



**Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação
Matemática e Tecnológica
Curso de Mestrado**

ADRYANNE MARIA RODRIGUES BARRETO DE ASSIS

**CONHECIMENTOS DE COMBINATÓRIA E SEU ENSINO EM UM
PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA: REFLEXÕES E
PRÁTICA DE UMA PROFESSORA**

RECIFE

2014

ADRYANNE MARIA RODRIGUES BARRETO DE ASSIS

**CONHECIMENTOS DE COMBINATÓRIA E SEU ENSINO EM UM
PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA: REFLEXÕES E
PRÁTICA DE UMA PROFESSORA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Prof^a Dr^a Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

RECIFE

2014

Catálogo na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

- | | |
|-------|---|
| A848c | <p>Assis, Adryanne Maria Rodrigues Barreto de.</p> <p>Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada: reflexões e prática de uma professora / Adryanne Maria Rodrigues Barreto de Assis. – Recife: O autor, 2014.</p> <p>169 f.: il. ; 30 cm.</p> <p>Orientadora: Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa.</p> <p>Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2014.</p> <p>Inclui Referências e Apêndices.</p> <p>1. Matemática - Estudo e Ensino. 2. Professores - Formação. 3. UFPE - Pós-graduação. I. Pessoa, Cristiane Azevêdo dos Santos. II. Título.</p> <p>372.7 CDD (22. ed.)</p> <p>UFPE (CE2014-23)</p> |
|-------|---|



Adryanne Maria Rodrigues Barreto de Assis

**“CONHECIMENTOS DE COMBINATÓRIA E SEU ENSINO EM UM PROCESSO
DE FORMAÇÃO CONTINUADA: REFLEXÕES E PRÁTICA DE UMA
PROFESSORA”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a conclusão do Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Aprovada em: 14/02/2014

Presidente e Orientadora
Prof^a. Dra. Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa
UFPE

Examinadora Externa
Prof^a. Dra. Regina Célia Grando
USF

Examinadora Interna
Prof^a. Dr. Rute Elizabete de S. Rosa Borba
UFPE

Recife, 14 de fevereiro de 2014.

“Este livro é filho do tempo. O autor o concebeu a partir de sua sensível forma de perceber o mundo. Quando o desassossego lhe visitou o coração, ousou extrair as palavras que pulsa na superfície do cotidiano, toda vez que a vida não acontece do jeito e no tempo que havíamos programado”.
E este tempo é o Kairós, o tempo de Deus.

Padre Fábio de Melo – *prefácio do livro Kairós de Padre Marcelo Rossi*

AGRADECIMENTOS

Verdadeiramente um dos momentos mais esperados durante estes dois anos de Mestrado, os agradecimentos às pessoas que me proporcionaram esse momento de alguma forma. A seguir, você irá ler três páginas de puro amor e gratidão. Sendo assim...

Primeiramente e sempre, a Deus, pela presença constante em minha vida, sempre abençoando e sendo meu suporte em tudo. Minha gratidão e adoração inacabável.

À Nossa Senhora, Maria, mãe de Deus, pelo amparo, aconchego e certeza me dada em crer nos planos de Deus. Por passar na frente dos meus caminhos, me guiando sempre pelo caminho do bem, minha veneração e amor de filha eterno.

À Cristiane Pessoa, minha orientadora, ou melhor, minha linda orientadora, pelo carinho sem fim e doces palavras de amiga, irmã e mãe (sim, tudo ao mesmo tempo!). Pelas alegrias e anseios compartilhados ao longo desta jornada. E, claro, pelas intensas e produtivas orientações. Um exemplo para mim! Palavras nunca irão mostrar tamanha gratidão que sinto! Obrigada, muito obrigada!

Aos meus pais, David e Rosiane, pelo incentivo diário à vida. Pelas broncas, lições e sorrisos partilhados ao longo destes anos. Por toda dedicação a mim devotada e amor incondicional, meu muitíssimo obrigada. Nenhuma palavra poderá expressar tamanho amor. Amo vocês!

Às minhas irmãs, Daisy e Chris, que são mais que um laço sanguíneo, são a fonte de minha alegria e orgulho, meu porto seguro! Um verdadeiro tripé feito de amor.

Aos meus avós que derramam um amor tão puro por mim sem pedir e nem esperar nada em troca, vovô Cid (*in memoriam*) e Mãezinha; vovô Assis e vovó Raimunda (*in memoriam*), mais que avós, também padrinhos.

Aos meus tios (as), Tia Mana, Tio Rômulo, Tio Cidinho (e Tia Mavinha), Tio Romero (e Tia Nadjara), Tia Graça (e Tio Agraício), Tio Demócrito (e Tia Fátima) e Tio Wellington, alguns mais perto, outros mais distantes, mas o carinho de sempre.

Aos meus primos, às vezes, quase irmãos: Tati, Xande, o primo agregado, e Pauly. E aos demais pela torcida e infância repartida, Katharine, Carlos Henrique, Elisa e Maria Clara.

À família Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório, Rute

Borba, Cris Pessoa, Ju Azevedo, Tiane Rocha, Dani Avanço, Thalita Santos, Mona Cardoso, Flavinha Braz, Mika Moraes, Martha Ferraz, Rita Lima, Glauce Vilela, Fernanda Barreto, Paulinha Lima, Maria de Jesus e Pablo Egídio, por todas reuniões super produtivas e alegres, sempre incentivando e contribuindo de forma ativa para o meu crescimento, assim como o de todos que fazem parte dessa linda família. Muita purpurina para todos nós!

À minha amiga e quase coorientadora, Juliana Azevedo, pelo incentivo dado ao ingresso no Mestrado e por toda amizade prestada antes, durante e, com certeza, após ele.

À Rubens Sotero, pessoa especial em minha vida, o qual me apoiou quando já cansada estava e me incentivou a todo momento; pelas idas comigo às escolas e por encarar uma turma de alfabetização, a fim de me ajudar a coletar meus dados; e pela participação ativa neste projeto e em vários momentos da minha vida, me dando de forma natural um carinho e amor sem igual. Meu sentimento se resume no nosso sorriso compartilhado.

À minha eterna dupla, Lygia de Assis, pelas idas às escolas comigo, me dando o auxílio necessário para a realização da coleta de dados.

Às ‘Majestades Imperiais’ que reinam em meu coração, pelos bons *drinks*, conversas, risadas e apoio que a vida nos ofereceu e irá oferecer: Sthenio Magalhães, Julia Calheiros, Dani Avanço, Ju Azevedo e Mona Cardoso.

Às amigas ‘Eu já sabia’, Lygia de Assis, Nathália Késsia, Juliana Azevedo e Roberta Santos, pelos anos de companheirismo e torcida mútua, apoio e carinho.

Aos amigos que Deus me deu, Keh, Déa, Ron e Diego, pela irmandade concedida, os quais representam tantos outros aqui não citados. Bons amigos que nasceram pela fé, para sempre amigos sim, se Deus quiser!

À minha Mafalda brasileira, Danila Melo, pela risada frouxa noites adentro.

À tia Ana e Babí, pela amizade verdadeira desde o ventre de mainha.

À Meme, minha babá e segunda mãe, com minha gratidão eterna.

À turma do EDUMATEC que esteve ao longo desses dois anos ao meu lado, compartilhando suas alegrias e angústias, anseios e realizações; principalmente, Dani, Jose e Ni, por tudo isso já citado, mas não só por isso.

À Rute Borba e Regina Grando, pelas valiosíssimas contribuições realizadas, não só neste momento final, mas ao longo de todo este trajeto, de forma sempre clara, delicada e amorosa. Disse uma vez e volto a dizer: minha banca examinadora

foi composta por *ladies*. Que sorte a minha!

À iluminada Maria de Jesus, pela ajuda na luta por uma escola, abrindo os caminhos nessa conquista.

À escola e participantes da pesquisa que acolheram o projeto junto comigo. Pela paciência e ajuda, muito obrigada! Em especial, à professora que acreditou no projeto e participou ativamente de todas as etapas.

À professora Rosinalda por ter sido a primeira a me mostrar o lindo caminho da Educação Matemática, me apoiando e ajudando ao longo dessa minha escolha.

Aos professores do Edumatec que com ensinamentos valiosos sobre a Educação Matemática cooperaram com o meu aprendizado, principalmente nas aulas de seminários, tendo um olhar crítico e amigo sobre essa pesquisa.

À Clara, secretária mais que competente desse Programa de Pós-Graduação. Obrigada pela ajuda e atenção de sempre.

Ao Reuni por acreditar e apoiar este projeto, oferecendo o financiamento necessário que me permitisse ter uma dedicação maior à pesquisa.

Obrigada a todos que de forma direta ou indireta fizeram desta pesquisa uma realização não só minha, mas de todos nós!

RESUMO

Este estudo se propôs a analisar o efeito de um processo de formação continuada sobre Combinatória, baseado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), a qual constitui o tripé que forma o conceito: *situações*¹, *invariantes* e *representações simbólicas* dos problemas combinatórios. O processo foi realizado com um grupo de professoras de uma escola, contudo, a pesquisa traz as inferências realizadas a partir das reflexões e práticas de uma professora. A pesquisa se constituiu em entrevista inicial individual com a professora, seis encontros para formação, nos quais também se incluem duas observações de aula ministrada pela professora, e uma entrevista final, também individual, com a professora participante. Foi solicitado também ao longo da pesquisa que a docente elaborasse alguns planejamentos de aulas, sendo um na entrevista inicial, dois durante o processo de formação (quarto e sexto encontro), que seriam aplicados em sala de aula, e outro na entrevista final. As entrevistas inicial e final realizadas na pesquisa são baseadas nas entrevistas realizadas por Rocha (2011). Buscamos verificar o efeito dessa formação nos conhecimentos da docente pesquisada, a partir das contribuições de Shulman (2005) e Ball e seus colaboradores (2008), especificamente, no *conhecimento especializado do conteúdo* e no *conhecimento didático deste conteúdo*, no caso, da Combinatória. Os resultados apontam para uma dificuldade no reconhecimento e trabalho da Combinatória, na entrevista inicial. No entanto, durante e após as intervenções, há o reconhecimento, pela professora, mais detalhado das diferentes *situações* e seus respectivos *invariantes*, assim como, das *representações simbólicas* e do desenvolvimento do raciocínio combinatório de alunos. Verificou-se também que a docente reconhece o material manipulável como uma forma válida de *representação* para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem e, ao longo do processo de formação, faz uso desses ao ministrar aulas sobre Combinatória, sendo estas bastante dinâmicas e de acordo com o que estava sendo solicitado. Sendo assim, constatamos que há uma ressignificação da docente participante quanto a seus conhecimentos, especificamente, o *conhecimento especializado* da Combinatória e o *conhecimento didático* da Combinatória. Percebe-se, então, que a formação continuada em Combinatória pode se constituir em uma ação importante, levando os docentes a ressignificarem seus conhecimentos e refletirem sobre esse conteúdo que pode ser trabalhado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Combinatória; Raciocínio Combinatório, Formação de professores, Conhecimentos Docentes; Anos iniciais de escolarização.

¹ Estamos, neste estudo, usando situações combinatórias como sinônimo de tipos de problemas combinatórios.

ABSTRACT

This study purposes to analyze the effect of continuing education about Combinatorics, based on Vergnaud's Conceptual Field Theory (1986), which constitutes the tripod that origins the concept: situations, invariants and symbolic representations of combinatorial problems. Despite the process has been made with a school teachers' group, the research brings the inferences made from the reflections and practices of a teacher. The study is constituted by individual initial interview, six formation meetings, in which also includes two observations of ministered classes by her, and a final interview, also individual, with the participant teacher. It was required along the research that the teacher elaborates some lesson plans, one in the initial interview, two during the formation process (fourth and sixth meeting) that would be applied in classroom, and another at final interview. The initial e final interviews realized in research are based at Rocha's interviews (2011). We seek to verify this formation's effect on knowledge of researched teachers from Shulman's contribution (2005), and Ball et al (2005, specifically on specialized and didactic knowledge of this content, in this case, about Combinatorics. Results points to a difficult in recognize and work with Combinatorics at initial interview. However, during and after the interventions, there was a recognition, by the teacher, more detailed of different situations and their respective invariants, such as symbolical representations and development of combinatorial arguments by students. Also were verified that the teacher recognizes welding materials as a valid form of representation to help teaching and learning process and, along formation trajectory, uses it to minister lessons about Combinatorics, making it very dynamic and according to what was being asked. Thus, was found that there's a redefinition of the teacher as their knowledge, specifically specialized and didactic knowledge about Combinatorics. Perceives that continuing education in Combinatorics may constitute an important action, leading teachers to redefine their knowledge and meditate about this content that may be worked since initial years of Elementary School.

Keywords: Combinatorics; Combinatorial argument, teachers formation, teachers knowledge, Early years of schooling

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Mapa dos domínios do conhecimento da Matemática para o ensino, segundo Ball, Thames e Phelps (2008)	32
Figura 2	Protocolos de resolução de aluno – <i>arranjo</i>	72
Figura 3	Protocolos de resolução de aluno - <i>produto cartesiano</i>	72
Figura 4	Protocolo de resolução de aluno – <i>permutação – listagem, com acerto parcial</i>	76
Figura 5	Protocolo de resolução de aluno – <i>produto cartesiano – relação um a um, com estabelecimento de relação correta</i>	77
Figura 6	Protocolo de resolução de aluno – <i>arranjo – desenho, com acerto parcial</i>	77
Figura 7	Protocolo de resolução de pré-teste e de pós-teste do Aluno A para auxiliar nas análises do desenvolvimento do raciocínio combinatório – <i>produto cartesiano</i>	81
Figura 8	Protocolo de resolução de pré-teste e de pós-teste do Aluno B para auxiliar nas análises do desenvolvimento do raciocínio combinatório – <i>combinação</i>	82
Figura 9	Planejamento elaborado pela professora – <i>Entrevista Inicial</i>	84
Figura 10	Protocolo de resolução de aluno – <i>produto cartesiano – estratégia não sistematizada</i>	93
Figura 11	Protocolo de resolução de aluno – <i>produto cartesiano – estratégia sistematizada</i>	93
Figura 12	Protocolo de resolução de aluno – <i>permutação – estratégia sistematizada e generalizada</i>	93
Figura 13	Planejamento de aula elaborado pela professora – Primeira Aula – <i>Quarto encontro do processo de formação continuada</i>	96
Figura 14	Possibilidade incorreta realizada por um aluno em uma situação-problema apresentada na primeira aula – <i>Quarto encontro do processo de formação continuada</i>	98
Figura 15	Aluna resolvendo a situação-problema apresentada na primeira aula através do desenho – <i>Quarto encontro do processo de formação continuada</i>	99
Figura 16	Registro realizado pela professora através da listagem de possibilidades – <i>Quarto encontro do processo de formação continuada</i>	100
Figura 17	Registro realizado pela professora utilizando o material manipulável em uma árvore de possibilidades – <i>Quarto encontro do processo de formação continuada</i>	101
Figura 18	Material manipulável utilizado pela professora para a segunda situação-problema apresentada na aula – <i>Quarto encontro do processo de formação continuada</i>	102
Figura 19	Registro realizado pela professora através do desenho na segunda e na terceira situação-problema apresentada na aula – <i>Quarto encontro do processo de formação continuada</i>	103
Figura 20	Planejamento de aula elaborado pela professora – Segunda Aula – <i>Sexto encontro do processo de formação continuada</i>	110

Figura 21	Registro realizado pela professora dos elementos existentes na situação-problema apresentada na segunda aula – <i>Sexto encontro do processo de formação continuada</i>	113
Figura 22	Material Manipulável utilizado na segunda aula – <i>Sexto encontro do processo de formação continuada</i>	114
Figura 23	Alunos resolvendo a situação-problema apresentada na segunda aula, após intervenção da docente – <i>Sexto encontro do processo de formação continuada</i>	115
Figura 24	Registro realizado pela professora do total de possibilidades da situação-problema apresentada na segunda aula – <i>Sexto encontro do processo de formação continuada</i>	115
Figura 25	Protocolo de resolução de aluno – <i>listagem sistematizada e generalizada</i>	128
Figura 26	Protocolo de resolução de aluno – <i>desenho – não faz relação com a Combinatória</i>	128
Figura 27	Protocolo de resolução de aluno – <i>árvore de possibilidades</i>	129
Figura 28	Protocolo de resolução de aluno – <i>multiplicação adequada</i>	130
Figura 29	Protocolo de resolução de pré-teste e do pós-teste do Aluno A para auxiliar nas análises do desenvolvimento do raciocínio combinatório – <i>permutação</i>	132
Figura 30	Protocolo de resolução de pré-teste e do pós-teste do Aluno B para auxiliar nas análises do desenvolvimento do raciocínio combinatório – <i>combinação</i>	134
Figura 31	Planejamento de aula elaborado pela professora – <i>Entrevista Final</i>	136

LISTA DE QUADROS

Quadro 01	Classificações tipológicas e particularidades das pesquisas de Gauthier, Tardif e Shulman, de acordo com Almeida e Biajone (2005)	27
Quadro 02	Implicações das pesquisas sobre o <i>Konwledge base</i> para as propostas de formação inicial, segundo Almeida e Biajone (2005)	29
Quadro 03	<i>Situações e Invariantes da Combinatória – produto cartesiano</i>	45
Quadro 04	<i>Situações e Invariantes da Combinatória – combinação</i>	46
Quadro 05	<i>Situações e Invariantes da Combinatória – arranjo</i>	46
Quadro 06	<i>Situações e Invariantes da Combinatória – permutação</i>	47
Quadro 07	Roteiro para as observações de aulas	61
Quadro 08	Estrutura das entrevistas semiestruturadas após as observações de aula	61
Quadro 09	Proposta de intervenção para o primeiro encontro	62
Quadro 10	Proposta de intervenção para o segundo encontro	63
Quadro 11	Proposta de intervenção para o terceiro encontro	63
Quadro 12	Proposta de intervenção para o quarto encontro	64
Quadro 13	Proposta de intervenção para o quinto encontro	64
Quadro 14	Proposta de intervenção para o sexto encontro	64
Quadro 15	Características gerais da professora entrevistada	66
Quadro 16	Classificação dos tipos de problemas propostos (entrevista inicial)	69
Quadro 17	Problemas entregues para análise – <i>Primeiro encontro do processo de formação continuada</i>	85
Quadro 18	Situações-problema de Combinatória elaboradas por P e P2 – <i>Segundo encontro do processo de formação continuada</i>	91
Quadro 19	Roteiro de observação de aula	111
Quadro 20	Contextualização da situação-problema apresentada na segunda aula – <i>Sexto encontro do processo de formação continuada</i>	112
Quadro 21	Classificação dos tipos de problemas propostos (entrevista final)	120
Quadro 22	Entrevista final - Classificação dos problemas quanto aos seus <i>invariantes</i> – <i>produto cartesiano</i>	121
Quadro 23	Entrevista final - Classificação dos problemas quanto aos seus <i>invariantes</i> – <i>combinação</i>	122
Quadro 24	Entrevista final - Classificação dos problemas quanto aos seus <i>invariantes</i> – <i>arranjo</i>	122
Quadro 25	Entrevista final - Classificação dos problemas quanto aos seus <i>invariantes</i> – <i>permutação</i>	123

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
CAPÍTULO I	ELEMENTOS QUE NORTEIAM A FORMAÇÃO DE PROFESSORES	19
1.1	Dialogando entre os diferentes saberes e conhecimentos docentes	21
CAPÍTULO II	A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: a construção de conceitos	35
2.1	A Teoria dos Campos Conceituais	36
2.2	O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas	37
CAPÍTULO III	UM OLHAR ACERCA DA COMBINATÓRIA	42
3.1	A Combinatória e seus diferentes tipos de problemas	43
3.2	Estudos anteriores referentes ao Raciocínio Combinatório	48
3.2.1	O Raciocínio Combinatório e o Conhecimento dos Alunos	48
3.2.2	O Raciocínio Combinatório e intervenções que auxiliam na aprendizagem da Combinatória em diferentes níveis de escolaridade	50
3.2.3	O Raciocínio Combinatório e o uso de Recursos Didáticos	52
3.2.4	O Raciocínio Combinatório e a Formação de Professores	54
CAPÍTULO IV	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: objetivos e método	57
4.1	Objetivos	58
4.2	Método	58
4.2.1	Participantes e procedimentos	58
CAPÍTULO V	RESULTADOS: apresentação e análises	65
5.1	Formação e Experiência docente da participante da pesquisa	66
5.2	Conhecimento Docente – <i>Entrevista Inicial</i>	68
4.2.1	Conhecimento Especializado do Conteúdo da Combinatória	68
5.2.1.1	<i>Diferentes situações e invariantes combinatórios</i>	68
5.2.2	Conhecimento Didático do Conteúdo da Combinatória	71
5.2.2.1	Nível de dificuldade dos problemas combinatórios	71
5.2.2.2	<i>O ensino da Combinatória nos anos iniciais</i>	73
5.2.2.3	<i>Desempenho e das representações simbólicas de alunos dos anos iniciais</i>	75
5.2.2.4	<i>Compreensão do desenvolvimento do Raciocínio Combinatório</i>	80

5.2.2.5	<i>Planejamento de aula sobre Combinatória</i>	83
5.3	Conhecimento Docente – Processo de Formação Continuada	84
5.3.1	Primeiro encontro do processo de formação – <i>situações e invariantes combinatórios</i>	84
5.3.2	Segundo encontro do processo de formação continuada – <i>produção de problemas combinatórios</i>	90
5.3.3	Terceiro encontro do processo de formação – <i>representações simbólicas</i>	92
5.3.4	Quarto encontro do processo de formação – <i>observação de aula</i>	95
5.3.5	Quinto encontro do processo de formação – <i>análise e discussão da aula aplicada</i>	107
5.3.6	Sexto encontro do processo de formação – <i>observação de aula</i>	110
5.4	Conhecimento Docente – Entrevista Final	119
5.4.1	Conhecimento Especializado do Conteúdo da Combinatória	120
5.4.1.1	<i>Diferentes situações e invariantes combinatórios</i>	120
5.4.2	Conhecimento Didático do Conteúdo da Combinatória	125
5.4.2.1	<i>Nível de dificuldade dos problemas combinatórios</i>	125
5.4.2.2	<i>O ensino da Combinatória nos anos iniciais</i>	126
5.4.2.3	<i>Desempenho e das representações simbólicas de alunos dos anos iniciais</i>	127
5.4.2.4	<i>Compreensão do desenvolvimento do Raciocínio Combinatório</i>	132
5.4.2.5	<i>Planejamento da aula sobre Combinatória</i>	135
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	139
	REFERÊNCIAS	145
	APÊNCIDE A	155
	APÊNDICE B	163

INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN – (BRASIL, 1997) dos anos iniciais do Ensino Fundamental reconhecem a importância de se trabalhar com uma ampla diversidade de conteúdos, incluindo-se, já no Ensino Fundamental, elementos de estatística, probabilidade e, inclusive, de Combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos. Os PCN (BRASIL, 1997) também indicam a necessidade dos alunos aprenderem os diferentes tipos de problemas que a Combinatória aborda: dentre eles, *arranjos*, combinações, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.

Muitos educadores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental fizeram magistério ou curso de Licenciatura em Pedagogia. Em tais cursos, o tempo dedicado a disciplinas que trabalham os conteúdos específicos da Matemática é escasso. Deste modo, há conteúdos que os professores devem abordar com os alunos mesmo que não tenham estudado sistematicamente este conteúdo durante sua formação, como acontece, em algumas situações, no caso específico dos conteúdos de Combinatória.

Curi (2006) ao analisar as ementas das disciplinas a partir dos documentos oficiais de alguns cursos de Pedagogia, verificou a pouca presença de conteúdos matemáticos e de suas didáticas nos currículos dos cursos de Pedagogia. A autora relata ainda que “o estudo sobre as grades curriculares e os temas desenvolvidos nas disciplinas da área de Matemática dos Cursos de Pedagogia analisados revela um quadro bastante preocupante”. (p.5)

Percebe-se, então, que são poucas as alternativas metodológicas apresentadas aos futuros professores para o trabalho com este conteúdo específico, e, com isso, eles nem sempre conseguem criar condições facilitadoras e desenvolver um processo que garanta a aprendizagem desse conhecimento. Isso faz com que na maioria das vezes o professor deixe de abordar esse conteúdo na sala de aula.

Ainda é ressaltado por Curi (2006) que a ausência de educadores matemáticos e a conotação dada aos cursos de Pedagogia não possibilitam o desenvolvimento de conhecimentos tão específicos apontados pelos pesquisadores como Shulman (2005).

Dessa forma, uma vez que falta aos professores em sua formação inicial o trabalho com conteúdos específicos, como a Combinatória, e a reflexão

metodológica acerca desses conteúdos, apresenta-se a necessidade de existir formações continuadas sobre essas temáticas.

De acordo com o Plano Nacional de Educação – PNE (BRASIL, 2001) a formação continuada dos professores da escola pública deverá ser garantida pelas secretarias estaduais e municipais de educação, cuja atuação incluirá a coordenação, o financiamento e a manutenção dos programas como ação permanente e a busca de parceria com universidades e instituições de ensino superior. Aquela relativa aos professores que atuam na esfera privada será de responsabilidade das instituições onde trabalham. Ainda conforme o Plano Nacional de Educação (2001), devido às constantes e rápidas mudanças sociais, a *formação continuada* assume particular importância, também em decorrência do avanço científico e tecnológico e, assim, da exigência de um nível de conhecimentos sempre mais amplos e profundos na sociedade moderna.

Surge, assim, a necessidade de investigar a formação continuada desses professores, “como medida concreta para aperfeiçoar, de forma permanente, a competência docente.” (FUSARI, 1992, p. 29). Assim, estarão atuando de modo a tornar o conhecimento matemático acessível a todos, contribuindo para a superação dos preconceitos presentes no ensino-aprendizagem dessa disciplina.

Rocha (2011) em sua dissertação se interessou em verificar quais os conhecimentos que professores de diferentes níveis de ensino trazem para a sala de aula sobre a Combinatória. A pesquisa em questão abordou alguns dos conhecimentos necessários para a docência, a partir das contribuições de Shulman (2005) e Ball (1991), sendo eles: 1) *conhecimento especializado do conteúdo*; 2) *conhecimento do currículo*; 3) *conhecimento didático do conteúdo, conhecimento do conteúdo e seu aluno e conhecimento do conteúdo e seu ensino*.

Existem ainda outros estudos referentes à Combinatória, dentre eles destacamos: Pessoa e Borba (2010) que buscou levantar a compreensão de problemas combinatórios por alunos da 1ª série do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio e observar as estratégias por eles utilizadas; Azevedo, Costa e Borba (2011) que se propôs verificar se o uso do *software Árbol* pode ajudar na compreensão de problemas combinatórios; Santos, Matias e Pessoa (2011) que investigaram se crianças da Educação Infantil ao resolverem problemas combinatórios percebem os *invariantes* dos diferentes tipos de problemas, dentre outros.

Dentre as variadas temáticas pesquisadas, nos interessamos especificamente

pelo ensino da Combinatória e pelo processo de construção do raciocínio combinatório. Acreditamos que se as *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas* envolvidos em um conceito forem percebidos, a interpretação e compreensão de um problema por parte do aluno e do professor irá mudar. Defendemos, então, neste presente estudo que a compreensão conjunta das *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas* de um problema garante uma melhor compreensão do conceito.

Diante do exposto, percebe-se como é importante refletir sobre o ensino da Combinatória. Para isso, tendo como base o processo de formação continuada, a pesquisa realizada girou em torno de um questionamento:

- ✓ Um processo de formação continuada, baseada nas *situações*, nos *invariantes* e nas *representações simbólicas* da Combinatória, poderá influenciar nos conhecimentos e prática de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental?

Como visto, muitos estudos foram realizados no sentido de verificar como se dá o ensino e a compreensão da Combinatória em diferentes idades e níveis de escolaridade, no entanto não foram feitos, como pretendemos, estudos que verificassem a influência de uma *formação continuada* a partir da compreensão das *situações*, *invariantes* e *representações* de um conceito no ensino de um professor em sala de aula.

Então, nessa pesquisa buscamos analisar o efeito de uma formação continuada sobre Combinatória, tendo como base as *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas* de cada tipo de problema e, de modo mais específico, verificar quais são as mudanças de conhecimento após a intervenção, as quais serão verificados a partir das entrevistas inicial e final feitas com a professora pesquisada e sobre seus planejamentos e aulas ministradas sobre a Combinatória, assim como durante todo o processo de formação.

Para isto, no primeiro capítulo – *Elementos que norteiam a formação dos professores* – dialogamos entre os diferentes conhecimentos necessários para a docência, a partir de pesquisas de diferentes autores, dentre eles, Tardif (2008), Shulman (2005) e, especificamente, as contribuições de Ball, Thames e Phelps (2008) para os professores que ensinam Matemática.

A teoria dos campos conceituais: a construção de conceitos é apresentada no segundo capítulo com os pressupostos teóricos de Vergnaud (1996). A partir da teoria de Vergnaud, fazemos a relação desta com o campo conceitual das estruturas multiplicativas, trazendo, assim, as implicações de Nunes e Bryant (1997). Ainda neste capítulo, abordamos o conceito da Combinatória a partir de diferentes olhares: o conhecimento dos alunos, processos de intervenções que auxiliam na aprendizagem da Combinatória em diferentes níveis de escolaridade, recursos didáticos e, por fim, a formação de professores.

No terceiro capítulo, *Procedimentos metodológicos: objetivos e método*, apontamos os objetivos que esta pesquisa se propôs alcançar e o caminho traçado para atingir tais objetivos.

Nos *Resultados obtidos: apresentação e análise*, que compõem o quarto capítulo, discutimos os dados obtidos a partir de todo o processo: entrevista inicial, processo de formação continuada e entrevista final, analisando-os, cronologicamente, de forma qualitativa.

Por fim, trazemos as *Considerações Finais* com algumas implicações desta pesquisa para a área da Educação e com ideias de desdobramentos desta pesquisa para investigações futuras.

CAPÍTULO I – ELEMENTOS QUE NORTEIAM A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES

No contexto educacional democratizado em que estamos, há a necessidade da formação docente se adequar às novas realidades. As mudanças da sociedade revelam que estamos necessitando de alternativas para nos adaptarmos às demandas do mercado de trabalho, ou seja, pessoas altamente qualificadas (COSTA, 2006).

Uma das inquietações levantadas por Curi e Pires (2004) neste contexto é a necessidade de repensar os cursos de magistério para os professores dos anos iniciais da Educação Básica, no que se refere, especificamente, à formação para o ensino da Matemática.

De acordo com Pires (2001), e reafirmado por Curi e Pires (2004), é possível repensar a formação docente, pois existe algo de comum a todo professor, que são as competências profissionais que todo educador deve ter, seja qual for o nível de ensino que atue na Educação Básica. Entendemos tais competências citadas por essas autoras como os conhecimentos necessários à docência, identificados mais adiante. Sendo assim, percebe-se que é necessário inovar, ressignificar a ação pedagógica, buscar novas metodologias que acolham às necessidades atuais, sendo preciso, às vezes, resgatar ideias e práticas educativas que se adequaram a necessidades anteriores, mas foram sendo deixadas de lado com o passar do tempo.

Pires (2001) ressalta ainda que é preciso considerar especificidades próprias dos professores dos anos iniciais e outras dos especialistas, tanto pelo nível de escolaridade em que atuam, como pelos conteúdos a ensinar e, ainda, quanto ao papel da docência em cada etapa da escolaridade.

Nesse contexto, entendemos que Cardim e Grando (2008) defendem que a formação, seja ela inicial ou continuada, é um processo complexo uma vez que tais especificidades citadas, além do conhecimento e a prática desses professores, estão atrelados ao processo de aprendizagem profissional. Nesse sentido, Rocha (2011) defende que é importante pensar que a formação de professores é um processo ininterrupto, sistemático, organizado e complexo, que permanece durante todo o caminho percorrido na docência.

A formação continuada de professores tem seu amparo legal na Lei de Diretrizes e Bases (LDB) 9394/96, ao regulamentar no artigo 62º, inciso 1 que: “A União, o Distrito Federal, os Estados e os Municípios, em regime de colaboração, deverão promover a formação inicial, a continuada e a capacitação dos profissionais

de magistério (Incluído pela Lei nº 12.056, de 2009).” Sendo assim, de acordo com Morelatti, Furkotter e Faustino (2011), iniciativas recentes acreditam como essencial um processo contínuo, no qual a investigação e a reflexão estejam inseridas na prática do professor, em que as contribuições teóricas são buscadas à medida que forem necessárias e possam contribuir para a compreensão e a construção de novas alternativas para a solução dos problemas da prática docente nas escolas.

1.1 Dialogando entre os diferentes saberes e conhecimentos docentes

Desde o ano 2000 houve o interesse por parte da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática – em abrir um espaço para as indagações de um grupo que se questionava a respeito do processo da formação de professores que ensinam Matemática em todos os níveis de ensino (Educação Infantil ao Ensino Superior). Buscando, assim, dentre outros objetivos, incentivar, discutir, analisar e divulgar as pesquisas com foco em formação inicial e continuada desta área, discutir as metodologias de investigação sobre os saberes necessários aos professores de Matemática e elaborar propostas de intervenção nas políticas públicas (NACARATO e PAIVA, 2008).

Durante o I SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, no GT7, grupo de trabalho que investiga sobre a formação de professores que ensinam Matemática, foram categorizados alguns eixos temáticos a partir dos trabalhos apresentados nos primeiros anos da criação deste grupo. Dentre eles, alguns começaram a ganhar destaque, como o eixo sobre saberes docentes. A partir da importância dada a esse tema, diversos estudos têm sido desenvolvidos tendo como foco os saberes docentes, ocasionando uma gama de questionamentos e inquietações com relação a esse campo de pesquisa.

Alguns autores que dissertam sobre este tema e que trataremos aqui são Tardif (2008), Gauthier (1998) e Shulman (2005), os quais buscam refletir sobre os saberes e conhecimentos necessários à docência.

Trataremos também sobre alguns saberes que Freire (1996), enquanto educador e pesquisador brasileiro, identifica como necessários à prática educativa, porém, sem aprofundá-los, além de Ball et al (2008), que, a partir dos

estudos de Shulman, faz suas contribuições voltadas para a formação do professor que ensina Matemática.

Os autores que utilizam o termo "saberes" para referir-se à ação de reconhecer, compreender e saber-fazer associado à docência, aqui por nós discutidos, são Tardif (2008), Gauthier (1998) e Freire (1996). Enquanto que Shulman (2005) e Ball e colaboradores (2008) utilizam a nomenclatura "conhecimentos", e será essa adotada por nós ao longo desse escrito.

Tardif (2008) elucida que o saber do professor é indissociável das demais dimensões do ensino, como sua identidade, sua experiência de vida e profissional, suas relações com os alunos em sala de aula e com os demais participantes da escola, etc. Sendo assim, o autor ressalta que é necessário estudar o saber docente relacionando-o com esses elementos que constituem o trabalho docente, ou seja, o saber docente está interligado com o que o professor é e o que faz e, desse modo, coloca-se entre o pessoal e o social. De acordo com Cardim e Grando (2008) os saberes docentes passam por processos de reutilização, adaptação e transformação, os quais são compostos tanto pelo "fazer" do professor como pelo seu "ser". Para as autoras, estes dois pilares constituem o processo de socialização na profissão, que é base para a identidade profissional do professor e o domínio da atividade de ensinar.

Segundo Shulman (1986), é preciso avançar mais na construção de um saber pedagógico disciplinar nos cursos de formação de professores. Sobre esse aspecto, Nacarato e Paiva (2008) acreditam que os conteúdos matemáticos têm que ser estudados sob um ponto de vista mais avançado, problematizando-os na perspectiva da formação do professor. Assim, começa a romper a ideia de que apenas o domínio do conteúdo faz um bom professor.

De acordo com Gauthier (1998, p. 20-21), o saber docente vai além do conhecimento do conteúdo. Sobre isso, o autor relata que:

Pensar que ensinar consiste apenas em transmitir um conteúdo a um grupo de alunos é reduzir uma atividade tão complexa quanto o ensino a uma única dimensão, aquela que é mais evidente, mas é, sobretudo, negar-se a refletir de forma mais profunda sobre a natureza desse ofício e dos outros saberes que lhe são necessários.

Tardif (2008) ainda acrescenta que o conhecimento pedagógico do conteúdo não pode ser separado do conhecimento da matéria a ser ensinada, ou seja, do conteúdo, contudo, reforça que conhecer bem a matéria é apenas uma das condições necessárias, e não uma condição suficiente, do trabalho pedagógico em sala de aula.

Nesse sentido, de acordo com Freire (1996), não devemos pensar apenas sobre os conteúdos que vêm sendo discutidos em sala de aula, mas, também, a maneira como o professor ensina.

Perante esse contexto, verificamos que tais pesquisadores citados acima (Tardif, 2008; Gauthier, 1998; e Shulman, 2005) categorizam os diferentes saberes e conhecimentos necessários à docência, os quais serão discutidos a seguir.

De acordo com Gauthier (1998), os professores, em sua prática, amparam-se em saberes heterogêneos, sendo eles: 1) *saber disciplinar* – é o saber da matéria, o que será ensinado; 2) *saber curricular* – referente aos programas e manuais que auxiliam o professor a orientar seu planejamento; 3) *saber das ciências da educação* – o conjunto de conhecimentos adquiridos durante a profissão, os quais não estão diretamente atribuídos à ação de ensinar; 4) *saber da tradição pedagógica* – referente à ideia de professor antes da formação docente, adaptado e/ou modificado mais tarde pelo saber experiencial, podendo ser validado ou não pelo saber da ação pedagógica; 5) *saber experiencial* – alusivo à própria experiência do professor; 6) *saber da ação pedagógica* – o saber da experiência dos professores que se torna público a partir de pesquisas realizadas em sala de aula.

Gauthier (1998) acredita que vivemos em meio a um desafio constante, no qual ora discute-se um *ofício sem saberes*, ora *saberes sem um ofício*. Para o autor, a ideia do ensino como vocação, talento, domínio do conteúdo e/ou experiência pode ser aplicada a qualquer outro ofício, sem perceber a complexidade e a dimensão de fatores que envolvem a ação docente. Esse seria, a partir desse aspecto, um *ofício sem saberes*, ou seja, a docência não é reconhecida como uma profissão. Já o *saberes sem um ofício* é compreendido como saberes adquiridos por pesquisadores que estudam a pedagogia como uma ciência aplicada, porém esse saber obtido não é aplicado diretamente em

sala de aula, isto é, saberes desenvolvidos no campo das ciências, mas que não são vistos à luz da conjuntura real e complexa da sala de aula.

Maurice Tardif é outro autor que pesquisa os saberes necessários à prática docente e sua relação com a problemática da formação de professores. Para Tardif (2008), o saber se define como um “saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais” (p. 36).

O formato múltiplo de idealizar os saberes docentes e como eles se relacionam, também observada nas pesquisas de Tardif (2008), é reafirmado por Gauthier (1998), quando elucida que é muito mais pertinente idealizar o ensino como um reservatório que comporta vários e diferentes saberes, no qual o professor se abastece para responder às exigências específicas de sua situação concreta de ensino.

Tardif (2008), com muita propriedade, apresenta a sua taxonomia com relação aos saberes que erguem a profissão docente: 1) os *saberes da formação profissional* (das ciências da educação e da ideologia pedagógica) – construídos durante a formação científica do professor; 2) os *saberes disciplinares* – saberes sociais definidos e selecionados pela instituição universitária (correspondem às diversas áreas do conhecimento sob a forma de disciplina); 3) os *saberes curriculares* – apresentam-se sob a forma de programas escolares; 4) e os *saberes experienciais* – originam-se a partir das próprias experiências da prática docente.

Nota-se o reconhecimento da pluralidade e a heterogeneidade do saber docente, sobressaindo os *saberes da experiência*. O autor dá ênfase aos *saberes experienciais* como aqueles que passam a existir na e pela prática, os quais são validados pelo professor e atrelados na construção de seu profissionalismo.

Outro estudo que tem contribuído para as reflexões acerca dos conhecimento docentes é Lee Shulman. De acordo com Shulman (2005), vários autores por gerações discutem quais as habilidades e conhecimentos necessários que o professor precisa ter. Dessa forma, o autor acredita que para ensinar é necessária a construção de uma base do conhecimento (*knowledge base*), na qual os estudos sobre o ensino eficiente não deram conta de abranger todos os pontos relacionados à base de conhecimento no ensino.

Esta base de conhecimento, para Shulman (2005), é constituída por diferentes categorias, sendo elas: 1) *conhecimento do conteúdo*; 2) *conhecimento didático geral* – princípios e estratégias de organização da classe que transcendem o âmbito da disciplina; 3) *conhecimento do currículo* – materiais e programas que sirvam como ferramentas de auxílio para o docente; 4) *conhecimento didático do conteúdo* – combinação de matéria e conteúdo, constituindo uma esfera exclusiva dos professores; 5) *conhecimento dos alunos e suas características*; 6) *conhecimento dos contextos educativos* - abrangem desde o funcionamento da sala de aula, a gestão e financiamento dos distritos escolares até o caráter das comunidades e culturas; 7) *conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos*.

Dentre as categorias elegidas por Shulman (2005) como formadores da base do conhecimento, o *conhecimento didático do conteúdo* tem um destaque pelo autor, uma vez que este conhecimento reflete o modo de pensar do professor diante de determinados temas e problemas, adaptando-os de acordo com os interesses e capacidades dos alunos. Sobre a importância deste tipo de conhecimento, o pesquisador relata:

O conhecimento didático do conteúdo representa a mistura entre a matéria e a didática, porque se chega a uma compreensão de como determinados temas e problemas se organizam, se representam e se adaptam para os diversos interesses e capacidades dos alunos, e se expõe no seu ensino. (SHULMAN, 2005, p.12)

O autor ainda destaca que é a partir deste conhecimento que se pode distinguir a compreensão de um especialista da área a respeito de um determinado assunto e a de um professor.

Ainda de acordo com Shulman (2005), há quatro fontes do conhecimento base para o ensino: a) a formação acadêmica; b) materiais institucionalizados do ensino, como livros didáticos e currículo; c) pesquisas sobre a escolarização e a aprendizagem humana; d) a prática docente.

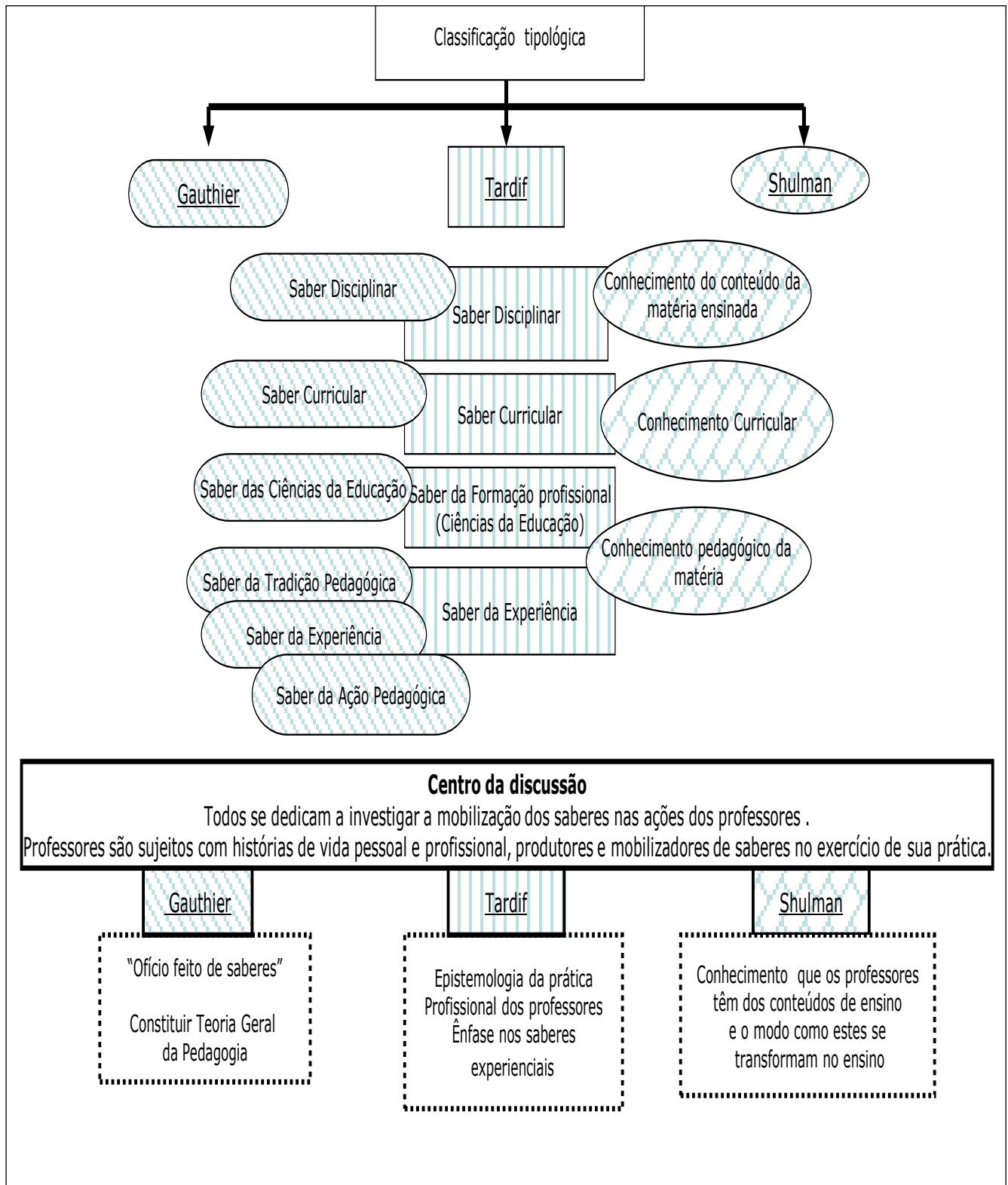
Os autores aqui apresentados investigam a mobilização dos saberes nas ações dos professores, estando os professores na posição de produtores e mobilizadores dos saberes durante sua prática docente.

Diante disso, na abordagem relacionada às diversas classificações elencadas pelos autores, encontramos algumas particularidades e diferenças. Com esse olhar, Almeida e Biajone (2007) ao estudarem as implicações e repercussões das pesquisas sobre a *Knowledge base*, acreditam que as categorias elencadas pelos diferentes autores supracitados têm suas diferenças, mas também semelhanças. No estudo acima citado, os autores acreditam que as particularidades estão centradas nos interesses investigados.

Almeida e Biajone (2005), buscando estabelecer algumas considerações e relações entre esses autores, apresentaram em seu estudo um quadro que contemplasse as tipologias e particularidades de Gauthier, Tardif e Shulman.

As considerações deixadas por Almeida e Biajone (2005), as quais podem ser vistas no Quadro 01 a seguir, compreende-se que Gauthier (1998) e Tardif (2008) destacam a pluralidade e heterogeneidade do saber, contudo, Gauthier (1998) defende especificamente um ofício feito de saberes, construindo a Teoria Geral da Pedagogia, já os estudos de Tardif (2008) defendem uma epistemologia da prática profissional dos professores, dando ênfase ao trabalho docente, destacando, assim, os saberes da experiência como mais importante perante os demais saberes. A peculiaridade de Shulman (1986) é o interesse em pesquisar o conhecimento que os professores têm dos conteúdos de ensino e o modo como eles mobilizam estes conhecimentos para o ensino, o que nos interessa, especialmente neste estudo.

Quadro 01: Classificações tipológicas e particularidades das pesquisas de Gauthier, Tardif e Shulman, de acordo com Almeida e Biajone (2005)

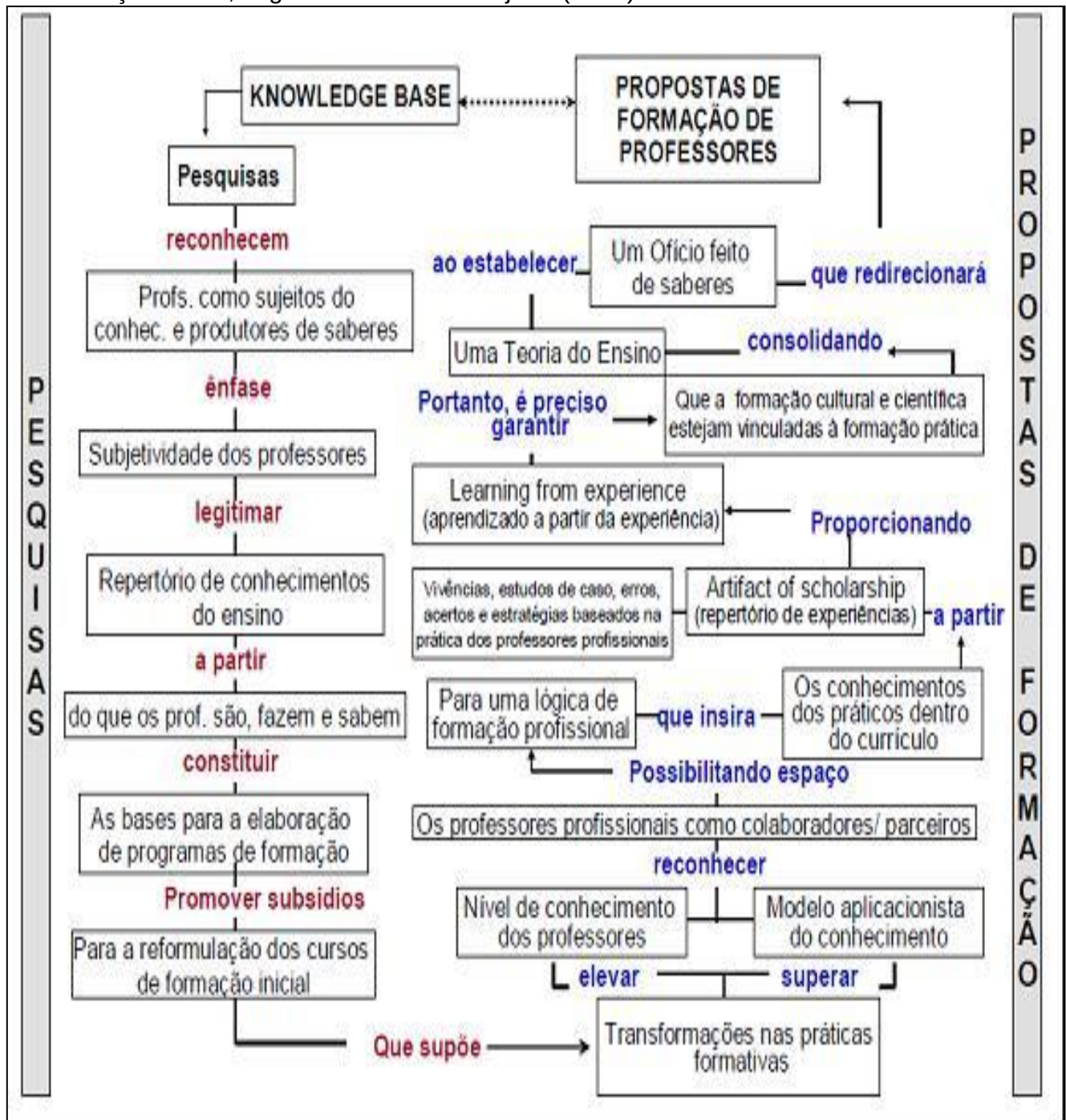


Diante das características e especificidades de cada autor, consegue-se afirmar que o processo de aquisição e constituição dos saberes imprescindíveis à docência é complexo e caracterizado por diversas experiências e vivências, sendo elas pessoais e profissionais, e também diferentes momentos, sendo, então, necessária uma reflexão sobre as possíveis implicações para a formação docente.

A fim de ponderar tais implicações, é necessário analisar qual foi o movimento que reformulou os cursos de formação, tendo como base as críticas às conjecturas do modelo da racionalidade técnica, que determinam um perfil de educador como transmissor do conhecimento, uma relação que não valorizava a prática do professor como espaço de reflexão e de construção de conhecimento. Donald Schön (1995) foi um dos principais pesquisadores que se opuseram a este modelo, defendendo o modelo da racionalidade prática, o qual vinha com uma proposta de reflexão sobre a prática, totalmente diferente do que era realizado antes.

Gauthier, Tardif e Shulman, como já apresentado, também refletiram sobre essas mudanças, buscando fazer com que as pesquisas sobre os conhecimentos necessários à docência se tornassem propostas para a formação inicial de professores. Nessa perspectiva, Almeida e Biajone (2005) apresentam outro quadro no qual mostram as possíveis implicações das pesquisas sobre a *Knowledge base* para a formação inicial de professores (ver Quadro 02, a seguir).

Quadro 02: Implicações das pesquisas sobre o *Knowledge base* para as propostas de formação inicial, segundo Almeida e Biajone (2005)



Os autores, a partir deste mapa conceitual, acreditam que as pesquisas sobre os saberes docentes são capazes de transformar nossas concepções em relação à formação profissional para o ensino. Conforme Almeida e Biajone (2005):

Reconhecer os professores como sujeitos do conhecimento e produtores de saberes, valorizando a sua subjetividade e tentando legitimar um repertório de conhecimentos sobre o ensino a partir do que os professores são, fazem e sabem constitui as bases para a elaboração de programas de formação. (p. 8)

Em consonância com os autores supracitados, Tardif (2008) e Shulman (2005) valorizam o aprendizado a partir da prática, defendendo-a como um exercício constante de reflexão.

Se relacionarmos esta questão acima ao que Freire (1982) defende, podemos pensar no que ele discute sobre a práxis reflexiva, tomando como base a prática docente. Para Freire, ao adotarmos a prática como movimento de construção de conhecimento e, a partir desta, realizar uma reflexão, haverá a práxis. Nesse sentido, Freire (1982) reflete que, “se o momento é o da ação, esta se fará autêntica práxis se o saber dela resultante se faz objeto da reflexão crítica [...]” (p. 57). Araújo (2005) defende que novas práxis podem ser instituídas a partir de uma prática docente reflexiva dos professores, uma vez que estão a produzir conhecimentos através da reflexão crítica sobre e na prática.

No Brasil, um dos autores que reflete sobre os saberes necessários para a prática docente é Freire. A formação docente reflexiva é um dos pontos principais do estudo de Freire (1996), buscando sempre a autonomia dos educadores. Segundo o autor, os saberes por ele elencados são demandados a partir da prática docente, seja do educador crítico-progressista, como dos educadores conservadores. Dessa forma, discutimos brevemente o que, para Freire (1996), a prática educativa exige.

Ao refletir sobre os saberes necessários à prática docente, Freire (1996) ressalta que são saberes exigidos pela própria prática e a sua reflexão se faz ao defendê-los como conteúdos obrigatórios na formação de professores. Araújo (2005) ao pensar sobre as categorias de Freire entende que o autor amplia e diversifica as fontes legítimas de saberes.

Para Freire (1996), ensinar exige, dentre outras coisas: rigorosidade metódica, respeito aos saberes dos educandos, criticidade, estética e ética, risco, consciência do inacabamento e pesquisa.

Verifica-se que a autonomia do professor para Freire (1996) está amparada na prática educativa atrelada a uma reflexão constante, como também defendida pelos autores acima discutidos (Tardif, Gauthier e Shulman).

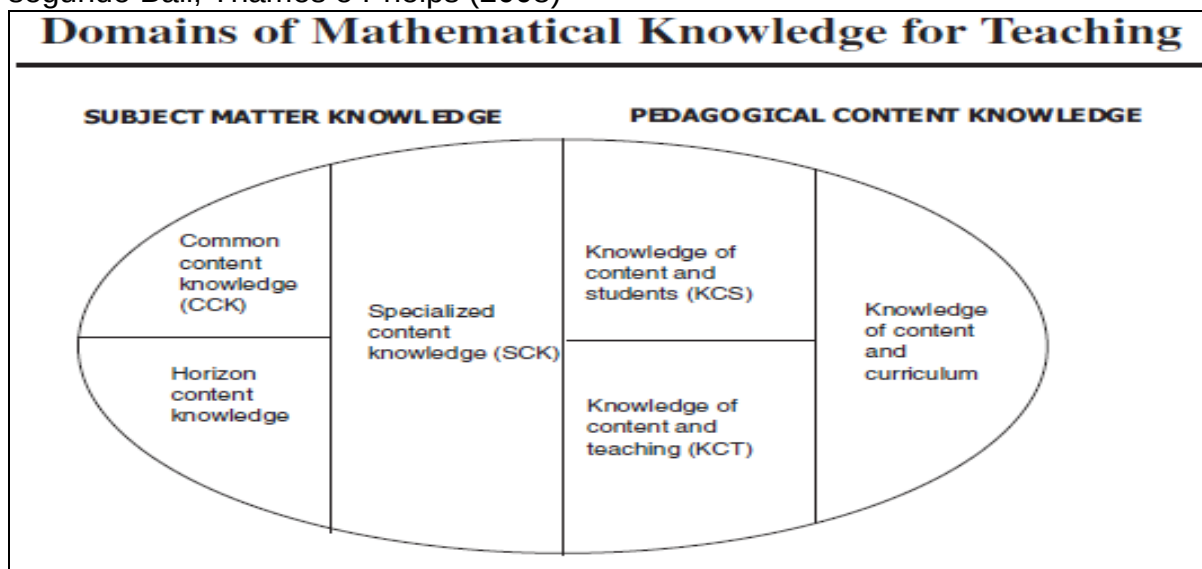
A partir das discussões trazidas por Shulman, Ball investigou os conhecimentos necessários para o ensino da Matemática. A pesquisadora fez uma estreita relação entre os conhecimentos que Shulman dita como os principais para a docência, o *conhecimento do conteúdo* e o *conhecimento didático do conteúdo*, contudo, para Ball, Thames e Phelps (2008), ao refletir sobre o ensino da Matemática, há outras propriedades inerentes a estes conhecimentos.

Para estes autores, o estudo realizado é um desenvolvimento mais detalhado dos fundamentos do conhecimento do conteúdo para ensino, através da criação de uma conceituação baseada na prática, por meio da elaboração de outros domínios.

Tais pesquisadores elencaram seis domínios importantes no processo de ensino da Matemática. Sendo eles: o *conhecimento comum do conteúdo*, *conhecimento horizontal do conteúdo* e *conhecimento especializado do conteúdo*; *conhecimento do conteúdo e os alunos*, *conhecimento do conteúdo e o ensino* e *conhecimento do conteúdo e o currículo*. Ball et al (2008) relacionam os três primeiros conhecimentos aqui listados como domínios pertencentes ao conhecimento do conteúdo e os três últimos ao conhecimento pedagógico do conteúdo, identificados por Shulman (2005).

Na Figura 01 apresentamos um mapa elaborado por Ball e colaboradores, os quais organizam de forma sistemática estes conhecimentos.

Figura 01: Mapa dos domínios do conhecimento da Matemática para o ensino, segundo Ball, Thames e Phelps (2008)



O primeiro domínio é o *conhecimento comum do conteúdo*² e tais autores o definem como o conhecimento matemático e habilidade usada em ambientes sem focar, necessariamente o ensino. Em suma, os professores devem ser capazes de fazer o trabalho que eles atribuem aos seus alunos, ele não é específico para o trabalho de ensino.

Vale ressaltar o cuidado que Ball et al faz sobre o uso do termo “comum”, neste domínio em específico:

Por "comum", no entanto, nós não queremos sugerir que todo mundo tem esse conhecimento. Pelo contrário, queremos dizer para indicar que este é o conhecimento de um tipo utilizado em uma ampla variedade de configurações, ou seja, não é exclusivo ao ensino. (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p. 400)³

O segundo domínio, o *conhecimento especializado do conteúdo*⁴, é o conhecimento matemático e habilidade única ao ensino. Um exame atento revela que este é o conhecimento matemático não tipicamente necessário para outros fins a não ser o ensino.

O terceiro domínio é o *conhecimento do conteúdo e os alunos*⁵, este é o conhecimento que combina saber sobre os alunos e saber sobre matemática. Os

² Traduzido de Common Content Knowledge.

³ Tradução nossa.

⁴ Traduzido de Specialized Content Knowledge.

⁵ Traduzido de Knowledge of Content and students.

professores devem antecipar o que os alunos tendem a pensar e as possíveis dúvidas. Ao escolher um exemplo, os professores precisam prever o que os alunos vão achar interessante e motivador. Segundo os autores, os professores devem também ser capazes de ouvir e interpretar os estudantes. Cada uma dessas tarefas requer uma interação entre o entendimento matemático específico e familiaridade com os alunos e seu pensamento matemático.

Ball e colaboradores (2008) distinguem estes três domínios:

Em outras palavras, o reconhecimento de uma resposta errada é o conhecimento do conteúdo comum. Considerando-se o dimensionamento da natureza de um erro, especialmente um erro desconhecido, normalmente exige agilidade no pensamento sobre os números, atenção aos padrões e pensamento flexível, este é o conhecimento especializado do conteúdo. Em contraste, a familiaridade com erros comuns e decidir qual dos vários erros os alunos são mais propensos a fazer são exemplos do conhecimento do conteúdo e os alunos. (p.402)⁶

Outro domínio, o *conhecimento do conteúdo e ensino*⁷, de acordo com os autores, combina o conhecimento sobre o ensino e o saber sobre a Matemática. Muitas das tarefas matemáticas de ensino requerem um conhecimento matemático do projeto de instrução. Eles escolhem quais exemplos para começar e que exemplos usar para levar os alunos a aprender o conteúdo mais profundamente. Cada uma dessas tarefas requer uma interação entre a compreensão da Matemática específica e um entendimento do pedagógico e as questões que afetam a aprendizagem do aluno. As demandas de ensino exigem a intersecção do conhecimento do conteúdo e ensino.

Os outros dois conhecimentos presentes no mapa apresentado (Figura 01) foram incluídos por Ball, Thames e Phelps (2008) provisoriamente, por não terem um estudo ainda consolidado sobre eles. Sendo estes o *conhecimento horizontal do conteúdo* e o *conhecimento do conteúdo e do currículo*.

Entende-se como *conhecimento horizontal do conteúdo*⁸ a consciência de como os temas matemáticos estão relacionados mais a extensão da Matemática incluída no currículo. Como exemplo, os autores citam como os professores precisam saber como a Matemática que ensinam está relacionada com a

⁶ Tradução nossa.

⁷ Traduzido de knowledge of Content and Teaching.

⁸ Traduzido de Horizon Content knowledge.

Matemática que os alunos irão aprender na terceira série, para ser capazes de definir a base matemática que virá depois.

Sobre o *conhecimento do conteúdo e o currículo*⁹, Ball et al (2008) não fazem uma explanação profunda, contudo, questionam-se se esta seria uma categoria isolada, assim como as demais, ou estaria presente no domínio referente ao *conhecimento do conteúdo e do ensino*. Porém, certamente, o estudo sobre este conhecimento se faz importante, a fim de que diferentes conteúdos matemáticos sejam realocados para outros níveis de ensino, como é o caso da Combinatória, que aqui defendemos seu ensino desde os anos iniciais da escolarização.

A partir das concepções e tipologias apresentadas pelos autores discutidos neste capítulo do trabalho, percebemos que há um grande interesse em investigar quais os conhecimentos necessários à docência, sejam advindos das formações iniciais ou continuadas e, ainda, alguns caminhos que possam ajudar na construção desses conhecimentos.

⁹ Traduzido de Knowledge of Content and Curriculum.

CAPÍTULO II – A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: a construção de conceitos

Neste capítulo apresentamos os estudos realizados por Gérard Vergnaud sobre a Teoria dos Campos Conceituais. Esta teoria fornece alguns princípios de base para que se compreenda sobre a construção de conceito. Para este autor, o conceito forma-se a partir de um tripé constituído pelas *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas*. Nesse tópico abordaremos ainda como Vergnaud (1983, 1991), Nunes e Bryant (1997) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) categorizam os problemas encontrados dentro do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gerard Vergnaud, é baseada na teoria de Jean Piaget. Vergnaud retoma os princípios da teoria de Piaget, porém adota como referência o conteúdo do conhecimento específico. Sendo assim, estuda os processos de aquisição do conhecimento e as estruturas mentais utilizadas pelas crianças nesses processos, entendendo por conhecimentos tanto o saber-fazer como os saberes expressos (Vergnaud, 1996). Nesta mesma obra o teórico ressalta que um conceito só adquire sentido para uma criança quando vem através de situações e de problemas a resolver.

Sendo assim, Vergnaud (1986) acredita que um conceito se desenvolve inserido em um campo de conceitos, definindo-o como um conjunto de situações, o qual é constituído por diferentes conceitos, esquemas e *representações simbólicas* intimamente relacionados. Pessoa (2009) ao refletir sobre a Teoria dos Campos Conceituais ressalta que é preciso que a escola proporcione situações em que se trabalhe simultaneamente uma variedade de conceitos que tenha uma estreita inter-relação.

De acordo com Vergnaud (1996), para estudar profundamente o desenvolvimento de um conceito, é necessário se apoiar em três dimensões ao mesmo tempo. Para ele, um conceito se forma a partir de um tripé que possui dimensões fundamentais, sendo elas: um conjunto de *situações* que dão sentido ao conceito; um conjunto de propriedades lógico-operatórias, que são os *invariantes* do conceito; e um conjunto de símbolos que são usados para representar o conceito, no caso, as *representações simbólicas*.

Como já discutido, um conceito não se desenvolve sozinho, mas sim em uma estreita relação com outros conceitos. Por isso, essas características pertencentes ao conceito (*situações, invariantes e representações*), como destacado por Vergnaud (1990), estão integradas a outros conceitos, seja através das diferentes *situações* ou *representações*.

2.2 O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

Para Vergnaud (1996), o campo conceitual que envolve as estruturas multiplicativas pode ser visto como “o conjunto de situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações” (p. 168). Assim como os demais campos conceituais, no *campo conceitual das estruturas multiplicativas*, um campo de conceitos é construído, dando sentido a um campo de problemas (PESSOA, 2009). Sendo assim, Vergnaud enumera quais os conceitos matemáticos que estão presentes neste campo conceitual: proporção simples e múltipla, função linear e não linear, análise dimensional, fração, números racionais, além da multiplicação e divisão, dentre outros.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997), os conteúdos referentes às estruturas multiplicativas começam a ser trabalhados na escola a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental, ou seja, no 3º ou 4º ano. Contudo, essas estruturas, normalmente, são dadas em sala de aula e apresentadas nos livros didáticos como uma continuidade da adição, sendo a multiplicação vista como uma adição de parcelas repetidas, o que, de acordo com Nunes e Bryant (1997), está equivocado, uma vez que as estruturas multiplicativas possuem base conceitual distinta das estruturas aditivas.

Na verdade, o que ocorre é que a soma de parcelas repetidas pode ser uma forma de resolver alguns problemas multiplicativos, porém, o raciocínio que envolve uma adição é diferente do raciocínio necessário para resolver uma multiplicação. Assim, o cálculo relacional necessário para resolver as duas situações (adição e multiplicação) são diferentes, podendo o cálculo numérico ser semelhante. Para Vergnaud (1991), cálculo relacional está ligado ao raciocínio necessário para compreender determinadas situações, enquanto que os cálculos numéricos são os cálculos e as operações numéricas realizadas para resolverem o problema.

Alguns autores categorizaram as situações que abrangem o campo das estruturas multiplicativas. A seguir, apresentamos as classificações dadas por Vergnaud (1983, 1991), Nunes e Bryant (1997) e os PCNs (BRASIL, 1997).

Vergnaud (1983, 1991) *apud* Pessoa (2009) descreve duas classes¹⁰ de problemas multiplicativos, que se relacionam com a multiplicação e a divisão, as quais envolvem relações ternárias e quaternárias, sendo elas, respectivamente: *produtos de medidas e isomorfismos de medidas*.

Essas duas classificações envolvem problemas de multiplicação e divisão. No caso do *isomorfismo de medidas*, em problemas de divisão, este se subdivide em dois casos: *partição* e *quotição*. Problemas de *partição* apresentam um conjunto maior e o número de partes em que o mesmo vai ser distribuído, sendo o resultado o valor de cada parte; problemas que têm a ideia de *quotição* advêm em problemas em que é dado o conjunto maior e o valor das quotas em que se será dividido o mesmo, no qual o resultado consiste no número de partes obtidas.

❖ **Produto de Medidas** são os problemas que envolvem três variáveis, e uma delas é o produto das outras duas.

- Multiplicação

Exemplo: Maria tinha 5 blusas e 3 calças para levar em uma viagem. Quantos pares de roupas ela pode fazer, combinando todas as blusas com todas as calças?

- Divisão

Exemplo: Com as blusas e calças que eu tenho consigo formar 10 pares de roupas para usar. Se eu tenho 5 blusas, quantas são as calças?

¹⁰ Embora não seja tratada aqui especificamente, para Vergnaud (1983, 1991) existe ainda uma terceira classe, a de *Proporções Múltiplas*, em que, em um mesmo problema há a necessidade de se resolver diferentes situações de proporção, como pode ser visto no exemplo retirado de Pessoa e Matos Filho (2006): Vou viajar com um grupo de amigos. Somos 8 pessoas e vamos passar 10 dias em um hotel cuja diária é de R\$ 50,00. Qual será o valor que 10 pessoas vão gastar de hotel ao final da viagem?

❖ **Isomorfismos de Medidas** são problemas que consistem em quatro variáveis, sendo duas de um tipo e as outras duas de outro tipo.

- Multiplicação

Exemplo: João tem 5 saquinhos de bolinhas de gude. Em cada saquinho cabem 6 bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude João tem?

- Divisão

- 1) **Partição**

Exemplo: Paguei R\$ 30,00 por 2 bonecas. Quanto custou cada boneca?

- 2) **Quotição**

Exemplo:

Maria tem R\$ 30,00 e quer comprar bonecas que custam R\$ 15,00 cada uma. Quantas bonecas novas ela pode comprar?

Nunes e Bryant (1997) também classificaram os tipos de problemas das estruturas multiplicativas. Para esses autores, há diferentes níveis dentro dessa categorização:

❖ **Correspondência um-a-muitos:** problemas que envolvem a ideia de proporcionalidade. Este nível se subdivide em problemas de:

- Multiplicação

Exemplo: Um carro tem 4 rodas. Quantas rodas tem em 5 carros?

- Problema inverso de multiplicação

Exemplo: Maria ganhou um saco de confeitos e quer dividi-lo com seus amigos, dando 4 confeitos para cada um. Se Maria tem 10 amigos, quantos confeitos vem no saco?

- Produto Cartesiano

Exemplo: Na festa de São João da escola, há 5 meninos e 6 meninas. Quantos casais diferentes podem formar para dançar quadrilha, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?

- ❖ **Relação entre variáveis:** relacionam variáveis (duas ou mais).

Exemplo: O mercado estava em promoção! Meio quilo de carne estava custando R\$10,00. Quanto custaria um quilo?

- ❖ **Distribuição:** também conhecida como divisão por partição.

Exemplo: Carlos tem vinte R\$40 reais e quer distribuí-los entre seus 4 filhos. Quantos reais cada filho de Carlos irá receber?

De acordo com Pessoa (2009), percebe-se que “nesta classificação todos os tipos de problemas envolvem uma relação um-a-muitos, na qual o que varia é a posição do valor desconhecido” (p. 61).

De modo similar à classificação dos autores acima apresentados, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) também categorizam os problemas que fazem parte das estruturas multiplicativas. Os PCNs diferenciam os problemas em quatro tipos: *comparativa*, *proporcionalidade*, *configuração retangular* e *combinatória*.

- ❖ **Comparativa:** compara as quantidades apresentadas no problema.

Exemplo: Mário tem 6 anos e seu irmão tem o dobro de sua idade. Qual a idade do irmão de Mário?

- ❖ **Proporcionalidade:** associada à ideia de proporção entre as variáveis.

Exemplo: Camila irá comprar 3 pacotes de pirulitos para sua festa de aniversário. Em cada pacote há 15 pirulitos. Quantos pirulitos ela irá comprar ao todo?

- ❖ **Configuração retangular:** envolve situações de distribuição espacial.

Exemplo: Em um prédio que está em construção estão sendo construídas 6 salas por andar. Se o prédio terá 5 andares, quantas salas existirão no prédio?

- ❖ **Combinatória:** situações que envolvem a ideia do raciocínio combinatório.

Exemplo: Maria está levando para uma viagem 4 blusas e 3 calças. Quantos pares diferentes de roupas ela pode formar?

Nas classificações acima mencionadas encontramos semelhanças entre elas, tendo um tipo de problema em específico que se relaciona com o raciocínio combinatório. Vergnaud (1983, 1991) denomina os problemas que envolvem este tipo de raciocínio como *produto de medidas*, enquanto que Nunes e Bryant (1997) os chamam de *produto cartesiano* e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) os classificam como *situações* que envolvem a Combinatória.

A seguir abordaremos com mais profundidade o raciocínio combinatório e seus diferentes tipos de problemas.

CAPÍTULO III – UM OLHAR ACERCA DA COMBINATÓRIA

Neste capítulo, abordaremos a organização dos problemas que abrangem o raciocínio combinatório, realizada por Pessoa e Borba (2009) e, em seguida, discutiremos, especificamente, as pesquisas que tratam sobre o raciocínio combinatório em diferentes campos: Conhecimento de Alunos, Intervenções que auxiliam na aprendizagem da Combinatória em diferentes níveis de escolaridade, Recursos Didáticos e Formação Docente.

3.1 A Combinatória e seus diferentes tipos de problemas

A Combinatória é uma área da Matemática que faz parte do raciocínio multiplicativo. Apesar das indicações dos PCNs (BRASIL, 1997) apontarem a necessidade de tal conteúdo ser trabalhado desde os anos iniciais da escolaridade, de um modo geral, essa indicação ainda não é completamente seguida no trabalho escolar.

Pessoa (2009) afirma que para Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho e Fernandez (1991) a Combinatória é a parte da Matemática que analisa as estruturas e relações discretas. De acordo com Merayo (2001 *apud* Pessoa, 2009) a Combinatória é a técnica de saber quantos elementos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, uma vez que não precisa listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto.

A partir da contribuição desses autores, dentre outros, para Pessoa e Borba (2009), a Combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, sem necessariamente ter que contá-los um a um. Deste modo, estas autoras afirmam que o raciocínio combinatório é um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que ultrapassa a ideia de enumeração de elementos de um conjunto.

Como discutido anteriormente, Vergnaud (1986) toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais. O domínio dos conceitos, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem (VERGNAUD, 1982). Portanto, se faz importante o ensino dos diferentes tipos de problemas combinatórios durante toda a vida escolar. Pessoa e Borba (2009) acreditam que a Combinatória deve ser trabalhada desde os anos iniciais da escolarização, com todas as *situações* dos problemas combinatórios presentes de forma simultânea nestes níveis de ensino, a

fim de que o aluno consiga compreender diferentes *situações* deste conceito e seus respectivos *invariantes* e as possíveis *representações* para respondê-los. Borba (2010) defende que a resolução de problemas de Combinatória possibilita ricos desenvolvimentos conceituais – específicos à Matemática, e, também, de outras áreas do conhecimento.

No caso da Combinatória, as *situações* são os tipos de problema (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*); os *invariantes* são as propriedades características de cada um desses tipos de problema. E as *representações simbólicas* são as diferentes formas de representar as resolução dos problemas ou as formas de apresentá-los.

De acordo com Vergnaud (1986), na Teoria dos Campos Conceituais, os conceitos se inter-relacionam. Sendo assim, trabalhar com variados problemas combinatórios ratifica que estes fazem parte de um mesmo campo conceitual, ou seja, estão articulados entre si.

Os autores que se propuseram a classificar os problemas que apresentaram características das estruturas multiplicativas encontraram situações que se relacionam com o raciocínio combinatório (*produto cartesiano* (NUNES e BRYANT, 1997), produto de medidas (VERGNAUD, 1983, 1991) ou situações relacionadas à ideias de Combinatória (BRASIL, 1997)). Contudo, mesmo com denominações distintas para cada autor, as três denominações são todas referentes a um mesmo tipo de raciocínio (característica: dois ou mais conjuntos para formar um novo conjunto de elementos). Além desse raciocínio, existem outros, com características diferentes, ou seja, outros *invariantes*, dependendo da *situação*.

Para Merayo (2001), *arranjo*, *permutação* e *combinação* têm as respectivas definições:

*Seja um conjunto de m elementos distintos. Recebem o nome de **arranjo** de ordem n desses m elementos, a todo grupo ordenado formado por n elementos tomados dos m , de tal maneira que dois grupos são considerados distintos se diferem em algum de seus elementos ou bem, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados (p.236)... **Permutação** de m objetos distintos, qualquer agrupamento desses objetos que difere um do outro unicamente pela ordem de colocação de seus objetos (p.241)... Seja um conjunto formado por m elementos distintos. Recebe o nome de **combinação** de ordem n desses m elementos, cada grupo formado por n elementos tomado dos m , tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer*

que, dois agrupamentos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem (p. 269). (MERAYO, 2001, pp. 236-269 *apud* Pessoa, 2009).

Pessoa e Borba (2009) organizaram os problemas que abrangem o raciocínio combinatório. As pesquisadoras propuseram um agrupamento único contemplando a *situação* presente na classificação de Vergnaud (1983 e 1991), Nunes e Bryant (1997) e nos PCNs (1997), que aqui denominaremos por *produto cartesiano*, e o agrupou com a classificação organizada por Merayo (2001): *permutação, arranjo e combinação*.

Baseando-se em Vergnaud, o qual diz que para cada *situação* proposta há um *invariante*, ou seja, relações e propriedades que se mantêm constantes em distintas situações, as autoras também destacam os *invariantes* das diferentes *situações* combinatórias encontradas.

A seguir, nos Quadros 3, 4, 5 e 6, apresentamos as *situações* presentes na Combinatória (*produto cartesiano, combinação, arranjo, e permutação*) e seus respectivos *invariantes*, os quais se relacionam à escolha dos elementos e à sua ordenação.

Quadro 03: *Situações e Invariantes da Combinatória – produto cartesiano*

Produto Cartesiano: (1) dois (ou mais grupos) diferentes serão combinados para construir um novo grupo; (2) a ordem dos elementos escolhidos não gera novas possibilidades.

Exemplo:

Ana tem 3 **saías** (azul, branca e verde) e 2 **blusas** (preta e roxa) e quer saber quantos **pares de roupas** ela pode fazer, usando todas as saias com todas as blusas.

Neste tipo de problema, identificamos o *invariante* da escolha que se relaciona com os conjuntos que existem na situação, na qual identificamos dois conjuntos, sendo o primeiro formado por três saias (azul, roxa e verde) e o segundo composto por duas blusas (uma preta e a outra branca), e eles se relacionaram a fim de formarem um novo conjunto, o de pares de roupas – blusas com saias. Nesta *situação* de *produto cartesiano*, diferentemente dos outros três tipos de problemas que serão apresentados, a ordem dos elementos não é determinante para gerar ou não novas possibilidades.

A *situação* da *combinação* se diferencia do *produto cartesiano*, quanto ao *invariante* da escolha.

Quadro 04: *Situações e Invariantes da Combinatória – combinação*

Combinação: (1) de um grupo maior serão selecionados objetos ou situações que constituirão os subgrupos; (2) a ordem dos objetos escolhidos não gera novas possibilidades.

Exemplo:

Em uma lanchonete há 4 **frutas** (mamão, abacaxi, laranja e goiaba). João quer um suco e pode escolher duas frutas para fazer seu **suco**. De quantas formas João pode pedir seu suco?

Diferentemente da *situação* explicitada anteriormente, a *combinação* se caracteriza por ter apenas um conjunto, no qual dele se formará subconjuntos. Isto é, de um conjunto maior, o de frutas (mamão, abacaxi, laranja e goiaba) formar-se-ão conjuntos menores, no caso o de possíveis sucos formados a partir de duas frutas. Pode-se, assim, formar suco de ‘mamão’ com ‘abacaxi’; ‘mamão’ com ‘laranja’; ‘mamão’ com ‘goiaba’; ‘abacaxi’ com ‘laranja’, e assim por diante. A ordem não gera novas possibilidades, ou seja, formar suco de ‘mamão’ com ‘abacaxi’ é o mesmo que formar um de ‘abacaxi’ com mamão’.

Encontramos ainda mais duas *situações* combinatórias: *arranjo* e *permutação*. Nos problemas de *arranjo* existem semelhanças com os problemas de *combinação* com relação ao *invariante* da escolha, uma vez que nessas duas *situações* a escolha se dá a partir de um conjunto no qual este formará subconjuntos.

Quadro 05: *Situações e Invariantes da Combinatória – arranjo*

Arranjo: (1) um grupo maior gerará novas possibilidades ao subgrupo e não são utilizados todos os elementos do grupo maior; (2) a ordem e a escolha dos elementos geram novas possibilidades.

Exemplo:

Em um campeonato de futebol há 4 **times** concorrendo (A, B, C e D), contudo somente dois poderão ganhar o torneio. Quais as possibilidades de ter o **primeiro e segundo lugar**?

Problemas de *arranjo* se assemelham a problemas de *combinação* com relação ao *invariante* da escolha, assim, de um conjunto maior irá formar conjuntos menores, ou seja, subconjuntos. Quanto ao *invariante* da ordem, neste tipo de problema encontramos características diferentes das *situações* expostas acima. Se usarmos o exemplo dado acima, encontramos um conjunto, o de times (times A, B, C e D) e deste grupo somente dois conquistarão o campeonato, em primeiro e segundo lugares. Desta forma, podemos formar os respectivos subconjuntos, por exemplo: ‘time A’ em primeiro com ‘time B em segundo’; ‘time A’ em primeiro com

‘time ‘C em segundo; ‘time A’ em primeiro com ‘time D’ em segundo; ‘time B’ em primeiro com ‘time A’ em segundo, e assim sucessivamente. Neste tipo de problema, formar as possibilidades ‘time A’ em primeiro com ‘time B’ em segundo e ‘time B em primeiro com ‘time A’ em segundo, são subconjuntos distintos, uma vez que a ordem para primeiro e segundo lugar é diferente.

Quanto ao *invariante* da ordem, problemas de *permutação* contêm características análogas aos problemas de *arranjo*, no qual a ordem influencia, gerando novas possibilidades. Contudo, com relação ao *invariante* da escolha, encontramos nesta *situação* características contrárias às todas apresentadas nos problemas anteriores.

Quadro 06: *Situações e Invariantes da Combinatória – permutação*

Permutação: (1) todos os elementos do grupo são utilizados, cada um, apenas uma vez; (2) A ordem dos elementos do conjunto gera novas possibilidades.

Exemplo:

Para tirar uma foto em **família**, o pai, a mãe e o irmão estão sentados em um sofá de 3 lugares. De quantas maneiras diferentes essa família pode se sentar, de forma que fiquem lado a lado, para tirarem a foto?

Em problemas de *permutação*, encontra-se um conjunto (neste caso, os integrantes da família) e todos os elementos dele serão utilizados ao mesmo tempo, suscitando em novas possibilidades. No exemplo apresentado acima, pode-se obter as seguintes possibilidades: pai, mãe e irmão; pai, irmão e mãe; mãe, pai e irmão; mãe, irmão e pai; irmão, mãe e pai; irmão, pai e mãe. Neste exemplo, percebe-se que a ordem, assim como nos problemas de *arranjo*, influencia no número de possibilidades, uma vez que uma fotografia com a família sentada com o pai em primeiro, a mãe em segundo e o filho em terceiro é diferente de uma fotografia onde a família estivesse com a mãe em primeiro, o pai em segundo e o filho em terceiro.

Sendo assim, percebe-se que nos problemas combinatórios, há algumas similaridades e, ao mesmo tempo, características distintas com relação aos *invariantes* encontrados, o que faz com que a criança mobilize diferentes linhas de raciocínio e distintas estratégias para responder corretamente as diversas *situações* combinatórias.

Diante dessas diferentes *situações*, as crianças mobilizam diferentes formas de *representações simbólicas*. Pessoa (2009) em sua tese retrata algumas dessas *representações*, dentre elas: listagem (a mais utilizada), desenho, árvore de

possibilidades, diagrama/quadro e o princípio fundamental da contagem.

Dessa forma, são necessários estudos que verifiquem como se dá o processo de construção e percepção pelo professor dessas diferentes variáveis que envolvem a Combinatória: as *situações*, os *invariantes* e as *representações simbólicas* de cada tipo de problema para que os mesmos possam mudar o rumo do ensino da Combinatória que temos atualmente.

3.2 Estudos anteriores referentes ao Raciocínio Combinatório

Nas seções que virão apresentaremos alguns estudos que tratam da temática Combinatória. Estes serão divididos mais especificamente nos seguintes eixos: Conhecimento de Alunos, Intervenções que auxiliam na aprendizagem da Combinatória em diferentes níveis de escolaridade, Recursos Didáticos e Formação Docente.

3.2.1 O Raciocínio Combinatório e o Conhecimento dos Alunos

Apresentamos algumas pesquisas realizadas que buscaram investigar quais os conhecimentos dos alunos, em seus diferentes níveis de escolaridade, com relação à Combinatória.

Selva, Borba, Campos, Bivar, Ferreira e Luna (2008) investigaram como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental resolvem diferentes tipos de problemas de estrutura Multiplicativa. Foram 180 estudantes e cada um resolveu um teste contendo dez problemas de diferentes tipos (multiplicação, divisão partitiva, divisão por quotas, *produto cartesiano* direto e *produto cartesiano* inverso).

Verificou-se, então, que, dentre os problemas de estruturas multiplicativas, o *produto cartesiano* se destaca como o mais difícil e os de multiplicação e divisão partitiva como os mais fáceis. Sendo assim, as autoras reforçam que há a necessidade de um trabalho em sala com os diferentes tipos de problemas multiplicativos.

Lima e Borba (2009) aplicaram um teste contendo 16 questões envolvendo problemas de estruturas multiplicativas, incluindo os de raciocínio combinatório, a fim de analisar a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos – EJA – sobre problemas multiplicativos, principalmente os que envolvem raciocínio

combinatório. Deste modo, buscou-se verificar, principalmente, dentre os problemas multiplicativos, se os que envolvem o raciocínio combinatório são os que apresentam maiores dificuldades por parte dos alunos; levantar os tipos de problemas de Combinatória que os alunos de EJA têm maior e menor dificuldade; e analisar as estratégias utilizadas por esses alunos na resolução de problemas de Combinatória de diferentes naturezas.

Observou-se a resistência ao uso de *representações* não formais para a resolução de problemas combinatórios e quando utilizados foi por meio da listagem de possibilidades. De acordo com os resultados obtidos, percebeu-se que o desenvolvimento do raciocínio combinatório ocorre atrelado a algumas variáveis (exercício profissional, anos de escolarização, série e tipos de problemas) que fazem grande diferença no desempenho dos alunos. Por fim, as autoras ressaltaram que o trabalho do professor é fundamental na construção dos conhecimentos de Combinatória, sendo essencial reconhecer como válidos os conhecimentos prévios, antes mesmo da formalização, para que assim se possa ampliar e aprofundar o raciocínio combinatório dos estudantes.

Pessoa e Santos (2011) em sua pesquisa realizaram entrevistas (uma sessão com cada aluno) nas quais aplicaram um teste composto por dois problemas de cada tipo e foi organizado em função da grandeza numérica e do grau de dificuldades dos tipos de problemas. Com tal pesquisa, analisaram a compreensão dos alunos acerca da Combinatória e a possibilidade de influência do tipo de problema e da grandeza numérica na resolução desses problemas.

Os resultados confirmaram o estudo de Pessoa (2009) ao apontarem para a importância da grandeza numérica, ou seja, problemas com resultados menores, com uma menor quantidade de possibilidades, foram mais facilmente resolvidos pelos alunos do que problemas com números que levavam a uma maior quantidade de possibilidades. Além disso, nos tipos de respostas categorizados, foi possível perceber a importância da sistematização durante a resolução das questões para o encerramento de possibilidades.

Em estudo realizado em 2012, Pessoa e Borba pesquisaram como seis crianças da Educação Infantil responderam, por manipulação de figuras, problemas combinatórios, sendo um de cada tipo. As autoras tinham como objetivo investigar a percepção dos *invariantes* combinatórios por alunos deste nível de ensino.

As autoras puderam observar que as crianças geralmente conseguiam selecionar os elementos necessários, no entanto, apresentaram dificuldade na compreensão de como lidar com o *invariante* de ordenação e uma dificuldade ainda maior para esgotar todas as possibilidades. Sendo assim, as pesquisadoras concluem que as crianças, intuitivamente, percebem alguns *invariantes* da Combinatória, podendo verificar que situações simples de Combinatória podem ser concretamente trabalhadas já com as crianças da Educação Infantil.

Em pesquisa realizada, Santos, Matias e Pessoa (2011) também investigaram como crianças da Educação Infantil resolvem problemas que envolvem o raciocínio combinatório com o auxílio do material manipulável.

Verificaram que crianças da Educação Infantil já conseguem perceber alguns dos *invariantes* contidos nos problemas combinatórios, apesar da dificuldade em esgotar todas as possibilidades. As autoras ainda ressaltam que apesar de alguns conceitos precisarem de tempo para serem desenvolvidos, não devem ser desconsiderados, apontando, assim, a importância de começar o trabalho com as diferentes *situações* combinatórios desde a Educação Infantil.

Maier e Yankelewitz (2010) realizaram um estudo no qual pesquisaram a compreensão de três crianças sobre Combinatória, sendo o estudo iniciado na 2ª série (corresponde ao 3º ano) com a aplicação de um problema de *produto cartesiano* e tendo continuidade no ano posterior, quando as mesmas crianças se encontravam na 3ª série (corresponde ao 4º ano). As autoras verificaram que na 2ª série as crianças se utilizaram do desenho para resolver o problema apresentado, enquanto que na 3ª série usaram outras *representações* válidas, dentre elas, a árvore de possibilidades e a listagem, além de conseguirem chegar ao acerto total do problema proposto, o que não havia ocorrido na série anterior.

3.2.2 O Raciocínio Combinatório e intervenções que auxiliam na aprendizagem da Combinatória em diferentes níveis de escolaridade

Nesta seção buscamos apresentar pesquisas que tratam da investigação do desempenho dos alunos, em seus diferentes níveis de ensino, a partir de intervenções realizadas.

Barreto e Borba (2011) desenvolveram um estudo baseado em uma intervenção pedagógica, que tinha como pilares a distinção das diferentes *situações*

combinatórias, seus *invariantes* e o uso de distintos tipos de *representação simbólica* (listagem e árvore de possibilidades), a fim de verificar possíveis avanços de estudantes da EJA.

Foi constatado que com apenas uma intervenção os estudantes obtiveram avanços significativos em seus desempenhos, quando comparados os pré-testes e pós-testes. Ainda foi ressaltado que o tipo de *representação simbólica* utilizada (listagem e/ou árvores de possibilidades) não influenciou no desempenho dos estudantes. Sendo assim, as autoras ressaltam a importância do trabalho sistemático com este conteúdo matemático.

Pessoa e Santos (2012a) fizeram um estudo a fim de analisar como intervenções podem facilitar a compreensão de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental sobre problemas combinatórios.

Para tal, as autoras realizaram pré-teste com os alunos, duas sessões de intervenção e pós-teste, a fim de comparar os desempenhos do pré-teste e do pós-teste, observando-se as contribuições das intervenções. As intervenções foram baseadas na explicitação dos *invariantes* dos problemas combinatórios, na listagem de possibilidades como estratégia de resolução, na sistematização da listagem e na generalização (percepção das regularidades dos problemas).

Os alunos conseguiram compreender os problemas combinatórios a partir das intervenções dadas. Alguns conseguiram, ainda, generalizar os procedimentos utilizados.

Azevedo e Borba (2012) realizaram um estudo com 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, a fim de verificar a influência da construção de árvores de possibilidades, com e sem o uso de um *software* educativo, na aprendizagem da Combinatória. Os alunos foram separados em quatro grupos, formando dois grupos experimentais e dois grupos controle, os quais realizaram um pré-teste, seguido de intervenção e, em seguida, um pós-teste. Foi realizado, ainda, após nove semanas, um pós-teste posterior para verificar a retenção da aprendizagem.

As autoras verificaram que nos grupos experimentais houve avanços com relação ao raciocínio combinatório, contudo, o grupo de lápis e papel se destacou, tendo um avanço maior ao ser comparado com os demais grupos. Sendo assim, as autoras destacam que o trabalho com árvores de possibilidades se tornou viável para o ensino da Combinatória com alunos dos anos iniciais.

3.2.3 O Raciocínio Combinatório e o uso de Recursos Didáticos

Esta seção trata de estudos de sondagem e de intervenção que buscaram analisar os possíveis recursos didáticos (livros didáticos e *softwares*) utilizados para o ensino da Combinatória.

Matos Filho e Pessoa (2006) analisaram livros didáticos com o objetivo de identificar os problemas que envolvem o raciocínio combinatório; verificar como o conceito de multiplicação é tratado, se apenas como a soma de parcelas repetidas ou se existe uma abordagem mais ampla ligada à ideia de combinatória; verificar se os problemas de raciocínio combinatório estabelecem ligação com a construção de conceitos de probabilidade e estatística; e, ainda, observar quais as orientações fornecidas pelo Manual do Professor em relação ao trabalho com os problemas de combinatória.

Os autores puderam verificar que os livros didáticos apresentaram um número reduzido de problemas que envolvem o raciocínio combinatório, apesar de haver diversas pesquisas que constatarem ser possível o trabalho com este conteúdo matemático.

Em estudo de Barreto, Amaral e Borba (2007) buscou-se também analisar como algumas coleções de livros didáticos de Matemática das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental (atuais 2º, 3º, 4º e 5º ano do Ensino Fundamental) trabalhavam os problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

Em suas considerações, verificaram que a *situação* que apresentou maior quantidade de problemas foi *combinação* e com menor percentual de ocorrência o *arranjo*. As autoras indicaram haver uma boa variação das *representações simbólicas*, tanto no que diz respeito às *representações* apresentadas, quanto às sugeridas pelos autores, entretanto, nenhuma das coleções trabalhou as propriedades *invariantes* da Combinatória nem orientou o professor sobre as quatro *situações* que envolvem o raciocínio combinatório. As autoras ainda ressaltam que é relevante analisar como é desenvolvido o trabalho do raciocínio combinatório nos livros didáticos de Matemática para estabelecer uma relação crítica com esses instrumentos, já que estes, muitas vezes, são os únicos recursos didáticos disponíveis e/ou utilizados pelo professor em sala de aula.

Pedrosa Filho (2008) objetivou analisar a aquisição e o desenvolvimento de noções introdutórias ao raciocínio combinatório. Para isso, aplicou com os alunos dois materiais manipuláveis. O autor disponibilizou, ainda, folhas de registro para que pudessem pintar os modelos e discutir sobre as cores.

Os resultados evidenciaram que a utilização de materiais manipuláveis favoreceu o desenvolvimento do raciocínio combinatório e também a ideia de sistematização, contagem e visualização de resultados.

A pesquisa realizada por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) buscou coletar e analisar alguns softwares educativos e objetos de aprendizagem que contemplassem o raciocínio combinatório. Para tal, selecionaram cinco softwares/objetos de aprendizagem: Diagrama de Arbol (SANDOVAL, TRIGUEROS E LOZANO, 2007); ML Combiner (LESS, 2001), sendo os *softwares* investigados, e os objetos de aprendizagem foram Combinação (RIVED, 2013a), Permutação (RIVED, 2013b) e Arranjo (RIVED, 2013c).

As autoras apontam como resultado que os softwares educativos e os objetos de aprendizagem analisados apresentam uma limitação ao uso das fórmulas, ou seja, a indução que o aluno se utilize rapidamente dessa *representação simbólica*. Entretanto, encontraram bons exemplos de trabalho, com possibilidades de despertar e manter o interesse do aluno, além de trazerem situações ricamente contextualizadas.

Azevedo, Costa e Borba (2011) em sua pesquisa defendem o uso da tecnologia como um recurso importante para o desenvolvimento e progresso dos alunos no conteúdo da Combinatória. As autoras analisaram o uso do *software árbol* a fim de verificar qual o progresso que este recurso traz aos alunos do 5º ano de uma escola pública municipal da cidade do Recife.

A pesquisa foi realizada com 16 alunos da mesma turma, sendo estes divididos em 02 grupos: G1 (alunos participantes da intervenção com o software) e G2 (alunos não participantes da intervenção). O estudo foi realizado da seguinte forma: iniciou com um teste contendo situações variadas de Combinatória para os dois grupos (G1 e G2); em seguida, houve duas sessões de intervenção (somente com o G1) e um teste final com ambos os grupos.

As autoras relataram que foi notável o desenvolvimento do G1, pois apresentaram um desempenho superior ao do G2 no teste final, mostrando,

inclusive, diferentes estratégias para resolução dos problemas combinatórios apresentados.

Apresentamos, ainda, o estudo de Martins e Borba (2012), no qual analisaram os contextos de problemas multiplicativos de 19 livros didáticos aprovados no Plano Nacional do Livro de Alfabetização de Jovens e Adultos de 2008. Foram encontrados contextos adequados, embora muitas situações matemáticas cotidianas desse público tenham sido levadas em consideração. De acordo com as autoras, deve-se, portanto, atentar para especificidades do educando de modo a auxiliá-lo no desenvolvimento de conhecimentos da Matemática e outras áreas do saber, por meio de um trabalho com ampla variedade de contextos.

3.2.4 O Raciocínio Combinatório e a Formação de Professores

Nesta seção destacamos pesquisas que focam na formação e nos conhecimentos dos professores que ensinam Matemática, mostrando a importância de termos cada vez mais formações continuadas para os professores acerca da Combinatória e todas as suas características.

Com professores do Ensino Médio, Pinheiro e Sá (2007), investigaram a prática pedagógica predominante no ensino da Combinatória neste nível de ensino. Para tal, professores que lecionam Matemática foram investigados a partir de um questionário contendo itens sobre dados pessoais, formação acadêmica e procedimentos metodológicos desenvolvidos durante as aulas ministradas pelos respectivos participantes.

Diante dos resultados obtidos, os autores acreditam que o livro didático é a principal ferramenta para a elaboração das aulas e que há uma grande predominância de fórmulas no ensino deste conteúdo matemática, apesar de que alguns professores tenham apontado a utilização da resolução de problemas ou modelagem para o desenvolvimento da aula de Combinatória.

Rocha e Ferraz (2011) procuraram verificar quais as estratégias de resolução de problemas combinatórios utilizadas por professores com formação em Pedagogia e em Matemática. Para realizar a pesquisa foi feito um teste contendo oito problemas combinatórios, sendo dois de cada tipo.

Verificou-se que os professores de Matemática privilegiavam o princípio fundamental da contagem, seguido por uso de fórmulas, enquanto que professores

formados em Pedagogia utilizaram a listagem. Quanto à ordem de grandeza, quando os números envolvidos nos problemas são menores, não existe diferença significativa nas médias de acertos entre os professores de Pedagogia ou Matemática. Entretanto torna-se significativa quando a ordem de grandeza aumenta.

Em sua dissertação, Rocha (2011), pesquisou os conhecimentos dos professores com relação à Combinatória. A autora realizou entrevistas semiestruturadas com seis professores, sendo dois dos anos iniciais, dois dos anos finais do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio, na qual responderam questões referentes aos tipos de problemas combinatórios, aos procedimentos de resolução utilizados por alunos e às formas de ensino para a superação de dificuldades.

Foram constatadas dificuldades em professores dos diferentes níveis de ensino. A autora acredita que tais dificuldades podem ser justificadas por lacunas de conhecimento específico na formação de professores, como também da experiência de ensino. Foi observado, também, que a falta desse conhecimento específico do conteúdo, interfere na avaliação das estratégias realizadas pelos alunos. Essas dificuldades podem vir a interferir nas práticas que propiciem a construção do raciocínio combinatório.

Em seu estudo, Costa (2003) se propôs inicialmente a investigar os instrumentos disponibilizados para auxiliar professores no ensino da Combinatória e, também, as concepções de professores do Ensino Fundamental sobre a prática pedagógica. Para isso, analisou os PCN (BRASIL, 1997), além da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino de Matemática e, ainda, duas coleções de livros didáticos adotados pela rede pública. O autor, em sua pesquisa, utilizou ainda dois questionários, sendo o primeiro para caracterizar os sujeitos e o segundo para diagnosticar suas concepções a partir de protocolos de resolução de alunos.

Costa (2003) constatou dificuldade em estabelecer um procedimento sistemático, justificar as respostas, e reconhecer quando a ordem é relevante ou não nos problemas combinatórios. Sobre as análises dos instrumentos, o autor verificou que tanto as coleções quanto os PCN (BRASIL, 1997) introduzem o ensino da Combinatória a partir de diferentes representações para em seguida fazerem uso do princípio multiplicativo. Foi apontado também que a Proposta Curricular do Estado

de São Paulo para o Ensino de Matemática com relação ao conteúdo pesquisado encontrava-se defasada.

A inclusão de problemas combinatórios em livros didáticos é apresentada por Barreto, Amaral e Borba (2007) e Assis e Magalhães (2012), contudo, não há necessariamente uma explicitação quanto às dimensões existentes em um conceito: *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas*, assim como não há qualquer orientação ao professor, no manual ou ao longo do livro, sobre esses tipos de problema.

Diante do exposto, verificamos que há uma gama de trabalhos realizados na área contemplando diferentes contextos (conhecimento de alunos, intervenções que auxiliam na aprendizagem da Combinatória em diferentes níveis de escolaridade, recursos didáticos e formação docente), contudo, há a necessidade de estudos que verifiquem como se dá o processo de construção e percepção pelo professor das *situações*, dos *invariantes* e das *representações simbólicas* de cada tipo de problema para que os mesmos possam construir um conhecimento acerca desse conteúdo e refletir como transpassar esse conhecimento para o *conhecimento didático* durante o processo de ensino.

CAPÍTULO IV – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: objetivos e método

4.1 Objetivos

Tem-se por objetivo geral analisar o efeito de uma *formação continuada* sobre *Combinatória*, tendo como base as situações, *invariantes e representações simbólicas* de cada tipo de problema. De modo mais específico, verificar quais são as mudanças de conhecimento, demonstrados nas reflexões e na prática da professora, após a intervenção.

4.2 Método

A pesquisa surgiu a partir dos achados do estudo de Rocha (2011), o qual constatou a necessidade de um nível maior de conhecimentos acerca da *Combinatória* pelos docentes, especificamente, o *conhecimento especializado deste conteúdo e o seu conhecimento didático*. Este resultado revelou a necessidade da organização de um processo continuado de formação para os professores dos anos iniciais.

Sendo assim, buscou-se verificar se alguns dos conhecimentos elencados por Shulman (2005) e Ball et al (2008) (*conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento didático desse conteúdo* matemático, a *Combinatória*) iriam variar após o processo de formação continuada sobre *Combinatória*, baseado no tripé que forma um conceito (VERGNAUD, 1996).

4.2.1 Participantes e Procedimentos

O presente estudo foi realizado com uma professora que atua nos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal de Olinda. Antes de iniciar o processo de formação continuada, foi realizada uma entrevista individual semiestruturada¹¹ com a professora, a fim de verificar seus conhecimentos perante a *Combinatória*. Em seguida, foi realizado um processo

¹¹ Ver Apêndice A

de formação continuada, de seis encontros, no qual participaram todas as professoras que atuavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental do turno vespertino da escola¹².

Durante a formação foram enfatizadas as *situações, invariantes e representações simbólicas* existentes em cada tipo de problema combinatório. Ao término do processo, foi realizada mais outra entrevista semiestruturada¹³, para averiguar as possíveis mudanças ocorridas nos conhecimentos da docente após a intervenção. Foi solicitado também ao longo da pesquisa que a docente elaborasse alguns planejamentos de aulas, sendo um na entrevista inicial, dois durante o processo de formação (para o quarto e o sexto encontro) e outro na entrevista final. As entrevistas inicial e final realizadas na pesquisa são baseadas nas entrevistas realizadas por Rocha (2011).

As entrevistas (inicial e final) foram divididas em três eixos: *Formação e Experiência Docente, Conhecimento Didático da Combinatória e Conhecimento Especializado do Conteúdo de Combinatória*. Na entrevista inicial, esses eixos se dividem em sete momentos, tendo eles o objetivo de: (1) identificar, conhecer e obter informações gerais da professora entrevistada; (2) conhecer e entender as experiências e os fatos da vida profissional, como também, da vida escolar da professora, e se eles influenciam na sua prática docente em relação ao ensino de Combinatória; (3) Investigar os saberes matemáticos e didáticos da professora em relação ao tema Combinatória e, assim, entender como a professora pesquisada compreende e procede com relação ao ensino de Combinatória nos anos iniciais; (4) Diferenciar os problemas combinatórios a partir das *situações e invariantes*; (5) Analisar, a partir de protocolos, o desempenho (acertos e erros) e *representações simbólicas* de alunos com relação à Combinatória; (6) Analisar as perspectivas da professora sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, através de protocolos; (7) Planejar uma aula que trate de resolução de problemas combinatórios.

O processo de formação foi organizado com o primeiro encontro voltado para a discussão e reflexão da Combinatória como um conteúdo a ser trabalhado

¹² As professoras atuantes na escola participaram coletivamente de todos os momentos do processo de formação continuada, exceto nos encontros que visava a observação de aula (quarto e sexto encontro).

¹³ Ver Apêndice B

em sala de aula à luz da Teoria de Vergnaud (1996), abordando as *situações e invariantes* dos problemas combinatórios, seguido do segundo encontro que abordou a produção dos diferentes problemas combinatórios. No terceiro encontro, foram trabalhadas as diferentes *representações simbólicas* possíveis para a resolução dos problemas combinatórios, assim como a ideia de sistematização dos procedimentos de resolução e generalização/percepção de regularidade. Ainda neste encontro foi elaborado, um planejamento de aula direcionado aos alunos dos anos iniciais de escolarização, abordando o tema Combinatória e suas diferentes dimensões, para que fosse aplicado em sala de aula. No quarto encontro aconteceu a aplicação do planejamento de aula pela professora, com observação da pesquisadora. Ao término da aula, ocorreu uma pequena entrevista semiestruturada, a fim de verificar as análises realizadas, individualmente, pela docente, sobre a aula dada. Em seguida, houve mais um encontro, o quinto, para que as professoras participantes do processo de formação pudessem trazer análises e discussões de sua prática diante de todo o processo realizado durante a formação. No último encontro, aconteceu mais um momento de observação de aula, juntamente com a pequena entrevista semiestruturada, como no quarto encontro.

Nas observações de aulas foram levantados três eixos de análise: a relação da professora com os conhecimentos dos alunos sobre o conteúdo, a relação da professora com o conteúdo Combinatória e os recursos utilizados em sala de aula. Dentro de cada eixo desses, buscou-se verificar, especificamente, alguns pontos, os quais são apresentados no Quadro 07.

Quadro 07: Roteiro para as observações de aulas

Eixos da Observação	Roteiro para observação de aula
Relação do professor com o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo	○ A professora busca perceber/identificar os conhecimentos que os alunos trazem a respeito da Combinatória? Levaram esses conhecimentos em consideração?
Relação do professor com o conteúdo	○ De que forma o conteúdo foi trabalhado? O conteúdo foi transmitido ou construído em sala de aula? ○ Todas as <i>situações</i> foram trabalhos em sala? Se não, quais foram? ○ Como foi a elaboração dos problemas apresentados pela professora? Estavam no nível dos alunos? ○ Houve destaque para os <i>invariantes</i>? ○ A professora levou em considerações as diferentes <i>representações</i> possíveis? Se sim, quais?
Recursos utilizados em sala de aula	○ Quais recursos foram utilizados durante a aula? Quais? ○ De que forma foram utilizados estes recursos? ○ Os recursos utilizados ajudaram na aprendizagem desse conteúdo?

As entrevistas que ocorreram no quarto e no sexto encontro, após a observação das aulas, buscaram verificar as análises realizadas pela docente a respeito das aulas dadas. Tais entrevistas tiveram a seguinte estrutura:

Quadro 08: Estrutura das entrevistas semiestruturadas após as observações de aula

1) Como você analisa a aula ministrada? 2) Acredita que o planejamento elaborado foi suficiente? 3) Você mudaria alguma coisa que foi planejada/ministrada na aula? 4) Que dificuldades você encontrou no planejamento/na aula? 5) Você acredita que os alunos conseguiram compreender o que estava sendo trabalhado em sala de aula? 6) Precisaria de mais aulas para continuar este conteúdo? 7) Por que a escolha deste problema combinatório para a aula? 8) Suas expectativas foram alcançadas? Por quê?
--

Em seguida, foi realizada com a professora pesquisada outra entrevista semiestruturada, a entrevista final, buscando constatar qual compreensão da Combinatória, enquanto conteúdo escolar, ficou após a participação no processo de formação realizado.

Na entrevista final, os três eixos constituintes da primeira entrevista semiestruturada (inicial) se dividiram em seis momentos: (1) Investigar os

conhecimentos matemáticos e didáticos da professora em relação ao tema Combinatória e, assim, entender como a professora pesquisada compreende e procede com relação ao ensino de Combinatória nos anos iniciais; (2) Diferenciar os problemas combinatórios a partir das *situações* e *invariantes*; (3) Analisar, a partir de protocolos, o desempenho (acertos e erros) e *representações simbólicas* de alunos com relação à Combinatória; (4) Analisar as perspectivas da professora sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, através de protocolos; (5) Planejar uma aula que trate de resolução de problemas combinatórios; (6) Avaliar todo o processo de formação.

Como afirmado acima, propomos seis encontros para o processo da formação continuada. Acreditamos que encontros que viabilizem o diálogo entre os participantes e análises e reflexões sobre suas práticas, torna o processo mais significativo, como defendido por Schön (1995). A seguir, nos Quadros 09, 10, 11, 12, 13 e 14, detalhamos os encontros.

Quadro 09: Proposta de intervenção para o primeiro encontro

	Objetivo	Método / 1º Momento	Método / 2º Momento
1º encontro	• Associar a Combinatória à Teoria dos Campos Conceituais. • Identificar os tipos de problemas combinatórios. • Construir a ideia dos <i>invariantes</i> de cada tipo de problema combinatório.	• Resolver problemas combinatórios e, a partir das análises deles, ir construindo o que são problemas combinatórios. • Solicitar que diferenciem um problema do outro, anotando as características de cada um e o que tem de semelhante e diferente entre eles. A ideia é a de que as professoras possam perceber os <i>invariantes</i> e que a formadora/pesquisadora possa ir atrelando essa discussão dos <i>invariantes</i> e <i>situações</i> aos tipos de problemas. • Conversar sobre qual ideia tem sobre Combinatória e quais os tipos de problemas encontramos de Combinatória, com registro sistemático das ideias expostas.	• Identificar os quatro problemas combinatórios (<i>produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação</i>), a partir dos resultados da pesquisa de Pessoa e Borba (2009). • Entrega de quatro problemas combinatórios, um de cada tipo, para que os alunos das professoras resolvam da forma que quiserem para que suas estratégias possam ser discutidas no próximo encontro.

Quadro 10: Proposta de intervenção para o segundo encontro

	Objetivo	Método / 1º Momento
2º encontro	• Produzir problemas combinatórios; • Refletir sobre a organização do enunciado: contexto, explicitar os elementos, grandeza numérica;	• Relembrar o que foi visto no encontro anterior; • Refletir junto com as professoras participantes da formação a melhor forma de organizar o enunciado de uma situação de problema combinatório, enfatizando o contexto, a explicitação dos elementos dos conjuntos e o cuidado que deve ter com a grandeza numérica. • Solicitar que as professoras, em duplas, produzam problemas combinatórios, sendo 01 de cada tipo; • Escolha coletiva dos problemas (01 de cada tipo) para que sejam aplicados com seus alunos.

Quadro 11: Proposta de intervenção para o terceiro encontro

	Objetivo	Método / 1º Momento	Método / 2º Momento	Método / 3º Momento
3º encontro	• Verificar as possíveis estratégias para resolver problemas combinatórios. • Trabalhar a sistematização e generalização como um processo para melhorar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.	• Relembrar os diferentes tipos de problemas combinatórios e suas características. • A partir disso, ressaltar que para resolver esse problema há diferentes estratégias (<i>representações</i>). • Analisar as estratégias utilizadas pelos alunos das professoras e, ao final, distinguir que <i>representações</i> são aquelas. Além dos protocolos dos alunos das docentes, serão disponibilizados outros já estudados em pesquisas anteriores. • Ressaltar que há estudos atuais que mostram que, dentre aquela variedade de <i>representações</i>, há uma que se sobressai: a listagem.	• Mostrar protocolos de resolução de aluno que: (1) não usou a sistematização; (2) usou a sistematização, mas não generalizou; (3) sistematizou e generalizou. • Questionar às professoras o que tem de diferente na resolução e quais considerações elas têm com relação a essas resoluções. • Chamar atenção para a sistematização e generalização realizada pelos alunos.	• A pesquisadora auxiliará as professoras a prepararem aula sobre Combinatória, enfatizando o tripé de Vergnaud (<i>invariantes, situações e representações</i>) e levando em consideração a estratégia mais utilizada pelos alunos até agora pesquisados (a <i>listagem</i> de possibilidades), a <i>sistematização</i> e a <i>generalização</i>. • Lembrar que a explicitação dos <i>invariantes</i> é importante e necessária.

Quadro 12: Proposta de intervenção para o quarto encontro

4º encontro	Objetivo	Método / 1º Momento
	• Observar a aula ministrada pela docente analisada.	• Observar os procedimentos e recursos utilizados pela docente durante a aula.

Quadro 13: Proposta de intervenção para o quinto encontro

5º encontro	Objetivo	Método / 1º Momento
	• Analisar coletivamente a aplicação do planejamento realizada pelas professoras.	• Conversar com as professoras sobre as principais facilidades e dificuldades na aplicação dos seus planejamentos, a fim de que eles analisem e discutam sua prática diante de todo o processo realizado durante a formação.

Quadro 14: Proposta de intervenção para o sexto encontro

6º encontro	Objetivo	Método / 1º Momento
	• Observar a aula ministrada pela docente analisada.	• Observar os procedimentos e recursos utilizados pela docente durante a aula.

A análise de dados foi feita de forma qualitativa, descrevendo e analisando cronologicamente os diferentes momentos ocorridos no processo. A partir dos diferentes instrumentos de coleta de dados, buscamos elementos que reforcem os dados obtidos. Analisamos cada um dos momentos, baseadas nos tipos de conhecimento descritos por Ball et al (2008), *conhecimento especializado do conteúdo* e *conhecimento didático do conteúdo*, sempre à luz da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1996).

CAPÍTULO V – RESULTADOS OBTIDOS: apresentação e análises

Apresentaremos aqui os resultados do estudo. A análise foi realizada de forma qualitativa, em uma organização cronológica, primeiro a entrevista inicial, seguida dos momentos de formação, incluindo-se as aulas observadas, e, por fim, a entrevista final. Comparamos a entrevista inicial com os demais instrumentos utilizados ao longo da pesquisa: observação de duas aulas ministradas pela docente sobre o conteúdo Combinatória, e seus respectivos planejamentos, entrevistas semiestruturadas ocorridas após as aulas ministradas, para que a professora pudesse analisar sua própria prática, e, também, a entrevista final, a fim de verificar possíveis avanços quanto ao *conhecimento especializado do conteúdo* da Combinatória e o *conhecimento didático desse conteúdo*. Além dos tipos de conhecimentos discutidos por Ball e colaboradores (2008) – *conhecimento especializado do conteúdo* e *conhecimento didático do conteúdo* – o desenvolvimento da professora a partir da formação foi analisado à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), verificando-se as dimensões do tripé que forma o conceito: *situações, invariantes e representações simbólicas*.

5.1 Formação e Experiência docente da participante da pesquisa

Neste primeiro momento da entrevista buscou-se identificar, conhecer e obter informações gerais da professora entrevistada. A professora entrevistada possuía uma formação docente na área e já tem sua prática consolidada, por ter mais de cinco (05) anos de tempo de atuação profissional, o que nos leva a acreditar que esses fatores se agregam à sua prática. Segundo Tardif (2008), com mais de cinco (05) anos de tempo de atuação, o professor tem sua prática consolidada.

Quadro 15: Características gerais da professora entrevistada

Formação	Formada em Pedagogia com especialização em psicopedagogia.
Tempo lecionando	Ensina há 10 anos.
Turma que ensina atualmente	Atualmente é professora do 2º ano do Ensino Fundamental.
Código da Professora¹⁴	P – Professora

¹⁴ A Professora será denominada ao longo do texto como P e a Entrevistadora como E.

Ainda nesta fase, procuramos conhecer e entender as experiências e os fatos da vida profissional, como também, da vida escolar da professora, e se eles influenciam na sua prática docente em relação ao ensino de Combinatória.

Com relação às experiências e fatos da vida escolar da professora e à Matemática, a docente analisada ressalta que não gostava desta área do conhecimento, uma vez que não obtinha retornos de seus professores, acreditando que estes podiam ter insegurança ao trabalhar os conteúdos matemáticos.

E: Na sua época de aluna, ainda na escola, como era a vivência com a Matemática? Você gostava?

P: *Não, não gostava... acho que nunca se deu tanta importância à disciplina. Porque às vezes eu não entendia ia, corria para o professor e não tinha resultados. Assim, acho que por insegurança do professor, não sei.*

E: Você lembra se na escola os professores trabalharam a Análise Combinatória?

P: *Não, não trabalharam.*

A docente acredita que os professores podem ter insegurança ao trabalhar a Matemática, isso, segundo Curi (2005), se deve, também, à falta de um trabalho sistemático durante suas formações. A professora ressalta ainda que não estudou Combinatória durante sua vida escolar, apesar do ensino deste conteúdo ser indicado pelos PCN dos anos iniciais (BRASIL, 1997) e pelos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco – Parâmetros de Matemática (PERNAMBUCO, 2012) e, ainda, estar presente, oficialmente, na grade curricular do segundo ano do Ensino Médio, como também apontado pelos participantes do estudo de Lima, Amorim e Pessoa (2013).

Ao indagarmos sobre a existência de formações continuadas de Matemática, a professora relata que, na rede pública, não teve ainda tais momentos, só na rede privada.

E: As formações eram de todas as disciplinas?

P: *No início, não. Matemática não... ultimamente, na escola que ainda ensino, uma escola privada, tem trabalhado também Matemática...as formas, geometria...que o pessoal acha que é um assunto que não está sendo tão trabalhado em sala de aula. Na minha época de aluna mesmo, já não se trabalhava muito geometria. Ia até a parte dos cálculos e parava em geometria. Então....esses professores que não deram geometria na infância, também sentem insegurança em trabalhar geometria dentro de sala de aula. Então a escola resolveu fazer uma capacitação com o conteúdo específico de geometria, mas não há muita capacitação pra Matemática em geral.*

De acordo com Rocha (2011), depoimentos como este retratam a necessidade e preocupação de processos formativos direcionados para a área da Matemática, uma vez que, como destacado por Curi (2005), a formação inicial para os professores dos anos iniciais não supre todas as necessidades com relação a esta disciplina.

5.2 Conhecimento Docente - *Entrevista Inicial*

5.2.1 Conhecimento Especializado do Conteúdo da Combinatória

Nesta etapa, buscamos verificar o saber prévio da professora acerca do *conhecimento especializado da Combinatória*, buscando uma análise sobre o que abrange esse conteúdo e, especificamente, a diferenciação dos problemas combinatórios a partir das *situações* e seus *invariantes*.

5.2.1.1 *Diferentes situações e invariantes combinatórios*

Em outro momento da entrevista, foi questionado à professora o que seria, para ela, a Combinatória, enquanto conteúdo escolar.

E: E qual a ideia que você tem de Combinatória, como conteúdo escolar?

P: *É justamente isso, compreender essa questão de combinações. Como a criança está em fase ainda de construção desse conteúdo, então a gente trabalha com imagens, formas geométricas... a minha visão é essa.*

Percebe-se que a professora pesquisada não tem, neste momento, uma definição clara do que seria o conteúdo matemático Combinatória. Acreditamos que ao relatar em sua fala a necessidade de fazer combinações, que isso se deve à nomenclatura do conteúdo que pode levar-nos a pensar que o termo *combinação* está relacionado ao conteúdo Combinatória. Além disso, ela mistura a Combinatória com outra área da Matemática, como a Geometria.

Ainda foi solicitado que a professora classificasse os diferentes tipos de problemas (*situações*) apresentados e, em seguida, as características (*invariantes*)

de cada tipo de problema. Foram entregues quatro problemas (Quadro 16) de Combinatória e pedimos que diferenciasse um problema do outro.

Apresentamos a seguir a análise da entrevista inicial sobre o conhecimento da professora com relação às diferentes *situações* e *invariantes* dos problemas combinatórios, ou seja, sobre o *conhecimento especializado do conteúdo* (BALL, THAMES e PHELPS, 2008).

Quadro 16: Classificação dos tipos de problemas propostos (entrevista inicial)

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado? (Permutação) 2. Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Laís, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas? (Combinação) 3. Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação? (Arranjo) 4. Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas? (Produto cartesiano) |
|--|

(Problemas retirados de Pessoa e Borba (2009) e de Pessoa e Santos (2011))

Para isto, como apresentado acima (Quadro 16), foram entregues quatro problemas combinatórios, um de cada *situação*, contudo, a docente não conseguiu diferenciar nenhum dos problemas pela *situação*.

P: *Aí você quer saber o tipo de análise, é?*

E: *É. Se você identifica o tipo e as características desses problemas.*

P: *Mas tipo de análise, como assim? Tem vários tipos de análise, é isso? Tem tipos de problemas, mas se você não identificar esses problemas, a gente foca nas características, se identifica alguma característica diferente entre eles ou até semelhante.*

A professora demonstra não entender que o conteúdo matemático Combinatória é composto por quatro tipos de problemas combinatórios: *produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*, não conseguindo identificá-los. Rocha (2011) acredita que a experiência dos professores em um nível de ensino no qual a Combinatória não é trabalhada tanto como no Ensino Médio, pode fazer com

que o professor não se preocupe em denominar e empregar a nomenclatura usual.

Contudo, entendemos o mais importante não é, necessariamente, saber denominar os tipos de problemas, mas, sim, entender seus *invariantes* e características, pois cada *situação* dessas exige uma forma diferente de raciocínio. Entretanto, nesse momento, percebemos que, além de não saber denominá-los, as características que os diferenciam parecem não estar suficientemente claras.

A partir dos mesmos problemas combinatórios utilizados no momento anterior, foi solicitado que a professora identificasse as características que dão sentido ao conceito – *invariantes* – de cada problema apresentado.

A seguir, apresentamos a análise do conhecimento da professora com relação aos *invariantes* dos problemas combinatórios.

P: *A primeira dos porta-retratos [permutação] é que quer saber de quantas formas diferentes pode colocar de lado. Esse primeiro você quer que eu compare com outro daqui mesmo, né?*

E: *É.*

P: *Esse parece demais com o último [produto cartesiano].*

E: *O quarto?*

P: *Isso. Que também quer saber... [começa a ler o problema de produto cartesiano]... No caso os dois primeiros com os dois últimos. O primeiro [permutação] com o segundo [combinação] e o terceiro [arranjo] com o quarto [produto cartesiano]...têm características parecidas.*

E: *E a diferença entre eles?*

P: *Com os dois que eu já comparei ou com os quatro?*

E: *Da maneira que você quiser...*

[a professora fica pensando]

P: *Esse aqui, o quarto [produto cartesiano], a gente vê que eles querem contar os pares, então vai trabalhar probabilidade aí, né...as possibilidades, quantos pares vão poder formar. Já o terceiro [arranjo] eles querem saber de quantas formas diferentes poderemos ter o 1º e 2º colocado na votação. Quais formas esse tipo de votação? Aqui ele vai pensar numa forma que vai ser essa votação. O segundo [combinação] tá muito parecido com a terceiro [arranjo] mesmo...eu já to mudando [risos].*

E: *Você pode ler e reler, e mudar se achar necessário...*

P: *O segundo [combinação] é parecido com o terceiro [arranjo]...eles vão pensar numa forma de resolver o que tá sendo solicitado. De quantas formas vamos ter as duas sorteadas. Oh, tá vendo, todos dois estão pensando numa forma de tentar resolver... E a primeiro [permutação] não está muito parecido com nenhuma de baixo, porque ele já tá com o quadro e vai ver como pode colocar uma do lado da outra...mais tranquila. É parecido com a última [produto cartesiano], mas é mais tranquila.*

Vemos, assim, que a professora consegue perceber alguns *invariantes* contidos nestes tipos de problemas, mesmo que não claramente. Percebe-se também que a docente conseguiu encontrar um *invariante* do problema de *arranjo*,

ao compará-lo ao problema analisado anteriormente, no caso, de *combinação*, contudo, acredita que essa semelhança está no enunciado da questão, ao solicitar as diferentes formas de obter o resultado, o que não condiz com o *invariante* da ordem. Entretanto, acreditamos que intuitivamente a professora possa ter percebido algo relacionado à escolha dos elementos (característica comum entre *arranjo* e *combinação*), sem, entretanto, conseguir explicitar oralmente essa percepção.

5.2.2 Conhecimento Didático do Conteúdo da Combinatória

De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), o *conhecimento didático do conteúdo* preenche o conhecimento do conteúdo e da prática, unindo esses dois campos. Tais autores ainda destacam que, dentro desse conhecimento podemos encontrar alguns subdomínios: conhecimento do conteúdo e os alunos, conhecimento do conteúdo e seu ensino e o conhecimento do conteúdo e o currículo. Contudo, neste estudo, não temos a intenção de analisar tais domínios isoladamente, e sim, observando-os como elementos integrantes do *conhecimento didático*.

5.2.2.1 Nível de dificuldade dos problemas combinatórios

Nesta fase da entrevista, investigamos os saberes matemáticos e didáticos do professor com relação ao tema Combinatória e, assim, tentamos entender como a professora pesquisada compreende e procede com relação ao ensino de Combinatória nos anos iniciais, especificamente, no segundo ano do Ensino Fundamental.

A professora em questão ainda analisou tais problemas a partir de seu nível de dificuldade, destacando os problemas de *arranjo* e *combinação* como sendo os mais difíceis para que seus alunos (2º ano do Ensino Fundamental) resolvessem e o de *permutação* como o com menor grau de dificuldade. Contudo, estudos anteriores como o de Pessoa e Borba (2009; 2010), Correia e Oliveira (2011) e Azevedo e Borba (2012) apontam os problemas de *permutação* como o de mais difícil resolução e os problemas de *produto cartesiano* como sendo o de mais fácil resolução, para os alunos dos anos iniciais de escolarização.

E: Dentre esses problemas, quais você acha que seus alunos teriam maior dificuldade?

P: *Eu vou dizer que são as duas do meio... [referindo-se ao arranjo e à combinação].*

E: As que você achou parecidas?

P: *É...*

E: E maior facilidade?

P: *A primeira [permutação].*

E: Por quê?

P: *Porque quando a quantidade tá menor pra eles, vai ser mais fácil.*

Apesar de a docente acreditar que o problema de *permutação* seria o mais fácil para seus alunos resolverem, em sua fala, não fica claro se ela relaciona esta facilidade aos *invariantes* contidos neste tipo de problema, ou pela grandeza numérica relacionada à quantidade de elementos que o problema apresentava.

Em outro momento da entrevista inicial, ao apresentarmos protocolos de resolução de problemas combinatórios por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a docente muda a ideia explicitada anteriormente e acredita que os problemas de *arranjo* (Figura 02) são os que apresentariam maior dificuldade para seus alunos e os problemas de *produto cartesiano* (Figura 03) seriam mais fáceis para seus alunos resolverem, apontando este problema como já trabalhado por ela em sala de aula.

Figura 02: Protocolos de resolução - *arranjo*

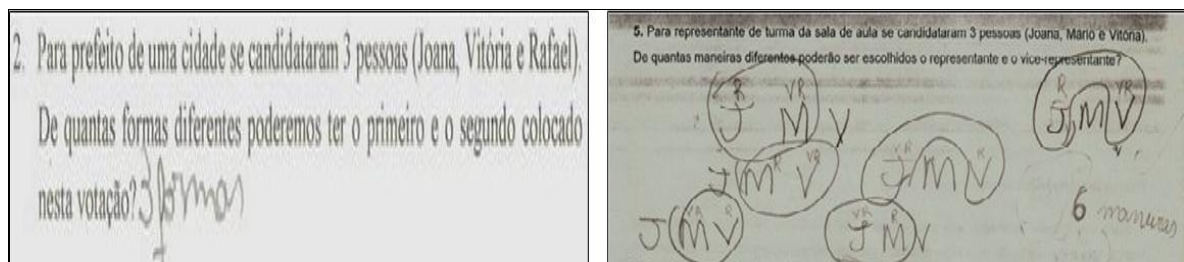
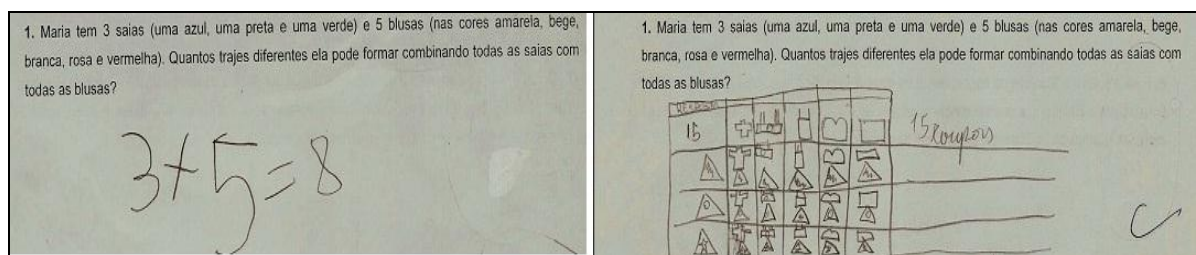


Figura 03: Protocolos de resolução de aluno - *produto cartesiano*



E: Se fosse pra eleger um desses qual você escolheria para ser o mais difícil?

P: *Estes daqui [Figura 02] que seriam os problemas mais difíceis, menos concretos pra eles.*

E: E os mais fáceis?

P: *Esses da roupinha, dependendo da criança, eles podiam desenhar. Eu já trabalhei com esse, aí eles desenharam.*

E: Então seriam estas [referindo-se aos protocolos dos problemas de arranjo] as de maior dificuldade, e esses das roupas [Figura 03] seriam uma das mais fáceis, porque eles poderiam desenhar...

Ao relacionarmos a fala da docente com o momento anterior, percebe-se que, ao longo da entrevista, sua opinião vai mudando quanto aos problemas de mais fácil resolução por seus alunos, verificando, agora, o problema de *produto cartesiano* como o mais fácil, agora em acordo com os resultados obtidos em pesquisas anteriores.

Ball e colaboradores (2008) destacam que o professor ter condições de antecipar as possíveis dificuldades que seus alunos encontrarão são características do conhecimento do conteúdo e seus alunos, domínio este que faz parte do *conhecimento didático*.

Percebe-se também no extrato acima o saber da experiência destacado por Tardif (2008) e que, para Shulman (2005), é uma das fontes da *knowledge base*. De acordo com Rocha (2011), este saber ajuda na consolidação do conhecimento da Combinatória, ou seja, a docente destacar o desenho como uma *representação* viável para seus alunos parte justamente desse conhecimento.

5.2.2.2 O ensino da Combinatória nos anos iniciais

Neste momento, houve uma análise com relação ao conhecimento do currículo, destacado por Shulman (2005) como sendo um dos elementos necessários para a docência, o qual reflete sobre os dizeres dos documentos oficiais e livros didáticos. Ball et al (2008) denominam este domínio como conhecimento do conteúdo e o currículo, contudo, como explicitado acima, reconhecemos tal domínio como integrante do *conhecimento didático*. Em se tratando do conteúdo específico da Combinatória, os PCN (BRASIL, 1997), indicam o ensino deste conteúdo desde os anos iniciais.

Curi (2004, 2005 e 2006) ainda aponta em seus estudos a necessidade de haja uma reflexão na formação inicial dos professores sobre os currículos propostos para o ensino.

Sobre sua prática docente com relação ao ensino do conteúdo de Combinatória, observamos que a docente acredita ser possível trabalhar a Combinatória desde a Educação Infantil, e, em seguida, ainda ressalva que este trabalho pode ser iniciado com o uso do *produto cartesiano*, no qual apresenta um exemplo clássico desse tipo de problema, o conjunto de roupas.

E: Você acredita que esse conteúdo pode ser trabalhado desde que ano?

P: *Ahh...desde cedo. Hoje, eu como professora, percebo que pode começar desde muito cedo, dá pra começar com Educação Infantil, justamente com essas questões de “ela usou quatro roupinhas de palhaço”. Então trabalhar o número de possibilidades, quantas combinações podem ter.*

No entanto, em outro momento da entrevista, ao indagarmos sobre o ensino da Combinatória em suas turmas, a professora parece entender que não há como trabalhar com os demais tipos de problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental:

E: Você já chegou a ensinar pras suas turmas esse conteúdo?

P: *Só dessa forma que eu falei pra você, até porque minhas turmas são até o 2º ano, não tenho turmas maiores.*

A partir das falas explicitadas acima, podemos compreender que a docente faz referência a um tipo de problema combinatório (*produto cartesiano*). Pode-se, assim, fazer a inferência de que há a possibilidade deste tipo de problema ser o único trabalhado em sala de aula, sem contemplar os demais. Percebe-se, então, a ideia de que o problema que dá para ser trabalhado nos anos iniciais é o de *produto cartesiano*.

Com essa afirmação, destacamos também o planejamento elaborado pela professora durante a entrevista, no qual contempla apenas uma situação de *produto cartesiano*. Como este é o problema combinatório mais comumente e explicitamente explorado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, possivelmente a professora se baseou nessa experiência para construir seus argumentos. Para Tardif (2008) e

Gauthier (1998), os saberes experienciais fazem parte da base dos saberes necessários à docência. Tardif dá ênfase a esse saber, acreditando que eles passam a existir na e pela prática, os quais são atrelados na construção da habilidade docente.

Em relação ao ensino de Combinatória nos anos iniciais, estudos recentes mostram que é possível trabalhar este conteúdo, e seus diferentes tipos de problemas, com os alunos. Pesquisas como as de Pessoa e Santos (2011), Azevedo, Costa e Borba (2011) e de Pessoa e Borba (2010) mostram que o ensino da Combinatória é viável com alunos desde os anos iniciais, e ainda, pesquisadoras como Matias, Santos e Pessoa (2011) em estudo realizado com alunos da Educação Infantil destacam a possibilidade de compreensão dos *invariantes* do *arranjo* pelos alunos pesquisados. Concluiu-se que mesmo na Educação Infantil os alunos são capazes de estabelecer ricas e interessantes relações para a resolução de problemas combinatórios. Pessoa e Borba (2012) também puderam verificar que alunos da Educação Infantil já conseguem identificar alguns dos invariantes combinatórios. Destaca-se, ainda o estudo realizado por Barreto, Amaral e Borba (2007), o qual analisa livros didáticos dos anos iniciais e o manual do professor, que mostra que os diferentes problemas combinatórios são abordados nos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, sem, no entanto, haver uma discussão com o professor, nem no manual nem nas orientações ao longo do livro, de que se trata de problemas diferentes e como tal devem ter um olhar mais cuidadoso.

5.2.2.3 *Desempenho e representações simbólicas de alunos dos anos iniciais*

Neste momento da entrevista, foi solicitado que a docente refletisse sobre alguns protocolos¹⁵ de resolução de problemas combinatórios por alunos, a fim de que ela analisasse, a partir dos protocolos, o desempenho (acertos e erros) e *representações simbólicas* de alunos com relação à Combinatória.

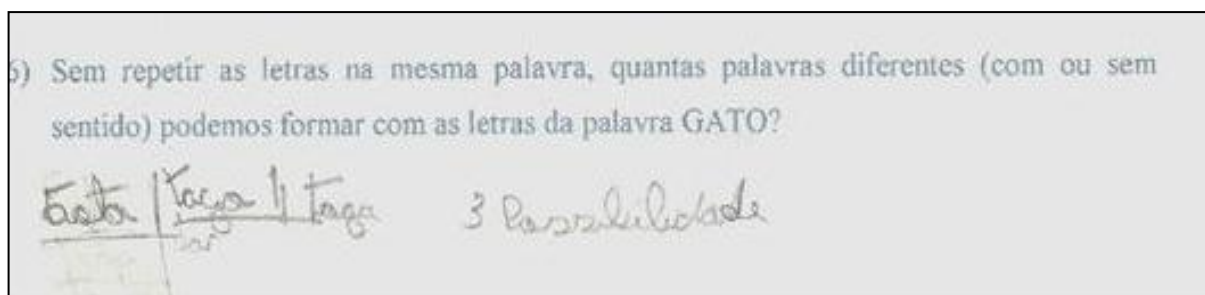
Buscando-se lançar um olhar sobre o *conhecimento didático do conteúdo* da Combinatória da docente, a análise foi realizada a partir dos acertos e erros cometidos por alunos, assim como as dificuldades que poderiam ter causado este

¹⁵ Protocolos de pesquisas anteriores.

erro e prováveis caminhos que poderiam ser trilhados para ajudar tais alunos a progredirem, que, de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), são propriedades intrínsecas ao conhecimento do conteúdo e os alunos. Durante esta fase da entrevista, a docente ainda analisou as estratégias que os alunos utilizaram.

A seguir, apresentamos os protocolos analisados na entrevista inicial e as sinopses da análise realizada pela docente com relação aos possíveis erros dos alunos.

Figura 04: Protocolo de resolução de aluno – *permutação – listagem, com acerto parcial*



Pessoa e Santos (2012b)

P: Ele utilizou as letras da palavra, mas formou outras palavras, mesmo com sentido ou não, mas ele formou.

E: Você acha que o raciocínio dele foi certo?

P: Foi sim.

A professora percebe que o aluno utilizou-se da troca de letras para responder a *situação de permutação*, e listou algumas possibilidades, mesmo que não esgotando todas as possibilidades, acreditando que este foi um raciocínio válido, o que condiz com as análises realizadas pelas autoras do estudo no qual foi analisado este protocolo inicialmente (PESSOA e SANTOS, 2012b).

Percebemos na Figura 04 que o aluno, apesar de não esgotar todas as possibilidades, parece perceber os *invariantes* deste tipo de problema combinatório. De acordo com Pessoa e Santos (2012b), o aluno, além de utilizar todos os elementos fornecidos, modifica a ordem na qual eles são apresentados.

Figura 05: Protocolo de resolução de aluno – *produto cartesiano – relação um a um, com estabelecimento de relação correta*

Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?

8 JUNTANDO 4 BLUSAS E 4 SHORTS

Pessoa e Santos (2012b)

P: Quantos conjuntos... pronto, aqui não tá certo não. Ele quer saber quantos conjuntos, ele quer saber o número exato.

E: Aí você acha que essa resposta dele foi solta? Ou o quê?

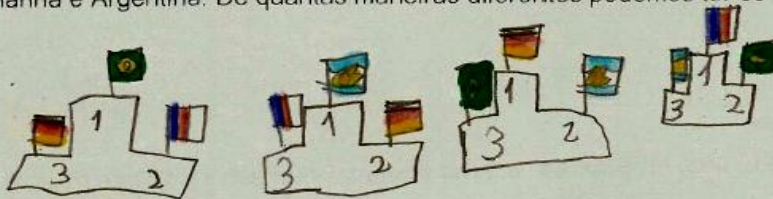
P: Não, não é que foi solta. Ele tentou...tentou. 4 blusas e 4 shorts, mas não chegou no que o problema tá pedindo.

Conseguimos inferir que a docente acredita que o aluno não tenha completado o raciocínio durante a resolução da situação-problema apresentada, contudo, não realiza maiores análises sobre sua estratégia e o raciocínio utilizado pelo aluno.

Verifica-se, em acordo com Pessoa e Santos (2012b), que a relação um a um está presente no protocolo da Figura 05, tendo em vista que, possivelmente, tal criança teve a percepção de que havendo disponíveis quatro shorts para a formação dos conjuntos de roupa, seria possível uni-los a quatro blusas e formariam os conjuntos de roupas possíveis, não podendo os mesmos shorts formarem conjuntos de roupas com diferentes blusas.

Figura 06: Protocolo de resolução de aluno – *arranjo – desenho, com acerto parcial*

3. As quartas de final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?



Pessoa (2009)

P: *Esse aqui também pensou direitinho. Esse aqui tá legal, ele fez bem direitinho, no concreto... não é que é concreto, mas ele desenhou pra compreender... A gente vai indo aí fica com vontade de voltar...*

E: A gente volta, tem problema não. Quer voltar?

P: *Não, não...*

E: Tem certeza?

P: *Tenho, é que a gente vai vendo, aí vai lembrando...*

A professora reconhece, inicialmente, o desenho como uma representação válida para o aluno utilizar-se na resolução do problema, o que está em acordo com as inferências realizadas por Pessoa (2009) em sua tese, que ressalta que, apesar do aluno não acertar a resposta, apresenta interessante estratégia de resolução, demonstrando que compreendeu o que é solicitado no problema.

Contudo, a docente pesquisada não faz maiores análises sobre os possíveis erros ocorridos na resolução do aluno. Rocha (2011) ressalta que a falta de um conhecimento sistematizado acerca da Combinatória pode levar o professor a ter dificuldades em analisar as estratégias utilizadas pelos alunos.

É importante ressaltar que, novamente, há um possível aprendizado pela docente durante a entrevista inicial, na qual a mesma vai revendo suas respostas, fato que é possível de ser observado em suas falas quando faz menção a voltar a questões anteriores, como se tivesse conseguido perceber questões não percebidas antes.

Quando questionada sobre como poderia ajudar os alunos a progredirem, a docente dá a solução a partir do uso do material manipulável como uma ferramenta que poderá vir a facilitar a aprendizagem do aluno.

E: Para esse conteúdo, a Combinatória, quais recursos você acredita que poderiam estar sendo utilizados pra ajudar no ensino?

P: *Que tipos de recursos?*

E: Recursos metodológicos.

P: *Assim, inicialmente, se minha turma é uma turma de 2º ano, mas é um nível de alfa, 1º ano, então procuro trabalhar combinações até com números mesmos. Se tá ensinando de 1 até 100, de 20 a 30, se eles compreendem que tem uma sequência, será que eles vão compreender também de 1 a 100? É uma questão de combinação também, né? Eles vão identificando... não só isso, mas tem outros recursos também: tem tampinhas de cores diferentes, formas geométricas... aí a gente vai pensando, dentro da rede pública, trabalhar com eles. Porque é bem diferente.*

Inicialmente, inferiu-se que a docente não tinha clareza quanto ao conteúdo, ao relacioná-lo com outros que não cabiam, ao relacionar o ensino da Combinatória com as formas geométricas. Contudo, mais adiante, na primeira observação de aula, iremos verificar que a docente utilizou-se de duas formas geométricas para auxiliar no ensino da Combinatória, especificamente, o *produto cartesiano*, sendo assim, acredita-se que a professora reconhece as formas geométricas como uma possibilidade para contextualização de *situações* combinatórias. No entanto, acreditamos que qualquer outro objetivo ou forma poderia estar contextualizando situações combinatórias.

Em outro momento da entrevista, a professora reafirma que para a sua turma (alunos do 2º ano do Ensino Fundamental), o uso do material manipulável é fundamental como uma forma de *representação simbólica* para o ensino e a aprendizagem da Combinatória, o que condiz com estudos anteriores (ASSIS e PESSOA, 2013a e 2013b), os quais apresentam professoras dos anos iniciais que também reconhecem este recurso como um bom meio para o ensino deste conteúdo.

E: Você acredita que seus alunos resolveriam como esses problemas? Se você desse pra eles, ou lesse pra eles, como seria?

P: Se não fosse no concreto, acho que não seria não. Eu teria que trazer mesmo o material pra eles.

Apesar de em alguns momentos a professora reconhecer o desenho (Figura 06) e a listagem de possibilidades (Figura 04) como alternativas válidas de *representação simbólica*, quando pensa no trabalho com seus alunos (quando cita seus alunos do 2º ano), pondera exclusivamente, durante a entrevista inicial, a possibilidade do uso do material manipulável. Borba (2010) ressalta que é importante aproveitar as estratégias espontaneamente desenvolvidas pelos estudantes durante o processo de ensino e aprendizagem, além de utilizar-se de diferentes *representações* durante esse processo.

Vemos, assim, que atividades com o uso deste tipo de recurso é viável. Guirado e Cardoso (2007) apontam que mesmo que esse conteúdo seja trabalhado com maior ênfase no Ensino Médio, ele pode ser inserido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental através do material manipulável em consonância com

esquemas, tabelas, diagramas ou desenhos. Pesquisa realizada por Santos, Matias e Pessoa (2011) revela que o uso deste material viabiliza o ensino da Combinatória, especificamente para alunos dos anos iniciais. As autoras ressaltam a importância de trabalhar com o material manipulável esses conceitos que formalmente não são trabalhados na Educação Infantil. Ainda é enfatizado que o uso do material pode contribuir para auxiliar na construção dos conhecimentos matemáticos da criança, e com relação aos problemas combinatórios trabalhados, perceberam que o material manipulável e os enunciados tratando de algumas situações cotidianas dos alunos, contribuíram para a percepção dos *invariantes*.

5.2.2.4 Compreensão do desenvolvimento do Raciocínio Combinatório

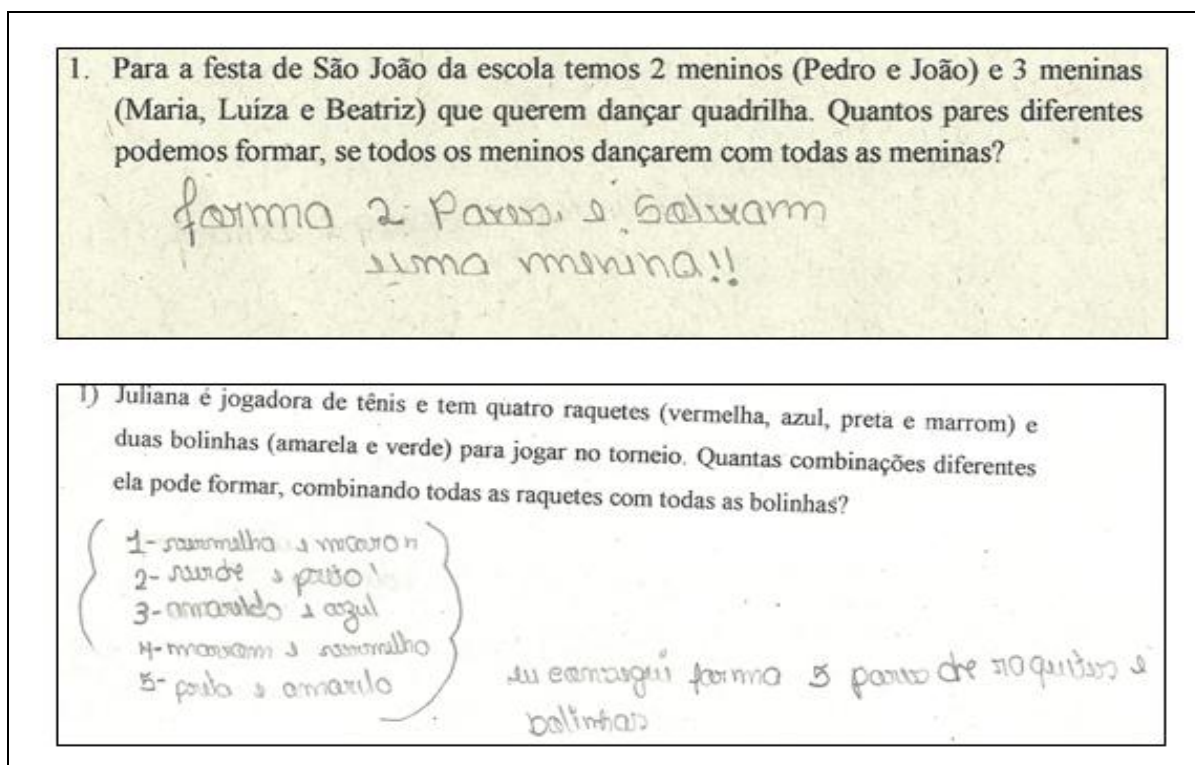
Nesta etapa da entrevista, a fim de analisar as perspectivas do professor sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, solicitamos que a docente analisasse os protocolos dados, uma vez que os alunos representados pelos exemplos abaixo participaram do estudo de Pessoa e Santos (2012b), no qual os alunos resolveram um pré-teste, participaram de duas intervenções, nas quais foram ensinados problemas de Combinatória para eles, e um pós-teste. Para a análise, foram entregues quatro exemplos de alunos, dentre os quais destacamos dois protocolos nas figuras a seguir.

Para avaliar o desenvolvimento dos alunos, a professora em questão necessita ter o conhecimento da Combinatória, ou seja, compreender a *situação* dos problemas combinatórios e, principalmente, ter a noção dos *invariantes* que assemelham e diferenciam cada uma dessas *situações* (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*). Além disso, precisa valorizar as distintas *representações* que seus alunos poderão utilizar para resolver os problemas e, sobretudo, saber valorizar acertos parciais¹⁶.

Inicialmente, foram entregues protocolos de resolução de *produto cartesiano* do Aluno A, a fim de que a docente analisasse-os quanto ao possível desenvolvimento do raciocínio combinatório deste aluno, após intervenções.

¹⁶ Estamos considerando como *acertos parciais* aqueles em que os alunos não chegam ao resultado final correto, mas demonstram compreender através de qual caminho ele pode resolver o problema, seja esse caminho uma listagem, uma árvore de possibilidades, um desenho, uma conta ou outro tipo de representação que demonstre certo tipo de compreensão, através dos quais eles enumeram uma ou algumas possibilidades.

Figura 07: Protocolo de resolução de pré-teste e de pós-teste do Aluno A para auxiliar nas análises do desenvolvimento do raciocínio combinatório – *produto cartesiano*



Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)¹⁷

A professora em questão analisou os dois protocolos (pré-teste e pós-teste) realizando a relação entre eles.

P: *Esse primeiro ele teve uma melhoria, embora não tenha chegado na resposta correta.*

E: *O que seria essa melhora dela?*

P: *Ela conseguiu compreender que era uma combinação mesmo... juntou vermelha com marrom...mas ela também juntou raquete com raquete e não com bolinhas. Assim, ela não compreendeu, fez uma mistura... fez raquete com raquete, bolinha com raquete...mas ela conseguiu fazer uma combinação, o que não tinha feito antes.*

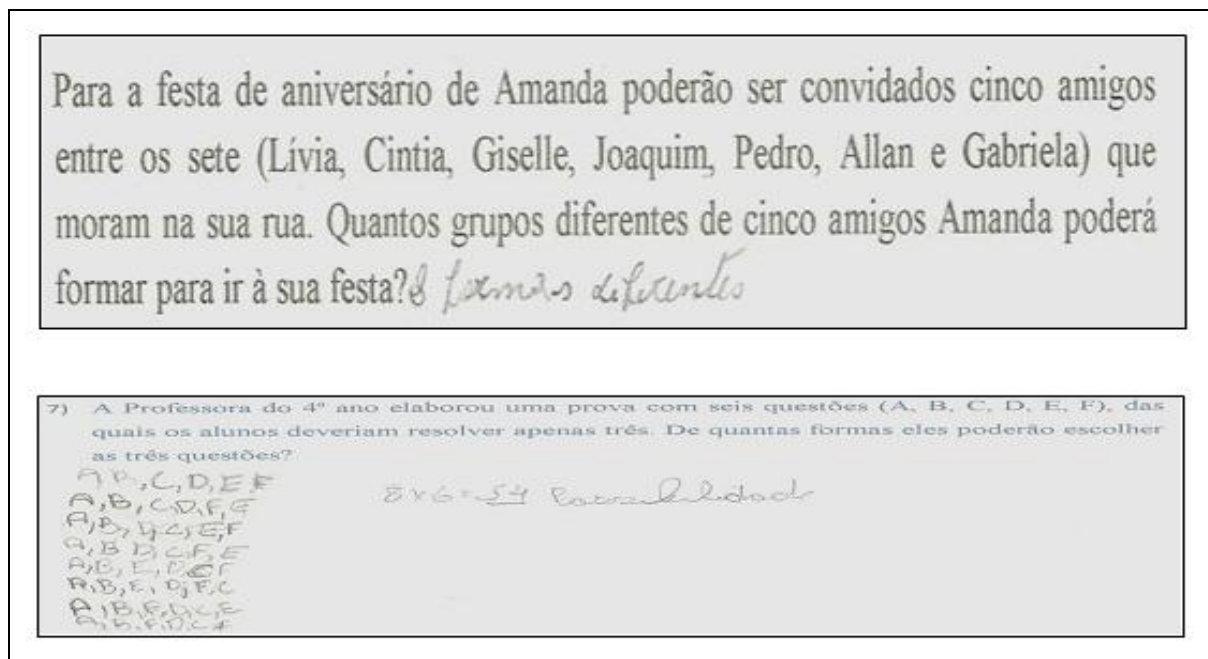
Ao analisar os protocolos do aluno A quanto ao seu desenvolvimento do raciocínio combinatório, a professora apreende que o aluno teve uma melhora após as intervenções, contudo, percebe que o mesmo não obteve um acerto total, uma vez que repetiu elementos de um mesmo conjunto.

Destacamos também as análises realizadas a partir dos protocolos do Aluno

¹⁷ Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

B quanto ao seu desenvolvimento do raciocínio combinatório em problemas de arranjo.

Figura 08: Protocolo de resolução de pré-teste e de pós-teste do Aluno B para auxiliar nas análises do desenvolvimento do raciocínio combinatório – *combinação*



Pessoa e Santos (2012b)

P: Aqui ele também já fez a combinação...saiu colocando, mas eu não entendi porque ele colocou a b c d e...ele repetiu várias vezes e depois multiplicou 6 por 8... ele também conseguiu compreender, mas não chegou não.

E: O que você acha que está faltando aí?

P: Eu não entendi por que ele pegou 8. Foram 8 vezes que ele repetiu, mas porquê ele repetiu?

E: Você acha que houve melhora?

P: Acho, porque ele conseguiu compreender que era de multiplicação, mas não usou a estratégia correta.

É importante ressaltar que a professora ao utilizar o termo combinação, ao analisar um problema de *combinação*, não está fazendo menção à *situação* combinatória ali existente, mas, sim, às diferentes possibilidades de combinações que o aluno poderia fazer.

Conseguimos inferir que a docente fica em dúvida quanto à resolução do aluno no pós-teste, verificando que o aluno não obteve êxito em sua resolução. Não podemos afirmar, mas acreditamos que a professora reconheceu os *invariantes*

contidos nos problemas de *combinação* e, por isso, mesmo que não explicitamente, a dúvida quanto à estratégia utilizada pelo aluno. No entanto, a professora reconhece os protocolos apresentados como problemas de estruturas multiplicativas. Apesar de a professora admitir que houve avanço ao comparar a resolução do pré-teste com a do pós-teste, parece que ela não valoriza a listagem realizada pelo aluno, o que foi, na verdade, um avanço. Além disso, não percebe que houve uma tentativa de generalização pelo aluno ao listar oito possibilidades fixando a letra A e tentar generalização de oito possibilidades para cada uma das seis letras, quando faz $8 \times 6 = 54$.

5.2.2.5 *Planejamento de aula sobre Combinatória*

Ao longo do estudo foram elaborados ao todo quatro planejamentos de aula, sendo um na entrevista inicial, dois durante o processo de formação (quarto e sexto encontro) e um na entrevista final.

Sendo assim, ao término da entrevista inicial foi solicitado à professora que realizasse um planejamento de aula referente ao conteúdo ali tratado, no caso, a Combinatória. A docente teve o tempo livre para a construção de tal plano.

Acreditamos que a construção de um plano de aula que contemple as *situações, invariantes e representações simbólicas* irá facilitar o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória. Entendemos também que a elaboração de planejamentos faz parte do *conhecimento didático* do professor.

Como já apresentado no início desta análise, pôde-se observar que a ideia de Combinatória ainda é vaga para a Professora, e, apesar de inferirmos que houve aprendizagem durante a realização desta entrevista, no plano de aula elaborada pela docente não fica clara a ideia da Combinatória.

Para a construção foi dado um modelo de plano, no qual continham os seguintes campos: Tema da aula, Conteúdo, Objetivos, Procedimentos, Tempo, Recursos utilizados e Avaliação. Ainda era solicitado que a docente identificasse a qual ano escolar esse plano seria destinado, no caso desta docente, o 2º ano do Ensino Fundamental.

Na elaboração do plano, a docente destacou como conteúdo a ser trabalhado a *Possibilidade*. Santana e Borba (2012) afirmam que o ensino da Probabilidade,

que inclui, dentre outras coisas, o levantamento de possibilidades, pode promover o desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, como a Combinatória. Contudo, a docente não deixa claro nos objetivos e nos procedimentos o que, especificamente, de possibilidade seria trabalhado na aula.

Figura 09: Planejamento elaborado pela professora – *Entrevista Inicial*

TEMA DA AULA		OBJETIVOS	
Análise Combinatória		Perceber o número de possibilidades de um conjunto de formas geométricas. / Ou Perceber o número de possibilidades de uma determinada situação-problema.	
CONTEÚDO	TEMPO	PROCEDIMENTOS	RECURSOS UTILIZADOS
Possibilidade	2 aulas de 45 min.	→ Problematizar com os alunos um determinada situação-problema envolvendo o conteúdo trabalhado. → Em seguida verificar como os alunos desenvolvem o trabalho na sala de aula. → Levar aos alunos material concreto p/ que se resolva o problema com mais segurança e tranquilidade.	Lamparina de garrafa de vários cores – 4 tipos de formas geométricas: triângulo, quadrado, círculo, retângulo
AVALIAÇÃO			
→ Verificar como os alunos tentaram resolver em o problema antes do material concreto e depois do material concreto. → Perceber se o aluno chegou a compreender a resolução do problema solicitado.			

A partir do que podemos perceber no planejamento da professora, não podemos afirmar que este estivesse relacionado à Combinatória, uma vez que não há menção ao trabalho com nenhuma situação combinatória.

5.3 Conhecimento Docente – Processo de Formação Continuada

5.3.1 Primeiro encontro do processo de formação – situações e invariantes combinatórios

Achamos relevante realizar e trazer as inferências do processo de formação com todas as professoras atuantes nos anos iniciais do Ensino Fundamental da escola, uma vez que as trocas e discussões ocorridas em sala contribuíram para o conhecimento da docente aqui pesquisada e analisada.

As professoras participantes do encontro serão aqui identificadas como P, P1, P2, P3, P4 e P5, sendo P a professora pesquisa por este estudo.

Durante o primeiro encontro buscamos observar se as professoras demonstravam compreensão ou incompreensão a respeito das *situações e invariantes* da Combinatória. E como essa compreensão ou incompreensão vai se desenvolvendo à medida que o encontro acontece, ou seja, à medida que a discussão ocorre. Especificamente neste primeiro encontro focamos nosso olhar sobre o conhecimento especializado do conteúdo.

Inicialmente, foi entregue às professoras que estavam participando do processo de formação uma lista contendo oito problemas combinatórios, sendo dois de cada tipo, para que fossem resolvidos e separados por semelhanças e diferenças.

Quadro 17: Problemas entregues para análise – *Primeiro encontro do processo de formação continuada*¹⁸

1. Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?
2. Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?
3. Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Laís, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas?
4. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?
5. Maria tem 2 saias (verde, azul) e 4 blusas (bege, cinza, marrom e preta) para ir à festa de aniversário da colega. Quantas possibilidades de conjuntos ela poderá formar, combinando todas as saias com todas as blusas?
6. Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?
7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?
8. De quantas maneiras uma família de três pessoas (Marília, Joana e Pedro) pode sentar-se num banco de três lugares para tirar uma foto?

(Problemas retirados de Santos e Pessoa, 2012 e Pessoa, 2009)

¹⁸ O quinto e oitavo problemas entregues para análise foram construídos pelas autoras dessa pesquisa.

Ao término, coletivamente, fizemos as análises dos problemas. Ao refletirmos sobre o primeiro problema de *produto cartesiano*, que tinha um contexto de dois grupos, sendo um de meninos e outro de meninas, para que todos os meninos dançassem com todas as meninas, questionamos quais grupos eram encontrados no exemplo apresentado e quantas e quais as possibilidades teríamos.

E: Aqui a gente encontra quantos grupos?

[nenhuma professora responde]

E: Dois, né? Quais seriam?

P1: *De meninos e de meninas.*

E Quanto seria a resposta?

P2: *Seis.*

E: Que pares seriam esses?

P3: *Pedro e Maria, Pedro e Luíza, Pedro e Beatriz, João e Maria, João e Luíza e João e Beatriz.*

Ao questioná-las sobre qual o outro exemplo que se assemelhava às características desse, as docentes de imediato souberam apontar.

P: *É o quinto [referindo-se ao outro exemplo de produto cartesiano].*

P4: *É, eles são iguais se for o mesmo raciocínio, mas não dá o mesmo resultado.*

E: Por que é o mesmo raciocínio?

P: *Porque há o grupo de saias, o grupo de blusas e eles vão formar os conjuntos das roupas.*

Quando a P4 e a P reconhecem que os exemplos analisados têm o mesmo raciocínio, percebemos que as docentes percebem os *invariantes* contidos neste tipo de problema, mesmo que não saibam explicitá-los diretamente.

Ao analisarmos o primeiro exemplo de *arranjo*, vemos que há também indícios de percepção dos *invariantes* na fala das professoras:

E: Quanto daria a resposta neste exemplo?

P3: *Seis.*

E: Por que seis?

P3: *Porque 3×2 dá 6. São 3 pessoas e as três vão poder ganhar.*

E: Qual a diferença desse segundo problema para primeiro [referindo-se ao problema de *produto cartesiano*]?

P2: *Não dá pra combinar tudo de uma vez, que nem foi o outro, o menino dançou com as 3. Aqui vai ter que ser de dois em dois.*

Ao questioná-las sobre qual o outro exemplo que tem as mesmas características que o primeiro problema de *arranjo* apresentado, as docentes, ao discutirem entre si, conseguem perceber alguns *invariantes* relevantes neste tipo de problema.

Apesar de perceber os *invariantes*, de acertar a resposta numérica e de perceber que é um problema multiplicativo, a explicação da P3 sobre a resolução do problema se refere a uma multiplicação direta, forma que não resolveria o problema.

E: Qual problema é parecido com esse? *[referindo-se ao primeiro exemplo de arranjo]*

P2: O 6º *[o segundo exemplo de arranjo]*, eu acho...tem representante e vice.

E: Exato! Quais os grupos que ele tem?

P2: *Representante e Vice.*

E: Representante e Vice não seria um grupo, só seria a colocação dentro de um grupo, que seria o de candidatos. E qual seria o resultado?

P5: *Seis.*

Vemos que, apesar da P2 não ter clareza quanto ao *invariante* da escolha, ela reconhece nitidamente o *invariante* da ordem, destacando que a colocação é uma característica importante neste tipo de problema.

Em seguida, discutimos sobre os problemas de *combinação*, os quais as docentes contrastaram com os problemas de *arranjo* discutidos anteriormente para que pudessem obter uma melhor compreensão acerca desta *situação* combinatória.

E: E o terceiro? O que conseguimos identificar nesse?

P2: O terceiro... *[começo a ler o problema]* É a mesma coisa do anterior.

E: Alguém discorda?

P2: *Primeiro e segundo vai ganhar a mesma boneca, mas são só duas que vão ganhar.*

E: É a mesma? Por quê?

P2: *Não, tem diferença, é diferente. É quase a mesma coisa.*

E: Por que é diferente?

P2: *Porque não tem primeiro e segundo...as duas vão ganhar a mesma, todas as duas vão ganhar, não vai ter diferença.*

E: Exato, tem um grupo de meninas que só duas vão ganhar, porém, as bonecas são iguais, não tem questão de prêmio melhor, independente de quem sair primeiro no sorteio. Então qual seria a resposta?

P2: *Seis.*

E: Quais seriam essas possibilidades?

P: *Laís e Cecília, Laís e Jane, Cecília e Laís, Cecília e Jane, Jane e Laís e Jane e Cecília.*

E: *Deixa te perguntar uma coisa, se Laís for sorteada primeiro e Cecília depois, vai ser a mesma coisa que Cecília primeiro e Laís depois?*

P: *É! Não vai ser diferente.*

E: Exato... não vai ser uma possibilidade a mais. Então quais possibilidades dessas podemos retirar dessas listadas?

P: *Laís e Cecília, Jane e Laís e Jane e Cecília.*

P3: *Pros meus alunos vai ter que ser mais fácil, os meus não conseguem não...*

P2: *É só fazer no concreto pra eles começarem.*

P: *Os meus mesmo faço no concreto.*

P: *Oh, então a resposta desse é qual?*

E: Três.

P: *Ahh, então tem que ver, porque se cai num concurso, aí vão pensar logo, $2 \times 3 = 6$. Tem que ter cuidado.*

E: Exato! Não é porque está dentro das estruturas multiplicativas que é só multiplicar.

Pudemos observar que, inicialmente, ao responder o problema de *combinação*, a professora aqui analisada e pesquisada lista as possibilidades como se fosse um *arranjo*, não percebendo que a ordem dos elementos não gerará novas possibilidades, contudo, após ser questionada a partir de uma situação que destacava o *invariante* da ordem no problema, a docente verifica o erro e percebe que nem todos os casos serão novas possibilidades.

A P3 acredita que este tipo de problema não seria possível de ser aplicado com seus alunos de anos iniciais, contudo, outras professoras participantes da formação, entendem que este trabalho pode ser realizado em salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental, porém, com o uso de materiais concretos. Entendemos que este recurso a que se referem seja o material manipulável. Vários estudos (Pessoa e Borba (2009; 2010), Correia e Oliveira (2011) e Azevedo e Borba (2012)) verificaram que o ensino da Combinatória pode ocorrer desde os anos iniciais, com ou sem o uso do material manipulável.

A preocupação da professora em relação à possível dificuldade dos alunos em compreender um problema de *combinação* procede, pois está de acordo com resultados encontrados no estudo de Pessoa (2009), em que alunos dos diferentes níveis da Educação Básica apresentam maiores dificuldades em resolver problemas deste tipo.

Verifica-se, também, que a docente reflete o uso inadequado da multiplicação direta, percebendo que ela não cabe para todas as *situações* combinatórias.

Ao compararmos os problemas de *combinação* dados, as professoras conseguem reconhecer qual que se assemelha e seus respectivos *invariantes*, de escolha e de ordem.

P2: *Se eu ver que não vai alterar a ordem, eu já vou eliminando...*

E: Esse se parece com qual?

P4: *7º [segundo exemplo de combinação].*

E: Qual o grupo que temos aqui?

P1: *Mário, Raul e Júnior...*

E: Perfeito. O grupo de alunos que tem Mário, Raul e Júnior, porém, só dois vão ganhar, cada um, uma bicicleta, que são iguais. Como ficaria, então, esse resultado?

P2: *É três também, porque vai cortar as que repetem.*

Ao analisarmos os problemas de *permutação*, fica nítido que as professoras tiveram maior dificuldade em responder e ponderar as características existentes neste tipo de problema.

E: Nesse quarto, dá quanto?

P5: *Seis.*

P2: *Nove.*

E: Certo, então vamos ver qual está certo *[a formadora/pesquisadora lê o problema]*.

P: *A gente discutiu, mas não ficou claro pra gente.*

E: Então vamos ver, qual o grupo que temos aqui?

P1: *Pai, mãe e irmão.*

E: Certo, então quais as formas que podemos ter esses porta-retratos organizados?

[As professoras – P, P2, P3, P4 e P5 – listam, coletivamente, todas as possibilidades]

P1: *Fiz de outra forma.*

E: Como foi?

[P1 lista todas as possibilidades novamente, porém, sistematizado]

E: Qual a diferença entre as formas de responder?

P: *A forma de organizar.*

E: Exato! Quando você coloca todas as possibilidades de um elemento, e depois passa pro outro, fica mais fácil de visualizar o que falta fazer.

E: O que vocês percebem deste 4º quesito *[referindo-se ao problema de permutação]*?

P: *Ele é parecido com o 2º [arranjo]..*

P2: *Tem o conjunto dos porta-retratos.*

E: Perfeito, ele tem o conjunto dos porta-retratos. E porque ele é parecido com o segundo *[arranjo]*?

P: *Porque ele fez a mesma separação de grupos, não, não... o segundo [arranjo] eliminou uma pessoa.*

E: Oh, cada um tem um grupo, tanto no segundo *[arranjo]* como no quarto *[permutação]*. Acredito que P esteja falando que esse quarto *[permutação]* é parecido com o segundo *[arranjo]* por conta da ordem. Porque aqui a também ordem interfere. É isso?

P: *Isso!*

E: Se eu colocar Pai, Mãe e Irmão vai ser a mesma coisa que Mãe, Pai e Irmão?

P: *Se for falar de elementos, vai; mas se for falar de ordem, não.*

E: Exato, a ordem não é a mesma. A diferença desse problema pros outros, é que você usa todos os elementos do conjunto ao mesmo tempo, numa mesma possibilidade aparecem todos os elementos.

Assim como na entrevista inicial, na qual a P não faz menção a nenhum *invariante* dos problemas de *permutação*, conseguimos inferir que as professoras

participantes, como dito anteriormente, tiveram uma maior dificuldade em analisar os problemas de *permutação*. No entanto, ao compará-los com os problemas de *arranjo*, há indícios de que a P reconhece alguma familiaridade entre eles, mesmo que não saiba explicitar, entretanto, mesmo que não saiba reconhecer claramente o *invariante* da ordem como característica semelhante entre eles, a P percebe o *invariante* da escolha, reconhecendo que, diferente dos problemas de *arranjo*, nas *situações* de *permutação*, nenhum elemento será “descartado”, ou seja, todos os elementos serão utilizados ao mesmo tempo.

Pudemos verificar, já no final do primeiro encontro da formação, que as professoras começaram, também, a refletir a ideia de sistematização das possibilidades, ou seja, a organização da resposta, a partir de uma situação proporcionada por elas mesmas.

5.3.2 Segundo encontro do processo de formação – *produção de problemas combinatórios*

No segundo encontro do processo, buscamos elaborar situações-problema dos diferentes tipos de problemas combinatórios, a fim de que as professoras participantes pudessem se apropriar melhor dos conceitos discutidos no encontro anterior, as *situações* e os *invariantes* combinatórios.

Neste encontro, buscamos analisar, assim como no encontro anterior, o *conhecimento especializado* acerca da Combinatória, através das *situações* e dos *invariantes*, na produção dos problemas combinatórios. A partir dessa produção, foi possível também observar e trabalhar o *conhecimento didático desse conteúdo*, especificamente, o conhecimento do conteúdo e seus alunos, no qual as professoras precisarão pensar em situações prevendo possíveis dúvidas e erros cometidos pelos seus alunos; e o conhecimento do conteúdo e seu ensino, ou seja, exemplos que levem o aluno a progredir. Tais domínios são elencados por Ball e colaboradores (2008) como necessários para a formação docente.

Inicialmente, discutimos coletivamente alguns pontos relevantes que se deve atentar ao elaborar uma situação-problema de Combinatória, sendo eles: o contexto, a explicitação dos elementos dos conjuntos e o cuidado que deve ter com a grandeza numérica.

Após a discussão inicial, pudemos observar que todas as professoras, em duplas, conseguiram criar problemas combinatórios, seguindo os pontos levantados. Destacamos aqui os problemas elaborados pela dupla da professora aqui pesquisada e analisada, P e P2.

Quadro 18: Situações-problema de Combinatória elaboradas por P e P2 – *Segundo encontro do processo de formação continuada*

Produto Cartesiano: Lizandra foi na sorveteria e teve que escolher o sorvete na casquinha ou no copinho. Dentre os sabores, teve que escolher entre morango, chocolate e flocos. Quais as possibilidades que Lizandra tem para formar seu sorvete?

Arranjo: Claudete, Lidiane e Margarethe se candidataram para ser a rainha do milho. Sabendo que quem ficar em segundo lugar será a princesa do milho, e a primeira será a rainha, quais as possibilidades de termos o primeiro e segundo lugar?

Combinação: Cláudia, Lizandra e Claudete participaram da corrida da ladeira. Sabendo que as duas que chegarem primeiro vão ganhar do prefeito um vale-táxi, quais as possibilidades de termos as duas vencedoras?

Permutação: Na frente da escola estão disponíveis três vagas de estacionamento. Apenas três funcionários têm carros (Lidiane, Jéssica e Lizandra). Quais as possibilidades de estacionar em lugares diferentes os três carros?

Percebemos que as docentes (P e P2) conseguiram fazer a relação entre as *situações* combinatórias e seus respectivos *invariantes* e, além disso, tiveram o cuidado em desenvolver exemplos com contextos ligados às suas realidades, explicitaram os elementos e, ainda, propuseram *situações* com grandezas numéricas baixas, como ressaltado anteriormente.

Ao selecionarmos as situações-problema (uma de cada tipo), dentre as elaboradas pelas professoras participantes, que foram aplicadas com seus alunos posteriormente, a P questiona se pode usar o material concreto no momento que for sondar seus alunos quanto às *representações* utilizadas por eles.

P: *Pode usar o concreto? No caso, se fosse a casquinha, aí fazer a casquinha, os sabores, fazendo a pergunta, claro. Porque se eu só lesse, talvez poucos cheguem a fazer o desenho.*

Percebe-se na fala da docente, como no encontro anterior, o interesse pelo uso do material manipulável na resolução de problemas matemáticos de um

modo geral. A docente ainda destaca o desenho como um tipo de *representação* possível para seus alunos, mesmo que não seja, segundo ela, a estratégia mais fácil para eles.

5.3.3 Terceiro encontro do processo de formação – *representações simbólicas*

No terceiro encontro, propusemos analisar as diferentes *representações simbólicas* que podem ser utilizadas para a resolução de problemas combinatórios, assim como, refletir sobre a ideia de sistematização e generalização das possibilidades.

Ainda neste encontro, foi elaborado, em duplas, um planejamento de aula que visasse o ensino da Combinatória.

No encontro anterior, havíamos solicitado que as docentes participantes aplicassem com seus alunos os problemas produzidos e escolhidos por elas mesmas, a fim de que fosse feita a análise das diversas *representações* que surgissem. Contudo, só uma professora (P5) aplicou com uma aluna de sua turma (do 1º ano do Ensino Fundamental). Sendo assim, apresentamos, também, alguns protocolos de pesquisas realizadas anteriormente (Pessoa, 2009; Azevedo, Costa e Borba, 2011).

Inicialmente, foi realizada a análise do protocolo trazido pela P5. Dentre os quatro problemas entregues à aluna, somente o *produto cartesiano* foi resolvido.

A situação-problema em questão era: “Lucas tem dois pares de sapatos (azul e preto) e quatro pares de meia (branca, cinza, amarela e verde). Quantas possibilidades de combinação ele poderá formar juntando um sapato com uma meia?”. A aluna deu como resposta “2 pares” e a P5 conseguiu perceber na resolução de sua aluna a relação um a um, deduzindo que a criança havia relacionado cada par de sapato a um par de meias e não teriam mais possibilidades. Por não termos conversado com a criança, não podemos afirmar que este tenha sido o pensamento dela, contudo, é uma inferência válida e pertinente para este caso. A partir da análise realizada pela docente, percebemos a compreensão acerca do *conhecimento especializado do conteúdo*, no qual, nesta situação apresentada, P5 percebeu que a aluna relacionou os elementos

de um grupo (sapatos) com dois elementos do outro grupo (meias); e, ainda, verificamos o conhecimento do conteúdo e seus alunos, ao realizar a resposta da aluna, alertando sobre possíveis equívocos cometidos.

Em seguida, foram apresentados protocolos de estudos anteriores, os quais continham os seguintes tipos de *representações*: listagem, desenho, árvore de possibilidades, quadro, diagrama, multiplicação adequada e, também, o material manipulável com uma forma de *representação simbólica*.

Foram expostos ainda três protocolos de mesma situação-problema, sendo eles, respectivamente, uma estratégia não sistematizada, uma estratégia sistematizada e o último uma estratégia sistematizada e generalizada, para que as professoras analisassem (Figura 10, Figura 11 e Figura 12).

Figura 10: Protocolo de resolução de aluno – *produto cartesiano* – estratégia não sistematizada

5. Maria tem 2 saias (verde, azul) e 4 blusas (bege, cinza, marrom e preta) para ir à festa de aniversário da colega. Quantas possibilidades de conjuntos ela poderá formar, combinando todas as saias com todas as blusas?

C	B	P	M
A	V	A	V
B	C	M	P
V	A	V	A

8 pares

Figura 11: Protocolo de resolução de aluno – *produto cartesiano* – estratégia sistematizada

5. Maria tem 2 saias (verde, azul) e 4 blusas (bege, cinza, marrom e preta) para ir à festa de aniversário da colega. Quantas possibilidades de conjuntos ela poderá formar, combinando todas as saias com todas as blusas?

VERDE E BEGE, VERDE E CÍNZA, VERDE E MARROM E VERDE E PRETO. AZUL E BEGE, AZUL E CÍNZA AZUL E MARROM

AZUL E PRETA TOTAL 8 PARES

Figura 12: Protocolo de resolução de aluno – *permutação* – estratégia sistematizada e generalizada

8. Quatro torcedores irão para um jogo de futebol (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo). De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar em quatro cadeiras dispostas lado a lado? (*Permutação*)

8 - Renata → Isabel → Luciano → Ricardo

→ Luciano → Ricardo → Isabel

→ Ricardo → Isabel → Luciano

→ Luciano → Ricardo → Isabel

→ Ricardo → Isabel → Luciano

8 - R = 24 Porque $4 \times 3 = 12$

Inicialmente, as docentes perceberam que todos os alunos haviam acertado, mas, a partir das intervenções realizadas, conseguiram perceber o avanço existente no decorrer das estratégias.

E: A primeira criança o que ela fez? Colocou as possibilidades aleatoriamente. Já a segunda criança colocou todas as possibilidades com o primeiro elemento e depois com o outro elemento...

P: *A terceira criança também fez isso, só ficou faltando com o segundo elemento, num foi?*

E: É, mas o que foi que essa criança fez? Fez com um elemento, fixando ele, e percebeu que, se com esse elemento tinha quatro possibilidades, com o outro elemento, já que era um problema de *produto cartesiano*, também teria a mesma quantidade de possibilidades.

P1: *Ela fez esse aí e percebeu logo que não precisava fazer com o outro.*

E: Exato! Isso a criança vai avançando. Claro, com a ajuda da gente. Temos que ajudar muito nesta parte da organização, da sistematização, pra que elas não se percam.

P: *Todos acertaram de alguma forma, mas houve uma evolução, né?*

E: Exato!

Posteriormente, foram respondidas, coletivamente, quatro situações-problema combinatórias, sendo uma de cada tipo, utilizando a sistematização e generalização das possibilidades, a fim de que as docentes pudessem apreender melhor a percepção de regularidade, ou seja, a generalização.

Acreditamos que estes dois primeiros momentos do encontro ficaram cansativos, pois muitos protocolos foram apresentados para análise.

No terceiro momento, houve a organização do planejamento de aula. Para este, foi dado um modelo que não era necessariamente obrigatório preencher todos os campos. Este modelo continha: Tema da aula, Conteúdo, Objetivos, Tempo, Procedimentos, Avaliação e Recursos utilizados. Foi ressaltado ainda que para trabalhar a Combinatória em sala de aula não é interessante começar com os quatro tipos de problemas, sendo indicado que seja iniciado com duas *situações* combinatórias, como, por exemplo, o *arranjo* e a *combinação* ou o *produto cartesiano* e a *permutação*, a fim de contrastarem suas características.

P: *A gente tá pensando em fazer só um pra começar, usar o produto cartesiano pra começar. Pode? Porque a gente acha que vai ser melhor de trabalhar de um em um.*

E: Pode sim, sem problemas. Mas se quiser planejar mais de um, para, caso veja que dá pra trabalhar dois em uma aula, fique à vontade também.

P: *A gente vai falar qual tipo é cada um?*

E: Não, não precisa. É só levar eles a perceberem as características de cada um. Mas se você acha que vai ficar melhor começando só com um, pode sim, não se preocupe.

Assim como Rocha (2011), percebemos que as professoras priorizam o trabalho com problemas de mesma natureza, utilizando-se de diferentes abordagens. No entanto, defendemos, assim como a autora supracitada, que ao longo do ensino da Combinatória, sejam trabalhados os diferentes tipos de problemas.

Vale ressaltar que as professoras não conseguiram terminar o planejamento neste encontro, podendo concluí-lo em outro momento, para entregar-nos no quarto encontro do processo, ou seja, na primeira aula ministrada que seguiria tal planejamento.

Neste trecho da formação, percebemos, mais uma vez, a presença forte do *produto cartesiano* e a preocupação com a nomenclatura a ser utilizada. Como dito anteriormente, o intuito do ensino da Combinatória nos anos iniciais não é levar os alunos a reconhecerem os nomes dos problemas combinatórios, e sim, saber diferenciá-los de acordo com suas características.

5.3.4 Quarto encontro do processo de formação – *observação de aula*

Neste momento voltamos a discutir o processo de desenvolvimento da P. Para o quarto encontro foi elaborado um planejamento de aula pela professora. A construção deste planejamento foi inicialmente realizada no encontro anterior, no qual as professoras participantes tiveram o auxílio da pesquisadora/formadora para a construção. Contudo, por não ter acabado a tempo, foi terminado em outro momento pela P.

Diferentemente do que foi visto no planejamento elaborado na entrevista inicial, este segundo plano teve foco no conteúdo solicitado.

Figura 13: Planejamento de aula elaborado pela professora – Primeira Aula – *Quarto encontro do processo de formação continuada*

TEMA DA AULA		OBJETIVOS	
Análise combinatória		Resolver problemas de multiplicação que envolve relações de combinatória simples mediante diferentes procedimentos,	
CONTEÚDO	TEMPO	PROCEDIMENTOS	RECURSOS UTILIZADOS
Combinatória	50 minutos	Fixar as formas geométricas com três cores diferentes cada forma (quadrado, triângulo das cores vermelha, Amarela e azul) no quadro e lançar a seguinte pergunta: Quantas combinações posso formar com essas formas e cores? Analisar as respostas das crianças e problematizar em cada fala para que o aluno chegue numa solução. A cada solução dada o aluno registrará em forma de desenho para que possa começar a encontrar as soluções e visualizar melhor as possibilidades encontradas. Em seguida fixar em forma de figuras três bolas de sorvetes de sabores diferentes com dois tipos de casquinha diferentes. E lançar a seguinte pergunta: quantas combinações de sorvetes podemos formar se dispomos de 3 sabores de sorvetes e 2 casquinhas?	Papel e lápis e figuras de formas geométricas e de bolas de e casquinha sorvetes.

Percebe-se que a *situação* combinatória a ser trabalhada foi delimitada, o *produto cartesiano*, e que a docente realizou o planejamento utilizando-se do material manipulável e apresentando duas situações-problema de diferentes contextos.

Com relação ao primeiro planejamento elaborado pela professora na entrevista inicial, percebemos que há um avanço importante com relação ao *conhecimento especializado do conteúdo* e o *conhecimento didático do conteúdo*, uma vez que a mesma não demonstrava, no primeiro plano, um conhecimento do que é o ensino de Combinatória e, agora, apresenta um planejamento bem estruturado sobre esses pilares.

Vamos perceber na observação da aula que a P seguiu o que havia planejado, contudo, apresentou ainda uma terceira situação-problema para os alunos, o que fez com que o conteúdo fosse mais bem trabalhado.

Na entrevista inicial, em dois momentos diferentes, a professora cita o uso das formas geométricas como uma alternativa válida para o ensino da Combinatória. Neste segundo planejamento, o uso deste material é citado novamente, contudo, ao analisar o planejamento e observar a aula do mesmo, fica claro que não há uma confusão de conceitos, e sim, que a docente utiliza formas geométricas (triângulo e quadrado) de diferentes cores para formar possibilidades de ‘casinhas’.

Posteriormente, com a análise da aula, ficará mais clara essa ideia.

Durante as observações de aulas da professora pesquisada (quarto e sexto encontro do processo de formação continuada), foram observados três eixos, sendo eles: *a relação da professora com os conhecimentos dos alunos sobre o conteúdo, a relação da professora com o conteúdo Combinatória e os recursos utilizados em sala de aula*. Dentro de cada eixo buscou-se verificar, especificamente, alguns pontos, os quais foram apresentados anteriormente no capítulo referente ao método utilizado no estudo. Neste momento também será realizada a análise do planejamento da aula.

A seguir, apresentamos as análises realizadas a partir da primeira aula observada. Vamos nos referir à primeira aula dada pela professora, que se refere ao quarto encontro proposto no processo de formação, como Aula 1, e a segunda aula, que ocorreu no último encontro do processo de formação continuada, como Aula 2.

Durante a Aula 1, a professora questionou os alunos a todo momento, tentando buscar os conhecimentos que eles já possuíam a respeito do conceito apresentado. Nesta primeira aula, foi abordada a *situação de produto cartesiano*, na qual a docente trabalha tal *situação* em diferentes níveis: (com e sem condição; diferentes grandezas numéricas: 02, 04, 06 e 09).

A Aula 1 foi inicial relembrando alguns conceitos matemáticos, como sequenciação e as formas geométricas. A professora questiona inicialmente quais formas geométricas eram encontradas na bandeira do Brasil, na qual os alunos identificaram o retângulo, o losango e o círculo. Em seguida, a professora avisa que vai trabalhar com o triângulo e uma outra forma geométrica que não está na bandeira do País, o quadrado.

Em seguida, apresenta dois quadrados (um amarelo e um azul) e dois triângulos (um amarelo e um azul), em forma de material manipulável. A professora questiona aos alunos como poderá formar uma casa, utilizando-se dessas formas, contudo, apresenta uma condição ao enfatizar que a casa deverá conter cores diferentes.

O aluno João¹⁹ é chamado ao quadro para tentar resolver o problema apresentado. João coloca o triângulo azul em cima do quadrado amarelo e o

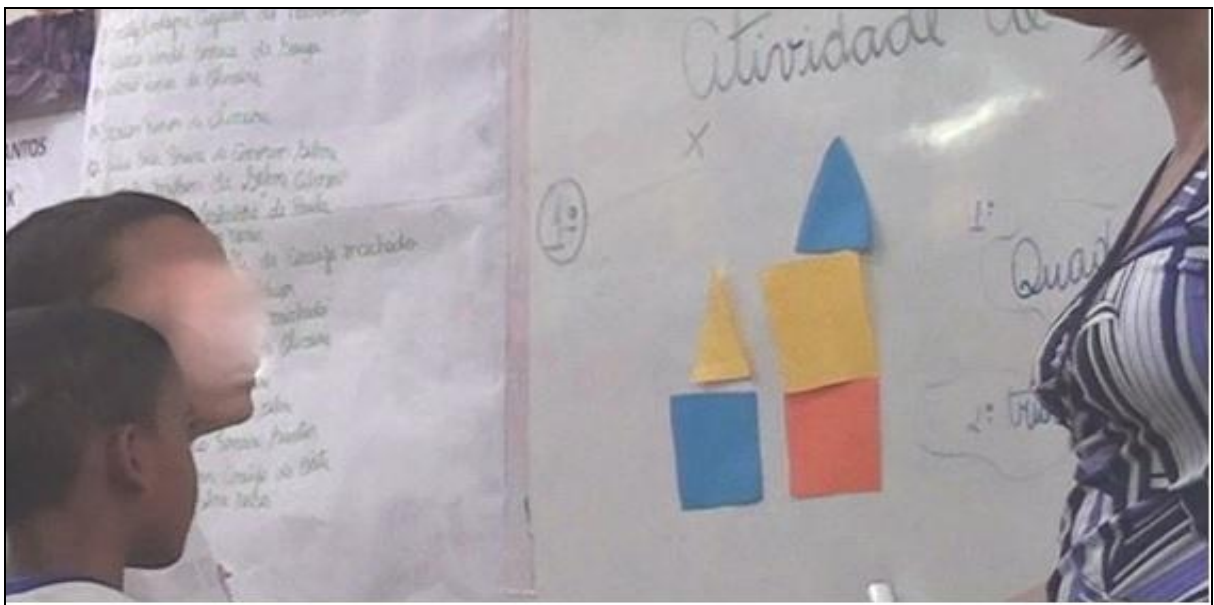
¹⁹ Os nomes aqui utilizados são fictícios, não correspondendo aos nomes verdadeiros dos alunos.

triângulo amarelo em cima do quadrado azul. Em seguida, a professora questiona à turma quantas possibilidades podem, então, formar com essas formas geométricas apresentadas e a turma responde, a partir da resposta de João, que são duas possibilidades.

A seguir, a professora acrescenta mais um quadrado, agora de cor laranja, e questiona à turma: “Eu só fiz aumentar um quadrado, quantas possibilidades ficariam aqui?” – pergunta a professora. Pedro vai ao quadro e inicialmente coloca o triângulo azul em cima do quadrado laranja e o triângulo amarelo com o quadrado azul. A docente resolve realizar o registro no quadro, através da listagem, a partir das possibilidades apresentadas pelos alunos com o auxílio do material manipulável.

Em seguida, a professora questiona: “E aí, ficou aquele quadrado sozinho, o que eu posso fazer?”. Outro aluno se aproxima e tentar fazer uma nova possibilidade, usando dois quadrados e um triângulo.

Figura 14: Possibilidade incorreta realizada por um aluno em uma situação-problema apresentada na primeira aula – *Quarto encontro do processo de formação continuada*



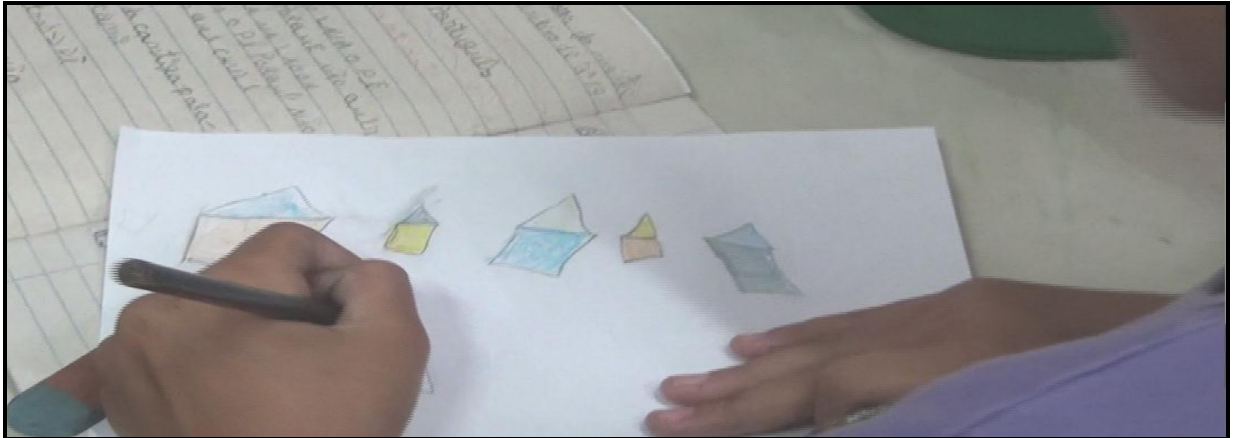
A professora, junto com a turma, informa que não pode, pois só poderia utilizar-se de um elemento de cada grupo, no caso, só poderia utilizar um quadrado e um triângulo por vez. Verificamos aqui que a professora, mais uma vez, ressalta o *invariante* da escolha contido nesta *situação*.

A professora chama Paulo para tentar formar novas possibilidades. Paulo

coloca o triângulo azul com o quadrado amarelo. Em seguida, a professora registra no quadro a terceira possibilidade.

A professora instiga os alunos sobre novas possibilidades, questionando quais seriam as outras possibilidades possíveis. Outra aluna, Ana, vai ao quadro e forma uma nova possibilidade: triângulo amarelo com quadrado laranja. A professora registra no quadro a quarta possibilidade. Em seguida, a docente questiona: “E aí, acabou?”. Todos respondem que sim. Contudo, a docente aparenta não ter certeza de ter finalizado todas as possibilidades possíveis e, a fim de ajudar os alunos a perceberem todas as possibilidades, solicita que eles façam o registro individual através do desenho.

Figura 15: Aluna resolvendo a situação-problema apresentada na primeira aula através do desenho – *Quarto encontro do processo de formação continuada*



Percebe-se que a professora havia apresentado um problema com condição para os alunos, no qual as cores do triângulo e do quadrado não podiam ser iguais na mesma possibilidade. Contudo, ela não compreende, inicialmente, que havia dado esta condição, somente percebeu esta condição depois: “Nós já fizemos as possibilidades que deveríamos, só que a gente tem uma exceção... eu falei no início que a gente não podia usar a cor igual, mas se a gente pudesse usar a cor igual, quantas possibilidades a gente poderia fazer?” – questiona a professora à turma. Os alunos respondem aleatoriamente e a professora vai direcionando, até que descobrem outra possibilidade que faltava: triângulo amarelo com quadrado amarelo. A docente continua instigando os alunos a pensarem as demais possibilidades, até que conclui, encontrando a última possibilidade: triângulo azul com quadrado azul, na qual finaliza o registro realizado a partir da listagem de possibilidades.

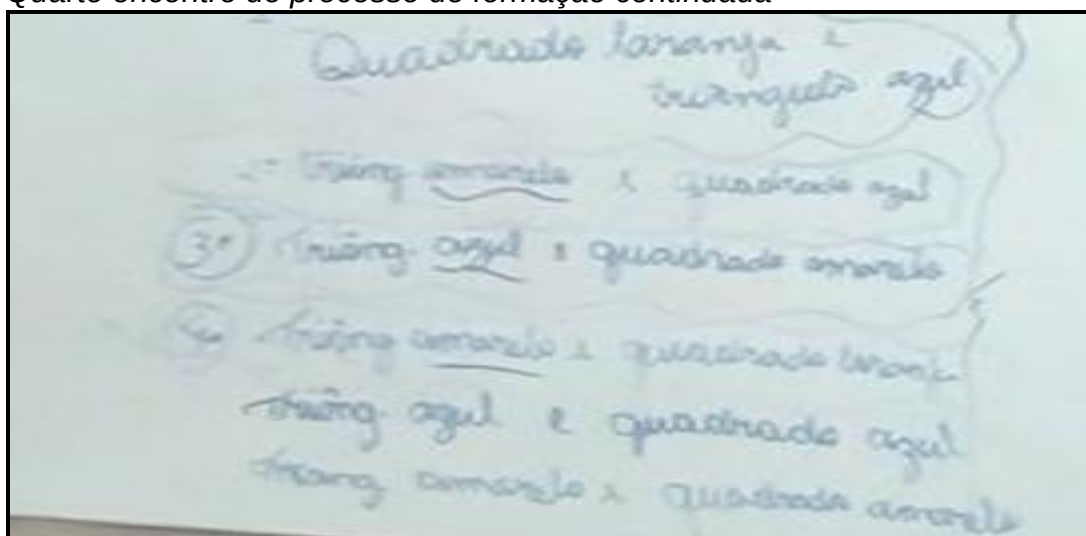
Percebemos aqui que, mesmo tendo construído um planejamento bem feito e demonstrando certa clareza dos *invariantes* da Combinatória, no momento de direcionar a resolução do problema, a professora ainda se complica ao não perceber a condição que ela mesma colocou no problema. Entretanto, um aspecto bastante positivo é que ela própria percebe e reorganiza o problema. Observamos, assim, que há uma aprendizagem, não só dos alunos, mas também da professora ao colocar em prática o que vem sendo discutido. Quando tem a oportunidade de refletir sobre o que está fazendo, sobre as suas ações, poderá desenvolver um trabalho mais bem elaborado e consciente.

Nesse sentido, Schön (2000) e Zeichner (1992) defendem que a formação de professores, seja em qual nível for, deve ser baseada na prática reflexiva, dialogando com seus conhecimentos, experiências e fazeres.

Um aspecto bastante positivo, é que a professora estabelece uma relação entre as formas de *representações* através do material manipulável e o registro dos alunos no papel, o que é positivo, pois permite que o que foi feito fique registrado para reflexões posteriores.

Apesar de não ser o nível de escolaridade que a docente ensina, entendemos que, assim como o RCNEI – Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil (BRASIL, 1998), o registro é uma fonte de informação valiosa, tanto para a criança, durante a aprendizagem, como para o professor, em seu processo de ensino, como também destacado por Toricelli e Grandó (2007), isso porque o registro possibilita recuperar o raciocínio realizado como propor novos encaminhamentos.

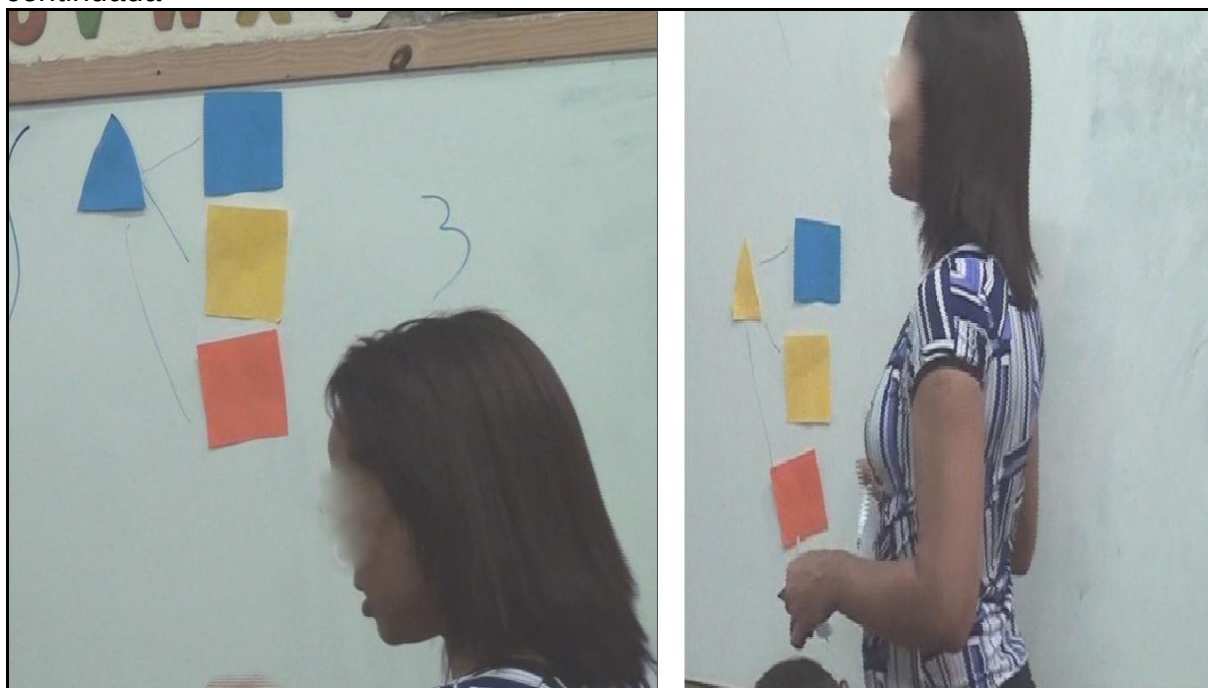
Figura 16: Registro realizado pela professora através da listagem de possibilidades – *Quarto encontro do processo de formação continuada*



Em seguida, após o manuseio do material manipulável pela turma e o registro através do desenho realizado individualmente pelos alunos e, também, a sistematização por meio da listagem realizada pela docente, a professora ainda faz uma sistematização coletiva com os alunos, utilizando, mais uma vez, o material manipulável para a construção de uma árvore de possibilidades.

Importante perceber que a professora apresenta uma preocupação com as diferentes *representações* e faz uso destas, possivelmente a partir do que foi discutido durante o processo de formação, já que na entrevista inicial, parece estar muito focada apenas na *representação* através do desenho e no material manipulável com uma forma viável para o processo de ensino e aprendizagem.

Figura 17: Registro realizado pela professora utilizando o material manipulável em uma árvore de possibilidades – *Quarto encontro do processo de formação continuada*



Posteriormente, a docente apresenta outro exemplo de *produto cartesiano* para os alunos: “eu tenho agora uma bola de sorvete de laranja, uma bola de sorvete de abacaxi, uma bola de sorvete de morango. Aí eu posso ir na sorveteria e comprar um sorvete na casquinha ou no copinho [a professora cola o material manipulável da situação apresentada no quadro, ver Figura 18]. Aí agora eu quero saber como vai ficar. A possibilidade vai ser uma bola de sorvete ou no sorvete ou no casquinho. Quantas possibilidades eu posso fazer?”

O contexto utilizado pela professora nessa situação-problema foi ressaltado pela mesma no encontro anterior, o terceiro encontro do processo formativo. Percebe-se que ao longo do processo a docente vai acumulando conhecimentos a partir das discussões ocorridas nas intervenções. Ressaltamos também que, mais uma vez, a docente apresenta uma *situação* com seus *invariantes* bastante claros, o que mostra que a mesma tem domínio do *conhecimento especializado desse conteúdo*, no que se refere ao *produto do cartesiano*.

Figura 18: Material manipulável utilizado pela professora para a segunda situação-problema apresentada na aula – *Quarto encontro do processo de formação continuada*



Verificamos que, assim como o primeiro exemplo de *produto cartesiano* apresentado pela professora durante a aula (a das formas geométricas para formar uma casa), nesta segunda a docente utiliza-se do material manipulável para auxiliar os alunos. Contudo, diferente do primeiro exemplo, aumenta a grandeza numérica.

O aluno Carlos vai ao quadro para responder utilizando o material manipulável. Carlos vai apontando as possibilidades que acredita ser possíveis enquanto que a professora manuseia o material. Ao final de duas possibilidades (sorvete de laranja com casquinho e sorvete de abacaxi com copinho) a professora questiona se acabaram as possibilidades, pois Carlos não havia apontado para mais

nenhuma. Em seguida, a professora lembra ao aluno que pode haver o registro à parte e que ele pode utilizar o material manipulável novamente, para fazer novas possibilidades.

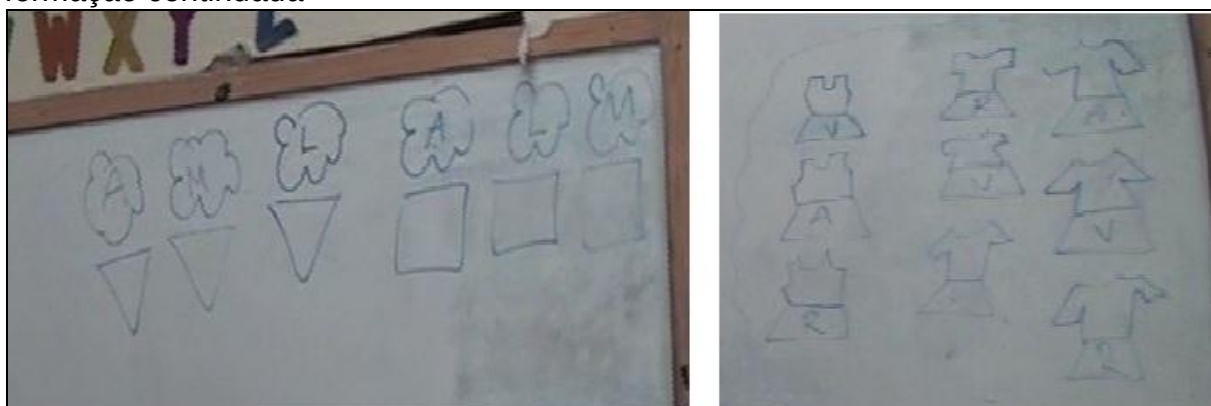
A professora realiza o registro no quadro através do desenho sistematizado e Carlos vai apontando para novas possibilidades, com o auxílio do material. Vale ressaltar que a docente toma o cuidado de fazer o registro organizado (*sistematizado*), separando as possibilidades dos casquinhos e dos copinhos, para que os alunos pudessem visualizar melhor as possibilidades já encontradas. Carlos encontra todas as possibilidades.

A professora apresenta uma última situação para os alunos: “para as meninas que são vaidosas, eu tenho três saias, uma azul, uma vermelha e outra rosa (a professora desenha as saias no quadro) e tenho uma camiseta, uma blusa de manga e outra blusa manga comprida, quantas possibilidades a gente pode ter?”.

Três alunas são chamadas ao quadro para tentar resolver a *situação* apresentada. Enquanto as alunas respondem, a professora faz o registro no quadro através do desenho, realizando o registro *sistematizado*. O grupo de alunas consegue encontrar seis possibilidades: camiseta com saia vermelha e com saia amarela; camisa de manga com saia vermelha e com saia rosa; blusa de manga comprida com saia vermelha e com saia amarela.

Outro aluno se aproxima do quadro para ajudar a encontrar as possibilidades que faltavam. O aluno, junto com os demais que ali já se encontravam, apresenta mais três possibilidades: camiseta com saia rosa; manga cumprida com saia rosa; camisa de manga com saia amarela.

Figura 19: Registro realizado pela professora através do desenho na segunda e na terceira situação-problema apresentada na aula – *Quarto encontro do processo de formação continuada*



Em seguida, alguns alunos contam todas as possibilidades registradas no quadro. A professora termina a aula fazendo a sistematização oral da última *situação* apresentada.

Pudemos verificar que a docente apresenta ter conhecimento acerca do conteúdo trabalhado em sala de aula, apesar de não ter percebido, inicialmente, que havia apresentado uma *situação* de *produto cartesiano* com condição. Ao longo da aula, mesmo que não explicitamente, a professora faz menção aos *invariantes* contidos na situação trabalhada e utiliza-se de diferentes *representações simbólicas*: há o registro através do desenho (para as crianças) e através da listagem, árvore de possibilidades e desenho (realizado pela professora no quadro). Sobre a importância do registro nas aulas, Costa (2003), como destacado por Rocha (2011), ressalta que esse trabalho vem a auxiliar o aluno durante sua aprendizagem.

Vale ressaltar também que a docente usou ainda o material manipulável, o que foi de grande valia no processo de ensino e aprendizagem em sua turma (alunos do 2º ano do Ensino Fundamental). Na literatura encontramos estudos sobre o uso do material manipulável, contudo, esses utilizaram o recurso de forma diferente da docente, no entanto, destacamos que os resultados obtidos pela professora aqui pesquisada com sua turma foram significativos.

Dentre esses estudos que pesquisaram o uso do material manipulável, destacamos o estudo de Bryant e Cols (1992) (*apud* Nunes e Bryant, 1997), em que trabalharam com dois grupos de crianças de oito e nove anos e que para um dos grupos eram fornecidos todos os materiais necessários para resolver um problema de *produto cartesiano* e para o outro grupo eram fornecidos apenas alguns dos materiais, com o intuito, neste segundo grupo, de que eles usassem o subconjunto criado com os materiais disponíveis para criar um modelo para pensar e, a partir daí generalizar.

O estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) realizou intervenções em dois grupos de alunos, um que utilizava o material manipulável e outro com o lápis e papel, a fim de verificar a influência do material manipulável na compreensão da Combinatória e comparar o desempenho dos alunos na resolução de problemas combinatórios com o uso de material manipulável ou do lápis e papel. Este referido estudo percebeu que o material manipulável parece não ter auxiliado na compreensão da Combinatória em termos de acertos totais dos problemas, fazendo com que os alunos apresentassem avanços inferiores, se em comparação com os

alunos que trabalharam com lápis e papel. As autoras ressaltam que isto pode ter acontecido pela preocupação que os alunos tiveram com a colagem dos materiais, o que pode ter retirado o foco dos três pilares destacados durante as intervenções (*situações, invariantes e representações simbólicas*).

Apesar de tais autoras terem encontrado este resultado, acreditamos que o trabalho com o auxílio do material manipulável possa vir a ajudar no processo de ensino e aprendizagem, contudo, a forma que este material é utilizado é que irá interferir no resultado. A docente aqui pesquisada utilizou-se do material manipulável, que correspondia ao número exato de elementos presentes nos enunciados dos problemas apresentados, juntamente com o registro à parte, e acreditamos que esta seja uma forma válida para o uso deste recurso.

Ao final da aula, realizamos uma pequena entrevista semiestruturada, individual, com a professora pesquisada, a fim de verificar suas análises a partir da aula dada.

A docente acredita que o resultado da aula foi positivo, pois, apesar dela não acreditar que os alunos teriam um bom rendimento, o objetivo da aula foi atingido.

E: O que você achou da aula?

P: *Eu fiquei surpresa com o resultado, confesso.*

E: Por quê?

P: *Porque eu acho que o objetivo foi alcançado, eu subestimei meus alunos. Eu fiquei surpresa mesmo.*

Quando questionada se faria alguma mudança na aula dada, a docente, além de relatar as possíveis mudanças que faria, como o trabalho com grupos menores, sendo estes compostos por alunos de diferentes níveis, e a entrega do material manipulável para cada grupo, separadamente. A docente reflete ainda sobre a autoavaliação diária do professor, da necessidade do professor se avaliar e verificar quais possíveis melhoras poderão ser feitas.

E: Você mudaria alguma coisa da aula de hoje, no planejamento?

P: *No caso de hoje? Mudaria.*

P: *Pra facilitar a minha vida e a deles, eu traria os triângulos, porque eu queria retomar mesmo a aula dos triângulos e dos quadrados que eu tinha feito em outra aula e eles não tinham acertado. Aí eu traria o concreto, mas não com o número de possibilidades certo, pra que eles pudessem resolver de uma forma mais rápida, porque eles vão registrar no desenho aí ficam: 'ai tá feito, apaga...'*

E no concreto, talvez fizesse em grupos. Porque, assim, quando a gente vai ver, o professor sempre está se avaliando, quando termina uma aula, aí se questiona sobre o que poderia

ter feito melhor.

Então, eu formaria grupos, cada grupo de diferentes níveis, pra que um pudesse ajudar o outro, e daria o concreto pra que eles pudessem formar as possibilidades, pra que eles pudessem pensar sozinhos, eu dei esse tempo, mas foi mais eu monitorando, eu queria ver os grupos, passar pelos grupos e ver como foi que eles estavam chegando às respostas.

Apesar de ter ministrado uma aula bastante criativa, com a utilização de diferentes *representações simbólicas*, fazendo uso do seu *conhecimento especializado e didático do conteúdo* da Combinatória, a docente faz importantes reflexões acerca da sua aula, buscando alternativas para pontos que considerou necessários de serem melhorados, o que é bastante positivo. Além disso, a professora apresenta uma preocupação com a conexão entre os eixos de conteúdos matemáticos, quando afirma que utilizaria a aula para aprofundar o trabalho que já realizou com formas geométricas.

Percebemos que a professora, ao ir para a prática, consegue fazer uma reflexão da mesma, o que Schön (1995, 2000) e Zeichner (1992), como apontado anteriormente, acreditam ser extremamente necessário, uma vez que a autoavaliação e a prática reflexiva não pode estar desvinculada dos conhecimentos docentes aqui discutidos.

Ao refletir sobre as possíveis dificuldades ocorridas durante a aula, a professora acredita não ter tido dificuldades sobre o conteúdo durante a aula.

E: Quais dificuldades você encontrou aqui na aula?

P: A dificuldade foi mais assim, questão de administrar as coisas de sala mesmo, aluno que não quer, que não está interessado.

E: Com relação ao conteúdo, você teve alguma dificuldade?

P: Acredito que não, pois do jeito que você explorou as análises, eu pensava em fazer com eles aquilo que eu acho que eles podem alcançar.

E: E é justamente assim...você tá começando e tem que começar pelo básico, e, realmente, o *produto cartesiano*, é o problema mais fácil, mais simples.

P: É, eu não podia ir mais além, e até posso tentar outras vezes, já que o objetivo desse foi satisfatório, posso explorar os outros.

Durante esta fala, consegue-se inferir que a professora reconhece o *produto cartesiano*, assim como na entrevista inicial, como o tipo de problema mais fácil para seus alunos (turma do 2º ano do Ensino Fundamental). Entretanto, apesar de entender o *produto cartesiano* como o de mais fácil apreensão pelos seus alunos, a docente não descarta a possibilidade de trabalhar as demais *situações combinatórias* em sua turma, como estudos anteriores (PESSOA e SANTOS (2011), PESSOA e BORBA (2010), AZEVEDO e BORBA (2012)) já mostraram ser possível,

o que difere do pensamento inicial da professora na primeira entrevista realizada, na qual a docente acreditava que o ensino deste conteúdo, para seus alunos só seria possível com o *produto cartesiano*.

Durante esta entrevista, a professora verifica também, em sua análise sobre a aula, que a sistematização das possibilidades auxilia o aluno durante a resolução de problemas combinatórios, o que condiz com estudo de Pessoa e Santos (2011, 2012) e de Pessoa e Silva (2012, 2013), os quais defendem que quando a estratégia de resolução é sistematizada, os alunos conseguem resolver os problemas e esgotar as possibilidades com mais facilidade do que quando não sistematizam suas estratégias de resolução.

E: Suas expectativas foram alcançadas?

P: *Foram, e eu fiquei muito feliz, não esperava não. Inclusive o das roupas que fiz por último, eu pensei que não iam chegar, eu até ajudei na formação [referindo-se à sistematização das possibilidades realizada por ela] que eu coloquei camiseta só de um lado, camisa do outro e manga comprida do outro. Aí eu vi que uns não perceberam pela organização, mas teve uns que perceberam que faltava uma combinação ali, sabiam que faltava uma combinação com aquela camisa, não sabiam a saia, mas sabiam qual era a camisa. Foi nesse sentido que eu achei legal.*

Como já averiguado anteriormente, a primeira aula dada pela docente abordou o problema de *produto cartesiano*, no qual a docente ressaltou os *invariantes* deste tipo de problema e utilizou-se de diferentes *representações simbólicas* durante a resolução dos problemas apresentados. Na entrevista realizada após a aula, pudemos constatar que a professora faz uma análise crítica de sua aula, levantando pontos positivos e negativos, sendo estes passíveis de mudanças.

Já se pôde perceber que os três primeiros encontros do processo de formação continuada sobre Combinatória, ocorridos antes desta primeira aula aqui analisada, auxiliaram a professora a organizar uma aula deste conteúdo e a refletir sobre dela.

5.3.5 Quinto encontro do processo de formação – *análise e discussão da aula aplicada*

No quinto encontro do processo de formação proposto, buscamos verificar as análises das primeiras aulas ministradas pelas docentes participantes da formação, no caso, de todas as professoras atuantes na escola.

Ao todo, participaram do processo seis professoras, sendo duas da Educação Infantil e quatro dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Entretanto, só duas professoras ministraram a aula elaborada (P e P2) no encontro anterior²⁰.

E: Quem conseguiu dar a aula?

P1: *Não consegui.*

P3: *Também não.*

P4: *Não dei não.*

P: *A gente conseguiu [referindo-se a ela e a P2]*

E: Então eu queria pedir para P e P2 falarem um pouco de como foi a aula e a experiência, se houve um retorno ou não dos alunos, se foi válido, o que poderia ser mudado...

Sendo assim, apresentamos a seguir as análises realizadas pelas docentes (P2 e P) sobre suas respectivas aulas e as inferências por nós alcançadas.

P2, professora do 4º ano, ressalta que encontra em livros didáticos exemplos de problemas combinatórios. Este dado é confirmado pelos estudos de Barreto, Amaral e Borba (2007) e Assis e Magalhães (2012) que verificaram uma grande ocorrência de problemas combinatórios nos livros didáticos dos anos iniciais de escolarização, apesar de não apresentar um trabalho sistematizado desse conteúdo. A P2, no entanto, adverte que, com seus alunos, é necessário ir mais além do que o livro propõe, utilizando o material manipulável.

P2: *Bem, assim, a questão o próprio livro didático vem trazendo esse tipo de trabalho. E, assim, foi de uma forma lúdica, porque realmente não poderia ser assim no seco, trazer o enunciado e jogar pros meninos, não dá, não rola, tem que ser alguma coisa lúdica, tem que ser com roupa, tem que ser alguma coisa no concreto.*

P: *Concreto, concreto.*

P2: *Entende né, aí a partir daí, eu fiz uma brincadeira no quadro e também utilizei inclusive até a estratégia do livro pra fazer. Aí eles... a primeira vez não, eles ficaram voando tudinho, mas aí no primeiro exemplo que eu dei daí eles já começaram, já começaram a associar e não foi tão difícil, eu só dei um só que foi o cartesiano, só pra começar, entendeu? Mas dá pra fazer o trabalho, se você começar aos poucos e depois ir aumentando o grau de dificuldade, apresentando, dá pra pegar sim, tranquilo, dá, agora é claro, né, com lúdico, sem ele, é complicado.*

E: Principalmente pra quando você esta começando né?! P2 me disse que formou grupos com os alunos e deu pedaços de cartolina num foi? Conta como foi isso.

P2: *Foi. O concreto foram roupas, bermudas e camisas, agora de cores diferentes, pra eles fazerem o jogo. Eles fizeram várias tentativas, visse, tentaram e viram que não deram, aí teve uma menina que já montou bem rápido, porque ela já tinha acertado já da outra vez que eu só coloquei no quadro o desafio, e não montei nada, só desenhei e deixei no quadro, não dei nada pra eles manipularem, só os desenhos no quadro com o enunciado, aí ela*

²⁰ Uma das professoras participantes não pôde comparecer ao quinto encontro do processo de formação continuada, contudo, nos foi informado que a mesma também não conseguiu aplicar a aula.

ficou aí eu peguei e me coloquei também como exemplo, dizendo que eu tinha duas peças de roupa, aí perguntava: “e você não acha que eu posso combinar de varias formas?”, aí a partir daí ela, ela mesmo, já disse “é seis tia, é seis”. Ai daí, com o concreto, pra ela foi mais fácil ainda, quer dizer, ela manipulando porque já tava ali no quadro, pronto, agora é com vocês.

A professora aqui pesquisada (P) também comentou e analisou sua aula. A docente ainda afirma ter trabalhado a Combinatória com sua turma antes do processo de formação ter iniciado, contudo, não obteve bons resultados. Para ela, o trabalho com o material manipulável, assim como a P2, também é o diferencial para o ensino da Combinatória. A professora reflete ainda sobre o avanço de seus alunos ocorrido ao longo da aula, a partir dos diferentes exemplos apresentados.

P: É, concordo como ela falou do livro, eu tinha trabalhado, antes de você aparecer aqui, no livro, e não consegui retorno, no livro eles responderam de forma inadequada, então preferi não mexer mais ali. Ai quando você voltou, aí eu ate utilizei, na própria aula que você analisou, o próprio exemplo que eles tinham errado, era pra usar o triângulo e o quadrado, formar vários tipos de casinhas com as cores, então eu fui puxando deles, eu não fiz grupo, eu fiz um grupo classe mesmo, então eu fui puxando até eles conseguirem formar a quantidade de casas que tinham que formar. Aí depois eu dei o exemplo do sorvete, depois do exemplo do triângulo e quadrados, dos tipos de casquinhas, ai eles formaram o sorvete, eles já fizeram melhor o do sorvete. E aí foi que eu comecei a ousar e botei o exemplo de três tipos de camisas com três tipos de saias, ai já foi puxando e eles conseguiram, a partir da formação que eu coloquei no quadro, que foi pra facilitar que eles pensassem, aí eles conseguiram pensar e conseguiram formar as nove montagens de roupas. Então foi interessante, de uma coisinha que eu fui puxando eles foram entendendo a situação, e chegaram num consenso.

No terceiro encontro da formação, as professoras participantes puderam conversar e debater sobre a organização do planejamento da aula que dariam no quarto encontro. Vale ressaltar que P e P2 foi uma das duplas formadas no terceiro encontro e refletiram juntas sobre o plano de aula. Sendo assim, acreditamos que as semelhanças ocorridas nas duas aulas, como a escolha pelo tipo de problema a ser trabalhado em sala de aula (*produto cartesiano*), o uso do material manipulável e a situação-problema apresentada (saias e blusas), possam ter surgido a partir do debate ocorrido durante a formação.

5.3.6 Sexto encontro do processo de formação – *observação de aula*

Para este encontro que ocorreu a segunda observação de aula, foi solicitado um novo plano, no qual a professora trabalhou outra *situação* combinatória, o *arranjo*.

Figura 20: Planejamento de aula elaborado pela professora – Segunda Aula – Sexto encontro do processo de formação continuada

TEMA DA AULA		OBJETIVOS	
Análise combinatória – Arranjo		Criar um contexto significativo para que os alunos construam estratégias eficientes para resolver problemas de combinatória e reflitam sobre as estratégias mais econômicas e adaptadas a cada problema apresentado.	
CONTEUDO	TEMPO	PROCEDIMENTOS	RECURSOS UTILIZADOS
Combinatória	50 minutos	Relembrar a história dos três porquinhos, em seguida, lançar o problema: Cícero, Prático e Heitor vão ganhar 2 casas da mãe, casa mais disputada é a casa da árvore. Sabendo que quem ficará em primeiro lugar será o dono da casa da árvore e a do segundo lugar ficará com o apartamento, quais as possibilidades para o 1º e 2º lugar?	Folha de ofício Material manipulativo – figuras da história
		Formar grupos de 4 alunos e entregar figuras com a imagem das duas casas disputadas e os três porquinhos, para que os alunos possam desenvolver estratégias para resolver o problema.	

Neste segundo plano, a docente, apesar de utilizar, assim como os demais planejamentos elaborados, o uso do material manipulável, foca o ensino de uma nova *situação* combinatória e utiliza uma estratégia diferente da usada para a primeira aula, que seria o trabalho com grupos e o recurso disponibilizado para cada grupo, condizente com a reflexão que ela fez logo após o término da Aula 1, em que analisou que poderia reformular alguns pontos da aula ministrada, como a divisão da turma em pequenos grupos e o trabalho, ocasionando um trabalho e uma avaliação mais individualizada.

A seguir, apresentamos as análises realizadas na Aula 2. Vale ressaltar que entre a aplicação/observação das aulas, houve o quinto encontro do processo de formação continuada, no qual, as professoras participantes do processo puderam expor, coletivamente, as análises da primeira aula ministrada (Aula 1). Sendo assim, acreditamos que as discussões que sucederam no encontro anterior podem ter influenciado, também, na prática acontecida na Aula 2.

Para a observação da segunda aula foi seguido o mesmo roteiro que o utilizado na Aula 1, tendo três eixos de observação: Relação do professor com o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo, relação do professor com o conteúdo, recursos utilizados em sala, como apresentado abaixo (Quadro 19).

Quadro 19: Roteiro de observação de aula

Eixos da Observação	Roteiro para observação de aula
Relação do professor com o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo	○ A professora busca perceber/identificar os conhecimentos que os alunos trazem a respeito da Combinatória? Levaram eles em consideração?
Relação do professor com o conteúdo	○ De que forma o conteúdo foi trabalhado? O conteúdo foi transmitido ou construído em sala de aula? ○ Todas as <i>situações</i> foram trabalhadas em sala? Se não, quais foram? ○ Como foi a elaboração dos problemas apresentados pela professora? Estavam no nível dos alunos? ○ Houve destaque para os <i>invariantes</i>? ○ A professora levou em considerações as diferentes <i>representações</i> possíveis? Se sim, quais?
Recursos utilizados em sala de aula	○ Quais recursos foram utilizados durante a aula? Quais? ○ De que forma foram utilizados estes recursos? ○ Os recursos utilizados ajudaram na aprendizagem desse conteúdo?

Para a segunda aula ministrada, a professora escolheu trabalhar a *situação de arranjo*. Em um contexto de uma história infantil conhecida como “Os três porquinhos”, a docente apresentou uma situação-problema na qual iriam ser premiados dois porquinhos com duas moradias, sendo o primeiro lugar com uma casa na árvore e o segundo lugar com um apartamento. A seguir, no Quadro 20, apresentamos a contextualização realizada pela docente.

Quadro 20: Contextualização da situação-problema apresentada na segunda aula – Sexto encontro do processo de formação continuada

P: Era uma vez três porquinhos: Heitor, Cícero e Prático. Eles moravam na casa de sua mãe, só que a mãe percebeu que os filhos estavam muito grandes e disse: “Meus filhos, vocês estão bem grandinhos, precisam começar a viver sozinhos”. E a mãe continuou: “Cada um vai ter que providenciar sua casinha, mas lembrem-se, na floresta tem lobo mal”. Os porquinhos foram morar na floresta e eles ficaram super animados porque iam viver só.

P: Heitor, muito agoniado, pensou logo: vou fazer minha casa com o que primeiro encontrar. Ele saiu passeando pela floresta e o que encontrou? Palha! Aí os irmãos falaram: “Heitor, esse material é muito fraco pra você fazer sua casa”. Heitor agoniado foi logo dizendo: “Ah, mas eu estou apressado, quero fazer minha casa assim pra poder brincar”. E assim ele a fez!

P: Cícero e Prático continuaram passeando. Aí Cícero encontrou um monte de madeira no meio do caminho e foi logo resolvendo: “Vou fazer minha casa de madeira”. Prático o alertou: “Esse material é muito fraco”. Cícero respondeu: “Mas eu quero fazer pra quando terminar ir brincar logo”. E assim ele fez. Prático continuou andando e resolveu fazer a casa de tijolo. Ele não estava preocupado em brincar não, mas em fazer uma casa segura.

P: Cada um ficou em sua casa quando, de repente, o lobo percebeu o cheirinho de porquinhos por lá e saiu logo passeando e encontrou a primeira casa.

P: De quem era a primeira casa?

Alunos: Heitor.

P: E a casa era feita de quê?

Alunos: Palha.

P: Isso, palha. Aí o lobo: “Quem está aí?” Heitor foi logo dizendo: “Tem ninguém não”. E o lobo: “Ah, seu porquinho bobinho, você construiu sua casa de palha, eu vou só soprar e você já já estará na minha boquinha”. Heitor correu tanto e foi pra casa de Cícero. Aí ficaram os dois lá dentro, morrendo de medo! Chegou o lobo e foi logo falando: “Ahh, o cheiro está mais forte, agora são dois porquinhos que tenho aqui. Com esse material eu só faço soprar e vocês vão estar dentro da minha boca”. Aí o lobo tome a soprar e os porquinhos saíram correndo pra casa de Prático. Ficaram os três juntos lá, tudo agarradinhos com medo. Quando o lobo chegou, foi logo dizendo: “Agora são três, eu vou soprar e encher minha barriguinha”. Aí o lobo soprou, soprou, mas não conseguia derrubar a casa. Aí ele pensou: não tem problema, eu vou subir e entrar pela chaminé. Só que Prático era muito prático, pegou uma água fervendo, colocou embaixo da chaminé e quando o lobo entrou pela chaminé, ele queimou o quê?

Alunos: O bumbum.

P: Isso, o rabo. Aí ele saiu desesperado e nunca mais apareceu. Aí Prático conversou com os irmãos: “Eu disse pra vocês que o material de palha e madeira não ia adiantar, era muito fraco!”.

P: Aí o que aconteceu? Os outros dois ficaram sem casa. Aí a mãe dos três apareceu e disse o seguinte: “Meus filhos, eu sei que vocês tiveram dificuldade em viver sozinhos, então eu quero presentear vocês com duas casas, pois só sobreviveu uma casa”.

P: Foi a casa de quem que sobreviveu?

Alunos: Prático.

P: E a casa dele era de quê?

Alunos: Tijolo

P: Ela disse: “Eu tenho duas casas, alguém vai ficar com a casa que foi de Prático. A primeira casa é uma casa da árvore” - todos queriam a casa da árvore, pois a casa era muito alta e o lobo não ia conseguir chegar lá. Mesmo Prático tendo a casa dele, ele queria a casa da árvore. E a segunda casa que a mãe disse que ia dar era um apartamento. Os porquinhos ficaram interessados, mas não tanto como na casa da árvore.

P: Então, lá vai o probleminha que vou lançar com vocês, pois a mãe ficou com bastante dúvida aí vocês vão ter que ajudar.

[...]

Então vocês vão tentar pensar as formas deles ganharem, quais possibilidades que a gente vai ter pra ganharem os prêmios.

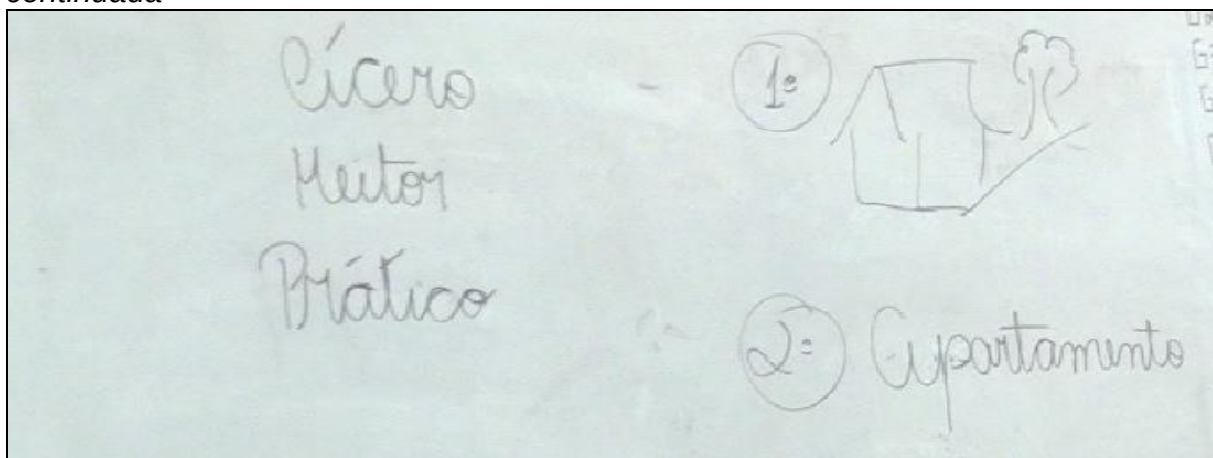
Consegue-se inferir que, apesar de ser a única situação-problema trabalhada na aula, a professora apresenta um exemplo de *arranjo* contextualizado, no qual

explicita os *invariantes* contidos neste tipo de problema. Ela estabelece uma relação com a literatura infantil, adaptando a conhecida história e, assim, consegue contextualizar o problema.

O estudo realizado por Aguiar e Grandó (2007) apontou que um trabalho desenvolvido com resolução de problemas a partir das histórias infantis faz com que o conceito escolhido através da situação-problema seja melhor apropriado, uma vez que as crianças fazem uma assimilação particular. Rodrigues e Souza (2007) também propuseram uma atividade de Matemática a partir de textos da literatura infantil e puderam verificar que esse método se faz eficiente no processo de aprendizagem, ajudando na construção do conhecimento dos alunos.

Ao término da contextualização, a docente questiona aos alunos sobre os elementos existentes no problema e os registra no quadro, fazendo-os perceber qual o raciocínio está contido neste tipo de *situação*.

Figura 21: Registro realizado pela professora dos elementos existentes na situação-problema apresentada na segunda aula – *Sexto encontro do processo de formação continuada*



P: Olha só, qual é o primeiro prêmio?

Alunos: A casa na árvore [a professora desenhou no quadro o primeiro prêmio].

P: E o segundo prêmio?

Alunos: Apartamento [a professora escreveu no quadro o segundo prêmio].

P: Quem vai participar dessa premiação?

Alunos: Cícero e Heitor.

P: Só eles dois?

Alunos: Não, e Prático!

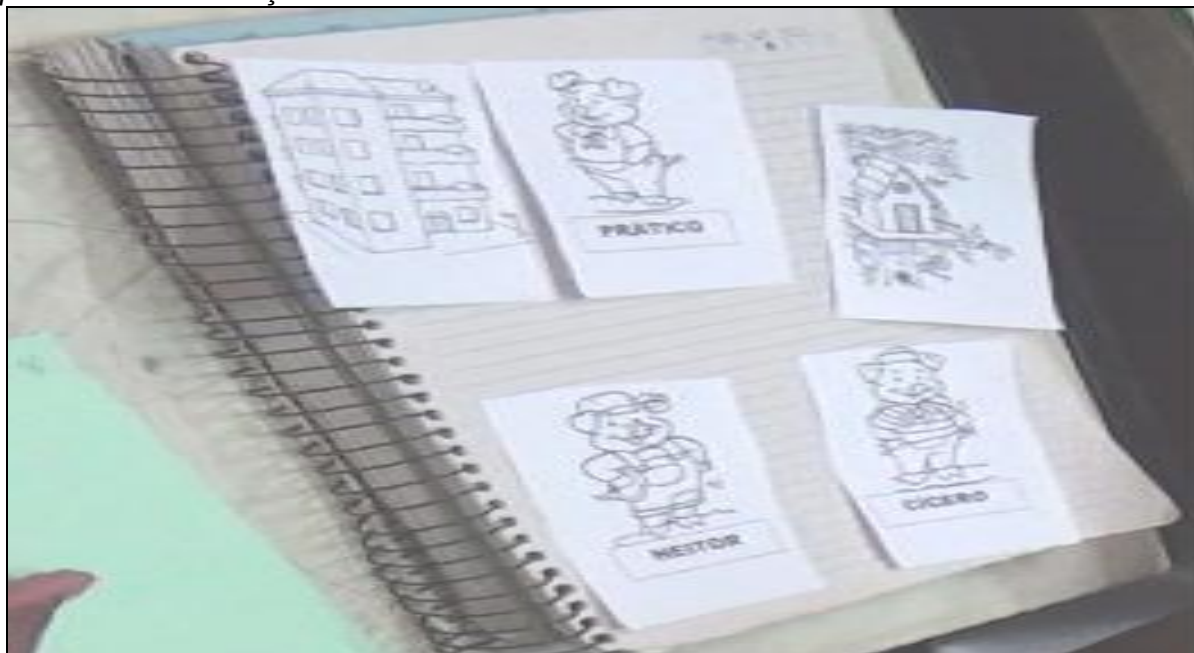
P: Isso, Prático já tinha a casa, mas Prático queria o quê?

Alunos: A casa na árvore.

P: Então vocês vão tentar pensar as formas deles ganharem, quais possibilidades que a gente vai ter pra ganharem os prêmios. Vou entregar os porquinhos pra vocês [entrega em material manipulável cada porquinho para cada grupo] e os prêmios [entrega os dois prêmios em material manipulável] e uma folha de papel pra vocês escreverem, certo?

Conseguimos perceber também nesse extrato da aula que a P utiliza-se do desenho para iniciar uma resolução e apresenta o material manipulável para os alunos, a fim de que este material auxilie na resolução do problema.

Figura 22: Material Manipulável utilizado na segunda aula – *Sexto encontro do processo de formação continuada*

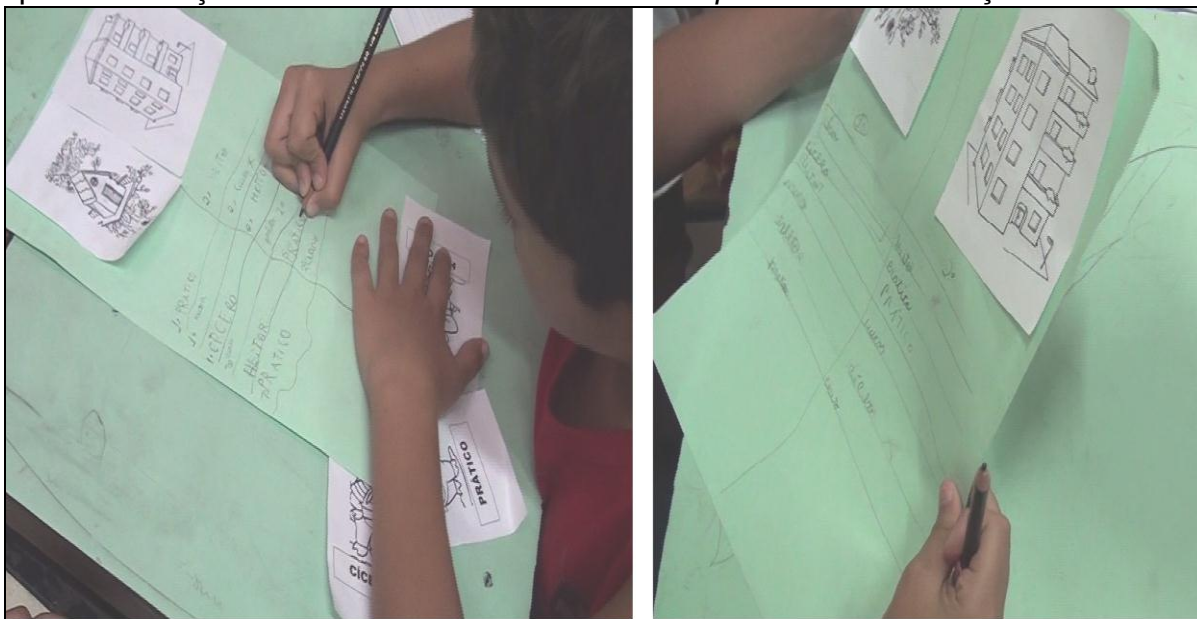


Foram formados grupos em sala para resolverem juntos a situação apresentada. Segundo a professora, cada grupo tinha alunos de diferentes níveis, a fim de que eles se auxiliassem.

Alguns grupos de alunos, ao começarem a resolver o problema apresentado, conseguiram listar algumas possibilidades, contudo, determinados grupos não percebem que trocando a ordem dos elementos iria gerar novas possibilidades.

A professora foi de grupo em grupo auxiliando e direciona os alunos a colocarem as imagens da casa na árvore de um lado da folha de papel e o apartamento do outro lado, para que embaixo, coloquem as possibilidades do primeiro e segundo lugar, se tornando mais fácil a visualização. A partir desta intervenção da docente, percebemos que os alunos conseguiram perceber melhor as possibilidades existentes.

Figura 23: Alunos resolvendo a situação-problema apresentada na segunda aula, após intervenção da docente – Sexto encontro do processo de formação continuada



Mesmo que não fosse o foco da atual pesquisa, verificamos que os alunos estavam compreendendo as relações existentes no tipo de *situação* trabalhada em sala de aula, assim como na primeira aula ministrada pela professora sobre Combinatória, a qual trabalhou a *situação* de *produto cartesiano*.

Ao perceber que todos os grupos já haviam terminado, a docente fez o registro coletivo das possibilidades existentes.

Figura 24: Registro realizado pela professora do total de possibilidades da situação-problema apresentada na segunda aula – Sexto encontro do processo de formação continuada

1	Prático	Huter
2	Prático	Cicero
3	Cicero	Huter
4	Cicero	Prático
5	Huter	Prático
6	Huter	Cicero

P: Qual é o primeiro prêmio?

Alunos: Casa da árvore

P: E o segundo?

Alunos: apartamento

[A professora desenha no quadro da maneira que orientou os alunos a fazerem, colocando a imagem do primeiro prêmio de um lado e do segundo prêmio do outro lado da folha. Em seguida, sinaliza os desenhos com 1º e segundo 2º.]

P: Qual a primeira possibilidade?

Alunos: Prático e Heitor

P: Prático pode ser com Heitor e pode ser com mais quem?

Alunos: Cícero!

P: E Cícero, pode ser com quem?

Alunos: Cícero e Heitor e Cícero e Prático.

P: E Heitor?

Alunos: Heitor e Prático e Heitor e Cícero.

Vale ressaltar que a docente realizou o registro de forma sistematizada, utilizando-se de uma listagem e sinalizando os respectivos prêmios como primeiro e segundo lugar, ou seja, enfocando o *invariante* da ordem.

Pôde-se perceber na Aula 2 que a docente, assim como na primeira aula, só trabalhou um tipo de problema combinatório, contudo, levantou os *invariantes* contidos neste tipo de problema, o que facilitou a apreensão dos alunos. Acreditamos que o trabalho individual das *situações* combinatórias não seja uma dificuldade para o processo de aprendizagem dos alunos, e sim, a não explicitação dos *invariantes*. A docente utilizou-se ainda da listagem sistemática como um tipo de *representação simbólica* válida para a resolução de problemas combinatórios e o utilizou-se ainda do material manipulável como um recurso viável no auxílio da resolução desses problemas.

O conhecimento da Combinatória foi perceptível durante a aula, pois havia o domínio da *situação* e suas características, assim como das *representações simbólicas* empregadas. A docente utilizou-se ainda do conhecimento do conteúdo e seus alunos e o conhecimento do conteúdo e seu ensino, que faz parte do *conhecimento didático do conteúdo* (BALL, THAMES E PHELPS, 2008), uma vez que contextualizou a situação-problema trabalhada em sala a partir de uma história da literatura infantil, a qual seus alunos têm familiaridade, motivando-os na aula.

Assim como no final da primeira aula dada pela professora, ao término desta segunda aula, também foi realizada uma entrevista semiestruturada, a fim de que a docente pudesse analisar a aula por ela ministrada.

Ao pedir sua opinião sobre a aula ministrada, a docente relata ter se sentido mais à vontade, pois, diferente da Aula 1, ela conseguiu realizar um planejamento mais organizado, no qual sabia o passo a passo da aula.

E: O que você achou dessa aula?

P: *Eu acho que vim mais preparada. Eu tinha preparado tudo em casa, sabia direitinho o que ia fazer, já tinha tudo esquematizado.*

Ao ser solicitada que comparasse o rendimento dos alunos nas duas aulas aplicadas (Aula 1 e Aula 2), a P reconhece que os alunos conseguiram se sair melhor na primeira aula, de *produto cartesiano*. No entanto, a partir das intervenções direcionadas a cada grupo durante a segunda aula, verificamos que houve um entendimento melhor dos alunos sobre o que estava sendo solicitado.

E: Nessa aula, você acredita que seus alunos se saíram melhor que na primeira aula? Ou o mesmo nível ou tiveram mais dificuldade?

P: *Eu acho que essa [referindo-se à Aula 2] eles tiveram um pouquinho mais de dificuldade pra engatar, tiveram dificuldade pra saber o que era pra fazer. Então eu fui dando o caminho, fui colar as casinhas já para eles perceberem que tinha que fazer uma tabela pra ficar mais fácil de resolver. Mas eu não dizia 'vá fazer a tabela'. Eu colava os desenhos para eles perceberem e perguntava: 'Quem é primeiro? Quem é segundo? Vejam aí quais as possibilidades que podem ter'.*

Ainda fazendo uma comparação entre as duas aulas, a docente ressalta a necessidade de trabalhar este conteúdo em mais aulas, falando especificamente da situação de *arranjo*, a qual foi trabalhada com sua turma.

E: Você acha que *produto cartesiano* foi mais fácil pra eles?

P: *Foi, foi mais fácil. Eu acho que eles perceberam mais rápido.*

E: E com relação à aula de *arranjo*, tuas expectativas foram alcançadas?

P: *Esse daqui eu gostei do resultado. Eu pensei que ia demorar muito mais, fiquei até preocupada quando vi a demora e pensei 'será que eles iam alcançar?'. Mas, claro, faria mais aulas pra ter um resultado mais feliz, como no PC, pra ter um resultado legal. Esse daqui eu vi que eles alcançaram, pois vi que no final todos conseguiram fazer, mas precisaria de mais aulas pra poderem evoluir.*

Durante a entrevista realizada após a Aula 2, a professora relatou ter trabalhado antes da aula um exemplo de *arranjo*. Nesta direção, buscamos verificar a análise da P sobre este trabalho realizado em sala, mesmo que não tenhamos observado.

E: Você disse que antes já tinha apresentado um problema de *arranjo* com eles, qual era o contexto do problema?

P: *O contexto era premiação em sala de aula. O primeiro prêmio era uma bicicleta e o segundo um quebra-cabeça. Aí disse que eram 3 alunos que tiravam notas muito boas e eles tinham a possibilidade de ser o primeiro e o segundo lugar.*

P: *Quando eu fiz, não fiz com que eles fizessem mesmo, eu fiz o registro no quadro, no coletivo. No coletivo, eles pensaram rapidinho. Citou o nome de uma das três pessoas e viram as duas possibilidades, depois do outro e assim foi. Então no coletivo eles pensaram mais. [...] E no coletivo, esses que são mais atentos, falaram mais, aí os outros ficaram concordando e percebendo. Tanto que quando dei esse problema, não pensei que ia demorar tanto. Mas como foram grupos separados, cada um no seu grupinho, os que eram mais espertos não puderam ajudar um ao outro, porque estavam separados. Mas mesmo assim, depois que fui de grupo em grupo, eu fui vendo que eles foram desenvolvendo.*

Vale ressaltar, a partir desse extrato, que os alunos, ao resolverem coletivamente a primeira situação-problema apresentada na sala, a qual não fez parte da aula observada, os alunos realizaram coletivamente a listagem das possibilidades, fazendo-a de modo sistemático.

Percebemos ainda nesta fala da docente que alguns alunos se sobressaíram ao tentarem resolver a situação-problema coletivamente, como foi realizado na Aula 1. Sendo assim, inferimos que a facilidade que a docente acredita ter acontecido na aula de *produto cartesiano* (Aula 1), tenha sido em decorrência de que os alunos com um nível maior participaram mais da aula, do que os demais alunos. No entanto, não podemos afirmar esta hipótese, uma vez que, como já dito anteriormente, alguns estudos (PESSOA, 2009; AZEVEDO E BORBA, 2012) realizados vêm apontando que os alunos dos anos iniciais têm mais facilidade na compreensão de problemas de *produto cartesiano* do que nas demais situações.

Diferente da primeira aula, a docente se sentiu mais segura na aplicação da Aula 2, levantando poucas mudanças que poderiam melhorar no processo de ensino e aprendizagem.

E: Você acha que o planejamento deu conta para o que você queria?

P: *Eu estou tranquila quanto ao que eu produzi hoje.*

E: Você mudaria alguma coisa?

P: *O professor sempre quer mudar alguma coisa, né? No contexto, no geral, eu acho que foi bem, separei um tempo pra fazer mesmo o planejamento, foi uma coisa de 3h, pensando, pesquisando... Poderia ser até que eu mudasse alguma coisa, acrescentando outro problema, pra eles fazerem, como se fosse uma avaliação, pra ver se eu desse o segundo problema se eles já fariam com mais facilidade.*

Quando questionada sobre a escolha do tipo de problema para trabalhar na Aula 2, a docente ressalta a dificuldade de encontrar materiais para auxiliar os professores a construírem aulas sobre a Combinatória, o que condiz com o que Barreto, Amaral e Borba (2007) apresentam como um dos resultados de pesquisa, que os manuais do professor dos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental não trazem orientações ao docente sobre o trabalho com problemas combinatórios.

E: Dentre os outros três problemas que restaram (*arranjo*, *permutação* e *combinação*), já que você tinha feito a primeira aula de *produto cartesiano*, por que você escolheu *arranjo*? Ou foi aleatório?

P: *Quando eu fui fazer a pesquisa pra aula, eu sabia que tinha que tirar o cartesiano, tinha que ver um dos outros três. Aí li, reli, li os exemplos que tinha anotado durante a formação, mas não encontrei nada, nada dos outros três. Aí foi quando eu fiquei pensando num contexto pra envolver o problema. Foi aí que pensei na história dos três porquinhos e pensei que podia fazer a premiação das casas e encaixei com o problema. Foi assim que consegui fazer.*

E: Foi difícil fazer o planejamento?

P: *Foi, muito. Tive que arrumar primeiro a história pra encaixar o problema. Eu tinha até pensado em fazer outro problema, como permutação, mas não consegui pensar. Foi bem complicado, pode registrar lá no seu artigo, como é difícil, tem que suar muito pra colocar isso na prática. Só achava coisa de nível muito alto, o que me salvou foram os três porquinhos [risos].*

Assim como discutidos em algumas pesquisas anteriores e no referencial teórico desta, faltam materiais que auxiliem os professores na organização de aulas sobre a Combinatória, além da própria formação defasada quanto a este conteúdo.

A partir das duas aulas ministradas pela docente e das entrevistas que sucederam às aulas, constatamos que a o *conhecimento especializado do conteúdo* e o *conhecimento didático do conteúdo* discutido por Shulman (2005) foram bem articulados, uma vez que a professora aqui pesquisada obteve domínio das *situações* combinatórias propostas em suas aulas e conseguiu trabalhar de forma eficaz e didática de tais problemas combinatórios com sua turma.

5.4 Conhecimento Docente – Entrevista Final

Na entrevista final buscou-se verificar quais os conhecimentos que a docente pesquisada havia acumulado após o processo de formação continuada sobre Combinatória. Para isto, como dito anteriormente, a entrevista foi articulada de modo

que buscasse investigar os mesmo eixos vistos na entrevista inicial: *Conhecimento Didático da Combinatória* e *Conhecimento Especializado do Conteúdo de Combinatória*.

5.4.1 Conhecimento Especializado do Conteúdo da Combinatória

Assim como na entrevista inicial, nesta fase, verificamos os conhecimentos da professora acerca do *conhecimento especializado* da Combinatória, contudo, agora buscando analisar quais possíveis mudanças nos conhecimentos da docente, após o processo de formação continuada neste conteúdo.

A análise nesta seção corresponde ao que envolve esse conteúdo e, especificamente, a diferenciação dos problemas combinatórios a partir das *situações* e seus invariantes.

5.4.1.1 Diferentes situações e invariantes combinatórios

Após a intervenção, pudemos constatar uma ressignificação da professora quanto ao *conhecimento especializado do conteúdo* e o *conhecimento didático desse conteúdo*. A partir da análise dos quatro problemas combinatórios, apresentamos as inferências realizadas sobre as diferentes *situações* combinatórias entregues durante a entrevista final.

Quadro 21: Classificação dos tipos de problemas propostos (entrevista final)

1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia cinco opções de comida (cachorro-quente, coxinha, empada, brigadeiro e bolo) e quatro tipos de bebida (suco de laranja, suco de morango, refrigerante e água). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida e um tipo de bebida? (**Produto Cartesiano**)
2. Felipe, Sandra, Carla, Francisco, Henrique e Ana vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas? (**Combinação**)
3. Cinco turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e segundo lugar no torneio? (**Arranjo**)
4. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5, 7 e 9? (**Permutação**)

(Problemas retirados de Azevedo, Costa e Borba, 2010)

E: Esses são quatro problemas combinatórios e eu queria que você lesse e tentasse identificar quais problemas são esses e as características deles.

P: *Meu Deus do céu, isso é uma maldade [risos]. Se eu soubesse eu tinha estudado ontem [risos].*

P: *Eita eu vou ter que lembrar os nomes visse, peraê que minha memória não é muito boa não. Tô tendo noção, deixa eu ver... cartesiano.*

E: Se você quiser utilizar esta folha para tentar resolver, pode ficar à vontade, às vezes fica melhor pra gente perceber qual é o problema.

P: *Peraê... não, é porque eu tô tendo noção do que eu falo, quero lembrar o nome pra você, pra eu falar pra você.. cartesiano... porque tu não dissesse que eu tinha que estudar os nomes [risos].*

E: Então vamos fazer assim: estais dizendo *cartesiano*, certo? Qual desses você acha que é o *cartesiano*?

P: *O primeiro. É... e quais os outros 3 pra eu lembrar?*

E: Isso você que tem que me dizer... [risos].

Mesmo que a docente não soubesse, naquele momento, expressar a nomenclatura utilizada para distinguir as *situações* combinatórias, consegue-se observar que a professora já começa a perceber a variedade dos tipos de problemas existentes, o que não era percebido na entrevista inicial, na qual a docente demonstrava não entender que a Combinatória é composta por quatro tipos de problemas combinatórios.

Utilizando-se dos mesmos problemas apresentados, foi solicitado que a análise fosse realizada a partir das características percebidas. A seguir, nos Quadros 22, 23, 24 e 25, apresentamos as análises realizadas pela docente sobre os *invariantes* das *situações* combinatórias.

Quadro 22: Entrevista final - Classificação dos problemas quanto aos seus *invariantes* – *produto cartesiano*

Produto Cartesiano	Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia cinco opções de comida (cachorro-quente, coxinha, empada, brigadeiro e bolo) e quatro tipos de bebida (suco de laranja, suco de morango, refrigerante e água). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida e um tipo de bebida?
E: Vamos por partes... aí sobre o <i>cartesiano</i>, o que é que você lembra com relação a ele? P: Tem que fazer as combinações, de...de...de como ele tá pedindo aqui, combinar um tipo de comida com um tipo de bebida, tá aqui as combinações. É esse <i>[referindo-se ao primeiro problema apresentado, o produto cartesiano]</i>. E: No caso seria o primeiro? P: Sim.	

Neste momento, já percebemos que houve um avanço importante, uma vez que a docente já consegue perceber os *invariantes* do *produto cartesiano* claramente e identificá-lo pelo nome correto. Com relação ao *invariante* da escolha, a docente chega a explicar sua característica, o que é um grande progresso, contudo, sobre o *invariante* da ordem, a mesma não faz nenhuma referência.

Quadro 23: Entrevista final - Classificação dos problemas quanto aos seus *invariantes* – *combinação*

Combinação	Felipe, Sandra, Carla, Francisco, Henrique e Ana vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?
E: Têm mais três, quais as características que tu identifica desses? P: Esse aqui é... esse aqui é... E: Se tu não lembrar do nome, tenta ver as características dele, o que tem de igual ou diferente dos outros, que tu identifica... P: Esse aqui eu vou ter que formar... esse aqui eu vou ter que formar, várias duplas, quantas duplas possíveis eu posso formar, é isso né...	

Mais uma vez, a docente não menciona o *invariante* da ordem, no entanto, percebe que de um grupo maior irá tirar elementos para formar um grupo menor, ou seja, reconhece o *invariante* da ordem nesta *situação*, assim como no problema de *arranjo* (Quadro 24).

Quadro 24: Entrevista final - Classificação dos problemas quanto aos seus *invariantes* – *arranjo*

Arranjo	Cinco turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e segundo lugar no torneio?
E: E o terceiro? P: Tu dizendo o nome pra mim, tu não tá dizendo qual é a resposta não... E: Primeiro você analisa e depois se ficar dúvidas aí a gente conversa sobre o que ficou faltando, certo? P: Esse aqui eu vou ter que saber... é bem parecido com o segundo.. com quantas maneiras possíveis eu vou ter que formar o primeiro e segundo lugar, turma A turma B, turma B e C, turma D com E, turma A com E, turma C com D... E: E por que você acha que é bem parecido com o segundo? P: Porque aqui eu vou formar duplas também pra fazer.. o jogo do pingue-pongue [referindo-se ao problema de combinação]. E: Certo. P: Vou formar duplas pra jogar pingue-pongue... quantas duplas diferentes podem ser formadas?	

Assim como no problema de *combinação*, o *invariante* referente à escolha dos elementos é percebido. A docente reconhece, ainda, que há essa semelhança entre esses dois tipos de problemas, porém, não reconhece, mais uma vez o *invariante* da ordem contido nas *situações* combinatórias.

Quadro 25: Entrevista final - Classificação dos problemas quanto aos seus *invariantes* – *permutação*

Permutação	De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5, 7 e 9?
E: E o quarto? P: De quantas maneiras possíveis podem escrever números de quatro algarismos diferentes usando os algarismos 3,5,7 e 9. Esse aqui também é na mesma linha, a possibilidade de quantas vezes, quais os números eu posso formar com esses quatro números, só que de quatro algarismos, né isso?	

Assim como as demais análises realizadas por P sobre as *situações* e *invariantes* combinatórios, no problema de *permutação*, apesar da professora não reconhecer o *invariante* da ordem, o da escolha é apreendido.

Foi solicitado, ainda, que fossem analisados tais problemas a partir de suas diferenças e semelhanças. Esta análise foi bem parecida com a realizada na entrevista inicial, na qual a docente percebe a semelhança entre os problemas de *combinação* e *arranjo*, a partir do *invariante* da escolha, e acredita que os problemas de *produto cartesiano* e *permutação* também tenham características semelhantes.

E: Você percebe diferenças entre esses problemas?

P: *Peraê, deixa entender melhor esse problema.*

E: Certo.

[a professora relê o problema]

P: *O quê que eu percebo?*

E: As diferenças entre eles, tu percebe alguma? Se tem diferença?

P: *Eu acho que os dois do meio são bem parecidos e os dois [referindo-se aos problemas de combinação e arranjo].... o primeiro e o último são mais parecidos [referindo-se aos problemas de produto cartesiano e permutação].*

E: Os dois do meio são bem parecidos, mas eles têm alguma diferença ou não?

P: *Acho que não... aqui eu vou poder formar várias duplas diferentes, eu vou ter que formar Felipe com Sandra, olha.. quantas duplas diferentes podem ser formadas? Eu posso fazer Felipe com Sandra, com Carla, com Francisco. Depois eu posso fazer Sandra com... é isso ou tô enganada?*

E: Ele tá dando um grupo e tá pedindo pra formar duplas a partir desse grupo, justamente...

P: *Então eu posso formar vários tipos de duplas aqui...*

E: Pode.

P: *E aqui eu posso formar [referindo-se ao problema de arranjo]... o primeiro e segundo lugar de vários tipos, turma A com turma B ou turma A com turma C.. Eu acho que tem varias formas. Então eu acho que é bem parecido esses dois.*

Como apresentado anteriormente, a docente ministrou duas aulas sobre Combinatória, sendo a primeira de *produto cartesiano* e a segunda de *arranjo*. Sendo assim, foram retomadas também as aulas dadas pela professora, a fim de que a mesma identificasse os problemas trabalhados nas duas aulas.

E: Você deu duas aulas com dois problemas diferentes, a primeira aula era um problema a segunda aula era outro problema. Você consegue identificar quais foram esses problemas? No caso, o tipo de problema que você trabalhou com tua turma?

P: O primeiro foi esse... [referindo-se ao problema de produto cartesiano].

E: Que você identificou como *cartesiano*.

P: É o segundo tá bem parecido com esses dois [referindo-se ao problema de combinação e arranjo].

E: Certo, no caso, o segundo e o terceiro.

Conseguimos verificar um progresso da professora com relação à análise das *situações e invariantes* combinatórios.

Diferente do que foi percebido anteriormente, na entrevista inicial e no primeiro encontro do processo de formação continuada, com relação à denominação dos problemas combinatórios, em que a professora desconhecia a existência de diferentes tipos de *situações* combinatórias, após a intervenção percebe-se que a variedade de *situações* é reconhecida, mesmo que não saiba diferenciá-las ainda. Verifica-se, também, que, apesar da professora não conseguir nomear os problemas combinatórios, com exceção do *produto cartesiano*, há um reconhecimento, mesmo que não tão explícito, das características das *situações* em sua fala.

Destacamos que a não diferenciação entre os problemas de *arranjo* e *combinação*, leva-nos a acreditar que haja a necessidade de um aprofundamento maior nesta etapa da formação, para que a relação da ordem seja mais claramente percebida e reconhecida.

Vale ressaltar que não é o mais importante o reconhecimento das nomenclaturas usadas para distinguir os diferentes tipos de problemas, mas, sim, a percepção das características dessas *situações*, conhecimento este que a professora acumulou após a formação.

Enfatizamos também que durante as aulas ministradas pela docente tais características foram enfatizadas e estavam suficientemente claras durante as regências, o que nos leva a crer que há o *conhecimento especializado* da Combinatória, a partir do reconhecimento das *situações e invariantes* combinatórios além do que nos foi apresentado na entrevista final.

5.4.2 Conhecimento Didático do Conteúdo da Combinatória

No *conhecimento didático do conteúdo*, abordamos, de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), três domínios, sendo eles: conhecimento do conteúdo e os alunos, conhecimento do conteúdo e seu ensino e o conhecimento do conteúdo e o currículo. Contudo, como já relatado anteriormente, na atual pesquisa, não temos a intenção de analisar tais domínios isoladamente, e sim, observando-os como elementos integrantes de um domínio maior, o *conhecimento didático do conteúdo*.

5.4.2.1 Nível de dificuldade dos problemas combinatórios

Neste momento analisamos o *conhecimento didático do conteúdo* da Combinatória, especificamente o conhecimento didático do conteúdo e seus alunos, pois, de acordo com Ball et al (2008), é importante que os professores saibam supor possíveis questionamentos e dúvidas de seus alunos.

Durante a entrevista final, em comparação com a entrevista inicial, pôde-se verificar uma mudança com relação ao nível de dificuldade dos problemas combinatórios. A docente acredita como nas demais entrevistas realizadas, que o *produto cartesiano* é uma das *situações* de mais fácil compreensão para os alunos. A *situação* identificada com um nível de dificuldade maior, segundo a professora, é a *permutação*, o que difere da entrevista inicial realizada com a docente, na qual eram apontados os problemas de *arranjo* como os mais difíceis para seus alunos. Contudo, mais à frente a docente ressalta que o enunciado pode ser um complicador na resolução do problema.

E: Entre esses quatro, qual o que você acha que é o mais fácil pra eles?

P: Os três primeiros [referindo-se ao *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo*].

E: São mais fáceis? Consequentemente, o quarto [*permutação*] seria o mais difícil.

Em outro momento da entrevista, utilizando os protocolos das análises referentes ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, voltamos a questionar sobre o nível de dificuldade dos problemas combinatórios.

E: Vendo o problema agora certo, não necessariamente como o aluno resolveu, qual desses problemas você acha que os alunos teriam mais dificuldade?

P: *Dificuldade que você fala né...*

E: O problema mesmo, qual o que seria mais difícil para seus alunos?

P: *Esse [referindo-se ao protocolo da situação de produto cartesiano], porque a quantidade tá bem maior, mas também tô falando da minha turma. Oito tipos de sorvetes, quer dizer, sabores com 3 tamanhos diferentes... eles já teriam dificuldade porque seria muito grande.*

E: E se a gente diminuísse essa quantidade e colocasse números pequenos. Aí com relação ao que o problema pede, você acha que continuaria esse sendo o mais difícil? No caso, se todos os problemas tivessem números pequenos.

P: *É, todos davam pra eles responderem, só que diminuindo a quantidade.*

E: Certo...só que aí qual seria o mais difícil pra eles, o que você acha?

P: *Qual que eles teriam mais dificuldade?*

E: Isso.

P: *Acho que esse daqui [referindo-se ao protocolo da situação de permutação no contexto de porta-retratos].*

E: Por quê?

P: *É. Porque até pra eles arrumarem uma estratégia aqui seria mais complicado, assim desenhar os porta-retratos...identificar...acho que eles teriam mais dificuldade nesse, mesmo com números menores.*

E: Certo. E continuando no mesmo raciocínio, diminuindo a grandeza numérica, qual que seria o mais fácil?

P: *Esse daqui eu sei que eles fariam, que foi o exemplo que a gente trabalhou [referindo-se ao protocolo da situação de produto cartesiano no contexto de sorvete].*

Confirmamos, assim, que houve alterações na ideia inicial da professora, pois via o *arranjo* como a *situação* mais difícil para seus alunos resolverem, passando a perceber a *permutação* como o problema de natureza mais difícil para seus alunos. Acreditamos que todo o processo ocorrido (entrevista inicial e os encontros da formação continuada, incluindo as aulas ministradas e as entrevistas subjacentes a elas) auxiliou a docente a chegar a esta análise.

Averiguamos, então, que a opinião da docente durante a entrevista final ficou em acordo com os resultados obtidos em pesquisas anteriores (Pessoa e Borba (2009; 2010), Correia e Oliveira (2011) e Azevedo e Borba (2012)), as quais mostram o *produto cartesiano* como a *situação* de mais fácil resolução e a *permutação* como o problema com um grau de dificuldade maior.

5.4.2.2 O ensino da Combinatória nos anos iniciais

Assim como observado na entrevista inicial, percebemos ainda que a docente acredita que o ensino da Combinatória pode ser iniciado desde a Educação Infantil, exemplificando mais uma vez com uma *situação* de *produto cartesiano*, a fim de que

os alunos possam ir construindo este raciocínio combinatório ao longo de sua escolaridade.

E: Você acredita que esse conteúdo possa ser iniciado para os alunos menores?

P: *Com certeza, sempre de maneira lúdica para que seja facilitado o entendimento dele.*

E: O teu é 2º ano do Ensino Fundamental, para Educação Infantil, você acredita que ainda é possível?

P: *Eu acho que seria possível, assim, com figuras, de roupinhas, mas bem básico mesmo, duas blusas com duas saias para fazer a bonequinha. Acho que dava pra eles, acho que a partir do Grupo 5, do Grupo 6, acho que dava pra eles conseguirem. Não ampliar tanto, mas já uma pincelada, só pra começar a ter uma noção e depois ir desenvolvendo nos outros anos.*

E: E com seus alunos, como que foram essas aulas? Você acha que foram legais?

P: *Foram válidas.*

Observa-se que a professora reconhece que a Combinatória pode ser contemplada nos anos iniciais do Ensino Fundamental e que, posteriormente, seu ensino continue, a fim de que haja uma continuidade acerca desse conteúdo, o que condiz com o conhecimento horizontal do conteúdo discutido por Ball et al (2008).

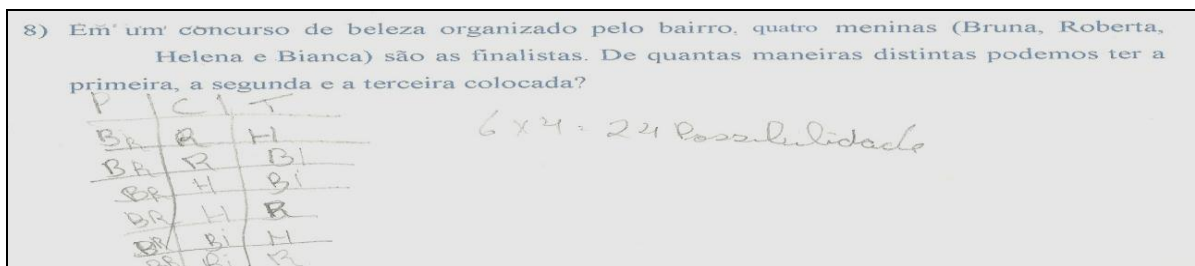
Ainda ao analisar o ensino da Combinatória a partir de sua prática, a docente acredita terem sido válidas as aulas sobre este conteúdo.

5.4.2.3 Desempenho e representações simbólicas de alunos dos anos iniciais

Durante a entrevista final, também foi solicitado que a docente analisasse alguns protocolos de resolução de problemas combinatórios por alunos. A análise foi feita a partir do desempenho (acertos e erros) e *representações simbólicas* de alunos com relação à Combinatória, além de refletirem sobre possibilidades de atividades para ajudar no desempenho de tais alunos.

A seguir, apresentamos os protocolos analisados e as respectivas sinopses das análises realizadas pela docente com relação aos possíveis erros dos alunos, durante a entrevista final.

Figura 25: Protocolo de resolução de aluno – *listagem sistematizada e generalizada*



Pessoa e Santos (2012a)

P: O que eu posso dizer sobre as estratégias que foram escolhidas?

E: É, se você acha que foram estratégias legais, se levaram o aluno a acertar o problema ou não...

P: O primeiro foi muito bom...

E: Por quê?

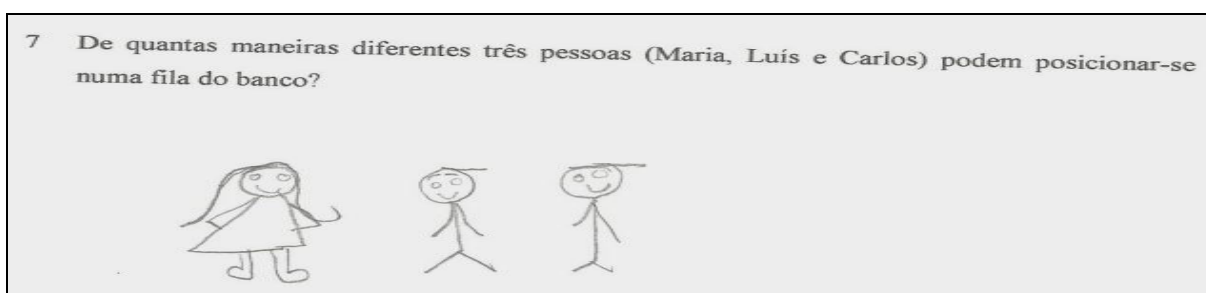
P: Porque ela fez um quadrado, um quadrinho e saiu colocando o nome dos alunos, pra saber a possibilidade e depois ela fez o cálculo de multiplicação finalizando.

A docente compreende a resolução do aluno, acreditando que ele tenha resolvido de duas maneiras a situação-problema apresentada: listagem e conta.

No que se refere à análise do protocolo, assim como Pessoa e Santos (2012a), acreditamos que P percebe que o aluno utiliza-se da *generalização*, porém, não sabe como mencionar esta ideia. De acordo com a fala acima, percebe-se que a docente conseguiu compreender a discussão sobre *generalização* discutidas durante a intervenção, mesmo que não consiga explicitar claramente tais ideias.

Segundo as autoras supracitadas, quando a criança se depara com problemas que envolvem um número maior de possibilidades, a mesma tende a buscar uma forma de simplificar a resolução do problema, de modo que não seja necessária a escrita de todas as possibilidades, utilizando-se da *generalização*.

Figura 26: Protocolo de resolução de aluno – *desenho* – não faz relação com a Combinatória



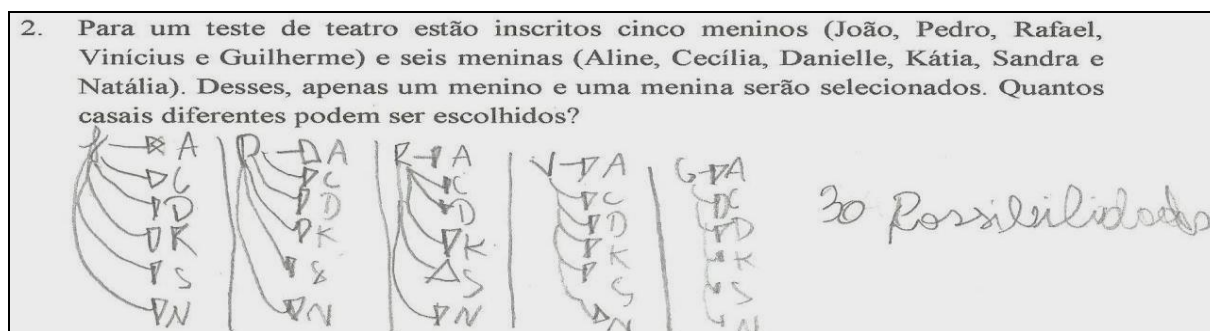
Azevedo (2012)

P: O segundo, ele desenhou, mas não chegou a ter uma resposta. Ele tinha que colocar o nome, pelo menos colocar o nome da criança pra saber as possibilidades, a gente teria que fazer mais desenhos pra saber a resposta completa.

Há um reconhecimento do desenho como uma *representação simbólica* válida para a resolução de problemas combinatórios. Ao analisar este protocolo, Azevedo (2012) afirma ter a explicitação de uma possibilidade, contudo, P ao analisar a Figura 26, constata que o aluno teve dificuldades em avançar na resolução.

A docente aponta duas dificuldades na resolução do aluno: a falta das demais possibilidades para a obtenção do acerto total e também a identificação com os nomes das pessoas nos respectivos desenhos, para que pudesse verificar se houve o acerto ou não nesta possibilidade, demonstrando, assim, *conhecimento didático* da Combinatória.

Figura 27: Protocolo de resolução de aluno – *árvore de possibilidades*



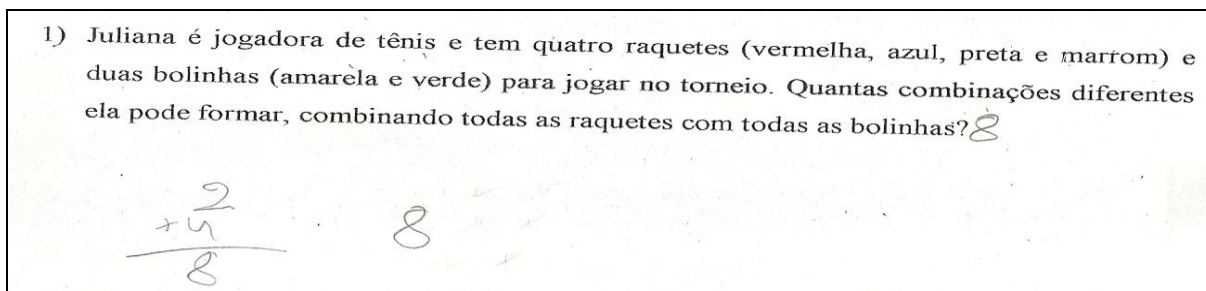
Azevedo (2012)

P: A terceira também foi muito boa a estratégia dela... ela colocou o nome de um e saiu colocando as letras iniciais das outras crianças depois ela chegou na resposta.

Apesar da docente não denominar a *representação simbólica* utilizada pelo aluno, há um destaque em sua fala, assim como Azevedo (2012) também ressalta, sobre a *sistematização* ocorrida na resolução do problema, o que, geralmente, ocasiona um percentual maior de acertos.

Batanero et al. (1996) apontam que a falta de resolução sistemática dos possíveis casos pode ser um agravante no não esgotamento das possibilidades, sendo um dos erros mais comuns durante as resoluções de problemas combinatórios.

Figura 28: Protocolo de resolução de aluno – *multiplicação adequada*



Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)²¹

P: O ultimo ele não usou a estratégia correta, ele somou.

A docente não percebe que o aluno realizou uma multiplicação e não uma adição, o que torna sua resolução correta.

Observa-se, assim, diante das análises acima, que a percepção da docente quanto aos possíveis erros e estratégias utilizados pelos alunos melhorou após as intervenções, realizando análises mais profundas e aplicando caso a caso reflexões realizadas na formação.

Segundo Ball et al (2008), no conhecimento do conteúdo e seu ensino os professores devem saber escolher quais exemplos usar para começar o trabalho com determinados conteúdos e quais exemplos devem usar para levar os alunos a aprender o conteúdo mais profundamente, ocorrendo um desenvolvimento. Este domínio, segundo tais autores, faz parte do *conhecimento didático do conteúdo*, dessa forma, faz-se uma relação entre o conhecimento do conteúdo (a Combinatória) e o conhecimento do ensino desse conteúdo.

Sendo assim, em seguida, buscamos verificar como a docente levaria tais alunos a progredirem, tendo como base as dificuldades destacadas na análise anterior.

Quando questionada sobre como poderia estar ajudando os alunos a avançarem, a docente reconhece que o uso do desenho seria uma boa alternativa. A professora acredita que o segundo e o último protocolo (Figura 26 e Figura 28) foram os que os alunos tiveram maior dificuldade e utiliza estes problemas para dar possíveis estratégias de intervenção para ajudar o aluno a progredir.

²¹ Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

E: Qual você acha que teve mais dificuldade?

P: *O problema que teve mais dificuldade ou a criança?*

E: A criança.

P: *A criança... a segunda e a última [referindo-se à Figura 26 e Figura 28].*

E: Aí você acredita que poderia ajudar esses alunos a melhorarem?

P: *Com a primeira eu faria assim: eu perguntaria quem era essa primeira pessoa, até porque ela colocou que era uma menina e dois meninos, dá pra saber que é uma menina e dois meninos, mas aí eu chegava e pergunta se essa é uma possibilidade que Maria esteja na frente, depois vem Luiz e depois vem Carlos... Daí eu perguntava “quem é esse menino?” Aí talvez ela dissesse que era Luiz, talvez ela dissesse que era Carlos, e vice-versa... aí eu diria “bote o início da letrinha pra eu saber quem é”... Aí depois disso eu perguntava “que outra maneira poderia ser?” Aí talvez ela procurasse fazer outro desenho que Luiz fosse na frente e ia perguntando “que outra maneira poderia ser”... até ela ir fazendo todos.*

E: Ir desenhando todos né?

P: *Uhum.*

E: E com a última?

P: *Eu pedia pra ela desenhar todas as possibilidades. Primeiro a gente desenha quatro raquetes e duas bolinhas para juntar, aí perguntava quantas combinações diferentes ela pode formar combinando todas as raquetes com as bolinhas. Aí eu pediria pra ela desenhar a primeira possibilidade e perguntaria a ela do mesmo jeito que eu fiz com a aluna anterior que outras possibilidades ela poderia ter com outras cores...*

A professora, apesar de reconhecer a importância de outras possíveis representações, acredita, assim como na entrevista inicial, que o desenho é a representação mais viável e o material manipulável o melhor recurso para o ensino da Combinatória com os seus alunos do 2º ano do Ensino Fundamental, o que é de se entender, pois como professora de 2º ano do Ensino Fundamental, busca alternativas que considera mais viáveis para facilitar a compreensão dos seus alunos.

E: Focando nos teus alunos, você falou com relação ao material manipulativo, pra utilizar as figuras, o concreto com a Educação Infantil. Com teus alunos do 2º ano, você acha que alguma outra estratégia é viável ou ainda não?

P: *Eu acho que se eu der uma situação-problema para eles, eu acho que ainda não daria certo.*

E: Fica complicado?

P: *É, fica complicado, até porque talvez se eu tivesse numa realidade diferente, numa escola talvez privada, mas aqui o nível é outro e isso a gente tem que levar em consideração. Talvez até uma situação-problema que, mesmo que a gente dissesse o que era, eles poderiam até chegar ao ponto de desenhar, acredito que dois ou três na minha sala ainda faz desenhando, mas outros não chegariam não, aí tem que ser realmente trabalhado com o concreto.*

Em outro momento da entrevista, a docente reafirma a importância do desenho como boa forma de seus alunos resolverem os problemas combinatórios e do material manipulável como uma ferramenta útil para ajudar nesse processo da aprendizagem.

E: Então eles poderiam utilizar alguma outra estratégia para estar resolvendo?

P: Se eles usariam alguma outra estratégia?

E: É.

P: Bem, além do manipulativo, eles podiam desenhar né... que é diferente né.

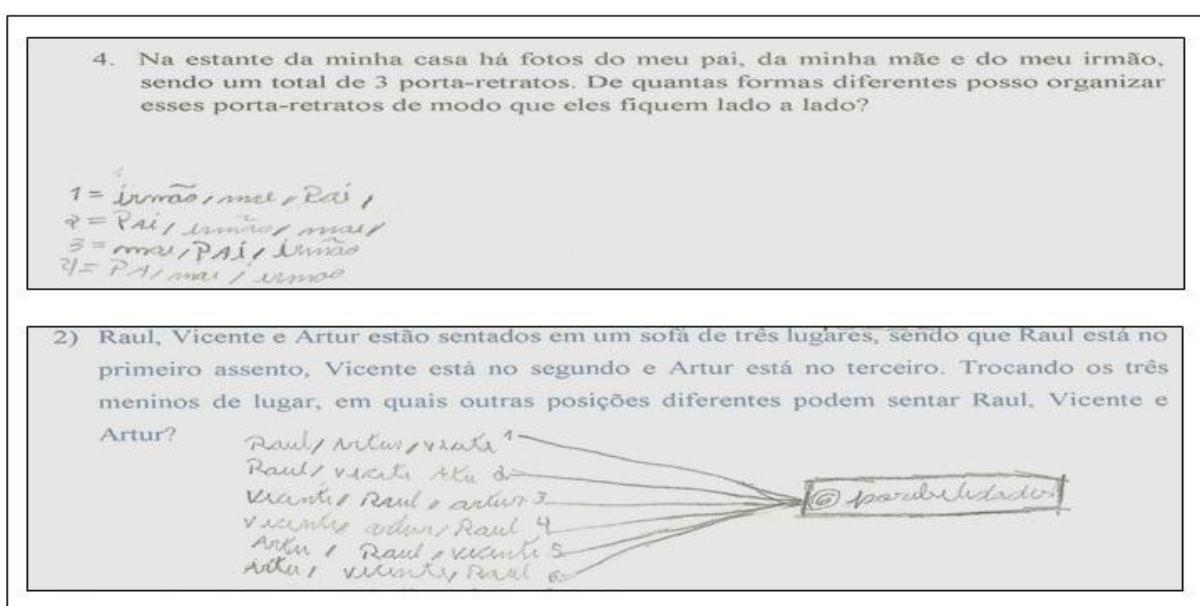
Percebe-se, então, que a docente faz a relação entre a *representação* e o nível em que sua turma se encontra, mobilizando seu *conhecimento didático*.

5.4.2.4 Compreensão do desenvolvimento do Raciocínio Combinatório

Assim como na entrevista inicial, na entrevista final, a docente também analisou protocolos de alunos de um estudo desenvolvido por Santos e Pessoa (2012) e por Pessoa, Santos e Silva (2013) sobre intervenções com o uso do material manipulável. Tais estudos se constituem de um pré-teste, sessões de intervenção nas quais se ensinavam sobre os problemas combinatórios e, por fim, pós-teste, a fim de verificar o desenvolvimento do raciocínio combinatório após intervenção.

Destacamos as análises dos protocolos referentes aos problemas de *permutação* e *combinação*. A seguir, apresentamos os protocolos e as respectivas análises realizadas pela professora.

Figura 29: Protocolo de resolução de pré-teste e do pós-teste do Aluno A para auxiliar nas análises do desenvolvimento do raciocínio combinatório – *permutação*



A professora analisou o possível desenvolvimento do raciocínio combinatório do aluno.

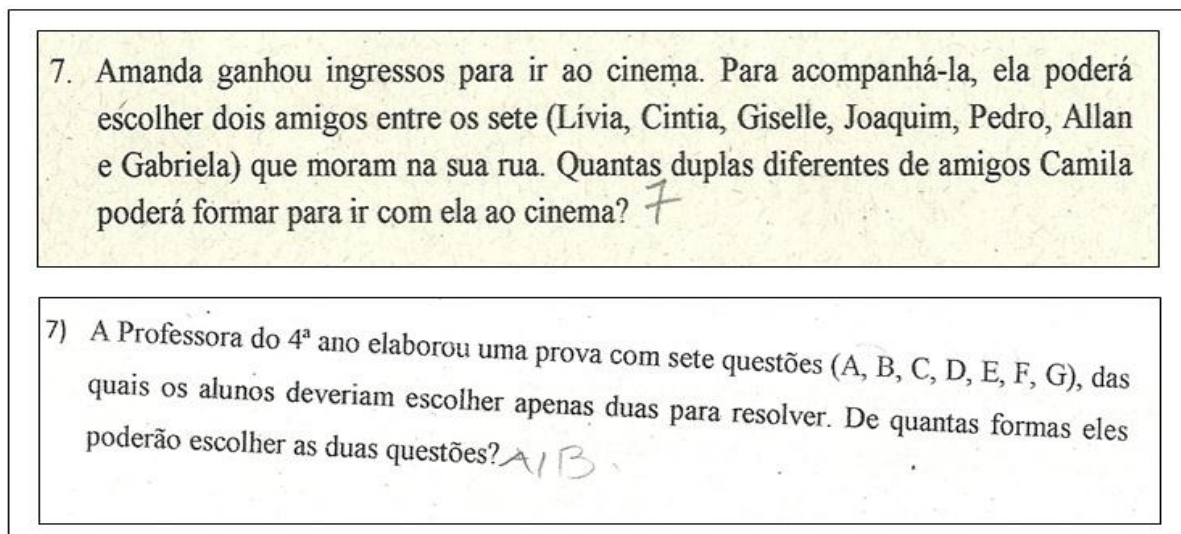
P: Pronto... esse daqui parecia já ter uma noção e depois ele só aprimorou, organizou o pensamento.

A docente reconhece que o aluno já tinha um conhecimento acerca da Combinatória ao listar algumas possibilidades. Contudo, com a intervenção, ele obteve um avanço, que seria a sistematização de seu raciocínio e o esgotamento das possibilidades, o que não havia acontecido no pré-teste. Santos e Pessoa (2012) consideram que para obter uma resolução sistemática o aluno deveria ter iniciado a listagem da quarta possibilidade com o elemento “irmão”, para que pudesse controlar os elementos de modo a visualizar as demais possibilidades que faltavam para concluir o problema.

Sendo assim, em consonância com Santos e Pessoa (2012), a professora aponta a organização (*sistematização*) como um avanço do aluno. Além disso, as autoras reconhecem o esgotamento das possibilidades no pós-teste como consequência da *sistematização* realizada. Assim, a professora demonstra um avanço, ao perceber que mesmo não acertando o resultado final no pré-teste, o aluno percebe os *invariantes* ao listar algumas possibilidades, mesmo que a professora não utilize esse termo, apesar disso, demonstra compreender o processo de resolução do aluno.

Posteriormente, foi realizada ainda a análise dos protocolos sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório do Aluno B com relação aos problemas de *combinação*.

Figura 30: Protocolo de resolução de pré-teste e do pós-teste do Aluno B para auxiliar nas análises do desenvolvimento do raciocínio combinatório – *combinação*



Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)²²

P: E aqui ele também ficou na mesma, tá igual ao segundo caso praticamente [referindo-se aos protocolos do Aluno B].

Pudemos observar, assim como a docente, que o aluno não teve avanços significativos. A professora chega a comparar o Aluno B ao protocolo analisado referente ao problema de *arranjo*, por não ter tido progresso. Entretanto, podemos inferir que no pós-teste o aluno entendeu um dos *invariantes* contidos nesta *situação*, uma vez que fez a escolha dos elementos de forma correta e listou uma possibilidade, porém não concluiu o raciocínio de acordo com o que estava sendo solicitado. Não podemos afirmar esta ideia por não ter tido uma entrevista com o aluno.

Apesar da docente não ter realizado análises profundas sobre os protocolos apresentados nesta fase da entrevista, a mesma conseguiu perceber e analisar de fato se houve ou não um avanço no raciocínio combinatório dos alunos, reconhecendo possíveis mudanças do pré para o pós-teste.

Para isto, a professora precisou mobilizar tanto o conhecimento acerca da Combinatória, verificando, mesmo que não explicitamente, as características existentes nas *situações* apresentadas, como o *conhecimento didático desse conteúdo* ao analisar as estratégias dos alunos.

²² Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

5.4.2.5 Planejamento de aula sobre Combinatória

Durante a entrevista final, foi solicitado que a docente produzisse um plano de aula, assim como nas demais etapas da pesquisa. Contudo, diferente dos demais momentos, questionamos que aspectos para a professora eram relevantes ao elaborar um planejamento sobre a Combinatória.

E: Você já planejou três aulas sobre a Combinatória, uma na entrevista e duas para as aulas, vai pra quarta agora. Quais aspectos você acha que é importante frisar no planejamento sobre a Combinatória? Quando você pensou nas suas aulas, que aspectos você pensou que era importante para que os alunos pudessem compreender?

P: *A primeira coisa é o problema. Que problema eu vou dar a eles pra eles entenderem, porque tem que ser através de exemplos, então... eu não posso chegar e dizer "ah o assunto é esse" eu tenho que pensar num problema para resolver junto com eles pra depois eu dar um só pra eles pra começarem. Então a primeira coisa, foi que nem eu falei na última aula que foi muito difícil pra eu planejar porque eu precisava de um exemplo que pudesse...*

E: Tem que ser um problema que esteja dentro do contexto...

P: *Então eu precisei, então na primeira coisa que eu penso é no problema, que problema eu vou dar pra aquela turma para trabalhar aquele conteúdo.*

Percebe-se o conhecimento do conteúdo e seu ensino, uma vez que a docente se preocupa em propor diferentes exemplos que ocasionem o avanço de seus alunos, assim como também encontramos o conhecimento do conteúdo e seus alunos, pois a mesma procura trabalhar situações-problemas verificando possíveis dúvidas que poderiam acontecer.

Ressaltamos também a presença do conhecimento do conteúdo e o currículo na fala da professora, ao relatar a dificuldade em encontrar materiais que dessem subsídios para a elaboração da aula anterior. Este dado é confirmado por Barreto, Amaral e Borba (2007) ao confirmarem a falta de orientações para os professores nos manuais dos livros didáticos.

Como relatado acima, ao término da entrevista final, foi solicitado que a professora realizasse um planejamento de aula. Para este plano a docente fez o uso do *produto cartesiano*, assim como no segundo plano elaborado, referente à Aula 1.

Figura 31: Planejamento de aula elaborado pela professora – *Entrevista Final*

TEMA DA AULA		OBJETIVOS	
→ <i>Análise combinatória - Produto cartesiano</i>		→ <i>Conseguir resolver o problema proposto, através do material manipulativo.</i>	
CONTEÚDO	TEMPO	PROCEDIMENTOS	RECURSOS UTILIZADOS
<i>Análise combinatória</i>	<i>50min.</i>	→ <i>Formar grupos de 4 alunos;</i> → <i>E dar aos grupos a situação-problema para que possam resolver.</i> → <i>Junto com o problema dar um material concreto para que os alunos possam manipular e conseguir encontrar estratégias para resolver o problema.</i> → <i>Depois os alunos deverão registrar a resolução em forma de desenho.</i>	→ <i>Papel colorido</i> → <i>Ofício</i>
ANEXAR ATIVIDADES UTILIZADAS NA AULA			

Nesse plano há o trabalho com o *produto cartesiano*, assim como na Aula 1, que corresponde ao segundo planejamento. Acreditamos que se houvesse tido um tempo maior para construção desse planejamento, no qual a professora disponibilizasse de materiais de pesquisa que auxiliassem na elaboração desse plano, a docente destacaria outro problema ainda não trabalhado, o que ocorreu na Aula 2, que corresponde ao terceiro planejamento.

Mais uma vez há o destaque para o uso do material manipulável e, assim como na Aula 2, este planejamento também foi pensado com a formação de grupos de alunos e o trabalho a partir da situação-problema. O planejamento construído pela docente neste momento e o método na aula 2 condiz com o estudo de Costa (2003 *apud* Rocha, 2011), o qual defende que o uso do material manipulável com grupos de alunos auxilia na construção do raciocínio combinatório.

Percebemos que o trabalho de resolução de problemas para o ensino de conteúdo é uma atividade válida e está interligado diretamente com o ensino da Combinatória e que os professores dos anos iniciais também tendem a fazer, assim como destacado por Rocha (2011). Dessa forma, identificamos na docente a construção do *conhecimento didático desse conteúdo* durante todo o processo proporcionado.

Destacamos, também, o enfoque no registro das possibilidades, visto que, de acordo com Toricelli e Grando (2007), o registro realizado pela criança é importante tanto para os alunos como para os professores, pois esses podem se tornar um caminho para compreender o raciocínio realizado e analisar possíveis evoluções da

criança.

Vale ressaltar que a professora se posicionou e fez uma crítica quanto a esta etapa da entrevista.

P: O professor ele nunca prepara a aula do nada, ele tem que fazer pesquisar, acho até que é por isso que ele tem direito a 5% de pesquisa, porque pra ele produzir uma aula, ele precisa pesquisar, ele vai procurar livros, ele vai procurar na internet. Não vai surgir assim de repente, pode até ser que surja do nada, tem gente que consegue pensar em uma aula muito fácil, mas depois ele vai ampliar aquela aula pra atingir outro objetivo e vai precisar ir pesquisando, aprofundando. Aí fica a minha crítica quanto a isso, porque é muito difícil chegar assim e fazer um planejamento.

Verificamos nesta fala da professora um compromisso com a organização do planejamento e as escolhas das atividades, ou seja, um compromisso com o ensino, como também percebido e destacado por Rocha (2011) ao entrevistar professores dos anos iniciais.

A reflexão da docente nos fez refletir sobre a solicitação que fizemos quanto aos planejamentos durante a entrevista inicial e final, percebendo que a falta de um estudo e pesquisa sobre o conteúdo a ser abordado no plano de aula afeta sua elaboração. Por isto, ressaltamos que, quando houve a possibilidade de pesquisar acerca do conteúdo (no segundo e terceiro planejamento, referentes à Aula 1 e à Aula 2), a docente propôs uma aula mais bem elaborada do que nos demais planos de aula.

Desta forma, ao compararmos as respostas e análises da professora entre a entrevista inicial e os demais instrumentos de coleta de dados (processo de formação continuada, as aulas ministradas, as entrevistas que sucediam às aulas e a entrevista final, assim como os planejamentos elaborados), percebemos que houve um considerável avanço. A docente passa a perceber que há diferentes tipos de problemas ao longo da pesquisa, o que não ocorria na entrevista inicial, na qual a mesma não reconhecia nenhuma *situação* combinatória. Na entrevista final, a professora obtém uma reflexão mais profunda acerca dos *invariantes* e, ainda, reflete sobre as diferentes *representações* utilizadas pelos alunos, mesmo que ainda não saiba defini-las, porém, reconhece a *sistematização* como uma estratégia válida para auxiliar o aluno na resolução dos problemas e percebe as generalizações nos casos analisados.

Verifica-se, então, que a formação realizada contribuiu na construção do conceito pela professora e, indiretamente, pelos seus alunos, principalmente na distinção das diferentes *situações* e seus *invariantes*, colaborando com o *conhecimento especializado do conteúdo* e o *conhecimento didático do conteúdo*, sendo este a Combinatória.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em sua pesquisa, Rocha (2011) averiguou a necessidade de conhecimentos mais aprofundados acerca da Combinatória pelos docentes, especificamente, o *conhecimento especializado deste conteúdo e o seu conhecimento didático*, no qual a organização de um processo de formação continuada poderia vir a ajudar tais docentes a ampliarem seus conhecimentos. Diante disso, neste estudo buscamos responder o seguinte questionamento: *um processo de formação continuada, baseada nas situações, nos invariantes e nas representações simbólicas da Combinatória, influenciaria nos conhecimentos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental?*

Para isto, este estudo teve como objetivo geral analisar o efeito de um processo de *formação continuada* sobre *Combinatória* nos conhecimentos da docente. De modo mais específico, buscamos verificar quais foram as mudanças de conhecimento, demonstradas nas reflexões e na prática da professora, após a intervenção.

O processo de formação continuada teve como base a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986), na qual apontam as *situações, invariantes e representações simbólicas* como alicerce para a construção de um conceito e os conhecimentos aqui pesquisados foram os que Shulman (2005) e Ball et al (2008) elencam como indispensáveis para a docência (*conhecimento especializado do conteúdo e o conhecimento didático desse conteúdo matemático, a Combinatória*).

A pesquisa se realizou a partir de uma entrevista inicial individual com a docente, na qual foram investigados os conhecimentos prévios da professora acerca do conteúdo abordado. Posteriormente, foi realizado um processo de formação continuada, de seis encontros, no qual participaram todas as professoras que atuavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental do turno vespertino da escola. Acreditamos ser importante a participação das demais docentes atuantes na escola no processo de formação, uma vez que a troca de conhecimentos possivelmente influencia no saber da professora aqui pesquisada.

No processo de formação foram enfatizadas as *situações, invariantes e representações simbólicas* existentes em cada tipo de problema combinatório, assim como alguns caminhos para o ensino desse conteúdo. Ao término dos encontros, foi realizada outra entrevista com a docente, a fim de verificar as

possíveis mudanças ocorridas nos seus conhecimentos após a intervenção. Vale ressaltar que ao longo da pesquisa foi solicitado que a docente elaborasse alguns planejamentos de aulas, sendo um na entrevista inicial, dois durante o processo de formação (para o quarto e o sexto encontro) e outro na entrevista final. A análise foi realizada de forma qualitativa, fazendo o contraponto entre os instrumentos utilizados para a coleta de dados.

Os dados analisados apontaram para uma necessidade de intervenção sobre o conteúdo de Combinatória, uma vez que nos mostram que havia uma limitação com relação ao *conhecimento especializado do conteúdo* e ao *conhecimento didático do conteúdo* por parte da professora.

A compreensão da docente com relação ao conteúdo abordado no início do estudo é vaga, contudo, mesmo assim, a professora nos mostra em algumas falas que acredita que o ensino deste conteúdo pode ser iniciado desde a Educação Infantil, mesmo que não contemple todas as *situações* combinatórias. Esse pensamento da professora, de certa forma, se assemelha ao que defendem Pessoa e Borba (2009), que acreditam ser possível o trabalho com a Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e com o estudo de Matias, Santos e Pessoa (2011) que mostram que alunos da Educação Infantil já são capazes de perceber alguns dos invariantes de problemas combinatórios. Entretanto, acreditamos que, possivelmente, neste momento do processo, na entrevista inicial, a professora tenha dado esta resposta muito mais por acreditar que esta seria a esperada pela entrevistadora do que por realmente acreditar que é possível este trabalho com crianças muito pequenas, o que pode ser constatado a partir de suas falas sobre o conteúdo Combinatória nesta mesma entrevista, as quais demonstram pouco conhecimento da docente sobre o mesmo.

Na diferenciação e classificação dos problemas Combinatórios, percebe-se, na entrevista inicial, que havia uma dificuldade por parte da professora. A docente mostrava não reconhecer que há diferentes tipos de problema na Combinatória. Com relação aos *invariantes* contidos nas diferentes *situações* combinatórias, alguns são percebidos em diferentes *situações*, mesmo que não claramente. Entretanto, durante o processo de formação e após esses encontros, na entrevista final, averiguamos uma resignificação com relação à existência de diferentes tipos de problemas combinatórios, no qual a docente passa a refletir mais claramente sobre

os problemas e suas características. Ressaltamos que houve uma melhor apreensão pela professora com relação ao *invariante* da escolha, contudo, o de ordenação ainda não foi totalmente compreendido, uma vez que a professora demonstra dificuldade em diferenciar os problemas de *arranjo* e *combinação* quanto à ordem.

Percebe-se ainda na fala da docente durante as entrevistas que a mesma reconhece o desenho como uma *representação simbólica* válida para ser utilizada pelos seus alunos e o material manipulável como uma forma de *representação* que possa vir a facilitar a aprendizagem do aluno e pudemos constatar durante as aulas observadas que a docente fez bom uso dessas *representações*. Nesta mesma linha de pensamento, alguns professores reconhecem o material manipulável como um recurso quase que essencial para o ensino da Combinatória nos anos iniciais, como constatado por Assis e Pessoa (2012), contudo, Pessoa e Santos (2012a) e Azevedo e Borba (2012) nos mostram que há outras possibilidades de ensino, como o lápis e o papel o uso de *software*.

Ressaltamos ainda que nas aulas ministradas pela professora, apesar de se utilizar das *representações* acima citadas, a mesma fez uso também de outras *representações*, como a listagem e a árvore de possibilidades, de forma organizada e sistemática, como focado no terceiro encontro do processo de formação. Segundo Pessoa (2009), a listagem é a *representação simbólica* mais utilizada para resolução de problemas combinatórios por alunos de diferentes níveis de escolaridade.

Destacamos, então, que após alguns encontros e reflexões acerca da Combinatória, a professora pesquisada fez uso de diferentes *representações* nas aulas ministradas. Mesmo que os alunos tenham utilizado o material manipulável e o desenho para resolver as situações apresentadas, acreditamos que o uso de outras *representações* auxilia na aprendizagem desse aluno. Essa ideia corresponde ao que Ball et al (2008) classificam como o *conhecimento do conteúdo e seus alunos*.

Não estamos aqui defendendo o não uso dos algoritmos, ao contrário, acreditamos que a fórmula e os algoritmos são sínteses de um conceito que facilitam a resolução de problemas referentes a esses conceitos, entretanto, é preciso valorizar as diferentes formas de *representação simbólica* que podem e devem ser utilizadas, sobretudo em situações com problemas que levam a um menor número

de possibilidades em qualquer nível escolar ou em qualquer situação de vida e no início do trabalho com o conceito, ou seja, antes da formalização.

Ao analisar protocolos referentes ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, foi possível verificar que nas duas entrevistas (inicial e final) há um reconhecimento por parte da docente das possíveis evoluções de alunos após terem participado de intervenções, reconhecendo a *sistematização* e a listagem de todas as possibilidades como um avanço dos alunos, como também verificando a necessidade de mais intervenções junto a alguns alunos, por não terem obtido êxito. Pudemos constatar essa reflexão da professora também durante os encontros do processo de formação ao analisar alguns protocolos e também o uso da sistematização como uma estratégia válida durante as aulas observadas.

Destacamos a resolução de problemas com os alunos como uma forma de ensino utilizada pela docente durante suas aulas, o qual se relaciona com o ensino de Combinatória e está ligado ao seu *conhecimento didático*, como observado por Rocha (2011). Esta forma de ensino foi utilizada em pesquisas de intervenção (PESSOA E SANTOS, 2012; AZEVEDO E BORBA 2012) com alunos dos anos iniciais e, junto com o destaque do tripé de Vergnaud (1986, 1996) – *situações, invariantes e representações*, foi um procedimento bastante válido no processo de ensino e aprendizagem da Combinatória.

Um aspecto por nós considerado é a possível aprendizagem que ocorreu durante a entrevista inicial pela docente, na qual a professora reflete sobre as respostas dadas, e, algumas vezes, solicita que retomemos algumas perguntas, a fim de que possa rever suas respostas. Destacamos, também, que a docente afirma ir reconhecendo e lembrando-se das características do conteúdo da Combinatória ao longo dessa entrevista.

Quanto aos planejamentos elaborados pela docente ao longo do processo, verificamos que a falta de materiais para pesquisa e estudo sobre o conteúdo influenciavam na elaboração do plano de aula. No segundo e terceiro planos construídos, que equivale à Aula 1 e à Aula 2, os planejamentos foram mais elaborados e condizentes com o que havia sido solicitado, utilizando-se dos *conhecimentos* aqui discutidos: do *conteúdo* e *didático do conteúdo*. Sendo assim, se faz necessário que os professores tenham materiais e tempo suficientes para a construção de suas aulas, de forma que possam oferecer caminhos facilitadores

para a aprendizagem dos alunos.

Pudemos, assim, constatar que houve um ressignificação nos conhecimentos da professora pesquisada, tanto no que se refere ao *conhecimento especializado do conteúdo* como ao *conhecimento didático do conteúdo*, ou seja, o conhecimento que a professora já possuía foi analisado e discutido durante o processo de formação continuada e, assim, pôde haver um avanço nesses conhecimentos.

Os resultados nos mostram que a formação continuada em Combinatória é uma ação importante, pois ajudou a professora a refletir sobre esse conteúdo que deve ser trabalhado desde os anos iniciais, tanto pela sua importância no desenvolvimento do raciocínio lógico, como afirmado por Borba (2010), quanto por já ser orientado pelos PCNs desde 1997 e por estarem sendo abordados nos livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BARRETO, AMARAL e BORBA, 2007), entretanto, vem sendo negligenciado na prática, provavelmente pela falta de aprofundamento de alguns professores em relação a este conceito. Uma boa formação, seja ela inicial ou continuada, possibilitará um trabalho mais amplo em sala de aula sobre o conteúdo da Combinatória.

Acreditamos, assim, que se faz importante que encontros como estes sejam constantes na formação docente, uma vez que levam os professores a refletirem sobre o conteúdo e ressignificarem seus conhecimentos.

Entendemos, porém, que outros estudos podem ser realizados em outros níveis de ensino, como os anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, assim como estudos que verifiquem como está sendo a abordagem desse conteúdo matemático na formação inicial. Acreditamos, ainda, que são válidos outros estudos que continuem a verificar a importância e concretização de processos de formação continuada de Combinatória, como estudos de abrangência longitudinal, a fim de que os professores possam aplicar, em suas salas de aula, constantemente os conhecimentos adquiridos na formação e, por outro lado, também seja analisado o desenvolvimento dos alunos a partir dos procedimentos utilizados em sala de aula, verificando se a metodologia utilizada na formação deu conta do processo de ensino e aprendizagem.

Diante do exposto, almejamos que com essa pesquisa maiores reflexões aconteçam sobre o ensino da Combinatória e, conseqüentemente, sobre como este

conteúdo está sendo abordado nas formações inicial e continuada dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Edilaine; GRANDO, Regina. A problematização em matemática através de histórias infantis: compartilhamento de experiências de educadoras da infância. **Anais...** 16º Congresso de leitura do Brasil. Campinas, 2007.

ALMEIDA, P. C. A.; BIAJONE, J. A formação inicial dos professores em face dos saberes docentes. In: **Anais...** 28ª Reunião Anual da Anped. Caxambu: 2005.

ALMEIDA, P. C. A.; BIAJONE, J. Saberes docentes e formação inicial de professores: implicações e desafios para as propostas de formação. In: **Educação e Pesquisa**. V. 33, n. 2, p. 281-295, São Paulo, 2007.

ARAÚJO, Kátia. **Os saberes docentes dos professores iniciantes do ensino superior: um estudo na Universidade Federal de Pernambuco**. (Dissertação de mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2005.

ASSIS, Adryanne; PESSOA, Cristiane. Formação continuada nos anos iniciais do Ensino Fundamental: a compreensão da Combinatória a partir dos significados, invariantes e representações. **Anais...** 16º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (XVI EBRAPEM). Canoas, 2012.

ASSIS, Adryanne; PESSOA, Cristiane. Um processo de formação continuada com professores dos anos iniciais: a Combinatória a partir dos significados, invariantes e representações simbólicas. **Anais...** 21º Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste (XXI EPENN). Recife, 2013a.

ASSIS, Adryanne; PESSOA, Cristiane. Formação continuada de professores dos anos iniciais: a compreensão da Combinatória a partir dos significados, invariantes e representações simbólicas. **Anais...** 65º Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (65º SBPC). Recife, 2013b.

ASSIS, Adryanne M^a R. B.; MAGALHÃES, Sthenio. Amor, Roma e Mora: O raciocínio combinatório nos livros didáticos do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental. In: **Anais...** 4º Encontro de Pesquisa Educacional em Pernambuco (IV EPEPE). Caruaru, 2012

AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades – com e sem uso de *software* – no ensino da Combinatória com alunos dos anos iniciais de escolarização. (Projeto de Qualificação) Programa de Pós-graduação em Educação

Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2012.

AZEVEDO, Juliana; COSTA, Débora Macêdo; BORBA, Rute. O impacto do uso do software árvor no desenvolvimento do raciocínio combinatório nos anos iniciais de escolarização. In: **Cadernos de trabalho de conclusão do curso de graduação em Pedagogia da UFPE**. Recife, 2010.

AZEVEDO, Juliana; COSTA, Débora Macêdo; BORBA, Rute. O impacto do software árvor no raciocínio combinatório. In: **Anais... 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM)**. Recife, 2011.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. O Ensino da Combinatória por meio da Construção de Árvores de Possibilidades com e sem o uso do software Diagramas de Árvor. In: **Anais...16º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (XVI EBRAPEM)**. Canoas, 2012

BALL, D.L. Research on teaching mathematics: making subject matter knowledge part of the equation. In: BROPHY, J. (Ed.) **Advances in research on teaching: Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction**. Greenwich, CT: JAI Press, 1991.V.2. pp.1- 47.

BALL, D.L.; THAMES, M.H. e PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? In: **Journal of teacher education**. 2008 v.59 n.5 pp. 389-407.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. In: **Anais... 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM)**. Recife, 2011.

BARRETO, Fernanda; AMARAL, Fábio; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. **Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia — UFPE**, Recife, v. 2, p. 1-21, 2007.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

_____.Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental.

Referencial curricular nacional para educação infantil. Brasília: MEC/SEF,1998. V.3

_____. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 10 de setembro de 2011.

_____. Ministério da Educação. **Plano Nacional de Educação.** 2001. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/leis_2001/l10172.htm>. Acesso em: 10 de setembro de 2011.

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: **Anais...** 10º Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia, 2010.

CARDIM, Viviane Rocha Costa; GRANDO, Regina Célia. Saberes sobre a docência na formação inicial de professores de matemática. **Anais...** 31º Reunião Anual da Anped. Caxambu, 2008.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. *Educar em Revista*, n. Especial 1/2011, p. 77-91. Editora UFPR. Curitiba, 2011.

COSTA, C.A. **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental.** São Paulo, 2003, 151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003

COSTA, Váldina Gonçalves da. A formação dos formadores de professores de matemática e a ludicidade. **Anais...** 29º Reunião Anual da Anped. Caxambu. 2006.

CURI, Edda; PIRES, Célia Maria. A formação Matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental face às novas demandas. **Anais...** 8º Encontro Nacional de Educação Matemática (VIII ENEM). Recife, 2004.

Curi, Edda. Conhecimentos matemáticos de professores polivalentes: a formação inicial em questão. **Anais...** 7º Encontro Paulista de Educação Matemática (VII EPEM). São Paulo, 2004.

CURI, E. **A Matemática e os professores dos anos iniciais.** São Paulo: Ed. Musa, 2005.

CURI, Edda. A formação matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental face às novas demandas brasileiras. **Revista Iberoamericana de Educación (Online)**. Publicação Eletrônica pela OEI, v. 37/4, p. 01-09, 2006.
FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

_____. **Pedagogia do Oprimido**. 11^a ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1982.

FUSARI, J. C. **A Formação Continuada de Professores no Cotidiano da Escola Fundamental**. Série Idéias, São Paulo, FDE, v. 12, 1992, pg. 34. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_12_p025-034_c.pdf>. Acesso em: 14 de setembro de 2011.

GAUTHIER, C. **Por uma teoria da pedagogia**. Pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí,(RS), Editora Unijuí, 1998.

GUIRADO, João Cesar; CARDOSO, Evelyn. Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. **Anais...** 9^o Encontro Paranaense de Educação Matemática (IX EPEM). Paraná, 2007.

LEITE, Maici; PESSOA, Cristiane; FERRAZ, Martha; BORBA, Rute. Softwares Educativos e Objetos de Aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. **Anais...** 10^o Encontro Gaúcho de Educação Matemática (X EGEM). Ijuí, 2009.

LIMA, Rita de Cássia; BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adulto: do início de escolarização ao término do ensino médio. **Anais...** 2^o Seminário Internacional de Educação Matemática (II SIEM). São Paulo, 2009.

LIMA, Itatiane; AMORIM, Natália; PESSOA, Cristiane. Aulas de Combinatória na Educação de Jovens e Adultos: como ocorrem na prática? In: **Cadernos de trabalho de conclusão do curso de graduação em Pedagogia da UFPE**. Recife, 2013.

MAHER, Carolyn; YANKELEWITZ, Dina. Representations as tools for building arguments. In: MAHER, Carolyn; POWELL, Arthur; UPTGROVE, Elizabeth (Editors). **Combinatorics and Reasoning**: Representing, Justifying and Building Isomorphisms. New York: Springer (2010)

MARTINS, Glauce; BORBA, Rute. Análise dos contextos apresentados em

problemas multiplicativos nos livros didáticos de alfabetização de adultos. **Anais... 3º Simpósio Internacional de Educação Matemática (III SIPEMAT)**. Fortaleza, 2012.

MATOS FILHO, M.A.S; PESSOA, Cristiane. Estruturas Multiplicativas: como os alunos compreendem os diferentes tipos de problemas?. In **Anais... 3º Simpósio internacional de pesquisa em educação matemática (III SIPEMAT)**. Recife, 2006.

MATIAS, Patrícia; SANTOS, Missilane; PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. **Anais... 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM)**. Recife, 2011.

MORGADO, Augusto, PITOMBEIRA DE CARVALHO, João, PINTO DE CARVALHO, Paulo & FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graffex, 1991.

MORELATTI, Maria Raquel M; FÜRKOTTRR, Monica; FAUSTINO, Monica P. Formação continuada de professores que ensinam matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental da rede municipal visando uma mudança no processo ensino e aprendizagem: avanços e dificuldades. **Anais... 9º Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo Horizonte. 2011.

NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora.(Org) **A Formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

PEDROSA FILHO, Celso. **Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7 – 8 anos)**. Mestrado Profissional em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, 2008.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Matemática**. Recife: SE, 2012.

PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. (Tese Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do

raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a serie. **Zetetike** – Cempem – FE – Unicamp – v17, n.31 – jan/jun – 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. **Anais...** 10º Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Salvador, 2010.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Do Young children notice what combinatorial situations require? **Anais...** 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME36). Taiwan, 2012.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais...** 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM). Recife, 2011.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita. Gato, Gota, Toga... A Combinatória no 5º Ano do Ensino Fundamental. **UNOPAR**. V. 13, n. 2, p. 35-48, Out. Londrina, 2012a.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita. Estudo de Caso: como duas crianças passam a compreender a combinatória a partir de intervenções? **Revista Eletrônica de Educação**. V. 6, n. 1, mai. 2012b.

PESSOA, Cristiane; SILVA, Monalisa. Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental. **Anais...** III Simpósio Internacional de Educação Matemática. Fortaleza, 2012.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita; SANTOS, Monalisa. Colar ou escrever? Alunos do 5º ano do Ensino Fundamental discutindo Combinatória a partir da resolução de problemas com material manipulativo ou com lápis e papel. **Anais...** 21º Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste (XXI EPENN). Recife, 2013.

PINHEIRO, Carlos & SÁ, Pedro de. O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. **Anais...** 9º Encontro Nacional de Educação Matemática (IX ENEM). Belo Horizonte, 2007.

PIRES, C.M.C. Reflexões sobre os cursos de licenciatura em Matemática. In **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: SBEM. (2001).

PUENTES, Roberto; AQUINO, Orlando; NETO, Armindo. Profissionalização dos professores: conhecimentos, saberes e competências necessárias à docência. **Educar em Revista**, Editora UFPR: Curitiba, Brasil, n. 34, p. 169-184, 2009.
RIVED. Rede Interativa Virtual de Educação. SEED/MEC. **Objeto de Aprendizagem Combinação**. Disponível em:
<http://RIVED.mec.gov.br/atividades/matematica/combinacao/combinacao.swf>
Acesso: 21 de fevereiro de 2013a.

RIVED. Rede Interativa Virtual de Educação. SEED/MEC. **Objeto de Aprendizagem Permutação**. Disponível em:
<http://RIVED.mec.gov.br/atividades/matematica/permutacao/permutacao.swf> Acesso:
21 de fevereiro de 2013b.

RIVED. Rede Interativa Virtual de Educação. SEED/MEC. **Objeto de Aprendizagem Arranjo**. Disponível em:
http://www.RIVED.mec.gov.br/site_objeto_ver.php?codobjeto=218 Acesso: 21 de
fevereiro de 2013c.

ROCHA, Cristiane de Arimatéia. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos**. Dissertação. Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2011.

ROCHA, Cristiane. FERRAZ, Martha. Conhecimentos de Professores de Pedagogia e Matemática sobre Problemas Combinatórios. **Anais...** 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM). Recife, 2011.

RODRIGUES, Renata; SOUZA, Silvana. Literatura infantil e Matemática: um diálogo lúdico e possível. **Anais...** 16º Congresso de leitura do Brasil. Campinas, 2007.

SANTANA, Michaelle; BORBA, Rute. O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores dos anos iniciais do ensino fundamental. **Anais...** 3º Simpósio Internacional de Educação Matemática (III SIPEMAT). Fortaleza, 2012.

SANTOS, Laís Thalita; PESSOA, Cristiane. **Relatório final de atividades do aluno de iniciação científica (IC) PIBIC/UFPE/CNPq**. Recife, 2012.

SANDOVAL, Ivone; TRIGUEIROS, Maria & LOZANO, Dolores. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. In: **Anais...** XII Comitê Interamericano de Educação Matemática. Querétaro, México, 2007.

SANTOS, Missilane; MATIAS, Patrícia; PESSOA, Cristiane. **O raciocínio combinatório na Educação Infantil**. Cadernos de TCC do CE-UFPE. 2011

SELVA, Ana; BORBA, Rute; CAMPOS, Tânia; BIVAR, Dayse; FERREIRA, Maria Neuza; LUNA, Maria Helena. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: O que compreendem? Que dificuldades apresentam? **Anais...** 2º Simpósio Internacional de Educação Matemática. Recife, 2008.

PESSOA, Cristiane; SILVA, Monalisa. Ensino de Combinatória para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de estratégias bem sucedidas levantadas em estudos anteriores. **Anais...** 65º Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (65º SBPC). Recife, 2013b.

SCHÖN, D. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (org.). **Os professores e sua formação**. 2 ed. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

SCHÖN, D. **Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artes Médicas: Artes Médicas, 2000.

_____. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. In: **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado**. V 9,2, 2005 (p.1-30)

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 9º ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

TORICELLI, Luana; GRANDO, Regina. O registro da criança possibilitando reflexões a partir de resoluções de problemas de matemática na Educação Infantil. **Anais...** 16º Congresso de Leitura do Brasil. Campinas, 2007.

VERGNAUD, Gérard. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, Thomas, Moser, Joseph & Romberg, Thomas. (Eds.), **Addition and subtraction: a cognitive perspective**. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: R. Lesh & M. Landau (Eds.). **Acquisition of mathematics: Concepts and process**. New York : Academic Press, 1983.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques**, , vol 10, nº2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

VERGNAUD, G. **El niño, las Matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria. Mexico : Trillas, 1991.

_____, Gérard.. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

_____, Gérard. (1986). **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas**. Análise Psicológica, 1. 1986.

ZEICHNER, K. Novos caminhos para o *practicum*: uma perspectiva para os anos 90. In: NÓVOA, A. (org.). **Os Professores e sua Formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992. pp.115-138.

APÊNDICE A – Entrevista Inicial

QUESTÕES DA ENTREVISTA INICIAL

SOBRE FORMAÇÃO E EXPERIÊNCIA DOCENTE

1º momento: identificar, conhecer e obter informações gerais do professor entrevistado.

- ❖ Idade:
- ❖ Universidade que se formou? Há quanto tempo se formou? Qual curso?
- ❖ Há quanto tempo leciona? (tempo de experiência)
- ❖ Leciona em qual(is) rede(s) no momento (pública e/ou privada)?
- ❖ Já lecionou em outra(s) rede(s)? Qual(is)?
- ❖ Tempo na escola atual? Qual a turma? Quanto tempo está nesta turma?

2º momento: conhecer e entender as experiências e os fatos da vida profissional, como também, da vida escolar do professor, e se eles influenciam na sua prática docente em relação ao ensino de Combinatória.

- ❖ Como eram as aulas de Matemática durante sua vida escolar?
- ❖ Você estudou Análise Combinatória? Você se lembra de como ocorreu sua aprendizagem dessa temática?
- ❖ Você se lembra do que trata essa temática?
- ❖ Você se lembra em qual nível se deu o ensino deste conteúdo durante sua vida escolar?
- ❖ Você já participou de algum projeto de formação direcionado para professores? Qual(is)? Por quanto tempo? Descreva um pouco esse(s) projeto(s). Foi abordado o tema Análise Combinatória? Influenciou a sua prática?

SOBRE O CONHECIMENTO DIDÁTICO DA COMBINATÓRIA

3º momento: Investigar os saberes matemáticos e didáticos do professor em relação ao tema Combinatória e, assim, entender como o professor pesquisado compreende e procede com relação ao ensino de Combinatória nos anos iniciais.

- ❖ Você tem o costume de ensinar Análise Combinatória para a sua turma?
- ❖ Podemos trabalhar com esta temática a partir de que ano? Por quê?
- ❖ Você conhece os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)? Como conheceu? Você os utiliza na preparação de suas aulas?

Leia atentamente a citação dos Parâmetros Curriculares Nacionais dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997, p. 40):

“Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.”

- ❖ Você concorda que seja possível esse trabalho com alunos dos anos iniciais?
- ❖ Com a carga horária semanal que você tem, há tempo para estudar, pesquisar e preparar aula? Como é a distribuição das suas aulas em relação às disciplinas?
- ❖ E na distribuição dos assuntos de Matemática, como você faz?
- ❖ Em linhas gerais, como é desenvolvido ou deveria ser o planejamento das aulas sobre Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental?
- ❖ Se você fosse planejar uma aula sobre essa temática, que aspectos você consideraria mais importantes? Como seria essa aula?
- ❖ Que recursos você acredita que pode utilizar para auxiliar seus alunos no ensino da Análise Combinatória?

SOBRE O CONHECIMENTO DO CONTEÚDO DE COMBINATÓRIA

4º momento: Diferenciar os problemas combinatórios a partir dos *significados e invariantes*.

Leia atentamente cada uma das questões abaixo:

1. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado? (**Permutação**)
2. Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Laís, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas? (**Combinação**)
3. Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação? (**Arranjo**)
4. Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas? (**Produto Cartesiano**)

(Pessoa e Borba, 2009; Pessoa e Santos, 2011)

- ❖ Que problemas combinatórios são esses? Você consegue diferenciar?
- ❖ Você consegue me dizer quais são as características de cada tipo de problema? O que eles têm de diferentes entre eles?
- ❖ Qual desses problemas você acredita que seus alunos teriam maior dificuldade? Por quê?
- ❖ Quais estratégias são possíveis de se utilizar para resolver esses tipos de problemas com seus alunos?

SOBRE O CONHECIMENTO DIDÁTICO DA COMBINATÓRIA

5º momento: Analisar, a partir de protocolos, o desempenho (acertos e erros) e *representações simbólicas* de alunos com relação à Combinatória.

Observe a seguir as estratégias de alguns alunos

Protocolo 1 - Pessoa e Santos (2012b)

6) Sem repetir as letras na mesma palavra, quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) podemos formar com as letras da palavra GATO?

Gato / Tago / Taga 3 possibilidades

Protocolo 2 - Santos e Pessoa (2012)

2. Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação? *3 formas*

Protocolo 3 - Azevedo e Borba (2012)

8. Quantas palavras, com e sem sentido, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

Resposta: *Roma, mulher, arvore, almanaque.*

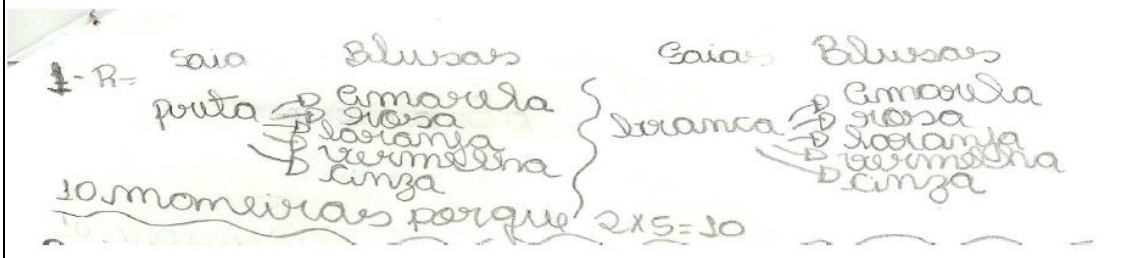
Protocolo 4 - Pessoa e Santos (2012b)

Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?

JUNTANDO 4 BLUSAS E 4 SHORTS

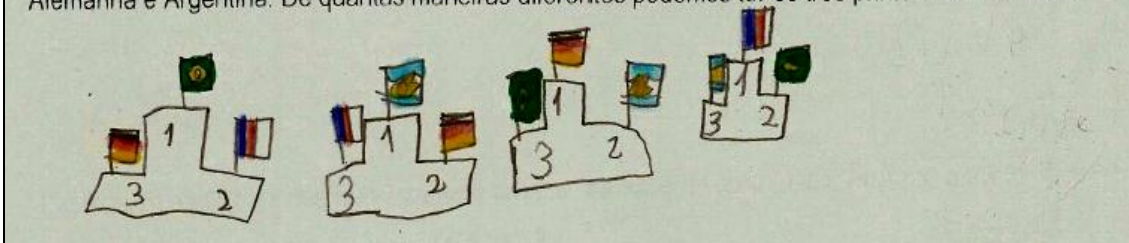
Protocolo 5 - Azevedo, Costa e Borba (2011)

1. Jane possui cinco blusas (amarela, rosa, laranja, vermelha e cinza) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias? (*produto cartesiano*)



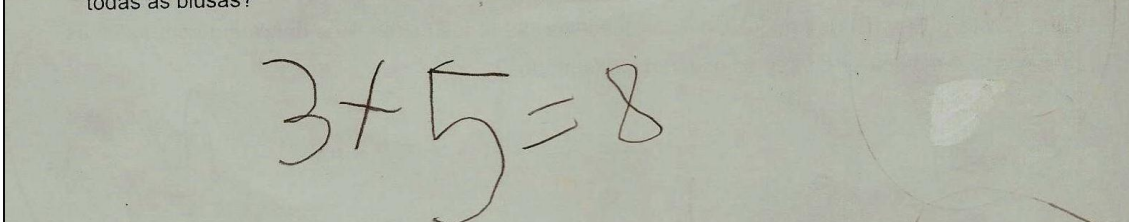
Protocolo 6 - Pessoa (2009)

3. As quartas de final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?



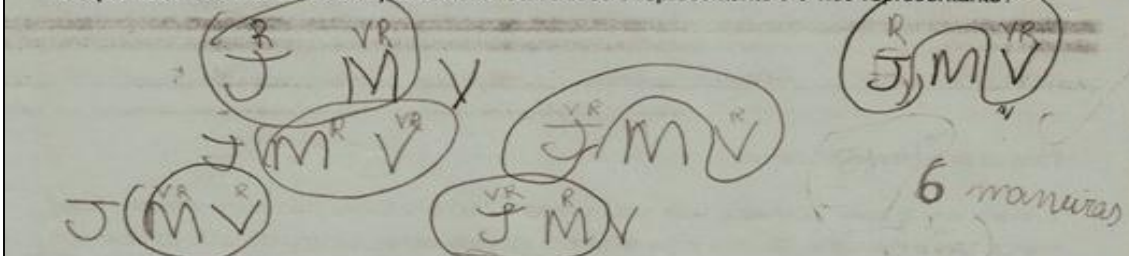
Protocolo 7 – Pessoa e Borba (2009)

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?



Protocolo 8 – Pessoa (2009)

5. Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?



Protocolo 9 – Pessoa (2009)

6. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? 12 - Porquê $4 \times 3 = 12$

Protocolo 10 – Pessoa e Borba (2009)

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?

- ❖ Que erros você acredita que eles poderiam cometer em cada um desses problemas?
- ❖ O que você acha das estratégias (formas de resolução) que eles usaram para resolver os problemas?
- ❖ Quais alunos você acredita ter tido maior dificuldade? Por quê?
- ❖ Como você poderia ajudar esses alunos a progredir?

6º momento: Analisar as perspectivas do professor sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, através de protocolos.

- ❖ Os alunos representados pelos exemplos abaixo participaram de um pré-teste, duas intervenções, nas quais foram ensinados problemas de Combinatória para eles, e um pós-teste. Veja o que esses alunos fizeram no pré-teste e no pós-teste e comente o que aconteceu com eles.

Protocolo 11 – Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)²³

1. Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?

forma 2 pares e dançam
uma menina!!

- 1) Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?

1- vermelha e amarela
2- verde e preta
3- amarela e azul
4- marrom e amarela
5- preta e amarela

eu consigo formar 5 pares de raquetes e bolinhas

Protocolo 12 – Pessoa e Santos (2012b)

4. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?

BOTANDO A FOTO DE CADA UM NOS TRÊS

PORTA-RETRATOS

Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?

R, A, V | V, A, R | A, V, R
R, V, A | V, R, A | A, R, V
2 + 2 + 2 = 6 POSSIBILIDADES

²³ Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

Protocolo 13 – Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)²⁴

2. Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação? *3*

2) Maurício, Tânia e André formam a comissão de eventos da escola. Eles precisam escolher entre eles um presidente e um vice. De quantas e quais formas diferentes poderemos ter essa escolha? *1, 2, 3*

Maurício Tânia André
1 2 3

Protocolo 14 – Pessoa e Santos (2012b)

Para a festa de aniversário de Amanda poderão ser convidados cinco amigos entre os sete (Livia, Cintia, Giselle, Joaquim, Pedro, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. Quantos grupos diferentes de cinco amigos Amanda poderá formar para ir à sua festa? *8 formas diferentes*

7) A Professora do 4º ano elaborou uma prova com seis questões (A, B, C, D, E, F), das quais os alunos deveriam resolver apenas três. De quantas formas eles poderão escolher as três questões?

A, B, C, D, E, F
A, B, C, D, E, F
A, B, C, D, E, F
A, B, C, D, E, F
A, B, C, D, E, F
A, B, C, D, E, F
A, B, C, D, E, F
A, B, C, D, E, F

8 x 6 = 54 possibilidades

7º momento: Pedir para fazer um planejamento de uma aula.

²⁴ Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

APÊNDICE B – Entrevista Final

QUESTÕES DA ENTREVISTA FINAL

SOBRE O CONHECIMENTO DIDÁTICO DA COMBINATÓRIA

1º momento: Investigar os saberes matemáticos e didáticos do professor em relação ao tema Combinatória e, assim, entender como o professor pesquisado compreende e procede com relação ao ensino de Combinatória nos anos iniciais.

- ❖ Você acredita que essa temática trabalhada possa ser dada na sua turma?
- ❖ Podemos trabalhar com esta temática a partir de que ano? Por quê?
- ❖ Você concorda que seja possível esse trabalho com alunos dos anos iniciais?
- ❖ Se você fosse planejar uma aula sobre essa temática, que aspectos você consideraria mais importante? Como seria essa aula?
- ❖ Que recursos você acredita que pode utilizar para auxiliar seus alunos no ensino da Análise Combinatória?

SOBRE O CONHECIMENTO DO CONTEÚDO DE COMBINATÓRIA

2º momento: Diferenciar os problemas combinatórios a partir dos *significados e invariantes*.

Leia atentamente cada uma das questões abaixo:

1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia cinco opções de comida (cachorro-quente, coxinha, empada, brigadeiro e bolo) e quatro tipos de bebida (suco de laranja, suco de morango, refrigerante e água). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida e um tipo de bebida?
2. Felipe, Sandra, Carla, Francisco, Henrique e Ana vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?
3. Cinco turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e segundo lugar no torneio?
4. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5, 7 e 9?

(Azevedo, Costa e Borba, 2010)

- ❖ Que problemas combinatórios são esses? Você pode diferenciar?
- ❖ Você consegue me dizer quais são as características de cada tipo de problema? E quais as semelhanças e diferenças entre eles?
- ❖ Qual desses problemas você acredita que seus alunos teriam maior dificuldade? Por quê?
- ❖ Qual eles teriam maior facilidade em resolver? Por quê?
- ❖ Quais estratégias são possíveis de se utilizar para resolver esses tipos de problemas com seus alunos?

SOBRE O CONHECIMENTO DIDÁTICO DA COMBINATÓRIA

3º momento: Analisar, a partir de protocolos, o desempenho (acertos e erros) e *representações simbólicas* de alunos com relação à Combinatória.

Observe a seguir as estratégias de alguns alunos:

Protocolo 1 – Pessoa e Borba (2009)

8) Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, quatro meninas (Bruna, Roberta, Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

Protocolo 2 – Azevedo (2012) - qualificação

7 De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

Protocolo 3 – Azevedo (2012) - qualificação

2. Para um teste de teatro estão inscritos cinco meninos (João, Pedro, Rafael, Vinícius e Guilherme) e seis meninas (Aline, Cecília, Danielle, Kátia, Sandra e Natália). Desses, apenas um menino e uma menina serão selecionados. Quantos casais diferentes podem ser escolhidos?

Protocolo 4 – Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)²⁵

1) Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?

²⁵ Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

- ❖ O que você pode dizer sobre as estratégias escolhidas pelos alunos?
- ❖ Que erros você acredita que eles poderiam cometer em cada um desses problemas?
- ❖ Quais alunos você acredita ter tido maior dificuldade? Por quê?
- ❖ Como você poderia ajudar esses alunos a progredir?

4º momento: Analisar as perspectivas do professor sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório, através de protocolos.

- ❖ Os alunos representados pelos exemplos abaixo participaram de um pré-teste, duas intervenções, nas quais foram ensinados problemas de Combinatória para eles, e um pós-teste. Veja o que esses alunos fizeram no pré-teste e no pós-teste e comente o que aconteceu com eles.

Protocolo 5 – Santos e Pessoa (2012)

4. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?

1 = irmão, mãe, pai
 2 = pai, irmão, mãe
 3 = mãe, pai, irmão
 4 = pai, mãe, irmão

2) Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?

Raul, Artur, Vicente 1
 Raul, Vicente, Artur 2
 Vicente, Raul, Artur 3
 Vicente, Artur, Raul 4
 Artur, Raul, Vicente 5
 Artur, Vicente, Raul 6

@parabéns

Protocolo 7 – Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)²⁶

2. Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?

Quem tiver com mais voto ganha

- 2) Mauricio, Tânia e André formam a comissão de eventos da escola. Eles precisam escolher entre eles um presidente e um vice. De quantas e quais formas diferentes poderemos ter essa escolha?

Por via fazer 1 forma diferente eles não escolhem na escola dele o que ele vai fazer e ele vai fazer uma caixa para o colega de lado o bobo assim

Protocolo 8 – Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)²⁷

5. Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?

formam 5 peças 1. Sabonete 1 blusa !!

- 5) Uma padaria prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de oito tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite, mandioca, laranja e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando cada tamanho com cada sabor?

*Pequeno - morango - coco - laranja
médio - chocolate - doce de leite - banana
Grande - brigadeiro - mandioca*

*ela poderia montar
6 formas de pequeno
médio e grande com
todas as combinações*

²⁶ Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

²⁷ Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

Protocolo 9 – Protocolos não publicados da pesquisa de Pessoa, Santos e Silva (2013)²⁸

7. Amanda ganhou ingressos para ir ao cinema. Para acompanhá-la, ela poderá escolher dois amigos entre os sete (Livia, Cintia, Giselle, Joaquim, Pedro, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. Quantas duplas diferentes de amigos Camila poderá formar para ir com ela ao cinema? 7

7) A Professora do 4^a ano elaborou uma prova com sete questões (A, B, C, D, E, F, G), das quais os alunos deveriam escolher apenas duas para resolver. De quantas formas eles poderão escolher as duas questões? A/B

5º momento: Pedir para fazer um planejamento de uma aula.

6º momento: Avaliar a formação.

- ❖ Você acredita que a formação ajudou a construir os conhecimentos deste conteúdo?
- ❖ O que poderia ser mudado e/ou acrescentado na formação?

²⁸ Esses protocolos são do acervo do estudo de Pessoa, Santos e Silva (2013) e, por não terem sido publicados pelas pesquisadoras, não há as inferências realizadas por elas.

