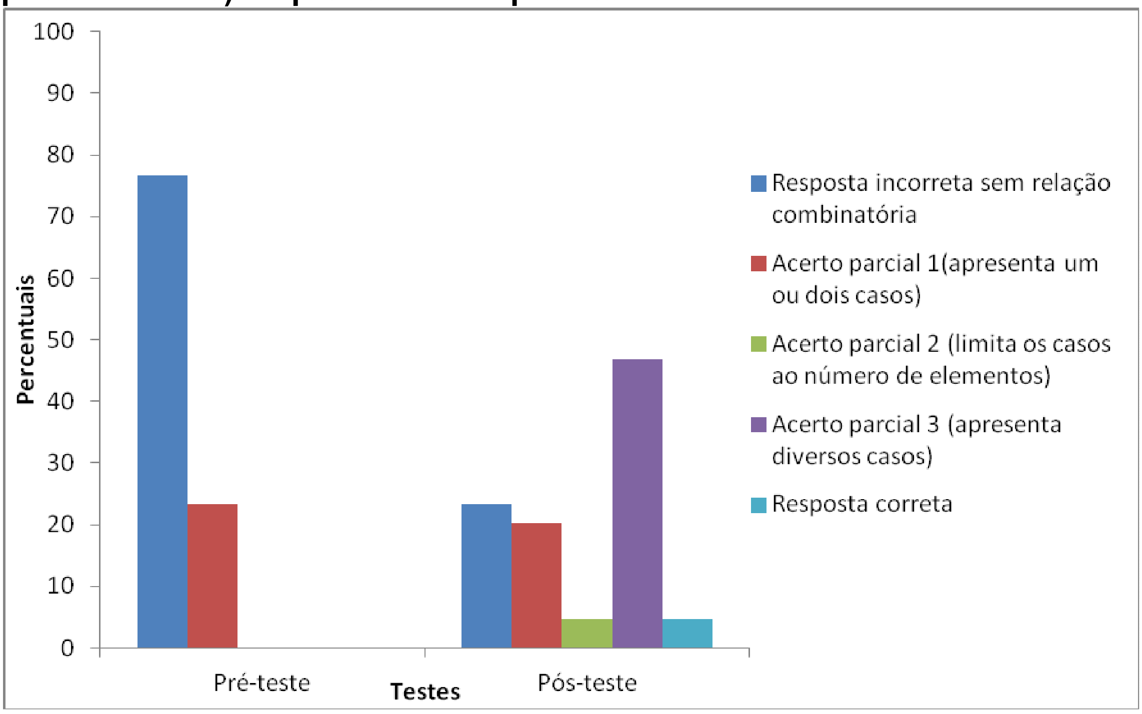
Já os percentuais de *acertos parciais 1*, permaneceram próximos, quando comparados o pré-teste (23,4%) e o pós-teste (20,3%).

Entre os tipos de resposta, o maior percentual (46,9%) diz respeito ao *acerto parcial 3*, no qual os estudantes não chegaram à resposta esperada, mas elencaram diversos casos que faziam parte do resultado. Esse tipo de resposta aponta que os estudantes apresentaram uma compreensão mais elaborada ao resolver problemas, após vivenciarem a intervenção.

A categoria *resposta correta* apresentou um percentual de 4,7%, percentual baixo, mas que revela melhora no desempenho dos alunos, uma vez que esse tipo de resposta não foi visto no pré-teste.

Análises paramétricas – Teste t-student t(7)= -5,381; p=0,001 – e não paramétricas – Teste Wilcoxon Signed Ranks (p=0,012) – apontam que houve diferenças significativas entre os desempenhos dos estudantes no pré-teste e no pós-teste.

Gráfico 1 – Percentuais de tipos de resposta do Grupo 1 (listagem e árvore de possibilidades) no pré-teste e no pós-teste



Desempenho do Grupo 1 em relação aos significados da Combinatória

Com o objetivo de verificar o desempenho dos estudantes no que diz respeito aos significados da Combinatória, foi realizada a análise dos tipos de respostas em cada tipo de problema (*arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano).*

A Tabela 6 apresenta os percentuais de tipos de resposta em cada tipo de problema no pré-teste e no pós-teste. Em destaque na cor vermelha, estão os tipos de problema que tiveram no pré-teste os percentuais mais altos de *resposta incorreta sem relação combinatória*: a *permutação* e o *produto cartesiano.* Também estão destacados na tabela com preenchimento verde os tipos de resposta que apresentaram os maiores percentuais em cada significado no pós-teste. Assim como no pré-teste, a *permutação* foi o significado da Combinatória que apresentou o maior percentual de *resposta incorreta sem relação combinatória* no pós-teste (62,5%). Mesmo permanecendo como o significado que os estudantes do Grupo 1 apresentaram maior dificuldade, houve uma melhora no desempenho desses, uma vez que no pré-teste o percentual de *resposta incorreta sem relação combinatória* foi de 93,8%. É importante destacar que a *permutação* envolve um número maior de etapas de escolhas, uma vez que todos os elementos do conjunto são usados em cada uma das possibilidades, o que pode ter contribuído para que os estudantes tivessem dificuldades em resolver esse tipo de problema. No que diz respeito ao *produto cartesiano*, que apresentou o segundo maior percentual de respostas incorretas sem relação no pré-teste, observou-se a superação de dificuldades iniciais na resolução de problemas desse tipo, já que no pós-teste as categorias de respostas mais elaboradas (*acerto parcial 3* e *resposta correta*) obtiveram os maiores percentuais de utilização.

Tabela 6 – Percentuais de tipos de resposta em cada tipo de problema no pré-teste e no pós-teste do Grupo 1

Tipo de problema	Resposta incorreta sem relação combinatória		Acerto parcial 1		Acerto parcial 2		Acerto Parcial 3		Resposta correta	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Arranjo	81,2	18,7	18,7	12,5	0	12,5	0	56,2	0	0
Combinação	43,8	6,25	56,2	37,5	0	6,2	0	43,7	0	6,2
Permutação	93,8	62,5	6,2	6,2	0	0	0	31,2	0	0
Produto cartesiano	87,5	6,25	12,5	25	0	0	0	56,2	0	12,5

Inicialmente os estudantes demonstraram uma maior compreensão dos problemas de *combinação,* pois esse tipo de problema apresentou, no pré-teste, o maior percentual da categoria com maior nível de sistematização: o *acerto parcial 1*. No pós-teste, observou-se em todos os tipos de problemas, exceto na *permutação*, uma redução do percentual desse tipo de resposta, quando comparados os resultados dos testes. Isso indica que os estudantes avançaram na compreensão dos problemas, atingindo resoluções melhor elaboradas.

Ainda na análise da Tabela 6, verificou-se que o *acerto parcial 3* apresentou os maiores percentuais de tipo de respostas do pós-teste nos problemas de *arranjo* (56,25%), *combinação* (43,75%) *e produto cartesiano* (56,2%)*,* esse tipo de acerto parcial demonstra uma sistematização mais elaborada, uma vez que o estudante identifica diversos casos que fazem parte da resposta.

As *respostas corretas* foram encontradas nos problemas de *combinação* (6,2%) e *produto cartesiano* (12,5%).

Na Tabela 7 a seguir é possível observar informações mais detalhadas sobre os dados da tabela anterior, uma vez que se pode verificar o desempenho do grupo tanto nos problemas que apresentam poucas possibilidades (PP) quanto nos que possuem muitas possibilidades (MP) em cada tipo de problema no pós-teste. Realizou-se Teste t-student para comparar as médias obtidas nos problemas com poucas possibilidades (PP) e nos problemas com muitas possibilidades. O resultado constatou que não houve diferenças significativas entre essa médias $t(7)= 0,158$; $p= 0,879$, o que também foi confirmado por análises não paramétricas por meio do teste Wilcoxon Signed Ranks ($p=0,931$). Dessa maneira, observa-se que não ocorreram distinções em número de acertos que devam ser atribuídas à grandeza numérica dos problemas.

Tabela 7 – Frequência (percentuais) de tipos de resposta em cada tipo de problema e por ordem de grandeza numérica de possibilidades no pós-teste do Grupo 1

Tipo de problema	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial 1	Acerto parcial 2	Acerto Parcial 3	Resposta correta
Arranjo PP	3 (37,5)	0 (0)	1 (12,5)	4 (50)	0 (0)
Arranjo MP	0 (0)	2 (25)	1 (12,5)	5 (62,5)	0 (0)
Combinação PP	1 (12,5)	4 (50)	1 (12,5)	2 (25)	0(0)
Combinação MP	0 (0)	2 (25)	0 (0)	5 (62,5)	1 (12,5)
Permutação PP	2 (25)	1 (12,5)	0 (0)	5 (62,5)	0 (0)
Permutação MP	8 (100)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Produto cartesiano PP	1 (12,5)	1 (12,5)	0 (0)	6 (75)	0 (0)
Produto cartesiano MP	0 (0)	3 (37,5)	0 (0)	3 (37,5)	2 (25)

Obs: PP – poucas possibilidades; MP- muitas possibilidades

Desempenho do Grupo 1 em relação às representações simbólicas

Antes de iniciar a análise das representações utilizadas nas resoluções desse grupo, é importante salientar que na intervenção as situações-problema foram resolvidas utilizando-se a listagem (quatro primeiros situações) e a árvore de possibilidades (quatro últimas situações).

A Tabela 8 mostra os percentuais de utilização de cada representação simbólica no pré e no pós-teste por tipo de problema. De uma forma geral, a listagem e o uso de dados do enunciado do problema foram as representações simbólicas mais usadas pelo grupo na ocasião do pré-teste, conforme está em destaque na cor vermelha na tabela. Já no pós-teste os maiores percentuais estão relacionados ao uso da listagem em todos os tipos de problema (93,7%), esses valores estão destacados na tabela com preenchimento na cor verde. Dessa maneira, os dados da Tabela 8 mostram que no pós-teste os estudantes do Grupo 1, em sua maioria, fizeram uso de uma das representações das intervenções, dando preferência a que já possuíam familiaridade, no caso a listagem, conforme foi visto no pré-teste. Apesar do uso da árvore de possibilidades na intervenção, não houve utilização dessa representação no pós-teste.

Tabela 8 – Percentuais de tipos de representação em cada tipo de problema no pré-teste e no pós-teste do Grupo 1

Tipo de problema	Não identificada		Escrita de dado(s) do enunciado		Algoritmo inadequado (Adição/multiplicação)		Listagem	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Arranjo	37,5	6,2	37,5	0	6,2	0	18,7	93,7
Combinação	18,7	6,2	18,7	0	0	0	62,5	93,7
Permutação	25	6,2	18,7	0	0	0	56,2	93,7
Produto cartesiano	50	6,2	56,2	0	0	0	12,5	93,7

Ao usar a listagem no pré-teste, os alunos listaram um ou algumas poucas possibilidades. No pós-teste, os participantes aprimoraram o uso da listagem conseguindo identificar maiores números de casos.

6.3.2 Resultados do Grupo 2

Nesta seção serão analisados os resultados do Grupo 2. Nesse grupo, a intervenção utilizou apenas a árvore de possibilidades para a resolução dos problemas.

O Gráfico 2 apresenta os percentuais de tipos de resposta no pré-teste e no pós-teste. É possível observar que houve progressos nos desempenhos do grupo, uma vez que no pós-teste foi verificada uma relevante redução do percentual de *resposta incorreta sem relação combinatória* – passou de 76,6% no pré-teste para 21,9% no pós-teste. Também se pode observar que os estudantes, no pós-teste, apresentaram tipos de resposta que demonstram um maior nível de compreensão (*acerto parcial 2, acerto parcial 3* e *resposta correta*).

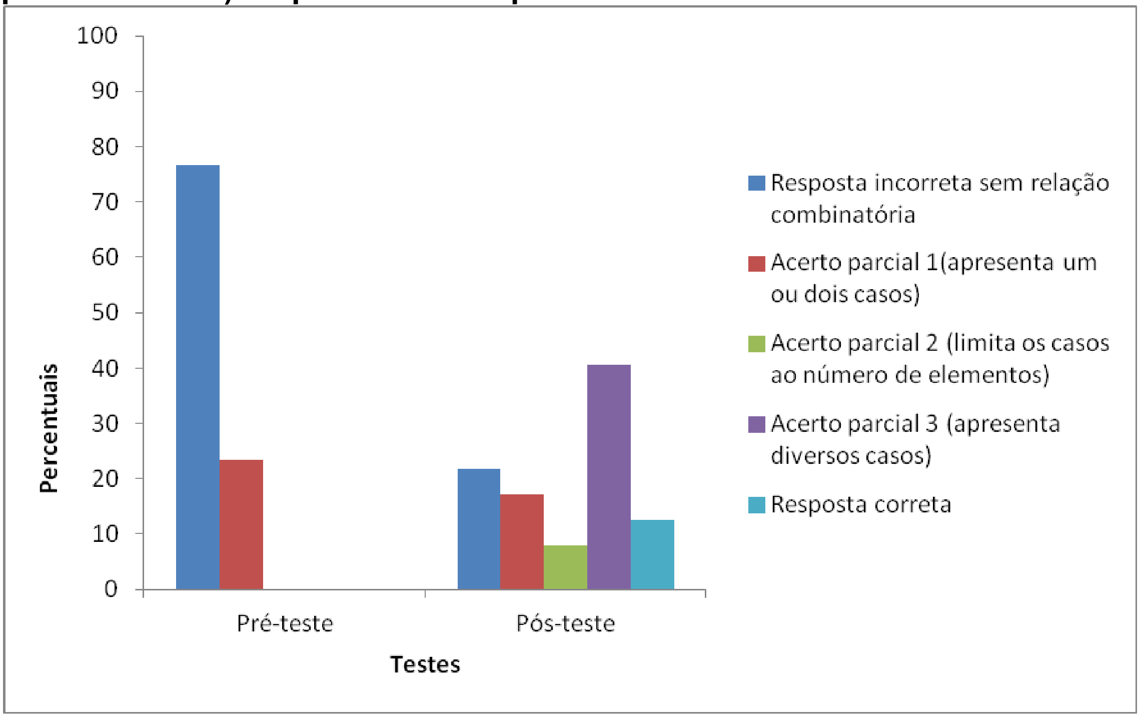
Além da redução do percentual de *resposta incorreta sem relação combinatória*, houve também a redução do *acerto parcial 1,* o qual se apresentou no pós-teste como a forma de acerto parcial mais elementar, já que eram listadas apenas uma ou duas possibilidades. O percentual desse tipo de resposta reduziu de 23,4% (pré-teste) para 17,2% (pós-teste).

O tipo de resposta que obteve o maior percentual (40,6%) no pós-teste foi o *acerto parcial 3*, que é forma de acerto parcial que mais se aproximou da resposta correta.

No que diz respeito à categoria *resposta correta,* o grupo apresentou um percentual de 12,5%.

Ao comparar as médias de tipos de resposta do grupo no pré-teste e no pós-teste, por meio do teste t-student, verificou-se que houve diferença significativa entre essas médias, $t(7) = -5{,}902$; $p = 0{,}001$. A análise não paramétrica realizada com uso do teste Wilcoxon Signed Ranks ($p=0{,}012$) também confirmou esse resultado. Dessa maneira, pode-se afirmar que o desempenho dos participantes do Grupo 2 apresentou avanços significativos após a intervenção.

Gráfico 2 – Percentuais de tipos de resposta do Grupo 2 (listagem e árvore de possibilidades) no pré-teste e no pós-teste



Desempenho do Grupo 2 em relação aos significados da Combinatória

Esta seção tem a finalidade de analisar os tipos de resposta utilizados em cada significado que envolve o *raciocínio combinatório*. A Tabela 9 mostra os percentuais das categorias de resposta por significado no pré e no pós-teste.

Tabela 9 – Percentuais de tipos de resposta em cada tipo de problema no pré-teste e no pós-teste do Grupo 2

Tipo de problema	Resposta incorreta sem relação combinatória		Acerto parcial 1		Acerto parcial 2		Acerto Parcial 3		Resposta correta	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Arranjo	68,8	12,5	31,2	12,5	0	6,2	0	56,2	0	12,5
Combinação	56,2	6,2	43,8	12,5	0	12,5	0	50	0	18,7
Permutação	81,2	50	18,7	12,5	0	0	0	37,5	0	0
Produto cartesiano	100	18,7	0	31,2	0	12,5	0	18,7	0	18,7

Como pode ser visto na Tabela 9, em todos os significados, os maiores percentuais do pré-teste foram de *resposta incorreta sem relação combinatória*. Em destaque na cor vermelha, *o produto cartesiano* (100%) e a *permutação* (81,2%) foram os tipos de problema que apresentaram os maiores percentuais desse tipo de resposta, seguidos por *arranjo* (68,8%) e *combinação* (56,2%). Portanto, a *combinação*, assim como no Grupo 1, foi o significado que apresentou o menor percentual de *resposta incorreta sem relação combinatória* e consequentemente o maior percentual de *acerto parcial 1,* sendo esse último, o tipo de problema que os estudantes demonstraram maior compreensão no pré-teste.

Já no pós-teste, é notável o avanço no desempenho dos participantes, uma vez que houve uma diminuição do percentual de *respostas incorretas sem relação combinatória* em todos os tipos de problema. O *produto cartesiano* que no pré-teste apresentou apenas respostas sem relação combinatória, no pós-teste teve o maior percentual concentrado no *acerto parcial 1* (31,2%), mas também apresentou percentuais de respostas mais avançadas como o *acerto parcial 3* e a *resposta correta*, ambos com 18,7%.

A *permutação* foi o significado que os estudantes permaneceram com maior dificuldade. Esse tipo de problema obteve no pré-teste o segundo maior percentual de *resposta incorreta sem relação combinatória*. Apesar da redução desse percentual no pós-teste, a *permutação* apresentou o maior percentual de resposta incorreta sem relação combinatória (50%).

O *acerto parcial 3* foi o tipo de resposta com percentuais mais elevados nos problemas de *arranjo* (56,2%) e de *combinação* (50%). Esses significados também apresentaram a categoria *resposta correta* com os percentuais, respectivamente de 12,5% e 18,7%.

A Tabela 10, a seguir, expressa dados da tabela anterior (Tabela 9) de modo mais detalhado, uma vez que se pode verificar o desempenho em cada um dos problemas do pós-teste, considerando-se a grandeza numérica dos resultados. Análises paramétricas realizadas com o Teste t-student para diferenças de médias de amostras emparelhadas mostraram que os desempenhos dos estudantes nos problemas com poucas possibilidades (PP) não foram diferentes significativamente do desempenho dos mesmos nos problemas que apresentam o que se considerou como muitas possibilidades (MP), t(7)= 0,986; p= 0,357. Análises não paramétricas (teste Wilcoxon Signed Ranks) também confirmaram esse resultado (p=0,351).

Tabela 10 – Frequência (percentuais) de tipos de resposta em cada tipo de problema e por ordem de grandeza numérica de possibilidades no pós-teste do Grupo 2

Tipo de problema	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial 1	Acerto parcial 2	Acerto Parcial 3	Resposta correta
Arranjo PP	1 (12,5)	1 (12,5)	0	5 (62,5)	1 (12,5)
Arranjo MP	1 (12,5)	1 (12,5)	1 (12,5)	4 (50)	1 (12,5)
Combinação PP	0	2(25)	0	5 (62,5)	1 (12,5)
Combinação MP	1 (12,5)	0	2 (25)	3 (37,5)	2 (25)
Permutação PP	2(25)	1 (12,5)	0	5 (62,5)	0
Permutação MP	6 (75)	1 (12,5)	0	1 (12,5)	0
Produto cartesiano PP	2 (25)	3 (37,5)	0	2 (25)	1 (12,5)
Produto cartesiano MP	1 (12,5)	2 (25)	2 (25)	1 (12,5)	2 (25)

Obs: PP – poucas possibilidades; MP- muitas possibilidades

Desempenho do Grupo 2 em relação às representações simbólicas

As representações simbólicas mais utilizadas pelo Grupo 2 no pré-teste em todos os tipos de problema, exceto no *produto cartesiano*, foi a listagem. Na resolução dos problemas que envolvem o *produto cartesiano* destacou-se a escrita de dados do enunciado. Essas informações que estão destacadas na cor vermelha podem ser verificadas na Tabela 11.

Tabela 11 – Percentuais de tipos de representação em cada tipo de problema no pré-teste e no pós-teste do Grupo 2

Tipo de problema	Não identificada		Escrita de dado(s) do enunciado		Algoritmo inadequado (Adição/multiplicação)		Listagem		Árvore de possibilidades	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Arranjo	18,7	0	12,5	12,5	0	0	68,7	62,5	0	25
Combinação	18,7	0	37,5	6,25	0	0	43,7	75	0	18,7
Permutação	25	6,2	12,5	6,25	0	0	62,5	75	0	12,5
Produto cartesiano	12,5	0	68,7	0	6,25	0	12,5	87,5	0	12,5

Apesar de o grupo ter utilizado apenas a árvore de possibilidades durante a intervenção, no pós-teste a representação mais usada em todos os tipos de problema foi a listagem de possibilidades, com pode ser visto na Tabela 11 em destaque com preenchimento verde. A árvore de possibilidades também foi utilizada, mas apresentou percentuais bastante inferiores aos da listagem.

As análises das resoluções dos estudantes, no pré-teste e no pós-teste, apontam que o trabalho realizado na intervenção com uso de árvores de possibilidades pode ter contribuído para que os participantes conseguissem estruturar melhor a listagem de possibilidades. Os estudantes, em sua maioria, deram preferência à forma de representação que já utilizavam antes da intervenção, mas a utilização da árvore parece ter auxiliado na reflexão sobre a construção da listagem, uma vez que passaram a usar essa representação de modo mais sistematizado, alcançando acertos *parciais 3* e até mesmo *respostas corretas.* Dessa maneira, é possível perceber que a utilização de uma determinada representação simbólica, a árvore de possibilidades, ajudou na sistematização mais elaborada de outra forma de representação simbólica, a listagem.

6.3.3 Resultados do Grupo 3

Durante a intervenção desse grupo usou-se apenas a listagem como forma de representação simbólica.

O Grupo 3, assim com os outros grupos, apresentou no pós-teste uma relevante redução do percentual da categoria *resposta incorreta sem relação combinatória* (de 76,6% para 17,2%), sendo esse o grupo com a diminuição mais expressiva desse valor. Ainda semelhantemente ao que foi visto nos grupos anteriores, o pós-teste do Grupo 3 apresentou categorias de respostas que apontam progresso nas resoluções dos estudantes em relação ao pré-teste. As referidas categorias são o *acerto parcial 2*, *acerto parcial 3* e *resposta correta*, como pode ser verificado no Gráfico 3.

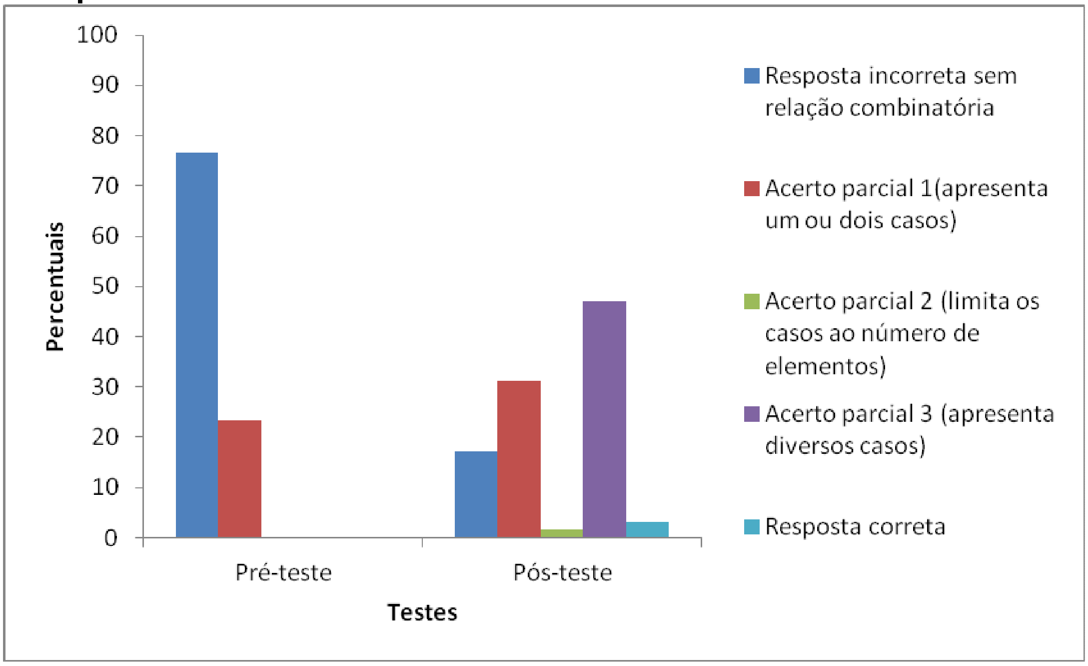
No que diz respeito ao *acerto parcial 1,* o qual já havia sido identificado no pré-teste, o Grupo 3 foi o único em que o percentual desse tipo de resposta aumentou no pós-teste, de 23,4% para 31,2%. Ressalta-se que essa forma de acerto parcial é a mais elementar entre as três formas de acerto parcial que foram verificadas.

O *acerto parcial 2* foi a categoria com o menor percentual de utilização, apenas 1,6%.

O *acerto parcial 3* foi o tipo de resposta que obteve o maior percentual no pós-teste (46,9%), o que mostra que um percentual relevante de respostas atingiu o tipo de acerto parcial que está mais próximo da resposta correta. O Grupo 3 também apresentou a categoria *resposta correta* (3,1%).

Ao comparar os desempenhos dos participantes do Grupo 3 antes e após a intervenção, verificou-se que houve diferença significativa entre essas médias, tanto por meio de análise paramétrica ($t(7)= -4,799$; $p= 0,002$) quanto por análise não paramétrica (teste Wilcoxon Signed Ranks $p=0,012$). Dessa maneira, verificou-se que os alunos apresentaram desempenhos significativamente melhores no pós-teste.

Gráfico 3 – Percentuais de tipos de resposta do Grupo 3 (listagem) no pré-teste e no pós-teste



Desempenho do Grupo 3 em relação aos significados da Combinatória

Esta seção apresentará o desempenho dos estudantes no que diz respeito aos tipos de respostas utilizados em cada um dos significados da combinatória.

A Tabela 12 mostra os percentuais de categoria de resposta por significado da Combinatória em ambos os testes realizados. Segundo a tabela pode-se perceber que no pré-teste os estudantes possuíam dificuldades na operação de todos os significados, entretanto a *permutação* (100%) e o *produto cartesiano* (87,5%), ambos em destaque na cor vermelha, tiveram os maiores percentuais de *resposta incorreta sem relação combinatória.* Desse modo, é possível afirmar que esses significados foram os que os participantes demonstraram maior dificuldade. Já a *combinação* foi o tipo de problema que os estudantes demonstraram uma maior compreensão inicial, ainda primária, uma vez que o percentual de *acerto parcial 1* desse tipo de problema foi de 56,2%.

No pós-teste, observaram-se avanços nos desempenhos dos participantes, já que em todos os significados, o *acerto parcial 3* apresentou os maiores percentuais, como pode ser visto em destaque na Tabela 12, em preenchimento verde – *arranjo*

(43,8%), *combinação* (50%), *permutação* (37,5%) e *produto cartesiano* (56,2%). É importante ressaltar que o *arranjo* e a *permutação* apresentaram outras categorias de resposta com os mesmos percentuais que o *acerto parcial 3*, no caso do *arranjo* a categoria foi o *acerto parcial 1* e da *permutação* foi a *resposta incorreta sem relação combinatória*.

Entre os tipos de problema, a *permutação* permaneceu com o maior percentual de *resposta incorreta sem relação combinatória.* Sendo, dessa maneira, o tipo de problema que os alunos continuaram a apresentar maiores dificuldades em resolvê-lo.

Apenas a combinação e o produto cartesiano apresentaram percentuais da categoria *resposta correta*, ambos com 6,2%.

Tabela 12 – Percentuais de tipos de resposta em cada tipo de problema no pré-teste e no pós-teste do Grupo 3

Tipo de problema	Resposta incorreta sem relação combinatória		Acerto parcial 1		Acerto parcial 2		Acerto Parcial 3		Resposta correta	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Arranjo	75	12,5	25	43,8	0	0	0	43,8	0	0
Combinação	43,8	6,2	56,2	31,2	0	6,2	0	50	0	6,2
Permutação	100	37,5	0	25	0	0	0	37,5	0	0
Produto cartesiano	87,5	12,5	12,5	25	0	0	0	56,2	0	6,2

A Tabela 13, a seguir traz os dados da Tabela 12 de forma mais minuciosa, apresentando os percentuais das categorias de resposta em cada um dos problemas do pós-teste, considerando a ordem de grandeza numérica das possibilidades. Ao comparar os desempenhos dos estudantes, considerando a grandeza numérica dos resultados, nos problemas com poucas possibilidades (PP) e nos com muitas possibilidades (MP), por meio doTeste t-student para diferenças de médias de amostras emparelhadas, observou-se que houve diferença significativa entre esses desempenhos, t(7)= 2,758; p=0,028. Essa diferença também foi constatada pelo teste não paramétrico Wilcoxon Signed Ranks (p= 0,04). Os estudantes desse grupo apresentaram melhor desempenho na resolução de problemas que envolviam poucas possibilidades (seis a 12 casos), uma vez que a média obtida foi 8,13. Já a média do desempenho nos problemas que envolviam muitas possibilidades foi 6,88.

Tabela 13 - Frequência (percentuais) de tipos de resposta em cada tipo de problema e por ordem de grandeza numérica de possibilidades no pós-teste do Grupo 3

Tipo de problema	Resposta incorreta sem relação combinatória	Acerto parcial 1	Acerto parcial 2	Acerto Parcial 3	Resposta correta
Arranjo PP	1 (12,5)	5 (62,5)	0	2 (25)	0
Arranjo MP	1 (12,5)	2 (25)	0	5 (62,5)	0
Combinação PP	0	3 (37,5)	1 (12,5)	3 (37,5)	1 (12,5)
Combinação MP	1 (12,5)	2 (25)	0	5 (62,5)	0
Permutação PP	0	3 (37,5)	0	5 (62,5)	0
Permutação MP	6 (75)	1 (12,5)	0	1 (12,5)	0
Produto cartesiano PP	1 (12,5)	2 (25)	0	4 (50)	1 (12,5)
Produto cartesiano MP	1 (12,5)	2 (25)	0	5 (62,5)	0

Obs: PP – poucas possibilidades; MP- muitas possibilidades

Desempenho do Grupo 3 em relação às representações simbólicas por tipo de problema

Como pode ser visto na Tabela 14 em destaque na cor vermelha, a listagem e a escrita de dado(s) do enunciado foram as formas de representação mais utilizadas pelo Grupo 3 no pré-teste. Já no pós-teste, essa última não foi mais utilizada, enquanto que a primeira foi a representação que apresentou os maiores percentuais em todos os tipos de problema conforme pode ser visualizado na mesma Tabela 14, destacado com preenchimento verde.

Desse modo, pode-se compreender que após a intervenção, na qual foi usada apenas a listagem de possibilidades, os estudantes passaram a utilizar essa representação na resolução da maioria dos problemas combinatórios. A análise dos protocolos mostrou que os estudantes avançaram na sistematização das listagens, uma vez que conseguiram elencar, de uma maneira geral, um número maior de possibilidades quando comparado ao pré-teste.

Tabela 14: Percentuais de tipos de representação em cada tipo de problema no pré-teste e no pós-teste do Grupo 3

Tipo de problema	Não identificada		Escrita de dado(s) do enunciado		Listagem	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
Arranjo	12,5	12,5	43,7	0	43,7	87,5
Combinação	12,5	6,2	50	0	37,5	93,7
Permutação	18,7	12,5	56,2	0	25	87,5
Produto cartesiano	18,7	12,5	37,5	0	43,7	87,5

6.3.4 Comparação entre os grupos

O objetivo desta seção é apresentar uma comparação entre os resultados do pós-teste dos grupos, procurando apontar as aproximações e distanciamentos desses em relação aos tipos de respostas e representações simbólicas utilizados e desempenhos por significado da Combinatória.

O Gráfico 4 apresenta o percentual de tipos de resposta do pós-teste em cada grupo do estudo. É válido relembrar que cada grupo vivenciou uma intervenção de cerca de duas horas, na qual foram resolvidas as mesmas questões do pré-teste. Os grupos se diferenciaram pelas formas de representações simbólicas utilizadas em cada um deles, o Grupo 1 usou a listagem e a árvore de possibilidades, o Grupo 2 apenas a árvore de possibilidades e o Grupo 3 apenas a listagem.

No que diz respeito às *respostas incorretas sem relação combinatória*, como consta no Gráfico 4, os grupos apresentaram percentuais próximos desse tipo de resposta, sendo que o Grupo 3 foi o que obteve no pós-teste o menor percentual (17,2%).

O Grupo 3 apresentou o maior percentual de *acerto parcial 1* (31,2%).

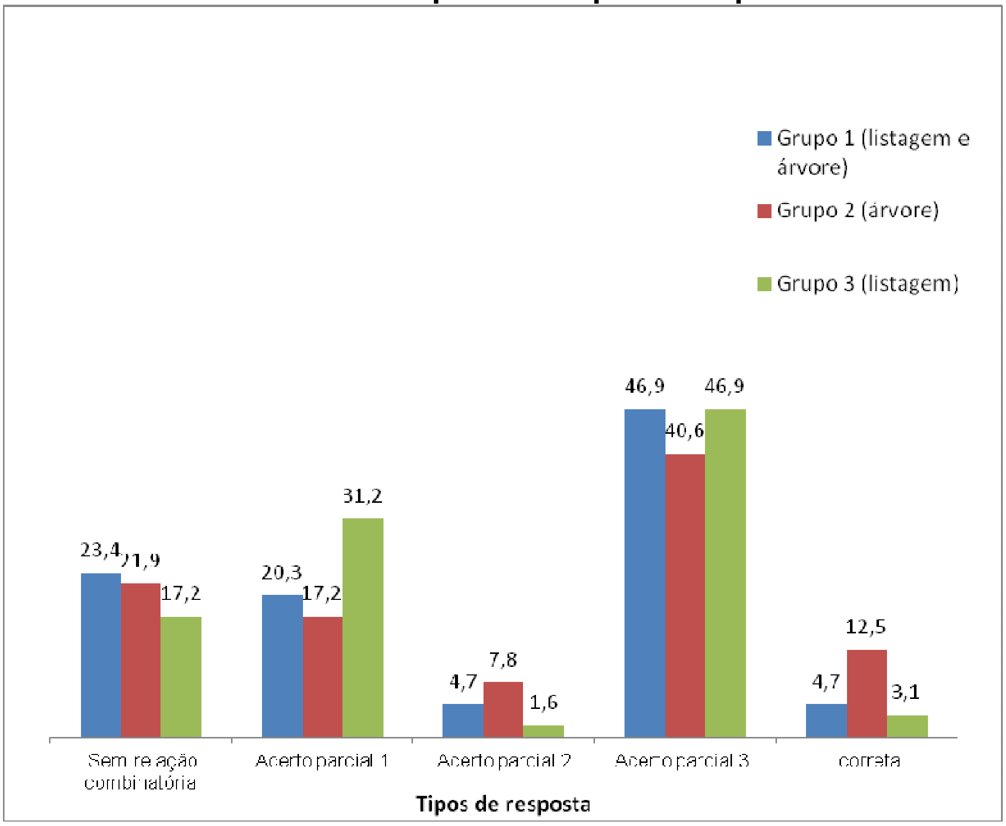
O *acerto parcial 2* foi a categoria que obteve o menores percentuais em todos os grupos, sendo que o Grupo 2 teve o maior percentual deste tipo de resposta no pós-teste.

O *acerto parcial 3* apresentou os maiores percentuais, em todos os grupos, o que mostra que os participantes desses tiveram avanços em seus desempenhos após a intervenção, uma vez que muitas respostas apresentaram resoluções que se aproximaram da resposta esperada.

Todos os grupos apresentaram percentuais da categoria de *resposta correta*. O Grupo 2 foi o que o obteve o maior percentual (12,5%) de respostas desse tipo.

De um modo geral, os grupos obtiveram percentuais próximos de tipos de resposta. Realizou-se uma análise de variância (ANOVA) para analisar a implicação da variável independente Grupo em relação à variável dependente total de tipos de resposta no pós-teste [$F (2, 21) = 0,78$, $p > 0,05$]. Testes post-hoc (Tukey HDS, Scheffe e Bonferroni) não determinaram diferenças significativas ($p > 0,05$) entre os desempenhos dos grupos no pós-teste. Esses resultados foram confirmados por análises não paramétricas realizadas com a utilização do Teste Mann-Whitney. Desse modo observa-se que os grupos avançaram de forma semelhante.

Gráfico 4 – Percentuais de tipos de resposta do pós-teste em cada grupo



Comparação entre os grupos em relação ao desempenho por tipo de problema

Nesta seção, os grupos serão comparados considerando-se seus desempenhos nos diferentes significados da Combinatória.

No pré-teste de todos os grupos, os estudantes apresentaram dificuldades na resolução de todos os tipos de problema, uma vez que o tipo de resposta mais elaborada até então foi o *acerto parcial 1.* Entretanto, *a permutação* e o *produto cartesiano* apresentaram os maiores percentuais de questões incorretas sem o estabelecimento de relação combinatória, ou seja, foram os tipos de problema que os estudantes, nos três grupos, demonstraram maior dificuldade de compreensão. As resoluções demonstraram que os estudantes não compreendiam as propriedades invariantes envolvidas nesses significados. Nos problemas de *produto cartesiano,* a maior dificuldade foi no estabelecimento de relação entre os conjuntos, pois os participantes não entendiam que era necessário combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro conjunto para se chegar ao conjunto-solução. Nas *permutações*, o maior obstáculo evidenciado diz respeito às etapas de escolha para formação dos casos.

Após a intervenção, os participantes de todos os grupos apresentaram importantes avanços na resolução dos problemas que envolvem o *produto cartesiano*, sendo esse um dos tipos de problema que obteve a categoria *resposta correta*. Nas resoluções do pós-teste, verificou-se que os estudantes avançaram na compreensão das propriedades invariantes desse tipo de problema. Os estudantes mostraram compreender a relação existente entre os conjuntos, mas ainda apresentaram dificuldades no esgotamento de possibilidades.

Já no que diz respeito à *permutação,* houve progresso, porém inferior ao do *produto cartesiano,* uma vez que essa permaneceu com os maiores percentuais de *resposta incorreta sem relação combinatória.* Os estudantes ainda apresentaram dificuldades na realização de etapas de escolha da *permutação.* Esse tipo de problema apresenta um número maior de etapas de escolha do que os demais significados, uma vez que em todos os casos são usados todos os elementos. De acordo com Pessoa e Borba (2010), os problemas de *permutação* exigem uma organização muito cuidadosa das possibilidades para que todos os casos possíveis sejam encontrados.

A *combinação* foi o tipo de problema que, em todos os grupos, apresentou no pré-teste o maior percentual de *acerto parcial 1*, ou seja, antes da instrução formal sobre o conceito, percebeu-se um maior nível de compreensão desse significado da Combinatória. No pós-teste, a *combinação* apresentou os seus maiores percentuais concentrados no *acerto parcial 3.* Salienta-se que os três grupos atingiram respostas corretas nesse tipo de problema. Os participantes, de um modo geral, mostraram uma maior compreensão da necessidade de exclusão de casos repetidos, já que nesse tipo de problema a ordem dos elementos não gera novos casos.

As respostas corretas em todos os grupos estavam relacionadas ao *produto cartesiano* e à *combinação, s*endo que no Grupo 2, o *arranjo* também obteve esse tipo de resposta, o que pode indicar que a organização da árvore de possibilidades possibilitou uma melhor compreensão desse tipo de problema.

Depois da *combinação*, o *arranjo* foi no pré-teste o tipo de problema que os estudantes apresentaram uma maior compreensão inicial. No pós-teste, ocorreram avanços nas resoluções das situações que envolviam o arranjo, os participantes passaram a avaliar a influência da ordem na formação de novas possibilidades, uma vez que nesse tipo de situação a ordem dos elementos proporciona a formação de casos distintos. Mas, ainda houve muita dificuldade em se esgotar os casos. Apenas o Grupo 2 apresentou a categoria *resposta correta* nos problemas de *arranjo*, esse fato pode estar relacionado ao uso da árvore de possibilidades na intervenção do grupo. Provavelmente, a utilização da árvore auxiliou os alunos a compreenderem a sistematização desse tipo de problema. Apesar dos estudantes preferirem a listagem, o uso da árvore durante a intervenção pode ter ajudado na compreensão das propriedades invariantes do *arranjo.*

Comparação entre as formas de representação no pós-teste

Ao realizar a intervenção usando diferentes formas de representação simbólica em distintos grupos, buscou-se verificar a influência dessas representações para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*. Nesse sentido, os resultados mostraram que todos os grupos apresentaram avanços significativos em relação ao pré-teste e que não houve diferenças significativas entre os grupos no que diz respeito ao pós-teste, ou seja, após a intervenção, os grupos desenvolveram-se de modo semelhante. O objetivo desta seção é analisar comparativamente as representações usadas no pós-teste.

Como pode ser visto na Tabela 15, em destaque com preenchimento na cor verde, a listagem foi nos três grupos a estratégia mais utilizada no pós-teste, até mesmo no Grupo 2 que trabalhou exclusivamente com a árvore de possibilidades. Esse resultado aponta que os estudantes deram preferência ao uso da representação que já utilizavam. Dessa maneira, a intervenção auxiliou no aprimoramento dessa forma representação.

Dos dois grupos (Grupo 1 e Grupo 2) que na intervenção utilizaram a árvore de possibilidades, apenas o Grupo 2 fez uso dessa representação no pós-teste.

Conforme expressa a Tabela 15, o Grupo 3, no pós-teste apresentou o maior percentual de representação não identificada (11%) e foi também o único grupo que ainda apresentou o uso de escrita de dado(s) do enunciado (6,25%).

Tabela 15: Percentuais de tipos de representação em cada grupo no pós-teste

Grupo	Não identificada	Escrita de dado(s) do enunciado	Listagem	Árvore de possibilidades
Grupo 1	6,2	0	93,7	0
Grupo 2	1,6	6,25	75	17,2
Grupo 3	11	0	89	–

As comparações realizadas entre os grupos mostraram que esses obtiveram resultados muito próximos no pós-teste, apontando a importância de trabalhos sistematizados para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, uma vez que com apenas uma sessão de intervenção os estudantes apresentaram melhoras significativas em seus desempenhos.

CAPÍTULO 7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo da presente pesquisa foi analisar a influência de diferentes formas de representação simbólica na resolução de problemas combinatórios por estudantes da Educação de Jovens e Adultos. A temática foi escolhida por se considerar importante o papel que sistemas de sinais exercem sobre o aprendizado matemático, por serem problemas combinatórios ricos em possibilidade de desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático e pela modalidade de EJA necessitar ser foco de mais estudos específicos dentro de Educação Matemática.

Nos capítulos iniciais, buscou-se discutir características do ensino da Matemática na EJA e da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996), bem como analisar estudos anteriores que discutem o *raciocínio combinatório*, principalmente nessa modalidade de ensino. Nos capítulos subsequentes foram apresentados o percurso metodológico do estudo e a análise dos resultados obtidos. Neste capítulo serão apresentadas as considerações finais decorrentes das análises realizadas ao longo do trabalho.

Participaram do estudo 24 estudantes de turmas de Módulo III da EJA, isto é turmas que equivalem ao 4º e 5º anos do Ensino Fundamental regular. Os procedimentos metodológicos foram: pré-teste, intervenção e pós-teste. Tais procedimentos se diferenciaram nos grupos em relação às formas de representação simbólica usadas na intervenção de cada um desses. As situações-problema abordadas nos testes e na intervenção foram as mesmas para todos os grupos.

Ao elaborar as situações dos testes e intervenção houve o cuidado de usar contextos adultos que fossem interessantes aos estudantes para que a linguagem usada não se apresentasse como um dificultador da aprendizagem do conceito. De acordo com Oliveira (1999), a valorização da linguagem específica do ambiente escolar ainda é um dos fatores que distanciam os estudantes da EJA da apropriação formal dos conceitos, pois esses possuem pouca familiaridade com tal linguagem. Dessa maneira, é extremamente relevante que, principalmente na EJA, as intervenções busquem articular conhecimentos formais com os não formais que os estudantes já possuem. Essa articulação também é ressaltada por Schliemann (1988) que observou em seu estudo que os participantes, os quais interligaram as duas formas de experiências (cotidiana e escolar) apresentaram os melhores desempenhos na resolução de problemas combinatórios.

Estudos anteriores (LIMA e BORBA, 2010) evidenciam também que apenas conhecimentos cotidianos não são suficientes para desenvolver o conhecimento em Combinatória de adultos. Segundo Fischbein (1975), a instrução formal é imprescindível para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*. Entretanto, também é de fundamental importância que as intervenções considerem as contribuições não escolares, promovendo discussões e análise de situações que já fazem parte da experiência extraescolar dos estudantes, o que pode fazer com que venham a interessar-se mais pelos conteúdos abordados.

Durante a realização dos procedimentos do presente estudo, observou-se que os contextos abordados despertaram interesse e auxiliaram na compreensão das diferentes situações. Entre esses contextos estavam a fabricação de produtos, situações esportivas e de seleção de funcionários.

Ao desenvolver um trabalho de intervenção sobre a Combinatória na EJA, tentou-se também romper com um dos mitos apontados por Fonseca (2006) que ainda perduram nessa modalidade de ensino, de acordo com o qual os conteúdos matemáticos devem ser apresentados de forma linear, pois os estudantes podem fracassar caso as etapas de conteúdos não sejam seguidas. O presente estudo confirmou que a linearidade de conteúdos é realmente um mito, já que os participantes apresentaram avanços significativos em seus desempenhos mesmo sem terem tido ainda instrução formal em estruturas multiplicativas. Pode-se afirmar que a linearidade foi quebrada, uma vez que, segundo as professoras das turmas, os conteúdos abordados até o momento estavam relacionados ao Sistema de Numeração Decimal e às estruturas aditivas (adição e subtração). Mesmo sem instrução anterior em problemas multiplicativos menos complexos, a instrução em problemas combinatórios mostrou-se eficiente, pois os alunos puderam compreender as situações apresentadas, baseando-se em seus conhecimentos cotidianos e na intervenção da qual participaram, a qual ressaltou como representações podem ser utilizadas na compreensão de propriedades e relações combinatórias.

O pré-teste teve a finalidade de analisar o desempenho dos estudantes e as formas de representação simbólica usadas por esses antes de uma intervenção em Combinatória. Partindo de constatações anteriores presentes no estudo realizado por Lima e Borba (2010), era esperado que os estudantes apresentassem dificuldades na resolução de problemas combinatórios e, em relação às representações, aguardava-se que a listagem fosse uma das mais utilizadas pelos estudantes.

As expectativas iniciais foram confirmadas nas análises do pré-teste. A maioria das respostas não apresentava relação combinatória e as respostas mais avançadas apresentaram apenas um ou dois casos, ou seja, eram ainda muito primárias, mostrando a necessidade de se promover trabalhos para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*. As principais representações simbólicas usadas foram a escrita de dado(s) do enunciado e a listagem, sendo que essa última precisava ter seu uso aprimorado para que os alunos alcançassem respostas corretas. Partiu-se da compreensão que esse aprimoramento não se daria de forma isolada, uma vez que os conceitos são formados, segundo Vergnaud (1986), por três dimensões interligadas: as situações que dão significado aos conceitos, as propriedades/relações invariantes a todas as situações e as representações simbólicas utilizadas para representá-los.

Na intervenção objetivou-se trabalhar a Combinatória abordando as três dimensões conceituais supracitadas, mas o estudo focou-se de modo mais acentuado nas análises do efeito da dimensão referente às representações simbólicas. Cada grupo trabalhou com representações distintas: Grupo 1 – listagem e árvore de possibilidades; Grupo 2 – árvore de possibilidades e Grupo 3 – listagem.

Quanto aos significados das situações, as quais levaram em consideração a variedade e a história (funcionalidade), ambas enfatizadas por Vergnaud (1996) como aspectos essenciais na escolha das situações, foram abordados os significados da Combinatória presentes na organização proposta por Pessoa e Borba (2009): *arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano*. As situações do pré-teste foram resolvidas na intervenção, já no pós-teste foram utilizadas outras situações-problema. Ressalta-se que as situações dos testes e intervenção foram as mesmas para todos os grupos.

Em relação às propriedades/relações invariantes, buscou-se chamar a atenção dos participantes para o esgotamento de casos, bem como para a escolha e ordenação dos elementos. As discussões que ocorreram na intervenção mostraram que os estudantes passaram a ter mais atenção às propriedades e relações combinatórias. Observou-se que essa maior atenção ocorreu nos três grupos, sendo as dúvidas dos participantes e as formas como interagiram, a partir dos questionamentos e dos esclarecimentos, muito próximas.

Havia a hipótese inicial que, em relação à influência das representações simbólicas, todos os grupos poderiam ter avanços nos desempenhos. O Grupo 1 poderia progredir por usar duas formas de representação. Vergnaud (1996) defende que é relevante promover o uso de diferentes representações simbólicas no aprendizado matemático e Groenwald, Zoch e Homa (2009) ressaltam o uso de representações múltiplas como tentativa de auxiliar na interpretação de problemas combinatórios. O Grupo 2 no qual foi usada apenas a árvore de possibilidades também poderia apresentar progressos nos desempenhos com base no que estudos anteriores evidenciaram – de que essa é uma forma de representação que ressalta a necessidade de sistematização nas soluções das situações (FISCHBEIN, 1975). E, por fim, o desempenho do Grupo 3 poderia avançar, uma vez que os alunos aprimorariam o uso da listagem que era uma representação que eles já utilizavam na resolução de problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*. Sendo assim, o estudo procurou investigar como as diferentes representações poderiam auxiliar a aprendizagem dos estudantes e se alguma forma de organização seria mais eficiente.

Os resultados do pós-teste mostraram que os três grupos apresentaram avanços significativos quando comparados ao pré-teste. Os percentuais de respostas incorretas sem relação combinatória tiveram uma grande redução e foram verificados tipos de resposta mais elaborados, chegando-se a atingir também percentuais de respostas corretas. A categoria de resposta que apresentou os maiores percentuais no pós-teste de todos os grupos foi o *acerto parcial 3*, o qual foi a forma de acerto parcial mais complexa e que mais se aproximou da resposta correta.

Dessa maneira, os resultados apontam que apenas uma intervenção de aproximadamente duas horas de duração pode auxiliar expressivamente no desenvolvimento do *raciocínio combinatório,* já que os participantes da pesquisa foram capazes de perceber distinções entre os problemas e usar formas de representação eficientes para resolvê-los. Possivelmente, mais algumas sessões de intervenção resultariam em maiores avanços ainda no desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

Salienta-se que estudos como Selva, Borba, Campos, Bivar, Ferreira e Luna (2008) e Lima e Borba (2010) apontam que os problemas combinatórios são, entre os problemas de estrutura multiplicativa, os que os estudantes apresentam maior dificuldade em resolvê-los. Portanto, uma das principais contribuições do presente estudo, trata-se em apresentar evidências de que conceitos que os estudantes apresentam baixos desempenhos, podem ser desenvolvidos e ter as dificuldades significativamente superadas, desde que haja um trabalho sistemático que auxilie as reflexões sobre esses conceitos. Eizenberg e Zaslavsky (2002, apud MORO e SOARES, 2006) trazem à discussão que obstáculos no ensino da Combinatória existem devido à dúvidas na abordagem do conceito. Nesse sentido, ressalta-se a importância de se considerar as três dimensões conceituais apresentadas na Teoria dos Campos Conceituais defendida por Vergnaud (1986) como base para o plano de trabalho: *situações significativas*, *relações e propriedades comuns e diferenciadoras* e *simbologias utilizadas em representações*.

Análises estatísticas verificaram que não houve diferenças significativas entre os desempenhos dos grupos no pós-teste, o que mostra que esses se desenvolveram de modos semelhantes e, portanto, as três formas de trabalho com as representações simbólicas variadas ajudaram os alunos a avançarem na resolução de problemas combinatórios. Um fato bastante interessante que precisa ser destacado é que a listagem foi em todos os grupos a representação mais utilizada no pós-teste, até mesmo no Grupo 2 que usou apenas a árvore de possibilidades na intervenção. É importante ressaltar também que no Grupo 1 no qual foram usadas as duas formas de representação, não houve uso da árvore de possibilidades no pós-teste. Observa-se, dessa maneira, que os participantes preferiram utilizar a representação que já faziam uso, conforme foi verificado no pré-teste. Especificamente no Grupo 2, os resultados apontam que o trabalho exclusivo com a árvore de possibilidades ajudou os participantes a aprimorarem o uso da listagem, compreendendo melhor como estruturá-la e apenas nesse grupo também foram observadas respostas corretas nos problemas de *arranjo*, nos demais grupos apenas a *combinação* e o *produto cartesiano* tiveram percentuais desse tipo de resposta. É possível que a sistematização da árvore tenha proporcionado ao Grupo 2 uma melhor compreensão sobre a propriedade invariante relacionada à ordenação dos elementos.

No que diz respeito à abordagem dos tipos de problemas combinatórios, concorda-se com Salgado e Trigueros (2009), as quais constataram em seu estudo que os estudantes apresentaram melhores desempenhos na intervenção em que foram abordados os problemas sem ordenação e os problemas com ordenação. De acordo com Borba (2010), as investigações empíricas sobre a Combinatória têm se concentrado na abordagem de apenas um determinado tipo de problema e não na análise do conhecimento nos diferentes tipos. O presente estudo possibilitou avaliar o quanto é relevante o trabalho com os diferentes significados, pois os estudantes têm a oportunidade de compará-los, percebendo e diferenciando as propriedades invariantes de cada situação, melhorando também a sistematização das representações simbólicas e, assim, consequentemente, apresentam desempenhos melhores. Desse modo, defende-se o trabalho com diversos tipos de significados para que o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* possa acontecer de forma mais ampla, já que um conceito não está restrito a apenas uma situação.

Em relação aos desempenhos por tipo de problema, em todos os grupos a *permutação* e o *produto cartesiano* foram os que os estudantes apresentaram maior dificuldade de compreensão no pré-teste. No pós-teste, os estudantes progrediram nas resoluções de ambos os tipos de problemas, entretanto houve um maior nível de compreensão do *produto cartesiano*, que atingiu percentuais de respostas corretas em todos os grupos, já a *permutação* permaneceu com os maiores percentuais de resposta incorreta sem relação combinatória. No que diz respeito aos problemas de *produto cartesiano*, os estudantes demonstraram inicialmente não compreender a relação que deveriam estabelecer entre os conjuntos, uma vez que o número de casos é determinado pela combinação de cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro conjunto. Após a intervenção, no pós-teste as resoluções mostraram que os participantes progrediram na compreensão de tal relação. Nos problemas de *permutação*, as dificuldades, tanto no pré-teste quanto no pós-teste, estavam possivelmente relacionadas às etapas de escolha, pois em cada possibilidade são utilizados todos os elementos do conjunto.

A *combinação* foi o tipo de problema que, em todos os grupos, apresentou o maior percentual de acerto parcial no pré-teste, sendo essa a forma de resposta com maior nível de elaboração até então. Inicialmente, os estudantes mostraram compreender, ainda que de forma bastante primária, que deveriam formar subconjuntos a partir de um conjunto. Entretanto, não demonstraram entender a necessidade de esgotar as possibilidades e de analisar se a ordem dos elementos influenciaria ou não na geração de novas possibilidades. Foram identificadas apenas resoluções que envolviam apenas uma ou duas possibilidades, apontando que os estudantes elencaram apenas preferências pessoais. Após a intervenção, esse tipo de problema, nos três grupos, obteve os seus maiores percentuais relacionados ao acerto parcial 3 e também apresentou percentuais de resposta correta. Pode-se, dessa maneira observar que a *combinação* apresentou-se, desde o pré-teste, como um dos tipos de problema que os participantes atingiram maior compreensão.

Depois da combinação, o arranjo foi o tipo de problema que os grupos apresentaram maiores percentuais de acertos parciais no pré-teste. Havia a compreensão inicial de que era preciso formar subconjuntos, mas assim como nos problemas de combinação os estudantes identificaram no máximo dois possíveis casos. No pós-teste, observou-se avanço dos estudantes na compreensão das propriedades invariantes, porém houve muita dificuldade no esgotamento dos casos. Apenas no Grupo 2, que utilizou somente árvore de possibilidades na intervenção,os participantes alcançaram respostas corretas nesse tipo de problema. Mesmo que na maioria das resoluções do pós-teste os estudantes tenham utilizado a listagem, provavelmente, o uso da árvore de possibilidades durante a intervenção os auxiliou a compreender melhor a sistematização desse tipo de problema.

A presente pesquisa investigou turmas de Módulo III da EJA, tornando-se interessante que estudos futuros, nessa perspectiva, sejam também realizados com estudantes dessa modalidade de ensino que estejam concluindo o Ensino Fundamental, bem como com alunos do Ensino Médio, observando-se o papel das representações simbólicas no aprendizado da Combinatória.

Como visto no decorrer das análises, intervenções sistematizadas se mostram fundamentais para o desenvolvimento conceitual dos estudantes. Os dados do presente estudo apontaram que com uma única intervenção houve avanços significativos dos desempenhos dos participantes, os quais no pós-teste apresentaram expressiva compreensão sobre as propriedades invariantes da Combinatória, operando com as representações simbólicas de modo sistemático. Possivelmente, um maior período de intervenção resultaria em maiores avanços ainda em desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

Particularmente na EJA, as práticas docentes precisam também exercitar a auto-estima dos alunos, mostrando acreditar no potencial desses e contribuindo para que esses acreditem em si. A seguir segue um pequeno trecho de um diálogo de dois participantes do Grupo 1, na intervenção logo após a resolução do primeiro problema. Nesse trecho observa-se o Aluno 1 que atribui importância à instrução formal para o desenvolvimento de sua aprendizagem e o Aluno 2 que demonstra não estar muito confiante em suas potencialidades.

> **Aluno 1 –** *Mas era pra fazer isso tudinho aqui no papel? A gente nunca teve uma aula dessa, por isso que a gente não fez. Não tinha nem como.*
> **Aluno 2 –** *Mas Dona C.* – referindo-se à professora da turma – *não ia passar isso pra gente agora não que a gente tá muito fraco.*

O trecho acima foi utilizado buscando-se ilustrar um importante desafio para o ensino da Matemática na EJA: a necessidade de intervenções que articulando conhecimentos escolares e extraescolares auxiliem o desenvolvimento amplo dos conceitos, ajudando a mostrar aos estudantes que eles são capazes de se apropriarem do conhecimento formal. Em relação ao ensino da Combinatória, enfatiza-se novamente a relevância do trabalho das três dimensões conceituais (VERGNAUD, 1986) para a formalização dos conhecimentos sobre esse conceito, uma vez que os resultados do presente estudo, que procurou investigar o papel das representações simbólicas em articulação com diferentes significados combinatórios e seus respectivos invariantes, mostraram que os alunos conseguem sistematizar as representações de forma adequada quando esses compreendem as propriedades invariantes e diferenciam as distintas situações que envolvem os significados. De acordo com Vergnaud (1996, p.180), as representações simbólicas auxiliam na "identificação das invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas". Assim, em um trabalho interligado, cada representação simbólica ajuda a evidenciar determinas propriedades inerentes a situações específicas.

As análises realizadas proporcionam reflexões sobre a necessidade de valorização do ensino de Matemática na EJA, pois jovens e adultos possuem muitos conhecimentos anteriores que devem ser considerados e utilizados como ponto de partida para o desenvolvimento de outros conhecimentos. Nesse sentido, o ensino da Combinatória mostra-se como uma forma relevante de auxiliar os estudantes da EJA a desenvolverem seus raciocínios lógico-matemáticos. Também se ressalta como importante implicação educacional, o papel que representações simbólicas podem ter na análise e resolução de distintas situações matemáticas, com os significados, relações e propriedades nelas envolvidos.

Diante dos resultados atingidos, observa-se que a instrução formal é indispensável para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* na EJA. Novas pesquisas podem ser realizadas com o objetivo de investigar intervenções sobre a Combinatória nos anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio da EJA. Mostra-se também interessante a realização de intervenções com maior período de duração e realização de pós-teste posteriores para se observar a permanência do efeito de intervenções.

O presente estudo alcançou seus objetivos, no sentido de verificar como representações simbólicas podem ser utilizadas de modo eficiente para ampliação de conhecimentos. O estudo também evidenciou o potencial de aprendizagem de alunos da EJA que, quando estimulados adequadamente, avançam significativamente em seus conhecimentos matemáticos. Espera-se dessa forma ter contribuído para oferecer alternativas para o desenvolvimento de jovens e adultos que iniciam ou reiniciam sua escolarização - estudantes com ricas experiências cotidianas que precisam ser aproveitadas no ensino formal, em particular da Matemática e mais especificamente da Combinatória.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, J; COSTA,D M. E. da, BORBA, R. O impacto do software Árbol no Raciocínio Combinatório.. **Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática** (XII CIAEM), Recife, 2011.

BARRETO, F.; BORBA, R.. O desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos de um programa de correção de fluxo na modalidade da educação de jovens e adultos. **Anais do VI Encontro Paraibano de Educação Matemática**. Monteiro, Paraíba, 2010.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; PELAYO, V. N.. Razonamiento Combinatorio emAlumnos de Secundaria. **Educación Matemática,** v. 8, n. 1, p. 26-39, 1996.

BORBA, R. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica.: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** (X ENEM). Bahia, 2010.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade**.** **PARECER CNE/CEB 11/2000.** Faz referência às Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade**.** **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos:** Primeiro Segmento do Ensino Fundamental: 1ª a 4ª série**.** Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. MEC**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Disponível em: <http://www.mec.gov.br>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2011.

DIAS FILHO, A. & FEVORINI, R. **Matemática.** V.2. São Paulo: Scipione, 1985.

FANTINATO, M.C. de C. B. A construção de saberes matemáticos entre jovens e adultos do Morro de São Carlos. **Revista Brasileira de Educação**, nº 27. 2004.

FERRAZ, M.; BORBA, R. e AZEVEDO, J. Usando software Árbol na construção de árvores de possibilidades para resolução de problemas combinatórios: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** (X ENEM). Bahia, 2010.

FISCHBEIN, E. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht, 1975.

FONSECA, M. da C. F. R**. Educação Matemática de jovens e adultos:** especificações, desafios e contribuições. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

GROENWALD, C. L. O.; ZOCH, L. N.; HOMA, A.. I. R. Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. **Bolema**. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 34, p. 27-56, 2009.

KOORO, M. B. As contribuições curriculares da matemática para a educação de jovens e adultos. **Anais da 31ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**(ANPED), 2008, Caxambu.

LIMA R.; BORBA, R. O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio**. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (**X ENEM). Bahia, 2010.

MARTINS,G.; BORBA, R. Livros didáticos de alfabetização de jovens e adultos: um estudo sobre as estruturas multiplicativas. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** (X ENEM). Bahia, 2010.

MIGUEL, M. I.; MAGINA, S. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. **Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Santos, 2003.

MORO, M. L. F; SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, p. 99-124, 2006.

NESHER, P. Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In: J. Hiebert and M. Behr (eds.): **Number concepts and operations in the middle grades**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1988, p. 19-40.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, M. K. de. Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**. São Paulo: ANPED – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, n.12, 1999, p. 59-73.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** (X ENEM), Salvador, 2010.

ROCHA, J, de A. Investigando a aprendizagem de análise combinatória simples em uma turma de licenciandos em matemática submetida a uma prática de ensino tradicional. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática (IX ENEM),** Belo Horizonte, 2007.

SALGADO, H.; TRIGUEROS, M. Conteo: uma propuesta didáctica y su análisis. **Educación Matemática**, vol. 21. Núm1. Abril de 2009, p. 91-117.

SANDOVAL, I.; TRIGUEROS, M. & LOZANO, D. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. In: **Anais do XII Comitê Interamericano de Educação Matemática,** Querétaro, México, 2007.

SANTOS, L. F. Raciocínio Combinatório na EJA**. VIII Encontro Sergipano de Educação Matemática**, Aracajú, 2008.

SCHLIEMANN, S. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. & SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

SELVA, A.; BORBA, R.; CAMPOS, T.; BIVAR, D.; FERREIRA, M. N.; LUNA, M. H. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: O que compreendem? Que dificuldades apresentam? **Anais do 2º Simpósio Internacional de Educação Matemática.** Recife, 2008.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics: Concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica, 1,** 1986, pp. 75-90.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

VERGNAUD, G. A contribuição da Psicologia nas pesquisas sobre a Educação Científica, Tecnológica e Profissional do cidadão. FÁVARO, M. H. e CUNHA, C. **Psicologia do Conhecimento:** o diálogo entre as ciências e a cidadania. Brasília: Líber Livro, 2009.