



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO-UFPE

CENTRO DE EDUCAÇÃO

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E TECNOLÓGICA-EDUMATEC**

CURSO DE MESTRADO

AMANDA BARBOSA DA SILVA

**TRIÂNGULOS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DOS
ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOB A
LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA**

Recife

2014



AMANDA BARBOSA DA SILVA

**TRIÂNGULOS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DOS
ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOB A
LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Drº Paulo Figueiredo
Lima

Recife

2014

Catálogo na fonte
Bibliotecária Katia Tavares, CRB-4/1431

S586t	<p>Silva, Amanda Barbosa da. Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica/ Amanda Barbosa da Silva. – Recife: O autor, 2014. 118 f.; 30 cm.</p> <p>Orientador: Paulo Figueiredo Lima. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2014. Inclui Referências e apêndices. 1. Matemática – estudo e ensino. 2. Livro didático. 3. Triângulo. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Lima, Paulo Figueiredo. II. Título.</p> <p>372.7 CDD (22. ed.)</p>
-------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

UFPE (CE2014-12)



AMANDA BARBOSA DA SILVA

“TRIÂNGULOS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOB A LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a conclusão do Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em 24/02/2014

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientador
Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima
UFPE

Examinadora Externa
Profa. Dra. Anna Paula Avelar de Brito Lima
UFRPE

Examinador Interno
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
UFPE

Recife, 24 de fevereiro de 2014.

AGRADECIMENTOS

*A Deus por me acompanhar em todos os momentos.
A minha família, em especial meus pais, responsáveis pela minha primeira e mais importante formação, aos meus irmãos, Aline e Aquino, pelo apoio e torcida, e ao meu marido Roberval, pelo incentivo, amor e compreensão.*

Ao meu orientador Professor Paulo Figueiredo Lima, pelo aprendizado nas orientações, pela paciência e oportunidade de ser sua orientanda, pela atenção dedicada a pesquisa e pela postura simples e exemplar ao lidar com o conhecimento e com os mestrandos.

A todo corpo docente do EDUMATEC, em especial as professoras Dr^a. Ana Beatriz Gomes Pimenta de Carvalho e Dr^a. Rosinalda Aurora de Melo Teles, por me acolherem em sua sala de aula para realizar atividade Reuni.

Aos professores Dr^a Anna Paula de Avelar Brito e Dr^o Marcelo Câmara pela participação na banca de qualificação e de defesa e pelas contribuições dadas.

Aos professores e colegas de Seminário pelos momentos de reflexão.

Aos colegas de graduação e de mestrado da turma 2011 que sempre me acolheram, em especial a Ana Paula Braz Figueiredo e Leonardo Bernardo de Moraes, pela amizade, disponibilidade e generosidade desde a graduação.

Aos coordenadores Dr^a Rute e Dr^o Carlos e à secretária Clara, pela disponibilidade e gentileza ao atender todos.

Aos colegas da turma 2012 pelos conhecimentos compartilhados e pela amizade, em especial à Lucicleide Bezerra, Regina Célia, Maria Joseane, Josenir, Carolina, com quem dividi grandes momentos de aprendizagem em disciplinas, artigos e congressos de educação matemática.

Ao programa de Bolsas Reuni pelo incentivo à pesquisa.

RESUMO

Neste trabalho, foram investigadas representações gráficas de triângulos nos livros didáticos de matemática destinados aos anos iniciais do ensino fundamental, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2013. O estudo dos triângulos está presente em todos os anos do ensino fundamental como um conteúdo destacado no campo da geometria. Trata-se de um conceito com aparente simplicidade, mas com riqueza de propriedades geométricas. Além disso, as questões relativas à aquisição do conhecimento em geometria e ao ensino e à aprendizagem já surgem quando se trata desse conteúdo. Nesse sentido, investigações sobre o ensino e a aprendizagem da geometria têm indicado que os alunos revelam dificuldade para identificar um triângulo quando sua imagem gráfica não é a de triângulos isósceles, equiláteros, acutângulos ou quando com um dos seus lados paralelo à margem inferior da página em que aparece a referida imagem. Fomos levados a indagar se há um padrão dominante de representação gráfica de triângulos, nos livros utilizados no ensino fundamental, ou há diversidade dessas representações. Como suporte teórico adequado para uma pesquisa relativa à representação de objetos matemáticos recorreremos à teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, na qual a diversidade de representação desempenha um papel central, não só no interior de um mesmo registro semiótico como nas conversões entre registros distintos. A diversidade das representações gráficas de triângulos foi analisada quanto a três critérios: comprimento dos lados; medida dos ângulos e posição na página. Com foco nas representações de triângulos, realizamos uma identificação das atividades de conversões entre os registros da língua natural e o registro figurado. Também inserimos uma breve discussão com respeito à presença, no manual do professor, de orientações sobre a questão da variabilidade de representações gráficas dos triângulos. A análise dos resultados confirmou as observações que foram feitas durante o estudo preliminar das coleções (estudo piloto). Os resultados indicam que predominam as representações gráficas de triângulos equiláteros ou isósceles e há relativamente poucas imagens gráficas de triângulos escalenos. Quanto à medida de ângulos, os dados obtidos revelaram que são raras as representações gráficas de triângulos obtusângulos. Mostraram, também, que predominam os casos em que um dos lados do triângulo é paralelo à margem inferior da página do livro e o terceiro vértice fica acima desse lado. Em relação às atividades em que os alunos são solicitados a realizar uma conversão de registros, os resultados de nossa investigação revelam uma atenção muito insuficiente a esse tipo de atividade.

Palavras-chave: Triângulo. Anos Iniciais. Livro Didático. Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

In this paper, graphical representations of triangles were investigated in mathematics textbooks for the early years of elementary school, which were approved by Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2013. The study of triangles is present in every elementary school years as a important part of the of geometric contents. It is a concept with apparent simplicity, but with rich geometric properties . In addition , issues relating to the acquisition of knowledge in geometry and to teaching and learning occurs when it comes to that content. In this sense , research on teaching and learning of geometry have indicated that students show difficulty to identify a triangle when your graphic image is not isosceles triangles , equilateral , or with all angles being acute, or with one of its sides parallel to the bottom of the page in which it appears that image . We were led to ask whether there is a dominant pattern of graphical representation of triangles, in the books used in elementary school, or there is diversity of these representations . An adequate theoretical support for research on representation of mathematical objects is the theory of the registers of semiotic representation of Raymond Duval, in which the diversity of representation plays a central role, not only within the same semiotic register as well in the conversions between different registers. The range of graphical representations of triangles was analyzed under three criteria: length of the sides, measure of angles and position on the page. With focus on representations of triangles, we made an exploratory investigation of conversion activities among the registers of natural language and figural register. We also included a brief discussion with respect to the presence, in the teacher's manual, of guidelines dealing with the variability of graphical representations of triangles .The results confirmed the observations that were obtained in a preliminary study of the chosen textbooks. Those observartions pointed to the fact that, in the chosen textbooks predominated graphical representations of equilateral and isosceles triangles and there were relatively few graphic images of scalene triangles. As to the measure of angles, the data revealed that are very few graphical representations of triangles with an obtuse angle. Data also revealed that predominate graphical representations in which one side of the triangle is parallel to the bottom edge of the page and the third vertex is above this side. Regarding the activities in which students are asked to perform a conversion of registers, the results of our investigation show very little attention to this type of activity.

Keywords : Triangle . Initial years . Textbook . Representation Theory of Semiotics Records.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
CAPÍTULO I.....	13
QUADRO TEÓRICO.....	13
A teoria dos registros de representação semiótica.....	13
Breve revisão de pesquisas anteriores	25
Questões suscitadas	27
CAPÍTULO II.....	28
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	28
Conjunto de livros didáticos investigados	28
Comprimento dos lados: triângulos equiláteros, isósceles, escalenos.....	29
Medida dos ângulos: triângulos acutângulos, retângulos, obtusângulos	32
Posição da representação gráfica do triângulo na página	33
Delimitação das situações analisadas	34
Atividades de conversão entre o registro da linguagem natural e o registro figural	36
Manual do professor	38
CAPÍTULO III	39
ANÁLISE DOS RESULTADOS	39
Comprimento dos lados: triângulos equiláteros, isósceles, escalenos.....	39
Medida dos ângulos: triângulos acutângulos, retângulos, obtusângulo.....	45
Posição da representação gráfica dos triângulos na página	50
Atividades de conversão: registro verbal para registro figural; registro figural para registro verbal	55
Manual do professor	60
CONSIDERAÇÕES FINAIS	67

REFERÊNCIAS	72
APÊNDICE.....	74

INTRODUÇÃO

O triângulo é uma das figuras geométricas planas mais importantes na matemática e está presente no ensino escolar desde os anos iniciais. Sua aparente simplicidade esconde uma surpreendente riqueza de propriedades geométricas e de aplicações práticas, estabelecidas ao longo da evolução desse saber. E mais, as questões epistemológicas e cognitivas relativas ao conhecimento das figuras geométricas se fazem inteiramente presentes quando se trata do triângulo. Convém notar, ainda, que muitas das dificuldades de ensino e aprendizagem no campo da geometria já surgem no caso dessa figura geométrica tão básica.

Como sabemos, o triângulo é tema de todos os livros para o ensino fundamental, além disso, o livro didático ainda é o principal recurso nas escolas, sendo também um forte condicionante da prática do professor. Com o estudo exploratório realizado em uma coleção de livro didático dos anos iniciais e aprovada no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2013, revelou-nos que os triângulos são representados, muito frequentemente, por desenhos (ou por outras imagens gráficas) de triângulos equiláteros ou de triângulos isósceles¹ e, com muito menor frequência, por desenhos de triângulos escalenos. Esta coleção está inserida na pesquisa sendo denominada de Coleção de Livro Didático um (CLD1).

Outro resultado desse estudo exploratório mostrou-nos que predominam representações gráficas de triângulos acutângulos ou retângulos, sendo raras as de triângulos obtusângulos.

Quanto à disposição da representação gráfica de triângulos, predominam os casos em que um dos lados do triângulo é paralelo à margem inferior da página do livro (indicada por um retângulo na Figura 1, abaixo) e o terceiro vértice situa-se acima desse lado:

¹ Usualmente, no ensino fundamental, escolhe-se chamar de triângulos isósceles os que são isósceles mas não equiláteros. Embora essa não seja a opção que prevalece na matemática mais avançada, adotamos, neste trabalho, a denominação usual.

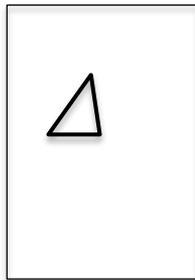


Figura 1- Triângulo paralelo à margem inferior da página

Fonte: Elaborado pela autora

Ao mesmo tempo, investigações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, Bueno (2009), Brito e Pirola (2005), Pirola (1995), têm indicado que os alunos revelam dificuldade de identificar um triângulo quando sua imagem gráfica não se inclui em nenhum dos padrões dominantes aqui referidos. Esses fatos nos motivaram a investigar se tais padrões dominantes ocorrem nos livros utilizados no ensino fundamental.

Uma investigação dessa natureza tem como motivação didática subjacente a hipótese de que uma abordagem com essas características não contribui positivamente para a aprendizagem da geometria.

Como as imagens gráficas de um triângulo são representações dessa figura geométrica, um quadro teórico para dar suporte à nossa investigação deveria tratar desse conceito. No entanto, sua reconhecida complexidade, requer, de partida, uma delimitação do significado atribuído ao termo 'representação'. Optamos, então, por recorrer à teoria de Raymond Duval dos registros de representação semiótica. No Capítulo I, esboçamos elementos dessa teoria que intervém mais diretamente em nosso trabalho.

No Capítulo II, os procedimentos metodológicos são descritos. Adotou-se um modelo de pesquisa documental aplicado a coleções didáticas. Para circunscrever o universo de livros investigados, selecionamos coleções didáticas de Alfabetização Matemática, destinados ao 1º, 2º e 3º anos do ensino fundamental, e coleções de Matemática, voltadas aos 4º e 5º anos dessa fase do ensino escolar, todos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático em sua edição denominada PNLD 2013. Como é

sabido, esse importante programa educacional distribuiu livros didáticos em todas as escolas públicas brasileiras do ensino básico. O destaque do PNLD entre as políticas educacionais do país justifica a relevância do universo escolhido para esta investigação. A análise preliminar dos livros, do ponto de vista dos objetivos visados, levou-nos a posteriores delimitações no material investigado e que são justificadas no capítulo.

No Capítulo III, apresentamos e analisamos os resultados obtidos, que conduziram ao confronto com as observações preliminares, à luz da teoria das representações semióticas. Em nossas Considerações Finais trazemos uma visão geral do caminho percorrido neste trabalho e esboçamos problemas a serem investigados em futuras investigações.

As Referências Bibliográficas e os Apêndices completam a dissertação.

CAPÍTULO I

QUADRO TEÓRICO

A teoria dos registros de representação semiótica

Os vários trabalhos de Raymond Duval, entre eles os que serão referenciados nesta dissertação, tratam de questões fundamentais da formação dos conhecimentos ou do funcionamento cognitivo do pensamento. Isso implica que a teoria proposta pelo psicólogo francês dialoga de modo amplo e complexo com temas de outros campos: semiótica, filosofia da linguagem, semântica, epistemologia, ciências cognitivas, matemática, filosofia da matemática, didática da matemática, entre outros. A amplitude e a complexidade da abordagem de Duval requerem que façamos, nos parágrafos seguintes um recorte de sua teoria, adequado aos limites deste trabalho.

As representações semióticas estão presentes na matemática de várias maneiras: desenhos, imagens gráficas, gráficos, fórmulas algébricas e enunciados em língua natural. A função delas vai além da comunicação, pois como não temos acesso aos objetos matemáticos (ponto, retas, funções, números), é por meio das representações semióticas que podemos expressar as representações mentais que temos desses objetos. As imagens mentais que elaboramos, após ouvir ou ler a palavra ‘triângulo’ constitui a nossa representação mental, mas quando desenhamos o triângulo no papel estamos produzindo uma representação semiótica com base na conceitualização desse objeto.

Segundo Duval (2012a, p.270, grifo do autor) “se é chamada **semiose** a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e **noesis** a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a **noesis** é inseparável da **semiose**”.

Duval (2011) afirma que os registros são sistemas semióticos que nos permitem ter acesso a objetos que são inacessíveis pela percepção. Além disso, Duval (2011) afirma que

Um registro é um sistema semiótico cognitivamente criador. Isso quer dizer que, para considerar um sistema semiótico como um registro, é preciso identificar as operações de produção de representações que ele permite executar de maneira original e específica. (DUVAL, 2011, p, 83)

O desenvolvimento do conhecimento em matemática, e em outras áreas, passa necessariamente pela evolução dos sistemas de representação. Segundo Duval (2009, p.29) “porque não há conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação.”.

Duval (2011) destaca que, inicialmente, elaboramos uma representação para nós mesmos dos objetos e, em seguida, produzimos uma representação semiótica para outra pessoa. Duval (2012a) também ressalta a necessidade de recorrer a várias representações semióticas para a aprendizagem da matemática, já que os objetos matemáticos não são acessíveis à percepção, como os objetos físicos. Esse pesquisador também esclarece sobre representações mentais e representações semióticas:

As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. (DUVAL, 2012a, p. 269)

A função das representações semióticas não se restringe à de comunicação. Essas representações exercem papel muito importante para a atividade cognitiva. As representações mentais e as representações semióticas possuem uma relação recíproca de dependência, pois enquanto as representações mentais dependem do que é percebido, isto é, das representações semióticas, estas por sua vez também são produzidas a partir das representações mentais que temos.

É importante destacar que a variedade de representações ressalta aspectos diferentes de um mesmo conteúdo. Portanto, dispor de várias representações semióticas para o mesmo objeto possibilita maior compreensão do mesmo, já que pode haver uma relação de complementaridade entre as diferentes representações. Se um mesmo objeto matemático, um triângulo, por exemplo, é representado na linguagem natural e como uma figura geométrica, este último registro enfatiza o aspecto figural do triângulo o outro destaca o seu aspecto conceitual. Segundo Duval, mais importante do que procurar a melhor representação para um objeto matemático, deve-se buscar a variedade

de registros e, mais importante ainda, trabalhar a passagem de um registro para o outro. Só assim, afirma o pesquisador, reconhece-se um mesmo objeto matemático mesmo quando em diferentes representações.

Duval (2009) salienta que a noção de representações semióticas pressupõe a consideração de sistemas semióticos diferentes e que os sistemas semióticos devem permitir três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

Constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como *uma representação de alguma coisa* em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. (DUVAL, 2009, p.36)

A primeira das atividades cognitivas citadas acima é o cerne da função de representação de um sistema semiótico. As transformações mencionadas são denominadas tratamento e conversão, respectivamente.

O tratamento é uma transformação em que se permanece no interior do mesmo sistema semiótico. As representações gráficas – desenhos, imagens gráficas, no papel ou na tela do computador – constituem-se em um registro de representações semióticas fundamental na matemática. Suponhamos, por exemplo, a representação gráfica de um triângulo, mostrada na Figura 2. Podemos efetuar transformações sobre essa representação gráfica para obter outras representações, mantendo-nos no interior do mesmo sistema semiótico. Exemplo são mostrados nas Figuras 3, 4 e 5.

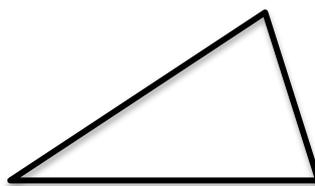


Figura 2 - Exemplo de representação gráfica de triângulos

Fonte: Elaborada pela autora

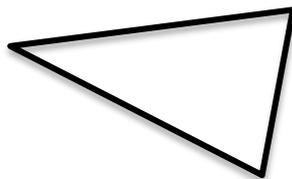


Figura 3- Transformação da representação gráfica dada na figura 2
 Fonte: Elaborada pela autora

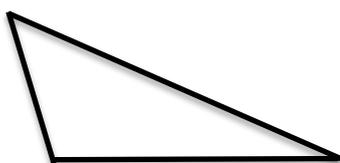


Figura 4 - Possível transformação da representação gráfica dada na figura 2
 Fonte: Elaborada pela autora

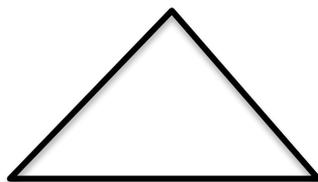


Figura 5 - Possibilidade de transformação da representação gráfica dada na figura 2
 Fonte: Elaborada pela autora

A despeito de serem distintas representações, todas representam triângulos. Assim, quando visamos a aquisição do conceito de triângulo, todas são igualmente pertinentes como representantes desse objeto geométrico: um triângulo. Como afirma Duval (2011, p.18), “O objeto aparece como o invariante do conjunto de variações possíveis de suas representações”. Assim, em geometria, o triângulo não é nenhuma das figuras particulares por meio das quais o representamos.

Julgamos que é pertinente supor que se, em contrapartida, ao longo de determinada obra didática, há muito pouca variabilidade de representações gráficas,

então a aquisição do conceito geométrico de triângulo fica comprometida. Isso nos conduziu a tomar como um dos objetivos específicos de nosso trabalho verificar no conjunto de obras selecionadas a predominância de tipos específicos de representação gráfica e, mais ainda, a ocorrência de um número relativamente reduzido de alguns tipos de representação, como as de triângulos escalenos ou obtusângulos. Convém repetir que todas as representações das Figuras 2, 3, 4 e 5 pertencem ao mesmo registro de representação semiótica e, para nos referirmos a tal registro de modo mais conciso no presente trabalho, o chamaremos de registro figural, ou representação figural.

Segundo Duval, ainda mais importante do que a existência, no ensino, de variação de registros figurais é que ocorram mudanças de registro de representação semiótica: as conversões. A conversão é a transformação de um registro em outro. Por exemplo, quando, no discurso, usamos a palavra ‘triângulo’ e a associamos a um determinado desenho (de triângulo) estabelecemos uma conversão do registro da linguagem natural para o registro figural. No sentido oposto, quando temos um desenho e atribuímos a ele o termo ‘triângulo’ estamos convertendo o registro figural no registro da língua natural. O pesquisador francês adverte que, no caso citado neste parágrafo, não se trata de uma operação simples e localizada, redutível a uma mera associação ou codificação entre dois registros (Ver Duval, 2003, p. 16 e 17). Como se trata de conversões entre registros, toda a complexidade dessa operação poderia ser explorada, o que, segundo Duval, não tem sido feito no ensino usual.

No presente trabalho, limitamo-nos a constatar situações em que se verifica a existência dos dois registros – língua natural e registro figural – atribuindo-lhe o estatuto de conversão. Futuras investigações podem se deter em uma análise mais aprofundada dessas ocorrências, à luz dos elementos constitutivos de uma conversão entre registros de representação semiótica.

Mas não ficamos apenas nessa contagem. Do nosso ponto de vista, requerer a ação do aluno, e não apenas apresentar simultaneamente as duas representações semióticas, seria um modo de favorecer os elementos constitutivos de uma conversão entre o registro da linguagem natural e o registro figural. Por isso, estabelecemos como

um dos objetivos do trabalho, contabilizar as atividades propostas aos alunos nas quais ele é chamado a estabelecer a transformação entre os dois registros, ou seja, estabelecer a conversão.

Prosseguindo em nossos comentários gerais sobre a teoria de Duval, observamos que conceitualização e representação estão intimamente relacionadas nessa proposta teórica. Podemos afirmar que a conceitualização acontece quando o mesmo objeto matemático é representado, pelo menos, por dois registros e somos capazes de fazer a conversão de um registro para outro. De fato, Duval (2009) destaca que a aquisição de conhecimentos limitada a um só registro, seja ele tabela, gráfico, imagem gráfica ou discurso em língua natural, conduz a uma compreensão limitada do objeto: o sujeito só compreende determinado conteúdo quando este lhe é apresentado no determinado registro. Duval (2009) diz tratar-se de uma compreensão mono-registro e, quando aquele mesmo conhecimento é apresentado em outro registro o sujeito não o consegue compreender.

Nos anos iniciais, os alunos experimentam um fase fundamental para o desenvolvimento cognitivo e para a aprendizagem em matemática e o acesso à diversidade de registros e à transformações entre eles é condição indispensável para essa aprendizagem. Duval (2003, p. 21) afirma: “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação”. Ainda segundo o autor, (2003, p.29) “nos indivíduos em formação e desenvolvimento inicial o progresso dos conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica”. Logo, percebemos que a atividade de conversão é muito importante para a aprendizagem e deve estar presente no ensino de matemática desde os anos iniciais.

Segundo Duval (2011), as transformações que se podem fazer são mais importantes do que as próprias representações. Para analisar as transformações de registros (conversão e tratamento), é preciso considerar os diferentes tipos de registros, pois eles possuem especificidades próprias, ou seja, mobilizam operações cognitivas diferentes na transformação, essas operações dependem do registro. Ainda segundo

Duval (2011, p. 73), “[...] o conhecimento matemático não começa com as representações semióticas dos conceitos ou dos objetos matemáticos, mas com suas transformações.”

Duval (2009) afirma que o ensino acaba privilegiando o tratamento e não a conversão, por vários motivos e menciona, por exemplo, a existência de regras para realizar a atividade de tratamento de alguns registros, como a língua natural ou os registros numéricos. Mas no caso da conversão, na maioria das vezes, não dispomos de regras para converter, e ainda é preciso considerar que as regras de conversão mudam conforme muda o sentido da mudança de registro.

Segundo Duval (2009, p.63) “[...] a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos”. Ainda segundo Duval (2009, p.99, grifo do autor) “uma aprendizagem especificamente centrada sobre *a conversão de representações* e efetuada *fora de toda tarefa de tratamento* parece, então, necessária ao início de todo ensino que dá acesso a um novo domínio ou a uma nova rede conceitual.”

Ao realizar a transformação de conversão de registros é necessário considerar o fenômeno de congruência. Quando não há congruência o reconhecimento do objeto não é imediato, pois não há transparência suficiente.

Porém, se a conversão é imediata, há congruência entre a representação de partida e a representação convertida, sendo possível estabelecer uma correspondência entre as representações. Segundo Duval (2009, p.81) “mas geralmente, a mudança de registros constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação.”

Duval (2009, p. 69) apresenta que “duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações.” Além disso, o autor ainda afirma que “a dificuldade da conversão de

uma representação depende do grau de não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada.”

Quando duas representações são congruentes é possível perceber de imediato o mesmo objeto matemático representado pelas duas, já quando duas representações são ditas não congruentes, este reconhecimento não é imediato, há dificuldade em perceber que as duas representações se referem do mesmo objeto matemático.

É necessário considerar a natureza dos registros envolvidos na conversão, pois registros diferentes mobilizam atividades cognitivas diferentes para realizar a conversão. Além disso, quando mudamos o sentido da conversão também precisamos mudar a sua análise, pois trata-se de outra conversão, temos outro registro de chegada e outro registro de partida, são outras dificuldades de conversão que podem ser mais complexas ou não.

Sobre conversão, Duval (2011) ainda explica que “não podemos distinguir as unidades de sentido matematicamente pertinentes no conteúdo de uma representação sem convertê-las, implícita ou explicitamente, em outro registro” (DUVAL, 2011, p. 108). Segundo Duval (2011), especificamente as figuras geométricas, são representações semióticas que nos permitem diferentes maneiras de visualizar suas unidades figurais.

Para o autor, ver geometricamente uma imagem gráfica ou desenho, implica em reconhecer formas ou unidades figurais diferentes sem alterar sua representação no papel. Por exemplo, diante do desenho de uma figura geométrica plana, é possível reconhecer as dimensões de suas unidades figurais, como pontos (vértices, de dimensão zero) e segmentos (de dimensão um), a visualização dessas formas contribui para a compreensão das propriedades da figura geométrica.

Duval (2012b, p.118) destaca três maneiras diferentes de ver as figuras segundo seu papel: a apreensão perceptiva, a apreensão operatória e a apreensão discursiva. Esta pesquisa está relacionada diretamente à apreensão operatória, porque ela se refere às possíveis modificações de uma figura. Os tipos de apreensão operatória são: Modificações mereológicas, modificações óticas e modificações posicionais. Todas

essas modificações podem ser realizadas graficamente ou mentalmente, porém o nosso foco são as modificações realizadas graficamente com as representações de triângulos. Em relação às modificações de uma figura, Duval (2012b, p.125) caracteriza como modificações mereológicas como sendo as modificações que relacionam parte e todo, ou seja, dividir uma figura em subfiguras ou incluí-la em outra figura de modo que ela se torne uma subfigura. A apreensão operatória está presente nos critérios deste estudo. Entre os tipos de modificações dentro da apreensão operatória, as modificações relativas à posição dos triângulos na página são investigadas na presente pesquisa. O próprio Duval (2012a, p.289) enfatiza a importância da apreensão operatória para o estudo das figuras, “uma aprendizagem dos tratamentos propriamente figurais deve ser uma aprendizagem centrada na apreensão operatória das figuras e não nas apreensões sequenciais e discursivas.”

Quanto a modificação ótica, podemos afirmar que quando se usa lentes e espelhos para aumentar, diminuir ou deformar um desenho chama-se modificação ótica. Em relação à apreensão perceptiva, Duval (2012b, p.118) define “a apreensão perceptiva é o reconhecimento visual e imediato da forma”. De acordo com pesquisas anteriores, o reconhecimento imediato das representações de triângulo não ocorreu quando os desenhos foram apresentados em posições nas quais os lados dos triângulos não estão paralelos à margem inferior do papel, conforme mostra a pesquisa de Bueno (2009).

Nos anos iniciais, os alunos experimentam uma fase fundamental para o desenvolvimento cognitivo e para a aprendizagem em matemática e o acesso à diversidade de registros e às transformações entre eles é condição indispensável para essa aprendizagem. Segundo o autor, (2003, p.29) “nos indivíduos em formação e desenvolvimento inicial o progresso dos conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica”. Logo, percebemos que a atividade de conversão é muito importante para a aprendizagem e deve estar presente no ensino de matemática desde os anos iniciais.

No quadro seguinte, extraído de Duval (2003, p. 14), são classificados diferentes registros de representação semiótica que são fundamentais para o conhecimento matemático.

Quadro 1: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> • argumentação a partir observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas 	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). <ul style="list-style-type: none"> • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> • Numérica (binárias, decimal, fracionária...) • algébricas; • simbólica (línguas formais). Cálculo. 	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> • mudança de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14)

Para que possamos discutir sobre a conversão de registros, é preciso analisar os registros envolvidos na conversão. Nesta pesquisa, iremos identificar as conversões entre a língua natural e a representação de triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais.

Quanto à língua natural, Duval (2011) diz-nos que:

A língua não é um código, mas um registro de representação semiótica. A grande variedade de tipos de discursos que ela permite produzir depende de operações irredutíveis a uma gramática ou a regras. A utilização da língua não tem nada a ver com o funcionamento de um sistema formal. Ela repousa nas operações discursivas que cumprem as funções cognitivas e que todo ato de expressão e de compreensão de um discurso produz mobilizando os diversos graus. (DUVAL, 2011, p. 76)

Para o pesquisador francês (2011), o alfabeto é um exemplo de sistema semiótico que realiza a função de comunicação, o que caracteriza um código, o alfabeto nos permite passar da fala à escrita. Mas há sistemas semióticos que se destacam pelas funções cognitivas de objetivação, como exemplo, os sistemas de escrita de números, estes por sua vez são tidos na teoria como registros.

Cada registro possui suas unidades significantes e identificá-las é fundamental para as conversões e para a coordenação dos registros. A discriminação de unidades significantes é algo complexo e diferente de acordo com o registro. No caso da língua natural, podemos considerar que as unidades podem ser enunciados, fórmulas, um texto, palavras ou símbolos. No caso das figuras e dos gráficos Duval (2009, p.101) afirma que “uma definição provável e individual de unidades significantes torna-se totalmente inoperante e ambígua”.

Ainda sobre representações em língua natural, o autor menciona que a conversão no sentido: representação não discursiva => expressão em língua natural, é menos complexa do que a conversão: expressão em língua natural => representação não discursiva. Na primeira, é possível realizarmos uma descrição de uma imagem, figura, objeto. Já ao mudar o sentido da conversão, além de interpretar o que é dito no texto, precisamos compreender também a organização da sintaxe própria da língua natural.

Duval (2003) afirma que a atividade de reconhecimento é tão importante quanto a atividade de produção. Portanto, identificar uma figura geométrica simples e a “identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais” (DUVAL, 2003, p. 28), deve ser investigado considerando a resposta que é dada e o tempo, pois, segundo o autor, o reconhecimento eficiente é aquele que ocorre rápido.

Além disso, o estudo das conversões nos livros didáticos será realizado considerando dois registros em relação ao triângulo, a língua natural e o registro figural. Para a análise das conversões, tomamos como ponto de partida o seguinte:

Quando se trata da articulação entre dois registros em relação à representação de um objeto matemático, duas condições devem ser efetivamente respeitadas: primeiramente, a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos *dois sentidos*

conversão; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e *casos de mais ou menos complexos de não congruência*. (DUVAL, 2003, p. 27)

Ao solicitar a representação do triângulo, o aluno precisa converter o texto, registro em língua natural, para a figura, o registro figural do triângulo. A resposta da atividade estará correta se o aluno desenhar o registro figural corresponde à palavra triângulo.

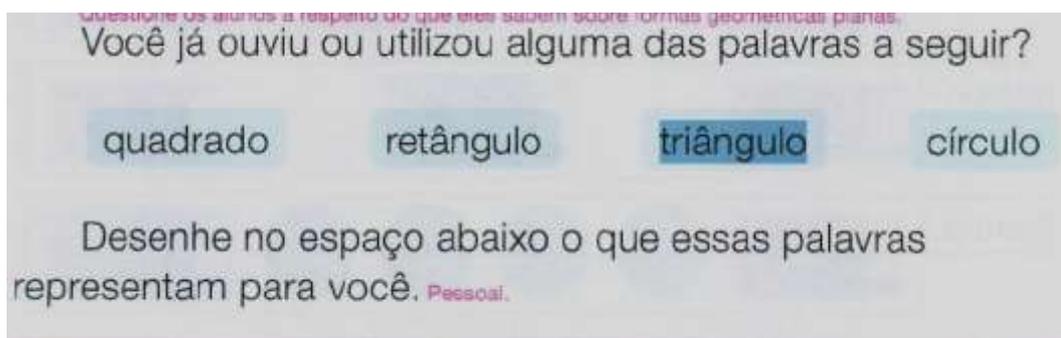


Figura 6 - Atividade de conversão da língua natural para o registro figural

Fonte: Coleção CLD22, v.2, p.150

A conversão no sentido oposto é exemplificada a seguir:

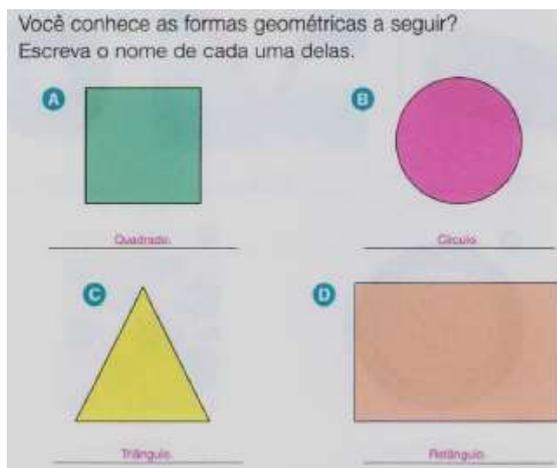


Figura 7 – Atividade de conversão do registro figural para a língua natural

Fonte: Coleção CLD22, v.3, p.107

Breve revisão de pesquisas anteriores

Pesquisas anteriores sobre triângulos, como Pirola (1995), Bueno (2009), Brito e Pirola (2005), constataram que os alunos têm dificuldade em identificar os triângulos quando variamos a posição. O estudo de Pirola (1995) verificou que quando solicitados a desenhar um exemplo de triângulo, 90,6% dos alunos desenharam a Figura 8. Mesmo sendo alunos da 5^a à 8^a série, os desenhos que predominaram foram de triângulos equiláteros, isósceles ou retângulos como a figura 10, além disso, os alunos tiveram dificuldade em reconhecer o triângulo da figura 9.

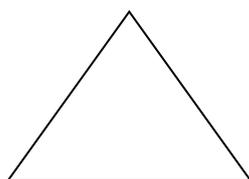


Figura 8 - Triângulo equilátero

Fonte: Elaborada pela autora

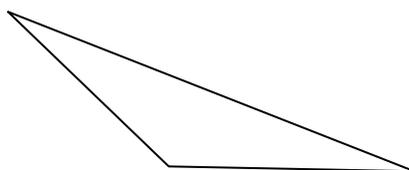


Figura 9 - Triângulo escaleno obtusângulo

Fonte: Elaborada pela autora

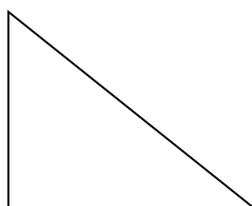


Figura 10 - Triângulo retângulo

Fonte: Elaborada pela autora

Estas pesquisas apontam que há dificuldades na identificação das representações de triângulos, além disso, quando questionados sobre os principais atributos dos triângulos os alunos também não reconheceram algumas de suas propriedades.

Os resultados da pesquisa de Pirola e Brito (2005) com alunos da 5ª série mostraram que houve dificuldade para identificar triângulos obtusângulos, enquanto os triângulos acutângulos isósceles eram mais identificados. A pesquisa de Bueno (2009) também constatou a mesma dificuldade com alunos da alfabetização matemática (1º, 2º e 3º anos). Bueno (2009) investigou as manifestações orais e escritas de 6 alunos da alfabetização matemática, utilizando atividades para a visualização de desenhos, o reconhecimento e a explicação oral da compreensão dos alunos sobre os triângulos, quadriláteros, quadrado e retângulo. Assim como Bueno (2009), Pirola e Brito (2005) observaram que os alunos reconheceram rapidamente os triângulos quando estes são acutângulos isósceles ou equiláteros, na pesquisa de Bueno (2009) houve casos em que o aluno não considera o desenho como triângulo se não corresponder a estas características. Além disso, Bueno (2009) também constatou que os alunos só reconhecem triângulos, quadrados e retângulos quando estes estão com a base paralela a margem inferior da folha, de modo que representações como a figura 11 não foram reconhecidas como triângulos por alunos da alfabetização matemática.

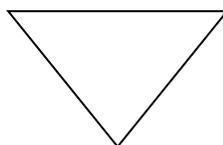


Figura 11- Triângulo o lado horizontal a margem superior da folha

Fonte: Elaborada pela autora

Questões suscitadas

As considerações teóricas expostas neste capítulo, suscitam muitos temas para investigações tanto teóricas quanto documentais e experimentais.

Nos limites estabelecidos para o presente trabalho, são duas as questões que procuramos responder:

- No conjunto de coleções didáticas escolhidas, como são as representações gráficas de triângulos com respeito às características dos triângulos – comprimento dos lados, medida dos ângulos – e à disposição das imagens gráficas dos triângulos na página. Há uma variabilidade equilibrada dessas características ou há escolhas dominantes?
- Qual a frequência relativa das atividades relativas a triângulos nas quais o aluno é solicitado a realizar uma conversão entre os registros da língua natural e figural?

Os objetivos do presente trabalho procuram responder a essas duas questões, tendo como Objetivo Geral: Analisar as representações gráficas de triângulos em livros didáticos de Matemática destinados aos cinco anos iniciais do ensino fundamental à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

Os objetivos específicos da pesquisa são:

1. Analisar a variabilidade das representações gráficas de triângulos, quanto a três critérios: comprimento dos lados; medida dos ângulos e posição na página.
2. Identificar nas coleções selecionadas e focalizando no triângulo, as atividades de conversões do registro na língua natural para o registro figural e do registro figural para o registro na língua natural.

CAPÍTULO II

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Conjunto de livros didáticos investigados

Adotamos os procedimentos de uma pesquisa documental tendo como universo investigado as coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD 2013, na área de matemática. A consulta ao Guia de Livros Didáticos do PNLD 2013 revela-nos que foram aprovadas 22 coleções que incluíam livros para todos os cinco anos da primeira etapa do ensino fundamental, os três primeiros volumes destinados ao ciclo de Alfabetização Matemática e os dois últimos para o componente curricular Matemática. Nossa análise incluiu não apenas os volumes destinados ao aluno, como o manual do professor, que acompanha cada um desses volumes. O total de livros analisados foi de 110 volumes (cada coleção é constituída de cinco volumes). Para referência ao longo deste trabalho, as coleções foram codificadas em CLD (Coleção de Livro Didático) seguida de um número: CLD1, CLD2, CLD3, CLD4, CLD5, CLD6, CLD7, CLD8, CLD9, CLD10, CLD11, CLD12, CLD13, CLD14, CLD15, CLD16, CLD17, CLD18, CLD19, CLD20, CLD21, CLD22.

No nosso estudo dessas coleções, em conformidade com os objetivos traçados, fizemos um mapeamento detalhado das ocorrências de representações gráficas de triângulos segundo três critérios:

- Comprimento dos lados: triângulos equiláteros, isósceles, escalenos.
- Medida dos ângulos: triângulos acutângulos, retângulos, obtusângulos.
- Posição das representações gráficas dos triângulos na página.

Além desse, realizamos um mapeamento exploratório de atividades em que se propõem aos alunos conversões entre os registros da língua natural e o registro figural.

Fazemos, em seguida, algumas considerações sobre o manual do professor que acompanha os volumes destinados aos alunos.

Comprimento dos lados: triângulos equiláteros, isósceles, escalenos

De início, procuramos identificar quantas são as situações, no texto, em que a representação de um triângulo é realizada por meio de imagem gráfica de um triângulo equilátero, de um triângulo isósceles ou de um triângulo escaleno². Assim, nesta categoria, o critério para análise das imagens gráficas de um triângulo é a comparação entre os comprimentos dos lados dessa imagem gráfica.

Tal comparação, como sabemos, é feita, quase sempre, por meio das medidas dos comprimentos desses lados. A este respeito existem, pelo menos, duas possibilidades a considerar.

Na primeira, a imagem gráfica é a representação figural de um triângulo sem nenhuma informação adicional relativamente ao comprimento de seus lados.

Vejamos exemplos extraídos de livros analisados.



Figura 12 - Representação figural de um triângulo da coleção CLD21

Fonte: Coleção CLD21, v. 2, p. 30

² Convém repetir que, neste trabalho, como usualmente se faz no ensino fundamental, escolhemos chamar de triângulo isósceles aqueles que são isósceles não equiláteros.

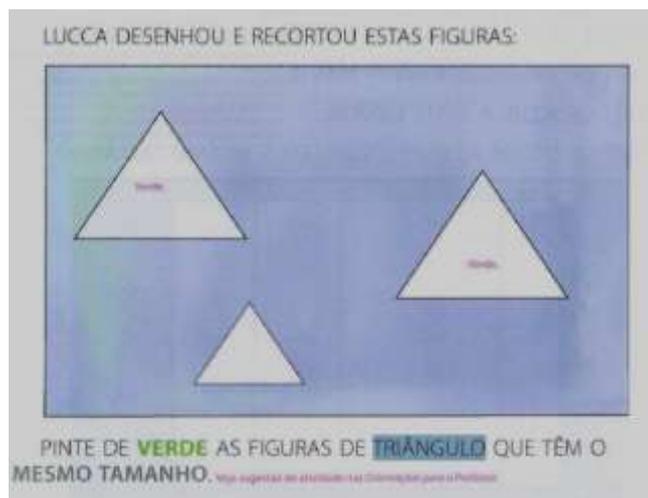


Figura 13 - Representação figural triângulos da coleção CLD8

Fonte: Coleção CLD8, v. 1, p. 8

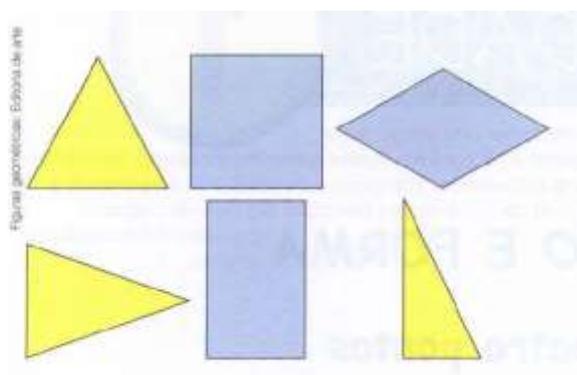


Figura 14 - Representações de triângulos da coleção CLD8

Fonte: Coleção CLD8, v. 1, p. 8

Nesses casos, é impossível, apenas recorrendo à imagem gráfica, decidir tratar-se de um triângulo equilátero ou isósceles. De fato, teríamos que recorrer à medição dos comprimentos dos lados da imagem gráfica do triângulo com algum instrumento de medição de comprimentos. É sabido que, a rigor, nenhuma medição empírica, como essa, permite afirmar a igualdade de medidas, em face da incerteza inerente ao processo. Contornamos essa dificuldade adotando uma medição com régua graduada em milímetros e admitindo valores aproximados (mais ou menos meio milímetro) para as medidas obtidas. Nos casos dos triângulos escalenos, nos quais a medição empírica permite, em geral, decidir a desigualdade de medidas, adotamos o mesmo procedimento de medição.

No exemplo da Figura 12, consideramos uma representação gráfica de um triângulo equilátero, na Figura 13, computamos três triângulos equiláteros e na Figura 4, dois triângulos isósceles e um escaleno.

Em uma segunda possibilidade o texto fornece informação sobre os comprimentos dos lados dos triângulos e a medição com instrumentos é dispensada. Isso ocorre de várias maneiras, entre as quais as citadas a seguir.



Figura 15 - Representação gráfica de triângulos da coleção CLD11

Fonte: Coleção CLD11, v. 5, p.249

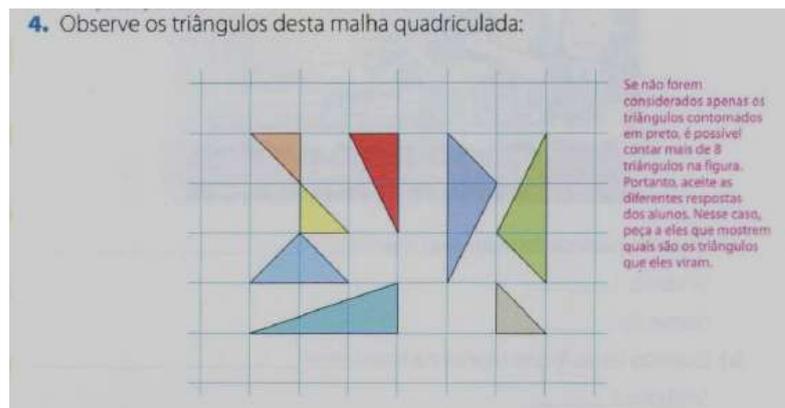


Figura 16 - Representação gráfica de triângulos da coleção CLD8 na malha quadriculada

Fonte: Coleção CLD8, v. 1, p. 22

No exemplo da Figura 15, computamos um triângulo de cada tipo e na Figura 16 consideramos quatro triângulos isósceles e quatro escalenos.

Medida dos ângulos: triângulos acutângulos, retângulos, obtusângulos

Nesta categoria, o objetivo é contar quantas são as situações, no texto, em que a representação de um triângulo é realizada por meio de imagem gráfica de um triângulo acutângulo (apenas ângulos agudos), de um triângulo retângulo (um ângulo reto), ou de um triângulo obtusângulo (um ângulo obtuso). Assim, nesta categoria, o critério para análise das imagens gráficas de um triângulo é a medida dos ângulos do triângulo.

Igualmente neste caso, aplicam-se considerações análogas às que fizemos sobre a medição dos comprimentos dos lados do triângulo, agora envolvendo a medição dos ângulos com recurso a um transferidor. Do mesmo modo, ocorrem situações em que a medição é dispensável por serem dadas, no texto, informações sobre as medidas dos ângulos do triângulo. Além disso, exceto no caso do triângulo retângulo, em que devemos constatar uma igualdade (um dos ângulos deve medir 90°), verificar se um

triângulo é acutângulo ou obtusângulo, quase sempre, pode ser decidido pela simples visualização da imagem gráfica do triângulo, dispensando-se o emprego do transferidor.

A seguir, damos exemplos das possibilidades mencionadas. Na figura 17 a medição é necessária, já na figura 18 a medição é dispensável.

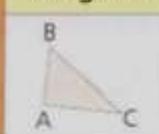
Polígono	Número de lados	Número de vértices	Número de ângulos	Nome
	3	3	3	Triângulo

Figura 17 – Situação em que a medição dos ângulos é necessária

Fonte: Coleção CLD4, v.2, p.123

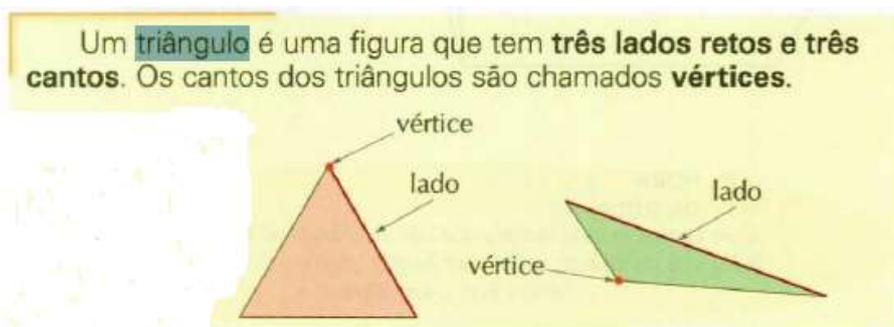


Figura 18 – Situação em que a medição dos ângulos é dispensável

Fonte: Coleção CLD20, v.4, p.158

Posição da representação gráfica do triângulo na página

As representações gráficas de triângulos podem ocupar, a rigor, infinitas posições na página em que aparecem. O estudo exploratório que realizamos nos livros selecionados mostrou, no entanto, que predominam os casos em que um dos lados do triângulo é paralelo à margem inferior da página do livro e o terceiro vértice fica acima desse lado. Para facilitar a referência a essa posição, vamos denominá-la de “*posição horizontal*”. É o que se verifica no exemplo extraído de um dos livros analisados (CDL20, v.3, p. 59):

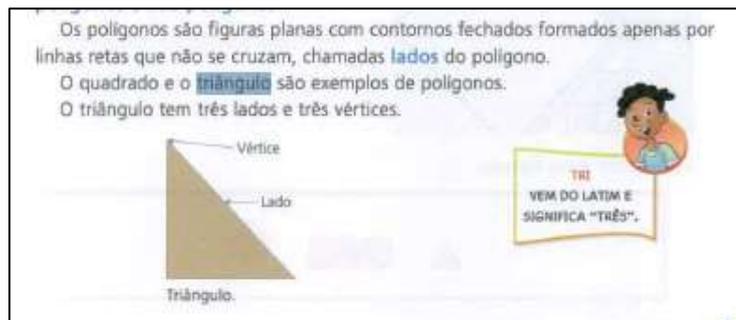


Figura19 – Triângulo em posição horizontal

Fonte: CDL20, v.3, p. 59

Delimitação das situações analisadas

A coleta de dados nos livros selecionados revelou uma grande diversidade de situações, quando são considerados os elementos discutidos na fundamentação teórica contida no Capítulo I.

Um primeiro caso a observar ocorre quando o termo ‘triângulo’ é associado a objetos do mundo físico. O extrato a seguir exemplifica este caso (Coleção CLD1, v.2, p. 179):

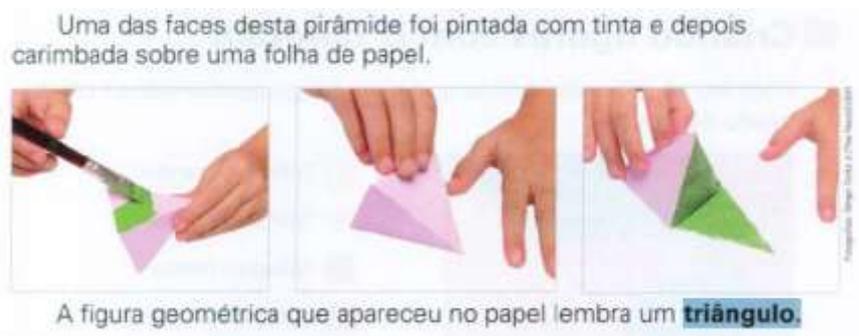


Figura 20 – Triângulo associado a objetos do mundo físico

Fonte: Coleção CLD1, v.2, p.179

Nessas situações, são empregadas representações planas de objetos espaciais, por meio das técnicas de perspectiva. No exemplo acima, a palavra ‘triângulo’ é remetida a parte de um objeto espacial que é representado por uma imagem gráfica, esta

última necessariamente plana. Sabemos que as representações planas de objetos espaciais, como a pirâmide citada, não preservam todas as propriedades métricas dos triângulos que formam suas faces laterais. Por exemplo, suponhamos que os triângulos nas faces laterais da pirâmide na Figura 10 sejam isósceles. No entanto, suas representações em perspectiva não são triângulos isósceles. A contagem de ocorrências de triângulos isósceles fica, assim, prejudicada. Afirmação análoga poderíamos fazer com respeito à contagem das imagens gráficas de objetos espaciais segundo o critério da medida dos ângulos de triângulos que são faces desses objetos. Por isso, excluímos essas situações da presente análise. Em particular, todas as atividades envolvendo dobraduras foram deixadas de fora de nossa contagem.

Recorre-se, com frequência, a imagens gráficas contidas em obras de arte, com intuito de associar essas imagens a figuras geométricas. No entanto, com frequência tais imagens gráficas são representações figurais “estilizadas” e nem sempre de traçado completo. Um exemplo desses casos pode ser visto a seguir (CLD22, volume 4, página 104):



Figura 21- Representações gráficas de triângulos em obras de artes

Fonte: Coleção CLD22, v. 4, p.104

Ocorrem, ainda, situações em que o objeto geométrico triângulo é associado a malhas triangulares (CLD8, volume 2, página 94):

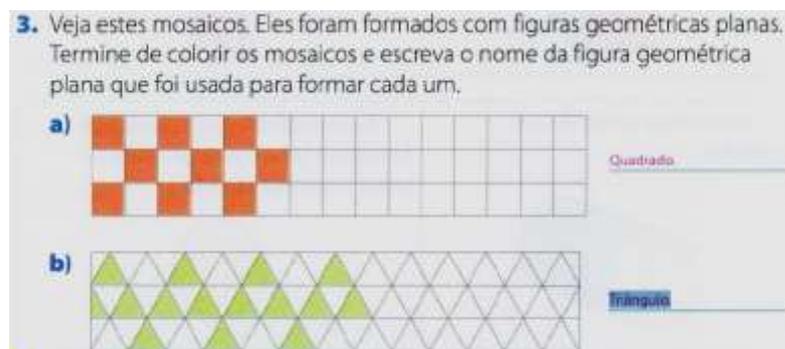


Figura 22– Malha triangular

Fonte: Coleção CLD8, volume 2, página 94

Na malha triangular da Figura 22, poderíamos considerar para nossa contagem uma grande multiplicidade de triângulos dos vários tipos que compõem as categorias escolhidas por nós e não apenas uma célula da malha. A percepção dessas possibilidades certamente extrapola a percepção visual mais imediata das imagens gráficas, empregada em nossa análise. Por esse motivo, excluímos a contagem de triângulos que compõem malhas.

Atividades de conversão entre o registro da linguagem natural e o registro figural

Nas obras analisadas, as conversões entre o registro da linguagem natural e o registro figural são, quase sempre, realizadas no próprio livro, ao longo dos textos de explanação e de exercícios. Mas há, também, ocasiões em que as mencionadas conversões são propostas como atividades para aprendizagem do aluno. Tais ocasiões, segundo a teoria dos registro de representação semiótica, são particularmente importantes para que o aluno adquira o conhecimento matemático visado. Por isso, realizamos um mapeamento preliminar dessas atividades, no conjunto dos livros selecionados. A seguir, é mostrado um exemplo de atividade de conversão do registro figural para o registro em língua natural³ (CLD1, vol. 4, p. 185):

³ Os textos em azul não aparecem no livro do aluno, mas apenas no manual do professor.

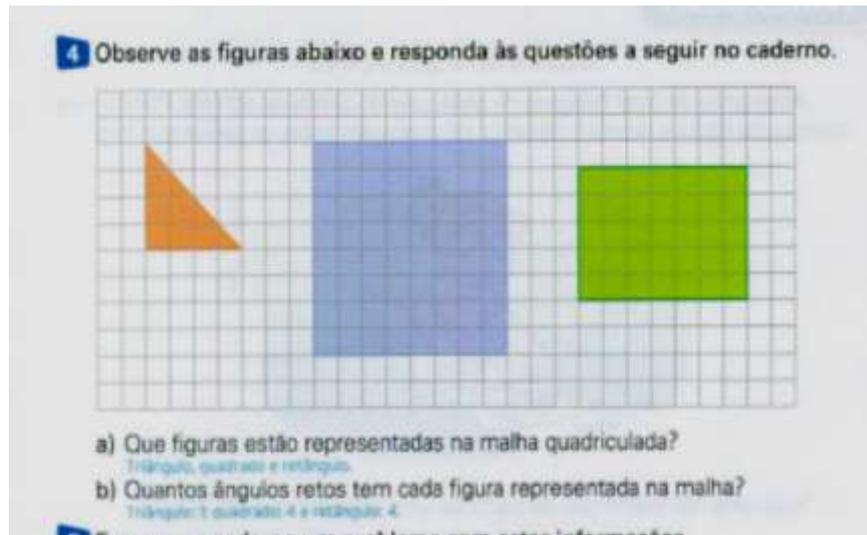


Figura 23 – Conversão de registro figural para língua natural

Fonte: CLD1, vol. 4, p. 185

O extrato seguinte exemplifica uma atividade de conversão no sentido oposto⁴ (CLD1, vol. 2, p. 179):

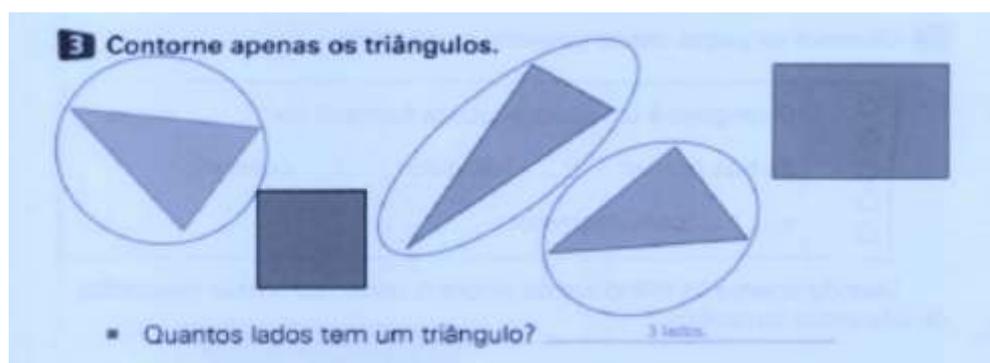


Figura 24 - Conversão de língua natural para registro figural

Fonte: CLD1, vol. 2, p. 179

⁴ As curvas que circundam as figuras aparecem apenas no manual do professor.

Manual do professor

No PNLD, cada volume destinado ao aluno é acompanhado de um manual do professor. Nos editais desse Programa é estabelecido que o referido manual deve desempenhar vários papéis relevantes como suporte do trabalho docente (CARVALHO & GITIRANA, in BRASIL, 2010), o que justifica nossa atenção a esses manuais.

Uma análise exploratória foi realizada nos manuais, com o objetivo de identificar ocorrências de orientações pedagógicas que envolvessem as questões dos registros de representação semiótica dos triângulos.

No próximo capítulo, são reunidos e analisados os dados relativos aos objetivos desta pesquisa.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DOS RESULTADOS

No presente capítulo, apresentaremos os resultados da investigação segundo os objetivos estabelecidos no capítulo anterior. Em particular, para cada uma das categorias referidas no Capítulo II, relativas às representações gráficas de triângulos, faremos uma apresentação dos dados obtidos, organizando-os em tabelas, com as frequências absolutas e relativas das ocorrências observadas. Seguem-se gráficos de coluna que favorecem a análise desses dados, extraídos das 22 coleções selecionadas.

Para maior detalhamento dos dados por coleção, podemos consultar os Apêndices desta dissertação. Com bases nesses dados, posteriores estudos poderão ser realizados, nos quais, por exemplo, a evolução dos padrões observados ao longo dos cinco volumes venha a ser investigada.

Comprimento dos lados: triângulos equiláteros, isósceles, escalenos

A análise dos dados confirma nossas observações iniciais feitas com a coleção CLD1 durante o início da pesquisa. De fato, nas coleções, quase todas as representações são de triângulos equiláteros ou isósceles, sendo reduzido o número das imagens gráficas dos triângulos escalenos. Apenas três nas coleções CLD3, CLD13 e CLD15, esse padrão não é seguido, em especial na primeira delas é visível.

Dessa maneira, os dados obtidos revelam que, em quase todos os livros analisados, o aluno é exposto a uma variedade limitada de representações gráficas de triângulos, com respeito aos comprimentos de seus lados.

À luz da teoria dos registros de representação semiótica, essa variedade é considerada essencial para que o aluno adquira o conhecimento do objeto matemático triângulo como um invariante de suas representações. Convém, nesta altura, lembrar nossa observação no Capítulo I, em que nos referimos a dificuldades dos alunos em reconhecer um triângulo escaleno como um triângulo.

Com a análise das vinte e duas coleções, observamos que, em dezenove coleções (86, 4%), a maioria das representações foi de triângulos isósceles e apenas três coleções

(13,6%) apresentaram como maioria as representações de triângulos equiláteros. É possível notar, conforme a tabela abaixo, que a quantidade de representações de triângulos escalenos não é maioria em nenhuma das coleções. Embora não tenha sido um objetivo estabelecido para nosso trabalho, esses dados permitem uma posterior análise estatística que conduza a uma caracterização mais precisa dos tipos de triângulos representados graficamente nos livros em foco.

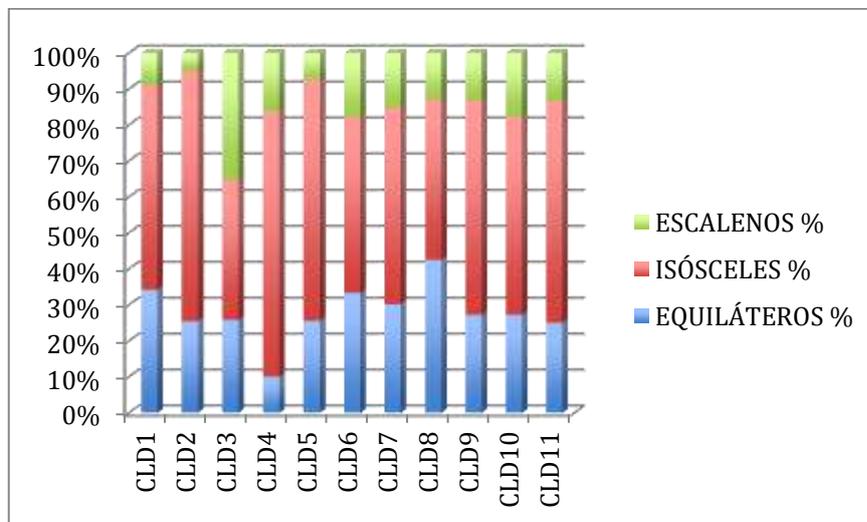
A seguir, apresentamos a tabela com os dados obtidos e com os gráficos de coluna correspondentes às frequências relativas das ocorrências observadas.

Tabela 1- Quantidade de Representações gráficas de triângulos quanto aos lados

COLEÇÃO	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE TRIÂNGULOS			TOTAL
	EQUILÁTEROS	ISÓSCELES	ESCALENOS	
CLD1	137	228	35	400
CLD2	152	414	29	595
CLD3	65	98	88	251
CLD4	45	332	72	449
CLD5	80	209	23	312
CLD6	80	117	43	240
CLD7	80	145	40	265
CLD8	217	228	66	511
CLD9	79	173	38	290
CLD10	85	171	55	311
CLD11	124	306	66	496
CLD12	10	170	32	212
CLD13	129	168	118	415
CLD14	62	302	67	431
CLD15	120	228	126	474
CLD16	259	258	35	552
CLD17	172	163	64	399
CLD18	105	206	50	361
CLD19	228	309	157	694
CLD20	170	140	21	331
CLD21	92	147	69	308
CLD22	63	139	44	246

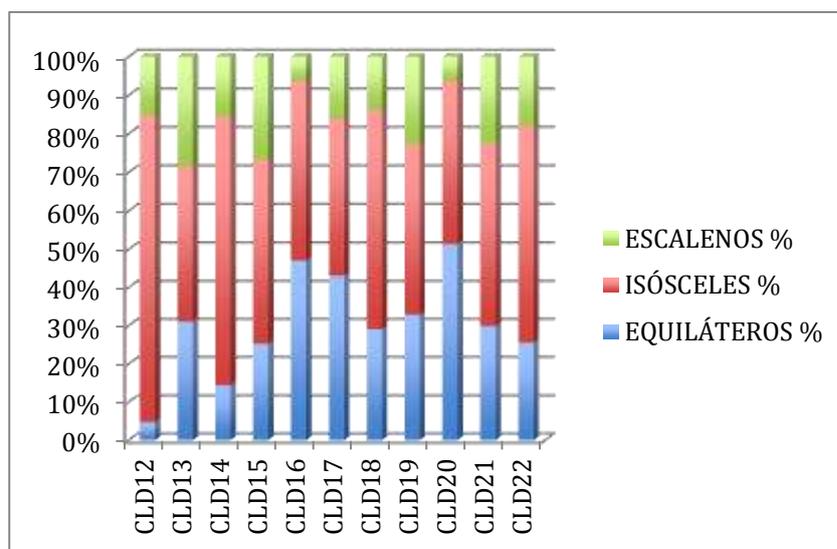
Fonte: Elaborada pela autora

Gráfico 1- Distribuição das representações de triângulos quanto ao comprimento dos lados de CLD1 a CLD11 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 2- Distribuição das representações de triângulos quanto ao comprimento dos lados de CLD12 a CLD22 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Em muitas das situações observadas, é estabelecida uma correspondência explícita entre dois registros do objeto geométrico triângulo: registro em língua natural, a palavra ‘triângulo’, e o registro figural, a imagem gráfica de um triângulo. Convencionamos que essa dupla conversão será denominada “*triângulo nomeado*”. O exemplo a seguir procura esclarecer o tipo de situação (CLD17, v. 3, p. 45):

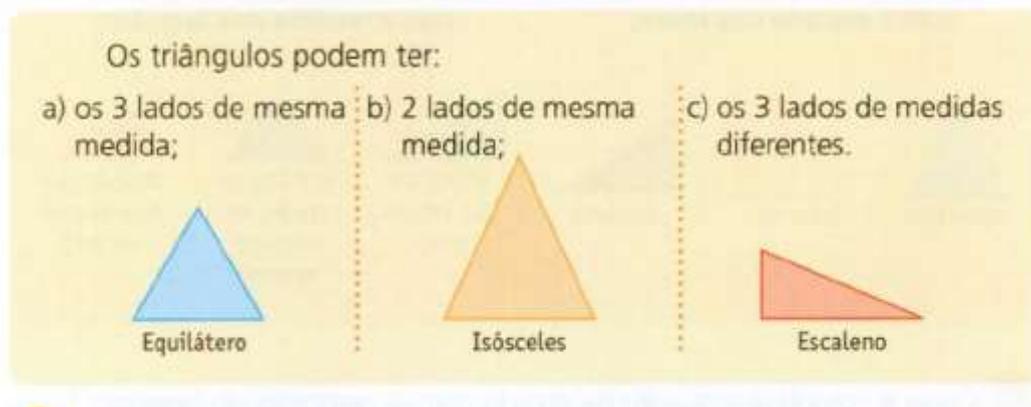


Figura 25- Triângulos nomeados

Fonte: CLD17, v. 3, p. 45

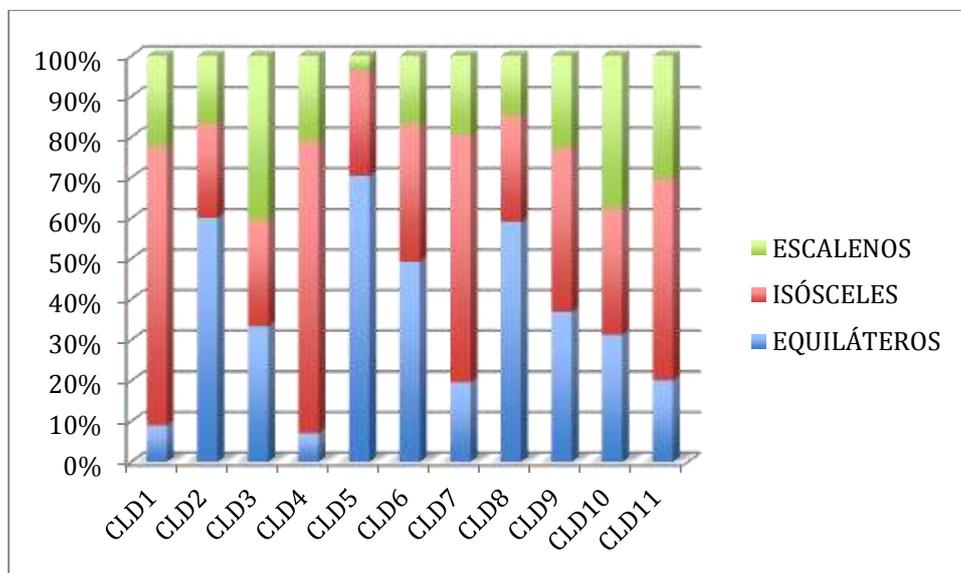
Fizemos um levantamento desse tipo de ocorrências e os dados obtidos são expressos a seguir, em uma tabela e em dois gráficos.

Tabela 2 - Quantidade de Representações gráficas de triângulos nomeados quanto aos lados

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE TRIÂNGULOS NOMEADOS				
COLEÇÃO	EQUILÁTEROS	ISÓSCELES	ESCALENOS	TOTAL
CLD1	8	61	20	89
CLD2	18	7	5	30
CLD3	37	29	45	111
CLD4	11	113	33	157
CLD5	38	14	2	54
CLD6	32	22	11	65
CLD7	8	25	8	41
CLD8	72	32	18	122
CLD9	21	23	13	57
CLD10	24	24	29	77
CLD11	19	47	29	95
CLD12	6	11	7	24
CLD13	35	33	36	104
CLD14	3	12	16	31
CLD15	13	36	39	88
CLD16	194	54	30	278
CLD17	25	20	18	63
CLD18	25	61	27	113
CLD19	43	94	41	178
CLD20	36	17	11	64
CLD21	33	36	32	101
CLD22	16	46	1	63

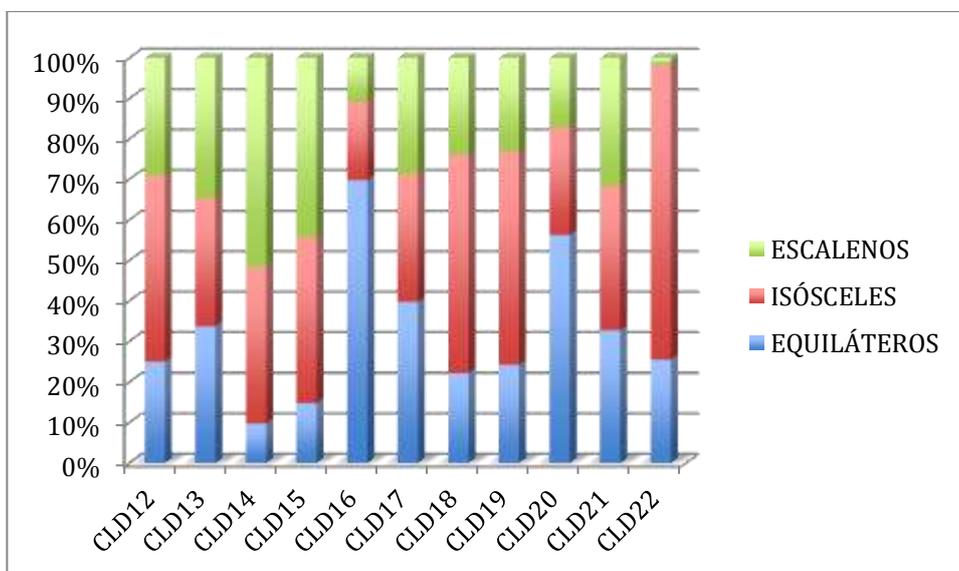
Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 3- Distribuição das representações de triângulos nomeados quanto ao comprimento dos lados de CLD1 a CLD11(percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 4- Distribuição das representações de triângulos nomeados quanto ao comprimento dos lados de CLD12 a CLD22 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Os dados provenientes do subconjunto das representações gráficas de “triângulos nomeados” mostram haver maior atenção às representações gráficas de triângulos escalenos nesse subconjunto de todas as representações gráficas de triângulos nas obras. Além das coleções CLD3, CLD13 e CLD15, que já apresentavam maior equilíbrio entre as três categorias de representação gráfica na Tabela 1, agora as coleções CLD10, CLD11, CLD14, CLD17 e CLD21 apresentam maior percentual de representações gráficas de triângulos escalenos. Uma possível explicação para esse fato é que a nomeação de triângulos ocorre com maior frequência em textos cuja finalidade específica é a classificação dos triângulos segundo os comprimentos dos lados. Em tais textos de classificação é esperado que haja representações gráficas para cada um dos tipos: equiláteros, isósceles e escalenos.

Medida dos ângulos: triângulos acutângulos, retângulos, obtusângulo

Os dados obtidos nesta categoria ratificam nossas observações preliminares nos livros selecionados. De fato, no universo investigado, quase todas as representações são de triângulos acutângulos ou retângulos, sendo raras as imagens gráficas dos triângulos obtusângulos.

Dessa maneira, ao aluno é oferecida uma variedade muito limitada de representações gráficas de triângulos, com respeito à medida dos seus ângulos.

Quando invocamos a teoria dos registros de representação semiótica, essa variedade limitada não contribui para que o aluno adquira o conhecimento do objeto matemático triângulo como um invariante de suas representações. Possivelmente, tal opção dos autores reforça as dificuldades reveladas pelos alunos no reconhecimento de triângulos obtusângulos e na compreensão de suas propriedades comuns que são comuns a todos os triângulos.

Constatamos, ainda, que em catorze coleções (63,6%) predominam representações de triângulos acutângulos, enquanto em oito coleções (36,4%) a maioria recai em representações de triângulos retângulos.

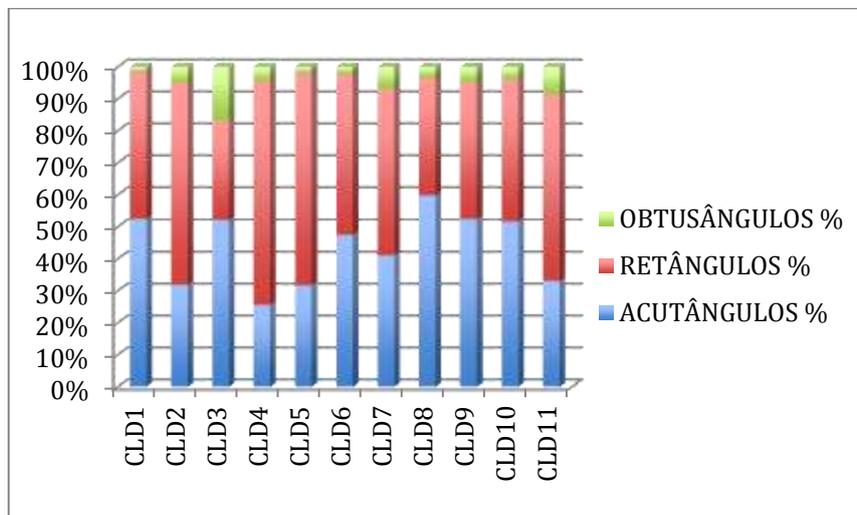
A seguir, apresentamos a tabela com os resultados obtidos, seguidos dos gráficos de coluna correspondentes às frequências relativas das ocorrências observadas.

Tabela 3 - Quantidade de Representações gráficas de triângulos quanto à medida dos ângulos

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE TRIÂNGULOS				
COLEÇÃO	ACUTÂNGULOS	RETÂNGULOS	OBTUSÂNGULOS	TOTAL
CLD1	210	184	6	400
CLD2	190	375	30	595
CLD3	131	78	42	251
CLD4	115	314	20	449
CLD5	99	207	6	312
CLD6	114	121	5	240
CLD7	109	138	18	265
CLD8	306	188	17	511
CLD9	152	124	14	290
CLD10	161	138	12	311
CLD11	164	289	43	496
CLD12	55	148	9	212
CLD13	205	175	35	415
CLD14	288	124	19	431
CLD15	248	203	23	474
CLD16	365	170	17	552
CLD17	217	153	29	399
CLD18	180	123	58	361
CLD19	410	270	14	694
CLD20	194	128	9	331
CLD21	172	120	16	308
CLD22	106	131	9	246

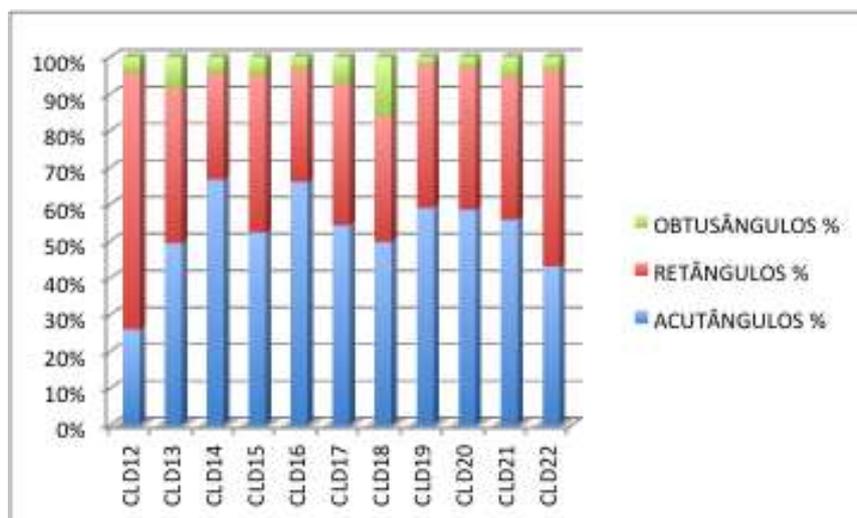
Fonte: Elaborada pela autora

Gráfico 5- Distribuição das representações de triângulo quanto à medida dos ângulos de CLD1 a CLD11 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 6- Distribuição das representações de triângulo quanto à medida dos ângulos de CLD12 a CLD22 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

De modo análogo ao que fizemos quando tratamos do critério do comprimento dos lados, examinamos a variabilidade das representações gráficas de triângulos

segundo a medida dos ângulos dos triângulos no subconjunto das situações nas quais o triângulo é explicitamente nomeado. O exemplo a seguir procura esclarecer o tipo de situação mencionado (CLD10, v. 5, p. 152):

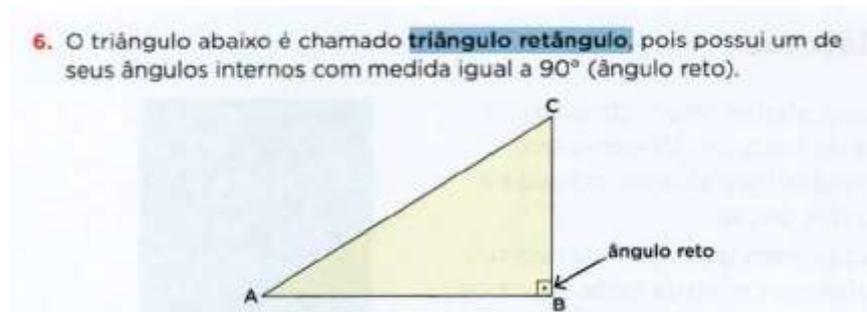


Figura 26– Representação gráfica de triângulo retângulo nomeado

Fonte: CLD10, v. 5, p. 152

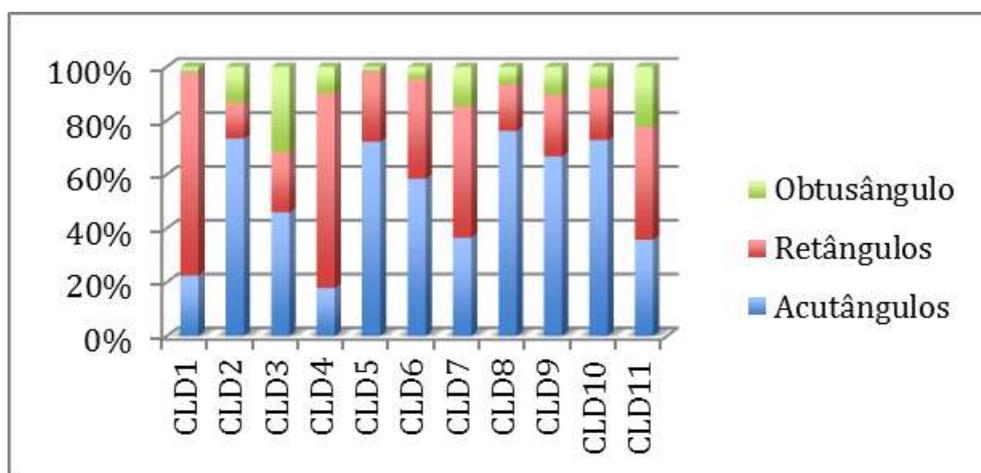
O levantamento desse tipo de ocorrências é expresso a seguir, em uma tabela e em nos gráficos a seguir.

Tabela 4 - Quantidade de Representações gráficas de “triângulos nomeados” quanto à medida dos ângulos

REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE TRIÂNGULOS NOMEADOS				
Coleção	Acutângulos	Retângulos	Obtusângulos	Total
CLD1	20	67	2	89
CLD2	22	4	4	30
CLD3	51	25	35	111
CLD4	28	114	15	157
CLD5	39	14	1	54
CLD6	38	24	3	65
CLD7	15	20	6	41
CLD8	93	21	8	122
CLD9	38	13	6	57
CLD10	56	15	6	77
CLD11	34	40	21	95
CLD12	9	15	0	24
CLD13	61	26	17	104
CLD14	22	5	4	31
CLD15	47	33	8	88
CLD16	240	24	14	278
CLD17	36	17	10	63
CLD18	39	60	14	113
CD19	77	89	12	178
CLD20	41	20	3	64
CLD21	67	26	8	101
CLD22	43	18	2	63

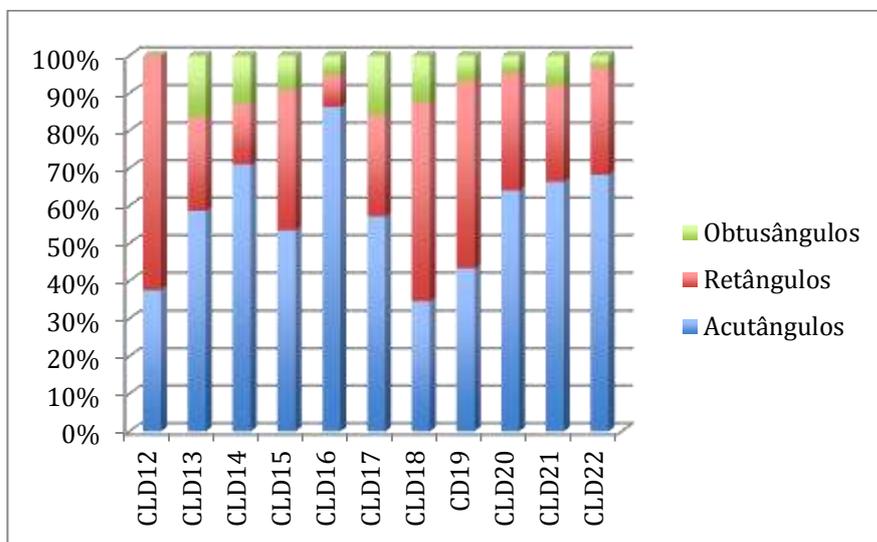
Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 7- Distribuição das representações de “triângulo nomeados” quanto à medida dos ângulos de CLD1 a CLD11 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 8- Distribuição das representações de “triângulo nomeados” quanto à medida dos ângulos de CLD12 a CLD22 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Os dados revelam que, no subconjunto dos “triângulos nomeados”, é ainda menor a presença relativa de imagens gráficas de triângulos obtusângulos em face das representações dos acutângulos e dos retângulos.

Posição da representação gráfica dos triângulos na página

No capítulo anterior, mencionamos que há uma infinidade de possibilidades de disposição, na página de um livro, das imagens gráficas de triângulos. No entanto, as observações preliminares nos livros selecionados mostraram que são uma maioria os casos em que um dos lados do triângulo é paralelo à margem inferior da página do livro e o terceiro vértice fica acima desse lado. Convencionamos, neste trabalho chamar tal disposição gráfica de “*posição horizontal*”.

As análises dos resultados organizadas na tabela a seguir e nos gráficos de coluna confirmam as nossas observações iniciais. De fato, podemos concluir, em resumo, que em 63% das coleções analisadas, mais de metade das representações

gráficas de triângulos vem na “posição horizontal”; em 27% das obras, o percentual correspondente a essa disposição na página é acima de 40%; em duas coleções, este último percentual cai para cerca de 37%.

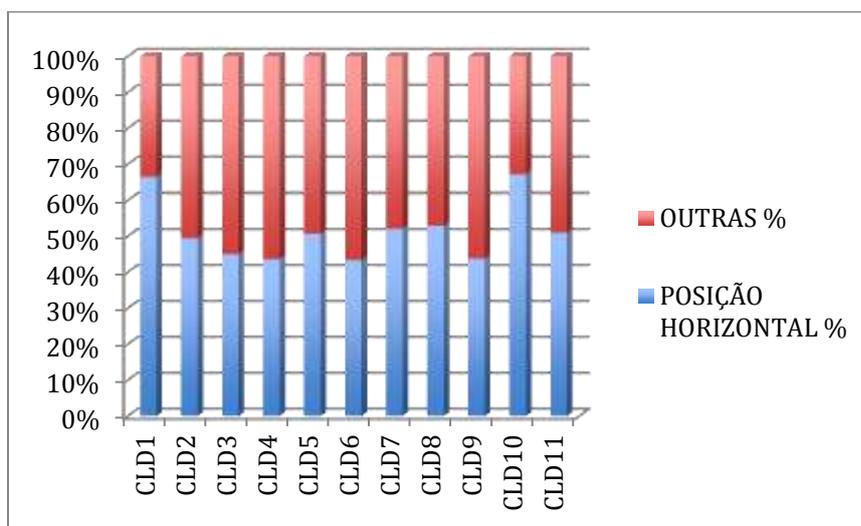
Vemos, dessa maneira, que, novamente, a variabilidade de representação gráfica fica prejudicada e, segundo a teoria dos registros de representação semiótica, isso vem em detrimento da aquisição do objeto matemático triângulo

Tabela 5 – Quantidade de Representações gráficas de triângulo quanto à posição na página

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE TRIÂNGULOS			
COLEÇÃO	POSIÇÃO HORIZONTAL	OUTRAS	TOTAL
CLD1	266	134	400
CLD2	294	301	595
CLD3	113	138	251
CLD4	196	253	449
CLD5	158	154	312
CLD6	104	136	240
CLD7	138	127	265
CLD8	270	241	511
CLD9	127	163	290
CLD10	209	102	311
CLD11	253	243	496
CLD12	81	131	212
CLD13	229	186	415
CLD14	159	272	431
CLD15	310	164	474
CLD16	275	277	552
CLD17	250	149	399
CLD18	229	132	361
CLD19	368	326	694
CLD20	195	136	331
CLD21	178	130	308
CLD22	135	111	246

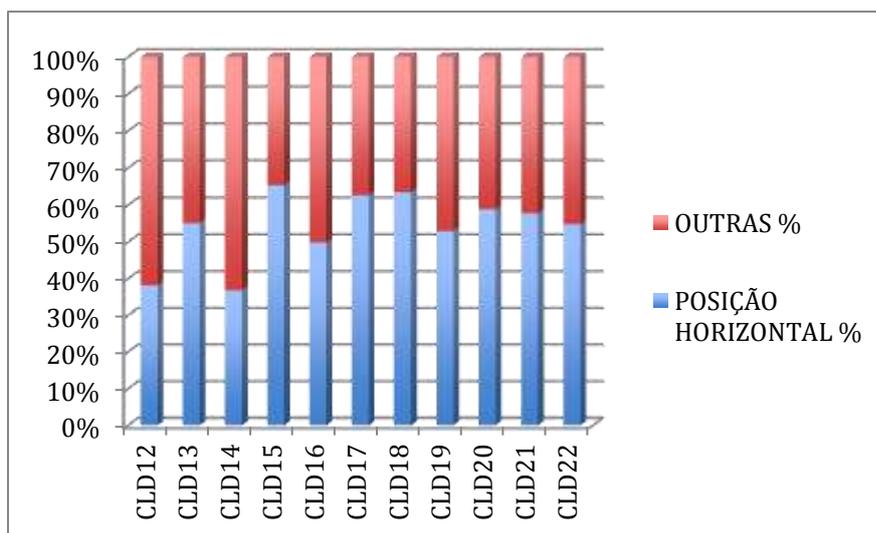
Fonte: Elaborada pela autora

Gráfico 9 – Distribuição das representações gráficas de triângulo quanto à posição na página de CLD1 a CLD11 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 10 – Distribuição das representações gráficas de triângulo quanto à posição na página de CLD12 a CLD22 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Os resultados do levantamento com respeito à posição da representação gráfica dos triângulos realizado no caso dos “triângulos nomeados” não mudam o panorama observado no conjunto de todas as representações gráficas de triângulos, no qual

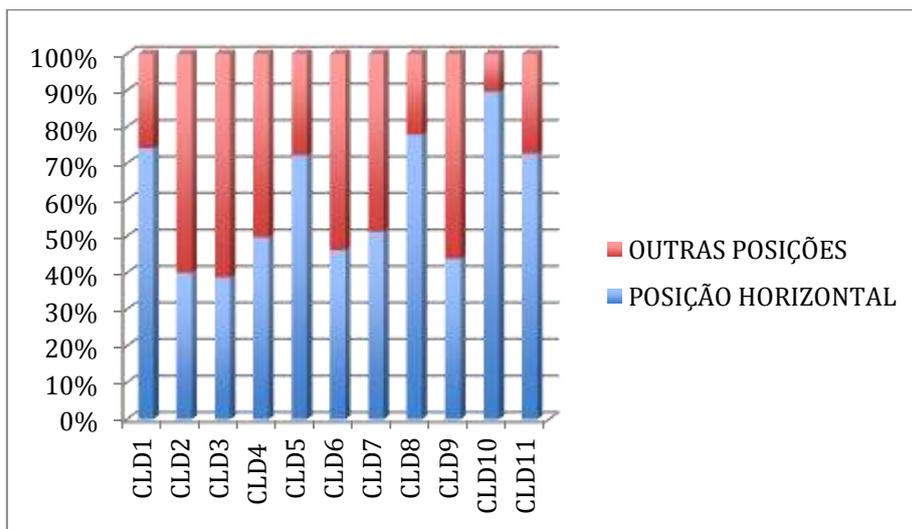
predomina a “posição horizontal”. É o que podemos confirmar na tabela e nos gráficos a seguir.

Tabela 6 – Quantidade de Representações gráficas de triângulos nomeados quanto à posição na página

REPRESENTAÇÃO DE TRIÂNGULOS NOMEADOS			
COLEÇÃO	POSIÇÃO HORIZONTAL	OUTRAS POSIÇÕES	TOTAL
CLD1	66	23	89
CLD2	12	18	30
CLD3	43	68	111
CLD4	78	79	157
CLD5	39	15	54
CLD6	30	35	65
CLD7	21	20	41
CLD8	95	27	122
CLD9	25	32	57
CLD10	69	8	77
CLD11	69	26	95
CLD12	19	5	24
CLD13	65	39	104
CLD14	13	18	31
CLD15	64	24	88
CLD16	148	130	278
CLD17	49	14	63
CLD18	76	37	113
CLD19	113	65	178
CLD20	43	21	64
CLD21	66	35	101
CLD22	45	18	63

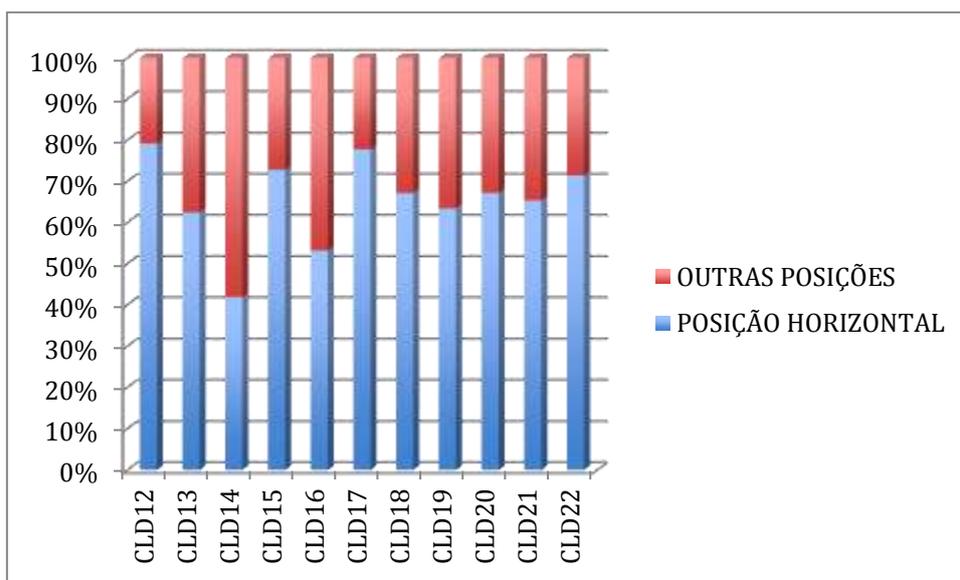
Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 11 – Distribuição das representações gráficas de triângulos nomeados quanto à posição na página de CLD1 a CLD11 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 12 – Distribuição das representações gráficas de triângulos nomeados quanto à posição na página de CLD12 a CLD22 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Atividades de conversão: registro verbal para registro figural; registro figural para registro verbal

As conversões entre o registro da linguagem natural e o registro figural observadas em nossa investigação são, quase sempre, realizadas no próprio texto do livro didático. No entanto, há ocasiões em que as mencionadas conversões são propostas como atividades para aprendizagem do aluno. Segundo a teoria dos registro de representação semiótica a proposição desse tipo de atividades desempenha um papel essencial para que o aluno adquira o conhecimento dos objetos matemáticos. E mais, nessa teoria defende-se que seja dada importância às conversões nos dois sentidos.

Uma investigação mais aprofundada dessas atividades de conversão, à luz da teoria dos registros de representação semiótica no universo de obras selecionadas inclui tarefas complexas. Entre outras, deveríamos pesquisar os fenômenos de congruência ou não congruência das unidades de significantes nas citadas conversões e tratar das questões dimensionais relativas aos objetos geométricos e às suas representações gráficas.

Nos objetivos estabelecidos para o presente trabalho, limitamo-nos a uma contagem das situações, nas obras investigadas, nas quais o aluno é solicitado a realizar uma conversão do registro da língua natural para o registro figural ou uma conversão no sentido oposto ao tratar de triângulos.

Para esclarecer que atividades foram contabilizadas como atividades de conversão, damos dois exemplos a seguir. Observamos que, no primeiro exemplo, as imagens gráficas na malha quadrada que contêm as respostas da atividade são apresentadas apenas no manual do professor. Analogamente, no segundo exemplo, as respostas vêm somente no manual do professor.

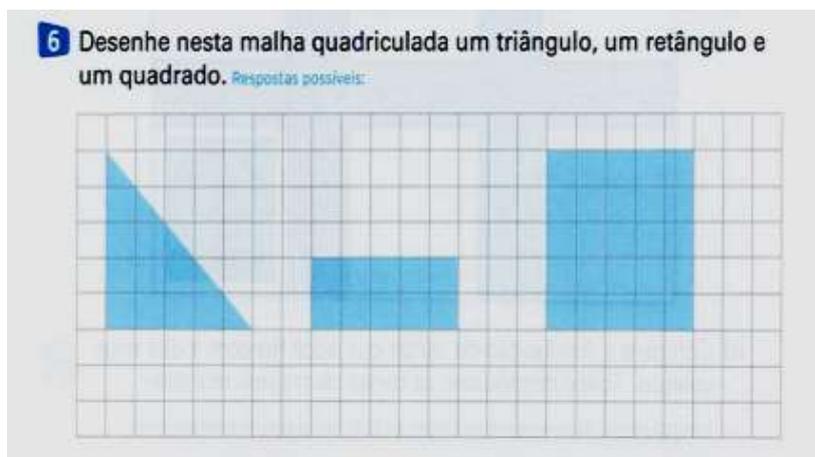


Figura 27 - Atividade de conversão do registro em língua natural para o registro figural

Fonte: Coleção CLD10, v. 5, p. 152

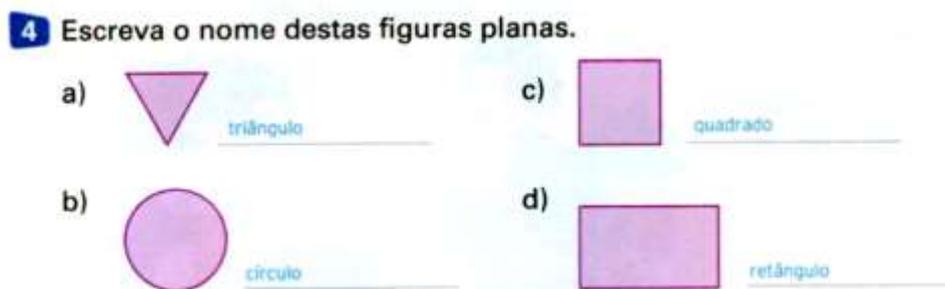


Figura 28 - Atividade de conversão do registro figural para o registro em língua natural

Fonte: Coleção CLD1, 2º ano. p.267

Nos dados obtidos com relação a conversão de registros, verificamos que há um razoável equilíbrio entre os dois sentidos da conversão cerca da metade das coleções pesquisadas. Em aproximadamente um terço delas predomina fortemente a conversão no sentido da língua natural para o registro figural e no restante prevalecem as conversões do registro figural para a língua natural.

Os resultados acima mostram certo afastamento do equilíbrio desejável entre os dois tipos de conversão, na medida em que apenas em metade das coleções tal equilíbrio ocorre.

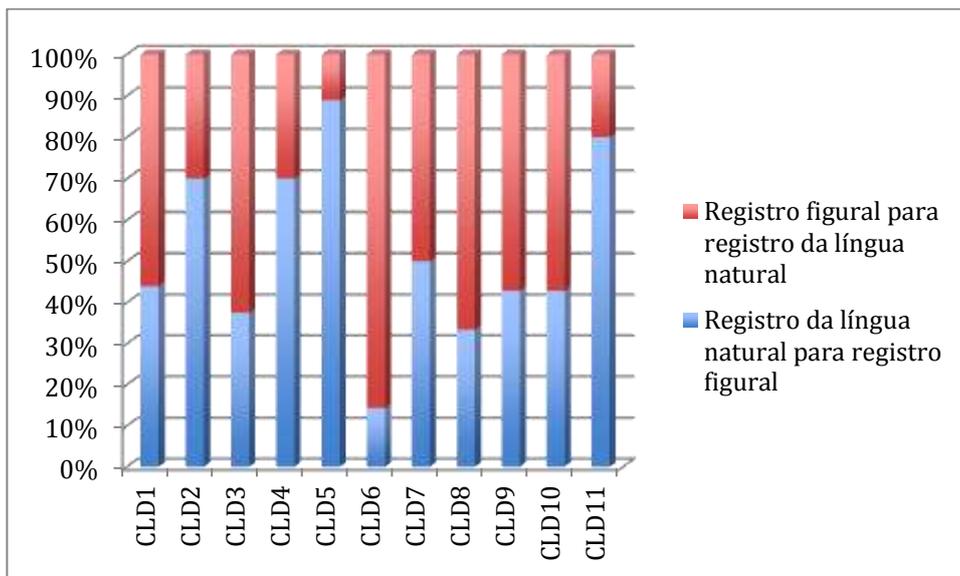
Um aspecto mais marcante do conjunto das coleções investigadas é que há relativamente muito poucas situações nas quais a representação gráfica de triângulos ocorre em atividades de conversão propostas aos alunos. Essas representações são restritas, praticamente, a textos explanatórios e a exercícios. É o que mostra claramente o Gráfico 13, apresentado adiante. Considerando a teoria dos registros de representação semiótica que enfatiza a importância da conversão na aprendizagem e o baixo número de atividades de conversão de registros propostas aos alunos nas coleções de livros didáticos, podemos considerar, a esse respeito, bastante insatisfatório o panorama nas obras investigadas.

Tabela 7- Distribuição das atividades de conversão nos registros figural e língua natural

ATIVIDADES DE CONVERSÃO DE REGISTROS E TOTAL DE REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS			
COLEÇÃO	Registro em língua natural para o registro figural	Registro figural para o registro em língua natural	Total de atividades
CLD1	11	14	25
CLD2	7	3	10
CLD3	3	5	8
CLD4	7	3	10
CLD5	8	1	9
CLD6	1	6	7
CLD7	5	5	10
CLD8	5	10	15
CLD9	3	4	7
CLD10	6	8	14
CLD11	4	1	5
CLD12	6	0	6
CLD13	7	3	10
CLD14	2	2	4
CLD15	10	6	16
CLD16	5	3	8
CLD17	13	5	18
CLD18	3	2	5
CLD19	5	16	21
CLD20	4	5	9
CLD21	3	2	5
CLD22	6	4	10

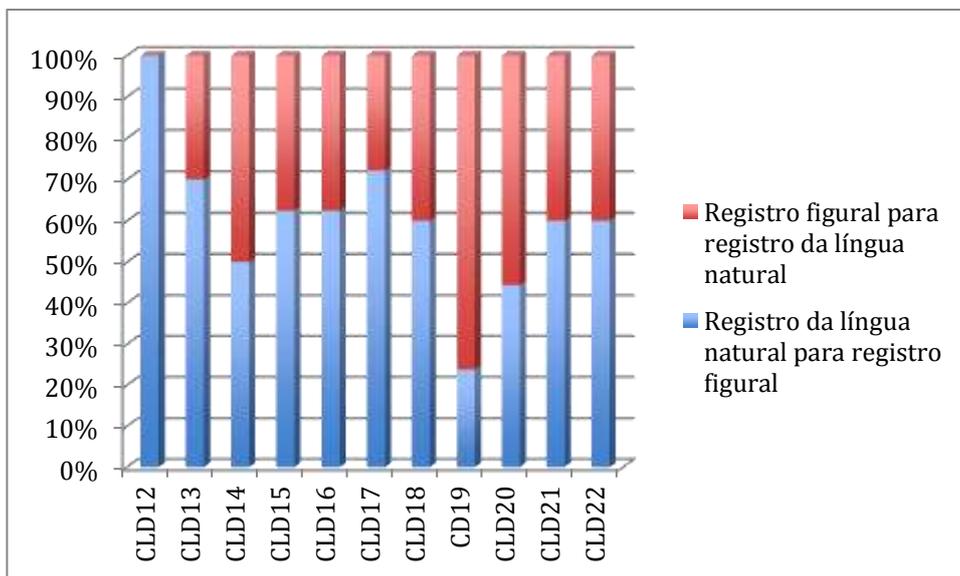
Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 13 – Atividades de conversão de registros de CLD1 a CLD11 (percentual)



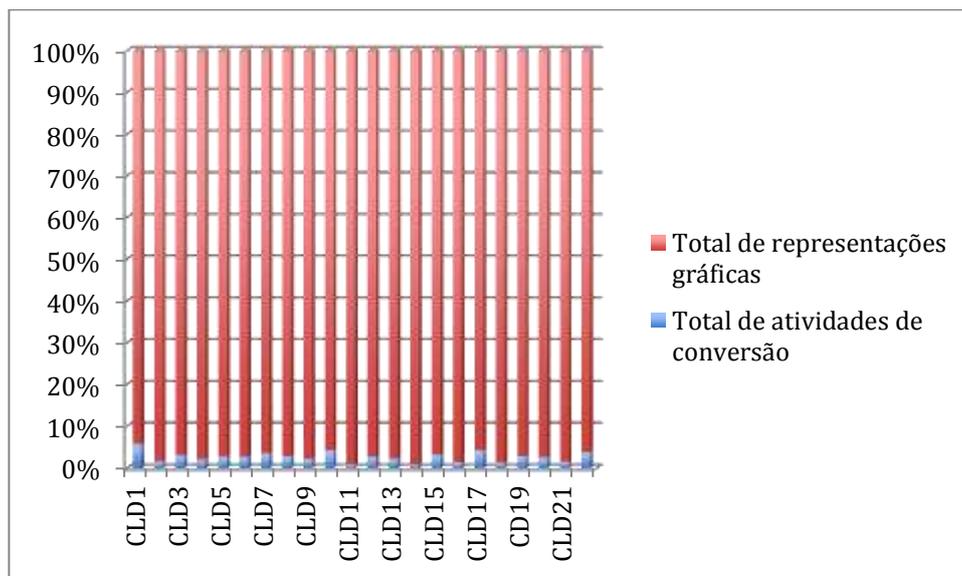
Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 14 – Atividades de conversão de registros de CLD12 a CLD22 (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 15 – Total de atividades de conversão e total de representações gráficas, por coleção (percentual)



Fonte: Elaborado pela autora

Manual do professor

Ao analisar os manuais dos livros didáticos selecionados, nosso objetivo foi de verificar em que medida a questão da variabilidade da representação de triângulos estava presente nas orientações dirigidas ao professor.

O resultado dessa investigação exploratória mostrou-nos que a mencionada questão está muito pouco presente nos manuais e, quando surge, é tratada muito superficialmente.

A despeito disso, damos alguns exemplos nos quais a invariância do objeto geométrico em face de suas representações gráficas é discutida. Tais ocorrências, embora muito pouco frequentes, revelam que há uma incipiente compreensão da questão.

No primeiro volume da coleção CLD3, sugere-se o uso de quebra-cabeças, para que o aluno compreenda que uma figura mantém sua forma quando se muda apenas sua posição no plano.

No manual da coleção CLD3, no livro do 2º ano, há um breve comentário sobre as diferentes posições que um triângulo irá assumir ao se explicar a atividade abaixo:

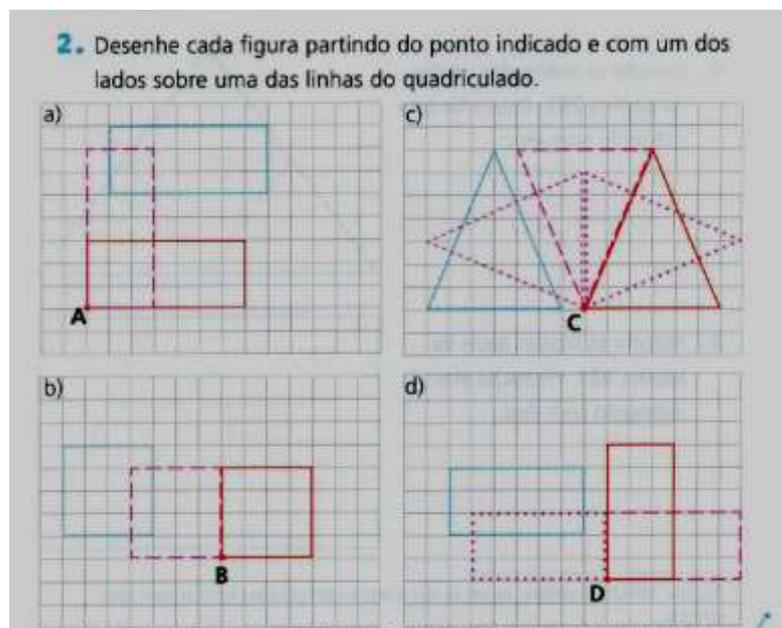


Figura 29 - Diferentes posições que o triângulo pode assumir na atividade

Fonte: Manual da coleção CLD3, 2º ano, p. 125.

No manual do primeiro volume da coleção CLD4, observa-se que os alunos devem reconhecer os triângulos em diferentes posições:

isso com eles. Agora, o foco da atividade **Transformando o quadrado em triângulos** que propusemos em **Espaço e Forma** é decompor o quadrado em triângulos e compor com eles outras figuras. O objetivo é a percepção da composição e da decomposição de uma forma em outras, e o desenvolvimento da memória visual e o reconhecimento de uma forma geométrica, no caso o triângulo, em qualquer posição que ele apareça nas diversas composições feitas.

Figura 30 - Comentário sobre o reconhecimento do triângulo em diferentes posições

Fonte: Manual da coleção CLD4, 1º ano, p.95.

O manual da coleção CLD9, apresenta observações interessantes quanto à representação das figuras, salientando o uso de representações em diferentes posições, o uso de contraexemplos e não apenas de imagens usuais, conforme trechos abaixo:

É importante também apresentar as figuras geométricas planas em diferentes posições – e não só a imagem clássica delas, para que compreendam que, ao mudar a posição da figura (girando-a), não altera sua forma, como mostrado a seguir:

Figura 31 - Comentário a respeito de diferentes posições que o triângulo pode assumir

Fonte: Manual da coleção CLD9, 1º ano, p. 87.

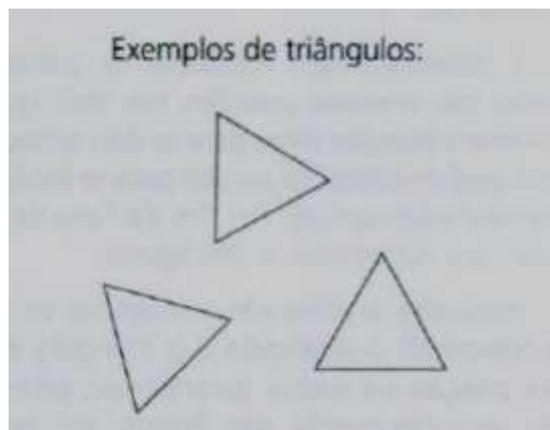


Figura 32 - Representação gráfica de triângulos em diferentes posições na página

Fonte: Manual da coleção CLD9, 1º ano, p. 87.

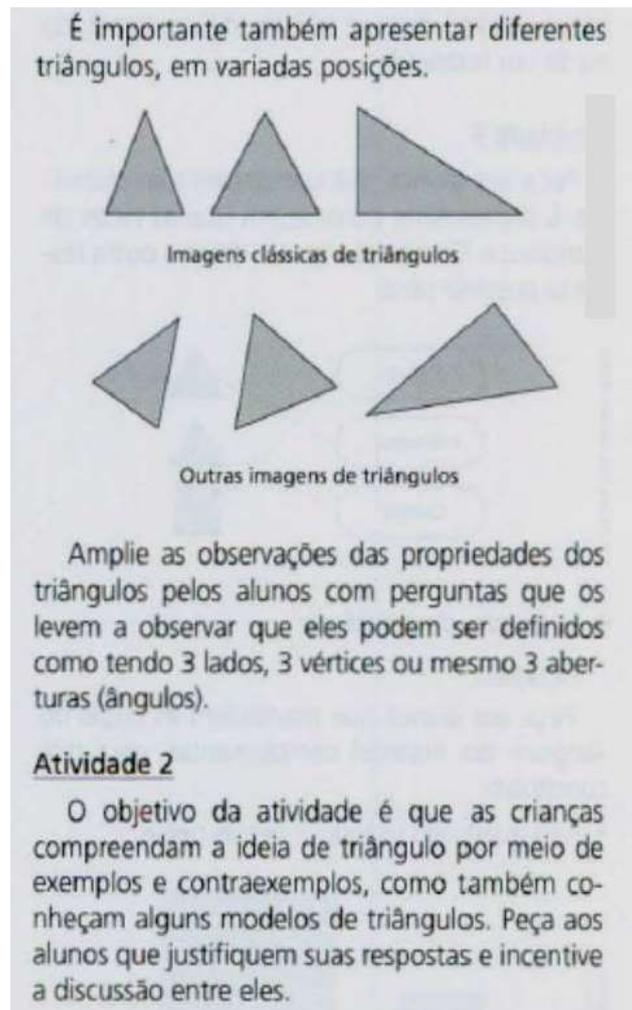


Figura 33 - Comentários de contraexemplos de triângulo

Fonte: Manual da coleção CLD9, 2º ano, p. 75.

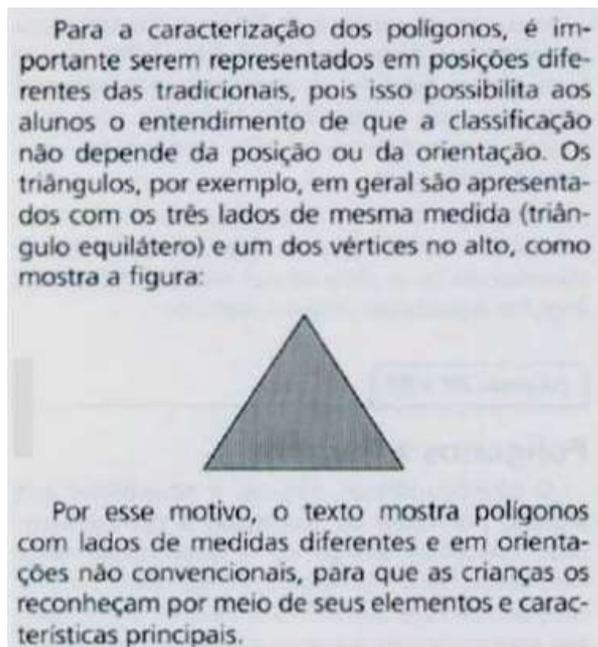


Figura 34 - Comentários sobre as diferentes posições dos polígonos

Fonte: Manual da coleção CLD9, 4º ano, p. 80.

Na coleção CLD16, nos manuais do 1º ano e do 2º ano, menciona-se o trabalho com representações de triângulo em diferentes posições:

Título: Montando pipas

Material necessário:

- Um tabuleiro e 10 peças para cada criança
- Um dado

Como jogar:

1. Cada um, na sua vez, lança o dado e pega a quantidade de peças que ele indicar e encaixa sobre o tabuleiro para montar a pipa.
2. O objetivo do jogo é ser o primeiro a montar a pipa.
3. Para finalizar a montagem da pipa será necessário tirar o número exato no dado. Por exemplo, se faltar apenas uma peça para completar a pipa, é necessário tirar um no dado. Caso contrário, passa a vez.

Este jogo explora o reconhecimento de triângulos e retângulos em diferentes posições, bem como, a composição de figuras com essas formas geométricas. Explora ainda a contagem, a comparação de quantidades e favorece a compreensão de algumas das noções das operações de adição e subtração. Como são dez peças a serem posicionadas, as crianças terão a oportunidade de contar quantas peças já foram colocadas no tabuleiro e quantas ainda faltam colocar.

Figura 35- Orientações sobre os polígonos em diferentes posições

Fonte: Manual da coleção CLD16, 1º ano, p. 44

São apresentadas, ainda, atividades que exploram as formas, como quadrados, retângulos e triângulos, em diferentes posições, juntamente com a contagem, comparação de quantidades e cálculos.

Figura 36 - Comentário sobre diferentes posições das representações de triângulo na página

Fonte: Manual da coleção CLD16, 2º ano, p. 41

Quanto as coleções CLD1, CLD2, CLD5, CLD6, CLD7, CLD8, CLD10, CLD11, CLD12, CLD13, CLD14, CLD15, CLD17, CL18, CLD19, CLD20, CLD21 e CLD22 não foram encontradas orientações quanto a diversidade de representações de triângulos, apesar de mencionar o estudo de triângulos em várias atividades.

O estudo dos manuais nos permite concluir que houve pouquíssima referência à variabilidade de representações de triângulos. Com a análise dos manuais observamos que das 22 coleções, em apenas quatro coleções encontramos algum comentário referente a variedade de representações, foram as coleções CLD3, CLD4, CLD9 e CLD16.

É importante salientar que essas orientações não estão presentes em todos os cinco volumes das coleções CLD3, CLD4, CLD9 e CLD16, portanto são comentários que estão isolados em alguns manuais da coleção. Esse fato nos mostra que não há uma continuidade na proposta de apresentar diferentes representações de triângulos ao longo dos cinco anos, desse modo, o professor recebe orientações fragmentadas e que não acompanham o processo de formação do aluno ao longo dos cinco anos.

O reconhecimento das diferentes representações do triângulo é essencial à aprendizagem, com base em nossa fundamentação teórica, a conceitualização e a representação estão intimamente ligadas. Para o pesquisador francês Duval, é muito importante que o aluno seja capaz de separar o objeto (invariante) de suas diferentes representações, inclusive essa prática deve ser incentivada desde sua formação inicial.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa investigou as representações de triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental aprovados no PNLD de 2013. O estudo dos triângulos é parte do currículo de matemática desde os anos iniciais, portanto é de fundamental importância o reconhecimento de sua representação.

Investigações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática⁵ têm indicado que os alunos revelam dificuldade de identificar um triângulo quando sua imagem gráfica não é representada como triângulos isósceles⁶, equiláteros, acutângulos e com um dos lados do triângulo paralelo à margem inferior da página do livro. Esses fatos nos motivaram a investigar se tais padrões dominantes ocorrem nos livros utilizados no ensino fundamental.

Estabelecemos como objetivos analisar a variabilidade das representações gráficas de triângulos, quanto a três critérios: comprimento dos lados; medida dos ângulos e posição na página. Ainda conforme nossos objetivos, realizamos um mapeamento exploratório de atividades em que se propõem aos alunos conversões entre os registros da língua natural e o registro figural. Também inserimos uma breve discussão sobre o manual do professor. Verificamos quais orientações o manual do professor apresentava para o estudo dos triângulos e, em especial, se mencionava a variedade de representações de triângulo.

Adotamos os procedimentos de uma pesquisa documental tendo como universo investigado as coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD 2013, na área de matemática. O PNLD de 2013 apresenta vinte e quatro coleções, o presente estudo analisou as vinte e duas coleções que foram selecionadas para os cinco anos iniciais do ensino fundamental. No PNLD de 2013 há duas coleções que não foram utilizadas na pesquisa porque não foram selecionadas para os cinco anos, sendo utilizadas na rede de

⁵ O leitor pode consultar nossas referências bibliográficas em BUENO (2009), BRITO; PIROLA(2005), PIROLA(1995).

⁶ Usualmente, no ensino fundamental, escolhe-se chamar de triângulos isósceles os que são isósceles mas não equiláteros. Embora essa não seja a opção que prevalece na matemática mais avançada, adotamos, neste trabalho, a denominação usual.

ensino no ciclo de alfabetização, do 1º ano 3º ano, ou nos 4º e 5º anos. Nossa análise incluiu também o manual destinado ao professor. As ocorrências de representações de triângulos foram investigadas com base em nossos objetivos, o que nos levou a definir os critérios.

Diante dos objetivos da pesquisa e das representações de triângulo que encontramos nos livros didáticos dos anos iniciais, fez-se necessário delimitar quais representações de triângulo seriam consideradas no estudo. Por isso foram excluídos os casos que envolvem perspectiva, o que inclui as atividades de dobraduras e as representações associadas a objetos tridimensionais. Também foram excluídas as representações associadas a objetos do cotidiano, que apesar de apresentarem forma triangular, não representam, de fato, o triângulo como figura geométrica plana. As representações de triângulos relacionadas a obras de artes e malhas triangulares foram desconsideradas devido à imprecisão da própria representação e à diferentes possibilidades de contagem dos triângulos.

Ao realizar identificar as atividades de conversão entre o registro figural e o registro em língua materna, assumimos, com base na fundamentação teórica, que a atividade de conversão de registros é importante para que o aluno adquira o conhecimento matemático visado. Além disso, a partir da teoria de Raymond Duval, consideramos que a variedade de representações é essencial para a aprendizagem em matemática e que a diversidade de posições das representações, constitui uma transformação de registros chamada tratamento. Ao estudar as modificações posicionais das representações dos triângulos, foi realizada uma análise considerando um dos tipos de apreensão operatória da teoria.

A análise dos resultados confirma nossas hipóteses e que os critérios estabelecidos foram adequados. De fato, nas coleções, quase todas as representações são de triângulos equiláteros ou isósceles, sendo reduzido o número das imagens gráficas dos triângulos escalenos. Apenas em três coleções CLD3, CLD13 e CLD15, esse padrão não é seguido, em especial na primeira delas. Observamos que, em dezenove coleções (86, 4%), a maioria das representações foi de triângulos isósceles e três coleções (13,6%) apresentaram como maioria as representações de triângulos

equiláteros. Quando investigamos as representações nomeadas de triângulo (quando o registro em língua materna e o registro figural estão associados), a quantidade de representações de triângulos escalenos aumenta em relação às demais; no entanto, ainda representa apenas oito coleções das vinte e duas.

Constatamos, ainda, que em catorze coleções (63,6%) predominam representações de triângulos acutângulos, enquanto em oito coleções (36,4%) a maioria recai em representações de triângulos retângulos. As ocorrências de representações de triângulos obtusângulos, em face das representações dos acutângulos e dos retângulos, é ainda menor quando consideramos as representações nomeadas.

Observações preliminares nos livros selecionados mostraram que são uma maioria os casos em que um dos lados do triângulo é paralelo à margem inferior da página do livro e o terceiro vértice fica acima desse lado. Convencionamos, neste trabalho chamar tal disposição gráfica de “*posição horizontal*”. Podemos concluir, em resumo: em 63% das coleções analisadas, mais de metade das representações gráficas de triângulos vem na “*posição horizontal*”; em 27% das obras, o percentual correspondente a essa disposição na página é acima de 40%; em duas coleções, este último percentual cai para cerca de 37%. A posição horizontal das representações na página, também predomina nas representações de triângulos nomeados.

Em relação à conversão de registros, verificamos que em oito coleções (36,4%) a maioria das conversões foram do registro figural para o registro em língua natural, enquanto doze coleções (54,5%) tiveram como maioria as conversões no sentido: registro em língua natural para o registro figural e, em duas coleções (9,1%) o número de conversões nos dois sentidos foi igual. É importante salientar que uma única coleção apresentou conversões apenas em um sentido, da língua materna para o registro figural.

Com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a conversão de registros não deve ser feita apenas em um dos sentidos, sendo necessário apresentá-la nos dois sentidos da conversão. Sabemos que ao mudar o sentido da conversão, ou seja, o registro de partida e o registro de chegada, trata-se de outra atividade de conversão.

Ao final deste estudo, constatamos que, há indicações de possíveis estudos e de prolongamentos deste, ainda há pontos que podem ser investigados como:

- Quanto à conceitualização, o estudo do que é o triângulo, tanto do ponto de vista cognitivo, quanto didático, pois o ato definir o que é um triângulo envolve o estudo do próprio uso de definições no ensino e aprendizagem de matemática. Além disso, a discussão sobre objeto físico, objeto gráfico, objeto geométrico e linguagem é muito ampla e ainda envolve o posicionamento de vários autores⁷ sobre o uso de termos como: figura, imagem, representações mentais, objeto e conceito.

- Um estudo mais detalhado das atividades de conversão de registros requer o maior aprofundamento das ideias de congruência, não congruência e das unidades significantes dos registros de saída e de chegada. Diante dos objetivos e da problemática discutida na pesquisa essa análise não foi realizada, mas outros estudos poderão se debruçar sobre este aspecto no livro didático.

-O estudo das representações de triângulos no que se refere à representação com região interna preenchida ou apenas o contorno. Ou seja, verificar como os autores apresentam os polígonos, considerando que as duas representações abaixo, figura 37 e figura 38 são distintas.

Verificamos também que 83 livros didáticos (em diferentes coleções), não apresentaram definição de triângulos, dentre eles há nove coleções que não apresentaram nenhuma definição de triângulo em nenhum dos seus cinco volumes. Observamos que apenas 27 livros apresentaram alguma definição de triângulo. Esses dados não foram mais detalhados ao longo da pesquisa, mas podem indicar estudos posteriores sobre a representação e a definição de triângulo. Ainda constatamos que em 6 livros, ou seja, 22,2% dos livros que apresentam alguma definição de triângulo, estes mesmos não mencionam o contorno de triângulos. Já 77,8%, isto é, 21 livros que apresentaram alguma definição de triângulo, mencionaram o contorno de triângulos na definição.

⁷ O leitor pode consultar em nossas referências, FISCHBEIN (2003), LABORDE;CAPPONI(1994) e PAIS (1996).

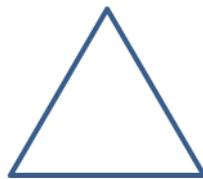


Figura 37: Representação gráfica do contorno do triângulo

Fonte: Elaborado pela autora

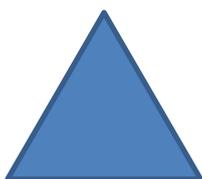


Figura 38: Representação gráfica de triângulo com preenchimento

Fonte: Elaborado pela autora

Em síntese, podemos afirmar que o presente estudo oferece resultados e análises pertinentes para pesquisas futuras. Além disso, tendo o livro didático como um forte condicionante à prática do professor e diante da constatação da pouca variabilidade de representações de triângulos quanto ao comprimento dos lados, a medida dos ângulos e a posição na página. Podemos afirmar também, que essa pesquisa deixa uma contribuição aos estudos anteriores, pois Bueno (2009), Brito e Pirola (2005) e Pirola (1995) investigaram o reconhecimento de representações de figuras geométricas com alunos, enquanto o presente estudo analisou as representações de triângulos nos livros didáticos. Além disso, o baixo número de atividades de conversões de registros nos livros didáticos é um dado relevante quando dialogamos com a teoria das representações semióticas, pois a mesma enfatiza a conversão como uma atividade muito importante na aprendizagem.

Esperamos também que o presente estudo possa contribuir para os usuários desses livros didáticos, para os próprios autores e à comissão do Programa Nacional do Livro Didático.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica**. 8 Ed. São Paulo: Papirus, 2003. p. 125-147

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental**. Brasília, 1997.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2013**. Brasília, 2012

BRITO, Márcia Regina F. de; PIROLA, Nelson Antônio. A formação dos conceitos de triângulo e de paralelogramo em aluno da escola elementar. In: BRITO, Márcia Regina F. de (Org). **Psicologia da Educação Matemática**. Teoria e Pesquisa. Florianópolis: Insular, 2005. p. 85-106.

BUENO, Cinthya. **Alfabetização Matemática: Manifestações de estudantes do primeiro ciclo sobre Geometria**. 2009. 210 f. (Mestrado em Educação)-Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica**. 8 Ed. São Paulo: Papirus, 2003. p. 11-33

_____. **Semiósis e pensamento humano: Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Tradução de: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representação semiótica. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo, 2011. Vol. 1. Ed. Proem

_____. Registros de Representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v.7, n. 2, Florianópolis, 2012a. p.266-297. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>>. Acesso em: 10 fev. 2013.

_____. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v.7, n. 1, Florianópolis, 2012b. p.118-138. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>>. Acesso em: 10 fev. 2013

FISCHBEIN, Efram. The Theory of Figural Concepts. Education Studies in Mathematics 24, p. 139-162. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993. apud NACARATO, Adair Mendes; PASSOS, Cámen Lucia Brancaglione. **A Geometria nas séries iniciais. Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.** São Carlos: EDUFSCAR, 2003. 151 p.

LABORDE, Colette; CAPPONI, Bernard. **Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-géometre.** Em Aberto, Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun.1994.

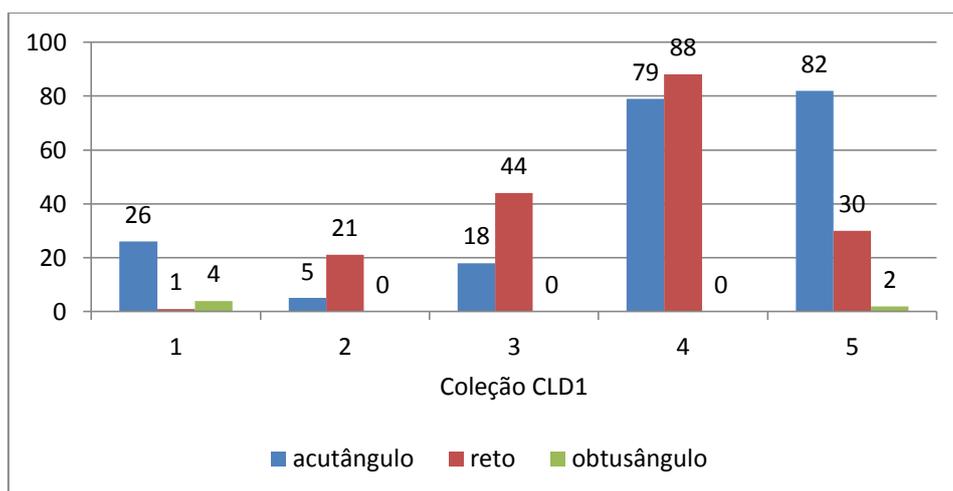
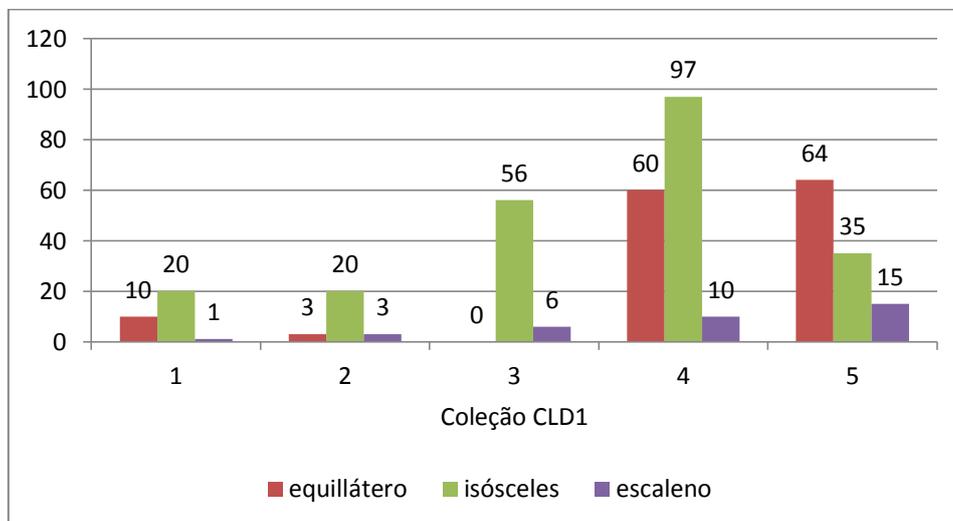
MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). Educação Matemática. **Uma (nova) introdução.** 3. Ed. São Paulo: EDUC, 2008.254 p.

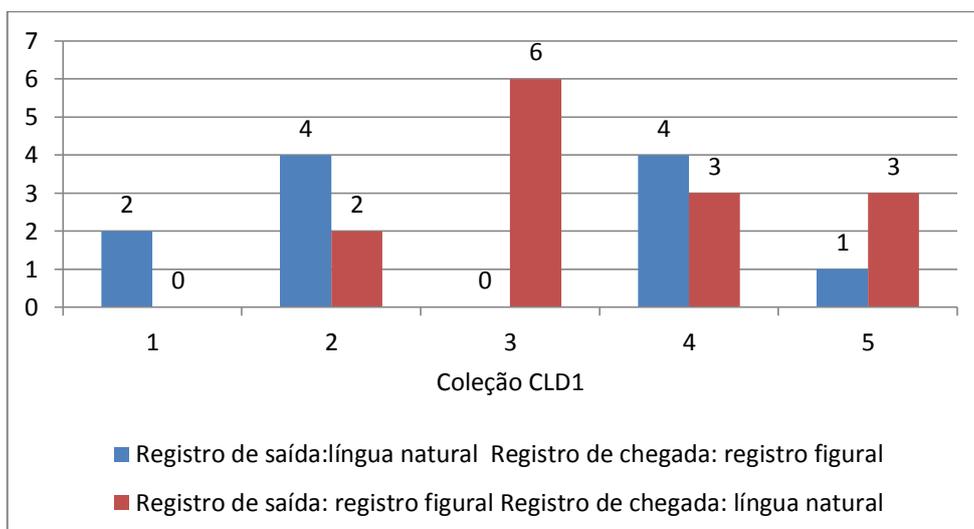
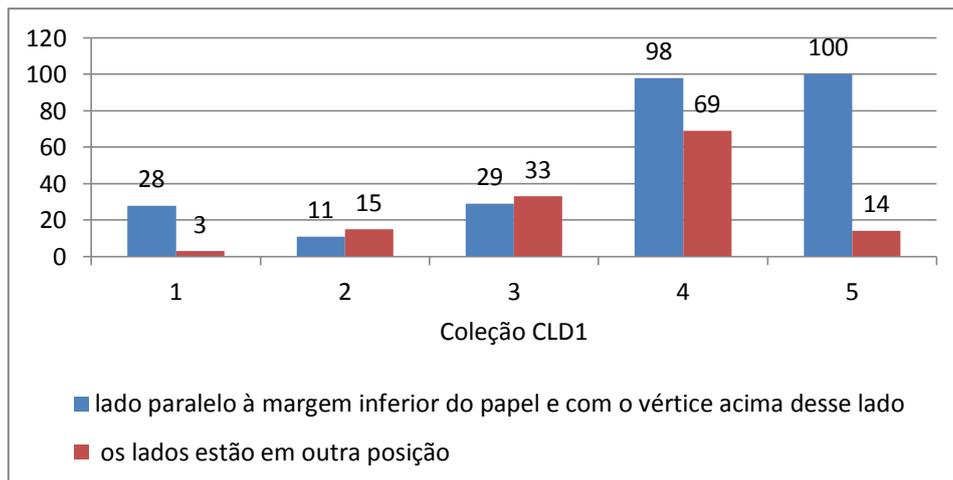
PAIS, Luis Carlos. **Intuição, Experiência e Teoria Geométrica.** Zetetiké. Campinas: CEMPEM/FE/UNICAMP, v. 4, n. 6, julho/dezembro, 1996. p. 65-74

PIROLA, Nelson Antônio. **Um estudo sobre a formação de conceitos de triângulos e quadriláteros em alunos da quinta série do primeiro grau.**1995. 180 f. (Mestrado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Campinas, 1995.

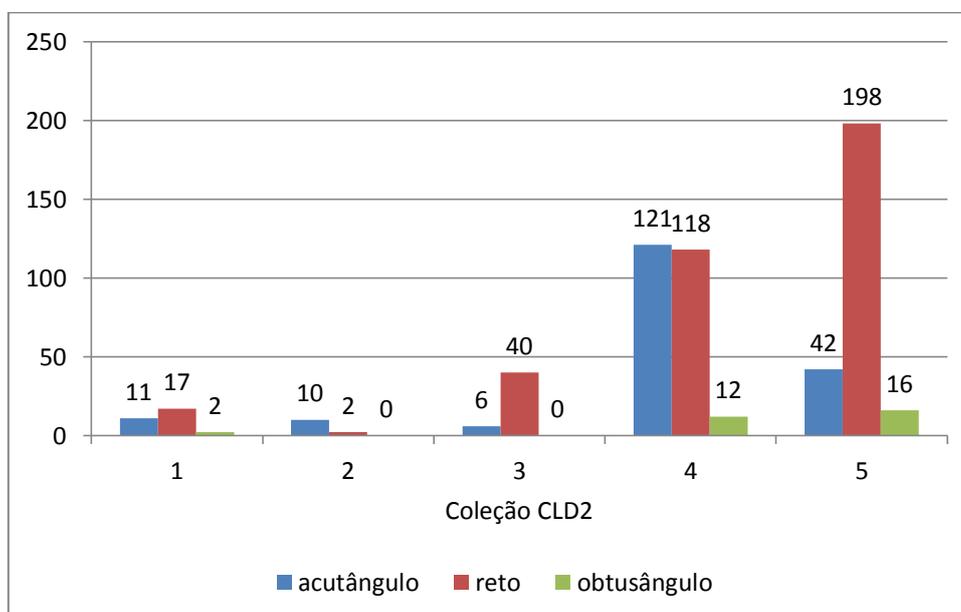
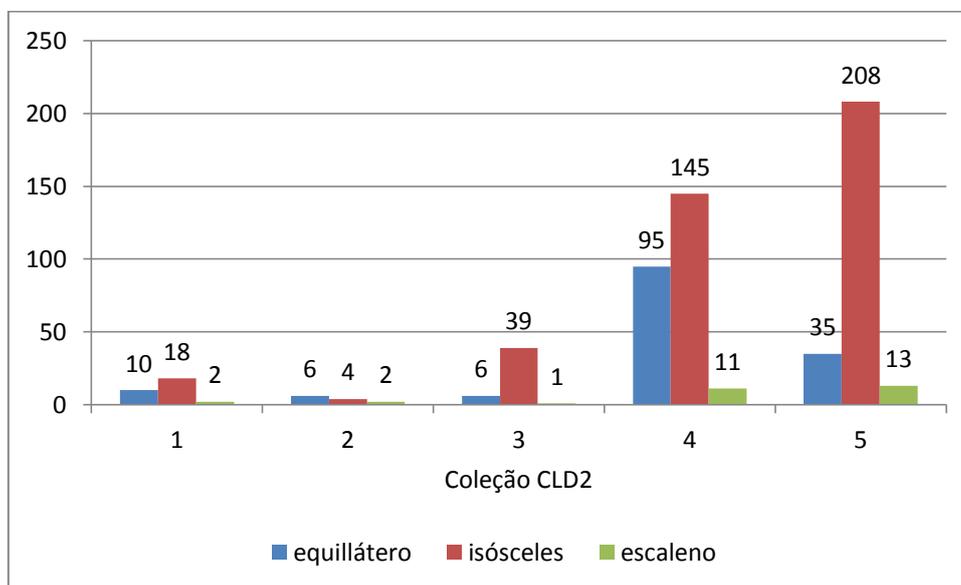
APÊNDICE

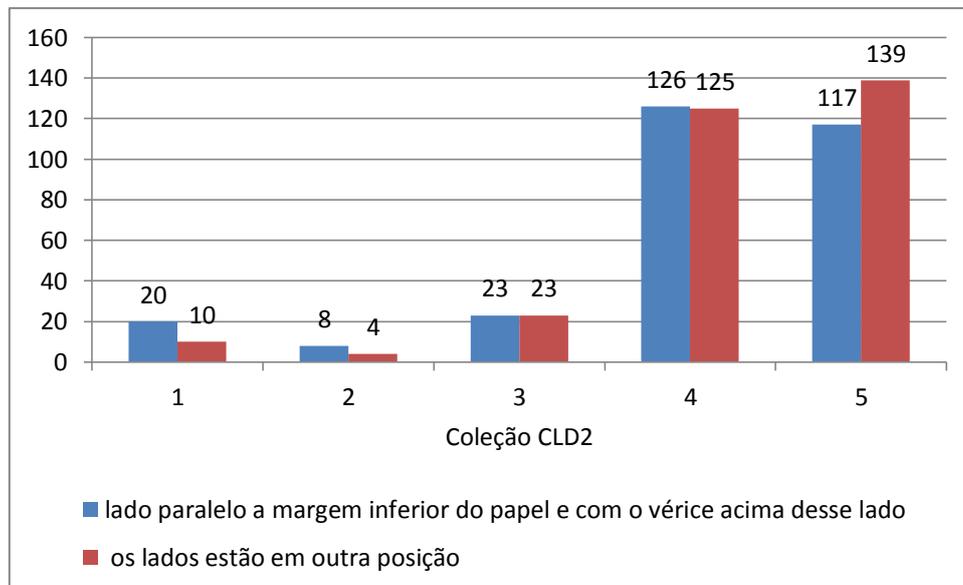
APÊNDICE A – Gráficos da coleção CLD 1

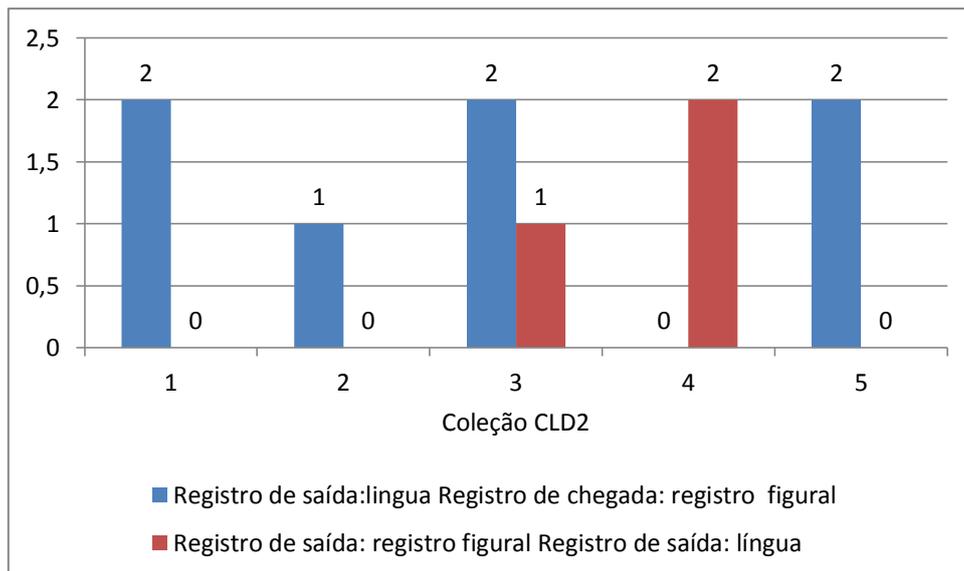




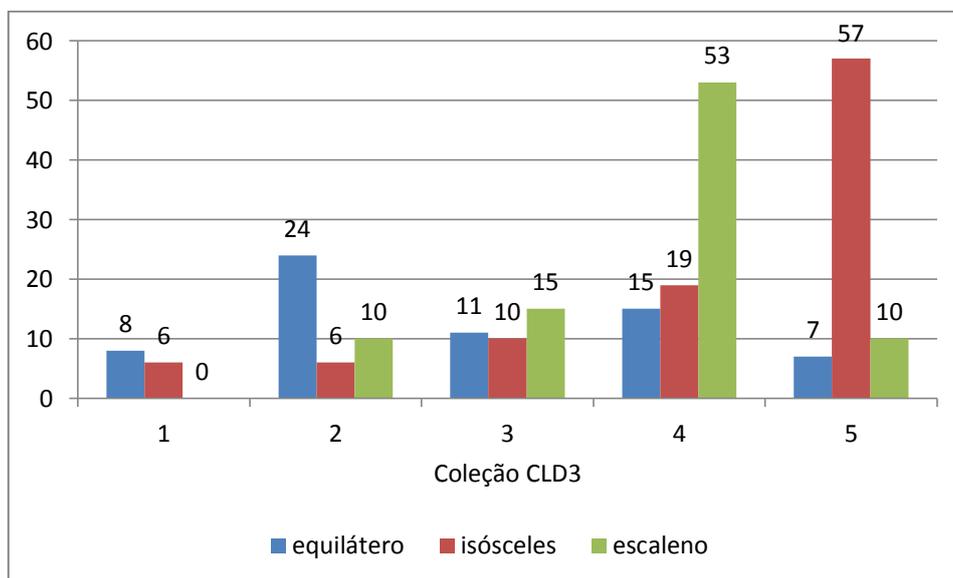
APÊNDICE B - Gráficos da coleção CLD 2

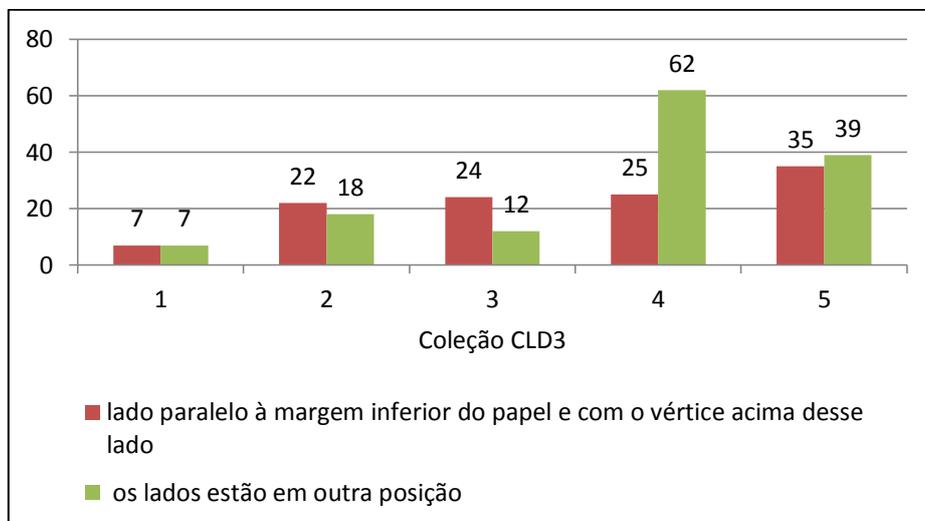
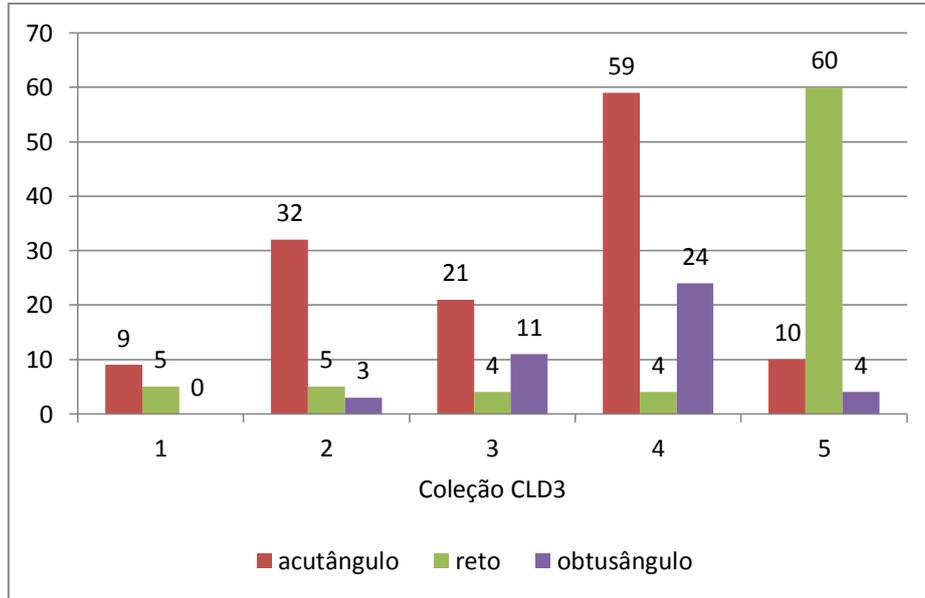


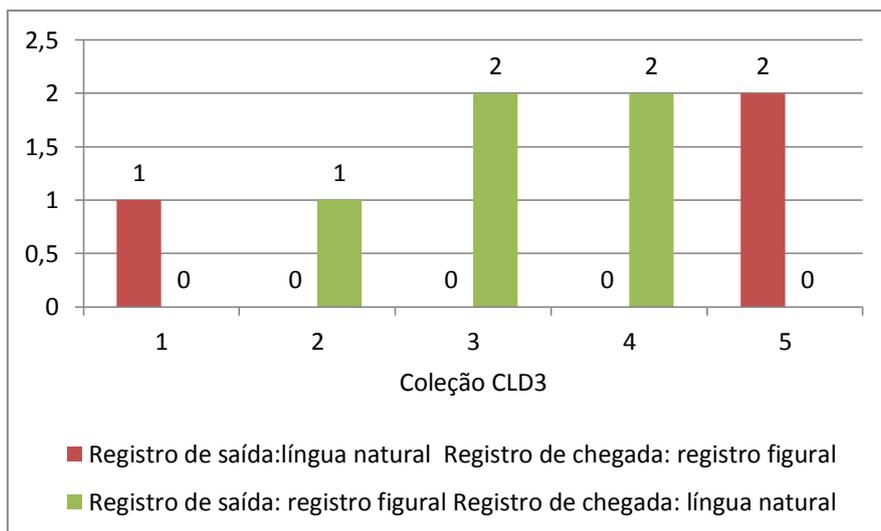




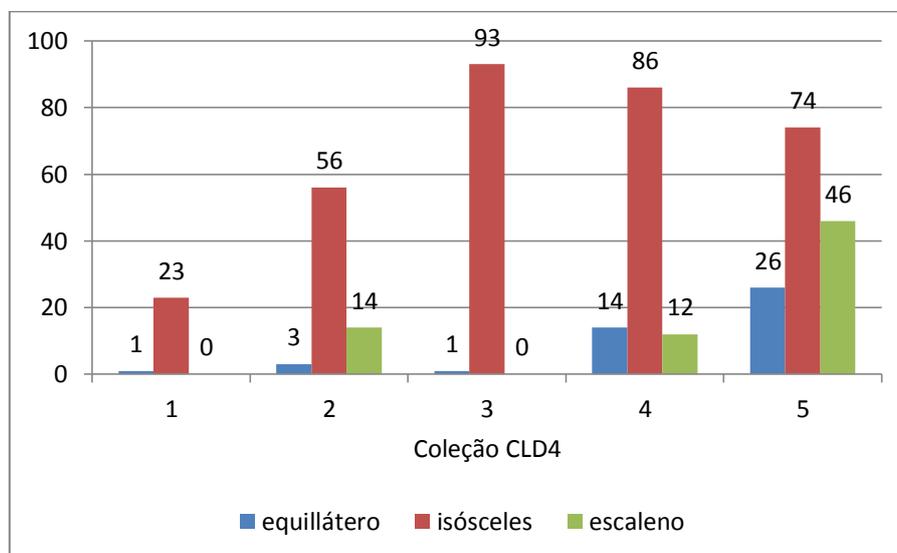
APÊNDICE C – Gráficos da coleção CLD3

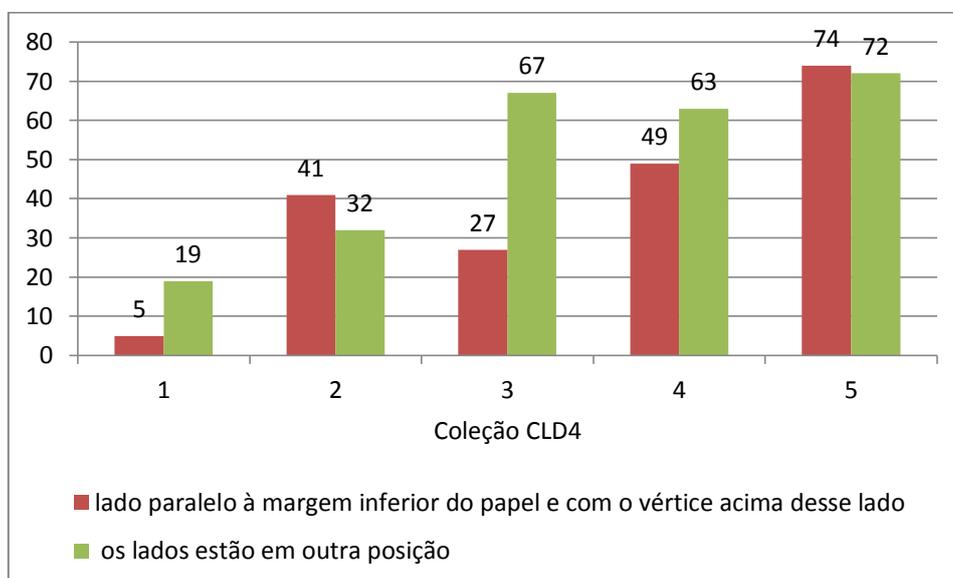
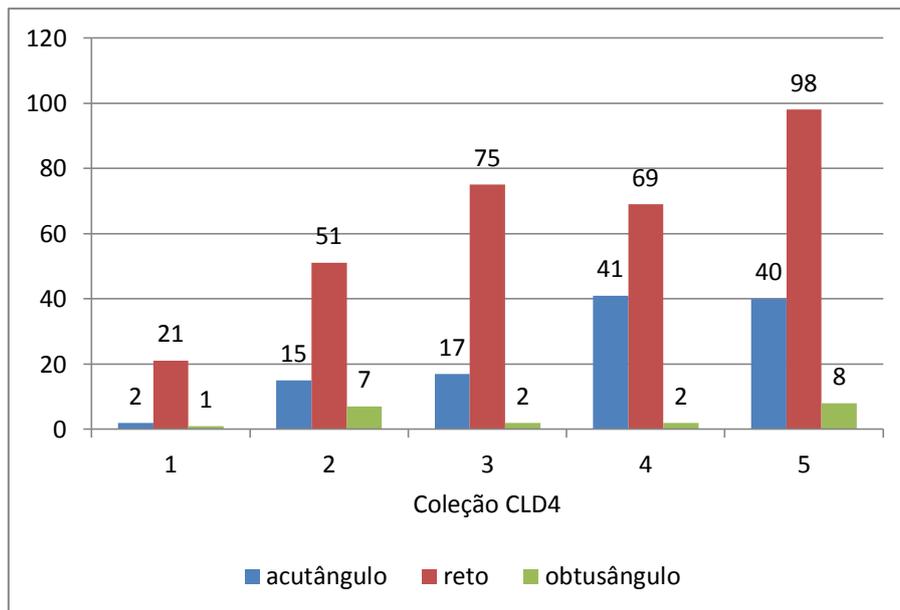


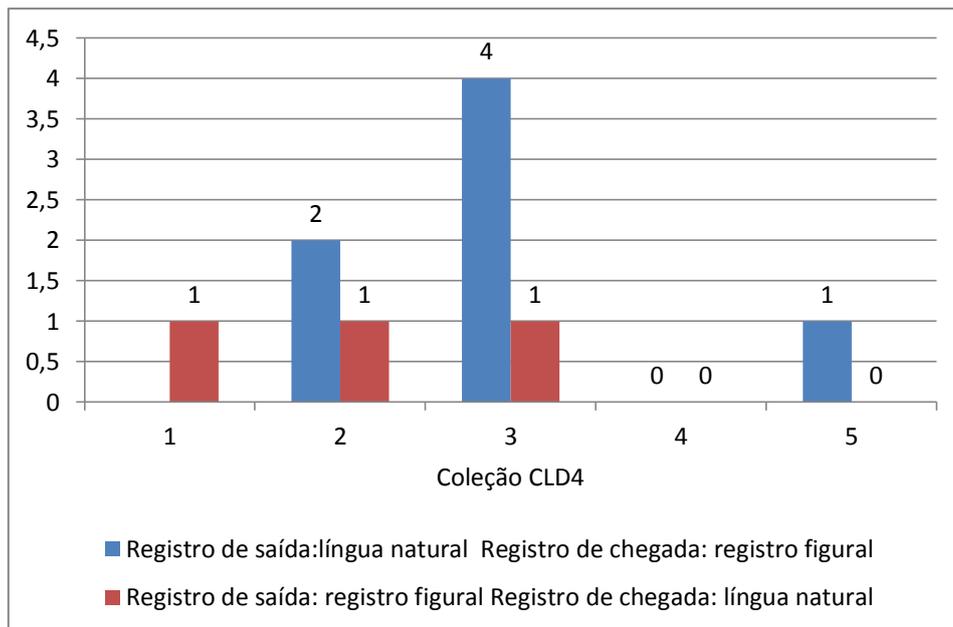




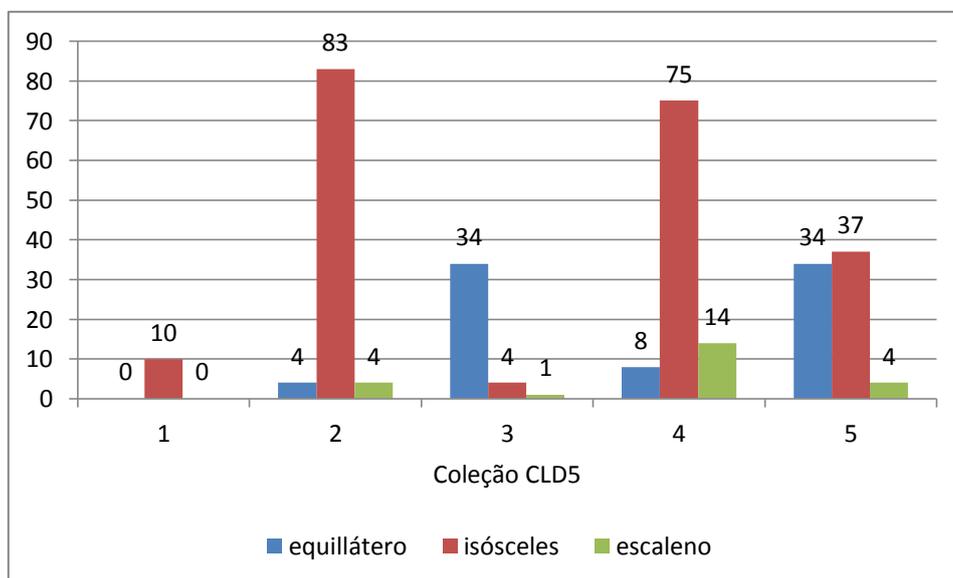
APÊNDICE D- Gráficos da coleção CLD4

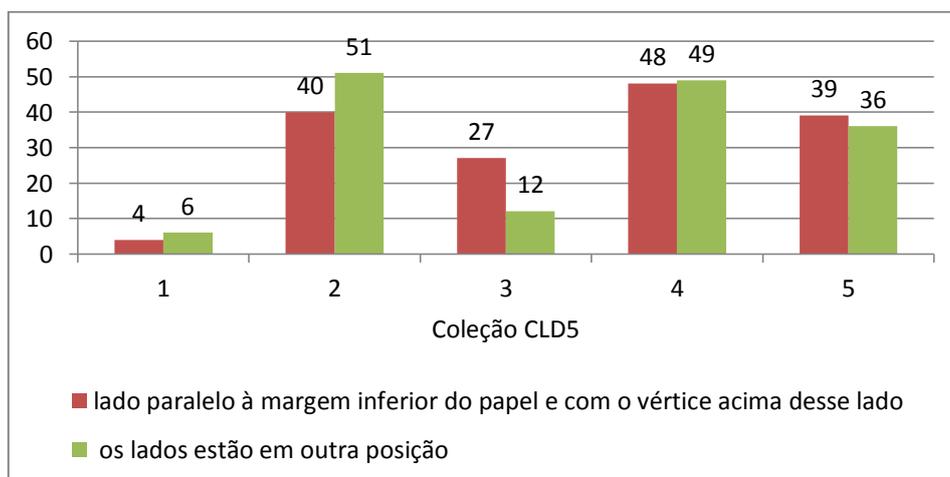
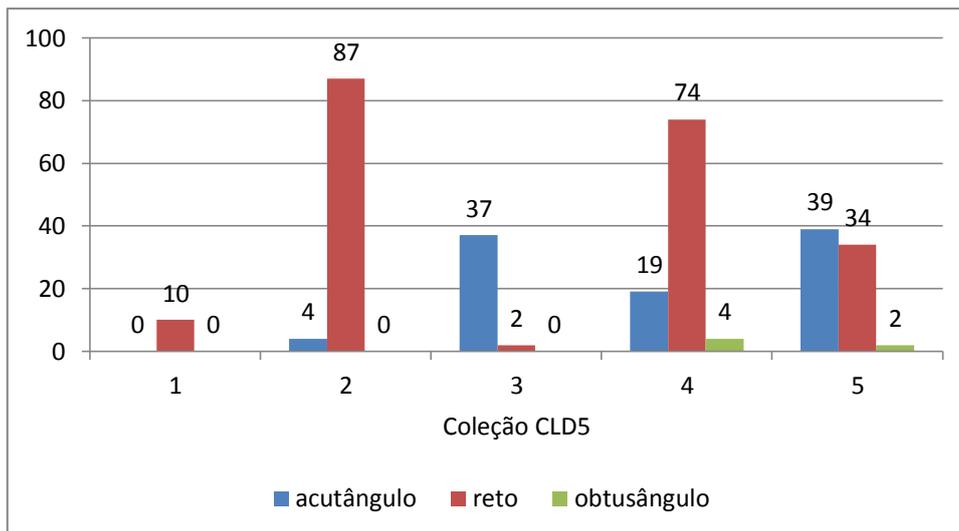


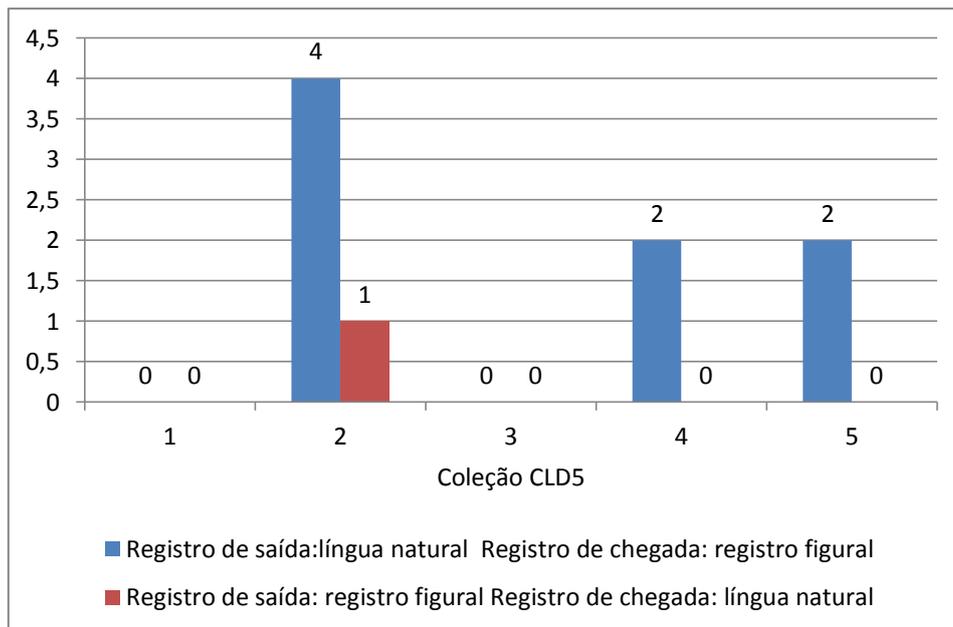




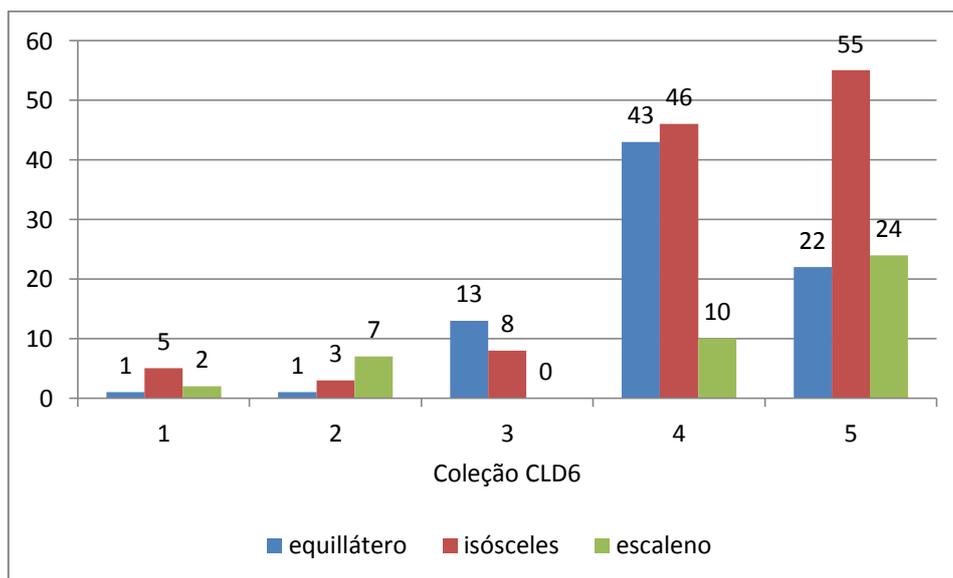
APÊNDICE E – Gráficos da coleção CLD5

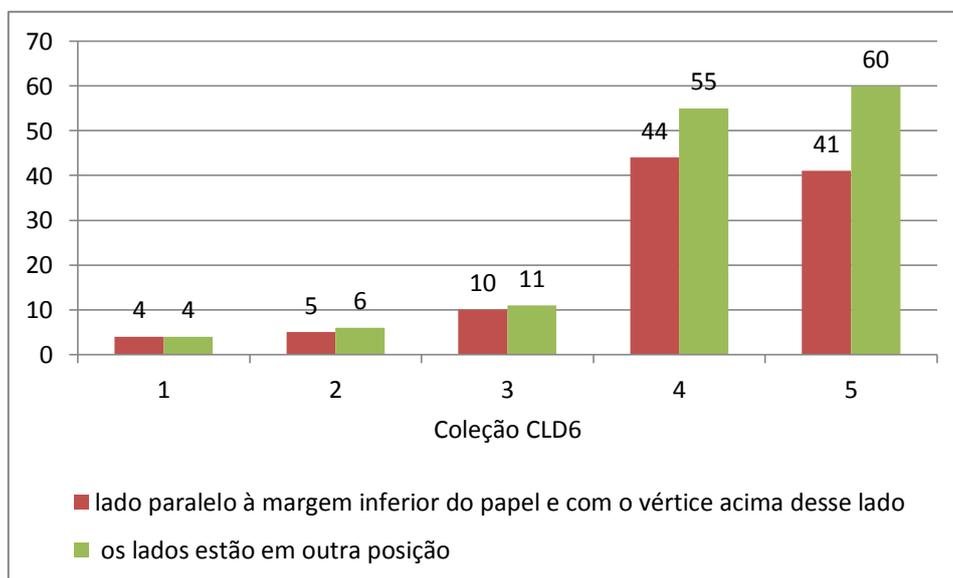
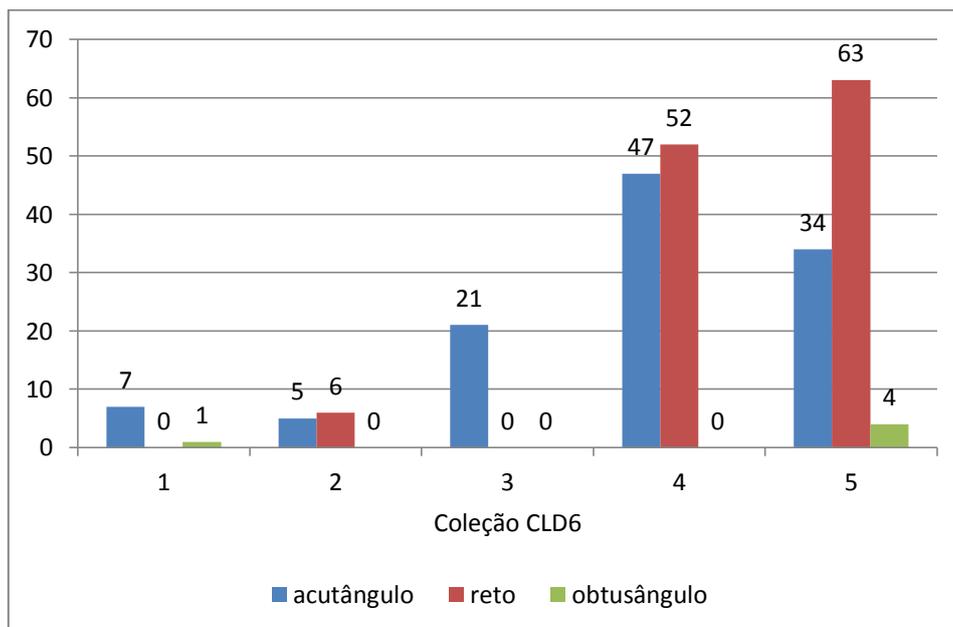


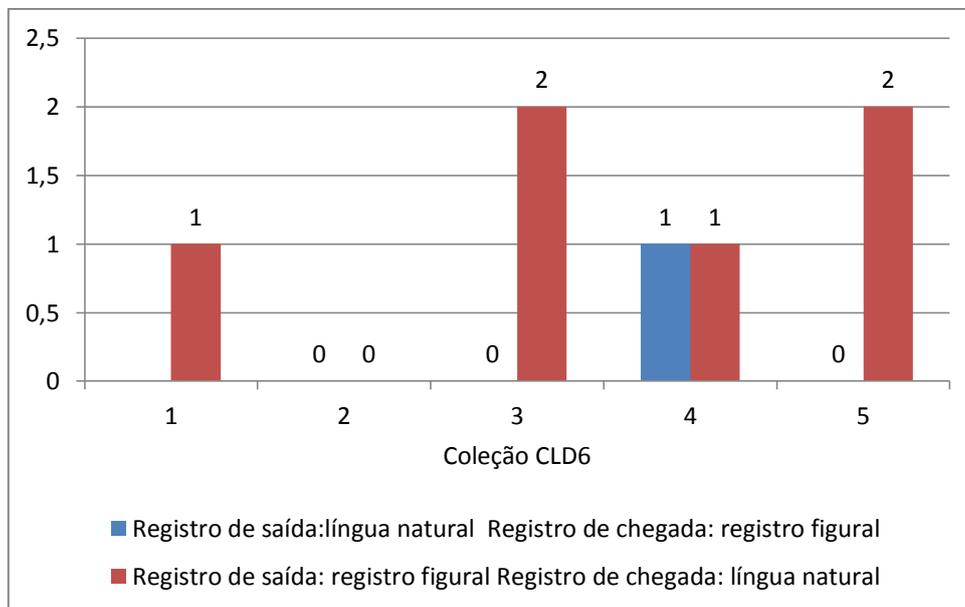




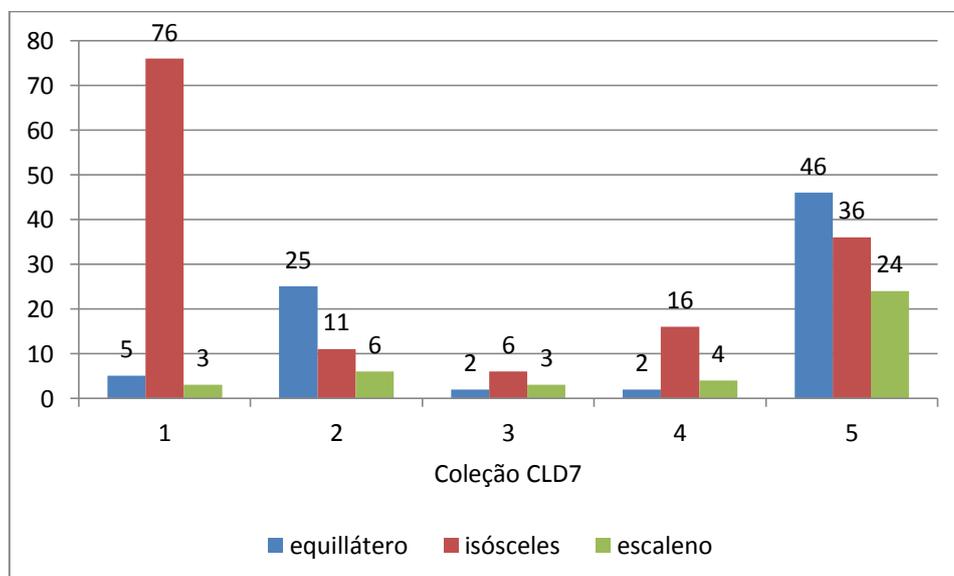
APÊNDICE F – Gráficos da coleção CLD6

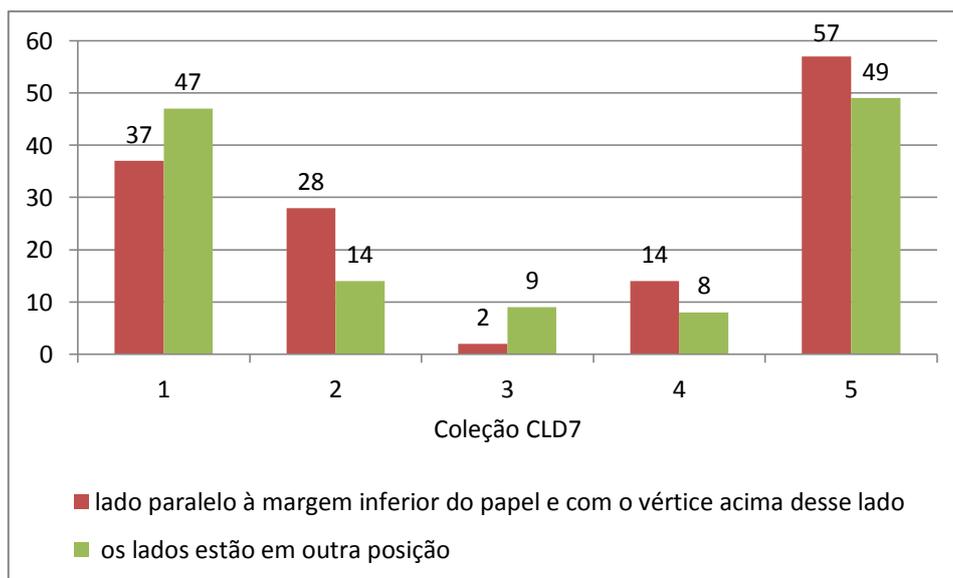
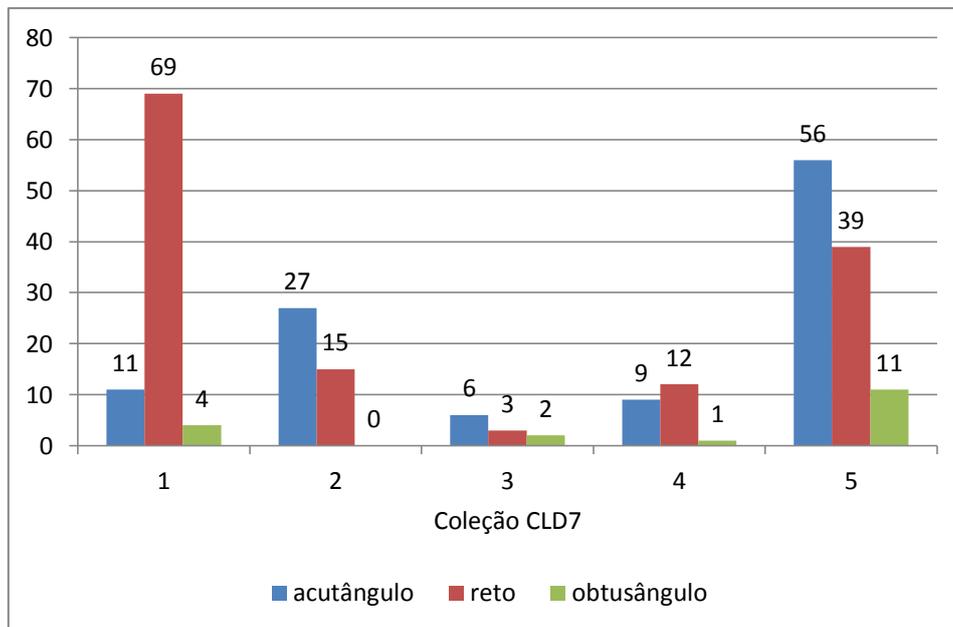


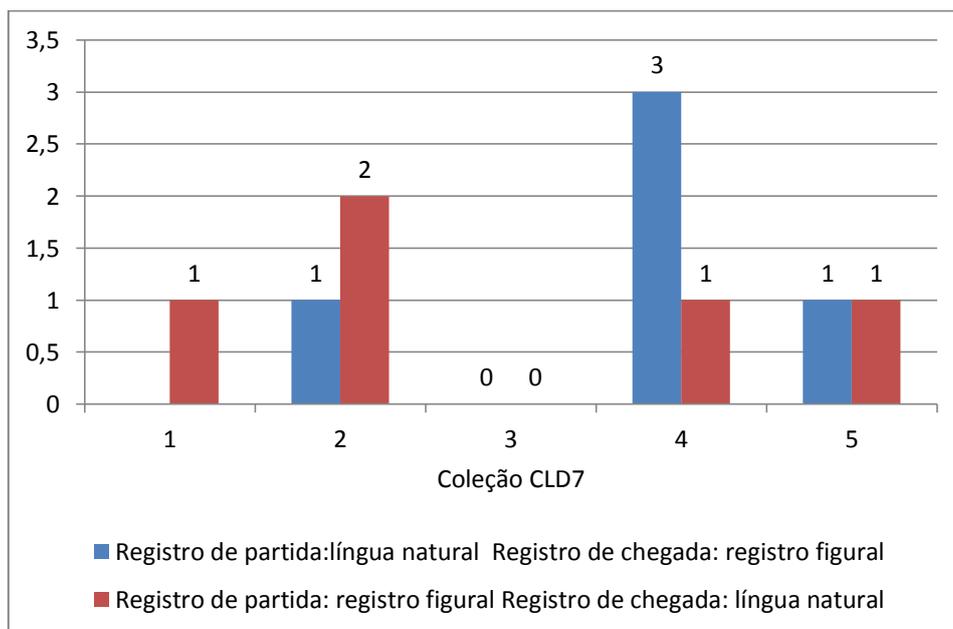




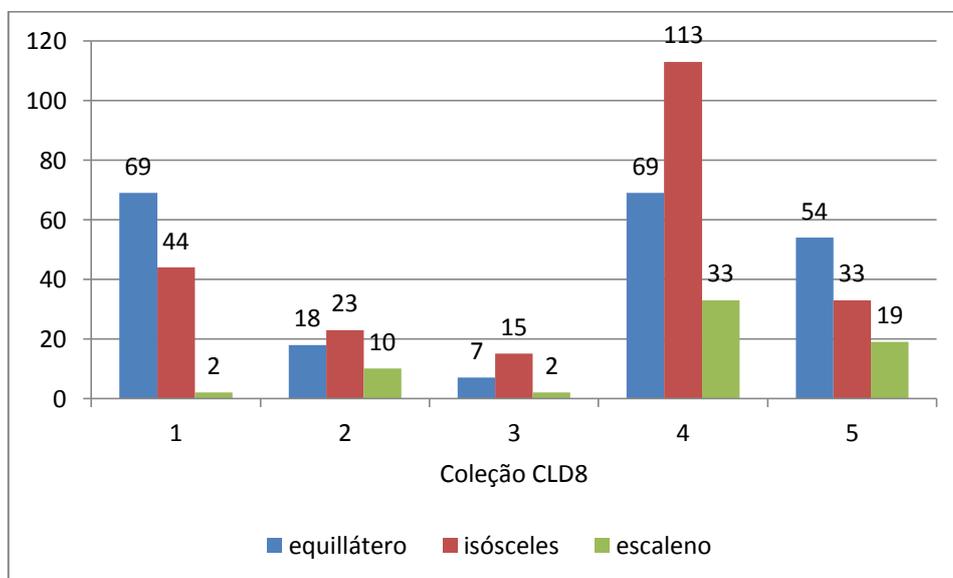
APÊNDICE G – Gráficos da coleção CLD7

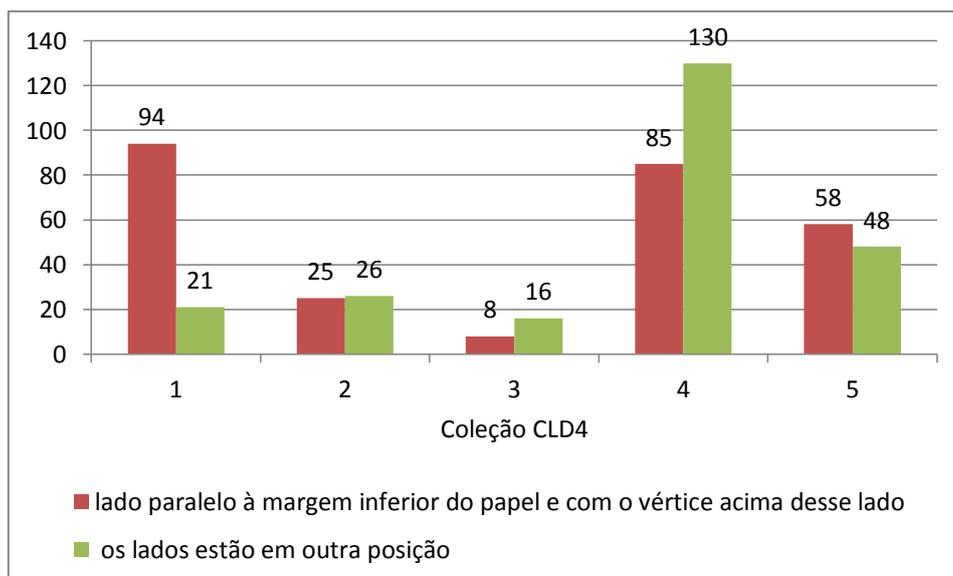
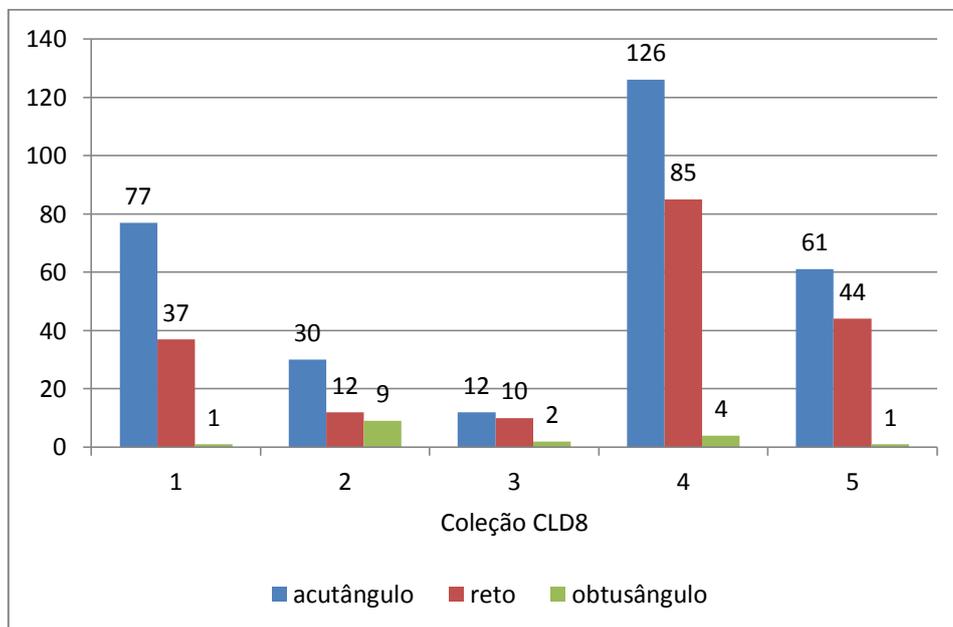


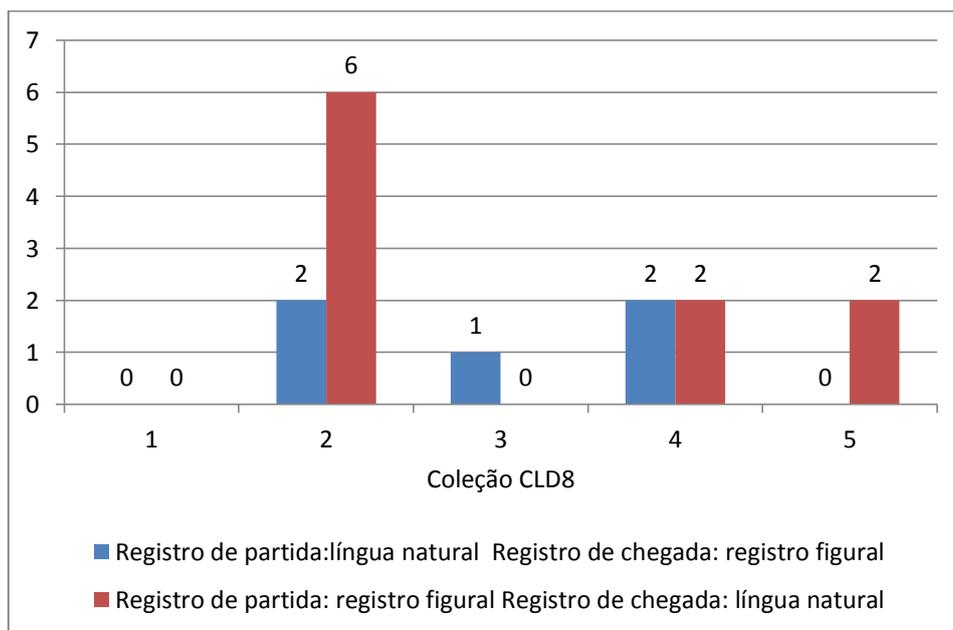




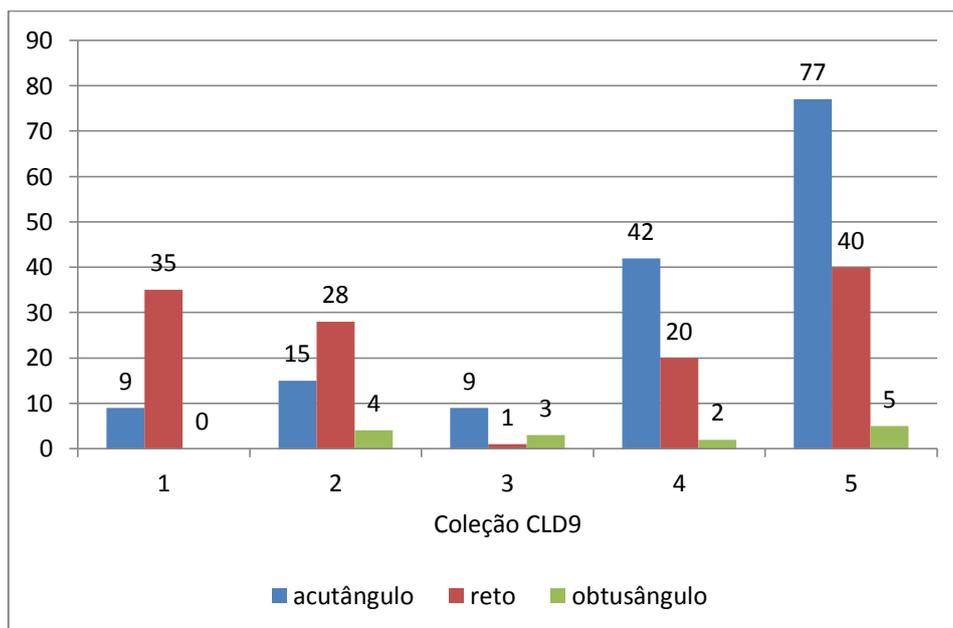
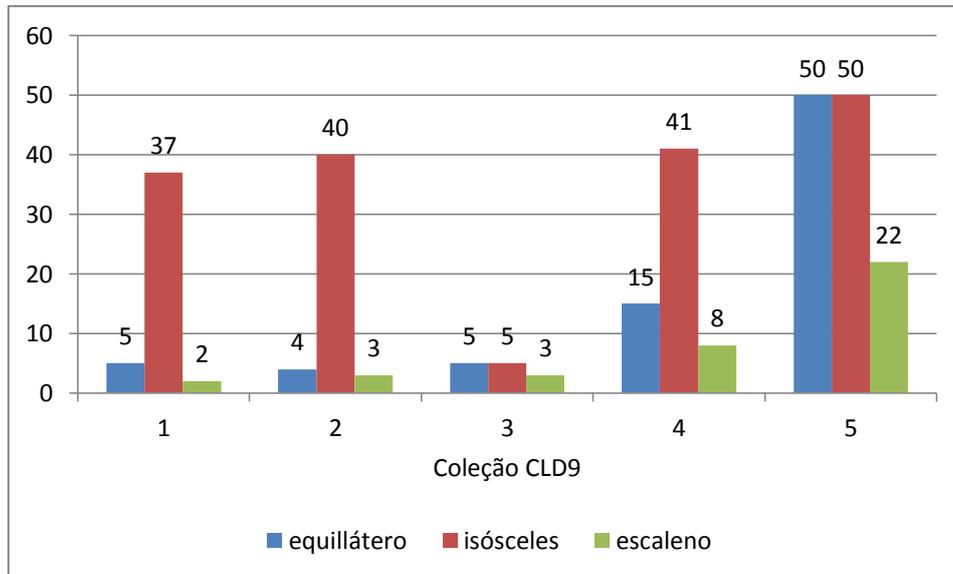
APÊNDICE H – Gráficos da coleção CLD8

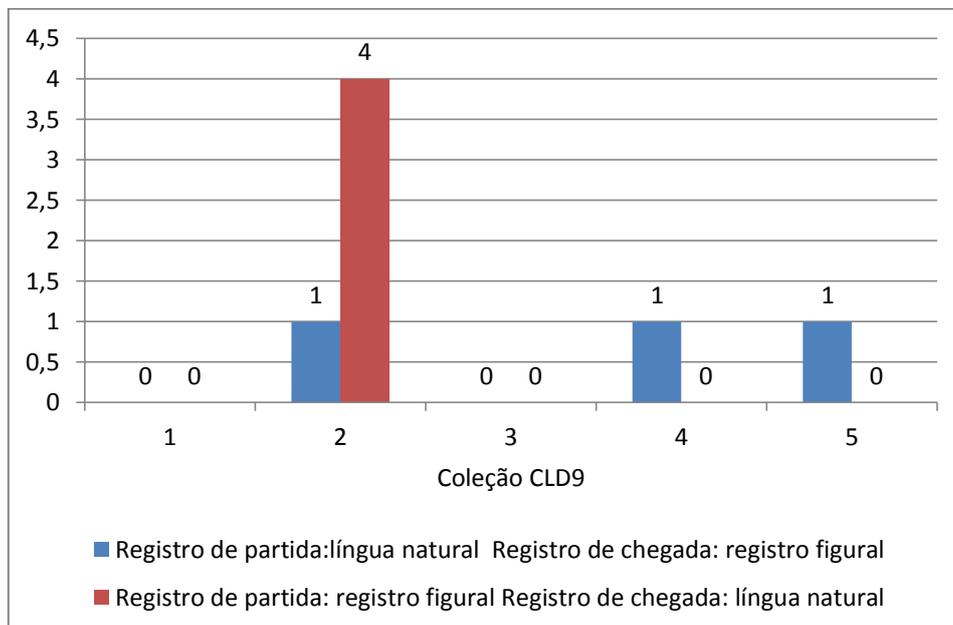
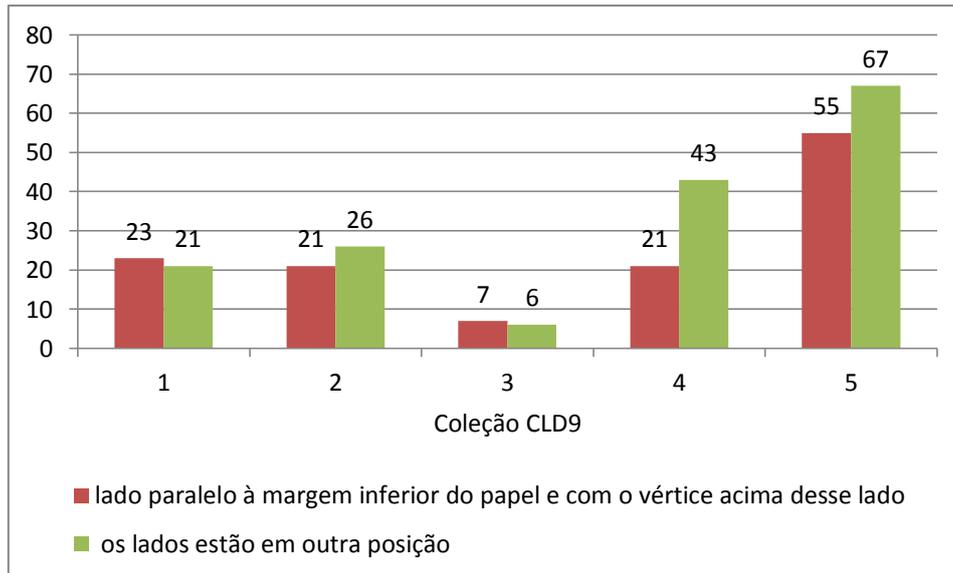




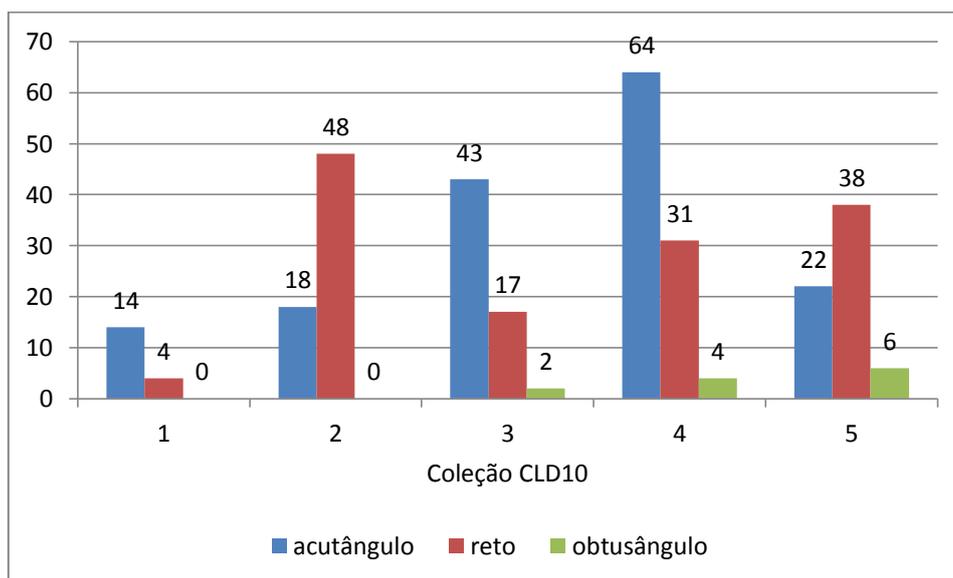
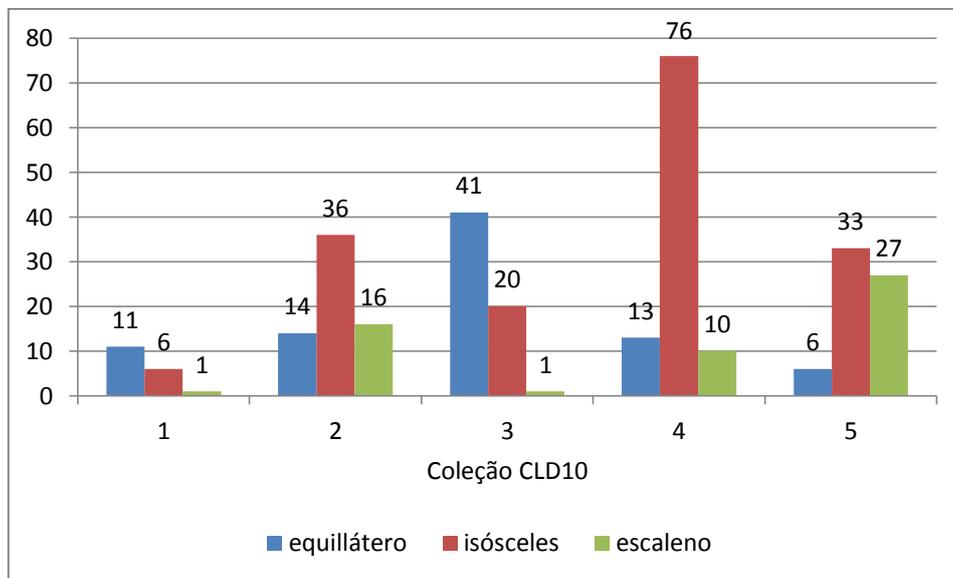


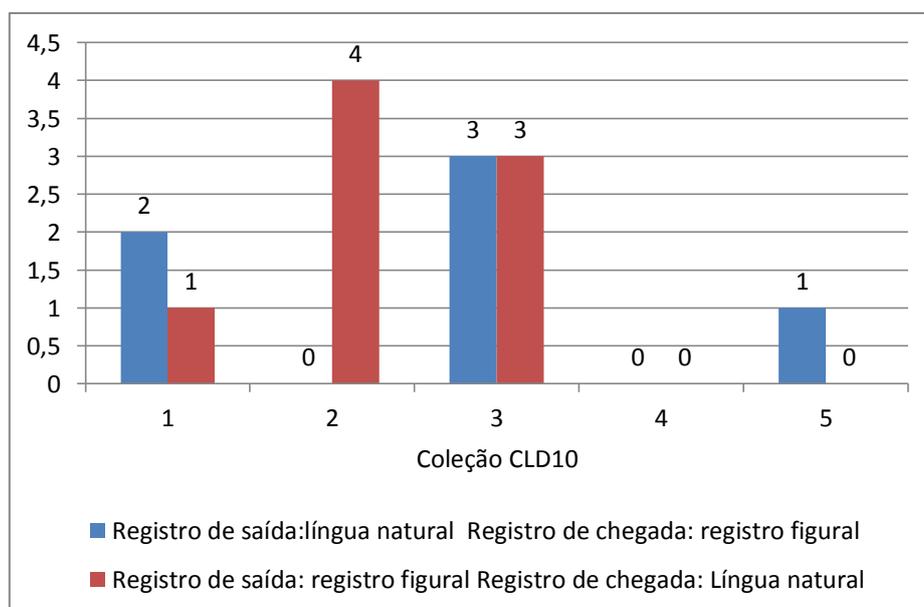
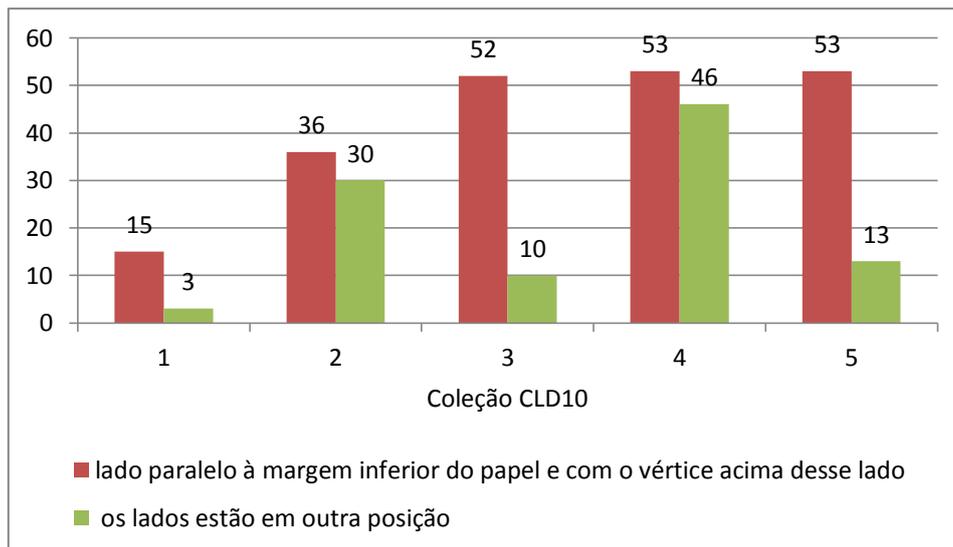
APÊNDICE I – Gráficos da coleção CLD9



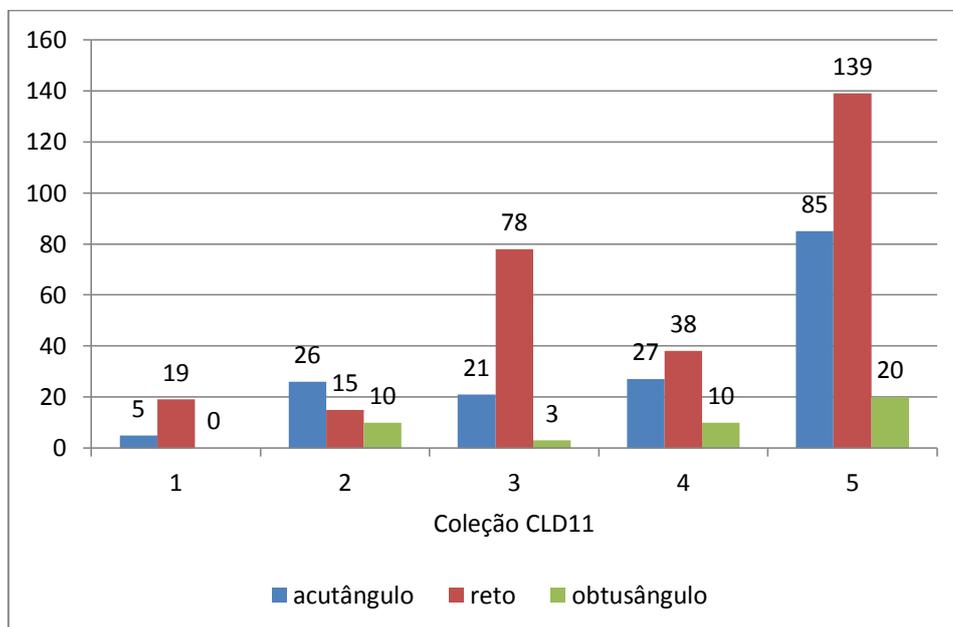
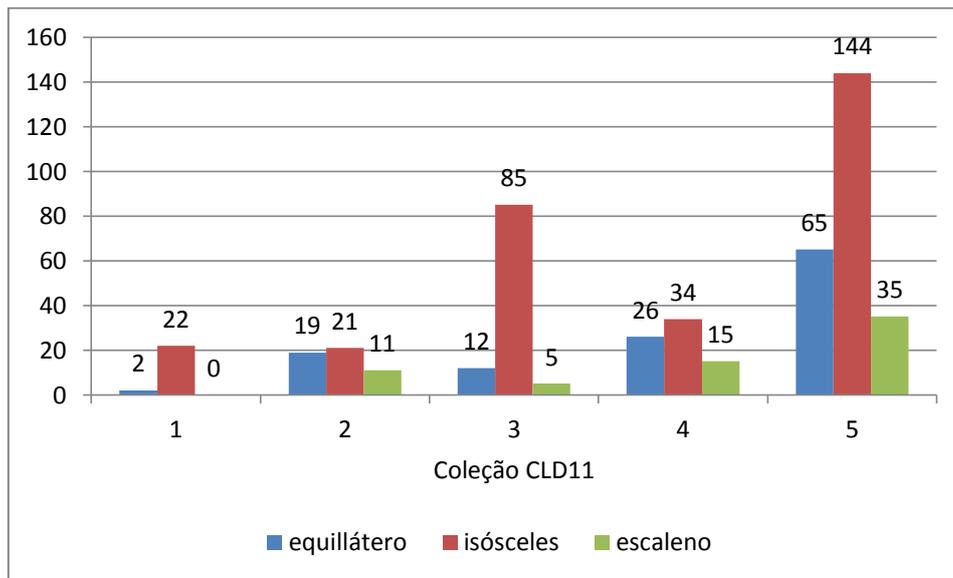


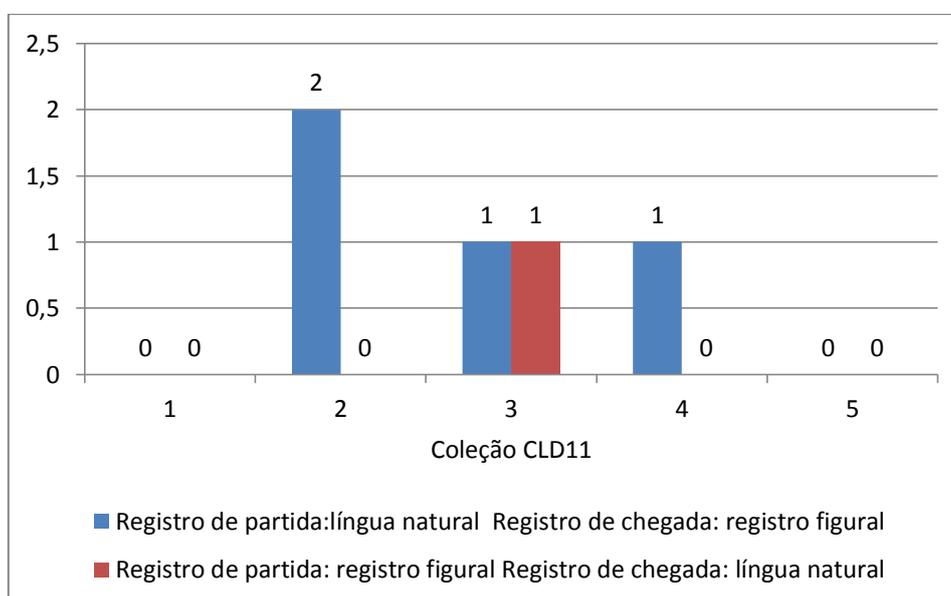
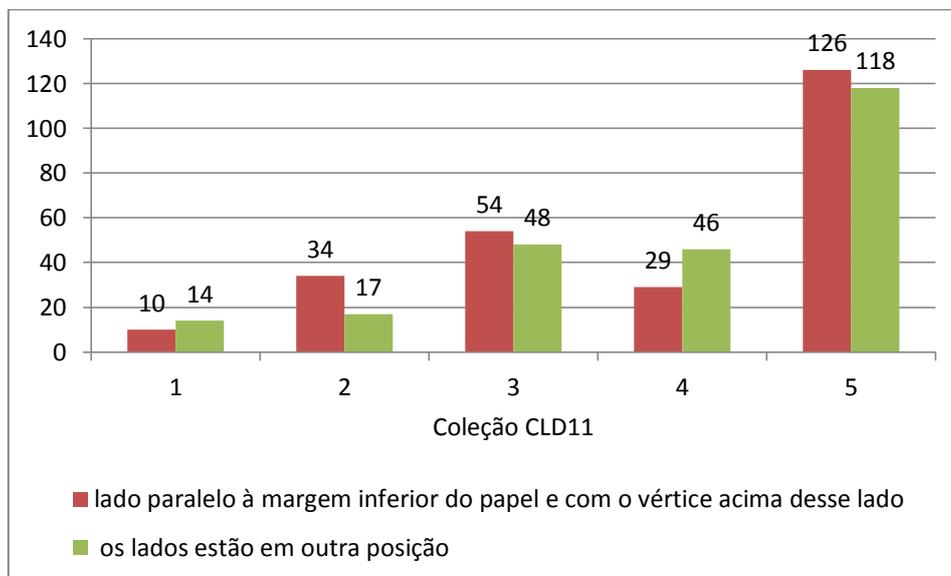
APÊNDICE J – Gráficos da coleção CLD10



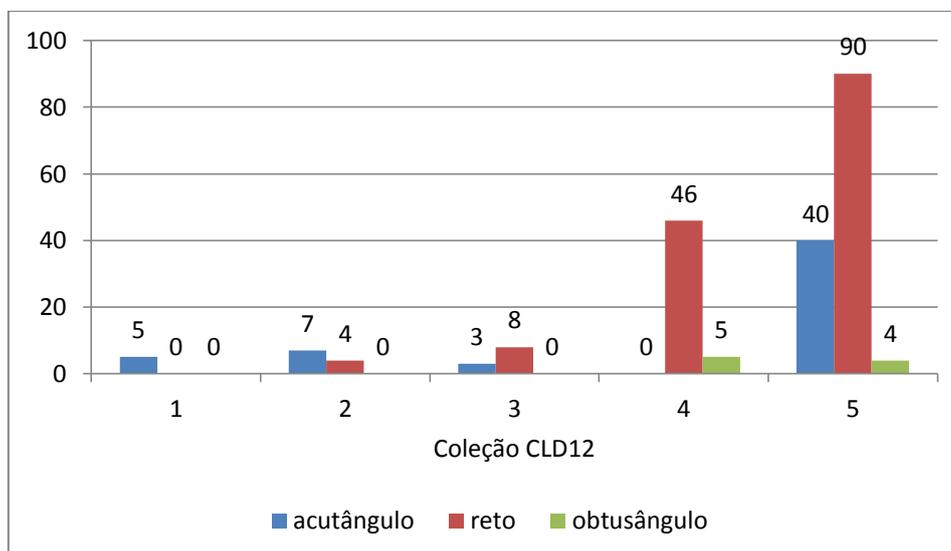
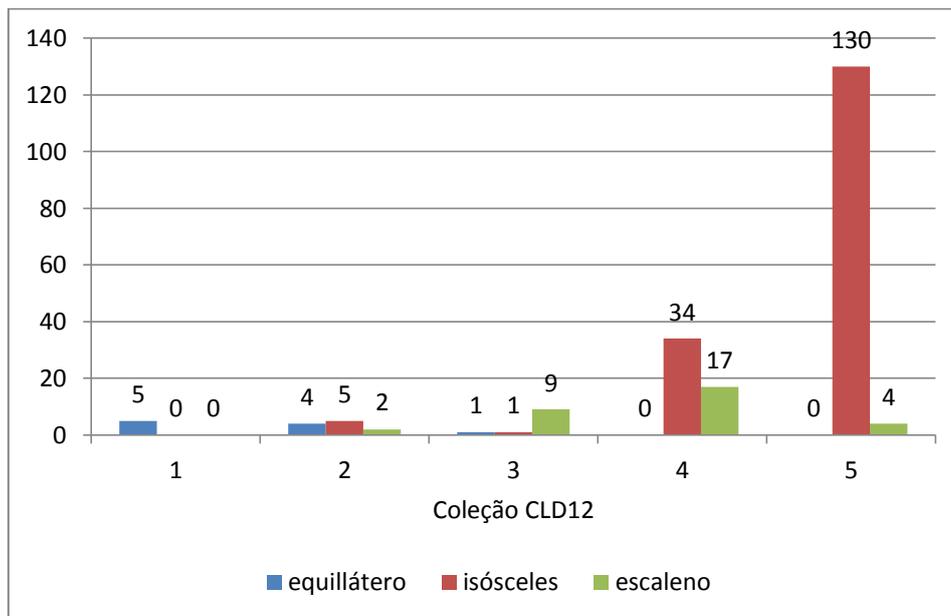


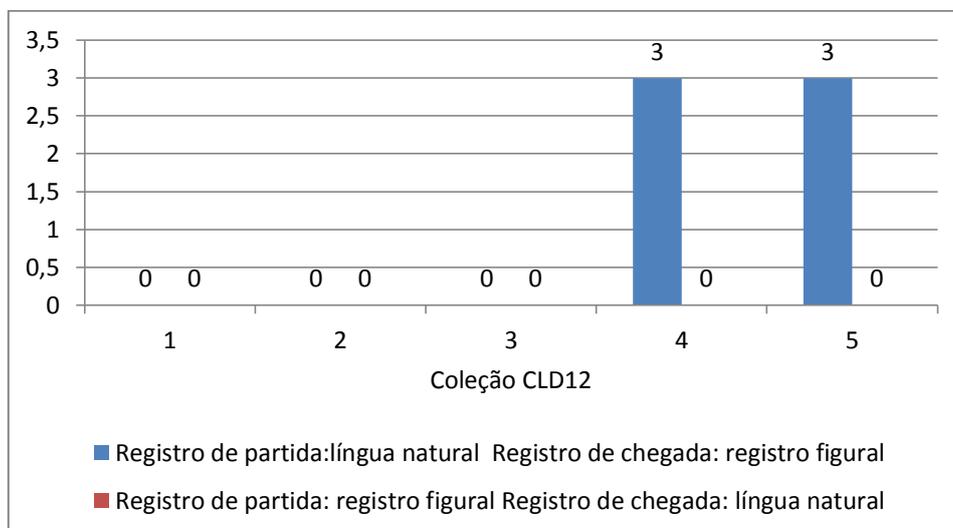
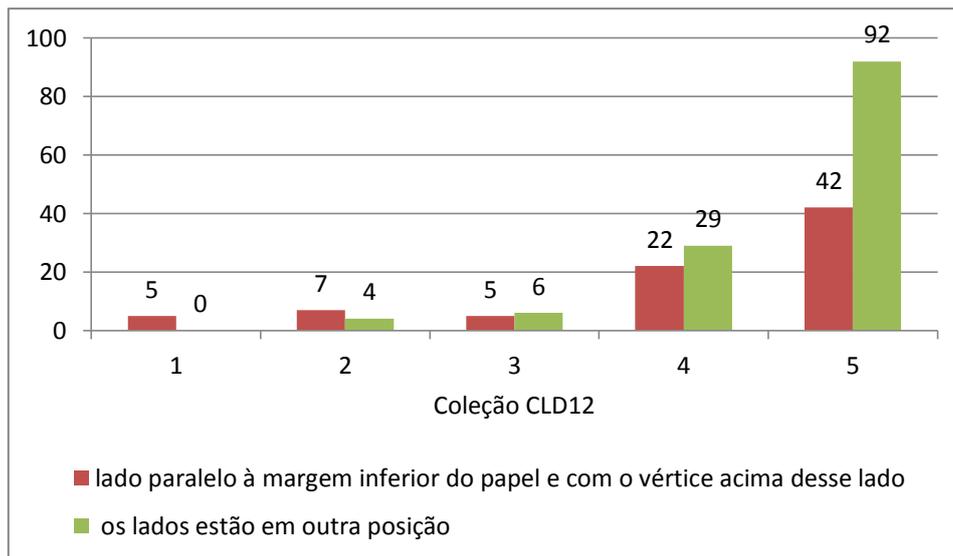
APÊNDICE K - Gráficos da coleção CLD11



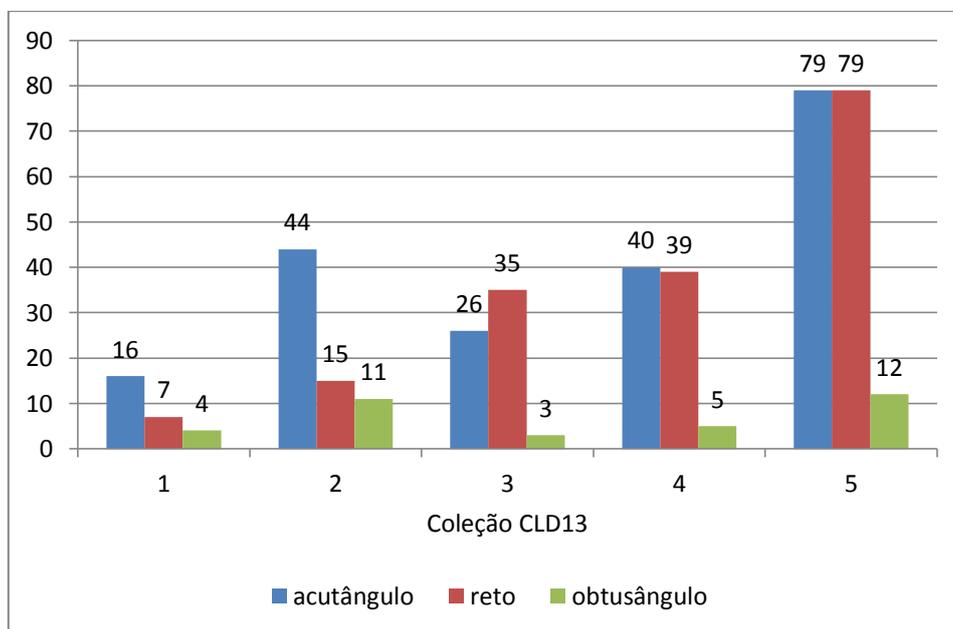
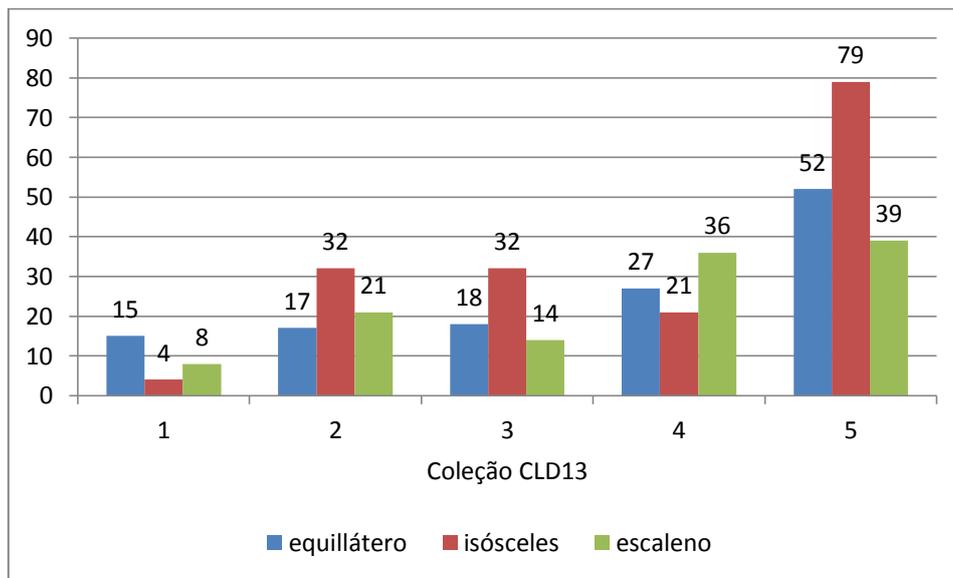


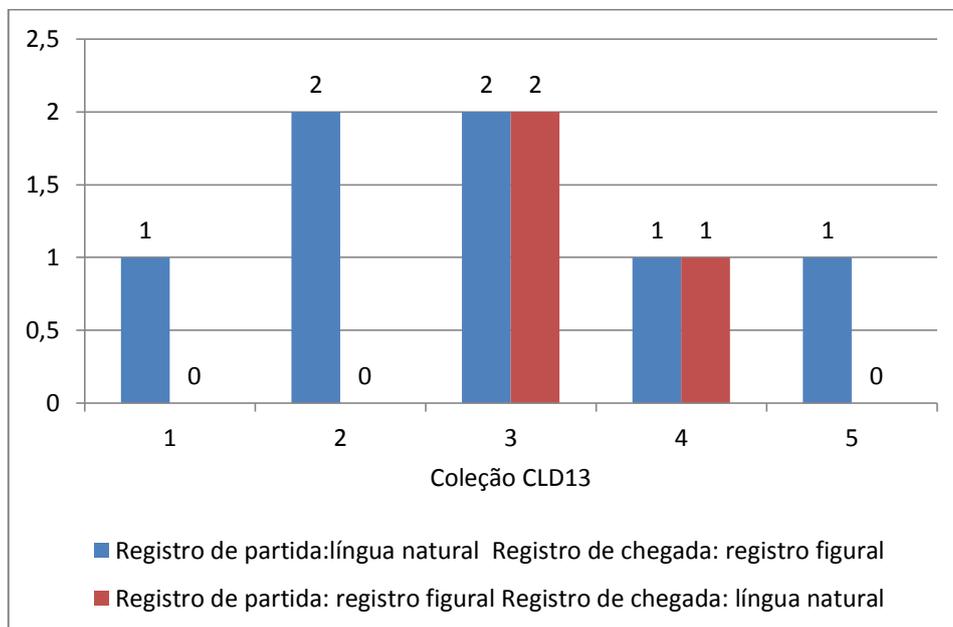
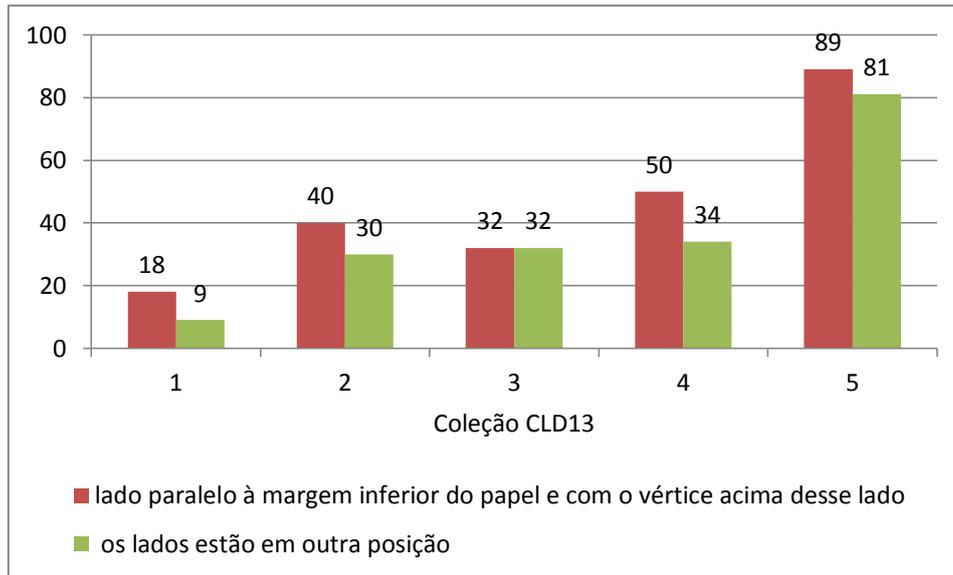
APÊNDICE L – Gráficos da coleção CLD12



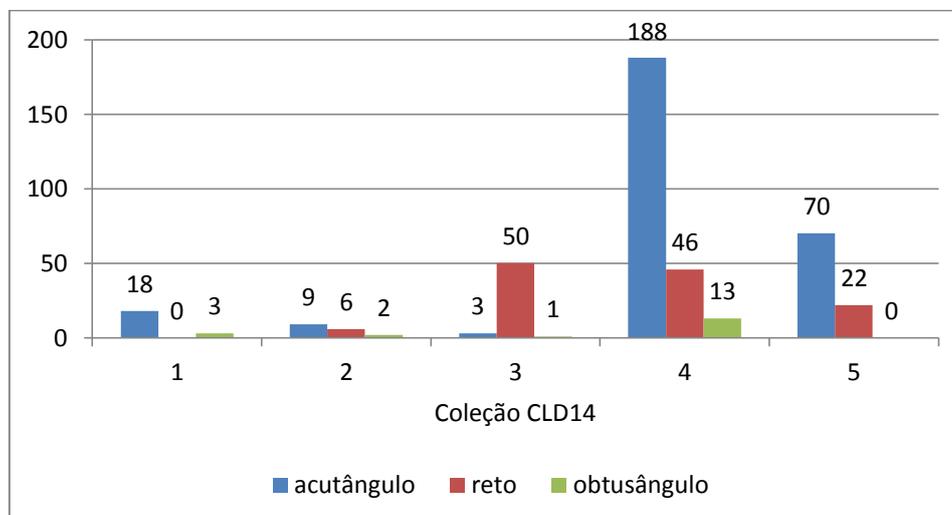
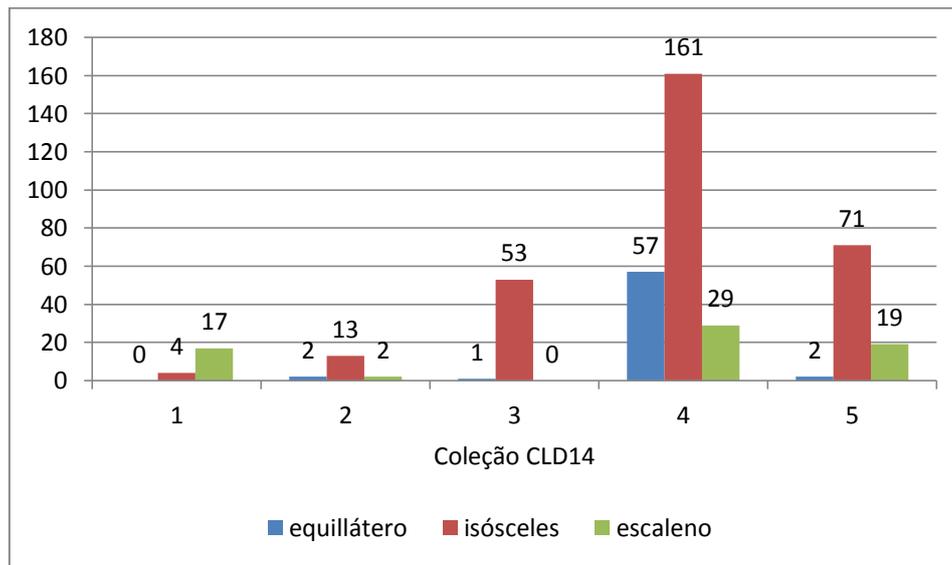


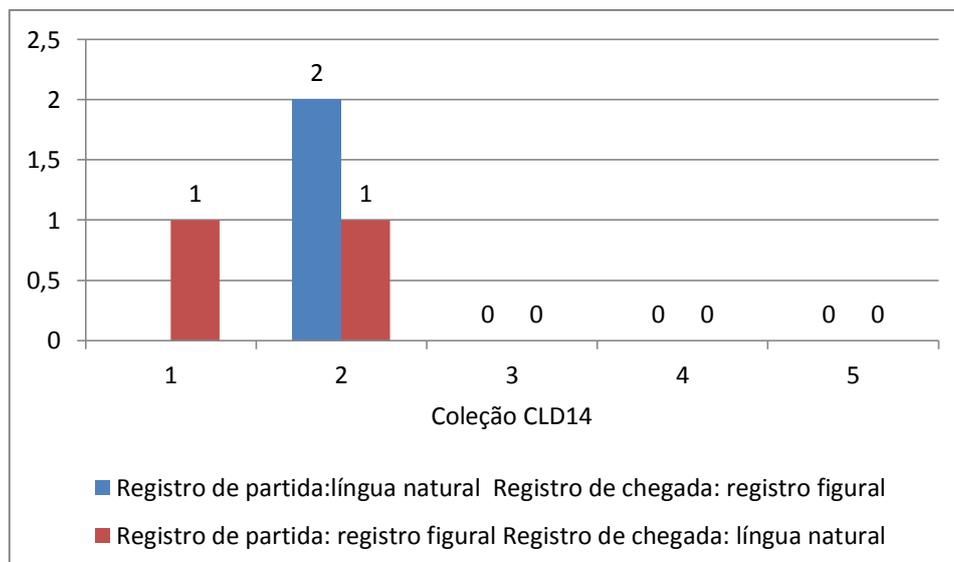
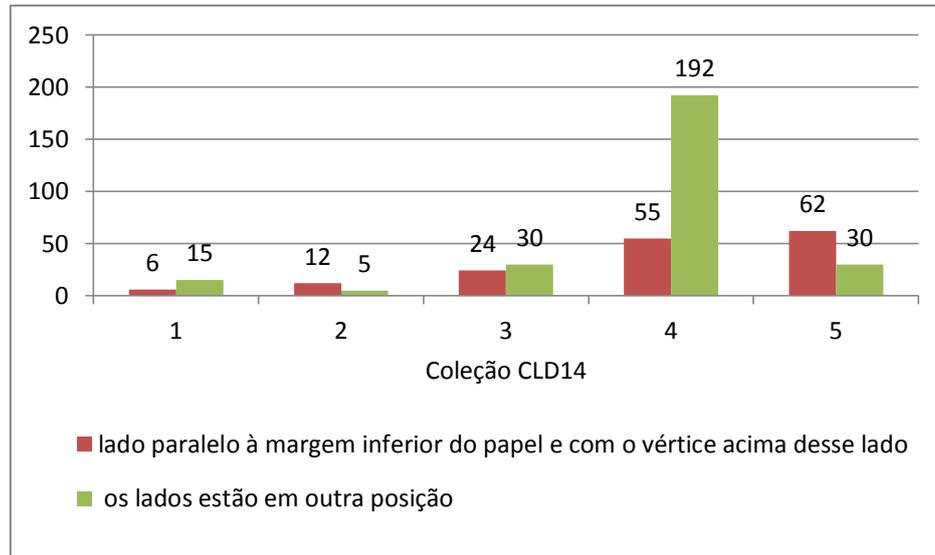
APÊNDICE M – Gráficos da coleção CLD13



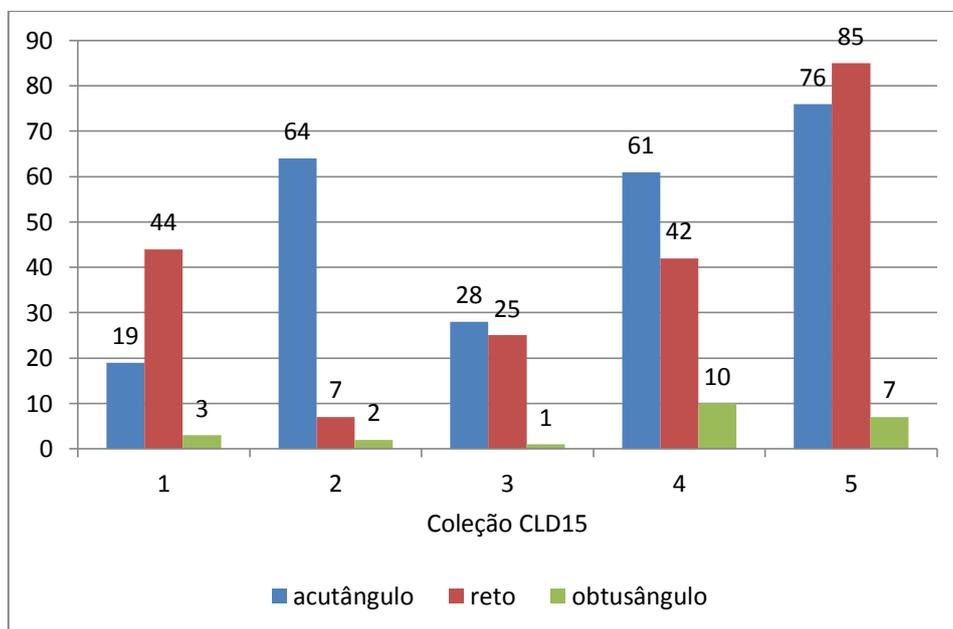
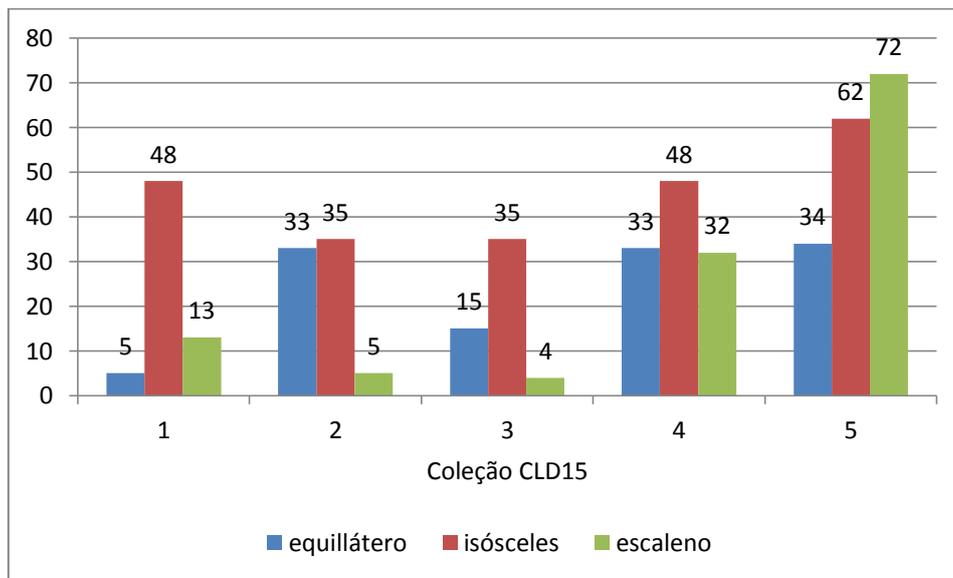


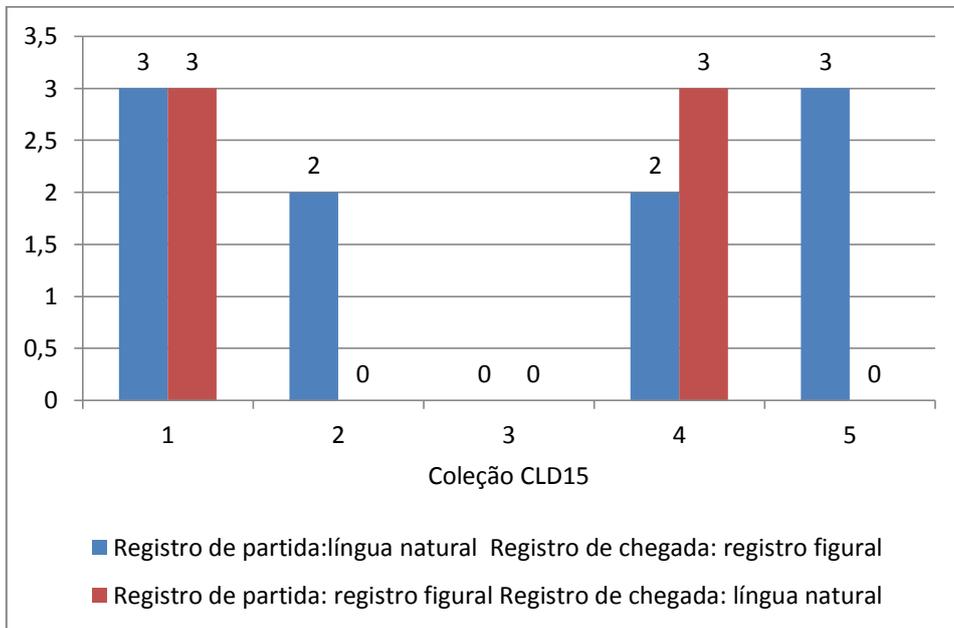
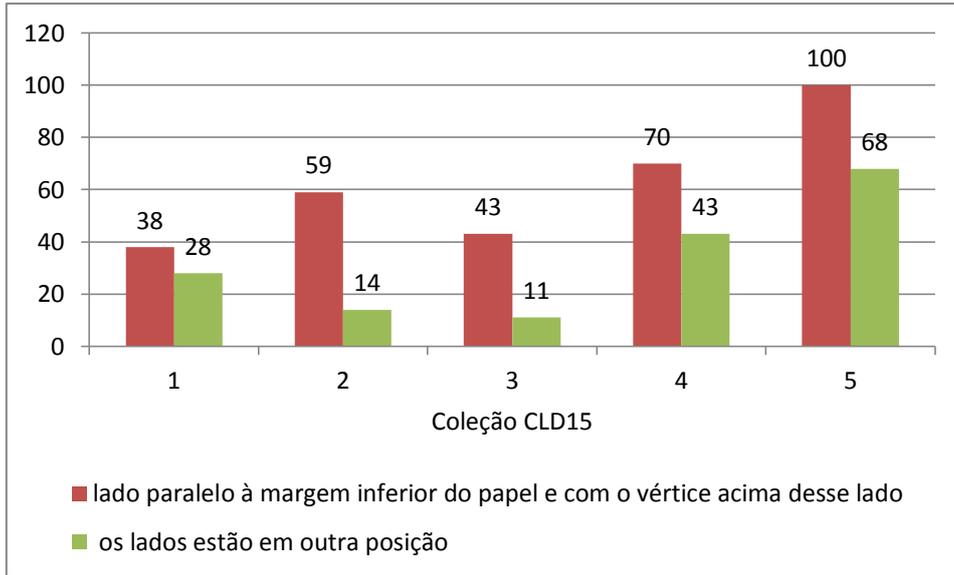
APÊNDICE N – Gráficos da coleção CLD14



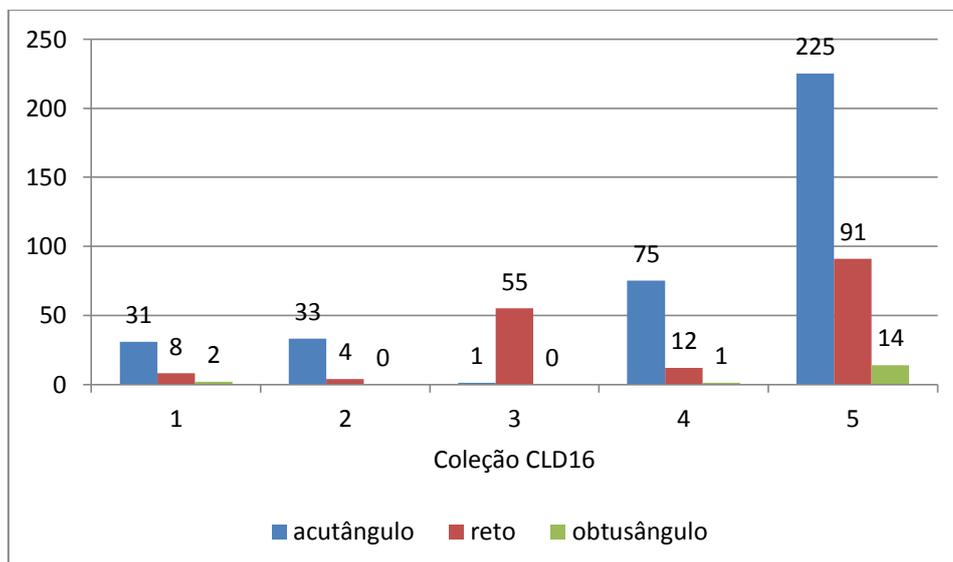
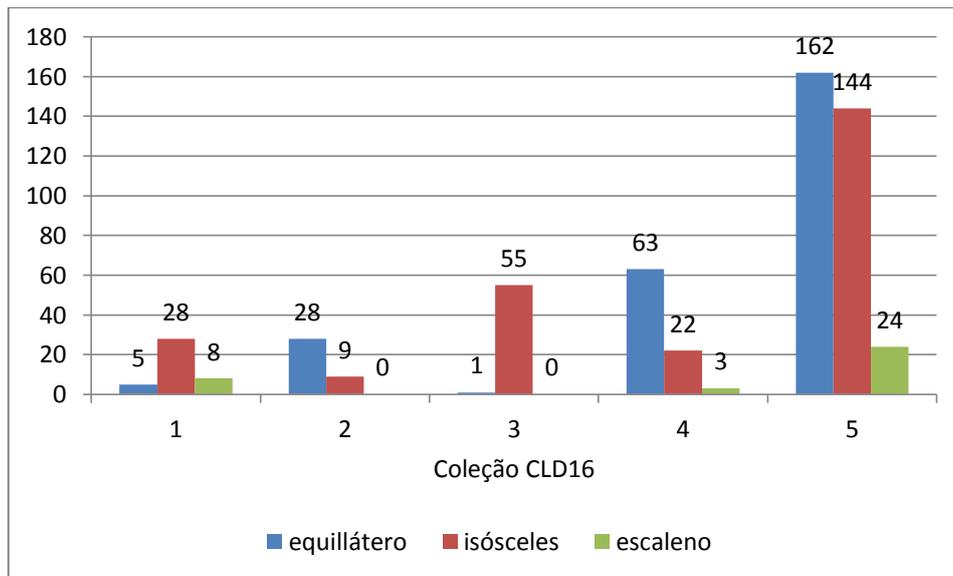


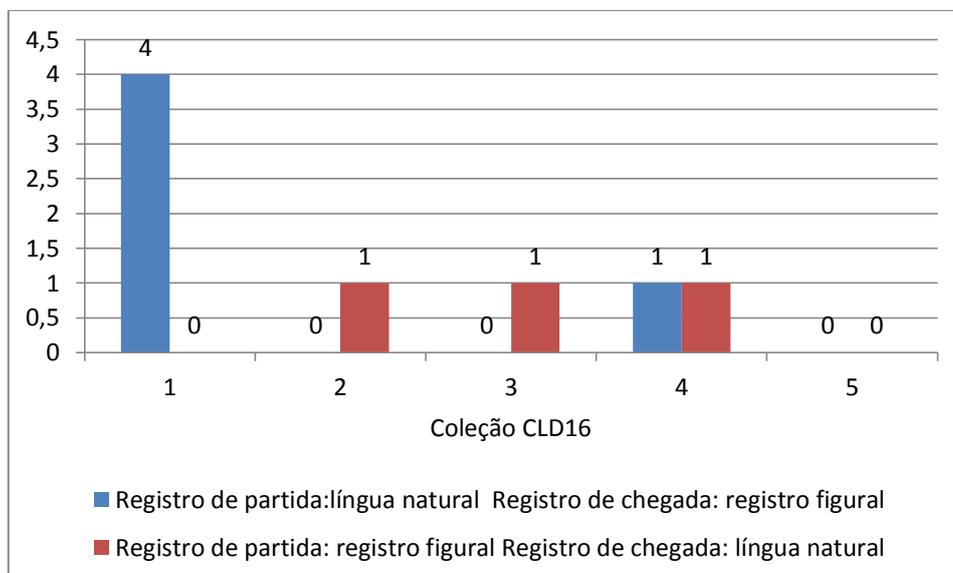
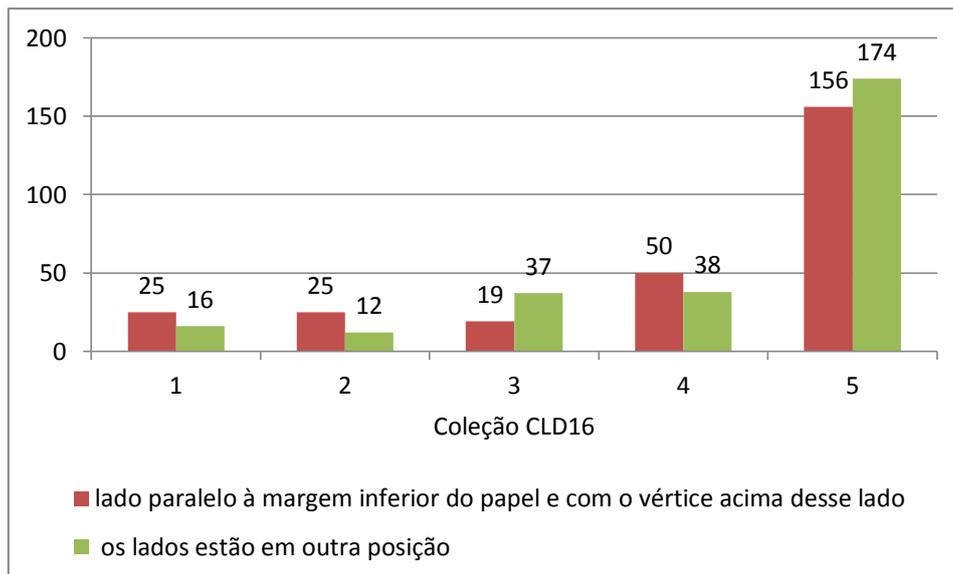
APÊNDICE O - Gráficos da coleção CLD15



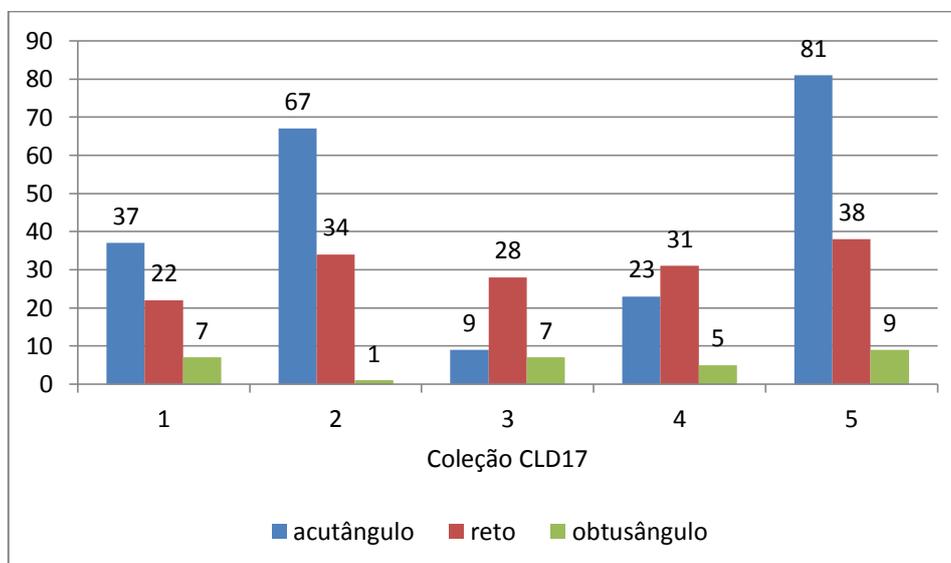
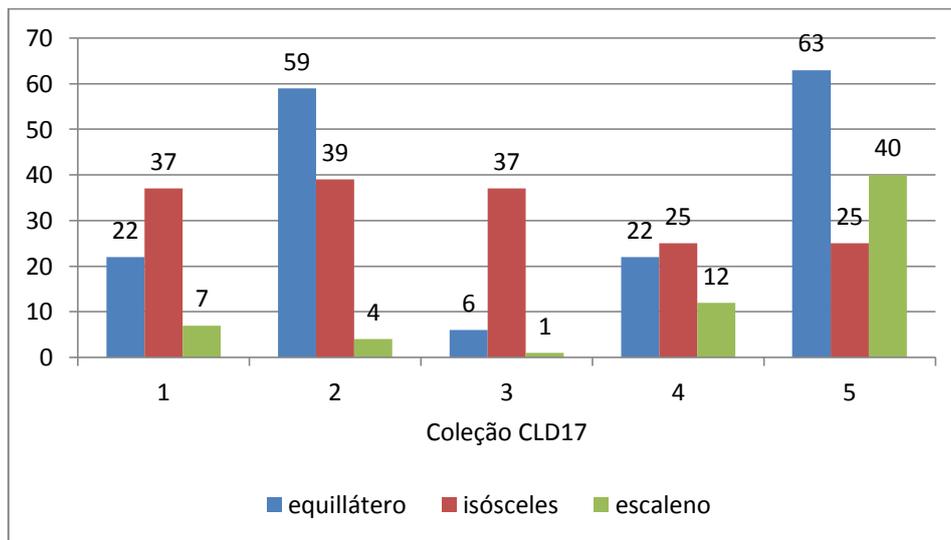


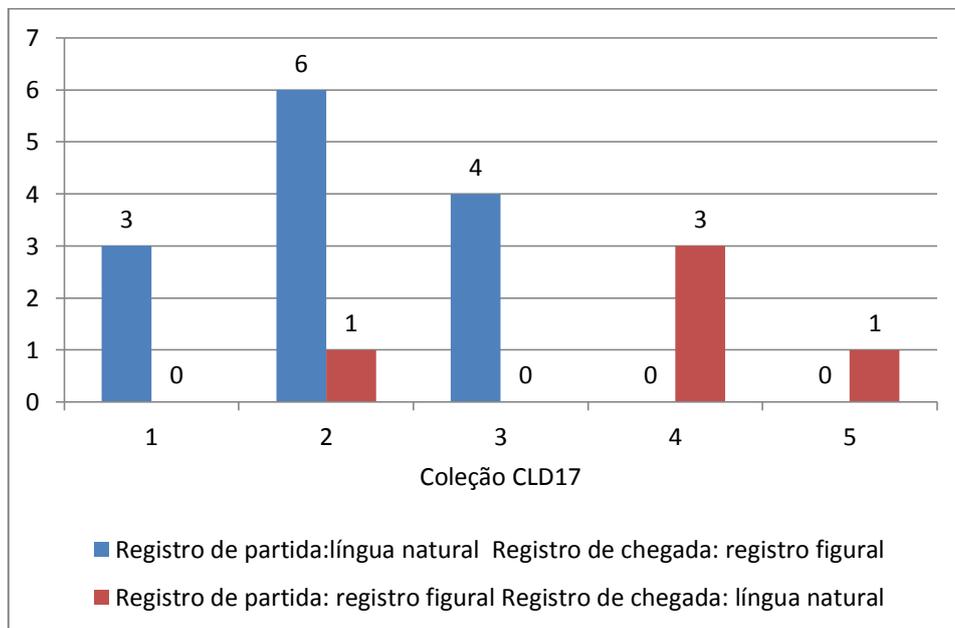
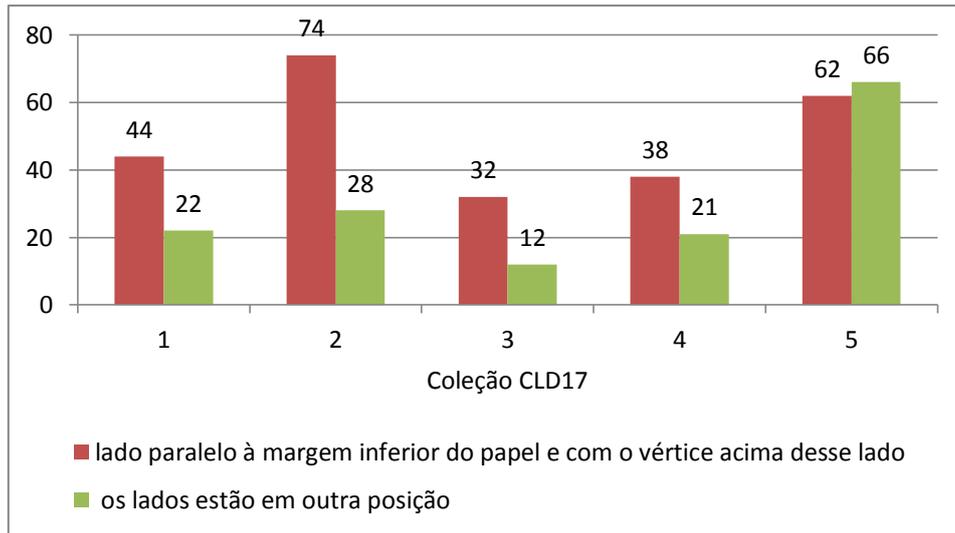
APÊNDICE P – Gráficos da coleção CLD16



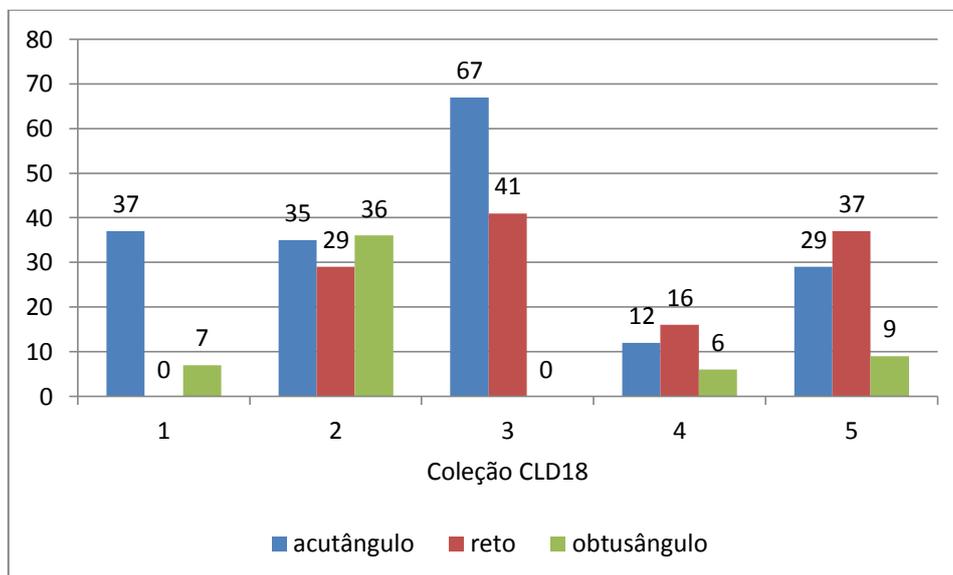
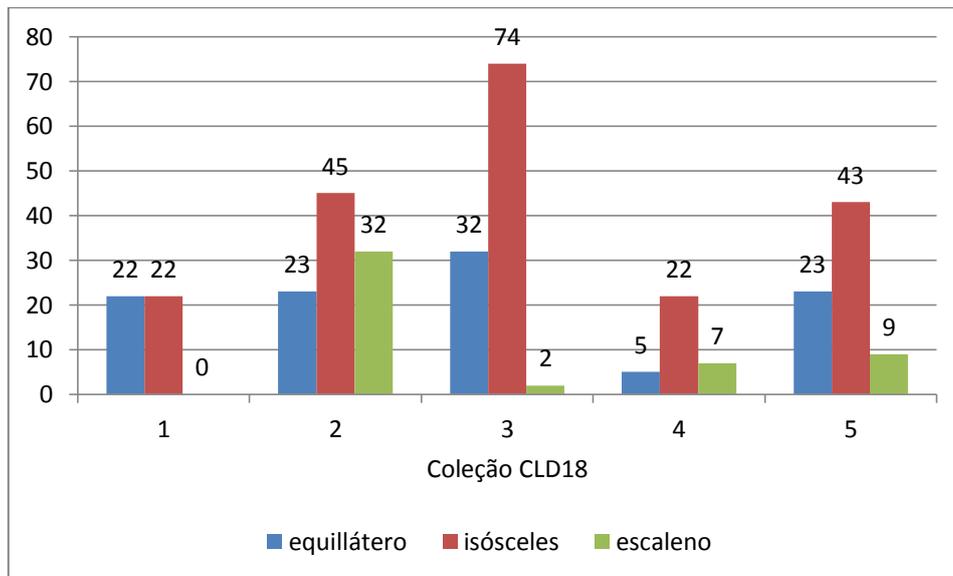


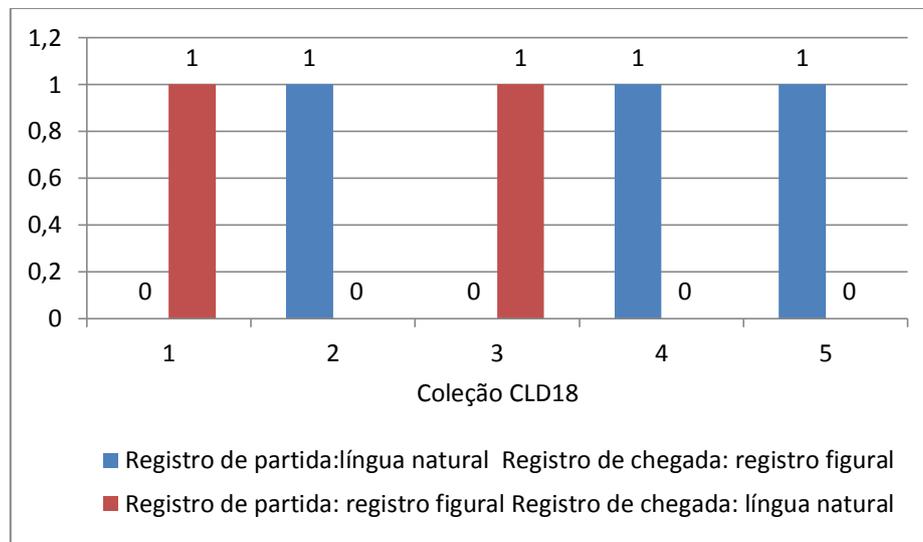
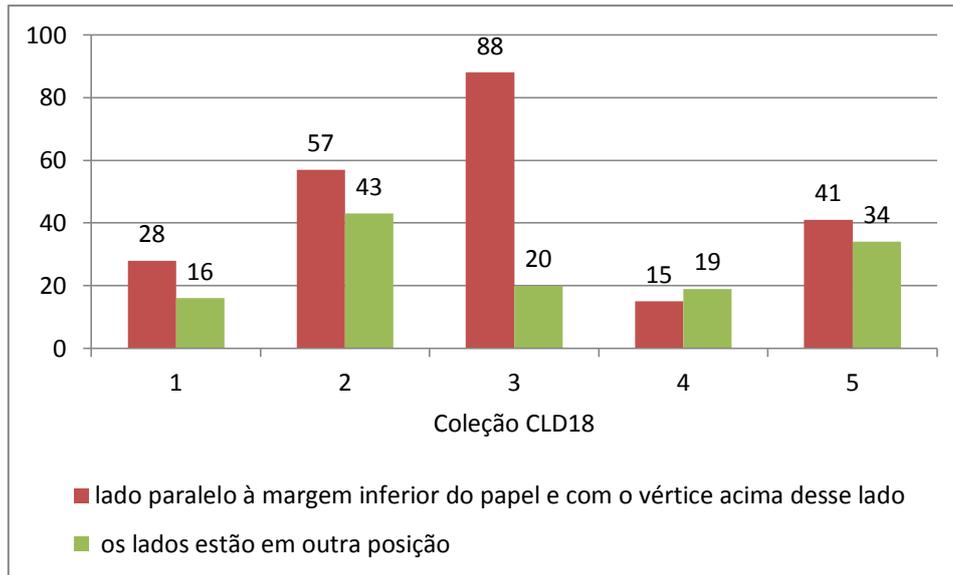
APÊNDICE Q – Gráficos da coleção CLD17



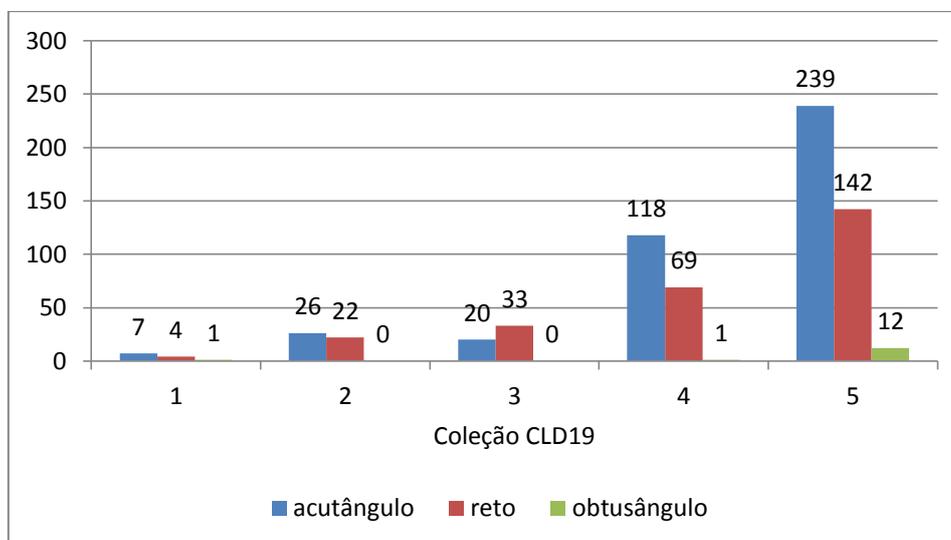
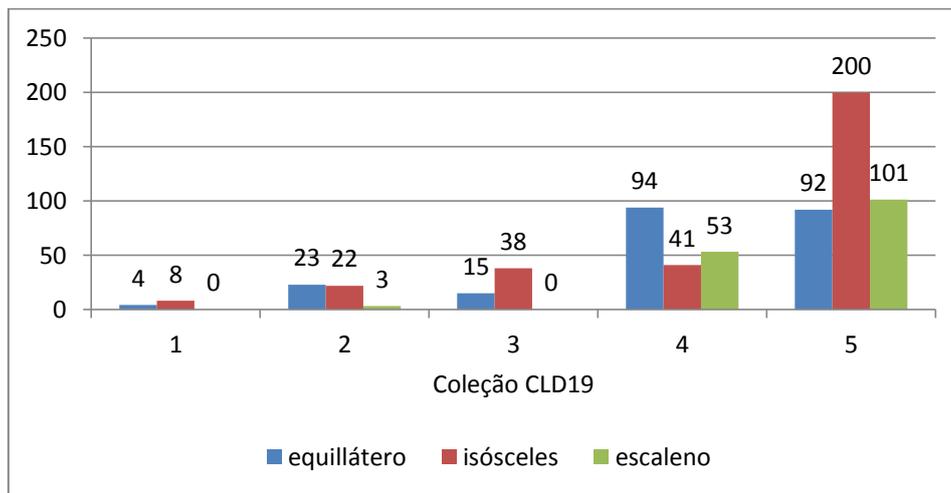


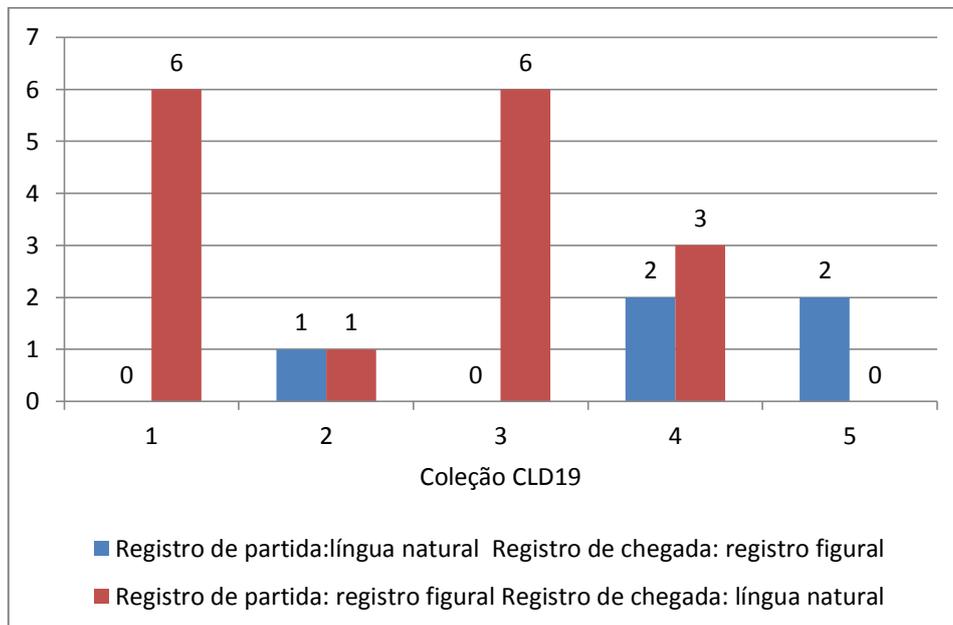
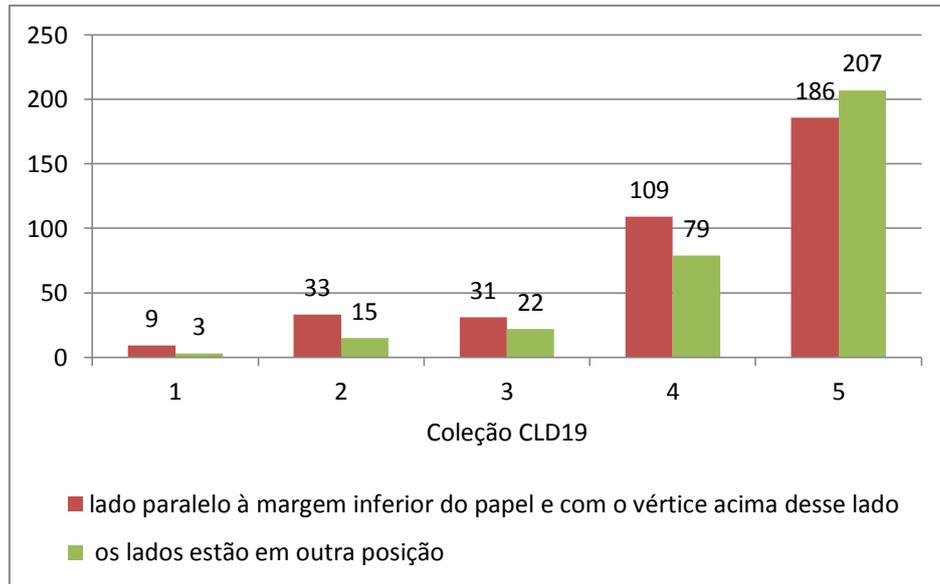
APÊNDICE R – Gráficos da coleção CLD18



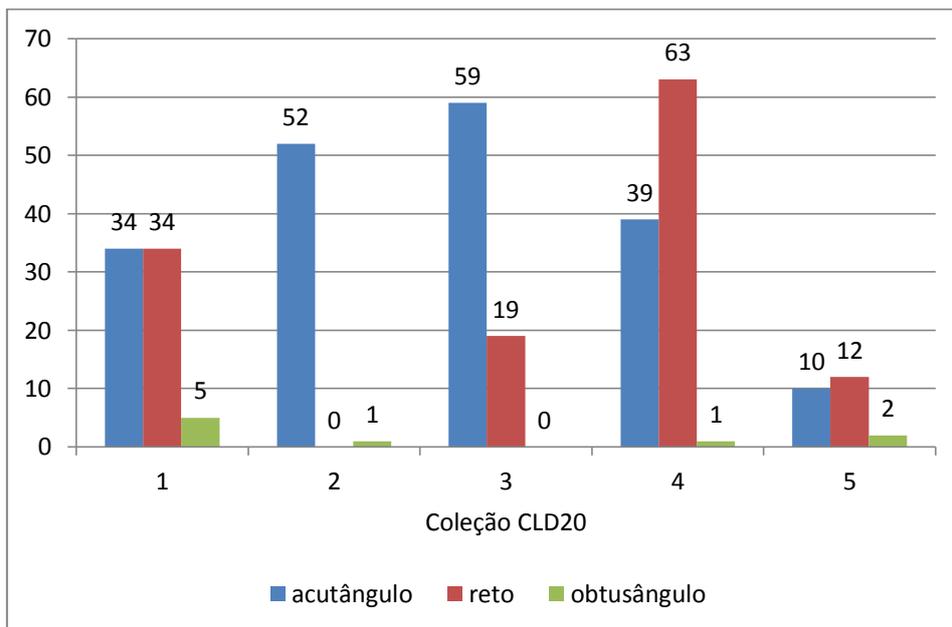
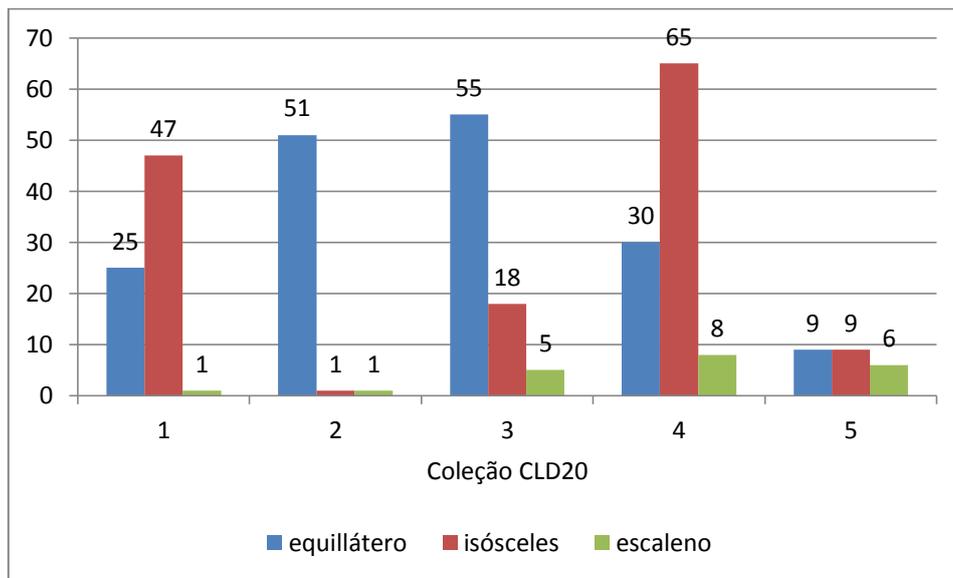


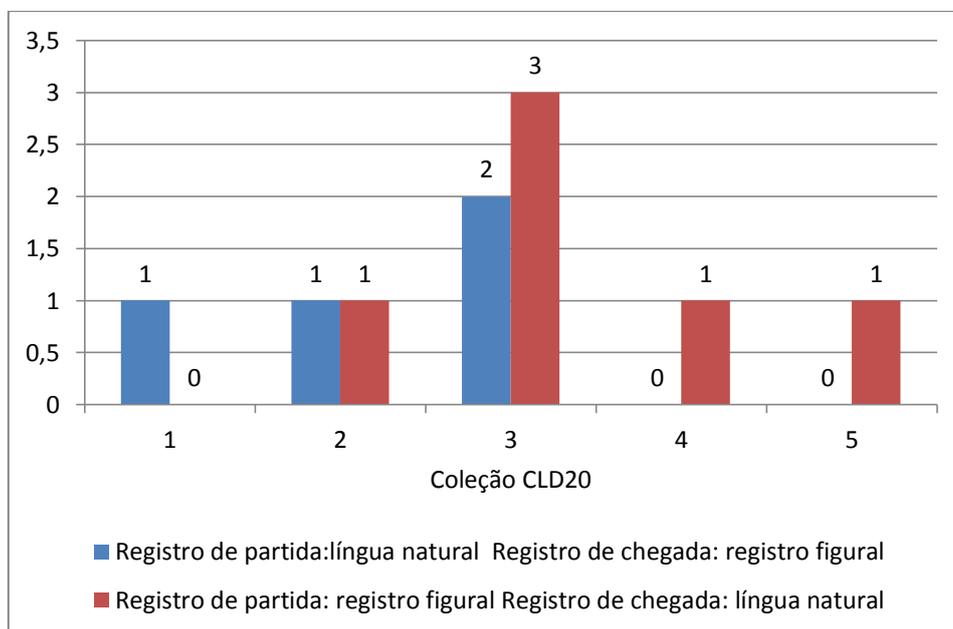
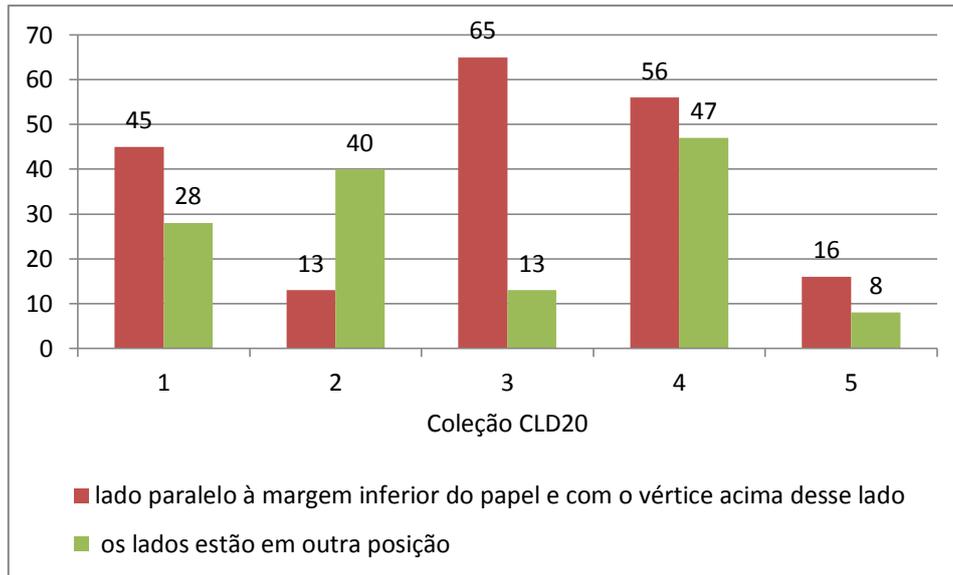
APÊNDICE S- Gráficos da coleção CLD19



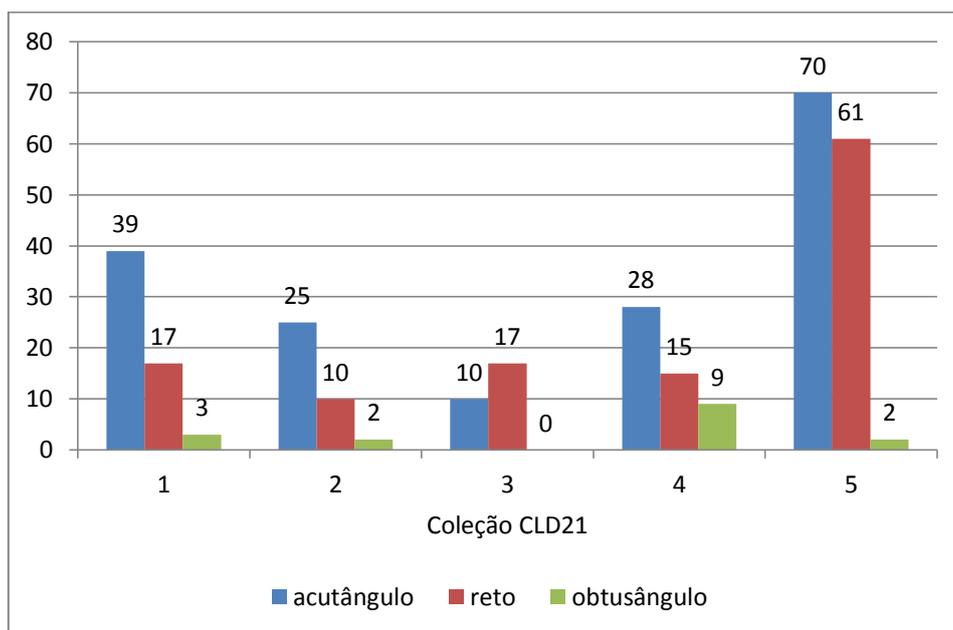
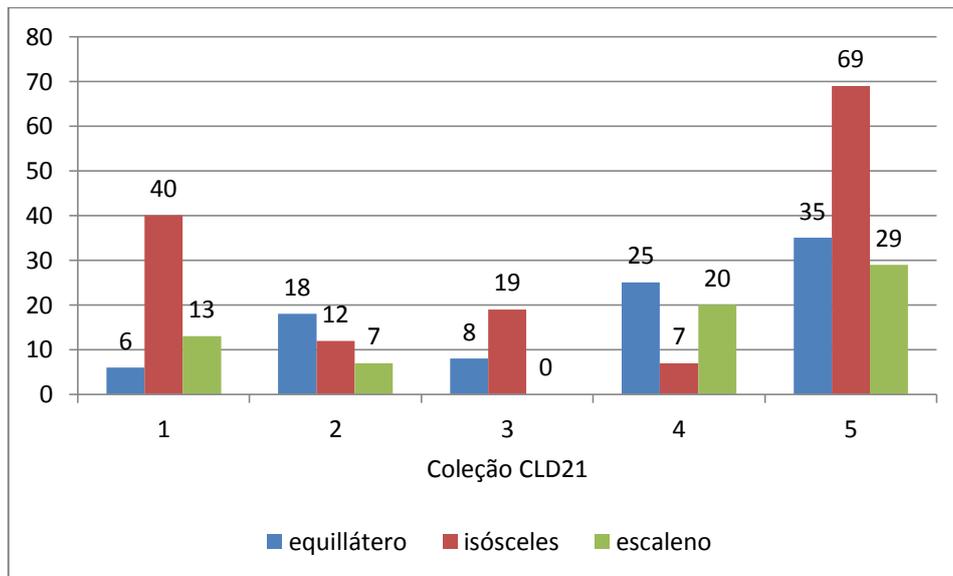


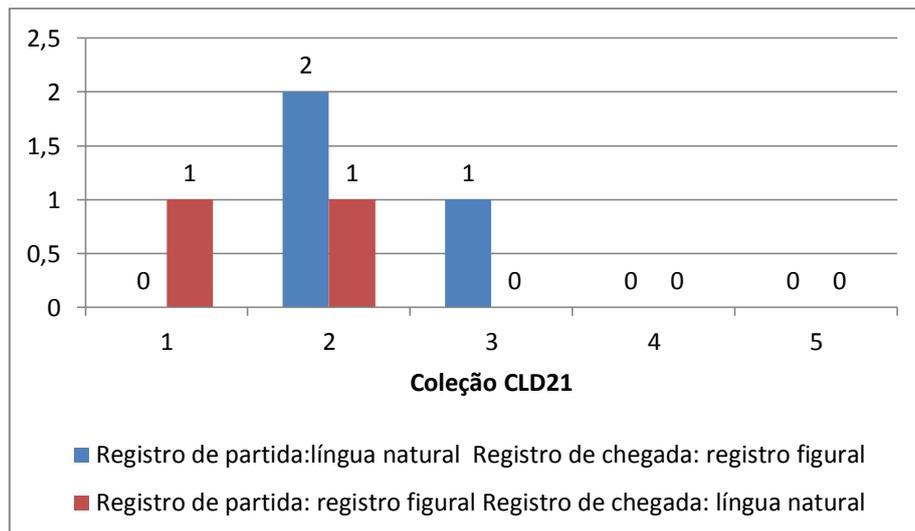
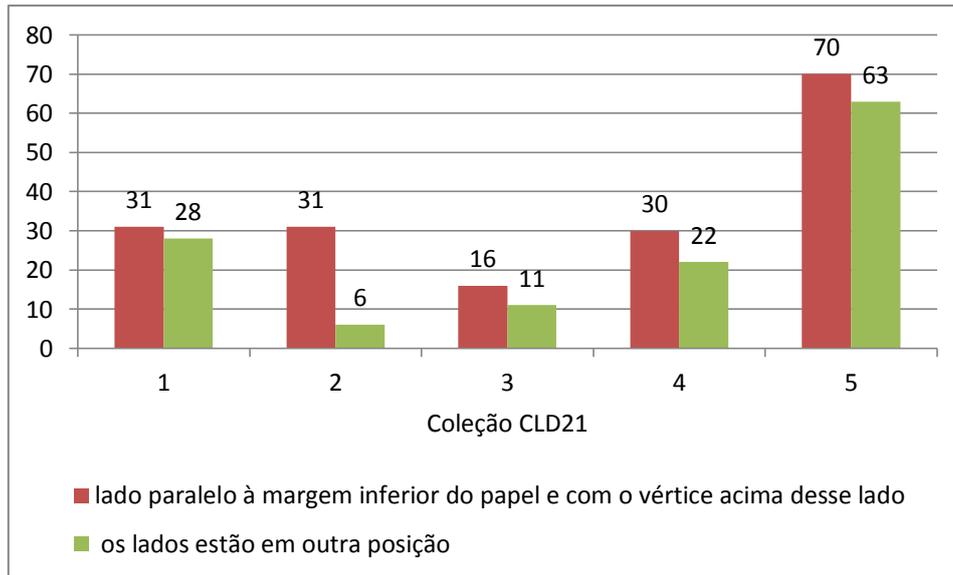
APÊNDICE T- Gráficos da coleção CLD20



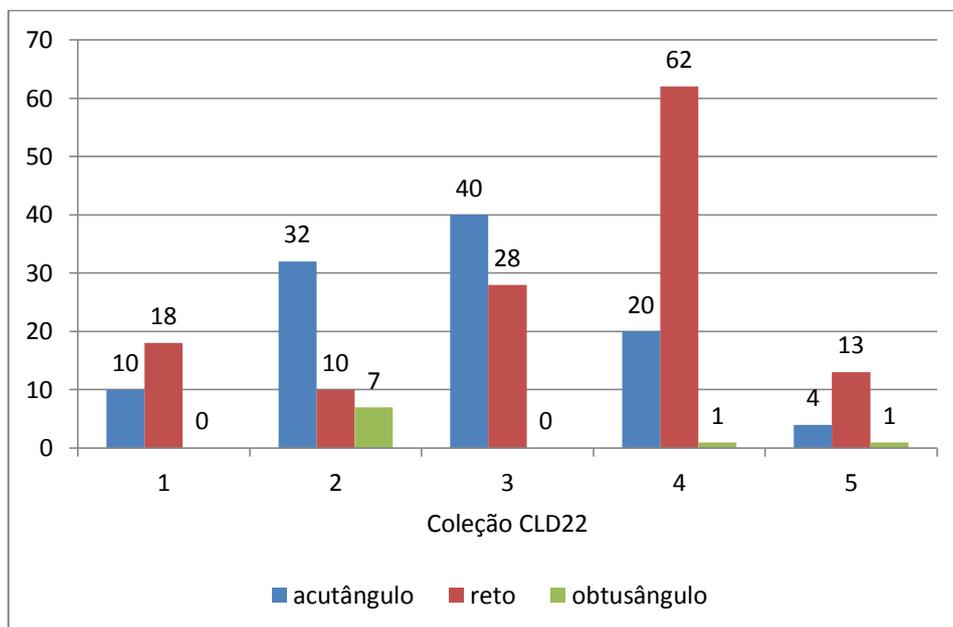
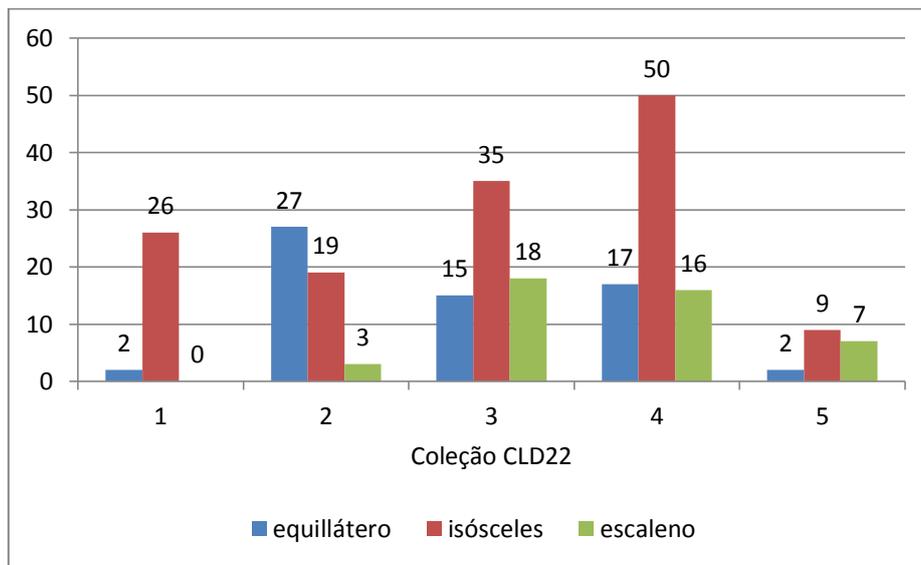


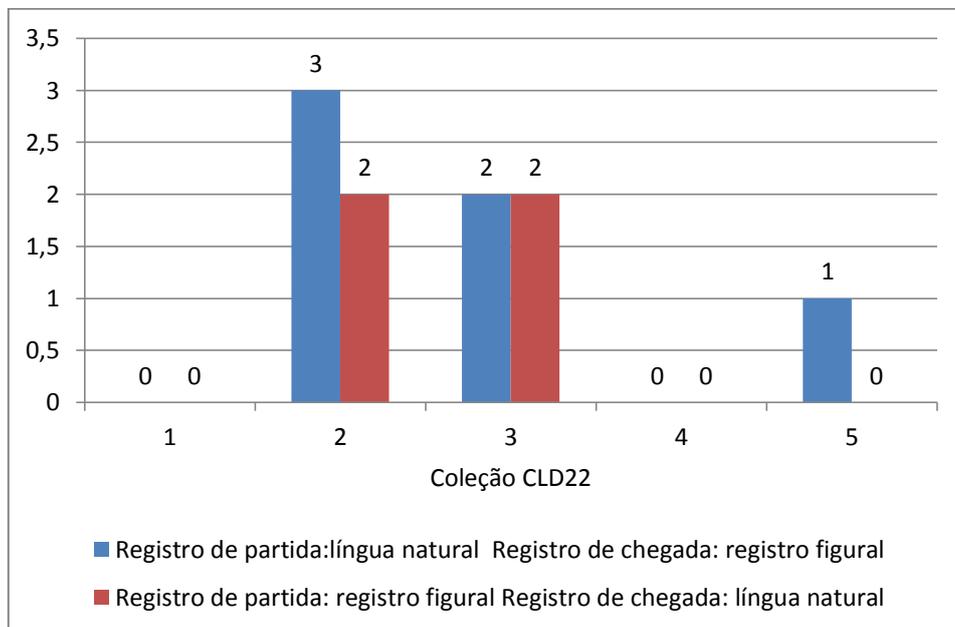
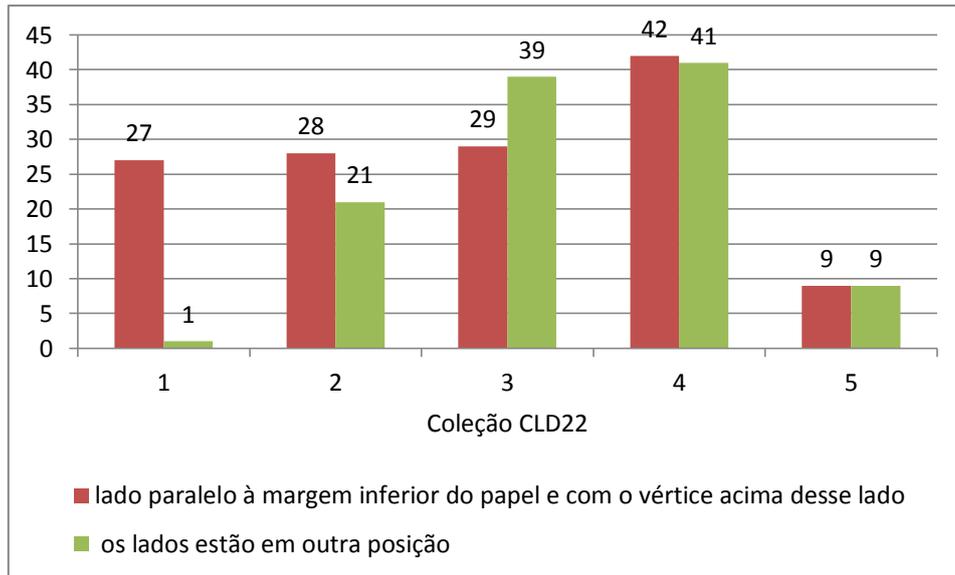
APÊNDICE U- Gráficos da coleção CLD21





APÊNDICE V – Gráficos da coleção CLD22





APÊNDICE W - Coleções pesquisadas

CÓDIGO	CÓDIGO PNLD 2013	
	Volumes 1/2/3	Volumes 4/5
CLD1	25239	25245
CLD2	25379	25378
CLD3	25289	25290
CLD4	25430	25431
CLD5	25220	25346
CLD6	25200	25201
CLD7	25421	25422
CLD8	25202	25203
CLD9	25400	25399
CLD10	25204	25210
CLD11	25382	25387
CLD12	25435	25441
CLD13	25365	25367
CLD14	25221	25345
CLD15	25225	25231
CLD16	25320	25319
CLD17	25266	25267
CLD18	25347	25348
CLD19	25277	25276
CLD20	25351	25352
CLD21	25247	25253
CLD22	25281	25284
