



Universidade Federal De Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-graduação em Matemática

**O Problema Inverso para Equilíbrios
Relativos Poligonais**

Marcelo Pedro dos Santos

Tese de Doutorado

Recife
2014

Universidade Federal De Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Marcelo Pedro dos Santos

O Problema Inverso para Equilíbrios Relativos Poligonais

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal De Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *Eduardo Shirlippe Goes Leandro*

Recife
2014

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

S237p Santos, Marcelo Pedro dos
O problema inverso para equilíbrios relativos poligonais. /
Marcelo Pedro dos Santos. – Recife: O Autor, 2014.
76 f.: il., fig.

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN, Matemática, 2014.
Inclui referências e apêndices.

1. Mecânica celeste. 2. Configurações centrais. 3. Equilíbrios
relativos. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Goes (orientador). II.
Título.

521 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2014-172

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: _____
Eduardo Shirlippe Goes Leandro, *UFPE*
Orientador

Hildeberto Eulálio Cabral, *UFPE*

Fernando Antônio Nóbrega Santos, *UFPE*

Luís Fernando de Osório Mello, *UNIFEI*

Fábio dos Santos, *UFS*

O PROBLEMA INVERSO PARA EQUILÍBRIOS RELATIVOS POLIGONAIS

Por
Marcelo Pedro dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
RECIFE, 21 DE FEVEREIRO DE 2014.

À minha família.

Agradecimentos

Primeiro gostaria de agradecer à Deus, por permitir a elaboração deste trabalho. O doutorado e a tese são fruto de muito esforço, abnegação pessoal e ajuda de muitas pessoas presentes ao longo do processo.

Sendo assim quero expressar aqui meus agradecimentos à minha família que sempre me apoiou, a minha mãe por sua força, e a minha namorada Bárbara sempre presente nos momentos mais difíceis.

Agradeço também aos meus amigos pela ajuda e aos colegas do grupo de Mecânica Celeste da UFPE. Agradeço aos professores César Castilho, Marcos Rabelo, Miguel Loayza, Evilson Vieira e Eduardo Leandro pelos conhecimentos transmitidos durante as disciplinas. Pelo incentivo apoio e amizade devo agradecer também a uma pessoa que foi muito importante nesta caminhada, o professor Severino Bezerra. Agradeço ao meu professor Francisco Expedito de Barros, "Guri", pela amizade e incentivo em estudar Matemática.

Agradeço ao meu orientador Eduardo Leandro por sua paciência, presteza, capacidade de motivação e profissionalismo com que me orientou, e pelos conhecimentos repassados durante as disciplinas e a orientação.

Agradeço à funcionária Tânia por sua preocupação, atenção e simpatia, durante todo o doutorado.

Agradeço às três universidades das quais fui professor durante meu doutorado: UFPE, UFRN e UFRPE; em especial as duas últimas por terem me apoiado tornando meus encargos compatíveis com meu estudo.

Agradeço fortemente à CAPES pelo auxílio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível. Enfim agradeço a todos que contribuíram para este momento tornar-se possível.

"(...) nunca nos tornaremos Matemáticos, por exemplo, embora nossa memória possua todas as demonstrações feitas por outros, se o nosso espírito não for capaz de resolver toda espécie de problemas;(...)"
—RENÉ DESCARTES (Regras Para Orientação do Espírito. ([14],
pág.12)

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo para o problema de saber quais massas postas nos vértices de polígonos homotéticos dão origem a um equilíbrio relativo do Problema de N Corpos. Tentamos generalizar o Teorema de Perko-Walter-Elmabsout variando o número de polígonos, como também variando o expoente do potencial associado ao problema. Assim obtemos também resultados para o Problema de N Vórtices de Helmholtz.

Palavras-chave: Problema de N Corpos. Configurações Centrais. Equilíbrios Relativos. Problema Inverso. Teorema de Perko-Walter-Elmabsout.

Abstract

In this work we present a study for the problem of knowing which masses placed at vertices of regular homothetic polygons give rise to a relative equilibrium of the N-Body Problem. We generalise the Perko-Walter-Elmabsout Theorem by changing the number of polygons in the configuration, and by also changing the exponent of the potential related to the problem. This way we get results also on the N Vortex of Helmholtz Problem.

Keywords: N-Body Problem. Central Configurations. Relative Equilibria. Inverse Problem. Perko-Walter-Elmabsout Theorem.

Lista de Figuras

2.1	Função $\xi_p, N = 4, p = 1, 2, 3, 4.$	34
2.2	Função $\xi_p, N = 5, p = 1, 2, 3, 4, 5.$	34
2.3	Função $\xi_p, N = 6, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$	35
2.4	Função $\xi_p, N = 7, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$	35
2.5	Função $\xi_p, N = 12, p = 1, \dots, 12.$	36
2.6	Função $\xi_p, N = 20, p = 1, \dots, 20.$	36
3.1	Função $h_p, N = 5, p = 3.$	53
3.2	Função $g_p, N = 5, p = 3.$	53
3.3	Função $\Gamma_p(1, r)$ para $N = 5, p = 3.$	54
4.1	Função $\Gamma_1(1, x, 0.5), N = 4$ para x no intervalo $(0.1, 0.4)$	61
4.2	Função $\Gamma_1(1, x, 0.5), N = 4$ para x no intervalo $(0.6, 0.9)$	61
4.3	Função $\Gamma_1(1, x, 0.5), N = 4$ para x no intervalo $(1.2, 3)$	62
4.4	Função $\Gamma_1(1, x, 0.5), N = 4$ para x no intervalo $(2, 20)$	62
4.5	Função $\Gamma_1(1, x, 0.5), N = 4$ para x no intervalo $(10, 100)$	62

Sumário

1	Configurações Centrais Poligonais	12
1.1	Introdução	12
1.2	Problema de N corpos	13
1.3	Configurações Centrais: Alguns resultados gerais	14
1.4	Preliminares	16
1.5	O problema de polígonos homotéticos em equilíbrio relativo	18
1.6	Matrizes circulantes e autovetores	21
1.7	Redução a subsistemas	23
1.8	Autovalores das matrizes A_{TS}	25
2	Caso de um Polígono	27
2.1	Equações para o caso de um polígono.	27
2.2	Estudo dos autovalores de A_{11}	28
2.3	Autovalor $\lambda_{N-1}(A_{11})$	29
2.4	Análise dos autovalores de A_{11} no caso $a = 2$.	31
2.5	Comportamento de ξ_p tendo a como parâmetro	33
3	Dois Polígonos Homotéticos	37
3.1	Objetivo	37
3.1.1	As matrizes de configuração	37
3.1.2	Subsistemas	38
3.2	Análise dos subsistemas	39
3.2.1	Função auxiliar e sua expansão em série de Taylor	39
3.2.2	Análise da função h_p no intervalo $(0, 1)$	41
3.2.3	Caso $p \notin \{\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, N - 1, N\}$.	45
3.2.4	Casos excepcionais	47
3.2.4.1	Casos $p = \frac{N}{2} - 1$ ou $p = N - 1$.	47
3.2.4.2	Casos $p = \frac{N}{2}$ ou $p = N$.	49
3.2.5	Análise da função g_p no intervalo $(0, 1)$	50
3.2.6	Análise das funções h_p e g_p no intervalo $(1, \infty)$.	51
3.2.7	Conclusão sobre os determinantes dos subsistemas	52
4	Resultados sobre o caso de vários polígonos	55
4.1	Propriedades da função determinante dos subsistemas	55
4.1.1	Caso de 4 polígonos.	57

4.1.2	Caso de 3 polígonos.	60
4.2	Análise para o caso de um número qualquer de polígonos.	63
4.2.1	Caracterização da velocidade angular	64
4.3	Questões a responder e projetos futuros.	65
	Referências	67
	Apêndices	70
	Apêndice A: Comentário sobre o erro apontado em [10]	70
	Apêndice B: Critério para excluir os vetores $v_{\frac{N-1}{2}}$ e v_{N-1}	73

Configurações Centrais Poligonais

1.1 Introdução

O problema de N corpos é o problema central da Mecânica Celeste, e consiste em determinar qual é a dinâmica de corpos sujeitos à Lei da Gravitação Universal e à Segunda Lei de Newton. Desde que foi estabelecido no século XVII, tal problema tem atraído a atenção de grandes matemáticos, entre os quais podemos citar: Newton, Euler, Lagrange, Dirichlet, Weierstrass, Mittag-Leffler, Liouville, Poincaré, Conley, Smale, etc.

Apesar dos esforços, depois de mais de 300 anos, o problema permanece não-solucionado para o caso $N > 2$. São conhecidos apenas alguns tipos de soluções para esse problema. Entre essas soluções, as mais conhecidas são as ditas soluções homográficas, cujas condições iniciais são o que chamamos de configurações centrais. Portanto, as configurações centrais assumem um papel muito importante em Mecânica Celeste. Um tipo especial de solução homográfica são os equilíbrios relativos, e nesta tese tratamos do caso especial de equilíbrios relativos poligonais. As equações de Helmholtz que regem a dinâmica de fluidos incompressíveis têm uma similaridade com as equações que surgem no caso de N Corpos, e os métodos tratados aqui englobam também esse importante modelo físico.

No Capítulo 1, enunciamos resultados gerais sobre o problema de N corpos e também resultados existentes na literatura acerca do problema abordado na tese, bem como deduzimos as equações que o regem, e enunciamos algumas propriedades de matrizes circulantes. Usamos a decomposição espectral das matrizes circulantes para reduzir as equações do problema a subsistemas de equações.

No Capítulo 2, discutimos o problema inverso para o equilíbrio relativo de um polígono, obtendo resultado similar ao teorema de Perko-Walter-Elmabsout para o caso de um potencial logarítmico, e evidências numéricas que o teorema é válido para um potencial qualquer com expoente positivo.

No Capítulo 3, discutimos o problema inverso para o equilíbrio relativo no caso de dois polígonos homotéticos, demonstrando que para certos potenciais as massas em cada polígono devem ser iguais entre si. Tais potenciais incluem o potencial logarítmico e o newtoniano.

No Capítulo 4, tentamos generalizar para vários polígonos os resultados do capítulo 3, e conseguimos fazer isto com certas hipóteses sobre os raios dos polígonos. Encerramos o capítulo apontando nossos projetos futuros.

Muitos de nossos resultados e conjecturas foram baseados em visualizações das funções através do programa MAXIMA. As figuras apresentadas no trabalho são feitas neste programa. O MAXIMA é um sistema de computação algébrica descendente do sistema MACSYMA, um sistema de algebra computacional desenvolvido na década de 1960 no MIT. O MAXIMA é um

"software livre" cuja licença é de domínio público.

1.2 Problema de N corpos

Vamos apresentar o problema de N corpos. Para uma exposição mais abrangente consulte [4, 20, 31].

Considere N corpos pontuais interagindo devido à força de atração gravitacional. Suponha que os corpos possuem posições $q_j \in \mathbb{R}^d$ ⁽¹⁾ e respectivas massas m_j , as quais como hipótese natural podemos supor que são reais e positivas (porém, no contexto de nosso trabalho vamos permitir que sejam complexas, e quando quisermos aludir ao caso real faremos uma menção explícita). Pela Lei da Gravitação de Newton, a força de interação gravitacional entre dois corpos é diretamente proporcional ao produto das massas dos dois corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Por uma adequada escolha das unidades de medida, podemos considerar que a constante de proporcionalidade é 1. A força agindo no i -ésimo corpo devido à presença do j -ésimo tem mesma direção e sentido que o vetor unitário

$$\frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|}. \quad (1.1)$$

Assim a força resultante no i -ésimo corpo devido à presença dos demais é dada pela expressão

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_i m_j}{\|q_j - q_i\|^2} \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|^3}. \quad (1.2)$$

Pela Segunda Lei de Newton, a força resultante sobre um corpo é igual ao produto da massa pela aceleração. Portanto podemos dizer que as equações que regem o sistema são dadas por

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|^3} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

Considere a função

$$U(q_1, \dots, q_N) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|} \quad (1.4)$$

definida em $(\mathbb{R}^d)^N \setminus \Delta$, onde

$$\Delta = \{(q_1, \dots, q_N) \in (\mathbb{R}^d)^N \mid q_i = q_j, \text{ para algum } i \text{ e } j \text{ com } i \neq j\}.$$

A equação (1.3) pode ser escrita como:

$$m_i \ddot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, N. \quad (1.5)$$

¹Em um contexto físico, geralmente se põe $d = 1, 2$ ou 3 , logo mais no nosso caso de interesse faremos $d = 2$.

A função U é conhecida como potencial Newtoniano, no entanto podemos considerar uma situação mais geral escrevendo o potencial tendo como parâmetro o número real a , da seguinte forma:

$$U(q_1, \dots, q_N) = \frac{1}{a-2} \sum_{j<i} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^{a-2}} \quad \text{se } a \neq 2, \quad (1.6)$$

$$U(q_1, \dots, q_N) = \sum_{j<i} m_i m_j \log \|q_i - q_j\| \quad \text{se } a = 2.$$

O potencial Newtoniano é obtido pondo $a = 3$.

O problema de N corpos consiste em descrever o comportamento completo de todas as soluções do sistema (1.5) para massas e posições iniciais prefixadas (para $a = 3$ dizemos que é o problema Newtoniano de N corpos). A idéia de mudar o potencial variando seu expoente remete aos trabalhos do próprio Poincaré (veja [8], pág. 4).

O problema de N corpos tem-se mostrado bastante difícil. A despeito dos esforços de grandes matemáticos, permanece não resolvido para $N > 2$, e pelo que se sabe é não-integrável no sentido clássico, por isso soluções particulares são muito importantes. Neste contexto descrevemos na próxima seção um conjunto especial de soluções particulares que são objeto de intensa pesquisa nas últimas décadas.

1.3 Configurações Centrais: Alguns resultados gerais

Uma configuração é uma conjunto de pontos em $(\mathbb{R}^d)^N$ que escreveremos como $q = (q_1, \dots, q_N)$. Dizemos que uma configuração é solução do problema de N corpos se os vetores q_1, \dots, q_N satisfazem as equações (1.5). Uma solução homográfica do problema de N corpos é um tipo particular de solução onde a forma da configuração permanece similar durante todo o movimento, no sentido de que em qualquer instante as posições podem ser obtidas de posições anteriores mediante uma dilatação e uma rotação em torno do centro de massa q_0 do sistema, que é dado pela expressão:

$$q_0 = \frac{\sum_{j=1}^N m_j q_j}{\sum_{j=1}^N m_j}. \quad (1.7)$$

Pode-se deduzir (veja [31]) que uma solução de tal tipo deve ter como condição inicial um conjunto de posições que satisfazem a propriedade de ser uma configuração central, definida abaixo.

DEFINIÇÃO 1.1. Uma configuração $q = (q_1, \dots, q_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ é dita *configuração central* se o vetor aceleração em um instante $t = t_0$ de cada corpo é diretamente proporcional à distância deste corpo ao centro de massa do sistema com a mesma constante de proporcionalidade. Ou

seja, uma configuração é dita configuração central se para algum $\gamma \in \mathbb{R}$ valem as seguintes equações:

$$\ddot{q}_i = -\gamma(q_i - q_0), \quad \text{para } i = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Combinando as equações (1.8) e (1.3) podemos dizer que uma configuração central é uma configuração que obedece as equações

$$\gamma(q_i - q_0) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_j(q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|^3}, \quad (1.9)$$

para algum $\gamma \in \mathbb{R}$.

Como mencionado, estamos interessados também em casos onde o potencial não é o potencial newtoniano. Para tanto, vamos escrever as equações acima como

$$\gamma(q_i - q_0) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_j(q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|^a} \quad (1.10)$$

e considerar os casos onde $a \geq 2$.

Para $a = 2$ a equação (1.10) modela o movimento de vórtices pontuais (ou vórtices de Helmholtz) no plano. Nesse caso as massas m_i são interpretadas como vorticidades, e como uma hipótese natural podem ser números reais positivos ou negativos (mas como dantes, a menos de menção explícita em contrário, vamos considerar complexas). Tal problema é considerado como um "problema irmão" do problema de N corpos, uma vez que muitos métodos funcionam em ambos os casos.

OBSERVAÇÃO 1.2. Configurações centrais são condições iniciais das soluções homográficas. E as soluções homográficas são as únicas soluções explícitas para o problema de N corpos.

Também é conhecido que num colapso total, os corpos tendem a uma configuração central.

Pode-se mostrar facilmente que o número γ deve ser positivo e que a velocidade angular v dos corpos satisfaz $v^2 = \gamma$. (Para tais fatos consulte [20]).

DEFINIÇÃO 1.3. Quando os pontos q_1, \dots, q_N estão no mesmo plano, dizemos que a configuração central é um *equilíbrio relativo*.

Esta terminologia segue do fato facilmente demonstrável de que num sistema de coordenadas girando com velocidade uniforme v , essa configuração está em equilíbrio.

Existem alguns problemas em aberto relacionados a configurações centrais e ao problema de N corpos; para uma interessante lista veja [1]. Entre eles talvez o problema em aberto mais importante seja o problema de Chazy-Wintner-Smale que pode ser posto da seguinte maneira: para uma dada escolha arbitrária de massas reais positivas m_1, \dots, m_N , é finito o número de equilíbrios relativos no problema de N corpos da Mecânica Celeste?

Este problema tem-se mostrado difícil e até o momento foi resolvido apenas para $N \leq 5$ (no caso $N = 5$ só foi resolvido "genericamente" no sentido que pode ser falho em certos conjuntos

pequenos. Para $N = 4$, ver [22], e para $N = 5$, ver [3]). Admitindo-se massas negativas em geral não existe finitude, como demonstra o trabalho [25], onde se obtém um contínuo de soluções.

O Problema Inverso do problema de encontrar Configurações Centrais consiste em, fixadas as posições q_1, \dots, q_N , investigar quais são as massas que podem ser postas nestas posições de modo a formar uma configuração central. Existem vários resultados nesta direção, é o que vamos discutir na próxima seção.

Tal problema é importante, pois em muitos estudos do problema de N corpos se faz alguma hipótese sobre as massas. Por exemplo, no caso em que as posições dos corpos formam um polígono, muitos resultados na literatura acerca de propriedades qualitativas como estabilidade supõe que as massas são iguais, é interessante saber se este é o único caso onde a solução do problema de N corpos poligonal pode existir.

1.4 Preliminares

Nesta seção vamos enunciar os resultados existentes na literatura relacionados ao nosso trabalho.

Em 1772, Lagrange mostrou que massas quaisquer positivas postas no vértices de um triângulo equilátero geram um equilíbrio relativo. É conhecido na literatura que massas iguais postas nos vértices de um polígono regular geram um equilíbrio relativo para uma adequada escolha da velocidade angular. L. M. Perko e E. L. Walter mostraram em [24] que o problema inverso para o polígono, considerando o potencial newtoniano, somente tem solução se as massas são iguais. B. Elmabsout em [16] redemonstrou de modo independente o mesmo resultado. Vamos chamar este resultado de Teorema de Perko-Walter-Elmabsout.

TEOREMA 1.4. Perko-Walter-Elmabsout- N massas positivas pontuais postas nos vértices de um polígono regular, com $N > 3$, são soluções para o problema inverso somente se as massas são iguais entre si.

O trabalho de Perko e Walter [24] é nossa principal referência, onde buscamos embasar nossos argumentos e generalizar os resultados. Além das ideias, tentamos importar também as notações desta referência.

Estamos interessados em estender o teorema acima para LN corpos, colocados nos vértices de L polígonos homotéticos, e estender o resultado também para o caso onde o potencial não é necessariamente o Newtoniano, incluindo o importante caso físico de vórtices de Helmholtz, explicitamente, queremos considerar o problema inverso para as equações em (1.10) onde o expoente a pode ser um número maior ou igual a 2.

Antes, porém, de considerar o problema inverso, é interessante saber se realmente existem equilíbrios relativos da forma especificada acima.

Em [21] com a hipótese de massas iguais positivas sobre cada polígono é mostrado um resultado de existência. Mais especificamente, considerando um dos polígonos inscrito na circunferência unitária com massas iguais a 1 nos seus vértices e o outro polígono inscrito na circunferência de raio r com massas iguais a μ nos seus vértices é demonstrado que para cada razão μ , entre as massas, existem duas configurações centrais uma com $0 < r < 1$ e outra com $r > 1$. Neste trabalho são apontadas algumas propriedades qualitativas da dependência entre

o raio e a massa em uma configuração central, como por exemplo ao considerar $0 < r < 1$ quando a massa μ do polígono de raio r cresce, então o tamanho do polígono que gera uma configuração central também cresce. As técnicas de expansão em série de potências mostradas neste trabalho inspiraram alguns de nossos principais resultados. No capítulo 3, reobtemos este resultado de existência de configurações centrais poligonais e o generalizamos no caso de um potencial com $a \geq 2$, porém sem tomar a hipótese de massas iguais em cada polígono.

O resultado acima foi estendido para um número qualquer de polígonos em [13]. Ali foi mostrado que fixadas massas iguais (reais e positivas) em cada polígono, existem valores dos raios que tornam a configuração um equilíbrio relativo.

Ainda tratando do caso de dois polígonos regulares em [15] é demonstrada a existência de equilíbrios relativos no caso Newtoniano onde os corpos estão postos nos vértices de dois polígonos, tendo o mesmo centro, homotéticos ou rotacionados de um ângulo igual à metade do ângulo central do polígono, onde como hipótese tem-se massas iguais em cada polígono. Alguns resultados de existência de equilíbrios relativos no caso de polígonos com uma massa central e massas iguais nos vértices do polígono também são obtidos em [5] e em [27]. Nos capítulos 3 e 4 reobtemos o mesmo resultado de existência que em [21] no caso particular de dois polígonos para quaisquer raios, e no caso de vários polígonos, sob certas hipóteses na razão entre os raios, porém em ambos os casos com generalidade maior no sentido de considerar um potencial com $a \geq 2$. Além disso mostramos que neste caso a hipótese de massas iguais em cada polígono é necessária.

Em [28] os autores propõem uma prova mais simples do resultado encontrado em [24] e em [16] usando argumentos similares aos de [24], porém tal prova apresenta um erro como destacado em [10] que vamos comentar em maiores detalhes no apêndice A.

Em [29], sob a hipótese simplificadora de tomar $\tilde{m}_k = bm_k$ com $b > 0$, $k = 1, \dots, N$, onde m_k , $k = 1, \dots, N$ representam as massas postas nos vértices de um polígono e \tilde{m}_k representam as massas postas nos vértices do outro polígono, os autores mostram que as massas devem satisfazer $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_N$. Novamente os autores cometem o equívoco apontado em [10]. Se correto o argumento deles forneceria um maneira simples de mostrar que o mesmo resultado vale para um número qualquer de polígonos, como demonstrado no apêndice A.

Em [30], os autores propõem uma prova de que para dois polígonos só pode haver um equilíbrio relativo se as massas em cada polígono são iguais, no caso do potencial Newtoniano. Porém eles cometem o mesmo erro apontado em [10]. Contudo suas equações para a caracterização da velocidade angular coincidem com as nossas. E a nossa maneira de formular as equações é idêntica a deles. Vamos tratar disto no apêndice A.

Em [7] é mostrado que para o problema "irmão" de N vórtices vale o mesmo resultado que o caso Newtoniano, no caso de um polígono, a saber, um equilíbrio relativo com N vórtices, com $N > 3$ somente é possível se as vorticidades são iguais. Nós também reobtemos este resultado, e o generalizamos para o caso de dois polígonos onde mostramos que as vorticidades, em cada polígono, devem ser iguais. Ainda em [7] é demonstrado o fato curioso que se $N = 4$ e se os dois polígonos estiverem rotacionados de $\frac{\pi}{4}$ então, supondo vorticidades iguais em cada quadrado, então para quaisquer vorticidades tem-se um equilíbrio relativo.

Nosso trabalho está de certa forma relacionado em saber se existe "perversidade" no problema poligonal conforme definido em [8, 11], a despeito de em geral o equilíbrio relativo não

ser uma coreografia, conforme posto nestas referências. Contudo se a única solução para o problema inverso do polígono for com massas iguais, isto mostra que um equilíbrio relativo poligonal é uma solução não-perversa.

1.5 O problema de polígonos homotéticos em equilíbrio relativo

Nesta seção, nosso objetivo é deduzir as equações que regem o problema. A saber vamos mostrar que as equações podem ser escritas como um sistema linear nas massas onde a matriz de coeficientes pode ser particionada em blocos, e cada bloco é representado por uma matriz circulante.

Considere L polígonos regulares concêntricos e homotéticos, cada polígono contendo N vértices. Considere ainda LN massas pontuais $m_1, \dots, m_N, m_{N+1}, \dots, m_{2N}, m_{2N+1}, \dots, m_{LN}$, cada massa fixada num vértice de um dos polígonos. Vamos supor que os polígonos estão inscritos em circunferências de raios r_1, \dots, r_L onde $r_i \in \mathbb{R}_+^*$ e $r_i \neq r_j$ se $i \neq j$. Assim, quando dissermos polígono de raio r_j , queremos nos referir ao polígono que está inscrito na circunferência de raio r_j . Enumeremos as massas de modo que as N primeiras massas estão nos vértices do polígono de raio r_1 , as massas m_{N+1}, \dots, m_{2N} estão nos vértices do polígono de raio r_2 , e assim sucessivamente.

Vamos descrever os vértices dos polígonos com coordenadas complexas. Seja $\omega_j = e^{\frac{2\pi j}{N}i}$, escrevendo q_k para o vértice do polígono que contém a massa m_k estabelecemos as seguintes relações:

$$q_{(j-1)N+k} = r_j \omega_k, \text{ para } j = 1, \dots, L \text{ e } k = 1, \dots, N. \quad (1.11)$$

Seja

$$\mathbf{q}_0 = \frac{\sum_{j=1}^{LN} m_j q_j}{\sum_{j=1}^{LN} m_j} = \frac{\sum_{j=1}^{LN} m_j q_j}{M} \quad (1.12)$$

o centro de massa do sistema, e $M = \sum_{j=1}^{LN} m_j$ a massa total do sistema. A partir de agora, em todo nosso trabalho supomos sempre que $M \neq 0$ ⁽¹⁾. Esses corpos estão em equilíbrio relativo

¹Fisicamente, no caso Newtoniano $a = 3$ essa hipótese é natural, uma vez que geralmente se supõe as massas reais positivas. No caso de vórtices $a = 2$ essa hipótese é menos natural, pois podemos ter vorticidades negativas.

com velocidade angular v se, e somente se, satisfazem as LN equações abaixo:

$$\begin{aligned}
E_1 : v^2(q_k - q_0) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} + \sum_{j=N+1}^{2N} m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} \\
&+ \dots + \sum_{j=(L-1)N+1}^{LN} m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a}, \quad \text{para } k = 1, \dots, N. \\
E_2 : v^2(q_k - q_0) &= \sum_{j=1}^N m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} + \sum_{\substack{j=N+1 \\ j \neq k}}^{2N} m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} \\
&+ \dots + \sum_{j=(L-1)N+1}^{LN} m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a}, \quad \text{para } k = N+1, \dots, 2N. \\
&\vdots \\
E_L : v^2(q_k - q_0) &= \sum_{j=1}^N m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} + \sum_{j=N+1}^{2N} m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} \\
&+ \dots + \sum_{\substack{j=(L-1)N+1 \\ j \neq k}}^{LN} m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a}, \quad \text{para } k = (L-1)N+1, \dots, LN.
\end{aligned}$$

Tomando a equação E_T para T fixo, e k fixo, $k \in \{(T-1)N+1, \dots, TN\}$ reescrevemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
E_T : v^2 q_k &= \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} + \frac{v^2}{M} q_j \right) \\
&+ \dots + \left(\sum_{\substack{j=(T-1)N+1 \\ j \neq k}}^{2N} m_j \frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} + \frac{v^2}{M} \sum_{j=(T-1)N+1}^{TN} m_j q_j \right) \\
&+ \dots + \sum_{j=(L-1)N+1}^{LN} m_j \left(\frac{q_k - q_j}{|q_k - q_j|^a} + \frac{v^2}{M} q_j \right).
\end{aligned}$$

Substituindo as relações (1.11) nesta equação obtemos:

$$\begin{aligned}
E_T : v^2 r_T \omega_k &= \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{r_T \omega_k - r_1 \omega_j}{|r_T \omega_k - r_1 \omega_j|^a} + \frac{v^2}{M} r_1 \omega_j \right) \\
&+ \dots + \left(\sum_{\substack{j=(T-1)N+1 \\ j \neq k}}^{TN} m_j \frac{r_T \omega_k - r_T \omega_j}{|r_T \omega_k - r_T \omega_j|^a} + \sum_{j=(T-1)N+1}^{TN} m_j r_T \omega_j \right) \\
&+ \dots + \sum_{j=(L-1)N+1}^{LN} m_j \left(\frac{r_T \omega_k - r_L \omega_j}{|r_T \omega_k - r_L \omega_j|^a} + \frac{v^2}{M} r_L \omega_j \right).
\end{aligned}$$

Multiplicando esta equação por $\omega_{-k} = e^{\frac{2\pi(-k)}{N}i}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
E_T : v^2 r_T &= \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{r_T - r_1 \omega_{j-k}}{|\omega_k|^a |r_T - r_1 \omega_{j-k}|^a} + \frac{v^2}{M} r_1 \omega_{j-k} \right) \\
&+ \dots + \left(\sum_{\substack{j=(T-1)N+1 \\ j \neq k}}^{TN} m_j \frac{r_T - r_T \omega_{j-k}}{|\omega_k|^a |r_T - r_T \omega_{j-k}|^a} + \frac{v^2}{M} \sum_{j=(T-1)N+1}^{TN} m_j r_T \omega_{j-k} \right) \\
&+ \dots + \sum_{j=(L-1)N+1}^{LN} m_j \left(\frac{r_T - r_L \omega_{j-k}}{|\omega_k|^a |r_T - r_L \omega_{j-k}|^a} + \frac{v^2}{M} r_L \omega_{j-k} \right).
\end{aligned}$$

Para escrever as equações acima de um modo matricial, definimos L^2 matrizes $N \times N$ da seguinte maneira, se $T \neq S$, a matriz $A_{TS} = [a_{kj}]$ tem entradas

$$a_{kj} = \frac{r_T - r_S \omega_{j-k}}{|r_T - r_S \omega_{j-k}|^a} + \frac{v^2}{M} r_S \omega_{j-k} \quad \text{para } k, j = 1, \dots, N; \quad (1.13)$$

e a matriz A_{TT} é dada por $A_{TT} = [a_{kj}]$, onde

$$\begin{aligned}
a_{kj} &= \frac{r_T - r_T \omega_{j-k}}{|r_T - r_T \omega_{j-k}|^a} + \frac{v^2}{M} r_T \omega_{j-k} \quad \text{se } k \neq j; \\
a_{kk} &= \frac{v^2}{M} r_T.
\end{aligned} \quad (1.14)$$

Podemos escrever as LN equações, representadas em E_1, \dots, E_L na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1L} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{L1} & A_{L2} & \dots & A_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \\ \hline m_{N+1} \\ \vdots \\ m_{2N} \\ \hline m_{(L-1)N+1} \\ \vdots \\ m_{LN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^2 r_1 \\ \vdots \\ v^2 r_1 \\ \hline v^2 r_2 \\ \vdots \\ v^2 r_2 \\ \hline v^2 r_L \\ \vdots \\ v^2 r_L \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Denotemos:

$$\vec{m}_1 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix}, \vec{m}_2 = \begin{bmatrix} m_{N+1} \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{2N} \end{bmatrix}, \dots, \vec{m}_L = \begin{bmatrix} m_{(L-1)N+1} \\ m_{(L-1)N+2} \\ \vdots \\ m_{LN} \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

e

$$\vec{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Reescrevemos (1.15) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1L} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{L1} & A_{L2} & \dots & A_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \\ \vdots \\ \vec{m}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^2 r_1 \vec{1} \\ v^2 r_2 \vec{1} \\ \vdots \\ v^2 r_L \vec{1} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

1.6 Matrizes circulantes e autovetores

Nesta seção, nosso objetivo é estabelecer alguns fatos básicos sobre matrizes circulantes e usá-los nas matrizes da seção anterior para deduzir propriedades sobre seus autovalores.

DEFINIÇÃO 1.5. Uma matriz P , de ordem N , é **circulante** se $P_{j-1,k-1} = P_{j,k} \forall j, k = 1, \dots, N$, onde estamos identificando $P_{0,k}$ com $P_{N,k}$, e $P_{k,0}$ com $P_{k,N}$.

É imediato notar que as matrizes definidas por (1.13) e (1.14) são matrizes circulantes.

LEMA 1.6. Considere a matriz circulante $W \in M_{N \times N}(\mathbb{C})$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se a matriz P é circulante, então P tem a forma:

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,N-1} & P_{1,N} \\ P_{1,N} & P_{1,1} & \dots & P_{1,N-2} & P_{1,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{1,2} & \dots & P_{1,N-1} & P_{1,N} & P_{1,1} \end{pmatrix},$$

e vale $P = \sum_{j=1}^N P_{1,j} W^{N-j+1}$.

Demonstração. A demonstração é feita por imediata verificação. □

É fácil ver que $v_p = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_p \\ \vdots \\ \omega_p^{N-1} \end{pmatrix}$ é autovetor de W para $p = 1, \dots, N$.

De fato:

$$Wv_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_p \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega_p^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_p^{N-1} \\ 1 \\ \omega_p \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega_p^{N-2} \end{pmatrix} = \omega_p^{N-1} v_p.$$

Um fato importante a notar é que o conjunto $\{v_p\}_{p=1}^N$ forma uma base ortogonal de \mathbb{C}^N em relação ao produto interno hermitiano canônico, dado por:

$$\langle (x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i.$$

Da Álgebra Linear sabemos que como P é um polinômio em W , conforme lema (1.6) o autovalor de P associado ao autovetor v_p é obtido por meio do correspondente polinômio aplicado ao correspondente autovalor ω_p^{N-1} , ou seja, o autovalor de P associado ao autovetor v_p é o número $\sum_{j=1}^N P_{1,j}(\omega_p^{N-1})^{N-j+1}$. Ao utilizar tal fato podemos estabelecer o seguinte lema:

LEMA 1.7. O autovalor $\lambda_p(A_{TS})$ associado ao autovetor v_p de A_{TS} é dado pela seguinte expressão, se $p \neq N-1$:

$$\begin{cases} \lambda_p(A_{TS}) = \sum_{j=1}^N \frac{r_T - r_S \omega_{j-1}}{|r_T - r_S \omega_{j-1}|^a} \omega_p^{j-1}, & \text{se, } T \neq S, \\ \lambda_p(A_{TT}) = \sum_{j=2}^N \frac{r_T - r_T \omega_{j-1}}{|r_T - r_T \omega_{j-1}|^a} \omega_p^{j-1}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Para $p = N-1$, o autovalor é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} \lambda_{N-1}(A_{TS}) = \sum_{j=1}^N \frac{r_T - r_S \omega_{j-1}}{|r_T - r_S \omega_{j-1}|^a} \omega_{N-1}^{j-1} + r_S \frac{v^2}{M} N, & \text{para } T \neq S, \\ \lambda_{N-1}(A_{TT}) = \sum_{j=2}^N \frac{r_T - r_T \omega_{j-1}}{|r_T - r_T \omega_{j-1}|^a} \omega_{N-1}^{j-1} + r_T \frac{v^2}{M} N. \end{cases} \quad (1.20)$$

Demonstração. Inicialmente consideremos o caso em que $T \neq S$. Denotemos as entradas da matriz A_{TS} por a_{kj} . Como A_{TS} é circulante, seu autovalor $\lambda_p(A_{TS})$ será dado pela expressão

$\lambda_p(A_{TS}) = \sum_{j=1}^N a_{1j} (\omega_p^{N-1})^{N-j+1}$. Substituindo a_{kj} por sua expressão, obtemos:

$$\lambda_p(A_{TS}) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{r_T - r_S \omega_{j-1}}{|r_T - r_S \omega_{j-1}|^a} + \frac{v^2}{M} r_S \omega_{j-1} \right) (\omega_p^{N-1})^{N-j+1}. \quad (1.21)$$

Agora notemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \omega_{j-1} (\omega_p^{N-1})^{N-j+1} &= \sum_{j=1}^N \omega_1^{p(N-1)(N-j+1)+(j-1)} \\ &= \sum_{j=1}^N \omega_1^{(p+1)(j-1)} \\ &= \sum_{j=1}^N \omega_{p+1}^{j-1}. \end{aligned}$$

Mas

$$\sum_{j=1}^N \omega_{p+1}^{j-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq N-1, \\ N & \text{se } p = N-1. \end{cases}$$

Notando ainda que $(\omega_p^{N-1})^{N-j+1} = (\omega_p)^{j-1}$, e substituindo em (1.21) obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_p(A_{TS}) &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{r_T - r_S \omega_{j-1}}{|r_T - r_S \omega_{j-1}|^a} \right) \omega_p^{j-1} \quad \text{se } p \neq N-1 \\ \lambda_{N-1}(A_{TS}) &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{r_T - r_S \omega_{j-1}}{|r_T - r_S \omega_{j-1}|^a} \right) \omega_{N-1}^{j-1} + r_S \frac{v^2}{M} N \quad \text{se } p = N-1. \end{aligned}$$

A demonstração no caso em que $T = S$ é muito semelhante e por isso será omitida. \square

1.7 Redução a subsistemas

Nesta seção nosso objetivo é decompor o sistema de equações (1.18) em subsistemas para simplificar a análise de nosso problema.

Notando que

$$\begin{bmatrix} v^2 r_T \\ v^2 r_T \\ \vdots \\ v^2 r_T \end{bmatrix} = v^2 r_T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = v^2 r_T v_N,$$

podemos reescrever o sistema em (1.18) como:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1L} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{L1} & A_{L2} & \dots & A_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \\ \vdots \\ \vec{m}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^2 r_1 v_N \\ v^2 r_2 v_N \\ \vdots \\ v^2 r_L v_N \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

O lema seguinte vai estabelecer o que chamamos de "subsistemas" deste sistema.

LEMA 1.8. O vetor

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \\ \vdots \\ \vec{m}_L \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^N \left(x_1^p \begin{bmatrix} v_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2^p \begin{bmatrix} 0 \\ v_p \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_L^p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \right). \quad (1.23)$$

é solução do sistema (1.22) se, e somente se, os coeficientes $x_1^p, x_2^p, \dots, x_L^p$ satisfazem os subsistemas:

$$\begin{cases} x_1^p \lambda_p(A_{11}) + x_2^p \lambda_p(A_{12}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{1L}) = 0, \\ x_1^p \lambda_p(A_{21}) + x_2^p \lambda_p(A_{22}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{2L}) = 0, \\ \vdots \\ x_1^p \lambda_p(A_{L1}) + x_2^p \lambda_p(A_{L2}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{LL}) = 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

para $p = 1, \dots, N-1$, e para $P = N$, o subsistema:

$$\begin{cases} x_1^N \lambda_N(A_{11}) + x_2^N \lambda_N(A_{12}) + \dots + x_L^N \lambda_N(A_{1L}) = v^2 r_1, \\ x_1^N \lambda_N(A_{21}) + x_2^N \lambda_N(A_{22}) + \dots + x_L^N \lambda_N(A_{2L}) = v^2 r_2, \\ \vdots \\ x_1^N \lambda_N(A_{L1}) + x_2^N \lambda_N(A_{L2}) + \dots + x_L^N \lambda_N(A_{LL}) = v^2 r_L. \end{cases} \quad (1.25)$$

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1L} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{L1} & A_{L2} & \dots & A_{LL} \end{bmatrix} \left(\sum_{p=1}^N \left(x_1^p \begin{bmatrix} v_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2^p \begin{bmatrix} 0 \\ v_p \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_L^p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \sum_{p=1}^N \left(x_1^p \begin{bmatrix} A_{11}v_p \\ A_{21}v_p \\ \vdots \\ A_{L1}v_p \end{bmatrix} + x_2^p \begin{bmatrix} A_{12}v_p \\ A_{22}v_p \\ \vdots \\ A_{L2}v_p \end{bmatrix} + \dots + x_L^p \begin{bmatrix} A_{1L}v_p \\ A_{2L}v_p \\ \vdots \\ A_{LL}v_p \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{p=1}^N \begin{pmatrix} (x_1^p \lambda_p(A_{11}) + x_2^p \lambda_p(A_{12}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{1L})) v_p \\ (x_1^p \lambda_p(A_{21}) + x_2^p \lambda_p(A_{22}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{2L})) v_p \\ \vdots \\ (x_1^p \lambda_p(A_{L1}) + x_2^p \lambda_p(A_{L2}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{LL})) v_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Substituindo isto em (1.22), obtemos:

$$\sum_{p=1}^N \begin{pmatrix} (x_1^p \lambda_p(A_{11}) + x_2^p \lambda_p(A_{12}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{1L})) v_p \\ (x_1^p \lambda_p(A_{21}) + x_2^p \lambda_p(A_{22}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{2L})) v_p \\ \vdots \\ (x_1^p \lambda_p(A_{L1}) + x_2^p \lambda_p(A_{L2}) + \dots + x_L^p \lambda_p(A_{LL})) v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 r_{1N} \\ v^2 r_{2N} \\ \vdots \\ v^2 r_{LN} \end{pmatrix}.$$

Levando em consideração que o conjunto $\{v_1, \dots, v_N\}$ é uma base de \mathbb{C}^N vemos que a equação acima é satisfeita se, e somente se, os subsistemas (1.24) e (1.25) são satisfeitos. \square

Aqui vamos esclarecer o erro que foi apontado por [10].

Em [28, 29, 30] é argumentado que o único autovetor de uma matriz circulante com coordenadas todas reais é o vetor v_N e, portanto, ele é o único vetor com coordenadas reais que pode ser solução da equação (1.22) para $L = 1$. O erro apontado está no fato de que se a matriz circulante possuir um núcleo não-trivial, podemos adicionar vetores desse núcleo que tenham coordenadas reais e ainda assim obter uma solução do sistema. A dificuldade consiste, portanto, em verificar qual é o núcleo da matriz, e se esse núcleo contém vetores com coordenadas todas reais. Isto é justamente o que é feito em [24] nos lemas 10 – 12. Para mais detalhes veja o apêndice A.

1.8 Autovalores das matrizes A_{TS}

Nesta seção vamos estudar as propriedades dos autovalores das matrizes A_{TS} .

Vamos estudar os "subsistemas" em (1.24) considerando os números $\lambda_p(A_{TS})$ como coeficientes, e os números x_1^p, \dots, x_L^p como variáveis.

Inicialmente vamos determinar uma fórmula para representar a expressão $\lambda_p(A_{TS})$. Para isso precisamos do lema que segue, cuja demonstração é inspirada nos lemas 5 e 9 de [24].

LEMA 1.9. Para x e y reais, as somas $\lambda_p(x, y) = \sum_{j=1}^N \frac{x - y\omega_{j-1}}{|x - y\omega_{j-1}|^a} \omega_p^{j-1}$ e

$\tilde{\lambda}_p(x, y) = \sum_{j=2}^N \frac{x - y\omega_{j-1}}{|x - y\omega_{j-1}|^a} \omega_p^{j-1}$ são reais.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{x - y\omega_{j-1}}}{|x - y\omega_{j-1}|^a} \omega_p^{j-1} &= \frac{\overline{x - y\omega_{j-1}}}{|x - y\omega_{j-1}|^a} \overline{\omega_p^{j-1}} \\ &= \frac{x - y\overline{\omega_{j-1}}}{|x - y\overline{\omega_{j-1}}|^a} \overline{\omega_p^{j-1}} = \frac{x - y\omega_{N-j+1}}{|x - y\omega_{N-j+1}|^a} \omega_p^{N-j+1}. \end{aligned}$$

Assim, na soma, se $j \geq 2$, o j -ésimo termo é conjugado do $(N - j + 2)$ -ésimo termo. Para $j = 1$, olhando para o termo correspondente na soma percebemos imediatamente que este termo é real. Isso é suficiente para concluir que $\lambda_p(x, y)$ é real. Subtraindo de $\lambda_p(x, y)$, seu primeiro termo que é real, obtemos $\tilde{\lambda}_p(x, y)$, que portanto é também real. \square

Note que usando os Lemas 1.7 e 1.9 garantimos que os autovalores das matrizes A_{TS} são reais. Vamos usar o lema acima para deduzir uma expressão para $\lambda_p(A_{TS})$. Trocando $j - 1$ por j e notando que para $j = 0$ obtemos o mesmo termo que para $j = N$ no somatório, temos:

$$\sum_{j=1}^N \frac{x - y\omega_{j-1}}{|x - y\omega_{j-1}|^a} \omega_p^{j-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x - y\omega_j}{|x - y\omega_j|^a} \omega_p^j = \sum_{j=1}^N \frac{x - y\omega_j}{|x - y\omega_j|^a} \omega_p^j.$$

Observando que para x e y reais vale:

$$\begin{aligned} |x - y\omega_j|^2 &= (x - y\omega_j)(\overline{x - y\omega_j}) \\ &= x^2 - xy\overline{\omega_j} - 2xy\omega_j + y^2 \\ &= x^2 - xy\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + y^2. \end{aligned}$$

E também que

$$\operatorname{Re}[(x - y\omega_j)\omega_p^j] = \operatorname{Re}[x\omega_p^j - y\omega_{p+1}^j] = x\cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right) - y\cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right).$$

Usando o lema anterior e as equações acima escrevemos para x e y reais:

$$\sum_{j=1}^N \frac{x - y\omega_{j-1}}{|x - y\omega_{j-1}|^a} \omega_p^{j-1} = \sum_{j=1}^N \frac{x\cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right) - y\cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(x^2 - 2xy\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + y^2\right)^{\frac{a}{2}}}. \quad (1.26)$$

DEFINIÇÃO 1.10. Definimos $f_p : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_p(x, y) = \sum_{j=1}^N \frac{x\cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right) - y\cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(x^2 - 2xy\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + y^2\right)^{\frac{a}{2}}}, \quad (1.27)$$

onde $\Delta = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$.

Observemos que f_p depende também do parâmetro a e que é homogênea com grau de homogeneidade $1 - a$.

Notemos também que por (1.19) se $T \neq S$ e $p \neq N - 1$

$$\lambda_p(A_{TS}) = f_p(r_T, r_S). \quad (1.28)$$

Além do que, se $T = S$, por (1.26), podemos escrever:

$$\lambda_p(A_{TT}) = \sum_{j=2}^N \frac{r_T \cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right) - r_T \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(r_T^2 - 2r_T^2 \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + r_T^2\right)^{\frac{a}{2}}}. \quad (1.29)$$

Nos capítulos seguintes vamos usar estas fórmulas para analisar o problema inverso para equilíbrios relativos poligonais.

Caso de um Polígono

2.1 Equações para o caso de um polígono.

Nesta seção vamos apresentar as equações para o caso de um polígono regular e estabelecer alguns resultados sobre esse problema.

O problema inverso para um polígono em equilíbrio relativo foi estudado em [24] onde foi demonstrado que no caso do potencial newtoniano as massas devem ser iguais. Em [7] com uma técnica que não consiste em analisar explicitamente os autovalores da matriz circulante correspondente, é mostrado que o mesmo vale no caso do potencial logaritmico $a = 2$ (Equações de Helmholtz). Nós damos uma nova demonstração deste último fato, mas agora seguindo a ideia de analisar os autovalores.

Nossa intenção também é discutir esse problema e ver como ele se comporta ao variar o parâmetro a no potencial. Até onde temos conhecimento não existe resultado similar aos citados anteriormente se a for diferente de 2 e de 3, então analisamos como os autovalores dependem do expoente do potencial. Nossos resultados numéricos indicam que o comportamento do problema inverso é o mesmo para qualquer potencial positivo. No entanto (ainda) não conseguimos uma demonstração formal deste fato.

Para o caso particular de um polígono as equações em (1.22) tomam a seguinte forma

$$[A_{11}] [\vec{m}_1] = [v^2 r_1 v_N], \quad (2.1)$$

onde a matriz $A_{11} = [a_{kj}]$, de ordem $N \times N$ é dada pela expressão (1.14), que neste caso toma a forma:

$$\begin{aligned} a_{kj} &= \frac{r_1 - r_1 \omega_{j-k}}{|r_1 - r_1 \omega_{j-k}|^a} + \frac{\omega^2}{M} r_1 \omega_{j-k} \quad \text{se } k \neq j, \\ a_{kk} &= \frac{v^2}{M} r_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como há apenas um raio, não haverá confusão ao denotá-lo simplesmente por r , e é isto que faremos no restante deste capítulo. Como o problema é invariante por dilatação, não há perda de generalidade em supor que $r = 1$. Se fizermos isto, e pusermos $a = 3$ a matriz acima se torna exatamente igual a matriz definida pela equação 5 em [24], e a equação (2.1) coincidirá com a equação 8 de [24]. Mas por ora vamos permitir que r varie.

O Lema 1.8 aplicado a esse caso particular toma a seguinte forma:

LEMA 2.1. O vetor

$$\vec{m}_1 = \sum_{p=1}^N x_1^p v_p \quad (2.3)$$

é solução do sistema (2.1) se, e somente se, os coeficientes x_1^p para $p = 1, \dots, N$ satisfazem as seguintes equações

$$x_1^p \lambda_p(A_{11}) = 0, \quad \text{para } p = 1, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

e

$$x_1^N \lambda_N(A_{11}) = r v^2, \quad (2.5)$$

ou seja, neste caso, nossos subsistemas lineares são 1×1 .

Para mostrar que numa solução de (2.1) as massas devem ser iguais devemos mostrar que $\lambda_p(A_{11}) \neq 0$ para $p = 1, \dots, N-1$ ou no caso em que $\lambda_p(A_{11}) = 0$ o(s) autovetor(es) correspondente(s) geram um subespaço vetorial de \mathbb{C}^N que não contém vetores com coordenadas todas reais. É isto que tentaremos fazer no restante do capítulo.

2.2 Estudo dos autovalores de A_{11}

Usando os Lemas (1.7) e (1.9) podemos escrever para $p \neq N-1$:

$$\begin{aligned} \lambda_p(A_{11}) &= \sum_{j=2}^N \frac{r - r\omega_{j-1}}{|r - r\omega_{j-1}|^a} \omega_p^{j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{r - r\omega_j}{|r - r\omega_j|^a} \omega_p^j \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{r \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - r \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(r^2 - 2r^2 \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + r^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\ &= r^{1-a} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right)^{\frac{a}{2}}} \\ &= r^{1-a} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(4\text{sen}^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)\right)^{\frac{a}{2}}} \\ &= r^{1-a} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2\text{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi j}{N}\right)}{\left(4\text{sen}^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)\right)^{\frac{a}{2}}} \\ &= r^{1-a} 2^{1-a} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right) \text{sen}^{1-a}\left(\frac{\pi j}{N}\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

DEFINIÇÃO 2.2. Definimos $\xi_p : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ para $p = 1, \dots, N$ por

$$\xi_p(r) = (2r)^{1-a} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right) \text{sen}^{1-a}\left(\frac{\pi j}{N}\right). \quad (2.7)$$

Obviamente, temos

$$\lambda_p(A_{11}) = \xi_p(r) \quad \text{se } p \neq N-1.$$

Notemos que esta expressão generaliza a expressão encontrada na equação 12 do corolário do lema 9 de [24]⁽¹⁾. Para $p = N-1$ usando novamente os Lemas (1.7) e o lema (1.9), a expressão do autovalor é da forma:

$$\lambda_{N-1}(A_{11}) = \xi_{N-1}(r) + rv^2 \frac{N}{M}. \quad (2.8)$$

Em [24] é mostrado que se $a = 3$ então $\xi_p(1) \neq 0$ se $p \neq \frac{N-1}{2}$ e $p \neq N-1$. E que se $N > 3$ o conjunto de vetores $\{v_{\frac{N-1}{2}}, v_{N-1}\}$ não gera vetores com coordenadas todas reais⁽²⁾, assim concluimos o teorema de Perko-Walter-Elmabsout. Queremos demonstrar resultados semelhantes então vejamos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.3. Para $p = 1, \dots, N$ vale a seguinte relação

$$\xi_p(r) = -\xi_{N-p-1}(r). \quad (2.9)$$

Demonstração. Note que

$$\text{sen} \left(\frac{\pi j(2(N-p-1)+1)}{N} \right) = \text{sen} \left(\frac{2\pi jN}{N} - \frac{\pi j(2p+1)}{N} \right) = -\text{sen} \left(\frac{\pi j(2p+1)}{N} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_{N-p-1}(r) &= (2r)^{1-a} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen} \left(\frac{\pi j(2(N-p-1)+1)}{N} \right) \text{sen}^{1-a} \left(\frac{\pi j}{N} \right) \\ &= -(2r)^{1-a} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen} \left(\frac{\pi j(2p+1)}{N} \right) \text{sen}^{1-a} \left(\frac{\pi j}{N} \right) \\ &= -\xi_p(r). \end{aligned}$$

□

Esta proposição generaliza a equação obtida no lema 9 de [24].

2.3 Autovalor $\lambda_{N-1}(A_{11})$

Estudemos o que ocorre com o autovalor $\lambda_{N-1}(A_{11})$.

Lembremos que

$$\xi_{N-1}(r) = (2r)^{a-1} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}^{a-1} \left(\frac{\pi j}{N} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi j(2(N-1)+1)}{N} \right) + rv^2 \frac{N}{M}$$

Para estudar este autovalor vamos necessitar do lema que segue, que é inspirado no lema 4 de [24].

¹Nossa expressão difere dessa referência no índice pois o que eles chamam de autovetor v_k corresponde ao nosso autovetor v_{k-1} .

²Veja Apêndice B

LEMA 2.4. Se \vec{m}_1 e v^2 são soluções de $A_{11}\vec{m}_1 = rv^2v_N$, então vale a relação

$$rv^2\frac{N}{M} = \lambda_N(A_{11}).$$

Demonstração. Denotemos os elementos da matriz A_{11} por $(A_{11})_{kj}$. Somando as equações de $A_{11}\vec{m}_1 = rv^2\vec{1}$ e usando o fato que para a matriz circulante A_{11} a soma dos elementos de uma linha é uma constante igual ao autovalor $\lambda_N(A_{11})$ obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N (A_{11})_{kj} \right) m_j &= rv^2N \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (A_{11})_{kj} \right) m_j &= rv^2N \\ \Rightarrow M\lambda_N(A_{11}) &= rv^2N \\ \Rightarrow \lambda_N(A_{11}) &= rv^2\frac{N}{M}. \end{aligned}$$

□

LEMA 2.5. Se \vec{m}_1 e v^2 são soluções de $A_{11}\vec{m}_1 = rv^2\vec{1}$, então o autovalor $\lambda_{N-1}(A_{11})$ é nulo.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \xi_{N-1}(r) &= (2r)^{a-1} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}^{a-1} \left(\frac{\pi j}{N} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi j(2N-1)}{N} \right) + rv^2\frac{N}{M} \\ &= (2r)^{a-1} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}^{a-1} \left(\frac{\pi j}{N} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi j(2N-1)}{N} \right) + \lambda_N(A_{11}) \\ &= (2r)^{a-1} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}^{a-1} \left(\frac{\pi j}{N} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi j(2N-1)}{N} \right) \\ &\quad + (2r)^{a-1} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}^{a-1} \left(\frac{\pi j}{N} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi j(2N+1)}{N} \right) \\ &= (2r)^{a-1} \sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}^{a-1} \left(\frac{\pi j}{N} \right) \left[\text{sen} \left(\frac{\pi j(2N-1)}{N} \right) + \text{sen} \left(\frac{\pi j(2N+1)}{N} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mas usando a identidade

$$\text{sen}(a) + \text{sen}(b) = 2\text{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right),$$

obtemos

$$\text{sen} \left(\frac{\pi j(2N-1)}{N} \right) + \text{sen} \left(\frac{\pi j(2N+1)}{N} \right) = 2\text{sen} \left(2\pi j \right) \cos \left(\frac{-\pi j}{N} \right) = 0.$$

Logo $\lambda_{N-1}(r) = 0$.

□

Este fato generaliza o lema 4 de [24].

2.4 Análise dos autovalores de A_{11} no caso $a = 2$.

Aqui apresentamos nossa demonstração para o caso $a = 2$.

Para $a = 2$, a expressão de ξ_p toma a forma:

$$\xi_p(r) = \frac{1}{2r} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N}\right)}.$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher $r = 1$. Fazendo isto, escrevemos:

$$\xi_p(1) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\frac{1}{2i} \left(e^{\frac{\pi j(2p+1)}{N}i} - e^{-\frac{\pi j(2p+1)}{N}i} \right)}{\frac{1}{2i} \left(e^{\frac{\pi j}{N}i} - e^{-\frac{\pi j}{N}i} \right)}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{\pi j(2p+1)}{N}i} - e^{-\frac{\pi j(2p+1)}{N}i}}{e^{\frac{\pi j}{N}i} - e^{-\frac{\pi j}{N}i}} &= e^{\frac{2\pi j p}{N}i} + e^{\frac{2\pi j(2p-1)}{N}i} e^{-\frac{\pi j}{N}i} + \dots + e^{\frac{\pi j}{N}i} e^{-\frac{j\pi(2p-1)}{N}i} + e^{-\frac{j\pi(2p)}{N}i} \\ &= e^{\frac{2\pi j p}{N}i} + e^{\frac{\pi j(2p-2)}{N}i} + e^{\frac{\pi j(2p-4)}{N}i} + \dots + e^{-\frac{\pi j(2p-2)}{N}i} + e^{-\frac{\pi j(2p)}{N}i} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para analisar esta soma vamos necessitar do seguinte lema:

LEMA 2.6. Seja $K \in \mathbb{Z}$ então:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{2\pi j K}{N}i} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } K \not\equiv 0 \pmod{N}, \\ \frac{N-1}{2} & \text{se } K \equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Demonstração.

$$K \equiv 0 \pmod{N} \Rightarrow e^{\frac{2\pi j K}{N}i} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{2\pi j K}{N}i} = \frac{1}{2}(N-1).$$

$$\text{Se } K \not\equiv 0 \pmod{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^N e^{\frac{2\pi j K}{N}i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{2\pi j K}{N}i} = -1.$$

E daí segue o lema. □

Usando este lema podemos demonstrar a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.7. Seja $p \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq p \leq N-1$ então

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N}\right)} = \frac{N - (2p+1)}{2}. \quad (2.11)$$

Demonstração. Provemos inicialmente nos casos em que $1 < p < \frac{N}{2}$. Note que:

$$\xi_p(1) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\frac{1}{2i} \left(e^{\frac{\pi j(2p+1)}{N}i} - e^{-\frac{\pi j(2p+1)}{N}i} \right)}{\frac{1}{2i} \left(e^{\frac{\pi j}{N}i} - e^{-\frac{\pi j}{N}i} \right)}.$$

Usando 2.10 obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=-p}^p e^{\frac{2\pi jk}{N}i} \\ &= \sum_{k=-p}^p \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{2\pi jk}{N}i} \right). \end{aligned}$$

Mas como $1 < p < \frac{N}{2} \Rightarrow -N < -2p \leq 2k \leq 2p < N$. No intervalo $(-N, N)$ só existe um número congruente a zero módulo N , logo vemos que $k \equiv 0 \pmod{N} \Rightarrow k = 0$. Usando o lema (2.6) escrevemos:

$$\sum_{k=-p}^p \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{2\pi jk}{N}i} \right) = \frac{N-1}{2} + 2p \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{N-(2p+1)}{2}.$$

Para o caso em que $p = 0$ temos:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi j(2 \cdot 0 + 1)}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi j}{N}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} 1 = \frac{N-1}{2} = \frac{N-(2 \cdot 0 + 1)}{2}.$$

Agora usando a proposição (2.3), se $0 < p < \frac{N}{2}$ obtemos:

$$\xi_{N-p-1}(1) = -\xi_p(1) = -\frac{N-(2p+1)}{2} = \frac{N-(2(N-p-1)+1)}{2}.$$

Agora notando que se $0 \leq p \leq \frac{N}{2}$, então $\frac{N}{2} - 1 \leq N - p - 1 \leq N - 1$, concluímos a demonstração. \square

COROLÁRIO 2.8. Se $p = \frac{N-1}{2}$ então $\xi_p(1) = 0$.

Este corolário concorda com o caso newtoniano. Basta comparar com o segundo corolário do lema 9 de [24].

COROLÁRIO 2.9. Se $p \neq \frac{N-1}{2}$ e $p \neq N$ então $\xi_p(1) \neq 0$.

COROLÁRIO 2.10. Vale a relação

$$\lambda_N(A_{11}) = \frac{N-1}{2}. \quad (2.12)$$

Demonstração. Note que para $p = 0$ ou $p = N$ a expressão

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j(2p+1)}{N}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{N}\right)} \quad (2.13)$$

tem o mesmo valor, e daí segue o corolário. \square

TEOREMA 2.11. Sejam $a = 2$ e $N > 3$. Se o vetor de massas é da forma:

$$\vec{m}_1 = x_1^{\frac{N-1}{2}} v_{\frac{N-1}{2}} + x_1^N v_N, \quad (2.14)$$

com $x_1^N = \frac{1}{\lambda_N(A_{11})} r v^2$, então temos uma solução do sistema (2.1).

Reciprocamente se temos uma solução do sistema (2.1) então o vetor de massas é da forma

$$\vec{m}_1 = x_1^{\frac{N-1}{2}} v_{\frac{N-1}{2}} + x_1^{N-1} v_{N-1} + x_1^N v_N. \quad (2.15)$$

Além do mais, se permitimos apenas massas reais, todas as massas devem ser iguais entre si.

Demonstração. De fato suponha que o vetor \vec{m}_1 é da forma

$$\vec{m}_1 = x_1^{\frac{N-1}{2}} v_{\frac{N-1}{2}} + \frac{1}{\lambda_N(A_{11})} r v^2 v_N.$$

Então segue que

$$A_{11} \vec{m}_1 = A_{11} \left(x_1^{\frac{N-1}{2}} v_{\frac{N-1}{2}} + \frac{1}{\lambda_N(A_{11})} r v^2 v_N \right) = r v^2 v_N = r v^2 \vec{1}.$$

Agora suponha que temos uma solução de (2.1). A afirmação que a solução deve ser da forma:

$$\vec{m} = x_1^{\frac{N-1}{2}} v_{\frac{N-1}{2}} + x_1^{N-1} v_{N-1} + x_1^N v_N, \quad (2.16)$$

segue do Lema 2.1 e do Corolário 2.8. A afirmação que se as massas são reais devem ser iguais entre si, segue do fato que se o vetor

$$x_1^{\frac{N-1}{2}} v_{\frac{N-1}{2}} + x_1^{N-1} v_{N-1} \in \mathbb{R}^N \quad (2.17)$$

então $N = 3$ ou $x_1^{\frac{N-1}{2}} = x_1^{N-1} = 0$. Para uma demonstração deste fato veja o apêndice 2. \square

O comportamento similar dos resultados para o caso $a = 2$ e $a = 3$ nos faz perguntar se esses resultados valem para outros potenciais. Na próxima seção exploraremos esta questão.

2.5 Comportamento de ξ_p tendo a como parâmetro

Veamos como fica a função ξ_p para alguns valores de N , em função do parâmetro a . Para isso fixamos $r = 1$, e plotamos os gráficos de $\xi_p(1)$ em função do parâmetro a . Primeiro façamos $N = 4$.

Na legenda da figura no canto superior direito, o índice p está ordenado de 1 até 4, nas próximas figuras seguimos este padrão.

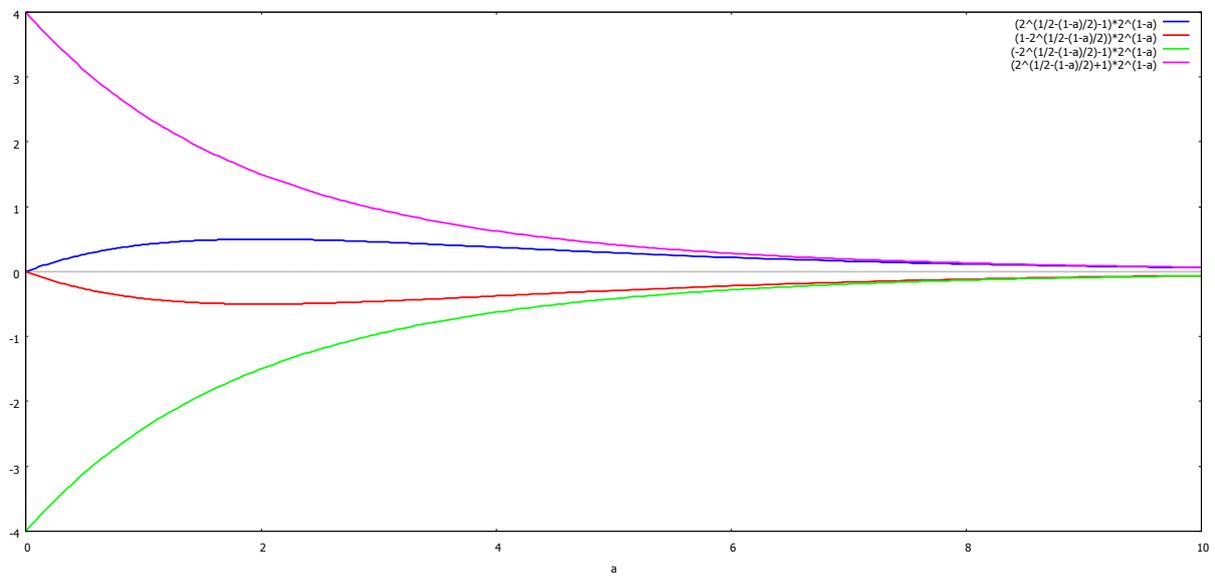


Figura 2.1 Função $\xi_p, N = 4, p = 1, 2, 3, 4$.

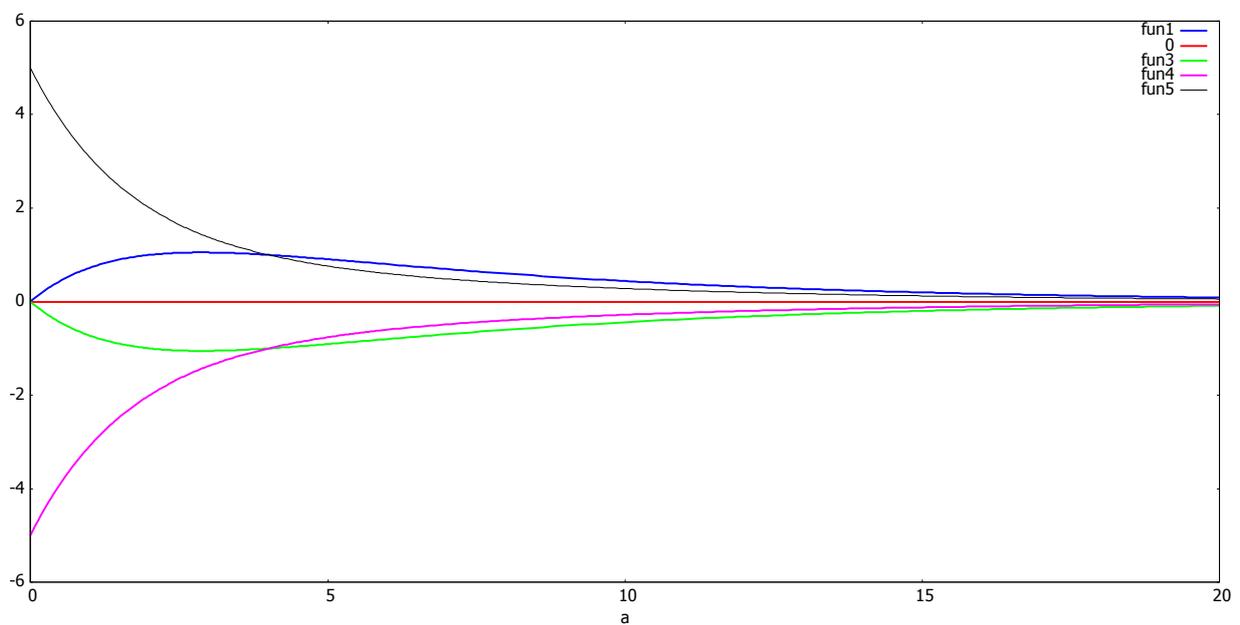


Figura 2.2 Função $\xi_p, N = 5, p = 1, 2, 3, 4, 5$.

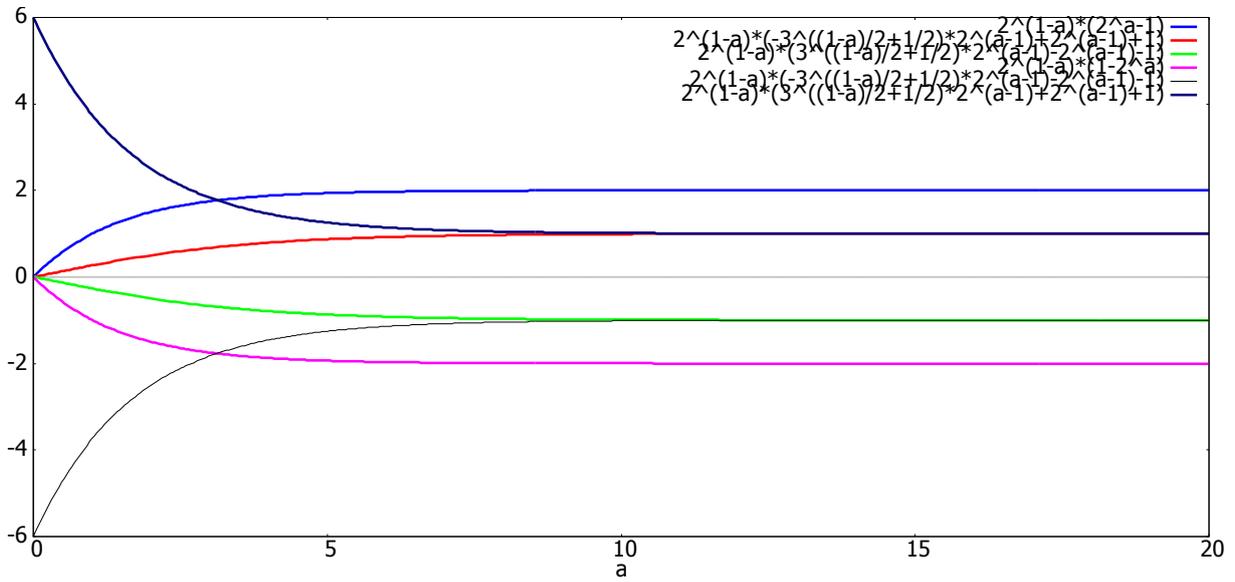


Figura 2.3 Função $\xi_p, N = 6, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

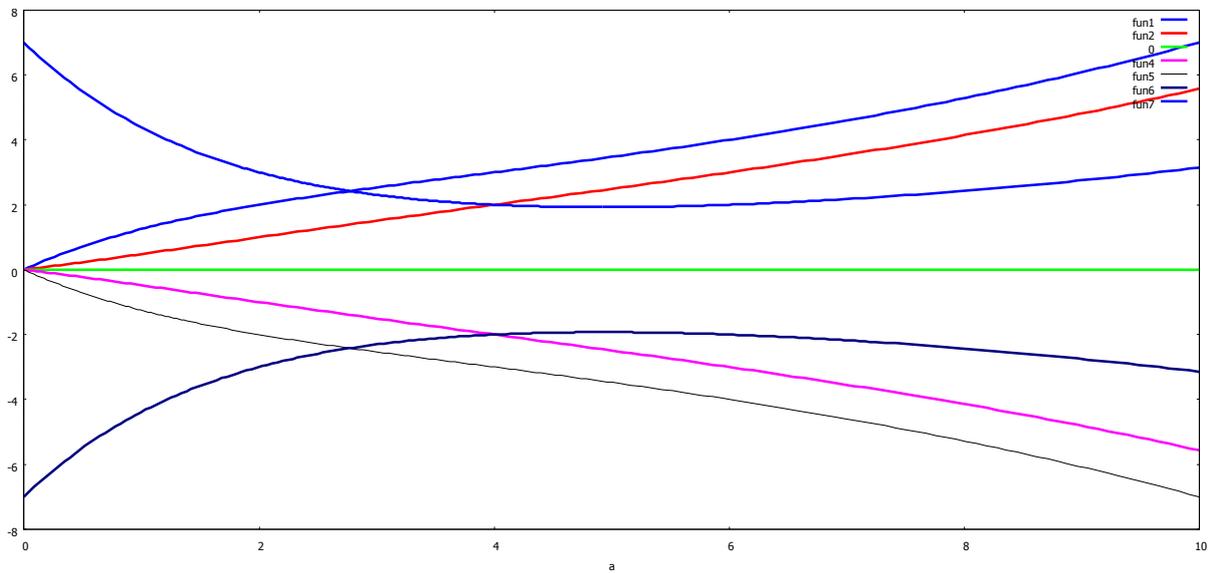


Figura 2.4 Função $\xi_p, N = 7, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

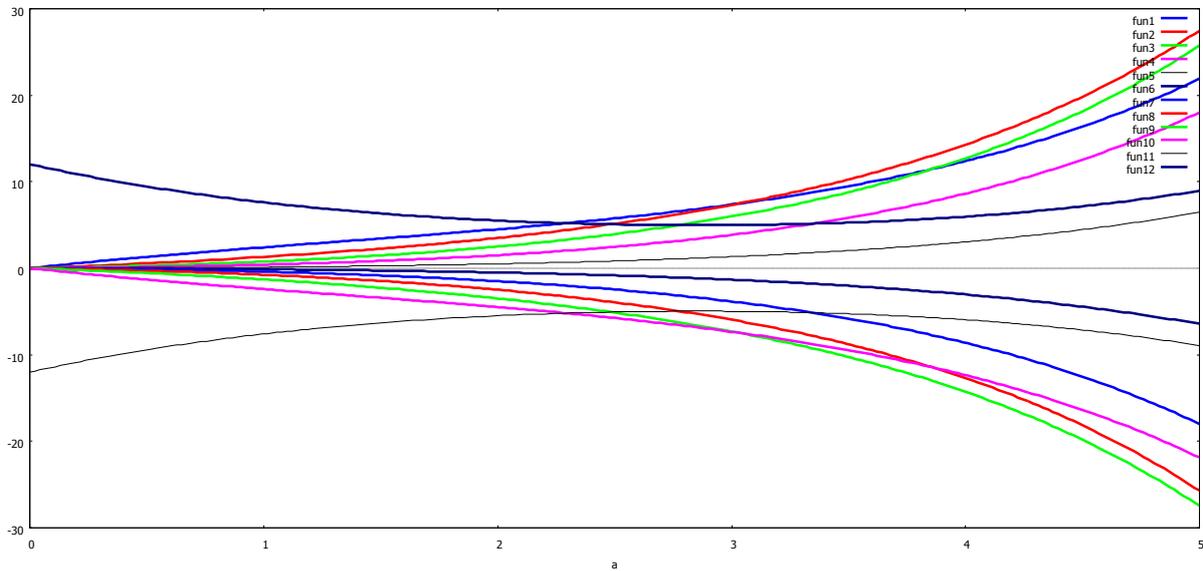


Figura 2.5 Função $\xi_p, N = 12, p = 1, \dots, 12$.

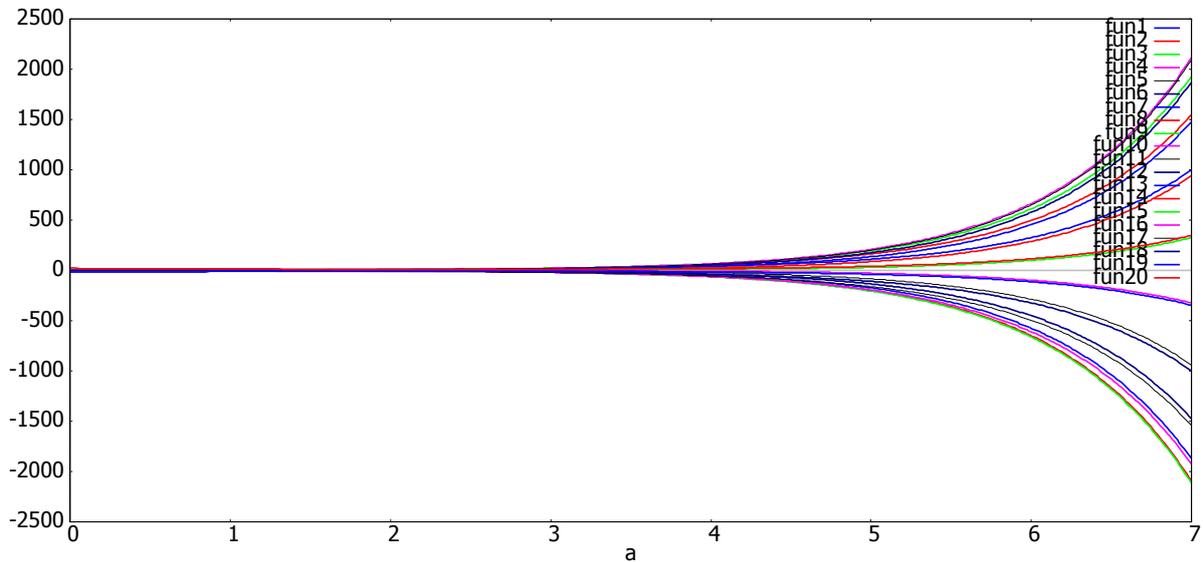


Figura 2.6 Função $\xi_p, N = 20, p = 1, \dots, 20$.

Dois Polígonos Homotéticos

3.1 Objetivo

Nosso objetivo neste capítulo é provar o seguinte teorema, que consideramos o resultado principal da tese, pelo fato de generalizar o Teorema de Perko-Walter-Elmabsout, para dois polígonos, e um potencial mais geral.

TEOREMA 3.1. Considere dois polígonos regulares concêntricos e homotéticos de N lados e $2N$ massas, cada uma posicionada num vértice de um destes polígonos. Considere que a configuração está associada a um potencial da forma:

$$U(q_1, \dots, q_N) = \frac{1}{a-2} \sum_{j<i} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^{a-2}} \quad \text{se } a > 2,$$

$$U(q_1, \dots, q_N) = \sum_{j<i} m_i m_j \log \|q_i - q_j\| \quad \text{se } a = 2.$$

e a massa total do sistema $\sum_{j=1}^{2N} m_j$ é não-nula. Então esta configuração está em equilíbrio relativo se, e somente se, as massas em cada polígono são iguais entre si (podendo eventualmente as massas em um polígono serem diferentes das massas no outro polígono).

3.1.1 As matrizes de configuração

Vamos particularizar as equações obtidas no capítulo 1 para o caso de dois polígonos homotéticos. Note que no caso de dois polígonos a equação matricial (1.22) toma a forma particular

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 v^2 \vec{1} \\ r_2 v^2 \vec{1} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

onde seguindo (1.13) e (1.14), as matrizes por $A_{TS} = [a_{kj}]$ são definidas por

$$a_{kj} = \frac{r_T - r_S \omega_{j-k}}{|r_T - r_S \omega_{j-k}|^a} + \frac{v^2}{M} r_S \omega_{j-k} \quad \text{para } k, j = 1, \dots, N,$$

e para $T, S = 1, 2$. Além disso $A_{TT} = [a_{kj}]$ para $T = 1, 2$, e a_{kj} é dado por

$$\begin{cases} a_{kj} = \frac{r_T - r_T \omega_{j-k}}{|r_T - r_T \omega_{j-k}|^a} + \frac{v^2}{M} r_T \omega_{j-k} & \text{se } k \neq j. \\ a_{kk} = \frac{v^2}{M} r_T. \end{cases}$$

3.1.2 Subsistemas

Vejamos abaixo como fica a versão do lema 1.8 para o caso de dois polígonos.

LEMA 3.2. O vetor $\begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^N \left(x_1^p \begin{pmatrix} v_p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + x_2^p \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v_p \end{pmatrix} \right)$ é uma solução do sistema (3.1) se, e somente se, os coeficientes x_1^p, x_2^p satisfazem os subsistemas:

$$\begin{cases} x_1^N \lambda_N(A_{11}) + x_2^N \lambda_N(A_{12}) = r_1 v^2, \\ x_1^N \lambda_N(A_{21}) + x_2^N \lambda_N(A_{22}) = r_2 v^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

e

$$\begin{cases} x_1^p \lambda_p(A_{11}) + x_2^p \lambda_p(A_{12}) = 0 \\ x_1^p \lambda_p(A_{21}) + x_2^p \lambda_p(A_{22}) = 0 \end{cases} \quad \forall p = 1, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

Os subsistemas dados no lema acima serão o objeto de estudo deste capítulo, mais especificamente nossa intenção é responder a pergunta:

Considerando x_1^p e x_2^p como variáveis nos subsistemas acima e sabendo que para posições fixadas dos polígonos, os números $\lambda_p(A_{11}), \lambda_p(A_{12}), \lambda_p(A_{21})$ e $\lambda_p(A_{22})$ estão fixos, para quais valores de v existem soluções dos subsistemas e, além disso quais são as possíveis formas das soluções ?

Sabemos que as respostas às questões acima são fornecidas se conhecermos a função determinante de cada subsistema.

Usando 1.27, 1.28, 2.6 e 2.7 podemos escrever o determinante de cada subsistema acima da seguinte maneira se $p \neq N-1$:

$$\begin{aligned} \Gamma_p(r_1, r_2) &= \begin{vmatrix} \lambda_p(A_{11}) & \lambda_p(A_{12}) \\ \lambda_p(A_{21}) & \lambda_p(A_{22}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \xi_p(r_1) & f_p(r_1, r_2) \\ f_p(r_2, r_1) & \xi_p(r_2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pela expressão encontrada em (2.6) percebemos rapidamente que $\xi_p(r_1)$ e $\xi_p(r_2)$ têm mesmo sinal. Portanto a fim de mostrar que o determinante acima é estritamente positivo, é suficiente mostrar que $f_p(r_1, r_2)$ e $f_p(r_2, r_1)$ têm sinais contrários e são não-nulos. É nesta tarefa que nos empenharemos nas próximas seções. Antes porém, vamos escrever o determinante acima de um modo diferente. Usando a homogeneidade das funções f e ξ , temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_p(r_1, r_2) &= \begin{vmatrix} \xi_p(r_1) & f_p(r_1, r_2) \\ f_p(r_2, r_1) & \xi_p(r_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} r_1^{1-a} \xi_p(1) & r_2^{1-a} f_p\left(\frac{r_1}{r_2}, 1\right) \\ r_2^{1-a} f_p\left(1, \frac{r_1}{r_2}\right) & r_2^{1-a} \xi_p(1) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Portanto para mostrar que o determinante é não-nulo é suficiente mostrar que $f\left(\frac{r_1}{r_2}, 1\right)$ e $f\left(1, \frac{r_1}{r_2}\right)$ têm sinais contrários. Tal tarefa ocupará as seções seguintes, então para futura referência definimos:

DEFINIÇÃO 3.3. Para $p = 1, \dots, N$ definimos as funções $h_p, g_p : \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_p(x) := f_p(x, 1) = \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}}. \quad (3.5)$$

e

$$g_p(x) := f_p(1, x) = \sum_{j=1}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi p j}{N}\right) - x \cos\left(\frac{2\pi(p+1)j}{N}\right)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}}. \quad (3.6)$$

São estas funções que passaremos a analisar nas seções seguintes. Nosso objetivo passa a ser mostrar que estas funções têm sinais contrários.

3.2 Análise dos subsistemas

3.2.1 Função auxiliar e sua expansão em série de Taylor

Nesta seção nosso objetivo é dar uma expansão de Taylor para uma função que auxiliará nos nossos estudos e descrever algumas de suas propriedades.

Particularmente, a sequência de coeficientes apresentados no lema a seguir desempenha um importante papel em discussões posteriores. A função que aparece no lema a seguir é chamada de função auxiliar. O lema envolve a expansão da série binomial. A prova do lema abaixo é baseada no lema 2 de [21].

LEMA 3.4. Considere a função $f : \mathbb{C} - \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{(1-z)^{\frac{a}{2}}}$. Considere sua expansão em série de Taylor centrada na origem:

$$\frac{1}{(1-z)^{\frac{a}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

Então

- Se a é positivo então todos os coeficientes α_k são positivos.
- Se $a > 2$ a sequência dos coeficientes α_k é crescente, e se $a = 2$ a sequência é constante.
- O raio de convergência da série é 1.

Demonstração. Expandindo em série de Taylor em torno de 0, temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1-z)^{\frac{a}{2}}} = (1-z)^{-\frac{a}{2}}, \\ f'(z) &= \left(-\frac{a}{2}(1-z)^{-\frac{a}{2}-1}(-1)\right) \\ f''(z) &= \left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-1\right)(1-z)^{-\frac{a}{2}-2}(-1)^2 \\ &\vdots \\ f^{(k)}(z) &= \left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{a}{2}-(k-1)\right)(1-z)^{-\frac{a}{2}-k}(-1)^k. \end{aligned}$$

Portanto

$$f^{(k)}(0) = \left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{a}{2}-(k-1)\right)(-1)^k$$

Assim os coeficientes α_k são dados por:

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{a}{2}-(k-1)\right)(-1)^k}{k!} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+1\right)\dots\left(\frac{a}{2}+(k-1)\right)}{k!}.$$

Em particular α_k é positivo $\forall k$, isto prova o item a). Agora notemos que

$$\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+1\right)\dots\left(\frac{a}{2}+(k)\right)}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+1\right)\dots\left(\frac{a}{2}+(k-1)\right)} = \frac{k + \frac{a}{2}}{k + 1},$$

donde segue o item b) do lema. Agora, calculamos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k + \frac{a}{2}}{k + 1} = 1.$$

Como o raio de convergência da série é o inverso deste limite, concluímos que o raio de convergência é 1 e o item c) está provado. \square

Desejamos fazer uma pequena adaptação neste lema, “aglutinando” alguns termos ao coeficiente como segue.

Considerando que $x \in \mathbb{R}$, pondo $xe^{\frac{2\pi j}{N}i}$ no lugar de z e supondo que $|x| < 1$, segue que:

$$\frac{1}{\left(1 - xe^{\frac{2\pi j}{N}i}\right)^{\frac{a}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(xe^{\frac{2\pi j}{N}i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{2\pi jk}{N}i} x^k.$$

Esta última série será vista como uma série na variável real x , e tem como raio de convergência 1 pois:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1} e^{\frac{2\pi j(k+1)}{N}i}|}{|\alpha_k e^{\frac{2\pi jk}{N}i}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = 1.$$

Assim podemos “incorporar” o termo $e^{\frac{2\pi jk}{N}i}$ ao coeficiente da série.

Note a identidade abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 - xe^{\frac{+2\pi j}{N}i}\right)^{\frac{a}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1 - xe^{\frac{-2\pi j}{N}i}\right)^{\frac{a}{2}}} &= \frac{1}{\left[\left(1 - xe^{\frac{+2\pi j}{N}i}\right) \cdot \left(1 - xe^{\frac{-2\pi j}{N}i}\right)\right]^{\frac{a}{2}}} \\ &= \frac{1}{\left[1 - x\left(e^{\frac{-2\pi j}{N}i} + e^{\frac{+2\pi j}{N}i}\right) + x^2\right]^{\frac{a}{2}}} \\ &= \frac{1}{\left(1 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}}. \end{aligned}$$

Segue então que para $|x| < 1$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} &= \frac{1}{\left(1 - xe^{\frac{+2\pi j}{N}i}\right)^{\frac{a}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1 - xe^{\frac{-2\pi j}{N}i}\right)^{\frac{a}{2}}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot e^{\frac{2\pi jk}{N}i} x^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \cdot e^{-\frac{2\pi jl}{N}i} x^l \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} \alpha_k \cdot \alpha_l \cdot e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N}i} \right) x^n. \quad (3.8)$$

Usaremos este resultado nas duas próximas seções. Note que a multiplicação acima é legítima no sentido em que as séries envolvidas convergem (veja por exemplo [23], pág.80; [26], pág.72; [12], pág.30).

3.2.2 Análise da função h_p no intervalo $(0, 1)$

Nesta seção nosso objetivo é estudar uma das entradas da matriz cujo determinante desejamos analisar. Relembrando a definição 3.6, escrevemos:

$$h_p(x) = \sum_{j=1}^N \frac{x\cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(1 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}}, \quad \text{para } p = 1, \dots, N.$$

Queremos mostrar que a função h_p é negativa se x está no intervalo $(0, 1)$. Para tanto, mostraremos que ela possui uma expansão em série com todos os coeficientes negativos. Usando (3.8)

escrevemos para $x \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
h_p(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= \sum_{j=1}^N \left[\operatorname{Re} \left[x e^{\frac{2\pi j p}{N} i} - e^{\frac{2\pi j(p+1)}{N} i} \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} \alpha_k \alpha_l e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N} i} \right) x^n \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} \alpha_k \alpha_l \cdot \operatorname{Re} \left[x e^{\frac{2\pi j p}{N} i} - e^{\frac{2\pi j(p+1)}{N} i} \right] e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N} i} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k+l=n} \alpha_k \alpha_l \left(\sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left[x e^{\frac{2\pi j p}{N} i} - e^{\frac{2\pi j(p+1)}{N} i} \right] e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N} i} \right) \right] x^n.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Para saber informações sobre a série acima, é conveniente estudar o coeficiente

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left[x e^{\frac{2\pi j p}{N} i} - e^{\frac{2\pi j(p+1)}{N} i} \right] e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N} i}.$$

Veja então o seguinte lema:

LEMA 3.5.

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left[e^{\frac{2\pi j p}{N} i} \right] \cdot e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N} i} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{se } l - k \equiv p \pmod{N} \text{ e } k - l \not\equiv p \pmod{N}, \\ \frac{N}{2} & \text{se } l - k \not\equiv p \pmod{N} \text{ e } k - l \equiv p \pmod{N}, \\ \frac{N}{2} & \text{se } l - k \equiv p \pmod{N} \text{ e } k - l \equiv p \pmod{N}, \\ 0, & \text{demais casos.} \end{cases}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left[e^{\frac{2\pi j p}{N} i} \right] \cdot e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N} i} = \\
&\sum_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi j(k-l)}{N}\right) + i \sum_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j(k-l)}{N}\right).
\end{aligned}$$

No segundo somatório acima, se trocarmos j por $N - j$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{2\pi(N-j)p}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(N-j)(k-l)}{N}\right) \\
&= \cos\left(2\pi p + \frac{2\pi(-j)p}{N}\right) \operatorname{sen}\left(2\pi(k-l) + \frac{2\pi(-j)(k-l)}{N}\right) \\
&= \cos\left(-\frac{2\pi jp}{N}\right) \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi j(k-l)}{N}\right) \\
&= -\cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j(k-l)}{N}\right).
\end{aligned}$$

Logo o termo $N - j$ é o negativo do termo j e portanto a soma é nula. Para o primeiro somatório, usamos a identidade:

$$\frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] = \cos(a)\cos(b).$$

Teremos então:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \operatorname{Re}\left[e^{\frac{2\pi jp}{N}i}\right] e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N}i} \\
&= \sum_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi j(k-l)}{N}\right) \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi j}{N}(p+k-l)\right) + \cos\left(\frac{2\pi j}{N}(k-l-p)\right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[e^{\frac{2\pi j}{N}i(p+k-l)} + e^{\frac{2\pi j}{N}i(k-l-p)}\right] \\
&= \begin{cases} \frac{N}{2}, & \text{se } l-k \equiv p \pmod{N} \text{ e } k-l \not\equiv p \pmod{N}, \\ \frac{N}{2}, & \text{se } l-k \not\equiv p \pmod{N} \text{ e } k-l \equiv p \pmod{N}, \\ N, & \text{se } l-k \equiv p \pmod{N} \text{ e } k-l \equiv p \pmod{N}, \\ 0, & \text{demais casos.} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Aplicando o resultado acima para $p+1$ obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \operatorname{Re}\left[e^{\frac{2\pi j(p+1)}{N}i}\right] e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N}i} \\
&= \begin{cases} \frac{N}{2}, & \text{se } l-k \equiv p+1 \pmod{N} \text{ e } k-l \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ \frac{N}{2}, & \text{se } l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \text{ e } k-l \equiv p+1 \pmod{N} \\ N, & \text{se } l-k \equiv p+1 \pmod{N} \text{ e } k-l \equiv p+1 \pmod{N} \\ 0, & \text{demais casos.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Usando o lema 3.5 e a última igualdade, escrevemos (3.9) como:

$$\begin{aligned}
h_p(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k+l=n} \alpha_k \alpha_l \left(\sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left[x e^{\frac{2\pi j p}{N} i} - e^{\frac{2\pi j(p+1)}{N} i} \right] e^{\frac{2\pi j(k-l)}{N} i} \right) \right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N \right) x^n.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir dessa representação em série de potência para h_p , vamos mostrar que tal função é negativa se $x \in (0, 1)$, e que tem as derivadas de todas as ordens negativas neste intervalo. Para concluir isto, é suficiente mostrar que todos os coeficientes da série são negativos.

Vamos dividir a análise desses coeficientes em três partes, onde vamos agrupar alguns termos dos coeficientes e mostrar que são negativos. O agrupamento será da seguinte forma:

- Primeira diferença:

$$\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l. \tag{3.11}$$

- Segunda diferença:

$$\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l. \tag{3.12}$$

- Terceira diferença:

$$\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l. \tag{3.13}$$

Dividiremos a análise das diferenças em alguns casos. Note que as equações que aparecem em (3.11), (3.12) e (3.13) dependem de p . O primeiro caso que iremos tratar é quando $p \notin \{\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, N - 1, N\}$. Mostraremos que as três diferenças são nulas ou negativas neste caso.

3.2.3 Caso $p \notin \{\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, N - 1, N\}$.

Para mostrar que a primeira diferença é negativa necessitaremos de alguns lemas, como o que segue.

LEMA 3.6. Seja $p \in \{1, \dots, N\}$.

a) Se $p \neq \frac{N}{2}$ e $p \neq N$, então qualquer solução da equação $l - k \equiv p \pmod{N}$ é também solução do sistema $\begin{cases} l - k \equiv p \pmod{N} \\ k - l \not\equiv p \pmod{N} \end{cases}$.

b) Similarmente se $p \neq \frac{N}{2} - 1$ e $p \neq N - 1$ então toda solução da equação $l - k \equiv p + 1 \pmod{N}$ é também solução do sistema $\begin{cases} l - k \equiv p + 1 \pmod{N} \\ k - l \not\equiv p + 1 \pmod{N} \end{cases}$.

Demonstração. Começemos provando o item a). Supondo que l e k são soluções da equação $l - k \equiv p \pmod{N}$ e não do sistema, temos:

$$\begin{cases} l - k \equiv p \pmod{N} \\ k - l \equiv p \pmod{N} \end{cases} \implies 0 \equiv 2p \pmod{N} \implies p = N \quad \text{ou} \quad p = \frac{N}{2}, \quad (3.14)$$

contrariando a hipótese.

Para o item b), notemos que se p é solução da equação: $l - k \equiv p + 1 \pmod{N}$ e não do sistema então

$$\begin{cases} l - k \equiv p + 1 \pmod{N} \\ k - l \equiv p + 1 \pmod{N} \end{cases} \implies 0 \equiv 2(p + 1) \pmod{N} \implies p = N - 1 \quad \text{ou} \quad p = \frac{N}{2} - 1,$$

novamente contrariando a hipótese. \square

OBSERVAÇÃO 3.7. Naturalmente, em ambos os casos, como a equação é uma das equações do sistema, concluímos que o conjunto solução do sistema e da equação são iguais.

Levando em conta o lema (3.6) escrevemos a igualdade:

$$\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l = \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l$$

Apesar de nesta seção estarmos excluindo alguns valores de p , o lema a seguir não precisa desta hipótese, portanto vale para todos os valores de p e de fato será usado para todos os valores possíveis de p no decorrer das próximas seções.

LEMA 3.8. Para $p \in \{1, \dots, N\}$, se $a > 2$ a diferença:

$$\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \quad (3.15)$$

é negativa. E para $a = 2$ esta diferença é negativa ou nula.

Demonstração. Mudamos de índice no primeiro somatório, fazendo:

$$\begin{cases} k+l = n-1 & \Rightarrow & l = n-k-1, \\ l-k = n-k-1-k = n-2k-1, \end{cases}$$

e no segundo somatório, fazendo:

$$\begin{cases} k+l = n & \Rightarrow & l = n-k \\ l-k = n-k-k = n-2k \end{cases}$$

Após isso a equação, se torna:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \\ = & \sum_{\substack{k=0 \\ n-2k-1 \equiv p \pmod{N}}}^{n-1} \alpha_k \alpha_{n-k-1} - \sum_{\substack{k=0 \\ n-2k \equiv p+1 \pmod{N}}}^n \alpha_k \alpha_{n-k} \\ = & \sum_{\substack{k=0 \\ n-2k-1 \equiv p \pmod{N}}}^{n-1} \alpha_k \alpha_{n-k-1} - \sum_{\substack{k=0 \\ n-2k-1 \equiv p \pmod{N}}}^n \alpha_k \alpha_{n-k} \\ = & \sum_{\substack{k=0 \\ n-2k-1 \equiv p \pmod{N}}}^{n-1} \alpha_k (\alpha_{n-k-1} - \alpha_{n-k}) - \begin{cases} \alpha_n \alpha_0, & \text{se } -n-1 \equiv p \pmod{N} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pelo lema (3.4) segue o resultado deste lema. \square

A segunda diferença é:

$$\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l.$$

Temos dois argumentos para provar que é negativa. O primeiro consiste em observar a simetria das equações provando que (3.12) é igual a (3.11). Vejamos este argumento.

Tome (3.12) e troque k por l e l por k nos somatórios, obtendo:

$$\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l = \sum_{\substack{l+k=n-1 \\ k-l \not\equiv p \pmod{N} \\ l-k \equiv p \pmod{N}}} \alpha_l \cdot \alpha_k - \sum_{\substack{l+k=n \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_l \cdot \alpha_k.$$

O que se vê ser igual a (3.11). Portanto (3.12) será também negativa.

Para o segundo argumento, podemos imitar as contas realizadas para (3.11), e assim garantir que (3.12) também é negativa. Omitiremos esse argumento aqui.

Para lidar com a terceira diferença, necessitaremos do seguinte lema.

LEMA 3.9.

a) Se $p \neq \frac{N}{2}$ e $p \neq N$, então o sistema $\begin{cases} l - k \equiv p \pmod{N} \\ k - l \equiv p \pmod{N} \end{cases}$ não admite solução.

b) Se $p \neq \frac{N}{2} - 1$ e $p \neq N - 1$, então o sistema $\begin{cases} l - k \equiv p + 1 \pmod{N} \\ k - l \equiv p + 1 \pmod{N} \end{cases}$ não admite solução.

Demonstração. O item a) segue de (3.6a)) e b) segue de (3.6b)). \square

Usando o lema acima podemos dizer que, se $p \notin \{\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, N - 1, N\}$, os termos $\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l$

e $\sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l$ inexistem na representação da série em (3.10), o que conclui nossa análise neste caso. Vamos passar agora aos casos excepcionais.

3.2.4 Casos excepcionais

3.2.4.1 Casos $p = \frac{N}{2} - 1$ ou $p = N - 1$.

No caso $p = N - 1$, a análise da função é bastante simples. Como

$$h_p(x) = \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}},$$

substituindo $p = N - 1$ obtemos:

$$h_{N-1}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j(N-1)}{N}\right) - \cos(2\pi j)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} = \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j(N-1)}{N}\right) - 1}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}}.$$

Como $x \in (0, 1)$, vê-se facilmente que o numerador é negativo e portanto a função é negativa. Isto é suficiente para nossos propósitos neste trabalho porém, como nos outros casos, vamos tentar obter informações adicionais sobre as derivadas da função analisando os coeficientes de sua expansão em série.

Para tratar esses casos, alguns lemas facilitarão o nosso trabalho.

LEMA 3.10. Se $p = \frac{N}{2} - 1$ ou $p = N - 1$ então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- a) Seja $N \geq 3$, o sistema $\begin{cases} l - k \equiv p \pmod{N} \\ k - l \equiv p \pmod{N} \end{cases}$ não é satisfeito para nenhum par (k, l) .
- b) Toda solução da equação $l - k \equiv p + 1 \pmod{N}$ é solução do sistema

$$\begin{cases} l - k \equiv p + 1 \pmod{N} \\ k - l \equiv p + 1 \pmod{N} \end{cases}.$$

c) O sistema $\begin{cases} l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N} \end{cases}$ não é satisfeito para nenhum valor de k e de l . Similarmemente o sistema $\begin{cases} l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N} \end{cases}$ não é satisfeito para nenhum valor de k e de l .

d) Seja $N \geq 3$, então toda solução da equação $l-k \equiv p \pmod{N}$ é solução do sistema

$$\begin{cases} l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N} \end{cases}.$$

e) Seja $N \geq 3$, então toda solução da equação $k-l \equiv p \pmod{N}$ é solução do sistema

$$\begin{cases} l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N} \end{cases}.$$

Demonstração. Se $N \geq 3$, temos $\{N-1, \frac{N}{2}-1\} \cap \{\frac{N}{2}, N\} = \emptyset$, e o item a) segue então de (3.9 a)). Para o item b), basta observar que para $p = \frac{N}{2}-1$ ou $p = N-1$ vale a igualdade:

$$p+1 \equiv -(p+1) \pmod{N}.$$

Assim se $l-k \equiv p+1 \pmod{N}$ então $k-l \equiv -(p+1) \pmod{N} \equiv p+1 \pmod{N}$.

O item c) é portanto consequência do item b). Os itens d) e e) são consequências diretas de (3.6 item a)). \square

Usando os lemas (3.10 a) e c)), a representação em série da função dada em (3.10) quando $p = \frac{N}{2}-1$ e $p = N-1$ é reduzida para:

$$\begin{aligned} h_p(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N \right) x^n. \end{aligned}$$

Olhando os dois primeiros somatórios no coeficiente acima, vemos que são iguais (basta trocar k por l e l por k), assim escrevemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N \right) x^n = \\ \sum_{n=0}^{\infty} N \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \right) x^n.$$

Pelo lema (3.10 b) e d)) podemos reescrever a soma acima como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \right) x^n.$$

O coeficiente da série acima se revela ser o mesmo termo que analisamos no lema (3.8), o qual já mostramos ser negativo ou nulo. Segue que neste caso também a função é uma série com todos os coeficientes negativos. O caso está provado.

3.2.4.2 Casos $p = \frac{N}{2}$ ou $p = N$.

Novamente para a análise também serão necessários alguns lemas.

LEMA 3.11. Se $p = \frac{N}{2}$ ou $p = N$, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- Toda solução da equação $l - k \equiv p \pmod{N}$ é solução do sistema $\begin{cases} l - k \equiv p \pmod{N} \\ k - l \equiv p \pmod{N} \end{cases}$.
- O sistema $\begin{cases} l - k \equiv p \pmod{N} \\ k - l \not\equiv p \pmod{N} \end{cases}$ não é satisfeito para nenhum valor de k e de l .
- O sistema $\begin{cases} l - k \not\equiv p \pmod{N} \\ k - l \equiv p \pmod{N} \end{cases}$ não é satisfeito para nenhum valor de k e de l .

Demonstração. Podemos ver que para $p = \frac{N}{2}$ ou $p = N$ vale a igualdade $p \equiv -p \pmod{N}$. Supondo que existe uma solução para a equação $l - k \equiv p \pmod{N}$ escrevemos :

$$l - k \equiv p \pmod{N} \implies k - l \equiv -p \pmod{N} \equiv p \pmod{N}.$$

Isto prova a). Os itens b) e c) seguem de a). □

Notando que se $N \geq 3$, vale $\{N-1, \frac{N}{2}-1\} \cap \{\frac{N}{2}, N\} = \emptyset$, segue que podemos também usar 3.9 b), usando também o lema 3.11 itens b) e c) e podemos escrever para $p = N$ ou $p = \frac{N}{2}$:

$$\begin{aligned}
h_p(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \not\equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l N - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \not\equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \frac{N}{2} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} N \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N} \\ k-l \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N} \\ k-l \not\equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \alpha_l \right) x^n.
\end{aligned}$$

Pelos lemas 3.11 item a) e 3.6 item b) podemos reescrever a soma acima como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N \left(\sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l-k \equiv p \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l - \sum_{\substack{k+l=n \\ l-k \equiv p+1 \pmod{N}}} \alpha_k \cdot \alpha_l \right) x^n.$$

Portanto pelo lema 3.8 sabemos que o coeficiente acima é negativo ou nulo. Isto conclui este caso. Em suma podemos dizer que se $p \in \{1, \dots, N\}$ então a função $h_p(x)$ é negativa se $x \in (0, 1)$, e tem derivadas de todas as ordens negativas neste intervalo $x \in (0, 1)$.

3.2.5 Análise da função g_p no intervalo $(0, 1)$

Nesta seção nosso objetivo é provar que g_p definida em (3.6) é positiva no intervalo $(0, 1)$ e tem derivadas de todas as ordens positivas neste intervalo. Para isto vamos aproveitar o que já foi provado para a função h_p . Lembre de (3.6) que

$$g_p(x) = f_p(1, x) = \sum_{j=1}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi p j}{N}\right) - x \cos\left(\frac{2\pi(p+1)j}{N}\right)}{\left(1 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}}.$$

Agora, para fazer a análise desta função, podemos notar a identidade:

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{2\pi(N-p-1)j}{N}\right) - x\cos\left(\frac{2\pi(N-p-1+1)j}{N}\right) \\
= & \cos\left(2\pi j - \frac{2\pi(p+1)j}{N}\right) - x\cos\left(2\pi j - \frac{2\pi pj}{N}\right) \\
= & \cos\left(\frac{2\pi(p+1)j}{N}\right) - x\cos\left(\frac{2\pi pj}{N}\right) \\
= & -\left(x\cos\left(\frac{2\pi pj}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(p+1)j}{N}\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Donde segue que

$$\begin{aligned}
g_{N-p-1}(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi(N-p-1)j}{N}\right) - x\cos\left(\frac{2\pi(N-p-1+1)j}{N}\right)}{\left(1 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= -\sum_{j=1}^N \frac{x\cos\left(\frac{2\pi pj}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(p+1)j}{N}\right)}{\left(1 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} = -h_p(x).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Note que como $1 \leq p \leq N \Rightarrow -1 \leq N-p-1 \leq N-2$, isto mostra que no intervalo $(0, 1)$ a função g_p é positiva e tem derivadas de todas as ordens positivas para $1 \leq p \leq N-2$. Falta concluir o mesmo resultado para $p = N-1$ e $p = N$. Levando em conta que:

$$\begin{aligned}
g_{N+k}(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi(N+k)j}{N}\right) - x\cos\left(\frac{2\pi(N+k+1)j}{N}\right)}{\left(1 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi kj}{N}\right) - x\cos\left(\frac{2\pi(k+1)j}{N}\right)}{\left(1 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + x^2\right)^{\frac{a}{2}}} = g_k(x).
\end{aligned}$$

Concluimos que $g_{-1}(x) = g_{N-1}(x)$ e $g_0(x) = g_N(x)$, e portanto também para $p = N-1$ e $p = N$, a função g_p é positiva e tem derivadas de todas as ordens positivas.

3.2.6 Análise das funções h_p e g_p no intervalo $(1, \infty)$.

Nesta seção nosso objetivo é analisar o comportamento das funções h_p e g_p no intervalo $(1, \infty)$.

Vejam a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 3.12. Sejam $a \geq 2$ e $p \in \{1, \dots, N\}$. Se $x > 1$ então $g_p(x)$ é negativa e sua derivada é positiva.

Demonstração. Notemos que

$$\begin{aligned} h_p\left(\frac{1}{x}\right) &= \sum_{j=1}^N \frac{\frac{1}{x} \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(1 - 2\frac{1}{x} \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^{\frac{a}{2}}} = \sum_{j=1}^N \frac{\frac{1}{x} \left(\cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - x \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)\right)}{\left(\frac{x^2 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + 1}{x^2}\right)^{\frac{a}{2}}} \\ &= \sum_{j=1}^N x^{a-1} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - x \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(x^2 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + 1\right)^{\frac{a}{2}}} = x^{a-1} g_p(x). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Assim se $x > 1$ então $\frac{1}{x} \in (0, 1) \Rightarrow h_p\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow g_p(x) < 0$.

Para a derivada, podemos reescrever a relação acima como:

$$h_p\left(\frac{1}{x}\right) = x^{a-1} g_p(x) \quad \Longrightarrow \quad h_p\left(\frac{1}{x}\right) x^{1-a} = g_p(x).$$

Derivando ambos os membros, obtemos:

$$(g_p)'(x) = (h_p)'\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right) x^{1-a} + h_p\left(\frac{1}{x}\right) (1-a)x^{-a}. \quad (3.19)$$

Como estamos considerando que $a \geq 2$, se $x > 1$ o lado direito é soma de dois termos positivos e portanto é positivo. \square

PROPOSIÇÃO 3.13. Se $x > 1$ a função $h_p(x)$ é positiva e sua derivada é negativa.

Demonstração. Ainda por (3.18) trocando $\frac{1}{x}$ por x obtemos:

$$h_p(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{a-1} g_p\left(\frac{1}{x}\right) = x^{1-a} g_p\left(\frac{1}{x}\right). \quad (3.20)$$

Concluimos que $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in (0, 1) \Rightarrow g_p\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow h_p(x) > 0$. Além disso, usando a relação (3.17) obtemos para $x > 1$:

$$(-h_p(x))' = (g_{N-p-1}(x))' > 0 \Rightarrow (h_p(x))' < 0. \quad (3.21)$$

\square

A análise acima é suficiente para nossos propósitos.

3.2.7 Conclusão sobre os determinantes dos subsistemas

Nesta seção nosso objetivo é usar as análises feitas em seções anteriores para concluir que os determinantes dos subsistemas são não-nulos para quaisquer valores dos raios dos polígonos que analisamos.

Mais explicitamente queremos provar o teorema:

TEOREMA 3.14. O determinante de qualquer subistema com $p \neq N - 1$ em (3.1) é não-nulo para qualquer valor fixo dos raios r_1 e r_2 .

Para dar um esboço do que ocorre vamos visualizar a seguir os gráficos gerados a partir do programa MAXIMA no caso $N = 5$, $p = 3$, $a = 3$ com a variável r sendo a razão entre os raios $r = \frac{r_1}{r_2}$. Lembrando que $\Gamma_p(1, r) = r^{1-a}(\xi_p(1))^2 - (r^{1-a})^2 g_p(r)h_p(r)$.

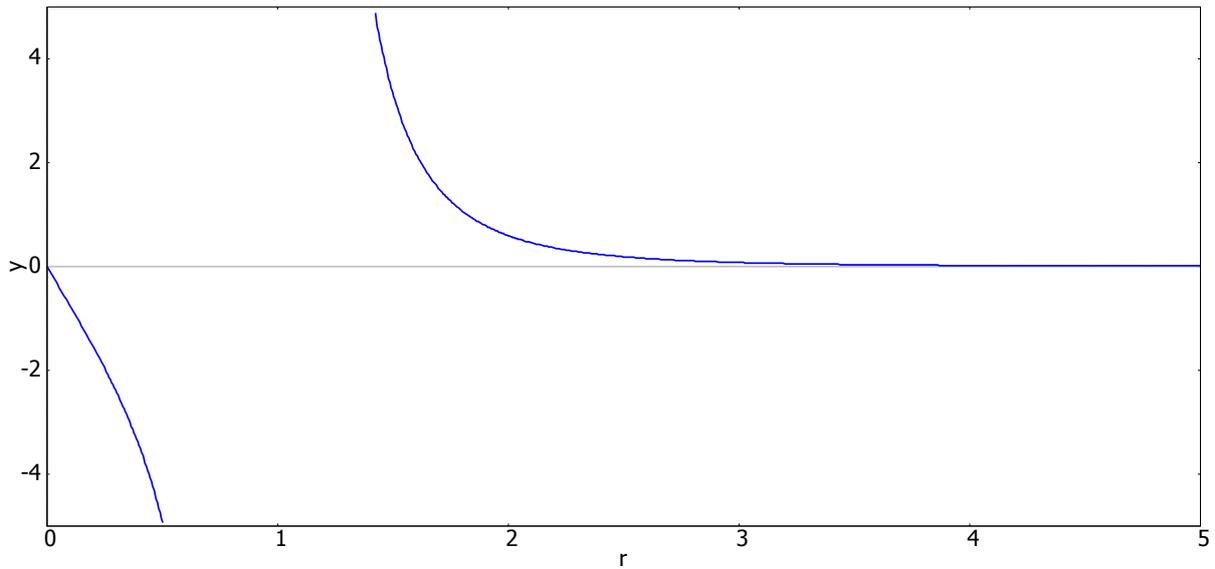


Figura 3.1 Função $h_p, N = 5, p = 3$.

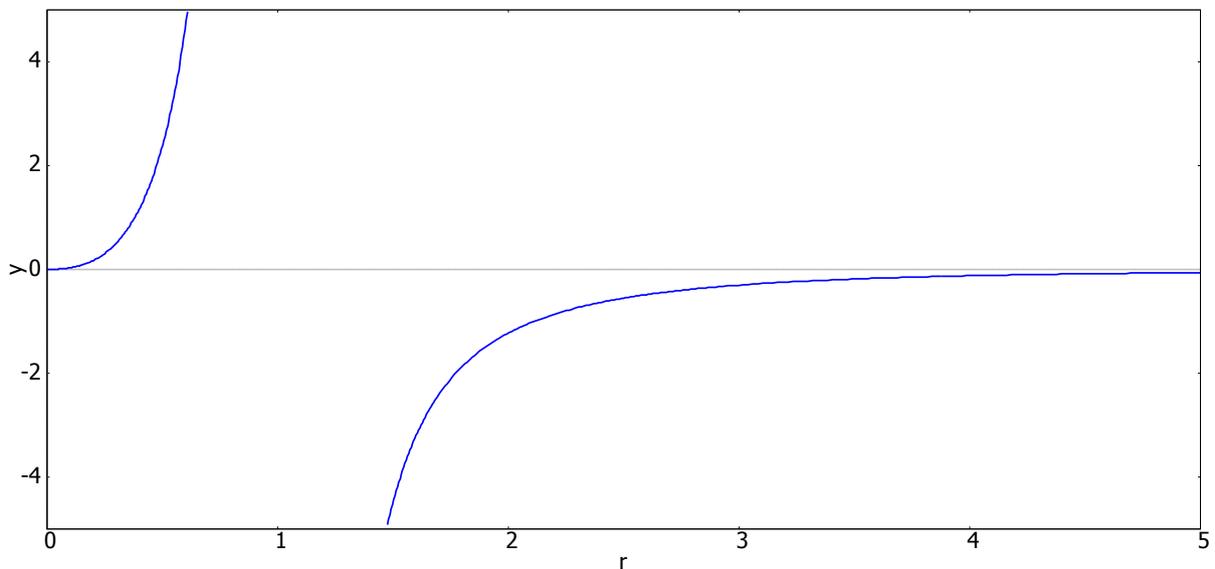


Figura 3.2 Função $g_p, N = 5, p = 3$.

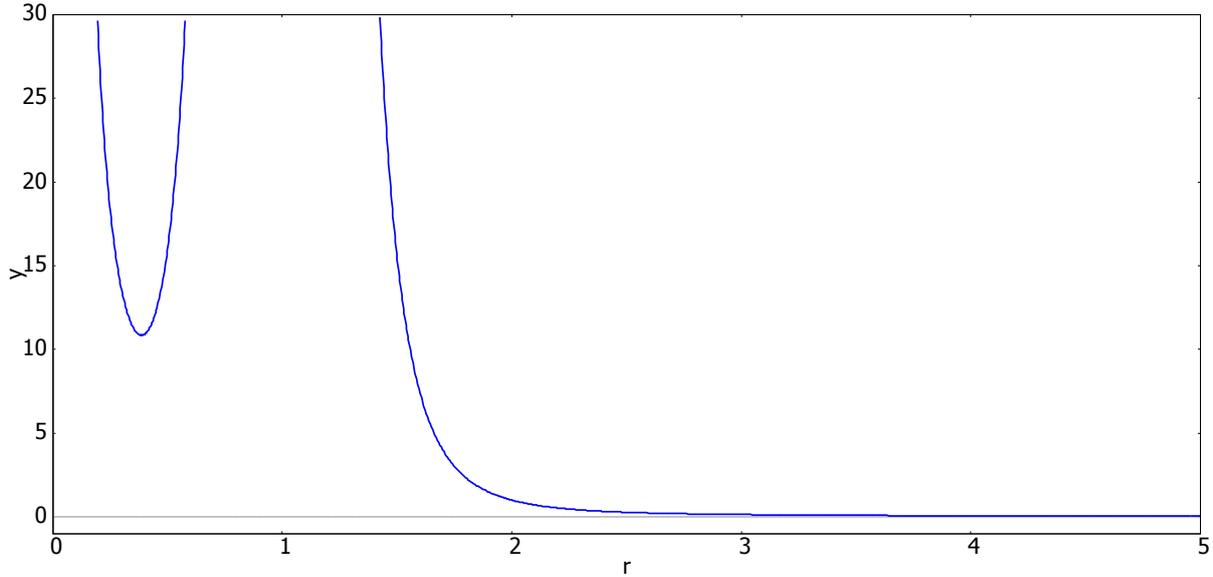


Figura 3.3 Função $\Gamma_p(1, r)$ para $N = 5, p = 3$.

Segue da análise que fizemos das funções que o produto $h_p(x)g_p(x)$ é estritamente negativo para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Por (3.5) e (3.6) segue que o determinante em (3.4) será estritamente positivo no caso em que $p \neq N - 1$. Isto mostra portanto que uma solução possível para a equação (3.1) deve ser da forma:

$$\begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \end{pmatrix} = \left(x_1^{N-1} \begin{pmatrix} v_{N-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + x_2^{N-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v_{N-1} \end{pmatrix} \right) + \left(x_1^N \begin{pmatrix} v_N \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + x_2^N \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v_N \end{pmatrix} \right). \quad (3.22)$$

O vetor

$$\left(x_1^{N-1} \begin{pmatrix} v_{N-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + x_2^{N-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v_{N-1} \end{pmatrix} \right) \quad (3.23)$$

não tem coordenadas todas reais, isto segue como consequência do apêndice B. Portanto se queremos massas reais e positivas a solução de 3.1 deve ser da forma:

$$\begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \end{pmatrix} = \left(x_1^N \begin{pmatrix} v_N \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + x_2^N \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v_N \end{pmatrix} \right), \quad (3.24)$$

com x_1^N e x_2^N números reais. Concluimos que as massas em cada polígono devem ser iguais entre si.

Notemos que como consequência do determinante ser não nulo para o caso $P = N$, segue o fato bastante interessante, de que o subsistema (3.2) tem uma matriz de coeficientes inversível, o que implica que fixados raios positivos quaisquer r_1 e r_2 para os dois polígonos e um valor qualquer para a velocidade angular v , existem massas que transformam essa configuração em um equilíbrio relativo, além do mais esse conjunto de massas (duas massas, pois em cada polígono as massas devem ser iguais) é único. É interessante comparar com os resultados obtidos em [21], onde é demonstrado que para uma escolha das massas (iguais em cada polígono), existem dois conjuntos de raios que tornam a configuração um equilíbrio relativo.

Resultados sobre o caso de vários polígonos

4.1 Propriedades da função determinante dos subsistemas

Vamos analisar o que ocorre com a função determinante dos subsistemas definidos em (1.24) nos casos em que $p \neq N - 1$.

Até onde sabemos não existe na literatura referência que aborde o problema inverso para mais que dois polígonos. Aqui tratamos este caso considerando que os polígonos são homotéticos. Neste capítulo supomos sempre que $N \geq 3$. O determinante da matriz de coeficientes do sistema (1.24) é dado por:

$$\begin{vmatrix} \lambda_p(A_{11}) & \lambda_p(A_{12}) & \dots & \lambda_p(A_{1L}) \\ \lambda_p(A_{21}) & \lambda_p(A_{22}) & \dots & \lambda_p(A_{2L}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_p(A_{L1}) & \lambda_p(A_{L2}) & \dots & \lambda_p(A_{LL}) \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

Por (1.28) e (2.6) podemos escrever este determinante, para $p \neq N - 1$, da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} \xi_p(r_1) & f_p(r_1, r_2) & \dots & f_p(r_1, r_L) \\ f_p(r_2, r_1) & \xi_p(r_2) & \dots & f_p(r_2, r_L) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_p(r_L, r_1) & f_p(r_L, r_2) & \dots & \xi_p(r_L) \end{vmatrix}. \quad (4.2)$$

DEFINIÇÃO 4.1. Seja $\Gamma_p : (\mathbb{R}_+^*)^L \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma_p(r_1, r_2, \dots, r_L) = \begin{vmatrix} \xi_p(r_1) & f_p(r_1, r_2) & \dots & f_p(r_1, r_L) \\ f_p(r_2, r_1) & \xi_p(r_2) & \dots & f_p(r_2, r_L) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_p(r_L, r_1) & f_p(r_L, r_2) & \dots & \xi_p(r_L) \end{vmatrix}, \quad (4.3)$$

onde $\Delta = \{(x_1, \dots, x_L) \in \mathbb{R}^L \mid x_i = x_j, \text{ para algum } i \neq j\}$.

Vejamos algumas propriedades de Γ_p .

TEOREMA 4.2. a) A função Γ_p é homogênea com grau de homogeneidade igual a $(1 - a)^L$.

b) A função Γ_p é simétrica, isto é, permutando suas variáveis obtemos a mesma função.

c) Temos a igualdade $\Gamma_p = \Gamma_{N-p-1}$ se L é par, e $\Gamma_p = -\Gamma_{N-p-1}$ se L é ímpar.

Demonstração. Para provar o item a), lembremos que por (1.27) e (2.7) as funções f_p e ξ_p são homogêneas de grau homogeneidade $1 - a$. Então

$$\begin{aligned}
\Gamma_p(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_N) &= \begin{vmatrix} \xi_p(\alpha r_1) & f_p(\alpha r_1, \alpha r_2) & \dots & f_p(\alpha r_1, \alpha r_L) \\ f_p(\alpha r_2, \alpha r_1) & \xi_p(\alpha r_2) & \dots & f_p(\alpha r_2, \alpha r_L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p(\alpha r_L, \alpha r_1) & f_p(\alpha r_L, \alpha r_2) & \dots & \xi_p(\alpha r_L) \end{vmatrix} \\
&= (\alpha^{1-a})^L \begin{vmatrix} \xi(r_1) & f_p(r_1, r_2) & \dots & f_p(r_1, r_L) \\ f_p(r_2, r_1) & \xi(r_2) & \dots & f_p(r_2, r_L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(r_L, r_1) & f(r_L, r_2) & \dots & \xi_p(r_L) \end{vmatrix} \\
&= (\alpha^{1-a})^L \Gamma_p(r_1, r_2, \dots, r_L). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Para provar o item b), denotamos a matriz de coeficientes do sistema (1.24) por Λ_p , ou seja, $\Gamma_p = \text{Det}(\Lambda_p)$. Vemos que uma permutação das variáveis i e j , provoca na matriz uma mudança que equivale a permutar as linhas i e j e em seguida as colunas i e j e sabemos que essas permutações feitas consecutivamente não alterarão o determinante da matriz. Assim qualquer transposição de variáveis não altera o valor da função Γ_p . Mas como qualquer permutação é produto de transposição, usando recursivamente o argumento acima demonstramos o item b).

Para provar o item c), necessitamos da igualdade abaixo:

$$\begin{aligned}
f_{N-p-1}(x, y) &= \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j(N-p-1)}{N}\right) - y \cos\left(\frac{2\pi j(N-p-1+1)}{N}\right)}{\left(x^2 - 2xy \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + y^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j(N-p-1)}{N}\right) - y \cos\left(\frac{2\pi j(N-p-1+1)}{N}\right)}{\left(x^2 - 2xy \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + y^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right) - y \cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right)}{\left(x^2 - 2xy \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + y^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= - \sum_{j=1}^N \frac{y \cos\left(\frac{2\pi jp}{N}\right) - x \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(x^2 - 2xy \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + y^2\right)^{\frac{a}{2}}} \\
&= -f_p(y, x).
\end{aligned}$$

Usando a Proposição (2.3) e a igualdade acima vemos que

$$\Gamma_{N-p-1} = \text{Det}(\Lambda_{N-p-1}) = \text{Det}(-\Lambda_p^T) = \text{Det}(-\Lambda_p) = (-1)^L \text{Det}(\Lambda_p) = (-1)^L \Gamma_p.$$

Isto demonstra c). □

Agora vejamos mais algumas propriedades, que nos ajudarão em breve. Lembrando de (1.27) que

$$f_p(x, y) = \sum_{j=1}^N \frac{x \cos\left(\frac{2\pi j p}{N}\right) - y \cos\left(\frac{2\pi j(p+1)}{N}\right)}{\left(x^2 - 2xy \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + y^2\right)^{\frac{a}{2}}}.$$

Se $p \neq N - 1$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_p(x, y) = 0. \quad (4.5)$$

Se $p \neq N$, temos:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_p(x, y) = 0. \quad (4.6)$$

Se $p = N - 1$, temos:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_{N-1}(x, y) = -y^{1-a} N. \quad (4.7)$$

Se $p = N$, temos:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_N(x, y) = x^{1-a} N. \quad (4.8)$$

Ademais para todo p , se $a > 2$ vale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_p(x, y) = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f_p(x, y) = 0. \quad (4.9)$$

Para facilitar nossa compreensão vamos ver o que ocorre com esta função no caso em que $L = 4$, e depois para o caso $L = 3$. A razão de escolher tal ordem é porque para o caso de um número par de polígonos conseguimos resultados para qualquer $a \geq 2$. Para um número ímpar de polígonos conseguimos resultados apenas para o caso onde $a = 2$ ou $a = 3$, porém as evidências apresentadas no capítulo 2 indicam que esses resultados valem para $a \geq 2$.

4.1.1 Caso de 4 polígonos.

Vamos explorar um pouco o que ocorre no caso de quatro polígonos homotéticos, para posteriormente tratarmos de resultados gerais.

Para $L = 4$ a função Γ_p dada por (4.2) toma a forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_p(r_1, r_2, r_3, r_4) &= \begin{vmatrix} \xi_p(r_1) & f_p(r_1, r_2) & f_p(r_1, r_3) & f_p(r_1, r_4) \\ f_p(r_2, r_1) & \xi_p(r_2) & f_p(r_2, r_3) & f_p(r_2, r_4) \\ f_p(r_3, r_1) & f_p(r_3, r_2) & \xi_p(r_3) & f_p(r_3, r_4) \\ f_p(r_4, r_1) & f_p(r_4, r_2) & f_p(r_4, r_3) & \xi_p(r_4) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} r_1^{1-a} \xi_p(1) & r_1^{1-a} f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & r_1^{1-a} f_p(1, \frac{r_3}{r_1}) & r_1^{1-a} f_p(1, \frac{r_4}{r_1}) \\ r_2^{1-a} f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & r_2^{1-a} \xi_p(1) & r_2^{1-a} f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) & r_2^{1-a} f_p(1, \frac{r_4}{r_2}) \\ r_3^{1-a} f_p(1, \frac{r_1}{r_3}) & r_3^{1-a} f_p(1, \frac{r_2}{r_3}) & r_3^{1-a} \xi_p(1) & r_3^{1-a} f_p(1, \frac{r_4}{r_3}) \\ r_4^{1-a} f_p(1, \frac{r_1}{r_4}) & r_4^{1-a} f_p(1, \frac{r_2}{r_4}) & r_4^{1-a} f_p(1, \frac{r_3}{r_4}) & r_4^{1-a} \xi_p(1) \end{vmatrix} \\ &= (r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4)^{1-a} \begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_3}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_4}{r_3}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_4}) & \xi_p(1) \end{vmatrix}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Vamos supor a partir de agora que os raios r_1, \dots, r_4 são positivos, então $\Gamma_p(r_1, r_2, r_3, r_4) \neq 0$ se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} \xi(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi(1) & f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_3}) & \xi(1) & f_p(1, \frac{r_4}{r_3}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_4}) & \xi_p(1) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.11)$$

Vamos mostrar que sob certas hipóteses sobre os raios este último determinante é não-nulo.

De fato, usando (4.5), (4.6) e (4.9), e tomando o limite quando $\alpha \rightarrow 0^+$, obtemos para $p \neq N-1, N$:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} & \begin{vmatrix} \xi(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{r_1}) & f_p(1, \frac{\alpha r_4}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{r_2}) & f_p(1, \frac{\alpha r_4}{r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{\alpha r_3}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{\alpha r_4}{\alpha r_3}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_4}) & f_p(1, \frac{r_2}{\alpha r_4}) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{\alpha r_4}) & \xi_p(1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & 0 & 0 \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_4}{r_3}) \\ 0 & 0 & f_p(1, \frac{r_3}{r_4}) & \xi_p(1) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Notando ainda que

$$f_p\left(\frac{r_4}{r_3}, 1\right) = f_p\left(\frac{r_4}{r_3}\left(1, \frac{r_3}{r_4}\right)\right) = \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{1-a} f_p\left(1, \frac{r_3}{r_4}\right), \quad (4.14)$$

concluimos, pelo que foi discutido no capítulo anterior, que os dois blocos na diagonal da matriz em (4.15) são matrizes invertíveis e portanto a matriz acima será invertível.

Se $p = N-1$ sabemos que o determinante do subsistema não é dado pela expressão acima, mas este caso não nos interessa agora.

Se $p = N$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} & \begin{vmatrix} \xi_N(1) & f_N(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_N(1, \frac{\alpha r_3}{r_1}) & f_N(1, \frac{\alpha r_4}{r_1}) \\ f_N(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_N(1) & f_N(1, \frac{\alpha r_3}{r_2}) & f_N(1, \frac{\alpha r_4}{r_2}) \\ f_N(1, \frac{r_1}{\alpha r_3}) & f_N(1, \frac{r_2}{\alpha r_3}) & \xi(1) & f_N(1, \frac{\alpha r_4}{\alpha r_3}) \\ f_N(1, \frac{r_1}{\alpha r_4}) & f_N(1, \frac{r_2}{\alpha r_4}) & f_N(1, \frac{\alpha r_3}{\alpha r_4}) & \xi_N(1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \xi_N(1) & f_N(1, \frac{r_2}{r_1}) & N & N \\ f_N(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_N(1) & N & N \\ 0 & 0 & \xi_N(1) & f_N(1, \frac{r_4}{r_3}) \\ 0 & 0 & f_N(1, \frac{r_3}{r_4}) & \xi_N(1) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Novamente concluimos que a última matriz é invertível.

Pela continuidade da função determinante podemos dizer que se α é suficientemente pequeno então

$$\begin{vmatrix} \xi(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{r_1}) & f_p(1, \frac{\alpha r_4}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi(1) & f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) & f_p(1, \frac{\alpha r_4}{r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{\alpha r_3}) & \xi(1) & f_p(1, \frac{\alpha r_4}{\alpha r_3}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_4}) & f_p(1, \frac{r_2}{\alpha r_4}) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{\alpha r_4}) & \xi_p(1) \end{vmatrix}$$

é não-nulo. Como consequência, se $p \neq N - 1$ olhando para (4.10) podemos dizer que se $\alpha > 0$ é suficientemente pequeno então

$$\Gamma_p(r_1, r_2, \alpha r_3, \alpha r_4) \neq 0. \quad (4.16)$$

Sabemos que ao mostrar que os determinantes das matrizes de coeficientes dos subsistemas (1.24) são não-nulos, então mostramos que existe um equilíbrio relativo, e que este equilíbrio relativo somente é possível se tivermos massas iguais em cada polígono (supondo que as massas são reais e positivas).

Pelo que foi discutido podemos enunciar o teorema abaixo.

TEOREMA 4.3. Consideremos um potencial da forma (3.1) com $a \geq 2$, e uma configuração com massa total não-nula. Sejam $r_1, r_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4$ números reais positivos quaisquer, então existe

$$\varepsilon = \varepsilon(r_1, r_2, \tilde{r}_3, \tilde{r}_4) > 0$$

tal que para todo $\alpha > 0$ com $\alpha < \varepsilon$ existe um equilíbrio relativo formado por quatro polígonos homotéticos inscritos em circunferências de raios $r_1, r_2, r_3 = \alpha \tilde{r}_3, r_4 = \alpha \tilde{r}_4$. Além disso, tal equilíbrio relativo somente é possível se as massas no mesmo polígono forem iguais entre si (podendo eventualmente ser diferentes em polígonos diferentes) ⁽¹⁾.

Como Γ_p é homogênea, se é não-nula em um vetor (r_1, r_2, r_3, r_4) , é também não-nula em todo vetor da forma $k(r_1, r_2, r_3, r_4)$ com $k > 0$. Assim o que realmente importa é a razão entre os raios. Em seções seguintes queremos usar este argumento da demonstração do teorema anterior recursivamente, a qual decorre da continuidade da função, isso motiva nossa definição abaixo.

DEFINIÇÃO 4.4. Dados $r_1, r_2 > 0$ se $\forall \alpha$, com $0 < \alpha < 1$ temos que $\Gamma_p(r_1, r_2, \alpha r_3, \alpha r_4) \neq 0$, $\forall p \neq N - 1$, diremos que r_3 e r_4 são muito menores que r_1 e r_2 .

Note que pelo teorema acima dados pares ordenados quaisquer (r_1, r_2) e $(\tilde{r}_3, \tilde{r}_4)$ é sempre possível obter um número real $k > 0$ tal que $r_3 = k\tilde{r}_3$ e $r_4 = k\tilde{r}_4$ são muito menores que r_1 e r_2 . Usando esta terminologia afirmamos: Se r_3, r_4 são muito menores que r_1 e r_2 então a matriz:

$$\begin{pmatrix} \xi_p(r_1) & f_p(r_1, r_2) & f_p(r_1, r_3) & f_p(r_1, r_4) \\ f_p(r_2, r_1) & \xi(r_2) & f_p(r_2, r_3) & f_p(r_2, r_4) \\ f_p(r_3, r_1) & f_p(r_3, r_2) & \xi_p(r_3) & f_p(r_3, r_4) \\ f_p(r_4, r_1) & f_p(r_4, r_2) & f_p(r_4, r_3) & \xi_p(r_4) \end{pmatrix}$$

é invertível. Além disso a simetria de Γ_p com relação a permutação de variáveis nos permite dizer que o mesmo resultado vale para qualquer permutação dos raios. Ou seja, Γ_p é não-nula, desde que dois dos raios sejam muito menores que os outros dois.

¹O resultado de existência do equilíbrio relativo foi demonstrado em [13] no caso Newtoniano para um número qualquer de polígonos porém supondo massas iguais em cada polígono.

4.1.2 Caso de 3 polígonos.

Vamos descrever resultados semelhantes ao da seção anterior, agora particularizados para o caso $L = 3$. Nesta seção vamos supor $a = 2$ e $a = 3$.

Usando o mesmo argumento da seção anterior vemos que se $p \neq N, N - 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi(1) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{\alpha r_3}) & \xi_p(1) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & 0 \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) & 0 \\ 0 & 0 & \xi_p(1) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para $a = 2$ e $a = 3$ este determinante é não-nulo se $p \neq \frac{N-1}{2}$, pois $\xi_p(1) \neq 0$ e a submatriz 2×2

$$\begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) \end{vmatrix}$$

é invertível⁽²⁾. Como na seção anterior podemos dizer que se r_3 é muito menor que r_1 e r_2 então Γ_p é não-nula se $p \neq \frac{N-1}{2}$. Então vale um teorema análogo com 3 polígonos enunciado abaixo.

TEOREMA 4.5. Consideremos um potencial da forma (3.1) com $a = 2$ ou 3 , e uma configuração com massa total não-nula. Sejam r_1, r_2, \tilde{r}_3 , números reais positivos quaisquer, então existe

$$\varepsilon = \varepsilon(r_1, r_2, \tilde{r}_3) > 0$$

tal que para todo $\alpha > 0$ com $\alpha < \varepsilon$ existe um equilíbrio relativo formado por três polígonos homotéticos inscritos em circunferências de raios r_1, r_2 e $r_3 = \alpha \tilde{r}_3$. Além disso, tal equilíbrio relativo somente é possível se as massas no mesmo polígono forem iguais entre si (podendo eventualmente ser diferentes em polígonos diferentes).

Vale notar também que o mesmo teorema vale se dois raios forem muito menores que o terceiro. De fato

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{\alpha r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_2}) & \xi(1) & f_p(1, \frac{\alpha r_3}{\alpha r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_3}) & f_p(1, \frac{\alpha r_2}{\alpha r_3}) & \xi_p(1) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \xi_p(1) & 0 & 0 \\ 0 & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) \\ 0 & f_p(1, \frac{r_2}{r_3}) & \xi_p(1) \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

²Aqui depende de $\xi_p \neq 0$. Pelas evidências apresentadas no final do capítulo 2 acreditamos que este resultado vale se $a > 0$.

O resto do argumento é igual.

Vamos visualizar alguns cortes do gráfico de Γ_p para o caso Newtoniano, para alguns valores de p e de N . As visualizações abaixo foram geradas a partir do programa MAXIMA. Para gerar essas visualizações colocamos um dos raios como sendo 1, e o outro como sendo igual $\frac{1}{2}$, e mostramos a Γ_p em função dos outros raios.

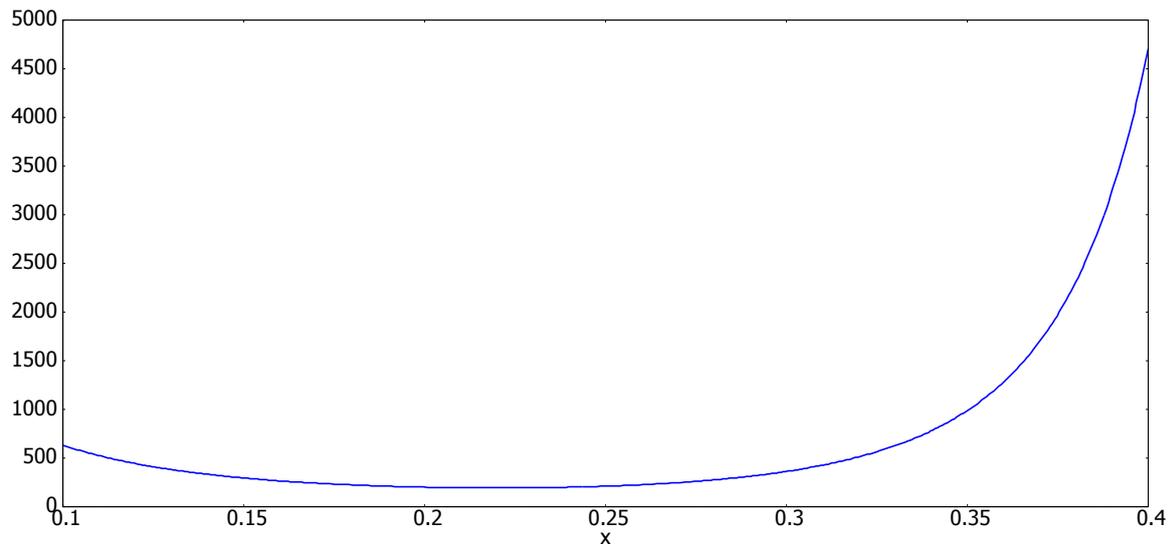


Figura 4.1 Função $\Gamma_1(1, x, 0.5)$, $N = 4$ para x no intervalo $(0.1, 0.4)$

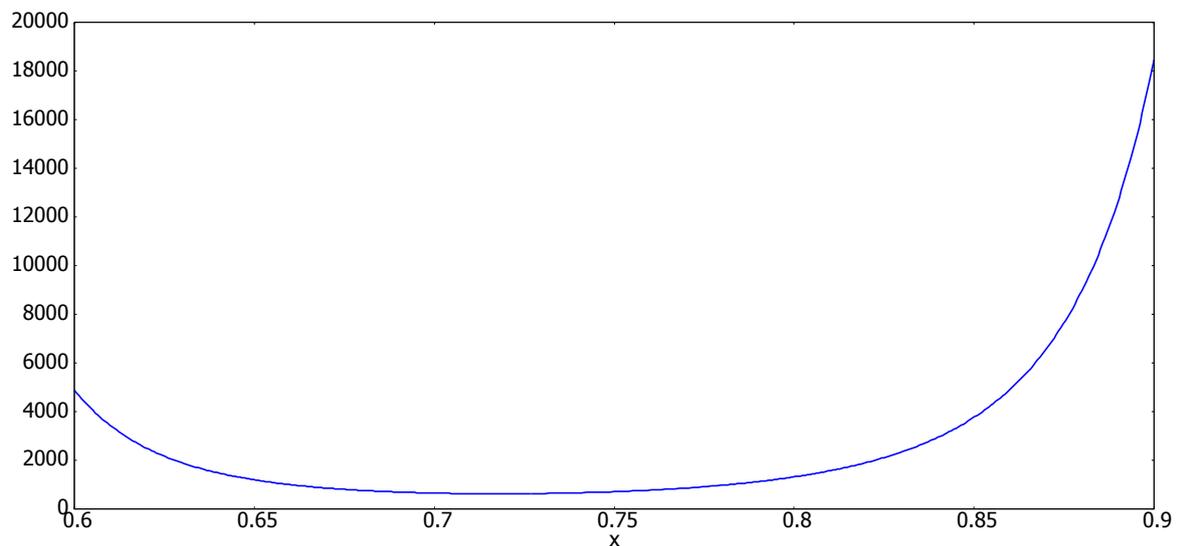


Figura 4.2 Função $\Gamma_1(1, x, 0.5)$, $N = 4$ para x no intervalo $(0.6, 0.9)$

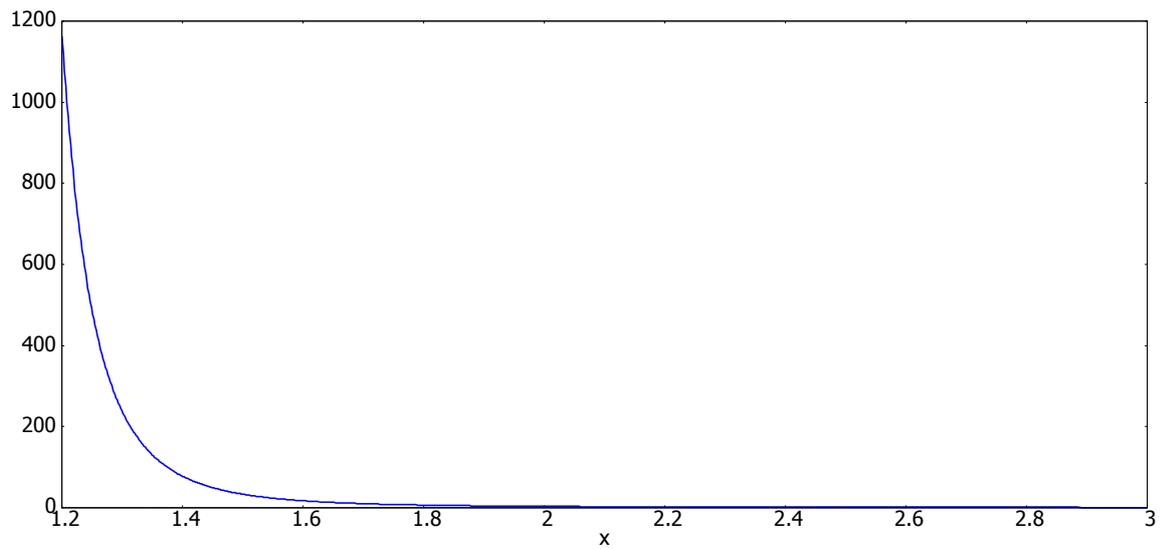


Figura 4.3 Função $\Gamma_1(1, x, 0.5)$, $N = 4$ para x no intervalo $(1.2, 3)$

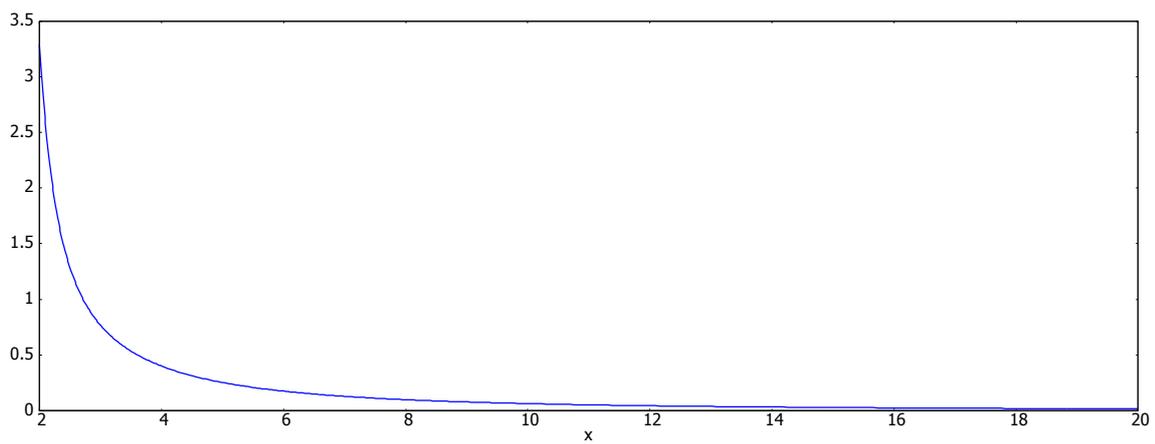


Figura 4.4 Função $\Gamma_1(1, x, 0.5)$, $N = 4$ para x no intervalo $(2, 20)$

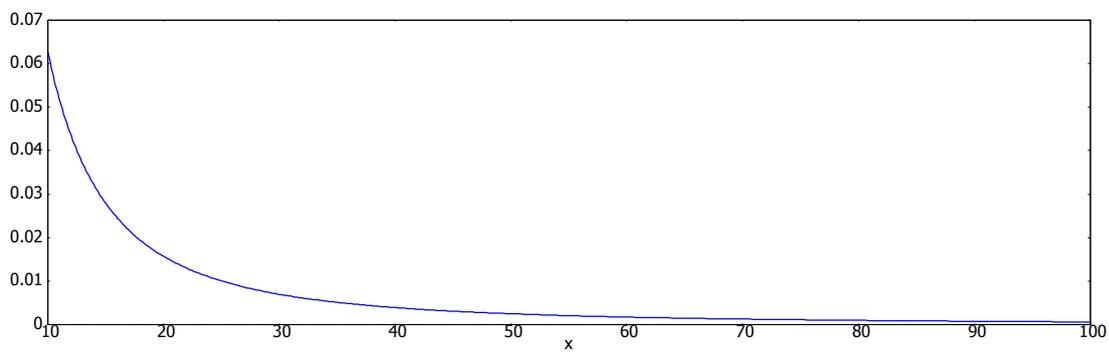


Figura 4.5 Função $\Gamma_1(1, x, 0.5)$, $N = 4$ para x no intervalo $(10, 100)$

Pelas vistas em corte podemos conjecturar que a função não se anula. Os gráficos para outros valores de N e de p em geral têm o mesmo aspecto mostrado acima, podendo ser negativos ou positivos conforme o item c) do teorema 4.2.

4.2 Análise para o caso de um número qualquer de polígonos.

Nesta seção nosso objetivo é usar os argumentos das duas últimas seções recursivamente afim de obter resultados gerais.

TEOREMA 4.6. Seja L um número par. Seja $a \geq 2$, e considere uma configuração associada a um potencial da forma (3.1). Suponha que os raios r_3, r_4 são muito menores que r_1 e r_2 , que r_5, r_6 são muito menores que r_3 e r_4 e assim sucessivamente. Então existe um equilíbrio relativo formado por L polígonos homotéticos, além do mais tal equilíbrio somente é possível se as massas em cada polígono são iguais entre si.

Demonstração. Já sabemos que este teorema é valido para $L = 2$ e $L = 4$. Vamos demonstrar que vale para $L = 6$. Se $L = 6$ a função Γ_p toma a forma:

$$\Gamma_p(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) = (r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6)^{1-a} \begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_5}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_6}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_2}) & f_p(1, \frac{r_5}{r_2}) & f_p(1, \frac{r_6}{r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_3}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_4}{r_3}) & f_p(1, \frac{r_5}{r_3}) & f_p(1, \frac{r_6}{r_3}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_4}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_5}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_6}{r_4}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_5}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_5}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_5}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_5}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_6}{r_5}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_6}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_6}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_6}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_6}) & f_p(1, \frac{r_5}{r_6}) & \xi_p(1) \end{vmatrix}.$$

Se $p \neq N - 1, N$ usando (4.5),(4.7),(4.9) obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_1}) & f_p(1, \frac{\alpha r_5}{r_1}) & f_p(1, \frac{\alpha r_6}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_2}) & f_p(1, \frac{\alpha r_5}{r_2}) & f_p(1, \frac{\alpha r_6}{r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_3}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_4}{r_3}) & f_p(1, \frac{\alpha r_5}{r_3}) & f_p(1, \frac{\alpha r_6}{r_3}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_4}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{\alpha r_5}{r_4}) & f_p(1, \frac{\alpha r_6}{r_4}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_5}) & f_p(1, \frac{r_2}{\alpha r_5}) & f_p(1, \frac{r_3}{\alpha r_5}) & f_p(1, \frac{r_4}{\alpha r_5}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{\alpha r_6}{\alpha r_5}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{\alpha r_6}) & f_p(1, \frac{r_2}{\alpha r_6}) & f_p(1, \frac{r_3}{\alpha r_6}) & f_p(1, \frac{r_4}{\alpha r_6}) & f_p(1, \frac{\alpha r_5}{\alpha r_6}) & \xi_p(1) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_1}) & 0 & 0 \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_2}) & 0 & 0 \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_3}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_4}{r_3}) & 0 & 0 \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_4}) & \xi_p(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_6}{r_5}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_p(1, \frac{r_5}{r_6}) & \xi_p(1) \end{vmatrix}. \quad (4.19)$$

Sabemos que a submatriz

$$\begin{pmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_2}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_1}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_1}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_2}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_3}{r_2}) & f_p(1, \frac{r_4}{r_2}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_3}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_3}) & \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_4}{r_3}) \\ f_p(1, \frac{r_1}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_2}{r_4}) & f_p(1, \frac{r_3}{r_4}) & \xi_p(1) \end{pmatrix}$$

é invertível se r_3 e r_4 são muito menores que r_1 e r_2 . Como a submatriz

$$\begin{pmatrix} \xi_p(1) & f_p(1, \frac{r_6}{r_5}) \\ f_p(1, \frac{r_5}{r_6}) & \xi_p(1) \end{pmatrix}$$

é invertível para quaisquer valores positivos de r_5 e r_6 segue que o limite em (4.19) é não-nulo. Logo, por continuidade, se r_5 e r_6 são suficientemente pequenos, o determinante em (4.19) será não-nulo e conseqüentemente $\Gamma_p(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$ será não-nulo. Usando indutivamente este argumento, provamos o teorema. \square

TEOREMA 4.7. Seja L um número ímpar. Seja $a = 2$ ou $a = 3$, e considere a equação de configuração central (1.10) associada a um potencial da forma (3.1). Suponha que os raios r_3, r_4 são muito menores que r_1 e r_2 , que r_5, r_6 são muito menores que r_3 e r_4 e assim sucessivamente, e que r_L é muito menor que r_{L-2} e r_{L-1} . Então existe um equilíbrio relativo formado por L polígonos homotéticos, além do mais tal equilíbrio somente é possível se as massas em cada polígono são iguais entre si.

Demonstração. A demonstração segue a mesma linha do teorema anterior, com o caso inicial $L = 3$ sendo estabelecido pelo teorema 4.5. \square

4.2.1 Caracterização da velocidade angular

Nesta seção nosso objetivo é mostrar algumas equações que a velocidade angular v do sistema deve satisfazer.

PROPOSIÇÃO 4.8. Considere M_k a soma das massas do polígono inscrito na circunferência de raio r_k . Então a velocidade v^2 deve satisfazer o sistema

$$\begin{cases} \frac{M_1}{N} \lambda_N(A_{11}) + \dots + \frac{M_L}{N} \lambda_N(A_{1L}) & = & r_1 v^2, \\ & \vdots & \\ \frac{M_1}{N} \lambda_N(A_{L1}) + \dots + \frac{M_L}{N} \lambda_N(A_{LL}) & = & r_L v^2, \end{cases} \quad (4.20)$$

Demonstração. A demonstração repousa no fato de que para uma matriz circulante a soma das entradas de cada linha (ou coluna) tem sempre valor igual ao autovalor associado ao autovetor v_N .

Por simplicidade vamos demonstrar, apenas o caso em que $L = 2$, para o caso geral o argumento é o mesmo. Considere a equação

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 v^2 \vec{1} \\ r_2 v^2 \vec{1} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} A_{11} \vec{m}_1 + A_{12} \vec{m}_2 \\ A_{21} \vec{m}_1 + A_{22} \vec{m}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 v^2 \vec{1} \\ r_2 v^2 \vec{1} \end{pmatrix}.$$

Denotando as entradas da primeira linha de A_{TS} por $(A_{TS})_{1j}$ e escrevendo a equação acima para as N primeiras coordenadas, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \sum_j^N (A_{11})_{1j} m_j + \sum_j^N (A_{12})_{1j} m_{N+j} \\ \vdots \\ \sum_j^N (A_{11})_{Nj} m_j + \sum_j^N (A_{12})_{Nj} m_{N+j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 v^2 \\ \vdots \\ r_1 v^2 \end{pmatrix}.$$

Somando essas equações e observando que a soma das entradas da linha é justamente o autovalor associado ao autovetor v_N , obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (A_{11})_{kj} m_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (A_{12})_{kj} m_{N+j} &= v^2 N \iff \\ \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (A_{11})_{kj} \right) m_j + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (A_{12})_{kj} \right) m_{N+j} &= v^2 N \iff \\ \sum_{j=1}^N (\lambda_N(A_{11})) m_j + \sum_{j=1}^N (\lambda_N(A_{12})) m_{N+j} &= v^2 N \iff \\ M_1 (\lambda_N(A_{11})) + M_2 (\lambda_N(A_{12})) &= v^2 N \iff \\ \frac{M_1}{N} (\lambda_N(A_{11})) + \frac{M_2}{N} (\lambda_N(A_{12})) &= v^2. \end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento com as N últimas equações demonstra-se a outra igualdade. \square

Em particular concluímos que a velocidade angular v deve ser real. Este lema generaliza o lema 3 de [24]. Nos casos em que mostrarmos que os determinantes das matrizes de coeficientes dos subsistemas são não-nulos, vale o seguinte resultado: Se fixarmos os raios r_1, \dots, r_L dos polígonos e a velocidade angular, é possível encontrar um conjunto de massas que torna a configuração um equilíbrio relativo.

Por outro lado escolhendo as massas e os raios dos polígonos nem sempre existe uma velocidade angular adequada que torne a configuração um equilíbrio relativo. De fato, pelo sistema (4.20), uma condição necessária e suficiente para que exista uma velocidade angular adequada é que os números

$$\frac{\frac{M_1}{N} \lambda_N(A_{T1}) + \dots + \frac{M_L}{N} \lambda_N(A_{TL})}{r_T} \quad (4.21)$$

sejam iguais para $T = 1, \dots, L$.

4.3 Questões a responder e projetos futuros.

Pelas evidências, nos casos com $L \leq 2$ ou no caso geral para raios muito diferentes somos levados a acreditar que a seguinte conjectura é verdadeira.

Conjectura 1. A função $\Gamma_p(r_1, \dots, r_L)$ é não-nula para todos os valores positivos de r_1, \dots, r_L e $\forall p = 1, \dots, N$.

Se a conjectura for verdadeira ela implica que existem equilíbrios relativos poligonais para quaisquer valores dos raios para um número qualquer de polígonos homotéticos, que isto somente é possível se as massas em cada polígono forem iguais entre si. A prova de tal conjectura naturalmente constitui um de nossos objetivos mais imediatos. Porém acreditamos que o exposto até aqui é insuficiente para provar tal afirmação. Para $p = N - 1$ tal função não representa o determinante do subsistema correspondente a ser analisado. Por isso surge outra pergunta natural.

Pergunta 1. O que ocorre com o determinante da matriz de coeficientes do subsistema em (3.3) quando $p = N - 1$?

Já estamos analisando esta questão, porém não conseguimos obter resultados conclusivos que nos permitissem incluí-los na tese. Tal questão é interessante pois se tal função se anular para algum valor dos raios, para esse valor teríamos uma infinidade de soluções com um parâmetro de massas complexas.

Outra pergunta a ser abordada é a seguinte:

Pergunta 2. No caso de um polígono vale um resultado similar ao teorema de Perko-Walter-Elmabsout para $a \neq 2$ e $a \neq 3$?

Estamos quase certos que a resposta é sim no caso em que $a > 0$, porém não temos uma demonstração formal de tal fato.

O trabalho [6] parece indicar possíveis direções para abordar essas questões levantadas aqui.

Referências

- [1] ALBOUY, A.; CABRAL, H. E.; SANTOS, A. A. Some problems on the Classical n-body problem. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* , vol 113, p. 369-375, 2012.
- [2] ALBOUY, A. On a Paper of Moeckel on Central Configurations. *Regular and Chaotic Dynamics* , V. 8, N2, p.133-142, 2003.
- [3] ALBOUY, A.; KALOSHIN, V. Finiteness of central configurations of five bodies in the plane. *Ann. Math*, Vol 176, p. 535-588, 2012.
- [4] ARNORLD, V. I.; KOZLOV, V. V.; NEISHTADT, A. I. *Mathematical Aspects Of Classical and Celestial Mechanics*. Terceira Edição, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 3, Dynamical Systems III, Springer-Verlag, 518p, 2006.
- [5] BANG, D.; ELMABSOUT, B. Configurations polygonales en équilibre relatif. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 329, Série II b, Systèmes dynamiques. p. 243-248. 2001.
- [6] BANG, D.; ELMABSOUT, B. Representations of complex function means on the regular n -gon and applications to gravitational potential. *J. Phys. A: Math. Gen.* ,V36. p.11435-11450. 2003.
- [7] CELLI, M.; LACOMBA, E. A.; PÉREZ-CHAVELA, E. On polygonal relative equilibria in the N-vortex problem. *J. Math. Phys.* 52, 103101, p. 1-8, 2009.
- [8] CHENCINER, A. et al. Simple Choreographic Motions Of N Bodies: A Preliminary Study. Disponível em < [http :www.imcce.fr/langues/fr/presentation/equipes/ASD/person/chenciner/chenpreprint.php](http://www.imcce.fr/langues/fr/presentation/equipes/ASD/person/chenciner/chenpreprint.php)>. Acesso em: 18 Jan. 2014.
- [9] CHENCINER, A.; MONTGOMERY, R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. Math*, Vol 152, p. 881-901, 2000.
- [10] CHENCINER, A. Comment on : A simpler proof of regular polygon solutions of the N -body problem by Zhifu Xie and Shiqing Zhang. *Phys. Lett. A* , 300, p.101-102, 2002.
- [11] CHENCINER, A. Are there perverse choreographies?. *New Advances in Celestial Mechanics and Hamiltonian Systems*, p. 63-76, 2004.

- [12] CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable I*. Segunda Edição. Heidelberg: Alemanha: Springer. 1978.
- [13] CORBERA, M.; DELGADO, J. ; LLIBRE, J. On the Existence of Central Configurations of P Nested n-gons. *Qual.Theory Dyn. Syst.*, p. 255-265, 2009.
- [14] DESCARTES, R. *Regras para a Orientação do Espírito*. Terceira edição. Tradução de Maria Ermantina de Almeida Prado Galvão. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes. 2012.
- [15] ELMABSOUT, B. Nouvelles configurations d'équilibre relatif pour le problème des N corps. *C. R. Acad. Sci.* , p. 467-472, 1991.
- [16] ELMABSOUT, B. Sur L'existence de Certaines Configurations d'équilibre Relatif dans le Probleme Des N Corps. *Celestial Mechanics*, Vol 41, N 2, p.131-151, 1988.
- [17] HAGIHARA, Y. *Celestial Mechanics*. Cambridge :The MIT Press, Vol. 1 , 1970.
- [18] KRA, I.; SIMANCA, S. R. On Circulantes Matrices. *Notices of the AMS*, Vol 59, Number 3. p. 368-377. 2012.
- [19] LLIBRE, J.; MELLO, L.F. Triple and quadruple nested central configurations for the planar $n - body$ problem. *Physica D*, Vol. 238, p. 563-571, 2009.
- [20] MEYER, K. R.; HALL, G. R.; OFFIN, D. *Introduction To Hamiltonian Dynamical Systems and The N-Body Problem*. Segunda Edição. Nova York: Springer. Applied Mathematical Sciences Vol. 90. 2009.
- [21] MOECKEL, R.; SIM' O, C. Bifurcation of spatial central configurations from planar ones. *SIAM J. Math. Anal.* Vol.26, p.978-998,1995.
- [22] MOECKEL R.; HAMPTON, M. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Invent. Math.*, Vol 163, p. 289-312, 2006.
- [23] NETO, A. L. *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: Impa. Projeto Euclides. 2005.
- [24] PERKO, L. M.; WALTER, E. L. Regular Polygon Solutions of the N-body Problem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol 94, N 2, p. 301-309, 1985.
- [25] ROBERTS, GARETH E. A continuum of relative equilibria in the five-body problem. *Physica D.*, Vol. 127, Issue 3-4, p.141-145, 1999.
- [26] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. Terceira edição. Nova York: McGraw-Hill.1976.
- [27] XUEFEI, L.; ZHANG, S.; JIANMEI, L. On Periodic Solutions For Nested Polygon Planar $2N + 1$ -Body Problems With Arbitrary Masses. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, N.27, p. 63-80, 2010.

- [28] ZHANG, S.; XIE, Z. A simpler proof of regular polygon solutions of the N-body problem. *Physics Letters A*. Vol. 277, p. 156-158, 2000.
- [29] ZHANG, S.; XIE, Z. Nested regular polygon solutions of $2N$ -Body problem. *Phys. Lett. A* Vol. 281, p.149-154 , 2001.
- [30] ZHANG, S.; ZHOU,Q. Periodic solutions for the $2n$ -Body problems. *Proc. Am. Math. Soc.* Vol. 131, p. 2161-2170, 2002.
- [31] WINTNER, A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton: Princeton Math. Series 5, Princeton University Press, 1941.

Apêndices

Apêndice A: Comentário sobre o erro apontado em [10]

Veamos a cronologia de algumas referências sobre o problema. Todas as referências abaixo tratam do caso Newtoniano.

- Em 1985, L. M. Perko e L. Walter em [24] provaram que N massas nos vértices de um polígono regular $N \geq 4$ estão em equilíbrio relativo somente se as massas são iguais entre si (resultado obtido também por B. Elmabsout em [16] em 1988).
- Em 2000, Zhifu Xie e Shiqing Zhang, propuseram "A simpler proof of regular polygon solutions of the N body problem" em [28] baseados no trabalho de Perko e Walter.
- Em 2001, Zhifu Xie and Shiqing Zhang publicam "Nested regular polygon solutions of $2N$ -body problem" em [29], onde resolvem o problema de dois polígonos, com hipótese simplificadora de que o vetor das massas de um polígono é múltiplo do vetor de massas do outro polígono.
- Em 2002, (Julho), Alain Chenciner publica ' Comment on "A simpler proof of regular polygon solutions of the N body problem" by Zhifu Xie and Shiqing Zhang ', onde diz que a solução apresentada em [28] está incorreta, e expõe os motivos do erro.
- Em 2002, (Novembro), Shiqing Zhang e Qing Zhou publicam "Periodic Solutions for Planar $2N$ -Body Problems" [30], onde resolvem o problema de dois polígonos, usando o mesmo argumento do artigo [28].

Chenciner diz que os autores estabelecem corretamente as equações, e também estabelecem corretamente a decomposição espectral da matriz circulante correspondente. Mas é assumido pelos autores que o único autovetor com autovalor 0 é o vetor $(1, 1, \dots, 1)^T$ o que é incorreto. Em verdade, como demonstrado por [24], o núcleo da matriz de coeficientes em questão é gerado por $(1, 1, \dots, 1)$ e por $(e^{\frac{2\pi i}{N}}, e^{\frac{2\pi i}{N}2}, \dots, e^{\frac{2\pi i}{N}N})$ se N é par, e por

$$(1, 1, \dots, 1), (e^{\frac{2\pi i}{N}}, e^{\frac{2\pi i}{N}2}, \dots, e^{\frac{2\pi i}{N}N}), (e^{\frac{2\pi i}{N}(p+1)}, e^{\frac{2\pi i}{N}2(p+1)}, \dots, e^{\frac{2\pi i}{N}N(p+1)}),$$

se N é ímpar da forma $N = 2p + 1$. Acreditamos que os autores cometem o mesmo erro apontado por Chenciner nos dois artigos seguintes, pois não é apresentada explicitamente a decomposição espectral das matrizes de coeficientes. Para discutir mais explicitamente, vejamos

alguns detalhes da demonstração apresentada em [30]. Eles escrevem o problema da seguinte maneira:

Defina as matrizes circulantes: $C = [c_{k,j}]$, $A = [a_{k,j}]$, $B = [b_{k,j}]$, $D = [d_{k,j}]$ dadas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} c_{k,j} &= 0, \quad \text{para } k = j, \\ c_{k,j} &= \left(\frac{1}{|1 - \rho_{j-k}|^3} - \frac{\omega^2}{M} \right) (1 - \rho_{j-k}), \quad \text{para } k \neq j, \\ a_{k,j} &= \left(\frac{1}{|1 - a\rho_{j-k}|^3} - \frac{\omega^2}{M} \right) (1 - a\rho_{j-k}e^{i\theta}), \quad \forall k \text{ e } j \\ b_{k,j} &= \left(\frac{1}{|a - \rho_{j-k}|^3} - \frac{\omega^2}{M} \right) (ae^{i\theta} - \rho_{j-k}), \quad \forall k \text{ e } j \\ d_{k,j} &= 0, \quad \text{para } k = j, \\ d_{k,j} &= \left(\frac{1}{|a - a\rho_{j-k}|^3} - \frac{\omega^2}{M} \right) (a - a\rho_{j-k})e^{i\theta}, \quad k \neq j \end{aligned}$$

onde $\rho_k = e^{\frac{2\pi k}{N}i}$ e a é o fator de dilatação entre os polígonos, e ω é a velocidade angular dos corpos. Isto permite escrever o problema da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} C & A \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \\ \tilde{m}_1 \\ \vdots \\ \tilde{m}_N \end{pmatrix} = 0$$

Sendo m e \tilde{m} os vetores de massas, usando o fato que matrizes circulantes comutam então a equação acima implica que:

$$\begin{cases} (CD - BA)m = 0, \\ (AB - CD)\tilde{m} = 0. \end{cases}$$

Esse sistema ter solução é equivalente a $AB - CD$ ter um autovetor real positivo correspondente ao autovalor 0. Na demonstração eles afirmam que $\vec{v}_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$ é o único autovetor real positivo, justamente como no artigo criticado por Chenciner. Como diz Chenciner, tal argumento resolveria outros problemas ainda em aberto: "If true, the proposed "proof" would have implied that n -choreographies must have equal masses. At the moment, this is proved only if $n \leq 5$ " [11] pág.101."

Na verdade, se correto o argumento permitiria garantir que o mesmo resultado vale para um número qualquer de polígonos, ou seja, as massas em cada polígono deveriam ser iguais entre si. Abaixo damos alguns passos de como seria a demonstração se o argumento fosse correto.

Em alguns pontos não apresentamos as equações explicitamente, por se tratar de argumentos já apresentados aqui.

Sabemos que em geral, as equações de uma configuração central podem ser escritas como

$$S\vec{m} = 0,$$

onde $S = [s_{ij}]$, é dada por

$$s_{ij} = \left(\frac{1}{|q_i - q_j|^3} - \frac{v^2}{M} \right) (q_j - q_i) \quad (\text{A.1})$$

onde cada entrada $s_{ij} \in \mathbb{R}^d$. Se as posições dos corpos são vértices de L polígonos concêntricos, então podemos escrever as posições como números complexos. E como feito no artigos [24, 28, 30], multiplicando a k -ésima linha de S por $e^{\frac{2\pi(-k)}{N}i}$, obteríamos um sistema cuja matriz de coeficientes é formada por L^2 blocos, onde cada bloco é uma matriz circulante. Podemos então reescrever o problema como

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1L} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{L1} & C_{L2} & \dots & C_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \\ \vdots \\ \vec{m}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix},$$

onde C_{ij} são matrizes circulantes. Vamos ilustrar como concluiríamos o resultado no caso de 3 polígonos. Por simplicidade, vamos escrever o sistema na forma:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \\ \vec{m}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde A, B, C, D, E, F, G, H e I são matrizes circulantes. Duas matrizes circulantes quaisquer comutam uma vez que ambas podem ser escritas como polinômios da mesma matriz. Como o sistema acima equivale a :

$$A\vec{m}_1 + B\vec{m}_2 + C\vec{m}_3 = \vec{0}, \quad (\text{A.3})$$

$$D\vec{m}_1 + E\vec{m}_2 + F\vec{m}_3 = \vec{0}, \quad (\text{A.4})$$

$$G\vec{m}_1 + H\vec{m}_2 + I\vec{m}_3 = \vec{0}., \quad (\text{A.5})$$

multiplicando (A.3) pela matriz D e multiplicando (A.4) pela matriz A e subtraindo uma equação da outra obtemos:

$$(DB - AE)\vec{m}_2 + (DC - AF)\vec{m}_3 = \vec{0}. \quad (\text{A.6})$$

Similarmente, multiplicando (A.3) pela matriz G , multiplicando (A.5) pela matriz A , e subtraindo uma equação da outra, obtemos:

$$(GB - AH)\vec{m}_2 + (GC - AI)\vec{m}_3 = \vec{0}. \quad (\text{A.7})$$

Por propriedades básicas de matrizes circulantes (veja [12]), as matrizes $DB - AE$, $DC - AF$, $GB - AH$ e $GC - AE$ são circulantes. Chamando

$$\tilde{A} = DB - AE, \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{B} = DC - AF, \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{C} = GB - AH, \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{D} = GC - AE, \quad (\text{A.11})$$

reescrevemos as equações (A.6) e (A.7) como:

$$\tilde{A}\vec{m}_2 + \tilde{B}\vec{m}_3 = \vec{0}, \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{C}\vec{m}_2 + \tilde{D}\vec{m}_3 = \vec{0}, \quad (\text{A.13})$$

onde as matrizes $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ são circulantes. Multiplicando (A.12) por \tilde{C} e (A.13) por \tilde{A} e subtraindo uma equação da outra, obtemos:

$$(\tilde{C}\tilde{B} - \tilde{A}\tilde{D})\vec{m}_3 = \vec{0}, \quad (\text{A.14})$$

onde $(\tilde{C}\tilde{B} - \tilde{A}\tilde{D})$ é circulante. Similarmente multiplicando (A.12) por \tilde{D} e (A.13) por \tilde{B} e subtraindo uma equação da outra obteríamos:

$$(\tilde{D}\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{C})\vec{m}_2 = \vec{0}. \quad (\text{A.15})$$

Então se o argumento das referências acima estivesse correto bastaria notar que o único autovalor com coordenadas reais positivas da matriz circulante $(\tilde{D}\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{C})$ é $(1, \dots, 1)^T$, isto mostraria que os vetores de massa \vec{m}_2 e \vec{m}_3 , têm coordenadas todas iguais. Logo as massas nos respectivos polígonos seriam iguais entre si. Argumento similar mostraria que o mesmo vale para o vetor de massas \vec{m}_1 . Não é difícil perceber que este argumento se generaliza para um número maior de polígonos.

Apêndice B: Critério para excluir os vetores $v_{\frac{N-1}{2}}$ e v_{N-1}

O objetivo deste apêndice é mostrar que os vetores que podem possuir autovalores não-nulos não geram vetores com coordenadas todas reais.

O lema abaixo é parte do lema 7 de [24] de onde reproduzimos a demonstração. Lembremos que

$$v_p = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_p \\ \vdots \\ \omega_p^{N-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

onde $\omega_p = e^{\frac{2\pi p}{N}i}$. Segue o lema.

LEMA A.1. O vetor $av_{\frac{N-1}{2}} + bv_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ se, e somente se, $N = 1$ ou $N = 3$, ou $a = 0$ e $b = 0$.

Demonstração. Podemos escrever:

$$av_{\frac{N-1}{2}} + bv_{N-1} = (r_1, r_2, \dots, r_N). \quad (\text{A.17})$$

Logo $av_{\frac{N-1}{2}} + bv_N \in \mathbb{R}^N$ se, e somente se, $r_k \in \mathbb{R}$ para todo k . Podemos notar que:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + b \\ r_2 + r_N &= \left(a\omega_{\frac{N-1}{2}} + b\omega_{N-1} \right) + \left(a\omega_{\frac{N-1}{2}}^{N-1} + b\omega_{N-1}^{N-1} \right) \\ &= a \left(\omega_{\frac{N-1}{2}} + \omega_{\frac{N-1}{2}}^{N-1} \right) + b \left(\omega_{N-1} + \omega_{N-1}^{N-1} \right) \\ &= a \left(2\cos \left(\frac{2\pi \left(\frac{N-1}{2} \right)}{N} \right) \right) + b \left(2\cos \left(\frac{2\pi(N-1)}{N} \right) \right). \end{aligned}$$

Considerando estas equações como um sistema linear em a e b e calculando o seu determinante, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\cos \left(\frac{2\pi \left(\frac{N-1}{2} \right)}{N} \right) & 2\cos \left(\frac{2\pi(N-1)}{N} \right) \end{vmatrix} = 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi(N-1)}{N} \right) - \cos \left(\frac{2\pi \left(\frac{N-1}{2} \right)}{N} \right) \right] \\ 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) - \cos \left(\frac{\pi(N-1)}{N} \right) \right].$$

Usando a identidade $\cos(x) - \cos(y) = -2\text{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right)$ temos:

$$\begin{aligned} & 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) - \cos \left(\frac{\pi(N-1)}{N} \right) \right] \\ &= -4\text{sen} \left(\frac{\pi(3-N)}{2N} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi(N+1)}{2N} \right). \end{aligned}$$

Mas a última soma é nula se, e somente se, $\frac{(N+1)}{2N}$ ou $\frac{3-N}{2N}$ são inteiros, o que ocorre se, e somente se, $N = 1$ ou $N = 3$ respectivamente. Logo se $N > 3$, usando a regra de Cramer, os

valores de a e b são:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & 1 \\ r_2 + r_N & 2\cos\left(\frac{2\pi\left(\frac{N-1}{2}\right)}{N}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\cos\left(\frac{2\pi\left(\frac{N-1}{2}\right)}{N}\right) & 2\cos\left(\frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \end{vmatrix}}$$

e

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & r_2 + r_N \\ 1 & r_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\cos\left(\frac{2\pi\left(\frac{N-1}{2}\right)}{N}\right) & 2\cos\left(\frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \end{vmatrix}}.$$

Assim se supusermos que $av_{\frac{N-1}{2}} + bv_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ então concluiremos que a e b são reais. A partir de agora vamos supor isto.

Lembrando que $r_k = a\omega_{\frac{N-1}{2}}^{k-1} + b\omega_{N-1}^{k-1}$, então

$$\begin{aligned} r_N &= a\omega_{\frac{N-1}{2}}^{N-1} + b\omega_{N-1}^{N-1}, \\ r_{N-1} &= a\omega_{\frac{N-1}{2}}^{N-2} + b\omega_{N-1}^{N-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Como r_N, r_{N-1}, a e $b \in \mathbb{R}$, tomando a parte imaginária do segundo membro de (A.18) e igualando a zero, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(N-1)\frac{N-1}{2}}{N}\right) + b\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{(N-1)(N-1)}{N}\right) = 0, \\ a\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(N-2)\frac{N-1}{2}}{N}\right) + b\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{(N-1)(N-2)}{N}\right) = 0. \end{cases}$$

Fazendo simplificações, podemos reescrever o sistema acima na forma:

$$\begin{cases} a(-1)^N \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(N-1)}{N}\right) - b\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{(N-1)}{N}\right) = 0, \\ a(-1)^N \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(N-1)}{N}\right) - b\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{(N-2)}{N}\right) = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem uma solução não-nula (a, b) somente se o seu determinante é nulo, isto é, somente se:

$$(-1)^N \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi(N-1)}{N}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(N-1)}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(N-2)}{N}\right) \right] = 0. \quad (\text{A.19})$$

No entanto

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi(N-1)}{N}\right) &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{N}\right), \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(N-2)}{N}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{N}\right), \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(N-1)}{N}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{N}\right). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 & (-1)^N \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi(N-1)}{N} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi(N-1)}{N} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(N-2)}{N} \right) \right] \\
 = & (-1)^N \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi}{N} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{N} \right) \right] \\
 = & (-1)^N \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right) \left[\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right) - 2\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right] \\
 = & (-1)^N \left[\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right) \left[2\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right) \cos \left(\frac{\pi}{N} \right) - 2\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right] \right] \\
 = & (-1)^N \left[2\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{N} \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right] \right] \\
 = & (-1)^N \left[2\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N} \right) 2\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2N} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{2N} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Note que todos os termos acima são não-nulos se $N > 3$. Se $N = 3$, o produto acima é nulo. Então para N ímpar e $N \geq 3$, se $av_{\frac{N-1}{2}} + bv_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ temos $N = 3$ ou $a = b = 0$. \square

