



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

Felipe Wergete Cruz

Fluidos micropolares com densidade variável:  
existência, unicidade, regularidade, aproximações da solução e  
o limite de viscosidade nula

Recife - PE

2014



Felipe Wergete Cruz

**Fluidos micropolares com densidade variável:  
existência, unicidade, regularidade, aproximações da solução e  
o limite de viscosidade nula**

Tese apresentada ao Departamento de  
Matemática da UFPE, como requisito  
para a obtenção do grau de DOUTOR em  
Matemática.

Orientador: Prof. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva

Recife - PE

2014

Catálogo na fonte  
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno, CRB 4-1758

Cruz, Felipe Wergete.

Fluídos micropolares com densidade variável: existência, unicidade, regularidade, aproximações da solução e o limite de viscosidade nula./ Felipe Wergete Cruz. – Recife: O Autor, 2014.  
124f.

Orientador: Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2014.  
Inclui referências bibliográficas.

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Mecânica dos fluídos. I. Braz e Silva, Pablo Gustavo Albuquerque. (orientador). II. Título.

515

(22. ed.)

MEI 2014-19

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

---

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, *UFPE*  
**Orientador**

---

Miguel Fidencio Loayza Lozano, *UFPE*

---

Cícero Lopes Frota, *UEM*

---

Haroldo Rodrigues Clark, *UFF*

---

Marko Antonio Rojas Medar, *Bio-Bio, Chile*

**FLUIDOS MICROPOLARES COM DENSIDADE VARIÁVEL: EXISTÊNCIA, UNICIDADE,  
REGULARIDADE, APROXIMAÇÕES DA SOLUÇÃO E O LIMITE DE VISCOSIDADE NULA**

*Por*

Felipe Wergete Cruz

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410*

RECIFE – BRASIL  
14 de Fevereiro – 2014

À minha família

# Agradecimentos

A Deus, por mais uma realização de um sonho.

A todos os meus familiares que sempre me apoiaram, em especial aos meus pais.

À minha esposa Isabel, por toda compreensão, incentivo e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu orientador, Pablo Braz, pela orientação e incentivo que foram decisivos para minha formação como pesquisador em Matemática.

Ao Professor Marko Rojas-Medar (Universidad del Bío-Bío, Chile) pelas valiosas sugestões.

Ao Professor Francisco Guillén González (Universidad de Sevilla, Espanha) pelas discussões a respeito do Capítulo 3 durante o VII ENAMA.

Aos professores da banca examinadora, por todas as correções/sugestões apontadas.

A todos os professores das disciplinas que cursei desde o Ensino Fundamental à Pós-Graduação.

Aos amigos do DMAT-UFPE: Alan Farias, Clessius Silva, Crislene Paixão, Fábio “Badaró”, Filipe Andrade, Filipe Dantas, Ricardo Maldonado e Thamires Cruz.

Aos colegas da UNIVASF, Anibal Livramento (“Anny”), Alan Dantas, Erlon Rabelo (“Valéria”), José Luiz (“Lulu”), Nelson Cárdenas, Severino Cirino e Taquimara Souza.

À Capes e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos os funcionários do DMAT-UFPE, em especial a Claudia Bezerra, Fátima Bacelar e Tânia Maranhão.

“Não há problema que não possa ser  
solucionado pela paciência”

**Chico Xavier**

## Resumo

Estudamos alguns aspectos teóricos das equações que modelam o movimento de fluidos assimétricos (micropolares) incompressíveis com densidade variável. Mais especificamente, obtivemos estimativas de erro, uniformes no tempo, para aproximações semi-Galerkin de soluções. Também estabelecemos a convergência uniforme da solução do problema viscoso para a solução do problema não-viscoso, quando as viscosidades tendem a zero e, por fim, provamos a existência de soluções fortes (e semi-fortes) em domínios tridimensionais ilimitados.

**Palavras-Chave:** Aproximações semi-Galerkin; Equações do tipo Navier-Stokes; Fluidos assimétricos; Viscosidade nula; Existência; Unicidade.

# Abstract

We study some theoretical aspects of the equations that model the motion of incompressible asymmetric fluids (micropolar) with variable density. More specifically, we obtain error bounds, uniform in time, for semi-Galerkin approximations of solutions. Also, we establish uniform convergence of the solution the viscous problem to the solution of non-viscous problem, as viscosities tend to zero. Finally, we show the existence of strong solutions (and semi-strong) in general unbounded three-dimensional domains.

**Key-Words:** Semi-Galerkin approximations; Navier-Stokes type equations; Asymmetric fluids; Vanishing viscosity; Existence; Uniqueness.

# Sumário

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                             | <b>10</b> |
| <b>1 Preliminares</b>                                         | <b>14</b> |
| 1.1 Definições iniciais . . . . .                             | 14        |
| 1.2 Espaços funcionais e notações . . . . .                   | 15        |
| <b>2 Estimativas de erro uniformes no tempo</b>               | <b>25</b> |
| 2.1 Introdução . . . . .                                      | 25        |
| 2.2 Conceito de estabilidade e resultado principal . . . . .  | 27        |
| 2.3 Estimativas a priori . . . . .                            | 30        |
| 2.4 Prova do Teorema 2.1 . . . . .                            | 59        |
| <b>3 Sobre o limite de viscosidade nula</b>                   | <b>62</b> |
| 3.1 Introdução e resultado principal . . . . .                | 62        |
| 3.2 Estimativas a priori . . . . .                            | 64        |
| 3.3 Prova do Teorema 3.1 . . . . .                            | 76        |
| <b>4 Soluções semi-fortes e fortes em domínios ilimitados</b> | <b>84</b> |
| 4.1 Introdução e resultados principais . . . . .              | 84        |
| 4.2 Estimativas a priori . . . . .                            | 90        |

|                                   |                                                  |            |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------|------------|
| 4.3                               | Resultados de existência e unicidade . . . . .   | 102        |
| 4.3.1                             | Prova do Teorema 4.1 . . . . .                   | 109        |
| 4.3.2                             | Unicidade . . . . .                              | 114        |
| 4.3.3                             | Soluções globais: prova do Teorema 4.2 . . . . . | 116        |
| <b>Referências Bibliográficas</b> |                                                  | <b>120</b> |

# Introdução

A teoria dos fluidos assimétricos (micropolares) surgiu em 1966 a partir do trabalho *Theory of micropolar fluids* publicado por Eringen [19] e já conta com muitos resultados estabelecidos sobre existência, unicidade e regularidade de soluções (veja, por exemplo, [39] e as referências ali sugeridas). Esses fluidos são não-newtonianos, uma vez que o tensor de stress é assimétrico. As equações dos fluidos assimétricos são generalizações das equações de Navier-Stokes, no sentido que descrevem a dinâmica de fluidos com microestrutura, isto é, as partículas imersas estão sujeitas tanto a translações como a rotações, o que leva, naturalmente, a considerar com uma “nova” grandeza: a velocidade angular.

As equações de movimento para um fluido não-homogêneo, viscoso, incompressível e assimétrico ocupando um domínio (não necessariamente limitado)  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  (região de escoamento) durante um intervalo de tempo  $[0, T], 0 < T \leq \infty$ , são ([18], [19], [38], [39])

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w} + \rho \mathbf{f}, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ \rho \mathbf{w}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla(\text{div } \mathbf{w}) + 4\mu_r \mathbf{w} \\ \quad = (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} + 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Estas equações formam um sistema de equações não lineares, onde  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\rho(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$  e  $p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$  são as incógnitas e representam, respectivamente, a velocidade linear, a velocidade angular de rotação das partículas do fluido, a densidade e a pressão do fluido em um ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  no tempo  $t \in [0, T]$ . Em termos de aplicações, o sistema acima modela o comportamento de alguns fluidos complexos, como cristais líquidos e também fluidos corpóreos, como por exemplo, o sangue (veja

[39]). Complementamos o sistema (1) com condições iniciais dadas  $\rho_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  e  $\mathbf{w}_0$ , isto é,

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (2)$$

No sistema (1), as forças externas  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  são conhecidas. As constantes  $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $c_0$ ,  $c_a$  e  $c_d$  são positivas. Fisicamente, o parâmetro  $\mu$  é a viscosidade Newtoniana (usual). As constantes  $\mu_r$ ,  $c_0$ ,  $c_a$  e  $c_d$  são viscosidades adicionais, relacionadas à quebra de simetria do tensor de stress e, portanto, relacionadas ao fato do campo rotacional  $\mathbf{w}$  não se anular. Essas constantes satisfazem  $c_0 + c_d > c_a$ .

Notemos, ainda, que, no sistema (1), a primeira equação corresponde à conservação do momento linear, a segunda equação representa a incompressibilidade do fluido e as duas últimas equações são as leis de conservação do momento angular e da massa, respectivamente. Os símbolos  $\nabla$ ,  $\Delta$ ,  $\text{div}$  e  $\text{rot}$  denotam, respectivamente, os operadores *gradiente*, *Laplaciano*, *divergente* e *rotacional*;  $\mathbf{u}_t$ ,  $\mathbf{w}_t$  e  $\rho_t$  são as derivadas com relação ao tempo de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  e  $\rho$ ; a  $i$ -ésima componente de  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  e  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}$  em coordenadas cartesianas são dadas, respectivamente, por:

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

e

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}]_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j}.$$

Também temos:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}.$$

Note que se conhecemos  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ , a pressão  $p = p(\mathbf{x}, t)$  pode ser determinada pela solução da seguinte equação:

$$\text{div}(\rho^{-1} \nabla p) = \text{div}(\mathbf{f} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \bar{\mu} \rho^{-1} \Delta \mathbf{u} + 2\mu_r \rho^{-1} \text{rot } \mathbf{w}).$$

Portanto, mencionaremos somente  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  quando nos referirmos a solução do problema (1).

Conforme mencionamos acima, o sistema (1) inclui, como caso particular, as equações de Navier-Stokes. De fato, se não há microrotação, isto é, se  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  e  $\mu_r = 0$ , o

sistema (1) se reduz a

$$\begin{cases} \rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \end{cases} \quad (3)$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (4)$$

que é o sistema usual de Navier-Stokes com densidade variável. O sistema (3) tem sido bastante estudado quanto à existência de soluções (veja [5], [6], [7], [29], [30], [32], [35], [36], [37], [41], [47], [49]).

Logo, um dos motivos de se estudar o sistema (1) é o “desejo” de se obter resultados correspondentes para o caso assimétrico e que as possíveis influências da estrutura do fluido nos resultados obtidos sejam enfatizadas, uma vez que o caso newtoniano já foi, e ainda é, amplamente estudado, através das equações de Navier-Stokes.

A seguir, faremos uma breve exposição de alguns trabalhos conhecidos.

Com relação ao sistema (1), sob certas condições, usando linearização e um (quase) teorema de ponto fixo, Lukaszewicz estabelece em [38] a existência de soluções fracas por curto período de tempo (veja também [39]). Através do método semi-Galerkin espectral, Boldrini, Rojas-Medar e Fernández-Cara provaram em [8] a existência e unicidade de uma solução forte (local e global no tempo) em domínios limitados com uma abordagem hilbertiana. Utilizando um método iterativo, Conca, Gormaz, Ortega-Torres e Rojas-Medar em [16] e [17], mostram a existência e unicidade de solução forte. A solução fraca com densidade inicial não-negativa foi estudada em [12] e [13].

No que segue, descreveremos como está estruturado este trabalho.

No Capítulo 1, apresentamos, de forma sucinta, os espaços funcionais apropriados para a análise matemática do sistema (1), bem como os resultados mais utilizados ao longo do texto.

No Capítulo 2, obteremos estimativas de erro, uniformes no tempo, para certas soluções estáveis (em um certo sentido a ser precisado neste capítulo). Estas estimativas são obtidas com taxas ótimas na norma  $\mathbf{H}^1$ , para as aproximações das velocidades

linear e angular de rotação das partículas do fluido. Também são obtidas estimativas para as aproximações da densidade em alguns espaços  $L^r$ .

No Capítulo 3, estudaremos o limite de viscosidade nula (“vanishing viscosity limit”) para a solução do problema de Cauchy (1)-(2) em  $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ ,  $T > 0$ . Estabeleceremos a convergência uniforme da solução do sistema (1)-(2) à solução de um fluido assimétrico não-homogêneo ideal, quando as viscosidades tenderem a zero.

Por fim, no Capítulo 4, mostraremos a existência e unicidade de soluções fortes (e semi-fortes) locais e globais no tempo para o sistema (1) em domínios ilimitados com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Para facilitar a leitura, faremos uma breve revisão dos principais conceitos e resultados que serão usados nos demais capítulos. Para maiores detalhes, consulte as referências [1], [15], [20], [39], [40] e [46].

### 1.1 Definições iniciais

No que segue, denotaremos sempre por  $\Omega$  um domínio (não necessariamente limitado) em  $\mathbb{R}^3$ . Funções com valores em  $\mathbb{R}^3$ , bem como seus espaços e pontos, são representados com letras em negrito. Nas próximas quatro definições,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  denotará um conjunto aberto.

**Definição 1.1.** Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *Lipschitziana* se existir uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U.$$

**Definição 1.2.** Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *localmente Lipschitziana* se para cada  $\mathbf{x} \in U$ , existir uma vizinhança  $V_{\mathbf{x}}$ , do ponto  $\mathbf{x}$ , tal que  $f|_{V_{\mathbf{x}}}$  é Lipschitziana.

**Definição 1.3.** Dizemos que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^{1,1}$  se  $f$  for diferenciável em  $U$  com derivadas parciais localmente Lipschitziana.

**Definição 1.4.** Um conjunto aberto  $U$  em  $\mathbb{R}^n$  é dito ser um conjunto aberto  $C^{1,1}$  se existem constantes positivas  $r_0$  e  $c$  tais que para todo  $\mathbf{z} \in \partial U$ , existem uma fun-

ção  $C^{1,1}$   $f = f_{\mathbf{z}} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $f(\mathbf{0}) = 0$ ,  $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq c$ ,  $\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{w})\| \leq c\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|$  e um sistema de coordenadas ortonormal  $CS_{\mathbf{z}} : \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) := (\tilde{\mathbf{y}}, y_n)$  com sua origem em  $\mathbf{z}$  tal que

$$B(\mathbf{z}, r_0) \cap U = \{\mathbf{y} \in B(0, r_0) \text{ em } CS_{\mathbf{z}} / y_n > f(\tilde{\mathbf{y}})\}.$$

**Definição 1.5.** Dizemos que a fronteira de  $\Omega$  é uniformemente de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , quando é possível escolher coordenadas cartesianas locais  $(x_1, x_2, x_3)$  numa vizinhança  $U_{\mathbf{y}}$  de cada  $\mathbf{y} \in \partial\Omega$  tal que  $\partial\Omega \cap U_{\mathbf{y}}$  seja representado por uma função  $x_3 = \psi(x_1, x_2, \mathbf{y})$  de classe  $C^k$ . Além disso, as vizinhanças  $U_{\mathbf{y}}$  podem ser escolhidas como sendo bolas, todas com o mesmo diâmetro, com respectivos centros  $\mathbf{y}$ , e as derivadas até ordem  $k$  de cada função  $\psi(\cdot, \cdot, \mathbf{y})$  são limitadas por uma constante independente de  $\mathbf{y}$ .

## 1.2 Espaços funcionais e notações

Os espaços  $C(\Omega)$ ,  $C^k(\Omega)$ ,  $C_0^k(\Omega)$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$  são definidos da maneira usual. Denotaremos por  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , o espaço das funções reais  $u$  definidas em  $\Omega$ , mensuráveis, cuja potência  $p$ ,  $|u|^p$ , é integrável (à Lebesgue) em  $\Omega$ , ou seja,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ mensurável e } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

que é um espaço de Banach munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert separável com respeito ao produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

O produto interno e a norma usuais em  $L^2(\Omega)$  são denotados por  $(\cdot, \cdot)$  e  $\|\cdot\|$ , respectivamente, a menos de menção contrária.

Uma função  $u$  que é mensurável em  $\Omega$  é dita *essencialmente limitada* em  $\Omega$  se existe uma constante  $C \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|u(x)| \leq C$  quase sempre (q.s.) em  $\Omega$ . Por  $L^\infty(\Omega)$  denota-se o espaço das funções reais  $u$ , mensuráveis em  $\Omega$  e que são essencialmente limitadas em  $\Omega$ , onde usamos a notação q.s. em  $\Omega$  para indicar que a propriedade

$|u(x)| \leq C$  é válida, exceto, possivelmente, para  $x$  pertencente a algum subconjunto de  $\Omega$  com medida nula. Chama-se *supremo essencial* de  $u$  ao ínfimo do conjunto

$$\{C \in \mathbb{R}^+; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}$$

e o denotamos por

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|.$$

Mostra-se que  $L^\infty(\Omega)$  é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|.$$

Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Dizemos que uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pertence a  $L_{loc}^p(\Omega)$  se  $u|_K \in L^p(\Omega)$  para todo compacto  $K \subset \Omega$ .

Sejam  $I$  um intervalo da reta e  $X$  um espaço de Banach. Se  $p \in [1, +\infty]$ , o espaço  $L^p(I, X)$  representa o conjunto de todas as funções mensuráveis  $f : I \rightarrow X$  tais que a função  $t \mapsto \|f(t)\|_X$  pertence a  $L^p(I)$ . Para  $f \in L^p(I, X)$ , definimos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(I, X)} &= \left( \int_I \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \text{ se } p < +\infty, \\ \|f\|_{L^\infty(I, X)} &= \sup_{t \in I} \text{ess} \|f(t)\|_X. \end{aligned}$$

Denotamos por  $L_{loc}^p(I, X)$  o conjunto de todas as funções mensuráveis  $f : I \rightarrow X$  tais que  $f|_J \in L^p(J, X)$  para todo sub-intervalo limitado  $J$  de  $I$ .

O conjunto  $C^k(I; X)$  representa o espaço de todas as funções que são  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis sobre  $I$  com valores em  $X$ .

Consideraremos os espaços de Sobolev usuais

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty, |\alpha| \leq m\},$$

para um multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$ , um inteiro não-negativo  $m$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Aqui,  $D^\alpha$  denota o operador de derivação de ordem  $\alpha$  definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}},$$

onde  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Para cada  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ , define-se e denota-se a norma de  $u$  por

$$\begin{aligned}\|u\|_{m,p} &= \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{m,\infty} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(x)|.\end{aligned}$$

Escrevemos  $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$  e denotamos por  $H_0^m(\Omega)$  o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $H^m(\Omega)$ , onde  $C_0^\infty(\Omega)$  denota o conjunto de todas as funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que têm suporte compacto e são de classe  $C^\infty$ . Sabemos que  $H^m(\Omega)$  é um espaço de Hilbert separável e que  $H_0^1(\Omega)$  é caracterizado por

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Enunciaremos a seguir, resultados que frequentemente usaremos nos próximos capítulos.

**Lema 1.1** ([15], **Generalização da Desigualdade de Hölder**). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado,  $p_i \geq 1$  e  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, k$ , onde  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$ .*

$$\text{Então } f = \prod_{i=1}^k f_i \in L^p \text{ e } \|f\|_{L^p} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

**Lema 1.2** ([20], **Desigualdade generalizada de Young**). *Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais não-negativos. Se  $p, q \in \mathbb{R}$  são tais que  $1 \leq p < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então para todo  $\varepsilon > 0$ , tem-se*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q, \quad \text{onde } C_\varepsilon = \frac{p-1}{p^q} \varepsilon^{1-q}.$$

**Lema 1.3** ([34] ou [49], **Lema de Aubin-Lions**). *Sejam  $B_0, B$  e  $B_1$  espaços de Banach com  $B_0$  e  $B_1$  reflexivos tais que  $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$  com injeções contínuas e a injeção  $B_0 \hookrightarrow B$  compacta. Para  $T \in (0, \infty)$  e  $1 \leq p_i \leq \infty$ ,  $i = 0, 1$ , seja*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\}$$

*munido da norma*

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

*Então  $W$  é um espaço de Banach e*

$$W \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; B)$$

*com injeção compacta.*

*Observação 1.1.* O Lema de Aubin-Lions nos diz que os conjuntos limitados em  $W$  são relativamente compactos em  $L^{p_0}(0, T; B)$ . Logo, seqüências limitadas em  $W$  admitem subsequência convergindo (fortemente) em  $L^{p_0}(0, T; B)$ .

**Lema 1.4** ([40], Lema de Du Bois-Raymond). *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Então*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

*se, e somente se,  $u = 0$  q.s. em  $\Omega$ .*

**Lema 1.5** ([50], Lema 1.2, pág. 260). *Sejam  $V$  e  $H$  dois espaços de Hilbert tais que  $V \hookrightarrow H \equiv H^* \hookrightarrow V^*$  com inclusões contínuas e densas. Se a função  $u \in L^2(0, T; V)$  e  $u' := \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V^*)$ , então  $u$  é quase sempre igual a uma função contínua de  $[0, T]$  em  $H$  e, além disso, a identidade*

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 = 2(u', u)$$

*é válida no sentido das distribuições sobre  $(0, T)$ .*

**Teorema 1.1** ([15], Alaoglu-Banach). *Um espaço de Banach  $X$  é reflexivo se, e somente se, toda seqüência limitada em  $X$  possui uma subsequência fracamente convergente.*

**Teorema 1.2** (veja [15]). *Se  $X$  é um espaço vetorial normado separável, então toda seqüência limitada em  $X^*$  possui uma subsequência convergente na topologia fraca\*.*

Uma vez que o espaço  $L^1(\Omega)$  é separável e  $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ , temos o seguinte

**Corolário 1.1.** *Se  $(u_n)$  é uma seqüência limitada em  $L^\infty(\Omega)$ , então existem  $u \in L^\infty(\Omega)$  e uma subsequência  $(u_{n_k}) \subset (u_n)$  tais que  $u_{n_k} \xrightarrow{*} u$ .*

**Proposição 1.1** (veja [15]). *Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  e  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$  duas seqüências.*

(i) *Se  $x_n \rightharpoonup x$ , então  $\{x_n\}$  é limitada e  $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ .*

(ii) *Se  $f_n \xrightarrow{*} f$ , então  $\{f_n\}$  é limitada e, se  $E$  for Banach,  $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$ .*

A seguir, enunciamos um resultado simples que será usado no Capítulo 2.

**Lema 1.6** ([10], Apêndice A). *Seja  $h(t)$  uma função integrável não negativa. Suponha que existam constantes não negativas  $a_1$  e  $a_2$  satisfazendo*

$$\int_{t_0}^t h(\tau) d\tau \leq a_1(t - t_0) + a_2,$$

*para todos  $t$  e  $t_0$ , com  $0 \leq t_0 \leq t$ . Então,*

$$\sup_{t \geq 0} \left( e^{-t} \int_0^t e^{\tau} h(\tau) d\tau \right) < \infty.$$

Agora, recordaremos algumas desigualdades que serão bastante úteis no terceiro capítulo. No que segue, usaremos a notação  $D^k f = \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f$ .

**Lema 1.7** (veja, por exemplo, [1], [14], [28], [31]). *Sejam  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha$  um multi-índice com  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  e  $D^\alpha$  o operador de derivação  $D^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \partial_3^{\alpha_3}$ .*

(a) *(Estimativa do comutador) Se  $f \in H^s$ ,  $Df \in L^\infty$  e  $g \in H^{s-1} \cap L^\infty$ , então*

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_{L^2} \leq C(\|\nabla f\|_{s-1} \|g\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^\infty} \|g\|_{s-1}). \quad (1.1)$$

(b) *(Estimativa do produto) Se  $f, g \in H^s \cap L^\infty$ , então*

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha(fg)\|_{L^2} \leq C(\|f\|_{L^\infty} \|g\|_s + \|f\|_s \|g\|_{L^\infty}). \quad (1.2)$$

(c) *(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) Se  $|\alpha| = k \leq s$ , então*

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha f\|_{L^{2s/k}} \leq C \|f\|_{L^\infty}^{1-k/s} \|f\|_s^{k/s}. \quad (1.3)$$

(d) *(Desigualdades de Sobolev) Para qualquer  $f \in H^2$  e  $q \in [2, 6]$ , temos que*

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_1, \quad \|f\|_{L^6} \leq C \|\nabla f\|_{L^2}, \quad \|f\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla f\|_1 \leq C \|f\|_2. \quad (1.4)$$

(e) *(Uma desigualdade no espaço de Sobolev) Para todo  $s \geq 1$  existe uma constante  $C_s$  tal que, para quaisquer  $f, g \in H^s \cap L^\infty$ , tem-se*

$$\|fg\|_s \leq C_s (\|f\|_{L^\infty} \|g\|_s + \|f\|_s \|g\|_{L^\infty}). \quad (1.5)$$

Agora, apresentaremos outros espaços funcionais necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Escrevemos

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) / \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega\},$$

e denotamos por  $\mathbf{H}(\Omega)$  e  $\mathbf{V}(\Omega)$  o fecho de  $\mathcal{V}(\Omega)$  em  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  e  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , respectivamente. Note que  $\mathbf{V}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}(\Omega)$ , onde a inclusão é contínua e densa. Tais espaços são caracterizados por (veja [50], Teoremas 1.4 e 1.6, páginas 15 e 18, respectivamente):

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0 \}, \mathbf{V}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \}.$$

Aqui,  $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}$  representa a componente normal de  $\mathbf{v}$  sobre  $\partial\Omega$ .

O complemento ortogonal de  $\mathbf{H}(\Omega)$  é caracterizado por

$$\mathbf{H}^\perp(\Omega) = \{ \phi \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \phi = \nabla p \text{ para algum } p \in H^1(\Omega) \}.$$

Assim, o espaço  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  possui a decomposição  $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}(\Omega) \oplus \mathbf{H}^\perp(\Omega)$  (decomposição de Helmholtz) e podemos, então, considerar a projeção ortogonal

$$P : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega).$$

Note que  $P(\nabla g) = \mathbf{0}$ ,  $\forall g \in H^1(\Omega)$ . Outra importante projeção ortogonal que trabalharemos é a projeção  $R : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Consideraremos o operador de Stokes  $A = -P\Delta : \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$  que é caracterizado pela igualdade

$$(A\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}), \text{ para todos } \mathbf{w} \in \mathbf{D}(A), \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega),$$

onde  $\mathbf{D}(A) = \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$  é o domínio do operador de Stokes. Suas autofunções e seus autovalores são, respectivamente, indicados por  $\boldsymbol{\varphi}^k$  e  $\lambda_k$ . Uma vez que  $A$  é um operador autoadjunto, definido positivo com inverso  $A^{-1} : \mathbf{H}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$  compacto, resultados de análise funcional nos garante que existe uma sequência de autovalores positivos  $\lambda_k > 0$  e um sequência de autofunções  $\{\boldsymbol{\varphi}^k\}_{k=1}^\infty$ , tais que

$$A\boldsymbol{\varphi}^k = \lambda_k \boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^k \in \mathbf{D}(A)$$

e  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$  (ver [15]).

Também sabemos que  $\{\boldsymbol{\varphi}^k(\mathbf{x})\}_{k=1}^\infty$ ,  $\left\{ \frac{\boldsymbol{\varphi}^k(\mathbf{x})}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_{k=1}^\infty$  e  $\left\{ \frac{\boldsymbol{\varphi}^k(\mathbf{x})}{\lambda_k} \right\}_{k=1}^\infty$  formam um sistema ortonormal completo nos espaços  $\mathbf{H}(\Omega)$ ,  $\mathbf{V}(\Omega)$  e  $\mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$  equipados com os produtos internos  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,  $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$  e  $(A\mathbf{u}, A\mathbf{v})$ , respectivamente.

Consideraremos também, o operador de Laplace  $B = -\Delta$  e o operador fortemente elíptico  $L = -(c_a + c_d)\Delta - (c_0 + c_d - c_a)\nabla \operatorname{div}$ , com condições de contorno de Dirichlet e

domínios  $\mathbf{D}(B) = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega) = \mathbf{D}(L)$ . A fim de não sobrecarregarmos a notação, denotaremos, respectivamente, por  $\phi^k$  e  $\gamma_k$  as autofunções e os autovalores de  $B$  ou  $L$ , segundo o contexto. Notemos que todas as propriedades acima para o operador  $A$  têm considerações similares para os operadores  $B$  e  $L$ . Por exemplo,  $\{\phi^k(\mathbf{x})\}_{k=1}^\infty$ ,  $\left\{\frac{\phi^k(\mathbf{x})}{\sqrt{\gamma_k}}\right\}_{k=1}^\infty$  e  $\left\{\frac{\phi^k(\mathbf{x})}{\gamma_k}\right\}_{k=1}^\infty$  formam um sistema ortonormal completo nos espaços  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ , respectivamente. Além disso, temos

$$\begin{aligned} (B\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= (\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}), \\ (L\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= (c_a + c_d)(\nabla\mathbf{w}, \nabla\mathbf{v}) + (c_0 + c_d - c_a)(\operatorname{div} \mathbf{w}, \operatorname{div} \mathbf{v}), \end{aligned}$$

para todos  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e  $\mathbf{w} \in \mathbf{D}(B) = \mathbf{D}(L)$ . Observamos que devido a hipótese  $c_0 + c_d > c_a$ , o operador  $L$  é, de fato, um operador positivo.

Usando resultados de Amrouche e Girault (veja [4]), quando  $\Omega$  é de classe  $C^{1,1}$ , temos que  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2}$  e  $\|A\mathbf{u}\|$ ,  $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2}$  e  $\|B\mathbf{w}\|$ ,  $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2}$  e  $\|L\mathbf{w}\|$ , são normas equivalentes em  $\mathbf{D}(A)$ ,  $\mathbf{D}(B)$  e  $\mathbf{D}(L)$ , respectivamente. Também temos que  $\|\nabla\mathbf{w}\|$ ,  $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1}$  e  $\|L^{1/2}\mathbf{w}\|$  são normas equivalentes em  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $P_k$  e  $R_k$  as projeções ortogonais de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  em  $\mathbf{V}_k := \operatorname{span}[\varphi^1, \dots, \varphi^k]$  e  $\mathbf{W}_k := \operatorname{span}[\phi^1, \dots, \phi^k]$ , respectivamente, ou seja, se  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , então

$$P_k \mathbf{f} = \sum_{i=1}^k (\mathbf{f}, \varphi^i) \varphi^i \quad \text{e} \quad R_k \mathbf{f} = \sum_{i=1}^k (\mathbf{f}, \phi^i) \phi^i.$$

Neste caso, para todos  $\mathbf{f} \in \mathbf{D}(A)$ ,  $\mathbf{g} \in \mathbf{D}(B) = \mathbf{D}(L)$  e  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$P_k A \mathbf{f} = A P_k \mathbf{f}, \quad R_k B \mathbf{g} = B R_k \mathbf{g} \quad \text{e} \quad R_k L \mathbf{g} = L R_k \mathbf{g}.$$

Também trabalharemos com as projeções ortogonais  $Q_k$  e  $S_k$  de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  sobre  $\widetilde{\mathbf{V}}_k := \operatorname{span}[\varphi^{k+1}, \varphi^{k+2}, \dots]$  e  $\widetilde{\mathbf{W}}_k := \operatorname{span}[\phi^{k+1}, \phi^{k+2}, \dots]$ , respectivamente. É claro que as seguintes identidades são verdadeiras:

$$P = P_k + Q_k \quad \text{e} \quad R = R_k + S_k.$$

Para estas expansões em termos das autofunções, podemos estimar os erros de acordo com o seguinte lema:

**Lema 1.8** (veja [43] e [44]). Se  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$  e  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , então

$$\|\mathbf{v} - P_k \mathbf{v}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \|\nabla \mathbf{v}\|^2, \quad \|\mathbf{w} - R_k \mathbf{w}\|^2 \leq \frac{1}{\gamma_{k+1}} \|L^{1/2} \mathbf{w}\|^2.$$

Além disso, se  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$  e  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ , então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - P_k \mathbf{v}\|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}^2} \|A \mathbf{v}\|^2, & \|\mathbf{w} - R_k \mathbf{w}\|^2 &\leq \frac{1}{\gamma_{k+1}^2} \|L \mathbf{w}\|^2, \\ \|\nabla \mathbf{v} - \nabla P_k \mathbf{v}\|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \|A \mathbf{v}\|^2, & \|L^{1/2}(\mathbf{w} - R_k \mathbf{w})\|^2 &\leq \frac{1}{\gamma_{k+1}} \|L \mathbf{w}\|^2. \end{aligned}$$

A seguir, enunciaremos alguns resultados que serão frequentemente utilizados no Capítulo 4 e usaremos a notação

$$\|D^2 \mathbf{f}\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^3 \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\|^2.$$

**Lema 1.9** ([23], Lema 1). Seja  $\Omega$  um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^3$  com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Suponha que  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$  é uma solução generalizada do problema de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f}, \text{ em } \Omega \text{ com } \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é,  $\mathbf{v}$  satisfaz a identidade  $\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \nabla \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \phi \, d\mathbf{x}$  para todo  $\phi \in \mathcal{V}(\Omega)$ . Então  $\mathbf{v}$  possui segundas derivadas em  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  e as desigualdades

$$\begin{aligned} \|D^2 \mathbf{v}\| &\leq C_{\partial} (\|P \mathbf{f}\| + \|\nabla \mathbf{v}\|), \\ \|\nabla \mathbf{v}\|_3 &\leq C_{\partial} (\|P \mathbf{f}\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{v}\|^{1/2} + \|\nabla \mathbf{v}\|), \end{aligned}$$

são satisfeitas com constantes dependendo somente da regularidade- $C^3$  da  $\partial\Omega$  (mas independentes da medida de  $\Omega$  ou  $\partial\Omega$ ).

*Observação 1.2.* A hipótese de  $\Omega$  ser um domínio com fronteira de classe  $C^3$  é usada somente para provar o Lema 1.9 sem usar a Teoria do Potencial. Para detalhes, veja os Lemas 1 e 2 em [23].

Nos lemas abaixo, assumiremos que as funções  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $f(t)$  e  $h(t)$  são suaves, não-negativas e definidas para todo  $t \geq 0$ .

**Lema 1.10** ([23], Lema 3). *Suponha que  $\phi(0) = \phi_0$  e  $\phi'(t) + \psi(t) \leq g(\phi(t)) + f(t)$  para  $t \geq 0$ , onde  $g$  é uma função Lipschitz não-negativa definida para  $\phi \geq 0$ . Então  $\phi(t) \leq F(t; \phi_0)$  para todo  $t \in [0, T(\phi_0))$ , onde  $F(\cdot; \phi_0)$  é a solução do problema de valor inicial  $F'(t) = g(F(t)) + f(t)$ ,  $F(0) = \phi_0$  e  $[0, T(\phi_0))$  é o intervalo maximal de existência. Além disso, se  $g$  é não-decrescente, então*

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq \tilde{F}(t; \phi_0),$$

onde

$$\tilde{F}(t; \phi_0) = \phi_0 + \int_0^t [g(F(\tau; \phi_0)) + f(\tau)] d\tau.$$

**Lema 1.11** ([23], Lema 4). *Suponha que  $\phi(0) = \phi_0$  e  $\phi'(t) + \psi(t) \leq h(t)\phi(t) + f(t)$  para  $t \geq 0$ . Então  $\phi(t) \leq \bar{F}(t; \phi_0)$  e  $\int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq \bar{F}_*(t; \phi_0)$ , para todo  $t \geq 0$ , onde*

$$\bar{F}(t; \phi_0) = \left( \phi_0 + \int_0^t f(\tau) \left( \exp \int_0^\tau -h(s) ds \right) d\tau \right) \exp \int_0^t h(\tau) d\tau$$

e

$$\bar{F}_*(t; \phi_0) = \phi_0 + \int_0^t [h(\tau) \bar{F}(\tau; \phi_0) + f(\tau)] d\tau.$$

Assim, as estimativas para  $\phi(t)$  e  $\int_0^t \psi(\tau) d\tau$  são obtidas a partir das estimativas para  $\phi_0$ ,  $\int_0^t h(\tau) d\tau$  e  $\int_0^t f(\tau) d\tau$ .

**Lema 1.12** ([23], Lema 7). *Seja  $\Omega$  um domínio tridimensional qualquer com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Seja  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$  uma sequência de subdomínios limitados de  $\Omega$ , todos com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ , satisfazendo  $\Omega = \bigcup_{m=1}^\infty \Omega_m$ , e tais que a regularidade  $C^3$  das fronteiras  $\partial\Omega_m$  é uniforme com respeito à  $m$ . Seja  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}(\Omega)$  e suponha que  $\|D^2 \mathbf{a}\| < \infty$ . Então existe uma sequência de funções  $\mathbf{a}_m \in \mathbf{V}(\Omega_m)$  com  $\|\nabla \mathbf{a}_m\|_{\Omega_m} \leq \|\nabla \mathbf{a}\|$  e  $\|D^2 \mathbf{a}_m\|_{\Omega_m} \leq A$ , tal que  $\|\nabla \mathbf{a}_m - \nabla \mathbf{a}\| \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Aqui é entendido que  $\mathbf{a}_m \equiv 0$  fora de  $\Omega_m$  e  $A$  é uma constante independente de  $m$ .*

Similarmente, para funções em  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , temos o seguinte resultado:

**Lema 1.13.** *Seja  $\Omega$  um domínio tridimensional qualquer com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Seja  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$  uma sequência de subdomínios limitados de  $\Omega$ ,*

todos com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ , satisfazendo  $\Omega = \cup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ , e tais que a regularidade  $C^3$  das fronteiras  $\partial\Omega_m$  é uniforme com respeito à  $m$ . Seja  $\mathbf{b} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e suponha que  $\|D^2\mathbf{b}\| < \infty$ . Então existe uma sequência de funções  $\mathbf{b}_m \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_m)$  com  $\|L^{1/2}\mathbf{b}_m\|_{\Omega_m} \leq \|L^{1/2}\mathbf{b}\|$  e  $\|D^2\mathbf{b}_m\|_{\Omega_m} \leq B$ , tal que  $\|L^{1/2}\mathbf{b}_m - L^{1/2}\mathbf{b}\| \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Aqui é entendido que  $\mathbf{b}_m \equiv 0$  fora de  $\Omega_m$  e  $B$  é uma constante independente de  $m$ .

## Capítulo 2

# Estimativas de erro uniformes no tempo

Consideramos aproximações semi-Galerkin espectrais para soluções globais fortes das equações que modelam o movimento de fluidos assimétricos (micropolares) com densidade variável. Obtivemos estimativas de erro, uniformes no tempo, otimas na norma  $\mathbf{H}^1$ , para as aproximações das velocidades linear e angular de rotação das partículas do fluido. Também obtivemos estimativas de erro para as aproximações da densidade em alguns espaços  $L^r$ . Os resultados que provamos são similares ao de Heywood [24] para as equações de Navier-Stokes usuais (densidade constante) e ao de Braz e Silva e Rojas-Medar [10] para as equações de Navier-Stokes com densidade variável. Aqui, por otimalidade entendemos que as soluções aproximadas  $\mathbf{u}^k$  e  $\mathbf{w}^k$  convergem para a solução  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  do problema (1) na melhor taxa possível, medidas por potências do inverso dos autovalores  $\lambda_{k+1}$  e  $\gamma_{k+1}$  dos operadores de Stokes e de Laplace (Laplaciano), considerando-se as aproximações nos subespaços  $\mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{W}_k$ .

### 2.1 Introdução

Seja  $\Omega$  um domínio regular limitado em  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^{1,1}$ , com fronteira  $\partial\Omega$ . Vamos estudar o sistema (1) na região  $\Omega \times (0, \infty)$ , ou seja

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} + \rho \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \rho \mathbf{w}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{w}) + 4\mu_r \mathbf{w} \\ \quad = (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Complementamos o sistema (2.1) com as seguintes condições de fronteiras e iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \text{ e } \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Estamos interessados no método *semi-Galerkin espectral* aplicado ao sistema (2.1). O termo *espectral* é usado para indicar que a base utilizada para as aproximações de Galerkin é formada por autofunções do operador de Stokes. A importância de obter estimativas de erros para métodos de Galerkin reside na ampla aplicação de tais métodos em experimentos numéricos. Mesmo o caso mais simples de aproximações espectrais podem ser usados como preparação para um método de elementos finitos.

Um desenvolvimento sistemático de estimativas de erro para o método de Galerkin espectral aplicado às equações de Navier-Stokes clássicas foi obtido em [44]. As estimativas lá obtidas são locais no tempo no sentido que dependem de funções que crescem exponencialmente com o tempo. Como observado em [24], esse resultado é o melhor que se pode esperar sem hipóteses adicionais sobre a estabilidade da solução que está sendo aproximada. Estimativas ótimas e uniformes no tempo para a norma de Dirichlet da velocidade foram obtidas em [24], supondo limitação uniforme no tempo da norma  $\mathbf{L}^2$  do gradiente da velocidade e estabilidade exponencial da solução na norma de Dirichlet.

Para o caso das equações de Navier-Stokes com densidade variável, estimativas de erro locais no tempo foram inicialmente obtidas em [47]. Além disso, estimativas uniformes no tempo para a norma  $\mathbf{L}^2$  também foram obtidas. Essas últimas estimativas não são ótimas. Além disso, requeriam a hipótese  $\mathbf{u} \in L^\infty([0, T]; \mathbf{H}^3(\Omega))$  que, como observado em [25], é muito restritiva, pois requer uma condição global de compatibilidade para os dados iniciais mesmo no caso de densidade constante. Em [10], Braz e Silva e

Rojas-Medar obtiveram estimativas de erro uniformes no tempo, para as soluções das equações de Navier-Stokes, supondo que a solução fosse estável em um certo sentido específico. Neste capítulo, iremos estender, para as equações dos fluidos micropolares dadas pelo sistema (2.1), os resultados obtidos em [10].

## 2.2 Conceito de estabilidade e resultado principal

Consideramos o problema (2.1) para todo tempo  $t \geq 0$ , e supomos que os dados do problema satisfazem as condições abaixo:

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \quad \mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \quad (2.3)$$

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1} < \infty ; \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}_t\| < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^1} < \infty ; \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{g}_t\| < \infty, \quad (2.4)$$

$$\rho_0 \in C^1(\bar{\Omega}) ; 0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty, \quad (2.5)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Além disso, também supomos que existem constantes  $M, \widetilde{M} > 0$  tais que a solução  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  de (2.1) satisfaz

$$\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.6)$$

$$\|\nabla \rho(\cdot, t)\|_{L^{p_0}} \leq \widetilde{M}, \quad \forall t \geq 0 \text{ e para algum } p_0 \in [6, \infty]. \quad (2.7)$$

A desigualdade (2.6) é válida quando  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{u}_0$  e  $\mathbf{w}_0$  são suficientemente pequenos (cf. [7]). Para um dado  $p_0$ ,  $6 \leq p_0 \leq \infty$ , também assumimos que  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  é  $p_0$ -condicionalmente assintoticamente estável (cf. a Definição 2.1 a seguir e veja as referências [10], [24] e [47] para noções similares de estabilidade). Para definir esta noção de estabilidade, necessitamos do estudo do comportamento de “soluções perturbadas” do sistema (2.1). Para isto, consideramos uma solução  $(\widehat{\rho}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{w}})$  do problema (2.1) começando no tempo inicial  $t_0 \geq 0$ , com valores iniciais  $\widehat{\mathbf{u}}_0, \widehat{\mathbf{w}}_0$  e  $\widehat{\rho}_0$  e com as mesmas forças externas  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ , ou seja,  $(\widehat{\rho}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{w}})$  satisfaz o seguinte sistema de equações em  $\Omega \times (t_0, \infty)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}_t + \hat{\rho}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} - (\mu + \mu_r) \Delta \hat{\mathbf{u}} + \nabla q = 2\mu_r \operatorname{rot} \hat{\mathbf{w}} + \hat{\rho} \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} = 0, \\ \hat{\rho} \hat{\mathbf{w}}_t + \hat{\rho}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{w}} - (c_a + c_d) \Delta \hat{\mathbf{w}} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla(\operatorname{div} \hat{\mathbf{w}}) + 4\mu_r \hat{\mathbf{w}} \\ \quad = 2\mu_r \operatorname{rot} \hat{\mathbf{u}} + \hat{\rho} \mathbf{g}, \\ \hat{\rho}_t + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\rho} = 0, \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \text{ sobre } \partial\Omega \times (t_0, \infty), \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t_0) = \hat{\mathbf{w}}_0(\mathbf{x}), \hat{\rho}(\mathbf{x}, t_0) = \hat{\rho}_0(\mathbf{x}) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Dizemos que o terno  $(\eta(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t))$ , definido para  $t \geq t_0 \geq 0$ , é uma *perturbação* de  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  no tempo  $t_0$  se o terno  $(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}) := (\rho + \eta, \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{w} + \boldsymbol{\zeta})$  for uma solução do sistema (2.8). Portanto, se escrevermos  $\boldsymbol{\xi}_0 := \boldsymbol{\xi}(\cdot, t_0)$ ,  $\boldsymbol{\zeta}_0 := \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t_0)$ ,  $\eta_0 := \eta(\cdot, t_0)$ , o terno  $(\hat{\rho}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})$  é uma solução do seguinte problema de valor de fronteira e inicial em  $\Omega \times (t_0, \infty)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho} \boldsymbol{\xi}_t + \hat{\rho}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + \hat{\rho}(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\rho}(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + \nabla \tilde{p} \\ \quad = (\mu + \mu_r) \Delta \boldsymbol{\xi} + (\rho - \hat{\rho})(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{f}) + 2\mu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\zeta}, \\ \hat{\rho} \boldsymbol{\zeta}_t + \hat{\rho}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta} + \hat{\rho}(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \hat{\rho}(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} + 4\mu_r \boldsymbol{\zeta} \\ \quad = (c_a + c_d) \Delta \boldsymbol{\zeta} + (\rho - \hat{\rho})(\mathbf{w}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \mathbf{g}) + 2\mu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi}, \\ \hat{\rho}_t + ((\boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}) \cdot \nabla) \hat{\rho} = 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0, \\ \boldsymbol{\xi}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\zeta}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t_0) = \boldsymbol{\xi}_0(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t_0) = \boldsymbol{\zeta}_0(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \hat{\rho}(\mathbf{x}, t_0) = \hat{\rho}_0(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, t_0) + \eta_0(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Agora, para um dado  $p_0$ ,  $6 \leq p_0 \leq \infty$ , definimos o conceito de solução  $p_0$ -condicionalmente assintoticamente estável.

**Definição 2.1.** Seja  $p_0 \in [6, \infty]$ . Uma solução  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  do problema (2.1) é dita  $p_0$ -condicionalmente assintoticamente estável se, para todo  $t_0 \geq 0$ , existir números positivos  $A_1, A_2, A_3, \delta_1, \delta_2, M_1, M_2, M_3$  e uma função  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , contínua decrescente, onde  $F(0) = 1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ , tais que, para todos  $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $\boldsymbol{\zeta}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $\eta_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p_0}(\Omega)$ , satisfazendo  $\|\nabla \boldsymbol{\xi}_0\| < \delta_1$ ,  $\|\nabla \boldsymbol{\zeta}_0\| < \delta_2$ ,

$\|A\xi_0\| < A_1$ ,  $\|B\zeta_0\| < A_2$ ,  $\|\eta_0\|_{L^\infty} < A_3$ , o problema (2.9) admitir uma única solução  $(\eta, \xi, \zeta)$ , com

$$\begin{aligned}\xi &\in L^2_{loc}([t_0, \infty); \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), \\ \zeta &\in L^2_{loc}([t_0, \infty); \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), \\ \xi_t, \zeta_t &\in L^2_{loc}([t_0, \infty); \mathbf{H}^1(\Omega)), \\ \eta &\in L^\infty([t_0, \infty); L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p_0}(\Omega)).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\|\nabla\eta(\cdot, t)\|_{L^{p_0}} \leq M_1, \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.10)$$

$$\|\nabla\xi(\cdot, t)\| \leq M_2\|\nabla\xi_0\|F(t-t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.11)$$

$$\|\nabla\zeta(\cdot, t)\| \leq M_3\|\nabla\zeta_0\|F(t-t_0), \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.12)$$

*Observação 2.1.* Usamos uma função geral  $F(t)$  na Definição 2.1 apenas para salientar que os resultados que aqui faremos não requerem uma taxa de decaimento exponencial.

A solução do problema (2.1) pode ser obtida através das aproximações semi-Galerkin espectrais, isto é, aproximações Galerkin espectrais

$$\mathbf{u}^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^k A_{ik}(t)\boldsymbol{\varphi}^i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w}^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^k B_{ik}(t)\boldsymbol{\phi}^i(\mathbf{x})$$

para as velocidades linear e angular de rotação das partículas do fluido, respectivamente, unicamente determinadas por

$$(\rho^k \mathbf{u}_t^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\mu + \mu_r)(\nabla \mathbf{u}^k, \nabla \boldsymbol{\nu}^k) \quad (2.13)$$

$$= 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{w}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{f}, \boldsymbol{\nu}^k), \quad t \geq 0,$$

$$(\rho^k \mathbf{w}_t^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{w}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (c_a + c_d)(\nabla \mathbf{w}^k, \nabla \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + 4\mu_r(\mathbf{w}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \quad (2.14)$$

$$+ (c_0 + c_d - c_a)(\text{div } \mathbf{w}^k, \text{div } \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho^k \mathbf{g}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k), \quad t \geq 0,$$

$$\mathbf{u}^k(\mathbf{x}, 0) = P_k \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{w}^k(\mathbf{x}, 0) = R_k \mathbf{w}_0(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

para todos  $\boldsymbol{\nu}^k$  e  $\bar{\boldsymbol{\nu}}^k$  da forma  $\boldsymbol{\nu}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_i \boldsymbol{\varphi}^i(\mathbf{x})$  e  $\bar{\boldsymbol{\nu}}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k d_i \boldsymbol{\phi}^i(\mathbf{x})$ , e uma aproximação em dimensão infinita  $\rho^k(\mathbf{x}, t)$  para a densidade, solução da equação de

continuidade

$$\begin{aligned}\rho_t^k + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \rho^k &= 0, \\ \rho^k(\cdot, 0) &= \rho_0(\cdot).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Pode-se provar que  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  converge em um sentido apropriado para  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ , solução do problema (2.1). O principal resultado deste capítulo é o seguinte

**Teorema 2.1.** *Suponha que  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  é  $p_0$ -condicionalmente assintoticamente estável, para algum  $p_0$ ,  $6 \leq p_0 \leq \infty$ . Então, existem constantes  $N \in \mathbb{N}$  e  $C \geq 0$ , tais que se  $k \geq N$  tem-se, para todo  $t \geq 0$ ,*

$$\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t) - \nabla \mathbf{w}^k(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}}.\tag{2.18}$$

Além disso, se  $6 \leq p_0 < \infty$ , então

$$\|\rho(\cdot, t) - \rho^k(\cdot, t)\|_{L^r} \leq \frac{Ct}{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{2}}} + \frac{Ct}{(\gamma_{k+1})^{\frac{1}{2}}}, \quad 2 \leq r \leq \frac{6p_0}{6 + p_0},\tag{2.19}$$

e se  $p_0 = \infty$ , então

$$\|\rho(\cdot, t) - \rho^k(\cdot, t)\|_{L^r} \leq \frac{Ct}{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{2}}} + \frac{Ct}{(\gamma_{k+1})^{\frac{1}{2}}}, \quad 2 \leq r \leq 6.\tag{2.20}$$

As constantes  $N$  e  $C$ , dependem apenas de  $\Omega$ , de  $\partial\Omega$ , das viscosidades, das normas dos dados em (2.3)-(2.4) e das constantes introduzidas em (2.5)-(2.7) e na Definição 2.1.

## 2.3 Estimativas a priori

Nesta seção, obteremos várias estimativas integrais, que dependerão somente dos limites de integração. Isto será suficiente para provarmos o Teorema 2.1.

Para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ , soluções do problema (2.1), e para as perturbações  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\zeta}$ , temos:

**Lema 2.1.** Para todo  $t \geq t_0 \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned} & (\mu + \mu_r) \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \frac{3(\mu + \mu_r)^2}{64\beta} \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^{10} + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & (c_a + c_d) \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + \frac{3(c_a + c_d)^2}{64\beta} \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \\ & + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + \frac{3(c_a + c_d)\mu_r}{2\beta} \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \\ & \leq C \left( \|\mathbf{g}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^8 \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & (\mu + \mu_r) \frac{d}{dt} \|\nabla \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + \frac{\alpha(\mu + \mu_r)^2}{24\beta^2} \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\xi}_t(\cdot, t)\|^2 \\ & \leq C \left( \|\nabla \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^8 + \|\nabla \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^{10} + \|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|^2 \right) \\ & + C \left( \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^{10} + \|\nabla \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & (c_a + c_d) \frac{d}{dt} \|\nabla \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + \frac{\alpha(c_a + c_d)^2}{24\beta^2} \|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 \\ & + \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, t)\|^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \|\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + \frac{2\mu_r\alpha(c_a + c_d)}{3\beta^2} \|\nabla \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 \\ & \leq C \left[ \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^8 \left( \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 \right) + \|\nabla \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^8 \|\nabla \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \right] \\ & + C \left[ \|\nabla \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 \left( \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + 1 \right) + \|\nabla \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{g}(\cdot, t)\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

**Demonstração.** Provaremos apenas a desigualdade (2.21), pois as demais desigualdades são provadas de formas completamente análogas. Para isto, fazemos o produto interno da primeira equação de (2.1) com  $\epsilon A\mathbf{u}$  (para algum  $\epsilon > 0$  a ser convenientemente escolhido) e depois com  $\mathbf{u}_t$ . Usando integração por partes, a fórmula de Green e os fatos que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  e  $(\nabla p, A\mathbf{u}) = 0$ , pois  $\nabla p \in \mathbf{H}^\perp$  e  $A\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ , obtemos, respectivamente

$$\epsilon(\mu + \mu_r) \|A\mathbf{u}\|^2 = -\epsilon(\rho \mathbf{u}_t, A\mathbf{u}) - \epsilon(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, A\mathbf{u}) + \epsilon(\rho \mathbf{f}, A\mathbf{u}) + 2\mu_r \epsilon(\operatorname{rot} \mathbf{w}, A\mathbf{u}) \quad (2.25)$$

e

$$\frac{\mu + \mu_r}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 = (\rho \mathbf{f}, \mathbf{u}_t) - (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \mathbf{u}_t). \quad (2.26)$$

Somando estas duas identidades, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\mu + \mu_r}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \epsilon(\mu + \mu_r) \|A\mathbf{u}\|^2 = -\epsilon(\rho \mathbf{u}_t, A\mathbf{u}) - \epsilon(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, A\mathbf{u}) \\ & + \epsilon(\rho \mathbf{f}, A\mathbf{u}) + 2\mu_r \epsilon(\operatorname{rot} \mathbf{w}, A\mathbf{u}) + (\rho \mathbf{f}, \mathbf{u}_t) - (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) + 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \mathbf{u}_t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Agora, estimaremos cada um dos termos do lado direito da identidade (2.27). Fazendo uso das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
|(\rho \mathbf{u}_t, A\mathbf{u})| &\leq \|A\mathbf{u}\| \|\rho \mathbf{u}_t\| = \sqrt{\mu + \mu_r} \|A\mathbf{u}\| \frac{1}{\sqrt{\mu + \mu_r}} \|\rho \mathbf{u}_t\| \\
&\leq \frac{3(\mu + \mu_r)}{16} \|A\mathbf{u}\|^2 + \frac{4\beta}{3(\mu + \mu_r)} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2, \\
|(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, A\mathbf{u})| &\leq \|A\mathbf{u}\| \|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\| \leq \sqrt{\mu + \mu_r} \|A\mathbf{u}\| \frac{\beta}{\sqrt{\mu + \mu_r}} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\| \\
&\leq \frac{3(\mu + \mu_r)}{16} \|A\mathbf{u}\|^2 + \frac{4\beta^2}{3(\mu + \mu_r)} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|^2, \\
|(\rho \mathbf{f}, A\mathbf{u})| &\leq \|A\mathbf{u}\| \|\rho \mathbf{f}\| \leq \|A\mathbf{u}\| \beta \|\mathbf{f}\| = \sqrt{\mu + \mu_r} \|A\mathbf{u}\| \frac{\beta}{\sqrt{\mu + \mu_r}} \|\mathbf{f}\| \\
&\leq \frac{3(\mu + \mu_r)}{16} \|A\mathbf{u}\|^2 + \frac{4\beta^2}{3(\mu + \mu_r)} \|\mathbf{f}\|^2, \\
|2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}, A\mathbf{u})| &\leq 2\mu_r \|A\mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{w}\| = \sqrt{\mu + \mu_r} \|A\mathbf{u}\| \frac{2\mu_r}{\sqrt{\mu + \mu_r}} \|\nabla \mathbf{w}\| \\
&\leq \frac{3(\mu + \mu_r)}{16} \|A\mathbf{u}\|^2 + \frac{16\mu_r^2}{3(\mu + \mu_r)} \|\nabla \mathbf{w}\|^2, \\
|(\rho \mathbf{f}, \mathbf{u}_t)| &= |(\sqrt{\rho} \mathbf{f}, \sqrt{\rho} \mathbf{u}_t)| \leq \|\sqrt{\rho} \mathbf{f}\| \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\| \leq \frac{1}{6} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{3}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{f}\|^2 \\
&\leq \frac{1}{6} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{3\beta}{2} \|\mathbf{f}\|^2, \\
|(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| &= |(\sqrt{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \sqrt{\rho} \mathbf{u}_t)| \leq \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\| \|\sqrt{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\| \\
&\leq \frac{1}{6} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{3}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|^2 \\
&\leq \frac{1}{6} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{3\beta}{2} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|^2, \\
|2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}, \mathbf{u}_t)| &= \left| 2\mu_r \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \operatorname{rot} \mathbf{w}, \sqrt{\rho} \mathbf{u}_t \right) \right| \leq 2\mu_r \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \operatorname{rot} \mathbf{w} \right\| \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\| \\
&\leq \frac{2\mu_r}{\sqrt{\alpha}} \|\nabla \mathbf{w}\| \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\| \\
&\leq \frac{1}{6} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{6\mu_r^2}{\alpha} \|\nabla \mathbf{w}\|^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando-se as desigualdades de Hölder, da interpolação e de Poincaré, juntamente com o fato que  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2}$  e  $\|A\mathbf{u}\|$  são normas equivalentes, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|^2 &\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4}^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4}^2 \leq \|\mathbf{u}\|^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^6}^{3/2} \|\nabla \mathbf{u}\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^6}^{3/2} \\
&\leq C \|\nabla \mathbf{u}\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|^{3/2} \|\nabla \mathbf{u}\|^{1/2} \|A\mathbf{u}\|^{3/2} \\
&= C \|\nabla \mathbf{u}\|^{5/2} \|A\mathbf{u}\|^{3/2}.
\end{aligned}$$

Substituindo as desigualdades acima na identidade (2.27), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu + \mu_r}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{4\epsilon\beta}{3(\mu + \mu_r)} \right) \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{\epsilon(\mu + \mu_r)}{4} \|A\mathbf{u}\|^2 \\
& \leq \left( \frac{3\beta}{2} + \frac{4\epsilon\beta^2}{3(\mu + \mu_r)} \right) \|\mathbf{f}\|^2 + \left( \frac{6\mu_r^2}{\alpha} + \frac{16\epsilon\mu_r^2}{3(\mu + \mu_r)} \right) \|\nabla \mathbf{w}\|^2 \\
& \quad + \left( \frac{3C\beta}{2} + \frac{4\epsilon\beta^2 C}{3(\mu + \mu_r)} \right) \|\nabla \mathbf{u}\|^{5/2} \|A\mathbf{u}\|^{3/2}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Escolhendo  $\epsilon = \frac{3(\mu + \mu_r)}{16\beta}$ , obtemos, da desigualdade (2.28) acima, que

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu + \mu_r}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{4} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{3(\mu + \mu_r)^2}{64\beta} \|A\mathbf{u}\|^2 \\
& \leq \frac{7\beta}{4} \|\mathbf{f}\|^2 + \frac{(\alpha + 6\beta)\mu_r^2}{\alpha\beta} \|\nabla \mathbf{w}\|^2 \\
& \quad + \frac{7\beta C}{4} \|\nabla \mathbf{u}\|^{5/2} \|A\mathbf{u}\|^{3/2}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Usando a desigualdade generalizada de Young (ver Lema 1.2), temos

$$\frac{7\beta C}{4} \|\nabla \mathbf{u}\|^{5/2} \|A\mathbf{u}\|^{3/2} \leq \delta(\mu + \mu_r) \|A\mathbf{u}\|^2 + C_\delta \left( \frac{7\beta C}{4} \right)^4 (\mu + \mu_r)^{-3} \|\nabla \mathbf{u}\|^{10}. \tag{2.30}$$

Substituindo esta última estimativa na desigualdade (2.29) com  $\delta = \frac{3(\mu + \mu_r)}{128\beta}$ , concluímos que

$$(\mu + \mu_r) \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{3(\mu + \mu_r)^2}{64\beta} \|A\mathbf{u}\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u}_t\|^2 \leq C(\|\mathbf{f}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^{10} + \|\nabla \mathbf{w}\|^2),$$

que é exatamente a desigualdade (2.21).  $\square$

**Corolário 2.1.** *Para todo  $t \geq t_0$ , temos que*

$$\int_{t_0}^t (\|A\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 + \|B\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \leq C + C(t - t_0), \tag{2.31}$$

$$\int_{t_0}^t (\|\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \leq C + C(t - t_0), \tag{2.32}$$

$$\int_{t_0}^t (\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, \tau)\|^2 + \|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \leq C + C(t - t_0), \tag{2.33}$$

$$\int_{t_0}^t (\|\boldsymbol{\xi}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \leq C + C(t - t_0). \tag{2.34}$$

Além disso, combinando as desigualdades (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34) com o Lema 1.6, obtemos

$$\sup_{t \geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} (\|\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau < \infty, \quad (2.35)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} (\|A\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 + \|B\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|^2) d\tau < \infty, \quad (2.36)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} (\|\xi_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\zeta_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau < \infty, \quad (2.37)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} (\|A\xi(\cdot, \tau)\|^2 + \|B\zeta(\cdot, \tau)\|^2) d\tau < \infty. \quad (2.38)$$

**Demonstração.** Integrando a desigualdade (2.21) de  $t_0$  a  $t$ , devido as hipóteses dadas em (2.4) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (\|A\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 + \|\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau &\leq C \int_{t_0}^t (\|\mathbf{f}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^{10} + \|\nabla \mathbf{w}\|^2) d\tau + C \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t_0)\|^2 \\ &\leq C(t - t_0) + C. \end{aligned}$$

Isto prova as primeiras estimativas em (2.31) e (2.32). As demais estimativas são provadas de forma extremamente análogas. Basta, para isto, integrar as desigualdades (2.22), (2.23) e (2.24) de  $t_0$  a  $t$  e usar, quando necessário, as estimativas  $\|\nabla \xi(\cdot, t)\| \leq M_2 \|\nabla \xi_0\|$ ,  $\|\nabla \zeta(\cdot, t)\| \leq M_3 \|\nabla \zeta_0\|$ ,  $\forall t \geq t_0$  e  $\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\| \leq M$ ,  $\forall t \geq 0$ .  $\square$

O lema abaixo estabelece algumas estimativas para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  que serão muito importantes no decorrer deste capítulo.

**Lema 2.2.** *Temos que*

$$\sup_{t \geq 0} (\|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2) < \infty, \quad (2.39)$$

$$\sup_{t \geq 0} (\|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2) < \infty, \quad (2.40)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} (\|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau < \infty. \quad (2.41)$$

**Demonstração.** Supondo que a desigualdade (2.39) é válida, iniciaremos com a prova da estimativa (2.40). Multiplicando a primeira equação de (2.1) por  $A\mathbf{u}$  em  $\mathbf{L}^2$ , obtemos

$$(\mu + \mu_r) \|A\mathbf{u}\|^2 = 2\mu_r (\text{rot } \mathbf{w}, A\mathbf{u}) + (\rho \mathbf{f}, A\mathbf{u}) - (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, A\mathbf{u}) - (\rho \mathbf{u}_t, A\mathbf{u}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\mu + \mu_r)\|\mathbf{A}\mathbf{u}\| &\leq 2\mu_r\|\nabla\mathbf{w}\| + \beta\|\mathbf{f}\| + \beta\|\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}\| + \beta\|\mathbf{u}_t\| \\
&\leq 2\mu_r\|\nabla\mathbf{w}\| + \beta\|\mathbf{f}\| + \beta\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4} + \beta\|\mathbf{u}_t\| \\
&\leq 2\mu_r\|\nabla\mathbf{w}\| + \beta\|\mathbf{f}\| + C\beta\|\nabla\mathbf{u}\|^{\frac{5}{4}}\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^{\frac{3}{4}} + \beta\|\mathbf{u}_t\| \\
&\leq 2\mu_r\|\nabla\mathbf{w}\| + \beta\|\mathbf{f}\| + C\|\nabla\mathbf{u}\|^5 + \frac{\mu + \mu_r}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{u}\| + \beta\|\mathbf{u}_t\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u}\| \leq C(\|\nabla\mathbf{w}\| + \|\mathbf{f}\| + \|\nabla\mathbf{u}\|^5 + \|\mathbf{u}_t\|). \quad (2.42)$$

Por (2.4), (2.6) e (2.39), segue da desigualdade (2.42) que

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{A}\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 < \infty. \quad (2.43)$$

Agora, notemos que como  $L = -(c_a + c_d)\Delta - (c_0 + c_d - c_a)\nabla\text{div}$  é um operador fortemente elíptico, segue que

$$(L\mathbf{w}, B\mathbf{w}) \geq (c_a + c_d)\|B\mathbf{w}\|^2 - N_0\|\nabla\mathbf{w}\|^2, \quad (2.44)$$

onde  $N_0$  depende apenas de  $c_a + c_d, c_0 + c_d - c_a$  e  $\partial\Omega$  (veja [33], página 70).

Analogamente a obtenção de (2.43), se multiplicarmos a terceira equação de (2.1) por  $B\mathbf{w}$  em  $\mathbf{L}^2$ , obteremos

$$\begin{aligned}
(L\mathbf{w}, B\mathbf{w}) &= 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}, B\mathbf{w}) + (\rho\mathbf{g}, B\mathbf{w}) - (\rho\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{w}, B\mathbf{w}) \\
&\quad - (\rho\mathbf{w}_t, B\mathbf{w}) - 4\mu_r(\mathbf{w}, B\mathbf{w}).
\end{aligned} \quad (2.45)$$

Logo, pela desigualdade (2.44), segue da identidade (2.45), que

$$\begin{aligned}
(c_a + c_d)\|B\mathbf{w}\|^2 &\leq N_0\|\nabla\mathbf{w}\|^2 + 4\mu_r^2 C_\epsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \beta^2 C_\epsilon\|\mathbf{g}\|^2 + 16\mu_r^2 C_\epsilon\|\mathbf{w}\|^2 \\
&\quad + \beta^2 C_\epsilon\|\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{w}\|^2 + \beta^2 C_\epsilon\|\mathbf{w}_t\|^2 + 5\epsilon\|B\mathbf{w}\|^2,
\end{aligned}$$

onde, para obtermos a desigualdade acima, usamos a desigualdade de Young. Uma vez que  $\|\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|\nabla\mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 \|\nabla\mathbf{w}\|^2$  e  $\|\mathbf{w}\|^2 \leq C\|\nabla\mathbf{w}\|^2$ , tomando  $\epsilon = \frac{c_a + c_d}{10}$ , obtemos

$$\|B\mathbf{w}\|^2 \leq C(\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2 + \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 \|\nabla\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w}_t\|^2). \quad (2.46)$$

De (2.4), (2.6), (2.39) e (2.43), temos que  $\sup_{t \geq 0} \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 < \infty$ . Este resultado, juntamente com (2.43), conclui a prova de (2.40). Agora, para provarmos (2.39) e (2.41), derivamos, com relação a  $t$ , ambos os lados da primeira e da terceira equações de (2.1) e multiplicamos, em  $\mathbf{L}^2$ , as equações resultantes por  $\mathbf{u}_t$  e  $\mathbf{w}_t$ , respectivamente, para obtermos

$$\begin{aligned} (\rho_t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + (\rho \mathbf{u}_{tt}, \mathbf{u}_t) + (\mu + \mu_r)(B\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) &= 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_t) + ((\rho \mathbf{f})_t, \mathbf{u}_t) \\ &\quad - ((\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_t, \mathbf{u}_t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\rho_t \mathbf{w}_t, \mathbf{w}_t) + (\rho \mathbf{w}_{tt}, \mathbf{w}_t) + (L\mathbf{w}_t, \mathbf{w}_t) + 4\mu_r(\mathbf{w}_t, \mathbf{w}_t) &= 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t) \\ &\quad + ((\rho \mathbf{g})_t, \mathbf{w}_t) - ((\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w})_t, \mathbf{w}_t). \end{aligned}$$

Usando a identidade

$$(\rho_t \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = -((\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = -(\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = 2(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}),$$

válida para todo  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  com  $\boldsymbol{\nu}_t \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , as duas identidades anteriores podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 &= -(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_t) \\ &\quad + ((\rho \mathbf{f})_t, \mathbf{u}_t) - ((\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_t, \mathbf{u}_t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho} \mathbf{w}_t\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}_t\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}_t\|^2 + 4\mu_r \|\mathbf{w}_t\|^2 \\ = -(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_t, \mathbf{w}_t) + 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t) + ((\rho \mathbf{g})_t, \mathbf{w}_t) - ((\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w})_t, \mathbf{w}_t). \end{aligned}$$

Somando estas identidades, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|^2 + \|\sqrt{\rho} \mathbf{w}_t\|^2) + (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}_t\|^2 \\ + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}_t\|^2 + 4\mu_r \|\mathbf{w}_t\|^2 = -(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) + 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_t) \\ + (\rho \mathbf{f}_t, \mathbf{u}_t) + (\rho_t \mathbf{f}, \mathbf{u}_t) - (\rho_t(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (\rho(\mathbf{u}_t \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) \\ - (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_t, \mathbf{w}_t) + 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t) + (\rho \mathbf{g}_t, \mathbf{w}_t) + (\rho_t \mathbf{g}, \mathbf{w}_t) \\ - (\rho_t(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \mathbf{w}_t) - (\rho(\mathbf{u}_t \cdot \nabla) \mathbf{w}, \mathbf{w}_t) - (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_t, \mathbf{w}_t). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Agora, estimaremos cada um dos termos do lado direito da identidade (2.47) como segue:

$$\begin{aligned}
|2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}_t, \mathbf{u}_t)| &\leq C \|\nabla \mathbf{w}_t\| \|\mathbf{u}_t\| \leq \frac{c_a + c_d}{2} \|\nabla \mathbf{w}_t\|^2 + \frac{C^2}{2(c_a + c_d)} \|\mathbf{u}_t\|^2, \\
|2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t)| &\leq C \|\nabla \mathbf{u}_t\| \|\mathbf{w}_t\| \leq \frac{\mu + \mu_r}{2} \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{C^2}{2(\mu + \mu_r)} \|\mathbf{w}_t\|^2, \\
|(\rho \mathbf{f}_t, \mathbf{u}_t)| &\leq \beta \|\mathbf{f}_t\| \|\mathbf{u}_t\| \leq \frac{\beta^2}{2} \|\mathbf{f}_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_t\|^2, \\
|(\rho \mathbf{g}_t, \mathbf{w}_t)| &\leq \beta \|\mathbf{g}_t\| \|\mathbf{w}_t\| \leq \frac{\beta^2}{2} \|\mathbf{g}_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_t\|^2, \\
|2(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t)| &\leq \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4} \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^4} \|\nabla \mathbf{u}_t\| \\
&\leq C\beta \|\nabla \mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_t\|^{\frac{1}{4}} \|\nabla \mathbf{u}_t\|^{\frac{3}{4}} \|\nabla \mathbf{u}_t\| \\
&= C\beta \|\nabla \mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_t\|^{\frac{1}{4}} \|\nabla \mathbf{u}_t\|^{\frac{7}{4}} \\
&\leq C_\delta (C\beta M)^8 \|\mathbf{u}_t\|^2 + \delta \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2, \\
|2(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_t, \mathbf{w}_t)| &\leq \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4} \|\mathbf{w}_t\|_{\mathbf{L}^4} \|\nabla \mathbf{w}_t\| \\
&\leq C\beta \|\nabla \mathbf{u}\| \|\mathbf{w}_t\|^{\frac{1}{4}} \|\nabla \mathbf{w}_t\|^{\frac{3}{4}} \|\nabla \mathbf{w}_t\| \\
&= C\beta \|\nabla \mathbf{u}\| \|\mathbf{w}_t\|^{\frac{1}{4}} \|\nabla \mathbf{w}_t\|^{\frac{7}{4}} \\
&\leq C_\epsilon (C\beta M)^8 \|\mathbf{w}_t\|^2 + \epsilon \|\nabla \mathbf{w}_t\|^2, \\
|(\rho_t \mathbf{f}, \mathbf{u}_t)| &= |-(\operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{f}, \mathbf{u}_t)| \\
&= |(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{f}, \mathbf{u}_t) + (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_t, \mathbf{f})| \\
&\leq \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{f}\| \|\nabla \mathbf{u}_t\| \\
&\leq C_\delta (C\beta M \|\nabla \mathbf{f}\|)^2 + \delta \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2, \\
|(\rho_t \mathbf{g}, \mathbf{w}_t)| &= |-(\operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{g}, \mathbf{w}_t)| \\
&= |(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{g}, \mathbf{w}_t) + (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_t, \mathbf{g})| \\
&\leq \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{g}\| \|\nabla \mathbf{w}_t\| \\
&\leq C_\epsilon (C\beta M \|\nabla \mathbf{g}\|)^2 + \epsilon \|\nabla \mathbf{w}_t\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\rho_t(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| &= |-(\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| \\
&\leq C\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{A}\mathbf{u}\| \|\nabla\mathbf{u}_t\| \\
&\leq C_\delta(C\beta M^2 \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|)^2 + \delta \|\nabla\mathbf{u}_t\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\rho_t(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}, \mathbf{w}_t)| &= |-(\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}, \mathbf{w}_t)| \\
&\leq C\|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{B}\mathbf{w}\| \|\nabla\mathbf{w}_t\| \\
&\leq C_\epsilon(C\beta M^2 \|\mathbf{B}\mathbf{w}\|)^2 + \epsilon \|\nabla\mathbf{w}_t\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\rho(\mathbf{u}_t \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| &\leq \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^4}^2 \|\nabla\mathbf{u}\| \leq C\beta \|\nabla\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}_t\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla\mathbf{u}_t\|^{\frac{3}{2}} \\
&\leq C_\delta(C\beta M \|\mathbf{u}_t\|^{\frac{1}{2}})^4 + \delta \|\nabla\mathbf{u}_t\|^2, \\
&\leq C_\delta C^4 \beta^4 M^4 \|\mathbf{u}_t\|^2 + \delta \|\nabla\mathbf{u}_t\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\rho(\mathbf{u}_t \cdot \nabla)\mathbf{w}, \mathbf{w}_t)| &\leq \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^4} \|\nabla\mathbf{w}\| \|\mathbf{w}_t\|_{\mathbf{L}^4} \leq C\beta \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^4} \|\nabla\mathbf{w}\| \|\nabla\mathbf{w}_t\| \\
&\leq C\beta \|\mathbf{u}_t\|^{\frac{1}{4}} \|\nabla\mathbf{u}_t\|^{\frac{3}{4}} \|\nabla\mathbf{w}\| \|\nabla\mathbf{w}_t\| \\
&\leq C_\epsilon C^2 \beta^2 \|\mathbf{u}_t\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla\mathbf{u}_t\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla\mathbf{w}\|^2 + \epsilon \|\nabla\mathbf{w}_t\|^2 \\
&\leq C_\delta (C_\epsilon^2 C^4 \beta^4 M^4 \|\mathbf{u}_t\|)^2 + \delta \|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + \epsilon \|\nabla\mathbf{w}_t\|^2.
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas acima na identidade (2.47), obtemos a seguinte desigualdade diferencial:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t\|^2 + \|\sqrt{\rho}\mathbf{w}_t\|^2) + (\mu + \mu_r) \|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla\mathbf{w}_t\|^2 \\
&\leq \left( (2 + C_\epsilon^4) C_\delta (C\beta M)^8 + C_\delta (C\beta M)^4 + \frac{C^2}{2(c_a + c_d)} + \frac{1}{2} \right) \|\mathbf{u}_t\|^2 \\
&\quad + \left( C_\epsilon (C\beta M)^8 + \frac{C^2}{2(\mu + \mu_r)} + \frac{1}{2} \right) \|\mathbf{w}_t\|^2 + \frac{\beta^2}{2} (\|\mathbf{f}_t\|^2 + \|\mathbf{g}_t\|^2) \\
&\quad + C_\delta (C\beta M \|\nabla\mathbf{f}\|)^2 + C_\epsilon (C\beta M \|\nabla\mathbf{g}\|)^2 + C_\delta C^2 \beta^2 M^4 \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 \\
&\quad + C_\epsilon C^2 \beta^2 M^4 \|\mathbf{B}\mathbf{w}\|^2 + \left( 5\delta + \frac{\mu + \mu_r}{2} \right) \|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + \left( 4\epsilon + \frac{c_a + c_d}{2} \right) \|\nabla\mathbf{w}_t\|^2.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Escolhendo  $\delta < \frac{\mu + \mu_r}{10}$ ,  $\epsilon < \frac{c_a + c_d}{8}$  e usando (2.4), concluimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} (\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t\|^2 + \|\sqrt{\rho}\mathbf{w}_t\|^2) + C_1 \|\nabla\mathbf{u}_t\|^2 + C_2 \|\nabla\mathbf{w}_t\|^2 \\
&\leq C + C \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|^2 + C \|\mathbf{B}\mathbf{w}\|^2 + C \|\mathbf{u}_t\|^2 + C \|\mathbf{w}_t\|^2,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes positivas que dependem somente de  $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $c_a$  e  $c_d$ . Agora, multiplicando a desigualdade (2.49) por  $e^t$  e integrando no tempo de 0 a  $t$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
& e^t (\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\sqrt{\rho}\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2) + \tilde{C} \int_0^t e^\tau (\|\nabla\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \\
& \leq \|\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t(\cdot, 0)\|^2 + \|\sqrt{\rho}\mathbf{w}_t(\cdot, 0)\|^2 + C \int_0^t e^\tau \|A\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& \quad + C \int_0^t e^\tau \|B\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + C \int_0^t e^\tau d\tau + (C + \beta) \int_0^t e^\tau \|\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& \quad + (C + \beta) \int_0^t e^\tau \|\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau,
\end{aligned}$$

onde  $\tilde{C} = \min\{C_1, C_2\}$ . Disto segue que

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\sqrt{\rho}\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 + \tilde{C} e^{-t} \int_0^t e^\tau (\|\nabla\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \\
& \leq e^{-t} \beta (\|\mathbf{u}_t(\cdot, 0)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, 0)\|^2) + C e^{-t} \int_0^t e^\tau \|A\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& \quad + C e^{-t} \int_0^t e^\tau \|B\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + C e^{-t} \int_0^t e^\tau d\tau + C e^{-t} \int_0^t e^\tau \|\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& \quad + C e^{-t} \int_0^t e^\tau \|\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Devido a desigualdade acima e as estimativas dadas em (2.35) e (2.36), nos resta estimar  $\|\mathbf{u}_t(\cdot, 0)\|^2$  e  $\|\mathbf{w}_t(\cdot, 0)\|^2$ , para obtermos o resultado desejado. Para isto, fazemos o produto interno da primeira equação de (2.1) com  $\mathbf{u}_t$  e da terceira equação de (2.1) com  $\mathbf{w}_t$ , para obtermos, respectivamente:

$$(\rho\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{u}_t) + (\rho\mathbf{f}, \mathbf{u}_t) - (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (\mu + \mu_r)(A\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)$$

e

$$\begin{aligned}
(\rho\mathbf{w}_t, \mathbf{w}_t) &= 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{w}_t) + (\rho\mathbf{g}, \mathbf{w}_t) + (c_0 + c_d - c_a)(\nabla \text{div } \mathbf{w}, \mathbf{w}_t) - 4\mu_r(\mathbf{w}, \mathbf{w}_t) \\
&\quad - (c_a + c_d)(B\mathbf{w}, \mathbf{w}_t) - (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}, \mathbf{w}_t).
\end{aligned}$$

Pelas hipóteses (2.3)-(2.6), as igualdades acima implicam que

$$\|\mathbf{u}_t(\cdot, 0)\| \leq \frac{2\mu_r}{\alpha} \|\nabla \mathbf{w}_0\| + \frac{\beta}{\alpha} \|\mathbf{f}(\cdot, 0)\| + \frac{C\beta}{\alpha} \|A\mathbf{u}_0\| \|\nabla \mathbf{u}_0\| + \frac{\mu + \mu_r}{\alpha} \|A\mathbf{u}_0\| \leq C$$

e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}_t(\cdot, 0)\| &\leq \frac{2\mu_r}{\alpha}\|\nabla\mathbf{u}_0\| + \frac{\beta}{\alpha}\|\mathbf{g}(\cdot, 0)\| + \frac{c_0 + c_d - c_a}{\alpha}\|\nabla\operatorname{div}\mathbf{w}_0\| + \frac{4\mu_r}{\alpha}\|\mathbf{w}_0\| \\ &\quad + \frac{c_a + c_d}{\alpha}\|B\mathbf{w}_0\| + \frac{C\beta}{\alpha}\|A\mathbf{u}_0\|\|\nabla\mathbf{w}_0\| \leq C,\end{aligned}$$

uma vez que  $\mathbf{H}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ . Isto conclui a demonstração do nosso lema.  $\square$

**Corolário 2.2.** *Para todos  $t_0, t \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq t_0 \leq t$ , temos que*

$$\int_{t_0}^t (\|\nabla\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \leq C(t - t_0) + C. \quad (2.50)$$

**Demonstração.** Integrando a desigualdade (2.49) de  $t_0$  a  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned}&\|\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\sqrt{\rho}\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 + \tilde{C} \int_{t_0}^t (\|\nabla\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \\ &\leq \|\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t(\cdot, t_0)\|^2 + \|\sqrt{\rho}\mathbf{w}_t(\cdot, t_0)\|^2 + C \int_{t_0}^t d\tau + C \int_{t_0}^t \|A\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\ &\quad + C \int_{t_0}^t \|B\mathbf{w}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + C \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + C \int_{t_0}^t \|\mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \|\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t(\cdot, t_0)\|^2 + \|\sqrt{\rho}\mathbf{w}_t(\cdot, t_0)\|^2 + C(t - t_0) + C(t - t_0) \left( \sup_{t \geq 0} \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \right) \\ &\quad + C(t - t_0) \left( \sup_{t \geq 0} \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \right) + C(t - t_0) \left( \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 \right) \\ &\quad + C(t - t_0) \left( \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 \right).\end{aligned}$$

Usando as desigualdades (2.39) e (2.40), obtemos a estimativa (2.50).  $\square$

Estimativas *a priori* para as soluções  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\zeta}$  do problema (2.9), semelhantes às do Lema 2.2 para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ , também são válidas. De fato, se  $\|\nabla\boldsymbol{\xi}_0\| < \delta_1$  e  $\|\nabla\boldsymbol{\zeta}_0\| < \delta_2$ , onde  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são números citados na Definição 2.1, então, segue de (2.11) e (2.12), que  $\|\nabla\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\| \leq \delta_1 M_2$  e  $\|\nabla\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\| \leq \delta_2 M_3$ , para todo  $t \geq t_0$ . Portanto, as funções  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi}$  e  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\zeta}$ , soluções do problema (2.8), satisfazem  $\|\nabla\hat{\mathbf{u}}\| \leq M + \delta_1 M_2$  e  $\|\nabla\hat{\mathbf{w}}\| \leq M + \delta_2 M_3$ , para todo  $t \geq t_0$ . Além disso, se  $\|A\boldsymbol{\xi}_0\| < A_1$  e  $\|B\boldsymbol{\zeta}_0\| < A_2$ , onde  $A_1$  e  $A_2$  também são números referidos na Definição 2.1, então  $\|A\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t_0)\|$  e  $\|B\hat{\mathbf{w}}(\cdot, t_0)\|$  são limitadas. Neste caso, analogamente à prova do Lema 2.2, pode-se estimar  $\|A\hat{\mathbf{u}}(\cdot, t)\|$  e  $\|B\hat{\mathbf{w}}(\cdot, t)\|$ , para  $t \geq t_0$ . Estas estimativas implicam que  $\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|$  e  $\|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|$  são limitadas para  $t \geq t_0$ . Em resumo, temos o seguinte

**Lema 2.3.** Para perturbações  $\xi$  e  $\zeta$ , soluções do sistema (2.9), satisfazendo  $\|\nabla \xi_0\| < \delta_1$ ,  $\|\nabla \zeta_0\| < \delta_2$ ,  $\|A\xi_0\| < A_1$  e  $\|B\zeta_0\| < A_2$ , temos que  $\|A\xi(\cdot, t)\| + \|B\zeta(\cdot, t)\| \leq C$ , para todo  $t \geq t_0$ .

Também temos o seguinte

**Lema 2.4.** As funções  $\xi$  e  $\zeta$  satisfazem

$$\int_{t_0}^t (\|\nabla \xi_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \zeta_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \leq C(t - t_0) + C, \quad (2.51)$$

para todos  $t_0, t$ ,  $0 \leq t_0 \leq t$ .

**Demonstração.** Note que

$$\begin{aligned} \|\nabla \xi_t(\cdot, t)\|^2 &= \|\nabla(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_t(\cdot, t)\|^2 = \|\nabla \hat{\mathbf{u}}_t(\cdot, t) - \nabla \mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 \\ &\leq (\|\nabla \hat{\mathbf{u}}_t(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, t)\|)^2 \leq 2(\|\nabla \hat{\mathbf{u}}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\nabla \zeta_t(\cdot, t)\|^2 &= \|\nabla(\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{w})_t(\cdot, t)\|^2 = \|\nabla \hat{\mathbf{w}}_t(\cdot, t) - \nabla \mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 \\ &\leq (\|\nabla \hat{\mathbf{w}}_t(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, t)\|)^2 \leq 2(\|\nabla \hat{\mathbf{w}}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t (\|\nabla \xi_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \zeta_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \\ &\leq 2 \int_{t_0}^t (\|\nabla \hat{\mathbf{u}}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \hat{\mathbf{w}}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau + 2 \int_{t_0}^t (\|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau. \end{aligned}$$

A segunda integral do lado direito da desigualdade acima é estimada no Corolário 2.2. Portanto, nos resta estimar  $\int_{t_0}^t (\|\nabla \hat{\mathbf{u}}_t(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \hat{\mathbf{w}}_t(\cdot, \tau)\|^2) d\tau$ . Mas, esta estimativa é feita de forma análoga ao da obtenção das estimativas para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ .  $\square$

Agora, sejam  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) \varphi^i(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(t) \phi^i(\mathbf{x})$  as expressões das soluções  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  do problema (2.1), em termos das autofunções do operador de Stokes  $A := -P\Delta$  e do operador de Laplace  $B := -\Delta$ , respectivamente. Considerando as projeções ortogonais  $P_k$  e  $R_k$ , definimos

$$\alpha^k := P_k \mathbf{u} = \sum_{i=1}^k A_i(t) \varphi^i(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \beta^k := R_k \mathbf{w} = \sum_{i=1}^k B_i(t) \phi^i(\mathbf{x}),$$

as  $k$ -ésimas somas parciais das séries de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ , respectivamente. Sejam  $\mathbf{E}^k = \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha}^k$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^k = \mathbf{w} - \boldsymbol{\beta}^k$ ,  $\boldsymbol{\eta}^k = \mathbf{u}^k - \boldsymbol{\alpha}^k$  e  $\mathbf{r}^k = \mathbf{w}^k - \boldsymbol{\beta}^k$ , onde  $\mathbf{u}^k$  e  $\mathbf{w}^k$  são as  $k$ -ésimas aproximações de Galerkin de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ , respectivamente. Inicialmente estimaremos  $\mathbf{E}^k$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^k$ .

**Lema 2.5.** *As estimativas*

$$\|\mathbf{E}^k(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{k+1}^2}, \quad \|\nabla \mathbf{E}^k(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{k+1}}, \quad (2.52)$$

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^k(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\gamma_{k+1}^2}, \quad \|\nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\gamma_{k+1}}, \quad (2.53)$$

são válidas para todo  $k \in \mathbb{N}$  e para todo  $t \geq 0$ .

**Demonstração.** Provaremos apenas as desigualdades que aparecem em (2.53), uma vez que estimativas dadas em (2.52) são provadas de maneiras similares. Estimamos,

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^k(\cdot, t)\|^2 = \|\mathbf{w}(\cdot, t) - R_k \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{1}{\gamma_{k+1}^2} \|L\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\gamma_{k+1}^2} \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\gamma_{k+1}^2},$$

onde na primeira desigualdade usamos o Lema 1.8, na segunda usamos o fato que  $\|L\mathbf{w}\|$  e  $\|B\mathbf{w}\|$  são normas equivalentes e na terceira desigualdade, usamos (2.40). Além disso, pela mesma justificativa anterior, temos

$$\begin{aligned} \|\nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k(\cdot, t)\|^2 &= \|\nabla (\mathbf{w} - R_k \mathbf{w})(\cdot, t)\|^2 \leq C \|L^{1/2} (\mathbf{w} - R_k \mathbf{w})(\cdot, t)\|^2 \\ &\leq \frac{C}{\gamma_{k+1}} \|L\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\gamma_{k+1}} \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\gamma_{k+1}}, \end{aligned}$$

como queríamos.  $\square$

A seguir, provaremos que estimativas apropriadas para  $\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|$  e  $\|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|$  implicarão em estimativas para  $\|A\boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|$  e  $\|B\mathbf{r}^k(\cdot, t)\|$ .

**Lema 2.6.** *Se existe constantes positivas  $K_1$  e  $K_2$  tais que a desigualdade  $\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}}$  é satisfeita em algum intervalo  $[0, t^*]$ , então existe  $C > 0$ , independente de  $k$ , tal que*

$$\|A\boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|^2 + \|B\mathbf{r}^k(\cdot, t)\|^2 \leq C, \quad (2.54)$$

para todo  $t \in [0, t^*]$ .

**Demonstração.** Como  $\boldsymbol{\eta}^k = \mathbf{u}^k - \boldsymbol{\alpha}^k$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{w}^k - \boldsymbol{\beta}^k$ ,  $\sup_{t \geq 0} \|A\boldsymbol{\alpha}^k(\cdot, t)\| \leq \sup_{t \geq 0} \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\| < \infty$  e  $\sup_{t \geq 0} \|B\boldsymbol{\beta}^k(\cdot, t)\| \leq \sup_{t \geq 0} \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\| < \infty$ , nos resta estimar  $\|A\mathbf{u}^k(\cdot, t)\|$  e  $\|B\mathbf{w}^k(\cdot, t)\|$ , pois

$$\|A\boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\| \leq \|A\mathbf{u}^k(\cdot, t)\| + \|A\boldsymbol{\alpha}^k(\cdot, t)\| \text{ e } \|B\mathbf{r}^k(\cdot, t)\| \leq \|B\mathbf{w}^k(\cdot, t)\| + \|B\boldsymbol{\beta}^k(\cdot, t)\|.$$

Observemos que, por hipótese,

$$(\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|)^2 \leq 2(\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|^2) \leq \frac{2K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{2K_2}{\gamma_{k+1}},$$

em  $[0, t^*]$ . Logo

$$\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\| \leq \left( \frac{2K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{2K_2}{\gamma_{k+1}} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ em } [0, t^*].$$

Como

$$\|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t)\| - \|\nabla \boldsymbol{\alpha}^k(\cdot, t)\| \leq \|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t) - \nabla \boldsymbol{\alpha}^k(\cdot, t)\| = \|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|$$

e

$$\|\nabla \mathbf{w}^k(\cdot, t)\| - \|\nabla \boldsymbol{\beta}^k(\cdot, t)\| \leq \|\nabla \mathbf{w}^k(\cdot, t) - \nabla \boldsymbol{\beta}^k(\cdot, t)\| = \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|,$$

temos que

$$\|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{w}^k(\cdot, t)\| \leq \left( \frac{2K_1}{\lambda_1} + \frac{2K_2}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{2}} + 2M, \quad (2.55)$$

em  $[0, t^*]$ , pois  $\lambda_1 \leq \lambda_{k+1}$ ,  $\gamma_1 \leq \gamma_{k+1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  e  $\|\nabla \boldsymbol{\alpha}^k(\cdot, t)\| \leq \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\| \leq M$ , bem como  $\|\nabla \boldsymbol{\beta}^k(\cdot, t)\| \leq \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\| \leq M$ . Também temos, para  $\mathbf{u}^k$  e  $\mathbf{w}^k$ , as estimativas

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (\|A\mathbf{u}^k(\cdot, \tau)\|^2 + \|B\mathbf{w}^k(\cdot, \tau)\|^2) d\tau &\leq C + C(t - t_0), \\ \int_{t_0}^t (\|\mathbf{u}_t^k(\cdot, \tau)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(\cdot, \tau)\|^2) d\tau &\leq C + C(t - t_0), \end{aligned}$$

que são análogas àquelas que aparecem em (2.31) e (2.32) para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ , e que podem ser provadas usando-se argumentos similares. Portanto, pelo Lema 1.6,

$$\sup_{t \geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} (\|\mathbf{u}_t^k(\cdot, \tau)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(\cdot, \tau)\|^2) d\tau < \infty, \quad (2.56)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} (\|A\mathbf{u}^k(\cdot, \tau)\|^2 + \|B\mathbf{w}^k(\cdot, \tau)\|^2) d\tau < \infty. \quad (2.57)$$

Usando estas estimativas, prova-se, de maneira completamente análoga a (2.49), que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k\|^2 + \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k\|^2 \right) + C_1 \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 + C_2 \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2 \\ & \leq C + C \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|^2 + C \|\mathbf{B} \mathbf{w}^k\|^2 + C \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + C \|\mathbf{w}_t^k\|^2, \end{aligned} \quad (2.58)$$

para todo  $t \in [0, t^*]$ . Observe que restringimos o intervalo de tempo na estimativa (2.58). Isso deve-se ao fato da constante  $C$  depender também do  $\sup_{t \geq 0} \|\nabla \mathbf{u}^k\|$ ,  $\sup_{t \geq 0} \|\nabla \mathbf{w}^k\|$ , e só podemos garantir a estimativa deste termo, uniformemente com respeito à  $k$ , no intervalo  $[0, t^*]$ .

Multiplicando a desigualdade (2.58) por  $e^t$  e integrando de 0 a  $t$ , obtemos, depois de multiplicarmos a desigualdade resultante por  $e^{-t}$ , a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k(\cdot, t)\|^2 + \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k(\cdot, t)\|^2 + \tilde{C} e^{-t} \int_0^t e^\tau (\|\nabla \mathbf{u}_t^k(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t^k(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \\ & \leq e^{-t} \beta (\|\mathbf{u}_t^k(\cdot, 0)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(\cdot, 0)\|^2) + C e^{-t} \int_0^t e^\tau \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\ & \quad + C e^{-t} \int_0^t e^\tau \|\mathbf{B} \mathbf{w}^k(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + C e^{-t} \int_0^t e^\tau d\tau + (C + \beta) e^{-t} \int_0^t e^\tau \|\mathbf{u}_t^k(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\ & \quad + (C + \beta) e^{-t} \int_0^t e^\tau \|\mathbf{w}_t^k(\cdot, \tau)\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Logo, devido a (2.56) e (2.57), temos que

$$\|\mathbf{u}_t^k(\cdot, t)\| + \|\mathbf{w}_t^k(\cdot, t)\| \leq C, \quad (2.59)$$

para todo  $t \in [0, t^*]$ . Tal como na demonstração do Lema 2.2, pode-se mostrar que

$$\|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\| \leq C (\|\nabla \mathbf{w}^k\| + \|\mathbf{f}\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^5 + \|\mathbf{u}_t^k\|) \text{ e} \quad (2.60)$$

$$\|\mathbf{B} \mathbf{w}^k\|^2 \leq C (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2 + \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|^2 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k\|^2). \quad (2.61)$$

Por (2.4), (2.55) e (2.59), segue, de (2.60), que

$$\|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\| \leq C, \quad (2.62)$$

para todo  $t \in [0, t^*]$ . Agora, por (2.4), (2.55), (2.59) e (2.62), segue, de (2.61), que

$$\|\mathbf{B} \mathbf{w}^k\| \leq C, \quad (2.63)$$

para todo  $t \in [0, t^*]$ . Isto finaliza a demonstração do lema.  $\square$

Agora, estimaremos, para uso futuro, os termos  $\nabla P_k(\boldsymbol{\eta}^k - \boldsymbol{\xi}) = \nabla \boldsymbol{\eta}^k - \nabla P_k \boldsymbol{\xi}$  e  $\nabla R_k(\mathbf{r}^k - \boldsymbol{\zeta}) = \nabla \mathbf{r}^k - \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}$  (note que  $\boldsymbol{\eta}^k \in \mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{r}^k \in \mathbf{W}_k$ ). Para isto, notemos que  $\boldsymbol{\alpha}^k$  e  $\boldsymbol{\beta}^k$  satisfazem, respectivamente, as seguintes equações

$$\begin{aligned} (\rho \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\mu + \mu_r)(\nabla \boldsymbol{\alpha}^k, \nabla \boldsymbol{\nu}^k) = \\ = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho \mathbf{f}, \boldsymbol{\nu}^k), \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} (\rho \mathbf{w}_t, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (c_a + c_d)(\nabla \boldsymbol{\beta}^k, \nabla \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + 4\mu_r(\boldsymbol{\beta}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\ + (c_0 + c_d - c_a)(\text{div } \boldsymbol{\beta}^k, \text{div } \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho \mathbf{g}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k), \end{aligned} \quad (2.65)$$

para todos  $\boldsymbol{\nu}^k$  e  $\bar{\boldsymbol{\nu}}^k$  da forma  $\boldsymbol{\nu}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_i \boldsymbol{\varphi}^i(\mathbf{x})$  e  $\bar{\boldsymbol{\nu}}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k d_i \boldsymbol{\phi}^i(\mathbf{x})$ . Subtraindo a equação (2.13) da equação (2.64) e a equação (2.14) da equação (2.65), obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned} (\rho^k \boldsymbol{\eta}_t^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\mu + \mu_r)(\nabla \boldsymbol{\eta}^k, \nabla \boldsymbol{\nu}^k) &= (\rho^k \mathbf{E}_t^k, \boldsymbol{\nu}^k) + ((\rho - \rho^k)(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f}), \boldsymbol{\nu}^k) \\ &+ (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k, \boldsymbol{\nu}^k) \\ &+ 2\mu_r(\text{rot } (\mathbf{r}^k - \boldsymbol{\varepsilon}^k), \boldsymbol{\nu}^k) \end{aligned} \quad (2.66)$$

e

$$\begin{aligned} (\rho^k \mathbf{r}_t^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (c_a + c_d)(\nabla \mathbf{r}^k, \nabla \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (c_0 + c_d - c_a)(\text{div } \mathbf{r}^k, \text{div } \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + 4\mu_r(\mathbf{r}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\ = (\rho^k \boldsymbol{\varepsilon}_t^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + ((\rho - \rho^k)(\mathbf{w}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \mathbf{g}), \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\ - (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{w}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + 2\mu_r(\text{rot } (\boldsymbol{\eta}^k - \mathbf{E}^k), \bar{\boldsymbol{\nu}}^k). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Por outro lado, fazendo o produto interno da primeira equação de (2.9) com  $\boldsymbol{\nu}^k$  e da segunda equação de (2.9) com  $\bar{\boldsymbol{\nu}}^k$ , obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned} (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\mu + \mu_r)(\nabla \boldsymbol{\xi}, \nabla \boldsymbol{\nu}^k) \\ = ((\rho - \widehat{\rho})(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f}), \boldsymbol{\nu}^k) + 2\mu_r(\text{rot } \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\nu}^k) \end{aligned} \quad (2.68)$$

e

$$\begin{aligned} (\widehat{\rho} \boldsymbol{\zeta}_t, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\ + (c_0 + c_d - c_a)(\text{div } \boldsymbol{\zeta}, \text{div } \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + 4\mu_r(\boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (c_a + c_d)(\nabla \boldsymbol{\zeta}, \nabla \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\ = ((\rho - \widehat{\rho})(\mathbf{w}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \mathbf{g}), \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + 2\mu_r(\text{rot } \boldsymbol{\xi}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Subtraindo a equação (2.68) da equação (2.66) e a equação (2.69) da equação (2.67), obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned}
& (\rho^k \boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\nu}^k) + (\mu + \mu_r)(\nabla \boldsymbol{\theta}, \nabla \boldsymbol{\nu}^k) \\
&= ((\widehat{\rho} - \rho^k)(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f}), \boldsymbol{\nu}^k) + ((\widehat{\rho} - \rho^k) \boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{E}_t^k, \boldsymbol{\nu}^k) \\
&\quad + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) \\
&\quad + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + 2\mu_r(\operatorname{rot}(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varepsilon}^k), \boldsymbol{\nu}^k)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

e

$$\begin{aligned}
& (\rho^k \boldsymbol{\psi}_t, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (c_a + c_d)(\nabla \boldsymbol{\psi}, \nabla \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + 4\mu_r(\boldsymbol{\psi}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (c_0 + c_d - c_a)(\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}, \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\
&= ((\widehat{\rho} - \rho^k)(\mathbf{w}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \mathbf{g}), \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + ((\widehat{\rho} - \rho^k) \boldsymbol{\zeta}_t, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho^k \boldsymbol{\varepsilon}_t^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\
&\quad - (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{w}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\
&\quad + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + 2\mu_r(\operatorname{rot}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}^k), \bar{\boldsymbol{\nu}}^k),
\end{aligned} \tag{2.71}$$

onde  $\boldsymbol{\theta} := \boldsymbol{\eta}^k - \boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\psi} := \mathbf{r}^k - \boldsymbol{\zeta}$ . Uma vez que  $P_k \boldsymbol{\theta} = P_k(\boldsymbol{\eta}^k - \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta}^k - P_k \boldsymbol{\xi}$ , temos que

$$\begin{aligned}
& (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k, \boldsymbol{\nu}^k) = (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla \mathbf{E}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^k, \boldsymbol{\nu}^k) \\
&\quad + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{E}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\alpha}^k, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) \\
&\quad - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k).
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Além disso, como  $\boldsymbol{\xi} = P \boldsymbol{\xi} = P_k \boldsymbol{\xi} + Q_k \boldsymbol{\xi}$ , temos que

$$\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} + \widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, \tag{2.73}$$

$$\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} = \widehat{\rho} P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \widehat{\rho} Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}. \tag{2.74}$$

Também temos que

$$\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} = \rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} + \rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, \tag{2.75}$$

$$\rho^k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} + \rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} + \rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi} + \rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}. \tag{2.76}$$

Logo, de (2.75) e (2.76), concluimos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} &= \rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} - \rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} + \rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi} + \rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} \\
&\quad + \rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi} + (\widehat{\rho} - \rho^k) \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Portanto, a partir das identidades (2.72), (2.73), (2.74) e (2.77), obtemos

$$\begin{aligned}
& (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) = \\
& (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla \mathbf{E}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{E}^k, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\alpha}^k, \boldsymbol{\nu}^k) \quad (2.78) \\
& - (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) + ((\widehat{\rho} - \rho^k) \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + ((\widehat{\rho} - \rho^k) P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) \\
& + (\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\widehat{\rho} Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}^k) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) \\
& + (\rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + (\rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k) + ((\widehat{\rho} - \rho^k) \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}^k).
\end{aligned}$$

Como  $P_k \boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\eta}_t^k - P_k \boldsymbol{\xi}_t$  e  $P_k \boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{\xi}_t - Q_k \boldsymbol{\xi}_t$ , temos que  $P_k \boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_t + Q_k \boldsymbol{\xi}_t$ . A partir disto, combinando as identidades (2.70) e (2.78) e tomando  $\boldsymbol{\nu}^k = P_k \boldsymbol{\theta}_t$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho^k} \boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{\mu + \mu_r}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2 = \quad (2.79) \\
& ((\widehat{\rho} - \rho^k)(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} + \boldsymbol{\xi}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} + P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}), P_k \boldsymbol{\theta}_t) - (\rho^k \boldsymbol{\theta}_t, Q_k \boldsymbol{\xi}_t) \\
& + (\rho^k \mathbf{E}_t^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t) + (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla \mathbf{E}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t) + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{E}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t) \\
& + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\alpha}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t) - (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\theta}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) + (\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) \\
& + (\widehat{\rho} Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) - (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\theta}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) + (\rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) \\
& + (\rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) + (\rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t) + 2\mu_r (\text{rot}(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varepsilon}^k), P_k \boldsymbol{\theta}_t).
\end{aligned}$$

Agora, faremos uma conta similar para obtermos uma equação para  $\boldsymbol{\psi}$ . Usando o fato que  $R_k \boldsymbol{\psi} = R_k(\mathbf{r}^k - \boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{r}^k - R_k \boldsymbol{\zeta}$  e  $P_k \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\eta}^k - P_k \boldsymbol{\xi}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) - (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{w}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) = (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \mathbf{r}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\
& + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\beta}^k, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) - (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\psi}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) - (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) \\
& - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) - (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\psi}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k) - (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}, \bar{\boldsymbol{\nu}}^k).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\boldsymbol{\zeta} = R\boldsymbol{\zeta} = R_k \boldsymbol{\zeta} + S_k \boldsymbol{\zeta}$ , a partir da identidade acima, se procedermos de forma similar a obtenção de (2.78), encontraremos

$$\begin{aligned}
& (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\nu}^k) - (\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{w}^k, \bar{\nu}^k) + (\hat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta, \bar{\nu}^k) + (\hat{\rho} \xi \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\nu}^k) + (\hat{\rho} \xi \cdot \nabla \zeta, \bar{\nu}^k) = \\
& (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla \varepsilon^k, \bar{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \mathbf{r}^k, \bar{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon^k, \bar{\nu}^k) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \beta^k, \bar{\nu}^k) \\
& - (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla R_k \psi, \bar{\nu}^k) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\nu}^k) + ((\hat{\rho} - \rho^k) \mathbf{u} \cdot \nabla R_k \zeta, \bar{\nu}^k) + ((\hat{\rho} - \rho^k) P_k \xi \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\nu}^k) \\
& + (\hat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla S_k \zeta, \bar{\nu}^k) + (\hat{\rho} Q_k \xi \cdot \nabla \mathbf{w}, \bar{\nu}^k) - (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla R_k \psi, \bar{\nu}^k) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla R_k \zeta, \bar{\nu}^k) \\
& + (\rho^k P_k \xi \cdot \nabla S_k \zeta, \bar{\nu}^k) + (\rho^k Q_k \xi \cdot \nabla R_k \zeta, \bar{\nu}^k) + (\rho^k Q_k \xi \cdot \nabla S_k \zeta, \bar{\nu}^k) + ((\hat{\rho} - \rho^k) \xi \cdot \nabla \zeta, \bar{\nu}^k).
\end{aligned}$$

Combinando a identidade acima com (2.71) e tomando  $\bar{\nu}^k = R_k \psi_t$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho^k} \psi_t\|^2 + \frac{c_a + c_d}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla R_k \psi\|^2 + 2\mu_r \frac{d}{dt} \|R_k \psi\|^2 + \frac{c_0 + c_d - c_a}{2} \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} R_k \psi\|^2 = \quad (2.80) \\
& ((\hat{\rho} - \rho^k)(\mathbf{w}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \mathbf{g} + \zeta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla R_k \zeta + P_k \xi \cdot \nabla \mathbf{w} + \xi \cdot \nabla \zeta), R_k \psi_t) - (\rho^k \psi_t, S_k \zeta_t) \\
& + (\rho^k \varepsilon_t^k, R_k \psi_t) + (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla \varepsilon^k, R_k \psi_t) + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \mathbf{r}^k, R_k \psi_t) + (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon^k, R_k \psi_t) \\
& + (\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \beta^k, R_k \psi_t) - (\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla R_k \psi, R_k \psi_t) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathbf{w}, R_k \psi_t) + (\hat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla S_k \zeta, R_k \psi_t) \\
& + (\hat{\rho} Q_k \xi \cdot \nabla \mathbf{w}, R_k \psi_t) - (\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla R_k \psi, R_k \psi_t) - (\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla R_k \zeta, R_k \psi_t) + (\rho^k P_k \xi \cdot \nabla S_k \zeta, R_k \psi_t) \\
& + (\rho^k Q_k \xi \cdot \nabla R_k \zeta, R_k \psi_t) + (\rho^k Q_k \xi \cdot \nabla S_k \zeta, R_k \psi_t) + 2\mu_r (\operatorname{rot}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}^k), R_k \psi_t).
\end{aligned}$$

A partir deste momento, vamos estimar cada termo do lado direito da identidade (2.79).

Como  $P_k$  é projeção ortogonal,  $\|P_k \boldsymbol{\theta}_t\| \leq \|\boldsymbol{\theta}_t\|$ . Usando as desigualdades de Hölder, Sobolev, Young e os Lemas 1.8, 2.2 e 2.5, obtemos, para todo  $\epsilon > 0$ , as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
|(\rho^k \boldsymbol{\theta}_t, Q_k \xi_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|\nabla \xi_t\|^2, \\
|(\rho^k \mathbf{E}_t^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2, \\
|(\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla \mathbf{E}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A \boldsymbol{\eta}^k\|^2, \\
|(\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A \boldsymbol{\eta}^k\|^2, \\
|(\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{E}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}}, \\
|(\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\alpha}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}}, \\
|(\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\theta}, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + C(\epsilon) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2, \\
|(\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + C(\epsilon) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2, \\
|(\hat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla Q_k \xi, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| & \leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A \xi\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\widehat{\rho} Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| &\leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A \boldsymbol{\xi}\|^2, \\
|(\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\theta}, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| &\leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + C(\epsilon) \|A \boldsymbol{\eta}^k\|^2 \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2, \\
|(\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| &\leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + C(\epsilon) \|A \boldsymbol{\xi}\|^2 \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2, \\
|(\rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| &\leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A \boldsymbol{\xi}\|^4, \\
|(\rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| &\leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A \boldsymbol{\xi}\|^4, \\
|(\rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla Q_k \boldsymbol{\xi}, P_k \boldsymbol{\theta}_t)| &\leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A \boldsymbol{\xi}\|^4, \\
|2\mu_r(\operatorname{rot}(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varepsilon}^k), P_k \boldsymbol{\theta}_t)| &\leq \epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + C(\epsilon) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\gamma_{k+1}} \|B \boldsymbol{\zeta}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\gamma_{k+1}},
\end{aligned}$$

uma vez que  $\mathbf{H}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ . Vale ressaltar que na última desigualdade usamos a identidade  $\boldsymbol{\psi} = R_k \boldsymbol{\psi} - S_k \boldsymbol{\zeta}$ . Agora, estimaremos cada termo do lado direito da identidade (2.80). Como  $R_k$  é projeção ortogonal,  $\|R_k \boldsymbol{\psi}_t\| \leq \|\boldsymbol{\psi}_t\|$ . Similarmente a obtenção das desigualdades acima, temos que para todo  $\delta > 0$ , as seguintes estimativas são válidas:

$$\begin{aligned}
|(\rho^k \boldsymbol{\psi}_t, S_k \boldsymbol{\zeta}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|\nabla \boldsymbol{\zeta}_t\|^2, \\
|(\rho^k \boldsymbol{\varepsilon}_t^k, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|\nabla \mathbf{w}_t\|^2, \\
|(\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|A \boldsymbol{\eta}^k\|^2, \\
|(\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \mathbf{r}^k, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}} \|B \mathbf{r}^k\|^2, \\
|(\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}}, \\
|(\rho^k \mathbf{E}^k \cdot \nabla \boldsymbol{\beta}^k, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}}, \\
|(\rho^k \mathbf{u} \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\psi}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + C(\delta) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}\|^2, \\
|(\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \mathbf{w}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + C(\delta) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2, \\
|(\widehat{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla S_k \boldsymbol{\zeta}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|B \boldsymbol{\zeta}\|^2, \\
|(\widehat{\rho} Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{w}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}} \|A \boldsymbol{\xi}\|^2, \\
|(\rho^k \boldsymbol{\eta}^k \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\psi}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + C(\delta) \|A \boldsymbol{\eta}^k\|^2 \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}\|^2, \\
|(\rho^k P_k \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + C(\delta) \|B \boldsymbol{\zeta}\|^2 \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2, \\
|(\rho^k P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla S_k \boldsymbol{\zeta}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|A \boldsymbol{\xi}\|^2 \|B \boldsymbol{\zeta}\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}} \|A\boldsymbol{\xi}\|^2 \|B\boldsymbol{\zeta}\|^2, \\
|(\rho^k Q_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla S_k \boldsymbol{\zeta}, R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}} \|A\boldsymbol{\xi}\|^2 \|B\boldsymbol{\zeta}\|^2, \\
|2\mu_r(\operatorname{rot}(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}^k), R_k \boldsymbol{\psi}_t)| &\leq \delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + C(\delta) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}} \|A\boldsymbol{\xi}\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a identidade  $\boldsymbol{\theta} = P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi}$ . Observando as identidades (2.79) e (2.80), vemos que resta estimar  $|(\pi \mathbf{h}^k, P_k \boldsymbol{\theta}_t)|$  e  $|(\pi \tilde{\mathbf{h}}^k, R_k \boldsymbol{\psi}_t)|$ , onde

$$\begin{aligned}
\pi &:= \hat{\rho} - \rho^k, \\
\mathbf{h}^k &:= \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} + \boldsymbol{\xi}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi} + P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}, \\
\tilde{\mathbf{h}}^k &:= \mathbf{w}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \mathbf{g} + \boldsymbol{\zeta}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\zeta} + P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{w} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned}$$

Começaremos estimando  $\mathbf{h}^k$  e  $\tilde{\mathbf{h}}^k$ .

**Lema 2.7.** *Para todo  $p$ ,  $2 \leq p \leq 6$ , a estimativa de erro*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{h}^k(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 &\leq C + C\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + C\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^4 \\
&\quad + C\|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + C\|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot, t)\|^2
\end{aligned} \tag{2.81}$$

é válida para todo  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Demonstração.** Fazendo uso da hipótese (2.4), do Lema 2.2 e da desigualdade de Sobolev  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1}$ , válida para todo  $p \in [2, 6]$  e  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{h}^k(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 &\leq C \{ \|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\boldsymbol{\xi}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 \\
&\quad + \|\mathbf{u} \cdot \nabla P_k \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 \} \\
&\leq C \{ \|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^4 + \|\nabla \mathbf{f}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot, t)\|^2 \\
&\quad + \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^4 \} \\
&\leq C + C\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + C\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^4 + C\|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + C\|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot, t)\|^2,
\end{aligned}$$

uma vez que  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1}$  e  $\|\nabla \mathbf{v}\|$  são normas equivalentes em  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .  $\square$

**Lema 2.8.** *Para todo  $p$ ,  $2 \leq p \leq 6$ , a estimativa*

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{h}}^k(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 &\leq C + C\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + C\|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + C\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 \|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 \\
&\quad + C\|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 + C\|\nabla \boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, t)\|^2
\end{aligned} \tag{2.82}$$

é válida para todo  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Demonstração.** Como  $2 \leq p \leq 6$ , analogamente a prova do Lema 2.7, temos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{h}}^k(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 &\leq C \left\{ \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\mathbf{g}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\mathbf{u} \cdot \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|P_k \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p}^2 \right\} \\
&\leq C \left\{ \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 + \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{g}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, t)\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2 + \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 \|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 \right\} \\
&\leq C + C\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + C\|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 + C\|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 \|B\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t)\|^2 \\
&\quad + C\|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2 + C\|\nabla \boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, t)\|^2,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

No próximo lema, estimaremos  $\pi := \hat{\rho} - \rho^k$ .

**Lema 2.9.** *Se  $6 \leq p_0 < \infty$ , então a estimativa*

$$\begin{aligned}
\|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^2 &\leq C\|\pi(\cdot, t_0)\|_{L^r}^2 + C(t - t_0) \int_{t_0}^t \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
&\quad + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0)^2 + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0) \int_{t_0}^t \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \quad (2.83)
\end{aligned}$$

é válida para todo  $t \geq t_0 \geq 0$  e todo  $r$ ,  $2 \leq r \leq \frac{6p_0}{6+p_0}$ . Se  $p_0 = \infty$ , então a estimativa (2.83) é válida para todo  $t \geq t_0 \geq 0$  e todo  $r$ ,  $2 \leq r \leq 6$ .

**Demonstração.** Como  $\hat{\rho}_t + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\rho} = 0$ , temos que

$$\hat{\rho}_t + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \hat{\rho} = (\mathbf{u}^k - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \hat{\rho}.$$

Também sabemos que

$$\rho_t^k + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \rho^k = 0.$$

Destas duas equações, obtemos

$$\pi_t + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \pi = (\mathbf{u}^k - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \hat{\rho}. \quad (2.84)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^k - \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}^k - (\mathbf{u} + \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}) - \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\eta}^k - \mathbf{E}^k) - \boldsymbol{\xi} \\
&= (\boldsymbol{\eta}^k - \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{E}^k = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}^k = P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k.
\end{aligned}$$

Substituindo a identidade acima em (2.84), obtemos

$$\pi_t + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \pi = (P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k) \cdot \nabla \widehat{\rho}. \quad (2.85)$$

Seja  $r \geq 2$  um número real pertencente a um determinado intervalo que depende do valor de  $p_0$ . Multiplicando a equação (2.85) por  $|\pi|^{r-1}$ , integrando sobre  $\Omega$ , usando integração por partes e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^r &= - \int_{\Omega} \mathbf{u}^k \cdot \nabla \pi |\pi|^{r-1} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k) \cdot \nabla \widehat{\rho} |\pi|^{r-1} d\mathbf{x} \\ &= - \frac{1}{r} \int_{\Omega} \mathbf{u}^k \cdot \nabla |\pi|^r d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k) \cdot \nabla \widehat{\rho} |\pi|^{r-1} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{r} \int_{\Omega} |\pi|^r \operatorname{div} \mathbf{u}^k d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k) \cdot \nabla \widehat{\rho} |\pi|^{r-1} d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\Omega} |(P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k) \cdot \nabla \widehat{\rho}| |\pi|^{r-1} d\mathbf{x} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |(P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k) \cdot \nabla \widehat{\rho}|^r d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_{\Omega} |\pi|^r d\mathbf{x} \right)^{\frac{r-1}{r}} \\ &= \|(P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k) \cdot \nabla \widehat{\rho}\|_{L^r} \|\pi\|_{L^r}^{r-1}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^r = \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^{r-1} \frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}$ , novamente pela desigualdade de Hölder, temos

$$\frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r} \leq \|(P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k) \cdot \nabla \widehat{\rho}\|_{L^r} \leq \|P_k \boldsymbol{\theta} - Q_k \boldsymbol{\xi} - \mathbf{E}^k\|_{\mathbf{L}^p} \|\nabla \widehat{\rho}\|_{L^{p_0}},$$

onde  $p$  é escolhido de tal forma que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p_0}$  se  $6 \leq p_0 < \infty$ , e  $p = r$  se  $p_0 = \infty$ . Note que no caso em que  $6 \leq p_0 < \infty$ , esta escolha de  $p$  implica que  $2 < \frac{2p_0}{p_0 - 2} \leq p \leq 6$ . Já no caso  $p_0 = \infty$ , temos  $2 \leq p \leq 6$ . Logo, em ambos os casos,  $p \in [2, 6]$ . Usando a desigualdade de Sobolev  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1}$ , válida para todo  $p \in [2, 6]$  e  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , lembrando que  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1}$  e  $\|\nabla \mathbf{v}\|$  são normas equivalentes em  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , obtemos, a partir do Lema 1.8 e da desigualdade (2.52), a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r} &\leq C (\|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t)\| + \|\nabla Q_k \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{E}^k(\cdot, t)\|) \\ &\leq C \left( \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t)\| + \frac{\|A \boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|}{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{2}}} \right), \end{aligned}$$

uma vez que  $\|\nabla \widehat{\rho}\|_{L^{p_0}} \leq \widetilde{M} + M_1, \forall t \geq t_0$ , devido as hipóteses (2.7) e (2.10). Integrando a desigualdade acima de  $t_0$  a  $t$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^2 &\leq 2\|\pi(\cdot, t_0)\|_{L^r}^2 + C \left\{ \left( \int_{t_0}^t \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, \tau)\| d\tau \right)^2 + \left( \int_{t_0}^t \frac{1}{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{2}}} d\tau \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( \int_{t_0}^t \frac{1}{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{2}}} \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, \tau)\| d\tau \right)^2 \right\} \\
&\leq C\|\pi(\cdot, t_0)\|_{L^r}^2 + C \left\{ (t - t_0) \int_{t_0}^t \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{\lambda_{k+1}} (t - t_0)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda_{k+1}} (t - t_0) \int_{t_0}^t \|A\boldsymbol{\xi}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \right\},
\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos a desigualdade de Schwarz (observe que  $C \geq 2$ ).  $\square$

Devido a todas estas estimativas, se voltarmos às desigualdades (2.79) e (2.80), obteremos, respectivamente

$$\begin{aligned}
\alpha \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{\mu + \mu_r}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2 &\leq 17\epsilon \|\boldsymbol{\theta}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|\nabla \boldsymbol{\xi}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|\nabla \mathbf{u}_t\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A\boldsymbol{\eta}^k\|^2 \\
&\quad + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A\boldsymbol{\xi}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\lambda_{k+1}} \|A\boldsymbol{\xi}\|^4 + C(\epsilon) \|\pi\|_{L^r}^2 \|\mathbf{h}^k\|_{\mathbf{L}^p}^2 \\
&\quad + C(\epsilon) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2 \{1 + \|A\boldsymbol{\eta}^k\|^2 + \|A\boldsymbol{\xi}\|^2\} \\
&\quad + C(\epsilon) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\gamma_{k+1}} \|B\boldsymbol{\zeta}\|^2 + \frac{C(\epsilon)}{\gamma_{k+1}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 &+ \frac{c_a + c_d}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}\|^2 + 2\mu_r \frac{d}{dt} \|R_k \boldsymbol{\psi}\|^2 + \frac{c_0 + c_d - c_a}{2} \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}\|^2 \\
&\leq 17\delta \|\boldsymbol{\psi}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|\nabla \boldsymbol{\zeta}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|\nabla \mathbf{w}_t\|^2 + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|A\boldsymbol{\eta}^k\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}} \|B\mathbf{r}^k\|^2 \\
&\quad + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}} + \frac{C(\delta)}{\gamma_{k+1}} \|B\boldsymbol{\zeta}\|^2 + \frac{C(\delta)}{\lambda_{k+1}} \|A\boldsymbol{\xi}\|^2 + C(\delta) \|A\boldsymbol{\xi}\|^2 \|B\boldsymbol{\zeta}\|^2 \left( \frac{1}{\gamma_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right) \\
&\quad + C(\delta) \|\pi\|_{L^r}^2 \|\tilde{\mathbf{h}}^k\|_{\mathbf{L}^p}^2 + C(\delta) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}\|^2 \{1 + \|A\boldsymbol{\eta}^k\|^2\} + C(\delta) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}\|^2 \{1 + \|B\boldsymbol{\zeta}\|^2\},
\end{aligned}$$

onde, no caso  $6 \leq p_0 < \infty$ , as desigualdades acima são válidas para cada  $r \in \left[3, \frac{6p_0}{6+p_0}\right]$ , com  $p \in \left[\frac{3p_0}{p_0-3}, 6\right]$  escolhidos de tal forma que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ . Já no caso  $p_0 = \infty$ , estas desigualdades são válidas para todo  $r \in [3, 6]$ , com  $p \in [3, 6]$  escolhidos de tal forma que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ . Agora, escolha  $\epsilon = \delta \in \left(0, \frac{\alpha}{17}\right)$ . Integrando as desigualdades acima de  $t_0$  a  $t$  e usando os Lemas 2.3, 2.5 e 2.6, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
& (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t)\|^2 + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\theta}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t_0)\|^2 \\
& + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\gamma_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\lambda_{k+1}} \int_{t_0}^t \|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \frac{C}{\lambda_{k+1}} \int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& + C \int_{t_0}^t \|\pi(\cdot, \tau)\|_{L^r}^2 \|\mathbf{h}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 d\tau + C \int_{t_0}^t (\|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, \tau)\|^2) d\tau \quad (2.86)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\psi}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& \leq (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 \\
& + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\gamma_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\gamma_{k+1}} \int_{t_0}^t \|\nabla \boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \frac{C}{\gamma_{k+1}} \int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& + C \int_{t_0}^t \|\pi(\cdot, \tau)\|_{L^r}^2 \|\tilde{\mathbf{h}}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 d\tau + C \int_{t_0}^t \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + C \int_{t_0}^t \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau, \quad (2.87)
\end{aligned}$$

onde  $c > 0$  é uma constante que depende apenas de  $\alpha$ . Somando as desigualdades (2.83), (2.86) e (2.87) e usando o Lema 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
& (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 \\
& + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^2 + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\theta}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\psi}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& \leq (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t_0)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 \\
& + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + C \|\pi(\cdot, t_0)\|_{L^r}^2 \\
& + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\gamma_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0)^2 + \frac{C}{\lambda_{k+1}} \int_{t_0}^t \|\nabla \boldsymbol{\xi}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& + \frac{C}{\gamma_{k+1}} \int_{t_0}^t \|\nabla \boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \frac{C}{\lambda_{k+1}} \int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + \frac{C}{\gamma_{k+1}} \int_{t_0}^t \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& + C \int_{t_0}^t \|\pi(\cdot, \tau)\|_{L^r}^2 \left( \|\mathbf{h}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\tilde{\mathbf{h}}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 \right) d\tau + C \int_{t_0}^t \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& + C \int_{t_0}^t \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + C(t - t_0) \int_{t_0}^t \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau. \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Fixe  $\bar{t} > t_0$ . Usando o Corolário 2.2 e o Lema 2.4, concluimos que

$$\begin{aligned}
& (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 \\
& + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^2 + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\theta}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\psi}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& \leq (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t_0)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 \\
& + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + C \|\pi(\cdot, t_0)\|_{L^r}^2 \\
& + \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}} + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\gamma_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0)^2 \\
& + C \int_{t_0}^t \|\pi(\cdot, \tau)\|_{L^r}^2 \left( \|\mathbf{h}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\tilde{\mathbf{h}}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 \right) d\tau + C \int_{t_0}^t \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& + C \int_{t_0}^t \{1 + (\bar{t} - t_0)\} \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau, \tag{2.89}
\end{aligned}$$

para todo  $t \in [t_0, \bar{t}]$ . Seja

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &:= (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 \\
&+ (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^2 + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\theta}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\psi}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Como  $C \geq 2$  (veja o final da demonstração do Lema 2.9), podemos reescrever a desigualdade (2.89) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &\leq C\Lambda(t_0) + \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}} + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\gamma_{k+1}}(t - t_0) \\
&+ \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0)^2 + C \int_{t_0}^t \left\{ 1 + \bar{t} - t_0 + \|\mathbf{h}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\tilde{\mathbf{h}}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 \right\} \Lambda(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando um corolário do Lema de Gronwall (ver [3], página 90, Corolário 6.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &\leq \left( C\Lambda(t_0) + \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}} + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0) + \frac{C}{\gamma_{k+1}}(t - t_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{C}{\lambda_{k+1}}(t - t_0)^2 \right) \exp \left\{ C \int_{t_0}^t \left( 1 + \bar{t} - t_0 + \|\mathbf{h}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\tilde{\mathbf{h}}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 \right) d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Resumimos estes resultados no seguinte

**Lema 2.10.** *Suponha que a desigualdade  $\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}}$  é válida para constantes  $K_1$  e  $K_2 > 0$  e todo  $t$  em um dado intervalo de tempo  $0 \leq t_0 \leq t \leq \bar{t}$ . Sejam  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\zeta}$  soluções do problema (2.9), e considere as funções  $\pi$ ,  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\mathbf{h}^k$ ,  $\tilde{\mathbf{h}}^k$  definidas anteriormente. Se  $6 \leq p_0 < \infty$ , então, para todo  $t \in [t_0, \bar{t}]$ , temos*

$$\begin{aligned}
& (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 \\
& + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t)\|^2 + \|\pi(\cdot, t)\|_{L^r}^2 + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\theta}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + c \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{\psi}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\
& \leq C [(\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t_0)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 \\
& + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + \|\pi(\cdot, t_0)\|_{L^r}^2 + \frac{1}{\lambda_{k+1}} + \frac{1}{\gamma_{k+1}} \\
& + \frac{1}{\lambda_{k+1}}(t - t_0) + \frac{1}{\gamma_{k+1}}(t - t_0) + \frac{1}{\lambda_{k+1}}(t - t_0)^2] \exp \left\{ C \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right\}, \tag{2.90}
\end{aligned}$$

para todo  $r \in \left[3, \frac{6p_0}{6+p_0}\right]$  e  $p \in \left[\frac{3p_0}{p_0-3}, 6\right]$  escolhidos de forma que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ , onde  $a(t) := 1 + \bar{t} - t_0 + \|\mathbf{h}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2 + \|\tilde{\mathbf{h}}^k(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^p}^2$ . Se  $p_0 = \infty$ , então a estimativa (2.90) é válida para todo  $r \in [3, 6]$  e  $p \in [3, 6]$  tais que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ .

*Observação 2.2.* Pelas desigualdades (2.50), (2.51), (2.81), (2.82) e pelo Lema 2.3, temos que

$$\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \leq C + C(t - t_0) + C(\bar{t} - t_0)(t - t_0),$$

pois  $C \geq 2$ . Portanto,

$$\exp \left\{ C \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right\} \leq \exp \{ C + C(t - t_0) + C(\bar{t} - t_0)(t - t_0) \}. \tag{2.91}$$

Agora, provaremos que as estimativas para  $\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k\|^2$  e  $\|\nabla \mathbf{r}^k\|^2$  exigidas nos Lemas 2.6 e 2.10 são válidas para  $k$  suficientemente grande.

**Proposição 2.1.** *Existem  $K_1, K_2 > 0$  e  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $k \geq N$ , então  $\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|^2 < \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}}$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Demonstração.** Escolha  $T \in [0, \infty)$  tal que  $(M_2^2 + M_3^2) [F(T)]^2 \leq \frac{1}{4}$ , onde  $M_2, M_3$  e  $F(t)$  são tais como na Definição 2.1. Considere os números reais positivos  $m, K_1$  e  $K_2$  dados por

$$\begin{aligned}
m &:= \min\{\mu + \mu_r, c_a + c_d\}, \\
K_1 &:= \frac{8C}{m}(1 + T + T^2) \exp\{C + CT + CT^2\}, \\
K_2 &:= \frac{8C}{m}(1 + T) \exp\{C + CT + CT^2\}.
\end{aligned}$$

Seja  $N \in \mathbb{N}$  (suficientemente grande) tal que, para todo  $k \geq N$ ,

$$\left( \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}} \right)^{\frac{1}{2}} < \delta,$$

onde  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$  e  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são números positivos citados na Definição 2.1. Sobre essas condições, para  $k \geq N$ , temos

$$\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|^2 < \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.92)$$

De fato, se a desigualdade (2.92) for falsa para algum  $k \geq N$ , existe (pelo menos um)  $\tilde{t} \geq 0$  tal que

$$\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, \tilde{t})\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, \tilde{t})\|^2 \geq \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}}. \quad (2.93)$$

Seja  $t^*$  o menor valor de  $t$  que satisfaz a desigualdade (2.93). Observe que, de fato,  $t^*$  existe, pois o conjunto de todos os  $t$ 's que satisfazem (2.93) é fechado e limitado inferiormente. Pode ocorrer que  $t^* \leq T$  ou que  $t^* > T$ . Se  $t^* \leq T$ , considere  $t_0 = 0$ ,  $\bar{t} = t^*$ ,  $\boldsymbol{\xi} = 0$ ,  $\boldsymbol{\zeta} = 0$  e  $\eta = 0$ . Neste caso, temos que  $P_k \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\eta}^k$ ,  $R_k \boldsymbol{\psi} = \mathbf{r}^k$  e  $\pi = \rho - \rho^k$ , pois  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\eta}^k$ ,  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{r}^k$  e  $\hat{\rho} = \rho$ . Além disso,  $\boldsymbol{\eta}^k(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^k(\mathbf{x}, 0) - P_k \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}^k(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}^k(\mathbf{x}, 0) - R_k \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$  e  $\pi(\mathbf{x}, 0) = \rho(\mathbf{x}, 0) - \rho^k(\mathbf{x}, 0) = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_r) \|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, 0)\|^2 &+ (c_a + c_d) \|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, 0)\|^2 + 4\mu_r \|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, 0)\|^2 \\ &+ (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, 0)\|^2 + \|\pi(\cdot, 0)\|_{L^r}^2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, como  $0 < t^* \leq T$ , temos, pelo Lema 2.10 e pela desigualdade (2.91), que

$$\begin{aligned} &(\mu + \mu_r) \|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t^*)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t^*)\|^2 + 4\mu_r \|\mathbf{r}^k(\cdot, t^*)\|^2 \\ &+ (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{r}^k(\cdot, t^*)\|^2 + \|\pi(\cdot, t^*)\|_{L^r}^2 + c \int_0^{t^*} \|\boldsymbol{\eta}_t^k(\cdot, \tau)\|^2 d\tau + c \int_0^{t^*} \|\mathbf{r}_t^k(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \left( \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}} + \frac{C}{\lambda_{k+1}} T + \frac{C}{\gamma_{k+1}} T + \frac{C}{\lambda_{k+1}} T^2 \right) \exp\{C + CT + CT^2\}. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima, concluimos que

$$\begin{aligned} &\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t^*)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t^*)\|^2 \\ &\leq \left( \frac{C}{m \lambda_{k+1}} + \frac{C}{m \gamma_{k+1}} + \frac{C}{m \lambda_{k+1}} T + \frac{C}{m \gamma_{k+1}} T + \frac{C}{m \lambda_{k+1}} T^2 \right) \exp\{C + CT + CT^2\} \\ &= \frac{K_1}{8\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{8\gamma_{k+1}} < \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}}, \end{aligned}$$

o que contradiz a escolha de  $t^*$ . Por outro lado, se  $t^* > T$ , considere  $\bar{t} = t^*$ ,  $t_0 = t^* - T$  e  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t)$  e  $\eta(\mathbf{x}, t)$  satisfazendo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t_0) &= \boldsymbol{\eta}^k(\mathbf{x}, t_0), \\ \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{r}^k(\mathbf{x}, t_0), \\ \eta(\mathbf{x}, t_0) &= \rho^k(\mathbf{x}, t_0) - \rho(\mathbf{x}, t_0).\end{aligned}$$

Com essas escolhas, temos que  $\theta(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0}$ ,  $\psi(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0}$  e  $\pi(\mathbf{x}, t_0) = 0$ , pois  $\widehat{\rho}(\mathbf{x}, t_0) = \rho^k(\mathbf{x}, t_0)$ , para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Logo,

$$\begin{aligned}(\mu + \mu_r)\|\nabla P_k \boldsymbol{\theta}(\cdot, t_0)\|^2 &+ (c_a + c_d)\|\nabla R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + 4\mu_r\|R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 \\ &+ (c_0 + c_d - c_a)\|\operatorname{div} R_k \boldsymbol{\psi}(\cdot, t_0)\|^2 + \|\pi(\cdot, t_0)\|_{L^r}^2 = 0.\end{aligned}$$

Lembremos que  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\eta}^k - \boldsymbol{\xi}$ ,  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{r}^k - \boldsymbol{\zeta}$  e  $\pi = \eta + \rho - \rho^k$ , pois  $\widehat{\rho} = \rho + \eta$  e  $\pi = \widehat{\rho} - \rho^k$ . Usando o Lema 2.10 e a desigualdade (2.91), obtemos

$$\begin{aligned}&(\mu + \mu_r)\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t^*) - \nabla P_k \boldsymbol{\xi}(\cdot, t^*)\|^2 + (c_a + c_d)\|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t^*) - \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t^*)\|^2 \\ &+ 4\mu_r\|\mathbf{r}^k(\cdot, t^*) - R_k \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t^*)\|^2 + (c_0 + c_d - c_a)\|\operatorname{div} \mathbf{r}^k(\cdot, t^*) - \operatorname{div} R_k \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t^*)\|^2 \\ &+ \|\rho(\cdot, t^*) - \rho^k(\cdot, t^*) + \eta(\cdot, t^*)\|_{L^r}^2 + c \int_{t^*-T}^{t^*} \|\boldsymbol{\eta}_t^k(\cdot, \tau) - \boldsymbol{\xi}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\ &+ c \int_{t^*-T}^{t^*} \|\mathbf{r}_t^k(\cdot, \tau) - \boldsymbol{\zeta}_t(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \\ &\leq \left( \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}} + \frac{C}{\lambda_{k+1}}T + \frac{C}{\gamma_{k+1}}T + \frac{C}{\lambda_{k+1}}T^2 \right) \exp\{C + CT + CT^2\},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t^*) - \nabla P_k \boldsymbol{\xi}(\cdot, t^*)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t^*) - \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t^*)\|^2 \\ &\leq \left( \frac{C}{m \lambda_{k+1}} + \frac{C}{m \gamma_{k+1}} + \frac{C}{m \lambda_{k+1}}T + \frac{C}{m \gamma_{k+1}}T + \frac{C}{m \lambda_{k+1}}T^2 \right) \exp\{C + CT + CT^2\} \\ &= \frac{K_1}{8\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{8\gamma_{k+1}}.\end{aligned}$$

Portanto, segue da desigualdade triangular, da desigualdade acima, de (2.11) e (2.12) e da nossa escolha de  $T$ , que

$$\begin{aligned}
& \|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t^*)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t^*)\|^2 \\
& \leq 2 \left( \|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t^*) - \nabla P_k \boldsymbol{\xi}(\cdot, t^*)\|^2 + \|\nabla P_k \boldsymbol{\xi}(\cdot, t^*)\|^2 \right) \\
& \quad + 2 \left( \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t^*) - \nabla R_k \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t^*)\|^2 + \|\nabla R_k \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t^*)\|^2 \right) \\
& \leq 2 \left( \frac{K_1}{8\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{8\gamma_{k+1}} + M_2^2 \|\nabla \boldsymbol{\xi}(\cdot, t_0)\|^2 F(T)^2 + M_3^2 \|\nabla \boldsymbol{\zeta}(\cdot, t_0)\|^2 F(T)^2 \right) \\
& \leq 2 \left( \frac{K_1}{8\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{8\gamma_{k+1}} + \frac{1}{4} \|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t_0)\|^2 + \frac{1}{4} \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t_0)\|^2 \right) \\
& < 2 \left( \frac{K_1}{8\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{8\gamma_{k+1}} + \frac{K_1}{4\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{4\gamma_{k+1}} \right) = \frac{3}{4} \left( \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}} \right) \\
& < \frac{K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{K_2}{\gamma_{k+1}},
\end{aligned}$$

uma vez que  $\boldsymbol{\xi}(\cdot, t_0) = \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t_0)$  e  $\boldsymbol{\zeta}(\cdot, t_0) = \mathbf{r}^k(\cdot, t_0)$ . Isto novamente contradiz a escolha de  $t^*$ . Observe que a penúltima desigualdade é válida porque  $t_0 = t^* - T < t^*$ . Logo, para  $k \geq N$ , a desigualdade (2.92) é verdadeira. Isto conclui a prova da proposição.  $\square$

## 2.4 Prova do Teorema 2.1

Usando as estimativas (2.52), (2.53) e (2.92), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t)\|^2 &= \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}^k)(\cdot, t)\|^2 = \|\nabla(\mathbf{E}^k - \boldsymbol{\eta}^k)(\cdot, t)\|^2 \\
&= \|\nabla \mathbf{E}^k(\cdot, t) - \nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|^2 \\
&\leq (\|\nabla \mathbf{E}^k(\cdot, t)\| + \|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|)^2 \\
&\leq 2 (\|\nabla \mathbf{E}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \boldsymbol{\eta}^k(\cdot, t)\|^2) \\
&\leq \frac{2C}{\lambda_{k+1}} + \frac{2K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{2K_2}{\gamma_{k+1}} \\
&\leq \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t) - \nabla \mathbf{w}^k(\cdot, t)\|^2 &= \|\nabla(\mathbf{w} - \mathbf{w}^k)(\cdot, t)\|^2 = \|\nabla(\boldsymbol{\varepsilon}^k - \mathbf{r}^k)(\cdot, t)\|^2 \\
&= \|\nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k(\cdot, t) - \nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|^2 \\
&\leq (\|\nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k(\cdot, t)\| + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|)^2 \\
&\leq 2(\|\nabla \boldsymbol{\varepsilon}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{r}^k(\cdot, t)\|^2) \\
&\leq \frac{2C}{\gamma_{k+1}} + \frac{2K_1}{\lambda_{k+1}} + \frac{2K_2}{\gamma_{k+1}} \\
&\leq \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t) - \nabla \mathbf{w}^k(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}}, \quad (2.94)$$

que é a estimativa (2.18) do Teorema 2.1. Por outro lado, para provarmos as estimativas (2.19) e (2.20) para a densidade, notemos, inicialmente, que

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (2.95)$$

$$\rho_t^k + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \rho^k = 0. \quad (2.96)$$

Subtraindo a equação (2.96) da equação (2.95), obtemos

$$(\rho - \rho^k)_t + \mathbf{u}^k \cdot \nabla(\rho - \rho^k) = (\mathbf{u}^k - \mathbf{u}) \cdot \nabla \rho. \quad (2.97)$$

Agora, se  $6 \leq p_0 < \infty$ , seja  $r \in \left[2, \frac{6p_0}{6+p_0}\right]$ . Escolhamos  $p \in \left[\frac{2p_0}{p_0-2}, 6\right]$  tal que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_0}$ . Multiplicando a equação (2.97) por  $|\rho - \rho^k|^{r-1}$ , integrando sobre  $\Omega$  e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \|\rho - \rho^k\|_{L^r}^r &\leq \int_{\Omega} |\rho - \rho^k|^{r-1} |(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}) \cdot \nabla \rho| \, d\mathbf{x} \\
&\leq \|\rho - \rho^k\|_{L^r}^{r-1} \|(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}) \cdot \nabla \rho\|_{L^r} \\
&\leq \|\rho - \rho^k\|_{L^r}^{r-1} \|\nabla \rho\|_{L^{p_0}} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}\|_{L^p},
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^k \cdot \nabla(\rho - \rho^k) |\rho - \rho^k|^{r-1} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{r} \int_{\Omega} \mathbf{u}^k \cdot \nabla |\rho - \rho^k|^r \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{r} \int_{\Omega} |\rho - \rho^k|^r \operatorname{div} \mathbf{u}^k \, d\mathbf{x} = 0.$$

Logo, segue da desigualdade acima e da hipótese (2.7), que

$$\frac{d}{dt} \|\rho - \rho^k\|_{L^r} \leq \widetilde{M} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}\|_{L^p},$$

pois  $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \|\rho - \rho^k\|_{L^r}^r = \|\rho - \rho^k\|_{L^r}^{r-1} \frac{d}{dt} \|\rho - \rho^k\|_{L^r}$ . Se  $p_0 = \infty$ , a estimativa acima é válida para todo  $r \in [2, 6]$  e  $p = r$ . Como, em ambos os casos,  $p \in [2, 6]$ , usando a desigualdade de Sobolev  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p} \leq C\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1}$ , válida para todo  $p \in [2, 6]$  e  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \|\rho(\cdot, t) - \rho^k(\cdot, t)\|_{L^r} \leq \widetilde{M} \|\mathbf{u}^k(\cdot, t) - \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t) - \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|, \quad (2.98)$$

pois  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1}$  e  $\|\nabla \mathbf{v}\|$  são normas equivalentes em  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Integrando a desigualdade (2.98) de 0 à  $t$ , segue, da estimativa (2.94), que

$$\begin{aligned} \|\rho(\cdot, t) - \rho^k(\cdot, t)\|_{L^r} &\leq C \left( \frac{C}{\lambda_{k+1}} + \frac{C}{\gamma_{k+1}} \right)^{\frac{1}{2}} t + \|\rho(\cdot, 0) - \rho^k(\cdot, 0)\|_{L^r} \\ &\leq \left[ \frac{C}{(\lambda_{k+1})^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{(\gamma_{k+1})^{\frac{1}{2}}} \right] t, \end{aligned} \quad (2.99)$$

pois  $\rho^k(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x})$ . Isto finaliza a prova do Teorema 2.1.  $\square$

# Capítulo 3

## Sobre o limite de viscosidade nula

Provaremos que quando as viscosidades tendem a zero, a solução do problema de Cauchy para o sistema de um fluido não-homogêneo, viscoso, incompressível e assimétrico em  $\mathbb{R}^3$  converge para a solução do sistema de um fluido não-homogêneo, não-viscoso, incompressível e assimétrico (no âmbito do espaço  $L^2$ ). Resultado análogo foi provado por S. Itoh em [26] no contexto  $L^2$  e por S. Itoh e A. Tani no contexto  $L^p$  ( $p > 3$ ) em [27] para as equações não-homogêneas de Navier-Stokes. Em [9], os autores estendem os resultados de S. Itoh e A. Tani ao modelo considerado neste capítulo (também no contexto  $L^p$ ,  $p > 3$ ).

### 3.1 Introdução e resultado principal

Estudaremos o problema de Cauchy (1)-(2) em  $\mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ ,  $T > 0$ . Mais precisamente, consideraremos o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} + \rho \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \rho \mathbf{w}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{w}) + 4\mu_r \mathbf{w} \\ \quad = (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

em  $\mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ ,  $T > 0$ , sujeito as condições iniciais

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.2)$$

Queremos estudar “o limite invíscido” para o sistema (3.1)-(3.2), ou seja, estamos preocupados com a transição do sistema viscoso a um sistema não-viscoso.

Para simplificar a notação, escreveremos:

$$\bar{\mu} := \mu + \mu_r, \quad \nu_1 := c_a + c_d \quad \text{e} \quad \nu_2 := c_0 + c_d - c_a.$$

Quando  $\bar{\mu} = \nu_1 = \nu_2 = 0$ , o sistema (3.1) torna-se

$$\begin{cases} \rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \rho \mathbf{w}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \rho \mathbf{g}, \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

sobre  $\mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ ,  $T > 0$ . Denotamos a solução do problema (3.3)-(3.2) por  $(\rho^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{w}^0)$ .

*Observação 3.1.* Note que estamos considerando os problemas (3.1)-(3.2) e (3.3)-(3.2) com os mesmos dados iniciais  $\rho_0, \mathbf{u}_0$  e  $\mathbf{w}_0$  e as mesmas forças externas  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ .

Como de costume, trabalharemos no âmbito dos espaço  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) = (L^2(\mathbb{R}^3))^3$ . Quando  $m$  for um inteiro não-negativo, escreveremos  $\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^3) = (W^{m,2}(\mathbb{R}^3))^3$ , e denotamos por  $(\cdot, \cdot)$  o produto interno em  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ . Por simplicidade, usaremos as seguintes abreviações:

$$\|\cdot\|_m := \|\cdot\|_{\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^3)} \quad \text{e} \quad \|\cdot\|_{\mathbf{L}^p} := \|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

O propósito deste capítulo é estabelecer a convergência uniforme da solução do problema (3.1)-(3.2) para a solução do problema (3.3)-(3.2) quando as viscosidades tenderem a zero. Provamos o seguinte

**Teorema 3.1.** *Considere  $0 < \bar{\mu}, \nu_1 \leq 1$ ,  $\nu_1 \geq \max\{\mu_r, \nu_2\}$ , e assuma que*

$$\rho_0 \in C^0(\mathbb{R}^3), \quad \nabla \rho_0 \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3), \quad 0 < m \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq M < \infty,$$

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}^3(\mathbb{R}^3), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0,$$

$$\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2([0, T]; \mathbf{H}^3(\mathbb{R}^3)).$$

Então existe  $T_0 \in (0, T]$ , independente de  $\bar{\mu}, \nu_1$  e  $\nu_2$ , tal que o problema (3.1)-(3.2) tem uma única solução  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  que satisfaz

$$\begin{aligned} \rho &\in C^0(\mathbb{R}^3 \times [0, T_0]), \quad \nabla \rho \in C^0([0, T_0]; \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3)), \quad 0 < m \leq \rho(\mathbf{x}, t) \leq M < \infty, \\ \mathbf{u}, \mathbf{w} &\in C^0([0, T_0]; \mathbf{H}^3(\mathbb{R}^3)), \quad \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w} \in L^2([0, T_0]; \mathbf{H}^3(\mathbb{R}^3)), \\ \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t &\in L^2([0, T_0]; \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3)). \end{aligned}$$

Resultados análogos são válidos para a solução  $(\rho^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{w}^0)$  do problema (3.3)-(3.2).

Além disso, temos

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} [\|(\rho - \rho^0)(\cdot, t)\|_2 + \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}^0)(\cdot, t)\|_2 + \|(\mathbf{w} - \mathbf{w}^0)(\cdot, t)\|_2] \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

quando  $\bar{\mu}, \nu_1 \rightarrow 0$ .

Nosso principal objetivo é provar (3.4) na Seção 3.3, aplicando estimativas uniformes, independentes de  $\bar{\mu}, \nu_1$  e  $\nu_2$ , estabelecidas na Seção 3.2.

## 3.2 Estimativas a priori

Nesta seção, obteremos estimativas, locais no tempo, (uniformes em  $\bar{\mu}, \nu_1$  e  $\nu_2$ ) para as soluções dos problemas de valor inicial (3.1)-(3.2) e (3.3)-(3.2). Denotaremos por  $C$  as várias constantes positivas que podem depender dos dados iniciais, das forças externas e dos teoremas de imersões, mas não de  $\bar{\mu}, \nu_1$  e  $\nu_2$ . Além disso, focaremos apenas na prova das estimativas uniformes para as soluções do problema (3.1)-(3.2), uma vez que estimativas análogas para as soluções de (3.3)-(3.2) podem ser provadas da mesma maneira. No que segue, usaremos a notação  $D^k \mathbf{u} = \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha \mathbf{u}$ .

Seja  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  uma solução suficientemente regular do problema (3.1)-(3.2). Começamos com a seguinte estimativa para a densidade  $\rho$ .

**Lema 3.1.** *Seja*

$$\Psi(t) := \int_0^t (1 + \|\nabla \rho(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_3^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, s)\|_3^2) ds. \quad (3.5)$$

Para todo  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ , temos

$$m \leq \rho(\mathbf{x}, t) \leq M \quad (3.6)$$

e, além disso, temos que

$$\|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 \leq \|\nabla \rho_0(\cdot)\|_2^2 + C\Psi(t). \quad (3.7)$$

**Demonstração.** Segue do problema (3.1)<sub>4</sub>-(3.2)<sub>1</sub> e do método das características, que a densidade  $\rho$  é dada por

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{y}(s; \mathbf{x}, t), s) \big|_{s=t} = \rho_0(\mathbf{y}(s; \mathbf{x}, t)) \big|_{s=0},$$

onde a trajetória da partícula  $\mathbf{y}(s; \mathbf{x}, t)$  é definida pela solução do problema de Cauchy

$$\frac{d\mathbf{y}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{y}, s), \quad \mathbf{y}|_{s=t} = \mathbf{x}.$$

Logo, da hipótese  $m \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq M$ , resulta imediatamente a estimativa (3.6).

Agora estabeleceremos a desigualdade (3.7). Aplicando o operador  $D^\alpha$  a ambos os lados da equação (3.1)<sub>4</sub> e multiplicando a equação resultante por  $D^\alpha \rho$  em  $L^2$ , obtemos, após somar sobre  $|\alpha| = 1, 2, 3$ , a seguinte igualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 = - \sum_{|\alpha|=1}^3 (D^\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho), D^\alpha \rho). \quad (3.8)$$

Devido à condição de incompressibilidade  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  e usando integração por partes, é fácil ver que

$$\sum_{|\alpha|=1}^3 (\mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \rho, D^\alpha \rho) = -\frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |D^\alpha \rho|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Logo, a equação (3.8) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 = - \sum_{|\alpha|=1}^3 (D^\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) - \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \rho, D^\alpha \rho). \quad (3.9)$$

Agora usaremos as desigualdades (1.1) e (1.4) para estimar o lado direito da identidade (3.9). De fato, temos

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=1}^3 |(D^\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) - \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \rho, D^\alpha \rho)| &\leq C (\|\nabla \mathbf{u}\|_2 \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \rho\|_2) \|\nabla \rho\|_2 \\ &\leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_2 \|\nabla \rho\|_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo a estimativa acima na identidade (3.9) e usando a desigualdade de Young, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 &\leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_2 \|\nabla \rho\|_2^2 \\
&\leq C \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \|\nabla \mathbf{u}\|_2^4 + \frac{1}{2} \|\nabla \rho\|_2^4 \right) \\
&\leq C (1 + \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\nabla \rho\|_2^2)^2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Integrando este resultado sobre  $[0, t]$ , obtemos

$$\|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 \leq \|\nabla \rho_0(\cdot)\|_2^2 + C \int_0^t (1 + \|\nabla \rho(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_3^2)^2 ds,$$

como queríamos.  $\square$

Nos próximos dois lemas, obteremos estimativas uniformes para  $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3$  e  $\|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3$ .

**Lema 3.2.** *Para todo  $t \in [0, T]$ , temos*

$$\begin{aligned}
m \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 + \bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 &\leq C \left[ (1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^3 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2 \|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|_2 \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3 \right. \\
&\quad \left. + (1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_3 \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3 \right].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

**Demonstração.** Aplicando o operador  $D^\alpha$  a ambos os lados da equação (3.1)<sub>1</sub> e fazendo o produto interno da equação resultante por  $D^\alpha \mathbf{u}$  em  $\mathbf{L}^2$ , deduzimos, depois de somar sobre  $|\alpha| \leq 3$ , que

$$\begin{aligned}
L_1 + L_2 + L_3 &:= \sum_{|\alpha| \leq 3} (\rho D^\alpha \mathbf{u}_t, D^\alpha \mathbf{u}) - \bar{\mu} \sum_{|\alpha| \leq 3} (\Delta D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u}) + \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha \nabla p, D^\alpha \mathbf{u}) \\
&= - \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), D^\alpha \mathbf{u}) + 2\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} (\text{rot } D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{u}) \\
&\quad - \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{u}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{u}_t, D^\alpha \mathbf{u}) + \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{f}), D^\alpha \mathbf{u}).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Para o primeiro termo do lado esquerdo da identidade (3.12), usando integração por partes, é fácil deduzir que

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 3} (\rho_t D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 3} ((\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \sum_{|\alpha| \leq 3} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Também por integração por partes, concluímos que  $L_2 = \bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}\|_3^2$  e, mais uma vez, devido a condição de incompressibilidade  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , temos que

$$L_3 = - \sum_{|\alpha| \leq 3} \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha p D^\alpha (\operatorname{div} \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0.$$

Portanto, a identidade (3.12) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}\|_3^2 &= - \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u}) \\ &\quad + 2\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} (\operatorname{rot} D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{u}) + \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{f}), D^\alpha \mathbf{u}) \\ &\quad - \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{u}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{u}_t, D^\alpha \mathbf{u}) \\ &=: R_1 + R_2 + R_3 + R_4. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Agora, estimaremos cada termo do lado direito da identidade (3.13). Devido as desigualdades (1.1), (1.4) e (3.6), obtemos a seguinte estimativa para o termo  $R_1$ :

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq \sum_{|\alpha| \leq 3} | (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u}) | \\ &\leq C (\|\nabla(\rho \mathbf{u})\|_2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla(\rho \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_2) \|\mathbf{u}\|_3 \\ &\leq C \|\nabla(\rho \mathbf{u})\|_2 \|\nabla \mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{u}\|_3 \\ &\leq C [\|\mathbf{u}\|_2 \|\nabla \rho\|_2 + \|\mathbf{u}\|_3 (1 + \|\nabla \rho\|_2)] \|\mathbf{u}\|_3^2 \\ &\leq C (1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{u}\|_3^3. \end{aligned}$$

Quanto ao termo  $R_2$ , estimamos

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq 2\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} | (\operatorname{rot} D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{u}) | \\ &= 2\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} | (\operatorname{rot} D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{w}) | \\ &\leq 2\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\operatorname{rot} D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq 2\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\nabla D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \mu_r C \|\nabla \mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{w}\|_3 \leq \frac{\mu_r^2}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_3^2 + C \|\mathbf{w}\|_3^2 \\ &\leq \frac{\bar{\mu}}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_3^2 + C \|\mathbf{w}\|_3^2, \end{aligned}$$

uma vez que  $\mu_r^2 \leq \mu_r \leq \bar{\mu}$ . Usando as estimativas (1.1) e (1.4) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
|R_3| &\leq \sum_{|\alpha| \leq 3} |(D^\alpha(\rho \mathbf{f}) - \rho D^\alpha \mathbf{f}, D^\alpha \mathbf{u})| + \sum_{|\alpha| \leq 3} |(\rho D^\alpha \mathbf{f}, D^\alpha \mathbf{u})| \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq 3} \|D^\alpha(\rho \mathbf{f}) - \rho D^\alpha \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} + \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\rho D^\alpha \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C (\|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbf{f}\|_2) \|\mathbf{u}\|_3 + C \|\mathbf{f}\|_3 \|\mathbf{u}\|_3 \\
&\leq C \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{f}\|_2 \|\mathbf{u}\|_3 + C \|\mathbf{f}\|_3 \|\mathbf{u}\|_3 \\
&\leq C \|\mathbf{f}\|_3 \|\mathbf{u}\|_3 (1 + \|\nabla \rho\|_2).
\end{aligned}$$

Finalmente, vamos estimar  $R_4$ . Pelas desigualdades (1.1) e (1.4), temos

$$\begin{aligned}
|R_4| &\leq \sum_{|\alpha| \leq 3} \|D^\alpha(\rho \mathbf{u}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{u}_t\|_2 \|\mathbf{u}\|_3.
\end{aligned}$$

Portanto, introduzindo as estimativas para  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  na identidade (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
m \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 + \bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 &\leq C [(1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^3 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 \\
&\quad + \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2 \|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|_2 \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3 \\
&\quad + (1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_3 \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3],
\end{aligned}$$

o que prova o Lema. □

**Lema 3.3.** *Para todo  $t \in [0, T]$ , temos*

$$\begin{aligned}
m \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 + \nu_1 \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 &\leq C [(1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 \\
&\quad + \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 + \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2 \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|_2 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3 \\
&\quad + (1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{g}(\cdot, t)\|_3 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3]. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

**Demonstração.** A demonstração deste lema é análoga a do lema anterior. Aplique o operador  $D^\alpha$  a ambos os lados da equação (3.1)<sub>3</sub> e faça o produto interno da equação obtida com  $D^\alpha \mathbf{w}$  em  $\mathbf{L}^2$ . Some a equação resultante sobre  $|\alpha| \leq 3$ , para obter

$$\begin{aligned}
E_1 + E_2 + E_3 &:= \sum_{|\alpha| \leq 3} (\rho D^\alpha \mathbf{w}_t, D^\alpha \mathbf{w}) + \sum_{|\alpha| \leq 3} (L D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{w}) + 4\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{w}) \\
&= - \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}), D^\alpha \mathbf{w}) + 2\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} (\text{rot } D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{w}) \\
&\quad - \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{w}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{w}_t, D^\alpha \mathbf{w}) \\
&\quad + \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{g}), D^\alpha \mathbf{w}), \tag{3.15}
\end{aligned}$$

onde  $L$  é o operador fortemente elíptico  $L = -\nu_1 \Delta - \nu_2 \nabla \text{div}$ . Um cálculo simples e direto nos leva a concluir que

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 3} (\rho_t D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{w}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 3} ((\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{w}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \sum_{|\alpha| \leq 3} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{w}),
\end{aligned}$$

$E_2 = \nu_1 \|\nabla \mathbf{w}\|_3^2 + \nu_2 \|\text{div } \mathbf{w}\|_3^2$  e  $E_3 = 4\mu_r \|\mathbf{w}\|_3^2$ . Assim, reescreveremos a identidade (3.15) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_1 \|\nabla \mathbf{w}\|_3^2 + \nu_2 \|\text{div } \mathbf{w}\|_3^2 + 4\mu_r \|\mathbf{w}\|_3^2 = \\
&\quad - \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{w}) \\
&\quad + 2\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 3} (\text{rot } D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{w}) + \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{g}), D^\alpha \mathbf{w}) \\
&\quad - \sum_{|\alpha| \leq 3} (D^\alpha (\rho \mathbf{w}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{w}_t, D^\alpha \mathbf{w}) =: D_1 + D_2 + D_3 + D_4. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Vamos estimar  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Similarmente a prova do Lema 3.2, temos

$$\begin{aligned}
|D_1| &\leq C(1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{w}\|_3^2, \\
|D_2| &\leq \frac{\nu_1}{2} \|\nabla \mathbf{w}\|_3^2 + C \|\mathbf{u}\|_3^2 \text{ (já que } \mu_r^2 \leq \mu_r \leq \nu_1), \\
|D_3| &\leq C(1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{g}\|_3 \|\mathbf{w}\|_3, \\
|D_4| &\leq C \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{w}_t\|_2 \|\mathbf{w}\|_3.
\end{aligned}$$

Portanto, colocando as estimativas de  $D_1, D_2, D_3$  e  $D_4$  na identidade (3.16), obtemos a desigualdade dada em (3.14).  $\square$

**Lema 3.4.** *Seja  $A$  a constante definida a seguir:*

$$A := 1 + \|\nabla \rho_0(\cdot)\|_2^2 + \|\mathbf{u}_0(\cdot)\|_3^2 + \|\mathbf{w}_0(\cdot)\|_3^2 + \int_0^T (\|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_3^2 + \|\mathbf{g}(\cdot, t)\|_3^2) dt. \quad (3.17)$$

*Para todo  $t \in [0, T]$ , temos a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} & \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 + \bar{\mu} \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, s)\|_3^2 ds + \nu_1 \int_0^t \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, s)\|_3^2 ds \\ & \leq C \int_0^t (\|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|_2^2) ds + C[A + \Psi(t)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde  $\Psi(t)$  é dado em (3.5).

**Demonstração.** Basta trabalharmos simultaneamente com as estimativas (3.10), (3.11) e (3.14) e usarmos a desigualdade de Young, para obtermos diretamente, após integramos a relação resultante com respeito a  $t$ , o resultado desejado.  $\square$

Agora, estimaremos as integrais no lado direito da desigualdade (3.18). Para isto, provaremos o seguinte

**Lema 3.5.** *Para todo  $t \in [0, T]$ , temos*

$$\bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_2^2 + \nu_1 \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_2^2 + m \int_0^t (\|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|_2^2) ds \leq C[A + \Psi(t)]^3. \quad (3.19)$$

**Demonstração.** Dividiremos a demonstração deste lema em cinco etapas.

**Etapa 1.** Segue da condição de incompressibilidade que

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = (\operatorname{div} \mathbf{u})_t = 0, \quad (\nabla p, \mathbf{u}_t) = -(p, \operatorname{div} \mathbf{u}_t) = 0.$$

Portanto, multiplicando a equação (3.1)<sub>1</sub> por  $\mathbf{u}_t$  em  $\mathbf{L}^2$ , obtemos

$$\|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\bar{\mu}}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \mathbf{u}_t) + (\rho \mathbf{f}, \mathbf{u}_t) - (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}_t). \quad (3.20)$$

Pelas desigualdades (1.2), (1.4) e (3.6), e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, estimamos os termos do lado direito da identidade (3.20) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \mathbf{u}_t)| &= 2\mu_r \left| \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \operatorname{rot} \mathbf{w}, \sqrt{\rho} \mathbf{u}_t \right) \right| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{m}} \|\nabla \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C \|\mathbf{w}\|_3 \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\rho \mathbf{f}, \mathbf{u}_t)| &= |(\sqrt{\rho} \mathbf{f}, \sqrt{\rho} \mathbf{u}_t)| \\
&\leq \|\sqrt{\rho} \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C \|\mathbf{f}\|_3 \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \\
|(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}_t)| &= |(\sqrt{\rho}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \sqrt{\rho} \mathbf{u}_t)| \\
&\leq \|\sqrt{\rho}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\sqrt{\rho} \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Usando estas desigualdades na identidade (3.20), deduzimos pela estimativa (3.6) e pela desigualdade de Young, que

$$m \|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \bar{\mu} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C (\|\mathbf{u}\|_3^4 + \|\mathbf{w}\|_3^2 + \|\mathbf{f}\|_3^2). \quad (3.21)$$

Integrando a desigualdade (3.21) sobre  $[0, T]$ , obtemos

$$m \int_0^t \|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_{\mathbf{L}^2}^2 ds + \bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C [A + \Psi(t)], \quad (3.22)$$

onde  $\Psi(t)$  e  $A$  são dados em (3.5) e (3.17), respectivamente. Seguindo um procedimento semelhante ao da obtenção da estimativa (3.21), deduzimos a partir da equação (3.1)<sub>3</sub> que

$$\begin{aligned}
&m \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_1 \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_2 \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\leq C (\|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{w}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 + \|\mathbf{g}\|_3^2).
\end{aligned} \quad (3.23)$$

Portanto,

$$m \int_0^t \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|_{\mathbf{L}^2}^2 ds + \nu_1 \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C [A + \Psi(t)]. \quad (3.24)$$

**Etapa 2.** Se aplicarmos o operador  $D^\alpha$  a ambos os lados da equação (3.1)<sub>1</sub> e fizermos o produto interno da equação resultante por  $D^\alpha \mathbf{u}_t$  em  $\mathbf{L}^2$ , deduzimos, depois de somar sobre  $|\alpha| = 1$ , que

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 + S_3 &:= \sum_{|\alpha|=1} (\rho D^\alpha \mathbf{u}_t, D^\alpha \mathbf{u}_t) - \bar{\mu} \sum_{|\alpha|=1} (\Delta D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u}_t) + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha \nabla p, D^\alpha \mathbf{u}_t) \\
&= - \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), D^\alpha \mathbf{u}_t) + 2\mu_r \sum_{|\alpha|=1} (\operatorname{rot} D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{u}_t) \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha (\rho \mathbf{f}), D^\alpha \mathbf{u}_t) - \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha (\rho \mathbf{u}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{u}_t, D^\alpha \mathbf{u}_t).
\end{aligned} \quad (3.25)$$

Note que

$$S_1 = \|\sqrt{\rho} \nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Integrando por partes, é fácil ver que  $S_2 = \frac{\bar{\mu}}{2} \frac{d}{dt} \|D^2 \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2$  e, também usando o fato que  $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$ , concluímos que

$$S_3 = - \sum_{|\alpha|=1} \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha p D^\alpha (\operatorname{div} \mathbf{u}_t) d\mathbf{x} = 0.$$

Substituindo estes resultados na identidade (3.25), obtemos

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho} \nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\bar{\mu}}{2} \frac{d}{dt} \|D^2 \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= - \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), D^\alpha \mathbf{u}_t) + 2\mu_r \sum_{|\alpha|=1} (\operatorname{rot} D^\alpha \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{u}_t) \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha (\rho \mathbf{f}), D^\alpha \mathbf{u}_t) - \sum_{|\alpha|=1} (D^\alpha (\rho \mathbf{u}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{u}_t, D^\alpha \mathbf{u}_t) \\ &=: J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Fazendo uso das desigualdades (1.1), (1.2), (1.4), (3.6) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha (\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \rho D^\alpha ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} + \sum_{|\alpha|=1} \|\rho D^\alpha ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C (\|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^2} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad + C (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{u}\|_1 \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C (\|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{u}\|_2 \|\nabla \mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{u}\|_2 \|\nabla \mathbf{u}\|_2) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C (1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \\ |J_2| &\leq 2\mu_r \sum_{|\alpha|=1} \|\operatorname{rot} D^\alpha \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq 2 \sum_{|\alpha|=1} \|\nabla D^\alpha \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C \|\mathbf{w}\|_3 \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \\ |J_3| &\leq \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha (\rho \mathbf{f}) - \rho D^\alpha \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} + \sum_{|\alpha|=1} \|\rho D^\alpha \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C (\|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^2} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2}) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C (\|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{f}\|_2 + \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\nabla \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2}) \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C (1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{f}\|_3 \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|J_4| &\leq \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha(\rho \mathbf{u}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Usando estas estimativas, segue da desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 |J_i| &\leq C \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} [\|\mathbf{w}\|_3 + \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2} + (1 + \|\nabla \rho\|_2) (\|\mathbf{f}\|_3 + \|\mathbf{u}\|_3^2)] \\
&\leq \frac{m}{2} \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C [\|\mathbf{w}\|_3^2 + \|\nabla \rho\|_2^2 \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + (1 + \|\nabla \rho\|_2)^2 (\|\mathbf{f}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_3^4)] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Substituindo a estimativa (3.27) na identidade (3.26), obtemos

$$\begin{aligned}
&m \|\nabla \mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \bar{\mu} \frac{d}{dt} \|D^2 \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\leq C [\|\mathbf{w}\|_3^2 + \|\nabla \rho\|_2^2 \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + (1 + \|\nabla \rho\|_2)^2 (\|\mathbf{f}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_3^4)]. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Podemos obter uma estimativa análoga a desigualdade (3.28) para  $\mathbf{w}$ . De fato, aplicando o operador  $D^\alpha$  com  $|\alpha| = 1$  em cada lado da equação (3.1)<sub>3</sub>, multiplicando o resultado por  $D^\alpha \mathbf{w}_t$  em  $\mathbf{L}^2$ , e somando sobre  $|\alpha|$ , obtemos

$$\begin{aligned}
&m \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_1 \frac{d}{dt} \|D^2 \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_2 \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\leq C [\|\nabla \rho\|_2^2 \|\mathbf{w}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + (1 + \|\nabla \rho\|_2)^2 (\|\mathbf{g}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{w}\|_3^2) + \|\mathbf{u}\|_3^2]. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

**Etapa 3.** Adicionando as desigualdades (3.21) e (3.28) e integrando sobre  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_1^2 + m \int_0^t \|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_1^2 ds &\leq \|\nabla \mathbf{u}_0(\cdot)\|_1^2 \\
&+ C \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla \rho(\cdot, s)\|_2^2 \int_0^t \|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_{\mathbf{L}^2}^2 ds \\
&+ C \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla \rho(\cdot, s)\|_2^2\right) \int_0^t (\|\mathbf{f}(\cdot, s)\|_3^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_3^4) ds \\
&+ C \int_0^t \|\mathbf{w}(\cdot, s)\|_3^2 ds,
\end{aligned}$$

que juntamente com as estimativas (3.7) e (3.22), nos dá

$$\bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_1^2 + m \int_0^t \|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_1^2 ds \leq C [A + \Psi(t)]^2. \quad (3.30)$$

Similarmente, somando as desigualdades (3.23) e (3.29) e integrando sobre  $t$ , encontramos

$$\begin{aligned}
& \nu_1 \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_1^2 + m \int_0^t \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|_1^2 ds \\
& \leq \|\nabla \mathbf{w}_0(\cdot)\|_1^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{w}_0(\cdot)\|_1^2 + 4\|\mathbf{w}_0(\cdot)\|_1^2 + C \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla \rho(\cdot, s)\|_2^2 \int_0^t \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|_{\mathbf{L}^2}^2 ds \\
& \quad + C \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla \rho(\cdot, s)\|_2^2\right) \int_0^t (\|\mathbf{g}(\cdot, s)\|_3^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_3^2 \|\mathbf{w}(\cdot, s)\|_3^2) ds \\
& \quad + C \int_0^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_3^2 ds.
\end{aligned}$$

Portanto, devido as estimativas (3.7) e (3.24), temos

$$\nu_1 \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_1^2 + m \int_0^t \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|_1^2 ds \leq C [A + \Psi(t)]^2. \quad (3.31)$$

**Etapa 4.** De forma análoga ao desenvolvimento efetuado na Etapa 2 acima, porém com  $|\alpha| = 2$ , não é difícil mostrar que

$$\begin{aligned}
& m \|D^2 \mathbf{u}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \bar{\mu} \frac{d}{dt} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& \leq C [\|\nabla \rho\|_2^2 \|\mathbf{u}_t\|_1^2 + (1 + \|\nabla \rho\|_2)^2 (\|\mathbf{f}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_3^4) + \|\mathbf{w}\|_3^2] \quad (3.32)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& m \|D^2 \mathbf{w}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_1 \frac{d}{dt} \|D^3 \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_2 \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} D^2 \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \|D^2 \mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& \leq C [\|\nabla \rho\|_2^2 \|\mathbf{w}_t\|_1^2 + (1 + \|\nabla \rho\|_2)^2 (\|\mathbf{g}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{w}\|_3^2) + \|\mathbf{u}\|_3^2]. \quad (3.33)
\end{aligned}$$

**Etapa 5.** Somando as desigualdades (3.21), (3.28) e (3.32), e integrando sobre  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_2^2 + m \int_0^t \|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_2^2 ds & \leq \|\nabla \mathbf{u}_0(\cdot)\|_2^2 \\
& \quad + C \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla \rho(\cdot, s)\|_2^2 \int_0^t \|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_1^2 ds \\
& \quad + C \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla \rho(\cdot, s)\|_2^2\right) \int_0^t (\|\mathbf{f}(\cdot, s)\|_3^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_3^4) ds \\
& \quad + C \int_0^t \|\mathbf{w}(\cdot, s)\|_3^2 ds.
\end{aligned}$$

Devido as estimativas (3.7) e (3.30), encontramos

$$\bar{\mu} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_2^2 + m \int_0^t \|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_2^2 ds \leq C [A + \Psi(t)]^3. \quad (3.34)$$

Por fim, se adicionarmos as desigualdades (3.23), (3.29) e (3.33) e usarmos as estimativas (3.7) e (3.31), obteremos

$$\nu_1 \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_2^2 + m \int_0^t \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|_2^2 ds \leq C [A + \Psi(t)]^3. \quad (3.35)$$

Portanto, juntando os resultados obtidos nas desigualdades (3.34) e (3.35), concluímos a demonstração da estimativa (3.19).  $\square$

Resumimos os resultados acima no seguinte

**Lema 3.6.** *Para todo  $t \in [0, T]$ , temos*

$$\begin{aligned} & \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 + \int_0^t (\|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|_2^2) ds \\ & + \bar{\mu} \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, s)\|_3^2 ds + \nu_1 \int_0^t \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, s)\|_3^2 ds \leq C [A + \Psi(t)]^3. \end{aligned} \quad (3.36)$$

**Lema 3.7.** *Existe  $T_0 \in (0, T]$ , independente de  $\bar{\mu}$ ,  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , tal que*

$$\Psi(t) \leq A \quad \text{para } t \leq T_0. \quad (3.37)$$

**Demonstração.** Do Lema 3.6 segue que

$$\|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 \leq C (A + \Psi(t))^3.$$

Da definição de  $\Psi(t)$ , dada em (3.5), podemos concluir que

$$\left( \frac{d}{dt} \Psi(t) \right)^{1/2} = 1 + \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 \leq C (A + \Psi(t))^3.$$

Escrevendo

$$Y(t) := \Psi(t) + A,$$

encontraremos a seguinte desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt} Y(t) \leq C Y^6(t),$$

ou ainda

$$Y^{-6}(t) \frac{d}{dt} Y(t) \leq C. \quad (3.38)$$

Se escrevermos  $I(t) = \int_0^t Y^{-6}(s) \frac{d}{ds} Y(s) ds$ , concluiremos, após usarmos integração por partes, que

$$I(t) = \frac{1}{5 A^5} - \frac{1}{5 Y^5(t)}.$$

Segue da desigualdade (3.38) que

$$\frac{1}{5A^5} - \frac{1}{5Y^5(t)} \leq Ct.$$

Após um cálculo simples e direto, é fácil ver que

$$Y(t) \leq A (1 - 5CA^5t)^{-1/5} \quad \text{com} \quad 0 \leq t < (5CA^5)^{-1}.$$

Portanto,

$$\Psi(t) \leq A \quad \text{para} \quad t \leq T_0 = \frac{31}{160CA^5}.$$

□

Devido aos Lemas 3.6 e 3.7, obtemos as seguintes estimativas uniformes, locais no tempo, para as soluções do problema (3.1)-(3.2) e (3.3)-(3.2), respectivamente:

**Proposição 3.1.** *Existe uma constante positiva  $C$  tal que*

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T_0} [\|\nabla \rho(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 + \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2] + \int_0^{T_0} (\|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|_2^2) dt \\ & + \bar{\mu} \int_0^{T_0} \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_3^2 dt + \nu_1 \int_0^{T_0} \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|_3^2 dt \leq C \end{aligned}$$

e

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} [\|\nabla \rho^0(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{u}^0(\cdot, t)\|_3^2 + \|\mathbf{w}^0(\cdot, t)\|_3^2] + \int_0^{T_0} (\|\mathbf{u}_t^0(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{w}_t^0(\cdot, t)\|_2^2) dt \leq C.$$

### 3.3 Prova do Teorema 3.1

A existência da solução dos problemas (3.1)-(3.2) e (3.3)-(3.2) é provada com o método semi-Galerkin, uma vez que as estimativas locais no tempo estabelecidas na Proposição 3.1 são válidas para as aproximações semi-Galerkin, as quais são suficientes para passarmos ao limite para obtermos a existência local. Como este processo é silimar ao de [5], omitiremos os detalhes da prova e nos restringiremos a estabelecer nosso resultado principal (3.4).

Subtraindo-se (3.3) de (3.1), obtemos o seguinte sistema linear de equações para  $\sigma := \rho - \rho^0$ ,  $\mathbf{v} := \mathbf{u} - \mathbf{u}^0$ ,  $\mathbf{y} := \mathbf{w} - \mathbf{w}^0$  e  $q := p - p^0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{v}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \bar{\mu} \Delta \mathbf{v} - \bar{\mu} \Delta \mathbf{u}^0 + \nabla q = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}^0 + \nabla(p^0) \frac{\sigma}{\rho^0} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} =: \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \rho \mathbf{y}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{y} + L \mathbf{y} + L \mathbf{w}^0 + 4\mu_r \mathbf{y} + 4\mu_r \mathbf{w}^0 = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w}^0 + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u} =: \mathbf{G}, \\ \sigma_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \sigma = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho^0, \end{array} \right. \quad (3.39)$$

em  $\mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ ,  $T > 0$ , com condições iniciais

$$\sigma(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.40)$$

**Etapa 1.** Aplicando o operador  $D^\alpha$  a ambos os lados da equação (3.39)<sub>4</sub> e multiplicando a equação resultante por  $D^\alpha \sigma$  em  $L^2$ , obtemos, após somar sobre  $|\alpha| \leq 2$ , a seguinte igualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sigma(\cdot, t)\|_2^2 = - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \sigma), D^\alpha \sigma) - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho^0), D^\alpha \sigma). \quad (3.41)$$

Usando integração por partes, é fácil ver que

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} (\mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \sigma, D^\alpha \sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} |D^\alpha \sigma|^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

pois  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Logo, a identidade (3.41) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sigma(\cdot, t)\|_2^2 = - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \sigma) - \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \sigma, D^\alpha \sigma) - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho^0), D^\alpha \sigma). \quad (3.42)$$

Para estimar o primeiro termo do lado direito da identidade (3.42), notemos que

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \sigma) - \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \sigma, D^\alpha \sigma) = \left( \sum_{|\alpha|=1} + \sum_{|\alpha|=2} \right) (D^\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \sigma) - \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \sigma, D^\alpha \sigma) =: B_1 + B_2.$$

Assim, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |B_1| &\leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \sigma\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_2 \|\nabla \sigma\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_3 \|\sigma\|_2^2, \\ |B_2| &\leq C (\|D^2 \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4} \|\nabla \sigma\|_{\mathbf{L}^4} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|D^2 \sigma\|_{\mathbf{L}^2}) \|D^2 \sigma\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|\mathbf{u}\|_3 \|\sigma\|_2^2. \end{aligned}$$

Logo, devido a estas estimativas, podemos concluir, pela Proposição 3.1, que

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} |(D^\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla \sigma) - \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \sigma, D^\alpha \sigma)| \leq C \|\mathbf{u}\|_3 \|\sigma\|_2^2 \leq C \|\sigma\|_2^2. \quad (3.43)$$

Quanto ao segundo termo do lado direito da identidade (3.42), ao usarmos as estimativas (1.2), (1.4), as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young e a Proposição 3.1, obteremos

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq 2} |(D^\alpha(\mathbf{v} \cdot \nabla \rho^0), D^\alpha \sigma)| &\leq C (\|\mathbf{v}\|_2 \|\nabla \rho^0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \rho^0\|_2) \|D^2 \sigma\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C \|\nabla \rho^0\|_2 \|\mathbf{v}\|_2 \|\sigma\|_2 \leq C (\|\sigma\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Substituindo as estimativas (3.43) e (3.44) na identidade (3.42) e integrando o resultado obtido sobre  $[0, t]$ , obteremos

$$\|\sigma(\cdot, t)\|_2^2 \leq C \int_0^t (\|\sigma(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_2^2) ds, \quad (3.45)$$

uma vez que  $\sigma(\mathbf{x}, 0) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

**Etapa 2.** De forma análoga a obtenção das estimativas (3.11) e (3.14), obtemos das equações  $(3.39)_1$  e  $(3.39)_3$ , a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\sqrt{\rho} D^\alpha \mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right) + \bar{\mu} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2 + \nu_1 \|\nabla \mathbf{y}\|_2^2 + \nu_2 \|\operatorname{div} \mathbf{y}\|_2^2 + 4\mu_r \|\mathbf{y}\|_2^2 \\ = &\bar{\mu} \sum_{|\alpha| \leq 2} (\Delta D^\alpha \mathbf{u}^0, D^\alpha \mathbf{v}) + \nu_1 \sum_{|\alpha| \leq 2} (\Delta D^\alpha \mathbf{w}^0, D^\alpha \mathbf{y}) \\ &+ \nu_2 \sum_{|\alpha| \leq 2} (\nabla(\operatorname{div} D^\alpha \mathbf{w}^0), D^\alpha \mathbf{y}) - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha(\rho \mathbf{v}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{v}_t, D^\alpha \mathbf{v}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 2} ((\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) D^\alpha \mathbf{v}, D^\alpha \mathbf{v}) - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}), D^\alpha \mathbf{v}) \\ &- \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{y}), D^\alpha \mathbf{y}) - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha(\rho \mathbf{y}_t) - \rho D^\alpha \mathbf{y}_t, D^\alpha \mathbf{y}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 2} ((\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) D^\alpha \mathbf{y}, D^\alpha \mathbf{y}) - 4\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha \mathbf{w}^0, D^\alpha \mathbf{y}) \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha \mathbf{F}, D^\alpha \mathbf{v}) + \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha \mathbf{G}, D^\alpha \mathbf{y}) =: \sum_{i=1}^{12} R_i. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Agora, estimaremos cada termo do lado direito da identidade (3.46). Integrando por partes, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, a Proposição 3.1 e o fato que  $\nu_1 \geq \nu_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} |R_1| + |R_2| + |R_3| &\leq \frac{1}{2} (\bar{\mu} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2 + \nu_1 \|\nabla \mathbf{y}\|_2^2) + C (\bar{\mu} \|\mathbf{u}^0\|_3^2 + \nu_1 \|\mathbf{w}^0\|_3^2) \\ &\leq \frac{1}{2} (\bar{\mu} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2 + \nu_1 \|\nabla \mathbf{y}\|_2^2) + C(\bar{\mu} + \nu_1). \end{aligned}$$

Usando a estimativa (1.4), a desigualdade de Hölder e a Proposição 3.1, o termo  $R_4$  pode ser estimado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |R_4| &\leq C (\|D\rho\|_{L^\infty} \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2} + \|D\rho\|_{L^\infty} \|\nabla \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2} + \|D^2\rho\|_{L^4} \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^4}) \|\mathbf{v}\|_2 \\ &\leq C \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{v}_t\|_1 \|\mathbf{v}\|_2 \leq C (\|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{v}_t\|_1^2). \end{aligned}$$

Para o termo  $R_5$ , usamos a estimativa (1.2), a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Proposição 3.1, para obtermos

$$\begin{aligned} |R_5| &\leq C (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|\mathbf{v}\|_2^2 \\ &\leq C \|\mathbf{u}\|_3 \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{v}\|_2^2 \leq C \|\mathbf{v}\|_2^2. \end{aligned}$$

Para estimarmos o termo  $R_6$ , primeiro o reescreveremos da seguinte forma

$$\begin{aligned} R_6 &= - \sum_{|\alpha| \leq 2} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{v}, D^\alpha \mathbf{v}) - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{v}, D^\alpha \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) |D^\alpha \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} - \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{v}, D^\alpha \mathbf{v}) \\ &=: R_{6,1} + R_{6,2}. \end{aligned}$$

Analogamente à demonstração do Lema 3.2, usando integração por partes, o fato que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , a desigualdade de Cauchy-Schwarz, as estimativas (1.2), (1.4) e a Proposição 3.1, concluimos que

$$\begin{aligned} |R_{6,1}| &= \left| \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho) |D^\alpha \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\mathbf{u} \cdot \nabla \rho\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\leq C (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^2} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \rho\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|\mathbf{v}\|_2^2 \\ &\leq C \|\mathbf{u}\|_3 \|\nabla \rho\|_2 \|\mathbf{v}\|_2^2 \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_2^2. \end{aligned}$$

Quanto ao termo  $R_{6,2}$ , usando a desigualdade de Hölder, a estimativa (1.4) e a Proposição 3.1, temos

$$\begin{aligned}
|R_{6,2}| &\leq \sum_{|\alpha|=1} |(D^\alpha(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{v}, D^\alpha \mathbf{v})| + \sum_{|\alpha|=2} |(D^\alpha(\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla D^\alpha \mathbf{v}, D^\alpha \mathbf{v})| \\
&\leq C \|\nabla(\rho \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C (\|D^2(\rho \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4} + \|\nabla(\rho \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^\infty} \|D^2 \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}) \|D^2 \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C (\|\nabla(\rho \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|D^2(\rho \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^4}) \|\mathbf{v}\|_2^2 \\
&\leq C (\|\nabla(\rho \mathbf{u})\|_2 + \|D^3(\rho \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2}) \|\mathbf{v}\|_2^2 \\
&\leq C \|\nabla(\rho \mathbf{u})\|_2 \|\mathbf{v}\|_2^2 \\
&\leq C (\|\mathbf{u}\|_2 \|\nabla \rho\|_2 + \|\rho \nabla \mathbf{u}\|_2) \|\mathbf{v}\|_2^2 \\
&\leq C [\|\mathbf{u}\|_2 \|\nabla \rho\|_2 + \|\mathbf{u}\|_3 (1 + \|\nabla \rho\|_2)] \|\mathbf{v}\|_2^2 \\
&\leq C (1 + \|\nabla \rho\|_2) \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{v}\|_2^2 \\
&\leq C \|\mathbf{v}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Portanto,  $|R_6| \leq |R_{6,1}| + |R_{6,2}| \leq C \|\mathbf{v}\|_2^2$ . Similarmente, temos que  $|R_7| \leq C \|\mathbf{y}\|_2^2$ . Se repetirmos o processo para a obtenção da estimativa para o termo  $R_4$ , obteremos  $|R_8| \leq C (\|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y}_t\|_1^2)$ . Analogamente a obtenção da estimativa para  $R_5$ , podemos mostrar que  $|R_9| \leq C \|\mathbf{y}\|_2^2$ . Para estimarmos o termo  $R_{10}$ , usamos as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young e a Proposição 3.1, para obtermos

$$\begin{aligned}
|R_{10}| &\leq 4\mu_r \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha \mathbf{w}^0\|_{\mathbf{L}^2} \|D^\alpha \mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C\mu_r \|\mathbf{w}^0\|_3 \|\mathbf{y}\|_2 \leq C (\mu_r^2 \|\mathbf{w}^0\|_3^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2) \\
&\leq C (\bar{\mu} + \|\mathbf{y}\|_2^2),
\end{aligned}$$

pois  $\mu_r^2 \leq \mu_r \leq \bar{\mu}$ . Finalmente, recordando as definições de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  (ver equações (3.39)<sub>1</sub> e (3.39)<sub>3</sub>), usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young e a Proposição 3.1, estimamos  $R_{11}$  e  $R_{12}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
|R_{11}| + |R_{12}| &\leq C (\|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2) + C (\|\mathbf{F}\|_2^2 + \|\mathbf{G}\|_2^2) \\
&\leq C (\bar{\mu} + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2) + C \|\sigma \nabla(p^0)/\rho^0\|_2^2. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Da equação (3.3)<sub>1</sub> e da Proposição 3.1, é fácil concluir que

$$\|\sigma \nabla(p^0)/\rho^0\|_2^2 \leq C \|\sigma\|_2^2 (1 + \|\mathbf{u}_t^0\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_3^2). \tag{3.48}$$

Devido às estimativas (3.47) e (3.48), obtemos

$$|R_{11}| + |R_{12}| \leq C (\bar{\mu} + \|\sigma\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2) + C \|\sigma\|_2^2 (\|\mathbf{u}_t^0\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_3^2).$$

Portanto, substituindo as estimativas para  $R_i$  na identidade (3.46),  $i = 1, \dots, 12$ , e usando a desigualdade (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2) &\leq C (\bar{\mu} + \nu_1 + \|\sigma\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{v}_t\|_1^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y}_t\|_1^2) \\ &\quad + C \|\sigma\|_2^2 (\|\mathbf{u}_t^0\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_3^2). \end{aligned}$$

Integrando o resultado acima sobre  $[0, t]$ , usando a estimativa (3.45) e a Proposição 3.1, concluimos que

$$\begin{aligned} \|\sigma(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{y}(\cdot, t)\|_2^2 &\leq (\bar{\mu} + \nu_1) C T_0 + C \int_0^t (\|\mathbf{v}_t(\cdot, s)\|_1^2 + \|\mathbf{y}_t(\cdot, s)\|_1^2) ds \\ &\quad + C \int_0^t (\|\sigma(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{y}(\cdot, s)\|_2^2) ds, \end{aligned} \quad (3.49)$$

pois  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

**Etapa 3.** Como  $\operatorname{div} \mathbf{v}_t = (\operatorname{div} \mathbf{v})_t = 0$ , então

$$(\nabla q, \mathbf{v}_t) = -(q, \operatorname{div} \mathbf{v}_t) = 0.$$

Portanto, multiplicando a equação (3.39)<sub>1</sub> por  $\mathbf{v}_t$  em  $\mathbf{L}^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\bar{\mu}}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \mathbf{v}_t) - (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}_t) + \bar{\mu} (\Delta \mathbf{u}^0, \mathbf{v}_t) \\ &\quad - (\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}^0, \mathbf{v}_t) + (\sigma \nabla(p^0)/\rho^0, \mathbf{v}_t). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Agora, estimaremos cada termo do lado direito da identidade acima. De uma forma semelhante à prova do Lema 3.5, temos

$$\begin{aligned} |2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \mathbf{v}_t)| &\leq C \mu_r \|\mathbf{w}\|_3 \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \bar{\mu} \|\mathbf{w}\|_3 \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \\ |(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}_t)| &\leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{v}\|_2 \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \\ |\bar{\mu} (\Delta \mathbf{u}^0, \mathbf{v}_t)| &\leq C \bar{\mu} \|\Delta \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}^2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \bar{\mu} \|\mathbf{u}^0\|_2 \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \\ |(\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}^0, \mathbf{v}_t)| &\leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}^2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{u}^0\|_3 \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}, \\ |(\sigma \nabla(p^0)/\rho^0, \mathbf{v}_t)| &\leq C \|\sigma\|_2 (\|\mathbf{u}^0\|_3^2 + \|\mathbf{u}_t^0\|_2 + \|\mathbf{f}\|_2) \|\sqrt{\rho} \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Substituindo as estimativas acima na identidade (3.50), usando a Proposição 3.1 e a desigualdade de Young, obtemos

$$m \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \bar{\mu} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C [\bar{\mu} + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\sigma\|_2^2 (1 + \|\mathbf{u}_t^0\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_3^2)]. \quad (3.51)$$

Integrando a desigualdade (3.51) sobre  $[0, t]$ , usando a estimativa (3.45) e a Proposição 3.1, encontramos

$$m \int_0^t \|\mathbf{v}_t(\cdot, s)\|_{\mathbf{L}^2}^2 ds + \bar{\mu} \|\nabla \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C \bar{\mu} T_0 + C \int_0^t (\|\sigma(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_2^2) ds. \quad (3.52)$$

Seguindo um processo semelhante ao da obtenção da estimativa (3.51), encontramos, a partir da equação (3.39)<sub>3</sub>, a seguinte desigualdade:

$$m \|\mathbf{y}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_1 \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_2 \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C (\nu_1 + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2) \quad (3.53)$$

Logo,

$$m \int_0^t \|\mathbf{y}_t(\cdot, s)\|_{\mathbf{L}^2}^2 ds + \nu_1 \|\nabla \mathbf{y}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C \nu_1 T_0 + C \int_0^t (\|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{y}(\cdot, s)\|_2^2) ds. \quad (3.54)$$

Agora, se aplicarmos o operador  $D^\alpha$  a ambos os lados da equação (3.39)<sub>1</sub> e fizermos o produto interno da equação resultante por  $D^\alpha \mathbf{v}_t$  em  $\mathbf{L}^2$ , deduziremos, depois de somarmos sobre  $|\alpha| = 1$ , que

$$\begin{aligned} m \|\nabla \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \bar{\mu} \frac{d}{dt} \|D^2 \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq C [\bar{\mu} \|\mathbf{u}^0\|_3^2 + (1 + \|\nabla \rho\|_2)^2 \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\nabla \rho\|_2^2 \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\quad + (1 + \|\nabla \rho\|_2)^2 \|\mathbf{u}^0\|_3^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 + \mu_r \|\mathbf{w}\|_3^2 + \|\sigma\|_2^2 (1 + \|\mathbf{u}_t^0\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_3^2)]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1, a desigualdade acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$m \|\nabla \mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \bar{\mu} \frac{d}{dt} \|D^2 \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C [\bar{\mu} + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\sigma\|_2^2 (1 + \|\mathbf{u}_t^0\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_3^2)]. \quad (3.55)$$

Somando as desigualdades (3.51) e (3.55), obtemos

$$m \|\mathbf{v}_t\|_1^2 + \bar{\mu} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{v}\|_1^2 \leq C [\bar{\mu} + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\sigma\|_2^2 (1 + \|\mathbf{u}_t^0\|_2^2 + \|\mathbf{f}\|_3^2)].$$

Integrando este resultado sobre  $[0, t]$ , usando as estimativas (3.45) e (3.52) e a Proposição 3.1, obtemos

$$\bar{\mu} \|\nabla \mathbf{v}(\cdot, t)\|_1^2 + m \int_0^t \|\mathbf{v}_t(\cdot, s)\|_1^2 ds \leq C \bar{\mu} T_0 + C \int_0^t (\|\sigma(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_2^2) ds. \quad (3.56)$$

Da mesma forma que obtivemos a estimativa (3.55), podemos encontrar

$$\begin{aligned} m \|\nabla \mathbf{y}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_1 \frac{d}{dt} \|D^2 \mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_2 \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \nabla \mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{y}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ \leq C (\nu_1 + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Somando as desigualdades (3.53) e (3.57), obtemos

$$m\|\mathbf{y}_t\|_1^2 + \nu_1 \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{y}\|_1^2 + \nu_2 \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \mathbf{y}\|_1^2 + 4\mu_r \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|_1^2 \leq C (\nu_1 + \|\mathbf{v}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y}_t\|_{\mathbf{L}^2}^2).$$

Se integrarmos este resultado sobre  $[0, t]$  e usarmos a estimativa (3.54), obteremos

$$\nu_1 \|\nabla \mathbf{y}(\cdot, t)\|_1^2 + m \int_0^t \|\mathbf{y}_t(\cdot, s)\|_1^2 ds \leq C \nu_1 T_0 + C \int_0^t (\|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{y}(\cdot, s)\|_2^2) ds \quad (3.58)$$

Das estimativas (3.56) e (3.58), concluimos que

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \|\nabla \mathbf{v}(\cdot, t)\|_1^2 + \nu_1 \|\nabla \mathbf{y}(\cdot, t)\|_1^2 + m \int_0^t (\|\mathbf{v}_t(\cdot, s)\|_1^2 + \|\mathbf{y}_t(\cdot, s)\|_1^2) ds \\ \leq C(\bar{\mu} + \nu_1)T_0 + C \int_0^t (\|\sigma(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{y}(\cdot, s)\|_2^2) ds. \end{aligned}$$

Segue, da estimativa acima e da desigualdade (3.49), que

$$\begin{aligned} \|\sigma(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{y}(\cdot, t)\|_2^2 &\leq (\bar{\mu} + \nu_1)C T_0 \\ &+ C \int_0^t (\|\sigma(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_2^2 + \|\mathbf{y}(\cdot, s)\|_2^2) ds. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aplicando um corolário do Lema de Gronwall à desigualdade (3.59) (ver [3], página 90, Corolário 6.2), obtemos

$$\|\sigma(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_2^2 + \|\mathbf{y}(\cdot, t)\|_2^2 \leq (\bar{\mu} + \nu_1) C T_0 \exp(C T_0).$$

Isto completa a prova do Teorema 3.1. □

## Capítulo 4

# Soluções semi-fortes e fortes em domínios ilimitados

Utilizando condições similares usualmente impostas as equações não homogêneas de Navier-Stokes e usando o método semi-Galerkin espectral, provamos a existência e unicidade de soluções semi-fortes e fortes para o problema não homogêneo dos fluidos micropolares em domínios tridimensionais com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Os resultados que apresentaremos são similares aos que foram obtidos por Braz e Silva, Rojas-Medar e Villamizar-Roa em [11] para as equações de Navier-Stokes com densidade variável.

### 4.1 Introdução e resultados principais

Estudaremos as equações para o movimento de um fluido assimétrico viscoso, não-homogêneo e incompressível no conjunto aberto  $\Omega \times (0, T)$ , onde  $\Omega$  é um domínio em  $\mathbb{R}^3$ , não necessariamente limitado, com fronteira uniformemente de classe  $C^3$  e  $(0, T)$  é um intervalo de tempo. A exigência de que a fronteira seja de classe  $C^3$  deve-se a necessidade de se obter resultados que baseiam-se em estimativas “locais” para o problema de fronteira de Stokes, nas quais as constantes independem da medida (“tamanho”) da  $\partial\Omega$  e da medida de  $\Omega$  (veja o Lema 1.9). De fato, obteremos estimativas para a velocidade  $\mathbf{u}$  que implicam, usando os resultados de [32], em estimativas para

a densidade, que inicialmente satisfaz  $0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty$ . Recordemos que as equações que governam o movimento destes fluidos são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} + \rho \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho \mathbf{w}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{w}) + 4\mu_r \mathbf{w} \\ \quad = (c_a + c_d) \Delta \mathbf{w} + 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T). \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Complementamos o sistema (4.1) com as seguintes condições iniciais e de fronteiras:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T). \quad (4.3)$$

Se  $\Omega$  for ilimitado, impomos, também, a seguinte condição para as velocidades (linear e angular) no infinito:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad t \in (0, T). \quad (4.4)$$

Estudaremos existência e unicidade de soluções semi-fortes e fortes para o sistema (4.1) em  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , no caso de domínios tridimensionais ilimitados com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Adaptaremos as técnicas usadas em [23] para as equações clássicas de Navier-Stokes juntamente com argumentos usados em [7, 21, 48] para mostrar existência e unicidade de soluções local e global no tempo.

Primeiramente, daremos a definição de solução semi-forte.

**Definição 4.1.** Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^3$ , com fronteira uniformemente de classe  $C^3$  e  $T \in (0, \infty]$ . Se  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,  $D^2 \mathbf{u}_0, D^2 \mathbf{w}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  e  $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ , com  $0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty$  em  $\Omega$ , diremos que um terno  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  é uma *solução semi-forte* do problema (4.1)-(4.3) em  $\Omega \times (0, T^*)$  se:

(a) para  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , existir um tempo  $T^*, 0 < T^* \leq T$ , tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in C([0, T^*]; \mathbf{V}(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), \\ \mathbf{u}_t &\in L^2(0, T^*; \mathbf{H}(\Omega)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &\in C([0, T^*]; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), \\
\mathbf{w}_t &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ e} \\
\rho &\in L^\infty(\Omega \times (0, T^*)),
\end{aligned}$$

com  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  satisfazendo (4.1)<sub>1</sub>, (4.1)<sub>2</sub> e (4.1)<sub>3</sub> q.s. em  $\Omega \times (0, T^*)$ , (4.1)<sub>4</sub> no sentido das distribuições sobre  $\Omega \times (0, T^*)$ , as condições iniciais (4.2)<sub>1</sub>, (4.2)<sub>2</sub> e (4.2)<sub>3</sub> em  $\mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e  $W^{-1,\infty}(\Omega)$ , respectivamente, e as condições de contorno (4.3)<sub>1</sub> e (4.3)<sub>2</sub> no sentido do espaço  $\mathbf{V}(\Omega)$  e  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , respectivamente, q.s. em  $(0, T^*)$ .

(b) para  $T = \infty$  e  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , as funções  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  são tais que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &\in C([0, \infty); \mathbf{V}(\Omega)) \cap L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), \\
\mathbf{u}_t &\in L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{H}(\Omega)), \\
\mathbf{w} &\in C([0, \infty); \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), \\
\mathbf{w}_t &\in L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ e} \\
\rho &\in L^\infty(\Omega \times (0, \infty)).
\end{aligned}$$

Usando o projetor ortogonal  $P$  e os operadores  $A$  e  $L$ , definimos uma solução forte do problema (4.1)-(4.3) da seguinte maneira:

**Definição 4.2.** Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^3$ , com fronteira uniformemente de classe  $C^3$  e  $T \in (0, \infty]$ . Se  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$  e  $\rho_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ , com  $0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty$  em  $\Omega$ , diremos que um terno  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  é uma *solução forte* do problema (4.1)-(4.3) em  $\Omega \times (0, T^*)$  se:

(a) para  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  e  $\mathbf{f}_t, \mathbf{g}_t \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , existir um tempo  $T^*, 0 < T^* \leq T$ , tal que  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  satisfaz o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mu + \mu_r)(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ \quad \forall t \in (0, T^*), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \\ (\rho \mathbf{w}_t, \boldsymbol{\psi}) + (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + (L\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) + 4\mu_r(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + (\rho \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}), \\ \quad \forall t \in (0, T^*), \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T^*), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in C([0, T^*]; \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T^*]; \mathbf{H}(\Omega)), \\ \mathbf{w} &\in C([0, T^*]; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T^*]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ e} \\ \rho &\in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T^*)). \end{aligned}$$

(b) para  $T = \infty$  e  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{H}^1(\Omega))$  e  $\mathbf{f}_t, \mathbf{g}_t \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , as funções  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  são tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in C([0, \infty); \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); \mathbf{H}(\Omega)), \\ \mathbf{w} &\in C([0, \infty); \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ e} \\ \rho &\in C^1(\overline{\Omega} \times [0, \infty)). \end{aligned}$$

Consideremos  $P_k$  e  $R_k$  as projeções ortogonais de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  em  $\mathbf{V}_k := \text{span}[\boldsymbol{\varphi}^1, \dots, \boldsymbol{\varphi}^k]$  e  $\mathbf{W}_k := \text{span}[\boldsymbol{\phi}^1, \dots, \boldsymbol{\phi}^k]$ , respectivamente. As soluções do problema (4.5) podem ser obtidas usando-se o método semi-Galerkin (i.e., uma aproximação Galerkin para as velocidades e uma aproximação em dimensão infinita para a densidade; veja [35]) determinado pelos espaços  $\mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{W}_k$  e pelos operadores  $P_k$  e  $R_k$ . Mais precisamente, para cada  $k \in \mathbb{N}$  fixado, consideramos o problema de encontrar  $T^k \in (0, T]$ ,  $\mathbf{u}^k \in C^1([0, T^k]; \mathbf{V}_k)$ ,  $\mathbf{w}^k \in C^1([0, T^k]; \mathbf{W}_k)$  e  $\rho^k \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T^k])$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho^k \mathbf{u}_t^k + \rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}^k - \rho^k \mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mu + \mu_r)(A\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = 0, \\ (\rho^k \mathbf{w}_t^k + \rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k + 4\mu_r \mathbf{w}^k - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^k - \rho^k \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}) + (L\mathbf{w}^k, \boldsymbol{\psi}) = 0, \\ \quad \text{para } t \in (0, T^k), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_k, \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{W}_k, \\ \rho_t^k + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \rho^k = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T^k), \\ \mathbf{u}^k(\cdot, 0) = P_k \mathbf{u}_0(\cdot), \quad \mathbf{w}^k(\cdot, 0) = R_k \mathbf{w}_0(\cdot), \quad \rho^k(\cdot, 0) = \rho_0(\cdot) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

No sistema (4.6), temos um problema de valor inicial para um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas a uma equação de transporte. Usando o método das características, não é difícil provar que (4.6) possui exatamente uma solução  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  definida no intervalo de tempo  $[0, T^k)$ . As estimativas *a priori* estabelecidas abaixo provam que podemos tomar, de fato,  $T^k = T$  para todo  $k \geq 1$ .

Na próxima seção, obteremos estimativas para as soluções destes problemas aproximados em domínios limitados, independentes da medida de  $\Omega$ . Usaremos estas estimativas para estudar o caso de domínios ilimitados através da expansão de uma sequência de domínios limitados. Este método foi utilizado em [23] para as equações de Navier-Stokes usuais e em [11] para as equações de Navier-Stokes com densidade variável. O principal objetivo deste capítulo é provar os seguintes teoremas:

**Teorema 4.1.** *Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^3$ , com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Suponhamos que  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e  $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ , com  $0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty$  em  $\Omega$ . Se  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , então existe uma solução semi-forte  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  de (4.1)-(4.3) em  $\Omega \times (0, T^*)$ , para algum  $T^* \in (0, T]$ . As funções  $\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w}$  (e consequentemente  $p$ ), são tais que*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega)), \\ \mathbf{w} &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\ \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t, D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{w}, \nabla p &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \rho &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega)), \\ \rho_t &\in L^\infty(0, T^*; L_{loc}^\infty(\Omega)), \\ \nabla \rho &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}_{loc}^\infty(\Omega)), \\ \|\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \mathbf{u}_0\| &\rightarrow 0 \text{ e } \|\nabla \mathbf{w}(t) - \nabla \mathbf{w}_0\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

*Observação 4.1.* Se  $\Omega$  é limitado ou  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , a regularidade para a densidade é  $\rho_t \in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega))$  e  $\nabla \rho \in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$ . Este fato deve-se aos resultados conhecidos sobre a regularidade do problema de Stokes em tais domínios (ver Observação 4.6).

*Observação 4.2.* Supondo que  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$  e que as normas  $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$  e  $\|\mathbf{g}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$  são suficientemente pequenas, pode-se mostrar que existe uma solução semi-forte  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ , global no tempo, para o problema (4.1)-(4.3).

Com respeito a existência de soluções globais fortes, provamos:

**Teorema 4.2.** *Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^3$ , com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Assuma que os dados iniciais são tais que  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$  e  $\rho_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ , com  $0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty$  em  $\Omega$ . Se  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{H}^1(\Omega))$  e  $\mathbf{f}_t, \mathbf{g}_t \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$  e se as normas  $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$  e  $\|\mathbf{g}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$  são suficientemente pequenas, então existe uma solução forte  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ , do problema (4.1)-(4.3), globalmente no tempo. Ademais, existem constantes positivas  $C_\partial$  e  $C_{\partial, \gamma}$ ,  $\gamma > 0$ , tais que*

$$\sup_{t \geq 0} (\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2) \leq C_\partial, \quad (4.7)$$

$$\sup_{t \geq 0} (\|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2) \leq C_\partial, \quad (4.8)$$

$$\sup_{t \geq 0} (\|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \|B\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2) \leq C_\partial, \quad (4.9)$$

$$\sup_{t \geq 0} (\|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \|D^2 \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2) \leq C_\partial, \quad (4.10)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} (\|\mathbf{u}_t(\cdot, s)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, s)\|^2) ds \leq C_{\partial, \gamma}, \quad (4.11)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} (\|A\mathbf{u}(\cdot, s)\|^2 + \|B\mathbf{w}(\cdot, s)\|^2) ds \leq C_{\partial, \gamma}, \quad (4.12)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} (\|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, s)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, s)\|^2) ds \leq C_{\partial, \gamma}, \quad (4.13)$$

$$\rho \in C^1(\tilde{\Omega} \times [0, T]), \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega, \forall T \in (0, \infty). \quad (4.14)$$

Aqui, as constantes  $C_\partial$  e  $C_{\partial, \gamma}$  dependem somente da regularidade da  $\partial\Omega$ . Estas constantes independem da medida da  $\partial\Omega$  e da medida de  $\Omega$ .

*Observação 4.3.* Com as mesmas hipóteses para os dados iniciais  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{w}_0$  e  $\rho_0$  exigidas no Teorema 4.2, provamos, na Proposição 4.1, existência e unicidade de solução forte do problema (4.1)-(4.3) em  $\Omega \times (0, T^*)$ , para algum  $T^* \in (0, T]$ , supondo que  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  e  $\mathbf{f}_t, \mathbf{g}_t \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ .

*Observação 4.4.* Ainda sobre existência global, tal como em [7, 8], se as forças externas decaírem exponencialmente com o tempo, obteremos soluções mais regulares do que aquelas dadas pelo Teorema 4.2. De fato, combinando as técnicas das próximas seções e os argumentos de [7], podemos provar que se  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $\rho_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ , com  $0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty$  em  $\Omega$ ,  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{H}^1(\Omega))$ ,  $\mathbf{f}_t, \mathbf{g}_t \in$

$L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$  e, além disso, se para alguma constante  $\xi > 0$ ,

$$e^{\xi t}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad e^{\xi t}(\mathbf{f}_t + \mathbf{g}_t) \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega)),$$

então a solução forte  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  do problema (4.1)-(4.3) existe globalmente no tempo, desde que as normas  $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\|e^{\xi t} \mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$  e  $\|e^{\xi t} \mathbf{g}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$  sejam suficientemente pequenas. Pode-se provar, também, que existe uma constante positiva  $\xi^* \leq \xi$  tal que, para qualquer  $0 \leq \theta < \xi^*$ , as estimativas

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} e^{\xi^* t} (\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot, t)\|^2) &< +\infty, \\ \sup_{t \geq 0} e^{\theta t} (\|\mathbf{u}_t(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot, t)\|^2) &< +\infty, \\ \sup_{t \geq 0} e^{\theta t} (\|A\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \|L\mathbf{w}(\cdot, t)\|^2) &< +\infty, \\ \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\theta s} (\|\nabla \mathbf{u}_t(\cdot, s)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t(\cdot, s)\|^2) ds &< +\infty, \\ \sup_{t \geq 0} (\|\rho_t(\cdot, t)\|_{L^\infty} + \|\nabla \rho(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^\infty}) &< +\infty, \end{aligned}$$

são válidas.

## 4.2 Estimativas a priori

A partir de agora, denotaremos por  $C_\partial$  as várias constantes positivas que podem depender dos dados iniciais, das forças externas, das viscosidades e do tempo final  $T$ , mas não da medida da  $\partial\Omega$  nem da medida de  $\Omega$ , embora possam depender da regularidade da  $\partial\Omega$ .

Provaremos algumas estimativas *a priori* para as aproximações  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$ , soluções de (4.6), no caso de domínios tridimensionais limitados. As estimativas obtidas serão independentes da medida do domínio  $\Omega$ . Combinaremos os métodos utilizados em [23, 30] para obter estas estimativas.

**Lema 4.1.** *Seja  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  a solução do problema (4.6). Existe  $T^* \in (0, T]$ , independente de  $k$ , tal que as seguintes estimativas valem para todo  $t \in [0, T^*)$ :*

$$\alpha \leq \rho^k(\mathbf{x}, t) \leq \beta \quad \left( \alpha = \inf_{\Omega} \rho_0, \quad \beta = \sup_{\Omega} \rho_0 \right), \quad (4.15)$$

$$\|\mathbf{u}^k(t)\|^2 + \|\mathbf{w}^k(t)\|^2 \leq C_{\partial}, \quad (4.16)$$

$$\int_0^t (\|\nabla \mathbf{u}^k(\tau)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(\tau)\|^2) d\tau \leq C_{\partial}, \quad (4.17)$$

$$\|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(t)\|^2 \leq F_1(t), \quad (4.18)$$

$$\int_0^t (\|A\mathbf{u}^k(\tau)\|^2 + \|B\mathbf{w}^k(\tau)\|^2) d\tau \leq F_2(t), \quad (4.19)$$

$$\int_0^t (\|\mathbf{u}_t^k(\tau)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(\tau)\|^2) d\tau \leq F_3(t), \quad (4.20)$$

$$\int_0^t (\|D^2 \mathbf{u}^k(\tau)\|^2 + \|D^2 \mathbf{w}^k(\tau)\|^2) d\tau \leq F_4(t), \quad (4.21)$$

onde  $F_j : [0, T^*) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , são funções contínuas.

**Demonstração.** Dado  $\mathbf{u}^k$ , usando o método das características (veja [32]), obtemos  $\rho^k$ , solução de (4.6)<sub>3</sub>, que satisfaz (4.15).

Note que se multiplicarmos a equação (4.6)<sub>3</sub> por  $\boldsymbol{\nu}$  e tomarmos o produto interno da equação resultante também por  $\boldsymbol{\nu}$ , obteremos

$$(\rho_t^k \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = -((\mathbf{u}^k \cdot \nabla \rho^k) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = -(\operatorname{div}(\rho^k \mathbf{u}^k) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = 2(\rho^k (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}),$$

para todo  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  com  $\boldsymbol{\nu}_t \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Logo, da identidade acima, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho^k)^{1/2} \boldsymbol{\nu}\|^2 = (\rho^k \boldsymbol{\nu}_t, \boldsymbol{\nu}) + \frac{1}{2} (\rho_t^k \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = (\rho^k \boldsymbol{\nu}_t, \boldsymbol{\nu}) + (\rho^k (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}). \quad (4.22)$$

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^k$  e  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{w}^k$  nas equações (4.6)<sub>1</sub> e (4.6)<sub>2</sub>, respectivamente, e tendo em vista a identidade (4.22), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho^k)^{1/2} \mathbf{u}^k\|^2 + (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 &= (\rho^k \mathbf{f}, \mathbf{u}^k) + 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}^k, \mathbf{u}^k), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho^k)^{1/2} \mathbf{w}^k\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}^k\|^2 &+ 4\mu_r \|\mathbf{w}^k\|^2 \\ &= (\rho^k \mathbf{g}, \mathbf{w}^k) + 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k). \end{aligned}$$

Somando estas duas equações, usando a estimativa (4.15) e as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|(\rho^k)^{1/2} \mathbf{u}^k\|^2 + \|(\rho^k)^{1/2} \mathbf{w}^k\|^2) + (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 \\ + 2(c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}^k\|^2 \leq C_{\partial} (\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2) + C_{\partial} (\|\mathbf{u}^k\|^2 + \|\mathbf{w}^k\|^2). \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima com respeito ao tempo de 0 à  $t$  e usando as hipóteses sob as forças externas e os dados iniciais, obtemos

$$\begin{aligned} & \alpha \|\mathbf{u}^k(t)\|^2 + \alpha \|\mathbf{w}^k(t)\|^2 + (\mu + \mu_r) \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^k(\tau)\|^2 d\tau + (c_a + c_d) \int_0^t \|\nabla \mathbf{w}^k(\tau)\|^2 d\tau \\ & + 2(c_0 + c_d - c_a) \int_0^t \|\operatorname{div} \mathbf{w}^k(\tau)\|^2 d\tau \leq C_\partial + C_\partial \int_0^t (\|\mathbf{u}^k(\tau)\|^2 + \|\mathbf{w}^k(\tau)\|^2) d\tau. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\|\mathbf{u}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{w}^k(\cdot, t)\|^2 \leq C_\partial \exp(C_\partial t) \leq C_\partial \exp(C_\partial T).$$

Logo, da desigualdade (4.23), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^t (\|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(\cdot, \tau)\|^2) d\tau & \leq C_\partial + C_\partial^2 \int_0^t \exp(C_\partial \tau) d\tau \\ & \leq C_\partial + C_\partial^2 \exp(C_\partial T) t \\ & \leq C_\partial + C_\partial^2 \exp(C_\partial T) T. \end{aligned}$$

Estes dois últimos resultados implicam na estimativas (4.16) e (4.17). Isto prova, em particular, que as soluções  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  são definidas em todo o intervalo  $[0, T]$ .

Agora, tomemos na equação (4.6)<sub>1</sub>,  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t^k$  e, logo em seguida,  $\mathbf{v} = -\varepsilon A \mathbf{u}^k$ , com  $\varepsilon > 0$  à ser escolhido posteriormente. Somando as equações resultantes e trabalhando como em [30], obtemos

$$\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + (\mu + \mu_r) \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \frac{(\mu + \mu_r)^2}{2\alpha} \|A \mathbf{u}^k\|^2 \leq C_\partial (\|\mathbf{f}\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k\|^2) \quad (4.24)$$

Precisamos encontrar uma desigualdade diferencial similar para  $\mathbf{w}^k$ . Para isto, tomamos  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{w}_t^k$  em (4.6)<sub>2</sub> para obter

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \frac{c_a + c_d}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \frac{c_0 + c_d - c_a}{2} \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \mathbf{w}^k\|^2 + 2\mu_r \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}^k\|^2 \\ & \leq C_\partial (\|\mathbf{g}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k\|^2). \end{aligned}$$

Também, se tomarmos  $\boldsymbol{\psi} = B \mathbf{w}^k$  em (4.6)<sub>2</sub>, facilmente obteremos

$$\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \frac{c_a + c_d}{2} \|B \mathbf{w}^k\|^2 \leq C_\partial (\|\mathbf{g}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k\|^2).$$

Consequentemente, adicionando as desigualdades acima obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \frac{c_a + c_d + \alpha}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \frac{c_0 + c_d - c_a}{2} \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \mathbf{w}^k\|^2 + 2\mu_r \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}^k\|^2 \\ & + \frac{c_a + c_d}{2} \|B \mathbf{w}^k\|^2 \leq C_\partial (\|\mathbf{g}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k\|^2). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Usando as desigualdades de Sobolev  $\|\mathbf{v}\|_6 \leq C_\partial \|\nabla \mathbf{v}\|$  e  $\|\mathbf{v}\|_3 \leq C_\partial \|\mathbf{v}\|^{1/2} \|\mathbf{v}\|_6^{1/2}$  válidas  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , e também as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k\|^2 \leq \|\mathbf{u}^k\|_6^2 \|\nabla \mathbf{u}^k\|_3^2 \leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\|^3 \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\| \leq \varepsilon \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|^2 + C_{\partial, \varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^6,$$

para qualquer  $\varepsilon > 0$ . Analogamente, temos

$$\|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k\|^2 \leq \delta \|B \mathbf{w}^k\|^2 + C_{\partial, \delta} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2, \quad \forall \delta > 0.$$

Adicionando as desigualdades (4.24) e (4.25) e usando as estimativas acima com  $\varepsilon = \frac{(\mu + \mu_r)^2}{4\alpha}$  e  $\delta = \frac{c_a + c_d}{4}$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \theta_k(t) + \psi_k(t) \leq \phi(t) + C_\partial \theta_k^3(t),$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_k(t) &= 2(\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + (c_a + c_d + \alpha) \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}^k\|^2 + 4\mu_r \|\mathbf{w}^k\|^2 + 1, \\ \psi_k(t) &= \alpha \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + \frac{(\mu + \mu_r)^2}{2\alpha} \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|^2 + \alpha \|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \frac{c_a + c_d}{2} \|B \mathbf{w}^k\|^2, \\ \phi(t) &= C_\partial (\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2). \end{aligned}$$

Como  $\theta_k(0) \leq 2(\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}_0\|^2 + (c_a + c_d + \alpha) \|\nabla \mathbf{w}_0\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}_0\|^2 + 4\mu_r \|\mathbf{w}_0\|^2 + 1$ , ou seja,  $\theta_k(0)$  é limitado independentemente de  $k$ , temos, pelo Lema 1.10, que existem  $T^* \in (0, T]$  e determinadas funções contínuas  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  definidas em  $[0, T^*)$ , tais que

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(t)\|^2 &\leq F_1(t), \\ \int_0^t (\|\mathbf{A} \mathbf{u}^k(\tau)\|^2 + \|B \mathbf{w}^k(\tau)\|^2) d\tau &\leq F_2(t), \\ \int_0^t (\|\mathbf{u}_t^k(\tau)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(\tau)\|^2) d\tau &\leq F_3(t). \end{aligned}$$

Isto prova as estimativas (4.18)-(4.20). O Lema 1.9 nos dá

$$\|D^2 \mathbf{u}^k\|^2 \leq C_\partial (\|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2). \quad (4.26)$$

Similarmente, também temos que

$$\|D^2 \mathbf{w}^k\|^2 \leq C_\partial (\|B \mathbf{w}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2). \quad (4.27)$$

Usando as desigualdades (4.17) e (4.19), a partir das estimativas (4.26) e (4.27), obtemos a desigualdade (4.21). Isto completa a prova do lema.  $\square$

Agora, obteremos estimativas de maior regularidade para  $\mathbf{u}^k$  e  $\mathbf{w}^k$ .

**Lema 4.2.** *Seja  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  a solução do problema (4.6). Para todo  $t \in [0, T^*)$ , onde  $T^*$  é dado no Lema 4.1, temos:*

$$\|\mathbf{u}_t^k(t)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(t)\|^2 \leq F_5(t), \quad (4.28)$$

$$\int_0^t (\|\nabla \mathbf{u}_t^k(\tau)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t^k(\tau)\|^2) d\tau \leq F_6(t), \quad (4.29)$$

$$\|A\mathbf{u}^k(t)\|^2 + \|B\mathbf{w}^k(t)\|^2 \leq F_7(t), \quad (4.30)$$

$$\|\mathbf{u}^k(t)\|_6^2 + \|\mathbf{w}^k(t)\|_6^2 \leq F_8(t), \quad (4.31)$$

$$\|D^2\mathbf{u}^k(t)\|^2 + \|D^2\mathbf{w}^k(t)\|^2 \leq F_9(t), \quad (4.32)$$

onde  $F_j : [0, T^*) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 5, \dots, 9$ , são funções contínuas.

**Demonstração.** Derivando (4.6)<sub>1</sub> e (4.6)<sub>2</sub> com respeito a  $t$ , tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t^k$ ,  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{w}_t^k$ , usando o fato que  $\rho_t^k = -\operatorname{div}(\rho^k \mathbf{u}^k)$  e trabalhando como em [7], obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k\|^2 + (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 &= -(\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^k, \mathbf{u}_t^k) + 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}_t^k, \mathbf{u}_t^k) \\ &\quad + ((\rho^k \mathbf{f})_t, \mathbf{u}_t^k) - ((\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{u}^k)_t, \mathbf{u}_t^k) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}_t^k\|^2 + 4\mu_r \|\mathbf{w}_t^k\|^2 \\ = -(\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}_t^k, \mathbf{w}_t^k) + 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{u}_t^k, \mathbf{w}_t^k) + ((\rho^k \mathbf{g})_t, \mathbf{w}_t^k) - ((\rho^k \mathbf{u}^k \cdot \nabla \mathbf{w}^k)_t, \mathbf{w}_t^k). \end{aligned}$$

Somando estas duas identidades, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k\|^2 + \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k\|^2 \right) + (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2 \\ + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}_t^k\|^2 + 4\mu_r \|\mathbf{w}_t^k\|^2 \\ = -(\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^k, \mathbf{u}_t^k) + 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{w}_t^k, \mathbf{u}_t^k) + (\rho^k \mathbf{f}_t, \mathbf{u}_t^k) + (\rho_t^k \mathbf{f}, \mathbf{u}_t^k) \\ - (\rho_t^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{u}_t^k) - (\rho^k(\mathbf{u}_t^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{u}_t^k) - (\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^k, \mathbf{u}_t^k) \\ - (\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}_t^k, \mathbf{w}_t^k) + 2\mu_r(\operatorname{rot} \mathbf{u}_t^k, \mathbf{w}_t^k) + (\rho^k \mathbf{g}_t, \mathbf{w}_t^k) + (\rho_t^k \mathbf{g}, \mathbf{w}_t^k) \\ - (\rho_t^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k, \mathbf{w}_t^k) - (\rho^k(\mathbf{u}_t^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k, \mathbf{w}_t^k) - (\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}_t^k, \mathbf{w}_t^k). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k\|^2 + \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k\|^2 \right) + (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2 \\ + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}_t^k\|^2 + 4\mu_r \|\mathbf{w}_t^k\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\Omega} (2\rho^k |\mathbf{u}^k| |\mathbf{u}_t^k| |\nabla \mathbf{u}_t^k| + 2\mu_r |\operatorname{rot} \mathbf{w}_t^k| |\mathbf{u}_t^k| + \rho^k |\mathbf{f}_t| |\mathbf{u}_t^k|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} (\rho^k |\mathbf{u}^k| |\mathbf{u}_t^k| |\nabla \mathbf{f}| + \rho^k |\mathbf{u}^k| |\nabla \mathbf{u}_t^k| |\mathbf{f}| + \rho^k |\mathbf{u}^k| |\mathbf{u}_t^k| |\nabla \mathbf{u}^k|^2) \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} (\rho^k |\mathbf{u}^k|^2 |\mathbf{u}_t^k| |D^2 \mathbf{u}^k| + \rho^k |\mathbf{u}^k|^2 |\nabla \mathbf{u}^k| |\nabla \mathbf{u}_t^k| + \rho^k |\mathbf{u}_t^k|^2 |\nabla \mathbf{u}^k|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} (2\rho^k |\mathbf{u}^k| |\mathbf{w}_t^k| |\nabla \mathbf{w}_t^k| + 2\mu_r |\operatorname{rot} \mathbf{u}_t^k| |\mathbf{w}_t^k| + \rho^k |\mathbf{g}_t| |\mathbf{w}_t^k| + \rho^k |\mathbf{u}^k| |\mathbf{w}_t^k| |\nabla \mathbf{g}|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} (\rho^k |\mathbf{u}^k| |\nabla \mathbf{w}_t^k| |\mathbf{g}| + \rho^k |\mathbf{u}^k| |\mathbf{w}_t^k| |\nabla \mathbf{u}^k| |\nabla \mathbf{w}_t^k| + \rho^k |\mathbf{u}^k|^2 |\mathbf{w}_t^k| |D^2 \mathbf{w}^k|) \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} (\rho^k |\mathbf{u}^k|^2 |\nabla \mathbf{w}^k| |\nabla \mathbf{w}_t^k| + \rho^k |\mathbf{u}_t^k| |\mathbf{w}_t^k| |\nabla \mathbf{w}^k|) \, d\mathbf{x} =: \sum_{j=1}^{18} I_j. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Acima usamos a identidade

$$(\rho_t^k \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}) = -((\mathbf{u}^k \cdot \nabla \rho^k) \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}) = -(\operatorname{div}(\rho^k \mathbf{u}^k) \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}) = (\rho^k (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}) + (\rho^k (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}),$$

válida para todos  $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  com  $\boldsymbol{\nu}_t, \mathbf{v}_t \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Agora, estimaremos cada integral  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, 18$ , na desigualdade (4.33). Para isto, usaremos, basicamente, as desigualdades da interpolação, de Hölder, de Sobolev e de Young, o que nos permitirá obter estimativas independentes da medida do domínio  $\Omega$ , como segue:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 2\|\rho^k\|_{\infty} \|\mathbf{u}^k\|_6 \|\mathbf{u}_t^k\|_3 \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{u}_t^k\|^{1/2} \|\mathbf{u}_t^k\|_6^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{u}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^{3/2} \\
&\leq C_{\partial, \varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2, \\
I_2 &= 2\mu_r \int_{\Omega} |\mathbf{w}_t^k| |\operatorname{rot} \mathbf{u}_t^k| \, d\mathbf{x} \\
&\leq C_{\partial} \|\mathbf{w}_t^k\| \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial, \varepsilon} \|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2, \\
I_3 &\leq C_{\partial} (\|\mathbf{f}_t\|^2 + \|\mathbf{u}_t^k\|^2), \\
I_4 &\leq \|\rho^k\|_{\infty} \|\mathbf{u}^k\|_6 \|\mathbf{u}_t^k\|_3 \|\nabla \mathbf{f}\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{u}_t^k\|^{1/2} \|\mathbf{u}_t^k\|_6^{1/2} \|\nabla \mathbf{f}\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{u}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{f}\| \\
&\leq C_{\partial, \varepsilon} (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{f}\|^2) + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq \|\rho^k\|_\infty \|\mathbf{u}^k\|_6 \|\mathbf{f}\|_3 \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial,\varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2, \\
I_6 &\leq \|\rho^k\|_\infty \|\mathbf{u}^k\|_6 \|\mathbf{u}_t^k\|_6 \|\nabla \mathbf{u}^k\|_3^2 \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\nabla \mathbf{u}^k\|_6 \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \|D^2 \mathbf{u}^k\| \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| (\|A\mathbf{u}^k\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|) \\
&= C_\partial (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|A\mathbf{u}^k\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^3) \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial,\varepsilon} (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|A\mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^6) + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2, \\
I_7 &\leq \|\rho^k\|_\infty \|\mathbf{u}^k\|_6^2 \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \|D^2 \mathbf{u}^k\| \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| (\|A\mathbf{u}^k\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|) \\
&\leq C_{\partial,\varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 (\|A\mathbf{u}^k\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|)^2 + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 \\
&\leq C_{\partial,\varepsilon} (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|A\mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^6) + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2, \\
I_8 &\leq \|\rho^k\|_\infty \|\mathbf{u}^k\|_6^2 \|\nabla \mathbf{u}^k\|_6 \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|D^2 \mathbf{u}^k\| \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 (\|A\mathbf{u}^k\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|) \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial,\varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 (\|A\mathbf{u}^k\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|)^2 + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 \\
&\leq C_{\partial,\varepsilon} (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|A\mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^6) + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2, \\
I_9 &\leq \|\rho^k\|_\infty \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{u}_t^k\|_6 \|\mathbf{u}_t^k\|_3 \\
&\leq \|\rho^k\|_\infty \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \|\mathbf{u}_t^k\|_6^{1/2} \|\mathbf{u}_t^k\|^{1/2} \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^{3/2} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{u}_t^k\|^{1/2} \\
&\leq C_{\partial,\varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2, \\
I_{10} &\leq 2\|\rho^k\|_\infty \|\mathbf{u}^k\|_6 \|\mathbf{w}_t^k\|_3 \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\mathbf{w}_t^k\|_6^{1/2} \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^{3/2} \\
&\leq C_{\partial,\delta} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= 2\mu_r \int_{\Omega} |\mathbf{u}_t^k| |\operatorname{rot} \mathbf{w}_t^k| d\mathbf{x} \\
&\leq C_{\partial} \|\mathbf{u}_t^k\| \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial, \delta} \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2, \\
I_{12} &\leq C_{\partial} (\|\mathbf{g}_t\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k\|^2), \\
I_{13} &\leq \|\rho^k\|_{\infty} \|\mathbf{u}^k\|_6 \|\mathbf{w}_t^k\|_3 \|\nabla \mathbf{g}\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\mathbf{w}_t^k\|_6^{1/2} \|\nabla \mathbf{g}\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{g}\| \\
&\leq C_{\partial, \delta} (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{g}\|^2) + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2, \\
I_{14} &\leq \|\rho^k\|_{\infty} \|\mathbf{u}^k\|_6 \|\mathbf{g}\|_3 \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^1} \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial, \delta} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2, \\
I_{15} &\leq \|\rho^k\|_{\infty} \|\mathbf{u}^k\|_6 \|\mathbf{w}_t^k\|_3 \|\nabla \mathbf{u}^k\|_6 \|\nabla \mathbf{w}^k\|_3 \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\mathbf{w}_t^k\|_6 \|D^2 \mathbf{u}^k\| \|\nabla \mathbf{w}^k\|_6 \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \|D^2 \mathbf{u}^k\| \|D^2 \mathbf{w}^k\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\| (\|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|) (\|B \mathbf{w}^k\| + \|\nabla \mathbf{w}^k\|) \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial, \delta} (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|B \mathbf{w}^k\|^2 + \|B \mathbf{w}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2) + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2, \\
I_{16} &\leq \|\rho^k\|_{\infty} \|\mathbf{u}^k\|_6^2 \|\mathbf{w}_t^k\|_3 \|D^2 \mathbf{w}^k\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|\mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\mathbf{w}_t^k\|_6^{1/2} (\|B \mathbf{w}^k\| + \|\nabla \mathbf{w}^k\|) \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|\mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^{1/2} (\|B \mathbf{w}^k\| + \|\nabla \mathbf{w}^k\|) \\
&\leq C_{\partial, \delta} (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|B \mathbf{w}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k\|^2) + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2, \\
I_{17} &\leq \|\rho^k\|_{\infty} \|\mathbf{u}^k\|_6^2 \|\nabla \mathbf{w}^k\|_6 \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|D^2 \mathbf{w}^k\| \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 (\|B \mathbf{w}^k\| + \|\nabla \mathbf{w}^k\|) \|\nabla \mathbf{w}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial, \delta} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 (\|B \mathbf{w}^k\| + \|\nabla \mathbf{w}^k\|)^2 + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2 \\
&\leq C_{\partial, \delta} (\|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|B \mathbf{w}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2) + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{18} &\leq \|\rho^k\|_\infty \|\nabla \mathbf{w}^k\| \|\mathbf{u}_t^k\|_6 \|\mathbf{w}_t^k\|_3 \\
&\leq \|\rho^k\|_\infty \|\nabla \mathbf{w}^k\| \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \|\mathbf{w}_t^k\|_6^{1/2} \|\mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \\
&\leq C_\partial \|\mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{w}^k\| \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^k\| \\
&\leq C_{\partial, \varepsilon, \delta} \|\nabla \mathbf{w}^k\|^4 \|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 + \delta \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2.
\end{aligned}$$

Aplicando as estimativas acima na desigualdade (4.33) e tomando  $\varepsilon = \frac{\mu + \mu_r}{18}$  e  $\delta = \frac{c_a + c_d}{16}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left( \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k\|^2 + \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k\|^2 \right) + (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2 \\
&\quad + 2(c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \mathbf{w}_t^k\|^2 + 8\mu_r \|\mathbf{w}_t^k\|^2 \\
&\leq C_\partial [\|\mathbf{u}_t^k\|^2 (1 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4) + \|\mathbf{w}_t^k\|^2 (1 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^4) + \|\mathbf{f}_t\|^2 + \|\mathbf{g}_t\|^2] \\
&\quad + C_\partial [\|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 (\|A\mathbf{u}^k\|^2 + \|B\mathbf{w}^k\|^2) + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|A\mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2] \\
&\quad + C_\partial [\|\nabla \mathbf{u}^k\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + (\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^1}^2) (1 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2)]. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Podemos reescrever a desigualdade (4.34) da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \phi_k(t) + \psi_k(t) \leq M_k(t) \phi_k(t) + N_k(t), \quad (4.35)$$

onde

$$\begin{aligned}
\phi_k(t) &= \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k(t)\|^2 + \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k(t)\|^2, \\
\psi_k(t) &= (\mu + \mu_r) \|\nabla \mathbf{u}_t^k(t)\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \mathbf{w}_t^k(t)\|^2, \\
M_k(t) &= C_\partial (1 + \|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^4 + \|\nabla \mathbf{w}^k(t)\|^4), \\
N_k(t) &= C_\partial [\|\mathbf{f}_t(t)\|^2 + \|\mathbf{g}_t(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^4 (\|A\mathbf{u}^k(t)\|^2 + \|B\mathbf{w}^k(t)\|^2) \\
&\quad + \|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^2 \|A\mathbf{u}^k(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^4 \\
&\quad + \|\nabla \mathbf{w}^k(t)\|^2 + (\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2) (1 + \|\nabla \mathbf{u}^k(t)\|^2)].
\end{aligned}$$

Note que se colocarmos  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t^k$  em (4.6)<sub>1</sub>, obteremos

$$\|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k\|^2 = (\rho^k \mathbf{f}, \mathbf{u}_t^k) + 2\mu_r (\operatorname{rot} \mathbf{w}^k, \mathbf{u}_t^k) - (\rho^k (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{u}_t^k) - (\mu + \mu_r) (A\mathbf{u}^k, \mathbf{u}_t^k).$$

Aplicando a desigualdade de Young na igualdade acima e usando que  $\mathbf{u}_0^k \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,

$\mathbf{w}_0^k \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e  $\|D^2 \mathbf{u}_0^k\| < \infty$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_t^k(0)\|^2 &\leq C_\partial (\|(\mathbf{u}^k(0) \cdot \nabla) \mathbf{u}^k(0)\|^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(0)\|^2 + \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k(0)\|^2) \\ &\leq C_\partial (\|\mathbf{u}^k(0)\|_6^2 \|\nabla \mathbf{u}^k(0)\|_3^2 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(0)\|^2 + \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k(0)\|^2) \\ &\leq C_\partial (\|\nabla \mathbf{u}^k(0)\|^3 \|D^2 \mathbf{u}^k(0)\| + \|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(0)\|^2 + \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k(0)\|^2) \\ &\leq C_\partial (\|\nabla \mathbf{u}_0\|^3 + \|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_0\|^2 + \|\mathbf{A} \mathbf{u}_0\|^2). \end{aligned}$$

Analogamente, colocando  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{w}_t^k$  em (4.6)<sub>2</sub>, obtemos

$$\|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k\|^2 = (\rho^k \mathbf{g}, \mathbf{w}_t^k) + 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{u}^k, \mathbf{w}_t^k) - (\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k, \mathbf{w}_t^k) - (L \mathbf{w}^k, \mathbf{w}_t^k) - 4\mu_r(\mathbf{w}^k, \mathbf{w}_t^k).$$

Mais uma vez pela de desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_t^k(0)\|^2 &\leq C_\partial (\|(\mathbf{u}^k(0) \cdot \nabla) \mathbf{w}^k(0)\|^2 + \|\mathbf{g}(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k(0)\|^2 + \|L \mathbf{w}^k(0)\|^2 + \|\mathbf{w}^k(0)\|^2) \\ &\leq C_\partial (\|\mathbf{u}^k(0)\|_6^2 \|\nabla \mathbf{w}^k(0)\|_3^2 + \|\mathbf{g}(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k(0)\|^2 + \|L \mathbf{w}^k(0)\|^2 + \|\mathbf{w}^k(0)\|^2) \\ &\leq C_\partial [\|\nabla \mathbf{u}^k(0)\|^2 \|\nabla \mathbf{w}^k(0)\| \|D^2 \mathbf{w}^k(0)\| + \|\mathbf{g}(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k(0)\|^2 \\ &\quad + \|L \mathbf{w}^k(0)\|^2 + \|\mathbf{w}^k(0)\|^2] \\ &\leq C_\partial (\|\nabla \mathbf{u}_0\|^2 \|\nabla \mathbf{w}_0\| + \|\mathbf{g}(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_0\|^2 + \|L \mathbf{w}_0\|^2 + \|\mathbf{w}_0\|^2), \end{aligned}$$

pois  $\mathbf{u}_0^k \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\mathbf{w}_0^k \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e  $\|D^2 \mathbf{w}_0^k\| < \infty$ . Logo, das duas últimas desigualdades, segue que  $\|\mathbf{u}_t^k(0)\|^2$  e  $\|\mathbf{w}_t^k(0)\|^2$  são uniformemente limitadas. Portanto, como  $\phi_k(0) \leq \beta (\|\mathbf{u}_t^k(0)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(0)\|^2)$ , temos que  $\phi_k(0)$  é uniformemente limitado. Usando o Lema 1.11, a desigualdade (4.35) implica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_t^k(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(\cdot, t)\|^2 &\leq F_5(t), \\ \int_0^t (\|\nabla \mathbf{u}_t^k(\cdot, \tau)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t^k(\cdot, \tau)\|^2) d\tau &\leq F_6(t), \end{aligned}$$

para certas funções contínuas  $F_5$  e  $F_6$  definidas em  $[0, T^*)$ . Isto prova as estimativas (4.28) e (4.29). Para provarmos a desigualdade (4.30), tomamos, inicialmente,  $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u}^k$  na equação (4.6)<sub>1</sub> e após algumas contas simples obtemos

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_r) \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|^2 &= (\rho^k \mathbf{f}, \mathbf{A} \mathbf{u}^k) + 2\mu_r(\text{rot } \mathbf{w}^k, \mathbf{A} \mathbf{u}^k) - (\rho^k \mathbf{u}_t^k, \mathbf{A} \mathbf{u}^k) - (\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{A} \mathbf{u}^k) \\ &\leq C_\partial \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\| (\|\mathbf{u}_t^k\| + \|\nabla \mathbf{w}^k\| + \|\mathbf{f}\| + \|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k\|). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\| \leq C_\partial (\|\mathbf{u}_t^k\| + \|\nabla \mathbf{w}^k\| + \|\mathbf{f}\| + \|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k\|). \quad (4.36)$$

Observe que

$$\|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k\| \leq C_\partial \|\nabla \mathbf{u}^k\|^{3/2} \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|^{1/2} \leq C_{\partial, \varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^3 + \varepsilon \|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\|, \quad (4.37)$$

para qualquer  $\varepsilon > 0$ . Combinando as desigualdades (4.36) e (4.37) com  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , deduzimos que

$$\|\mathbf{A} \mathbf{u}^k\| \leq C_\partial (\|\mathbf{u}_t^k\| + \|\nabla \mathbf{w}^k\| + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^3 + \|\mathbf{f}\|). \quad (4.38)$$

Similarmente a obtenção da desigualdade (4.38), pode-se mostrar que

$$\|B \mathbf{w}^k\|^2 \leq C_\partial (\|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2). \quad (4.39)$$

A estimativa (4.30) segue das desigualdades (4.38) e (4.39) juntamente com a hipótese sob as forças externas e as desigualdades (4.18) e (4.28). Usando a desigualdade de Sobolev

$$\|\phi\|_6 \leq C_\partial \|\nabla \phi\|,$$

que é válida para todo  $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , juntamente com a desigualdade (4.18), obtemos a estimativa (4.31). Por fim, para obter a desigualdade (4.32), basta observar as estimativas (4.18), (4.26), (4.27) e (4.30). Isto completa a prova do lema.  $\square$

É possível obter estimativas de maior regularidade usando a regularidade do operador de Stokes  $A = -P\Delta$  (veja [4]). De fato, primeiro note que

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_r)(\nabla \mathbf{u}^k, \nabla \phi) &= -(\rho^k \mathbf{u}_t^k + \rho^k (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}^k - \rho^k \mathbf{f}, \phi) \\ &=: (\boldsymbol{\sigma}^k, \phi), \end{aligned}$$

para qualquer  $\phi \in \mathcal{V}(\Omega)$ . As estimativas anteriores implicam que  $\boldsymbol{\sigma}^k$  é uniformemente limitada em  $L^2(0, T'; \mathbf{L}^6(\Omega))$  para todo  $T' < T^*$ . Portanto, pelos resultados de Amrouche e Girault em [4] para o operador de Stokes, segue que

$$\mathbf{u}^k \in L^2(0, T'; \mathbf{W}^{2,6}(\Omega)). \quad (4.40)$$

Em particular, pelos teoremas de imersões de Sobolev, temos que

$$\nabla \mathbf{u}^k \in L^2(0, T'; \mathbf{L}^\infty(\Omega)). \quad (4.41)$$

Analogamente, para qualquer  $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} (L \mathbf{w}^k, \psi) &= -(\rho^k \mathbf{w}_t^k + \rho^k (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k + 4\mu_r \mathbf{w}^k - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u}^k - \rho^k \mathbf{g}, \psi) \\ &=: (\boldsymbol{\eta}^k, \psi). \end{aligned}$$

Como antes,  $\boldsymbol{\eta}^k$  é uniformemente limitada em  $L^2(0, T'; \mathbf{L}^6(\Omega))$  para todo  $T' < T^*$ . Portanto,  $\mathbf{w}^k$  é uniformemente limitada em  $L^2(0, T'; \mathbf{W}^{2,6}(\Omega))$ . Pelas imersões de Sobolev,  $\nabla \mathbf{w}^k$  também é uniformemente limitada em  $L^2(0, T'; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$ .

Como  $\rho_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ , aplicando os resultados de Ladyzhenskaya e Solonnikov em [32] (veja Lema 1.3) para  $\rho^k$ , obtemos

$$\nabla \rho^k \in L^\infty(0, T'; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \quad (4.42)$$

$$\rho_t^k \in L^\infty(0, T'; L^\infty(\Omega)), \quad (4.43)$$

para todo  $T' < T^*$ . De fato, podemos mostrar que

$$\|\nabla \rho^k(\cdot, t)\|_\infty \leq C \|\nabla \rho_0(\cdot)\|_\infty \exp \left( \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, \tau)\|_\infty d\tau \right)$$

e

$$\|\rho_t^k(\cdot, t)\|_\infty \leq C \|\mathbf{u}^k(\cdot, t)\|_\infty \|\nabla \rho_0(\cdot)\|_\infty \exp \left( \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, \tau)\|_\infty d\tau \right).$$

Para outros detalhes veja a referência [8]. Resumimos os resultados acima no seguinte

**Lema 4.3.** *Seja  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  a solução do problema (4.6). Para todo  $t \in [0, T^*)$ ,  $T^*$  dado no Lema 4.1, temos:*

$$\int_0^t (\|\mathbf{u}^k(\tau)\|_{2,6}^2 + \|\mathbf{w}^k(\tau)\|_{2,6}^2) d\tau \leq F_{10}(t), \quad (4.44)$$

$$\int_0^t (\|\nabla \mathbf{u}^k(\tau)\|_\infty^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(\tau)\|_\infty^2) d\tau \leq F_{11}(t), \quad (4.45)$$

$$\|\nabla \rho^k(t)\|_\infty \leq F_{12}(t), \quad \|\rho_t^k(t)\|_\infty \leq F_{13}(t), \quad (4.46)$$

onde  $F_j$ ,  $j = 10, \dots, 13$ , são funções (reais) contínuas definidas em  $[0, T^*)$ .

*Observação 4.5.* As estimativas obtidas até o momento para  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  são válidas em domínios limitados. As constantes que aparecem nas estimativas dos Lemas 4.1 e 4.2 são independentes da medida do domínio. Este é o principal ponto do argumento, e é o que nos permitirá estender estas estimativas para domínios ilimitados, como realizado na próxima seção. No entanto, não sabemos se as constantes das estimativas do Lema 4.3 são independentes da medida do domínio  $\Omega$ . Este seria o caso se resultados análogos aos resultados de [4] fossem válidos para domínios ilimitados gerais, o que é, até onde sabemos, uma questão em aberto.

*Observação 4.6.* Se  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , usando os resultados de [2] relacionados com a regularidade do problema de Stokes quando a força externa  $\mathbf{f}$  pertence ao espaço  $\mathbf{L}^6(\mathbb{R}^n)$ , concluímos que a estimativa (4.40), e conseqüentemente as estimativas (4.41)-(4.43), são independentes da medida do domínio. Logo, neste caso, é possível estender as estimativas para domínios ilimitados.

### 4.3 Resultados de existência e unicidade

Iniciamos esta seção com uma proposição relativa à existência de soluções fortes do sistema (4.1)-(4.3), no caso de domínios limitados. Faremos a demonstração apenas para que essa tese fique a mais completa possível, uma vez que a prova já foi feita por Boldrini, Rojas-Medar e Fernández-Cara em [8] (veja os Teoremas 1 e 2 nas páginas 1504 e 1507, respectivamente).

**Proposição 4.1.** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Assuma que  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$  e  $\rho_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ , com  $0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty$  em  $\Omega$ . Além disso, suponha que as forças externas  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  são tais que  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$  e  $\mathbf{f}_t, \mathbf{g}_t \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Então o problema (4.1)-(4.3) possui uma única solução forte  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  definida em um (possivelmente pequeno) intervalo de tempo  $[0, T^*)$ , onde  $T^* \in (0, T]$ . Esta solução satisfaz*

$$P(\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w} - \rho \mathbf{f}) + (\mu + \mu_r) A \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4.47)$$

$$\rho \mathbf{w}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{u} + L \mathbf{w} + 4\mu_r \mathbf{w} = \rho \mathbf{g}, \quad (4.48)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (4.49)$$

*q.s. em  $\Omega \times (0, T^*)$ . Além disso, se  $(\rho_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$  é uma outra solução do sistema (4.1)-(4.3) em  $[0, \bar{T})$ ,  $\bar{T} \in (0, T^*]$ , satisfazendo*

$$\mathbf{u}_1 \in L^4(0, \bar{T}; \mathbf{V}(\Omega)), \quad \mathbf{u}_{1t} \in L^2(0, \bar{T}; \mathbf{L}^3(\Omega)), \quad (4.50)$$

$$\mathbf{w}_1 \in L^2(0, \bar{T}; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad \mathbf{w}_{1t} \in L^2(0, \bar{T}; \mathbf{L}^3(\Omega)), \quad (4.51)$$

$$\rho_1 \in L^\infty(0, \bar{T}; L^\infty(\Omega)), \quad \nabla \rho_1 \in L^2(0, \bar{T}; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \quad (4.52)$$

*então  $(\rho_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) = (\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  em  $\Omega \times (0, \bar{T})$ .*

**Demonstração.** Devido as estimativas obtidas na Seção 4.2, concluímos que

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_t^k\} &\text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}(\Omega)), \\ \{\mathbf{w}_t^k\} &\text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \{\nabla \mathbf{u}^k\} &\text{ é uniformemente limitada em } L^2(0, T^*; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \\ \{\nabla \mathbf{w}^k\} &\text{ é uniformemente limitada em } L^2(0, T^*; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \\ \{\rho_t^k\} &\text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega)), \\ \{\nabla \rho^k\} &\text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)). \end{aligned}$$

Logo, usando o Teorema 1.1 e o Corolário 1.1, concluímos que existe uma subsequência de  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$ , a qual continuaremos denotando por  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$ , convergindo para  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  no seguinte sentido:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t^k &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{w}_t^k \xrightarrow{*} \mathbf{w}_t \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \nabla \mathbf{u}^k &\rightharpoonup \nabla \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{w}^k \rightharpoonup \nabla \mathbf{w} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \\ \rho_t^k &\xrightarrow{*} \rho_t \text{ em } L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega)), \\ \nabla \rho^k &\xrightarrow{*} \nabla \rho \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)). \end{aligned}$$

Observe que a subsequência  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  converge para  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  em outros sentidos, mas as convergências listadas acima são suficientes para passarmos o limite em (4.6) e obtermos (4.5). Outras convergências, são, por exemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t^k &\rightharpoonup \mathbf{u}_t \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{H}(\Omega)), \\ \mathbf{u}^k &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{D}(A)). \end{aligned}$$

Usando o Lema de Aubin-Lions (Lema 1.3) com  $B_0 = \mathbf{D}(A)$ ,  $B_1 = \mathbf{H}(\Omega)$ ,  $B = \mathbf{V}(\Omega)$  e  $p_0 = p_1 = 2$ , concluímos que

$$\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega)).$$

Analogamente, pode-se mostrar que  $\mathbf{w}^k \rightarrow \mathbf{w}$  em  $L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ .

Iniciaremos provando que

$$\int_0^{T^*} (\rho^k(t) \mathbf{u}_t^k(t), \mathbf{v}) \phi \, dt \longrightarrow \int_0^{T^*} (\rho(t) \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}) \phi \, dt \quad (4.53)$$

e

$$\int_0^{T^*} (\rho^k(t) \mathbf{w}_t^k(t), \mathbf{z}) \zeta dt \longrightarrow \int_0^{T^*} (\rho(t) \mathbf{w}_t(t), \mathbf{z}) \zeta dt, \quad (4.54)$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , para todos  $\mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$  e quaisquer  $\phi, \zeta \in \mathcal{D}(0, T)$ . Como

$$\rho^k \mathbf{u}_t^k - \rho \mathbf{u}_t = \rho^k \mathbf{u}_t^k - \rho \mathbf{u}_t^k + \rho \mathbf{u}_t^k - \rho \mathbf{u}_t = (\rho^k - \rho) \mathbf{u}_t^k + \rho(\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t),$$

temos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{T^*} (\rho^k(t) \mathbf{u}_t^k(t), \mathbf{v}) \phi dt - \int_0^{T^*} (\rho(t) \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}) \phi dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^{T^*} ((\rho^k - \rho)(t) \mathbf{u}_t^k(t), \mathbf{v}) \phi dt \right| + \left| \int_0^{T^*} (\rho(\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t)(t), \mathbf{v}) \phi dt \right|. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Observe que

$$\left| \int_0^{T^*} ((\rho^k - \rho)(t) \mathbf{u}_t^k(t), \mathbf{v}) \phi dt \right| \leq C_{\phi, \mathbf{v}} \int_0^{T^*} \|\rho^k - \rho\| \|\mathbf{u}_t^k\| dt.$$

Como  $\rho^k \rightarrow \rho$  em  $L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$ , concluimos que a primeira integral do lado direito da desigualdade (4.55) converge para zero quando  $k \rightarrow \infty$ . Além disso,

$$\left| \int_0^{T^*} (\rho(\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t)(t), \mathbf{v}) \phi dt \right| = \left| \int_0^{T^*} ((\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t)(t), \rho \mathbf{v}) \phi dt \right|.$$

Como  $\mathbf{u}_t^k \xrightarrow{*} \mathbf{u}_t$  em  $L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , deduzimos que a segunda integral do lado direito da desigualdade (4.55) também converge para zero quando  $k \rightarrow \infty$ . Isto prova (4.53). A convergência de  $\rho^k(t) \mathbf{w}_t^k(t)$  em (4.54) é provada de forma similar. Agora mostraremos que

$$\int_0^{T^*} (\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \phi dt \longrightarrow \int_0^{T^*} (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi dt \quad (4.56)$$

e

$$\int_0^{T^*} (\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k, \mathbf{z}) \zeta dt \longrightarrow \int_0^{T^*} (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \mathbf{z}) \zeta dt \quad (4.57)$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , para todos  $\mathbf{v}, \mathbf{z}, \phi$  e  $\zeta$  como antes. Provaremos apenas (4.56), já que a prova de (4.57) é feita de forma análoga. Uma vez que

$$\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\rho^k - \rho)(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k + \rho((\mathbf{u}^k - \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}^k + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}),$$

temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T^*} (\rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \phi \, dt - \int_0^{T^*} (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi \, dt \\
&= \int_0^{T^*} ((\rho^k - \rho)(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \phi \, dt + \int_0^{T^*} (\rho((\mathbf{u}^k - \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \phi \, dt \\
&\quad + \int_0^{T^*} (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}), \mathbf{v}) \phi \, dt.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Usando a desigualdade (4.37), obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{T^*} ((\rho^k - \rho)(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \phi \, dt \right| \\
&\leq C_{\phi, \mathbf{v}} \|\rho^k - \rho\|_{L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega))} \left( \int_0^{T^*} \int_\Omega |(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \right)^{1/2} \\
&\leq C_{\phi, \mathbf{v}} \|\rho^k - \rho\|_{L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega))} \left( \int_0^{T^*} \|A\mathbf{u}^k\| \|\nabla \mathbf{u}^k\|^3 \, dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Logo, como  $\rho^k \rightarrow \rho$  em  $L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega))$ , devido as estimativas (4.18) e (4.30), temos que

$$\int_0^{T^*} ((\rho^k - \rho)(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \phi \, dt$$

converge para zero quando  $k \rightarrow \infty$ , isto é, a primeira integral do lado direito da identidade (4.58) converge para zero quando  $k \rightarrow \infty$ . Agora, note que

$$\int_0^{T^*} (\rho((\mathbf{u}^k - \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \phi \, dt \leq C_{\phi, \mathbf{v}} \|\rho\|_{L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega))} \int_0^{T^*} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{u}^k\| \, dt,$$

ou seja, a segunda integral do lado direito da identidade (4.58) também converge para zero quando  $k \rightarrow \infty$ , tendo em vista a estimativa (4.18) e o fato que  $\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u}$  em  $L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Por fim, como  $\nabla \mathbf{u}^k \rightharpoonup \nabla \mathbf{u}$  em  $L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , então

$$\int_0^{T^*} (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}), \mathbf{v}) \phi \, dt \longrightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , isto é, a terceira integral do lado direito da identidade (4.58) também converge para zero quando  $k \rightarrow \infty$ . Isto prova o limite dado em (4.56).

Por densidade, os limites dados em (4.53), (4.54), (4.56) e (4.57) são válidos para todos  $\mathbf{v} \in \mathbf{D}(A)$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbf{D}(L)$ ,  $\phi, \zeta \in C_0^\infty(0, T)$ . Podemos agora passar ao limite na equação (4.6). De fato, para qualquer  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$  e qualquer  $\mathbf{v} \in \cup_{j \geq 1} V_j$ , temos

$$\int_0^{T^*} (\rho^k \mathbf{u}_t^k + \rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}^k - \rho^k \mathbf{f} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \phi \, dt = 0$$

para todo  $k$  suficientemente grande. Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\int_0^{T^*} (\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) \phi dt = 0,$$

para todo  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$  e qualquer  $\mathbf{v} \in \cup_{j \geq 1} V_j$ . Logo, pelo Lema de Du Bois-Raymond (Lema 1.4), temos

$$(\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

q.s. em  $(0, T^*)$ , para todo  $\mathbf{v} \in \cup_{j \geq 1} V_j$ . Portanto,

$$P(\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

q.s. em  $\Omega \times (0, T^*)$ .

A passagem ao limite na equação para  $\mathbf{w}^k$  é similar. A fim de lidar com a equação para a densidade  $\rho^k$ , observemos que  $\mathbf{u}^k \rightarrow \mathbf{u}$  em  $L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$ ,  $\rho_t^k \rightharpoonup \rho_t$  em  $L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$  e  $\nabla \rho^k \rightharpoonup \nabla \rho$  em  $L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Isto nos dá

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

no sentido das distribuições.

Da mesma forma como feito em [8], podemos mostrar que as condições iniciais são satisfeitas (veja a Proposição 2 na página 1517). De fato, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \mathbf{u}_0\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|\nabla \mathbf{w}(t) - \nabla \mathbf{w}_0\| = 0.$$

Finalmente, note que se  $\boldsymbol{\nu}^m$  é uma função da forma

$$\boldsymbol{\nu}^m(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) \boldsymbol{\varphi}^i(\mathbf{x})$$

com coeficientes  $c_i$  contínuos em  $[0, T]$ , temos para todo  $k \geq m$ ,

$$(\rho^k \mathbf{u}_t^k + \rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u}^k - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^k - \rho^k \mathbf{f}, \boldsymbol{\nu}^m) = 0.$$

Ou seja, para  $k \geq m$  e  $0 < T^* < T$ , temos

$$\int_0^{T^*} (\rho^k \mathbf{u}_t^k + \rho^k(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u}^k - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}^k - \rho^k \mathbf{f}, \boldsymbol{\nu}^m) dt = 0.$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\int_0^{T^*} (\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f}, \boldsymbol{\nu}^m) dt = 0. \quad (4.59)$$

Como  $\|\Delta \mathbf{u}\| \leq \|D^2 \mathbf{u}\|$ , usando a desigualdade (4.37) e o Lema 1.9, obtemos

$$\|\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w}\|^2 \leq C_{\partial} (\|\mathbf{u}_t\|^2 + \|A\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}\|^2).$$

Integrando no tempo de 0 até  $T^*$ , usando (4.18), (4.19), (4.20) e o fato que  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , deduzimos que

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} \in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)).$$

Uma vez que as funções  $\boldsymbol{\nu}^m$  são densas em  $L^2(0, T^*; \mathbf{H}(\Omega))$  (pois as autofunções  $\{\boldsymbol{\varphi}^i\}$  formam um sistema ortonormal completo em  $\mathbf{H}(\Omega)$ ), segue da identidade (4.59) que

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} \in L^2(0, T^*; \mathbf{H}^\perp(\Omega)).$$

Logo, existe uma função  $p(\mathbf{x}, t)$  com  $\nabla p \in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , tal que

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} = -\nabla p.$$

Para a unicidade, suponha que  $(\rho_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$  é uma solução de (4.1)-(4.3) em  $[0, \bar{T})$ ,  $\bar{T} \in (0, T^*]$ , satisfazendo as condições de regularidade (4.50)-(4.52). Consideremos o terno  $(\pi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ , onde  $\pi := \rho - \rho_1$ ,  $\boldsymbol{\eta} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$  e  $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{w} - \mathbf{w}_1$ . Estas funções satisfazem as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\rho \boldsymbol{\eta}_t + \rho_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta}) + (\mu + \mu_r) A \boldsymbol{\eta} \\ \quad = P(2\mu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} + \pi \mathbf{f} - \pi \mathbf{u}_{1t} - \pi(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho_1(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \mathbf{u}), \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0, \\ \rho \boldsymbol{\xi}_t + \rho_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + L \boldsymbol{\xi} + 4\mu_r \boldsymbol{\xi} = 2\mu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} + \pi \mathbf{g} \\ \quad - \pi \mathbf{w}_{1t} - \pi(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \rho_1(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \\ \pi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \pi = -\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \rho_1, \\ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \pi(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.60)$$

Fazendo o produto interno da equação (4.60)<sub>1</sub> com  $\boldsymbol{\eta}$  e da equação (4.60)<sub>3</sub> com  $\boldsymbol{\xi}$  em  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho} \boldsymbol{\eta}\|^2 + (\mu + \mu_r) \|\nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 &= (2\mu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} + \pi \mathbf{f} - \pi \mathbf{u}_{1t} - \pi(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho_1(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\rho_t \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) - (\rho_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho} \boldsymbol{\xi}\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}\|^2 + 4\mu_r \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \\ = (2\mu_r \operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} + \pi \mathbf{g} - \pi \mathbf{w}_{1t} - \pi(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \rho_1(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}) \\ + \frac{1}{2}(\rho_t \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - (\rho_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Somando as identidades acima e estimando, de maneira usual, cada termo do lado direito da identidade resultante, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\sqrt{\rho} \boldsymbol{\eta}\|^2 + \|\sqrt{\rho} \boldsymbol{\xi}\|^2) + (\mu + \mu_r) \|\nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|^2 \leq \\ C_\partial \|\boldsymbol{\eta}\|^2 (1 + \|\nabla \mathbf{u}\|^4 + \|\nabla \mathbf{u}_1\|^4 + \|\rho_t\|_\infty) + C_\partial \|\boldsymbol{\xi}\|^2 (1 + \|\nabla \mathbf{w}\|^4 + \|\nabla \mathbf{u}_1\|^4 + \|\rho_t\|_\infty) \\ + C_\partial \|\pi\|^2 [\|\mathbf{f}\|_{1,2}^2 + \|\mathbf{g}\|_{1,2}^2 + \|\mathbf{u}_{1t}\|_{\mathbf{L}^3}^2 + \|\mathbf{w}_{1t}\|_{\mathbf{L}^3}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^2 (\|A\mathbf{u}\|^2 + \|B\mathbf{w}\|^2)] \\ + C_\partial [\|\nabla \mathbf{u}\|^2 (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}\|^2)]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Agora, multiplicando a equação (4.60)<sub>4</sub> por  $|\pi|$ , integrando sobre  $\Omega$ , usando a condição de incompressibilidade  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\pi\|^2 = \frac{d}{dt} \int_\Omega |\pi|^2 d\mathbf{x} &\leq 2 \int_\Omega |\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \rho_1| |\pi| d\mathbf{x} \\ &\leq 2 \left( \int_\Omega |\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \rho_1|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |\pi|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \|\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \rho_1\| \|\pi\| \\ &\leq C_\partial \|\boldsymbol{\eta}\| \|\nabla \rho_1\|_\infty \|\pi\| \\ &\leq C_\partial \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + C_\partial \|\nabla \rho_1\|_\infty^2 \|\pi\|^2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Somando as desigualdades (4.61) e (4.62), integrando o resultado obtido de 0 até  $t$ , e usando o fato que  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$  e  $\pi(\mathbf{x}, 0) = 0$ , deduzimos que

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + \|\pi(t)\|^2 \leq C_\partial \int_0^t H(s) (\|\boldsymbol{\eta}(s)\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}(s)\|^2 + \|\pi(s)\|^2) ds$$

para todo  $t \in [0, \bar{T})$ , onde

$$\begin{aligned} H(t) = & 1 + \|\mathbf{f}(t)\|_{1,2}^2 + \|\mathbf{g}(t)\|_{1,2}^2 + \|\mathbf{u}_{1t}(t)\|_{\mathbf{L}^3}^2 + \|\mathbf{w}_{1t}(t)\|_{\mathbf{L}^3}^2 + \|\nabla \mathbf{u}(t)\|^4 + \|\nabla \mathbf{w}(t)\|^4 \\ & + \|\nabla \mathbf{u}(t)\|^2 \|\nabla \mathbf{w}(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}(t)\|^2 (\|A\mathbf{u}(t)\|^2 + \|B\mathbf{w}(t)\|^2) + \|\nabla \mathbf{u}_1(t)\|^4 \\ & + \|\rho_t(t)\|_\infty + \|\nabla \rho_1(t)\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Observe que além de  $H$  ser uma função integrável (tendo em vista as regularidades de  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \rho)$  e  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1, \rho_1)$ ),  $H(t) \geq 0$ . Portanto, pelo Lema de Gronwall, concluímos que

$$\|\boldsymbol{\eta}(\cdot, t)\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + \|\pi(\cdot, t)\|^2 \equiv 0.$$

Isto completa a prova da proposição.  $\square$

### 4.3.1 Prova do Teorema 4.1

Para provarmos o Teorema 4.1 usaremos o truque da “sequência diagonal”, isto é, o método da diagonalização de Cantor (veja, por exemplo, [45]). Seja  $\Omega$  um domínio ilimitado com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Escolhamos uma sequência de “domínios invasores” limitados  $\{\Omega_m\}$ , isto é,  $\Omega_m$  é limitado para cada  $m \in \mathbb{N}$ , e

$$\Omega_{m+1} \supset \Omega_m, \quad \Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m,$$

tais que  $\partial\Omega_m$  é uniformemente de classe  $C^3$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Consideremos as sequências  $\{\mathbf{u}_{0m}\} \subset \mathbf{V}(\Omega_m)$  e  $\{\mathbf{w}_{0m}\} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega_m)$  dadas pelo Lemas 1.12 e 1.13, respectivamente, tais que  $\|\nabla \mathbf{u}_{0m}\|_{\Omega_m} \leq \|\nabla \mathbf{u}_0\|$ ,  $\|D^2 \mathbf{u}_{0m}\|_{\Omega_m} \leq A$ ,  $\|L^{1/2} \mathbf{w}_{0m}\|_{\Omega_m} \leq \|L^{1/2} \mathbf{w}_0\|$  e  $\|D^2 \mathbf{w}_{0m}\|_{\Omega_m} \leq B$ , onde  $A$  e  $B$  são constantes independentes de  $m$ . Além disso,  $\|\nabla(\mathbf{u}_{0m} - \mathbf{u}_0)\|$  e  $\|L^{1/2}(\mathbf{w}_{0m} - \mathbf{w}_0)\| \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ .

Agora, em vez de denotar aproximações semi-Galerkin,  $(\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$  será a solução forte do problema (4.1)-(4.3) em  $\Omega_m \times (0, T)$ , com condições iniciais  $\mathbf{u}^m(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0m}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{w}^m(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_{0m}(\mathbf{x})$  e  $\rho^m(\mathbf{x}, 0) = \rho_0^m(\mathbf{x})$ , onde  $\rho_0^m$  é a restrição de  $\rho_0$  à  $\Omega_m$ . As forças externas  $\mathbf{f}^m$  e  $\mathbf{g}^m$  são, também, as restrições de  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ , respectivamente, à  $\Omega_m$ . A existência desta solução forte é assegurada pela Proposição 4.1. Além disso, o terno  $(\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$  satisfaz as estimativas obtidas na Seção 4.2 e estas estimativas são

uniformes com respeito à  $m$ . Seja  $l \in \mathbb{N}$  fixado. Para  $m \geq l$ , temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^m &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_l)), \\
\mathbf{u}_t^m &\in L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_l)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_l)), \\
D^2 \mathbf{u}^m &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_l)), \\
\mathbf{w}^m &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_l)), \\
\mathbf{w}_t^m &\in L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_l)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_l)), \\
D^2 \mathbf{w}^m &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_l)), \\
\rho_t^m &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_l)), \\
\nabla \rho^m &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega_l)).
\end{aligned}$$

Como cada solução  $(\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$  está definida em  $\Omega_m$ , estendemos estas funções para todo  $\Omega$ . Tal extensão pode ser realizada preservando-se a regularidade da solução  $(\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$ , através de teoremas de extensão em espaços de Sobolev (veja [1], Capítulo 5). Portanto, cada terno  $(\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$  é estendido à  $\Omega$  por um novo terno  $(\tilde{\rho}^m, \tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\mathbf{w}}^m)$  tal que

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}^m &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega)), \\
\tilde{\mathbf{u}}_t^m &\in L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
D^2 \tilde{\mathbf{u}}^m &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
\tilde{\mathbf{w}}^m &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\
\tilde{\mathbf{w}}_t^m &\in L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
D^2 \tilde{\mathbf{w}}^m &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
\tilde{\rho}_t^m &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega)), \\
\nabla \tilde{\rho}^m &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)).
\end{aligned}$$

Além disso, devido a continuidade do operador extensão, temos:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{u}}^m\|_{L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega))} &\leq C \|\mathbf{u}^m\|_{L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_m))}, \\
\|\tilde{\mathbf{u}}_t^m\|_{L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega))} &\leq C \|\mathbf{u}_t^m\|_{L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_m))}, \\
\|\tilde{\mathbf{u}}_t^m\|_{L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))} &\leq C \|\mathbf{u}_t^m\|_{L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_m))}, \\
\|D^2 \tilde{\mathbf{u}}^m\|_{L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))} &\leq C \|D^2 \mathbf{u}^m\|_{L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_m))}, \\
\|\tilde{\mathbf{w}}^m\|_{L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega))} &\leq C \|\mathbf{w}^m\|_{L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_m))},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{w}}_t^m\|_{L^2(0,T^*;\mathbf{H}_0^1(\Omega))} &\leq C\|\mathbf{w}_t^m\|_{L^2(0,T^*;\mathbf{H}_0^1(\Omega_m))}, \\
\|\tilde{\mathbf{w}}_t^m\|_{L^\infty(0,T^*;\mathbf{L}^2(\Omega))} &\leq C\|\mathbf{w}_t^m\|_{L^\infty(0,T^*;\mathbf{L}^2(\Omega_m))}, \\
\|D^2\tilde{\mathbf{w}}^m\|_{L^2(0,T^*;\mathbf{L}^2(\Omega))} &\leq C\|D^2\mathbf{w}^m\|_{L^2(0,T^*;\mathbf{L}^2(\Omega_m))}, \\
\|\tilde{\rho}_t^m\|_{L^\infty(0,T^*;L^\infty(\Omega))} &\leq C\|\rho_t^m\|_{L^\infty(0,T^*;L^\infty(\Omega_m))}, \\
\|\nabla\tilde{\rho}^m\|_{L^\infty(0,T^*;L^\infty(\Omega))} &\leq C\|\nabla\rho^m\|_{L^\infty(0,T^*;L^\infty(\Omega_m))},
\end{aligned}$$

onde a constante  $C$  depende apenas da regularidade do domínio e dos expoentes dos espaços de Sobolev envolvidos. A fim de não sobrecarregarmos a notação, denotaremos tais extensões novamente por  $(\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$ . Escolhendo  $l = 1$ , encontramos, devido ao Teorema 1.1 e ao Corolário 1.1, uma subsequência  $(\rho^{1,m}, \mathbf{u}^{1,m}, \mathbf{w}^{1,m})$  de  $(\rho^m, \mathbf{u}^m, \mathbf{w}^m)$ , convergindo para o terno  $(\rho_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$  no seguinte sentido:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{1,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_1 \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_1)), \\
\mathbf{u}_t^{1,m} &\rightharpoonup \mathbf{u}_{1t} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_1)), \\
\mathbf{u}_t^{1,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_{1t} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_1)), \\
D^2\mathbf{u}^{1,m} &\rightharpoonup D^2\mathbf{u}_1 \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_1)), \\
\mathbf{w}^{1,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_1 \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_1)), \\
\mathbf{w}_t^{1,m} &\rightharpoonup \mathbf{w}_{1t} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_1)), \\
\mathbf{w}_t^{1,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_{1t} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_1)), \\
D^2\mathbf{w}^{1,m} &\rightharpoonup D^2\mathbf{w}_1 \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_1)), \\
\rho_t^{1,m} &\xrightarrow{*} \rho_{1t} \text{ em } L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_1)), \\
\nabla\rho^{1,m} &\xrightarrow{*} \nabla\rho_1 \text{ em } L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_1)).
\end{aligned}$$

Agora tomamos  $l = 2$  e extraímos uma subsequência  $(\rho^{2,m}, \mathbf{u}^{2,m}, \mathbf{w}^{2,m})$  de  $(\rho^{1,m}, \mathbf{u}^{1,m}, \mathbf{w}^{1,m})$ , convergindo para o terno  $(\rho_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)$  no seguinte sentido:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{2,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_2 \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_2)), \\
\mathbf{u}_t^{2,m} &\rightharpoonup \mathbf{u}_{2t} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_2)), \\
\mathbf{u}_t^{2,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_{2t} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_2)), \\
D^2\mathbf{u}^{2,m} &\rightharpoonup D^2\mathbf{u}_2 \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_2)), \\
\mathbf{w}^{2,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_2 \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_t^{2,m} &\rightharpoonup \mathbf{w}_{2t} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_2)), \\
\mathbf{w}_t^{2,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_{2t} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_2)), \\
D^2 \mathbf{w}^{2,m} &\rightharpoonup D^2 \mathbf{w}_2 \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_2)), \\
\rho_t^{2,m} &\xrightarrow{*} \rho_{2t} \text{ em } L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_2)), \\
\nabla \rho^{2,m} &\xrightarrow{*} \nabla \rho_2 \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega_2)).
\end{aligned}$$

Obviamente,  $(\rho_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) = (\rho_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$  em  $\Omega_1$ . Dando continuidade a esse processo, encontramos sucessivas subsequências  $(\rho^{j,m}, \mathbf{u}^{j,m}, \mathbf{w}^{j,m})$  tais que  $(\rho^{j+1,m}, \mathbf{u}^{j+1,m}, \mathbf{w}^{j+1,m})$  é uma subsequência de  $(\rho^{j,m}, \mathbf{u}^{j,m}, \mathbf{w}^{j,m})$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$  e, além disso,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{j,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_j \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_j)), \\
\mathbf{u}_t^{j,m} &\rightharpoonup \mathbf{u}_{jt} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_j)), \\
\mathbf{u}_t^{j,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_{jt} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_j)), \\
D^2 \mathbf{u}^{j,m} &\rightharpoonup D^2 \mathbf{u}_j \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_j)), \\
\mathbf{w}^{j,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_j \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_j)), \\
\mathbf{w}_t^{j,m} &\rightharpoonup \mathbf{w}_{jt} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_j)), \\
\mathbf{w}_t^{j,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_{jt} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_j)), \\
D^2 \mathbf{w}^{j,m} &\rightharpoonup D^2 \mathbf{w}_j \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_j)), \\
\rho_t^{j,m} &\xrightarrow{*} \rho_{jt} \text{ em } L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_j)), \\
\nabla \rho^{j,m} &\xrightarrow{*} \nabla \rho_j \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega_j)),
\end{aligned}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Pela mesma razão,  $(\rho_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1}, \mathbf{w}_{j+1}) = (\rho_j, \mathbf{u}_j, \mathbf{w}_j)$  em  $\Omega_j$ .

*Observação 4.7.* Em particular, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{j,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_i \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_i)), \\
\mathbf{u}_t^{j,m} &\rightharpoonup \mathbf{u}_{it} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega_i)), \\
\mathbf{u}_t^{j,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_{it} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_i)), \\
D^2 \mathbf{u}^{j,m} &\rightharpoonup D^2 \mathbf{u}_i \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_i)), \\
\mathbf{w}^{j,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_i \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_i)), \\
\mathbf{w}_t^{j,m} &\rightharpoonup \mathbf{w}_{it} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega_i)), \\
\mathbf{w}_t^{j,m} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_{it} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_i)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2 \mathbf{w}^{j,m} &\rightharpoonup D^2 \mathbf{w}_i \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_i)), \\
\rho_t^{j,m} &\xrightarrow{*} \rho_{it} \text{ em } L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_i)), \\
\nabla \rho^{j,m} &\xrightarrow{*} \nabla \rho_i \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega_i)),
\end{aligned}$$

para todo  $i = 1, \dots, j$ .

Agora, consideremos a sequência diagonal,  $\{(\rho^{j,j}, \mathbf{u}^{j,j}, \mathbf{w}^{j,j})\}$ , que é uma subsequência de  $\{(\rho^{j,m}, \mathbf{u}^{j,m}, \mathbf{w}^{j,m})\}_{m \in \mathbb{N}}$  (exceto, possivelmente, os  $j-1$  primeiros termos). Logo, pela Observação 4.7, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{j,j} &\xrightarrow{*} \mathbf{u} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega)), \\
\mathbf{u}_t^{j,j} &\rightharpoonup \mathbf{u}_t \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{V}(\Omega)), \\
\mathbf{u}_t^{j,j} &\xrightarrow{*} \mathbf{u}_t \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
D^2 \mathbf{u}^{j,j} &\rightharpoonup D^2 \mathbf{u} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
\mathbf{w}^{j,j} &\xrightarrow{*} \mathbf{w} \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\
\mathbf{w}_t^{j,j} &\rightharpoonup \mathbf{w}_t \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\
\mathbf{w}_t^{j,j} &\xrightarrow{*} \mathbf{w}_t \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
D^2 \mathbf{w}^{j,j} &\rightharpoonup D^2 \mathbf{w} \text{ em } L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\
\rho_t^{j,j} &\xrightarrow{*} \rho_t \text{ em } L^\infty(0, T^*; L_{loc}^\infty(\Omega)), \\
\nabla \rho^{j,j} &\xrightarrow{*} \nabla \rho \text{ em } L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}_{loc}^\infty(\Omega)).
\end{aligned}$$

Para  $k \geq m$  e  $0 < T^* < T$ , temos

$$\int_0^{T^*} (\rho^k \mathbf{u}_t^k + \rho^k (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u}^k - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}^k - \rho^k \mathbf{f}, \boldsymbol{\nu}^m) dt = 0,$$

para todo  $\boldsymbol{\nu}^m \in C_0^1([0, T]; \mathbf{C}_0^1(\Omega_m))$  satisfazendo  $\text{div } \boldsymbol{\nu}^m = 0$ , onde  $\boldsymbol{\nu}^m \equiv \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u}^k \equiv \mathbf{0}$  fora de seus domínios originais de definição. Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\int_0^{T^*} (\rho \mathbf{u}_t + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w} - \rho \mathbf{f}, \boldsymbol{\nu}^m) dt = 0.$$

Como

$$\|\rho \mathbf{u}_t + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w}\|^2 \leq C_\partial (\|\mathbf{u}_t\|^2 + \|A\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}\|^2),$$

concluimos que

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} \in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)).$$

Como o conjunto de todas as funções  $\boldsymbol{\nu}^m$ , do tipo consideradas acima, é denso em  $L^2(0, T^*; \mathbf{H}(\Omega))$ , existe uma função  $p(\mathbf{x}, t)$  com  $\nabla p \in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , tal que

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mu + \mu_r) \Delta \mathbf{u} - 2\mu_r \text{rot } \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} = -\nabla p.$$

A passagem ao limite na equação de  $\mathbf{w}$  e na equação da densidade, bem como o fato que  $\|\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \mathbf{u}_0\| \rightarrow 0$  e  $\|\nabla \mathbf{w}(t) - \nabla \mathbf{w}_0\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0^+$ , seguem como no caso de domínios limitados.  $\square$

### 4.3.2 Unicidade

**Proposição 4.2.** *Seja  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{R}^3$  com fronteira uniformemente de classe  $C^3$ . Se  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  e  $(\rho_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$  são soluções do sistema (4.1) dadas pelo Teorema 4.1, correspondentes aos mesmos dados iniciais  $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \rho_0$  e as mesmas forças externas  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  tal que  $\rho - \rho_1 \in L^\infty(0, T^*; L^{3/2}(\Omega))$ , então  $\rho = \rho_1$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ .*

**Demonstração.** Consideremos a quádrupla  $(\pi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, q)$ , onde  $\pi := \rho - \rho_1$ ,  $\boldsymbol{\eta} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ ,  $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{w} - \mathbf{w}_1$  e  $q := p - p_1$ . Estas funções satisfazem as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \boldsymbol{\eta}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} - (\mu + \mu_r) \Delta \boldsymbol{\eta} + \nabla q \\ \quad = 2\mu_r \text{rot } \boldsymbol{\xi} + \pi (\mathbf{f} - \mathbf{u}_{1t} - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1) - \rho(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \\ \text{div } \boldsymbol{\eta} = 0, \\ \rho \boldsymbol{\xi}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (c_a + c_d) \Delta \boldsymbol{\xi} - (c_0 + c_d - c_a) \nabla(\text{div } \boldsymbol{\xi}) + 4\mu_r \boldsymbol{\xi} \\ \quad = 2\mu_r \text{rot } \boldsymbol{\eta} + \pi (\mathbf{g} - \mathbf{w}_{1t} - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{w}_1) - \rho(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \mathbf{w}_1, \\ \pi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \pi = -\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \rho_1, \\ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \pi(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.63)$$

Fazendo o produto interno da equação (4.63)<sub>1</sub> com  $\boldsymbol{\eta}$  e da equação (4.63)<sub>3</sub> com  $\boldsymbol{\xi}$  em  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho} \boldsymbol{\eta}\|^2 + (\mu + \mu_r) \|\nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 &= (\pi(\mathbf{f} - \mathbf{u}_{1t} - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1), \boldsymbol{\eta}) - (\rho(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\eta}) \\ &\quad + 2\mu_r (\text{rot } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\rho} \boldsymbol{\xi}\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}\|^2 + 4\mu_r \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \\ & = (\pi(\mathbf{g} - \mathbf{w}_{1t} - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{w}_1), \boldsymbol{\xi}) - (\rho(\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \mathbf{w}_1, \boldsymbol{\xi}) + 2\mu_r (\operatorname{rot} \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Somando as identidades acima e estimando, de maneira usual, cada termo do lado direito da identidade resultante, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\sqrt{\rho} \boldsymbol{\eta}\|^2 + \|\sqrt{\rho} \boldsymbol{\xi}\|^2) + (\mu + \mu_r) \|\nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 + (c_a + c_d) \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|^2 \\ & \leq C_{\partial, \varepsilon, \delta} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 (1 + \|\nabla \mathbf{u}_1\|^4) + C_{\partial, \varepsilon, \delta} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 (1 + \|\nabla \mathbf{w}_1\|^4) + 4\varepsilon \|\nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 + 3\delta \|\nabla \boldsymbol{\xi}\|^2 \\ & \quad + C_{\partial, \varepsilon, \delta} \|\pi\|_{3/2}^2 [\|\mathbf{f} - \mathbf{u}_{1t} - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1\|_6^2 + \|\mathbf{g} - \mathbf{w}_{1t} - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{w}_1\|_6^2]. \quad (4.64) \end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando a equação (4.63)<sub>4</sub> por  $\frac{3}{2} |\pi|^{1/2}$ , integrando sobre  $\Omega$ , usando a condição de incompressibilidade  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{3/2}^{3/2} & \leq \frac{3}{2} \int_{\Omega} |\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \rho_1| |\pi|^{1/2} d\mathbf{x} \\ & \leq \frac{3}{2} \left( \int_{\Omega} |\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \rho_1|^{3/2} d\mathbf{x} \right)^{2/3} \left( \int_{\Omega} |\pi|^{3/2} d\mathbf{x} \right)^{1/3} \\ & = \frac{3}{2} \|\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla \rho_1\|_{3/2} \|\pi\|_{3/2}^{1/2} \\ & \leq C_{\partial} \|\boldsymbol{\eta}\|_6 \|\nabla \rho_1\| \|\pi\|_{3/2}^{1/2} \\ & \leq C_{\partial} \|\nabla \boldsymbol{\eta}\| \|\nabla \rho_1\| \|\pi\|_{3/2}^{1/2}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{3/2}^2 = \frac{4}{3} \|\pi(\cdot, t)\|_{3/2}^{1/2} \frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{3/2}^{3/2}$ , se multiplicarmos a desigualdade acima por  $\frac{4}{3} \|\pi(\cdot, t)\|_{3/2}^{1/2}$ , obteremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\pi(\cdot, t)\|_{3/2}^2 & \leq C_{\partial} \|\nabla \boldsymbol{\eta}\| \|\nabla \rho_1\| \|\pi\|_{3/2} \\ & \leq \varepsilon \|\nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 + C_{\partial, \varepsilon} \|\nabla \rho_1\|^2 \|\pi\|_{3/2}^2. \quad (4.65) \end{aligned}$$

Somando as desigualdades (4.64) e (4.65), tomando  $\varepsilon = \frac{\mu + \mu_r}{10}$ ,  $\delta = \frac{c_a + c_d}{6}$  e integrando o resultado obtido de 0 até  $t$ , deduziremos que

$$\|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 + \|\pi(t)\|_{3/2}^2 \leq C_{\partial} \int_0^t \tilde{H}(s) (\|\boldsymbol{\eta}(s)\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}(s)\|^2 + \|\pi(s)\|_{3/2}^2) ds,$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t) & = 1 + \|\mathbf{f}(t)\|_{1,2}^2 + \|\mathbf{g}(t)\|_{1,2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}_{1t}(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_{1t}(t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_1(t)\|^4 \\ & \quad + \|D^2 \mathbf{u}_1(t)\|^4 + \|D^2 \mathbf{w}_1(t)\|^4 + \|\nabla \mathbf{w}_1(t)\|^4 + \|\nabla \rho_1(t)\|^2. \end{aligned}$$

Observe que  $\tilde{H}$  é uma função não-negativa e integrável (tendo em vista as regularidades de  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  e  $(\rho_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$ ). Usando o Lema de Gronwall, concluimos que

$$\|\boldsymbol{\eta}(\cdot, t)\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)\|^2 + \|\pi(\cdot, t)\|_{3/2}^2 \equiv 0,$$

isto é,  $\rho = \rho_1$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ . Isto completa a prova da proposição.  $\square$

### 4.3.3 Soluções globais: prova do Teorema 4.2

Provaremos este teorema combinando as técnicas apresentadas nas seções anteriores e argumentos devidos a Boldrini e Rojas-Medar em [7] e Heywood e Rannacher em [25]. Segue das desigualdades (4.24) e (4.37) que

$$\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + (\mu + \mu_r) \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \frac{(\mu + \mu_r)^2}{4\alpha} \|\mathbf{A}\mathbf{u}^k\|^2 \leq C_\partial \left( \|\mathbf{f}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^6 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 \right). \quad (4.66)$$

Portanto,

$$\|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t)\|^2 \leq C_\partial \left( \|\nabla \mathbf{u}_0\|^2 + \int_0^t (\|\mathbf{f}(\cdot, s)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, s)\|^6 + \|\nabla \mathbf{w}^k(\cdot, s)\|^2) ds \right), \quad (4.67)$$

para todo  $t \geq 0$ . Por outro lado, como

$$\|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{w}^k\|^2 \leq \varepsilon \|B\mathbf{w}^k\|^2 + C_{\partial, \varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2,$$

segue da desigualdade (4.25) que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{w}_t^k\|^2 + \frac{c_a + c_d + \alpha}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \frac{c_0 + c_d - c_a}{2} \frac{d}{dt} \|\operatorname{div} \mathbf{w}^k\|^2 + 2\mu_r \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}^k\|^2 + \frac{c_a + c_d}{4} \|B\mathbf{w}^k\|^2 \\ \leq C_\partial \left( \|\mathbf{g}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Logo,

$$\|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 \leq C_\partial \left( \|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \int_0^t (\|\mathbf{g}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2) ds \right), \quad (4.69)$$

para todo  $t \geq 0$ . Portanto, se  $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}^1}$ ,  $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$  e  $\|\mathbf{g}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$  são suficientemente pequenas, segue das estimativas (4.67) e (4.69) que

$$\sup_{t \geq 0} \left( \|\nabla \mathbf{u}^k(\cdot, t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}^k(\cdot, t)\|^2 \right) \leq C_\partial, \quad (4.70)$$

ou seja,  $\{\mathbf{u}^k\}$  e  $\{\mathbf{w}^k\}$  são uniformemente limitadas em  $L^\infty(0, \infty; \mathbf{V}(\Omega))$  e  $L^\infty(0, \infty; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ , respectivamente. Por outro lado, como em [25], multiplicando as desigualdades (4.66) e (4.68)

por  $e^{\gamma t}$ , com  $\gamma > 0$ , integrando no tempo de 0 até  $t$ , multiplicando a desigualdade resultante por  $e^{-\gamma t}$  e usando a estimativa (4.70), obtemos

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\mathbf{u}_t^k\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k\|^2 \right) ds \leq C_{\partial, \gamma}, \quad (4.71)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|A\mathbf{u}^k\|^2 + \|B\mathbf{w}^k\|^2 \right) ds \leq C_{\partial, \gamma}. \quad (4.72)$$

Da estimativa (4.71), concluímos que  $\{\mathbf{u}_t^k\}$  e  $\{\mathbf{w}_t^k\}$  são uniformemente limitadas em  $L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{H}(\Omega))$  e  $L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , respectivamente. Já da estimativa (4.72), vemos que  $\{\mathbf{u}^k\}$  e  $\{\mathbf{w}^k\}$  são uniformemente limitadas em  $L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{D}(A))$  e  $L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{D}(B))$ , respectivamente. Multiplicando a desigualdade (4.34) por  $e^{\gamma t}$  e integrando no tempo de 0 até  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} & e^{\gamma t} \left( \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{u}_t^k\|^2 + \|\sqrt{\rho^k} \mathbf{w}_t^k\|^2 \right) + \tilde{C} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\nabla \mathbf{u}_t^k(s)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t^k(s)\|^2 \right) ds \\ & \leq C_{\partial} (\|\mathbf{u}_t(0)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(0)\|^2) + C_{\partial} \int_0^t e^{\gamma s} (\|\mathbf{f}_t\|^2 + \|\mathbf{g}_t\|^2) ds \\ & \quad + C_{\partial, \gamma} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\mathbf{u}_t^k\|^2 (1 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4) \right) ds \\ & \quad + C_{\partial, \gamma} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\mathbf{w}_t^k\|^2 (1 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^4) \right) ds \\ & \quad + C_{\partial} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 (\|A\mathbf{u}^k\|^2 + \|B\mathbf{w}^k\|^2) \right) ds \\ & \quad + C_{\partial} \int_0^t e^{\gamma s} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2 \|A\mathbf{u}^k\|^2 ds \\ & \quad + C_{\partial} \int_0^t e^{\gamma s} \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 ds \\ & \quad + C_{\partial} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\nabla \mathbf{u}^k\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^4 + \|\nabla \mathbf{w}^k\|^2 \right) ds \\ & \quad + C_{\partial} \int_0^t e^{\gamma s} \left( (\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^1}^2) (1 + \|\nabla \mathbf{u}^k\|^2) \right) ds, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{C} = \min\{\mu + \mu_r, c_a + c_d\}$ . Multiplicando a desigualdade acima por  $e^{-\gamma t}$ , usando as hipóteses sobre as forças externas e as estimativas (4.70), (4.71) e (4.72), juntamente com estimativas para  $\|\mathbf{u}_t(0)\|^2$  e  $\|\mathbf{w}_t(0)\|^2$  que podem ser facilmente obtidas fazendo o produto interno, em  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , da equação (4.1)<sub>1</sub> com  $\mathbf{u}_t$  e da equação (4.1)<sub>3</sub> com  $\mathbf{w}_t$  em  $t = 0$ , respectivamente, obtemos,

$$\sup_{t \geq 0} \left( \|\mathbf{u}_t^k(\cdot, t)\|^2 + \|\mathbf{w}_t^k(\cdot, t)\|^2 \right) \leq C_{\partial}, \quad (4.73)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\nabla \mathbf{u}_t^k\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}_t^k\|^2 \right) ds \leq C_{\partial, \gamma}. \quad (4.74)$$

Das desigualdades (4.73) e (4.74), resulta que  $\{\mathbf{u}_t^k\}$  e  $\{\mathbf{w}_t^k\}$  são uniformemente limitadas em  $L^\infty(0, \infty; \mathbf{H}(\Omega)) \cap L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{V}(\Omega))$  e  $L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2(0, \infty; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ , respectiva-

mente. Devido as desigualdades (4.38), (4.39), (4.70) e (4.73) e do fato que  $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,\infty;\mathbf{L}^2(\Omega))}$  e  $\|\mathbf{g}\|_{L^\infty(0,\infty;\mathbf{L}^2(\Omega))}$  são suficientemente pequenas, obtemos

$$\sup_{t \geq 0} \left( \|A\mathbf{u}^k\|^2 + \|B\mathbf{w}^k\|^2 \right) \leq C_\partial, \quad (4.75)$$

isto é,  $\{\mathbf{u}^k\}$  e  $\{\mathbf{w}^k\}$  são uniformemente limitadas em  $L^\infty(0, \infty; \mathbf{D}(A))$  e  $L^\infty(0, \infty; \mathbf{D}(B))$ , respectivamente. Usando as estimativas (4.70) e (4.75), a partir das desigualdades (4.26) e (4.27), obtemos

$$\sup_{t \geq 0} \left( \|D^2\mathbf{u}^k\|^2 + \|D^2\mathbf{w}^k\|^2 \right) \leq C_\partial. \quad (4.76)$$

A estimativa (4.76) nos diz que  $\{D^2\mathbf{u}^k\}$  e  $\{D^2\mathbf{w}^k\}$  são uniformemente limitadas em  $L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Por outro lado, analogamente à obtenção de (4.40), podemos obter

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\mathbf{u}^k(s)\|_{2,6}^2 + \|\mathbf{w}^k(s)\|_{2,6}^2 \right) ds \leq C_\gamma, \quad (4.77)$$

onde a constante  $C_\gamma$  pode depender da medida de  $\Omega$  e da  $\partial\Omega$ . Devido as imersões de Sobolev, a estimativa (4.77) implica que

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} \left( \|\nabla\mathbf{u}^k(s)\|_{\mathbf{C}(\Omega)}^2 + \|\nabla\mathbf{w}^k(s)\|_{\mathbf{C}(\Omega)}^2 \right) ds \leq C_\gamma. \quad (4.78)$$

Note que a desigualdade (4.78) é válida para  $\gamma \geq 0$ , desde que consideremos um intervalo de tempo finito  $[0, T]$  (veja [7], p. 40). Portanto, se tomarmos  $\gamma = 0$  em (4.78), obtemos

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t \left( \|\nabla\mathbf{u}^k(s)\|_{\mathbf{C}(\Omega)}^2 + \|\nabla\mathbf{w}^k(s)\|_{\mathbf{C}(\Omega)}^2 \right) ds \leq C,$$

onde a constante  $C$  pode depender da medida de  $\Omega$  e da  $\partial\Omega$ . Por fim, os resultados de [32] para  $\nabla\rho$  e  $\rho_t$ , implicam que

$$\rho^k \in C^1(\Omega \times [0, T]), \forall T \in (0, \infty). \quad (4.79)$$

Lembramos que as estimativas acima foram obtidas considerando  $\Omega$  limitado, tal como na Seção 4.2. Agora, escolhendo uma sequência adequada de domínios limitados, expandindo à  $\Omega$  (tal como na demonstração do Teorema 4.1), e “transportando” para  $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  as estimativas de  $(\rho^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{w}^k)$  dadas em (4.70), (4.71), (4.72), (4.73), (4.74), (4.75), (4.76) e (4.79), finalizamos a prova do Teorema 4.2 (aqui usamos o Teorema 1.1, o Corolário 1.1 e a Proposição 1.1).  $\square$

# Comentários finais e projetos futuros

Com os resultados obtidos nesta tese, estamos elaborando alguns artigos em parceria com os Professores Pablo Braz (UFPE, Brasil) e Marko Rojas-Medar (Universidad del Bío-Bío, Chile). A seguir os descreveremos.

Do Capítulo 2, estamos preparando o *paper* “Error estimates uniform in time for semi-Galerkin approximations of asymmetric fluids with variable density”.

Os resultados do Capítulo 3 foram submetidos para publicação em 2013 com o título “Vanishing viscosity for non-homogeneous asymmetric fluids in  $\mathbb{R}^3$ : The  $L^2$  case”.

Com relação ao Capítulo 4, estamos produzindo o *paper* “Strong solutions for the equations of nonhomogeneous asymmetric fluids in unbounded domains”.

Quanto a trabalhos futuros, podemos mencionar o estudo da existência de soluções periódicas para as equações de um fluido assimétrico e, como em [42], onde é considerado o limite invíscido para os fluidos micropolares no caso de densidade constante para algumas forças externas especiais, poderíamos trabalhar com o caso de densidade variável. Também, como sugestão dos Professores F. Guillén, M. Rojas-Medar e P. Braz, há a possibilidade de se estudar o problema de Cauchy (1)-(2) em  $\Omega \times (0, T)$ , sendo  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^3$ , seguindo as mesmas ideias de F. Guillén-González e G. Planas em [22].

# Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Space*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] F. Alliot and C. Amrouche. The Stokes problem in  $\mathbb{R}^n$ : an approach in weighted Sobolev spaces. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 09:723–754, 1999.
- [3] H. Amann. *Ordinary differential equations. An introduction to nonlinear analysis*, volume 13 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990.
- [4] C. Amrouche and V. Girault. On the existence and regularity of the solutions of Stokes problem in arbitrary dimension. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 67(5):171–175, 1991.
- [5] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, volume 22 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [6] J. L. Boldrini and M. A. Rojas-Medar. Global solutions to the equations for the motion of stratified incompressible fluids. *Mat. Contemp.*, 3:1–8, 1992.
- [7] J. L. Boldrini and M. A. Rojas-Medar. Global strong solutions of the equations for the motion of nonhomogeneous incompressible fluids. In C. Conca and G. N. Gatica, editors, *Numerical methods in mechanics*, number 371 in Pitman Res. Notes Math. Ser., pages 35–45, Harlow, 1997. Longman.
- [8] J. L. Boldrini, M. A. Rojas-Medar, and E. Fernández-Cara. Semi-Galerkin approximation and strong solutions to the equations of the nonhomogeneous asymmetric fluids. *J. Math. Pures Appl.*, 82 (11):1499–1525, 2003.
- [9] P. Braz e Silva, E. Fernández-Cara, and M. A. Rojas-Medar. Vanishing viscosity for non-homogeneous asymmetric fluids in  $\mathbb{R}^3$ . *J. Math. Analysis and Appl.*, 332:833–845, 2007.

- [10] P. Braz e Silva and M. A. Rojas-Medar. Error bounds for semi-Galerkin approximations of nonhomogeneous incompressible fluids. *J. Math. Fluid Mech.*, 11:186–207, 2009.
- [11] P. Braz e Silva, M.A. Rojas-Medar, and E.J. Villamizar-Roa. Strong solutions for the nonhomogeneous Navier-Stokes equations in unbounded domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33:358–372, 2010.
- [12] P. Braz e Silva and E.G. Santos. Global weak solutions for asymmetric incompressible fluids with variable density. *Comptes Rendus. Mathématique*, 346:575–578, 2008.
- [13] P. Braz e Silva and E.G. Santos. Global weak solutions for variable density asymmetric incompressible fluids. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 387:953–969, 2012.
- [14] A. Bressan and C. Donadello. *Lecture Notes on the Theory of Incompressible Fluid Motion*. Pennsylvania, 2007.
- [15] H. Brézis. *Análisis Funcional, teoría y aplicaciones*. Alianza, Madrid, 1984.
- [16] C. Conca, R. Gormaz, E. Ortega-Torres, and M. Rojas-Medar. The equations of nonhomogeneous asymmetric fluids: an interactive approach. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 25:1251–1280, 2002.
- [17] C. Conca, R. Gormaz, E. Ortega-Torres, and M. Rojas-Medar. Existence and uniqueness of a strong solution for nonhomogeneous micropolar fluids. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, VOL. XIV (Paris, 1997/1998)*, volume 31 of *Stud. Math. Appl.*, pages 213–241, Amsterdam, 2002. North-Holland.
- [18] D.W. Condiff and J.S. Dahler. Fluid mechanics aspects of antisymmetric stress. *Phys. Fluids*, 7(6):842–854, 1964.
- [19] A. C. Eringen. Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, 16(1):1–16, 1966.
- [20] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1998.
- [21] E. Fernández-Cara and F. Guillén. The existence of nonhomogeneous, viscous and incompressible flow in unbounded domains. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(7-8):1253–1265, 1992.

- [22] F. Guillén-González and G. Planas. On the asymptotic behaviour of the 2D Navier-Stokes equations with Navier friction conditions towards Euler equations. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 89:810–822, 2009.
- [23] J. G. Heywood. The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions. *Indiana Univ. Math. J.*, 29(5):639–681, 1980.
- [24] J. G. Heywood. An error estimate uniform in time for spectral Galerkin approximations of the Navier-Stokes problem. *Pacific J. Math*, 98(2):333–345, 1982.
- [25] J. G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem I: regularity of solutions and second order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(2):275–311, 1982.
- [26] S. Itoh. On the vanishing viscosity in the Cauchy problem for equations of a nonhomogeneous incompressible fluid II. *Bull. Fac. Educ. Hirosaki Univ.*, 76:33–40, 1996.
- [27] S. Itoh and A. Tani. Solvability of nonstationary problems for nonhomogeneous incompressible fluids and the convergence with vanishing viscosity. *Tokyo J. Math.*, 22:17–42, 1999.
- [28] T. Kato and G. Ponce. Commutator estimates and Euler and Navier-Stokes equations. *Comm Pure Appl Math*, 41:891–907, 1988.
- [29] A. V. Kazhikov. Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of motion of an inhomogeneous viscous incompressible fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 216:1008–1010, 1974.
- [30] J. U. Kim. Weak solutions of an initial-boundary value problems for an incompressible viscous fluid with nonnegative density. *SIAM J. Math. Anal.*, 18(1):89–96, 1987.
- [31] S. Klainerman and A. Majda. Singular limits of quasilinear hyperbolic systme with large parameters and the incompressible limits of compressible fluids. *Comm Pure Appl Math*, 34:481–524, 1981.
- [32] O. A. Ladyzhenskaya and V. A. Solonnikov. The unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous incompressible inhomogeneous fluids. In *Boundary value problems of mathematical physics, and related questions of the theory of functions 8*, volume 52 of *Zap. Naučn Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI)*, pages 52–109, 218–219, 1975.

- [33] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N.N. Uralceva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, volume 23 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1968.
- [34] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [35] J.-L. Lions. On some problems connected with Navier-Stokes equations. In *Nonlinear evolution equations (Proc. Sympos., Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1977)*, volume 40 of *Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin*, pages 59–84, New York-London, 1978. Academic Press.
- [36] J.-L. Lions. On some questions in boundary value problems of mathematical physics. In *Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations (Proc. Internat. Sympos., Inst. Mat., Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977)*, volume 30 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 284–346, Amsterdam-New York, 1978. North-Holland.
- [37] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol I: Incompressible models*, volume 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.
- [38] G. Lukaszewicz. On nonstationary flows of incompressible asymmetric fluids. *Math. Methods Appl. Sci.*, 13(3):219–232, 1990.
- [39] G. Lukaszewicz. *Micropolar fluids. Theory and applications*. Modelling and Simulation in Science, Engineering & Technology. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [40] L. A. Medeiros and M. M. Miranda. *Espaços de Sobolev*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [41] H. Okamoto. On the equation of nonstationary stratified fluid motion: uniqueness and existence of the solutions. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 30(3):615–643, 1984.
- [42] E. Ortega-Torres, E.J. Villamizar-Roa, and M.A. Rojas-Medar. Micropolar fluids with vanishing viscosity. *Abstract and Applied Analysis*, 2010.
- [43] E. E. Ortega-Torres, M. A. Rojas-Medar, and R. C. Cabrales. A uniform error estimate in time for spectral Galerkin approximations of the magneto-micropolar fluid equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 28:689–706, 2012.

- [44] R. Rautmann. On the convergence rate of nonstationary Navier-Stokes approximations. In *Approximation methods for Navier-Stokes problems (Proc. Sympos., Univ. Paderborn, Paderborn, 1979)*, volume 771 of *Lecture Notes in Math.*, pages 425–449, Berlin, 1980. Springer.
- [45] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*. Academic Press, 1972.
- [46] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, volume Third Edition. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [47] R. Salvi. Error estimates for the spectral Galerkin approximations of the solutions of Navier-Stokes type equations. *Glasgow Math. J.*, 31(2):199–211, 1989.
- [48] R. Salvi. The equations of viscous incompressible nonhomogeneous fluid: on the existence and regularity. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 33(1):94–110, 1991.
- [49] J. Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(5):1093–1117, 1990.
- [50] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1984.