Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-graduação em Matemática

Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média H$_{r+1}$ Constante

Edgar Corrêa de Amorim Filho

Dissertação de Mestrado

Recife
2014

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Edgar Corrêa de Amorim Filho

Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média H_{r+1} Constante

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa*

Recife
2014

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

A524e Amorim Filho, Edgar Corrêa de
Estabilidade de hipersuperfícies com curvatura média Hr+1 / Edgar Corrêa de Amorim. – Recife: O Autor, 2014.
60 f.: il.

Orientador: Antônio Fernando Pereira de Sousa.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2014.
Inclui referências e apêndice.

1. Geometria diferencial. 2. Geometria riemanniana. I. Sousa, Antônio Fernando Pereira de (orientador). I. Título.

516.36 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2014-155

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ____

Antonio Fernando Pereira de Sousa, *UFPE*

Orientador

____

Henrique José Morais de Araujo, *UFPE*

____

Marco Antonio Lázaro Velásquez, UFCG

ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA H_{r+1} CONSTANTE

Por

Edgar Corrêa de Amorim Filho

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

28 de Fevereiro – 2014

À minha mãe, meu pai, e minha irmã.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a minha mãe, Nilza, meu pai, Edgar (*in memoriam*), e minha irmã, Gabriela, por tornarem cada parte desse trabalho possível, agregando a mim cada um dos requisitos necessários ao longo de todos os anos de minha vida.

Agradeço também à minha família como um todo: avôs(ós), tios(as), primos(as), sobrinhos(as) e aos agregados.

Agradeço aos meus amigos Rafael, Thiago (Kid), Paulo(inho), Roger, Pedro, Dinho, Cássio, Max, Ursinho, Bia, Luiz, George e a todos os meus amigos do Conjunto Residencial Marcos Freire, aos quais também devo desculpas por deixar de comparecer.

Gostaria também de agradecer a minha família da sala 212 do DMAT-UFPE: Lorena, Gilson, Tanaka, Luiz Filipe, Renato, Cláudia e Eudes, que transformavam cada dia de estudo em bons momentos.

Agradeço aos alunos e professores do DMAT-UFPE pelo bom convívio, mesmo diante das desavenças. Em especial aos alunos Jaime, Luiz, João e Bruno (Bob), e ao Professor Antonio Sousa (Tony) pela orientação.

Agradeço aos Professores Henrique Araújo e Marco Antonio pelo cuidado na correção deste trabalho e por participarem da banca examinadora.

E por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Definimos a noção de r-estabilidade sobre hipersuperfícies fechadas com curvatura de ordem superior H_{r+1} constante em um forma espacial Riemanniana. Com a hipótese de que uma tal hipersuperfície M^n esta contida ou em um hemisfério aberto de uma esfera Euclidiana ou no espaço Hiperbólico, mostraremos que M^n é r-estável se, e somente se, M^n é uma esfera geodésica.

Palavras-chave: Forma espacial Riemanniana. Curvaturas de ordem superior. R-estabilidade. Esferas geodésicas.

Abstract

We define the notion of r-stability concerning closed hypersurfaces with higher order mean curvature H_{r+1} constant in a Riemannian space form. By supposing that such a hypersurface M^n is contained either in an open hemisphere of the Euclidian sphere or in the hyperbolic space, we are able to show that M^n is r-stable if, and only if, M^n is a geodesic sphere.

Keywords: Riemannian space form. Higher order mean curvatures. R-stability. Geodesic spheres.

Sumário

Introdução

Em geometria diferencial, a curvatura média de uma superfície surge quando consideramos o clássico problema isoperimétrico, que podemos enunciar do seguinte modo:

Dentre todas as superfícies que envolvem uma certa quantidade de volume, qual é a que tem a menor área?

A resposta é a esfera redonda. Porém, se procuramos apenas por soluções locais do problema isoperimétrico, a área de uma superfície compacta imersa no espaço euclidiano é estacionária com respeito a toda variação que preserva volume se, e somente se, a imersão tem curvatura média constante. Ou seja, as superfícies com curvatura média constante são os pontos críticos do funcional área com respeito às variações que preservam volume.

Por conta disso, por muitos anos o trabalho dos geômetras era focado em caracterizar as superfícies fechadas com curvatura média constante. Até os anos 80, as esferas eram os únicos exemplo de superfícies com esta propriedade no espaço Euclidiano.

Em 1984, J.L. Barbosa e M. do Carmo provaram em [2] que

As esferas são as únicas superfícies estáveis com curvatura média constante.

Mas, em 1986, H.C. Wente [11] demonstrou a existência de um toro imerso em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante. Após esses resultados clássicos, surgiram vários estudos sobre estabilidade e curvatura média constante.

Em 1988, J.L. Barbosa, M. do Carmo, e J. Eschenburg [3] estudaram estabilidade de hipersuperficies imersas em variedades Riemannianas de curvatura seccional constante e mostraram o seguinte resultado:

Sejam M^n uma variedade Riemanniana fechada e $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. Então x é estável se, e somente se, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica em $\overline{M}_c^{n+1}$.

No caso em que a variedade ambiente $\overline{M}_c^{n+1}$ tem curvatura seccional constante c, é possivel mostrar que imersões com $(r+1)$-ésima curvatura de ordem superior constante aparecem como pontos críticos do problema variacional de minimizar certos funcionais do tipo

$$A_r = \int_M F_r(S_1, ..., S_r) dM,$$

onde F_r é uma função apropriada, para variações que preservam o volume. Para esse problema, as fórmulas da primeira e segunda variação podem ser determinadas e o conceito de r-estabilidade, que generaliza o que foi introduzido em [3], pode ser estabelecido.

Baseado nesses estudos, temos como objetivo neste trabalho, que está dividido em 4 capítulos, demonstrar o seguinte resultado, obtido por J.L. Barbosa e A.G. Colares em [4]:

Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$, ou $\mathbb{H}^{n+1}$, se $c = -1$. Seja $x : M^n \hookrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com $H^{r+1} > 0$ constante. A hipersuperfície $x : M^n \hookrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ é r-estável se, e somente se, $x(M^n)$ é uma esfera e x é sua inclusão como uma esfera geodésica.

No primeiro capítulo, começamos com um breve estudo sobre imersões em variedades Riemannianas, segunda forma fundamental e curvatura média. Em seguida, vamos definir operadores especiais, a saber: o gradiente, o divergente e o laplaciano, e verificar algumas de suas propriedades. Faremos também um resumo de resultados clássicos sobre curvatura e curvatura seccional. Finalizaremos o capítulo definindo campos tensoriais, derivada tensorial e o Hessiano.

No segundo capítulo, vamos definir os tensores de Newton e o operador L_r e demonstrar algumas de suas propriedades. Enunciaremos também um importante resultado que garante a elipcidade do operador L_r.

No terceiro capítulo, vamos estabelecer o nosso problema variacional e encontrar as respectivas fórmulas para a primeira e segunda variação. Posteriormente, definiremos o funcional de Jacobi, a noção de r-estabilidade e demonstraremos algumas proposições que relacionam o funcional de Jacobi com o problema variacional.

Por fim, no último capítulo, iremos demonstrar o resultado principal.

O caso em que o espaço ambiente é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ é tratado em [1], por Alencar et al., onde está provado que, para cada valor de r, as esferas são as únicas hypersuperfícies r-estáveis fechadas imersas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. Vamos assumir que o leitor tem alguma familiaridade com geometria Riemanniana. Primeiramente, trataremos das imersões isométricas e definiremos a segunda forma fundamental e o operador de forma, estabelecendo assim a notação utilizada neste trabalho. Em seguida iremos definir os operadores gradiente, divergente e Laplaciano, e verificar algumas de suas propriedades. Vamos também definir a curvatura de uma variedade Riemanniana e listar alguns resultados clássicos. Por fim, vamos definir campos tensoriais, mostrar como derivar campos tensoriais e verificar algumas propriedades do Hessiano.

1.1 Imersões

Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão entre variedades Riemannianas orientadas M^n e $\overline{M}^{n+1}$, de dimensões n e $n+1$ respectivamente, $n \geq 2$, onde a métrica de M^n é induzida pela imersão x. Vamos indicar por "$\langle , \rangle$" a métrica Riemanniana de $\overline{M}^{n+1}$ e $\overline{\nabla}$ sua conexão de Levi-Civita. Se X e Y são campos locais em M^n, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}^{n+1}$, verifica-se que

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^T$$

define uma conexão em M^n e que essa é a conexão de Levi-Civita em M^n, onde o T, como expoente, indica a componente tangente a M^n do campo $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$.

Considere $\mathfrak{X}(M^n)$ e $\mathfrak{X}(M^n)^\perp$ os conjuntos dos campos tangentes e normais, respectivamente, à M^n. A **segunda forma fundamental** da imersão x é a aplicação $B : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \to \mathfrak{X}(M^n)^\perp$ que associa a cada par $(X;Y)$ de campos tangentes à M^n o campo $B(X;Y)$, normal à M^n definido por

$$B(X;Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Dado $p \in M^n$, $B(X;Y)(p) \in (T_pM)$ é a componente de $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}(p)$ normal à M^n. Note que a segunda forma fundamental só depende do comportamento de $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ ao longo de M^n, portanto não depende das extensões escolhidas para X e Y. De agora em diante, vamos indicar a extensão local do campo X por X, para simplificar a notação.

Como B é bilinear simétrica (ver [7]), expressando B em um sistema de coordenadas, verificamos que $B(X;Y)(p)$ depende apenas dos valores de $X(p)$ e de $Y(p)$. Em cada ponto p de M^n, B determina uma aplicação bilinear simétrica $T_pM \times T_pM \to (T_pM)^\perp$. Se N é um campo normal unitário em M^n, para cada $p \in M^n$ está associada a aplicação linear auto-adjunta $A : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle A(x), y\rangle = \langle B(x;y), N\rangle\,, \quad x, y \in T_pM.$$

De fato, como $\langle N, Y\rangle = 0$ para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, então, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M^n)$,

$$X\,\langle N, Y\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, N\right\rangle - \left\langle -\overline{\nabla}_X N, Y\right\rangle = 0$$

Assim,

$$\langle B(X;Y), N\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, N\right\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_X N, Y\right\rangle.$$

Defina a aplicação A por

$$A(X(p)) = (-\overline{\nabla}_X N)(p). \tag{1.1}$$

O operador A é dito **operador de forma** da imersão x. Definimos a **curvatura média** H da imersão x em p por

$$H = \frac{1}{n} tr(A)$$

onde $tr(A)$ indica o traço da matriz associada a aplicação A. Como A é auto-adjunta, existe uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM tal que a matriz de A com respeito a essa basse é uma matriz diagonal. Os números reais $k_1, ..., k_n$ na diagonal principal dessa matriz são as **curvaturas principais** de x em p. Logo

$$nH = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

O próximo lema expressa a curvatura média em coordenadas.

Lema 1.1.1. *Sejam $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão, $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de $\mathfrak{X}(M^n)$ definida numa vizinhança V de p e N um campo normal. Para todo $q \in V$ a curvatura média H de x em q é dada por*

$$nH(q) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(q) \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_k, N\right\rangle,$$

onde $g^{ik}(q)$ indica a entrada ik da inversa da matriz $(g_{ik}(q)) = (\langle e_i; e_k\rangle)(q)$.

Demonstração.

Considerando $A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, temos que $(A) = (a_{ij})$ e daí $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Logo

$$\langle A(e_i), e_k\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_{jk}.$$

$$\Rightarrow (\langle A(e_i), e_k\rangle) = (a_{ij})(g_{jk}) \Rightarrow (a_{ij}) = (\langle A(e_i), e_k\rangle)(g^{jk}) \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \langle A(e_i), e_k\rangle\, g^{kj}.$$

concluimos então que,

$$nH = tr(A) = \sum_{i,k=1}^{n} \langle A(e_i), e_k\rangle\, g^{ki} = \sum_{i,k=1}^{n} \left\langle -\overline{\nabla}_{e_i} N, e_k\right\rangle g^{ki} = \sum_{i,k=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_k, N\right\rangle g^{ki}$$

$\square$

1.2 Operadores Especiais

Nesta seção vamos definir alguns operadores especiais que aparecerão em diversas situações deste trabalho. Esses operadores são o gradiente, o divergente e o laplaciano. Os mesmos possuem uma representação simples em um referencial adequado, que vamos definir a seguir. Indicaremos por $\mathfrak{F}(M^n)$ o conjunto das funções suaves em M^n.

Definição 1.2.1. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ e $f \in \mathfrak{F}(M^n)$. A* ***divergência*** *de X, indicada por $divX$, é a função $divX : M \to \mathbb{R}$ dada por $divX(p) =$ traço da aplicação linear $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$. Além disso, o* ***gradiente*** *de f é o campo de vetores $gradf \in \mathfrak{X}(M^n)$ definido por*

$$\langle gradf(p), v\rangle = df_p(v),\ p \in M,\ v \in T_pM.$$

Decorre da última definição que o gradiente e a divergência possuem as seguintes propriedades.

Proposição 1.2.1. *Sejam $f, g \in \mathfrak{F}(M^n)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$.*

1. $grad(f+g) = gradf + gradg;$
2. $grad(f \cdot g) = f \cdot gradg + g \cdot gradf;$
3. $div(X+Y) = div(X) + div(Y);$

É possível mostrar que se M^n é uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$, existem uma vizinhança V de p e n campos de vetores $e_1, ..., e_n$ ortonormais em $\mathfrak{X}(M^n)$ tais que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0\ \forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Uma família de campos com essas características é dita um **referencial geodésico** em p.

Proposição 1.2.2. *Seja $p \in M$ e $\{e_i, ..., e_n\}$ um referencial geodésico em p. Então, dada uma função f e um campo vetorial $X = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, podemos escrever*

$$gradf(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f))e_i(p) \quad \text{e} \quad divX(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(f_i)(p).$$

Demonstração.
Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em p. Como $gradf$ é um campo em M podemos escrever que $gradf = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ para uma certa família $a_1, ..., a_n$ de funções em M. Além disso, como $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{X}(M^n)$, cada uma das funções a_i é dada por

$$a_i(p) = \langle gradf(p), e_i(p)\rangle.$$

Então, $a_i(p) = \langle gradf(p), e_i(p)\rangle = df_p(e_i) = e_i(f)(p)$, e consequentemente

$$gradf(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f))e_i(p).$$

Para o $divX$, se $D_X : \mathfrak{X}(M^n) \to \mathfrak{X}(M^n)$ é a aplicação linear dada por

$$D_X(Y) = \nabla_Y X,$$

então a matriz associada a esse operador na base $\{e_1, ..., e_n\}$ é dada por $(D) = \left(\left\langle e_i, \nabla_{e_j} X\right\rangle\right)$. Mas,

$$\begin{aligned}
\left\langle e_i, \nabla_{e_j} X\right\rangle &= \left\langle e_i, \nabla_{e_j}(\sum_{k=1}^{n} f_k e_k)\right\rangle \\
&= \left\langle e_i, \sum_{k=1}^{n} \nabla_{e_j} f_k e_k\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle e_i, f_k \nabla_{e_j} e_k + (e_j(f_k))e_k\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como $e_1, ..., e_n$ é um referencial geodésico em p, então $\nabla_{e_j} e_k(p) = 0$ para todo $j, k = 1, ..., n$ e $\langle e_i, e_k\rangle = \delta_{ik}$. Logo

$$\begin{aligned}
\left\langle e_i, \nabla_{e_j} X\right\rangle(p) &= \sum_{k=1}^{n} \left\langle e_i(p), f_k(p) \nabla_{e_j} e_k(p) + (e_j(f_k)(p))e_k(p)\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle e_i(p), (e_j(f_k)(p))e_k(p)\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} (e_j(f_k)(p)) \langle e_i(p), e_k(p)\rangle \\
&= (e_j(f_i))(p).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$divX(p) = tr(D)(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \nabla_{e_i} X\rangle(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(f_i)(p).$$

□

Proposição 1.2.3. *Se $f \in \mathfrak{F}(M^n)$ e $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, então*

$$div(f \cdot X) = f \cdot divX + \langle gradf, X\rangle.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial geodésico de M^n em p, f uma função em M^n e $X = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i \in \mathfrak{X}(M^n)$. Na Proposição 1.2.2 verificamos que

$$gradf(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f))e_i(p) \text{ e } divX(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(f_i)(p).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f\cdot divX+\langle gradf,X\rangle &= f\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}e_i(f_i)\right)+\left\langle\sum_{j=1}^{n}(e_j(f))e_j,\sum_{i=1}^{n}f_ie_i\right\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}fe_i(f_i)+\sum_{i=1}^{n}f_ie_i(f)\\
&= \sum_{i=1}^{n}fe_i(f_i)+f_ie_i(f)\\
&= \sum_{i=1}^{n}e_if\cdot f_i\\
&= div(f\cdot X).
\end{aligned}$$

□

Seja f uma função de M. O **laplaciano** de f, indicado por Δf, é a função de M dada por

$$\Delta f(p)=div\ gradf(p).$$

Se $\{e_1,...,e_n\}$ é um referencial geodésico em p, fazendo uso da proposição anterior, verifica-se facilmente que

$$\Delta f(p)=\sum_{i=1}^{n}e_i(e_i(f))(p). \tag{1.2}$$

1.3 Curvatura

Nesta seção vamos definir curvatura e curvatura seccional de uma variedade Riemanniana e citar algumas propriedades importantes que serão utilizadas ao londo deste trabalho. A demonstração de tais propriedades pode ser encontrada em [7].

Definição 1.3.1. *A **curvatura** R de uma variedade Riemanniana M^n é uma correspondência que associa a cada par $(X;Y)$ de campos em M^n uma aplicação $R(X;Y):\mathfrak{X}(M^n)\to\mathfrak{X}(M^n)$ tal que para cada $Z\in\mathfrak{X}(M^n)$,*

$$R(X;Y)Z=\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_X\nabla_YZ+\nabla_{[X;Y]}Z.$$

Proposição 1.3.1. *Sejam $x:M^n\to\overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente, B a segunda forma fundamental da imersão x e A o operador de forma. Então, para todo $X,Y,Z,T\in\mathfrak{X}(M^n)$ e $N\in\mathfrak{X}(M^n)^{\perp}$, valem as equações:*

1. *Equação de Gauss:*

$$\left\langle\overline{R}(X;Y)Z,T\right\rangle=\langle R(X;Y)Z,T\rangle-\langle B(Y;T),B(X;Z)\rangle+\langle B(X;T),B(Y;Z)\rangle\,;$$

2. *Equação de Codazzi:*

$$\left\langle \overline{R}(X;Y)Z,N \right\rangle = \langle(\nabla_Y A)(X),Z\rangle - \langle(\nabla_X A)(Y),Z\rangle.$$

Dado um espaço vetorial V e $x,y \in V$, indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo determinado por x e y.

Proposição 1.3.2. *Sejam $p \in M^n$, σ um subespaço bidimensional de T_pM^n e $x,y \in \sigma$ linearmente independentes. Então o número*

$$K(x;y) = \frac{\langle R(x;y)x,y\rangle}{|x \wedge y|}$$

não depende da escolha dos vetores $x,y \in \sigma$.

Definição 1.3.2. *Nas mesmas condições da proposição anterior, o número real $K(\sigma) = K(x;y)$ é chamado **curvatura seccional** de M^n em p segundo σ.*

Proposição 1.3.3. *Seja M^n uma variedade Riemanniana. Então M^n tem curvatura seccional constante igual a c se, e somente se,*

$$R(X;Y)Z = c[\langle Z,X\rangle Y - \langle Z,Y\rangle X],$$

$\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M^n)$.

1.4 Derivada Tensorial

Definição 1.4.1. *Seja M uma variedade. Um **campo tensorial do tipo** $(r;s)$, ou um $(r;s)$ **campo tensorial**, em M é uma aplicação $\mathfrak{F}(M)$-multilinear $T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M^n)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$. Indicaremos por $\mathfrak{T}^r_s(M)$ o conjunto de todos os $(r;s)$ campos tensoriais em M.*

Exemplo 1.4.1. *Se ω é uma 1-forma em uma variedade M, então a função $X \mapsto \omega(X)$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear de $\mathfrak{X}(M^n)$ em $\mathfrak{F}(M)$. Portanto é um $(0;1)$ campo tensorial. De fato, todo $(0;1)$ campo tensorial é proveniente de uma unica 1-forma. Escrevemos então que*

$$\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M).$$

Exemplo 1.4.2. *Se V é um campo vetorial em M, defina a aplicação*

$$V(\theta) = \theta(V) \;\; \forall \theta \in \mathfrak{X}^*(M).$$

Esta aplicação $V : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(M)$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear e, portanto, um $(1;0)$ campo tensorial. De fato, todo $(1;0)$ campo tensorial em M provem de um único campo vetorial. Escrevemos então que

$$\mathfrak{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M^n).$$

Exemplo 1.4.3. *Se* $A : \mathfrak{X}(M^n)^s \to \mathfrak{X}(M^n)$ *é* $\mathfrak{F}(M)$*-multilinear, defina o campo tensorial* $\overline{A}$: $\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M^n)^s \to \mathfrak{F}(M)$ *por*

$$\overline{A}(\theta, X_1, ..., X_s) = \theta(A(X_1, ..., X_s)).$$

$\overline{A}$ *é* $\mathfrak{F}(M)$*-linear, e consequentemente, um campo tensorial do tipo* $(1; s)$. *Em situações desse tipo, iremos considerar o próprio* A *como campo tensorial do tipo* $(1, s)$.

Definição 1.4.2. *Sejam* T *um campo tensorial do tipo* $(0; s)$ *ou* $(1; s)$ *e* X *um campo em* M^n. *A* ***derivada covariante*** *de* T *em relação a* X*, indicada por* $\nabla_X T$*, é o* $(0; s)$ *ou* $(1, s)$ *campo tensorial dado por*

$$(\nabla_X T)(Y_1, ..., Y_s) = \nabla_X(T(Y_1, ..., Y_s)) - \sum_{i=1}^{s} T(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_s).$$

Nas mesmas condições, a ***derivada covariante*** *de* T*, indicada por* ∇T*, é o* $(0; s+1)$ *ou* $(1; s+1)$ *campo tensorial dado por*

$$(\nabla T)(X, Y_1, ..., Y_s) = (\nabla_X T)(Y_1, ..., Y_s)$$

Exemplo 1.4.4. *Seja* $f \in \mathfrak{F}(M^n)$. *Definimos anteriormente o campo* $grad f$ *como o campo tal que*

$$\langle grad f, X \rangle = X(f) = df(X).$$

O ***Hessiano*** *de* f *é o campo tensorial do tipo* $(1; 1)$ *dado por*

$$Hess f = \nabla(grad f).$$

O Hessiano pode ser visto também como um campo tensorial simétrico do tipo $(0; 2)$ dado por

$$Hess f(X; Y) = \langle \nabla_X(grad f), Y \rangle.$$

De fato, como $X\langle grad f, Y \rangle = \langle \nabla_X(grad f), Y \rangle + \langle grad f, \nabla_X Y \rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X(grad f), Y \rangle &= X\langle grad f, Y \rangle - \langle grad f, \nabla_X Y \rangle \\
&= X(Y(f)) - df(\nabla_X Y) \\
&= X(Y(f)) - df(\nabla_Y X + [X; Y]) \\
&= X(Y(f)) - df(\nabla_Y X) - df([X; Y]) \\
&= X(Y(f)) - df(\nabla_Y X) - [X; Y](f) \\
&= X(Y(f)) - df(\nabla_Y X) - X(Y(f)) + Y(X(f)) \\
&= Y(X(f)) - df(\nabla_Y X) \\
&= \langle \nabla_Y(grad f), X \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $Hess f$ é simétrico.

Proposição 1.4.1. *Seja* $f \in \mathfrak{F}(M^n)$.

$$\Delta f = tr(Hess f).$$

Demonstração. Considere $\{e_1,...,e_n\}$ um referencial geodésico. Vimos na Proposição 1.2.2 que

$$grad f = \sum_{j=1}^{n} (e_j(f))e_j.$$

Então,

$$\begin{aligned}
Hess(e_i;e_i) &= \langle \nabla_{e_i} grad f, e_i \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{e_i} \left(\sum_{j=1}^{n} (e_j(f))e_j \right), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} (e_j(f))e_j, e_i \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i(e_j(f))e_j + e_j(f)\nabla_{e_i} e_j, e_i \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i(e_j(f))e_j, e_i \right\rangle \\
&= \langle e_i(e_i(f))e_i, e_i \rangle \\
&= e_i(e_i(f)).
\end{aligned}$$

Portanto, pela igualdade 1.2,

$$tr(Hess f) = \sum_{i=1}^{n} Hess f(e_i;e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)) = \Delta f.$$

□

CAPÍTULO 2

Os Tensores de Newton e o Operador L_r

Neste capítulo vamos definir os tensores de Newton e o operador L_r, que generaliza o operador Laplaciano em certo sentido. O foco deste capítulo é mostra que sobre certas condições, o operador L_r se escreve como divergente de um campo, o que vai nos dar algumas propriedades muito importantes para o andamento deste trabalho.

2.1 Os Tensores de Newton

Definição 2.1.1. *O* ***r-ésimo polinômio simétrico*** *associado ao operador autoadjunto A, indicado por $S_r(A)$ ou $S_r(k_1,...,k_n)$, é definido como*

$$S_r(A) = \begin{cases} 1 & , \ se\ r = 0 \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n} k_{i_1} \cdots k_{i_r} & , \ se\ r \in \{1,...,n\} \\ 0 & , \ se\ r > n, \end{cases}$$

onde $k_1,...,k_n$ são os autovalores do operador A. Note que $(-1)^r S_r(A)$ é o coeficiente do monômio de grau $n-r$ no polinômio característico de A. Para $1 \leq r \leq n$, a ***r-ésima curvatura de órdem superior*** *de M^n em p é o número H_r dado por*

$$\binom{n}{r} H_r = S_r(A).$$

Em particular, para $r = 1$,

$$H_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = H$$

é a curvatura média de M^n, e para $r = n$,

$$H_n = k_1 \cdots k_n$$

é a curvatura de Gauss-Kronecker.

Nas mesmas condições de antes, definimos também a soma das r-ésimas potências dos autovalores de A por

$$\omega_r(k_1,...,k_n) = \sum_{i=1}^{n} (k_i)^r.$$

A próxima proposição exibe duas identidades, que são conhecidas como **Identidades de Newton**, é serão utilizadas nesse trabalho.

Proposição 2.1.1. *Sejam $k_1,...,k_n$ números reais. Então*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k S_k(k_1,...,k_n)\omega_{r-k}(k_1,...,k_n)+(-1)^r rS_r(k_1,...,k_n)=0$ *se* $1\leq r\leq n$;

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k S_k(k_1,...,k_n)\omega_{r-k}(k_1,...,k_n)=0$ *se* $r>n$.

Demonstração.

Por simplicidade, vamos usar as indicações $S_k=S_k(k_1,...,k_n)$ e $\omega_k=\omega_k(k_1,...,k_n)$. Primeiramente, observe que se $k_1=...=k_n=0$, então $S_k=0$ para todo $k\in\mathbb{N}$ e valem as identidades.

Agora suponha que existe $i\in\{1,...,n\}$ tal que $k_i\neq 0$. Considere o número real M dado por

$$M=max\{|k_i|;i\in\mathbb{N},1\leq i\leq n\}$$

e defina o polinômio $g:(-\frac{1}{M};\frac{1}{M})\to\mathbb{R}$ por

$$g(t)=\prod_{j=0}^{n}(1+tk_j)=1+S_1t+S_2t^2+...+S_nt^n.$$

Por um lado,

$$g'(t)=S_1+2S_2t+...+nS_nt^{n-1}. \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{d}{dt}\ln g(t)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\ln(i+tk_j)\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{1+tk_j}.$$

Como M foi escolhido de modo que $|tk_j|<1$ para todo j, podemos escrever

$$\frac{k_j}{1+tk_j}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k_j)^{k+1}t^k.$$

Logo,

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k_j)^{k+1}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}(-1)^k(k_j)^{k+1}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega_{k+1}t^k$$

Segue que

$$g'(t)=\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega_{k+1}t^k\right]g(t). \tag{2.2}$$

Para concluir o resultado, basta comparar os coeficientes dos polinômios 2.1 e 2.2. Em 2.1, o monômio de grau $r-1$ é rS_rt^{r-1}. Já em 2.2, o monômio de grau $r-1$ é

$$\sum_{k=0}^{r-1}S_kt^k(-1)^{r-1-k}\omega_{r-k}t^{r-1-k}=\left[\sum_{k=0}^{r-1}S_k(-1)^{r-1-k}\omega_{r-k}\right]t^{r-1}=-(-1)^r\left[\sum_{k=0}^{r-1}S_k(-1)^k\omega_{r-k}\right]t^{r-1}.$$

Comparando os coeficientes, e lembrando que $S_r=0$ se $r>n$, temos os resultados desejados.

$\square$

Definição 2.1.2 (Tensores de Newton). *Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, A seu operador de forma e $r \in \mathbb{N}$. O **r-ésimo Tensor de Newton** é a aplicação $P_r(A) : T_pM \longrightarrow T_pM$ dada por:*

$$P_r(A) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(A)A^j.$$

Note que $P_0(A) = I$ e que se $P(x)$ é o polinômio característico de A, então $P_n(A) = P(A) = 0$ e portanto $P_r(A) = 0$ para todo $r \geq n$.

Lema 2.1.1. *Para cada r, o tensor de Newton assiciado a A satisfaz:*

a) $P_{r+1}(A) = S_{r+1}(A)I - AP_r(A)$;

b) $tr[AP_r(A)] = nS_{r+1}(A) - tr[P_{r+1}(A)]$;

c) $tr[A^2P_r(A)] = tr[S_{r+1}(A)A] - tr[AP_{r+1}(A)]$.

Demonstração.

a) Para $r = 0$, temos que

$$\begin{aligned} P_1(A) &= \sum_{j=0}^{1} (-1)^j S_{1-j}(A)A^j \\ &= S_1(A)I - S_0(A)A \\ &= S_1(A)I - AP_0(A). \end{aligned}$$

Agora suponha que $P_{r+1}(A) = S_{r+1}(A)I - AP_r(A)$ para todo $r \leq k-1$. Para $r = k$ temos que

$$\begin{aligned} P_{k+1}(A) &= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j S_{k+1-j}(A)A^j \\ &= S_{k+1}(A)I + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j S_{k+1-j}(A)A^j \\ &= S_{k+1}(A)I + \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i-1} S_{k-i}(A)A^{i+1} \\ &= S_{k+1}(A)I - A\sum_{i=0}^{k} (-1)^i S_{k-i}(A)A^i \\ &= S_{k+1}(A)I - AP_k(A). \end{aligned}$$

Portanto, por indução, temos que $P_{r+1}(A) = S_{r+1}(A)I - AP_r(A)$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

b) Pelo item a), temos que

$$AP_r(A) = S_{r+1}(A)I - P_{r+1}(A)$$

Logo

$$\begin{aligned} tr[AP_r(A)] &= tr[S_{r+1}(A)I] - tr[P_{r+1}(A)] \\ &= S_{r+1}tr[I] - tr[P_{r+1}(A)] \\ &= nS_{r+1} - tr[P_{r+1}(A)]. \end{aligned}$$

c) Ainda pelo item a), multiplicando por A, temos que

$$A^2P_r(A) = S_{r+1}(A)A - AP_{r+1}(A).$$

Portanto,

$$tr[A^2P_r(A)] = tr[S_{r+1}(A)A] - tr[AP_{r+1}(A)].$$

□

Com o Lema 2.1.1 podemos mostrar a seguinte proposição.

Proposição 2.1.2. *Para cada r, o tensor da Newton associado a A satisfaz:*

1. $tr[P_r(A)] = (n-r)S_r(A)$;
2. $tr[AP_r(A)] = (r+1)S_{r+1}(A)$;
3. $tr[A^2P_r(A)] = S_1(A)S_{r+1}(A) - (r+2)S_{r+2}(A)$.

Demonstração. 1. Considere $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de A e $k_1, ..., k_n \in \mathbb{R}$ tais que $A(e_i) = k_ie_i$. Temos que

$$tr[P_r(A)] = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(A)(e_i), e_i \rangle.$$

Pela definição de $P_r(A)$,

$$\begin{aligned} tr[P_r(A)] &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(A)A^j(e_i), e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(A) \left\langle A^j(e_i), e_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $A^j(e_i) = k_i^j e_i$,

$$\begin{aligned}
tr[P_r(A)] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(A)\left\langle k_i^j e_i, e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(A) k_i^j \langle e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(A) k_i^j \\
&= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(A)\sum_{i=1}^{n} k_i^j \\
&= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}(A)\omega_j(A) \\
&= S_r(A)\omega_0(A) + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j S_{r-j}(A)\omega_j(A).
\end{aligned}$$

Fazendo $k = r - j$ e observando que $\omega_0(A) = n$, obtemos

$$\begin{aligned}
tr[P_r(A)] &= nS_r(A) + \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-k} S_k(A)\omega_{r-k}(A) \\
&= nS_r(A) + (-1)^r\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k S_k(A)\omega_{r-k}(A).
\end{aligned}$$

Das identidades de Newton da Proposição 2.1.1 segue que

$$\begin{aligned}
tr[P_r(A)] &= nS_r(A) + (-1)^r(-1)(-1)^r rS_r(A) \\
&= nS_r(A) - rS_r(A) \\
&= (n-r)S_r(A).
\end{aligned}$$

2. Pelo item (b) do Lema 2.1.1, temos

$$tr[AP_r(A)] = nS_{r+1}(A) - tr[P_{r+1}(A)].$$

E pelo item 1, segue que

$$tr[P_{r+1}(A)] = [n-(r+1)]S_{r+1}(A).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
tr[AP_r(A)] &= nS_{r+1}(A) - [n-(r+1)]S_{r+1}(A) \\
&= nS_{r+1}(A) - nS_{r+1}(A) + (r+1)S_{r+1}(A) \\
&= (r+1)S_{r+1}(A).
\end{aligned}$$

3. Pelo item (c) do Lema 2.1.1, temos

$$tr[A^2P_r(A)] = tr[S_{r+1}(A)A] - tr[AP_{r+1}(A)].$$

Usando o item 2, temos

$$\begin{aligned} tr[AP_{r+1}(A)] &= [(r+1)+1]S_{(r+1)+1}(A) \\ &= (r+2)S_{r+2}(A). \end{aligned}$$

Alem disso,

$$\begin{aligned} tr[S_{r+1}(A)A] &= S_{r+1}(A)tr[A] \\ &= S_{r+1}(A)S_1(A). \end{aligned}$$

Logo

$$tr[A^2P_r(A)] = S_1(A)S_{r+1}(A) - (r+2)S_{r+2}(A).$$

□

Observação 2.1.1. *Como $P_r(A)$ é uma combinação de potências de A, então $AP_r(A) = P_r(A)A$.*

Lema 2.1.2. *Sejam $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre variedades Riemannianas e $\{e_1,...,e_n\}$ uma base ortonormal de autovetores do operador de forma A associado a imersão x. Então, para cada $i \in \{1,...,n\}$*

$$P_r(A)(e_i) = \mu_{i,r}e_i,$$

onde $\mu_{i,r}$ é dado por

$$\mu_{i,r} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{i_1<...<i_r,\\ i_k\neq i}} k_{i_1}...k_{i_r} & , \text{ se } 1 \leq r \leq n \\ 1 & , \text{ se } r = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramente observe que

$$S_j(A) - \mu_{i,j-1}k_i = \mu_{i,j}$$

Vamos fazer a demonstração por indução sobre r. Para o caso $r = 0$,

$$P_0(A)(e_i) = I(e_i) = \mu_{i,0}e_i.$$

Suponha agora que, para $r = j-1$, vale que $P_{j-1}(A)(e_i) = \mu_{i,j-1}e_i$. Então,

$$\begin{aligned} P_j(A)(e_i) &= (S_j(A)I - AP_{j-1}(A))(e_i) \\ &= S_j(A)e_i - AP_{j-1}(A)(e_i) \\ &= S_j(A)e_i - A(\mu_{i,j-1}e_i) \\ &= S_j(A)e_i - \mu_{i,j-1}k_ie_i \\ &= (S_j(A) - \mu_{i,j-1}k_i)e_i \\ &= \mu_{i,j}e_i. \end{aligned}$$

portanto, o resultado é válido para $r \in \{0,1,...,n\}$. □

De posse do exemplo 1.4.3, o r-ésimo tensor de Newton associado ao operador de forma A é um campo tensorial do tipo $(1;1)$. Assim, para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$(\nabla_X P_r)(Y) = \nabla_X P_r(Y) - P_r(\nabla_X Y).$$

Lema 2.1.3. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, o operador linear $\nabla_X P_r$ é auto-adjunto.*

Demonstração. De início, observe que, como P_r é combinação de potências do operador de forma A, então P_r é um operador linear auto-adjunto. Sejam $Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X P_r)(Y), Z\rangle &= \langle \nabla_X P_r(Y) - P_r(\nabla_X Y), Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X P_r(Y), Z\rangle - \langle P_r(\nabla_X Y), Z\rangle . \end{aligned}$$

Porém, sabemos que

$$X\langle P_r(Y), Z\rangle = \langle \nabla_X P_r(Y), Z\rangle + \langle P_r(Y), \nabla_X Z\rangle .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X P_r)(Y), Z\rangle &= X\langle P_r(Y), Z\rangle - \langle P_r(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle P_r(\nabla_X Y), Z\rangle \\ &= X\langle Y, P_r(Z)\rangle - \langle Y, P_r(\nabla_X Z)\rangle - \langle \nabla_X Y, P_r(Z)\rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X P_r(Z)\rangle - \langle Y, P_r(\nabla_X Z)\rangle \\ &= \langle Y, (\nabla_X P_r)(Z)\rangle . \end{aligned}$$

□

Definição 2.1.3. *A **divergência do r-ésimo tensor de Newton**, $0 \le r \le n$, é o campo dado por*

$$divP_r = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} P_r)(e_i),$$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal de M^n.

2.2 O Operador L_r

Por simplicidade, a partir de agora indicaremos por S_r e P_r o r-ésimo polinômio simétrico e o r-ésimo tensor de Newton, respectivamente, associados ao operador de forma da imersão $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$.

Definição 2.2.1. *Dado $r \in \mathbb{N}$, com $0 \le r \le n-1$, definimos o operador diferencial de segunda ordem $L_r : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ por*

$$L_r(f) = tr(P_r Hessf),$$

onde $P_r Hessf$ indica a composição de P_r e $Hessf$.

O nosso objetivo agora é demonstrar que sobre certas condições, o operador L_r pode ser escrito como

$$L_r(f) = div_M(P_r grad f).$$

Lema 2.2.1. *Sejam $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e A seu operador de forma. Seja P_r o r-ésimo tensor de Newton associado a A. Então, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\langle gradS_r, X\rangle = tr(P_{r-1}\nabla_X A).$$

Demonstração. Considere $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal que diagonaliza o operador de forma. Por um lado, temos que

$$\langle gradS_r, X\rangle = X(S_r) = \sum_{i_1<...<i_r}\sum_{j=1}^{r} k_{i_1}...X(k_{i_j})...k_{i_r}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X A)(e_i) &= \nabla_X A(e_i) - A(\nabla_X e_i)\\
&= \nabla_X k_i e_i - A(\nabla_X e_i)\\
&= k_i \nabla_X e_i + X(k_i)e_i - A(\nabla_X e_i).
\end{aligned}$$

Como $\{e_1, ..., e_n\}$ é ortonormal,

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle e_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X A)(e_i) &= k_i \sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle e_j + X(k_i)e_i - A\left(\sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle e_j\right)\\
&= X(k_i)e_i + \sum_{j=1}^{n} k_i \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle e_j - \sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle A(e_j)\\
&= X(k_i)e_i + \sum_{j=1}^{n} k_i \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle e_j - \sum_{j=1}^{n} k_j \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle e_j\\
&= X(k_i)e_i + \sum_{j=1}^{n} [k_i \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle - k_j \left\langle \nabla_X e_i, e_j\right\rangle] e_j.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
tr(P_{r-1}\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1}(\nabla_X A(e_i)), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X A(e_i), P_{r-1}(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle X(k_i)e_i + \sum_{j=1}^{n} [k_i \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle - k_j \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle] e_j, \mu_{i,r-1} e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ X(k_i)\mu_{i,r-1}\langle e_i, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \left[(k_i \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle - k_j \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle)\mu_{i,r-1}\langle e_i, e_j\rangle \right] \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ X(k_i)\mu_{i,r-1}\langle e_i, e_i\rangle + [k_i \langle \nabla_X e_i, e_i\rangle - k_i \langle \nabla_X e_i, e_i\rangle]\mu_{i,r-1} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X(k_i) \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_{r-1}, \\ i_k \neq i}} k_{i_1}\ldots k_{i_{r-1}} \\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_r} \sum_{j=1}^{r} k_{i_1}\ldots X(k_{i_j})\ldots k_{i_r}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.2.2. *Sejam $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície e N um campo normal a M^n. Então, para cada $r \in \{1,...,n-1\}$ e $X \in \mathfrak{X}(M^n)$,*

$$\langle divP_r, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \left\langle \overline{R}(N, P_{r-j}(e_i))e_i, A^{j-1}(X) \right\rangle,$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Primeiramente note que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X I)(Y) = \nabla_X(I(Y)) - I(\nabla_X Y) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X P_r)(Y) &= (\nabla_X(S_r I - AP_{r-1}))(Y) \\
&= (\nabla_X S_r I)(Y) - (\nabla_X AP_{r-1})(Y) \\
&= X(S_r)Y + S_r(\nabla_X I)(Y) - (\nabla_X A)(P_{r-1}(Y)) - A(\nabla_X P_{r-1}(Y)) \\
&= X(S_r)Y - (\nabla_X A)(P_{r-1}(Y)) - A(\nabla_X P_{r-1}(Y)).
\end{aligned}$$

Em particular, se $\{e_1,...,e_n\}$ é um referencial ortonormal de autovetores do operador de forma,

$$(\nabla_{e_i} P_r)(e_i) = e_i(S_r)e_i - (\nabla_{e_i} A)(P_{r-1}(e_i)) - A(\nabla_{e_i} P_{r-1}(e_i)).$$

Logo

$$\begin{aligned} divP_r &= \sum_{i=1}^{n} e_i(S_r)e_i - \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}A)(P_{r-1}(e_i)) - A(\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}P_{r-1}(e_i)) \\ &= gradS_r - \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}A)(P_{r-1}(e_i)) - A(divP_{r-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle divP_r, X\rangle = \langle gradS_r, X\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i}A)(P_{r-1}(e_i)), X\rangle - \langle A(divP_{r-1}), X\rangle .$$

Da equação de Codazzi, temos que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{e_i}A)(P_{r-1}(e_i)), X\rangle &= \langle P_{r-1}(e_i), (\nabla_{e_i}A)(X)\rangle \\ &= \langle P_{r-1}(e_i), (\nabla_X A)(e_i)\rangle + \left\langle \overline{R}(X;e_i)P_{r-1}(e_i), N\right\rangle \\ &= \langle P_{r-1}((\nabla_X A)(e_i)), e_i\rangle + \left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, X\right\rangle . \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} \langle divP_r, X\rangle &= \langle gradS_r, X\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle P_{r-1}((\nabla_X A)(e_i)), e_i\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, X\right\rangle - \langle A(divP_{r-1}), X\rangle \\ &= \langle gradS_r, X\rangle - tr(P_{r-1}\nabla_X A) - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, X\right\rangle - \langle A(divP_{r-1}), X\rangle . \end{aligned}$$

Mas pelo lema anterior,

$$\langle gradS_r, X\rangle = tr(P_{r-1}\nabla_X A).$$

Logo

$$\langle divP_r, X\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, X\right\rangle - \langle A(divP_{r-1}), X\rangle .$$

Agora basta usar indução para concluir o resultado. Para $r = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \langle divP_1, X\rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N;P_0(e_i))e_i, X\right\rangle - \langle A(divP_0), X\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N;P_0(e_i))e_i, X\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{1}\sum_{i=1}^{n} (-1)^j \left\langle \overline{R}(N;P_{1-j}(e_i))e_i, A^{j-1}(X)\right\rangle . \end{aligned}$$

Tomemos por hipótese de indução que

$$\langle divP_{r-1}, X\rangle = \sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^j\left\langle \overline{R}(N;P_{r-1-j}(e_i))e_i, A^{j-1}(X)\right\rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle divP_r, X\rangle &= -\langle A(divP_{r-1}), X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, X\right\rangle \\
&= -\langle divP_{r-1}, A(X)\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, X\right\rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^j\left\langle \overline{R}(N;P_{r-1-j}(e_i))e_i, A^j(X)\right\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, A^0(X)\right\rangle \\
&= -\sum_{k=2}^{r}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k-1}\left\langle \overline{R}(N;P_{r-k}(e_i))e_i, A^{k-1}(X)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}(-1)^1\left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, A^{1-1}(X)\right\rangle \\
&= \sum_{k=2}^{r}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k}\left\langle \overline{R}(N;P_{r-k}(e_i))e_i, A^{k-1}(X)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}(-1)^1\left\langle \overline{R}(N;P_{r-1}(e_i))e_i, A^{1-1}(X)\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k}\left\langle \overline{R}(N;P_{r-k}(e_i))e_i, A^{k-1}(X)\right\rangle.
\end{aligned}$$

□

De posse desse resultado, podemos mostrar a proposição seguinte.

Proposição 2.2.1. *Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície. Se $\overline{M}_c^{n+1}$ tem curvatura seccional constante c, então*

$$L_r(f) = div_M(P_r grad f),$$

para todo $f \in \mathfrak{F}(M^n)$.

Demonstração.

Seja $p \in M^n$. Considere $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em M^n que diagonalize o operador de forma A da imersão x em p. Da definição 1.2.1,

$$div_M(P_r grad f) = tr[Y \mapsto \nabla_Y P_r grad f].$$

Como $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal,

$$\nabla_{e_i} P_r grad f = \sum_{j=1}^{n}\left\langle \nabla_{e_i} P_r grad f, e_j\right\rangle e_j.$$

Daí,

$$div_M(P_r grad f) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} P_r grad f, e_i \rangle.$$

Observe que

$$(\nabla_{e_i} P_r)(grad f) = \nabla_{e_i}(P_r grad f) - P_r(\nabla_{e_i} grad f).$$

Segue que

$$\begin{aligned} div_M(P_r grad f) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} P_r)(grad f) + P_r(\nabla_{e_i} grad f), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} P_r)(grad f)), e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} grad f), e_i \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$L_r(f) = tr[P_r(Hess f)] = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(Hess f(e_i)), e_i \rangle.$$

Mas como $Hess f(e_i) = \nabla_{e_i} grad f$,

$$L_r(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} grad f)), e_i \rangle.$$

Substituindo na equação acima, obtemos que

$$\begin{aligned} div_M(P_r grad f) &= L_r(f) + \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} P_r)(grad f)), e_i \rangle \\ &= L_r(f) + \sum_{i=1}^{n} \langle grad f, (\nabla_{e_i} P_r)(e_i) \rangle \\ &= L_r(f) + \langle div P_r, grad f \rangle. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.2,

$$\langle div P_r, grad f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \left\langle \overline{R}(N, P_{r-j}(grad f)) e_i, A^{j-1}(X) \right\rangle,$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}_c^{n+1}$ e N é um campo normal à M^n. Como $\overline{M}_c^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, pela Proposição 1.3.3,

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{R}(N, P_{r-j}(grad f)) e_i, A^{j-1}(X) \right\rangle &= c \left[\langle e_i, N \rangle \left\langle P_{r-j} grad f, A^{j-1}(X) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \left\langle e_i, P_{r-j}(grad f) \right\rangle \left\langle N, A^{j-1}(X) \right\rangle \right] = 0 \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \{1, ..., r\}$. Portanto,

$$\langle div P_r, grad f \rangle = 0$$

e

$$L_r(f) = div_M(P_r grad f).$$

□

Proposição 2.2.2. *Se M^n é uma variedade Riemanniana fechada, então*

$$\int_M L_r(f)dM = 0 \text{ e } \int_M fL_r(f)dM = -\int_M \langle P_r gradf, gradf\rangle.$$

Demonstração. Na Proposição 2.2.1 mostramos que quando $\overline{M}_c^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, $L_r(f)$ é a divergência de algum campo. Mas, pelo teorema da divergência, como M^n tem bordo vazio,

$$\int_M L_r(f)dM = \int_M div_M(P_r gradf) = 0.$$

Para a segunda igualdade note que, pela Proposição 1.2.3,

$$\begin{aligned} div(fP_r gradf) &= fdiv(P_r gradf) + \langle P_r gradf, gradf\rangle \\ &= fL_r(f) + \langle P_r gradf, gradf\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_M fL_r(f)dM = \int_M div(fP_r gradf)dM - \int_M \langle P_r gradf, gradf\rangle dM. \tag{2.3}$$

Novamente, pelo teorema da divergência, $\int_M div(fP_r gradf)dM = 0$. Portanto

$$\int_M fL_r(f)dM = -\int_M \langle P_r gradf, gradf\rangle.$$

□

Definição 2.2.2. *Sejam $x: M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa em uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional constante c. Dizemos que o operador L_r é dito* ***elíptico*** *se o tensor de Newton P_r é positivo definido.*

A proposição a seguir, cuja demonstração encontra-se em [4], diz que o operador L_r é elíptico sob certas condições, que serão consideradas em alguns resultados ao longo deste trabalho.

Proposição 2.2.3. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, se $c = 0$, um hemisfério aberto da esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$, ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, se $c = -1$. Se H_{r+1} é positivo, então para todo $j \in \{1, ..., r\}$,*

(1) L_j é elíptico;

(2) a j-ésima curvatura H_j é positiva.

CAPÍTULO 3

O Problema Variacional

Neste capítulo vamos definir o que seria a variação de uma imersão e alguns conceitos básicos a respeito de variações. Vamos definir os funcionais r-área e volume, e calcular as fórmulas da primeira variação dos mesmos. Feito isso, poderemos descrever o problema variacional que será tratado neste trabalho, definir o funcional de Jacobi e uma noção de r-estabilidade para hipersuperfícies.

3.1 Variação de uma Imersão

Sejam M^n uma variedade fechada orientada e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ sua imersão em $\overline{M}^{n+1}$. Uma **variação** da imersão x é uma aplicação $X : (-\varepsilon;\varepsilon) \times M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, $\varepsilon > 0$, suave, tal que:

1. Para cada $t \in (-\varepsilon;\varepsilon)$, a aplicação $x_t : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ dada por $x_t(p) = X(t;p)$ é uma imersão; e

2. $x_0 = x$.

O **campo variacional** associado a X é definido por

$$\xi(p) = \frac{\partial X}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

Uma variação é dita **normal** se o campo variacional é da forma $\xi(p) = f(p)N(p)$ para alguma função $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ suave.

O funcional **r-área** associado à variação $X : (-\varepsilon;\varepsilon) \times M^n \longrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ é a aplicação $A_r : (-\varepsilon;\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A_r(t) = \int_M F_r(S_1, ..., S_r)dM_t, \tag{3.1}$$

onde $S_r = S_r(t)$, dM_t é a forma volume em M^n induzida pela imersão x_t e F_r é definido recursivamente por

$$F_r(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \\ S_1, & \text{se } r = 1 \\ S_r + \frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2}, & \text{se } 2 \leq r \leq n-1. \end{cases}$$

Observação 3.1.1. *Note que para $r = 0$, $A_0(t) = \int_M dM_t$ é o funcional área clássico.*

O **volume** $V(t)$ da variação X é dado por

$$V(t) = \int_{[0;t]\times M^n} X^* d\overline{M},$$

onde $d\overline{M}$ é a forma volume de $\overline{M}^{n+1}$ e $X^*d\overline{M}$ é o pull-back da forma volume de $\overline{M}^{n+1}$ para $(-\varepsilon;\varepsilon)\times M^n$. Dizemos que uma variação **preserva volume**, se $V(t) = V(0)$, para todo $t \in (-\varepsilon;\varepsilon)$.

3.2 A Primeira Variação do Volume e do Funcional r-Área

Proposição 3.2.1. *Seja $X : (-\varepsilon;\varepsilon)\times M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma variação da imersão x. Então a **primeira variação do volume** em $t = t_0$ é dada por*

$$V'(t_0) = \int_M f_{t_0} dM_{t_0},$$

onde $f_{t_0}(p) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t_0;p), N_{t_0}(p)\right\rangle$.

Demonstração. Seja $p \in M^n$ e $\{e_1^t,...,e_n^t\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança conexa V de p. Como $X^*d\overline{M}$ é uma forma volume em $(-\varepsilon;\varepsilon)\times M^n$, então existe uma função $b : (-\varepsilon;\varepsilon)\times M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X^*d\overline{M}(v_1,...,v_{n+1}) = b(t,p)dt\wedge dM_t(v_1,...,v_{n+1}),$$

$v_1,...,v_{n+1} \in T_p((-\varepsilon;\varepsilon)\times M)$. Em particular, para cada $t \in (-\varepsilon;\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} b(t;p) &= X^*d\overline{M}(\frac{\partial}{\partial t}, e_1^t,...,e_n^t) \\ &= d\overline{M}(\frac{\partial X}{\partial t}(t;p), dx_t(e_1^t),...,dx_t(e_n^t)) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t;p), N_t(p)\right\rangle. \end{aligned}$$

Logo, usando o teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} V'(t_0) &= \frac{d}{dt}\int_{[0;t_0]\times M} X^*d\overline{M} \\ &= \frac{d}{dt}\int_{[0;t_0]\times M} \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t;p), N_t(p)\right\rangle dt\wedge dM_t \\ &= \frac{d}{dt}\int_{[0;t_0]}\Big(\int_M \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t;p), N_t(p)\right\rangle dM_t\Big) dt \\ &= \int_M \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t_0;p), N_{t_0}(p)\right\rangle dM_{t_0}. \end{aligned}$$

$\square$

Da última proposição temos que uma variação preserva volume se, e somente se, $\int_M f_t dM_t = 0$. Dizemos que uma função suave $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tem **média zero** sobre M se $\int_M f dM = 0$.

O próximo resultado garante a existência de variações normais que preservam volume.

Lema 3.2.1. *Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Dada uma função suave $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ com média zero, existe uma variação normal de x que preserva volume cujo vetor variação é fN.*

Demonstração. Seja $\varphi : (-\varepsilon;\varepsilon) \times M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e defina a variação $X : (-\varepsilon;\varepsilon) \times M^n \to \overline{M}^{n+1}$ por

$$X(t;p) = exp_{x(p)}\varphi(t;p)N.$$

X é uma variação normal com $\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} N$. Queremos mostrar que φ pode ser escolhida de modo que X satisfaça as condições do lema.

Considere a função volume $V(t)$ de X. Note que $X = e \circ \psi$, onde $\psi : (-\varepsilon;\varepsilon) \times M^n \to \mathbb{R} \times M^n$ é dada por $\psi(t;p) = (\varphi(t;p);p)$ e $e(u;p) = exp_{x(p)}uN$, $u \in \mathbb{R}$. Fixando $E(u;p) = det(de_{(p;u)})$, temos que

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{[0;t]\times M} X^* d\overline{M} \\ &= \int_{[0;t]\times M} \psi^* e^* d\overline{M} \\ &= \int_{[0;t]\times M} E(\varphi(t;p);p)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(dM \wedge dt) \\ &= \int_M \left(\int_0^t E(\varphi(t;p);p))\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt\right) dM. \end{aligned}$$

Agora seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função com média zero sobre M^n e seja φ a solução do problema de valor inicial:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{f(p)}{E(\varphi(t;p);p)},\ \varphi(0;p) = 0.$$

Direto da expressão acima para $V(t)$, junto com o fato de f ter média zero sobre M^n, segue que $V(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon;\varepsilon)$. Como $E(\varphi(0;p);p) = 1$, X é uma variação normar de x que preserva volume e cujo vetor variação é fN. $\square$

Vamos agora encontrar uma expressão para a primeira variação da r-área, que faremos por indução. Precisaremos encontrar uma expressão para $A_0'(t)$, mas antes veremos alguns resultados. Sabemos que, de acordo com a Definição 3.1,

$$A_0(t) = \int_M dM_t,$$

onde dM_t é a forma volume em M induzida pela imersão x_t. Considerando $\{e_1,...,e_n\}$ uma base de $\mathfrak{X}(M)$ em uma vizinhança de um ponto $p \in M$, $\{du_1,...,du_n\}$ sua respectiva base dual e $g(t)$ a métrica de M induzida por x_t cuja matriz é $(g_{ij}(t)) = (\langle dx_t(e_i), dx_t(e_j)\rangle)$, temos que

$$dM_t = \sqrt{det(g_{ij}(t))}du_1 \wedge ... \wedge du_n.$$

Portanto $A_0(t) = \int \sqrt{det(g_{ij})} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$ e

$$A_0'(t) = \int \frac{d}{dt} \sqrt{det(g_{ij}(t))} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n.$$

As próximas proposições vão auxiliar no cálculo de $\frac{d}{dt}\sqrt{det(g_{ij}(t))}$ da expressão acima.

Proposição 3.2.2. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $X : (-\varepsilon;\varepsilon) \times M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma variação de x. Considere os campos*

- $\tilde{E}(X(t;p)) = dX_{(t;p)}(\frac{\partial}{\partial t}(t;p))$;
- $\bar{e}_i(t;p) = (0; e_i(p)) \in T_{(t;p)}(I \times M)$; *e*
- $\tilde{e}_i(X(t;p)) = dX_{(t;p)}(\bar{e}_i(t;p))$.

Então, fixado $t_0 \in (-\varepsilon;\varepsilon)$, temos que

$$\frac{dg_{kk}(t;p)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \tilde{E}(X(t_0;p)) \left\langle \tilde{e}_k(X(t_0;p)), \tilde{e}_k(X(t_0;p)) \right\rangle.$$

Demonstração. Primeiramente observe que $\tilde{e}_k(X(t;p)) = dx_t(p)e_k$. De fato, fixado $t \in (-\varepsilon;\varepsilon)$ e $p \in M^n$,

$$\tilde{e}_k(X(t;p)) = dX_{(t;p)}\bar{e}_k(t;p) = \frac{d}{ds}(X \circ \gamma(s))\Big|_{s=0}$$

para qualquer curva $\gamma : (-\delta;\delta) \longrightarrow I \times M$ diferenciável com $\gamma(0) = (t;p)$ e $\gamma'(0) = \bar{e}_k(t;p)$. Em particular, para $\gamma(s) = (t;\alpha(s))$, onde $\alpha : (-\delta;\delta) \longrightarrow M$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = e_k$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{e}_k(X(t;p)) = \frac{d}{ds}(X \circ \gamma(s))\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(X(t;\alpha(s)))\Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds}x_t(\alpha(s))\Big|_{s=0} \\ &= dx_t(\alpha(0))\alpha'(0) \\ &= dx_t(p)e_k. \end{aligned}$$

Consequentemente, $g_{kk}(t;p) = \left\langle \tilde{e}_k(X(t;p)), \tilde{e}_k(X(t;p)) \right\rangle$. Por fim, note que

$$\tilde{E}(X(t_0;p)) \left\langle \tilde{e}_k(X(t_0;p)), \tilde{e}_k(X(t_0;p)) \right\rangle = \frac{d}{ds}(\left\langle \tilde{e}_k(X(t_0;p)), \tilde{e}_k(X(t_0;p)) \right\rangle \circ \beta(s))\Big|_{s=0},$$

onde $\beta(s) : (-\delta;\delta) \longrightarrow \overline{M}$ é diferenciavel com $\beta(0) = X(t_0;p)$ e $\beta'(0) = \tilde{E}(X(t_0;p))$. Tome $\beta(s) = X(s+t;p)$. Como $\beta(0) = X(t;p)$ e $\beta'(0) = dX_{(t;p)}(\frac{\partial}{\partial t}(t;p)) = \tilde{E}(X(t;p))$. Segue que

$$\begin{aligned} \tilde{E}(X(t_0;p)) \left\langle \tilde{e}_k(X(t_0;p)), \tilde{e}_k(X(t_0;p)) \right\rangle &= \frac{d}{ds}(\left\langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \right\rangle \circ X(s+t_0;p))\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}(\left\langle \tilde{e}_k(X(s+t_0;p)), \tilde{e}_k(X(s+t_0;p)) \right\rangle)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} g_{kk}(s+t_0)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{dg_{kk}}{dt}\Big|_{t=t_0}, \end{aligned}$$

o que conclui nossa demonstração. $\square$

Proposição 3.2.3. *Sob as mesmas condições da Proposição 3.2.2, temos que* $\overline{\nabla}_{\tilde{E}}\tilde{e}_k = \overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{E}$.

Demonstração. Seja $f : (-\varepsilon;\varepsilon)\times M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Vamos calcular $\left[\overline{e}_k;\frac{\partial}{\partial t}\right](f)$. Dados $(t;p)\in(-\varepsilon;\varepsilon)\times M^n$, temos que $\overline{e}_k(t;p)\in T_{(t;p)}(\{t\}\times M)$. Identificando $T_{(t;p)}(\{t\}\times M)$ com T_pM, podemos escrever

$$\overline{e}_k(t;p) = \sum_{i=1}^{n} c_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(t;p).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left[\overline{e}_k;\frac{\partial}{\partial t}\right](f)(t;p) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial t}(f)\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(c_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial t}(f)\right)\right)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}(c_i(p))\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(c_i(p)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right)\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

visto que $\frac{\partial}{\partial t}(c_i(p)) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial t}(f)\right)$. Portanto $\left[\overline{e}_k;\frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$. Mas note que

$$\left[\tilde{E};\tilde{e}_k\right] = \left[dX\left(\frac{\partial}{\partial t}\right);dX(\overline{e}_k)\right] = dX\left(\left[\frac{\partial}{\partial t};\overline{e}_k\right]\right).$$

Portanto, $\left[\tilde{E};\tilde{e}_k\right] = 0$, e com isso, $\overline{\nabla}_{\tilde{E}}\tilde{e}_k = \overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{E}$. □

Proposição 3.2.4. *Seja* $A : (-\varepsilon;\varepsilon) \longrightarrow \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *uma aplicação diferenciável com* $A(t_0) = Id$ *para algum* $t_0 \in (-\varepsilon;\varepsilon)$. *Então*

$$\frac{d}{dt}(det(A(t)))\Big|_{t=t_0} = tr(A'(t_0)).$$

Demonstração. Considere $A(t) = (a_{ij}(t))$ e $A_k(t) = (a_{1k}(t);\ldots;a_{nk}(t))$.

Note que $A_k(t_0) = (a_{1k}(t_0) = 0;\ldots;a_{kk}(t_0) = 1;\ldots;a_{nk}(t_0) = 0)$. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(det(A(t)))\Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}det(A_1(t);\ldots;A_n(t))\Big|_{t=t_0}\\
&= \sum_{k=1}^{n} det(A_1(t_0);\ldots;A_k'(t_0);\ldots;A_n(t_0))\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{kk}'(t_0)\\
&= tr(A'(t_0)).
\end{aligned}$$

□

Finalmente vamos ao que queremos mostrar

Proposição 3.2.5. *Dado* $t_0 \in (-\varepsilon;\varepsilon)$, $\{e_1,...,e_n\}$ *um referencial geodésico em* M *induzido pela imersão* x_{t_0} *e* $(g_{ij}(t))$ *a matriz da métrica em* M *induzida por* x_t *com respeito a base* $\{e_1,...,e_n\}$. *Então*

$$\frac{d}{dt}\sqrt{det(g_{ij}(t))}\Big|_{t=t_0} = -nHf + div\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^T\right)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{det(g_{ij}(t))}\Big|_{t=t_0} &= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij}(t_0))}}\frac{d}{dt}det(g_{ij}(t))\Big|_{t=t_0}\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}det(g_{ij}(t))\Big|_{t=t_0}.\end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que $\{e_1;...;e_n\}$ é um referencial geodésico em M induzido pela imersão x_{t_0}. Portanto, $(g_{ij}(t_0)) = Id$ e $\sqrt{det(g_{ij}(t_0))} = 1$. Pelo resultado da Proposição 3.2.4,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{det(g_{ij}(t))}\Big|_{t=t_0} &= \frac{1}{2}tr(g'_{ij}(t_0))\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}g_{kk}(t)\Big|_{t=t_0} \quad \text{(Proposição 3.2.2)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tilde{E}\langle\tilde{e}_k,\tilde{e}_k\rangle\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}2\left\langle\overline{\nabla}_{\tilde{E}}\tilde{e}_k,\tilde{e}_k\right\rangle \quad \text{(Proposição 3.2.3)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\langle\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{E},\tilde{e}_k\right\rangle\\ &= \sum_{k=1}^{n}-\left\langle\tilde{E},\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k\right\rangle+\tilde{e}_k\langle\tilde{E},\tilde{e}_k\rangle\\ &= -\left\langle\tilde{E},\sum_{k=1}^{n}\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k\right\rangle+\sum_{k=1}^{n}\tilde{e}_k\langle\tilde{E},\tilde{e}_k\rangle.\end{aligned}$$

Note que podemos escrever:

i)

$$\tilde{E} = \frac{dX}{dt} = \left(\frac{dX}{dt}\right)^N + \left(\frac{dX}{dt}\right)^T,$$

onde os expoentes N e T indicam as componentes normal e tangente, respectivamente, à M de $\frac{dX}{dt}$. Logo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\tilde{e}_k\langle\tilde{E},\tilde{e}_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}\tilde{e}_k\left\langle\left(\frac{dX}{dt}\right)^N+\left(\frac{dX}{dt}\right)^T,\tilde{e}_k\right\rangle &= \sum_{k=1}^{n}\tilde{e}_k\left\langle\left(\frac{dX}{dt}\right)^T,\tilde{e}_k\right\rangle\\ &= div\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^T\right).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k\right)(X(t_0;p)) &= \left(\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k\right)^T(X(t_0;p))+\left(\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k\right)^N(X(t_0;p))\\ &= \left(\overline{\nabla}_{dx_{t_0}e_k}dx_{t_0}e_k\right)^T(x_{t_0}(p))+\left(\overline{\nabla}_{dx_{t_0}e_k}dx_{t_0}e_k\right)^N(x_{t_0}(p))\\ &= \left(\overline{\nabla}_{e_k}e_k\right)^T(p)+\left(\overline{\nabla}_{e_k}e_k\right)^N(p).\end{aligned}$$

Mas como $\{e_1;...;e_n\}$ é referencial geodésico em M,

$$\left(\overline{\nabla}_{e_k}e_k\right)^T(p)=\nabla_{e_k}e_k(p)=0,$$

e

$$\left(\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k\right)(X(t_0;p))=\left(\overline{\nabla}_{e_k}e_k\right)^N(p)=\left\langle\overline{\nabla}_{e_k}e_k,N\right\rangle N.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{det(g_{ij}(t))}\Big|_{t=t_0} &= -\left\langle\tilde{E},\sum_{k=1}^{n}\overline{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k\right\rangle+\sum_{k=1}^{n}\tilde{e}_k\langle\tilde{E},\tilde{e}_k\rangle\\ &= -\left\langle\frac{dX}{dt},\left\langle\sum_{k=1}^{n}\overline{\nabla}_{e_k}e_k,N\right\rangle N\right\rangle+div\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^T\right)\\ &= -\left\langle\frac{dX}{dt},N\right\rangle\left\langle\sum_{k=1}^{n}\overline{\nabla}_{e_k}e_k,N\right\rangle+div\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^T\right)\\ &= -nHf+div\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^T\right).\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos o resultado do Lema 1.1.1. □

Proposição 3.2.6. *Seja $x: M^n\to\overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $X:(-\varepsilon;\varepsilon)\times M^n\to\overline{M}^{n+1}$ uma variação de x. Então a primeira variação da área é dada por*

$$A_0'(t)=-n\int_M H_t f dM_t,$$

onde $f(t;p)=\left\langle\frac{dX}{dt}(t;p),N_t(p)\right\rangle$ e H_t é a curvatura média da imersão x_t.

Demonstração. Sabemos que $A_0'(t) = \int \frac{d}{dt}\sqrt{det(g_{ij}(t))}du_1 \wedge ... \wedge du_n$. Substituindo o resultado da Proposição 3.2.5 obtemos

$$\begin{aligned} A_0'(t) &= \int_M -nHf + div\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^T\right)dM_t \\ &= \int_M -nHfdM_t + \int_M div\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^T\right)dM_t. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes, como M é compacta sem bordo, $\int_M div\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^T\right)dM_t = 0$ e portanto

$$A_0'(t) = -n\int_M HfdM_t.$$

□

Dando sequência, vamos assumir a seguinte proposição.

Proposição 3.2.7. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana orientada com curvatura seccional constante c e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada. Se $X : (-\varepsilon;\varepsilon) \times \overline{M}_c^{n+1}$ é uma variação de x, então*

$$\frac{\partial S_{r+1}}{\partial t} = L_r(f) + [S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}]f + c(n-r)S_rf + D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T}S_{r+1},$$

onde $D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T}S_{r+1}$ indica a derivada da função S_{r+1} na direção de $\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T$.

A demonstração de tal proposição se encontra em [4]

Observação 3.2.1. $(n-r)S_r = tr(P_r) = b_rH_r$, onde $b_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$

Observação 3.2.2. $S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} = tr(A^2P_r) = nH_1\binom{n}{r+1}H_{r+1} - (r+2)\binom{n}{r+2}H_{r+2} = n\binom{n}{r+1}H_1H_{r+1} - b_{r+1}H_{r+2}$.

Segue das observações 3.2.1 e 3.2.2 que podemos reescrever o resultado da proposição anterior da seguinte maneira:

$$\frac{\partial S_{r+1}}{\partial t} = L_r(f) + tr(A^2P_r)f + c\,tr(P_r)f + D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T}S_{r+1}.$$

Lema 3.2.2. *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 3.2.7,*

$$\frac{\partial H_{r+1}}{\partial t} = \frac{r+1}{b_r}[L_r(f) + tr(A^2P_r)f + c\,tr(P_r)f] + \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_{r+1}\right\rangle.$$

Demonstração. Substituindo $S_{r+1} = \binom{n}{r+1} H_{r+1}$ no resultado da Proposição 3.2.7, obtemos

$$\binom{n}{r+1}\frac{\partial H_{r+1}}{\partial t} = [L_r(f) + [tr(A^2P_r)]f + c\, tr(P_r)f] + \binom{n}{r+1} D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T} H_{r+1}.$$

Note que

$$\frac{1}{\binom{n}{r+1}} = \frac{(r+1)}{(r+1)\binom{n}{r+1}} = \frac{r+1}{b_r},$$

e

$$D_{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T} H_{r+1} = \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_{r+1} \right\rangle.$$

Portanto,

$$\frac{\partial H_{r+1}}{\partial t} = \frac{r+1}{b_r}[L_r(f) + tr(A^2P_r)f + c\, tr(P_r)f] + \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_{r+1} \right\rangle.$$

□

Proposição 3.2.8. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana orientada com curvatura seccional constante c e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada. Se $X : (-\varepsilon;\varepsilon) \times M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma variação de x que preserva volume, então*

$$A_r'(t) = -b_r \int_M H_{r+1} f dM_t,$$

onde $b_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução em dois casos.

1º caso) r par:

Quando $r = 0$, já mostramos anteriormente que

$$A_0'(t) = -n \int_M H_1 f dM_t.$$

Suponha agora que para algum r par temos que

$$A_{r-2}'(t) = -b_{r-2} \int_M H_{r-1} f dM_t.$$

$$\begin{aligned} A_r(t) &= \int_M F_r\, dM_t \\ &= \int_M \left[S_r + \frac{c(n-r+1)}{r-1} F_{r-2}\right] dM_t \\ &= \int_M S_r\, dM_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1} \int_M F_{r-2}\, dM_t \\ &= \binom{n}{r} \int_M H_r\, dM_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1} A_{r-2}(t). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_r'(t) = \binom{n}{r}\left[\int_M \frac{dH_r}{dt}\,dM_t + \int_M H_r\,\frac{\partial}{\partial t}(dM_t)\right] + \frac{c(n-r+1)}{r-1}A_{r-2}'(t). \quad (3.2)$$

Vamos agora calcular cada uma das integrais da expressão 3.2.

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{dH_r}{dt}dM_t &= \frac{r}{b_{r-1}}\int_M [L_{r-1}(f) + ctr(P_{r-1})f + tr(A^2P_{r-1})f]dM_t \\
&\quad + \int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_r \right\rangle dM_t \\
&= \frac{r}{b_{r-1}}\int_M L_{r-1}(f)dM_t + \frac{r}{b_{r-1}}\int_M cb_{r-1}H_{r-1}fdM_t \\
&\quad + \frac{r}{b_{r-1}}\int_M \left(\frac{nb_{r-1}}{r}H_1H_r - b_rH_{r+1}\right)fdM_t \\
&= cr\int_M H_{r-1}fdM_t + n\int_M H_1H_rfdM_t \\
&\quad -(n-r)\int_M H_{r+1}fdM_t + \int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_r \right\rangle dM_t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_M H_r\,\frac{\partial}{\partial t}(dM_t) &= \int_M H_r\left[-nH_1f + div\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T\right]dM_t \\
&= -n\int_M H_rH_1fdM_t + \int_M H_rdiv\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T dM_t \\
&= -n\int_M H_rH_1fdM_t + \int_M div\left(H_r\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T\right)dM_t \\
&\quad - \int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_r \right\rangle dM_t \\
&= -n\int_M H_rH_1fdM_t - \int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_r \right\rangle dM_t.
\end{aligned}$$

Por hipótese de indução,

$$A_{r-2}'(t) = -b_{r-2}\int_M H_{r-1}fdM_t.$$

Segue que

$$\begin{aligned} A_r'(t) &= \binom{n}{r}\Bigg[cr\int_M H_{r-1}fdM_t + n\int_M H_1H_rfdM_t \\ &\quad -(n-r)\int_M H_{r+1}fdM_t + \int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_r \right\rangle dM_t \\ &\quad -n\int_M H_rH_1fdM_t - \int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_r \right\rangle dM_t\Bigg] \\ &\quad -\frac{c(n-r+1)}{r-1}b_{r-2}\int_M H_{r-1}fdM_t \end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{n-r+1}{r-1}b_{r-2} = \frac{n-r+1}{r-1}(r+1)\binom{n}{r-1} = b_{r-1} = r\binom{n}{r}$$

e fazendo as devidas simplificações, temos que

$$\begin{aligned} A_r'(t) &= -(n-r)\binom{n}{r}\int_M H_{r+1}fdM_t \\ &= -b_r\int_M H_{r+1}fdM_t. \end{aligned}$$

2º caso) r ímpar: Se $r = 1$, temos que

$$A_1(t) = \int_M F_1 dM_t = \int_M S_1 dM_t = n\int_M H_1 dM_t.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_1'(t) &= n\left[\int_M \frac{\partial H_1}{\partial t}dM_t + \int_M H_1\frac{\partial}{\partial t}(dM_t)\right] \\ &= n\int_M \left\{\frac{1}{b_0}\left[L_0(f) + c\,tr(P_0)f + tr(A^2P_0)f\right] + \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_1 \right\rangle\right\} dM_t \\ &\quad +n\int_M H_1\left[-nH_1f + div\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T\right]dM_t. \end{aligned}$$

Mas, $b_0 = n$, $P_0 = Id$, $tr(P_0) = n$, $tr(A^2P_0) = \frac{nb_0}{1}H_1H_1 - b_1H_2 = n^2H_1^2 - b_1H_2$ e pela proposição 1.2.3

$$div\left(H_1\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T\right) = H_1 div\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T + \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_1 \right\rangle.$$

Então,

$$\begin{aligned}
A_1'(t) &= n\Bigg[\int_M \Bigg\{\frac{1}{n}[div(grad f) + cnf + (n^2H_1^2 - b_1H_2)f] \\
&\quad + \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_1 \right\rangle \Bigg\} dM_t \\
&\quad + \int_M \Bigg\{ -nH_1^2 f + div\left(H_1\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T\right) - \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_1 \right\rangle \Bigg\} dM_t \Bigg] \\
&= \int_M div(grad f) dM_t + cn\int_M f dM_t + \int_M n^2H_1^2 f dM_t - \int_M b_1H_2 f dM_t \\
&\quad + n\int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_1 \right\rangle dM_t - \int_M n^2H_1^2 f dM_t \\
&\quad + n\int_M div\left(H_1\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T\right) dM_t - n\int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^T, gradH_1 \right\rangle dM_t \\
&= -b_1\int_M H_2 f dM_t.
\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos o fato de M ter bordo vazio e que X preserva volume, portanto, $\int_M f dM_t = 0$. O passo indutivo é análogo ao visto na demonstração do caso r par.

□

Observação 3.2.3. *Na demonstração da proposição anterior, usamos que a variação preserva volume apenas no caso em que o r é ímpar. Portanto, quando r é par, a mesma fórmula vale para variações que não preservam volume.*

Observação 3.2.4. *Fazendo algumas poucas modificações na demonstração da proposição anterior, encontra-se uma expressão mais geral para a pimeira variação da r-área que não exige que a variação preserve volume. A fórmula encontrada é*

$$A_r'(t) = -b_r\int_M H_{r+1} f dM_t + c_r\int_M f dM_t,$$

onde c_r é uma constante que depende apenas do valor de r, e é dada recursivamente por

$$c_r = \frac{c(n-r+1)}{r-1}c_{r-1},\ c_0 = 0 \text{ e } c_1 = cn.$$

3.3 Descrição do Problema Variacional

Vamos considerar agora o problema de minimizar o funcional

$$\begin{array}{rccl} A_r & : & (-\varepsilon;\varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & A_r(t) \end{array}$$

para toda variação de $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ que preserva volume.

Definição 3.3.1. *O* ***funcional de Jacobi*** *associado ao problema variacional é a aplicação* $J_r : (-\varepsilon;\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$J_r(t) = A_r(t) + b_r\lambda V(t)$$

onde λ *é uma constante a ser determinada pelo problema.*

Note que, por um lado, no caso de variações que preservam volume, os pontos críticos de J_r são os mesmos de A_r. De fato, se a variação preserva volume, $V'(t) = 0$ para todo t e

$$\begin{aligned} J_r'(t) &= A_r'(t) + b_r\lambda V_r'(t) \\ &= A_r'(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, como consequência das proposições 3.2.1 e 3.2.8 e da observação 3.2.4

$$\begin{aligned} J_r'(t) &= A_r'(t) + b_r\lambda V'(t) \\ &= -b_r\int_M H_{r+1}(t) f dM_t + c_r\int_M f dM_t + b_r\lambda\int_M f dM_t \\ &= -b_r\int_M H_{r+1}(t) f dM_t + b_r\left(\frac{c_r}{b_r} + \lambda\right)\int_M f dM_t \\ &= b_r\int_M \left[\left(\frac{c_r}{b_r} + \lambda\right) - H_{r+1}(t)\right] f dM_t. \end{aligned}$$

A constante λ será escolhida de maneira que os pontos críticos do funcional de Jacobi sejam as hipersuperfícies com $(r+1)$-ésima curvatura de órdem superior constante. Para tal, considere

$$\overline{H} = \frac{1}{A_0(0)}\int_M H_{r+1}(0) dM.$$

Note que quando a curvatura $H_{r+1}(0)$ é constante, então

$$\overline{H} = H_{r+1}(0)\frac{1}{A_0(0)}\int_M dM = H_{r+1}(0).$$

Logo, escolhendo λ de modo que $\frac{c_r}{b_r} + \lambda = \overline{H}$, temos que

$$\begin{aligned} J_r'(t) &= b_r\int_M [\overline{H} - H_{r+1}(t)] f dM_t \\ &= b_r\int_M [H_{r+1}(0) - H_{r+1}(t)] f dM_t. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Proposição 3.3.1. *Seja* $\overline{M}_c^{n+1}$ *uma variedade Riemanniana orientavel com curvatura seccional constante* c *e* $x : M^n \longrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ *uma hipersuperficie fechada. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) x tem curvatura H_{r+1} constante;

(b) Para toda variação de x que preserva volume, temos que $A_r'(0) = 0$;

(c) Para toda variação de x, temos que $J_r'(0) = 0$.

Demonstração. Vamos mostrar as equivalências na seguinte ordem:

$$(a) \Rightarrow (c),\ (c) \Rightarrow (b) \text{ e } (b) \Rightarrow (a).$$

$(a) \Rightarrow (c)$: Lembre que, dada uma variação de x, a constante λ do funcional de Jacobi associado à variação é escolhido de maneira que se H_{r+1} é constante, então $J_r'(0) = 0$. Portanto, para toda variação de x, temos que $J_r'(0) = 0$.

$(c) \Rightarrow (b)$: Se, para toda variação de x, $J_r'(0) = 0$, em particular, para toda variação de x que preserva volume, $J_r'(0) = 0$. Mas se a variação preserva volume, vimos anteriormente que os pontos críticos de J_r são os mesmos de A_r. Portanto $A_r'(0) = 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Suponha que existe $p \in M$ tal que

$$H_{r+1}(p) \neq \overline{H} \Longrightarrow \left(H_{r+1} - \overline{H}\right)(p) \neq 0.$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\left(H_{r+1} - \overline{H}\right)(p) \geq 0$. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} M^+ &= \left\{q \in M | \left(H_{r+1} - \overline{H}\right)(q) \geq 0\right\} \text{ e} \\ M^- &= \left\{q \in M | \left(H_{r+1} - \overline{H}\right)(q) \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

Como a função $H_{r+1} - \overline{H}$ é contínua e M^+ é não vazio (pois $p \in M^+$), então M^+ é aberto. Seja U um aberto de M com $\overline{U} \subset M^+$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com suporte compacto em M^+ tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi(q) \leq 1, & \forall q \in M \\ \varphi(q) = 1, & \forall q \in \overline{U}. \end{cases}$$

Note que

$$L = \int_M \varphi(H_{r+1} - \overline{H})dM > 0.$$

Agora vamos definir uma função $\zeta : M \to \mathbb{R}$ para M^-com as mesmas propriedades de φ. Mas preimeiro precisamos verificar que M^- é não vazio. Primeiro observe que

$$\int_M (H_{r+1} - \overline{H})dM = 0$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_M (H_{r+1} - \overline{H})dM &= \int_M H_{r+1}dM - \overline{H}\underbrace{\int_M dM}_{A_0} \\ &= \int_M H_{r+1}dM - \frac{1}{A_0}A_0\int_M H_{r+1}dM \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, se $(H_{r+1} - \overline{H})(q) \geq 0$ para todo $q \in M$, como existe p tal que $(H_{r+1} - \overline{H})(p) > 0$,

$$\int_M (H_{r+1} - \overline{H})dM > 0,$$

que é absurdo devido a observação anterior. Portanto existe $q \in M$ tal que $(H_{r+1} - \overline{H})(q) < 0$ e M^- é não vazio. Com isso podemos contruir $\zeta : M \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em M^- tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta(q) \leq 1, & \forall q \in M \\ \zeta(q) = 1, & \forall q \in \overline{V} \end{cases}$$

onde V é uma aberto de M com $\overline{V} \in M^-$. Daí,

$$S = \int_M \zeta(H_{r+1} - \overline{H})dM < 0.$$

Tomando $\psi = -\frac{L}{S}\zeta$, considere $f = (\varphi + \psi)(H_{r+1} - \overline{H})$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_M f dM &= \int_M (\varphi + \psi)(H_{r+1} - \overline{H})dM \\ &= \int_M \varphi(H_{r+1} - \overline{H} dM + \int_M \psi(H_{r+1} - \overline{H})dM \\ &= L - \frac{L}{S} \underbrace{\int_M \zeta(H_{r+1} - \overline{H})dM}_{S} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 3.2.1, existe variação normal de x que preserva volume e cujo vetor variação é $(\varphi + \psi)(H_{r+1} - \overline{H})N = fN$. Para essa variação,

$$\begin{aligned} A_r'(0) &= -b_r \int_M H_{r+1} f dM \\ &= -b_r \int_M H_{r+1} f dM + b_r \overline{H} \int_M f dM \\ &= -b_r \int_M f(H_{r+1} - \overline{H})dM \\ &= -b_r \int_M (\varphi + \psi)(H_{r+1} - \overline{H})^2 < 0. \end{aligned}$$

Concluímos então que se H_{r+1} não é constante, existe uma variação de x que preserva volume tal que $A_r'(0) \neq 0$. Portanto, se $A_r'(0) = 0$ para toda variação de x que preserva volume, então H_{r+1} e constante igual a $\overline{H}$.

□

Para hipersuperfícies com $(r+1)$-ésima curvatura constante, a proposição anterior nos motiva a estabelecer a seguinte noção de estabilidade:

Definição 3.3.2. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana orientável com curvatura seccional constante c e $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com H_{r+1} constante. Dizemos que $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é **r-estável** se $A_r''(0) \geq 0$ para toda variação $X : M^n \times (-\varepsilon;\varepsilon) \longrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ de x que preserva volume.*

Considere o conjunto

$$\mathscr{G} = \left\{ f \in C^\infty | \int_M f dM = 0 \right\}.$$

Proposição 3.3.2. *$x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é r-estável se, e somente se, para todo $f \in \mathscr{G}$, temos que $J_r''(0)(f) \geq 0$.*

Demonstração.
$(\Rightarrow)$: Suponha que $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é r-estável e seja $f \in \mathscr{G}$.

$$\int_M f dM = 0.$$

Então existe uma variação $X : M^n \times (-\varepsilon;\varepsilon) \longrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ de x que preserva volume, cujo vetor variação é dado por

$$\frac{\partial X}{\partial t} = fN.$$

Logo $V''(0) = 0$ e portanto,

$$J_r''(0) = A_r''(0) + \lambda V_r''(0) = A_r''(0) \geq 0.$$

$(\Leftarrow)$: Seja $X : M^n \times (-\varepsilon;\varepsilon) \longrightarrow \overline{M}_c^{n+1}$ uma variação de x que preserva volume e $f : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial X}{\partial t}\Big|_{t=0} = fN + \left(\frac{\partial X}{\partial t}\Big|_{t=0} \right)^T.$$

Como X preserva volume,

$$V'(t) = \int_M f dM_t = 0 \; \forall t \in (-\varepsilon;\varepsilon) \Rightarrow f \in \mathscr{G}.$$

Então, por hipótese, $J_r''(0) \geq 0$. Portanto,

$$J_r''(0) = A_r''(0) + \lambda V''(0) = A_r''(0) \geq 0$$

e x é r-estável. □

Por fim, a fórmula da segunda variação do funcional de Jacobi é fornecida no seguinte resultado.

Proposição 3.3.3. *Se $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ tem H_{r+1} constante, então*

$$J_r''(0)(f) = -(r+1) \int_M \{ L_r f + c\, tr(P_r) f + tr(A^2 P_r) f \} f dM.$$

Demonstração.

Vimos em 3.3 que

$$J_r'(t) = b_r \int_M [\overline{H} - H_{r+1}] f dM_t$$

Logo

$$\begin{aligned}
J_r''(0) &= b_r \frac{d}{dt} \int_M \left[\overline{H} - H_{r+1}\right] f dM_t \bigg|_{t=0} \\
&= -b_r \int_M \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(H_{r+1}) \bigg|_{t=0} \right\} f dM + b_r \int_M \left[\overline{H} - H_{r+1}(0)\right] \frac{\partial}{\partial t}(f dM_t) \bigg|_{t=0} \\
&= -b_r \int_M \frac{r+1}{b_r} \{L_r f + c\, tr(P_r) f + tr(A^2 P_r) f\} f dM \\
&\quad -b_r \int_M \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^t, grad H_{r+1} \right\rangle f dM \\
&= -(r+1) \int_M \{L_r f + c\, tr(P_r) f + tr(A^2 P_r) f\} f dM.
\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 4

Uma Caracterização de Hipersuperfícies r-Estáveis

Neste capítulo vamos demonstrar o resultado principal deste trabalho, que verifica que as únicas hipersuperfícies r-estáveis imersas em variedades Riemannianas com curvatura seccional constante são as esferas. Primeiramente vamos ver a esfera como um primeiro exemplo de hipersuperfície com essas características. Em seguida vamos verificar que, de fato, as esferas são o único exemplo.

4.1 Exemplo de Hipersuperfície r-Estável

Proposição 4.1.1. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e orientável com curvatura seccional constante c. Então as esferas geodésicas do $\overline{M}_c^{n+1}$ são r-estáveis.*

Demonstração.

Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma esfera geodésica de $\overline{M}_c^{n+1}$. Sabe-se que as esferas geodésicas de $\overline{M}_c^{n+1}$ são hipersuperfícies compactas, totalmente umbílicas. Assim, suas curvaturas principais são iguais a uma certa constante k. Sem perda de generalidade, podemos supor que $k > 0$. Daí obtemos que $A = kI$ e

$$S_j = \binom{n}{j} k^j.$$

Como $\overline{M}_c^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, $L_r(f) = div_M(P_r\, grad f)$.

Note que $P_r(A) = \binom{n-1}{r} k^r I$. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{n}{r-i} &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{n}{i} \\
&= (-1)^r + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \binom{n}{i} \\
&= (-1)^r + \sum_{i=1}^{r} \left\{ (-1)^{r-i} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] \right\} \\
&= (-1)^r + \sum_{i=1}^{r} \left[(-1)^{r-i} \binom{n-1}{i-1} \right] + \sum_{i=1}^{r} \left[(-1)^{r-i} \binom{n-1}{i} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{n}{r-i} &= (-1)^r+\sum_{i=1}^{r}\left[(-1)^{r-i}\binom{n-1}{i-1}\right]+\sum_{i=1}^{r}\left[(-1)^{r-i}\binom{n-1}{i}\right]\\
&= (-1)^r+(-1)^{r-1}+\sum_{i=2}^{r}\left[(-1)^{r-i}\binom{n-1}{i-1}\right]\\
&\quad +\sum_{i=1}^{r-1}\left[(-1)^{r-i}\binom{n-1}{i}\right]+\binom{n-1}{r}\\
&= \sum_{j=1}^{r-1}\left[(-1)^{r-(j+1)}\binom{n-1}{j}\right]+\sum_{j=1}^{r-1}\left[(-1)^{r-j}\binom{n-1}{j}\right]+\binom{n-1}{r}\\
&= \binom{n-1}{r}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_r &= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i S_{r-i}A^i\\
&= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{n}{r-i}k^{r-i}k^iI\\
&= \left[\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{n}{r-i}\right]k^rI\\
&= \binom{n-1}{r}k^rI.
\end{aligned}$$

Segue que

$$L_r(f)=div_M\left(\binom{n-1}{r}k^r grad\ f\right)=\binom{n-1}{r}k^r\Delta(f).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
J_r''(0) &= -(r+1)\int_M\{L_r(f)+[c\,tr(P_r)+tr(A^2P_r)]f\}fdM\\
&= -(r+1)\int_M\left\{\binom{n-1}{r}k^r\Delta f+\left[cn\binom{n-1}{r}k^r+n\binom{n-1}{r}k^{r+2}\right]f\right\}fdM\\
&= (r+1)\binom{n-1}{r}k^r\int_M\left\{-f\Delta f-n(c-k^2)f^2\right\}dM.
\end{aligned}$$

Agora, levando em consideração que M^n é isométrica a uma esfera n-dimensional Euclidiana com curvatura seccional constante $(c+k^2)$, o primeiro autovalor η_1 do Laplaciano de M é

$$\eta_1:=inf\left\{\frac{-\int_M f\Delta f dM}{\int_M f^2dM};f\in C^\infty(M),f\neq 0,\int_M fdM=0\right\}=n(c+k^2).$$

Mais informações sobre o cálculo de η_1 poderm ser encontradas em [5]. Logo,

$$J_r''(0) \geq (r+1)\binom{n-1}{r}k^r \int_M \{\eta_1 - n(c+k^2)\}f^2 dM = 0$$

e, portanto, $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é r-estável. □

4.2 As Formas Espaciais Riemannianas e as Funções Altura

No que segue, lembremos que o espaço $(n+2)$-dimensional de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$ é o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+2}$ munido da métrica

$$\langle , \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 ... + dx_{n+1}^2,$$

onde $(x_0, ..., x_{n+1})$ são as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^{n+2}$. O espaço hiperbólico

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = -1, p_0 \geq 1\},$$

é uma hipersuperfície de $\mathbb{L}^{n+2}$ cuja métrica induzida pela inclusão $i : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{L}^{n+2}$ é uma métrica Riemanniana. Com essa métrica, $\mathbb{H}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a -1. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ são variedades Riemannianas com curvatura seccional constante igual a zero e 1, respectivamente. O próximo resultado verifica que toda variedade Riemanniana, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante é isométrica a uma dessas três variedades. Tal resultado encontra-se demonstrado em [7].

Proposição 4.2.1. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante c. Então $\overline{M}_c^{n+1}$ é isométrica a:*

a) $\mathbb{H}^{n+1}$, se $c = -1$,

b) $\mathbb{R}^{n+1}$, se $c = 0$,

c) $\mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$.

As variedades completas com curvatura seccional constante são chamadas **formas espaciais Riemannianas**. Agora, para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, seja U um vetor em $\mathbb{R}^{n+1}$ fixado, para hipersuperfícies em $\mathbb{S}^{n+1}$, seja U um vetor em $\mathbb{R}^{n+2}$ fixado, e para hipersuperfícies em $\mathbb{H}^{n+1}$, seja U um vetor em $\mathbb{L}^{n+2}$ fixado. Definimos as funções

$$\begin{array}{cccl} f_U & : & M^n & \to & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & f_U(p) = \langle N(p), U \rangle_p \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccl} g_U & : & M^n & \to & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & g_U(p) = \langle x(p), U \rangle_p . \end{array}$$

Estas são as **funções altura** na direção do vetor U associado a hipersuperfície.

O próximo lema será usado na demonstração do resultado principal e encontra-se demonstrado em [4].

Lema 4.2.1. *Se f_U e g_U são as funções alturas da hipersuperfície $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ definidas acima, então*

$$\begin{aligned} L_r(f_U) &= -\left(n\frac{b_r}{r+1}HH_{r+1} - b_{r+1}H_{r+2}\right)f_U + cb_rH_{r+1}g_U - \frac{b_r}{r+1}\langle gradH_{r+1}, U\rangle, \\ L_r(g_U) &= b_rH_{r+1}f_U - cb_rH_rg_U, \end{aligned}$$

onde $b_r = (r+1)\binom{n}{r+1}$

4.3 Caracterização de Hipersuperfícies r-Estáveis

Agora podemos estabelecer o principal resultado deste trabalho, que fornece uma caracterização de superfícies r-estáveis.

Teorema 4.3.1. *Seja $\overline{M}_c^{n+1}$ um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$, ou $\mathbb{H}^{n+1}$, se $c = -1$. Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com $H^{r+1} > 0$ constante. A hipersuperfície $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é r-estável se, e somente se, M^n é uma esfera e x é sua inclusão como uma esfera geodésica.*

Demonstração.

($\Leftarrow$)Se $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é uma esfera geodésica de $\overline{M}_c^{n+1}$, já verificamos na Proposição 4.1.1 que x é r-estável. Resta apenas mostrar a recíproca.

($\Rightarrow$)Seja $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície como nas hipóteses. Como $H_{r+1} > 0$, o operador L_j é elíptico e $H_j > 0$, para todo $j \in \{1, ..., r\}$.

1º caso: Suponha que $\overline{M}_c^{n+1}$ é um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Seja $N(p) = (N_1(p), ..., N_{n+2})$ um campo normal a M^n e

$$\overline{N} = \int_M NdM = \left(\int_M N_1 dM, ..., \int_M N_{n+2} dM\right).$$

Afirmamos que $\overline{N} \neq 0$. De fato, suponha que $\overline{N} = 0$. Para cada $U \in \mathbb{R}^{n+2}$

$$0 = \langle \overline{N}, U\rangle = \left\langle \int_M NdM, U\right\rangle = \int_M \langle N, U\rangle\, dM.$$

Fixe $\{U_0, ..., U_{n+1}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+2}$ e para cada $k \in \{0, ..., n+1\}$, considere as funções altura na direção de U_k associadas a hipersuperfície, dadas por:

$$\begin{aligned} f_k \ : \ M^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto f_k(p) = \langle N(p), U_k\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_k \ : \ M^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto g_k(p) = \langle x(p), U_k\rangle. \end{aligned}$$

Como $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é r-estável e $\int_M f_k dM = 0$, segue que

$$J_r''(0)(f_k) \geq 0$$

para cada $k \in \{0,...,n+1\}$. Daí,

$$\begin{aligned}
0 &\leq -(r+1)\int_M \{L_r(f_k) + [tr(P_r) + tr(A^2 P_r)]f_k\} f_k dM \\
&= -(r+1)\int_M \Big\{ -\left(n\frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2} \right) f_k \\
&\qquad + b_r H_{r+1} g_k - \frac{b_r}{r+1} \langle gradH_{r+1}, U_k \rangle \\
&\qquad + \left[b_r H_r + n\frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2} \right] f_k \Big\} f_k dM \\
&= -(r+1) b_r \int_M \left[H_{r+1} g_k f_k + H_r f_k^2 \right] dM
\end{aligned}$$

para cada $k \in \{0,...,n+1\}$. Somando de $k = 0$ até $n+1$ temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{k=0}^{n+1} -(r+1) b_r \int_M \left[H_{r+1} g_k f_k + H_r f_k^2 \right] dM \\
&= -(r+1) b_r \int_M \left[H_{r+1} \sum_{k=0}^{n+1} g_k f_k + H_r \sum_{k=0}^{n+1} f_k^2 \right] dM.
\end{aligned}$$

Note que, usando o produto interno usual de $\mathbb{R}^{n+2}$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n+1} g_k f_k = \sum_{k=0}^{n+1} \langle x, U_k \rangle \langle N, U_k \rangle = \langle x, N \rangle = 0,$$

pois $N \in T_x \mathbb{S}^{n+1}$, e

$$\sum_{k=0}^{n+1} f_k^2 = \sum_{k=0}^{n+1} \langle N, U_k \rangle^2 = \|N\|^2 = 1.$$

Logo, lembrando que $H_r > 0$,

$$0 \leq -(r+1) b_r \int_M H_r dM < 0$$

que é absurdo. Portanto, $\overline{N} \neq 0$. Então, podemos considerar $\{U_0,...,U_{n+1}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+2}$ com

$$U_0 = \frac{\overline{N}}{\|\overline{N}\|}.$$

Definindo f_k e g_k como antes, temos que

$$\int_M f_k dM = 0$$

para cada $k \in \{1,...,n+1\}$. De fato, se $k \in \{1,...,n+1\}$,

$$0 = \langle \overline{N}, U_k \rangle = \left\langle \int_M N dM, U_k \right\rangle = \int_M \langle N, U_k \rangle \, dM = \int_M f_k dM.$$

Portanto, como x é r-estável,é $J_r''(0)(f_k) \geq 0$ e

$$-(r+1)b_r \int_M [H_{r+1} g_k f_k + H_r f_k^2] dM \geq 0.$$

Somando, agora de 1 ate $n+1$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^{n+1} -(r+1)b_r \int_M [H_{r+1} g_k f_k + H_r f_k^2] dM \\ &= -(r+1)b_r \int_M \left[H_{r+1} \sum_{k=1}^{n+1} g_k f_k + H_r \sum_{k=1}^{n+1} f_k^2 \right] dM \\ &= -(r+1)b_r \int_M \left[H_{r+1}(-g_0 f_0) + H_r(1 - f_0^2) \right] dM. \end{aligned}$$

Note agora que para qualquer referencial ortonormal de $\mathbb{R}^{n+2}$ $\{x = e_0, e_1 ..., e_n, e_{n+1} = N\}$ adaptado a hipersuperfície $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$,

$$1 - f_0^2 \geq g_0^2$$

pois

$$1 = |U_0|^2 = \sum_{i=0}^{n+1} \langle U_0, e_i \rangle^2 \geq \langle U_0, x \rangle^2 + \langle U_0, N \rangle^2 = f_0^2 + g_0^2.$$

Logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq (r+1)b_r \int_M \left[H_{r+1}(g_0 f_0) - H_r(1 - f_0^2) \right] dM \\ &\leq (r+1) \int_M g_0 \left[b_r H_{r+1}(f_0) - b_r H_r g_0 \right] dM \\ &= (r+1)b_r \int_M g_0 L_r(g_0) dM \\ &= -(r+1)b_r \int_M \langle P_r grad g_0, grad g_0 \rangle \, dM. \end{aligned}$$

Como L_r é elíptico, temos que P_r é positivo definido e

$$\langle P_r grad g_0, grad g_0 \rangle \geq 0.$$

Portanto,

$$0 \leq -(r+1) \int_M \langle P_r grad g_0, grad g_0 \rangle \leq 0.$$

Consequentemente $grad g_0 = 0$, ou seja, $g_0 = \langle U_0, x \rangle$ é constante.

Concluimos então que $x(M^n)$ está contida na interseção entre um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+2}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$. Consequentemente, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}$.

2º caso: Suponha que $\overline{M}_c^{n+1}$ é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ e suponha também que $x(p) = (x_1(p), ..., x_{n+2}(p))$. Seja

$$\bar{x} = \int_M x dM = \left(\int_M x_1 dM, ..., \int_M x_{n+2} dM \right).$$

Como $\langle x, x \rangle = -1$, então

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0. \tag{4.1}$$

De fato, embora pareça óbvia, a desigualdade acima não é tão simples de ser verificada. Sua demonstração pode ser encontrada no Apêndice A deste trabalho. Fixe $U_0 = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ e complete a base ortonormal $\{U_0, ..., U_{n+1}\}$. Para cada $k \in \{0, ..., n+1\}$,

$$0 = \langle \bar{x}, U_k \rangle = \left\langle \int_M x dM, U_k \right\rangle = \int_M \langle x, U_k \rangle \, dM = \int_M g_k dM.$$

Como $x : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é r-estável, para $k \in \{1, ..., n+1\}$,

$$J_r''(0)(g_k) \geq 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
0 &\leq -(r+1) \int_M \{L_r(g_k) + [-tr(P_r) + tr(A^2 P_r)] g_k\} g_k dM \\
&= -(r+1) \int_M \left\{ b_r H_{r+1} f_k + b_r H_r g_k \right. \\
&\quad \left. + \left[-b_r H_r + n \frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2} \right] g_k \right\} g_k dM \\
&= -(r+1) \int_M \left[b_r H_{r+1} f_k g_k + \left(n \frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2} \right) g_k^2 \right] dM.
\end{aligned}$$

Segue que

$$0 \leq -(r+1) \int_M \left[b_r H_{r+1} \sum_{k=1}^{n+1} f_k g_k + \left(n \frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2} \right) \sum_{k=1}^{n+1} g_k^2 \right] dM.$$

Note que, usando o produto interno de $\mathbb{L}^{n+2}$, temos que

$$-f_0 g_0 + \sum_{k=1}^{n+1} f_k g_k = -\langle N, U_0 \rangle \langle x, U_0 \rangle + \sum_{k=1}^{n+1} \langle N, U_k \rangle \langle x, U_k \rangle = \langle N, x \rangle = 0$$

e

$$-g_0^2 + \sum_{k=1}^{n+1} g_k^2 = -\langle x, U_0 \rangle^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \langle x, U_k \rangle^2 = \langle x, x \rangle = -1.$$

Considere um referencial $\{x = e_0, e_1, ..., e_n, e_{n+1} = N\}$ adaptado à hipersuperfície x. Tal referencial é ortonormal, pois $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ é referencial ortonormal em M^n, $\langle x, x\rangle = -1$ e $\langle x, e_i\rangle = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n+1\}$. Para qualquer referencial ortonormal desse tipo

$$-1 = \langle U_0, U_0\rangle = -\langle U_0, x\rangle^2 + \sum_{i=1}^{n} \langle U_0, e_i\rangle^2 + \langle U_0, N\rangle^2 \geq -g_0^2 + f_0^2,$$

e consequentemente, $1 - g_0^2 \leq -f_0^2$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
0 &\leq (r+1)\int_M \left[-b_r H_{r+1} f_0 g_0 + \left(n\frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2}\right)(1 - g_0^2)\right] dM \\
&\leq (r+1)\int_M \left[-b_r H_{r+1} f_0 g_0 - \left(n\frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2}\right) f_0^2\right] dM \\
&= (r+1)\int_M \left[-b_r H_{r+1} g_0 - \left(n\frac{b_r}{r+1} H H_{r+1} - b_{r+1} H_{r+2}\right) f_0 \right. \\
&\quad \left. - \frac{b_r}{r+1} \underbrace{\langle grad H_{r+1}, U_0\rangle}_{0}\right] f_0 dM \\
&= (r+1)\int_M f_0 L_r(f_0) dM
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2.2, temos que

$$\int_M f_0 L_r(f_0) dM = -\int_M \langle P_r grad f_0, grad f_0\rangle dM.$$

Logo,

$$0 \leq (r+1)\int_M f_0 L_r(f_0) dM = -(r+1)\int_M \langle P_r grad f_0, grad f_0\rangle dM.$$

Como L_r é elíptico, P_r é positivo definido, ou seja,

$$\langle P_r grad f_0, grad f_0\rangle \geq 0.$$

Segue que

$$0 \leq -\int_M \langle P_r grad f_0, grad f_0\rangle dM \leq 0.$$

Portanto, como P_r é positivo definido, $grad f_0 = 0$ e $1 - g_0^2 = -f_0^2$. Isso implica que $g_0(p) = \langle x(p), U_0\rangle$ é constante. Logo, $x(M^n)$ está contido na interseção de um hiperplano Euclidiano de $\mathbb{L}^{n+2}$ com $\mathbb{H}^{n+1}$, e portanto, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$, concluindo assim a nossa demonstração.

$\square$

APÊNDICE A

Demonstração Da Desigualdade 4.1

A.1 Desigualdade 4.1

Com o intuito de verificar a desigualdade 4.1, vamos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição A.1.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana e $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma imersão de M^n no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$. Considere $x(p) = (x_0(p), \ldots, x_{n+1}(p))$. Definindo $\bar{x} \in \mathbb{L}^{n+2}$ por*

$$\bar{x} = \int_M x dM = \left(\int_M x_0 dM, \ldots, \int_M x_{n+1} dM \right),$$

temos que $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle < 0$.

Mas antes precisamos de alguns lemas auxiliares.

Lema A.1.1. *Sejam $\varphi, \psi : M^n \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então*

$$\left(\int_M |\varphi\psi| \right)^2 \leq \int_M \varphi^2 \cdot \int_M \psi^2.$$

Demonstração.

O resultado é óbvio se $\int_M \varphi^2 = 0$ ou $\int_M \psi^2 = 0$. Se $\int_M \varphi^2 > 0$ e $\int_M \psi^2 > 0$, defina

$$a = \left(\frac{\int_M \varphi^2}{\int_M \psi^2} \right)^{\frac{1}{4}} \text{ e } b = \left(\frac{\int_M \psi^2}{\int_M \varphi^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Como $a \cdot b = 1$,

$$|\varphi\psi| = |a\psi \cdot b\varphi| \leq \frac{a^2\psi^2 + b^2\varphi^2}{2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left(\int_M |\varphi\psi| \right)^2 &= \left(\int_M \frac{a^2\psi^2 + b^2\varphi^2}{2} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \left(a^2 \int_M \psi^2 + b^2 \int_M \varphi^2 \right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[a^4 \left(\int_M \psi^2 \right)^2 + b^4 \left(\int_M \varphi^2 \right)^2 + 2 \int_M \varphi^2 \int_M \psi^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\int_M \varphi^2 \int_M \psi^2 + \int_M \varphi^2 \int_M \psi^2 + 2 \int_M \varphi^2 \int_M \psi^2 \right] \\
&= \int_M \varphi^2 \int_M \psi^2.
\end{aligned}$$

□

Lema A.1.2. *Sejam $f_1,\dots,f_n : M^n \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então*

$$\left(\int_M \sqrt{f_1^2+\ldots+f_n^2}\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\int_M |f_i|\right)^2.$$

Demonstração.
Faremos a demonstração por indução em n. Para o caso $n=2$, note que

$$\begin{aligned}\left(\int_M \sqrt{f_1^2+f_2^2}\right)^2 - \left(\int_M |f_1|\right)^2 &= \left[\int_M \sqrt{f_1^2+f_2^2} - \int_M |f_1|\right]\left[\int_M \sqrt{f_1^2+f_2^2} + \int_M |f_1|\right] \\ &= \left[\int_M \left(\sqrt{f_1^2+f_2^2} - |f_1|\right)\right]\left[\int_M \left(\sqrt{f_1^2+f_2^2} + |f_1|\right)\right].\end{aligned}$$

Fazendo $\varphi = \sqrt{\sqrt{f_1^2+f_2^2} - |f_1|}$ e $\psi = \sqrt{\sqrt{f_1^2+f_2^2} + |f_1|}$ no lema anterior, temos que

$$\begin{aligned}\left(\int_M \sqrt{f_1^2+f_2^2}\right)^2 - \left(\int_M |f_1|\right)^2 &= \int_M \varphi^2 \cdot \int_M \psi^2 \\ &\geq \left(\int_M |\varphi\psi|\right)^2 \\ &= \left(\int_M \sqrt{\left(\sqrt{f_1^2+f_2^2} - |f_1|\right)\left(\sqrt{f_1^2+f_2^2} + |f_1|\right)}\right)^2 \\ &= \left(\int_M |f_2|\right)^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\int_M \sqrt{f_1^2+f_2^2}\right)^2 \geq \left(\int_M |f_1|\right)^2 + \left(\int_M |f_2|\right)^2.$$

Agora considere $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, e suponha que a desigualdade é válida para todo $2 \leq n < k$. Vamos mostrar que a desigualdade também vale para $n = k$. Chamando $f_1^2+\ldots+f_{k-1}^2$ de g^2, obtemos

$$\left(\int_M \sqrt{f_1^2+\ldots+f_k^2}\right)^2 = \left(\int_M \sqrt{g^2+f_k^2}\right)^2.$$

Aplicando o caso $n=2$,

$$\left(\int_M \sqrt{g^2+f_k^2}\right)^2 \geq \left(\int_M |g|\right)^2 + \left(\int_M |f_k|\right)^2. \tag{A.1}$$

Mas pela hipótese de indução,

$$\left(\int_M |g|\right)^2 = \left(\int_M \sqrt{f_1^2+\ldots+f_{k-1}^2}\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{k-1}\left(\int_M |f_i|\right)^2.$$

Logo

$$\left(\int_M |g|\right)^2 + \left(\int_M |f_k|\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \left(\int_M |f_i|\right)^2.$$

Juntando esta última desigualdade com a desigualdade A.1, obtemos a desigualdade desejada.

□

Agora podemos partir para a demonstração da Proposição A.1.1.

Demonstração (Proposição A.1.1).

Como $x(p) \in \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, para cada $p \in M^n$, temos que $x_0(p) > 0$ e

$$\langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = -1.$$

Logo $x_0 = \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2}$. Aplicando o lema anterior, temos que

$$\begin{aligned} \left(\int_M x_0\right)^2 &= \left(\int_M \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2}\right)^2 \\ &\geq \left(\int_M 1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\int_M |x_i|\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle &= -\left(\int_M x_0\right)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\int_M x_i\right)^2 \\ &\leq -\left(\int_M x_0\right)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\int_M |x_i|\right)^2 \\ &\leq -\left(\int_M 1\right)^2 \\ &< 0. \end{aligned}$$

□

Referências

[1] Hilario Alencar, Manfredo do Carmo, and Harold Rosenberg. On the first eigenvalue of the linearized operator of the r-th mean curvature of a hypersurface. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 11:387–395, 1993.

[2] J.L. Barbosa and M. do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, 185:339–353, 1984.

[3] J.L. Barbosa, M. do Carmo, and J. Eschenburg. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in riemannian manifolds. *Math. Z.*, 197:123–138, 1988.

[4] J.L.M Barbosa and A.G. and Colares. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. *Ann. Global Anal. Geom.*, 15:277–297, 1997.

[5] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics Series*. Academic Press, Florida, 2nd edition edition, 1984.

[6] Cícero Pedro de Aquino. Uma caracterização de hipersuperfícies na esfera com curvatura escalar constante. Master's thesis, Universidade Federal do Ceará, 2003.

[7] M. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, 2008.

[8] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Aplications to Relativity*. Academic Press, 1983.

[9] R. Reilly. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms,. *J. Differential Geom.*, 8:465–477, 1973.

[10] M.A. Velásquez, A.F. de Sousa, and H.F. de Lima. On the stability of hypersurfaces in space forms. *J. Math. Anal. Appl.*, 2013. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.04.045.

[11] Henry C. Wente. Counterexample to a conjecture of h. hopf. *Pacific Journal of Mathematics*, 121(1):193–243, 1986.

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).