Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Curso de Mestrado

DANIELLE AVANÇO VEGA

QUAL MAIS FÁCIL RESOLVER COM 2, 3 OU 4 ETAPAS DE ESCOLHA: PRODUTO CARTESIANO, ARRANJO, COMBINAÇÃO, OU PERMUTAÇÃO?

Recife
2014

DANIELLE AVANÇO VEGA

QUAL MAIS FÁCIL RESOLVER COM 2, 3 OU 4 ETAPAS DE ESCOLHA: PRODUTO CARTESIANO, ARRANJO, COMBINAÇÃO OU PERMUTAÇÃO?

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª Drª Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Recife

2014

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

V422q Vega, Danielle Avanço.
Qual mais fácil de resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha: produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação? / Danielle Avanço Vega. – Recife: O autor, 2014.
114 f.: il. ; 30 cm.

Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, PE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2014.
Inclui Referências.

1. Etapas de escolha – Tipos de problemas – Estratégias – Ensino Fundamental. 2. Combinatória. 3. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza. II. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2014-27)

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC
UFPE

DANIELLE AVANÇO VEGA

"QUAL MAIS FÁCIL RESOLVER COM 2, 3 OU 4 ETAPAS DE ESCOLHA: PRODUTO CARTESIANO, ARRANJO, COMBINAÇÃO OU PERMUTAÇÃO?"

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Presidente e Orientadora
Profa. Dra. Rute Elizabete de S. Rosa Borba

____

Examinadora Externa
Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares

____

Examinadora Interna
Profa. Dra. Ana Coelho Vieira Selva

Recife, 25 de fevereiro de 2014.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, meu Pai, Salvador e Senhor, que me deu forças, saúde e sabedoria.

À minha orientadora, Rute Borba: Excelente professora e orientadora, que estende suas orientações e cria mais do que vínculos acadêmicos, cria laços de amizade! Para mim, mais do que uma amiga, uma mãe! Nossa amizade nasceu quando perdi minha mãe, por isso, tamanha é a importância que ocupa em minha vida. Sempre preocupada, não só com minha escrita, mais com minha vida profissional e pessoal. Uma orientadora dedicada, pontual, bondosa, educada, atenciosa, sempre presente, compreensiva e acima de tudo, humana! Suas orientações extravasaram, viraram conselhos, orações, esteve ao meu lado em todos os momentos! Ouviu meus choros, minhas inquietações e me guiou pelo caminho certo! Ouviu minhas risadas, riu comigo... e juntas chegamos até aqui! Levarei você sempre comigo!

Ao meu filho, Davi, meu companheiro, meu maior amor, minha vida: Que foi paciente e compreensivo, aceitando abdicar de minha atenção, beijando-me sempre que eu me demorava muito em frente ao computador e sempre entendendo que esse caminho era o melhor que eu poderia dar a ele.

Às minhas irmãs, Camilla e Gabrielle, tudo pra mim: Que sempre me incentivaram, apoiaram e foram minha válvula de escape quando a tensão e ansiedade tomavam conta de mim, fazendo-me rir.

Ao meu namorado, Eduardo Campelo, um anjo em minha vida: Sempre paciente, compreensivo, prestativo. Dando-me injeções de ânimo para continuar e nunca desistir. Ajudou-me com a lista de gráficos e tabelas, e com as impressões. Esteve sempre ao meu lado, enchendo-me de carinho e amor, muito amor!

À minha mãe, Elizabeth (in memoriam): Que não participou dessa minha conquista, mas estaria orgulhosa em ver os caminhos que trilhei. Em saber que fui mais longe nos estudos do que ela pôde ir.

Aos meus avós maternos, Aparecida e Alcides: Que mesmo distantes, torceram e oraram muito por cada caminho que trilhei.

Aos meus avós paternos Nair e Fernando (in memoriam): Que só convivi durante a infância, mas que, com certeza, estão sempre presentes em minha vida.

Às minhas tias, Sônia, Claudete, Claudinéia, Pilar e Isabel: Mais que tias, verdadeiras mães! Torceram e se orgulharam muito de mim, mesmo distantes geograficamente.

Ao meu tio, André.

Aos meus primos, Elaine, Adriana, Luciana, Thiago, Ana Carolina, Pedro, Daniel, Fábio, Tathiane, Thaís, Kelvin, Evelin, Luane, Lucas e Mateus: Distantes geograficamente, mas presentes, através da internet, sempre me incentivando e vibrando comigo em minhas conquistas.

Ao meu pai, Carlos Augusto, que mesmo distante, orou por mim. À nova família de meu pai, sua esposa, Neidma, e sua filhinha, Manu, que sempre torceram por mim.

Ao colégio Santa Maria, representado através de minhas coordenadoras, Cristina e Ilda, das diretoras Edna e Rosamélia: Pelo apoio, compreensão, liberação e incentivo em concluir mais uma etapa de meus estudos.

Às minhas queridas amigas e colegas de trabalho, do Jardim I, Ana Paula, Andréa, Daniele Bandeira, Flávia, Kelly, Laiz, Luciana Poyares, Luciana Máximo, Rosa e Sandra, do Jardim II, Adriana, Angélica, Eliane, Eliete, Elisa, Elma, Juliana, Luciana Velascos, Neyla, Simone e Verônica, do Integral Educação Infantil, Ana, Lu, Beta e Rose, do Integral Fundamental II, Jéssica, Jussara, Matilde e Onilda, da convivência, Hérika, Lila, Sandra Regina e Telma: Pela amizade, carinho e torcida.

Às minhas amigas de convívio quase diário, Manuela e Amanda Rocha: por todas as palavras de incentivo, pelos puxões de orelha, e principalmente, por segurarem minha mão e enxugarem meus olhos nos momentos mais difíceis que passei.

Aos meus amigos, Majestades Imperiais (como modestamente nos chamamos) que SEMPRE me ajudaram, com palavras, com mensagens, com piadas, com encontros, com viagens e com muito amor: Adryanne, Julia, Juliana, Mona e Sthenio.

Aos amigos do mestrado (turma 2012), principalmente: Ade, Adry, Betania, Eber, Fernando, Joseane, Lucicleide, Marlene, Niedja e Tarcísio: pela amizade e por me estenderem a mão em todos os momentos, ao longo de nosso curso.

Às minhas amigas, do quarteto, Adryanne, Joseane e Niedja: Pela união e amizade sincera, que durará pra sempre, que me motivaram e me deixaram orgulhosa em saber que tenho amigas tão inteligentes e competentes.

À minha amiga/irmã paulista, Patrícia: Que muito me ajudou, levando meu filho pra brincar com seu filho, enquanto eu estudava.

Às amigas do GERAÇÃO – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório – que sempre contribuíram muito com discussões proveitosas sobre minha pesquisa, em especial, a Cris: Pelas sugestões, generosidade, carinho e atenção de sempre!; a Ju, pela paciência e dedicação com que me ajudou a rodar os dados no SPSS!; a Adry, por me ajudar a scannear os testes com as respostas dos alunos e ajudar com a papelada burocrática!; a Mona, Tina, Ana Paula, Jesus, Pablo, Tiane, Mika e Flavinha: Pelo companheirismo, incluindo às viagens para congressos!; a Glauce, Martha, Fernanda, Rita e Monike: Pelo apoio, purpurina, vitalidade, carinho, juventude e pela alegria de estarmos juntos!

Às professoras Ana Selva e Maria Tereza Soares: Pela valiosas contribuições com a minha pesquisa, desde a minha qualificação.

Aos professores e amigos das turmas do mestrado Edumatec 2011, 2012 e 2013: Pela contribuição durante as disciplinas, incluindo as de Seminários, na Linha de Processos, no decorrer do curso.

A Clara e todos que fazem parte da Secretaria do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC: por toda ajuda e paciência.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização de um sonho, e que podem ter sido omitidos pela falha da memória!

RESUMO

Com o objetivo de analisar a influência do *número de etapas de escolha* na resolução dos diversos tipos de problemas combinatórios, (*produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*), a presente pesquisa se fundamentou na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), que defende a existência de três dimensões fundamentais de conceitos: *situações que dão significado*, *invariantes* e *representações simbólicas*. A pesquisa também se fundamentou em outros autores, entre eles, Pessoa e Borba (2009), que abordam os diversos significados presentes na Combinatória e Borba (2010), que trata do raciocínio combinatório. A presente dissertação entende por *etapa de escolha*, as variáveis presentes em uma situação combinatória e defende que o número de etapas de escolha pode influenciar na resolução de problemas combinatórios. Participaram da pesquisa 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental os quais responderam a um teste de sondagem. Foram seis tipos de testes, os cinco primeiros compararam os desempenhos em dois tipos de problemas cada e o último teste comparou as etapas de escolha dentro do mesmo problema. Em todos os testes eram comparados problemas com duas, três e quatro etapas de escolha. No teste Tipo 6 se observaram as etapas de escolha dentro do mesmo problema. O resultado dos testes revelou que os Tipo 2 e 5 foram os que obtiveram uma média de acertos mais baixas, podendo esta dificuldade estar associada ao total de possibilidades presente nos problemas de *arranjo* com quatro etapas, visto que era o tipo de problema que apresentava maior grandeza numérica. Quando se comparou cada etapa de escolha, verificou-se haver diferença estatisticamente significativa entre os desempenhos nos problemas de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha em comparação aos mesmos problemas com duas e três etapas de escolha, evidenciando a influencia das etapas de escolha no desempenho dos alunos. Ao comparar o problema de *produto cartesiano* que, segundo pesquisas anteriores (PESSOA e BORBA, 2009, 2010; CORREIA e OLIVEIRA, 2011, e AZEVEDO e BORBA, 2012), era tido como o problema de mais fácil resolução para os alunos, com os problemas de *permutação*, percebeu-se uma inversão do que havia sido constatado anteriormente, na qual a *permutação* passou a ser mais fácil que o *produto cartesiano* quando se controlou o número de etapas de escolha. Quando se observou as estratégias de resolução, não se verificou relação entre a representação simbólica e estratégias utilizadas e os tipos de problemas, nem com as etapas de escolha, indicando que a utilização das estratégias pode estar relacionada a escolhas pessoais. Conclui-se que no trabalho com variados tipos de situações combinatórias é preciso considerar diferentes etapas de escolha em cada tipo de problema desde o Ensino Fundamental. Almeja-se, assim, com essa pesquisa, contribuir para a reflexão sobre aspectos a serem considerados de ensino da Combinatória.

Palavras-chave: Combinatória. Etapas de escolha. Tipos de problemas. Estratégias. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

In order to analyze the influence of the *number of steps of choice* in solving many types of combinatorial problems (*Cartesian product*, *arrangement*, *combination* and *permutation*), this research was based on the Theory of Conceptual Fields of Vergnaud (1986), which supports the existence of three fundamental dimensions of concepts: *situations that give meaning, invariants* and *symbolic representations*. The research was also based on other authors, among them, Pessoa and Borba (2009), which address the various meanings present in Combinatorics and Borba (2010), which deals with combinatorial thinking. This dissertation meant by *steps of choice*, the variables present in a combinatorial situation and argues that the number of steps can influence the solving of combinatorial problems. Participated in the survey 128 students in the 6th grade of elementary school who completed a test. There were six types of tests, the first five comparing the performances of two types of problem each and the last test compared the steps of choice within a same problem. In all tests were compared problems, with two, three and four steps of choice. In test Type 6 the steps of choice within the same problem were observed. The test results revealed that tests Type 2 and 5 were those that scored lower and this difficulty may be associated with the total number of possibilities in the problems of *arrangement* with four stages, since it was the kind of problem that had greater numerical quantity. When comparing each step of choice, there was statistically significant difference between the performance of problems with four steps of *Cartesian product* compared to the same problems with two and three steps of choice, showing that steps influence students' performance. When comparing the problem of *Cartesian product*, which according to previous studies (PESSOA and BORBA, 2009, 2010; CORREIA and OLIVEIRA, 2011, and AZEVEDO and BORBA, 2012), was of easier resolution by students, with *permutation* problems, a reversal of what had been previously seen was observed, in which *permutation* became easier than *Cartesian product* when the number of steps was controlled. When solving strategies were observed, there was no relationship between the symbolic representation and strategies used and the types of problems, neither with the number of steps, indicating that the use of strategies may be related to personal choices. We conclude that in working with various types of combinatorial situations we need to consider different steps of choice in each type of problem since Elementary School. Thus, this research hopes to contribute to the reflection on aspects to be considered for teaching Combinatorics.

Keywords: Combinatorics. Steps of choice. Types of problems. Strategies. Elementary Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Imagine-se diante de uma folha de papel com alguns problemas matemáticos. Tem-se a noção de que eles são fáceis, contudo para encontrar a solução desses problemas é preciso dedicar mais complexo raciocínio lógico e dispor de habilidades não tão simples, pois não são de resolução clara, como soma direta ou multiplicação simples dos valores expressos no enunciado do problema.

Essa situação ocorre quando alguém se dispõe a resolver um problema combinatório. Estudantes de todas as idades, e professores também, precisam, antes de tentar resolver o problema, buscar uma compreensão aprofundada da situação e nem sempre, a aplicação de uma única operação ou de uma fórmula é a melhor maneira de resolver o problema combinatório. Por vezes, uma listagem de elementos, ou outro procedimento informal, é um caminho de resolução mais simples ou adequado para um problema dessa natureza.

Os problemas combinatórios encantam por apresentarem essas características – de envolvimento de raciocínios mais complexos e de busca de procedimentos mais adequados – que os tornam inovadores e que permitem o envolvimento de diversas habilidades e relações cognitivas por parte de quem os tenta solucionar. São, como apontado por Borba (2010, 2013), problemas em seu sentido essencial, pois não se sabe a solução de imediato, mas há como desenvolver diversos procedimentos variados para a sua resolução.

De acordo com Borba (2010), *raciocínio combinatório* é a forma de pensar sobre situações, envolvendo o levantamento de possibilidades que atendem a determinadas condições, que consideram se há repetição, escolha e ordenação de elementos, dentre outras relações. Essa forma de raciocinar é uma competência mais complexa e que deve ser estimulada pela escola, pois se constitui em base para a resolução de situações problematizadoras.

O objetivo do ensino de Combinatória é “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem” (PCN, BRASIL, 1997, p. 40). Essa é a orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em relação ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, a qual envolve o trabalho com distintos tipos de problemas combinatórios – tais como arranjos, combinações e permutações – e o uso de um recurso de resolução de situações combinatórias, tal como o princípio multiplicativo da contagem.

Estudos anteriores (MORO e SOARES, 2006, PESSOA e BORBA, 2009, e MAHER e YANKELEWITZ, 2010) evidenciam que, mesmo antes da aprendizagem desse conteúdo na escola, alunos possuem algum conhecimento de Combinatória, como a adequada escolha de elementos de um conjunto para combiná-los, mas apresentam dificuldades em outras relações combinatórias, como a consideração, ou não da ordem dos elementos e o esgotamento de todas as possibilidades. Os conhecimentos iniciais que os estudantes possuem, indicam que esse conteúdo pode ser trabalhado desde os anos iniciais – já que há reconhecimento de algumas das relações combinatórias, mas há necessidade da intervenção de ensino do professor para que outras relações sejam conhecidas.

As dificuldades que estudantes apresentam em desenvolver o raciocínio combinatório têm sido relatadas por diversos autores. (SCHLIEMANN, 1988; MORO e SOARES, 2006; TAXA-AMARO, 2006; PESSOA e BORBA, 2009). Essas dificuldades, como ordenação de elementos e esgotamento de possibilidades, ocorrem em distintos níveis e modalidades de ensino, tais como nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio, na Educação de Jovens e Adultos e até mesmo entre estudantes de Ensino Superior.

Por outro lado, observa-se que a compreensão de alguns princípios de raciocínio combinatório pode se iniciar antes do ensino escolar, tendo evidências de conhecimentos intuitivos desde a Educação Infantil, como destacado por Matias, Santos e Pessoa (2011) e por Pessoa e Borba (2012).

Pessoa e Borba (2012) observaram noções combinatórias intuitivas em crianças de cinco e seis anos de idade, sendo a relação de escolha de elementos a mais facilmente percebida pelas crianças e as de ordem e esgotamento de possibilidades as relações mais complexas e difíceis de serem apreendidas. Dessa forma, quando se propõe situações-problema que envolvem escolha de vestimentas, formações de casais para dança, combinações de sucos e sanduiches, dentre diversas outras situações, pode-se explorar a Combinatória nos anos iniciais de escolaridade.

Pessoa e Borba (2010) investigaram como alunos desde o 2º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio compreendem os problemas que envolvem a Combinatória. Os estudantes resolveram um teste constituído por oito problemas que abordavam os diferentes significados da Combinatória (*produto cartesiano*, *arranjo, combinação* e *permutação)*. As autoras observaram que o *produto cartesiano* foi o significado em que os estudantes obtiveram os melhores desempenhos. Por outro lado, as maiores dificuldades foram identificadas nas resoluções dos problemas de *permutação*. A maioria dos acertos foi observada nos problemas que apresentaram uma grandeza numérica pequena, pois o valor dos resultados dos problemas foi uma das variáveis manipuladas em sua pesquisa.

Entretanto, nesse estudo, e em outros (CORREA e OLIVEIRA, 2011) que obtiveram resultados semelhantes, indicando a *permutação* como problema combinatório mais difícil para alunos de anos iniciais, não se verificou o efeito de etapas de escolha de elementos. Sem esse controle, fica a dúvida se a natureza do problema (o tipo de situação combinatória), com suas respectivas relações combinatórias, é o fator que mais influencia nas dificuldades observadas, ou se outros fatores podem ter também um forte impacto.

Etapas de escolha referem-se ao número de escolhas que devem ser efetuadas em problemas combinatórios. Em *produtos cartesianos* pode-se, por exemplo, escolher um dentre quatro tipos de suco e um dentre cinco tipos de sanduíche e as etapas de escolha são duas: o tipo de suco e o tipo de sanduíche. Nesse mesmo tipo de problema, pode-se ter três etapas de escolha: o tipo de suco, o tipo de sanduíche e o tipo de sobremesa. Já em uma *permutação* que, por exemplo, se deseja permutar três alunos numa fila, as etapas de escolha são três: o primeiro aluno da fila, o segundo e o terceiro. Embora o problema de *produto cartesiano* citado resulte em um número maior de possibilidades (no caso 20) e o número de possibilidades do problema de *permutação* citado seja apenas seis, o último tipo de problema tem se demonstrado mais difícil pelos alunos em início de escolarização. Observa-se que no *produto cartesiano* citado há apenas duas etapas de escolha e no exemplo de *permutação* mencionado há três etapas de escolha.

Outros exemplos utilizados no presente estudo apresentam não só duas ou três etapas, mas, também, quatro etapas de escolha. Um deles simula a situação de uma garota que deve escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, combinando elementos de blusas, calças, sapatos e brincos, no qual cada conjunto de elementos representa uma etapa de escolha, desse problema de *produto cartesiano*. Outro problema com quatro etapas de escolha simulou a colocação de cinco alunos, em primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar para representarem a escola nas Olimpíadas de Matemática, nos quais cada colocação representa uma etapa de escolha desse problema de *arranjo*. Cada tipo de problema combinatório apresenta as etapas de escolha de uma forma diferente, em *produto cartesiano* são elementos de conjuntos que devem ser combinados, em *permutação*, são a quantidade de elementos a serem permutados entre si, já em *arranjo* e *combinação*, são a escolha de alguns elementos que precisam ser arranjados ou combinados, sendo a diferença entre eles a de que no *arranjo* a ordem influencia na constituição de novas possibilidades e na *combinação* a ordem não gera possibilidades distintas.

Diversos fatores podem influenciar o desempenho dos alunos em Combinatória. Alguns dos fatores podem ser as relações e propriedades de cada tipo de problema, as quais variam em termos de escolhas de elementos e de ordenação dos mesmos; como também o desenvolvimento cognitivo de cada sujeito e o aprendizado escolar, os quais possibilitam, ou não, a compreensão das variadas situações combinatórias. Também percebe-se que a descrição, ou não, dos valores das variáveis pode influenciar no desempenho dos estudantes (por exemplo: descrever que os quatro sucos que devem ser combinados são de laranja, uva, cajá e acerola; ou apenas afirmar que são quatro, sem discriminá-los). Outros fatores, também, podem influenciar, como a ordem de grandeza do número de possibilidades dos problemas combinatórios; a explicitação de possibilidades no enunciado (quando no enunciado do problema já se explicita uma forma de combinação); e o número de etapas de escolha dos elementos.

Alguns desses fatores já foram anteriormente estudados, tais como a influência do desenvolvimento cognitivo (INHELDER e PIAGET, 1976; MORO e SOARES, 2006), do aprendizado escolar (FISCHBEIN, 1975 e SCHLIEMANN, 1988), dos tipos de problemas e suas respectivas relações e propriedades (PESSOA e BORBA, 2007), da ordem de grandeza do número de possibilidades (PESSOA e BORBA, 2009 e TEIXEIRA, CAMPOS, VASCONCELLOS e GUIMARÃES, 2011), da descrição dos valores das variáveis (CORREIA e

OLIVEIRA, 2011) e da explicitação de possibilidades no enunciado (SILVA e SPINILLO, 2011). Entretanto, a influência do número de etapas de escolha dos elementos não foi, ainda, devidamente explorada em todos os tipos de problemas combinatórios e com o controle de duas, três e quatro etapas.

Dessa forma, o presente estudo pretende controlar as etapas de escolha de elementos, buscando verificar se há influencia do número de etapas na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios. Esse controle de número de etapas de escolha não havia sido uma preocupação de estudos anteriores e pode, pelo menos em parte, explicar desempenhos observados em alguns destes estudos anteriormente realizados.

Tendo em vista que, diversas pesquisas recentes investigaram o raciocínio combinatório (MORO e SOARES, 2006; PESSOA e BORBA, 2010; AZEVEDO, COSTA e BORBA, 2011; SILVA e SPINILLO, 2011; BARRETO, 2012) e analisaram como os alunos pensam sobre problemas desta natureza, quais as dificuldades e facilidades identificadas, conceitualizações e estratégias de resolução evidenciadas, busca-se, com o presente estudo, contribuir investigando o efeito de etapas de escolha na resolução de problemas combinatórios. Almeja-se, assim, acrescentar reflexões sobre o que pode influenciar o desenvolvimento do raciocínio combinatório e aspectos a serem considerados no ensino da Combinatória.

Para atender ao proposto, a presente dissertação de mestrado foi organizada da seguinte maneira: em seu primeiro capítulo – Revisão da Literatura – discorre-se sobre a relação da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, em particular o campo conceitual das estruturas multiplicativas, e também se discute o raciocínio combinatório. Também se abordou os quatro tipos de problemas combinatórios, sendo vistos à luz das etapas de escolha dos elementos; além da descrição e análise de estudos anteriores, cujo conjunto leva à necessidade de observarem-se as etapas de escolha, visto ser uma variável ainda não devidamente investigada e que pode vir a explicar a ordem de facilidade e de dificuldade de problemas combinatórios encontradas em alguns estudos anteriores.

No segundo capítulo – Objetivos e Método – apresentam-se os objetivos da presente dissertação de mestrado e o método pelo qual a mesma foi realizada, a fim de alcançar os objetivos propostos. São, assim, descritos nesse capítulo os participantes e os procedimentos do estudo.

Abordam-se no terceiro capítulo – Apresentação e Discussão dos Resultados – os resultados obtidos através da pesquisa realizada com 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e as discussões, de abordagem quantitativa e qualitativa, em relação ao desempenho dos estudantes frente a diferentes problemas combinatórios quando as etapas de escolha são manipuladas.

Por fim, na última parte dessa dissertação – Considerações Finais – buscou-se refletir sobre o grau de importância das etapas de escolha presentes nos problemas combinatórios para a o ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 1:
REVISÃO DA LITERATURA

1.1 A Teoria dos Campos Conceituais

A Combinatória está inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas. Campo conceitual é definido como “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão”. (VERGNAUD, 1986, p.84). Um campo conceitual pode, então, ser definido, de acordo com Taxa-Amaro (2010), pelo seu conteúdo dinâmico, por contemplar uma grande variedade de conceitos na análise das situações, que exigem diversas formulações e uma grande diversidade de simbolismos.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas, de acordo com Vergnaud (ibidem), é descrito como um conjunto de situações que envolvem a multiplicação e a divisão, as proporções simples e múltiplas, a função linear e a não linear, bem como conceitos de múltiplo, de divisor e de quociente, dentre outros. Entre os conceitos do campo multiplicativo, encontram-se os relacionados ao *raciocínio combinatório*. Problemas combinatórios têm por base um raciocínio multiplicativo e podem ser resolvidos por multiplicações e divisões, inserindo-se, dessa forma, no campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Segundo Vergnaud (1991), quando se analisa as relações multiplicativas, é possível visualizar diversos tipos de multiplicação e de divisão, bem como diversas classes de problemas. É importante identificar analiticamente tais classes para conseguir propor situações que auxiliem o aluno a identificar as diferentes estruturas de problemas, a encontrar os procedimentos apropriados para solucioná-los e a descobrir qual representação irá utilizar para resolver o problema.

Com relação à multiplicação, Vergnaud (ibidem) relata três grandes categorias de relações multiplicativas, o *isomorfismo de medidas,* o *produto de medidas* e as *proporções múltiplas*. Esta última categoria não é tratada nos anos iniciais e, por isso, não será abordada neste estudo.

O *isomorfismo de medidas* é caracterizado por envolver uma relação quaternária, uma relação entre dois espaços de medida, na qual uma quantidade é procurada. Tem-se, por exemplo: Em cada pacote há 4 meias. Marcos comprou

3 pacotes de meia. Quantas meias ele comprou? Nesse exemplo os dois espaços de medida são: pacote e meias, sendo a relação a ser mantida: cada pacote com 4 meias e procura-se o número total de meias compradas.

Já em problemas do tipo *produto de medidas*, envolve-se uma relação ternária entre quantidades, no qual há a composição de dois espaços de medidas com relação a uma terceira medida. De acordo com Vergnaud (1991), essa estrutura de duas medidas para se encontrar uma terceira pode ser observada em problemas que envolvem volume e área e em situações combinatórias. Assim, os problemas combinatórios são do tipo *produto de medidas. Tem-se*, por exemplo: Para escolher uma pizza, pode-se combinar 2 tipos de bordas com 4 tipos de recheios. Quantas possibilidades de pizzas diferentes podem ser formadas, combinando um tipo de borda com um tipo de recheio? Trata-se de uma relação ternária cujas medidas são: bordas, recheios e tipo de pizza.

Esse tipo de problema acima é um *produto cartesiano*, caracterizado pela combinação dos elementos dos dois conjuntos dados para formar um terceiro conjunto dos tipos possíveis de pizza. Nesse caso, a relação um-para-muitos está na combinação de um tipo de borda para cada tipo de recheio, obtendo-se todas as possibilidades de combinação.

Outro pressuposto teórico de Vergnaud (1986, p.83) é que todo conceito é formado por um "tripé de três conjuntos": 1) conjunto de *situações que dão significado* ao conceito; 2) conjunto de propriedades *invariantes* do conceito e 3) conjunto das *representações simbólicas* utilizadas para representar e operar com o conceito. Essas três dimensões dos conceitos foram observadas na presente pesquisa: quando se comparou os desempenhos dos alunos nos problemas com *significados* variados (os quatro tipos de problemas, apresentados a seguir); quando se abordou as relações *invariantes* dos distintos problemas, em particular, no número de etapas de escolha sendo controladas e quando se observou as *representações simbólicas* utilizadas pelos sujeitos para responder aos problemas combinatórios.

Quanto ao tripé proposto por Vergaud, ressalta-se que na presente pesquisa buscou-se controlar as etapas de escolha nos diferentes tipos (situações) de problemas combinatórios e seus respectivos invariantes, bem como as grandezas numéricas propostas e a influência que as representações utilizadas tiveram no desempenho dos participantes do estudo. A seguir, são discutidos os tipos de situações combinatórias, seus invariantes e suas possíveis representações.

1.2 Raciocínio Combinatório

Ao examinar a resolução de problemas combinatórios, torna-se evidente que não se trata de uma simples contagem. A Combinatória é um ramo da Matemática, e tida como a “arte de contar”, mas uma contagem de natureza mais complexa. Na Combinatória estudam-se técnicas de contagem de agrupamentos possíveis, tanto direta (como por meio de contagens via listagens) como implícita (via operações aritméticas ou fórmulas), que, de acordo com Borba (2010), atendem a determinadas condições e relações (tais como repetição, escolha, ordem, posição e proximidade). Para a autora, o raciocínio combinatório é a base dessa forma complexa de pensar sobre as situações presentes nos problemas combinatórios que apresentam diferentes significados.

No estudo de Combinatória, Pessoa e Borba (2010) estabelecem a seguinte organização para os significados das situações combinatórias: *produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação.* Nos currículos escolares, geralmente há uma separação dessas situações, sendo o *produto cartesiano* a única situação combinatória explicitamente trabalhada nos anos iniciais do Ensino Fundamental e *arranjos, combinações* e *permutações* as situações trabalhadas no Ensino Médio quando do estudo da Análise Combinatória.

Essa organização – que unifica e utiliza os quatro tipos de situações combinatórias – será usada na presente dissertação de mestrado, baseada na argumentação proposta por Pessoa e Borba (2009). As autoras sugerem que os alunos tenham acesso aos diversos tipos de problemas combinatórios desde os anos iniciais de escolarização para que o desenvolvimento amplo do raciocínio combinatório comece mais cedo e contribua para a superação de erros e dificuldades expostas inicialmente, possibilitando, assim, uma melhor apropriação desse conhecimento quando acontecer o aprendizado sistemático no Ensino Médio.

Vergnaud (1986) afirma que as competências “*desenvolvem-se ao longo de um período de tempo”* (1986, p.79). Pode-se observar que os alunos demonstram compreensão de alguns princípios matemáticos, como a quantificação e a relação de escolha de elementos, a partir dos 3 ou 4 anos, entretanto, o ritmo do desenvolvimento dos conhecimentos deve ser respeitada, pois alguns conceitos são uma fonte durável de dificuldade para alunos de 15 ou 16 anos de idade e para muitos adultos. Segundo esse autor, a origem e desenvolvimento do saber estão na resolução de problemas, sendo preciso proporcionar aos alunos situações que busquem ampliar a significação de um conceito e provar suas competências referentes ao conceito.

Sendo assim, o conhecimento de alguns princípios do raciocínio combinatório pode se iniciar antes do ensino escolar e serem modeladas pelas situações da vida cotidiana e por experiências com situações-problema de ensino da Matemática. Os problemas de Combinatória podem ser explorados desde cedo, tendo evidências de conhecimentos intuitivos desde a educação infantil, como destacado nos estudos de Matias, Santos e Pessoa (2011) e Pessoa e Borba (2012), e devem continuar a se desenvolver durante todo o período escolar do aluno, possibilitando, assim, a construção do raciocínio combinatório, ao se trabalhar todos os tipos de problemas que estão inseridos em um mesmo campo conceitual, sendo destacadas as semelhanças e as diferenças que existem entre os mesmos quando vistos pedagogicamente em conjunto.

Barreto e Borba (2011) esmiúçam cada significado dos problemas de Combinatória:

> O problema que envolve o *produto cartesiano* é composto, no mínimo, por dois conjuntos básicos, sendo necessário, combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro para formar o conjunto-solução. A operação com problemas que envolvem o *arranjo*, a *permutação* e a *combinação*, consiste basicamente, em formar subconjuntos, a partir de um conjunto, atendendo a determinadas condições peculiares a cada um desses significados (com todos os elementos – no caso da *permutação* – ou com alguns dos elementos – nos casos do *arranjo* e da *combinação* e levando em consideração se a ordem dos elementos gera, ou não, novas possibilidades). Portanto, nesses casos, o *raciocínio combinatório* se desenvolverá na organização dos elementos de um conjunto básico, diferente do *produto cartesiano* que envolve a associação entre dois ou mais conjuntos básicos. (p. 02)

A escolha de elementos, a ordenação e a repetição são algumas das relações que estão presentes nas situações combinatórias, contudo, também existem alguns problemas que são condicionais, como destacados no estudo de Borba e Braz (2012). Nos problemas condicionais se observa uma maior complexidade nas relações: seleção de alguns elementos, ordenação específica, posição e proximidade de elementos. Essas situações condicionais não serão, entretanto, abordadas no presente estudo, embora se façam presentes em diferentes situações combinatórias.

Pessoa e Borba (2009) destacam os invariantes de cada tipo de problema combinatório. Ressaltam que os problemas do tipo *produto cartesiano* estão relacionados à escolha de elementos nos conjuntos dados, sendo esse o único tipo de problema combinatório que envolve a escolha de elementos a partir de dois ou mais conjuntos. Dessa forma, se uma situação requer a escolha de três conjuntos dados, por exemplo, o primeiro conjunto composto por dois tipos de massa de uma pizza (fina ou grossa), o segundo composto por três opções de borda (catupiry, cheddar ou parmesão) e o terceiro conjunto formado por quatro tipos de recheios (calabresa, mussarela, portuguesa ou atum), o novo subconjunto será formado pela combinação de um elemento de cada um dos três conjuntos. Esse novo conjunto será formado pela combinação de todas as possibilidades possíveis de tipo de massa, com borda e recheio, formando o conjunto das pizzas, no qual será necessário combinar massa fina com todas as opções de borda e com todas as opções de recheio e, da mesma forma, deve ser feito com a massa grossa. Nos problemas do tipo *produto cartesiano* o invariante destacado é a escolha de elementos, não se aplicando a ordem dos elementos nesse tipo de problema.

Nos problemas de *combinação,* já ocorre de forma diferente dos problemas do tipo *produto cartesiano*, pois há apenas um conjunto, no qual é preciso escolher alguns dos elementos para se formar distintos subconjuntos. Dessa forma, em uma situação, por exemplo, na qual é apresentado um conjunto com seis bichos de estimação (cachorro, gato, passarinho, ratinho, peixe e tartaruga), dos quais é preciso escolher somente três dentre eles, um subconjunto será formado pela combinação de cachorro, gato e passarinho, outro formado por cachorro, gato e ratinho e, assim por diante, até serem esgotadas todas as possibilidades de combinação. Nesse tipo de problema, a ordem das escolhas não gera novas possibilidades, pois escolher um cachorro, um gato e uma tartaruga são o mesmo que escolher uma tartaruga, um gato e um cachorro. Portanto, o invariante destacado nesse tipo de problema é a escolha de elementos dentre os apresentados num dado conjunto.

Em situações de *arranjo*, diferentemente dos problemas de *produto cartesiano* e *combinação*, a ordem irá gerar novas possibilidades. Em um *arranjo*, tem-se um conjunto do qual são formados subconjuntos dentre os elementos dados e, nesse caso, a ordem dos elementos determina a formação de novas possibilidades. Por exemplo, em um conjunto formado por quatro crianças (Joaquim, Pedro, Marcos e Léo) que disputam uma corrida no Play Station, podem ser arranjados o primeiro, o segundo e o terceiro lugar. Nesse caso, a ordem formará novas possibilidades, pois o subconjunto Joaquim em primeiro, Pedro em segundo e Marcos em terceiro lugar é diferente do subconjunto de Marcos em primeiro, Joaquim em segundo e Pedro em terceiro.

Com relação aos problemas de *permutação*, há um conjunto de elementos, do qual todos os elementos devem ser utilizados e permutados entre si. Por exemplo, em um conjunto composto por três amigos (Marcos, André e Carolina) que desejam tirar uma foto juntos, um ao lado do outro, um possível subconjunto poderia ser Marcos no meio, André do lado esquerdo e Carolina do lado direito. Outro subconjunto poderia ser uma foto no qual André ficasse no meio, Marcos ao lado direito e Carolina ao lado esquerdo. Nestes casos as fotos sairiam diferentes, portanto, a ordem dos elementos influencia no número de possibilidades da situação.

Como foi descrito acima, cada tipo de problema combinatório, *produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação* possui natureza de invariantes distintas, referentes a escolha dos elementos e/ou ordenação. Isso porque é necessário que se observem quais invariantes estão sendo mobilizados em determinado tipo de problema. Em certos casos, serão utilizados todos os elementos do conjunto dado (como em *permutações*) para permutar os elementos de um conjunto, formando subconjuntos. Em outros casos, apenas alguns dos elementos serão utilizados por vez (como em *arranjos*, *combinações* e *produtos* *cartesianos*). Em alguns casos, será preciso observar se a ordem dos elementos propostos no problema gera novas possibilidades (como em *arranjos* e *permutações*) ou não (como em *combinações* e *produtos cartesianos*).

Essa organização dos significados das situações combinatórias e seus respectivos invariantes basearam diversas pesquisas no campo da Combinatória, sendo que algumas tratam das elaborações de crianças, outras de adolescentes e, ainda outras, de adultos, referentes a estes conceitos matemáticos, apresentando resultados relevantes quanto à compreensão das estruturas multiplicativas. No presente estudo pretende-se contribuir com mais um aspecto: se observará o efeito da manipulação de número de etapas de escolha das situações combinatórias, na compreensão dos diferentes significados: *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*.

1.3 Etapas de Escolha em Problemas Combinatórios

Para se responder a um problema de Combinatória, o aluno precisa desenvolver diversas habilidades e não simplesmente memorizar, registrar informações e aplicá-las mecanicamente. Os problemas combinatórios, dentre os outros problemas matemáticos trabalhados no Ensino Fundamental, apresentam uma complexidade que nem sempre permitem uma resolução mecânica, para solucioná-los. O aluno precisa conhecer e compreender os significados, as relações e as propriedades envolvidos para, dessa forma, conseguir levantar possibilidades, a partir de uma adequada representação simbólica.

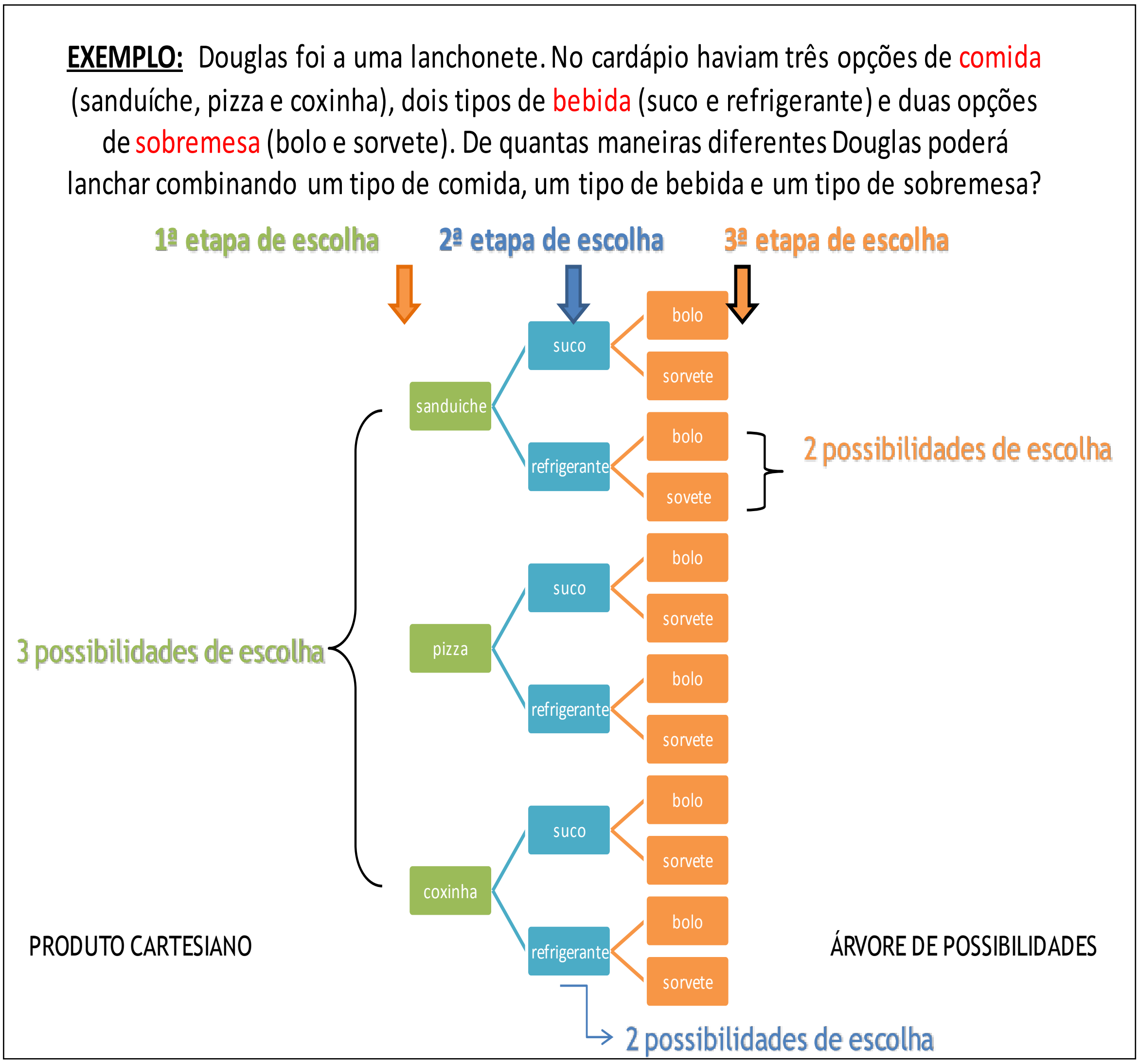
Os problemas combinatórios trabalhados na escola possuem uma diferença dos problemas combinatórios vivenciados no dia a dia. Enquanto na escola é necessário ao aluno esgotar todas as possibilidades possíveis de combinação das variáveis propostas para obter êxito em um problema, na vida real, não é preciso, necessariamente, listar todas as possibilidades, como, por exemplo, de combinação de roupas e acessórios para escolher a vestimenta do dia. Portanto, os problemas combinatórios escolares apresentam mais essa particularidade que precisa ser observada nas estratégias utilizadas pelos alunos.

As situações propostas no presente estudo apresentam diversos tipos de problemas combinatórios, *produto cartesiano, permutação, combinação e arranjo,* com suas diferentes propriedades e relações, podendo ser resolvidos sem o uso de fórmulas. Pode-se resolver problemas combinatórios por intermédio do Princípio Fundamental da Contagem, ou de outros procedimentos, tais como desenhos, listagens, quadros e diagramas.

O *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) é um modo de resolução, dentre outros, o qual explicita as etapas de escolha apresentadas em problemas combinatórios. O PFC possui também a vantagem de ser um recurso base para a solução dos variados tipos de problemas combinatórios.

Pode-se exemplificar melhor as etapas de escolha com a situação da Figura 1 que representa a estrutura de um problema de *produto cartesiano* envolvendo três etapas de escolha.

Figura 1: Etapas de escolha em um problema de *produto cartesiano*

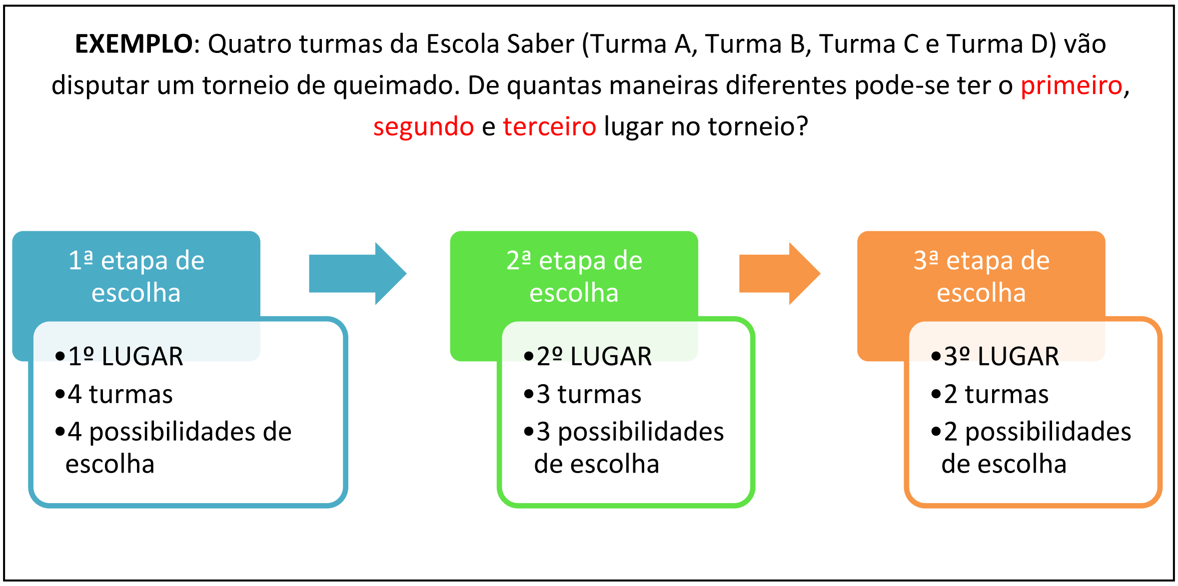


São dados três conjuntos distintos e os mesmos são combinados para formar um novo conjunto. Nesse caso, as escolhas das comidas se caracterizam como a 1ª etapa de escolha, as escolhas das bebidas são a 2ª etapa de escolha e as escolhas das sobremesas formam a 3ª etapa de escolha. Cada conjunto possui uma quantidade de elementos que ao serem combinados, formarão um quarto conjunto (o de possíveis lanches para Douglas).

A proposta de resolução desse problema está amparada no *Princípio Fundamental da Contagem* que se baseia no número de etapas de escolha e de elementos de cada etapa de escolha, que combinados trarão a resposta da questão indagada no problema. Na primeira etapa há 3 possibilidades de escolha, na segunda etapa há 2 possibilidades e na terceira etapa de escolha existem 2 opções, que devem ser multiplicadas para encontrar o resultado desse problema de *produto cartesiano* que são 12 combinações possíveis, sem repetir nenhum elemento.

Pode-se utilizar o Princípio Fundamental da Contagem para responder a todos os diferentes tipos de problemas combinatórios. Ao se resolver um problema de *arranjo*, as etapas de escolha podem ser visualizadas de outra forma, como na Figura 2.

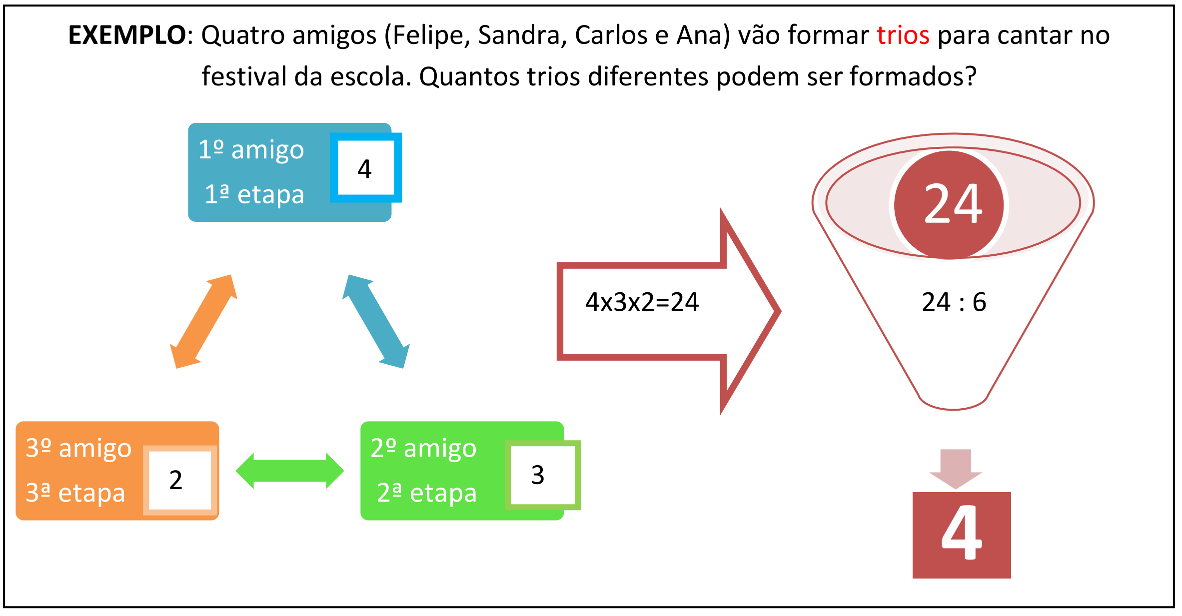
Figura 2: Etapas de escolha em um problema de *arranjo*



Pode-se ver o emprego das etapas de escolha, neste exemplo de problema de *arranjo*, nas posições de colocação que cada elemento pode ocupar (destacadas na cor vermelha). Esse problema também pode ser resolvido com o uso do *Princípio Fundamental da Contagem*, visto que, na primeira etapa de escolha existem 4 possibilidades de se arranjar os elementos, pois as 4 turmas podem ocupar o primeiro lugar do torneio, na segunda etapa, existem 3 possibilidades, isso porque, se uma das turmas ocupou o primeiro lugar, restam apenas 3 turmas para posicionar-se no segundo lugar do torneio. Na terceira etapa de escolha existem 2 possibilidades, porque restam somente 2 turmas que podem ocupar a vaga de 3º lugar. O total de possibilidades deve ser multiplicado para encontrar o resultado desse problema que são 24 combinações possíveis, sem repetir nenhum elemento (4 x 3 x 2 = 24).

Os problemas de *combinação* também podem ser resolvidos da mesma maneira que foram os problemas exemplificados anteriormente, como pode ser visualizado na Figura 3.

Figura 3: Etapas de escolha em um problema de *combinação*



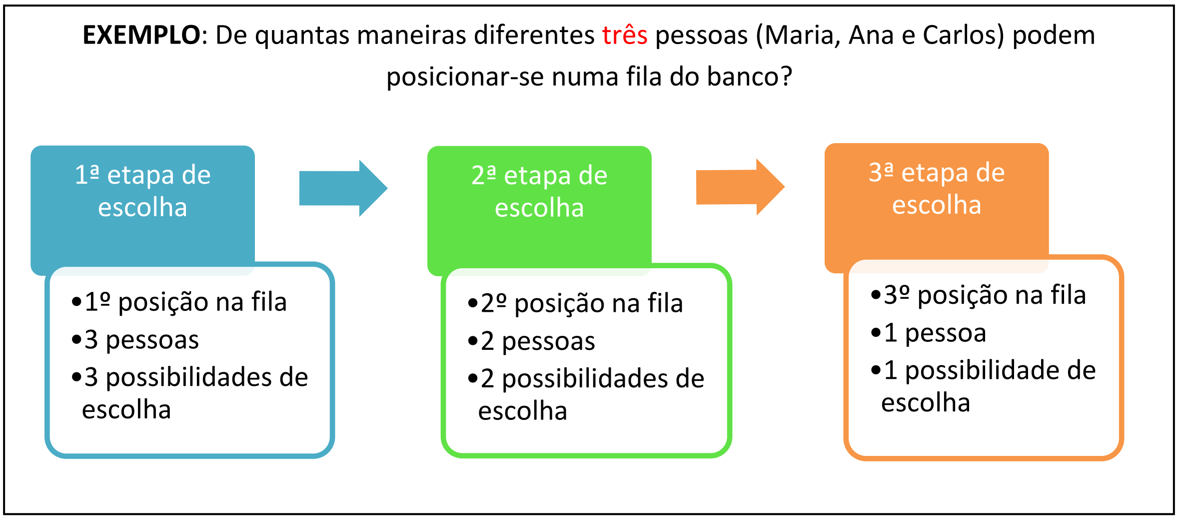
Os problemas de *combinação* parecem um pouco mais difíceis quando resolvidos através do Princípio Fundamental da Contagem, isso se comparado a uma resolução que utilize a listagem de elementos, porque em sua resolução, além de multiplicar os elementos que serão combinados, ainda é necessário dividir o total desses elementos multiplicados, pela permutação dos elementos entre si, visto que são pessoas que serão agrupadas, no qual, por exemplo, o trio: Felipe, Sandra e Carlos é o mesmo trio: Sandra, Carlos e Felipe, isso porque, a ordem dos elementos não produz outra possibilidade de combinação.

Esse tipo de problema apresenta um invariante que possivelmente dificulta a formação das combinações, pois a mudança na ordem dos elementos não gera novas possibilidades e os alunos, em grande parte das vezes, não se dão conta dessa característica e acabam repetindo possibilidades e, assim, extrapolando-as, visto que, na primeira etapa de escolha existem 4 possibilidades de combinações, pois são 4 alunos que podem ocupar uma das vagas para formar o trio, na segunda etapa, existem 3 possibilidades, isso porque, se um dos alunos já ocupou uma vaga, restam apenas 3 alunos que podem ocupar outra vaga no trio. Na terceira etapa de escolha existem 2 possibilidades porque restam somente 2 alunos que podem ocupar a último espaço em formar o trio. O total de possibilidades deve ser multiplicado, encontrando-se assim, a quantidade de combinações com repetições, que são 24 combinações (4 x 3 x 2 = 24). Contudo, esse não é o resultado final, visto que é preciso eliminar as repetições. Dessa forma divide-se o valor encontrado pela permutação dos 3 elementos entre si, ou seja, o produto a ser dividido por 6, pois há os casos são iguais seis a seis, no caso: Sandra (S), Carlos (C) e Felipe (F) = SFC = CSF = CFS = FSC = FCS. O total de combinações para formar o trio, então será, 24 (combinações com repetições), dividido por 6 (permutação de 3 elementos entre si), dando um total de quatro possibilidades de combinações para formar o trio.

Apesar de esse ser um dos tipos de problemas, cuja resolução requer uma atenção maior nos invariantes, os alunos do Ensino Fundamental não o resolvem dessa forma, através do *Princípio Fundamental da Contagem*. De modo geral, são utilizadas listagens de elementos ou desenhos para encontrar o total de combinações possíveis.

Pode-se também resolver a outro tipo de problema combinatório através do *Princípio Fundamental da Contagem*, como os problemas de *permutação*. Na Figura 4 é possível visualizar um exemplo destacando as etapas de escolha.

Figura 4: Etapas de escolha em um problema de *permutação*



As etapas de escolha deste problema de *permutação* caracterizam-se pela quantidade de pessoas em cada posição da fila. Por exemplo, 3 pessoas podem ocupar a primeira posição da fila, já na segunda posição, só restam 2 pessoas, e na terceira posição somente 1 pessoa, que restou, pode ocupá-la. O resultado *será obtido, segundo o PFC, pelo produto das possibilidades de cada etapa (3 x 2* x 1 = 6). Dessa forma, as 3 pessoas podem posicionar-se na fila do banco de 6 maneiras diferentes.

Através dos exemplos de todos os tipos de problemas combinatórios, foi possível visualizar como são as etapas de escolha em cada um dos problemas, que, em todos eles, foram destacadas três etapas de escolha.

Como citado anteriormente, observou-se em pesquisas recentes, tais como Pessoa e Borba (2009), que para ordenar os problemas pelo seu grau de dificuldade, algumas variáveis devem ser mantidas constantes, como a grandeza numérica. Mas, que outras variáveis podem interferir na facilidade ou dificuldade de um problema? Buscando manter próximos os valores numéricos dos problemas, será que as etapas de escolha poderiam influenciar o desempenho dos estudantes nos problemas combinatórios?

Sendo assim, buscou-se observar, nessa proposta de estudo, se a complexidade dos problemas combinatórios pode ser explicada, pelo menos em parte, pelo número de etapas de escolha dos elementos. Foi investigado se, controladas as etapas de escolha dos elementos, a maior dificuldade com os problemas de *permutação* permanecerá. Se não permanecer a dificuldade, será evidenciado o efeito do número de etapas de escolha, mas se a mesma permanecer deve-se buscar uma explicação outra, como a de que as relações presentes em problemas de *permutação* são, de fato, mais complexas.

1.4 Estudos Anteriores

Diversas pesquisas foram desenvolvidas no âmbito da Combinatória. Muitas investigaram o que é o raciocínio combinatório (BORBA, 2010), quais as facilidades e dificuldades encontradas na resolução desses problemas (MORO e SOARES, 2006; PESSOA e BORBA, 2009; AZEVEDO, COSTA e BORBA, 2011; LIMA, 2011; PESSOA e SANTOS, 2011; SILVA e SPINILLO, 2011;), conceitualizações e estratégias de resolução evidenciadas (PESSOA e BORBA, 2010), como também a concepção de professores sobre esses conhecimentos (ROCHA, 2011; ROCHA e FERRAZ, 2011).

Os estudos de Pessoa e Borba (2009, 2010), Pessoa e Santos (2011) e Correa e Oliveira (2011) trataram de todos os tipos de problemas combinatórios abordados na presente pesquisa, como *produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação*. Nesses estudos são expostos quais os tipos de problemas que os alunos apresentam um melhor desempenho, sendo *produto cartesiano* o tipo de problema considerado mais fácil nesses estudos e *permutação* o mais difícil. Cabe ressaltar, que nestes estudos, as etapas de escolha em problemas combinatórios não foram objeto principal de estudo.

Encontrou-se nos estudos de Moro e Soares (2006) e Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães (2011) a manipulação das etapas de escolha do raciocínio combinatório. Os estudos utilizaram problemas de *produto cartesiano* com duas e três etapas de escolha, e as nomeiam de variáveis (problemas com duas e três variáveis). A presente dissertação fez análises com todos os tipos de problemas combinatórios e abrangeu o número de etapas de escolha, sendo duas, três e quatro etapas observadas.

Através da análise desses diversos estudos foi possível estabelecer conexões, encontrar pesquisas complementares e buscar respostas relacionadas às questões abordadas na presente pesquisa.

Moro e Soares (2006) realizaram uma sondagem com 50 alunos de uma escola pública, da antiga 3ª e 4ª série – atuais 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. Os alunos responderam a um teste escrito que continha quatro problemas combinatórios, do tipo *produto cartesiano*. O primeiro problema era com duas etapas de escolha, contudo era um problema complexo, pois apresentava valores distractores (Em uma loja de carros há 5 Monzas, 3 Fuscas e 6 Pampas. Ao comprar o carro, você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva e comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?). Os demais problemas eram com três etapas de escolha, sendo que, o segundo apresentava valores altos em seus resultados (1.680 possibilidades de combinar sorvetes), o terceiro, exibia valores baixos (24 tipos de sanduíches) e o último, resultava em valores altos (338.560 formas de arrumar pulseiras, anéis e colares em uma caixa).

A análise dos dados foi de ordem qualitativa, principalmente, e quantitativa. As respostas dos alunos foram categorizadas em quatro níveis e subníveis do raciocínio combinatório, que variavam, desde a resposta alheia ao contexto combinatório, Nível 0; seguindo de resposta contextualizada, mas sem indício de combinação, Nível 1; passando pelas primeiras aproximações à solução combinatória, no Nível 2; partindo para a obtenção de algumas combinações, ainda distorcidas, no Nível 3; até chegar ao Nível 4, que apontava presença de solução combinatória.

Os resultados apontaram que os mais altos percentuais de soluções localizaram-se no Nível 1, mais precisamente no subnível de cálculos aditivos, para alunos do 4º e 5º ano. Dentre os percentuais relativamente baixos, estão as soluções do Nível 2, para os alunos do 4º ano em todos os problemas, contudo, ao contrário dos alunos do 4º ano, para os alunos do 5º ano, as soluções mais altas também estão no Nível 2, encontradas no problema 3, de baixa grandeza numérica.

Somente os alunos do 5º ano expressam soluções correspondentes aos Níveis 3 e 4, os mais adiantados da hierarquia. E somente os alunos do 4º ano expressam solução de Nível 0. Para Moro e Soares (2006), esses resultados indicam a relação existente entre os níveis de raciocínio combinatório, expressos nas soluções analisadas, e o ano escolar em que se encontra o aluno, contudo, as autoras colocam que essa relação parece ser perturbada pela notável incidência de respostas aditivas, categorizadas no Nível 1.

Os resultados obtidos nessa pesquisa, também indicam a existência de uma relação entre os quatro problemas e os níveis de raciocínio combinatório, mas somente para os alunos do 5º ano, o problema 1 (duas etapas de escolha, valores baixos e com distractores) tem o menor percentual de soluções de Nível 1, mas também tem o maior percentual de soluções do Nível 2 e 3, se comparado com as soluções dos demais problemas, que envolvem três etapas de escolha (problemas 2, 3 e 4). Para os alunos do 4º ano, não há indícios dessa relação, pois a maioria das respostas encontra-se nos Níveis 1 e 2.

Para as autoras, as soluções apresentadas pelos alunos variaram em “diferentes níveis da construção inicial do raciocínio combinatório”, desde respostas descontextualizadas, até, a presença de soluções combinatórias (MORO e SOARES, 2006, p.117). Ressaltaram que, o desenvolvimento do raciocínio combinatório está associado ao uso de procedimentos sistemáticos combinatórios que devem ser iniciados bem antes do ensino formal da Combinatória.

A presente dissertação de mestrado aponta para o mesmo caminho, realizou-se sondagem com alunos do Ensino Fundamental (nesse caso, do 6º ano), foram manipulados problemas com diferentes etapas de escolha (sendo duas, três e quatro) e foram controladas as grandezas numéricas das resoluções dos problemas, que diferentemente, abrangeram quatro tipos diferentes de problemas combinatórios, e não só *produto cartesiano*, como na pesquisa de Moro e Soares (2006).

Um estudo de sondagem que explicitou os princípios e propriedades de problemas combinatórios do tipo *produto cartesiano* foi o de Silva e Spinillo (2011). As autoras testaram a hipótese de que quando se menciona os princípios que conduzem o raciocínio combinatório num problema, a criança pode ser auxiliada para obter um melhor desempenho na resolução. Contudo, as autoras não abordaram todos os tipos de problemas combinatórios, mas trataram apenas de problemas do tipo *produto cartesiano*, como na pesquisa de Moro e Soares (2006).

A pesquisa foi realizada com 40 crianças do 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de Recife, as quais resolviam oito problemas de *produto cartesiano*, quatro deles tinham seus princípios omitidos, outros quatro tinham seus princípios mencionados. Metade das crianças resolveu primeiramente, os problemas que se iniciavam pelos princípios omitidos, depois resolveram os problemas com princípios mencionados (Situação 1). A outra metade foi apresentada primeiramente aos problemas explicitados, seguidos dos não explicitados (Situação 2). Essa organização dos problemas teve a finalidade de confrontar se a ordem em que as situações estavam sendo apresentadas geraria algum efeito no desempenho de resolução dos problemas realizados pelas crianças. Um exemplo de Situação 1, no qual os invariantes não são mencionados: *"O parque tem duas entradas (A e B) e três saídas (1, 2 e 3). Combinando as entradas e saídas, Pedro pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ele pode entrar e sair do parque?"* Agora, um exemplo da Situação 2 que apresenta os invariantes de forma explícita: *"Paulo foi para o parque de diversões, que tem quatro entradas (A, B, C, e D) e duas saídas (1 e 2). As pessoas têm que entrar pela entrada e sair pela saída. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta. Por exemplo, Paulo pode entrar através de uma entrada e sair pela Saída 1. Se ele for ao parque de novo, ele pode entrar através de uma entrada e sair pela Saída 2, que é um caminho diferente do que usou pela primeira vez, não é? Durante as férias, Paulo quer ir para o parque de diversões muitas vezes em dias diferentes, mas ele não quer repetir os caminhos de entrada e saída, ele quer fazer um caminho diferente cada vez que ele vai ao parque. Combinando todas as entradas e saídas, de quantas maneiras diferentes Paulo pode entrar e sair do parque de diversões?"*

Silva e Spinillo (2011) verificaram que as crianças, ao responderem essas e outras situações, apresentaram um melhor desempenho na Situação 2, na qual primeiramente resolviam problemas com os invariantes explicitados. Essa significativa melhora, também foi percebida nas estratégias de resolução utilizadas pelas crianças da Situação 2. Com relação ao desempenho na Situação

1 (invariantes implícitos), houve avanço somente após a resolução dos problemas da Situação 2 (invariantes explícitos).

Dessa forma, as autoras puderam perceber que obter sucesso em problemas de *produto cartesiano* com princípios básicos (invariantes) mencionados auxiliou também nas estratégias empregadas pelas crianças, mesmo quando estes problemas apresentam a relação de forma implícita, se antes trabalharam com as relações explícitas. Este estudo aponta uma possível causa de sucesso na resolução de problemas combinatórios e a presente proposta de pesquisa buscará outras explicações para a facilidade ou a dificuldade em situações de Combinatória.

Outro estudo de sondagem em Combinatória foi realizado por Pessoa e Santos (2011), no qual se investigou a compreensão acerca de problemas combinatórios por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Os resultados das autoras foram uma replicação de Pessoa e Borba (2009) que realizaram essa pesquisa com um grupo maior de alunos, do 2º ao 5º ano, buscando a compreensão e estratégias dos alunos sobre problemas combinatórios.

Na pesquisa de Pessoa e Borba (ibidem), um recorte da tese de Pessoa (2009), os alunos respondiam um teste com oito problemas combinatórios, sendo dois problemas do tipo *produto cartesiano*, dois de *arranjo*, dois do tipo *combinação* e dois de *permutação.* Os quatro primeiros problemas apresentavam como solução uma maior quantidade de possibilidades, já os quatro últimos continham menos possibilidades de combinações. Quando as autoras compararam o progresso dos alunos ao longo dos anos escolares (do 2º ao 5º ano), perceberam que os melhores desempenhos ocorreram nos anos posteriores, como era de se esperar, mas três importantes aspectos chamaram a atenção. O primeiro achado referente ao desenvolvimento do raciocínio combinatório foi o de que alunos bem antes do estudo formal da Combinatória evidenciaram compreensões referentes a algumas situações combinatórias. O segundo achado nesse sentido foi o de que muitas das estratégias (como listagens) foram utilizadas por alunos de todos os níveis de ensino e, o terceiro achado nessa direção, foi o de que era esperado que os estudantes utilizassem mais procedimentos formais após o ensino formal, mas não foi o caso. Dessa forma, o ensino mais geral, e não necessariamente o ensino específico da

Combinatória, pode explicar, em muitos casos, o avanço no raciocínio combinatório.

Quando Pessoa e Borba (2009) analisaram o desempenho dos alunos nos diferentes tipos de problema, verificaram que os problemas de *arranjo* e *permutação* foram os que exibiram os percentuais mais baixos de acertos. As autoras justificaram esse baixo desempenho devido aos invariantes desses dois tipos de problema, nos quais a ordem dos elementos é importante, pois gera novas possibilidades. Devido à necessidade de atentar para a ordem dos elementos, os alunos não conseguiram registrar todas as combinações possíveis, o que resultou em menor número de acertos em *arranjos* e *permutações*.

O estudo de Pessoa e Borba (2009) também apontou que as estratégias apresentadas pelos alunos variavam muito, como visto também no estudo de Moro e Soares (2006), desde a falta de entendimento das relações que estavam envolvidas nos problemas, passando por uma compreensão dessas relações, contudo sem esgotar todas as possibilidades possíveis de combinações, até a apropriação do acerto total que solucionava a situação. A explicação de sucesso dos participantes utilizadas por Pessoa e Borba (ibidem) não considerou, entretanto, a possibilidade de influência do número de etapas de escolha.

Partindo desse estudo, Pessoa e Santos (2011) entrevistaram 20 crianças do 5º ano de uma escola pública de Pernambuco, que foram distribuídas em quatro grupos. Cada grupo respondeu a uma organização diferente de situações combinatórias que buscavam perceber o efeito de variáveis como a fadiga ou a desmotivação causada pelo alto ou baixo resultado do problema e pela facilidade ou dificuldade no tipo de problema proposto frente ao desempenho dos alunos nas resoluções.

O Grupo 1 começou a resolver os problemas que apresentavam resultados dos menores para os maiores e estes foram resolvidos do tipo mais difícil (*permutação)* para o de menor dificuldade (*produto cartesiano*). As autoras partiram de estudos anteriores para afirmar que *permutação* é o tipo de problema considerado mais difícil pelos alunos dos anos iniciais, enquanto que *produto cartesiano* é tido como o mais fácil. O Grupo 2 iniciou com problemas de maiores para os menores resultados, sendo resolvidos do tipo que apresentou maior dificuldade para o de menor dificuldade. O Grupo 3 principiou com problemas de menores quantidades e, foram seguidos, pelos de quantidades maiores; do tipo que apresentou menor dificuldade para o de maior dificuldade (iniciava com *produto cartesiano* e terminava com *permutação)*; o Grupo 4 prosseguiu com a lógica: iniciou do maior para o menor número de possibilidades, e do tipo que apresenta menor dificuldade para o de maior dificuldade.

Os resultados deste estudo confirmaram o que foi verificado em Pessoa e Borba (2009), apontando que os problemas que resultam em uma menor quantidade de possibilidades foram considerados mais fáceis do que problemas que apresentam uma maior quantidade de possibilidades. Essa relação entre o número de possibilidades e a facilidade, ou dificuldade, em problemas combinatórios, também foi verificado por Moro e Soares (2006) e por Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães (2011)

Além disso, concluíram que, o Grupo 1 (menor – maior/ difícil – fácil), se comparado aos demais grupos, foi o que indicou maior percentual de respostas corretas com explicitação de estratégia. Este grupo respondeu problemas que iniciavam com números menores e um maior grau de dificuldade, iniciavam com *permutação* de valor numérico baixo. As autoras justificam o destaque do Grupo 1 se confrontado com os demais grupos, por ter começado a resolução de problemas com uma situação tida como de difícil resolução, ou seja, um problema de permutação com valores baixos, julgando que essa dificuldade auxiliou as crianças a conseguirem responder todas as questões, pois já haviam se deparado com o problema mais difícil primeiro. Dessa forma, os demais foram de fácil resolução, contribuindo para um bom desempenho.

Os resultados deste estudo revelaram também que em todos os grupos, as questões finais não foram deixadas em branco, descartando a hipótese de fadiga ao responder as últimas questões do teste. Pelo contrário, haviam tentativas mais elaboradas de resoluções, nas quais os alunos tentavam sistematizar as possibilidades, levando a crer que com o decorrer das resoluções, havia uma apropriação do conhecimento que estava sendo proposto, neste caso, o conhecimento combinatório, permitindo que o aluno se sentisse mais apto para responder ao teste.

Mais do que a ordem na qual as questões são apresentadas, as autoras acreditam que um fator que exerce influência sobre a resolução das questões é o contexto no qual o problema combinatório está inserido. As autoras também puderam perceber durante as entrevistas que muitas vezes, bastava somente uma pergunta-chave para que o aluno percebesse uma propriedade ou alguma característica do problema para conseguir respondê-lo.

Assim como Pessoa e Santos (2011), a presente pesquisa pretende observar o que pode vir a dificultar ou facilitar os diferentes tipos de problemas combinatórios. Este estudo anterior e a presente investigação manipularam o número de possibilidades totais, contudo, diferentemente das autoras, o presente estudo propõe-se a manipular também as etapas de escolha, supondo que estas, poderão influenciar o grau de dificuldade de um problema, sem, contudo, deixar de reconhecer a influência do contexto de uma situação para a compreensão de um problema combinatório.

Outro estudo que trata dos diversos tipos de problemas combinatórios é o de Correa e Oliveira (2011). As autoras pesquisaram a relação que existe entre a escrita e a resolução de problemas combinatórios. Buscaram verificar se haveria alguma dificuldade na forma em que os problemas foram apresentados e qual a influência que descrever os valores dos elementos propostos no enunciado do problema traria para sua resolução. A pesquisa foi realizada com 279 estudantes do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental, os quais responderam um teste com quatro problemas diferentes envolvendo o raciocínio combinatório. As autoras apresentaram a mesma organização, que a utilizada no presente estudo, para os significados das situações combinatórias: *produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*.

Estes problemas foram apresentados de duas formas distintas, na primeira havia uma descrição dos elementos propostos nos problemas que as autoras chamam de descrever os valores das variáveis, por exemplo: Uma moça possui 4 blusas de cores diferentes – azul, verde, preta e branca – e 3 modelos de saia – lisa, listrada e bordada. De quantas maneiras diferentes ela pode vestir uma blusa e uma saia? Na segunda forma de apresentação, constava apenas o número de valores das variáveis, sem maiores detalhamentos. Por exemplo: Uma moça possui 4 blusas de cores diferentes e 3 modelos de saia. De quantas maneiras diferentes ela pode vestir uma blusa e uma saia?

Os resultados revelaram que 36% do total dos estudantes acertaram o teste que continha problemas combinatórios com enunciado tradicional, sem detalhamento das variáveis, enquanto que, no teste, o qual continha o enunciado com especificação dos valores foi obtido um desempenho satisfatório por 47% dos estudantes que o responderam.

Correa e Oliveira (ibidem) constataram que ao se modificar o modo de escrever um problema, explicitando os valores das variáveis da situação, modificou-se também o desempenho na resolução, dependendo do tipo de problema combinatório envolvido.

O desempenho dos estudantes variou significativamente de acordo com o tipo de problema apresentado (F 2,7; 741 = 224, 28; p<0,001), as autoras listaram os problemas em ordem crescente de dificuldade: sendo *produto cartesiano* (que as autoras nomeiam de produto de medidas), o de mais fácil resolução, *combinação*, *arranjo* e *permutação*, este último, apresentou o menor índice de acertos. Essa forma de variar a escrita do problema, mencionando ou não os elementos propostos, não produziu qualquer efeito facilitador para os problemas que as autoras consideraram muito fáceis (*produto cartesiano*), visto que, os acertos nos problemas com enunciado tradicional corresponderam a 87%, enquanto que nos problemas com especificação dos valores o acerto correspondeu a 89% dos estudantes. Sendo a diferença dos resultados dos testes, muito pequena. Também não houve efeito nos problemas considerados difíceis demais (*permutação*), no qual os acertos variaram entre 13% e 16% para enunciado tradicional e enunciado com especificação de valores, respectivamente.

Já nos problemas de *combinação* e *arranjo*, a declaração dos valores das variáveis no texto do problema influenciou no desempenho dos alunos, tornando essa, uma boa estratégia para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Os problemas de *combinação* apresentaram 26% de acertos no enunciado tradicional contra 46% no enunciado de valores explicitados, uma diferença estatisticamente significativa. Igualmente, os problemas de *arranjo*, apresentaram 18% de acertos nos problemas sem explicitação das variáveis, enquanto que nos problemas com explicitação o índice de acertos foi 37%.

Dessa forma, o presente estudo buscou explicitar todos os elementos do enunciado dos problemas, pretendendo facilitar a compreensão das situações combinatórias.

O estudo de Correa e Oliveira (2011) reforça a ideia de que os problemas do tipo *permutação* são considerados mais difíceis pelos estudantes, isso porque as autoras abordam todos os tipos de problema combinatórios, conseguindo assim, observar essa variação no desempenho dos estudantes. Contudo, o presente projeto de pesquisa busca confirmar ou refutar estes mesmos dados, de que os problemas de *permutação* são mais difíceis por causa dos invariantes que envolvem sua resolução, pois se acredita também, que as etapas de escolha podem influenciar no desempenho dos alunos e não apenas as propriedades de cada tipo de problema.

Destaca-se que, quando se analisou as etapas de escolha dos problemas propostos por Correa e Oliveira (2011), observou-se que os problemas de *permutação* apresentavam quatro etapas de escolha, enquanto que os problemas do tipo *produto cartesiano* apresentavam somente duas etapas de escolha. Dessa forma, não apenas os invariantes das situações combinatórias variavam, mas também o número de etapas de escolha.

Analisando todos os problemas propostos pelas autoras, foi possível perceber uma diferença no número de etapas de escolha em cada tipo de problema, como também houve diferença na grandeza numérica das respostas dos problemas, no qual os problemas de *produto cartesiano* e *arranjo*, ambos possuíam duas etapas de escolha e resposta 12. Já os problemas de *combinação*, tinham três etapas de escolha e a resposta ao problema eram 4 possibilidades, enquanto que os problemas de *permutação*, com quatro etapas de escolha tinham um total de 24 possibilidades. Fica-se, assim, em dúvida se o resultado é devido prioritariamente ao tipo de situação combinatória tratada ou se há também efeito do número total de possibilidades e do número de etapas de escolha no desempenho dos participantes do estudo. Dessa forma, o presente estudo buscou controlar o número de etapas de escolha e a grandeza numérica do resultado de cada problema.

O estudo de Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães (2011) verificou a influências dessas etapas de escolha no desempenho de 40 alunos do 6º e 9º anos do Ensino Fundamental de duas escolas públicas de Campo Grande – MS, fazendo parte de um estudo mais amplo. Participaram da pesquisa 20 alunos de cada escola, sendo 10 alunos do 6º ano e 10 alunos do 9º ano, cada aluno respondeu um teste com oito problemas do tipo *produto cartesiano,* sendo o que diferenciava cada um deles era a quantidade de algarismos e a quantidade de variáveis nos fatores. Quatro problemas tinham duas variáveis (Problemas de 1 a 4) e outros quatro tinham três variáveis (Problemas de 5 a 8). O que as autoras nomeiam por variáveis, na presente dissertação de mestrado é denominado de etapas de escolha. Nesses oito problemas de *produto cartesiano* com duas e três etapas de escolha, quatro apresentavam valores numéricos elevados (Problemas de números 1, 2, 5 e 6), enquanto que outros quatro apresentavam baixa grandeza numérica (Problemas de número 3, 4, 7 e 8).

O objetivo da análise desses dados, de acordo com as autoras, foi descrever o desempenho dos alunos nos problemas e identificar os procedimentos utilizados, tendo o número de etapas de escolha como uma variável. O objetivo da presente dissertação de mestrado é inclinar o olhar sobre este estudo para focar nas etapas de escolha, mas Teixeira *et al* (2011) não apresentam resultados claros sobre esse foco.

Embora as autoras não tenham relatado, detalhes sobre o desempenho em função do número de etapas de escolha, pois não era seu objetivo principal, apresentaram, em suas considerações finais, algumas colocações importantes. Relataram que foi possível perceber que o desempenho dos alunos foi melhor nos problemas que apresentavam valores baixos, como era de se esperar. Os alunos também se saíram melhor nos problemas com duas variáveis (duas etapas de escolha) e não houve diferença nos resultados de alunos do 6º e do 9º anos.

O presente projeto de pesquisa, além de manipular as etapas de escolha, também considerou as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para responder aos problemas combinatórios. As etapas de escolha serão manipuladas, não só nos problemas do tipo *produto cartesiano*, mas em todos os demais tipos de problemas combinatórios.

Segundo Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães (2011), o número de variáveis (etapas de escolha) em *produto cartesiano* revela-se um obstáculo para que os alunos compreendam a magnitude do resultado no produto da multiplicação. Dessa forma, o presente estudo se propõe a manipular a ordem de grandeza numérica e manipular as etapas de escolha de variados tipos de problemas combinatórios para observar qual a influência no desempenho, tanto da magnitude do resultado quanto do número de etapas de escolha.

No capítulo a seguir são apresentados os objetivos e o método da presente dissertação. O detalhamento dos procedimentos adotados visa descrever como foram manipuladas as ordens de grandeza das respostas dos problemas, bem como os números de etapas de escolha das situações apresentadas aos participantes do estudo.

Como estudos anteriores ainda não haviam manipulado as etapas de escolha, foi preciso adaptar os testes que seriam utilizados na presente dissertação de mestrado. No Capítulo 2 descreve-se a validação dos testes utilizados, que atenderam a proposta inicial de 3 e 4 etapas de escolha, e o estudo piloto que teve como objetivo realizar intervenções combinatórias com dois grupos que utilizavam representações simbólicas de formas distintas. Esses caminhos percorridos são importantes para destacar as etapas trilhadas até a presente pesquisa realizada, que envolveu a sondagem do desempenho de alunos do 6º ano sobre diferentes tipos de problemas combinatórios, com 2, 3 e 4 etapas de escolha e com número de possibilidades controladas.

CAPÍTULO 2:
OBJETIVOS E MÉTODO

2.1 Objetivos

O estudo apresentou os objetivos descritos a seguir.

2.1.1 Objetivo Geral

Analisar o efeito de número de etapas de escolha, do tipo de problema e do número de possibilidades no desempenho de estudantes do Ensino Fundamental em problemas combinatórios.

2.1.2 Objetivos Específicos

- Averiguar o desempenho nos problemas que têm o mesmo número de etapas de escolha e número de possibilidades aproximado.
- Verificar a influência de etapas de escolha nos desempenhos de um mesmo tipo de problema combinatório.
- Analisar as estratégias de resolução em função do número de etapas de escolha, do tipo de problema e do número total de possibilidades.

2.2 Método de Pesquisa

2.2.1 Caminhos trilhados

A presente dissertação de mestrado se desenvolveu em três etapas: validação do instrumento, estudo piloto e estudo efetivo.

A **validação do instrumento** consistiu na aplicação de *teste de sondagem* com 41 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, buscando verificar se os problemas combinatórios utilizados no teste eram passíveis de resolução buscando atender a proposta inicial de três e quatro etapas de escolha, a partir da adaptação dos problemas do estudo de Azevedo, Costa e Borba (2010). Também se buscou observar o efeito da ordem dos tipos de problemas na apresentação das questões.

A validação foi realizada em duas escolas públicas municipais do Estado de Pernambuco, que permitiram a realização da pesquisa. Durante a coleta dos dados, os alunos resolveram, individualmente, um teste contendo oito problemas de *Combinatória,* dois de cada tipo: p*roduto cartesiano, combinação, arranjo e* *permutação.* Quatro problemas envolviam três etapas de escolha e outros quatro envolviam quatro etapas de escolha.

As questões do teste foram apresentadas aos alunos em diferentes ordenações. Essa estratégia foi utilizada visando a identificação de alguma dificuldade ou facilidade gerada em virtude da ordem dos problemas a serem resolvidos. Com isso, geraram-se quatro testes (A, B, C e D) que continham os mesmos problemas, no entanto, com as ordens das questões distintas entre si. No teste do Tipo A, a organização dos problemas iniciava-se por questões de *produto cartesiano*, seguidos por *combinação*, *arranjo* e *permutação*. Já no teste do Tipo B, o problema inicial era de *combinação*, depois vinham os problemas de *arranjo, permutação e produto cartesiano*. O teste Tipo C, começava com problema de *arranjo*, seguido de *permutação, produto cartesiano e combinação*. E o problema de *permutação* iniciou o teste do Tipo D, seguindo-se com os problemas de *produto cartesiano, combinação e arranjo*.

A análise dos dados, do instrumento de validação, foi realizada de forma quantitativa, com estatística efetuada através do *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS.

Assim, através de uma prova paramétrica de comparação de médias, uma análise de variância (ANOVA), foi possível verificar que não houve diferença significativa entre os tipos de testes aplicados com os alunos.

Como a alternância da ordem dos problemas na organização dos testes não influenciou a atuação dos alunos, não foi mais necessário observar essa alternância de organização dos problemas, visto que não apresentaram diferenças significativas entre si.

Com o resultado do desempenho dos alunos, realizou-se um Teste t de amostras em pares. Verificou-se que resolver questões com três e com quatro etapas de escolha apresentou diferença significativa apenas nos problemas de *permutação* ($t(40) = 2{,}727$, $p = 0{,}009$).

Os dados, portanto, revelaram que, para esse grupo de alunos do Ensino Fundamental, responder problemas do tipo *permutação* com três etapas de escolha é significativamente mais fácil que responder problemas de quatro etapas, mas diferenças estatisticamente significativas não foram encontradas para os outros tipos de problemas combinatórios quando o número de etapas de escolha de elementos foi controlado.

Com a validação deste instrumento, foi possível ter-se indícios de uma explicação para a maior dificuldade verificada nos problemas de *permutação* estar associada, muitas vezes, por esse tipo de problema apresentar um maior número de etapas de escolha, quando comparado com os demais problemas e, principalmente, quando comparado com os problemas de *produto cartesiano,* que, em geral, apresentou, em estudos anteriores, duas etapas de escolha.

Percebeu-se que os objetivos do instrumento de validação foram alcançados: a verificação de que a ordem de apresentação dos tipos de problemas não teve influência no desempenho e que foi possível a manipulação das etapas de escolha. Mesmo observando a viabilidade de manipular os números de etapas de escolha, sentiu-se que ficou faltando o controle das quantidades de possibilidades e também não se manipulou problemas com duas etapas de escolha, o que é o mais comum em problemas de *produto cartesiano*.

Partindo dos resultados obtidos na validação do instrumento de pesquisa, foi feito um **estudo piloto** com quatro alunos de outra escola pública municipal do Recife, que tinha como objetivo inicial intervir na compreensão de Combinatória de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Inicialmente pensou-se que se poderia partir para um estudo de intervenção, mas, como apresentado a seguir, verificou-se a necessidade de se voltar a realizar uma sondagem no estudo efetivo.

No estudo piloto foram realizados pré-teste, intervenção pedagógica e pós-teste. O pré-teste serviu para sondar o nível de conhecimento combinatório que os alunos já possuíam, para que fossem organizados em duplas para a realização da intervenção pedagógica.

Durante a intervenção, a primeira dupla resolveu cada um dos problemas combinatórios com árvores de possibilidades e listagens, iniciando a resolução com uma das representações e concluindo o mesmo problema com outra representação (forma complementar). A segunda dupla resolveu os problemas ora com árvore de possibilidades, ora com listagem (forma alternada). O objetivo de intervenções distintas era verificar qual tipo de intervenção (complementar ou alternada) proporcionaria um melhor desempenho.

Em ambos os grupos de ensino, os alunos foram questionados de forma a desenvolverem procedimentos próprios e não a aprenderem procedimentos únicos ensinados diretamente. Dessa forma, não se ensinou métodos fechados de resolução dos problemas combinatórios, mas, sim, formas de se pensar sobre as relações combinatórias.

A intervenção realizou-se através de perguntas chaves que permitiam a reflexão sobre a natureza variada dos problemas, conforme proposto por Borba e Nunes (2004), no qual os alunos eram levados a perceber os invariantes de cada problema, as etapas de escolha, a sistematização e a possibilidade de generalização. Essas perguntas chaves permitiam orientar os alunos na compreensão do que era pedido no problema, por exemplo, como podemos combinar uma comida, com uma bebida e uma sobremesa? Também eram questionados, mediante perguntas, as soluções incompletas, por exemplo, será que não há nenhuma outra forma de combinar o cardápio? E se eu combinar...

Além do mais, eram confrontados com diferentes soluções expressas por outros alunos, buscando provocar-lhes alterações e reinterpretações das realizações uns dos outros. Por exemplo, olhem só o que (Fulano) fez, será que se organizarmos dessa forma conseguiremos fazer todas as possibilidades possíveis?

Durante toda a intervenção, foram explicitadas aos alunos as questões que eles deveriam estar mais atentos, como, no caso do número de etapas de escolha, no qual eram contadas quantas escolhas deveriam ser feitas em cada tipo de problema. Por exemplo, no problema de *produto cartesiano*, com três etapas de escolha, era necessário escolher entre três conjuntos, o de comidas, o de bebidas e o conjunto de sobremesas. Já no mesmo tipo de problema, só que com quatro etapas de escolha, era preciso combinar quatro formas de se vestir, optando por uma blusa, uma calça, um sapato e um brinco. Estes quatro conjuntos eram destacados, buscando deixar claro que a partir dessas etapas de escolha é que o raciocínio deveria ser iniciado, para se obter um resultado com todas as combinações possíveis.

As situações-problema propostas na intervenção eram as mesmas do pré-teste e eram apresentadas duas formas de representação (listagem e árvore de possibilidades), sem deixar de mencionar que há outras formas de resolução que podem auxiliar na compreensão dos problemas combinatórios.

Após a intervenção, foi realizado o pós-teste que verificou que ambas as intervenções contribuíram para um melhor desempenho dos alunos. Não foram encontradas diferenças entre a ordem de apresentação das representações utilizadas na resolução dos problemas. Sendo assim, não seria necessário mais comparar dois tipos de intervenção pedagógica.

Também foi observado que as representações utilizadas pelos alunos no pós-teste não variavam de acordo com as etapas de escolha ou com o tipo de problema. Cada aluno utilizou a mesma representação simbólica em todos os problemas combinatórios, como se a escolha da representação utilizada fosse pessoal de cada indivíduo.

O desempenho dos alunos foi superior no pós-teste, quando comparado com o pré-teste, em ambos os grupos de intervenção. Dessa forma, os dois tipos de intervenção, trabalhando com duas formas de representação – seja complementarmente, seja alternadamente – foram eficientes para proporcionar melhoria de desempenho dos participantes de estudo piloto.

No processo de qualificação da presente pesquisa, discutiu-se a necessidade de se realizar mais estudos de sondagem, uma vez que essa temática – a verificação da influência de etapas de escolha no desempenho em situações combinatórias – precisava ainda de maior confirmação. Decidiu-se, então, que o **estudo efetivo** seria um estudo de sondagem e que se fariam adaptações ao instrumento de coleta de dados, de modo a controlar melhor as variáveis consideradas anteriormente.

A importância dos conhecimentos prévios dos alunos, incluindo os informalmente desenvolvidos, se dá como base para firmar o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória. Esse também foi mais um motivo que levou à decisão de se voltar a realizar estudo de sondagem.

Sabendo que os alunos têm uma ampla base de conhecimento matemático informal, é necessário, de acordo com Carraher, Carraher e Schliemann (1988) "conhecer melhor a matemática inerente às atividades da vida diária na cultura dessas crianças a fim de construir, a partir dessa matemática, pontes e ligações efetivas para a matemática mais abstrata que a escola pretende ensinar". (p. 27).

Essa base de conhecimento que os alunos possuem é observada através das estratégias de resolução que utilizam para responder aos problemas, nas quais, quando explicitadas, permite perceber as habilidades e percursos percorridos para se chegar àquela contagem ou listagem, ou outra estratégia, que julgou ser a resposta apropriada ao problema.

Mesmo que conhecimentos informais apresentem, do ponto de vista da Matemática como sistema formal, imprecisões e limitações, sua recuperação é a base para uma construção adequada da matemática escolar. Além do mais, certas reticências e algumas dificuldades de aprendizagem nessa área têm sua primeira explicação no fato de ignorar esse tipo de conhecimento que os alunos trazem.

Outro aspecto importante para o processo de ensino e aprendizagem é a indicação de que a melhor maneira de aprender Matemática é dentro de um contexto relevante de aplicação e de tomada de decisões específicas. Para Coll, Marchesi e Palacios (2004), a resolução de problemas, e não tanto a aprendizagem cultural e pouco contextualizada da Matemática, é o ambiente que demanda e dá sentido à Matemática, nesse caso, à Combinatória, no âmbito escolar. Em consonância, a presente dissertação de mestrado se utilizou da resolução de problemas em sua sondagem dos conhecimentos dos alunos do 6º ano sobre os diversos problemas combinatórios.

Uma adaptação aos problemas combinatórios, ocorrida a partir das discussões na qualificação do projeto, refere-se à ampliação das etapas de escolha a serem analisadas. O presente estudo tem seu foco em duas, três e quatro etapas de escolha em problemas combinatórios. Visto que, em estudos anteriores, os problemas do tipo *produto cartesiano,* apresentavam duas etapas de escolha, enquanto que os problemas de *permutação* apresentavam quatro etapas de escolha, foram comparadas duas, três e quatro etapas de escolha nos diferentes problemas combinatórios e não apenas, três e quatro etapas, como anteriormente pesquisados.

2.2.2 Participantes e procedimentos do estudo efetivo

Foi realizado um estudo de sondagem com 128 alunos do 6º ano de uma escola particular do Recife. Nos caminhos trilhados anteriormente, tanto a validação do instrumento como o estudo piloto foram realizados com alunos do 5º ano. Contudo, no início da coleta dos dados da presente pesquisa foi realizada uma sondagem com uma turma do 5º ano de uma escola Municipal de Recife, e percebeu-se a dificuldade encontrada pelos alunos em realizarem a leitura dos problemas. Sabendo, que infelizmente essa é uma realidade vivida por diversos estudantes da rede pública de ensino, no qual, muitos deles ainda não se encontram plenamente alfabetizados, tornou-se necessário pensar em observar como seria o desempenho dos alunos do 6º ano e dessa forma, realizou-se o estudo com alunos deste ano escolar.

Outra dificuldade vivida nos caminhos trilhados foi o quantitativo de sujeitos necessários para a presente pesquisa. Para obter-se um bom quantitativo para o trabalho estatístico, decidiu-se coletar dados com um mínimo de 90 sujeitos, visto que a presente pesquisa utilizou-se de seis diferentes testes (que mais adiante serão justificados) e para cada teste definiu-se ter um mínimo de 15 alunos.

A pesquisadora optou por realizar a coleta de dados da presente pesquisa em uma escola particular. Dessa forma, os participantes responderam seis tipos diferentes de testes, possibilitando-se um melhor controle das variáveis manipuladas: o número de etapas de escolha dos problemas resolvidos, a ordem de grandeza dos resultados dos problemas e os tipos de situações combinatórias (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*).

A sondagem realizou-se por meio de seis tipos de teste que continham seis ou oito problemas combinatórios (dependendo do teste).

Como foi ampliado o número de etapas de escolha a serem pesquisadas, não seria viável aplicar um teste com alunos que abrangesse os quatro tipos de problemas combinatórios no mesmo teste e cada um com 2, 3 e 4 etapas de escolha. Dessa forma, cada teste comportaria 12 problemas combinatórios, tornando-se cansativo para os alunos responderem o teste de forma completa.

Partindo dessa visão, foi decidido que os cinco primeiros testes só apresentariam dois tipos de problemas combinatórios e cada um com 2, 3 e 4 etapas de escolha. Sendo assim, cada teste destes continha seis problemas. O sexto tipo de teste possuía uma estrutura diferente, apresentada a seguir, e continha oito problemas.

Foram elaborados seis tipos diferentes de testes, todos os testes aplicados nas distintas salas de aula, entregue aos alunos de forma aleatória. Nos testes foram controlados os números de etapas de escolha (2, 3 e 4 etapas) e a quantidade total de possibilidades. Cada teste comparou dois tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação*), sendo organizados da seguinte forma:

Teste 1 - Produto Cartesiano x Permutação
Teste 2 - Produto Cartesiano x Arranjo
Teste 3 - Produto Cartesiano x Combinação
Teste 4 - Combinação x Permutação
Teste 5 - Combinação x Arranjo

Os problemas de *permutação* e *arranjo* não podem ser comparados, pois os resultados são fixos de acordo com as etapas de escolha. Por exemplo, 2 é o resultado dos problemas de permutação com 2 etapas, 6 é o resultado com 3 etapas de escolha e 24 é resultado de 4 etapas. Já os problemas de arranjo têm como menores resultados respectivamente, 6, 24 e 120, para duas, três e quatro etapas. Com estes resultados fixos e diferentes em cada uma das etapas, não seria possível comparar o desempenho dos alunos em cada uma das etapas, pois as etapas seriam iguais, mas os resultados em cada uma delas seriam muito diferentes, tornando os problemas com grandeza numérica maior, mais difícil, como já foi visto em estudos anteriores.

Dessa forma, cada tipo de teste buscou comparar dois tipos de problemas e tiveram seus resultados semelhantes em cada etapa de escolha, sendo mantidos iguais ou similares. Resultou-se, assim, em cinco tipos de testes.

Contudo, ainda buscou-se elaborar outro tipo de teste para comparar as etapas de escolha dentro do mesmo problema:

Teste 6 - Produto Cartesiano x Combinação x Permutação

Neste tipo de teste não foram comparados os problemas de *arranjo,* isso porque, como já dito anteriormente, esse tipo de problema apresenta como menor resultado em cada etapa de escolha 6, 24 e 120, para duas, três e quatro etapas de escolha. Como o objetivo desse tipo de teste era comparar as etapas de escolha dentro de cada tipo de problema, os resultados deveriam ser iguais ou similares e menores que uma dezena, para que o número de possibilidades não fosse um motivo para o baixo desempenho. Dessa forma, foram utilizados os problemas de *produto cartesiano, combinação e permutação*, este último somente com duas e três etapas de escolha. Pelo mesmo motivo que se excluiu os problemas de *arranjo*, excluíram-se também os problemas de *permutação* com quatro etapas, por que o número total de possibilidades ultrapassaria a uma dezena.

Foram controladas as grandezas numéricas dos problemas utilizados, no qual os problemas de *produto cartesiano* apresentaram resultado 8 em todas as etapas de escolha, os problemas de *combinação* tiveram os seguintes resultados em cada etapa: 6, 4 e 5. Já os problemas de *permutação*, foram controladas somente 2 e 3 etapas, no qual os resultados eram 2 e 6. Não foi possível comparar os problemas de *permutação* com quatro etapas de escolha, pois o resultado apresentado é 24, tornando-se difícil uma comparação equivalente com as demais etapas de escolha. Dessa forma, os problemas de *permutação* apresentam somente comparação entre duas e três etapas, fazendo com que o teste do Tipo 6 apresentasse oito tipos de problemas, três de *produto cartesiano*, três de *combinação* e dois de *permutação*.

A ordem em que cada problema se dispôs no teste se deu de forma aleatória por meio de sorteio. Para combinar os resultados dos diversos tipos de problemas em cada tipo de teste foi necessário organizar os possíveis resultados em cada etapa de escolha.

Os números de elementos envolvidos nos problemas de *combinação, arranjo e permutação* estão restritos ao número de etapas de escolha. Essa restrição não ocorre com os problemas de *produto cartesiano*, isso porque a resolução de seus problemas se dá pela multiplicação direta de seus elementos, sejam eles com duas, três ou quatro etapas de escolha.

Já com os problemas de *combinação,* quando se manipula as etapas de escolha, encontram-se restrições no número total de possibilidades, por exemplo, em problemas com duas etapas de escolha, os resultados só podem ser 3, 6, 10, pois 3 é a *combinação* de três elementos dois a dois; 6 é a *combinação* de quatro elementos dois a dois; e 10 é a *combinação* de cinco elementos dois a dois. Essa combinação de elementos pode ser estendida pra mais de cinco elementos, seis, sete elementos, contudo, deseja-se sempre obter um número de possibilidades que seja o menor possível para ser combinado com o resultado de outro tipo de problema proposto nos variados testes. Essa mesma restrição acontece com três etapas de escolha, cujos resultados podem ser 4, 10, 20, no qual, ao se combinar quatro elementos três a três, obtêm-se como resultado um total de 4 possibilidades, da mesma forma, pode-se combinar cinco elementos, três a três, para obter um total de 10 possibilidades, e pode-se combinar seis elementos, três a três, obtêm-se a totalidade de 20 combinações possíveis. Procede-se da mesma forma com quatro etapas de escolha, ao se combinar elementos quatro a quatro obtêm-se como resultados, 5, 15, 35, 70, 120, dependendo da quantidade de elementos combinados.

Nos problemas de *arranjo* há uma restrição maior, isso porque os resultados desses problemas estão ligados às etapas de escolha. Por exemplo, os problemas de *arranjo* com duas etapas de escolha podem ter no mínimo três elementos para serem classificados em primeiro e segundo lugar, cujas colocações seriam as etapas de escolha. Conforme aumentar a quantidade de elementos, aumenta-se o valor do resultado total em 6,12, 20, no qual, 6 é o arranjo de três elementos em primeiro e segundo lugar, 12 é o arranjo com 4 elementos nessas mesmas colocações, e 20 é o arranjo de cinco elementos. O mesmo acontece com três etapas de escolha, no qual o mínimo que se pode arranjar são quatro elementos em primeiro, segundo e terceiro lugar, totalizando 24 possibilidades. Da mesma forma, ao aumentar-se os elementos que serão arranjados, aumenta-se o número total de possibilidades para 60, ao arranjar cinco elementos em três posições e para 120, arranjando seis elementos em três posições. O mesmo procedimento repete-se com quatro etapas de escolha.

Quando se manipula os problemas de *permutação*, sua restrição é absoluta, ou seja, os problemas com duas etapas de escolha permutarão dois elementos, tendo como resultado 2. Os problemas com três etapas de escolha, permutarão três elementos com total de possibilidades igual a 6 e os problemas com quatro etapas, permutarão quatro elementos, totalizando 24 possibilidades. Em *permutação*, a quantidade de elementos que serão permutados corresponde às etapas de escolha.

A restrição do número de possibilidades de cada tipo de problema pode ser visualizada na Tabela 1.

Tabela 1: Possíveis resultados aos diversos tipos de problemas combinatórios

	Produto Cartesiano	**Combinação**	**Arranjo**	**Permutação**
Etapas	Sem restrição	Pouca restrição	Muita restrição	Com restrição
2 etapas	Livre	3, 6, 10	6, 12, 20	2
3 etapas	Livre	4, 10, 20	24, 60, 120	6
4 etapas	Livre	5, 15, 35, 70, 126	120, 360, 840	24

Com estes resultados foi possível elaborar e combinar os problemas para cada tipo de teste. Os problemas de *produto cartesiano*, como podem ser resolvidos por uma multiplicação simples de seus elementos, possuem uma flexibilidade em seus resultados, sendo fácil comparar a grandeza numérica de seu produto com os demais tipos de problemas.

Os problemas de *arranjo* possuem seus resultados com mais restrição, pois a escolha de elementos dentro de um conjunto é definida pelo número de etapas de escolha. Dessa forma, quanto menor a quantidade de elementos que forem escolhidos para ser arranjados, menor o número de possibilidades.

Já os problemas de *permutação* possuem resultados fixos, pois não há escolha de elementos, todos são permutados e o número de etapas de escolha é dado pela permutação de todos os elementos do problema.

Nos problemas de *combinação*, como devem ser escolhidos elementos de um conjunto maior para serem combinados, essa variação nas possibilidades torna-se um pouco menos flexível do que os problemas de *produto cartesiano* e não tão restritas quanto os problemas de *arranjo* e *permutação*. Como se pode visualizar no Quadro 1.

Quadro 1: Possíveis resultados aos problemas de *combinação*

2 Etapas de Escolha		
3 elementos	Combinados 2 a 2	Resposta: 3
4 elementos	Combinados 2 a 2	Resposta: 6
5 elementos	Combinados 2 a 2	Resposta: 10
3 Etapas de Escolha		
4 elementos	Combinados 3 a 3	Resposta: 4
5 elementos	Combinados 3 a 3	Resposta: 10
6 elementos	Combinados 3 a 3	Resposta: 20
4 Etapas de Escolha		
5 elementos	Combinados 4 a 4	Resposta: 5
6 elementos	Combinados 4 a 4	Resposta: 15
7 elementos	Combinados 4 a 4	Resposta: 35
8 elementos	Combinados 4 a 4	Resposta: 70
9 elementos	Combinados 4 a 4	Resposta: 126

A escolha da quantidade de elementos que seriam combinados em cada problema de combinação variou, conforme o Quadro 1 e conforme o resultado do tipo de problema combinatório que seria comparado nos diferentes tipos de teste. Com todos os possíveis resultados dos problemas combinatórios já estabelecidos, foi possível elaborar os problemas e adequar a grandeza numérica de acordo com o tipo de teste, como pode ser visto no Quadro 2..

No teste Tipo 1, tanto os problemas de *produto cartesiano*, como os problemas de *permutação*, tiveram seus resultados iguais em cada uma das etapas. Por exemplo, nos problemas de *produto cartesiano* e de *permutação* com duas etapas de escolha, o total de possibilidades era dois. Já com três etapas de escolha, ambos os problemas apresentaram seis como sendo o total de possibilidades possíveis de serem combinadas. Nos problemas deste tipo de teste, o resultado das possibilidades da combinação de quatro etapas de escolha foi 24.

Da mesma forma procederam com os problemas do teste Tipo 2, 3, 4 e 5. Quando se visualiza o Quadro 2, percebe-se que nem todos os resultados foram iguais, como aconteceu com os resultados do teste Tipo 1, alguns resultados foram similares. Um exemplo de similaridade no total de possibilidades aconteceu com o teste Tipo 3, em quatro etapas de escolha, nos quais os resultados similares foram 6 e 5 possibilidades, no qual, 6 é o resultado do problema de *produto cartesiano*, listado em primeiro na tabela, e 5, o resultado do problema de *combinação*. Os resultados, no quadro, que foram similares, encontram-se listados na mesma ordem em que aparece a comparação dos problemas e quando os resultados são iguais, este aparece uma única vez na tabela.

Quadro 2: Tipos de testes

Testes	**Questões**	**Comparando**	**Respostas**		
Tipo 1	6	Produto Cartesiano X Permutação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			2	6	24
Tipo 2	6	Produto Cartesiano X Arranjo	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	24	120
Tipo 3	6	Produto Cartesiano X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	4	6 e 5
Tipo 4	6	Permutação X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			2 e 3	6 e 4	24 e 15
Tipo 5	6	Arranjo X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	20 e 24	120 e 126
Tipo 6	8	2, 3 e 4 Etapas de Escolha dentro de um mesmo problema	Produto Cartesiano	Combinação	Permutação
			8	6, 4 e 5	2 e 6

O teste Tipo 6 possuía como principal característica a comparação de um mesmo tipo de problema, para observar a influência das etapas de escolha quando a grandeza numérica é controlada. Contudo, essa comparação só pôde ser realizada nos problemas de *produto cartesiano*, *combinação* e em parte dos problemas de *permutação*, isso porque os problemas de *arranjo* e *permutação* possuem seus resultados fixos de acordo com o número de etapas de escolha.

Seguem os problemas utilizados em cada tipo de teste de problemas combinatórios e as respostas corretas. O teste que comparou *produtos cartesianos* com *permutações*, está descrito no Quadro 3.

Quadro 3: Problemas do Teste Tipo 1

Comparando problemas de Produto Cartesiano x Permutação		
2 Etapas de Escolha	**PC**	Júlia foi a uma **pizzaria**. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por um tipo de **massa** (fina) e dois tipos de **recheio** (calabresa e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? **Resposta: 2 possibilidades**
	P	**Dois** amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, **um ao lado do outro.** Quantas fotos diferentes eles podem tirar? **Resposta: 2 possibilidades**
3 Etapas de Escolha	**PC**	Douglas foi a uma **lanchonete**. No cardápio haviam três opções de **comida** (sanduíche, pizza e coxinha), dois tipos de **bebida** (suco e refrigerante) e uma opção de **sobremesa** (sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa? **Resposta: 6 possibilidades**
	P	De quantas maneiras diferentes **três** pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se **numa fila do banco? Resposta: 6 possibilidades**
4 Etapas de Escolha	**PC**	Jane quer escolher diferentes combinações de **roupas e acessórios**, ela possui duas **blusas** (azul e vermelha), três **calças** (preta, branca e jeans), dois **sapatos** (bota e rasteirinha) e dois **brincos** (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco? **Resposta: 24 possibilidades**
	P	Gabriela quer arrumar os porta-retratos de sua casa. Ela tem **quatro** fotos, a de sua mãe, de seu pai, a sua e de seu irmão. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizá-los **lado-a-lado** na estante? **Resposta: 24 possibilidades**

Nos testes, os problemas não se apresentaram na ordem descrita no Quadro 3, a ordem em que cada problema se dispôs foi aleatória, por meio de sorteio, sendo uma ordem única para todos os problemas do teste Tipo 1. O primeiro problema desse tipo de teste foi um *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha, o segundo problema foi uma *permutação* com duas etapas de escolha, o terceiro problema foi de *produto cartesiano* com três etapas de escolha, o quarto problema foi de *produto cartesiano* com duas etapas de escolha, o quinto foi de *permutação* com três etapas de escolha e o sexto problema foi de *permutação* com quatro etapas de escolha. Essa foi a ordem de apresentação dos problemas no teste Tipo 1. Essa organização se deu por sorteio, de forma aleatória, optando-se por esse tipo de critério após verificar, na primeira etapa da presente pesquisa, na validação do instrumento, que a ordem de organização dos problemas não apresentou diferença no desempenho dos alunos.

O negrito dos problemas também não esteve presentes nos testes aplicados, apenas aqui está destacando as etapas de escolha presentes em cada problema. Em todos os problemas aqui transcritos apresenta-se ao final o total de possibilidades possíveis combinadas. As respostas não eram apresentadas, obviamente. Aqui são colocadas para indicar as grandezas numéricas comparadas. Cada aluno recebeu um teste sem respostas, com espaço em branco em cada questão para que respondesse da forma que achasse conveniente. Os alunos tiveram o tempo de 50 minutos para responder o seu teste, tempo estabelecido pela escola da duração de uma aula de Matemática. O tempo foi suficiente, pois todos os alunos entregaram o teste antes do término da aula. O Quadro 4 mostra o teste Tipo 2, no qual foram comparados *produtos cartesianos* e *arranjos*.

A ordem de apresentação dos problemas no teste Tipo 2 foi, em primeiro lugar, um *produto cartesiano* com três etapas de escolha, em segundo, um *arranjo* com quatro etapas, o terceiro problema foi de *arranjo* com duas etapas de escolha, o quarto foi um *produto cartesiano* com duas etapas de escolha, o quinto foi de *produto cartesiano* com duas etapas de escolha e o sexto problema foi de *arranjo* com três etapas de escolha.

Quadro 4: Problemas do Teste Tipo 2

Comparando problemas de Produto Cartesiano x Arranjo		
2 Etapas de Escolha	**PC**	Júlia foi a uma **pizzaria**. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de **massa** (grossa ou fina) e três tipos de **recheio** (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? **Resposta: 6 possibilidades**
	A	**Três** crianças (Joaquim, Pedro e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o **primeiro e o segundo lugar? Resposta: 6 possibilidades**
3 Etapas de Escolha	**PC**	Douglas foi a uma **lanchonete**. No cardápio haviam três opções de **comida** (sanduíche, pizza e coxinha), quatro tipos de **bebida** (suco, água, chá e refrigerante) e duas opções de **sobremesa** (bolo e sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa? **Resposta: 24 possibilidades**
	A	**Quatro** turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o **primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio? Resposta: 24 possibilidades**
4 Etapas de Escolha	**PC**	Jane quer escolher diferentes combinações de **roupas e acessórios**, ela possui cinco **blusas** (rosa, laranja, azul, verde e vermelha), quatro **calças** (preta, branca, marrom e jeans), três **sapatos** (sandália, bota e rasteirinha) e dois **brincos** (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco? **Resposta: 120 possibilidades**
	A	**Cinco** alunos (Caio, Bruno, Rebeca, Davi e Amanda) querem representar sua escola nas Olimpíadas de Matemática. Contudo, só serão escolhidos os quatro primeiros colocados, com as melhores notas da escola. Sabendo que todos são bons alunos e têm a mesma chance, de quantas maneiras diferentes pode-se ter o **primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar? Resposta: 120 possibilidades**

No Quadro 5 é possível visualizar o teste Tipo 3, no qual foram comparados *produtos cartesianos e combinações*. Os problemas do teste Tipo 3, apresentaram-se pela ordem, em primeiro lugar, um *produto cartesiano* com três etapas de escolha, em segundo lugar, uma *combinação* com duas etapas, o terceiro problema foi um *produto cartesiano* com duas etapas de escolha, o quarto problema foi uma *combinação* com três etapas de escolha, o quinto foi uma *combinação* com quatro etapas de escolha e o sexto problema foi de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha.

Quadro 5: Problemas do Teste Tipo 3

Comparando problemas de Produto Cartesiano x Combinação		
2 Etapas de Escolha	**PC**	Júlia foi a uma **pizzaria**. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de **massa** (fina e grossa) e três tipos de **recheio** (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? **Resposta: 6 possibilidades**
	C	Na loja de bichos de estimação há **quatro animais** para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar **dois bichinhos** para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? **Resposta: 6 possibilidades**
3 Etapas de Escolha	**PC**	Douglas foi a uma **lanchonete**. No cardápio haviam duas opções de **comida** (pizza e coxinha), dois tipos de **bebida** (suco e refrigerante) e uma opção de **sobremesa** (sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa? **Resposta: 4 possibilidades**
	C	**Quatro amigos** (Felipe, Sandra, Carlos e Ana) vão formar **trios** para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? **Resposta: 4 possibilidades**
4 Etapas de Escolha	**PC**	Jane quer escolher diferentes combinações de **roupas e acessórios**, ela possui duas **blusas** (azul e vermelha), duas **calças** (preta e branca), um **sapato** (sandália) e um **brinco** (prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco? **Resposta: 4 possibilidades**
	C	Uma escola tem **cinco professores** (Paulo, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos **quatro professores** para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? **Resposta: 5 possibilidades**

No Quadro 6, apresenta-se os problemas utilizados no teste Tipo 4 que comparou os problemas de *combinação* e *permutação*. Os problemas do teste

Tipo 4 foram apresentados aos alunos na seguinte ordem: o primeiro, segundo e terceiros problemas foram de *combinação*, cada um, respectivamente com duas, três e quatro etapas de escolha (essa ordem aconteceu por meio de sorteio). Já os problemas seguintes foram de *permutação* com duas, quatro e três etapas de escolha, respectivamente.

Quadro 6: Problemas do Teste Tipo 4

Comparando problemas de Combinação x Permutação		
2 Etapas de Escolha	**C**	Na loja de bichos de estimação há **três tipos de animais** para vender (um cachorro, um gato e um ratinho). Marcelo quer comprar **dois bichinhos** para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? **Resposta: 3 possibilidades**
	P	**Dois** amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, **um ao lado do outro.** Quantas fotos diferentes eles podem tirar? **Resposta: 2 possibilidades**
3 Etapas de Escolha	**C**	**Quatro amigos** (Felipe, Sandra, Carlos e Ana) vão formar **trios** para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? **Resposta: 4 possibilidades**
	P	De quantas maneiras diferentes **três** pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se **numa fila do banco?** **Resposta: 6 possibilidades**
4 Etapas de Escolha	**C**	Uma escola tem **seis professores** (Paulo, Ângela, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos **quatro professores** para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? **Resposta: 15 possibilidades**
	P	Gabriela quer arrumar os porta-retratos de sua casa. Ela tem **quatro** fotos, a de sua mãe, de seu pai, a sua e de seu irmão. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizá-los **lado-a-lado** na estante? **Resposta: 24 possibilidades**

As respostas da comparação desses tipos de problemas, não foram exatamente as mesmas. Os problemas foram organizados para que uma resposta aproximada ou de mesma ordem de grandeza fosse passível de comparação. Por exemplo: os problemas com quatro etapas de escolha têm suas respostas 15 e 24, isso porque, como os problemas de *permutação* têm seus resultados fixos (2, 6, 24), então, o problema de *combinação* é que precisaria ser comparado a ele. As possíveis respostas para o problema de *combinação* com quatro etapas poderiam ser: 15 – se combinar seis elementos quatro a quatro (como foi usado no teste), ou 35 – se combinar sete elementos quatro a quatro. Pensando que os alunos poderiam listar as possibilidades para encontrar a resposta, como foi visto nos testes anteriormente aplicados, escolheu-se a resposta de 15 por se aproximar mais da resposta 24.

Segue-se o quadro com os problemas do teste Tipo 5. Neste teste foram comparados problemas de *combinação* e *arranjo* com duas, três e quatro etapas de escolha.

Quadro 7: Problemas do Teste Tipo 5

Comparando problemas de Combinação x Arranjo		
2 Etapas de Escolha	**C**	Na loja de bichos de estimação há **quatro animais** para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar **dois bichinhos** para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? **Resposta: 6 possibilidades**
	A	**Três** crianças (Joaquim, Pedro e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o **primeiro e o segundo lugar? Resposta: 6 possibilidades**
3 Etapas de Escolha	**C**	**Seis amigos** (Felipe, Sandra, Carla, Henrique, José e Ana) vão formar **trios** para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? **Resposta: 20 possibilidades**
	A	**Quatro** turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o **primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio? Resposta: 24 possibilidades**
4 Etapas de Escolha	**C**	Uma escola tem **nove professores** (Paulo, Bruno, Eduardo, Ângela, Douglas, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos **quatro professores** para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? **Resposta: 126 possibilidades**
	A	**Cinco** alunos (Caio, Bruno, Rebeca, Davi e Amanda) querem representar sua escola nas Olimpíadas de Matemática. Contudo, só serão escolhidos os quatro primeiros colocados, com as melhores notas da escola. Sabendo que todos são bons alunos e têm a mesma chance, de quantas maneiras diferentes pode-se ter o **primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar? Resposta: 120 possibilidades**

A seguir, apresenta-se o Quadro 8, com os problemas do teste Tipo 6, que comparou as etapas de escolha dentro dos problemas de *produto cartesiano, combinação e permutação.*

Quadro 8: Problemas do Teste Tipo 6

Comparando etapas de escolha no mesmo tipo de problema		
TIPO	ETAPAS	PROBLEMAS
PRODUTO CARTESIANO	**2**	Júlia foi a uma **pizzaria**. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de **massa** (fina e grossa) e quatro tipos de **recheio** (calabresa, atum, portuguesa e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? **Resposta: 8 possibilidades**
	3	Douglas foi a uma **lanchonete**. No cardápio haviam duas opções de **comida** (pizza e coxinha), dois tipos de **bebida** (suco e refrigerante) e duas opções de **sobremesa** (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa? **Resposta: 8 possibilidades**
	4	Jane quer escolher diferentes combinações de **roupas e acessórios**, ela possui duas **blusas** (azul e vermelha), duas **calças** (preta e branca), dois **sapatos** (bota e rasteirinha) e um **brinco** (prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco? **Resposta: 8 possibilidades**
COMBINAÇÃO	**2**	Na loja de bichos de estimação há **quatro animais** para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar **dois bichinhos** para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? **Resposta: 6 possibilidades**
	3	**Quatro amigos** (Felipe, Sandra, Carlos e Ana) vão formar **trios** para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? **Resposta: 4 possibilidades**
	4	Uma escola tem **cinco professores** (Paulo, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos **quatro professores** para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? **Resposta: 5 possibilidades**
PERMUTAÇÃO	**2**	**Dois** amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, **um ao lado do outro.** Quantas fotos diferentes eles podem tirar? **Resposta: 2 possibilidades**
	3	De quantas maneiras diferentes **três** pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se **numa fila do banco?** **Resposta: 6 possibilidades**

A ordem de apresentação dos problemas no teste Tipo 6 foi, em primeiro lugar, um *produto cartesiano* com três etapas de escolha, seguido de uma *combinação* com duas etapas de escolha, o terceiro problema foi de *produto cartesiano* com duas etapas de escolha, o quarto, foi uma *permutação* com duas etapas de escolha, o quinto problema foi de *combinação* com três etapas de escolha, o sexto problema foi de *permutação* com três etapas de escolha, seguido por um problema de combinação com quatro etapas de escolha e, o último problema foi um *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha.

Visualizando os exemplos apresentados nesses problemas, percebe-se que com o controle das etapas de escolha em cada tipo de teste especificamente e com a igualdade ou similaridade das respostas de cada problema, através da utilização destes instrumentos pretendia-se alcançar aos objetivos propostos neste estudo.

No capítulo a seguir, apresenta-se e discorre-se sobre os resultados alcançados. Primeiramente, os dados foram organizados em categorias, conforme a resposta apresentada pelo aluno em cada problema, seguido da visualização dos dados por intermédio de gráficos que foram analisados por meio de provas estatísticas, através do programa *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS. Analisou-se por fim, as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para responder aos problemas em cada tipo de teste combinatório.

CAPÍTULO 3:

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Os caminhos trilhados em toda a pesquisa da presente dissertação de mestrado mostrou que as respostas apresentadas pelos alunos podem ser categorizadas, indo além do mero erro ou acerto total. Desde a primeira coleta, na validação do instrumento, foram criadas as categorias, apresentadas a seguir, que continuaram a ser utilizadas ao longo de toda a pesquisa.

3.1 Categorização das respostas

De acordo com o desempenho dos alunos na resolução dos problemas foi possível categorizar as respostas, e organizá-las em acertos totais, acertos parciais e erros, como pode ser observado no Quadro 9.

Quadro 9: Categorização das respostas

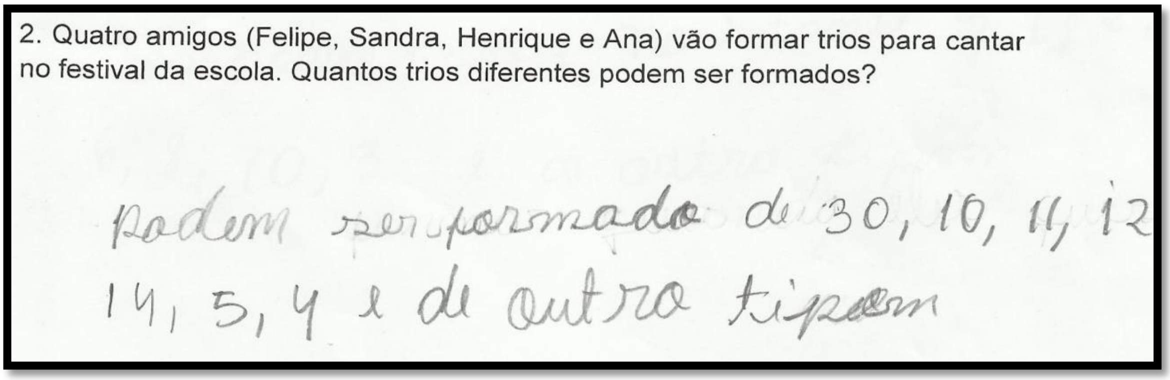
PONTUAÇÃO 0	• ERRO
PONTUAÇÃO 1	• ACERTO PARCIAL 1 - APENAS UMA POSSIBILIDADE APRESENTADA
PONTUAÇÃO 2	• ACERTO PARCIAL 2 - DE 2 ATÉ A METADE DAS POSSIBILIDADES APRESENTADAS
PONTUAÇÃO 3	• ACERTO PARCIAL 3 - MAIS DA METADE DAS POSSIBILIDADES APRESENTADAS
PONTUAÇÃO 4	• ACERTO TOTAL

Foram determinadas pontuações, na qual a pontuação zero correspondia ao erro, ou seja, se o aluno deixava a questão em branco ou não conseguia apresentar nenhuma possibilidade válida, o que indicava não haver ter compreendido a relação combinatória da situação. A pontuação um correspondia ao Acerto Parcial 1, no qual o aluno respondia com apenas uma possibilidade de situação combinatória, ou seja, percebia quais relações combinatórias estavam presentes na situação e corretamente apresentava uma possibilidade, mas se limitava a apresentar essa possibilidade, por considerá-la única, por ser sua preferida ou por julgar, ainda, que não havia necessidade de apresentar outras. A pontuação dois associava-se ao Acerto Parcial 2, tendo como resposta duas situações combinatórias ou mais, podendo chegar até a metade das possibilidades. Nesse caso, o aluno percebia a necessidade de apresentar mais de uma possibilidade, mas ao máximo chegava a apresentar metade das possibilidades válidas. A pontuação três correspondia ao Acerto Parcial 3, no qual o aluno respondia com mais da metade das possibilidades, indicando perceber a necessidade de esgotar o todo, embora não conseguisse ainda sistematicamente apresentar todas as possibilidades, e a pontuação quatro era o Acerto Total do problema, ou seja, eram apresentadas todas as possibilidades corretas.

Buscando exemplificar melhor cada uma dessas categorias, seguem-se alguns extratos das respostas dos alunos, organizadas nas categorias de pontuação. A Figura 5 mostra a resposta de um aluno que não apresentou em sua resolução uma relação combinatória.

Pontuação 0 – Erro

Figura 5: Resposta errada do Aluno 74 – Teste Tipo 4 (Permutação x Combinação).



2. Quatro amigos (Felipe, Sandra, Henrique e Ana) vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?

podem ser formado de 30, 10, 11, 12
14, 5, 4 e de outra tipoem

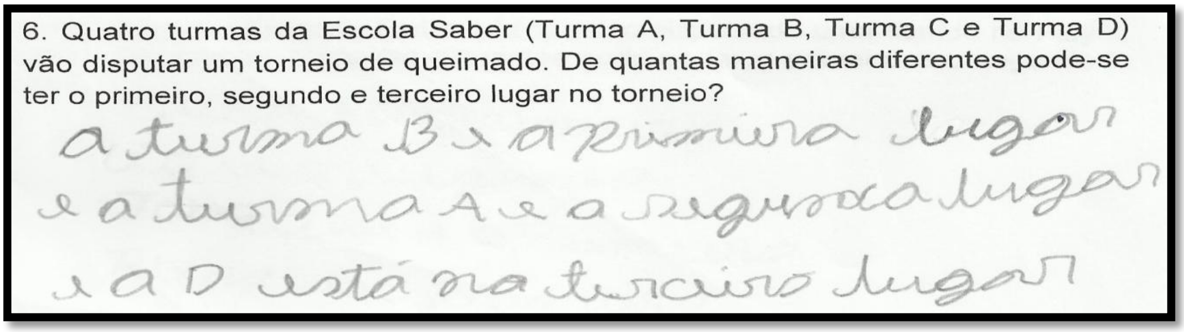
O aluno apresenta uma resposta que não atende ao que foi solicitado no problema. Registra diversos números sem aparente relação com a situação combinatória, respondendo a um problema de *combinação* com três etapas de escolha, cuja solução correta seriam quatro possibilidades.

Na Figura 6, é possível visualizar a solução de um aluno que apresentou uma única possibilidade de combinação (Turma B – 1º lugar, Turma A – 2º lugar e Turma D – 3º lugar), respondendo a um problema de *arranjo* com três etapas de escolha, cuja solução correta seriam 24 possibilidades. O aluno compreende a situação e apresenta uma possibilidade correta, mas não evidencia compreensão da necessidade de esgotar as possibilidades, no caso, apresentando as 24 maneiras possíveis de se ter 1º, 2º e 3º lugar a partir de quatro elementos.

Pontuação 1 – Acerto parcial 1

(com apenas uma possibilidade apresentada)

Figura 6: Resposta incompleta do Aluno 31 – Teste Tipo 2 (Arranjo x Produto Cartesiano).


6. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

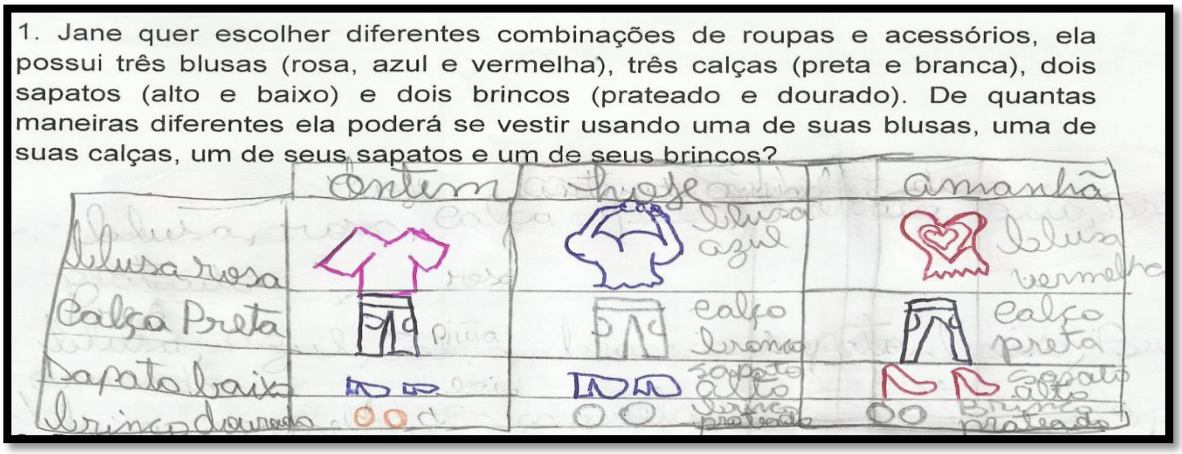
a turma B é a primeira lugar
e a turma A é a segunda lugar
e a D está na terceiro lugar

Na Figura 7, pode-se observar que o aluno apresenta três possibilidades de combinação de roupas e acessórios (ontem, hoje e amanhã), utilizando a representação simbólica *desenho* para responder a um problema de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha, cuja solução correta seriam 24 possibilidades. O aluno não se contenta em apresentar uma possibilidade única, mas não evidencia perceber a necessidade de esgotar todas as possibilidades.

Pontuação 2 – Acerto parcial 2

(apresentação de duas até a metade das possibilidades)

Figura 7: Resposta incompleta do aluno 23 – Teste Tipo 1 (Produto Cartesiano x Permutação).


1. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui três blusas (rosa, azul e vermelha), três calças (preta e branca), dois sapatos (alto e baixo) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

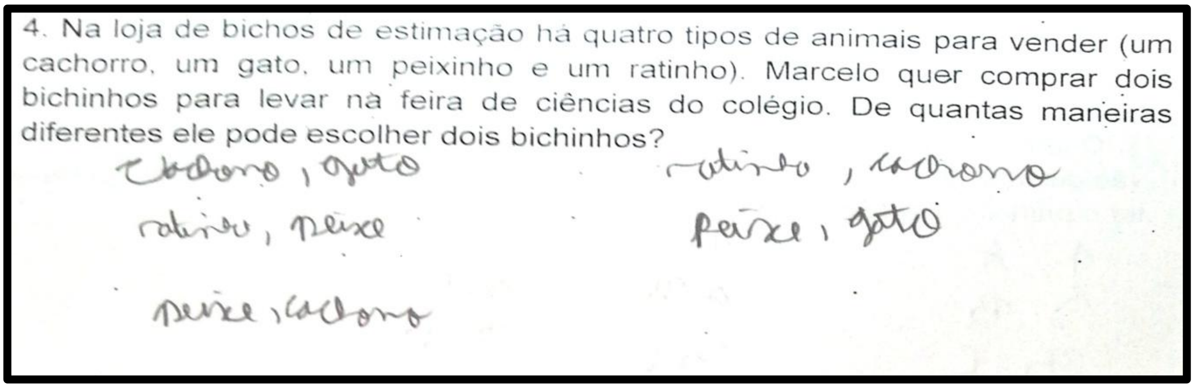
	ontem	hoje	amanhã
blusa rosa		blusa azul	blusa vermelha
calça preta		calça branca	calça preta
sapato baixo		sapato alto	sapato alto
brinco dourado		brinco prateado	brinco prateado

Através da Figura 8, é possível ver que o aluno apresenta cinco possibilidades de combinar os animais que poderão ser comprados, utiliza a representação simbólica *listagem* para responder a um problema de *combinação* com duas etapas de escolha, cuja solução correta seria seis possibilidades. O aluno não se contenta em apresentar poucos casos, mas não há evidência de compreensão de que a resolução só será completa quando todas as possibilidades forem consideradas.

Pontuação 3 – Acerto parcial 3

(com mais da metade das possibilidades apresentadas)

Figura 8: Resposta incompleta do Aluno 99 – Teste Tipo 5 (Arranjo x Combinação).

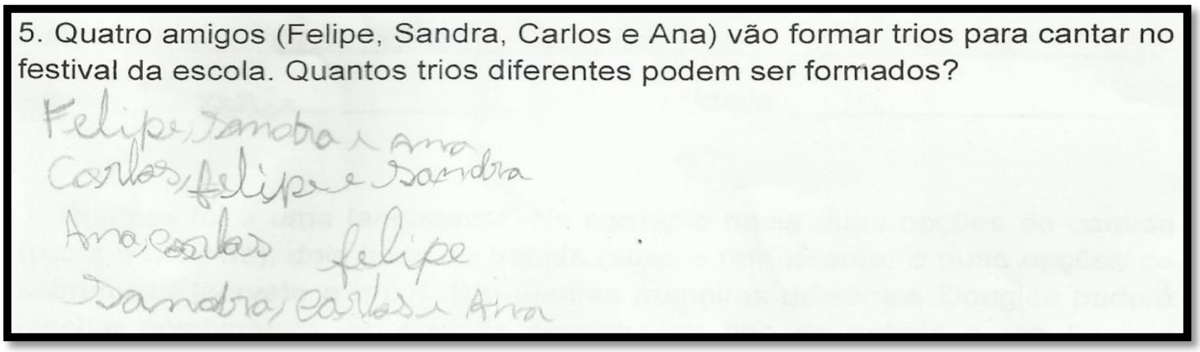

4. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

Cachorro, gato
ratinho, cachorro
ratinho, peixe
peixe, gato
peixe, cachorro

O aluno, representado na Figura 9, apresenta todas as possibilidades de combinar os amigos para formar trios, utilizando a representação simbólica *listagem* para responder a um problema de *arranjo* com três etapas de escolha, cuja solução está correta e são quatro possibilidades. Houve, nesse caso, preocupação do aluno em apresentar todos os casos possíveis.

Pontuação 4 – Acerto Total

Figura 9: Resposta correta do Aluno 112 – Teste Tipo 6 (Produto Cartesiano, Combinação e Arranjo)


5. Quatro amigos (Felipe, Sandra, Carlos e Ana) vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?

Felipe, Sandra e Ana
Carlos, felipe e Sandra
Ana, carlos felipe
Sandra, carlos e Ana

3.2 Resultados e Análises

Com as categorias formadas, as respostas dos alunos foram organizadas segundo as mesmas. Verificou-se que 24 alunos responderam ao teste Tipo 1; 25 alunos responderam ao teste Tipo 2; 16 alunos responderam ao teste Tipo 3; 21 alunos responderam ao teste Tipo 4; 22 alunos responderam ao teste Tipo 5 e 20 alunos responderam ao teste Tipo 6. Dessa forma, no total, houve a participação de 128 alunos do 6º ano.

3.2.1 Pontuação média por tipo de teste

A média de pontos em cada um dos testes pode ser observada no Quadro 10.

Quadro 10: Média de pontos em cada tipo de teste

TIPO DE TESTE	COMPARAÇÃO	TOTAL DE PONTOS POSSÌVEIS	MÉDIA
1	PC X P	6 X 4 = 24	18,04
2	PC X A	6 X 4 = 24	12,32
3	PC X C	6 X 4 = 24	19,56
4	C X P	6 X 4 = 24	16,75
5	C X A	6 X 4 = 24	10,77
6	Etapas de escolha	8 X 4 = 32	27,35

PC = PRODUTO CARTESIANO P = PERMUTAÇÃO C = COMBINAÇÃO A= ARRANJO

A quantidade de problemas em cada teste variou. Nos testes Tipo 1, 2, 3, 4 e 5, como comparavam dois tipos de problemas e cada um apresentava duas, três e quatro etapas de escolha, haviam seis problemas, visto que 2 x 3 = 6, no qual, dois é a quantidade de tipos de problemas e três a quantidade de etapas de escolha. O total de pontos nesses testes era 24, uma vez que a pontuação máxima para cada um dos seis problemas era quatro.

Já no teste Tipo 6, que buscou comparar as etapas de escolha dentro do mesmo tipo de problema, no qual o resultado de todos os problemas era menor que uma dezena, para que o total de possibilidades não fosse considerado um impedimento à resolução, foram observados os tipos de problema que se adequavam ao objetivo proposto, que no caso seriam *produto cartesiano*, *combinação* e só duas e três etapas de *permutação*. Sendo assim, o teste Tipo 6 apresentou oito problemas, três problemas de *produto cartesiano*, três de *combinação* e dois de *permutação*. A pontuação máxima que um aluno poderia alcançar em um problema era quatro, a pontuação para acerto total, a pontuação máxima possível, no teste Tipo 6, era 32 (8 x 4 = 32). A pontuação máxima serve de base para compreender a média obtida em cada tipo de teste.

Como o quantitativo de alunos variou de um tipo de teste para outro e a quantidade de problemas não foi a mesma em todos os testes, transformou-se os dados coletados em percentuais para que a comparação entre os testes fossem melhor visualizada. Dessa forma, o percentual médio de acertos no teste Tipo 1 foi de 74%, no teste Tipo 2 foi 51%, no teste Tipo 3 foi 80%, no teste Tipo 4 foi 74%, no teste Tipo 5 foi 44% e no teste Tipo 6 foi de 85%. O percentual de acerto da maioria dos testes foi acima de 70%, como foram nos testes Tipo 1, 3, 4 e 6. Somente os testes Tipo 2 e 5 apresentaram um percentual de ordem de grandeza diferente, 51% e 44% respectivamente.

Pode-se constatar, através de análises sobre os diversos tipos de testes, que tanto através da prova paramétrica de amostras independentes como da prova paramétrica ANOVA com post hoc Tukey, que ao ser comparado, o teste Tipo 2 apresenta diferenças significativas com todos os testes, menos com o teste Tipo 5. Isso porque, ambos apresentaram baixos desempenhos. Essa diferença entre os testes pode ser justificada pelo número total de possibilidades dos problemas, visto que, os testes Tipo 2 e 5 comparam problemas de *arranjo* com demais problemas e os problemas de *arranjo* com quatro etapas de escolha possuem resultado fixo em 120 possibilidades. Dessa forma, o elevado valor no total das possibilidades desses tipos de problemas que foram comparados nos testes Tipo 2 e 5 pode ter gerado dificuldades ao desempenho dos alunos.

Um dos testes que apresentou os mais baixos percentuais de desempenho foi o teste Tipo 2, que apresentou média de acertos de 12,32 pontos, de possíveis 24, uma das médias mais baixas, se comparada aos demais testes. Justifica-se essa queda no desempenho dos alunos ao fato de, nesse tipo de teste, os problemas de *arranjo* apresentarem grandeza numérica acima de 100, como no caso dos problemas com quatro etapas de escolha.

Infelizmente, as grandezas numéricas não puderam ser as mesmas em todos os tipos de testes, pois em alguns problemas, como *arranjo* e *permutação*, os resultados são fixos de acordo com as etapas de escolha (como já foi explicado anteriormente), tornando os resultados dos problemas de *arranjo* em cada etapa (6, 24 e 120) superiores aos resultados dos demais testes. Como o teste Tipo 2 comparou *arranjo* com *produto cartesiano*, os problemas de *produto cartesiano* obtiveram os mesmos resultados, tornando o total de possibilidades possíveis, nesse tipo de teste, um pouco mais elevado, mas, mesmo assim, trazendo uma certa dificuldade, se comparado aos demais testes.

Ao comparar, através de uma análise de variância (ANOVA), com post hoc Tukey, os desempenhos dos estudantes nos diferentes testes, observou-se diferença significativa entre os testes Tipo 2 e Tipo 1 ($F(4,108) = -5,72; p = 0,005$). Como o teste Tipo 1 comparou o desempenho em problemas de *produto cartesiano* com o desempenho em *permutações* e o teste Tipo 2 comparou os desempenhos entre *produtos cartesianos* e *arranjos*, as diferenças significativas podem ser explicadas porque tantos os *produtos cartesianos* quantos os *arranjos* do teste Tipo 2 apresentavam maior número de possibilidades, quando comparado ao total de possibilidades dos problemas de *produto cartesiano* e *permutação* do teste Tipo 1.

Da mesma forma foram as diferenças entre o teste Tipo 2 e o teste Tipo 3 ($F(4,108) = -7,24; p = 0,001$). No teste Tipo 2 foram comparados *produtos cartesianos* e *arranjos,* enquanto que o teste Tipo 3 comparou os desempenhos nos problemas de *produto cartesiano* com *combinação.* As diferenças significativas podem ser explicadas novamente pelo elevado número de possibilidades apresentados pelos problemas do teste Tipo 2. A mesma diferença significativa também foi observada quando se comparou os testes Tipo 2 e Tipo 4 ($F(4,108) = -4,63; p = 0,049$). As comparações feitas no teste Tipo 4 foram entre os desempenhos nos problemas de *combinação* e *permutação* que apresentam total de possibilidades menor que nos problemas de *produto cartesiano* e *arranjo.* Não foram observadas diferenças significativas entre os testes Tipo 2 e Tipo 5 ($F(4,108) = 1,55; p = 0,880$), pois em ambos os testes foram comparados problemas de *arranjo*, ora com *produto cartesiano*, no teste Tipo 2, ora com *combinação*, no teste Tipo 5.

Outro teste que apresentou o mais baixo percentual de desempenho foi o teste Tipo 5, que apresentou média de acertos de 10,77 pontos de 24 possíveis, a mais baixa de todos os testes. Esse baixo desempenho pode estar associado ao elevado total de possibilidades presente nos problemas com quatro etapas de escolha, visto que, estes problemas apresentaram soluções de 120 e 126 possibilidades, para os problemas de *arranjo* e *combinação*, respectivamente. Não é possível diminuir o número total de possibilidades nos problemas de *arranjo*, visto que seus resultados são fixos de acordo com suas etapas de escolha.

Esses dados reforçam o que foi observado nos estudos de Moro e Soares (2006), Pessoa e Borba (2009), Pessoa e Santos (2011), Correa e Oliveira (2011), os quais relacionam o melhor desempenho dos alunos aos resultados dos problemas que apresentam uma menor quantidade de possibilidades. Assim sendo, os problemas com grandeza numérica elevada são considerados mais difíceis e apresentam desempenho mais baixo e, assim, esse resultado, observado no teste Tipo 5, era esperado.

Comparando o teste Tipo 5 com os demais testes, verificou-se que há algumas diferenças significativas. Através de uma análise de variância (ANOVA), com post hoc Tukey, comparou-se o teste Tipo 5 com o teste Tipo 1 ($F(4,108) = -7,27$; $p < 0,001$), depois o comparou com o teste Tipo 3 ($F(4,108) = -8,79$;$p < 0,001$), e, ainda, o comparou com o teste Tipo 4 ($F(4,108) = -6,18$; $p = 0,004$), e em todas essas comparações houve diferença significativa. Como o teste Tipo 5 e o teste Tipo 2 apresentam problemas de *arranjo* em suas comparações, diferença significativa não foi observada ($F(4,108) = -1,55$; $p = 0,880$).

3.2.2 Desempenho por tipos de problema e por etapas de escolha

Cada teste comparou dois tipos de problemas, que foram combinados de forma que todos pudessem ser comparados (a não ser os problemas de *permutação* e *arranjo* que fogem a essa regra, pois não puderam ser comparados), tendo o cuidado de controlar o total de possibilidades em cada etapa de escolha. Analisou-se cada tipo de teste através de percentuais de acertos do desempenho dos alunos em cada um deles. As médias de acerto foram comparadas através do *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS.

Os resultados serão apresentados pela ordem de comparação de cada teste, buscando primeiramente, comparar os problemas de *produto cartesiano* com todos os demais tipos de problema, visto que, os problemas de *produto cartesiano* são apresentados explicitamente aos alunos no Ensino Fundamental, enquanto que, os demais problemas, como, *arranjo*, *combinação* e *permutação*, somente são trabalhados explicitamente com os alunos no Ensino Médio, em geral no segundo ano.

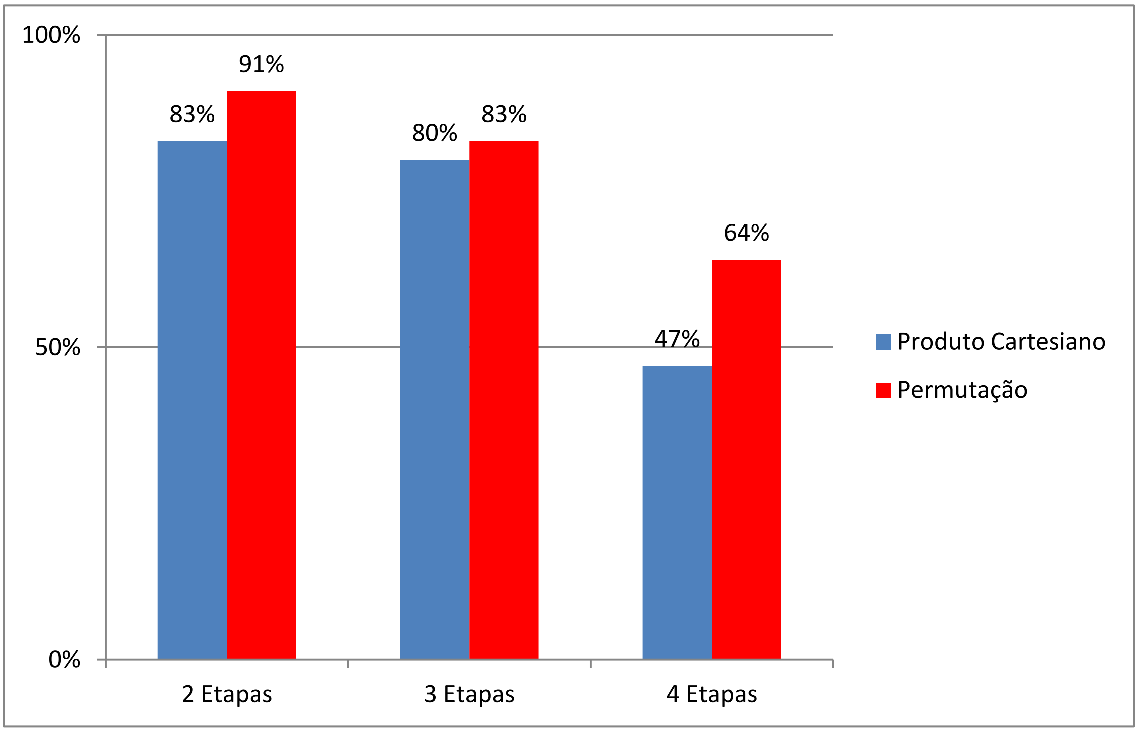
O primeiro teste foi assim intitulado, por trazer a comparação mais instigante dessa pesquisa de dissertação de mestrado. Isso porque, em estudos anteriores (como já dito), os problemas de *produto cartesiano* eram tidos como os mais fáceis e os de *permutação*, eram considerados mais difíceis por alunos nessa faixa etária (10, 11 anos). Dessa forma, o teste Tipo 1 comparou os problemas de *produto cartesiano* com *permutação*, o teste Tipo 2 comparou *produto cartesiano* com *arranjo* e o teste Tipo 3, comparou *produto cartesiano* com *combinação*. Já no teste Tipo 4, a comparação foi feita com os problemas de *combinação* e *permutação* e o teste Tipo 5 comparou os problemas de *combinação* e *arranjo*. O objetivo da comparação desses testes era visualizar se há diferença entre um problema e outro quando mantidas constantes as etapas de escolha.

3.2.2.1 O desempenho em problemas de *produto cartesiano* e *permutação* com duas, três e quatro etapas de escolha.

Ao observar os resultados do teste Tipo 1, foi possível verificar que o desempenho dos alunos foi superior nos problemas com duas etapas de escolha e que há uma decrescente queda nos percentuais de acertos parciais e totais quando observa-se os problemas com três e quatro etapas de escolha. No Gráfico 1 estes resultados podem ser observados, tanto para os problemas de *produto cartesiano* quanto para os de *permutação*.

Quando se observa as etapas de escolha, fica nítido que os problemas com mais etapas de escolha são mais difíceis de serem resolvidos do que os problemas com menos etapas, isso porque, o percentual do desempenho dos alunos nos problemas com quatro etapas de escolha é menor que o percentual do desempenho com duas e três etapas. Há uma queda decrescente entre os desempenhos em duas, três e quatro etapas de escolha.

Gráfico 1: Percentuais de acerto nos problemas de produto cartesiano e de permutação, com duas, três e quatro etapas de escolha



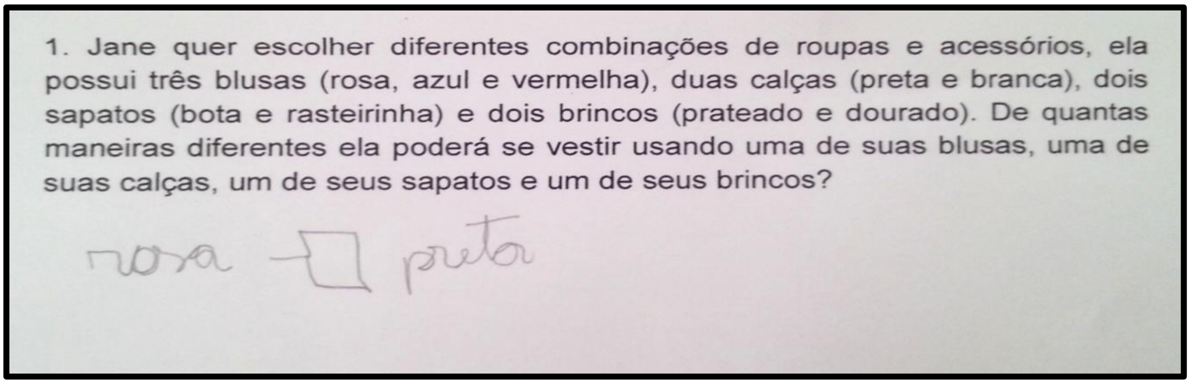
Os problemas de *produto cartesiano* e *permutação* foram comparados no teste Tipo 1 e, a partir do gráfico, é possível visualizar que nos problemas de *permutação*, em todas as etapas, obteve-se um percentual de acerto maior que os problemas de *produto cartesiano*, mas somente nos problemas com quatro etapas de escolha foi possível verificar uma maior diferença entre os tipos de problema. Esses resultados sinalizam em sentido contrário ao de estudos anteriores (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011; CORREA e OLIVEIRA, 2011; BARRETO, 2012; AZEVEDO, 2013) que apontaram *permutação* como mais difícil que *produto cartesiano*.

Por meio da prova paramétrica t-teste de amostras em pares verificou-se que os problemas de *permutação* foram significativamente mais fáceis de serem resolvidos do que os problemas de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha (t (23) = 2,713; p = 0,012). Não foram observadas diferenças estatisticamente significativas com duas ou três etapas de escolha, conforme será apresentado a seguir.

A partir desses resultados, é possível reforçar a hipótese da presente pesquisa de dissertação de mestrado, de que estudos anteriores apontavam que os problemas de *permutação* eram mais difíceis de serem respondidos por alunos dessa faixa etária, isso porque, estes estudos avaliaram, à luz do tripé de Vergnaud (1996), que os invariantes (propriedades e relações), de cada tipo de situação combinatória específica, podem ter influência nos desempenhos dos estudantes. Contudo, estes estudos, não observaram as etapas de escolha presente nos problemas combinatórios, nos quais, *produto cartesiano* sempre apresentava duas etapas e *permutação* sempre apresentava três ou quatro etapas de escolha. Uma vez controlado o número de etapas de escolha, *permutação* não necessariamente é o tipo de problema combinatório de mais difícil compreensão.

Buscando observar os erros cometidos pelos alunos nos problemas de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha, foi possível verificar que, dos sete alunos que erraram esse problema, quatro deixaram-no em branco e três esqueceram de combinar todas as etapas. Combinaram somente duas etapas, revelando que quanto maior o número de etapas de um problema, maior o grau de dificuldade que ele apresenta, como pode ser visto na Figura 10.

Figura 10: Resposta incorreta do Aluno 16 ao não considerar todas as etapas de escolha de um problema de produto cartesiano no teste Tipo 1


1. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui três blusas (rosa, azul e vermelha), duas calças (preta e branca), dois sapatos (bota e rasteirinha) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

rosa preta

Observa-se que o aluno começou a listar um tipo de blusa, no caso rosa, e combinou com um tipo de calça, no caso preta, contudo, não continuou a lista das demais peças que precisam ser combinadas, como o sapato e os brincos.

No problema de *permutação* com quatro etapas de escolha, são quatro elementos que precisam ser permutados, já no problema de *produto cartesiano* são quatro conjuntos de elementos que precisam ser combinados, tornando a possibilidade de erro no problema de *produto cartesiano* superior, como foi visto. Na *permutação* de quatro elementos pode ser mais fácil lembrar dos quatro elementos do que no *produto cartesiano* no qual se deve considerar os quatro distintos conjuntos de escolha.

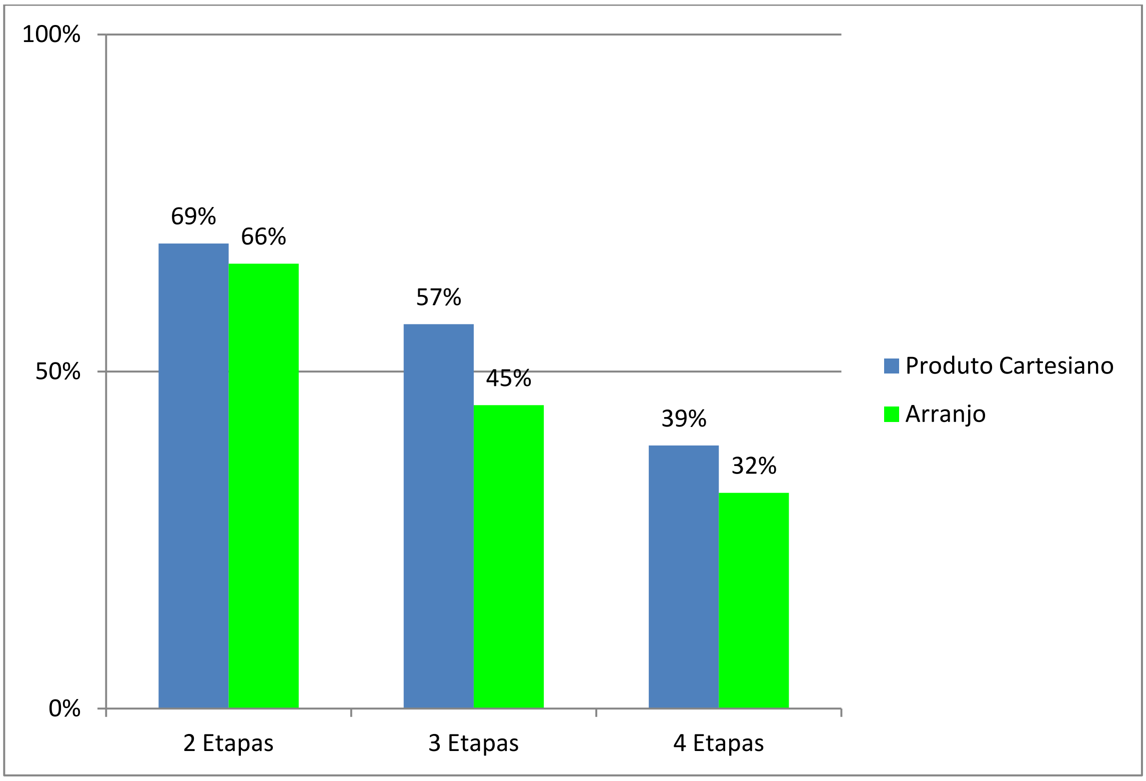
A maior dificuldade com o maior número de possibilidades (quatro) foi também observada em problemas de *permutação*. Nesses problemas os alunos utilizavam todos os elementos, mas possuíam dificuldades em encontrar todas as possíveis permutações dos quatro elementos. Entretanto, o percentual de acertos foi maior em *permutações* pelo fato dos alunos tenderem a considerar todos os quatro elementos e utilizarem alguma sistematização no levantamento das permutações possíveis e nos *produtos cartesianos* alguns dos elementos tendiam a ser esquecidos.

Já a comparação feita com duas e três etapas de escolha nos problemas de *produto cartesiano* e *permutação* não apontou nenhuma diferença significativa. Os desempenhos em *produto cartesiano* com duas etapas de escolha e em *permutação* com duas etapas, ao serem comparados, não apresentaram diferença estatisticamente significativa a 0,05 (t (23) = - 1,356; p = 0,188). Da mesma forma, os desempenhos em *produto cartesiano* e em *permutação*, ambos com três etapas de escolha, ao serem comparados, também não apresentam diferença significativa na prova paramétrica t-teste de amostras em pares (t (23) = -0,365; p = 0,718). Esses resultados evidenciam que com poucas etapas de escolha (duas ou três) esses dois tipos de problemas se equiparam em termos de facilidade para os alunos.

3.2.2.2 O desempenho em problemas de *produto cartesiano* e *arranjo* com duas, três e quatro etapas de escolha.

Buscou-se comparar também os problemas de *produto cartesiano* e *arranjo* no teste Tipo 2, como pode ser visto no Gráfico 2.

Gráfico 2: Percentuais de acerto nos problemas de produto cartesiano e de arranjo, com duas, três e quatro etapas de escolha



Estudos anteriores, como Pessoa e Borba, 2009; Pessoa e Santos, 2011; Correa e Oliveira, 2011; Barreto, 2012; Azevedo, 2013, mostraram que os problemas de *produto cartesiano* são mais fáceis que os problemas de *arranjo*. Com a comparação feita no teste Tipo 2 foi possível testar a hipótese de que essas diferenças também podem ser influenciadas pelo número de etapas de escolha.

Percebe-se que os problemas de *produto cartesiano*, em todas as etapas, obtêm um percentual de acerto maior do que o obtido em problemas de *arranjo*. Contudo, essa diferença de desempenho, entre um tipo de problema e outro, não é significativa, de acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares. Tanto nos problemas com duas etapas de escolha (t (24) = 0,345; p = 0,733), como nos problemas com três etapas de escolha (t (24) = 1,953; p = 0,063) e também na comparação dos problemas com quatro etapas de escolha (t (24) = 1,098; p = 0,283), não se verificou diferenças significativas entre os problemas de *produto cartesiano* e *arranjo* em nenhuma das etapas. Isso evidencia que controlados os números de etapas de escolha, esses dois tipos de problemas se equiparam em nível de dificuldade para estudantes do Ensino Fundamental, diferindo-se dos resultados de estudos anteriores (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011; CORREA e OLIVEIRA, 2011; BARRETO, 2012; AZEVEDO, 2013), nos quais, não houve controle de número de etapas de escolha.

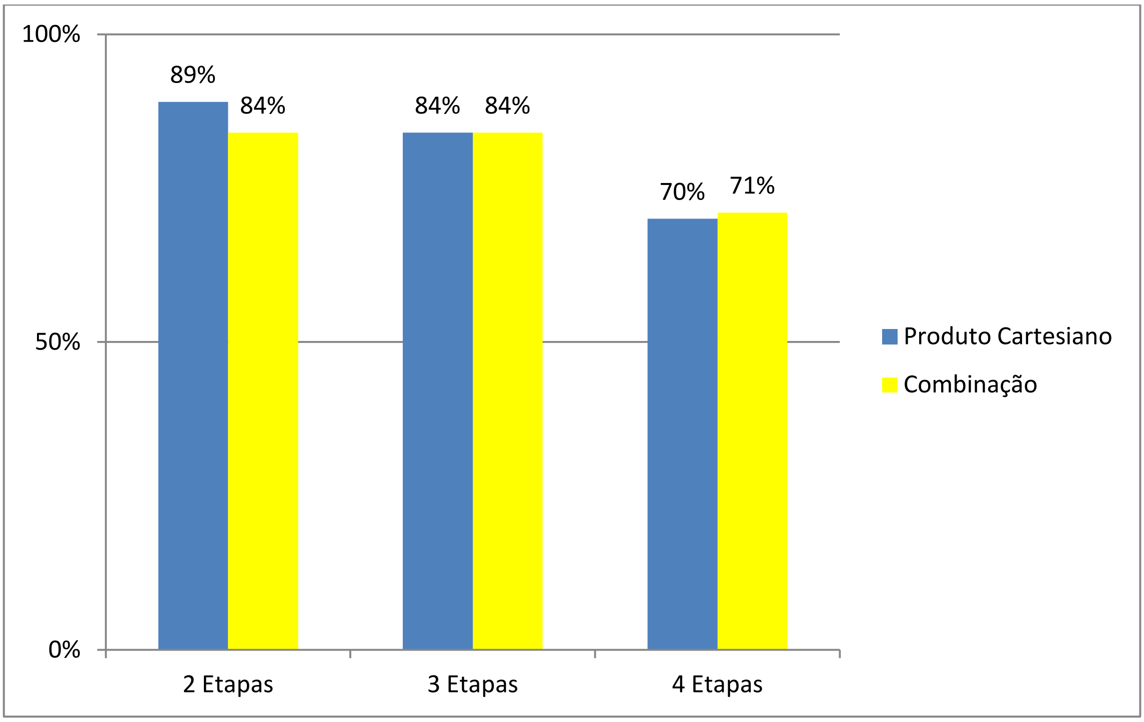
3.2.2.3 O desempenho em problemas de *produto cartesiano* e *combinação* com duas, três e quatro etapas de escolha.

Outra comparação realizada foi através do teste Tipo 3 com os problemas de *produto cartesiano* e *combinação*, como pode ser visto no Gráfico 3.

A média de acertos nesse tipo de teste foi de 19,56 pontos dentre possíveis 24, uma das médias mais altas, se comparada aos demais testes. Essa elevada média pode estar associada ao total de possibilidades possíveis de serem combinadas em cada tipo de problema, visto que a grandeza numérica desse tipo de teste não ultrapassou uma dezena.

De acordo com os estudos de Moro e Soares (2006), Pessoa e Borba (2009) e Pessoa e Santos (2011), o elevado índice de acertos dos problemas está associado aos resultados que apresentam uma menor quantidade de possibilidades. Para essas autoras, suas pesquisas revelaram que são considerados mais difíceis os problemas que apresentam uma maior quantidade de possibilidades. Sendo assim, os problemas com baixa grandeza numérica são mais fáceis e os problemas com grandeza numérica elevada são considerados mais difíceis e apresentam desempenho mais baixo, já que os participantes utilizam procedimentos não formais – como a listagem – e fica mais difícil chegar a um número elevado de possibilidades por estes meios. A conclusão das pesquisas citadas acima é a mesma encontrada na presente dissertação de mestrado.

Gráfico 3: Percentuais de acerto nos problemas de produto cartesiano e de combinação, com duas, três e quatro etapas de escolha

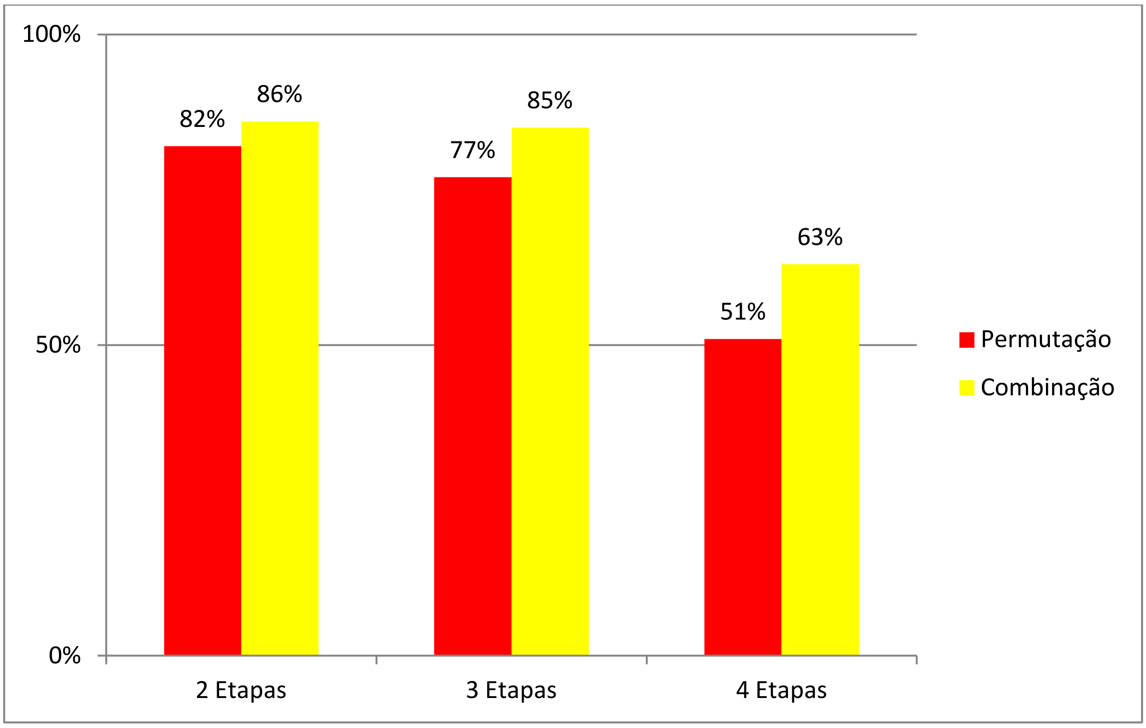


A comparação feita entre os problemas de *produto cartesiano* e *combinação* revela que há pouca diferença percentual entre um tipo de problema e outro. Não foram observadas diferenças significativas, de acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares, em nenhuma das etapas. Com duas etapas de escolha (t (24) = 0,345; p = 0,733), com três etapas (t (24) = 1,953; p = 0,063) e com quatro etapas de escolha (t (24) = 1,098; p = 0,283), não foram observadas diferenças significativas de desempenho entre problemas de *produto cartesiano* e combinação, quando as etapas de escolha foram controladas.

3.2.2.4 O desempenho em problemas de *combinação* e permutação com duas, três e quatro etapas de escolha.

Analisou-se também os problemas do teste Tipo 4, como pode ser observado no Gráfico 4.

Gráfico 4: Percentuais de acerto nos problemas de permutação e de combinação, com duas, três e quatro etapas de escolha



A comparação feita entre os problemas revelou, de modo geral, um desempenho melhor nos problemas de *combinação* quando comparados aos problemas de *permutação*.

De acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares há diferença significativa entre responder um tipo de problema e outro. Essa diferença foi verificada somente nos problemas com três e quatro etapas de escolha. Não se observou diferença significativa de desempenho entre os problemas com duas etapas de escolha (t (20) = - 0,730; p = 0,474). Com três etapas (t (20) = - 3,627; p = 0,002) e com quatro etapas de escolha (t (20) = - 2,750; p = 0,012), foi observado um melhor desempenho, estatisticamente significativo, com relação aos problemas de *combinação*.

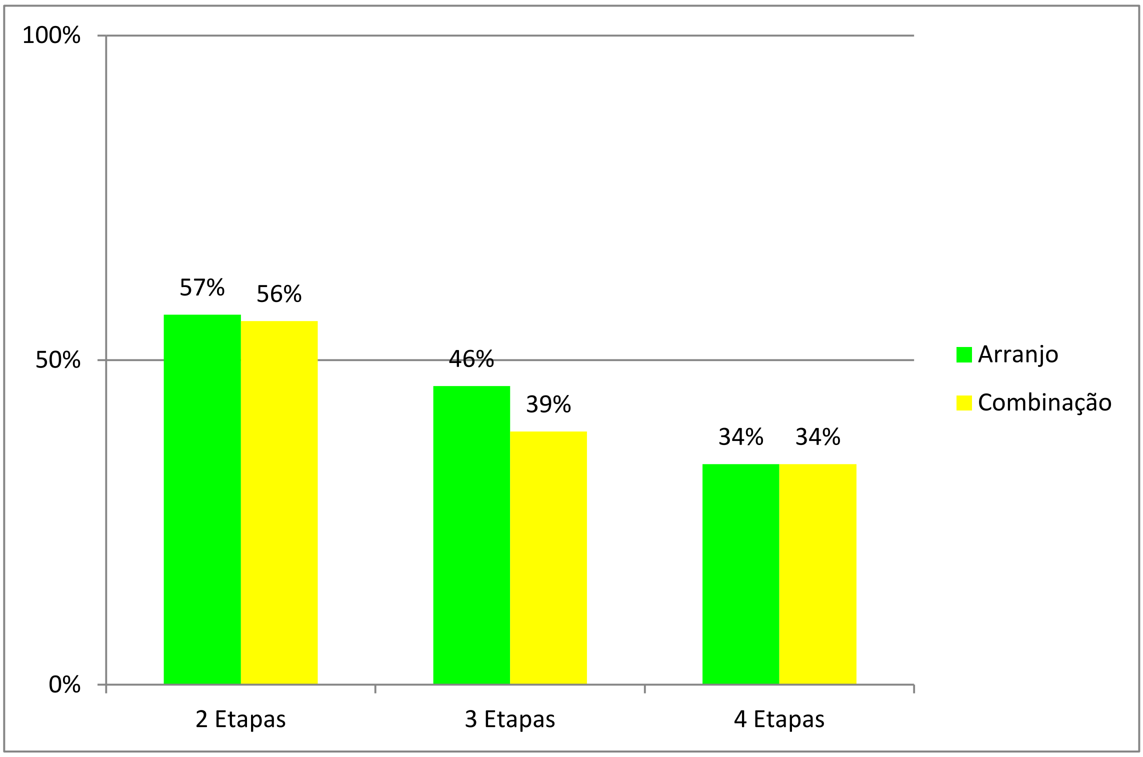
A facilidade em responder aos problemas de *combinação* pode estar diretamente relacionada à baixa grandeza numérica apresentada nesses problemas. É certo, que a diferença entre os resultados de *permutação* e os resultados de *combinação* não são grandes, porém essa pequena variação pode ter beneficiado o desempenho em um dos tipos de problemas. Essa mesma diferença entre os problemas de *combinação* e *permutação* foi verificada nos estudos de Pessoa e Borba (2009), Pessoa e Santos (2011), Correa e Oliveira (2011), Barreto (2012) e Azevedo (2013), nos quais, *permutação* é o problema que apresenta os mais baixos desempenhos.

Durante a elaboração de cada tipo de teste, tomou-se o cuidado de igualar ou deixar similares os resultados de cada tipo de problema, contudo, como os problemas de *permutação* têm seus resultados fixos de acordo com suas etapas de escolha e os problemas de *combinação* não possuem tanta flexibilidade em suas combinações, como já descrito no capítulo anterior, foi necessário buscar um valor similar para cada etapa. Os problemas de *combinação* com três etapas de escolha apresentaram como resultado a solução de quatro possibilidades, enquanto que os problemas de *permutação* com três etapas sempre apresentam o total de seis possibilidades em suas resoluções. Essa mínima diferença de duas combinações nos problemas de três etapas e a diferença de nove possibilidades para os problemas com quatro etapas de escolha (combinações com 15 possibilidades e permutações com 24) foram suficientes para tornar os problemas de *combinação* mais fáceis de serem resolvidos do que os problemas de *permutação*.

3.2.2.5 O desempenho em problemas de *combinação* e *arranjo* com duas, três e quatro etapas de escolha.

Comparou-se os problemas de *arranjo* e *combinação* no teste Tipo 5 que pode ser visto no Gráfico 5, no qual, os problemas de *arranjo* obtêm um percentual de acerto maior nas etapas dois e três. Já nos problemas com quatro etapas de escolha, o desempenho é igual entre os problemas de *arranjo* e de *combinação*. Porém, analisou-se a significância dessa diferença, entre um tipo de problema e outro através da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, não revelando grau de significância, em todas as etapas de escolha comparadas. (Duas etapas de escolha: t (21) = 0,196; p = 0,847; Três etapas de escolha: t (21) = 0,880; p = 0,389; Quatro etapas de escolha: t (21) = 0,000; p = 1,000).

Gráfico 5: Percentuais de acerto nos problemas de *arranjo* e de *combinação*, com duas, três e quatro etapas de escolha

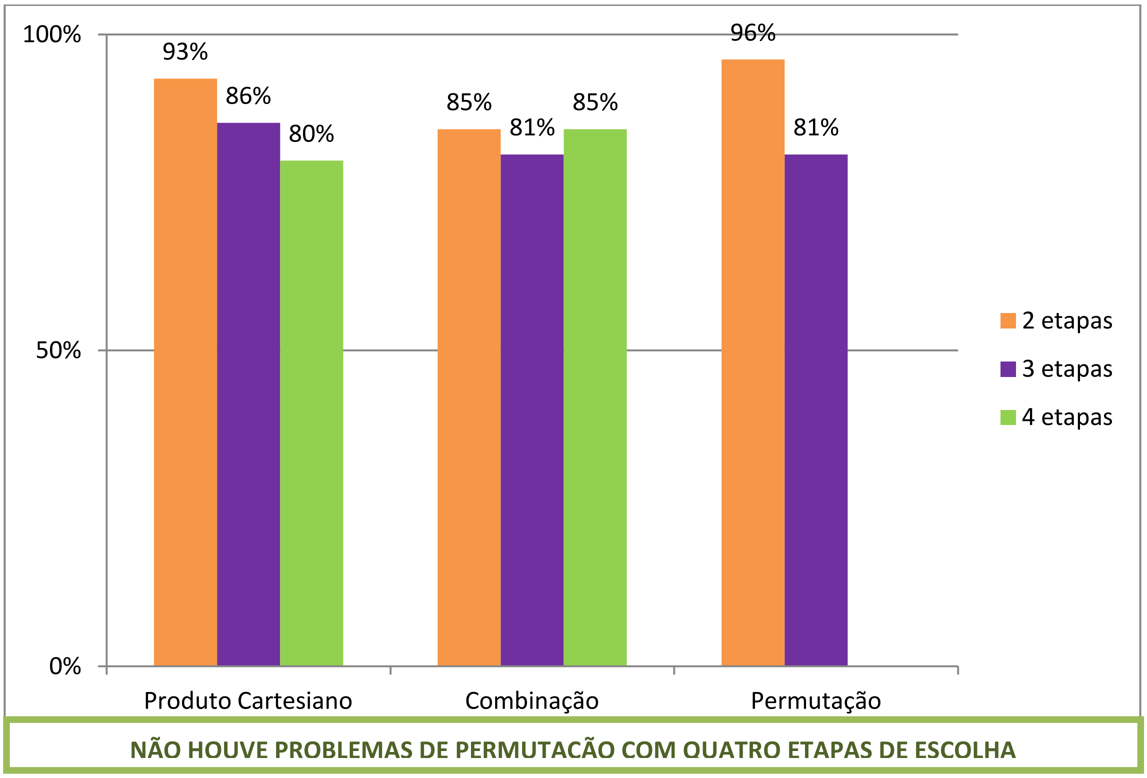


Portanto, não há um tipo de problema que seja considerado mais fácil ou mais difícil que o outro, responder problemas de *arranjo* e de *combinação* apresenta o mesmo grau de dificuldade.

3.2.2.6 Os desempenhos por etapas de escolha.

Realizadas todas as comparações possíveis, tanto entre os diferentes tipos de testes, como entre os diversos tipos de problemas, voltou-se o olhar para a influência das etapas de escolhas num mesmo problema quando se mantém igual ou similar o total de possibilidades em todas as etapas. Esse tipo de teste controlou os resultados dos problemas para que, tanto no problema com duas etapas de escolha, como no problema com três e quatro etapas, o total de possibilidades fosse o mesmo, ou similar. Assim, seria possível visualizar o efeito das etapas de escolha com o controle das grandezas numéricas. Nos testes anteriores, o número de etapas de escolha tinham números de possibilidades semelhantes ao longo dos problemas e agora dentro de um mesmo problema há o mesmo, ou muito semelhante número de possibilidades. A justificativa desse tipo de teste conter oito problemas combinatórios, enquanto os demais apresentavam seis, foi descrita de forma detalhada no Capítulo 2, Método de Estudo. Essa comparação foi possível de ser verificada através do teste Tipo 6, como pode ser visto no Gráfico 6.

Gráfico 6: Percentuais de acerto em cada etapa de escolha nos problemas de *produto cartesiano, combinação* e *permutação*



Observando os problemas de *produto cartesiano*, é possível, perceber um decrescente desempenho à medida que as etapas de escolha aumentam, tornando claro que, responder problemas com duas etapas de escolha é mais fácil que responder problemas com três etapas e estes, por sua vez, são mais facilmente resolvidos do que problemas com quatro etapas de escolha.

Ressalta-se que o número de possibilidades nessas etapas foi controlado. Os problemas de *produto cartesiano* apresentaram resultado oito, em todas as etapas de escolha, os problemas de *combinação*, apresentaram totais de possibilidade 6, 4 e 5 em duas, três e quatro etapas, respectivamente, e os problemas de *permutação*, apresentaram 2 e 6, como respostas para duas e três etapas. Não foram apresentadas quatro etapas de escolha, pois o valor do total de possibilidades não seria de valor igual ou similar aos das outras etapas, não atendendo ao objetivo desse tipo de teste. Por essa mesma razão, não foram controlados os problemas de *arranjo*, pela falta de flexibilidade de seus resultados em cada etapa de escolha. Dessa forma, com o número de possibilidades controlado, há evidências de que o número de etapas de escolha influenciou o desempenho dos alunos.

Quando comparado, por meio da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, verificou-se diferença significativa entre os desempenhos nos problemas de *produto cartesiano* de duas etapas e quatro etapas ($t(19) = 3{,}584$; $p = 0{,}002$) e entre os problemas de três etapas e quatro etapas ($t(19) = 2{,}517$; $p = 0{,}021$). Entretanto, não foram observadas diferenças significativas nos desempenhos entre problemas de duas e três etapas de escolha ($t(19) = 1{,}831$; $p = 0{,}083$).

A partir desses dados é possível verificar a influência das etapas de escolha no problema de *produto cartesiano*, tido como um dos tipos de problemas mais fáceis de serem resolvidos, de acordo com Pessoa e Borba (2009), Pessoa e Santos (2011), Correa e Oliveira (2011), Barreto (2012) e Azevedo (2013), nos quais, *produto cartesiano* é o problema que apresenta os melhores desempenhos.

Quando se observa os problemas de *combinação*, é possível visualizar que, as diferenças percentuais entre uma etapa e outra são pequenas e que os problemas com quatro etapas de escolha não apresentam um desempenho mais baixo, se comparado com as demais etapas. Através da prova paramétrica t-teste de amostras em pares não foi verificada influencia das etapas de escolha para este tipo de problema.

Comparando os problemas de *combinação* de duas e três etapas de escolha ($t(19) = 0{,}645$; $p = 0{,}527$), duas e quatro etapas ($t(19) = 0{,}719$; $p = 0{,}481$) e três e quatro etapas de escolha ($t(19) = 0{,}000$; $p = 1{,}000$), não foram observadas diferenças significativas de desempenho entre uma etapa de escolha e outra. Os problemas de *combinação* podem apresentar mais complexidade na natureza de seu tipo de problema (suas propriedades e relações) e o nível de dificuldade é basicamente o mesmo, independente do número de etapas de escolha.

Observando também os problemas de *permutação*, não houveram diferenças significativas em desempenho entre responder com duas ou três etapas de escolha, visto que, *permutação* com duas etapas e com três etapas de escolha, ao serem comparadas, também obtiveram grau de significância superior a 0,05 (t (19) = 1,993; p = 0,061). Nos problemas de *permutação*, o número de etapas de escolha não influenciou sobre o desempenho, mas outras explicações também devem ser consideradas, como as propriedades e relações específicas de cada tipo de problema, bem como o número de etapas resultantes.

3.2.3 Desempenho por gênero

Embora, não houvesse nenhuma hipótese referente a diferenças de desempenho entre meninas e meninos, realizou-se análise para confirmar a não diferença de desempenho por gênero. Não foi observada diferença significativa de desempenho por gênero (F(4,108) = 0,012; p = 0,912). Portanto, meninos e meninas apresentaram o mesmo desempenho nos problemas combinatórios.

Observou-se também a interação de variáveis: tipo de prova com gênero. Como esperado, não houve diferenças entre meninos e meninas para responder nenhum dos diferentes tipos de testes, (F(4,108) = 0,403; p = 0,806).

Depois de analisar os dados coletados, voltou-se o olhar para as estratégias utilizadas pelos alunos para responder cada tipo de teste. Foram observadas essas estratégias em função do número de etapas de escolha, do tipo de problema e do número total de possibilidades.

3.2.4 Estratégias de resolução

Os alunos, em conjunto, utilizaram diversas estratégias, por intermédio de representações simbólicas variadas, para solucionarem os problemas que lhes foram propostos. Algumas destas estratégias não possibilitaram o acerto total das possibilidades solicitadas nos problemas combinatórios, enquanto que outras foram eficazes e permitiram ao aluno obter a resposta correta à situação proposta.

Buscou-se verificar a relação entre as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos do presente estudo com o tipo de problema combinatório, bem como com as etapas de escolha. Objetivou-se observar se os alunos variam suas estratégias de acordo com o tipo de problema que resolvem – *arranjo*, *combinação*, *permutação* ou *produto cartesiano* – ou se variam as estratégias em função do número de etapas de escolha (dois, três ou quatro) da situação.

Percebeu-se que não há aparente relação entre um determinado tipo de problema e uma representação simbólica ou estratégia específicas, como também não há relação direta entre estratégias utilizadas especificamente para duas, três ou quatro etapas de escolha.

O que se percebeu foi que as estratégias variavam de acordo com o participante, ou seja, em geral, cada aluno usou a mesma representação simbólica e a mesma estratégia para responder todos os problemas de seu teste. Observou-se que 82% dos alunos utilizaram uma mesma representação simbólica e estratégia em todos os tipos de problema e em todas as etapas de escolha. O aluno que iniciou usando uma representação escrita como a listagem, por exemplo, tendia a utilizá-la em todos os problemas. Com isso, observa-se que os alunos puderam perceber que há algo em comum entre os diferentes problemas combinatórios.

As estratégias mais utilizadas na presente dissertação de mestrado foram: cálculo (adição, subtração, multiplicação ou divisão), listagem, quadro, desenho e uso de fórmulas. A tendência era que o aluno escolhesse uma destas estratégias e a utilizasse em todos os problemas que resolveu.

De acordo com Pessoa e Borba (2009, p.28), os alunos podem apresentar as seguintes formas de resolução para os problemas combinatórios:

> · **Realiza adição, subtração ou divisão,** utilizando os valores apresentados no enunciado. A resposta, geralmente, é *incorreta sem relação.*
> · **Desenha ou escreve** possibilidades, podendo a resposta ser correta ou incorreta, havendo, ou não, o esgotamento de todas as possibilidades.
> · **Relaciona o problema a um produto,** podendo a multiplicação ser adequada ou inadequada.

Essa organização, apresentada pelas autoras, foi utilizada no estudo de Pessoa (2009) e posteriormente, utilizada também por Azevedo (2013) para classificar a variedade de respostas que os alunos utilizaram ao deparar-se com problemas combinatórios. No Quadro 11, apresenta-se a organização usada por Azevedo, 2013 (baseada em PESSOA, 2009) para os diferentes tipos de estratégias de resolução.

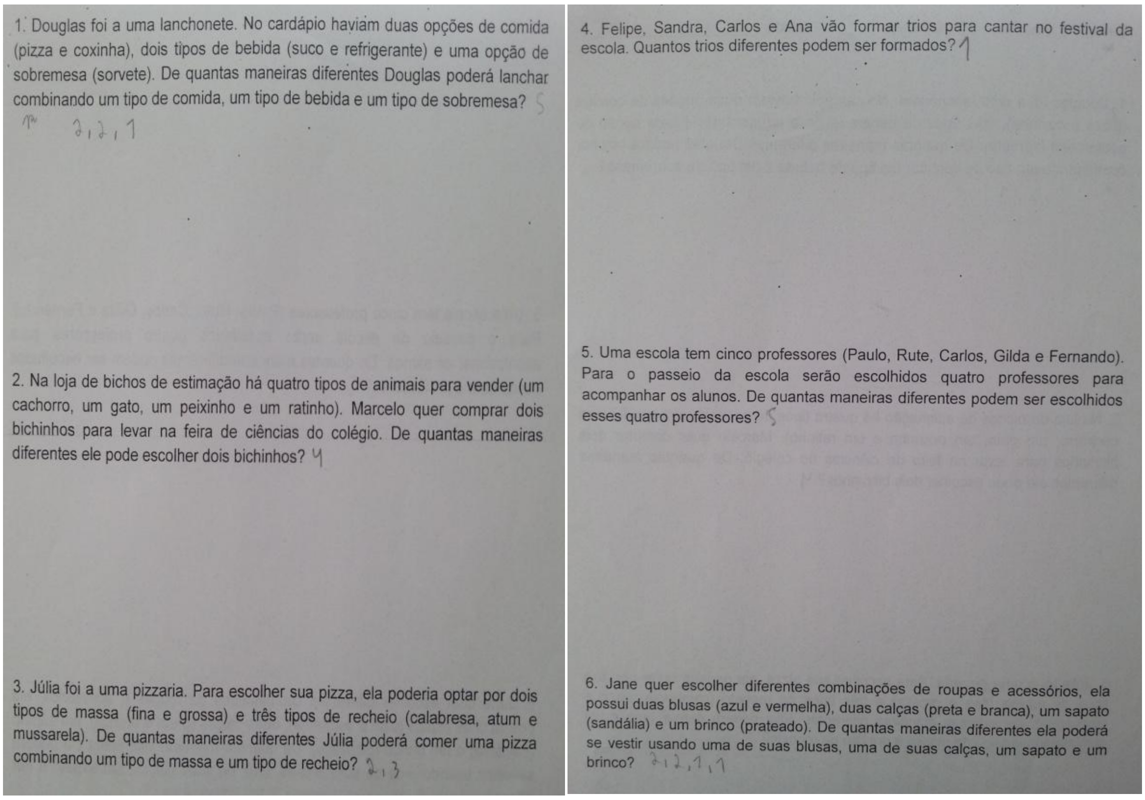
Quadro 11: Estratégias de resolução, segundo Azevedo (2013)

1. Não explicitou um tipo de estratégia ou representação simbólica.	O aluno apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta. Desse modo fica difícil precisar com certeza qual representação ou estratégia foi utilizada para a resolução.
2. Adição/Subtração	O aluno utilizou os valores apresentados no enunciado numa destas operações. A resposta, geralmente, é *incorreta sem relação.*
3. Desenho	O aluno desenhou as possibilidades, utilizando-se dos dados, podendo a resposta ser correta, parcialmente correta ou incorreta.
4. Árvore de Possibilidades	O aluno construiu uma *árvore de possibilidades*, podendo apresentar uma resposta *correta, parcialmente correta* ou *incorreta*, *com ou sem sistematização dos elementos.*
5. Diagrama/ Quadro	O aluno construiu um quadro ou um diagrama para representar o processo de solução. Pode haver resposta *correta, parcialmente correta,* ou *incorreta*, *com* ou *sem sistematização*.
6. Listagem de possibilidades	O aluno listou as possibilidades, podendo a resposta ser correta parcialmente correta ou incorreta, havendo, ou não, o estabelecimento de relação e *com ou sem sistematização dos elementos.*
7. Adição Inadequada de Parcelas repetidas	O aluno utilizou a adição de parcelas repetidas, mas esta é inadequada para o que o problema solicita. A resposta é *incorreta sem relação*.
8. Adição Adequada de Parcelas repetidas	O aluno percebeu que pode utilizar uma *adição de parcelas* repetidas para resolver o problema, geralmente substituindo a *multiplicação adequada*. A resposta pode ser *correta, parcialmente correta* ou *incorreta*.
9. Multiplicação Inadequada	O aluno relacionou o problema a um produto, entretanto, em situações nas quais ela não se aplica.
10. Multiplicação Adequada	O aluno relacionou o problema a um produto, com a possibilidade correta de seu uso.
11. Percepção da Regularidade	O aluno iniciou a resolução através de uma representação qualquer, geralmente a *listagem* ou a *árvore de possibilidades* ou o *quadro/diagrama* e, no decorrer desta, percebeu que pode generalizar as descobertas iniciais para os casos seguintes. A resposta pode ser *correta, parcialmente correta* ou *incorreta*.

Nem todas as representações simbólicas classificadas pela autora citada foram encontradas no presente estudo. Com base nesses 11 tipos de representações simbólicas, se buscou entre os estudantes, extratos das resoluções utilizadas ao responderem os diferentes tipos de testes.

Alguns alunos não explicitaram a estratégia utilizada, tipo de resposta que pode ser visualizado na Figura 11. Quando o aluno respondeu ao problema sem revelar o tipo de estratégia empregado para chegar ao total de possibilidades, ele, em geral, utilizou essa mesma forma de responder em todo teste.

Figura 11: Respostas do Aluno 58 – sem explicitação de estratégia



1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam duas opções de comida (pizza e coxinha), dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e uma opção de sobremesa (sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa? 5
2,2,1

2. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? 4

3. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (fina e grossa) e três tipos de recheio (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? 2, 3

4. Felipe, Sandra, Carlos e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? 4

5. Uma escola tem cinco professores (Paulo, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? 5

6. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui duas blusas (azul e vermelha), duas calças (preta e branca), um sapato (sandália) e um brinco (prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um sapato e um brinco? 2, 2, 1, 1

O aluno, como pode ser visto na Figura 11, apresentou somente a resposta que considerou ser a certa, não apresentando nenhum tipo de cálculo, desenho ou listagem que indique o caminho percorrido para chegar ao resultado escrito, embora se possa deduzir que o aluno apenas registrou números citados nos enunciados dos problemas.

As respostas corretas aos problemas acima mostrados podem ser vistas na Tabela 2.

Tabela 2: Respostas aos problemas do teste Tipo 3.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Produto Cartesiano	3 etapas	4	2,2,1
2. Combinação	2 etapas	6	4
3. Produto Cartesiano	2 etapas	6	2,3
4. Combinação	3 etapas	4	1
5. Combinação	4 etapas	5	**5**
6. Produto Cartesiano	4 etapas	4	2,2,1,1

Dentre as respostas corretas, o aluno da Figura 11, apresentou acerto somente no problema de combinação com quatro etapas de escolha. Nos demais resultados, o aluno apresenta valores que não correspondem à totalidade de possibilidades dos problemas.

Muitos alunos podem tentar resolver os problemas que julgam fáceis através de cálculos mentais, ou por não dominarem o conhecimento necessário para resolver o problema através de uma representação escrita, ou por essa ser uma prática muito estimulada nas escolas e livros didáticos hoje em dia. Infelizmente os resultados dos problemas da Figura 11 não corresponderam às respostas corretas esperadas, contudo outros alunos, não explicitaram a estratégia utilizada e obtiveram êxito em suas respostas, como pode ser visto, no exemplo da Figura 12.

Mesmo não explicitando a estratégia utilizada, o aluno acertou seis dos oito problemas apresentados no teste Tipo 6. Diferentemente da mera escolha de valores explicitados nos enunciados, o aluno parece ter efetuado alguns cálculos, e, em alguns, casos cálculos corretos.

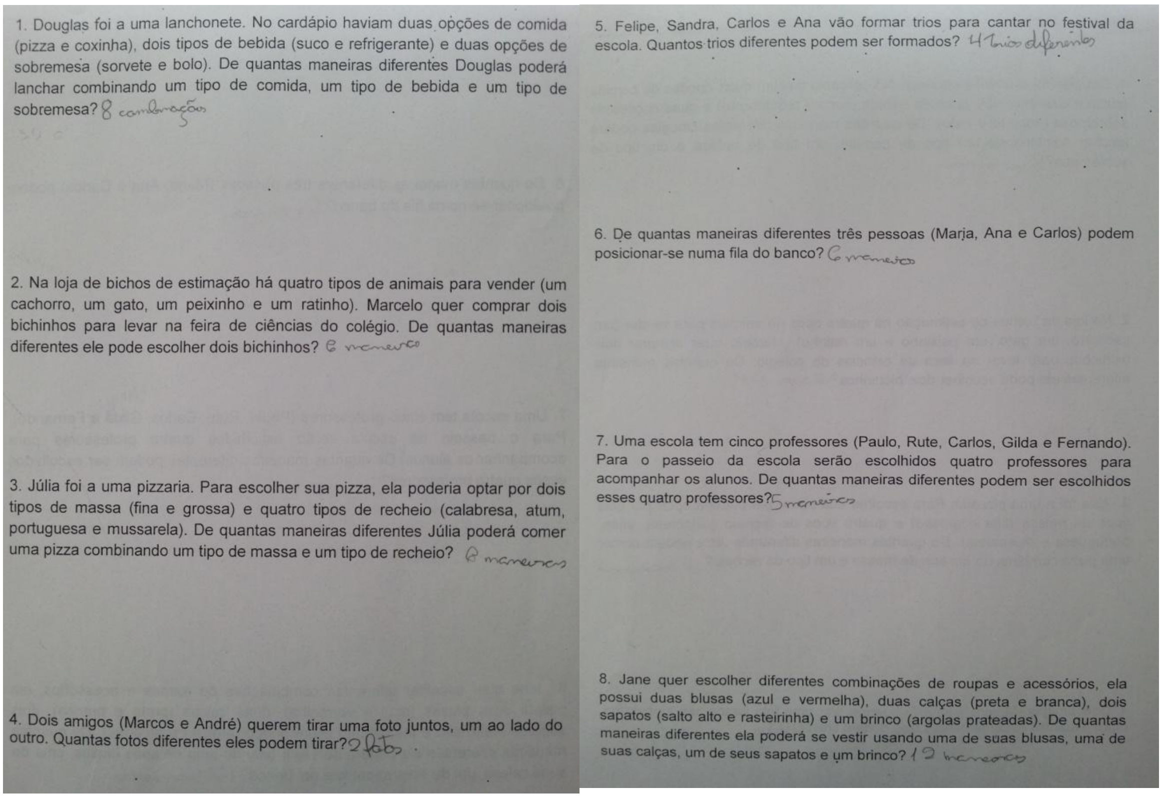
Na Tabela 3, é possível visualizar as respostas corretas aos problemas que foram revelados acima e a relação com a escrita respondida pelo aluno.

Tabela 3: Respostas aos problemas do teste Tipo 6.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Produto Cartesiano	3 etapas	8	**8**
2. Combinação	2 etapas	6	**6**
3. Produto Cartesiano	2 etapas	8	6
4. Permutação	2 etapas	2	**2**
5. Combinação	3 etapas	4	**4**
6. Permutação	3 etapas	6	**6**
7. Combinação	4 etapas	5	**5**
8. Produto Cartesiano	4 etapas	8	12

É possível visualizar que o aluno acertou a maioria dos problemas propostos, errou somente nos problemas de *produto cartesiano* com duas e quatro etapas de escolha. Dessa forma, a explicitação, ou não, das estratégias utilizadas para responder aos problemas não é indício de que o aluno necessariamente errará ou acertará, pois no caso da Figura 12, o aluno obteve êxito na maioria dos problemas.

Figura 12: Respostas do Aluno 110 – sem explicitação de estratégia



1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam duas opções de comida (pizza e coxinha), dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e duas opções de sobremesa (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa? 8 combinações

2. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? 6 maneiras

3. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (fina e grossa) e quatro tipos de recheio (calabresa, atum, portuguesa e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? 6 maneiras

4. Dois amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, um ao lado do outro. Quantas fotos diferentes eles podem tirar? 2 fotos

5. Felipe, Sandra, Carlos e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? 4 trios diferentes

6. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco? 6 maneiras

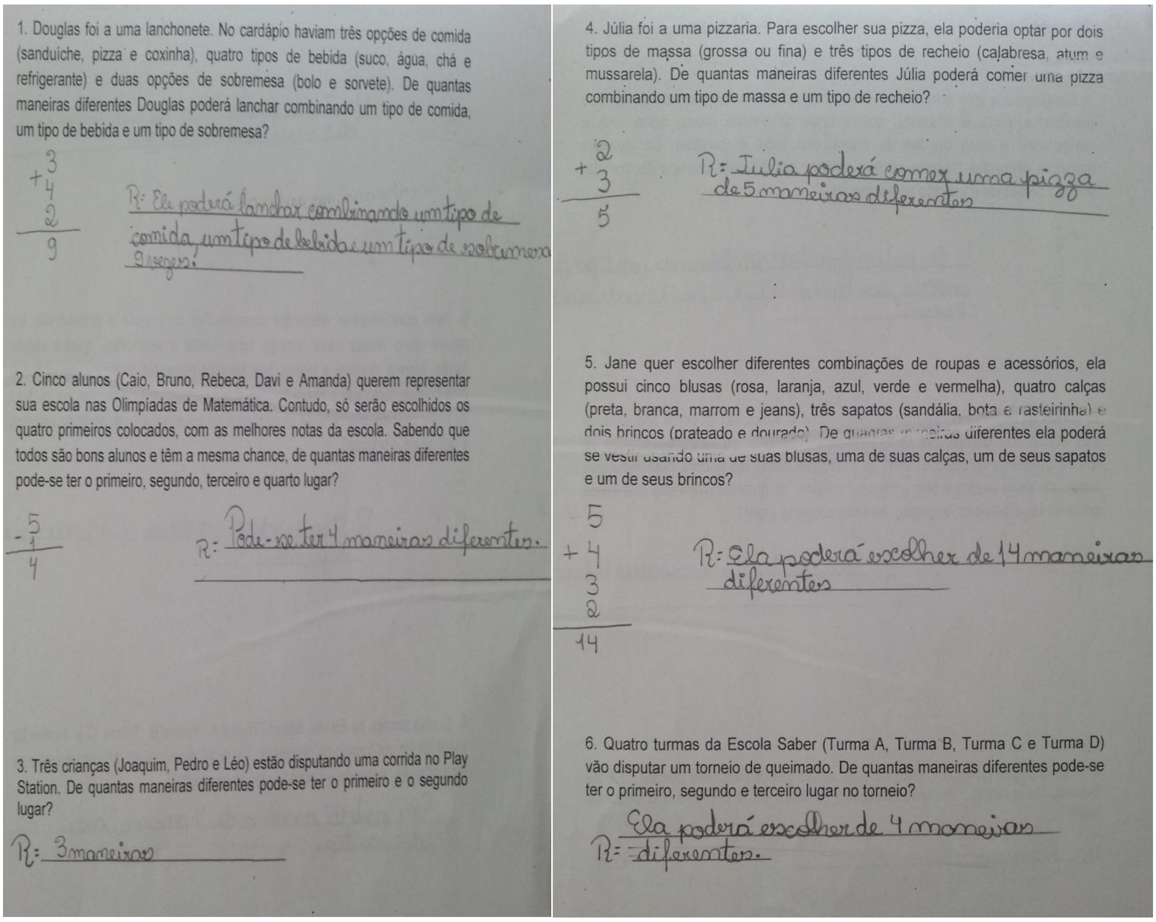
7. Uma escola tem cinco professores (Paulo, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? 5 maneiras

8. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui duas blusas (azul e vermelha), duas calças (preta e branca), dois sapatos (salto alto e rasteirinha) e um brinco (argolas prateadas). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco? 12 maneiras

Outra estratégia de resolução de problemas apontada por Azevedo (2013) e presente nos dados coletados dessa dissertação foi a utilização da adição ou subtração como cálculo para tentar responder ao problema proposto. Foram encontradas algumas respostas que apresentaram a adição como estratégia de resolução.

Ao responder os problemas do teste Tipo 2, percebe-se que para o aluno da Figura 13 a escolha dos números que irão compor a adição são os mesmos sugeridos pelos problemas. Dessa forma, o aluno apresenta um cálculo incorreto, usando o algoritmo da adição para solucionar o problema.

Figura 13: Respostas incorretas do Aluno 29 – com uso inadequado da adição ou subtração



1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam três opções de comida (sanduíche, pizza e coxinha), quatro tipos de bebida (suco, água, chá e refrigerante) e duas opções de sobremesa (bolo e sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

$3 + 4 + 2 = 9$

R: Ele poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa 9 vezes!

2. Cinco alunos (Caio, Bruno, Rebeca, Davi e Amanda) querem representar sua escola nas Olimpíadas de Matemática. Contudo, só serão escolhidos os quatro primeiros colocados, com as melhores notas da escola. Sabendo que todos são bons alunos e têm a mesma chance, de quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar?

$5 - 1 = 4$

R: Pode-se ter 4 maneiras diferentes.

3. Três crianças (Joaquim, Pedro e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugar?

R: 3 maneiras

4. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (grossa ou fina) e três tipos de recheio (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

$2 + 3 = 5$

R: Julia poderá comer uma pizza de 5 maneiras diferentes

5. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui cinco blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha), quatro calças (preta, branca, marrom e jeans), três sapatos (sandália, bota e rasteirinha) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

$5 + 4 + 3 + 2 = 14$

R: Ela poderá escolher de 14 maneiras diferentes

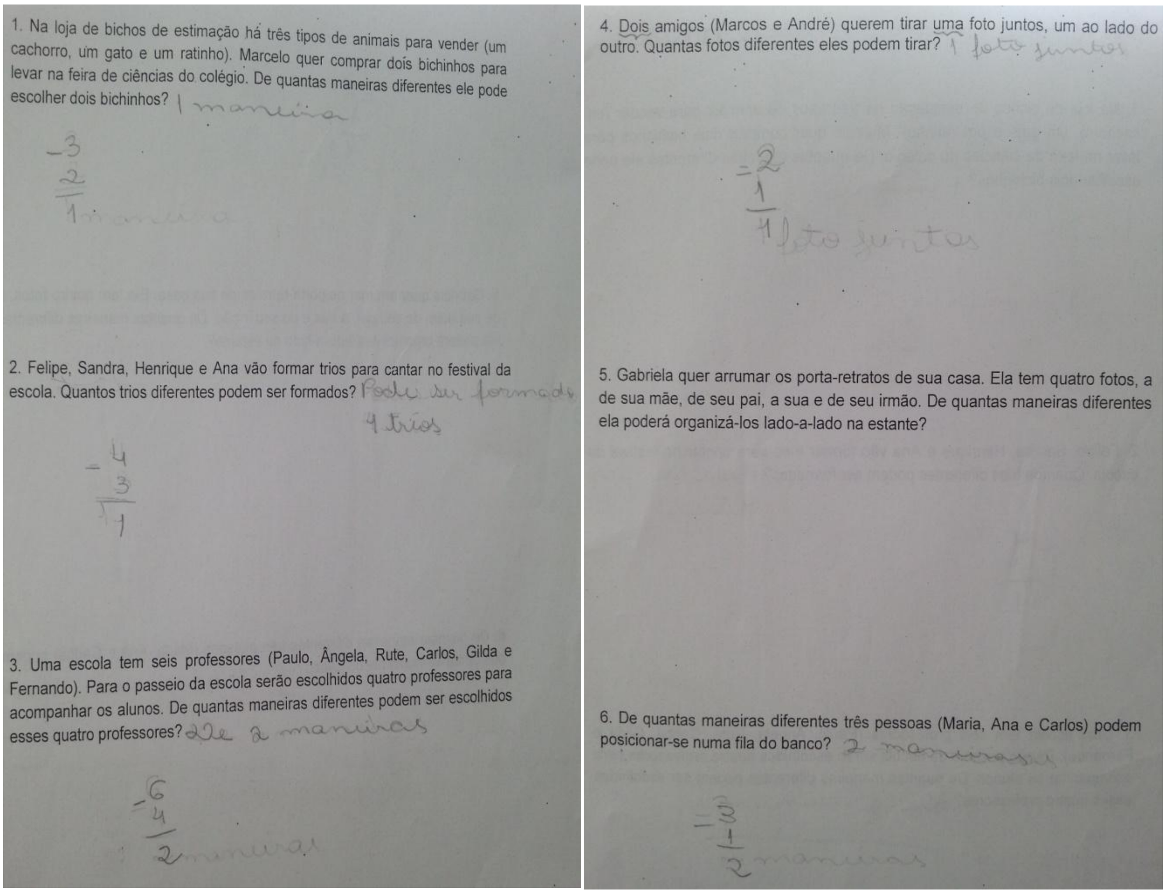
6. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

R: Ela poderá escolher de 4 maneiras diferentes.

Quando o aluno utiliza uma adição inadequada ou uma subtração para responder aos problemas combinatórios, é evidente a falta de compreensão quando utiliza essas operações, visto que não há relação direta entre a resposta escrita e a adição direta dos números propostos no problema. É possível visualizar que em todas as questões, o aluno, não obteve êxito, visto que as respostas a esses problemas são respectivamente, 24, 120, 6, 6, 120 e 24.

Da mesma forma que utilizar a soma não responde de forma correta aos problemas, utilizar a subtração também não possibilita que o aluno consiga obter o total correto de possibilidades. Assim como o Aluno 29, da Figura 13, as respostas do Aluno 73, da Figura 14, também empregam os números dados nos problemas para realizar subtrações. No teste apresentado a seguir, o aluno utilizou-se da subtração para responder a todos os problemas do teste Tipo 4, que comparou os problemas de *combinação* e *permutação*.

Figura 14: Respostas incorretas do Aluno 73 – uso de subtrações



1. Na loja de bichos de estimação há três tipos de animais para vender (um cachorro, um gato e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? 1 maneira

$3 - 2 = 1$ maneira

2. Felipe, Sandra, Henrique e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? Pode ser formado 4 trios

$4 - 3 = 1$

3. Uma escola tem seis professores (Paulo, Ângela, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? 2 de 2 maneiras

$6 - 4 = 2$ maneiras

4. Dois amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, um ao lado do outro. Quantas fotos diferentes eles podem tirar? 1 foto juntos

$2 - 1 = 1$ foto juntos

5. Gabriela quer arrumar os porta-retratos de sua casa. Ela tem quatro fotos, a de sua mãe, de seu pai, a sua e de seu irmão. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizá-los lado-a-lado na estante?

6. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco? 2 maneiras

$3 - 1 = 2$ maneiras

Utilizar uma adição inadequada ou a subtração não são estratégias eficazes de resolução de problemas combinatórios. Contudo, em geral, quando o aluno desenha a resolução de seu problema, ele consegue obter acertos parciais e totais.

Empregar o desenho como estratégia de resolução demonstra, grande parte das vezes, que o aluno compreende o que é solicitado nos problemas. O interessante desse tipo de estratégia é que ela pode ser utilizada por estudantes de diferentes idades, desde os menores até os maiores, incluindo alunos do 6º ano, como exemplificado aqui. O estudo de Pessoa e Borba (2009) mostra que até alunos do Ensino Médio, utilizam desenhos na resolução de problemas combinatórios.

Através do desenho, o Aluno 78 pôde obter êxito em quatro dos seis problemas presentes no teste Tipo 4. O aluno conseguiu acerto parcial nos problemas de *combinação* e *permutação*, ambos com quatro etapas de escolha. Nos demais, o aluno alcançou acerto total. As respostas corretas de cada problema podem ser visualizadas na Tabela 4.

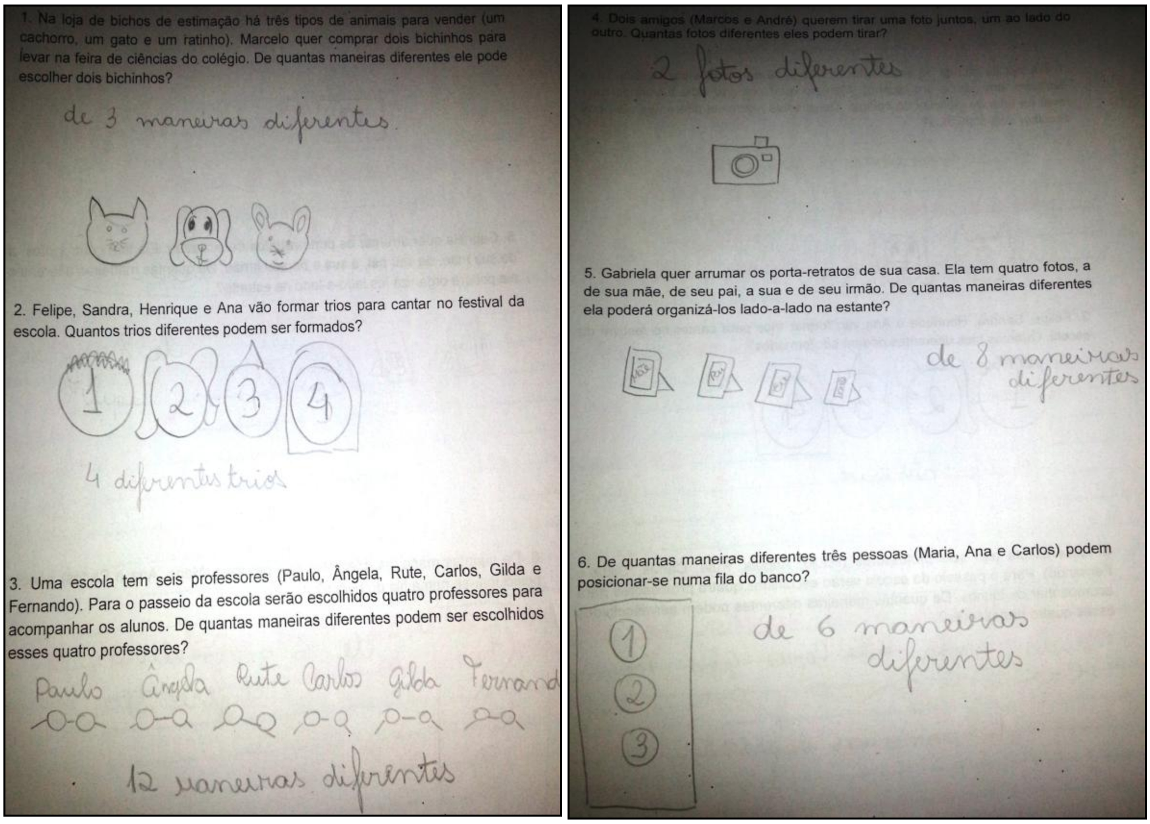
Tabela 4: Respostas aos problemas do teste Tipo 4.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Combinação	2 etapas	3	**3**
2. Combinação	3 etapas	4	**4**
3. Combinação	4 etapas	15	12
4. Permutação	2 etapas	2	**2**
5. Permutação	4 etapas	24	8
6. Permutação	3 etapas	6	**6**

É possível verificar através da Tabela 4 e da Figura 15, a eficácia da estratégia de resolução – desenho – no desempenho do aluno. Contudo, o desenho, nesse caso, parece ter sido utilizado somente como ilustração do enunciado de alguns problemas, pois as combinações parecem ter sido realizadas mentalmente.

No Problema 1, uma combinação com duas etapas de escolha, o aluno desenha os três animais que poderão ser escolhidos pelo menino. Através desse desenho, ficam mais claras as possíveis combinações de animais, contudo, o aluno não desenhou, nem listou essas combinações. A visualização de todas as possibilidades nas diferentes situações propostas parece ter sido mental.

Figura 15: Respostas do Aluno 78 – com desenhos



Outra estratégia que também foi utilizada em todos os problemas do teste, por alguns alunos, foi o quadro. Através dele foi possível obter bom desempenho nos problemas como pode ser visto na Figura 16.

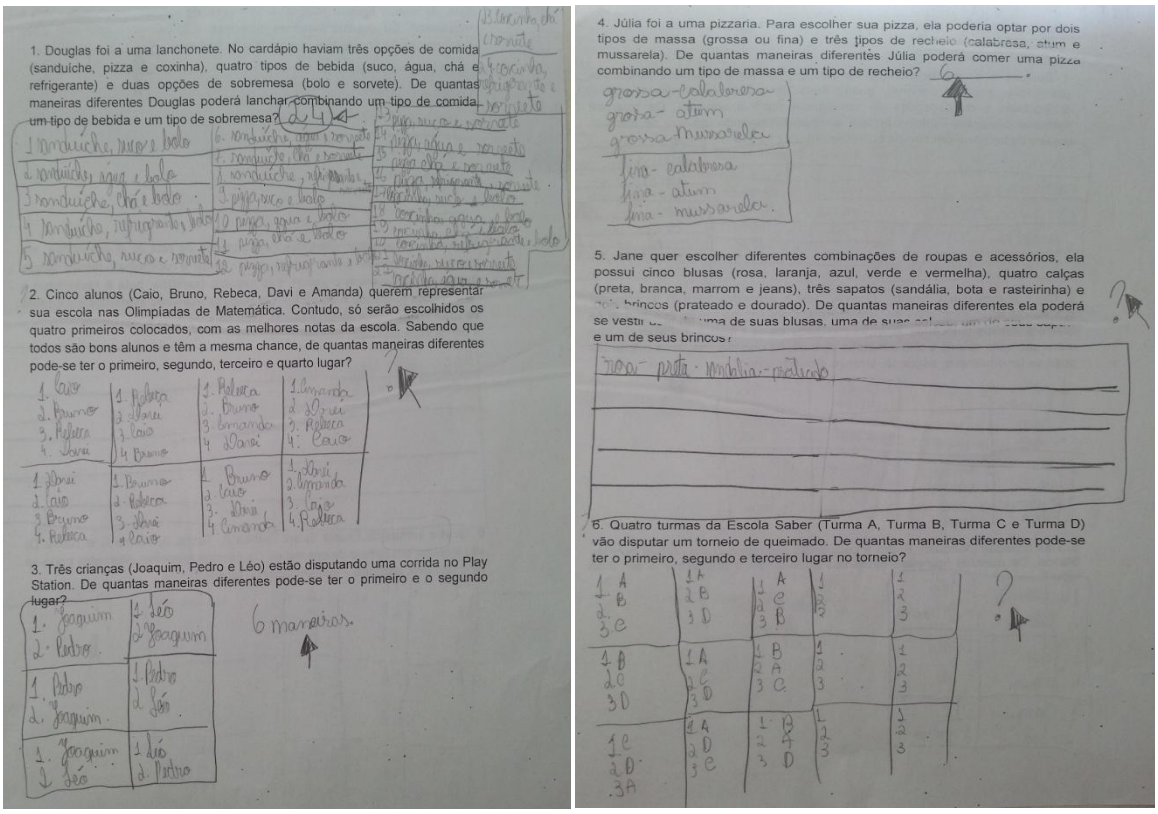
Em todos os problemas, o aluno da Figura 16 elaborou quadros que agruparam cada possibilidade de combinação e destacou com uma seta a resposta correta do total de possibilidades. É possível verificar através da Tabela 5 o total de possibilidades que o Aluno 33 obteve em responder ao teste Tipo 2.

Tabela 5: Respostas aos problemas do teste Tipo 2.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Produto Cartesiano	3 etapas	24	**24**
2. Arranjo	4 etapas	120	8
3. Arranjo	2 etapas	6	**6**
4. Produto Cartesiano	2 etapas	6	**6**
5. Produto Cartesiano	4 etapas	120	1
6. Arranjo	3 etapas	24	15

Nos Problemas 2, 5 e 6 o aluno coloca junto com a seta que indica a resposta, um ponto de interrogação. Pode-se perceber que isso indica a dúvida que surgiu no momento de apresentar o número total de possibilidades, mesmo tendo escrito dentro do quadro uma quantidade de combinações, como pode ser visualizado na Figura 16. Entende-se que este aluno compreendeu que não conseguiu atingir o número total de possibilidades que respondem a estes problemas. É possível dizer que este aluno percebeu a regularidade que existe nos problemas combinatórios, porém em alguns problemas, ele não conseguiu descobrir o total de possibilidades.

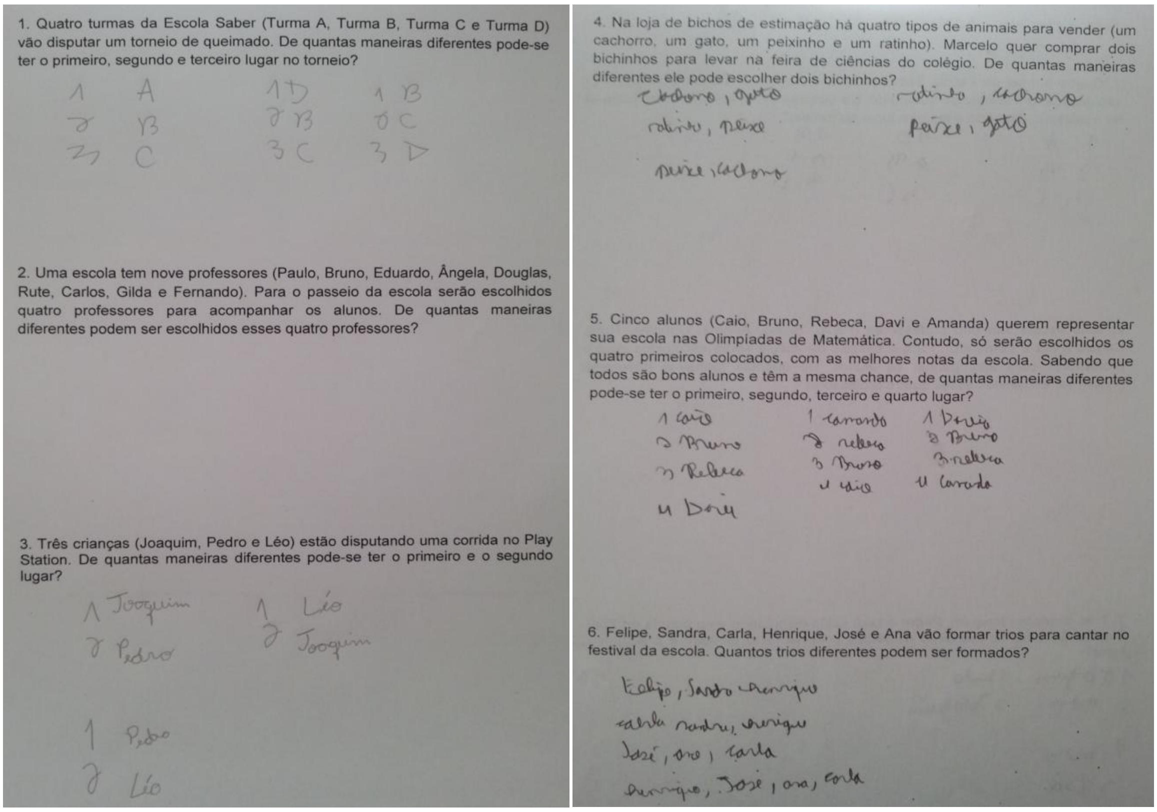
Figura 16: Respostas do Aluno 33 – uso de quadro



Uma das estratégias de resolução mais utilizadas pelos alunos é a listagem. Estudos anteriores, como Pessoa e Borba, 2009; Barreto, 2012 e Azevedo, 2013, já a apontavam como representação simbólica mais presente nas respostas dos alunos.

No extrato a seguir, Figura 17, é possível observar um aluno que utilizou este tipo de estratégia, contudo, seus resultados apontam para acertos parciais, visto que ele não esgotou todas as possibilidades de combinações. Visualiza-se que ele tentou responder a todos os problemas, menos ao Problema 2, uma *combinação* com quatro etapas de escolha, o qual deixou em branco.

Figura 17: Respostas incompletas do Aluno 99 – uso de listagens



1. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

1 A
2 B
3 C

1 D
2 B
3 C

1 B
2 C
3 D

2. Uma escola tem nove professores (Paulo, Bruno, Eduardo, Ângela, Douglas, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores?

3. Três crianças (Joaquim, Pedro e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugar?

1 Joaquim
2 Pedro

1 Léo
2 Joaquim

1 Pedro
2 Léo

4. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

cachorro, gato
ratinho, cachorro
ratinho, peixe
peixe, gato
peixe, cachorro

5. Cinco alunos (Caio, Bruno, Rebeca, Davi e Amanda) querem representar sua escola nas Olimpíadas de Matemática. Contudo, só serão escolhidos os quatro primeiros colocados, com as melhores notas da escola. Sabendo que todos são bons alunos e têm a mesma chance, de quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar?

1 Caio
2 Bruno
3 Rebeca
4 Davi

1 Amanda
2 rebeca
3 Bruno
4 Caio

1 Davi
2 Bruno
3 rebeca
4 Amanda

6. Felipe, Sandra, Carla, Henrique, José e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?

Felipe, Sandra, Henrique
Carla, Sandra, Henrique
José, Ana, Carla
Henrique, José, Ana, Carla

Observando a Figura 17, constata-se através da Tabela 6 cada resposta do aluno e sua relação com as respostas corretas dos problemas do teste Tipo 5.

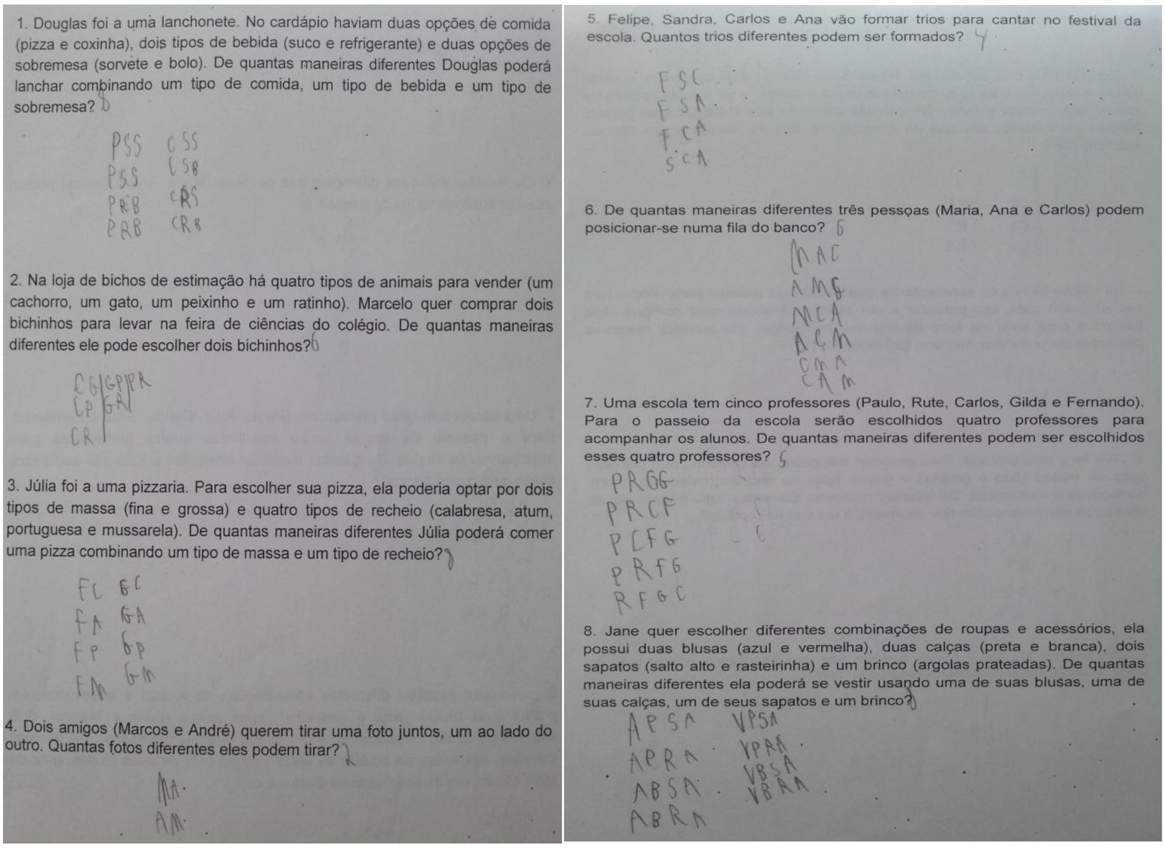
Tabela 6: Respostas aos problemas do teste Tipo 5.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Arranjo	3 etapas	24	3
2. Combinação	4 etapas	126	-
3. Arranjo	2 etapas	6	3
4. Combinação	2 etapas	6	5
5. Arranjo	4 etapas	120	3
6. Combinação	3 etapas	20	4

O Aluno 99 não esgotou todas as possibilidades, contudo ele demonstrou compreender o que se pede no problema, como em resposta ao Problema 5. Ele entende que podem ser combinados quatro alunos dos cinco sugeridos no problema. Houve, então, compreensão dos invariantes que envolvem os problemas de *combinação* e *arranjo*, faltou somente o esgotamento de todas as possibilidades.

É possível verificar na Figura 18, que o aluno também utilizou a estratégia listagem como resolução de problemas, a diferença com o exemplo anterior é o índice de acertos totais que este aluno adquiriu ao utilizar essa mesma estratégia.

Figura 18: Respostas corretas do Aluno 117 – uso de listagens



1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam duas opções de comida (pizza e coxinha), dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e duas opções de sobremesa (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa? 8

PSS CSS
PSS CSB
PRB CRS
PRB CRB

2. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? 6

CG GP PR
CP GR
CR

3. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (fina e grossa) e quatro tipos de recheio (calabresa, atum, portuguesa e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? 8

FC GC
FA GA
FP GP
FM GM

4. Dois amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, um ao lado do outro. Quantas fotos diferentes eles podem tirar? 2

MA
AM

5. Felipe, Sandra, Carlos e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? 4

FSC
FSA
FCA
SCA

6. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco? 6

MAC
AMC
MCA
ACM
CMA
CAM

7. Uma escola tem cinco professores (Paulo, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? 5

PRGC
PRCF
PCFG
PRFG
RFGC

8. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui duas blusas (azul e vermelha), duas calças (preta e branca), dois sapatos (salto alto e rasteirinha) e um brinco (argolas prateadas). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco? 8

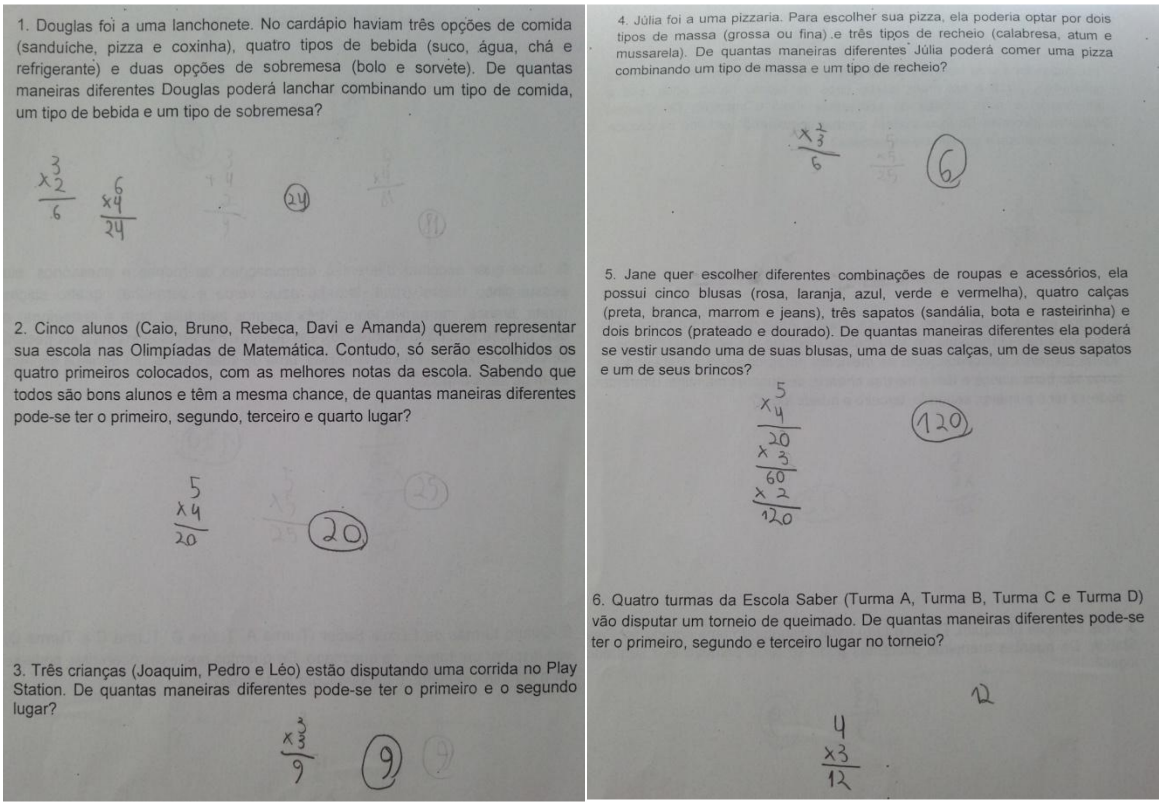
APSA VPSA
APRA VPRA
ABSA VBSA
ABRA VBRA

O Aluno 117 respondeu corretamente, por meio de listagens, a todos os problemas de *produto cartesiano*, *combinação* e *permutação.*

Dessa forma, percebe-se que na Figura 17 e na Figura 18, mesmo ambas tendo utilizado a listagem como estratégia de resolução, sabe-se que esta é uma estratégia muito utilizada e que proporciona um índice elevado de acertos, contudo ela precisa estar associada ao esgotamento total das possibilidades, e a outros invariantes importantes para a resolução dos diferentes problemas combinatórios.

Outra estratégia que proporciona um bom desempenho dos estudantes é a utilização da multiplicação como estratégia de resolução. No extrato da Figura 19, o aluno utilizou a multiplicação, ora de forma adequada, ora de forma inadequada, visto que é preciso observar os invariantes presentes em cada problema combinatório.

Figura 19: Respostas do Aluno 40 – uso da multiplicação



1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam três opções de comida (sanduíche, pizza e coxinha), quatro tipos de bebida (suco, água, chá e refrigerante) e duas opções de sobremesa (bolo e sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

2. Cinco alunos (Caio, Bruno, Rebeca, Davi e Amanda) querem representar sua escola nas Olimpíadas de Matemática. Contudo, só serão escolhidos os quatro primeiros colocados, com as melhores notas da escola. Sabendo que todos são bons alunos e têm a mesma chance, de quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar?

3. Três crianças (Joaquim, Pedro e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugar?

4. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (grossa ou fina) e três tipos de recheio (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

5. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui cinco blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha), quatro calças (preta, branca, marrom e jeans), três sapatos (sandália, bota e rasteirinha) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

6. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

O aluno acertou três dos seis problemas, podendo a resposta correta de cada problema ser visualiza na Tabela 8. Os acertos foram observados apenas nos problemas de *produto cartesiano*, Problemas 1, 4 e 5. Já nos problemas de *arranjo*, o aluno iniciou sua resolução de forma correta, como pode ser visto no Problema 2, contudo ele para na multiplicação 5 x 4, quando, na realidade, como são primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar, ele deveria multiplicar 5 x 4 x 3 x 2. O mesmo erro é cometido no Problema 6.

Para responder um problema de *combinação*, não basta simplesmente multiplicar os dados apresentados nos problemas, é preciso compreender quais dados irão ser multiplicados e depois dividi-los pela permutação dos elementos entre si. É necessário perceber a lógica existente em cada tipo de problema.

Através das estratégias utilizadas pelos alunos, verificou-se não haver diferença entre as categorias classificadas por Pessoa (2009) e as encontradas nessa dissertação de mestrado, nem tampouco, houve relação entre a estratégia utilizada e o tipo de problema ou, ainda, o número de etapas de escolha.

A seguir apresentam-se as considerações concernentes aos principais resultados conseguidos e as decorrências educacionais que podem ser tomadas para uma melhora no ensino aprendizagem da Combinatória.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados desta dissertação de mestrado oferecem evidências para destacar as etapas de escolha dos problemas de Combinatória enquanto variável que pode influenciar no desempenho de alunos do Ensino Fundamental ao responderem questões com este conteúdo. Esta é a principal contribuição deste estudo, uma vez que estudos anteriores apontaram outras variáveis (primordialmente, tipo de situação combinatória e número total de possibilidades do problema e também forma de apresentação das variáveis) as quais foram revistas aqui e acrescidas pelo olhar mais atento ao número de etapas de escolha dos problemas combinatórios.

A análise dos dados coletados na validação do instrumento e no estudo piloto apresentou indícios de que o número de etapas de escolha pode explicar porque em estudos anteriores havia maior dificuldade com problemas de *permutação* e maior facilidade em *produtos cartesianos*, visto que as *permutações* geralmente apresentavam três ou quatro etapas de escolha, enquanto que os problemas de *produto cartesiano* sempre apresentavam duas etapas. Nestas etapas da pesquisa – validação do instrumento e estudo piloto – também se esclareceu que a ordem de apresentação dos diferentes tipos de problemas, em testes com número reduzido de questões, não influencia no desempenho dos alunos.

Respondendo ao questionamento inicial, presente no título desta dissertação, no qual se pergunta sobre a facilidade em resolver problemas com duas, três ou quatro etapas de escolha e qual dos problemas seria o mais fácil, *produto cartesiano, arranjo, combinação* ou *permutação*, percebe-se, de início, que esta não é uma questão simples de se responder. As situações combinatórias envolvem estas variáveis – número de etapas de escolha e tipo de situação combinatória – mas também há outras variáveis a serem consideradas.

Nos diferentes tipos de testes utilizados para tentar responder a estas questões, foi possível verificar que o problema de *permutação* com quatro etapas de escolha é mais fácil que o problema de *produto cartesiano* com quatro etapas também, isso no teste Tipo 1. Esse resultado vai de encontro ao que estudos anteriores apontavam como sendo *produto cartesiano* como mais fácil que *permutação*.

Nos testes Tipo 2 e 3, observou-se que o desempenho não apresentou diferenças significativas entre problemas de *produto cartesiano* e *arranjo*, ou entre *produtos cartesianos* e *combinações*, nem com duas, com três ou com quatro etapas de escolha. Já no teste Tipo 4, os problemas de *permutação* com três e quatro etapas foram mais difíceis de serem resolvidos do que os problemas de *combinação*, também com três e quatro etapas de escolha. No teste Tipo 5, observou-se a ausência de diferenças significativas entre problemas de *combinação* e *arranjo*, em duas, três e quatro etapas de escolha.

Dessa forma, se o número total de possibilidades não for muito elevado, de modo geral, não há diferenças significativas de desempenho nos tipos de situações combinatórias. As relações e propriedades de cada tipo de problema, entretanto, não podem ser desconsideradas.

Analisando somente as etapas de escolha, foco central do teste Tipo 6, mas também presente nos demais testes, foi possível verificar que – controlando-se o número total de possibilidades solicitadas – os problemas com quatro etapas de escolha são mais difíceis que os problemas combinatórios com duas e três etapas. Em particular nos problemas de *produto cartesiano*, cujo resultado foi o mesmo em todas as etapas, há forte evidência da influência das etapas de escolha na resolução dos problemas de Combinatória. Este resultado reforça a hipótese inicial e central desta dissertação: estudos anteriores apontaram o *produto cartesiano* como problema de mais fácil resolução, mas, em geral, esse tipo de problema envolvia apenas duas etapas de escolha e era comparado com problemas de outros tipos – *arranjos*, *combinações* e *permutações* – os quais possuíam, em geral, três ou quatro etapas de escolha.

Quando se analisa o número total de possibilidades de um problema, percebe-se que quanto maior a grandeza numérica presente na resposta de um problema, mais difícil será esse problema. Isso foi verificado ao se comparar os diferentes tipos de testes e observar que os testes Tipo 2 e 5, que apresentavam problemas de *arranjo* em sua composição, cujos resultados em cada etapa de escolha eram 6, 24 e 120, para duas, três e quatro etapas respectivamente, eram mais difíceis de serem resolvidos corretamente do que os demais testes, pois apresentaram diferenças significativas de desempenho, quando comparado com outros. Observando o total de possibilidades dos problemas de *permutação*, obteve-se em cada etapa de escolha, 2, 6 e 24 possibilidades. Nos problemas de *combinação* e *produto cartesiano* o resultado de seus problemas igualava-se ou tornava-se similar aos resultados dos problemas cujos resultados eram fixos. No teste Tipo 3, no qual comparou os dois tipos de problemas, os resultados foram 6 para os problemas com duas etapas de escolha, 4 para os problemas com três etapas e 5 ou 4, para quatro etapas, respectivamente em *combinação* e *produto cartesiano*.

Dessa forma, o presente estudo traz confirmações quanto à influência do número de etapas de escolha (variável não controlada em estudos anteriores, mas controlada no presente estudo) e da ordem de grandeza do total de possibilidades solicitadas, como já apontado por estudos anteriores por Moro e Soares, 2006; Pessoa e Borba, 2009; Pessoa e Santos, 2011 e Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães, 2011. Além destas duas variáveis, há também indícios de que o tipo de situação combinatória também tem influência nos desempenhos, pois as relações e propriedades particulares de cada situação também influenciam na compreensão da situação e no procedimento utilizado em sua resolução. É o caso, dentre possíveis outros, de problemas de *permutação* com quatro etapas, nos quais os alunos conseguiram sistematizar suas soluções considerando os quatro elementos a serem permutados, enquanto se esqueceram de um ou mais elementos em *produtos cartesianos* que também possuíam quatro etapas de escolha.

Observando as representações simbólicas e estratégias utilizadas pelos alunos, não foi possível perceber relações específicas com os diferentes tipos de problemas combinatórios, nem com os números de etapas de escolha. A variação das representações simbólicas e estratégias utilizadas parece estar associada a escolhas particulares de cada participante, isso porque, em geral, cada aluno escolheu uma forma de representação e estratégia para utilizar em todos os problemas combinatórios respondidos que não variava de acordo com o tipo de problema ou o número de etapas de escolha.

As análises realizadas nesse estudo foram feitas tendo como base a Teoria de Vergnaud, a qual aponta para *situações que dão significado*, *invariantes* (propriedades e relações) e *representações simbólicas* utilizadas em conceitualizações. Pôde-se verificar que, de modo geral, não há um significado dos problemas combinatórios que seja considerado mais fácil que os demais; viu-se que há influência das etapas de escolha, enquanto invariante de importante destaque dentro desse estudo; e verificou-se não haver ligação entre a representação simbólica escolhida pelo aluno para resolver os problemas e as etapas de escolha ou os diferentes tipos de problemas combinatórios.

As análises apresentadas nesse estudo podem servir como base para uma melhora no ensino de Combinatória. Os resultados, assim como os obtidos em estudos anteriores, apontam que não deve ser priorizado o ensino deste ou daquele tipo de problema combinatório, mas, sim, de todos os diversificados tipos de problemas, para que os alunos tenham contato com diferentes relações e propriedades combinatórias. Também se deve levar os alunos a lidarem com variado número de etapas de escolha presentes nos problemas, para que percebam mais claramente as escolhas necessárias no levantamento de possibilidades. Deve-se, também, estimular a variedade de estratégias de resolução, para que os alunos percebam que algumas são mais eficientes, quando, por exemplo, se tem um maior número total de possibilidades. Desenhos e listagens – procedimentos muito comuns entre os alunos – são bem eficientes quando há poucas possibilidades, mas não são, necessariamente, os mais indicados quando o número total de possibilidades é elevado. É preciso que os alunos iniciem com o uso destes procedimentos, mas gradativamente se utilizem de estratégias mais gerais e sistemáticas – como quadros, diagramas, cálculos aritméticos e procedimentos mais formais (*princípio fundamental da contagem* e fórmulas), os quais podem dar conta da grande variedade de situações combinatórias.

Os alunos do 6º ano apresentaram bons desempenhos nos testes propostos, reforçando a ideia de que o ensino desse conceito pode e deve ser iniciado ainda no Ensino Fundamental, como orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e como evidenciado em estudos anteriores, como em Moro e Soares, 2006; Pessoa e Borba, 2009; Maher e Yankelewitz, 2010; Pessoa e Santos, 2011; Matias, Santos e Pessoa, 2011 e por Pessoa e Borba, 2012.

Reforçam-se estas orientações no sentido de possibilitar que desde cedo os alunos tenham contato com situações combinatórias simples e, gradativamente, tenham contato com situações mais complexas, possibilitando que ao final do Ensino Médio tenham uma boa compreensão da Combinatória.

É importante que os resultados dessa pesquisa e de outras cheguem ao conhecimento do professor, pois é ele quem irá ajudar o aluno a construir a ponte entre modos intuitivos e cotidianos de pensamento para o modo próprio da Matemática formal, em um processo crescente e em espiral que parte dos conhecimentos prévios do aluno, como os observados na presente pesquisa, e avança para procedimentos combinatórios refinados, como a sistematização, a generalização e demais procedimentos importantes para a combinação de elementos.

Esta pesquisa foi caracterizada como um estudo de sondagem, uma vez que a variável *número de etapas de escolha* precisava ser devidamente manipulada para que se observasse a sua influência no desempenho em problemas combinatórios. Outros estudos, como intervenções pedagógicas com foco nas etapas de escolha, podem ser realizados, a fim de responder outras questões referentes à viabilidade de focar nas etapas de escolha como relação importante na resolução de situações combinatórias. Como, por exemplo, podem ser realizados estudos que tentem aproximar ainda mais o total de possibilidades das combinações dos diferentes problemas combinatórios e que também efetuem variações para que os alunos tenham contato com um espectro amplo de situações. Também podem ser realizados mais estudos de intervenção que verifiquem o uso de diferentes representações, visando perceber se, dessa forma, há influencia nos avanços em lidar com diferentes números de etapas de escolha.

O intuito dessa pesquisa de dissertação de mestrado é contribuir para uma reflexão sobre a melhoria do ensino de Combinatória nas salas de aula, apontando que um importante invariante, o número de etapas de escolha, pode influenciar no desempenho dos alunos e precisa ser destacado dentro de cada significado combinatório. Antes do ensino formal da Combinatória, que só acontece no Ensino Médio, através do uso de fórmulas, principalmente, os alunos, em especial os pesquisados nesse estudo, evidenciaram noções intuitivas de Combinatória. Por isso o trabalho em salas de aulas do Ensino Fundamental deve ser iniciado de forma que seja aproveitado esse conhecimento inicial, possibilitando que haja o desenvolvimento do raciocínio combinatório através da resolução de situações problema que estimulem e levem os alunos a utilizar diferentes estratégias de resolução e não só a fórmula, como irá acontecer adiante, mas propiciando que o aluno desenvolva formas de pensar sobre cada significado e invariante combinatório.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, J. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador?** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, 2013.

AZEVEDO, J; BORBA, R. O ensino da Combinatória por meio da construção de árvores de possibilidades com e sem o uso do software Diagramas de Árbol. **Anais...** do XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Canoas - RS, 12 a 14 de novembro de 2012.

AZEVEDO, J; COSTA, D. da; BORBA, R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

BARRETO, F; BORBA, R. Intervenções de Combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais..**. da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

BARRETO, F. **O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos.** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, 2012.

BORBA, R. **The effect of number meanings, conceptal invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers**. Tese de doutorado. Reino Unido. Psychology Departament, Oxford Brookes University: 2002.

BORBA, R. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: **Anais**... do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Bahia, 2010.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: **Anais**... do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

BORBA, R; BRAZ, F. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? **Anais...** do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Fortaleza, 2012.

BORBA, R; NUNES, T. Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.6, n.1, pp. 73-100, 2004.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Ministério da Educação e Desporto – Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

CARRAHER, T. N; CARRAHER, D; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

CORREA, J. OLIVEIRA, G. **A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória.** Curitiba: Educar em Revista, 2011.

DAVIS, R. B. Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1984.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children***,* Reidel, Dordrecht, 1975. LIMA, R. de C. G. de. A educação de jovens e adultos e o raciocínio combinatório. **Anais**... do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976

MAHER, C; YANKELEWITZ, D. **Representations as tools for building arguments**. In: MAHER, C. POWER, A. UPTEGROVE, E. Combinatorics and Reasoning. New York: Springer, 2010.

MATIAS, P. C; SANTOS, M. M. de S; PESSOA, C. A. dos S. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

MORO, M. L; SOARES, M. T. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.8, n.1, pp. 99-124, 2006.

MORO, M. L; SOARES, M. T. **A aprendizagem de estruturas aditivas elementares: alunos, professores e pesquisadores como parceiros de uma construção conceitual.** In: BRITO, M. Solução de Problemas e a Matemática Escolar. Campinas: Alínea, 2010.

ONRUBIA, J; ROCHERA, M. J; BARBERÀ, E. **O ensino e a aprendizagem da matemática: uma perspectiva psicológica.** In: COLL, C; MARCHESI, A; PALACIOS, J. Desenvolvimento psicológico e educação 2. Porto Alegre: Artmed, 2004.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. (Tese Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, C; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

PESSOA, C; BORBA, R. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1. 2010. Disponível em: http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4 Acesso em: 08 set. 2011.

PESSOA, C.; BORBA, R. Do young children notice what combinatorial situations require? **Proceedings…** 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME36), Taiwan, 2012.

PESSOA, C; SANTOS, L. T. B. dos. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais**... do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

ROCHA, C. de A. Conhecimentos de Professores que ensinam Matemática sobre problemas de Arranjo e Combinação. **Anais**... do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

ROCHA, C. de A. e FERRAZ, M. C. Conhecimentos de Professores de Pedagogia e Matemática sobre Problemas Combinatórios. **Anais**... do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

SCHLIEMANN, A. **A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária.** In: Carraher, T. N.; Carraher, D. & Schliemann, A. Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez, 1988.

SILVA, J. da; SPINILLO, A. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

TAXA-AMARO, F. Solução de problemas com operações combinatórias. Em M. R. de Brito (Org.), **Solução de problemas e a matemática escolar**, pp. 163-183. Campinas: Alínea, 2006.

TEIXEIRA, L. CAMPOS, E. VASCONCELLOS, M. GUIMARÃES, S. **Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público.** Curitiba: Educar em Revista, 2011.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1, 1986.

__________. **El nino, lãs matemáticas y La realidad.** Problemas de La enseñanza de lãs matemáticas em La escuela primaria. México: Trillas, 1991.

__________. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.